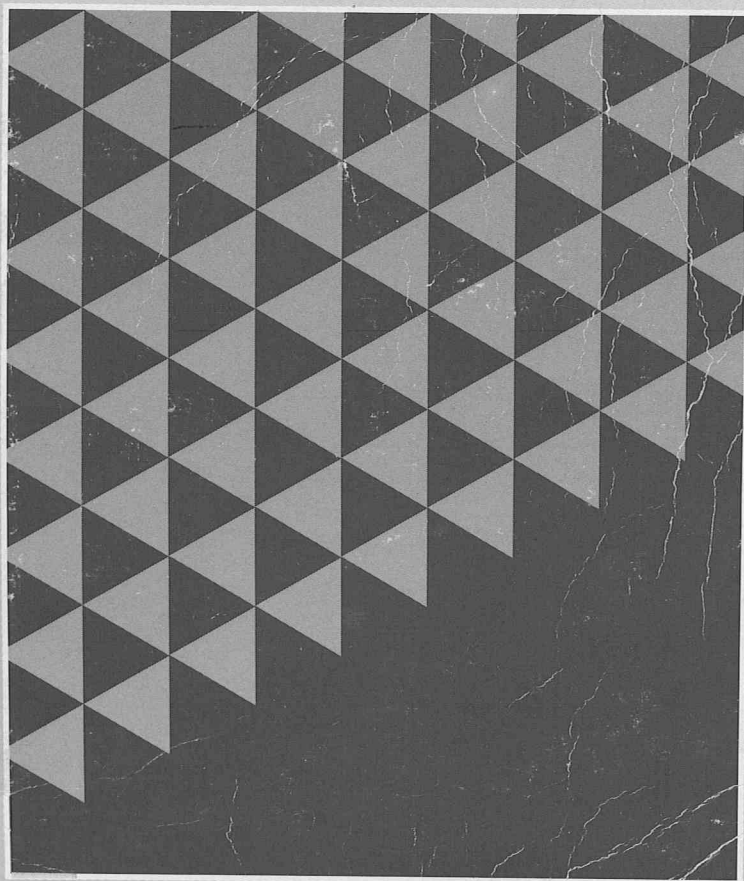


MARCO CODEGONE

# METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA



ZANICHELLI

---

# Indice

|                                                            |            |
|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Introduzione</b>                                        | <b>VII</b> |
| <b>1 Esponenziale complesso e serie complesse</b>          | <b>1</b>   |
| 1.1 Esponenziale complesso . . . . .                       | 1          |
| 1.2 Alcune proprietà del modulo e dell'argomento . . . . . | 4          |
| 1.3 Seni e coseni complessi . . . . .                      | 6          |
| 1.4 Seni e coseni iperbolici complessi . . . . .           | 7          |
| 1.5 Logaritmo di un numero complesso. . . . .              | 9          |
| 1.6 Esponenziali con base complessa . . . . .              | 10         |
| 1.7 Topologia del piano complesso . . . . .                | 10         |
| 1.7.1 Il punto all'infinito . . . . .                      | 11         |
| 1.8 Successioni a valori complessi . . . . .               | 12         |
| 1.9 Serie nel campo complesso . . . . .                    | 14         |
| <b>2 Serie di Fourier</b>                                  | <b>18</b>  |
| 2.1 Funzioni reali di variabile reale . . . . .            | 18         |
| 2.2 Funzioni complesse di variabile reale . . . . .        | 19         |
| 2.3 Funzioni periodiche . . . . .                          | 21         |
| 2.4 Armoniche elementari . . . . .                         | 22         |
| 2.4.1 Energia di un segnale periodico . . . . .            | 25         |
| 2.5 Polinomi di Fourier . . . . .                          | 26         |
| 2.5.1 Energia di un polinomio di Fourier . . . . .         | 30         |
| 2.6 Polinomi di Fourier di segnali periodici . . . . .     | 31         |
| 2.7 Convergenza nel senso della energia . . . . .          | 32         |
| 2.7.1 Coefficienti della serie di Fourier . . . . .        | 34         |
| 2.8 Esempi di serie di Fourier . . . . .                   | 36         |
| 2.9 Traslazioni e riscaldamento . . . . .                  | 40         |
| 2.10 Convergenza puntuale . . . . .                        | 43         |
| 2.11 Convergenza uniforme . . . . .                        | 46         |
| <b>3 Funzioni analitiche</b>                               | <b>48</b>  |
| 3.1 Funzioni complesse di variabile complessa . . . . .    | 48         |
| 3.2 Limite del rapporto incrementale . . . . .             | 49         |

|          |                                                                              |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3      | Analiticità . . . . .                                                        | 52         |
| 3.4      | Condizione di Cauchy-Riemann . . . . .                                       | 53         |
| 3.4.1    | Armonicità . . . . .                                                         | 54         |
| 3.5      | Integrali di linea in campo complesso . . . . .                              | 57         |
| 3.6      | Teorema e formule di Cauchy . . . . .                                        | 61         |
| 3.6.1    | Esistenza delle derivate di tutti gli ordini . . . . .                       | 63         |
| 3.7      | Serie di potenze . . . . .                                                   | 64         |
| 3.7.1    | Raggio di convergenza . . . . .                                              | 64         |
| 3.7.2    | Operazioni sulle serie di potenze . . . . .                                  | 67         |
| 3.8      | Sviluppi in serie di Taylor . . . . .                                        | 68         |
| 3.9      | Condizioni di analiticità . . . . .                                          | 72         |
| 3.10     | Sviluppi in serie di Laurent . . . . .                                       | 72         |
| 3.11     | Singularità . . . . .                                                        | 76         |
| 3.11.1   | Singularità isolate al finito . . . . .                                      | 76         |
| 3.11.2   | Esempi . . . . .                                                             | 81         |
| 3.11.3   | Singularità isolate all'infinito . . . . .                                   | 88         |
| 3.11.4   | Singularità non uniformi . . . . .                                           | 90         |
| 3.11.5   | Singularità non isolate . . . . .                                            | 92         |
| 3.12     | Risultati globali . . . . .                                                  | 93         |
| <b>4</b> | <b>Residui e applicazioni</b>                                                | <b>99</b>  |
| 4.1      | Residui . . . . .                                                            | 99         |
| 4.1.1    | Residui al finito . . . . .                                                  | 99         |
| 4.1.2    | Residui all'infinito . . . . .                                               | 101        |
| 4.2      | Teorema dei residui . . . . .                                                | 102        |
| 4.2.1    | Valor principale . . . . .                                                   | 103        |
| 4.3      | Calcolo pratico dei residui nei poli . . . . .                               | 105        |
| 4.3.1    | Calcolo pratico dei residui nei poli del primo ordine . . . . .              | 105        |
| 4.3.2    | Calcolo pratico dei residui nei poli multipli . . . . .                      | 109        |
| 4.4      | Calcolo di integrali di linea con il metodo dei residui . . . . .            | 112        |
| 4.5      | Integrali impropri di funzioni razionali con il metodo dei residui . . . . . | 113        |
| 4.6      | Lemma di Jordan . . . . .                                                    | 115        |
| 4.7      | Scomposizione in fratti semplici . . . . .                                   | 120        |
| 4.7.1    | Poli semplici . . . . .                                                      | 121        |
| 4.7.2    | Poli multipli . . . . .                                                      | 124        |
| 4.7.3    | Poli semplici complessi coniugati . . . . .                                  | 127        |
| <b>5</b> | <b>Distribuzioni</b>                                                         | <b>131</b> |
| 5.1      | Il gradino e la porta . . . . .                                              | 131        |
| 5.2      | Funzionali lineari . . . . .                                                 | 133        |
| 5.3      | Limiti nel senso delle distribuzioni . . . . .                               | 134        |
| 5.4      | Derivate nel senso delle distribuzioni . . . . .                             | 141        |
| 5.4.1    | Regole pratiche di derivazione . . . . .                                     | 142        |
| 5.4.2    | Proprietà della delta di Dirac . . . . .                                     | 145        |
| 5.4.3    | Regole di derivazione . . . . .                                              | 147        |
| 5.5      | Convoluzione di funzioni . . . . .                                           | 150        |
| 5.6      | Convoluzione di distribuzioni . . . . .                                      | 153        |
| 5.6.1    | Proprietà della convoluzione . . . . .                                       | 154        |

|          |                                                                 |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 5.7      | Distribuzioni limitate . . . . .                                | 156        |
| 5.8      | Distribuzioni temperate . . . . .                               | 157        |
| <b>6</b> | <b>Trasformata di Fourier</b>                                   | <b>160</b> |
| 6.1      | Calcolo di trasformate con la definizione . . . . .             | 161        |
| 6.2      | Antitrasformata di Fourier . . . . .                            | 166        |
| 6.3      | Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .                | 168        |
| 6.4      | Trasformata di Fourier del gradino . . . . .                    | 176        |
| 6.5      | Equazioni con distribuzioni . . . . .                           | 179        |
| 6.6      | Altri esempi importanti di trasformate di Fourier . . . . .     | 184        |
| 6.7      | Trasformata del treno di impulsi . . . . .                      | 187        |
| 6.8      | Trasformata di Fourier di segnali periodici . . . . .           | 190        |
| 6.8.1    | Legami tra serie e trasformate di funzioni periodiche . . . . . | 191        |
| 6.8.2    | Esempi di trasformate di segnali periodici . . . . .            | 192        |
| 6.8.3    | Il fenomeno di Gibbs . . . . .                                  | 200        |
| <b>7</b> | <b>Trasformata di Laplace</b>                                   | <b>204</b> |
| 7.1      | Definizione e dominio di $\mathcal{L}$ . . . . .                | 204        |
| 7.2      | Proprietà di $\mathcal{L}$ . . . . .                            | 208        |
| 7.3      | Esempi importanti di trasformata di Laplace . . . . .           | 213        |
| 7.4      | Legami tra le trasformate di Fourier e di Laplace . . . . .     | 224        |
| 7.5      | Antitrasformata di Laplace . . . . .                            | 228        |
| 7.6      | Valore iniziale e valore finale . . . . .                       | 235        |
| 7.7      | Trasformata di segnali periodici per $t \geq 0$ . . . . .       | 242        |
| 7.8      | Trasformata di Laplace unilatera . . . . .                      | 244        |
| 7.8.1    | Proprietà di derivata in $t$ per $\mathcal{L}_u$ . . . . .      | 245        |
| 7.8.2    | Proprietà della convoluzione per $\mathcal{L}_u$ . . . . .      | 246        |
| 7.9      | Uso della trasformata nei modelli differenziali . . . . .       | 247        |
| 7.9.1    | RLC in serie . . . . .                                          | 254        |
| 7.9.2    | RLC in parallelo . . . . .                                      | 260        |
| 7.10     | Transitorio e regime . . . . .                                  | 265        |
| 7.10.1   | RC passabasso . . . . .                                         | 267        |
| <b>A</b> | <b>Numeri complessi</b>                                         | <b>271</b> |
| A.1      | Definizione di numero complesso . . . . .                       | 271        |
| A.2      | Operazioni tra numeri complessi . . . . .                       | 271        |
| A.3      | Forma trigonometrica di un numero complesso . . . . .           | 273        |
| A.4      | Interpretazione geometrica del prodotto . . . . .               | 275        |
| A.5      | Modulo, argomento, complesso coniugato . . . . .                | 276        |
| A.6      | La formula di De Moivre . . . . .                               | 277        |
| A.7      | Radici $n$ -esime di un numero complesso . . . . .              | 277        |
| <b>B</b> | <b>Trasformata Zeta</b>                                         | <b>280</b> |
| B.1      | Funzioni sugli interi . . . . .                                 | 280        |
| B.2      | Trasformata Zeta bilatera . . . . .                             | 282        |
| B.3      | Proprietà della trasformata Zeta . . . . .                      | 283        |



|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>C Tabelle</b>                                                                           | <b>288</b> |
| C.1 Proprietà delle trasformate di Fourier e di Laplace . . . . .                          | 288        |
| C.2 Trasformate $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$ di alcune funzioni e distribuzioni . . . . . | 291        |
| C.3 Proprietà della trasformata Zeta . . . . .                                             | 294        |
| C.4 Trasformata $\mathcal{Z}$ di alcune funzioni sugli interi . . . . .                    | 295        |
| <b>Indice analitico</b>                                                                    | <b>296</b> |

---

# 1

## Esponenziale complesso e serie complesse

Nella prima parte di questo capitolo viene introdotta la forma esponenziale di un numero complesso e vengono estesi al campo complesso esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e iperboliche.

Si presuppone una conoscenza di base dei numeri complessi in forma cartesiana e trigonometrica e delle operazioni in  $\mathbb{C}$ ; queste nozioni sono richiamate nell'Appendice A, che si consiglia di leggere prima di iniziare questo capitolo.

Nella seconda parte si introducono le nozioni elementari di topologia del piano complesso, le successioni e le serie complesse.

### 1.1 Esponenziale complesso

Sia  $z$  un numero complesso non nullo, che scriviamo in forma trigonometrica

$$z = \rho (\cos \vartheta + j \sin \vartheta). \quad (1.1)$$

Il numero complesso

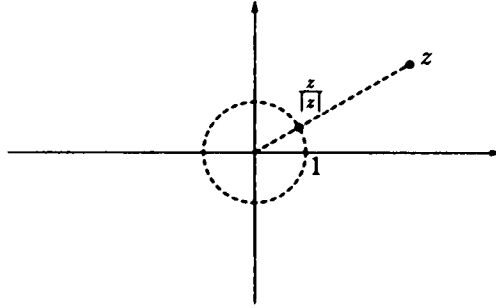
$$\frac{z}{|z|} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta \quad (1.2)$$

ha modulo unitario e lo stesso argomento di  $z$ . Ogni numero complesso non nullo si può quindi esprimere come il prodotto di un numero reale positivo (il suo modulo) e di un numero complesso di modulo uno (vedi figura 1.1):

$$z = |z| \frac{z}{|z|}. \quad (1.3)$$

Siano  $z_1$  e  $z_2$  due numeri complessi di modulo unitario:

$$\begin{aligned} |z_1| &= 1, & z_1 &= \cos \vartheta + j \sin \vartheta, \\ |z_2| &= 1, & z_2 &= \cos \varphi + j \sin \varphi. \end{aligned}$$

Fig. 1.1 Espressione di  $z$  come prodotto  $|z| \cdot z/|z|$ .

Dalla definizione di prodotto di numeri complessi, si ha

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \cos(\vartheta + \varphi) + j \sin(\vartheta + \varphi), \\ |z_1 \cdot z_2| &= 1, \\ \arg(z_1 \cdot z_2) &= \vartheta + \varphi = \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned}$$

La moltiplicazione di  $z_1$  e di  $z_2$  si traduce in una somma (quella dei loro argomenti); in particolare se  $\varphi = -\vartheta$  si ha che  $z_1 \cdot z_2 = 1$ . Questo comportamento è analogo a quello di un esponenziale reale:

$$\begin{aligned} e^a \cdot e^b &= e^{a+b}, \\ e^a \cdot e^{-a} &= e^0 = 1. \end{aligned}$$

Questa analogia formale suggerisce di introdurre una rappresentazione del numero complesso di modulo unitario, che faccia intervenire l'esponenziale del suo argomento. Non si tratta di un esponenziale reale, in quanto dobbiamo rappresentare delle quantità non reali, come nel caso dell'argomento  $\pi/2$  a cui deve corrispondere

$$z = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j.$$

Queste considerazioni (del tutto intuitive!) contribuiscono a motivare l'introduzione della seguente, fondamentale, *formula di Eulero* per la rappresentazione dei numeri complessi di modulo unitario in forma esponenziale:

$$\boxed{e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta} \quad (1.4)$$

Scriviamo il generico numero complesso  $z$  nella forma cartesiana

$$z = x + jy;$$

sempre considerando l'analogia formale con gli esponenziali, vogliamo che l'esponenziale di una somma sia il prodotto degli esponenziali, vale a dire che sia

$$e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy};$$

questa relazione, unitamente alla formula di Eulero (1.4), induce a porre la seguente definizione di *esponenziale di un numero complesso*

$$e^z = e^{x+jy} = e^x (\cos y + j \sin y) \quad (1.5)$$

Da questa definizione si ha che

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y,$$

$$\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y,$$

$$|e^z| = e^x,$$

$$\arg e^z = y.$$

Utilizzando la definizione (1.5) è facile mostrare che valgono per l'esponenziale complesso le stesse regole formali che conosciamo per l'esponenziale reale. Per ogni  $z$  e  $w$  complesso si ha:

$$\begin{aligned} e^z + w &= e^z e^w, \\ (e^z)^w &= e^{zw}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

La forma esponenziale si presta bene al calcolo delle potenze e delle radici di un numero complesso, come mostrano gli esempi seguenti.

**Esempio 1.1** Scrivere in forma esponenziale e calcolare la quarta potenza del numero complesso

$$z = -1 - j\sqrt{3}.$$

Poiché

$$|-1 - j\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\arg(-1 - j\sqrt{3}) = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2}{3}\pi,$$

possiamo scrivere  $z$  in forma esponenziale come

$$z = 2e^{-2\pi j/3}$$

da cui, utilizzando la (1.6),

$$z^4 = \left(2e^{-2\pi j/3}\right)^4 = 16e^{-8\pi j/3} = 16e^{-2\pi j - 2\pi j/3} = 16e^{-2\pi j/3}.$$

■

**Esempio 1.2** Calcolare la radice quarta di

$$z = -2 + 2\sqrt{3}j$$

Dapprima scriviamo  $z$  in forma esponenziale, ricavandone modulo e argomento:

$$|z| = |-2 + 2\sqrt{3}j| = \sqrt{4+12} = 4,$$

$$\arg(-2 + 2\sqrt{3}j) = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{-2} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$

Si ha quindi

$$z = 4e^{(2\pi/3)j},$$

per cui le radici quarte di  $z$  sono

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{4e^{2\pi j/3 + 2k\pi j}} = \sqrt[4]{4}e^{j(2\pi/12 + k2\pi/4)},$$

ovvero:

$$\sqrt[4]{z} = \begin{cases} \sqrt{2}e^{j\pi/6} \\ \sqrt{2}e^{j2\pi/3} \\ \sqrt{2}e^{j7\pi/6} \\ \sqrt{2}e^{j5\pi/3} \end{cases}$$

■

Non è invece possibile estendere al campo complesso la proprietà che afferma che la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva (si ricordi che nel campo complesso non si possono definire relazioni d'ordine compatibili con le proprietà delle operazioni). Si verifica però che per ogni  $z \in \mathbb{C}$  si ha:

$$e^z \neq 0. \quad (1.7)$$

Infatti, supponiamo per assurdo che esista un numero complesso  $z$  tale che  $e^z = 0$ . In base alla definizione di uguaglianza tra numeri complessi e alla (1.5), si dovrebbe avere

$$\begin{cases} e^x \cos y = 0 \\ e^x \sin y = 0. \end{cases}$$

Essendo la funzione esponenziale reale sempre diversa da zero, dovrebbe esistere un valore  $y$  in corrispondenza al quale sono nulle sia la funzione seno che la funzione coseno; questo non avviene, come sappiamo dallo studio delle funzioni trigonometriche. Quindi la funzione esponenziale complessa non è mai nulla (in particolare il suo modulo non è mai nullo).

La definizione (1.5) ha però una conseguenza imprevedibile, se si considera l'analogia con la funzione esponenziale reale. Se  $k$  è un qualunque intero relativo, dalla (1.5) risulta infatti:

$$e^{z+2k\pi j} = e^x(\cos(y+2k\pi j) + j\sin(y+2k\pi j)) = e^x(\cos y + j\sin y) = e^z. \quad (1.8)$$

Da queste uguaglianze risulta che la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo  $2\pi j$ .

## 1.2 Alcune proprietà del modulo e dell'argomento

La forma esponenziale complessa permette di ricavare in modo particolarmente semplice le proprietà già note (vedi Appendice A) del modulo e dell'argomento.

Siano

$$z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}.$$

a) Si ha:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{j\vartheta_1} \rho_2 e^{j\vartheta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |\rho_1 \rho_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)}| = \rho_1 \rho_2, \\ \arg z_1 z_2 &= \arg (\rho_1 \rho_2 e^{j(\vartheta_1 + \vartheta_2)}) = \vartheta_1 + \vartheta_2. \end{aligned}$$

b) Si ha:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{j\vartheta_1}}{\rho_2 e^{j\vartheta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)},$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_2} \right| &= \left| \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \right| = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ \arg \frac{z_1}{z_2} &= \arg \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\vartheta_1 - \vartheta_2)} \right) = \vartheta_1 - \vartheta_2. \end{aligned}$$

c) Osserviamo infine che la moltiplicazione per un esponenziale con all'esponente un immaginario puro provoca una rotazione:

$$\arg (z_1 e^{j\alpha}) = \alpha + \arg z_1.$$

In particolare la moltiplicazione per  $j$  provoca una rotazione di  $\pi/2$ :

$$\arg (j z_1) = \frac{\pi}{2} + \arg z_1.$$

In modo analogo si osserva che che la moltiplicazione per  $j^n$  provoca una rotazione di  $n\pi/2$  e in particolare (si veda figura 1.2):

$$j^{4n} z = z, \quad j^{4n-1} z = -jz, \quad j^{4n-2} z = -z, \quad j^{4n-3} z = jz.$$

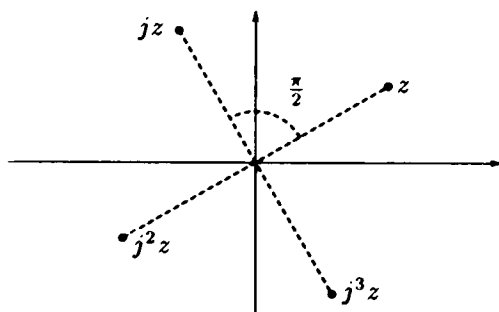


Fig. 1.2 Moltiplicazione per potenze di  $j$ .

**Esempio 1.3** Si determinino il modulo e l'argomento del seguente numero complesso:

$$z = \frac{1}{1 + j\sqrt{3}} e^{j\pi/2}.$$

Si ha:

$$|z| = \frac{|1|}{|1 + j\sqrt{3}|} \left| e^{j\pi/2} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2},$$

$$\arg z = \arg 1 - \arg (1 + j\sqrt{3}) + \frac{\pi}{2} = -\arctan \sqrt{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

■

### 1.3 Seni e coseni complessi

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; sommando alla formula di Eulero (1.4) la sua complessa coniugata, otteniamo

$$\begin{aligned} e^{j\alpha} &= \cos \alpha + j \sin \alpha, \\ e^{-j\alpha} &= \cos \alpha - j \sin \alpha, \\ e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} &= 2 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1.9)$$

mentre sottraendo si ha

$$e^{j\alpha} - e^{-j\alpha} = 2j \sin \alpha. \quad (1.10)$$

Dalle espressioni (1.9) e (1.10) si ricava:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \\ \sin \alpha &= \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

I secondi membri delle espressioni (1.11) hanno significato anche quando  $\alpha$  è complesso. Possiamo perciò definire per ogni  $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \\ \sin z &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Si può facilmente dimostrare che, grazie a questa definizione, si possono estendere al campo complesso molte proprietà delle funzioni trigonometriche reali, quali le formule di addizione, di sottrazione, di duplicazione, le relazioni degli archi associati e così via. Inoltre le funzioni  $\sin z$  e  $\cos z$  sono periodiche di periodo  $2\pi$ ; verifichiamo questa affermazione per il coseno:

$$\begin{aligned} \cos(z + 2k\pi j) &= \frac{e^{jz+2k\pi j} + e^{-jz-2k\pi j}}{2} = \\ &= \frac{e^{jz} e^{2k\pi j} + e^{-jz} e^{-2k\pi j}}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

Le funzioni trigonometriche complesse, a differenza di quelle reali, possono avere modulo maggiore di uno, come è mostrato nel seguente esempio.

**Esempio 1.4** Calcolare  $\cos(2j)$ .

$$\cos(2j) = \frac{e^{j(2j)} + e^{-j(2j)}}{2} = \frac{e^{-2} + e^2}{2} = \cosh 2.$$

Si noti che il risultato è un numero reale più grande di uno. Mediante conti analoghi si ottiene che

$$\cos(ja) = \cosh a, \quad a \in \mathbb{R};$$

per  $a \rightarrow +\infty$  si ha che

$$\cosh a \rightarrow +\infty;$$

quindi, per valori grandi di  $a$ , si ottengono valori del coseno grandi quanto si vuole. ■

Nell'esempio precedente si è ottenuto un valore reale del coseno di un numero complesso; in generale il seno o il coseno di un numero complesso è un numero complesso, il cui modulo può essere più grande di uno.

## 1.4 Seni e coseni iperbolici complessi

Richiamiamo la definizione di seno e di coseno iperbolico per un numero  $t$  reale:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Per  $t$  che tende all'infinito i seni e i coseni iperbolici tendono all'infinito in modo esponenziale; si tratta di funzioni non limitate della variabile reale  $t$ . I secondi membri delle espressioni (1.4) hanno significato anche per  $z$  complesso. Definiamo quindi:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Osserviamo che in ambito complesso vi è uno stretto legame tra le funzioni circolari e le funzioni iperboliche:

$$\begin{aligned} \sin jz &= \frac{e^{j(jz)} - e^{-j(jz)}}{2j} = -j \frac{e^{-z} - e^z}{2} = j \sinh z, \\ \cos jz &= \frac{e^{j(jz)} + e^{-j(jz)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh z, \\ \sinh jz &= \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2} = j \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = j \sin z, \\ \cosh jz &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

che possiamo riassumere nel seguente quadro:



|            |               |
|------------|---------------|
| $\sin jz$  | $= j \sinh z$ |
| $\cos jz$  | $= \cosh z$   |
| $\sinh jz$ | $= j \sin z$  |
| $\cosh jz$ | $= \cos z$    |

(1.13)

Le funzioni iperboliche complesse sono periodiche di periodo  $2\pi j$ , vale a dire lungo direzioni parallele all'asse immaginario. Per  $k \in \mathbb{Z}$  si ha:

|           |                        |
|-----------|------------------------|
| $\sinh z$ | $= \sinh(z + 2k\pi j)$ |
| $\cosh z$ | $= \cosh(z + 2k\pi j)$ |

(1.14)

Osserviamo che, mentre  $e^z$  è sempre diverso da zero,  $\sinh z$  e  $\cosh z$  hanno infiniti zeri sull'asse immaginario (vedi figura 1.3). Si ha:

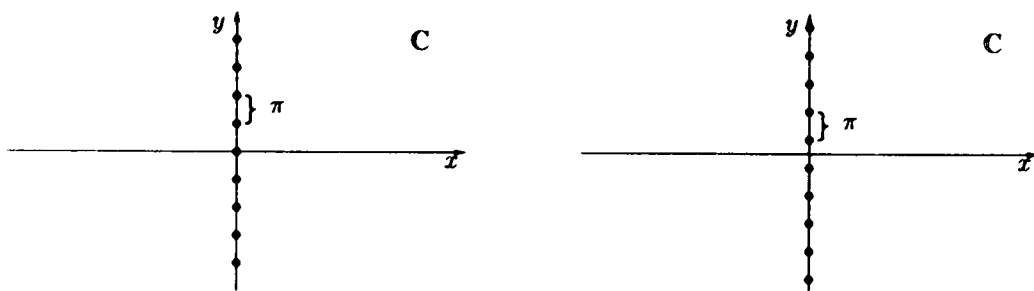


Fig. 1.3 Zeri del seno e del coseno iperbolico.

$$\begin{aligned}
 \sinh z = 0 &\implies e^z - e^{-z} = 0 \\
 &\implies e^{2z} = 1 \\
 &\implies e^{2z} = e^{2k\pi j} \\
 &\implies z = k\pi j
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
 \cosh z = 0 &\implies e^z + e^{-z} = 0 \\
 &\implies e^{2z} = -1 \\
 &\implies e^{2z} = e^{j\pi + 2k\pi j} \\
 &\implies z = j\pi/2 + k\pi j
 \end{aligned}$$
(1.15)

Con ragionamenti analoghi si può constatare che gli zeri del seno e del coseno (circolari) di variabile complessa sono gli stessi del seno e del coseno di variabile reale:

$$\sin z = 0 \implies z = k\pi$$

$$\cos z = 0 \implies z = \pi/2 + k\pi$$

**Osservazione 1.1** Le funzioni di variabile complessa  $e^z$ ,  $e^{-z}$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\sinh z$  e  $\cosh z$  sono combinazioni lineari le une delle altre; questo spiega perché hanno comportamenti analoghi lungo opportune direzioni del piano complesso. ■

## 1.5 Logaritmo di un numero complesso.

Se  $r, a \in \mathbb{R}$ , il logaritmo (reale) si comporta nel modo seguente:

$$\log re^a = \log r + \log e^a = \log r + a \log e = (\log r) + a.$$

Definiamo il logaritmo complesso (che indichiamo ancora con il simbolo  $\log$ ) in modo che si conservi questa proprietà; poniamo, per  $z \neq 0$ ,

$$\log z = \log (|z|e^{j \arg z + 2k\pi j}) = \log |z| + j \arg z + 2k\pi j, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}, \quad (1.16)$$

ove il logaritmo nell'ultimo membro è il logaritmo reale del numero reale positivo  $|z|$ .

Si osservi che esiste una analogia tra le radici complesse e i logaritmi complessi, nel senso che entrambi non forniscono un unico valore. La radice  $n$ -esima di un numero complesso fornisce  $n$  valori distinti, mentre il logaritmo complesso ne fornisce infiniti distinti.

**Esempio 1.5** Calcolare il logaritmo complesso di

$$z = 1 - j\sqrt{3}.$$

Si ha:

$$\log z = \log \left( 2e^{j(-\pi/3 + 2k\pi)} \right) = \log 2 + \left( -\frac{\pi}{3} \right) j + 2k\pi j.$$

Si osservi sulla figura 1.4 che si sono ottenuti infiniti valori, tutti con parte reale uguale a  $\log 2$ ; i punti corrispondenti stanno su una parallela all'asse immaginario. ■

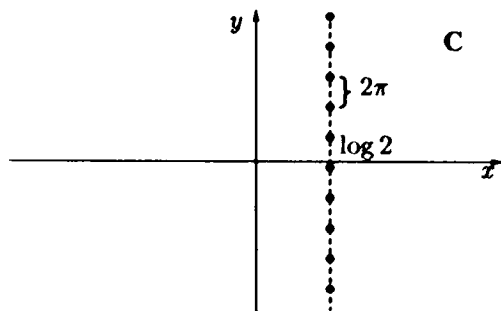


Fig. 1.4 Logaritmi complessi di  $1 + j\sqrt{3}$ .

**Esempio 1.6** Calcoliamo il logaritmo complesso di  $j$  e di  $-1$ .

Si ha:

$$\begin{aligned}\log j &= \log \left( e^{j(\pi/2 + 2k\pi)} \right) = \log 1 + \frac{\pi}{2}j + 2k\pi j = \frac{\pi}{2}j + 2k\pi j, \\ \log(-1) &= \log \left( e^{j\pi + 2k\pi j} \right) = \log 1 + \pi j + 2k\pi j = \pi j + 2k\pi j.\end{aligned}$$

Si sono ottenuti, in entrambi i casi, infiniti valori che stanno sull'asse immaginario; nessuno di essi è reale. ■

## 1.6 Esponenziali con base complessa

Utilizzando i logaritmi complessi si può definire l'esponenziale con base complessa. Se  $z, w \in \mathbb{C}$  si pone:

$$z^w = e^{w \log z} = e^{w(\log |z| + j \arg z + 2k\pi j)} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Un esponenziale con base complessa ha quindi infiniti valori.

**Esempio 1.7** Calcolare  $j^j$ .

Dalla definizione che abbiamo introdotto si ha:

$$j^j = e^{j \log j} = e^{j(\pi j/2 + 2k\pi j)} = e^{-\pi/2 - 2k\pi};$$

possiamo osservare il fatto che, in questo esempio particolare, si sono ottenuti infiniti valori reali. ■

## 1.7 Topologia del piano complesso

Come è stato fatto nell'ambito della retta reale e del piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , è possibile definire nel piano complesso il concetto di intorno di un punto.

**Definizione 1.1** Assegnato un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  e un numero reale  $r > 0$ , si definisce intorno di  $z_0$  di raggio  $r$  il cerchio

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Utilizzando il concetto di intorno si possono introdurre le definizioni di sottoinsieme aperto e di sottoinsieme chiuso di  $\mathbb{C}$ .

**Definizione 1.2** Un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{C}$  è detto aperto se per ogni punto  $z \in A$  esiste un intorno di  $z$  incluso in  $A$ . Un sottoinsieme  $A \subseteq \mathbb{C}$  è detto chiuso se il suo complementare in  $\mathbb{C}$  è aperto.

**Esempio 1.8** Il sottoinsieme  $B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$ ; si tratta del cerchio puntato di centro  $z_0$ , raggio  $r$  e privo del centro.

Il sottoinsieme  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$ ; dal punto di vista geometrico,  $D$  è il sottoinsieme dei punti del piano complesso esterni al cerchio chiuso di centro l'origine e raggio  $r$ .

Il sottoinsieme  $E = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \varepsilon < |z - z_0| < r\}$  è un insieme aperto di  $\mathbb{C}$ ; si tratta di una corona circolare delimitata dalle circonferenze di centro  $z_0$  e di raggio, rispettivamente,  $\varepsilon$  e  $r$ . ■

### 1.7.1 Il punto all'infinito

L'insieme dei numeri reali viene, abitualmente, completato con l'aggiunta dei punti  $+\infty$  e  $-\infty$ . Nel piano complesso si aggiunge un unico *punto all'infinito*, che si indica con il simbolo  $\infty$ . Il piano complesso con l'aggiunta del punto all'infinito è detto *piano di Gauss*.

Si definisce come *intorno del punto all'infinito* il sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  definito da  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ , che, come abbiamo visto nell'esempio precedente, è un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{C}$ .

Per capire meglio questi concetti, è opportuno considerare una rappresentazione geometrica, in cui si mette in corrispondenza biunivoca il piano di Gauss con una sfera nello spazio tridimensionale, detta *sfera di Neumann* (vedi figura 1.5): nello spazio a tre dimensioni di assi coordinati  $(x, y, u)$ , si identifica il piano complesso con il piano  $(x, y, 0)$  e si considera la sfera di raggio 1 e centro  $(0, 0, 1)$  che ha equazione

$$x^2 + y^2 + (u - 1)^2 = 1. \quad (1.17)$$

Il generico punto  $(x_0, y_0, 0)$  del piano  $(xy)$  viene posto in corrispondenza con un punto della sfera, considerando l'intersezione tra la retta che congiunge  $(x_0, y_0, 0)$  con il punto  $(0, 0, 2)$  della sfera e la sfera stessa.

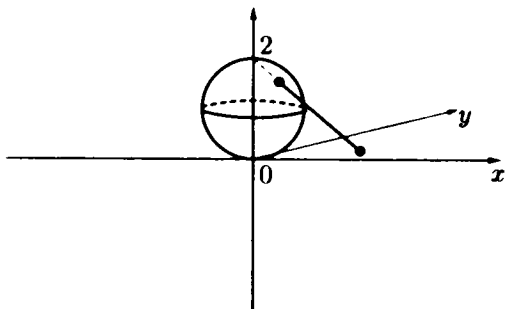


Fig. 1.5 Sfera di Neumann.

Per dare espressione analitica a questa corrispondenza, scriviamo l'equazione del generico piano per  $(0, 0, 2)$ :

$$ax + by + (u - 2) = 0,$$

a cui imponiamo il passaggio per il punto  $(x_0, y_0, 0)$ :

$$ax_0 + by_0 - 2 = 0.$$

Ponendo  $a = 1$ , si ha  $y_0 b = 2 - x_0$ , mentre, ponendo  $a = -1$ , si ha  $y_0 b = 2 + x_0$ . La retta che congiunge i due punti  $(0, 0, 2)$  e  $(x_0, y_0, 0)$  è quindi data dalla intersezione dei due piani:

$$\begin{cases} y_0 x + (2 - x_0)y + y_0(u - 2) = 0, \\ -y_0 x + (2 + x_0)y + y_0(u - 2) = 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

Il sistema delle equazioni (1.17) e (1.18) ci fornisce le coordinate del punto sulla sfera di Neumann che corrisponde nella proiezione stereografica al punto  $(x_0, y_0, 0)$ :

$$\begin{cases} x = \frac{4x_0}{4 + x_0^2 + y_0^2} \\ y = \frac{4y_0}{4 + x_0^2 + y_0^2} \\ u = 2 - \frac{8}{4 + x_0^2 + y_0^2} \end{cases} \quad (1.19)$$

Al punto  $(0, 0, 0)$  della sfera corrisponde l'origine del piano  $(xy)$ , mentre diciamo che al punto  $(0, 0, 2)$  (che non ha immagine in questa corrispondenza) è associato il punto all'infinito del piano  $(xy)$ .

Sulla sfera di Neumann un intorno del punto all'infinito [ovvero del punto  $(0, 0, 2)$ ] è dato da una calotta sferica di centro il punto  $(0, 0, 2)$  e raggio  $\varepsilon$ . Tale calotta nella proiezione stereografica diviene l'esterno di un cerchio di raggio  $R$ . Si ha che  $R$  è tanto più grande quanto più è piccolo  $\varepsilon$  (vedi figura 1.6).

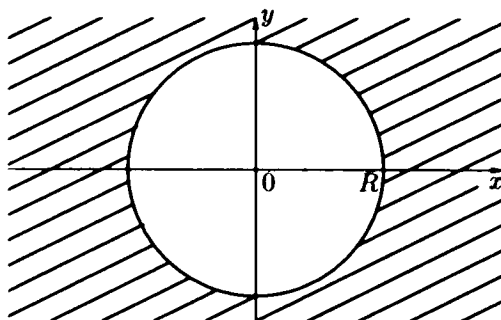


Fig. 1.6 Intorno di infinito

## 1.8 Successioni a valori complessi

**Definizione 1.3** Una successione a valori complessi è una applicazione

$$n \mapsto z_n$$

definita in  $\mathbb{N}$  (o, più in generale, per tutti gli  $n \geq n_0$ , con  $n_0$  assegnato in  $\mathbb{N}$ ) a valori in  $\mathbb{C}$ . Una successione può essere indicata anche con il simbolo  $(z_n)$ .

**Definizione 1.4** Assegnato  $l \in \mathbb{C}$ , si dice che la successione  $(z_n)$  è convergente al limite  $l$  e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$$

se per ogni  $\epsilon$  positivo fissato in  $\mathbb{R}$  esiste un indice  $n_0$  tale che per ogni  $n > n_0$  risulta

$$|z_n - l| < \epsilon.$$

Si dice che la successione  $(z_n)$  è divergente oppure tende all'infinito e si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

se per ogni  $M$  positivo fissato in  $\mathbf{R}$  esiste un indice  $n_0$  tale che per ogni  $n > n_0$  risulta

$$|z_n| > M.$$

Quando una successione non è né convergente né divergente all'infinito si dice che essa non ammette limite, oppure che è indeterminata.

Si osservi che quando utilizziamo queste definizioni per verificare la relazione di limite, siamo sempre ricondotti a considerare delle quantità reali, come  $|z_n - l|$  oppure  $|z_n|$ . Lo studio della convergenza di una successione a valori complessi può essere sempre ricondotto all'esame del comportamento di due successioni a valori reali. Infatti si può dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 1.1** Sia  $n \mapsto z_n$  una successione a valori complessi; sia  $z_n = x_n + jy_n$  e  $l = l_1 + jl_2$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$$

è che risulti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l_2.$$

Anche il seguente risultato, che può essere facilmente dimostrato usando il teorema precedente e alcune proprietà delle successioni reali, è utile nella pratica perché permette di stabilire il comportamento di una successione complessa, studiandone una reale.

**Teorema 1.2** La successione  $(z_n)$  tende a zero se e solo se la successione  $(|z_n|)$  tende a zero.

Valgono per le successioni complesse i risultati noti nel campo reale, quali l'unicità del limite, i teoremi sul limite della somma, del prodotto, del quoziente.

**Esempio 1.9** Fissiamo  $z \in \mathbf{C}$ ; verifichiamo che la successione geometrica di ragione  $z$ , definita da

$$n \mapsto z^n,$$

converge a zero se  $|z| < 1$ , converge a uno se  $z = 1$ , non ammette limite se  $|z| = 1$  e  $z \neq 1$ , mentre ha limite infinito se  $|z| > 1$ .

Il caso  $z = 1$  è immediato; se invece  $|z| < 1$  basta utilizzare il teorema 1.2 per dimostrare che il limite è zero.

Se  $|z| > 1$ , utilizzando ancora le formule di De Moivre, osserviamo che la quantità reale  $|z^n| = |z|^n$  tende all'infinito; quindi possiamo concludere che il limite è infinito.

Nel caso in cui  $|z| = 1$  e  $z \neq 1$  possiamo osservare che il numero  $z^n$  ha sempre modulo unitario, mentre il suo argomento è  $n\varphi$ , se  $\varphi$  è l'argomento di  $z$ . Il punto  $z^n$  si trova quindi sempre sulla circonferenza unitaria e, passando da  $n$  a  $n+1$ , esso ruota dell'angolo  $\varphi$ ; esso assume un numero finito di posizioni se  $\varphi = n\pi/m$  (con  $n$  ed  $m$  interi), mentre ne assume infinite se il rapporto tra  $\varphi$  e  $\pi$  è un numero irrazionale. Si intuisce che in entrambi i casi il limite della successione non esiste.

Nella figura 1.7 vengono mostrati tre esempi, corrispondenti alle successioni geometriche relative rispettivamente a  $z = 4e^{i\pi/6}/5$ ,  $w = e^{i\pi/8}$ ,  $u = 5e^{i\pi/5}/4$ . ■

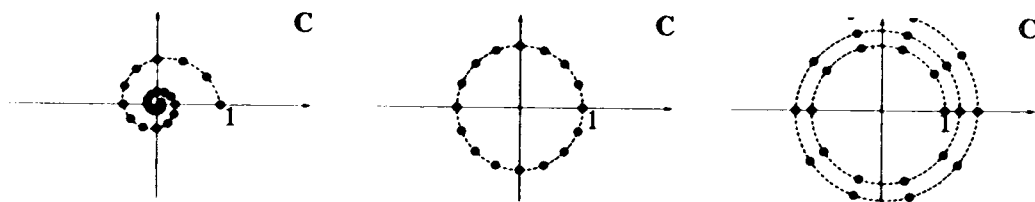


Fig. 1.7 Successioni geometriche.

## 1.9 Serie nel campo complesso

Il procedimento di definizione di una serie in campo complesso è analogo a quello visto in campo reale: assegnata una successione complessa  $(z_n)$  consideriamo la successione  $(s_n)$  delle ridotte o somme parziali  $n$ -esime definita da

$$s_0 = z_0, \quad s_1 = z_0 + z_1, \quad s_2 = z_0 + z_1 + z_2, \quad \dots \quad s_n = z_0 + z_1 + \dots + z_n.$$

**Definizione 1.5** Se esiste finito  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è convergente e si pone  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s$ . Il numero  $s$  è detto somma della serie. Se invece il limite della successione delle somme parziali è infinito, si dice che la serie è divergente, mentre se il limite non esiste, si dice che la serie è oscillante o indeterminata.

**Esempio 1.10** La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

converge per  $|z| < 1$  e ha come somma  $1/(1-z)$ , mentre non converge negli altri casi.

Se  $z = 1$ , possiamo calcolare facilmente la somma parziale  $s_n$ ; si ha

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ volte}} = n + 1;$$

poiché  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = \infty$ , la serie risulta divergente.

Supponiamo allora  $z \neq 1$  e consideriamo la somma parziale  $n$ -esima

$$s_n = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n;$$

moltiplichiamo questa relazione membro a membro per  $z$ , ottenendo

$$zs_n = z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n+1};$$

sottraendo membro a membro queste due uguaglianze otteniamo

$$(1 - z)s_n = 1 - z^{n+1};$$

essendo  $z \neq 1$ , possiamo dividere ambo i membri per  $1 - z$  e riscrivere la relazione precedente nella forma

$$s_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Calcoliamo ora il limite di  $s_n$  per  $n \rightarrow +\infty$ ; in base ai risultati visti nel paragrafo precedente, abbiamo che la successione  $z^{n+1}$  tende a zero se  $|z| < 1$ , mentre non converge negli altri casi.

Possiamo quindi riassumere i risultati ottenuti affermando che

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{per } |z| < 1,$$

mentre la serie non converge per gli altri valori di  $z$ . ■

Ricordiamo alcune proprietà delle serie reali che possono essere estese alle serie complesse.

**Teorema 1.3** *Il comportamento di una serie (cioè il fatto che essa sia convergente, divergente o indeterminata) non cambia se si sopprime o si aggiunge o si modifica un numero finito di termini.*

**Teorema 1.4 (Condizione necessaria di convergenza)** *Condizione necessaria di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è che risulti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

**Teorema 1.5** *Se una serie è convergente allora il suo resto  $n$ -esimo, definito da*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$$

*tende a zero per  $n \rightarrow +\infty$ .*



**Teorema 1.6** Consideriamo due serie convergenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s, \quad \sum_{n=0}^{\infty} w_n = t$$

e sia  $\lambda \in \mathbb{C}$ ; allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda z_n)$$

converge e ha come somma  $\lambda s$ , mentre la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n)$$

converge e ha come somma  $s + t$ .

Il concetto di *convergenza assoluta* permette di stabilire una importante relazione tra una serie complessa e una serie reale.

**Definizione 1.6** Si dice che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è assolutamente convergente se risulta convergente la serie a termini reali non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

La verifica della convergenza assoluta di una serie complessa si riduce quindi allo studio di una serie numerica a termini reali non negativi, in cui possono essere utilizzati tutti i criteri noti (criterio del confronto e del confronto asintotico, criterio dell'integrale o di McLaurin, criterio della radice, criterio del rapporto).

Il legame tra la convergenza assoluta e la convergenza di una serie è stabilito dal seguente teorema, il cui enunciato è analogo a quello che si dimostra nel caso reale.

**Teorema 1.7** Se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

è assolutamente convergente allora è convergente.

**Esempio 1.11** La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

è convergente per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

Studiamo la convergenza assoluta della serie, cioè la convergenza della serie a termini reali non negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}.$$

Utilizziamo il criterio del rapporto e calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0,$$

per ogni valore di  $|z|$ . Grazie al teorema 1.7, la serie data è assolutamente convergente e quindi convergente per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . ■

## 2

# Serie di Fourier

### 2.1 Funzioni reali di variabile reale

Presentiamo come introduzione qualche considerazione sulle funzioni reali di variabile reale, che sono definite utilizzando i numeri complessi. Lo scopo è di rendere familiari alcune funzioni molto comuni nelle applicazioni e di comprendere come l'esponenziale complesso abbia comportamenti qualitativamente diversi da quello reale. Si tratta di osservare come la parte reale o la parte immaginaria diano origine a delle funzioni ottenute modulando in ampiezza dei segnali periodici. Spesso useremo il termine *segnale* per indicare una funzione; si tratta di una terminologia più adatta al contesto applicativo di questo corso. Le considerazioni introduttive sono illustrate con esempi e con figure.

**Esempio 2.1** Consideriamo la funzione

$$x(t) = \operatorname{Re} e^{(1+j)t} = \operatorname{Re} e^t e^{jt} = \operatorname{Re} (e^t (\cos t + j \sin t)) = e^t \cos t.$$

Il grafico della funzione  $x(t)$ , detta *segnale cisoidale*, è mostrato nella figura 2.1. ■

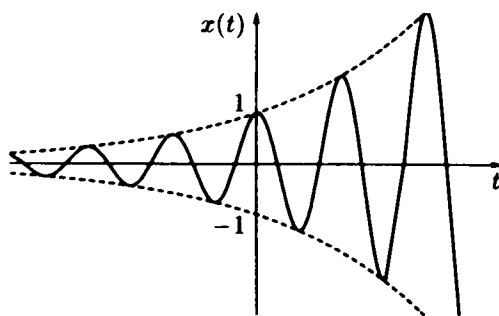


**Fig. 2.1** Segnale cisoidale.

**Esempio 2.2** Sia

$$x(t) = \operatorname{Im} e^{-jt} = \operatorname{Im} (\cos(-t) + j \sin(-t)) = -\sin t,$$

il cui grafico è mostrato nella figura 2.2. ■

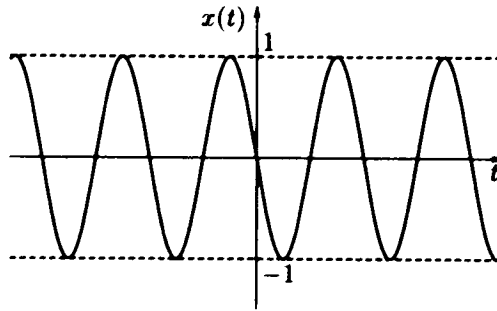


Fig. 2.2 Segnale sinusoidale.

**Esempio 2.3** Sia  $x_c(t) = (1 + \sqrt{3}j)e^{2jt}$ ; si consideri il segnale

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_c(t) + x_c^*(t) = (1 + \sqrt{3}j)e^{2jt} + (1 - \sqrt{3}j)e^{-2jt} = \\
 &= (e^{2jt} + e^{-2jt}) + (\sqrt{3}je^{2jt} - \sqrt{3}je^{-2jt}) = \\
 &= 2 \cos 2t - 2\sqrt{3} \sin 2t = 4 \sin(2t + \pi + \arctan(2/(-2\sqrt{3}))) = \\
 &= 4 \sin(2t + 5\pi/6),
 \end{aligned}$$

il cui grafico è mostrato nella figura 2.3. ■

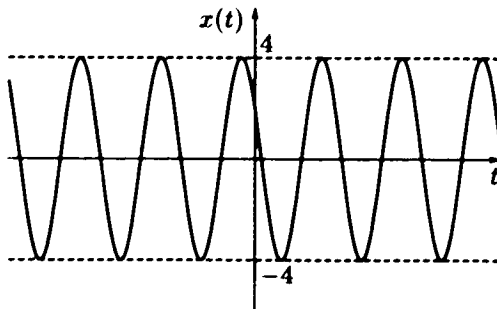


Fig. 2.3 Somma di segnali complessi coniugati.

## 2.2 Funzioni complesse di variabile reale

In molte applicazioni sono importanti le funzioni di variabile reale a valori complessi. Graficamente queste funzioni possono essere rappresentate come curve dello spazio tridimensionale, poiché 1 è la dimensione della variabile reale e 2 è la dimensione del codominio complesso. Consideriamo il seguente esempio:

$$x(t) = e^{st}$$

ove  $s$  è una costante complessa:

$$s = \sigma + j\omega.$$

Se poniamo

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re} x(t) = e^{\sigma t} \cos \omega t \\ v(t) &= \operatorname{Im} x(t) = e^{\sigma t} \sin \omega t \end{aligned}$$

possiamo osservare che nello spazio  $(t, u, v)$  la curva  $x(t)$  è di tipo elicoidale (vedi figura 2.4); la proiezione nel piano  $(t, u)$  e quella nel piano  $(t, v)$  sono date da una curva cisoidale (vedi figura 2.1), mentre nel piano  $(u, v)$  la proiezione è data da una spirale con raggio che cresce esponenzialmente.

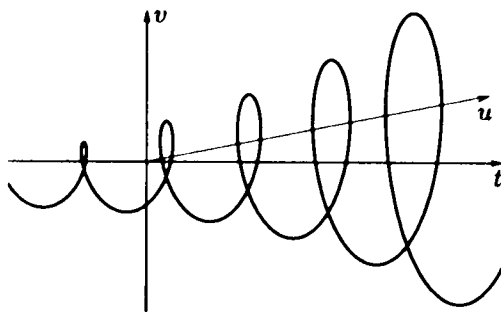


Fig. 2.4 Segnale  $e^{st}$ .

Inoltre il modulo  $\rho(t)$  di  $x(t)$ , che si rappresenta come una curva nel piano  $(t, \rho)$ , è un esponenziale reale:

$$\rho(t) = |x(t)| = |e^{st}| = e^{\sigma t}.$$

L'argomento  $\vartheta(t)$  di  $x(t)$ , che si rappresenta come una curva nel piano  $(t, \vartheta)$ , è, nel caso dell'esempio, una retta di coefficiente angolare  $\omega$ :

$$\vartheta(t) = \arg x(t) = \arg e^{st} = \omega t$$

Tutta la trattazione che viene fatta per funzioni reali di variabile reale si estende facilmente a funzioni complesse di variabile reale, considerate come una coppia ordinata di funzioni di variabile reale a valori reali. Possiamo estendere quanto visto a proposito di limiti, continuità, derivate, integrali, e così via; invece di svolgere una trattazione sistematica, ci limitiamo ad alcuni esempi.

**Esempio 2.4** Sia  $s \in \mathbb{C}$  e  $t \in \mathbb{R}$ ; la derivata rispetto a  $t$  della funzione  $x(t) = e^{st}$  è  $x'(t) = se^{st}$ .

L'esercizio vuole mostrare che la costante complessa  $s$  si comporta, ai fini della derivazione, come si sarebbe comportata una costante reale. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} e^{st} = \frac{d}{dt} (e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t)) = \\ &= \sigma e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) + e^{\sigma t} (-\omega \sin \omega t + j \omega \cos \omega t) = \\ &= (\sigma + j\omega) e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) = s e^{st}. \end{aligned}$$

**Esempio 2.5** Vale la relazione:

$$\int e^{st} dt = \frac{1}{s} e^{st}.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \int e^{st} dt &= \int e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) dt = \\ &= \int e^{\sigma t} \cos \omega t dt + j \int e^{\sigma t} \sin \omega t dt = \\ &= \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma t} \cos \omega t + \frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma t} \sin \omega t + \\ &\quad + j \left( \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma t} \sin \omega t - \frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma t} \cos \omega t \right) = \\ &= \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) - j \frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2} e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) = \\ &= \frac{s^*}{|s|^2} e^{st} = \frac{1}{s} e^{st}. \end{aligned}$$

■

## 2.3 Funzioni periodiche

**Definizione 2.1** Una funzione  $x(t)$  di dominio  $A \subseteq \mathbf{R}$  è detta periodica se esiste un numero reale  $T$  tale che per ogni  $t \in A$  anche  $t + T \in A$  e

$$x(t) = x(t + T).$$

Si usa la seguente terminologia:

- $T$  è detto *periodo*;
- $f = 1/T$  è detta *frequenza*;
- $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$  è la *frequenza angolare*.

Se  $T$  è periodo di  $x(t)$  anche i multipli  $2T, 3T, \dots, nT, \dots$  di  $T$  sono periodi di  $x(t)$ .

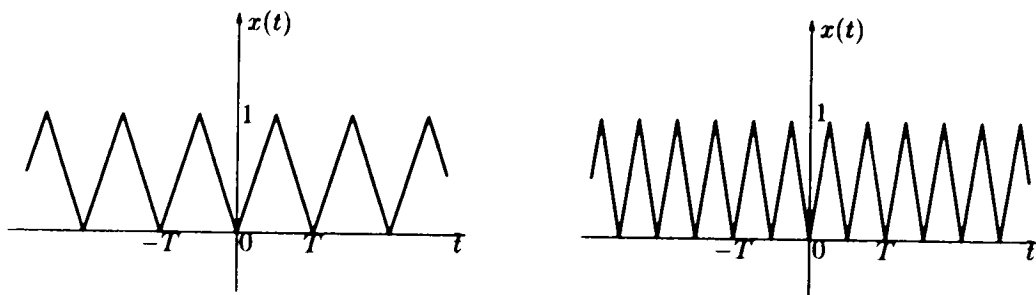
Se  $x(t)$  non è costante, il più piccolo numero positivo  $T$  per cui  $x(t) = x(t + T)$  si dice *periodo fondamentale* o *lunghezza d'onda*.

**Esempio 2.6** Sia  $x(t)$  una *onda triangolare* (vedi figura 2.5) definita nell'intervallo  $[0, T]$  nel modo seguente:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{T}t & \text{se } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ 2 - \frac{2}{T}t & \text{se } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

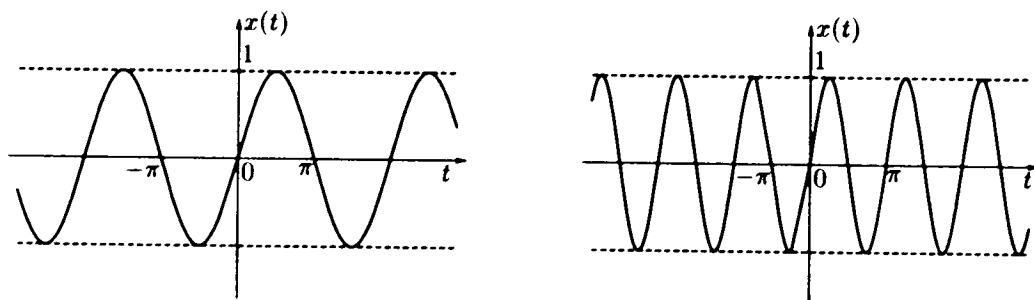
Si osservi in figura 2.5 che la funzione  $x(2t)$  ha frequenza doppia di  $x(t)$ .

■

Fig. 2.5 Onda triangolare con frequenza  $1/T$  e  $2/T$ .

**Esempio 2.7** Sia  $x(t)$  la funzione seno di  $t$  (vedi figura 2.6):

$$x(t) = \sin t.$$

Fig. 2.6 I segnali  $\sin t$  e  $\sin 2t$ .

Si osservi in figura 2.6 che la funzione  $x(2t)$  ha frequenza doppia di  $x(t)$ . ■

## 2.4 Armoniche elementari

Consideriamo delle particolari funzioni di variabile reale a valori reali o complessi a cui diamo il nome di *armoniche elementari*:

$$\text{a) } x(t) = \alpha_k \cos k\omega t + \beta_k \sin k\omega t$$

$$\text{b) } x(t) = \rho_k \sin(k\omega t + \vartheta_k)$$

$$\text{c) } x_c(t) = \gamma_k e^{jk\omega t}$$

Le costanti  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$ ,  $\rho_k$  e  $\vartheta_k$  sono reali, mentre  $\gamma_k$  è una costante complessa. Osserviamo che tutte e tre le espressioni forniscono funzioni periodiche di periodo:

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{k\omega} = \frac{1}{k} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{k} \cdot T = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{f}$$

avendo indicato con

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

il periodo comune alle espressioni a) e b) per ogni  $k$  intero positivo e alla espressione c) per ogni  $k$  intero relativo. Osserviamo che spesso invece del parametro  $\omega$ , che viene detto *frequenza angolare*, si usa indicare la *frequenza*  $f$ :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Le armoniche elementari con l'indicazione esplicita della frequenza  $f$  si scrivono:

$$\text{a)} \quad x(t) = \alpha_k \cos k2\pi ft + \beta_k \sin k2\pi ft$$

$$\text{b)} \quad x(t) = \rho_k \sin(k2\pi ft + \vartheta_k)$$

$$\text{c)} \quad x_c(t) = \gamma_k e^{jk2\pi ft}$$

Vi è un legame stretto tra le espressioni a), b) e c) dell'armonica elementare: dato  $x(t)$  secondo l'espressione a), si possono determinare  $\rho_k$  e  $\vartheta_k$  in funzione di  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  in modo che  $x(t)$  sia espresso nella forma b).

Dalle formule di somma e sottrazione della trigonometria si ha subito:

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho_k \sin(k\omega t + \vartheta_k) = \\ &= \rho_k (\cos k\omega t \sin \vartheta_k + \sin k\omega t \cos \vartheta_k) = \\ &= (\rho_k \sin \vartheta_k) \cos k\omega t + (\rho_k \cos \vartheta_k) \sin k\omega t = \\ &= \alpha_k \cos k\omega t + \beta_k \sin k\omega t \end{aligned}$$

ove si è posto:

$$\begin{cases} \alpha_k = \rho_k \sin \vartheta_k \\ \beta_k = \rho_k \cos \vartheta_k \end{cases} \quad (2.1)$$

Dalle espressioni precedenti si può poi ricavare  $\rho_k$  e  $\vartheta_k$  in funzione di  $\alpha_k$  e  $\beta_k$ . Se  $\beta_k = 0$ , si ha  $\rho_k = |\alpha_k|$  e  $\vartheta_k = \pi/2$  se  $\alpha_k > 0$  e  $\vartheta_k = -\pi/2$  se  $\alpha_k < 0$ . Se invece  $\beta_k \neq 0$ , si ha:

$$\begin{cases} \rho_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \\ \vartheta_k = \arctan \frac{\alpha_k}{\beta_k} \quad (\pm\pi) \end{cases} \quad (2.2)$$

in cui l'aggiunta di  $(\pm\pi)$  nell'ultima formula avviene se  $\beta_k < 0$ .

Inoltre si può determinare la costante complessa  $\gamma_k$  in funzione di  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  in modo che risulti

$$x(t) = x_c(t) + x_c^*(t).$$



Infatti abbiamo:

$$\begin{aligned}
 x_c(t) + x_c^*(t) &= \gamma_k e^{jk\omega t} + \gamma_k^* e^{-jk\omega t} = \\
 &= (\gamma_k + \gamma_k^*) \cos k\omega t + j(\gamma_k - \gamma_k^*) \sin k\omega t = \\
 &= \alpha_k \cos k\omega t + \beta_k \sin k\omega t,
 \end{aligned}$$

da cui, ponendo  $\alpha_0 = \gamma_0$  per  $k = 0$ , si ricava:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \gamma_0 \\ \alpha_k = \gamma_k + \gamma_k^* = +2\operatorname{Re} \gamma_k \quad k > 0 \\ \beta_k = j(\gamma_k - \gamma_k^*) = -2\operatorname{Im} \gamma_k \quad k > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Dalle espressioni precedenti si può poi ricavare  $\gamma_k$  in funzione di  $\alpha_k$  e  $\beta_k$  :

$$\begin{cases} \gamma_0 = \alpha_0 \\ \gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - j\beta_k) \end{cases} \quad (2.4)$$

**Esempio 2.8** Consideriamo l'armonica elementare:

$$x(t) = j e^{j4t} - j e^{-j4t}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
 k &= 4 \\
 \omega &= 1 \\
 f &= 1/2\pi \\
 T &= 2\pi
 \end{aligned}$$

Dalle formule (2.4) otteniamo (vedi figura 2.7):

$$\begin{aligned}
 \gamma_4 &= j \\
 \alpha_4 &= +2\operatorname{Re} \gamma_k = 0 \\
 \beta_4 &= -2\operatorname{Im} \gamma_k = -2 \\
 x(t) &= -2 \sin 4t = 2 \sin(4t + \pi).
 \end{aligned}$$

**Esempio 2.9** Consideriamo l'armonica elementare:

$$x(t) = \cos t + \sin t.$$

I parametri di questo segnale sono:

$$\begin{aligned}
 k &= 1 \\
 \omega &= 1 \\
 f &= 1/2\pi \\
 T &= 2\pi
 \end{aligned}$$

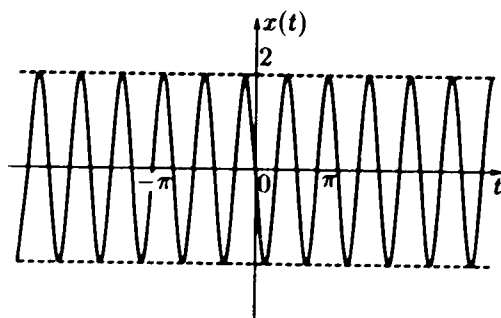


Fig. 2.7 L'armonica elementare  $x(t) = -2 \sin 4t$ .

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1 \\ \beta_1 &= 1.\end{aligned}$$

Dalle formule (2.1) e (2.3) abbiamo (vedi figura 2.8):

$$\rho_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vartheta_1 = \arctan 1 = \pi/4$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(1 - j)$$

$$x(t) = \sqrt{2} \sin(t + \pi/4)$$

$$x_c(t) = \frac{1}{2}(1 - j)e^{jt}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(1 - j)e^{jt} + \frac{1}{2}(1 + j)e^{-jt}.$$

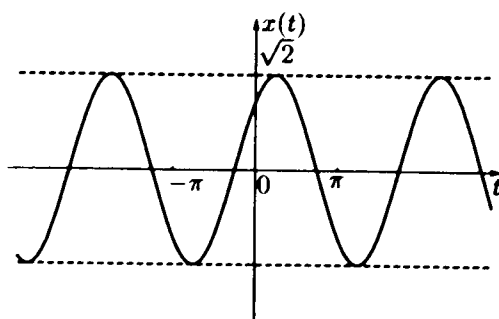


Fig. 2.8 L'armonica elementare  $x(t) = \sqrt{2} \sin(t + \pi/4)$ .

### 2.4.1 Energia di un segnale periodico

Dato un segnale periodico  $x(t)$ , di periodo  $T/k$ , si dice *energia* di  $x(t)$  in  $[0, T]$  l'espressione:

$$\|x(t)\|^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt. \quad (2.5)$$

Il termine *energia* è legato al contesto applicativo in cui i segnali periodici sono considerati. Dal punto di vista più strettamente matematico si dà il nome di *norma* di  $x(t)$  alla radice quadrata della espressione (2.5):

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_0^T |x(t)|^2 dt}. \quad (2.6)$$

Calcoliamo l'energia di una armonica elementare espressa nella forma complessa:

$$\begin{aligned} \|x_c(t)\|^2 &= \|\gamma_k e^{jk\omega t}\|^2 = \\ &= \int_0^T |\gamma_k e^{jk\omega t}|^2 dt = \\ &= \int_0^T (\gamma_k e^{jk\omega t})(\gamma_k^* e^{-jk\omega t}) dt \\ &= \int_0^T |\gamma_k|^2 dt = T |\gamma_k|^2. \end{aligned}$$

Ricordando le formule (2.4) e (2.1), che legano i coefficienti delle varie espressioni delle armoniche elementari, per  $k > 0$  si ha:

$$\|x(t)\|^2 = \|x_c(t) + x_c^*(t)\|^2 = 2T |\gamma_k|^2 = \frac{T}{2} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \frac{T}{2} \rho_k^2. \quad (2.7)$$

## 2.5 Polinomi di Fourier

**Definizione 2.2** Chiamiamo polinomio di Fourier di ordine  $n$  ognuna delle seguenti espressioni:

$$a) \quad P_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos k2\pi ft + \beta_k \sin k2\pi ft),$$

$$b) \quad P_n(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n \rho_k \sin(k2\pi ft + \vartheta_k),$$

$$c) \quad P_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk2\pi ft}.$$

Ricordando il legame che esiste tra i coefficienti, le tre espressioni a), b) e c) sono tre modi diversi di scrivere lo stesso polinomio di Fourier se

$$\gamma_{-k} = \gamma_k^* \quad k \geq 0.$$

Vediamo alcuni semplici esempi di polinomi di Fourier, sui quali è importante riflettere anche osservandone i grafici. In seguito preciseremo in che senso i polinomi di Fourier considerati approssimano dei segnali periodici.

**Esempio 2.10** Questo esempio riguarda un polinomio di Fourier che per  $n$  grande sembra descrivere in modo approssimato una *onda triangolare*.

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{[(-1)^k - 1]}{k^2 \pi^2} e^{j2kt} = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{2[(-1)^k - 1]}{k^2 \pi^2} \cos 2kt. \end{aligned}$$

Si noti che:

$$\omega = 2, \quad T = \pi, \quad f = 1/\pi.$$

Siamo interessati a osservare i grafici (vedi le figure 2.9) di  $P_1(t)$

$$P_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos 2t$$

e di  $P_3(t)$  (si noti che il termine corrispondente a  $k = 2$  è nullo):

$$P_3(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos 2t - \frac{4}{9\pi^2} \cos 6t. \quad (2.8)$$

■

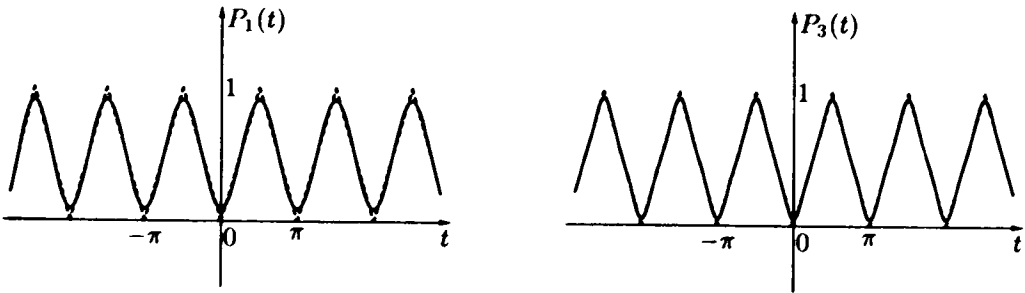


**Fig. 2.9** I polinomi  $P_1(t)$  e  $P_3(t)$  dell'onda triangolare.

**Esempio 2.11** Il polinomio di Fourier che presentiamo in questo esempio sembra descrivere in modo approssimato una *onda quadra*.

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{j}{k\pi} [(-1)^k - 1] e^{jkt} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{-2}{k\pi} [(-1)^k - 1] \sin kt. \end{aligned}$$

Si noti che:

$$\omega = 1, \quad T = 2\pi, \quad f = 1/2\pi.$$

Osserviamo i grafici (vedi le figure 2.10) di  $P_1(t)$

$$P_1(t) = \frac{4}{\pi} \sin t$$

e di  $P_3(t)$  (il termine corrispondente a  $k = 2$  è nullo)

$$P_3(t) = \frac{4}{\pi} \sin t + \frac{4}{3\pi} \sin 3t.$$

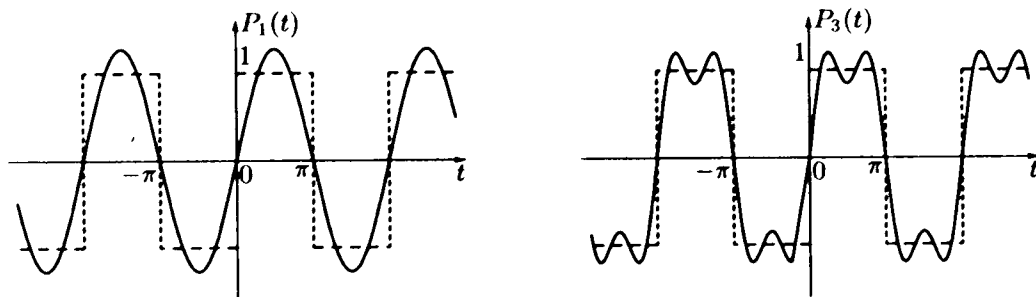


Fig. 2.10 I polinomi  $P_1(t)$  e  $P_3(t)$  dell'onda quadra.

**Esempio 2.12** Consideriamo ora un polinomio di Fourier che sembra descrivere in modo approssimato una *onda a dente di sega*.

$$\begin{aligned} P_n(t) &= 1 + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \frac{j}{k\pi} e^{jk\pi t} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{-2}{k\pi} \sin k\pi t. \end{aligned}$$

Si noti che:

$$\omega = \pi, \quad T = 2, \quad f = 1/2.$$

Nelle figure 2.11 sono riportati i grafici di  $P_1(t)$

$$P_1(t) = 1 + \frac{-2}{\pi} \sin \pi t$$

e di  $P_2(t)$

$$P_2(t) = 1 + \frac{-2}{\pi} \sin \pi t + \frac{-1}{\pi} \sin 2\pi t.$$

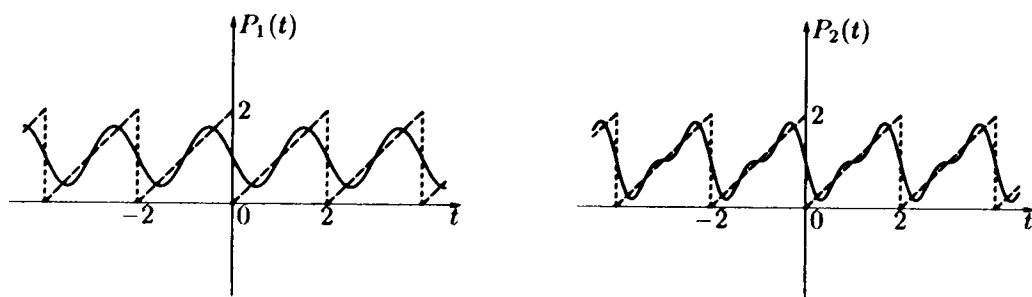


Fig. 2.11 I polinomi  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  dell'onda dente di sega.

**Esempio 2.13** Prendiamo in considerazione un polinomio di Fourier che pare approssimare un segnale, che potremmo chiamare *pettine*.

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \sum_{k=-n}^n e^{j2\pi kt} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n 2 \cos 2k\pi t. \end{aligned}$$

I parametri sono:

$$\omega = 2\pi, \quad T = 1, \quad f = 1.$$

Siamo interessati a osservare i grafici (vedi le figure 2.12) di  $P_1(t)$

$$P_1(t) = 1 + 2 \cos 2\pi t$$

e di  $P_2(t)$

$$P_2(t) = 1 + 2 \cos 2\pi t + 2 \cos 4\pi t.$$

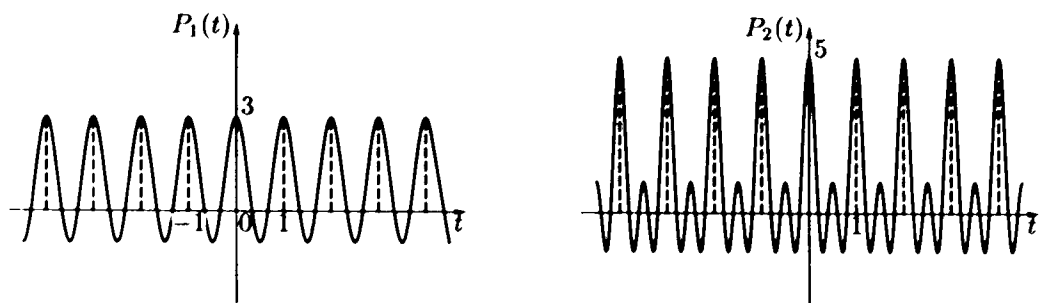


Fig. 2.12 I polinomi  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  del segnale a pettine.

### 2.5.1 Energia di un polinomio di Fourier

Calcoliamo l'energia di un polinomio di Fourier scritto in forma di esponenziale complesso.

$$\begin{aligned}
 \|P_n(t)\|^2 &= \left\| \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk\omega t} \right\|^2 = \\
 &= \int_0^T \left| \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk\omega t} \right|^2 dt = \\
 &= \int_0^T \left( \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk\omega t} \right) \left( \sum_{k=-n}^n \gamma_k^* e^{-jk\omega t} \right) dt = \\
 &= \int_0^T \sum_{h=-n}^n \left( \gamma_h e^{jh\omega t} \sum_{k=-n}^n \gamma_k^* e^{-jk\omega t} \right) dt = \\
 &= \int_0^T \sum_{h=-n}^n \left( \sum_{k=-n}^n \gamma_h \gamma_k^* e^{j(h-k)\omega t} \right) dt = \\
 &= \sum_{h=-n}^n \left( \sum_{k=-n}^n \gamma_h \gamma_k^* \int_0^T e^{j(h-k)\omega t} dt \right) = \\
 &= T \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2.
 \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che:

$$\int_0^T e^{j(h-k)\omega t} dt = \begin{cases} T & \text{se } h = k \\ 0 & \text{se } h \neq k \end{cases}$$

Ricordando la formula (2.7), che dà l'energia di una armonica elementare, si constata che l'energia è data dalla somma delle energie delle armoniche elementari e che, a meno della moltiplicazione per  $T$ , coincide con la somma dei moduli dei coefficienti al quadrato delle armoniche elementari. Se inoltre si suppone che  $\gamma_{-k} = \gamma_k^*$  si ha:

$$\|P_n(t)\|^2 = T \sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2 = T \alpha_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2). \quad (2.9)$$

**Esempio 2.14** Come esempio dei risultati precedenti, calcoliamo l'energia del polinomio  $P_3$  (formula (2.8)) dell'esempio 2.10:

$$\begin{aligned}
 \|P_3(t)\|^2 &= \left\| \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos 2t - \frac{4}{9\pi^2} \cos 6t \right\|^2 = \\
 &= \pi \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{4}{\pi^2} \right)^2 + \frac{\pi}{2} \left( \frac{4}{9\pi^2} \right)^2 = \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{8}{\pi^3} + \frac{8}{81\pi^3} \approx 1,0466 \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Completiamo l'esempio considerando l'onda triangolare  $x(t)$ , che nell'intervallo  $[0, \pi]$ , ha la seguente espressione:

$$x(t) = \begin{cases} (2/\pi)t & \text{se } 0 \leq t < \pi/2 \\ (-2/\pi)t + 2 & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases}$$

La sua energia è:

$$\begin{aligned} \|x(t)\|^2 &= \int_0^\pi |x(t)|^2 dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left| \frac{2}{\pi}t \right|^2 dt + \int_{\pi/2}^\pi \left| -\frac{2}{\pi}t + 2 \right|^2 dt = \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \approx 1.047 \end{aligned} \quad (2.11)$$

I valori delle energie (2.10) e (2.11) sono molto vicini; la spiegazione di questo fatto sarà oggetto di riflessione nei paragrafi seguenti. ■

## 2.6 Polinomi di Fourier di segnali periodici

Sia  $x(t)$  una funzione periodica di periodo  $T$ , limitata e integrabile nell'intervallo  $[0, T]$  e sia  $P_n(t)$  un generico polinomio di Fourier di periodo  $T$ .

Vogliamo valutare l'energia della differenza tra  $x(t)$  e  $P_n(t)$ . Lo scopo è quello di determinare il polinomio che, a parità di indice  $n$ , rende minima tale energia.

Chiamiamo *polinomio di Fourier di  $x(t)$*  e lo indichiamo con  $x_n(t)$ , quel polinomio di indice  $n$  che, tra tutti i polinomi di Fourier  $P_n(t)$  di indice  $n$ , rende minima l'espressione:

$$\|x(t) - P_n(t)\|^2. \quad (2.12)$$

Per determinare i coefficienti  $c_k$  del polinomio  $x_n(t)$  valutiamo l'espressione (2.12):

$$\begin{aligned} \|x(t) - P_n(t)\|^2 &= \int_0^T |x(t) - P_n(t)|^2 dt = \\ &= \int_0^T (x(t) - P_n(t)) (x(t) - P_n(t))^* dt = \\ &= \int_0^T |x(t)|^2 dt + \int_0^T |P_n(t)|^2 dt + \\ &\quad + \int_0^T (-x(t) P_n^*(t) - x^*(t) P_n(t)) dt = \\ &= \|x(t)\|^2 + \|P_n(t)\|^2 + \\ &\quad - T \sum_{k=-n}^n \gamma_k^* \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt}_{c_k} + \end{aligned}$$



$$-T \sum_{k=-n}^n \gamma_k \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) e^{jk\omega t} dt}_{c_k^*}.$$

Se poniamo:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (2.13)$$

otteniamo:

$$\|x(t) - P_n(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 + T \sum_{k=-n}^n [-\gamma_k^* c_k - \gamma_k c_k^* + \gamma_k \gamma_k^*].$$

Sommando e sottraendo  $c_k c_k^*$  nell'espressione in parentesi quadra si ottiene:

$$\begin{aligned} \|x(t) - P_n(t)\|^2 &= \|x(t)\|^2 + T \sum_{k=-n}^n [(\gamma_k - c_k)(\gamma_k^* - c_k^*) - |c_k|^2] = \\ &= \|x(t)\|^2 + T \underbrace{\sum_{k=-n}^n |\gamma_k - c_k|^2}_{A(\gamma_k)} - T \sum_{k=-n}^n |c_k|^2. \end{aligned}$$

Risulta abbastanza evidente che il minimo è raggiunto quando l'addendo positivo  $A(\gamma_k)$  è nullo; questo avviene quando:

$$\gamma_k = c_k.$$

Possiamo concludere dicendo che, dato un segnale  $x(t)$  periodico di periodo  $T$ , limitato e integrabile in  $[0, T]$ , il *polinomio di Fourier di  $x(t)$* , che rende minima l'espressione (2.12) è dato da:

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t} \quad (2.14)$$

ove i coefficienti  $c_k$  hanno l'espressione della formula (2.13), e si ha:

$$\boxed{\|x(t) - x_n(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - T \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.} \quad (2.15)$$

## 2.7 Convergenza nel senso della energia

Le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti portano a chiedersi quale sia la relazione tra una funzione periodica  $x(t)$  e il suo polinomio di Fourier  $x_n(t)$  al tendere di  $n$  all'infinito. Vale il seguente fondamentale risultato, la cui dimostrazione esula dagli scopi di questa trattazione.

**Teorema 2.1** *Se la funzione  $x(t)$  soddisfa alle seguenti ipotesi:*

- a)  $x(t)$  è periodica di periodo  $T$ ;

b)  $x(t)$  è limitata, ossia esiste una costante reale  $K$  tale che:

$$|x(t)| \leq K;$$

c)  $x(t)$  è integrabile in  $[0, T]$ ;

se inoltre  $x_n(t)$  è il polinomio di Fourier di  $x(t)$  e cioè:

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jk\omega t}$$

dove

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt$$

allora si ha che

$$\|x(t) - x_n(t)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty \quad (2.16)$$

Questo risultato viene rappresentato scrivendo che:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-jk\omega t} \quad (2.17)$$

il cui secondo membro viene detto *serie di Fourier della funzione  $x(t)$* ; l'uguaglianza nella (2.17) deve essere intesa, per il momento, in modo formale (considerando cioè il segnale  $x(t)$  uguale alla sua serie di Fourier nel senso della energia). Il suo significato sarà discusso nel seguito di questo capitolo.

Dalla relazione (2.15) si ricava facilmente la disuguaglianza:

$$T \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|x(t)\|^2. \quad (2.18)$$

Passando al limite nella (2.18) si ha la *disuguaglianza di Bessel*

$$T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \|x(t)\|^2, \quad (2.19)$$

mentre dalla (2.16) si ricava la *identità di Parseval*:

$$T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \|x(t)\|^2. \quad (2.20)$$

### 2.7.1 Coefficienti della serie di Fourier

Richiamiamo le espressioni della *serie di Fourier* e dei relativi coefficienti, in modo da avere un quadro riassuntivo in cui si possano ritrovare i risultati utili allo svolgimento di esercizi. Sia  $x(t)$  un segnale reale che soddisfa alle ipotesi del paragrafo 2.7; allora si ha:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ a_k &= c_k + c_k^* &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos k\omega t dt & k > 0 \\ b_k &= j(c_k - c_k^*) &= \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin k\omega t dt & k > 0 \end{aligned} \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

$$x(t) = a_0 + \sum_1^n (r_k \sin(k\omega t + q_k))$$

$$\begin{aligned} r_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} & \omega &= 2\pi/T = 2\pi f \\ q_k &= \arctan(a_k/b_k) \underbrace{(\pm\pi)}_{\text{se } b_k < 0} \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \\ c_k &= \frac{1}{2} (a_k - jb_k) &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega t} dt & k > 0 \\ c_{-k} &= c_k^* & & k > 0 \end{aligned}$$

Le osservazioni seguenti evidenziano alcune proprietà dei coefficienti di Fourier di grande utilità in alcune situazioni concrete.

**Osservazione 2.1** Il calcolo dei coefficienti può essere fatto mediante un integrale su un qualunque intervallo di ampiezza  $T$ ; non è necessario scegliere l'intervallo  $[0, T]$ . Se

$a$  è un numero reale, allora esiste un intero positivo  $N$  per cui  $a$  è compreso tra  $NT$  e  $(N+1)T$ :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \\ NT < a \leq (N+1)T < a+T.$$

Quindi se  $g(t)$  è periodica di periodo  $T$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} g(t) dt &= \int_a^{(N+1)T} g(t) dt + \int_{(N+1)T}^{a+T} g(t) dt = \\ &= \int_a^{(N+1)T} g(t) dt + \int_{NT}^a g(t) dt = \\ &= \int_{NT}^{(N+1)T} g(t) dt = \\ &= \int_0^T g(t) dt. \end{aligned}$$

■

**Osservazione 2.2** Dalle considerazioni dell'osservazione precedente segue che i coefficienti della serie di Fourier possono essere espressi nel modo seguente:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega t} dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos k\omega t dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin k\omega t dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le espressioni dei coefficienti (2.21) consentono facilmente, nel caso di funzioni *pari* [ $x(t) = x(-t)$ ] o *dispari* [ $x(t) = -x(-t)$ ], di ricondursi ad integrazioni su un mezzo periodo.

$$x(t) = x(-t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) dt$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos k\omega t dt$$

$$b_k = 0$$

$$x(t) = -x(-t)$$

$$a_0 = 0$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin k\omega t \, dt$$

## 2.8 Esempi di serie di Fourier

Diamo in questo paragrafo alcuni esempi di calcolo dei coefficienti di Fourier di segnali periodici.

**Esempio 2.15** Consideriamo il seguente segnale  $x(t)$ , detto *onda triangolare*:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(t - m\pi) & \text{se } m\pi \leq t < \frac{\pi}{2} + m\pi \\ -\frac{2}{\pi}(t - (m+1)\pi) & \text{se } m\pi + \frac{\pi}{2} \leq t < (m+1)\pi \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

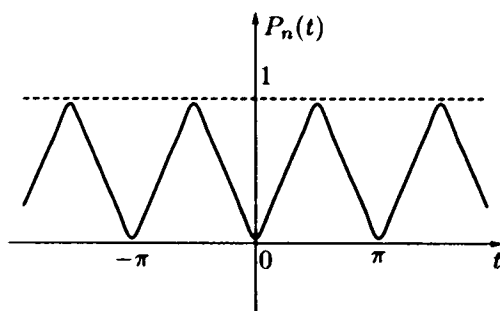


**Fig. 2.13** Una ridotta dell'onda triangolare.

In figura 2.13 è rappresentata una ridotta della serie di Fourier [si dice *ridotta n-esima della serie di Fourier di  $x(t)$* ] il polinomio di Fourier di ordine  $n$  di  $x(t)$ ]. Si osservi che:

$$T = \pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad f = \frac{1}{\pi}.$$

Inoltre si noti che  $x(t)$  è pari e quindi si ha

$$b_k = 0$$

mentre

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} t \, dt = \frac{1}{2}$$

e, con qualche calcolo, per  $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} t \cos 2kt \, dt = \\
 &= \frac{8}{\pi^2} \left\{ \left[ \frac{1}{2k} t \sin 2kt \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2k} \sin 2kt \, dt \right\} = \\
 &= \frac{8}{\pi^2} \left\{ \left[ \frac{\pi}{4k} \sin k\pi \right] - \left[ \frac{1}{2^2 k^2} (-\cos 2kt) \right]_0^{\pi/2} \right\} \\
 &= \frac{8}{\pi^2} \left[ \frac{1}{2^2 k^2} \cos k\pi - \frac{1}{2^2 k^2} \right] \\
 &= \frac{2}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1].
 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi l'espressione della serie di Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2 [(-1)^k - 1]}{k^2 \pi^2} \cos 2kt$$

Ricaviamo pure facilmente:

$$\begin{aligned}
 c_0 &= a_0 = 1/2 \\
 c_k &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k) = [(-1)^k - 1] / (k^2 \pi^2)
 \end{aligned}$$

e quindi la serie di Fourier, in forma esponenziale, dell'onda triangolare è:

$$x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} e^{j2kt}.$$

■

**Esempio 2.16** Il segnale  $x(t)$ , detto *onda quadra*, ha la seguente espressione:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2m\pi \leq t < (2m+1)\pi \\ -1 & \text{se } (2m+1)\pi \leq t < (2m+2)\pi \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

In figura 2.14 è rappresentata l'onda quadra e qualche ridotta della serie di Fourier. Si osservi che:

$$T = 2\pi, \quad \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1, \quad f = \frac{1}{2\pi}.$$

Inoltre si noti che  $x(t)$  è dispari e quindi:

$$a_0 = 0 \quad a_k = 0$$

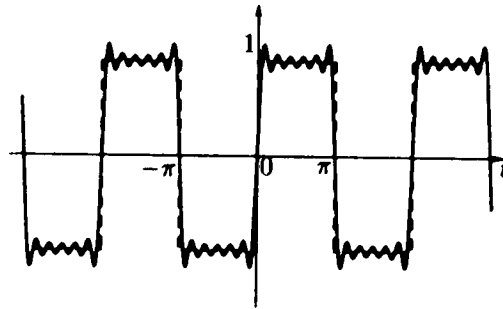


Fig. 2.14 Onda quadra e polinomio di Fourier approssimante.

mentre:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi \sin kt \, dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{-1}{k} \cos kt \right]_0^\pi = \\ &= \frac{-2}{k\pi} [(-1)^k - 1]. \end{aligned}$$

Da questo si ha:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2((-1)^k - 1)}{k\pi} \sin kt.$$

I coefficienti della serie di Fourier in forma esponenziale sono

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 = 0 \\ c_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = [(-1)^k - 1]j/(k\pi) \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$x(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} j e^{jkt}.$$

**Esempio 2.17** Consideriamo il segnale  $x(t)$ , detto *onda a dente di sega*:

$$x(t) = t - 2m \quad 2m \leq t < 2m + 2.$$

In figura 2.15 è rappresentata l'onda a dente di sega e qualche ridotta della serie di Fourier. In questo caso abbiamo:

$$T = 2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \pi, \quad f = \frac{1}{T}.$$

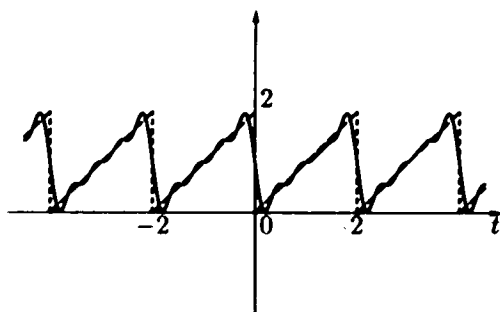


Fig. 2.15 Onda a dente di sega e polinomio di Fourier approssimante.

Inoltre si noti che  $x(t)$  non è né pari né dispari; in questo caso è più facile calcolare prima i coefficienti  $c_k$ :

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 t \, dt = 1$$

mentre per  $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2} \int_0^2 t e^{-jk\pi t} \, dt = \\ &= \frac{1}{-2jk\pi} [te^{-jk\pi t}]_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{-jk\pi} e^{-jk\pi t} \, dt = \\ &= \frac{1}{-2k\pi j} [2] - \frac{1}{2(-jk\pi)^2} [e^{-jk\pi t}]_0^2 = \\ &= \frac{1}{k\pi} j. \end{aligned}$$

Da questo si ha:

$$x(t) = 1 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} j e^{jk\pi t}.$$

Ricaviamo pure facilmente:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 = 1 \\ a_k &= +2 \operatorname{Re} c_k = 0 \\ b_k &= -2 \operatorname{Im} c_k = -2/(k\pi) \end{aligned}$$

e quindi la serie di Fourier, in forma trigonometrica, dell'onda a dente di sega diviene:

$$x(t) = 1 + \sum_1^{+\infty} \frac{-2}{k\pi} \sin k\pi t.$$



## 2.9 Traslazioni e riscaldamento

Supponiamo di avere un segnale  $x(t)$  di cui è nota la serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t} \quad (2.22)$$

e di porci il problema di calcolare la serie di Fourier del segnale ottenuto da esso mediante una *traslazione orizzontale*:

$$\tilde{x}(t) = x(t - b).$$

Calcoliamo i coefficienti  $\tilde{c}_k$  di  $\tilde{x}(t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t - b) e^{-jk\omega(t-b)} e^{-jk\omega b} dt. \end{aligned}$$

Si pone  $\tau = t - b$  e si ottiene:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_k &= \frac{1}{T} e^{-jk\omega b} \int_{-b}^{-b+T} x(\tau) e^{-jk\omega \tau} d\tau = \\ &= c_k e^{-jk\omega b} \end{aligned} \quad (2.23)$$

e quindi

$$\tilde{x}(t) = x(t - b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t} e^{-jk\omega b}. \quad (2.24)$$

Se invece sottoponiamo il segnale  $x(t)$  a una *traslazione verticale*:

$$\hat{x}(t) = a + x(t) \quad (2.25)$$

l'unico coefficiente che viene cambiato è  $c_0$

$$\hat{c}_0 = a + c_0$$

e quindi:

$$\hat{x}(t) = a + x(t) = a + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}. \quad (2.26)$$

Un problema interessante sorge quando sottoponiamo il segnale  $x(t)$ , di periodo  $T$ , a un *riscaldamento*:

$$\tilde{x}(t) = x(\alpha t) \quad \alpha > 0. \quad (2.27)$$

In questo caso bisogna tenere conto che il periodo di  $\tilde{x}(t)$  non è  $T$ , ma  $T/\alpha$  e la sua frequenza angolare è  $\alpha\omega$ :

$$\tilde{c}_k = \frac{\alpha}{T} \int_0^{T/\alpha} \tilde{x}(t) e^{-jk(2\pi\alpha/T)t} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{T} \int_0^{T/\alpha} x(\alpha t) e^{-jk(2\pi/T)\alpha t} \frac{1}{\alpha} d(\alpha t) \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T x(\tau) e^{-jk(2\pi/T)\tau} d\tau = \\
&= c_k
\end{aligned} \tag{2.28}$$

dunque:

$$\tilde{x}(t) = x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega\alpha t} \quad \alpha > 0 \tag{2.29}$$

**Osservazione 2.3** Se  $\alpha < 0$ , con conti analoghi a quelli che ci hanno portato all'espressione (2.29), si ottiene:

$$\tilde{c}_k = c_{-k} \quad \alpha < 0 \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) = x(-|\alpha|t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-jk\omega|\alpha|t} = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{-k} e^{jk\omega|\alpha|t} \quad \alpha < 0.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

■

Un ulteriore problema è quello della *modificazione della ampiezza* del segnale  $x(t)$ , ovvero di una moltiplicazione per una costante  $\rho$ :

$$\check{x}(t) = \rho x(t). \tag{2.32}$$

I coefficienti di Fourier del nuovo segnale sono tutti moltiplicati per  $\rho$  e quindi si ha:

$$\check{x}(t) = \rho x(t) = \rho \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}. \tag{2.33}$$

**Esempio 2.18** Consideriamo come  $x(t)$  l'onda a dente di sega dell'esempio 2.17 e facciamo una traslazione a destra di  $1/2$ , ottenendone la nuova onda  $y(t)$  della figura 2.16.

La serie di Fourier di  $y(t)$  è:

$$y(t) = x\left(t - \frac{1}{2}\right) = 1 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} j e^{jk\pi t} \underbrace{e^{-jk\pi/2}}_{(-j)^k} \tag{2.34}$$

■

**Esempio 2.19** Trasliamo ora verso il basso di  $3/2$  il segnale  $y(t)$  dell'esempio 2.18 precedente, ottenendo il segnale  $z(t)$  della figura 2.17.

La serie di Fourier di  $z(t)$  risulta:

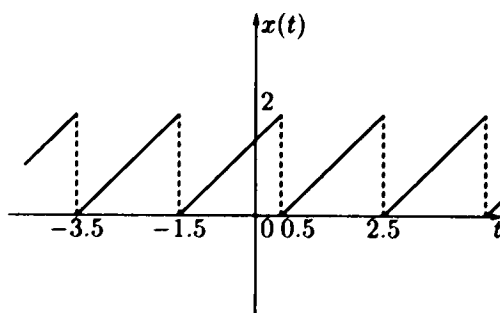


Fig. 2.16 Onda traslata orizzontalmente.

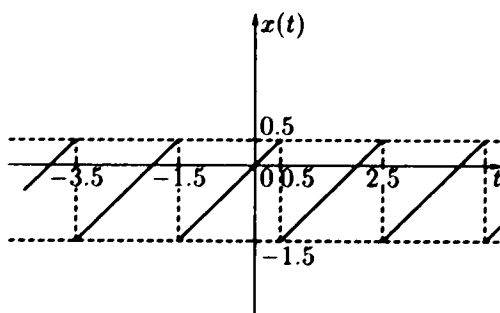


Fig. 2.17 Onda traslata verticalmente.

$$z(t) = -\frac{3}{2} + y(t) = -\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} j(-j)^k e^{jk\pi t}. \quad (2.35)$$

■

**Esempio 2.20** Modifichiamo il segnale  $z(t)$  dell'esempio 2.19 precedente, triplicandone la frequenza e ottenendo (vedi figura 2.18) il seguente segnale  $w(t)$ :

Otteniamo la serie di Fourier di  $w(t)$ :

$$w(t) = z(3t) = -\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k\pi} j(-j)^k e^{3jk\pi t}. \quad (2.36)$$

■

**Esempio 2.21** Modifichiamo il segnale  $w(t)$  dell'esempio 2.20 precedente, raddoppiandone l'ampiezza e otteniamo il seguente  $v(t)$  della figura 2.19.

La serie di Fourier di  $v(t)$  è:

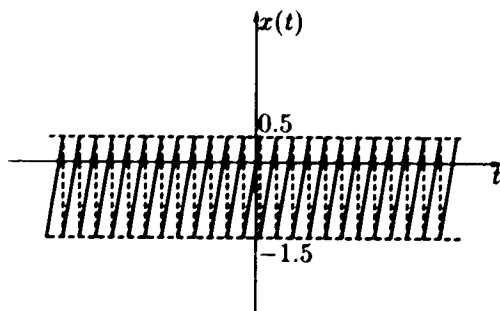


Fig. 2.18 Onda riscalata.

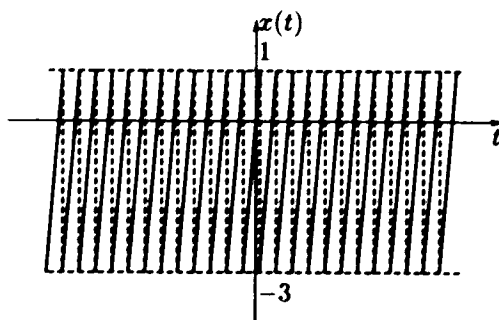


Fig. 2.19 Onda modificata in ampiezza.

$$v(t) = 2w(t) = -1 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{2}{k\pi} j(-j)^k e^{3jk\pi t}. \quad (2.37)$$

■

## 2.10 Convergenza puntuale

Se introduciamo ulteriori ipotesi sulla funzione  $x(t)$  possiamo stabilire in modo preciso il senso dell'uguaglianza che compare nella relazione (2.17) tra la funzione  $x(t)$  e la sua serie di Fourier. Premettiamo due importanti definizioni.

**Definizione 2.3** Diciamo che un segnale  $x(t)$  è continuo a tratti in un intervallo  $[a, b]$  se:

- 1)  $x(t)$  è continuo in  $]a, b[$  eccetto che in un numero finito di punti, che indichiamo con  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ):

$$a < t_1 < \dots < t_n < b;$$

2)  $x(t)$  ha in  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) delle discontinuità di prima specie finite ovvero:

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t) \quad \text{esiste finito}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t) \quad \text{esiste finito;}$$

3)  $x(t)$  negli estremi  $a$  e  $b$  dell'intervallo è tale che:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} x(t) \quad \text{esiste finito}$$

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) \quad \text{esiste finito}$$

**Definizione 2.4** Diciamo ancora che il segnale  $x(t)$ , continuo a tratti, è regolarizzato se soddisfa le ipotesi 1), 2) e 3) precedenti e se

4) nei punti  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), ove è discontinuo, assume il valore

$$x(t_i) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_i^-} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_i^+} x(t) \right);$$

5) negli estremi  $a$  e  $b$  dell'intervallo assume il valore:

$$x(a) = x(b) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow a^+} x(t) + \lim_{t \rightarrow b^-} x(t) \right);$$

**Definizione 2.5** Un segnale  $x(t)$  continuo a tratti è detto regolare a tratti in un intervallo  $[a, b]$  se:

a)  $x(t)$  è derivabile in  $]a, b[$  eccetto che in un numero finito di punti che indichiamo con  $t_j$  ( $0 \leq j \leq m$ ):

$$a < t_j < b \quad 0 \leq j \leq m$$

b) la funzione  $x'(t)$ , derivata di  $x(t)$ , definita per  $t \neq t_j$ , è tale che esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{t \rightarrow t_i^-} x'(t) \quad \text{esiste finito}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_i^+} x'(t) \quad \text{esiste finito}$$

d) negli estremi  $a$ ,  $b$  dell'intervallo si ha:

$$\lim_{t \rightarrow a^+} x'(t) \quad \text{esiste finito}$$

$$\lim_{t \rightarrow b^-} x'(t) \quad \text{esiste finito}$$

Definiamo ora il concetto di convergenza puntuale di una serie di funzioni.

**Definizione 2.6** Si dice che una serie di funzioni

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(t)$$

converge puntualmente a una funzione  $x(t)$  in un intervallo  $I$  se per ogni  $t_0 \in I$  la serie è convergente e si ha che

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(t_0) = x(t_0).$$

Le definizioni precedenti ci permettono di presentare un risultato importante sulla convergenza puntuale della serie di Fourier.

**Proposizione 2.1** Se il segnale  $x(t)$ , periodico di periodo  $T$ , è regolare a tratti e regolarizzato in  $[0, T]$  allora la serie di Fourier di  $x(t)$  converge puntualmente a  $x(t)$ . Si ha quindi che

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega t}$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

**Esempio 2.22** L'onda triangolare dell'esempio 2.15 è continua (e perciò continua a tratti e regolarizzata) ed è regolare a tratti in quanto i suoi punti di non derivabilità sono punti angolosi in cui esiste il limite delle derivate a destra e a sinistra. La serie di Fourier dell'onda triangolare  $x(t)$  converge perciò puntualmente a  $x(t)$  per ogni  $t$  reale. ■

**Esempio 2.23** Se si regolarizza l'onda quadra dell'esempio 2.16, ponendo

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2m\pi < t < (2m+1)\pi \\ 0 & \text{se } t = m\pi \\ -1 & \text{se } (2m+1)\pi < t < (2m+2)\pi \end{cases}$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ , si ottiene una funzione continua a tratti, regolarizzata e regolare a tratti: infatti la derivata di  $x(t)$  è nulla per ogni  $t \neq m\pi$ . Allora possiamo concludere che la serie di Fourier dell'onda quadra regolarizzata  $x(t)$  converge puntualmente a  $x(t)$ . ■

**Esempio 2.24** Se si regolarizza l'onda a dente di sega dell'esempio 2.17, ponendo

$$x(t) = \begin{cases} t - 2m & \text{se } 2m < t < 2m + 2 \\ 1 & \text{se } t = 2m \end{cases}$$

con  $m \in \mathbb{Z}$ , si ha una funzione continua a tratti, regolarizzata e regolare a tratti: infatti la derivata di  $x(t)$  è uguale a 1 per ogni  $t \neq 2m$ . Allora possiamo concludere che la serie di Fourier dell'onda  $x(t)$  a dente di sega, regolarizzata, converge puntualmente a  $x(t)$ . ■

**Osservazione 2.4** Nella proposizione 2.1 è richiesto che il segnale  $x(t)$  sia regolare a tratti e regolarizzato; infatti, per avere la convergenza puntuale non è sufficiente che sia continuo a tratti e regolarizzato. ■

## 2.11 Convergenza uniforme

**Definizione 2.7** Una serie di Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k(t)$$

converge uniformemente a  $x(t)$  in un intervallo  $I$  se le sue ridotte  $n$ -esime

$$X_n(t) = \sum_{k=-n}^n x_k(t)$$

sono tali che per ogni intorno di raggio  $\varepsilon$  di  $x(t)$  esista  $n_0 \in \mathbb{N}$  per cui per ogni  $n > n_0$  si abbia:

$$|x(t) - X_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I.$$

Nella figura 2.20 abbiamo un esempio di serie convergente uniformemente.

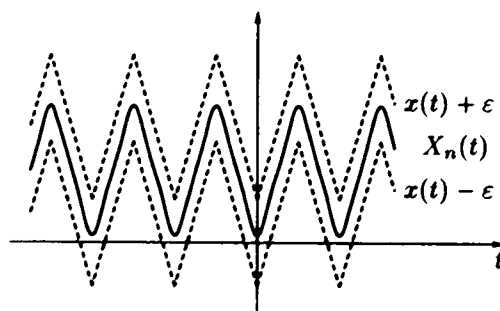


**Fig. 2.20** Convergenza uniforme.

Sulla convergenza uniforme di una serie di Fourier si può enunciare il seguente risultato.

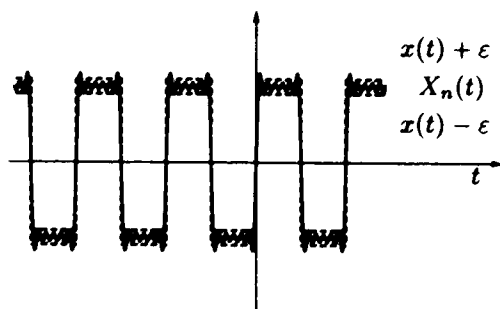


**Fig. 2.21** Convergenza non uniforme.

**Proposizione 2.2** *Se il segnale  $x(t)$ , periodico di periodo  $T$ , è continuo e regolare a tratti, allora la serie di Fourier di  $x(t)$  converge uniformemente a  $x(t)$ .*

**Esempio 2.25** La serie di Fourier dell'onda triangolare  $x(t)$  dell'esempio 2.15 converge uniformemente a  $x(t)$  in  $\mathbb{R}$ , in quanto essa è continua e regolare a tratti. ■

**Esempio 2.26** L'onda quadra e l'onda a dente di sega non sono continue. Non possiamo quindi utilizzare la proposizione precedente. La figura 2.21 ci fa intuire che, per l'onda quadra, la convergenza non è uniforme. Lo stesso avviene per l'onda a dente di sega. ■



---

# 3

## Funzioni analitiche

### 3.1 Funzioni complesse di variabile complessa

Nel capitolo precedente si sono viste funzioni di variabile reale a valori complessi. Questo capitolo è dedicato alle funzioni complesse di variabile complessa. Anche in questo caso ci chiediamo se sia possibile una rappresentazione grafica di queste funzioni. Una funzione  $f(z)$  di variabile complessa  $z = x + jy$  a valori complessi richiede per la sua rappresentazione uno spazio a quattro dimensioni: due per la variabile indipendente  $z$  e due per il valore  $f(z)$  della funzione. Per questo motivo non è possibile tracciare un "grafico" delle funzioni da  $\mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ .

Possiamo invece rappresentare graficamente le funzioni di variabile complessa a valori reali, ottenendo una superficie nello spazio  $(x, y, f)$ ; in particolare, assegnata una funzione  $f(z)$  le seguenti funzioni

$$|f(z)|, \quad \arg f(z), \quad \operatorname{Re} f(z), \quad \operatorname{Im} f(z),$$

sono a valori reali e quindi rappresentabili come grafico nello spazio tridimensionale.

**Esempio 3.1** Sia

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \quad z_0 \in \mathbb{C}.$$

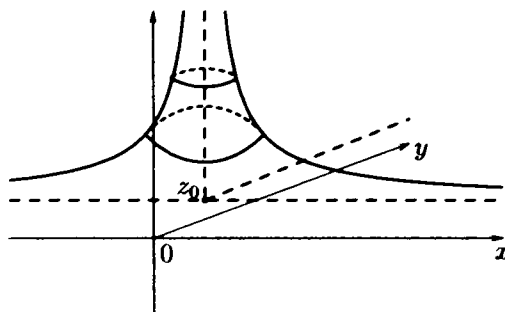
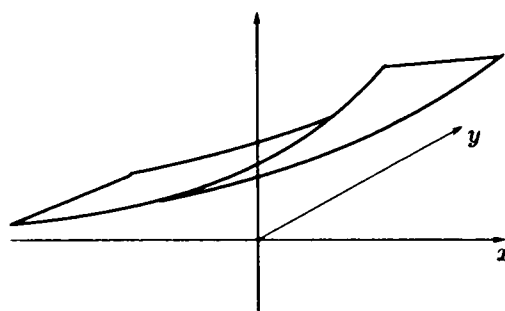
La funzione  $|f(z)|$  è definita per ogni  $z$  complesso diverso da  $z_0$  e ha come rappresentazione grafica una superficie non limitata in ogni intorno di  $z_0$  (vedi figura 3.1).

Ricordando la definizione di esponenziale complesso (vedi il capitolo 1), si può vedere che la funzione  $f(z) = e^z$  è definita per ogni  $z \in \mathbb{C}$ . Il grafico di

$$|f(z)| = |e^z| = e^x$$

è una superficie che nelle direzioni parallele all'asse delle  $y$  è costante mentre nelle direzioni parallele all'asse delle  $x$  si comporta come un esponenziale reale crescente (vedi figura 3.2). ■

Presentiamo qualche altro esempio di funzioni di variabile complessa a valori reali, di cui il lettore è invitato a tracciare il grafico:

Fig. 3.1 La funzione  $|f(z)| = 1/|z - z_0|$ .Fig. 3.2 La funzione  $|f(z)| = |e^z|$ .

$$f(z) = |z|, \quad f(z) = \arg z, \quad f(z) = \operatorname{Re} z, \quad f(z) = \operatorname{Im} z.$$

Sono invece esempi di funzioni complesse di variabile complessa i seguenti:

$$f(z) = z \quad f(z) = e^z \quad f(z) = z^* \quad f(z) = \sin z.$$

## 3.2 Limite del rapporto incrementale

Ricordiamo che, assegnato un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  e un numero reale  $r > 0$ , si definisce *intorno di  $z_0$  di raggio  $r$*  il cerchio

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Inoltre si dice che  $z_0$  è *punto di accumulazione* di  $A \subseteq \mathbb{C}$ , se in ogni intorno di  $z_0$  ci sono punti di  $A$  diversi da  $z_0$ . In analogia a quello che è noto per le funzioni di variabile reale, si definisce *dominio di una funzione  $f(z)$*  l'insieme degli  $z \in \mathbb{C}$ , per cui  $f(z)$  è definita.

Sia  $f(z)$  una funzione complessa di variabile complessa e sia  $z_0$  un punto di accumulazione del dominio di  $f(z)$ , si dice che  $f(z)$  ammette limite  $l$  per  $z \rightarrow z_0$  e si scrive

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l,$$

se, per ogni intorno  $V$  di  $l$ , esiste un intorno  $U$  di  $z_0$ , tale che per ogni  $z$  appartenente a  $U$  e al dominio di  $f$  con  $z \neq z_0$ , risulta che  $f(z) \in V$ .

Ricordando la definizione di intorno di infinito, data nel capitolo 1, la definizione di limite si estende al caso  $z_0 = \infty$  e  $l = \infty$ .

Una funzione è continua in un punto  $z_0$  del suo dominio se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Per definire la derivata in un punto  $z \in \mathbb{C}$ , consideriamo il rapporto incrementale

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

e calcoliamo il limite di questo rapporto al tendere a zero dell'incremento

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Questo limite può dipendere dal modo in cui l'incremento

$$\Delta z = \Delta x + j\Delta y$$

tende a zero, oppure essere indipendente dalla scelta della direzione su cui è calcolato. Vediamo due esempi.

**Esempio 3.2** Calcolare nel punto  $z \in \mathbb{C}$  il limite del rapporto incrementale di

$$f(z) = z^*.$$

Si tratta di calcolare il limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^* - z^*}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z^*}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - j\Delta y}{\Delta x + j\Delta y}. \quad (3.1)$$

Particolarizziamo il limite dell'equazione (3.1) a diverse direzioni:

a) direzione orizzontale ( $\Delta y = 0$ ); il limite diviene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

b) direzione verticale ( $\Delta x = 0$ ); il limite diviene:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{-j\Delta y}{j\Delta y} = -1,$$

c) direzione della bisettrice ( $\Delta x = \Delta y$ ); il limite diviene:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x - j\Delta x}{\Delta x + j\Delta x} = \frac{1-j}{1+j} = -j.$$

Dai punti a), b) e c) precedenti, risulta che il limite del rapporto incrementale dipende dalla direzione dell'incremento. ■

**Esempio 3.3** Calcolare nel punto  $z \in \mathbb{C}$  il limite del rapporto incrementale di

$$f(z) = e^z.$$

Dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} e^z \left( \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} \right). \quad (3.2)$$

Richiamiamo il limite fondamentale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{st} - 1}{st} = 1,$$

per ogni costante  $s$  reale o complessa. Particolarizziamo ora il limite dell'equazione (3.2) a diverse direzioni:

a) direzione orizzontale ( $\Delta y = 0$ ); il limite diviene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} e^z \left( \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \right) = e^z,$$

b) direzione verticale ( $\Delta x = 0$ ); il limite diviene:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} e^z \left( \frac{e^{j\Delta y} - 1}{j\Delta y} \right) = e^z,$$

c) direzione della bisettrice ( $\Delta x = \Delta y$ ); il limite diviene:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} e^z \left( \frac{e^{(1+j)\Delta x} - 1}{(1+j)\Delta x} \right) = e^z.$$

Dai punti a), b) e c) precedenti, risulta che il limite del rapporto incrementale non sembra dipendere dalla direzione dell'incremento. ■

**Osservazione 3.1** Gli esempi precedenti mostrano che vi sono funzioni [come  $f(z) = z^*$ ] per le quali cambiando direzione all'incremento cambia il valore del limite del rapporto incrementale.

Vi sono invece funzioni [come  $f(z) = e^z$ ] per le quali sembra che il valore del limite del rapporto incrementale non cambi al cambiare della direzione dell'incremento. ■

### 3.3 Analiticità

Le indicazioni del paragrafo precedente ci hanno fatto intravedere come vi siano funzioni di variabile complessa che hanno caratteristiche particolari rispetto al limite del rapporto incrementale. In questo paragrafo caratterizziamo tali funzioni.

**Definizione 3.1** Sia  $f(z)$  una funzione complessa di variabile complessa. Se esiste il

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

indipendentemente dal modo in cui  $\Delta z \rightarrow 0$ , tale limite è detto derivata di  $f(z)$  e si indica con:

$$f'(z), \quad \frac{df(z)}{dz}, \quad Df(z).$$

**Definizione 3.2** Se  $f(z)$  ammette derivata in ogni punto di un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ , si dice che  $f(z)$  è olomorfa o analitica in  $\Omega$ .

La parola *olomorfa* è più precisa dal punto di vista matematico, ma è poco usata; una funzione con le caratteristiche della definizione precedente viene più spesso detta *analitica*. La ragione è conseguenza dei risultati, che vedremo più avanti, sugli sviluppi in serie di Taylor.

Una prima proprietà delle funzioni olomorfe è data dal seguente teorema, in cui compaiono le *condizioni di Cauchy-Riemann* che sono più deboli (e più facili da verificarsi) della condizione di olomorfia.

**Teorema 3.1** Sia  $f(z)$  definita in un aperto  $\Omega$  del piano complesso; le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1) il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

esiste indipendente dal modo in cui  $\Delta z \rightarrow 0$ , cioè  $f(z)$  è derivabile  $\forall z \in \Omega$ , cioè ancora  $f(z)$  è olomorfa o analitica;

2)  $f(z)$  soddisfa  $\forall z \in \Omega$  la seguente condizione di Cauchy-Riemann:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \quad (3.3)$$

con  $\partial f / \partial x$  e  $\partial f / \partial y$  continue.

**Osservazione 3.2** Diamo qualche indicazione sulle affermazioni del teorema precedente. Per giustificare che  $1) \Rightarrow 2)$  basta osservare che

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{1}{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

sono, rispettivamente, il limite del rapporto incrementale lungo la direzione parallela all'asse  $x$  e lungo quella parallela all'asse  $y$ .

L'affermazione che  $2) \Rightarrow 1)$  segue dal fatto che, essendo le derivate parziali continue, si può scrivere il differenziale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (3.4)$$

che, per la condizione di Cauchy-Riemann (3.3), diviene

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} (dx + j dy);$$

da questo si può, con ulteriori passaggi, ottenere che

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

per cui esiste la derivata di  $f$  e la condizione 1) è verificata. ■

### 3.4 Condizione di Cauchy-Riemann

La condizione di Cauchy-Riemann già introdotta [vedi (3.3)] nel paragrafo precedente può essere espressa in altre forme e su di essa si possono fare alcune riflessioni. Separiamo la parte reale e la parte immaginaria di  $f(z)$

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

con  $u$  e  $v$  funzioni reali di  $x$  e di  $y$ . Allora:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{1}{j} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

e la condizione di Cauchy-Riemann (3.3) diviene:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}} \quad (3.5)$$

Osserviamo che le condizioni (3.5) corrispondono alla irrotazionalità del vettore di componenti  $u$  e  $v$ . Un altro modo abituale di presentare la condizione di Cauchy-Riemann è il seguente: si considerano i differenziali di  $z$  e di  $z^*$

$$\begin{aligned} dz &= dx + j dy, \\ dz^* &= dx - j dy, \end{aligned}$$

e quindi inversamente

$$dx = \frac{1}{2}(dz + dz^*),$$

$$dy = \frac{1}{2j}(dz - dz^*);$$

inserendo queste equazioni nella espressione (3.4) si ottiene la relazione:

$$df = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz^*;$$

questa conduce a introdurre i simboli:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Con queste notazioni si ottiene la relazione:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial z^*} dz^*. \quad (3.7)$$

La condizione (3.3) di Cauchy-Riemann si scriva allora:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0.} \quad (3.8)$$

In altre parole, affinché  $f(z)$  sia olomorfa è necessario e sufficiente che, nella espressione (3.7) del differenziale  $df$ , il coefficiente di  $dz^*$  sia nullo. O ancora:  $df$  deve essere proporzionale a  $dz$  e il coefficiente di proporzionalità risulta essere la derivata  $f'(z)$ .

### 3.4.1 Armonicità

Supponiamo che  $u$  e  $v$  ammettano derivate seconde continue; derivando la prima delle equazioni (3.5) di Cauchy-Riemann rispetto a  $x$  e la seconda rispetto a  $y$  si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (3.9)$$

in modo analogo derivando la prima delle espressioni (3.5) rispetto a  $\partial y$  e la seconda rispetto a  $\partial x$  si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (3.10)$$

Le espressioni (3.9) e (3.10) si usano scrivere in modo più sintetico come

$$\Delta u = 0, \quad (3.11)$$

$$\Delta v = 0, \quad (3.12)$$

dove abbiamo introdotto il *laplaciano* o *operatore di Laplace*, definito da

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (3.13)$$

Abbiamo ottenuto questo risultato: se  $f(z)$  è olomorfa, le funzioni parte reale  $u(x, y)$  e parte immaginaria  $v(x, y)$  soddisfano l'equazione di Laplace o, come si usa dire, sono *armoniche*.

**Esempio 3.4** Dimostrare che la funzione

$$u(x, y) = xe^{-y} \cos x - ye^{-y} \sin x \quad (3.14)$$

è *armonica*.

Calcoliamo le derivate parziali prime e seconde della funzione  $u(x, y)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \cos x - xe^{-y} \sin x - ye^{-y} \cos x; \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -e^{-y} \sin x - e^{-y} \sin x - xe^{-y} \cos x + ye^{-y} \sin x = \\ &= (y - 2)e^{-y} \sin x - xe^{-y} \cos x; \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -xe^{-y} \cos x - e^{-y} \sin x + ye^{-y} \sin x; \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= xe^{-y} \cos x + e^{-y} \sin x + e^{-y} \sin x - ye^{-y} \sin x = \\ &= -(y - 2)e^{-y} \sin x + xe^{-y} \cos x. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sommando le derivate seconde otteniamo:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

**Esempio 3.5** Con la stessa  $u(x, y)$  dell'esempio precedente si determini  $v(x, y)$  tale che:

$$f = u + jv$$

sia *olomorfa*.

Dalla prima delle equazioni (3.5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

si ricava:

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int (e^{-y} \cos x - xe^{-y} \sin x - ye^{-y} \cos x) dy = \\ &= -e^{-y} \cos x + xe^{-y} \sin x + ye^{-y} \cos x + e^{-y} \cos x + F(x) = \\ &= xe^{-y} \sin x + ye^{-y} \cos x + F(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$



Derivando la (3.19) otteniamo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y} \sin x + x e^{-y} \cos x - y e^{-y} \sin x + F'(x). \quad (3.20)$$

Per la seconda delle (3.5), dalle (3.17) e (3.20) si ricava che

$$F'(x) = 0$$

e quindi

$$F(x) = \text{cost.}$$

Si ha in definitiva che

$$v = x e^{-y} \sin x + y e^{-y} \cos x + \text{cost.} \quad (3.21)$$

**Esempio 3.6** Esprimere la funzione  $f$  dell'esercizio precedente come funzione di  $z$ .

Per rispondere a questo quesito, utilizziamo un risultato sul principio di identità delle funzioni analitiche, che sarà esposto nel paragrafo 3.12 (si veda in particolare il corollario 1 e l'osservazione 3.19):

*Se due funzioni analitiche in un aperto connesso  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  coincidono su un arco o su un segmento di retta o su una retta allora coincidono in tutto  $\Omega$ .*

Sia

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + jv(x, y) = \\ &= x e^{-y} \cos x - y e^{-y} \sin x + j(x e^{-y} \sin x + y e^{-y} \cos x), \end{aligned}$$

calcolando questa funzione sull'asse reale, si ha

$$f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0);$$

ovvero:

$$f(x) = x \cos x + jx \sin x = x e^{jx};$$

ora, ponendo  $z$  al posto di  $x$ , prolunghiamo  $f(x)$  a tutto il piano complesso, e otteniamo:

$$f(z) = z e^{jz},$$

si può constatare che:

$$u(x, y) = \text{Re } z e^{jz} \quad v(x, y) = \text{Im } z e^{jz}.$$

**Osservazione 3.3** Le funzioni di variabile complessa a valori reali costituiscono un sottoinsieme delle funzioni complesse di variabile complessa. Ci si può chiedere quando una funzione a valori reali

$$f(x, y) = u(x, y) + j0$$

è olomorfa.

Per le condizioni (3.5) di Cauchy-Riemann si deve avere [essendo  $v(x, y) = 0$ ]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(x, y) = \text{cost.}$$

Le funzioni reali di variabile complessa, che non siano costanti, sono dunque esempi di funzioni non olomorfe. Alcuni esempi sono:

$$|z|, \quad \arg z, \quad \operatorname{Re} z, \quad \operatorname{Im} z, \quad z \cdot z^*$$

■

**Osservazione 3.4** Le regole di derivazione e le derivate di funzioni elementari sono formalmente analoghe a quelle delle funzioni di variabile reale.

### Regole di derivazione.

Siano  $f(z)$  e  $g(z)$  analitiche nell'aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{C}$ , sia  $\phi$  analitica in un sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  con l'immagine di  $\phi$  inclusa in  $\Omega$ ; valgono le seguenti regole di derivazione:

- 1) Linearità:  $D(\alpha f(z) + \beta g(z)) = \alpha f'(z) + \beta g'(z)$ ;
- 2) Prodotto:  $D(f(z) \cdot g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ ;
- 3) Quoziente:  $D\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \quad \text{se } g(z) \neq 0$ ;
- 4) Composizione:  $D(f(\phi(z))) = f'(\phi(z))\phi'(z)$ .

### Derivate di alcune funzioni analitiche.

Le funzioni  $z^n$ ,  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cosh z$  sono analitiche in  $\mathbb{C}$  e le loro derivate sono:

$$\begin{aligned} Dz^n &= nz^{n-1} & De^z &= e^z \\ D \sin z &= \cos z & D \cos z &= -\sin z \\ D \sinh z &= \cosh z & D \cosh z &= \sinh z. \end{aligned}$$

Le funzioni polinomiali sono analitiche in  $\mathbb{C}$  e la loro derivata si calcola applicando la regola di linearità; le funzioni razionali (quozienti di due polinomi) sono analitiche in  $\mathbb{C}$ , esclusi i punti in cui si annulla il denominatore; per calcolarne la derivata si applica la regola di derivazione del quoziente. ■

## 3.5 Integrali di linea in campo complesso

Integrare una funzione di variabile complessa lungo un cammino  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$  equivale a calcolare una coppia di integrali di variabile reale.

Sia  $f(z)$  una funzione complessa di variabile complessa  $z = x + jy$  e sia  $\gamma$  un cammino nel piano complesso di equazione:

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (3.22)$$

con  $\varphi(t)$  e  $\psi(t)$  dotate di derivata prima continua; una curva con queste caratteristiche è detta *regolare*.

Indichiamo con

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(z). \end{aligned}$$

L'integrale di  $f(z)$  lungo il cammino  $\gamma$  si indica con

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz$$

ed è definito da

$$\begin{aligned} & \int_a^b [u(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) \, dt - v(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \, dt] + \\ & + j \int_a^b [v(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) \, dt + u(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \, dt]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Se il lettore ha familiarità con le forme differenziali, può osservare che l'integrale (3.23) può essere interpretato come

$$\int_{\gamma} [u(x, y) \, dx - v(x, y) \, dy] + j \int_{\gamma} [v(x, y) \, dx + u(x, y) \, dy], \quad (3.24)$$

ove compaiono integrali di linea di forme differenziali. Posto  $dz = dx + j \, dy$ , le forme differenziali in (3.23) possono essere ottenute dalla moltiplicazione formale seguente:

$$\begin{aligned} f(z) \, dz &= [u(x, y) + jv(x, y)] [dx + j \, dy] = \\ &= [u(x, y) \, dx - v(x, y) \, dy] + j[v(x, y) \, dx + u(x, y) \, dy]. \end{aligned}$$

Presentiamo ora alcuni esempi che ci permetteranno di fare alcune considerazioni sulla dipendenza o meno degli integrali dal cammino di integrazione.

**Esempio 3.7** Si calcoli

$$\int_{\gamma_1} z^* \, dz$$

lungo il cammino  $\gamma_1$  così definito (vedi figura 3.3):

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 2] \quad (3.25)$$

Dalla formula (3.23) si ha:

$$\int_{\gamma_1} z^* dz = \int_0^2 (2t^2 dt + t dt - jt^2 dt + jt^2 dt) = \left[ \frac{5}{2} t^2 + j0 \right]_0^2 = 10.$$

Si osservi che, per la (3.24), si può anche scrivere:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} z^* dz &= \int_{\gamma_1} [x - jy] [dx + j dy] = \\ &= \int_{\gamma_1} [x dx + y dy] + j \int_{\gamma_1} [-y dx + x dy] = \\ &= \int_0^2 (2t^2 dt + t dt - jt^2 dt + jt^2 dt) = \left[ \frac{5}{2} t^2 + j0 \right]_0^2 = 10. \end{aligned}$$

■

**Esempio 3.8** Si consideri l'integrale della stessa funzione dell'esempio precedente, ma lungo il cammino  $\gamma_2 = \gamma_{2a} \cup \gamma_{2b}$  (vedi figura 3.3):

$$\gamma_{2a} : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 4] \quad (3.26)$$

$$\gamma_{2b} : \begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 2] \quad (3.27)$$

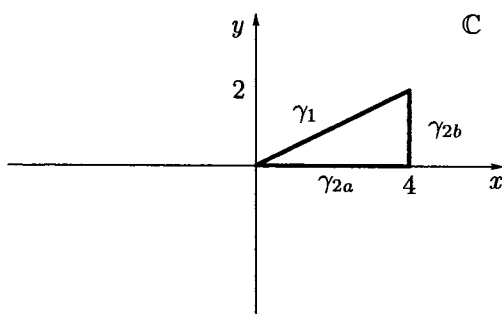


**Fig. 3.3** Cammini  $\gamma_1$ ,  $\gamma_{2a}$  e  $\gamma_{2b}$ .

Si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} z^* dz &= \int_{\gamma_2} [x - jy] [dx + j dy] = \\ &= \int_{\gamma_{2a}} [x dx + y dy] + j \int_{\gamma_{2a}} [-y dx + x dy] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma_{2b}} [x \, dx + y \, dy] + j \int_{\gamma_{2b}} [-y \, dx + x \, dy] + \\
&= \int_0^4 [t \, dt] + \int_0^2 [t \, dt] + j \int_0^2 [4 \, dt] = \\
&= \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^4 + \left[ \frac{t^2}{2} + 4jt \right]_0^2 = 8 + 2 + 8j = 10 + 8j.
\end{aligned}$$

Si osservi che i risultati degli esempi 3.7 e 3.8 sono differenti. ■

**Esempio 3.9** Si calcoli:

$$\int_{\gamma_1} e^z \, dz$$

lungo in cammino  $\gamma_1$  definito dalle relazioni (3.25).

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} e^z \, dz &= \int_{\gamma_1} [e^x (\cos y + j \sin y)] [dx + j \, dy] = \\
&= \int_{\gamma_1} [e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy] + j \int_{\gamma_1} [e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy] = \\
&= \int_0^2 (e^{2t} (\cos t) 2 \, dt - e^{2t} \sin t \, dt + j e^{2t} (\sin t) 2 \, dt + j e^{2t} \cos t \, dt) = \\
&= \left[ \frac{4}{5} \left( e^{2t} \cos t + \frac{1}{2} e^{2t} \sin t - \frac{1}{2} e^{2t} \sin t + \frac{1}{4} e^{2t} \cos t \right) \right]_0^2 + \\
&\quad + \left[ \frac{4}{5} \left( j e^{2t} \sin t - j \frac{1}{2} e^{2t} \cos t + j \frac{1}{2} e^{2t} \cos t + j \frac{1}{4} e^{2t} \sin t \right) \right]_0^2 = \\
&= [e^{2t} \cos t + j e^{2t} \sin t]_0^2 = [e^{2t+jt}]_0^2 = e^{4+2j} - 1.
\end{aligned}$$

■

**Esempio 3.10** Si consideri l'integrale della stessa funzione dell'esempio 3.9, ma lungo il cammino  $\gamma_2 = \gamma_{2a} \cup \gamma_{2b}$  definito dalle relazioni (3.26) e (3.27) (vedi figura 3.3).

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} e^z \, dz &= \int_{\gamma_2} [e^x (\cos y + j \sin y)] [dx + j \, dy] = \\
&= \int_{\gamma_2} [e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy] + j \int_{\gamma_2} [e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy] = \\
&= \int_{\gamma_{2a}} [e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy] + \int_{\gamma_{2b}} [e^x \cos y \, dx - e^x \sin y \, dy] + \\
&\quad + j \int_{\gamma_{2a}} [e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy] + j \int_{\gamma_{2b}} [e^x \sin y \, dx + e^x \cos y \, dy] = \\
&= \int_0^4 e^t \, dt - \int_0^2 e^4 \sin t \, dt + j \int_0^2 e^4 \cos t \, dt = [e^t]_0^4 + [e^4 \cos t + j e^4 \sin t]_0^2 = \\
&= e^4 - 1 + e^4 \cos 2 - e^4 + j e^4 \sin 2 = \\
&= e^4 (\cos 2 + j \sin 2) - 1 = e^{4+2j} - 1.
\end{aligned}$$

Si osservi che i risultati degli esempi 3.9 e 3.10 sono uguali. ■

**Osservazione 3.5** Gli esempi precedenti mostrano che vi sono funzioni [come  $f(z) = z^*$ ] per le quali, cambiando il cammino di integrazione, che congiunge due dati punti di  $\mathbb{C}$ , cambia il valore dell'integrale.

Vi sono invece funzioni [come  $f(z) = e^z$ ] per le quali sembra che il valore dell'integrale non cambi al cambiare del cammino di integrazione, ma dipenda solo dal punto di partenza e da quello di arrivo del cammino. ■

## 3.6 Teorema e formule di Cauchy

Diremo che una funzione  $f(z)$ , analitica in un aperto  $\Omega$  di frontiera regolare  $\Gamma$ , è *analitica in  $\Omega \cup \Gamma$*  se vi è un aperto  $\Omega'$  che include  $\Omega \cup \Gamma$  in cui  $f(z)$  è analitica.

**Teorema 3.2 (di Cauchy)** *Se un aperto  $\Omega$  è limitato e ha come bordo una o più curve chiuse regolari (vedi figura 3.4):*

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_n$$

*e la funzione  $f(z)$  è analitica in ogni punto dell'insieme  $\Omega \cup \Gamma$ , allora:*

$$\boxed{\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.} \quad (3.28)$$

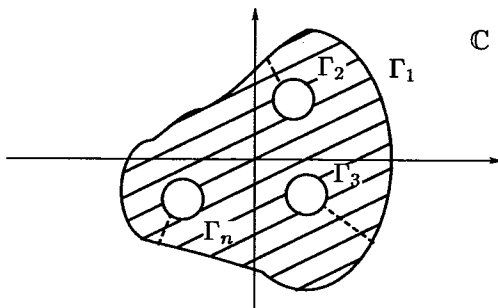


**Fig. 3.4** Il teorema di Cauchy per  $\Omega$  non semplicemente connesso.

**Dimostrazione<sup>1</sup>** Ricordando la formula (3.23) che definisce l'integrale di linea in campo complesso si ha:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + j \int_{\Gamma} [v(x, y) dx + u(x, y) dy].$$

<sup>1</sup>In questa dimostrazione si utilizzano risultati della teoria dei campi vettoriali e in particolare il teorema di Green.

Ora se  $\Omega$  è semplicemente connesso (ovvero ha come bordo un'unica curva chiusa), applicando il teorema di Green si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] &= \int_{\Omega} \left( -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) dx dy \\ \int_{\Gamma} [v(x, y) dx + u(x, y) dy] &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Per le condizioni di Cauchy-Riemann gli integrandi nelle espressioni (3.29) sono nulli, dunque segue l'asserto. Se  $\Omega$  non è semplicemente connesso, basta che mediante un numero finito di tagli ci si riduca al caso semplicemente connesso (vedi figura 3.4). ■

### Formula di Cauchy

**Teorema 3.3** *Sia  $\Omega$  un aperto come nel teorema 3.2 precedente e sia  $f(z)$  analitica in  $\Omega \cup \Gamma$ , se  $z_0 \in \Omega$  si ha:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad z_0 \in \Omega.$$

(3.30)

**Dimostrazione** Scegliamo  $\delta$  sufficientemente piccolo, in modo che la circonferenza di raggio  $\delta$  e centro  $z_0$  (che indichiamo con  $\gamma_{\delta}$ ) risulti interna a  $\Omega$ . Per il teorema 3.2 di Cauchy si ha

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma \cup (-\gamma_{\delta})} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

dove  $(-\gamma_{\delta})$  significa che  $\gamma_{\delta}$  è percorsa in senso orario. Allora:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (3.31)$$

Per calcolare l'ultimo integrale dell'equazione (3.31), osserviamo che la circonferenza  $\gamma_{\delta}$  è formata dagli  $z$  che distano  $\delta$  da  $z_0$ , ovvero dagli  $z$  tali che

$$|z - z_0| = \delta;$$

questo significa che

$$z - z_0 = \delta e^{j\vartheta}; \quad (3.32)$$

l'equazione (3.32) costituisce una parametrizzazione della curva  $\gamma_{\delta}$  per la quale

$$dz = j\delta e^{j\vartheta} d\vartheta$$

e quindi:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_{\delta}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \delta e^{j\vartheta})}{\delta e^{j\vartheta}} j\delta e^{j\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{j\vartheta}) d\vartheta.$$

Questo integrale non dipende da  $\delta$ , quindi il suo valore coincide col limite per  $\delta \rightarrow 0$ . Si può dimostrare che, per la continuità di  $f$  rispetto a  $\delta$  e  $\vartheta$ , è lecito scambiare limite e integrale e quindi:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \delta e^{j\vartheta}) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0) d\vartheta = \frac{1}{2\pi} 2\pi f(z_0) = f(z_0).$$

Questo conclude la dimostrazione della formula di Cauchy. ■

**Osservazione 3.6** La formula mostra che, se  $f(z)$  è analitica, si può conoscere il valore di  $f(z)$  all'interno di  $\Omega$  se si conoscono i valori di  $f(z)$  su  $\Gamma$ . ■

**Esempio 3.11** Si consideri una funzione costante

$$f(z) = k$$

e quindi analitica. Verifichiamo che il suo valore nello zero è determinato dalla conoscenza dei suoi valori sulla circonferenza unitaria  $\gamma$  attraverso la formula (3.30):

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{k}{z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{k}{e^{j\vartheta}} j e^{j\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} k j d\vartheta = k. \end{aligned}$$

**Osservazione 3.7** Quando il punto  $z_0$  non appartiene né a  $\Omega$  né al suo bordo  $\Gamma$  si ha:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0, \quad z_0 \notin \Omega \cup \Gamma.} \quad (3.33)$$

L'espressione (3.33) è talvolta indicata come *seconda formula di Cauchy*. In effetti l'integrale nella (3.33) è nullo per il teorema di Cauchy, essendo l'integrando olomorfo in  $\Omega \cup \Gamma$ . ■

### 3.6.1 Esistenza delle derivate di tutti gli ordini

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{C}$ , con frontiera regolare  $\Gamma$ , e sia  $f(z)$  olomorfa in  $\Omega \cup \Gamma$ ; allora per la formula di Cauchy (3.30) si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \Omega.$$

Il fatto che  $f$  sia continua con derivate continue permette di derivare sotto il segno di integrazione e di avere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - (x + jy))^2} d\xi, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - (x + jy))^2} j d\xi. \end{aligned}$$



Si ritrova quindi la condizione di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{j} \frac{\partial f}{\partial y},$$

ognuna delle espressioni precedenti coincide con  $f'(z)$ , per cui si ha:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi. \quad (3.34)$$

Ragionando nello stesso modo su  $f'(z)$  si può derivare una seconda volta e si ottiene che  $f'$  soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann in  $\Omega$  e inoltre:

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3} d\xi. \quad (3.35)$$

Proseguendo ripetutamente si ottiene:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad z \in \Omega. \quad (3.36)$$

## 3.7 Serie di potenze

Presentiamo alcune definizioni e alcuni risultati sulle serie di potenze in campo complesso; le serie di potenze costituiscono un importante strumento per lo studio delle funzioni analitiche.

### 3.7.1 Raggio di convergenza

**Definizione 3.3** *Assegnati una successione  $(a_n)$  di numeri complessi e un punto  $z_0$  del piano complesso si dice serie di potenze un'espressione del tipo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

*Il punto  $z_0$  viene detto centro della serie e i numeri  $a_n$  coefficienti della serie.*

Nel seguito consideriamo serie di potenze con centro nell'origine; la loro formula generale è

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \quad (3.37)$$

la modifica delle definizioni e degli enunciati seguenti al caso di serie centrate in  $z_0 \neq 0$  sono ovvie e sono lasciate al lettore.

**Definizione 3.4** *Fissato un punto  $z_1 \in \mathbb{C}$  si dice che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*

- converge puntualmente in  $z_1$  se risulta convergente la serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ ;

- converge assolutamente in  $z_1$  se risulta convergente la serie numerica (a termini reali non negativi)  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n|$ .

Se una serie di potenze converge assolutamente in  $z_1 \in \mathbb{C}$  essa risulta anche convergente in  $z_1$ .

Per le serie di potenze è possibile stabilire in generale una importante proprietà dell'insieme di convergenza, vale a dire del sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  in cui la serie converge.

È immediato notare che questo sottoinsieme non è mai vuoto; infatti la serie (3.37) converge in almeno un punto: il punto  $z_1 = 0$ .

Lo studio della convergenza della serie per  $z_1 \neq 0$  è basato sul seguente enunciato.

**Teorema 3.4** *Si consideri la serie di potenze (3.37) e un punto  $z_1 \neq 0$ ; allora*

- *se la serie converge in  $z_1 \neq 0$ , allora essa converge assolutamente per tutti gli  $z$  tali che  $|z| < |z_1|$ ;*
- *se la serie non converge in  $z_1$ , allora essa non converge in tutti gli  $z$  tali che  $|z| > |z_1|$ .*

La convergenza in  $z_1$  implica quindi la convergenza (assoluta) in tutti i punti interni al cerchio di centro l'origine e raggio  $|z_1|$ , mentre la non convergenza in  $z_1$  esclude che vi possa essere convergenza per tutti i punti esterni a tale cerchio.

**Osservazione 3.8** Dall'enunciato del teorema 3.4 osserviamo che la convergenza (o la non convergenza) della serie in  $z_1$  non fornisce nessuna informazione sulla convergenza o sulla non convergenza negli altri punti della circonferenza di raggio  $|z_1|$ . ■

**Esempio 3.12** *La serie geometrica*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge (assolutamente) per  $|z| < 1$ , mentre non converge per  $|z| \geq 1$ .

Conviene prendere  $z_1$  reale positivo, con  $z_1 < 1$ ; ricordando i risultati sulla convergenza della serie geometrica in campo reale e applicando il teorema 3.4 possiamo stabilire la convergenza assoluta per  $|z| < 1$ . Se  $|z| \geq 1$  la serie non converge, in quanto il suo termine generale non è infinitesimo, come stabilito nell'esempio 1.9.

Si osservi che nell'esempio 1.10 siamo arrivati con calcoli diretti a determinare esplicitamente la somma della serie geometrica per  $|z| < 1$ . ■

**Esempio 3.13** Nell'esempio 1.11 abbiamo verificato che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge (assolutamente) per ogni  $z$  complesso. ■

**Esempio 3.14** *La serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n.$$

converge solo nel punto  $z = 0$ .

È immediato verificare, applicando il criterio del rapporto, che la serie non converge assolutamente in nessun punto  $z_1 \neq 0$ . Supponiamo, per assurdo, che la serie sia convergente in un punto  $z_2 \neq 0$ ; applicando il teorema 3.4 essa dovrebbe risultare assolutamente convergente in tutto il cerchio  $|z| < |z_2|$ , contrariamente a quanto appena stabilito. ■

Riflettendo sui tre esempi precedenti, possiamo intuire come una serie di potenze (3.37) possa presentare tre possibili comportamenti:

- 1) convergenza all'interno di un cerchio di raggio  $R > 0$  e non convergenza all'esterno di tale cerchio;
- 2) convergenza in ogni punto di  $\mathbb{C}$ ;
- 3) convergenza solo in  $z = 0$ .

Per descrivere queste tre situazioni si introduce il concetto di *raggio di convergenza* della serie di potenze. Il raggio di convergenza è un numero reale non negativo oppure è infinito; nel primo caso diciamo che il raggio di convergenza è il numero reale positivo  $R$ , nel secondo caso che il raggio di convergenza è infinito, mentre nel terzo caso diciamo che è nullo.

**Osservazione 3.9** L'informazione che una serie di potenze ha come raggio di convergenza il numero reale positivo  $R$  non ci permette di concludere niente sul comportamento della serie nei punti della circonferenza  $|z| = R$ .

L'esempio 3.12 ha mostrato una serie con  $R = 1$  che non converge sulla circonferenza  $|z| = 1$ . I due esempi seguenti presentano delle serie con raggio di convergenza unitario e comportamenti differenti per  $|z| = 1$ . ■

**Esempio 3.15** *La serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

converge (assolutamente) per  $|z| \leq 1$ , mentre non converge per  $z > 1$ .

Conviene prendere  $z_1$  reale positivo; se, in particolare, scegliamo  $z_1 = 1$  otteniamo una serie convergente; grazie al teorema 3.4 possiamo concludere che la serie di potenze converge assolutamente per  $|z| < 1$ .

Se  $|z| > 1$ , osserviamo che il termine generale  $z^n/n^2$  non tende a zero (il suo modulo tende all'infinito); in virtù della condizione necessaria di convergenza, si può concludere che la serie non converge.

Resta da esaminare il caso dei punti di modulo unitario, per i quali il teorema 3.4 non permette di trarre conclusioni. Possiamo studiare direttamente la convergenza uniforme: poiché  $|z^n|/n^2 = 1/n^2$ , si ha, per il criterio del confronto delle serie a termini reali non negativi, la convergenza assoluta. ■

**Esempio 3.16** *La serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge (assolutamente) per  $|z| < 1$ , converge per  $z = -1$ , mentre diverge per  $z = 1$ .

Se poniamo  $z = -1$  otteniamo la serie armonica a segni alterni, che è convergente, mentre per  $z = 1$  abbiamo la serie armonica, che è divergente. Questo permette di concludere che il raggio di convergenza è uno e di osservare che sulla circonferenza unitaria esistono sia punti in cui la serie converge che punti in cui la serie non converge. ■

### 3.7.2 Operazioni sulle serie di potenze

È possibile sommare due serie di potenze; la serie così definita converge almeno dove convergono entrambe le serie, come risulta dal seguente enunciato.

**Teorema 3.5** *Assegnate due serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

con raggio di convergenza  $R_1$  ed  $R_2$  rispettivamente, si definisce la serie somma come

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n;$$

questa serie ha raggio di convergenza maggiore o uguale al minimo tra  $R_1$  ed  $R_2$ . In particolare, se  $R_1 \neq R_2$ , la serie somma ha come raggio di convergenza il minimo tra  $R_1$  e  $R_2$ .

Ora studiamo le relazioni che esistono tra le serie di potenze e l'operazione di derivazione, premettendo una definizione.

**Definizione 3.5** *Assegnata la serie di potenze (3.37) si definisce sua serie derivata la serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

ottenuta derivando formalmente termine a termine la (3.37).

Una serie di potenze, all'interno del cerchio di convergenza, definisce una funzione  $f(z)$ ; viene spontaneo chiedersi se  $f(z)$  sia derivabile e, in caso affermativo, se sia vero che la serie di potenze ottenuta derivando termine a termine converga alla funzione  $f'(z)$ .

La risposta a questa domanda è positiva, come mostrano gli enunciati seguenti, la cui giustificazione rigorosa esula dagli scopi di questa trattazione.

**Teorema 3.6** *Una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza.*

**Teorema 3.7** *Una serie di potenze definisce, all'interno del suo cerchio di convergenza, una funzione  $f(z)$  derivabile infinite volte; la derivata di ordine  $k$  della funzione  $f(z)$  è la somma della serie ottenuta derivando  $k$  volte termine a termine la serie di partenza*

$$f^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) = \sum_{n=k}^{\infty} \left( \frac{d^k}{dz^k} a_n z^n \right).$$

**Esempio 3.17** Nell'esempio 1.10 abbiamo mostrato che in  $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Applicando il teorema precedente, derivando termine a termine la serie geometrica si ottiene una serie di potenze convergente alla derivata di  $1/(1-z)$ :

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

Il procedimento può essere iterato, ottenendo lo sviluppo in serie di potenze delle derivate di ogni ordine della funzione  $1/(1-z)$ . ■

Importanti conseguenze del teorema precedente sono date dai due seguenti teoremi:

**Teorema 3.8** Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  una serie di potenze con raggio di convergenza  $R > 0$ . Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0, \quad \text{per } |z| < R$$

allora  $a_n = 0$  per ogni  $n$ .

**Teorema 3.9 (Principio di identità delle serie di potenze)** Siano  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  due serie di potenze con raggio di convergenza  $R > 0$ . Se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad \text{per } |z| < R$$

allora  $a_n = b_n$  per ogni  $n$ .

### 3.8 Sviluppi in serie di Taylor

La formula (3.36) mostra che una funzione olomorfa ammette in ogni punto  $z_0$  di olomorfia derivate di tutti gli ordini. Poiché una proprietà analoga vale per le serie di potenze, viene spontaneo chiedersi se è possibile sviluppare la funzione  $f(z)$  in serie di potenze di  $z - z_0$  nell'intorno di un punto  $z_0$  di olomorfia. A questa domanda risponde affermativamente il seguente teorema.

**Teorema 3.10** Sia  $f(z)$  olomorfa in  $\Omega \cup \Gamma$  ( $\Gamma$  frontiera di  $\Omega$ ). Sia  $z_0 \in \Omega$  e  $U_\delta(z_0)$  l'interno di un cerchio di raggio  $\delta$  e centro  $z_0$  contenuto in  $\Omega$  (vedi figura 3.5). Allora  $f(z)$  può essere espressa nella forma

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Questa serie di potenze si chiama serie di Taylor di  $f$  centrata in  $z_0$  e converge per  $z \in U_\delta(z_0)$ .

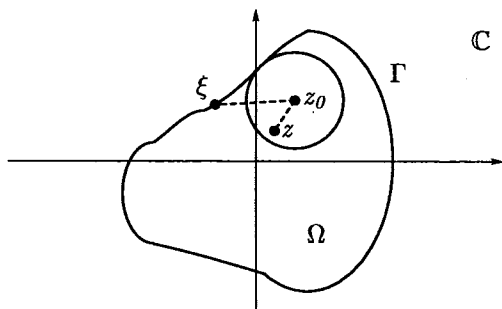


Fig. 3.5 Serie di Taylor.

**Dimostrazione**<sup>2</sup> Partiamo dalla formula di Cauchy (3.30)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (3.39)$$

con:

$$z \in U_\delta(z_0)$$

e quindi con  $\xi \in \Gamma$  (vedi figura 3.5):

$$|\xi - z_0| \geq \delta > |z - z_0|$$

da cui:

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0) \left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} \quad (3.40)$$

ora:

$$\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| \leq \frac{|z - z_0|}{\delta} = k < 1. \quad (3.41)$$

Si può perciò considerare il termine:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)}$$

dell'espressione (3.40) come somma di una serie geometrica di ragione:

$$\frac{z - z_0}{\xi - z_0}$$

<sup>2</sup>In questa dimostrazione si utilizzano dei risultati sulla convergenza uniforme delle serie di funzioni, in particolare il criterio di Weierstrass e il teorema di integrazione per serie.

e quindi l'espressione (3.40) diviene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\end{aligned}\quad (3.42)$$

che converge uniformemente per  $\xi \in \Gamma$ . Ponendo ora l'espressione (3.42) nella formula (3.39), si ha:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,\end{aligned}\quad (3.43)$$

ora, poiché  $\xi \in \Gamma$  e  $f(\xi)$  è continua su  $\Gamma$ , si ha:

$$\left( \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \right) \leq M,$$

che insieme alla disuguaglianza (3.41) fornisce:

$$\left| f(\xi) \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \leq M k^n$$

con  $k < 1$ . Essendo la serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} M k^n$$

convergente, per il criterio di Weierstrass ne segue la convergenza uniforme dell'integrando della (3.43) per  $\xi \in \Gamma$ . Si può quindi applicare il teorema di integrazione per serie:

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(\xi) \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n\end{aligned}\quad (3.44)$$

ove si è posto:

$$a_n = \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\quad (3.45)$$

l'ultima uguaglianza in (3.45) è conseguenza della formula (3.36). La serie (3.44) converge in  $U_\delta(z_0)$  e questo conclude la dimostrazione. ■

**Osservazione 3.10** Nel campo reale le funzioni che ammettono derivate di tutti gli ordini hanno uno sviluppo in serie di Taylor, soltanto sotto ulteriori condizioni.

Nel campo complesso invece una funzione derivabile è sviluppabile in serie di potenze in un intorno conveniente di un qualsiasi punto del suo campo di olomorfia. ■

**Osservazione 3.11** Il teorema precedente mostra che la regione di convergenza della serie di Taylor è un cerchio di centro  $z_0$  e raggio di lunghezza tale che il bordo del cerchio tocchi il punto di non analiticità più vicino a  $z_0$ . Il raggio di questo cerchio è il raggio di convergenza della serie di Taylor. ■

**Esempio 3.18** Consideriamo la funzione:

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

essa risulta analitica per ogni  $z$  diverso da 1. Il suo sviluppo di Taylor centrato nello zero converge nel cerchio di raggio 1 e centro lo zero. Un cerchio di raggio più grande includerebbe il punto 1 di non analiticità.

Osservando che  $f^{(n)}(0) = n!$ , si ottiene lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine, che converge per  $|z| < 1$ :

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots \quad |z| < 1.$$

Abbiamo ritrovato per altra via il risultato già noto sulla serie geometrica. ■

**Esempio 3.19** Diamo alcuni esempi di sviluppi di Taylor di funzioni analitiche centrati nell'origine del piano complesso. Per ciascuno viene anche indicata la regione di convergenza della serie.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C};$$

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a} + \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} + \dots + \frac{z^n}{a^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} \quad \forall z : |z| < |a|.$$

■



### 3.9 Condizioni di analiticità

In questo paragrafo vogliamo dare un quadro riassuntivo delle considerazioni fin qui svolte, a proposito delle funzioni analitiche, e in qualche misura completarle.

Possiamo condensare le nostre riflessioni nell'enunciato seguente, in cui il termine di olomorfia è riferito all'esistenza della derivata, mentre quello di analiticità è collegato alla sviluppabilità in serie di Taylor.

**Teorema 3.11** *Sia  $f(z)$  definita in un aperto  $\Omega$  del piano complesso; le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) *il limite del rapporto incrementale:*

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

*esiste indipendente dal modo in cui  $\Delta z \rightarrow 0$ , cioè  $f(z)$  è derivabile  $\forall z \in \Omega$ , cioè ancora  $f(z)$  è olomorfa;*

2)  *$f(z)$  soddisfa  $\forall z \in \Omega$  la seguente condizione di Cauchy-Riemann:*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \quad (3.46)$$

*con  $\partial f / \partial x$  e  $\partial f / \partial y$  continue;*

3)  *$f(z)$  è derivabile infinite volte ed è sviluppabile  $\forall z \in \Omega$  in serie di potenze centrata in  $z$ ; cioè  $f(z)$  è analitica;*

4) *per ogni cerchio  $B$  chiuso e tutto contenuto in  $\Omega$*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

*ove  $\gamma$  è la circonferenza bordo del cerchio  $B$  (con il simbolo  $\oint$  si sottolinea il fatto che l'integrale è fatto lungo un cammino chiuso).*

**Osservazione 3.12** L'equivalenza tra 1) e 2) è già stata dimostrata nel teorema 3.1.

L'affermazione che 1)  $\Rightarrow$  3) è conseguenza delle formule di Cauchy e degli sviluppi di Taylor, mentre 3)  $\Rightarrow$  1) è ovvia.

L'implicazione 1)  $\Rightarrow$  4) è conseguenza del Teorema di Cauchy, mentre l'implicazione inversa costituisce il *teorema di Morera*, la cui dimostrazione esula dai nostri scopi. ■

### 3.10 Sviluppi in serie di Laurent

Supponiamo di avere una funzione  $f(z)$  non necessariamente analitica in  $z_0$  e consideriamo la corona circolare

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \quad (3.47)$$

in cui supponiamo che  $f(z)$  sia analitica. Vogliamo ora arrivare a uno sviluppo di  $f(z)$  in  $D$ ; questo sviluppo fa intervenire sia le potenze positive che negative di  $(z - z_0)$ .

Poniamo:

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\},$$

$$\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = t\} \quad \text{con} \quad r < t < R.$$

Le circonferenze  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  e  $\Gamma$  si intendono sempre orientate in senso positivo ovvero antiorario. Con  $-\Gamma_1$ ,  $-\Gamma_2$  e  $-\Gamma$  si intendono le stesse circonferenze, ma orientate in senso negativo ovvero orario (vedi figura 3.6).

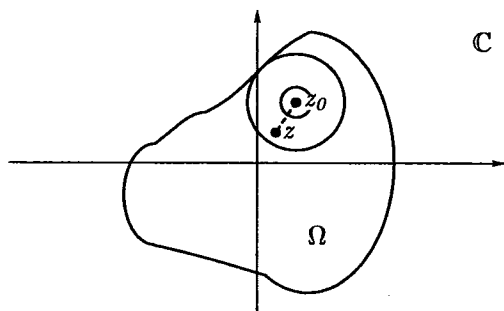


Fig. 3.6 Corona circolare di centro  $z_0$ .

**Teorema 3.12 (Serie di Laurent)** Sia  $f(z)$  analitica nella corona circolare  $D$  descritta nella formula 3.47 (vedi figura 3.6), allora

$$\begin{aligned} f(z) = & \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \\ & + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots c_n(z - z_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (3.48)$$

ovvero

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (3.49)$$

con  $z \in D$  e con

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(\xi) \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi. \quad (3.50)$$

**Dimostrazione**<sup>3</sup> Dalla prima formula di Cauchy si ha:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1 \cup -\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \end{aligned} \quad (3.51)$$

<sup>3</sup>Vedi la nota relativa alla dimostrazione dello sviluppo in serie di Taylor.

Per quanto riguarda l'integrale su  $\Gamma_1$  si può ripetere lo stesso ragionamento fatto per la serie di Taylor, ma con  $z \in D$ , si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{\Gamma_1} f(\xi) \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \end{aligned}$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_1} f(\xi) \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Per quanto riguarda l'integrale su  $\Gamma_2$  ragioniamo come segue:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = \\ &= \frac{1}{(z - z_0) \left( 1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

ora

$$\left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| \leq \frac{r}{|z - z_0|} = h < 1, \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

che converge uniformemente per  $\xi \in \Gamma_2$ . Ponendo la (3.54) nel secondo integrale della (3.51), si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_2} f(\xi) (\xi - z_0)^n d\xi \right) \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \end{aligned}$$

con

$$b_{n+1} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_2} f(\xi) (\xi - z_0)^n d\xi.$$

Posto ora:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots), \\ c_{-n} &= b_n \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \end{aligned}$$

si ha:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Osservando che il calcolo dei coefficienti  $c_n$  può essere eseguito facendo l'integrale lungo la curva chiusa  $\Gamma_1$  o  $\Gamma_2$  o  $\Gamma$  ( $\Gamma$  compresa tra le prime due), seguono le (3.49) e (3.50); il teorema è così dimostrato. ■

**Osservazione 3.13** Le formule (3.45) e (3.50) hanno la stessa espressione integrale per valori positivi dell'indice  $n$ . Ciò significa che lo sviluppo di Taylor è un caso particolare dello sviluppo di Laurent, quando i coefficienti delle potenze negative sono tutti nulli. ■

**Esempio 3.20** Calcoliamo lo sviluppo in serie di Laurent centrato nel punto  $z_0 = 0$  della funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z}.$$

Ricordando lo sviluppo di  $e^z$  e moltiplicandolo termine a termine per  $1/z$ , si ha:

$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots + \frac{z^n}{(n+1)!} + \dots = \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

che è uno sviluppo di Laurent che parte dalla potenza negativa  $-1$  e converge per ogni  $z$  diversa da zero, ovvero nella corona circolare

$$\varepsilon < |z| < +\infty$$

per ogni  $\varepsilon > 0$ . ■

**Osservazione 3.14** L'esempio precedente ha mostrato come per trovare lo sviluppo di Laurent non si è fatto il calcolo dell'integrale che definisce i coefficienti  $c_n$  [vedi (3.50)], ma si è cercato di utilizzare sviluppi di Taylor noti, operando opportunamente su di essi. Questa è la strada che abitualmente si segue. ■

**Esempio 3.21** Determiniamo lo sviluppo in serie di Laurent centrato nel punto  $z_0 = 0$  della funzione

$$f(z) = e^{1/z}.$$

La funzione  $f(z)$  è analitica in ogni punto diverso dallo zero. Lo sviluppo in potenze di  $z$  converge in  $\bar{z}$  fissato e diverso da zero. Tale sviluppo converge ugualmente in

$$\tilde{w} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Possiamo quindi utilizzare lo sviluppo di Taylor di  $e^w$  e poi porre  $w = 1/z$ . Si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{1/z} &= \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{z} + 1 = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n. \end{aligned}$$

Si osservi che si tratta di una serie di Laurent con infinite potenze negative di  $z$ . La prima delle due sommatorie è quella che si usa abitualmente, mentre la seconda è stata inserita per evidenziare la relazione tra questo caso particolare e la formula generale (3.49). ■

## 3.11 Singolarità

In questo paragrafo presentiamo alcune riflessioni sulla classificazione delle singolarità. Dapprima consideriamo punti del piano complesso che hanno un intorno in cui non cadono altre singolarità. Considerando poi il punto all'infinito del piano complesso, studiamo le singolarità all'infinito. Concludiamo con qualche accenno ai punti di diramazione e alle singolarità non isolate.

### 3.11.1 Singolarità isolate al finito

Un punto  $z_0$  del piano complesso è detto essere una *singolarità isolata per la funzione*  $f(z)$  se esiste un cerchio di centro  $z_0$  in cui  $f(z)$  è analitica eccetto che in  $z_0$ . Sia  $\varrho$  il raggio di tale cerchio;  $f(z)$  è analitica per  $z$  appartenente a

$$D = \{z : 0 < \varepsilon < |z - z_0| < \varrho\}.$$

Dunque, se  $f(z)$  ha una singolarità isolata in  $z_0$ , può essere sviluppata in serie di Laurent nella corona circolare  $D$ :

$$f(z) = \dots c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (3.55)$$

**Definizione 3.6** Sia  $f(z)$  analitica per gli  $z \in D$  e sia (3.55) il suo sviluppo di Laurent in  $D$ :

- 1) Si dice che  $f(z)$  è analitica e ha uno zero di ordine  $N > 0$  in  $z_0$ , se lo sviluppo in serie di Laurent (3.55) ha i coefficienti  $c_n$  tali che:

$$c_n = 0 \quad \text{per tutti gli } n < N \quad \text{e} \quad c_N \neq 0;$$

- 2) Si dice che  $f(z)$  è analitica e non nulla in  $z_0$ , se lo sviluppo in serie di Laurent (3.55) ha i coefficienti  $c_n$  tali che:

$$c_n = 0 \quad \text{per tutti gli } n < 0 \quad \text{e} \quad c_0 \neq 0;$$

- 3) Si dice che  $f(z)$  ha un polo di ordine  $N > 0$  in  $z_0$ , se lo sviluppo in serie di Laurent (3.55) ha i coefficienti  $c_n$  tali che:

$$c_n = 0 \quad \text{per tutti gli } n < -N \quad \text{e} \quad c_{-N} \neq 0;$$

- 4) Si dice che  $f(z)$  ha una singolarità essenziale in  $z_0$ , se lo sviluppo in serie di Laurent (3.55) ha i coefficienti  $c_n$  tali che:

$$c_n \neq 0 \quad \text{per infiniti } n \text{ negativi.}$$

**Osservazione 3.15** Spesso si incontra la situazione di una funzione  $f(z)$  analitica in  $D$ , non definita in  $z_0$ , che ammette uno sviluppo di Laurent del tipo 1) oppure 2). Prolungando  $f(z)$  in  $z_0$  con il valore fornito dallo sviluppo di Taylor, si ottiene una funzione analitica. In questo caso si dice che  $z_0$  è una *singolarità apparente* per  $f(z)$ .

Nella definizione precedente abbiamo classificato le singolarità a seconda del tipo di sviluppo di Laurent. Non sempre tuttavia si ha a disposizione lo sviluppo di Laurent; è quindi opportuno avere delle definizioni equivalenti, che sono fornite dalle seguenti proposizioni:

**Proposizione 3.1** *Il fatto che  $f(z)$  sia analitica e nulla di ordine  $N$  ( $N > 0$ ) in  $z_0$  equivale a:*

1)  $f(z) = h(z)(z - z_0)^N$  con  $h(z)$  analitica e diversa da zero in  $z_0$ .

2)  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  ha un polo di ordine  $N$  in  $z_0$ .

Inoltre sempre nell'ipotesi che  $f(z)$  sia analitica e nulla di ordine  $N$  ( $N > 0$ ) in  $z_0$  segue che:

3)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 0$ .

4) Esiste un intorno di  $z_0$  in cui  $f$  è limitata.

Più che presentare una dimostrazione della proposizione precedente forniamo un commento che ne illustri e chiarisca il significato.

1) Cominciamo con l'osservare che in questo caso

$$f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{con } c_N \neq 0$$

e quindi raccogliendo  $(z - z_0)^N$  si ha

$$f(z) = (z - z_0)^N \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+N} (z - z_0)^n = (z - z_0)^N h(z)$$

dove

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+N} (z - z_0)^n.$$

Quest'ultima è una serie di Taylor; quindi  $h(z)$  è analitica in  $z_0$  e inoltre:

$$h(z_0) = c_N \neq 0.$$

2) Si ha inoltre che:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^N} \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+N} (z - z_0)^n};$$

il reciproco di una serie di Taylor, con il coefficiente della potenza zero di  $z - z_0$  diverso da zero, per mezzo di semplici metodi di divisione tra serie intere di potenze,

fornisce una nuova serie di Taylor

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+N}(z-z_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(z-z_0)^n$$

con  $d_0 \neq 0$ ; procedendo si ha

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} d_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-N}^{+\infty} d_{n+N}(z-z_0)^n$$

che, secondo la definizione precedente, corrisponde a una funzione con un polo di ordine  $N$  in  $z_0$ .

- 3)-4) Gli ultimi due punti della proposizione precedente sono conseguenza del seguente risultato: Sia  $f(z)$  analitica in un cerchio  $U_\delta(z_0)$ , di raggio  $\delta$  e centro  $z_0$ , escluso  $z_0$ , se  $f(z)$  è limitata in:

$$0 < |z - z_0| \leq \delta$$

allora  $f(z)$  è analitica anche in  $z_0$  e viceversa. Osserviamo che per le funzioni di variabile reale la limitatezza non implica nemmeno la continuità. ■

**Proposizione 3.2** Il fatto che  $f(z)$  sia analitica e non nulla in  $z_0$  equivale a:

- 1) Lo sviluppo in serie di Laurent è in realtà uno sviluppo di Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{con } c_0 \neq 0$$

e quindi

$$f(z_0) = c_0 \neq 0.$$

- 2)  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  è analitica e diversa da zero in  $z_0$ .

Inoltre sempre nell'ipotesi che  $f(z)$  sia analitica e non nulla in  $z_0$  segue che:

- 3)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) = c_0 \neq 0$ .

- 4) Esiste un intorno di  $z_0$  in cui  $f$  è limitata.

Le considerazioni fatte dopo la proposizione precedente si adattano con poche modifiche a giustificare le indicazioni della presente proposizione. ■

Nella proposizione seguente vengono studiate le proprietà delle singolarità polari.

**Proposizione 3.3** Il fatto che  $f(z)$  abbia un polo di ordine  $N$  ( $N > 0$ ) in  $z_0$  equivale a:

- 1)  $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^N}$  con  $h(z)$  analitica e diversa da zero in  $z_0$ .

2)  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  è analitica e ha uno zero di ordine  $N$  in  $z_0$ .

Inoltre sempre nell'ipotesi che  $f(z)$  abbia un polo di ordine  $N$  ( $N > 0$ ) in  $z_0$  segue che:

3)  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$

4) In ogni intorno di  $z_0$  la  $f(z)$  non è limitata, ma esiste un intorno di  $z_0$  in cui  $1/f(z)$  è limitata.

Anche per questa proposizione forniamo un commento che ne illustri e chiarisca il significato.

1) Cominciamo con l'osservare che in questo caso

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{con } c_{-N} \neq 0$$

e quindi raccogliendo  $1/(z - z_0)^N$  si ha

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^N} h(z),$$

dove

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n;$$

quest'ultima è una serie di Taylor; quindi  $h(z)$  è analitica in  $z_0$  e inoltre:

$$h(z_0) = c_{-N} \neq 0.$$

2) Si ha inoltre che:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^N \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n};$$

il reciproco di una serie di Taylor, con il coefficiente della potenza zero di  $(z - z_0)$  diverso da zero, fornisce una nuova serie di Taylor:

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} k_n (z - z_0)^n$$

con  $k_0 \neq 0$ ; procedendo si ottiene:

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^N \sum_{n=0}^{+\infty} k_n (z - z_0)^n = \sum_{n=N}^{+\infty} k_{n-N} (z - z_0)^n$$

che, secondo la definizione precedente, corrisponde a una funzione analitica con uno zero di ordine  $N$  in  $z_0$ .



3) Il fatto che il limite di  $|f|$  per  $z$  che tende a  $z_0$  sia  $+\infty$  è conseguenza del fatto che

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^N},$$

con  $h(z)$  è analitica e diversa da zero in  $z_0$ , e del fatto che:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|} = +\infty.$$

Infatti, posto  $z - z_0 = \varepsilon e^{j\vartheta}$  e quindi  $|\varepsilon e^{j\vartheta}| = \varepsilon$ , si ha:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|z - z_0|} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = +\infty.$$

4) La limitatezza di  $1/f$  è conseguenza della analiticità di  $1/f$ . ■

Consideriamo ora il caso della singolarità essenziale.

**Proposizione 3.4** *Il fatto che  $f(z)$  abbia una singolarità essenziale in  $z_0$  equivale a:*

1) *Non esiste alcun intero  $N$  tale che:*

$$f(z) \cdot (z - z_0)^N$$

*sia analitica.*

2)  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  *non è analitica e non ha singolarità di tipo polare in  $z_0$ .*

3)  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$  *non esiste né finito, né infinito.*

4) *In ogni intorno di  $z_0$  non è limitata né la  $f(z)$  né la  $1/f(z)$ .*

Anche per questa proposizione forniamo un commento illustrativo.

- Cominciamo con l'osservare che essendo infiniti i coefficienti, con indice negativo, dello sviluppo di Laurent, nessun fattore moltiplicativo del tipo  $(z - z_0)^N$  può trasformare lo sviluppo in una serie di Taylor.
- Si ha inoltre che se  $1/f$  fosse in  $z_0$  analitica, il suo inverso, ovvero  $f$ , per quanto visto in precedenza dovrebbe essere analitico o al più avere un polo in  $z_0$ . Se  $1/f$  avesse un polo in  $z_0$  il suo inverso  $f$  dovrebbe essere analitico e avere uno zero in  $z_0$ . Ma in questi casi la serie di Laurent di  $f$  dovrebbe avere un numero finito di termini con indice negativo e ciò contraddice la presenza in  $z_0$  di una singolarità essenziale.
- Anche la negazione degli ultimi due punti della proposizione porta a contraddire la presenza di una serie di Laurent con infiniti termini di indice negativo. ■

Le considerazioni che abbiamo fatto sulle singolarità isolate al finito sono riassunte nella tabella.

| Tabella: Singolarità isolate al finito   |                                                                                          |                                                     |                                                                                                        |                                          |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|
|                                          | $f$ analitica in $z_0$                                                                   |                                                     | $f$ con singolarità uniforme in $z_0$                                                                  |                                          |
| comportamento di $f$ in $z_0$            | analitica e nulla di ordine $N$                                                          | analitica e non nulla                               | con polo di ordine $N$                                                                                 | con singolarità essenziale               |
| Serie di Laurent di $f$                  | $\sum_{n=N}^{+\infty}$                                                                   | $\sum_{n=0}^{+\infty}$                              | $\sum_{n=-N}^{+\infty}$                                                                                | $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$             |
| $h$ analitica<br>$h(z_0) \neq 0$         | $f(z) = h(z)(z - z_0)^N$                                                                 | $f(z) = h(z)$                                       | $f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^N}$                                                                      | non esiste<br>$h(z)$                     |
| comportamento di $1/f$ in $z_0$          | polo di ordine $N$                                                                       | analitica e non nulla                               | analitica e nulla di ordine $N$                                                                        | con singolarità non polare               |
| limite per $z \rightarrow z_0$ di $f(z)$ | esiste ed è $= 0$                                                                        | esiste finito e $\neq 0$                            | esiste ed è $= \infty$                                                                                 | non esiste                               |
| comportamento in un intorno $U$ di $z_0$ | esiste $U$ in cui $f$ è limitata                                                         |                                                     | $\forall U$ $f$ non è limitata, ma $\exists U$ in cui $1/f$ è limitata                                 | $\forall U$ né $f$ né $1/f$ è limitata   |
| Esempi con $z_0 = 0$                     | $z \sinh z \quad N = 2$<br>$\frac{z - \sin z}{z^2} \quad N = 1$<br>$1 - e^z \quad N = 1$ | $\cos z$<br>$\frac{1 - \cos z}{z^2}$<br>$e^{\pi z}$ | $\frac{e^z}{z^3} \quad N = 3$<br>$\frac{\sin z}{z^5} \quad N = 4$<br>$\frac{z + z^3}{z^3} \quad N = 2$ | $\sin(1/z)$<br>$\cosh(1/z)$<br>$e^{1/z}$ |

3.11.2 Esempi

Questo paragrafo è dedicato a presentare degli esempi illustrativi delle varie situazioni viste nel paragrafo precedente.

Esempio 3.22 La funzione

$f(z) = z \sinh z$

ha uno zero di ordine  $N = 2$  in  $z_0 = 0$ .

Infatti il suo sviluppo di Laurent, che otteniamo da quello noto del seno iperbolico, è

$$\begin{aligned} f(z) &= z \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(2n-3)!} z^{2n-2} = \\ &= z^2 + \frac{1}{3!} z^4 + \frac{1}{5!} z^6 + \frac{1}{7!} z^8 + \dots \end{aligned}$$

ed inizia dalla potenza seconda. ■

**Esempio 3.23** *La funzione*

$$f(z) = \frac{z - \sin z}{z^2}$$

ha uno zero di ordine  $N = 1$  in  $z_0 = 0$ .

Infatti il suo sviluppo di Laurent, che otteniamo da quello noto del seno circolare, è il seguente:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2} \left( z - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1} \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} \left( \sum_{n=3}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-3)!} z^{2n-3} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n-1} = \\ &= \frac{1}{3!} z - \frac{1}{5!} z^3 + \frac{1}{7!} z^5 - \frac{1}{9!} z^7 + \dots \end{aligned}$$

che inizia dalla prima potenza. ■

**Esempio 3.24** *Data la funzione*

$$f(z) = \cos(z^2),$$

verificare che è analitica e diversa da zero in  $z_0 = 0$ .

Partiamo dallo sviluppo di Taylor della funzione  $\cos w$ , che è noto, e operiamo la sostituzione  $w = z^2$ ; si ha

$$\cos(z^2) = 1 - \frac{1}{2} z^4 + \frac{1}{4!} z^8 - \frac{1}{6!} z^{12} + \dots (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{4n} + \dots$$

che ha il termine di grado zero non nullo. ■

**Esempio 3.25** *Verificare che la funzione*

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

è analitica e diversa da zero in  $z_0 = 0$ .

Utilizzando lo sviluppo del coseno, lo sviluppo di Laurent, centrato in zero, di  $f(z)$  risulta essere

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n}}{z^2} = \\
 &= \frac{1}{z^2} \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-2)!} z^{2n-2} = \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+2)!} z^{2n} \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

ove, in (3.56), per  $n = 0$  si ha il coefficiente uguale a  $1/2 \neq 0$ . ■

**Esempio 3.26** *La funzione*

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^3}$$

ha un polo di ordine 3 in  $z_0 = 0$ .

Possiamo verificare questa affermazione in due modi:

- la funzione  $f$  si può scrivere come

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^3}$$

con  $h(z) = e^{\pi z}$  che è analitica e diversa da zero in zero; dunque, per la proposizione 3.3,  $f$  ha un polo del terz'ordine in zero.

- ricaviamo lo sviluppo di Laurent di  $f$  a partire da quello noto di  $e^z$ :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \pi^n z^n = \\
 &= \frac{1}{z^3} + \frac{\pi}{z^2} + \frac{\pi^2}{2!z} + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} z + \frac{\pi^5}{5!} z^2 + \dots;
 \end{aligned}$$

questa serie parte dalla potenza negativa di ordine tre. ■

**Esempio 3.27** *La funzione*

$$f(z) = \frac{z + z^3}{z^3}$$

ha un polo di ordine 2 in zero.

In effetti il numeratore e il denominatore hanno in comune il fattore  $z$ , che si può dunque semplificare, ottenendo:

$$f(z) = \frac{1 + z^2}{z^2}.$$

Il numeratore si annulla per  $z_{1,2} = \pm j$  ed è quindi analitico in un intorno dello zero (per esempio nel cerchio di raggio  $1/2$  e centro lo zero). Considerando allora

$$h(z) = 1 + z^2, \quad h(0) = 1 \neq 0,$$

si ha che

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^2}.$$

Abbiamo quindi un polo del second'ordine.

In alternativa, possiamo osservare che  $f$  può essere scritta nella forma

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 1$$

che è lo sviluppo di Laurent della  $f$ , con un numero finito di termini diversi da zero: quello di indice  $-2$  e quello di indice  $0$ . ■

### Esempio 3.28 La funzione

$$f(z) = \sin \frac{1}{z}$$

ha una singolarità essenziale in  $z_0 = 0$ .

Infatti partiamo dalla serie di Taylor:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

che converge per ogni valore complesso di  $t$ . Si ha che essa converge sia per  $t_1 = w \neq 0$  che per  $t_2 = 1/w = z$  e cioè

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Si è così ottenuta una serie di Laurent con infiniti termini con indice negativo (tutti quelli di esponente dispari); il punto  $z_0 = 0$  è quindi una singolarità essenziale. ■

### Esempio 3.29 Nell'origine del piano complesso la funzione:

$$f(z) = \cosh \frac{1}{z}$$

ha una singolarità essenziale.

Infatti, in modo analogo all'esempio precedente, partendo dalla serie di Taylor del coseno iperbolico, si ha:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}},$$

che è una serie di Laurent con infinite potenze di  $z$  con esponente negativo (tutte quelle di esponente pari); quindi lo zero risulta essere una singolarità essenziale. ■

**Esempio 3.30** Classificare le singolarità che la seguente funzione ha in  $\mathbb{C}$ :

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 2z + 2)z^2(z^2 - 4)^3}.$$

La funzione  $f(z)$  è rapporto di due polinomi e quindi di due funzioni analitiche in tutto  $\mathbb{C}$ . Le singolarità di  $f(z)$  in  $\mathbb{C}$  possono provenire esclusivamente dagli zeri del denominatore:

$$(z^2 + 2z + 2)z^2(z^2 - 4)^3 = 0$$

e quindi:

$$\text{a) } \begin{cases} (z^2 + 2z + 2) = 0 \implies (z + 1)^2 + 1 = 0 \implies (z + 1)^2 = -1 \\ \implies (z + 1) = \pm j \implies z_{1,2} = -1 \pm j \\ \text{zeri semplici} \end{cases}$$

$$\text{b) } z^2 = 0 \implies z_3 = 0 \text{ zero doppio}$$

$$\text{c) } (z^2 - 4)^3 = 0 \implies z_{4,5} = \pm 2 \text{ zeri tripli.}$$

Si verifica facilmente che il numeratore di  $f(z)$  non si annulla in corrispondenza dei valori trovati. Possiamo allora dire che:

$a_1)$   $z_1 = -1 + j$  è polo semplice per  $f(z)$ . Infatti

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z + 1 + j)z^2(z^2 - 4)^3} = \frac{h(z)}{(z + 1 - j)}$$

con

$$h(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z + 1 + j)z^2(z^2 - 4)^3},$$

che è analitica e diversa da zero in  $z_1 = -1 + j$ ;

$a_2)$   $z_2 = -1 - j$  è polo semplice per  $f(z)$ . Infatti

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z + 1 - j)z^2(z^2 - 4)^3} = \frac{h(z)}{(z + 1 + j)}$$

con

$$h(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z + 1 - j)z^2(z^2 - 4)^3},$$

che è analitica e diversa da zero in  $z_2 = -1 - j$ ;

b)  $z_3 = 0$  è polo doppio per  $f(z)$ . Infatti

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 4)^3} = \frac{h(z)}{z^2}$$

con

$$h(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 4)^3},$$

che è analitica e diversa da zero in  $z_3 = 0$ ;

c<sub>1</sub>)  $z_4 = +2$  è polo triplo per  $f(z)$ . Infatti

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 2z + 2)z^2(z + 2)^3} = \frac{h(z)}{(z - 2)^3}$$

con

$$h(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 2z + 2)z^2(z + 2)^3},$$

che è analitica e diversa da zero in  $z_4 = +2$ ;

c<sub>2</sub>)  $z_5 = -2$  è polo triplo per  $f(z)$ . Infatti

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 2z + 2)z^2(z - 2)^3} = \frac{h(z)}{(z + 2)^3}$$

con

$$h(z) = \frac{z^2 + z + 1}{(z^2 + 2z + 2)z^2(z - 2)^3},$$

che è analitica e diversa da zero in  $z_5 = -2$ .

■

**Esempio 3.31** Si classifichino le singolarità che la seguente funzione ha nel piano complesso  $\mathbb{C}$ :

$$f(z) = \frac{\sin z \sinh z}{z(z^2 - \pi^2)^3(z^2 + \pi^2)^2(z^2 - 4\pi^2)}.$$

Il denominatore si annulla in:

a)  $z_0 = 0$  (zero 1° ordine);

b)  $z_{1,2} = \pm\pi$  (zeri 3° ordine)

c)  $z_{3,4} = \pm j\pi$  (zeri 2° ordine)

d)  $z_{5,6} = \pm 2\pi$  (zeri 1° ordine)

Per poter concludere la classificazione bisogna ora osservare il comportamento del numeratore in tali punti:

a) in  $z_0 = 0$  si annulla anche il numeratore con uno zero del 2° ordine e quindi

$z_0 = 0$  è per  $f(z)$  un punto di analiticità (singolarità apparente) e più precisamente uno zero del 1° ordine;

b)  $z_{1,2} = \pm \pi$  annullano  $\sin z$  come zeri del 1° ordine e quindi

$z_{1,2} = \pm \pi$  sono per  $f(z)$  poli del 2° ordine;

c)  $z_{3,4} = \pm j\pi$  annullano  $\sinh z$  come zeri del 1° ordine e quindi

$z_{3,4} = \pm j\pi$  sono per  $f(z)$  poli del 1° ordine;

d)  $z_{5,6} = \pm 2\pi$  annullano  $\sin z$  come zeri del 1° ordine e quindi

$z_{5,6} = \pm 2\pi$  sono per  $f(z)$  punti di analiticità (singolarità apparenti) in cui  $f(z)$  si considera prolungata con un valore non nullo:

$$f(2\pi) = \frac{\sinh 2\pi}{2\pi(3\pi^2)^3(5\pi^2)^2(4\pi)}$$

**Osservazione 3.16** In molti degli esempi precedenti il punto singolare preso in considerazione è stato  $z_0 = 0$ ; questo allo scopo di semplificare gli svolgimenti e di utilizzare le formule note per gli sviluppi di Taylor centrati nell'origine.

Si possono fornire esempi analoghi ove il punto singolare è un generico  $z_0$ , come i seguenti:

$$(z - z_0) \sinh(z - z_0) \qquad \frac{(z - z_0) - \sin(z - z_0)}{(z - z_0)^2}$$

$$1 - e^{(z-z_0)} \qquad \cos(z - z_0)$$

$$\frac{1 - \cos(z - z_0)}{(z - z_0)^2} \qquad e^{\pi(z-z_0)}$$

$$\frac{e^{(z-z_0)}}{(z - z_0)^3} \qquad \frac{\sin(z - z_0)}{(z - z_0)^5}$$

$$\frac{(z - z_0) - (z - z_0)^3}{(z - z_0)^3} \qquad \sin \frac{1}{(z - z_0)}$$

$$\cosh \frac{1}{(z - z_0)} \qquad e^{\frac{1}{(z-z_0)}}$$

Per studiare questi casi, si pone  $w = (z - z_0)$  e si ripetono i ragionamenti degli esempi precedenti.



### 3.11.3 Singolarità isolate all'infinito

Sia  $f(z)$  analitica su una circonferenza di raggio  $R$  e all'esterno della circonferenza stessa. Sia:

$$D = \{z : R < |z| < +\infty\}; \quad (3.57)$$

è possibile scrivere lo sviluppo di Laurent di  $f(z)$  nella corona  $D$ ; questo sviluppo ha la forma

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n. \quad (3.58)$$

Il nostro obiettivo non è quello di ricavare tale sviluppo, ma quello di classificare il comportamento della funzione  $f(z)$  in  $z_0 = \infty$ .

A questo scopo presentiamo le seguenti riflessioni.

Con il cambio di variabile:

$$w = \frac{1}{z}$$

la  $f(z)$  si trasforma in

$$g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right);$$

è quindi naturale definire il comportamento di  $f(z)$  in  $z_0 = \infty$  come con quello di  $g(w)$  in  $w_0 = 0$ .

Vediamo alcuni esempi di classificazione del comportamento all'infinito di una funzione.

**Esempio 3.32** Si consideri la seguente funzione razionale:

$$f(z) = \frac{z^4 + z^3 + z^2 - 3z - 4}{z^2 - z}$$

e si studi il tipo di singolarità che ha in  $z_0 = \infty$ .

Poniamo  $z = 1/w$  e otteniamo:

$$\begin{aligned} g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) &= \frac{\frac{1}{w^4} + \frac{1}{w^3} + \frac{1}{w^2} - \frac{3}{w} - 4}{\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w}} = \\ &= \frac{4w^4 + 3w^3 - w^2 - w - 1}{(w^3 - w^2)} = \\ &= 4w + 7 + \frac{6w^2 - w - 1}{w^3 - w^2} = \\ &= 4w + 7 + \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w} - \frac{4}{1-w} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4w + 7 + \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w} - 4(1 + w + w^2 + w^3 + \dots) = \\
 &= \frac{1}{w^2} + \frac{2}{w} + 3 - 4w^2 - 4w^3 - \dots
 \end{aligned}$$

Ne segue che  $w_0 = 0$  è un polo doppio per  $g(w)$ ; quindi  $z_0 = \infty$  è un polo doppio per  $f(z)$ . ■

**Esempio 3.33** *Determinare se la funzione*

$$f(z) = e^{1/z} \quad (3.59)$$

*è analitica oppure singolare in  $z_0 = \infty$ .*

Per ottenere lo sviluppo di Laurent di  $f(z)$  facciamo, come indicato in precedenza, il cambio di variabile  $w = 1/z$  e ricaviamo dagli sviluppi noti la serie di  $g(w) = f(1/w)$  centrata in  $w_0 = 0$ :

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots; \quad (3.60)$$

la funzione  $f(1/w)$  è analitica e diversa da zero in  $w_0 = 0$ , e quindi anche  $f(z)$ , data dall'espressione (3.59), è analitica e diversa da zero in  $z_0 = \infty$ . ■

**Esempio 3.34** *La funzione polinomiale*

$$f(z) = z^2 + 3z + 5$$

*ha un polo del secondo ordine in  $z_0 = \infty$ .*

Lo sviluppo di Laurent di  $g(w) = f(1/w)$  in  $w_0 = 0$  ha un numero finito di coefficienti diversi da zero:

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} + \frac{3}{w} + 5;$$

poiché la potenza negativa da cui comincia lo sviluppo è la seconda,  $f(1/w)$  ha in  $w_0 = 0$  un polo del secondo ordine. Quindi il polinomio di secondo grado  $f(z)$  ha in  $z_0 = \infty$  un polo del secondo ordine. ■

**Esempio 3.35** *Si studi il comportamento della funzione*

$$f(z) = e^z$$

*nel punto*

$$z_0 = \infty.$$

Lo sviluppo in serie di Laurent di  $f(1/w)$  in potenze di  $w$  è:

$$e^{1/w} = \dots + \frac{1}{n! w^n} + \dots + \frac{1}{2! w^2} + \frac{1}{w} + 1;$$

da cui risulta che  $f(1/w)$  ha in  $w_0 = 0$  una singolarità essenziale, avendo uno sviluppo con infiniti coefficienti con indice negativo non nulli. Ne concludiamo che  $f(z)$  ha in  $z_0 = \infty$  una singolarità essenziale.

### 3.11.4 Singolarità non uniformi

Sia  $f(z)$  una funzione analitica in un aperto  $\Omega$  del piano complesso. Se in  $\Omega$  la funzione  $f(z)$  è iniettiva (ovvero se per  $z_1 \neq z_2$  anche  $f(z_1) \neq f(z_2)$ ) si può ricavare la funzione inversa  $f^{-1}(z)$ . Se la  $f(z)$  non è iniettiva, non si può invertire; tuttavia restringendo il dominio di  $f(z)$  a un sottoinsieme aperto opportuno  $S \subset \Omega$ , si può rendere  $f(z)$  iniettiva in  $S$  e quindi invertibile.

**Esempio 3.36** Sia  $S$  l'aperto di  $\mathbb{C}$  dato dalle  $z$  con  $0 < \arg z < \pi$  e sia:

$$f(z) = z^2,$$

allora  $f(z)$  è iniettiva in  $S$  e quindi esiste l'inversa e

$$f^{-1}(z) = \sqrt{z} \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

In questo caso l'aperto  $f(S)$ , in cui  $f^{-1}$  è definita, è dato dal piano complesso privato della semiretta reale positiva. ■

**Osservazione 3.17** Per rendere la funzione  $f(z)$  dell'esempio precedente iniettiva sono possibili altre scelte di  $S$ . Sia, per esempio,  $S'$  il semipiano complesso delle  $z$  con  $\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ , allora, in questo caso,  $f(S')$  è il piano complesso privato della semiretta reale negativa. ■

In generale la scelta di  $S \subset \Omega$  è fatta in modo che non esista un altro aperto che include propriamente  $S$  e in cui  $f$  sia iniettiva. Si può allora individuare nel complementare di  $f(S)$  in  $\mathbb{C}$  una o più linee che prendono il nome di *tagli* e che hanno origine in punti che sono detti *punti di diramazione* o *singolarità non uniformi*.

Sia  $z_0$  un punto di diramazione e il cerchio di centro  $z_0$  e raggio  $\varepsilon$  incontri un taglio in un solo punto

$$\bar{z} = z_0 + \varepsilon e^{j\bar{\theta}};$$

allora il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(z_0 + \varepsilon e^{j(\bar{\theta}+h)})$$

è diverso dal:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f(z_0 + \varepsilon e^{j(\bar{\theta}+2\pi-h)}),$$

ovvero assegnando a  $f(\bar{z})$  il valore del primo limite e incrementando con continuità l'angolo  $\theta$  di  $2\pi - h$  si perviene a valori di  $f(z)$  che per  $h \rightarrow 0$  non danno  $f(\bar{z})$  (vedi la figura 3.7).

**Esempio 3.37** Si calcolino i valori della funzione

$$f(z) = \sqrt{z}$$

nei seguenti punti:

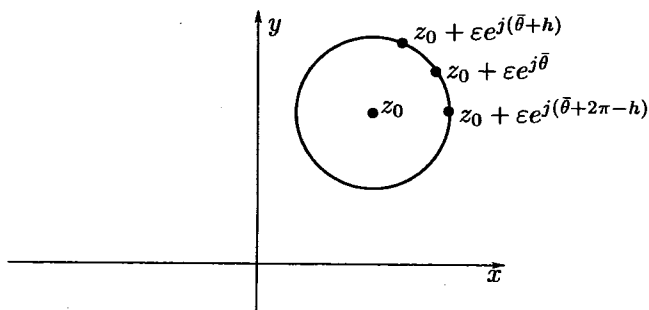


Fig. 3.7 Singolarità non uniforme.

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \epsilon e^{j\pi} & z_2 &= \epsilon e^{j(5/4)\pi} \\
 z_3 &= \epsilon e^{j(3/2)\pi} & z_4 &= \epsilon e^{j(5/3)\pi} \\
 z_5 &= \epsilon e^{j2\pi} & z_6 &= \epsilon e^{j(14/6)\pi} \\
 z_7 &= \epsilon e^{j(5/2)\pi} & z_8 &= \epsilon e^{j(11/4)\pi} \\
 z_9 &= \epsilon e^{j3\pi}.
 \end{aligned}$$

Si proceda con continuità, ovvero delle due seguenti radici di  $z$ :

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{\epsilon} e^{j\frac{\theta}{2}} \\ \sqrt{\epsilon} e^{j\frac{\theta}{2} + \pi} \end{cases} \quad (3.61)$$

si prenda sempre la prima oppure sempre la seconda.

Sviluppiamo l'esercizio calcolando le radici secondo la prima espressione della formula (3.61):

$$\begin{aligned}
 \sqrt{z_1} &= \sqrt{\epsilon} e^{j\pi/2} = \sqrt{\epsilon} j \\
 \sqrt{z_2} &= \sqrt{\epsilon} e^{j(5/8)\pi} \\
 \sqrt{z_3} &= \sqrt{\epsilon} e^{j(3/4)\pi} = \sqrt{\epsilon} (-\sqrt{2}/2 + j\sqrt{2}/2) \\
 \sqrt{z_4} &= \sqrt{\epsilon} e^{j(5/6)\pi} = \sqrt{\epsilon} (-\sqrt{3}/2 + j/2) \\
 \sqrt{z_5} &= \sqrt{\epsilon} e^{j\pi} = \sqrt{\epsilon} (-1) \\
 \sqrt{z_6} &= \sqrt{\epsilon} e^{j(14/12)\pi} = \sqrt{\epsilon} (-\sqrt{3}/2 - j/2) \\
 \sqrt{z_7} &= \sqrt{\epsilon} e^{j(5/4)\pi} = \sqrt{\epsilon} (-\sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2) \\
 \sqrt{z_8} &= \sqrt{\epsilon} e^{j(11/8)\pi} \\
 \sqrt{z_9} &= \sqrt{\epsilon} e^{j(3/2)\pi} = \sqrt{\epsilon} (-j).
 \end{aligned}$$

Si osserva che dopo aver percorso una circonferenza di raggio  $\epsilon$  partendo da  $z_1$  si è tornati a  $z_1 = z_9$  ma:

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{\epsilon} j \neq \sqrt{\epsilon} (-j) = \sqrt{z_9}.$$

### 3.11.5 Singolarità non isolate

Abbiamo visto la definizione di singolarità isolata; vediamo ora la definizione di singolarità non isolata e alcuni esempi. Una singolarità  $z_0$  è non isolata per  $f(z)$  quando in ogni intorno del punto  $z_0$  si trova sempre un'altra singolarità di  $f(z)$  distinta da  $z_0$ .

**Esempio 3.38** Si studi la singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

in  $z_0 = 0$ .

Cominciamo con l'osservare che la funzione  $f(z)$  è singolare nell'origine e nei punti  $z$  tali che:

$$\sin \frac{1}{z} = 0. \quad (3.62)$$

Le soluzioni di questa equazione sono i punti  $z$  per cui

$$\frac{1}{z} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

vale a dire:

$$z_k = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad k \neq 0.$$

Si verifica facilmente che tutti i punti  $z_k$  sono poli del primo ordine per  $f(z)$ . Fissiamo un intorno di raggio  $\varepsilon$  e di centro l'origine; è sempre possibile trovare un intero relativo  $\bar{k}$  tale che

$$\frac{1}{\bar{k}\pi} < \varepsilon$$

Il punto  $z_{\bar{k}}$  è quindi contenuto nell'intorno fissato; l'origine non è dunque una singolarità isolata, in quanto in ogni suo intorno è contenuto un polo per  $f(z)$ .

**Esempio 3.39** Si studi la singolarità in  $z_0 = \infty$  della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\cosh z}$$

La funzione  $\cosh z$  ha infiniti zeri [vedi la (1.15)] del primo ordine sull'asse immaginario nei punti:

$$z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La  $f(z)$  ha allora in questi  $z_k$  dei poli del primo ordine. Ora dato un intorno di infinito, ovvero l'esterno di un cerchio di raggio  $R$ , si ha che comunque grande sia  $R$  esisterà sempre un  $\bar{k}$  per cui:

$$|z_{\bar{k}}| = (2\bar{k}+1)\frac{\pi}{2} > R.$$

Quindi il punto  $z_{\bar{k}}$  sta nell'intorno di infinito di raggio  $R$ . Per la arbitrarietà di  $R$  si ha che  $\infty$  è una singolarità non isolata. ■

## 3.12 Risultati globali

Lo studio delle singolarità può essere considerato un risultato di tipo *locale*: per decidere che tipo di singolarità ha una funzione in  $z_0$  interviene, oltre che il suo comportamento in  $z_0$ , solo quello in un intorno di  $z_0$ .

In questo paragrafo trattiamo risultati che si riferiscono al comportamento di una funzione in tutta una regione o in tutto il piano complesso; per questo motivo questi risultati sono detti *globali*.

Supponiamo che  $f(z)$  sia analitica in  $z_0$  e scriviamo la sua serie di Taylor con centro in  $z_0$ .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

ove

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{|\xi|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

con  $\rho$  tale che il cerchio (compreso il bordo) di raggio  $\rho$  e centro  $z_0$  sia incluso nella regione di analiticità di  $f$ . Calcoliamo l'integrale precedente parametrizzando la circonferenza di raggio  $\rho$  nella forma

$$\xi - z_0 = \rho e^{j\varphi},$$

per cui

$$d\xi = \rho j e^{j\varphi} d\varphi.$$

Si ha

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{j\varphi})}{\rho^{n+1} e^{j(n+1)\varphi}} \rho j e^{j\varphi} d\varphi,$$

da cui

$$a_n = \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jn\varphi} f(z_0 + \rho e^{j\varphi}) d\varphi.$$

Il modulo dell'integrando, essendo  $f$  continua, ha un massimo sul cammino di integrazione; indichiamo questo massimo, che dipende da  $\rho$ , con  $K(\rho)$ :

$$|e^{-jn\varphi} f(z_0 + \rho e^{j\varphi})| = |f(z_0 + \rho e^{j\varphi})| \leq K(\rho).$$

Si ottiene infine:

$$|a_n| \leq \frac{K(\rho)}{\rho^n}, \quad (3.63)$$

con  $n$  intero maggiore o uguale a zero. La relazione (3.63) è detta *disuguaglianza di Cauchy*.

La disuguaglianza di Cauchy ci permette di ricavare il seguente risultato:

**Teorema 3.13 (di Liouville)** *Se una funzione  $f(z)$  è analitica in tutto il piano complesso e nel punto all'infinito, allora essa è costante.*

**Dimostrazione** La funzione  $f(z)$ , essendo analitica all'infinito, risulta limitata in un intorno di  $\infty$ , vale a dire per

$$|z| \geq R.$$

Essendo  $f$  analitica per

$$|z| \leq R$$

risulta ivi limitata; in definitiva  $f$  risulta limitata per ogni  $z$ :

$$|f(z)| \leq K.$$

La serie di Taylor di  $f$  centrata nello zero converge in tutto il piano complesso e i suoi coefficienti soddisfano la disuguaglianza di Cauchy (3.63), con  $K(\rho)$  indipendente da  $\rho$ . Si ha quindi:

$$|a_n| \leq \frac{K}{\rho^n}$$

disuguaglianza che vale qualunque sia  $\rho$  e quindi anche per  $\rho \rightarrow \infty$ . Da ciò si deduce che

$$a_n = 0 \quad \text{per} \quad n \geq 1$$

e quindi

$$f(z) = a_0 = \text{costante};$$

questo completa la dimostrazione. ■

**Definizione 3.7** *Le funzioni analitiche in tutti i punti di  $\mathbb{C}$ , con al più una singolarità isolata all'infinito, sono dette intere.*

La prima formula di Cauchy, già considerata nei paragrafi precedenti, mostra che, data una funzione  $f$ , analitica in una regione  $D$  e sulla frontiera  $\Gamma$  di  $D$ , il valore di  $f$  in  $z \in D$  è determinato dai suoi valori sulla frontiera  $\Gamma$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Supponendo che  $D$  sia un cerchio di raggio  $\rho$  e centro  $z$ , posto  $\xi - z = \rho e^{j\varphi}$ , si ha:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \rho e^{j\varphi}) d\varphi. \quad (3.64)$$

Questa relazione (3.64) può essere interpretata dicendo che il valore di  $f$  in  $z$  è uguale alla media dei valori di  $f$  sulla circonferenza di raggio  $\rho$  e centro  $z$ . Essa prende il nome di *proprietà della media*. Possiamo osservare che tutte le funzioni analitiche possiedono la proprietà della media.

Se una funzione di variabile complessa gode della proprietà della media, lo stesso accade per la sua parte reale e per la sua parte immaginaria. Sappiamo dai paragrafi

precedenti che la parte reale e la parte immaginaria di una funzione analitica sono armoniche e che inoltre, data una funzione armonica  $u$ , si può associare ad essa l'armonica coniugata  $v$ , e ottenere una funzione analitica  $f = u + jv$ . Si ha quindi che le funzioni armoniche godono della proprietà della media.

Alle considerazioni precedenti si collega il seguente teorema, di cui non riportiamo la dimostrazione.

**Teorema 3.14 (Principio del massimo)** *Sia  $f(z)$  analitica in una regione  $D$  del piano complesso e sulla frontiera  $\Gamma$  di  $D$ , allora  $|f(z)|$  raggiunge il suo massimo in un punto della frontiera  $\Gamma$ .*

**Osservazione 3.18** Il principio del massimo vale per tutte le funzioni che godono della proprietà della media. Possiamo quindi affermare che tutte le funzioni armoniche soddisfano il principio del massimo. ■

Presentiamo ora due importanti risultati sulle funzioni analitiche, noti come *principi di identità* per le funzioni analitiche.

**Teorema 3.15 (primo principio di identità)** *Siano  $f(z)$  e  $g(z)$  analitiche in una regione connessa  $D \subseteq \mathbb{C}$  e sia  $z_0 \in D$ ; se  $f$  e  $g$  e tutte le loro derivate coincidono in  $z_0$ , ovvero se*

$$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \text{per ogni } n \geq 0 \quad (3.65)$$

*allora per ogni  $z \in D$  risulta*

$$f(z) = g(z).$$

**Dimostrazione** Posto

$$h(z) = f(z) - g(z)$$

si ha che  $h$  è analitica in  $D$  e in particolare in  $z_0$ ; è quindi sviluppabile in serie di Taylor in un intorno circolare  $\gamma_0$  di centro  $z_0$  e di raggio  $r_0$ :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} h^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n.$$

Essendo, per l'ipotesi (3.65),

$$h^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \geq 0,$$

si ha

$$h(z) \equiv 0$$

nell'intorno  $\gamma_0$ . I ragionamenti fatti per  $h(z)$  possono essere ripetuti per  $h'(z)$  e per le derivate successive di  $h(z)$ , ottenendo:



$$h^{(n)}(z) \equiv 0 \quad \forall n \geq 0$$

nell'intorno  $\gamma_0$ .

Con ragionamenti che fanno intervenire la connessione dell'aperto  $D$  e la topologia di  $\mathbb{C}$ , si può poi concludere che  $h(z)$  è identicamente nulla in  $D$ . ■

Alcune considerazioni sugli zeri delle funzioni analitiche ci consentono di accennare ad un altro principio di identità. Se una funzione  $f(z)$  non è identicamente nulla in un intorno di  $z_0$  e ha uno zero di ordine  $k$  in  $z_0$ , abbiamo visto che si può scrivere

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z),$$

con  $g(z)$  analitica e diversa da zero in  $z_0$ . Per la continuità di  $g(z)$  si ha che

$$g(z) \neq 0 \quad \text{per } 0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo; quindi risulta anche

$$f(z) \neq 0 \quad \text{per } 0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo; quindi esiste un intorno di  $z_0$  in cui non esistono altri zeri della funzione  $f(z)$  oltre a  $z_0$ .

**Teorema 3.16** *Sia  $f(z)$  una funzione analitica in una regione  $D$  connessa. Se  $f$  non è identicamente nulla, l'insieme degli zeri di  $f$  è un insieme discreto (ovvero gli zeri di  $f$  sono isolati ovvero un punto di accumulazione di zeri non può essere uno zero).*

**Dimostrazione** In conseguenza del primo principio di identità  $f$  non può essere identicamente nulla nell'intorno di nessun punto di  $D$  (altrimenti sarebbe nulla in tutto  $D$ ); possiamo quindi applicare i ragionamenti appena fatti a ogni suo zero e concludere che si tratta di zeri isolati. ■

**Corollario 1 (secondo principio di identità)** *Siano  $z_n$ , con  $n \geq 1$ , i punti di un insieme discreto di numeri complessi, appartenenti a una regione connessa  $D$  e dotati di un punto di accumulazione  $z_0$ . Se due funzioni  $f(z)$  e  $g(z)$  analitiche in  $D$  sono tali che*

$$f(z_0) = g(z_0) \quad \text{e} \quad f(z_n) = g(z_n) \quad \text{per ogni } n \geq 1,$$

*allora per ogni  $z \in D$  risulta*

$$f(z) = g(z).$$

**Dimostrazione** Posto  $h(z) = f(z) - g(z)$ , si ha che  $h$  si annulla in  $z_0$  e in tutti i punti  $z_n$ ;  $h$  si annulla quindi nel punto  $z_0$ , che è di accumulazione di zeri. Questo è possibile, per il teorema precedente, solo se  $h$  è nulla in un intorno di  $z_0$  e quindi, per il primo principio di identità, in tutto  $D$ . Ciò implica che  $f = g$  in tutto  $D$ . ■

**Osservazione 3.19** Se due funzioni coincidono su un arco di curva o su un segmento o su una retta allora rientrano nel caso del corollario 1 e quindi coincidono in tutto  $D$ . ■

Enunciamo ora alcuni risultati notevoli che riguardano il comportamento di una funzione analitica nell'intorno di una sua singolarità essenziale; questi risultati, pur essendo di carattere locale, sono inseriti in questo paragrafo in quanto sono collegati a considerazioni di carattere globale.

**Teorema 3.17 (di Casorati)** *Sia  $f(z)$  una funzione analitica e sia  $z_0$  una singolarità isolata di tipo essenziale per  $f(z)$ . Fissato ad arbitrio un intorno  $U$  di  $z_0$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  e per ogni numero reale  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\bar{z} \in U$  e  $\bar{z} \neq z_0$  tale che*

$$|f(\bar{z}) - \lambda| < \varepsilon.$$

**Dimostrazione** La dimostrazione di questo teorema viene fatta per assurdo. Supponiamo cioè che esista un valore complesso  $\lambda'$  per cui, per tutte le  $z \in U$  diverse da  $z_0$ , si abbia che  $f(z)$  disti da  $\lambda'$  di un valore maggiore di un fissato  $\varepsilon_0$ . Ne segue che per tutte le  $z \in U$  e  $z \neq z_0$  si ha che

$$\frac{1}{|f(z) - \lambda'|} \leq \frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Questo implica l'analiticità di

$$\frac{1}{f(z) - \lambda'}$$

anche in  $z_0$ . Ma allora la reciproca:

$$f(z) - \lambda'$$

ha al più in  $z_0$  una singolarità polare. Ne segue che anche  $f(z)$  ha al più una singolarità polare in  $z_0$ ; questo contraddice l'ipotesi che  $z_0$  sia una singolarità essenziale. ■

Enunciamo, senza dimostrazione, il seguente teorema, che è più preciso di quello di Casorati:

**Teorema 3.18 (di Picard)** *Se  $z_0$  è una singolarità isolata essenziale per la funzione  $f(z)$ , allora l'immagine di un qualunque intorno di  $z_0$ , privato di  $z_0$ , è tutto il piano complesso o tutto il piano complesso eccetto un solo punto.*

**Esempio 3.40** *Si mostri che la funzione*

$$w = e^z$$

*in un qualunque intorno della sua singolarità essenziale  $z_0 = \infty$ , assume tutti i valori eccetto lo zero.*

Posto  $z = x + jy$  si può scrivere:

$$w = e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy}.$$

Si ha:

$$|w| = e^x \qquad \arg w = y.$$

Un intorno di infinito  $U_R(\infty)$  è individuato da un numero reale  $R > 0$  nel modo seguente (vedi la figura 3.8):

$$U_R(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}.$$

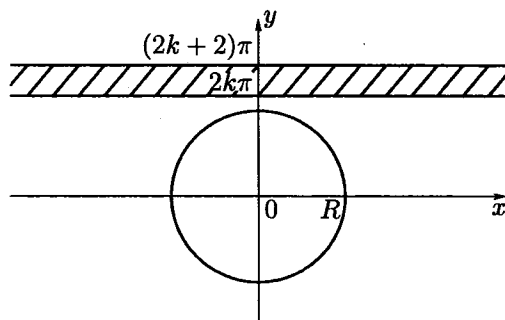


**Fig. 3.8** Striscia orizzontale di ampiezza  $2\pi$  nell'intorno di  $\infty$ .

Se  $k$  è un intero positivo per cui  $2k\pi > R$  la striscia orizzontale  $S$ , formata dalle  $z$  con parte immaginaria  $y$  compresa tra  $2k\pi$  e  $(2k+2)\pi$ , è inclusa in  $U_R(\infty)$ .

L'immagine, mediante la funzione  $e^z$ , di tutte le  $z$  della striscia  $S$  è dunque data da:

$$\{w = e^x e^{iy} : x \in \mathbb{R}, 2k\pi < y < (2k+2)\pi\},$$

ovvero da tutti i numeri complessi con modulo positivo e argomento che, a meno di  $2k\pi$ , varia tra  $0$  e  $2\pi$ . Si tratta cioè di tutto il piano complesso privato dell'origine. ■

## 4

# Residui e applicazioni

In questo capitolo diamo la definizione di *residuo* e presentiamo il *teorema dei residui*. L'importanza pratica del teorema dei residui è legata alla semplicità con cui si possono calcolare i residui nelle singolarità polari. Applichiamo poi questi risultati al calcolo di alcuni integrali impropri particolarmente utili per le applicazioni che consideriamo nel seguito. Viene anche fatto un cenno al *valor principale secondo Cauchy*, che consente, in alcuni casi, di calcolare integrali di linea anche quando vi sia una singolarità lungo il cammino di integrazione. Chiude il capitolo la scomposizione in fratti semplici, con il metodo dei residui, molto importante in vista della antitrasformazione di Laplace.

## 4.1 Residui

### 4.1.1 Residui al finito

Iniziamo col dare una definizione di residuo di una funzione  $f(z)$  in  $z_0 \in \mathbb{C}$  mediante gli sviluppi di Laurent; supponiamo quindi che  $z_0$  sia una singolarità isolata (polo o singolarità essenziale).

**Definizione 4.1** Sia  $D$  un cerchio di frontiera  $\Gamma$  di centro  $z_0$  e raggio  $\rho$  e sia  $f(z)$  una funzione analitica in  $D$  eccetto al più nel punto  $z_0$ ,  $f(z)$  è allora sviluppabile in serie di Laurent nella corona  $0 < \varepsilon < |z| < \rho$ :

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots \quad (4.1)$$

e si dice residuo di  $f(z)$  in  $z_0$  il coefficiente  $c_{-1}$  di questo sviluppo di Laurent.

**Osservazione 4.1** Dalla formula generale dei coefficienti di uno sviluppo in serie di Laurent (vedi la formula (3.50)) sappiamo che

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (4.2)$$

ove  $\gamma$  è una circonferenza di centro  $z_0$  che non circonda nessun'altra singolarità di  $f(z)$  oltre a  $z_0$ . ■

**Esempio 4.1** Si calcoli il residuo in  $z_0$  della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

Indicando con  $\gamma$  una circonferenza di centro  $z_0$  e raggio  $\rho$  si ha:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{j\vartheta}} \rho j e^{j\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} j d\vartheta = 1.$$

■

**Osservazione 4.2** Il residuo di  $f(z)$  in  $z_0$  viene indicato con

$$R_{f(z)}(z_0)$$

per cui scriviamo

$$R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} f(z) dz = c_{-1}. \quad (4.3)$$

■

**Osservazione 4.3** Una maniera diversa per vedere che il coefficiente  $c_{-1}$  è dato dalla espressione integrale (4.2) è quella di integrare termine a termine la serie di Laurent

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz &= \dots + \oint_{\gamma} \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} dz + \oint_{\gamma} \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} dz + \oint_{\gamma} \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} dz + \\ &+ \oint_{\gamma} c_0 dz + \oint_{\gamma} c_1(z - z_0) dz + \oint_{\gamma} c_2(z - z_0)^2 dz + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

e di osservare che

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz = \begin{cases} 2\pi j & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \neq 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Infatti se  $n \neq 1$  si ha:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho^n e^{nj\vartheta}} \rho j e^{j\vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{j}{\rho^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)j\vartheta} d\vartheta = \\ &= \frac{j}{\rho^{n-1}} \left[ \frac{1}{j(1-n)} e^{(1-n)j\vartheta} \right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

■

### 4.1.2 Residui all'infinito

Supponiamo che esista una circonferenza di raggio  $R$  all'esterno della quale  $f(z)$  sia analitica (eccetto al più in  $z_0 = \infty$ ). Sia  $\Gamma$  una circonferenza di raggio  $\rho$  maggiore di  $R$  orientata in senso positivo (antiorario) e sia  $-\Gamma$  la stessa circonferenza, ma orientata in senso negativo (orario).

**Definizione 4.2** Si dice residuo di  $f(z)$  in  $z_0 = \infty$  la seguente espressione:

$$R_{f(z)}(\infty) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{-\Gamma} f(z) dz. \quad (4.6)$$

**Osservazione 4.4** Effettuando il cambiamento di variabile  $w = 1/z$ , il residuo all'infinito (4.6) diventa

$$R_{-g(w)/w^2}(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} g(w) \left(-\frac{1}{w^2}\right) dw \quad (4.7)$$

dove  $g(w) = f(1/w)$  e  $\gamma$  è la circonferenza di centro l'origine, raggio  $1/\rho$ , percorsa in senso antiorario.

Si ha quindi che il residuo di  $f(z)$  in  $\infty$  è l'opposto del coefficiente  $c_1$  dello sviluppo di Laurent in potenze di  $w$  della funzione  $g(w) = f(1/w)$  nella corona circolare  $0 < w < 1/\rho$ .

Il residuo all'infinito può dunque essere non nullo, pur essendo il punto  $z_0 = \infty$  non singolare.

**Esempio 4.2** Calcolare i residui al finito e all'infinito di

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)} \quad (4.8)$$

Osservando che si può scrivere

$$f(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)} = \frac{1/2}{(z - 1)} + \frac{1/2}{(z + 1)}$$

si ha subito:

$$R_{f(z)}(1) = \frac{1}{2}, \quad R_{f(z)}(-1) = \frac{1}{2}.$$

Con passaggi analoghi, essendo

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{1 - w^2} = w + w^3 + w^5 + \dots$$

si ottiene che

$$R_{f(z)}(\infty) = -1;$$

il residuo è diverso da zero, pur essendo  $f$  regolare all'infinito. Osserviamo infine che la somma dei residui è nulla:

$$R_{f(z)}(1) + R_{f(z)}(-1) + R_{f(z)}(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (-1) = 0.$$

## 4.2 Teorema dei residui

Presentiamo ora un risultato importante che riguarda i residui.

**Teorema 4.1 (dei residui)** *Sia  $\Omega$  una regione di frontiera  $\Gamma$  e sia  $f(z)$  una funzione analitica in  $\Omega \cup \Gamma$ , eccetto che in un numero finito  $n$  di singolarità isolate  $z_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) con  $z_k$  appartenenti all'interno di  $\Omega$ . Allora:*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n R_{f(z)}(z_k). \quad (4.9)$$

**Dimostrazione** Costruiamo (vedi figura 4.1)  $n$  cerchi  $C_k$  con  $1 \leq k \leq n$ , in modo

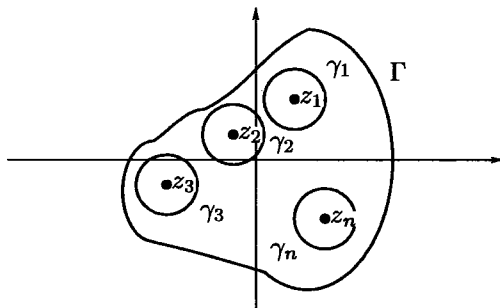


Fig. 4.1 Teorema dei residui.

che  $C_k$  abbia centro in  $z_k$ , bordo la circonferenza  $\gamma_k$  e raggio sufficientemente piccolo da contenere la sola singolarità  $z_k$  e da essere incluso in  $\Omega$ :

$$C_k \subset \Omega, \quad \forall k. \quad (4.10)$$

La funzione  $f(z)$  è analitica nella regione

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \{C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k \cup \dots \cup C_n\};$$

si può quindi applicare il teorema di Cauchy e ottenere che

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz - \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_k \cup \dots \cup \gamma_n} f(z) dz = 0. \quad (4.11)$$

Utilizzando la proprietà additiva degli integrali al secondo membro della (4.11), si ha:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_k} f(z) dz + \dots + \oint_{\gamma_n} f(z) dz \quad (4.12)$$

e, ricordando la definizione di residuo (vedi definizione 4.1), dalla (4.12) si ottiene

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j (R_{f(z)}(z_1) + R_{f(z)}(z_2) + \dots + R_{f(z)}(z_k) + \dots + R_{f(z)}(z_n)),$$

come volevasi dimostrare. ■

**Osservazione 4.5** Il teorema dei residui permette di trasformare un integrale lungo una linea chiusa qualsiasi in una somma di integrali lungo circonferenze (residui). Ma la sua importanza è legata soprattutto alla possibilità di calcolare i residui nelle singolarità polari in modo molto semplice, senza ricorrere alla valutazione di integrali, come vedremo tra breve. ■

**Osservazione 4.6** La definizione di residuo all'infinito data dalla (4.6) consente facilmente di osservare che:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(\infty) &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{-\Gamma} f(z) dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \\ &= -\sum_{k=1}^n R_{f(z)}(z_k) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ove  $z_k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , sono tutte le singolarità di  $f(z)$  al finito. La (4.13) esprime il fatto che, quando una funzione ha un numero finito di singolarità, *la somma di tutti i residui al finito e all'infinito di  $f(z)$  è nulla.* ■

## 4.2.1 Valor principale

Richiamiamo qui brevemente la definizione di *integrale improprio* su un intervallo limitato di una funzione non limitata.

Consideriamo una funzione  $f(t)$  di variabile reale, continua nell'intervallo  $[a, b]$ , eccetto che in  $t_0 \in (a, b)$  e tale che:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \infty. \quad (4.14)$$

**Definizione 4.3 (Integrale improprio)** Se  $f(t)$  soddisfa le ipotesi precedenti, diciamo che l'integrale di  $f(t)$  esiste in senso improprio, se esistono i due limiti

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{t_0-\varepsilon} f(t) dt, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{t_0+\eta}^b f(t) dt; \quad (4.15)$$

in questo caso scriviamo:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{t_0-\varepsilon} f(t) dt + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{t_0+\eta}^b f(t) dt. \quad (4.16)$$

**Esempio 4.3** Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-1}^2 \log|t| dt.$$

Si ha che

$$\int_{-1}^2 \log|t| dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \log|t| dt + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^2 \log|t| dt =$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [t \log |t| - t]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [t \log |t| - t]_{\eta}^2 = \\
&= -1 + 2 \log 2 - 2 = 2 \log 2 - 3
\end{aligned} \tag{4.17}$$

**Esempio 4.4** Calcolare, al variare del parametro reale positivo  $\alpha$ , l'integrale improprio

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{|t|^\alpha} dt.$$

Dalla definizione di integrale improprio, si ha

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{|t|^\alpha} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{|t|^\alpha} dt + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^2 \frac{1}{|t|^\alpha} dt. \tag{4.18}$$

I due limiti della (4.18) esistono finiti se

$$\alpha < 1,$$

mentre sono infiniti se  $\alpha \geq 1$ .

Nelle applicazioni vi è tuttavia la necessità di dare significato ad integrali impropri non convergenti. In questi casi l'integrale deve essere interpretato nel senso del *valor principale* secondo Cauchy.

**Definizione 4.4 (valor principale secondo Cauchy)** Sia  $f(t)$  continua in  $[a, b]$  eccetto che in  $t_0 \in ]a, b[$  ove si comporti come nella (4.14); diciamo che l'integrale di  $f(t)$  esiste nel senso del valor principale secondo Cauchy, se esiste finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{t_0-\varepsilon} f(t) dt + \int_{t_0+\varepsilon}^b f(t) dt \right\}. \tag{4.19}$$

In questo caso, talvolta, si usa premettere v.p. al simbolo di integrale e scrivere

$$\text{v.p.} \int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_a^{t_0-\varepsilon} f(t) dt + \int_{t_0+\varepsilon}^b f(t) dt \right\} \tag{4.20}$$

**Esempio 4.5** Calcolare

$$\text{v.p.} \int_{-1}^2 \frac{1}{t} dt.$$

Posto  $f(t) = 1/t$ , abbiamo visto nell'esempio precedente che l'integrale improprio di  $f(t)$  nell'intervallo  $[-1, 2]$  non converge. Calcoliamo allora il valor principale secondo Cauchy, si ha:

$$\begin{aligned}
\text{v.p.} \int_{-1}^2 \frac{1}{t} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} dt + \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{t} dt \right\} = \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{ \log \varepsilon - \log 1 + \log 2 - \log \varepsilon \} = \log 2,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

in quanto i due  $\log \varepsilon$  hanno segni opposti e quindi la loro somma è nulla prima del passaggio al limite. ■

La stessa situazione che abbiamo descritto con gli integrali reali si presenta con gli integrali di linea in campo complesso. Sia  $\Omega$  una regione del piano complesso, che comprenda al suo interno un segmento dell'asse reale, che indichiamo con  $\gamma = (a, b)$ , orientato da  $a$  a  $b$  e sia  $z_0 \in \gamma$ . Sia  $f(z)$  una funzione analitica in  $\Omega$ , eccetto che in  $z_0$  ove si ha una singolarità polare di ordine  $n$ : quindi  $f(z) = h(z)/(z - z_0)^n$ , con  $h(z)$  analitica e diversa da zero in  $z_0$ . Indichiamo con  $\gamma_\varepsilon$  una semicirconferenza di raggio  $\varepsilon$  e centro in  $z_0$ .

La questione relativa al valor principale, in campo complesso, è legata al seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{h(z_0 + \varepsilon e^{j\phi})}{\varepsilon^n e^{nj\phi}} \varepsilon j e^{j\phi} d\phi. \quad (4.22)$$

In effetti quando si ha un integrale lungo un cammino chiuso che contiene il segmento  $\gamma$  e con in  $z_0 \in \gamma$  una singolarità polare di ordine  $n$ , si applica il teorema dei residui a un cammino modificato vicino a  $z_0$  con una semicirconferenza di raggio  $\varepsilon$ . Si deve poi sottrarre il limite della (4.22).

Vediamo ora di applicare queste considerazioni a integrali (valor principali) con poli del primo ordine lungo il cammino.

Nel caso in cui  $z_0$  sia un polo del primo ordine il limite in (4.22) esiste sicuramente e diviene  $2\pi j$  per mezzo residuo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{h(z_0 + \varepsilon e^{j\phi})}{\varepsilon e^{j\phi}} \varepsilon j e^{j\phi} d\phi = \pi j h(z_0) = 2\pi j \frac{1}{2} R_{f(z)}(z_0). \quad (4.23)$$

Nel caso di poli del primo ordine sul cammino di integrazione il teorema dei residui, può dunque essere presentato nel modo seguente:

**Teorema 4.2** Sia  $\Gamma$  il bordo regolare di una regione  $\Omega$  e sia  $f(z)$  analitica in  $\Omega \cup \Gamma$  eccetto che in  $n$  poli  $z_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) con  $z_k \in \Omega$  ed eccetto che in  $m$  poli  $\tilde{z}_i$  del primo ordine ( $1 \leq i \leq m$ ) con  $\tilde{z}_i \in \Gamma$ , allora:

$$v.p. \oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n R_{f(z)}(z_k) + \pi j \sum_{i=1}^m R_{f(z)}(\tilde{z}_i) \quad (4.24)$$

## 4.3 Calcolo pratico dei residui nei poli

Questo paragrafo mostra la semplicità con cui si possono calcolare i residui nelle singolarità polari. Distinguiamo il calcolo tra i poli del primo ordine e quelli di ordine superiore, poichè quelli del primo ordine hanno in alcuni casi una formula pratica più semplice. Tuttavia l'espressione del residuo per poli multipli comprende anche i poli semplici

### 4.3.1 Calcolo pratico dei residui nei poli del primo ordine

Sia  $f(z)$  una funzione che ha in  $z_0$  un polo del primo ordine. Lo sviluppo di Laurent ha la forma

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

ovvero:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} (c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots) = \frac{h(z)}{(z - z_0)},$$

ove abbiamo posto

$$h(z) = (c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots)$$

con  $h(z)$  analitica e diversa da zero in  $z_0$ . Si ha allora

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = h(z_0).} \quad (4.25)$$

Infatti, se indichiamo con  $\gamma$  un cerchio di raggio  $\varepsilon$  in cui  $h(z)$  è analitica, si ha:

$$R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} f(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{h(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi j} 2\pi j c_{-1} = h(z_0).$$

**Esempio 4.6** Calcolare il residuo in  $z_0 = 5$  di

$$f(z) = \frac{z}{z - 5}.$$

Si ha che  $h(z) = z$  (che è analitica e diversa da zero in 5) e quindi:

$$R_{f(z)}(5) = h(5) = 5.$$

Se  $h(z)$  non è esplicitabile facilmente il residuo si ottiene nel modo seguente: ■

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).} \quad (4.26)$$

**Esempio 4.7** Calcolare il residuo in  $z_0 = 0$  di

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Si ha:

$$R_{f(z)}(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\cos z}{\sin z} = 1.$$

Un altro modo pratico per calcolare i residui in poli del primo ordine è il seguente. Supponiamo che  $f(z)$  sia della forma ■

$$f(z) = \frac{n(z)}{d(z)} \quad n(z_0) \neq 0,$$

dove  $n(z)$  è analitica e diversa da zero in  $z_0$ , mentre  $d(z)$  ha uno zero del primo ordine in  $z_0$ . Notiamo che, sotto queste ipotesi, la derivata  $d'(z)$  della funzione  $d(z)$  non è nulla in  $z_0$ . Abbiamo allora

$$R_{f(z)}(z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}. \quad (4.27)$$

Infatti per la (4.26) si ha

$$R_{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)n(z)}{d(z)},$$

che è una forma indeterminata del tipo  $0/0$ , a cui si può applicare la regola di de l'Hôpital, per cui

$$R_{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{n(z) + (z - z_0)n'(z)}{d'(z)} = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)}.$$

**Esempio 4.8** Determinare le singolarità e calcolare i residui di

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 - z - 2}.$$

Gli zeri del denominatore sono:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1. \end{cases}$$

Poichè il numeratore è analitico e non si annulla in 2 e in  $-1$ , si ha che  $z_1 = 2$  e  $z_2 = -1$  sono poli del primo ordine. Possiamo calcolare i residui sia con la regola (4.25), che con la regola (4.27).

Iniziamo applicando la (4.25). Possiamo scrivere la funzione  $f(z)$  nella forma

$$f(z) = \frac{2z + 1}{(z + 1)(z - 2)};$$

la funzione  $h(z)$  relativa al polo  $z_1 = 2$  è quindi

$$h(z) = \frac{2z + 1}{(z + 1)},$$

per cui

$$R_{f(z)}(2) = \left[ \frac{2z + 1}{(z + 1)} \right]_{z=2} = \frac{5}{3}.$$

Riscrivendo  $f(z)$  nella forma

$$f(z) = \frac{2z + 1}{(z - 2)(z + 1)}$$

possiamo identificare la funzione  $h(z)$  relativa al polo  $z_2 = -1$ , che è:

$$h(z) = \frac{2z+1}{(z-2)},$$

per cui

$$R_{f(z)}(-1) = \left[ \frac{2z+1}{(z-2)} \right]_{z=-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Applicando invece la (4.27) si ha:

$$R_{f(z)}(2) = \left[ \frac{2z+1}{D(z^2-z-2)} \right]_{z=2} = \left[ \frac{2z+1}{(2z-1)} \right]_{z=2} = \frac{5}{3},$$

$$R_{f(z)}(-1) = \left[ \frac{2z+1}{D(z^2-z-2)} \right]_{z=-1} = \left[ \frac{2z+1}{(2z-1)} \right]_{z=-1} = \frac{1}{3}.$$

■

**Esempio 4.9** Si calcolino i residui nei poli  $\pm j$  del primo ordine della funzione

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2+1)}.$$

Utilizzando la regola (4.27) si ha:

$$R_{f(z)}(j) = \left[ \frac{e^{jz}}{D(z^2+1)} \right]_{z=j} = \left[ \frac{e^{jz}}{2z} \right]_{z=j} = \frac{e^{-1}}{2j} = -j \frac{1}{2e},$$

$$R_{f(z)}(-j) = \left[ \frac{e^{jz}}{D(z^2+1)} \right]_{z=-j} = \left[ \frac{e^{jz}}{2z} \right]_{z=-j} = \frac{e}{-2j} = j \frac{e}{2}.$$

■

**Osservazione 4.7** I poli dell'ultimo esempio sono complessi coniugati mentre i corrispondenti residui non lo sono. Ciò è conseguenza del fatto che la funzione non è hermitiana. La regola che afferma che *a poli complessi coniugati corrispondono residui complessi coniugati* vale infatti solo se la funzione è hermitiana. Ricordiamo che  $f(z)$  è hermitiana se e solo se:

$$f^*(z) = f(z^*). \quad (4.28)$$

Si può vedere facilmente che se  $f(z)$  soddisfa alla (4.28) allora  $f$  assume valori reali per valori reali della variabile. Si può tuttavia mostrare anche il viceversa. Possiamo dunque assumere come definizione equivalente di hermitianità la seguente:

*$f(z)$  è detta hermitiana se e solo se assume valori reali per valori reali della variabile.*

■

**Esempio 4.10** Calcolare i residui nei poli  $\pm j$  del primo ordine della funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 1)}.$$

Utilizzando la regola (4.27) si ha:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(j) &= \left[ \frac{e^z}{D(z^2 + 1)} \right]_{z=j} = \left[ \frac{e^z}{2z} \right]_{z=j} = \\ &= \frac{e^j}{2j} = e^{-j\pi/2} \frac{e^j}{2} = \frac{1}{2} e^{(1-\pi/2)j} \\ R_{f(z)}(-j) &= \left[ \frac{e^z}{D(z^2 + 1)} \right]_{z=-j} = \left[ \frac{e^{-j}}{-2z} \right]_{z=-j} = \\ &= \frac{e^{-j}}{-2j} = \frac{1}{2} e^{j\pi/2} e^{-j} = \frac{1}{2} e^{(-1+\pi/2)j} \end{aligned}$$

Osserviamo che  $f(z)$  è hermitiana: infatti per valori reali della variabile  $z = x$  si ha

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1},$$

che è una funzione a valori reali. Abbiamo ottenuto che

$$R_f(-j) = (R_f(j))^*$$

a conferma di quanto visto nell'osservazione precedente. ■

**Esempio 4.11** Verificare che la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \quad (4.29)$$

ha un polo semplice nell'origine e calcolarne il residuo.

Sviluppando  $\sin z$  in serie di Taylor con centro  $z_0 = 0$ , si ottiene che

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 + \dots;$$

si ha subito che l'origine è un polo del primo ordine e che il residuo, che è il coefficiente di  $z^{-1}$ , è uguale a 1. D'altronde si ha pure che

$$R_f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\sin z}{z^2} = 1.$$

■

### 4.3.2 Calcolo pratico dei residui nei poli multipli

Consideriamo una funzione  $f(z)$  che abbia in  $z_0$  un polo di ordine  $k \geq 1$

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots,$$

ovvero

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-z_0)^k} (c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + c_{-k+2}(z-z_0)^2 + \dots + \\ &\quad + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \dots) = \\ &= \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}, \end{aligned}$$

ove abbiamo posto:

$$h(z) = (c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \dots).$$

La funzione  $h(z)$  risulta analitica e diversa da zero in  $z_0$ . Si ha:

$$R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(z_0). \quad (4.30)$$

Se  $h(z)$  non è esplicitabile facilmente il residuo si ottiene nel modo seguente:

$$R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z-z_0)^k f(z)) \right). \quad (4.31)$$

**Esempio 4.12** Calcolare il residuo nel polo  $z_0 = 1$  della funzione:

$$f(z) = \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^2.$$

Si osservi che in 1 vi è un polo del secondo ordine e che la corrispondente funzione  $h(z)$  è

$$h(z) = (z+1)^2,$$

da cui si ricava:

$$h'(z) = 2(z+1);$$

quindi per la (4.30) si ha:

$$R_{f(z)}(1) = h'(1) = [2(z+1)]_{z=1} = 4.$$

■

**Esempio 4.13** Calcolare il residuo nel polo  $z_0 = j$  della funzione

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{z(z^2 + 1)^2}.$$

Si osservi che in  $j$  vi è un polo del secondo ordine e che la corrispondente funzione  $h(z)$  è

$$h(z) = \frac{e^{jz}}{z(z + j)^2}$$

da cui si ricava:

$$h'(z) = \frac{je^{jz}z(z + j)^2 - e^{jz}[(z + j)^2 + 2z(z + j)]}{z^2(z + j)^4},$$

e quindi per la (4.30) si ha:

$$R_{f(z)}(j) = h'(j) = \frac{je^{-1}(-4j) - e^{-1}[-4 - 4]}{-16} = \frac{4 + 8}{-16e} = -\frac{3}{4e}.$$

■

**Esempio 4.14** Calcolare il residuo in  $z_0 = 0$  della funzione:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}.$$

Sviluppando  $\sin z$  in serie di potenze di  $z$  si ha:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}z^2 + \dots$$

Dall'esame di questo sviluppo concludiamo che la funzione  $f(z)$  ha un polo del secondo ordine in  $z_0 = 0$  e che il residuo è

$$R_{f(z)}(0) = c_{-1} = 0.$$

Per il calcolo del residuo, possiamo anche utilizzare la (4.31), ottenendo

$$R_{f(z)}(0) = \frac{1}{(1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{d}{dz} \left( (z)^2 \frac{\sin z}{z^3} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = 0.$$

■

**Osservazione 4.8** Si osservi che la funzione dell'esempio 4.14 non è analitica in  $z_0 = 0$ ; tuttavia il suo residuo in  $z_0 = 0$  è nullo. ■



## 4.4 Calcolo di integrali di linea con il metodo dei residui

Iniziamo in questo paragrafo ad applicare, al calcolo di integrali di linea lungo cammini chiusi in  $\mathbb{C}$ , le regole pratiche per il calcolo dei residui che abbiamo appena discusso.

**Esempio 4.15** Si calcoli l'integrale

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^3 + 1} dz,$$

ove  $\gamma$  è l'unione del segmento da  $2j$  a  $-2j$  sull'asse immaginario e della semicirconferenza di raggio 2 e centro l'origine situata nel semipiano destro (vedi figura 4.2).

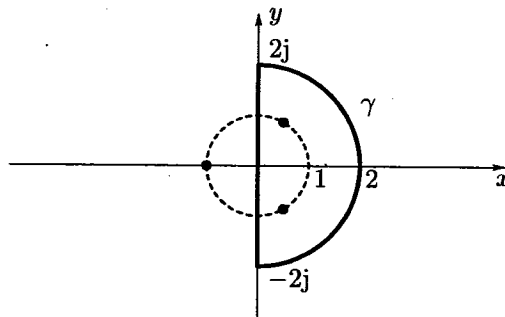


**Fig. 4.2** Cammino  $\gamma$  di integrazione.

Cerchiamo i poli della funzione integranda  $f(z)$ :

$$z^3 + 1 = 0 \implies z^3 = -1 = e^{j\pi + 2k\pi j}$$

e quindi

$$(e^{j\pi + 2k\pi j})^{1/3} = \begin{cases} e^{j\pi/3} \\ e^{j\pi} \\ e^{j5\pi/3} = e^{-j\pi/3} \end{cases}.$$

I poli della funzione integranda  $f(z)$  sono tutti del primo ordine; i poli  $e^{j\pi/3}$  ed  $e^{-j\pi/3}$  stanno all'interno della regione racchiusa da  $\gamma$ , mentre  $e^{j\pi}$  è esterno. Calcoliamo i residui:

$$R_{f(z)}(e^{j\pi/3}) = [z/(3z^2)]_{z=e^{j\pi/3}} = \frac{1}{3}e^{-j\pi/3},$$

$$R_{f(z)}(e^{-j\pi/3}) = (R_{f(z)}(e^{j\pi/3}))^* = \frac{1}{3}e^{j\pi/3}.$$

Infine per il teorema dei residui otteniamo:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \frac{z}{z^3 + 1} dz &= 2\pi j \left( R_{f(z)}(e^{j\pi/3}) + R_{f(z)}(e^{-j\pi/3}) \right) = \\ &= 2\pi j (1/3) \left( e^{-j\pi/3} + e^{j\pi/3} \right) = 2\pi j (1/3) 2 \cos(\pi/3) = (2/3)\pi j, \end{aligned}$$

che conclude l'esercizio. ■

**Esempio 4.16** Calcolare il valor principale dell'integrale lungo il cammino  $\Gamma$ , formato dal segmento  $] - 3, 3[$  sull'asse reale e dalla semicirconferenza superiore di raggio 3 e centro l'origine del piano complesso, della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z^2+4)}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-1)(z^2+4)} dz &= 2\pi j R_{f(z)}(2j) + \pi j R_{f(z)}(1) = \\ &= 2\pi j \left( -\frac{1}{10} + \frac{1}{20}j \right) + \pi j \left( \frac{1}{5} \right) = -\frac{1}{10}\pi. \end{aligned}$$

## 4.5 Integrali impropri di funzioni razionali con il metodo dei residui

Prendiamo in considerazione integrali tra  $-\infty$  e  $+\infty$  di funzioni razionali (rapporto di due polinomi), con il polinomio a denominatore di due gradi maggiore del grado del polinomio a numeratore, in modo che sia assicurata la convergenza a  $\pm\infty$ .

**Teorema 4.3** Sia  $f(x)$  una funzione razionale tale per cui:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

e la differenza tra il grado di  $Q(x)$  e il grado di  $P(x)$  sia  $\geq 2$ . Siano  $f(z)$ ,  $P(z)$  e  $Q(z)$  le estensioni a  $\mathbb{C}$  di  $f(x)$ ,  $P(x)$  e  $Q(x)$ . La funzione  $f(z)$  non abbia sull'asse reale poli di ordine  $> 1$ . Siano:

$$\begin{array}{ll} z_k & \text{poli di } f(z) \text{ con } 1 \leq k \leq n \quad \text{Im } z_k > 0 \\ \tilde{z}_i & \text{poli semplici di } f(z) \text{ con } 1 \leq i \leq m \quad \text{Im } \tilde{z}_i = 0. \end{array}$$

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi j \left( \sum_{k=1}^n R_{f(z)}(z_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m R_{f(z)}(\tilde{z}_i) \right). \quad (4.32)$$

Diamo un cenno della dimostrazione, nel caso in cui non ci siano poli sull'asse reale. Osserviamo innanzi tutto che

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, +R]} f(z) dz, \quad (4.33)$$

ove si è pensato l'intervallo reale  $[-R, +R]$  come un cammino nel piano complesso.

Il punto centrale della dimostrazione consiste nel mostrare che possiamo aggiungere il limite per  $R \rightarrow \infty$  dell'integrale su una semicirconferenza di raggio  $R$ , in quanto tale limite è nullo. Se  $\gamma_R$  è la semicirconferenza superiore di centro l'origine di  $\mathbb{C}$  e raggio  $R$  dobbiamo mostrare che

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (4.34)$$

Infatti, in virtù delle ipotesi sui gradi dei polinomi a numeratore e a denominatore di  $f(z)$ , si ha che per un'opportuna costante  $M$

$$|f(z)| \leq M \left| \frac{1}{z^2} \right| \quad \text{su } \gamma_R \quad (4.35)$$

e quindi

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq M \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R d\vartheta = M \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.36)$$

Se aggiungiamo il primo membro della (4.34) nella (4.33), otteniamo un integrale lungo il cammino chiuso  $[-R, +R] \cup \gamma_R$ , al quale possiamo applicare il teorema dei residui e, tenendo presente che per  $R$  grande in  $[-R, +R] \cup \gamma_R$  sono racchiusi tutti i poli del semipiano superiore, si ha:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, +R]} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, +R] \cup \gamma_R} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n R_{f(z)}(z_k). \end{aligned} \quad (4.37)$$

■

**Osservazione 4.9** Gli integrali impropri di funzioni razionali possono essere calcolati anche con i metodi classici della teoria delle funzioni reali di variabile reale. È noto infatti che le funzioni razionali ammettono primitive formate da funzioni elementari. Tuttavia il metodo dei residui del teorema 4.3 rende molto più agevole il calcolo. ■

**Esempio 4.17** Si calcoli con il metodo dei residui l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Utilizzando il teorema 4.3 si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi j R_{f(z)}(j) = 2\pi j \frac{1}{2j} = \pi,$$

ove con  $f(z)$  si è indicata la estensione al piano complesso della funzione integranda

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

che ha in  $\pm j$  due poli del primo ordine; il residuo della funzione integranda nel polo  $j$  è:

$$R_{f(z)}(j) = \left[ \frac{1}{D(1+z^2)} \right]_{z=j} = \left[ \frac{1}{2z} \right]_{z=j} = \frac{1}{2j}.$$

**Osservazione 4.10** L'integrale dell'esempio 4.17 può essere calcolato anche direttamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{-R}^{+R} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

**Esempio 4.18** Calcolare con il metodo dei residui l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

Utilizzando il teorema 4.3 si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi j R_{f(z)}(j) = 2\pi j \left(-\frac{1}{4}j\right) = \frac{\pi}{2}$$

ove con  $f(z)$  si è indicata la estensione al piano complesso della funzione integranda:

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}.$$

La funzione  $f(z)$  ha in  $\pm j$  due poli del secondo ordine; il residuo in  $j$  è:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(j) &= \left[ \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+j)^2} \right]_{z=j} = \left[ \frac{2z(z+j)^2 - 2z^2(z+j)}{(z+j)^4} \right]_{z=j} = \\ &= \frac{2j(2j)^2 - 2j^2 2j}{(2j)^4} - \frac{-8j + 4j}{16} = -\frac{1}{4}j. \end{aligned}$$

## 4.6 Lemma di Jordan

Il lemma di Jordan è uno strumento che consente di calcolare con il metodo dei residui degli integrali impropri interessanti per le applicazioni. In particolare sono integrali di questo tipo quelli che intervengono nelle trasformate e nelle antitrasformate di Fourier e di Laplace. Distinguiamo, per chiarezza espositiva, due versioni del lemma di Jordan, una che riguarda integrali lungo l'asse reale e l'altra che riguarda integrali lungo cammini paralleli all'asse immaginario.

Per uniformarci alle notazioni abituali in campo applicativo, indichiamo la variabile reale con la lettera  $t$  (tempo) e la variabile complessa con  $s = \sigma + j\omega$  (frequenze o pulsazioni complesse) (talvolta indicheremo anche  $s = t + j\omega$ ).

**Teorema 4.4 (lemma di Jordan A)** *Sia data la funzione*

$$f(t) = \frac{P(t)e^{jat}}{Q(t)}$$

con

$$\begin{array}{llll} t \in \mathbb{R}, & a \in \mathbb{R}, & a \neq 0, & s = t + j\omega, \\ \text{grado di } Q(s) > \text{grado di } P(s) & & & \\ s_k \text{ zeri di } Q(s) \text{ con } 1 \leq k \leq n & \operatorname{Im} s_k > 0 & P(s_k) \neq 0 & \\ \bar{s}_i \text{ zeri semplici di } Q(s) \text{ con } 1 \leq i \leq m & \operatorname{Im} \bar{s}_i = 0 & P(\bar{s}_i) \neq 0 & \\ \hat{s}_h \text{ zeri di } Q(s) \text{ con } 1 \leq h \leq p & \operatorname{Im} \hat{s}_h < 0 & P(\hat{s}_h) \neq 0. & \end{array}$$

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)e^{jat}}{Q(t)} dt = \begin{cases} +2\pi j \left( \sum_{k=1}^n R_{f(s)}(s_k) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m R_{f(z)}(\bar{z}_i) \right) & a > 0 \\ -2\pi j \left( \sum_{h=1}^p R_{f(s)}(\hat{s}_h) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m R_{f(z)}(\bar{z}_i) \right) & a < 0. \end{cases} \quad (4.38)$$

Facciamo un cenno di dimostrazione, nel caso in cui non ci siano zeri di  $Q(t)$  sull'asse reale. Osserviamo innanzi tutto che:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, +R]} f(s) ds \quad (4.39)$$

ove si è pensato l'intervallo reale  $[-R, +R]$  come un cammino nel piano complesso. Ora il punto centrale della dimostrazione consiste nel mostrare che possiamo aggiungere il limite, per  $R$  che tende a  $+\infty$ , dell'integrale su una opportuna semicirconferenza di raggio  $R$ , in quanto tale limite è nullo. Sia  $\gamma_R$  una semicirconferenza di centro l'origine del piano complesso e raggio  $R$ , preciseremo in seguito in quali casi dovrà essere la semicirconferenza superiore e in quali quella inferiore, si ha:

$$\left| \frac{P(s)}{Q(s)} \right| \leq \frac{M}{R} \quad \text{su } \gamma_R$$

per una opportuna costante  $M$ . Inoltre:

$$|e^{jas}| = |e^{ja(\sigma + j\omega)}| = e^{-a\omega} \begin{cases} \xrightarrow[\omega \rightarrow -\infty]{\omega \rightarrow +\infty} 0 & \text{se } a > 0 \\ \xrightarrow[\omega \rightarrow -\infty]{\omega \rightarrow +\infty} 0 & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Si dovrà perciò scegliere  $\gamma_R$  nel semipiano superiore se  $a > 0$  oppure  $\gamma_R$  nel semipiano inferiore se  $a < 0$ . Mostriamo ora che:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(s) ds = 0. \quad (4.40)$$

Infatti parametrizzando  $\gamma_R$  come il luogo delle  $s = Re^{j\vartheta}$ , al variare di  $\vartheta$ , si ha nel caso di  $a > 0$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} f(s) ds \right| &\leq M \int_0^\pi \frac{e^{-aR \sin \vartheta}}{R} R d\vartheta = 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \vartheta} d\vartheta \leq \\ &\leq 2M \frac{1}{aR} \left[ -e^{-aR\pi/2} + 1 \right] \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

e analogamente nel caso di  $a < 0$ . Se ora noi aggiungiamo il primo membro della (4.40) nella (4.39) otteniamo un integrale lungo il cammino chiuso  $[-R, +R] \cup \gamma_R$ , al quale possiamo applicare il teorema dei residui, tenendo presente che per  $R$  grande in  $[-R, +R] \cup \gamma_R$  sono compresi tutti i poli del semipiano:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, +R]} f(s) ds + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(s) ds = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{[-R, +R] \cup \gamma_R} f(s) ds = \pm 2\pi j \sum_{k=1}^n R_{f(s)}(s_k). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Il segno  $\pm$  nell'ultimo membro (4.42) dipende dal fatto che si deve scegliere il segno  $+$  se  $a > 0$ , in quanto  $[-R, +R] \cup \gamma_R$  è nel semipiano superiore ed è percorso in senso antiorario, mentre si deve scegliere il segno  $-$  se  $a < 0$ , in quanto  $[-R, +R] \cup \gamma_R$  è nel semipiano inferiore ed è percorso in senso orario. ■

**Esempio 4.19** Calcolare con il metodo dei residui l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{1+t^2} dt.$$

Utilizzando il teorema 4.4 si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{1+t^2} dt &= \begin{cases} 2\pi j R_{f(s)}(j) & \text{se } -\omega > 0 \\ -2\pi j R_{f(s)}(-j) & \text{se } -\omega < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2\pi j \left[ \frac{e^{-j\omega s}}{s+j} \right]_{s=j} & = 2\pi j \frac{e^{\omega}}{2j} = \pi e^{\omega} & \text{se } \omega < 0 \\ -2\pi j \left[ \frac{e^{-j\omega s}}{s-j} \right]_{s=-j} & = -2\pi j \frac{e^{-\omega}}{-2j} = \pi e^{-\omega} & \text{se } \omega > 0 \end{cases} \\ &= \pi e^{-|\omega|}, \end{aligned}$$

ove con  $f(s)$  si è indicata l'estensione al piano complesso della funzione integranda:

$$f(s) = \frac{e^{-j\omega s}}{1+s^2}$$

che ha due poli del primo ordine in  $\pm j$ . ■

**Esempio 4.20** Calcolare con il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Osserviamo innanzitutto che l'integrale proposto è ricondotto a un integrale del tipo considerato nel teorema 4.4 grazie alle formule di Eulero; infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} \frac{e^{it}}{t} dt = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt. \quad (4.43)$$

Il primo membro della (4.43) è l'integrale di una funzione continua, mentre il secondo membro è un valor principale. Possiamo applicare il teorema 4.4 e ottenere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \operatorname{Im} 2\pi j \frac{1}{2} R_{f(s)}(0) = \operatorname{Im} 2\pi j \frac{1}{2} 1 = \pi,$$

ove con  $f(s)$  si è indicata la funzione

$$f(s) = \frac{e^{js}}{s},$$

che ha lungo il cammino di integrazione un polo del primo ordine in 0. ■

Prendiamo ora in considerazione quegli integrali impropri, lungo cammini paralleli all'asse immaginario, che intervengono nelle antitrasformate di Laplace.

**Teorema 4.5 (lemma di Jordan B)** Sia data la seguente funzione:

$$f(s) = \frac{P(s)e^{ts}}{Q(s)}$$

con

$$t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0, \quad s = \sigma + j\omega,$$

$$\text{grado di } Q(s) > \text{grado di } P(s),$$

$$Q(s) \text{ analitica per } \operatorname{Re} s = \sigma_0,$$

$$s_k \text{ zeri di } Q(s) \text{ con } 1 \leq k \leq n,$$

$$\operatorname{Re} s_k > \sigma_0,$$

$$P(s_k) \neq 0,$$

$$\tilde{s}_i \text{ zeri di } Q(s) \text{ con } 1 \leq i \leq m,$$

$$\operatorname{Re} \tilde{s}_i < \sigma_0,$$

$$P(\tilde{s}_k) \neq 0.$$

Allora:

$$\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{P(s)e^{ts}}{Q(s)} ds = \begin{cases} -2\pi j \sum_{k=1}^n R_{f(s)}(s_k) & t < 0 \quad \operatorname{Re} s_k > \sigma_0 \\ 2\pi j \sum_{i=1}^m R_{f(s)}(\tilde{s}_i) & t > 0 \quad \operatorname{Re} \tilde{s}_i < \sigma_0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Per verificare l'asserto si possono ripetere i ragionamenti del teorema 4.4, prendendo in considerazione semicirconferenze di centro  $\sigma_0 + j0$  e situate a destra oppure a sinistra della retta verticale per  $\sigma_0 + j0$  a seconda che

$$|e^{ts}| = e^{t\sigma}$$

tenda a zero per  $\sigma \rightarrow +\infty$  (se  $t < 0$ ) oppure per  $\sigma \rightarrow -\infty$  (se  $t > 0$ ). ■

**Esempio 4.21** Calcoliamo utilizzando il lemma di Jordan, nell'ipotesi che  $\sigma_0 > 0$ , il seguente integrale:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{1}{s^2 + 1} e^{st} ds = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} (-2\pi j) 0 & t < 0, \\ \frac{1}{2\pi j} 2\pi j (R_{f(s)}(j) + R_{f(s)}(-j)) & t > 0. \end{cases}$$

Il calcolo dei residui fornisce

$$R_f(j) = \left[ \frac{e^{st}}{D(s^2 + 1)} \right]_{s=j} = \left[ \frac{e^{st}}{2s} \right]_{s=j} = \frac{e^{jt}}{2j},$$

$$R_f(-j) = (R_f(j))^* = -\frac{e^{-jt}}{2j},$$

e quindi otteniamo:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{1}{s^2 + 1} e^{st} ds = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (e^{jt} - e^{-jt})/(2j) = \sin t & t > 0. \end{cases}$$

**Esempio 4.22** Calcoliamo utilizzando il Lemma di Jordan, nell'ipotesi che  $\sigma_0 > 0$ , il seguente integrale:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{s}{s^2 + 1} e^{st} ds = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j} (-2\pi j) 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2\pi j} 2\pi j (R_{f(s)}(j) + R_{f(s)}(-j)) & t > 0 \end{cases}$$

Calcoliamo dapprima i residui, ottenendo

$$R_f(j) = \left[ \frac{se^{st}}{D(s^2 + 1)} \right]_{s=j} = \left[ \frac{se^{st}}{2s} \right]_{s=j} = \frac{je^{jt}}{2} = \frac{e^{jt}}{2},$$

$$R_f(-j) = (R_f(j))^* = \frac{e^{-jt}}{2},$$

per cui si ha:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{1}{s^2 + 1} e^{st} ds = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (e^{jt} + e^{-jt})/(2) = \cos t & t > 0, \end{cases}$$



che conclude l'esercizio. ■

**Esempio 4.23** *Calcoliamo, utilizzando il Lemma di Jordan, l'integrale*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds,$$

prima nell'ipotesi che sia  $\sigma_0 > 0$ , poi nell'ipotesi che sia  $\sigma_0 < 0$ .

Iniziamo con il calcolo dell'unico residuo:

$$R_f(0) = [e^{st}]_{s=0} = 1.$$

Se  $\sigma_0 > 0$  abbiamo

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0, \end{cases}$$

mentre, se  $\sigma_0 < 0$ , si ottiene

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t > 0. \end{cases}$$

■

## 4.7 Scomposizione in fratti semplici

In questo paragrafo applichiamo alcuni dei risultati precedenti alla scomposizione in fratti semplici di funzioni razionali (rapporto di due polinomi). La scomposizione in fratti può essere fatta anche con metodi elementari e, in questa veste, è già nota al lettore.

Qui vogliamo fissare la nostra attenzione su un altro metodo, che fa intervenire il calcolo di residui. Questo metodo presenta molti vantaggi ed è utilizzato abitualmente in contesti applicativi di grande interesse, quali il calcolo dell'antitrasformata di Laplace di funzioni razionali, che vedremo in un capitolo successivo.

Data una funzione razionale

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_m(s)},$$

ove  $s = \sigma + j\omega$  è la variabile complessa,  $P_n(s)$  un polinomio di grado  $n$  e  $\tilde{P}_m(s)$  un polinomio di grado  $m$ , ci si propone di scomporre  $F(s)$  in una somma di termini che siano polinomi o funzioni razionali del tipo

$$\frac{A}{(s - s_0)^k}$$

oppure del tipo

$$\frac{B}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2} \quad \text{oppure} \quad \frac{Cs}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad (4.45)$$

con  $A$ ,  $B$  e  $C$  costanti e  $k$  intero positivo.

Iniziamo a trattare la scomposizione in fratti semplici dal caso in cui  $F(s)$  ha solo poli semplici.

### 4.7.1 Poli semplici

Sia data la seguente funzione razionale:

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_m(s)} \quad (4.46)$$

ove  $P_n(s)$  e  $\tilde{P}_m(s)$  sono due polinomi di grado rispettivamente  $n$  e  $m$ ; il denominatore  $\tilde{P}_m(s)$  si annulli in  $m$  punti

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_m$$

tutti distinti, in cui non si annulla il numeratore.

È noto che scomporre  $F(s)$  in fratti semplici significa scriverla nella forma

$$F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_m}{s - s_m}, \quad (4.47)$$

dove  $Q_{n-m}(s)$  è il quoziente di  $P_n$  e  $\tilde{P}_m$  (che è presente solo nel caso in cui  $n \geq m$ ) e dove  $A_1, A_2, \dots, A_m$  sono delle opportune costanti.

**Osservazione 4.11** Talvolta la scomposizione in fratti semplici si ricava subito dall'esame della funzione  $F(s)$ , come nel caso seguente:

$$F(s) = \frac{2}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{-1}{s+1}.$$

■

**Osservazione 4.12** Vediamo un esempio di scomposizione con il noto metodo algebrico, che richiede la soluzione di un sistema lineare. Consideriamo la funzione

$$F(s) = \frac{2s^2 + 1}{(s+2)(s-1)}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{2s^2 + 1}{(s+2)(s-1)} &= Q_0 + \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \\ &= \frac{Q_0(s+2)(s-1) + A(s-1) + B(s+2)}{(s+2)(s-1)} = \\ &= \frac{Q_0s^2 + (Q_0 + A + B)s + (-2Q_0 - A + 2B)}{(s+2)(s-1)}. \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei numeratori del primo e dell'ultimo membro otteniamo il sistema

$$\begin{cases} Q_0 = 2 \\ Q_0 + A + B = 0 \\ -2Q_0 - A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_0 = 2 \\ A = -3 \\ B = 1 \end{cases} \quad (4.48)$$

e infine

$$F(s) = 2 + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s-1}.$$

Ricordiamo che, in generale, si ottiene un sistema del tipo (4.48), che fornisce in modo unico le costanti  $A_1, A_2, \dots, A_m$  e i coefficienti di  $Q_{n-m}(s)$ ; questo fatto giustifica la formula (4.47) della scomposizione.

### Uso dei residui

Dimostriamo ora che nella formula (4.47) le costanti  $A_1, A_2, \dots, A_m$  possono essere ottenute con il calcolo di opportuni residui. Siano  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m, m$  circonferenze di centro rispettivamente  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$  e raggio sufficientemente piccolo in modo da circondare una sola singolarità polare (vedi figura 4.3). Si ha che

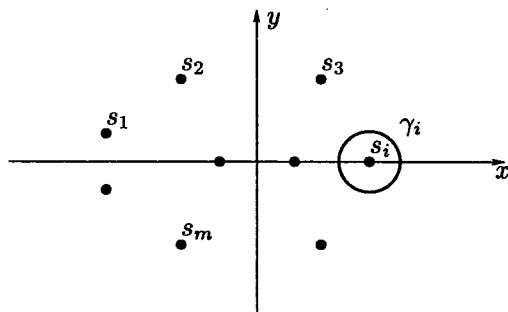


Fig. 4.3 Scomposizione in fratti.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} F(s) ds &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} Q_{n-m}(s) ds + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} \frac{A_1}{s-s_1} ds + \dots \\ &+ \dots + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} \frac{A_i}{s-s_i} ds + \dots \\ &+ \dots + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} \frac{A_m}{s-s_m} ds; \end{aligned} \quad (4.49)$$

gli integrandi a secondo membro sono tutti analitici nel cerchio di bordo  $\gamma_i$ , eccetto quello che ha a denominatore  $s-s_i$  per cui si ha:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} F(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} \frac{A_i}{s-s_i} ds = \frac{1}{2\pi j} A_i 2\pi j = A_i. \quad (4.50)$$

Ma si ha pure:

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma_i} F(s) ds = R_{F(s)}(s_i). \quad (4.51)$$

Il confronto tra le (4.50) e (4.51) mostra che

$$A_i = R_{F(s)}(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

le costanti  $A_1, A_2, \dots, A_m$  sono i residui di  $F(s)$  in  $s_1, s_2, \dots, s_m$ . Quindi:

$$F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + \frac{R_{F(s)}(s_1)}{s - s_1} + \frac{R_{F(s)}(s_2)}{s - s_2} + \dots + \frac{R_{F(s)}(s_m)}{s - s_m}. \quad (4.52)$$

**Esempio 4.24** Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la seguente funzione razionale:

$$F(s) = \frac{2s^2 + 1}{(s + 2)(s - 1)}.$$

Per la (4.52) si ha:

$$F(s) = \frac{2s^2 + 1}{(s + 2)(s - 1)} = Q_0 + \frac{R_{F(s)}(-2)}{s + 2} + \frac{R_{F(s)}(1)}{s - 1}.$$

Dal calcolo dei residui otteniamo:

$$R_{F(s)}(-2) = \left. \frac{2s^2 + 1}{s - 1} \right|_{s=-2} = \frac{9}{-3} = -3,$$

$$R_{F(s)}(1) = \left. \frac{2s^2 + 1}{s + 2} \right|_{s=1} = \frac{3}{3} = 1.$$

Osservando che numeratore e denominatore sono due polinomi dello stesso grado, otteniamo subito che  $Q_0$  è il rapporto dei coefficienti di grado massimo:  $Q_0 = 2$ . In conclusione, abbiamo:

$$F(s) = \frac{2s^2 + 1}{(s + 2)(s - 1)} = 2 + \frac{-3}{s + 2} + \frac{1}{s - 1}.$$

Il lettore è invitato a confrontare il metodo dei residui utilizzato in questo esercizio con il metodo del sistema utilizzato nell'osservazione 4.12. ■

**Esempio 4.25** Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione razionale

$$F(s) = \frac{15s^4 + 10s^3 - 45s^2 - 16s + 12}{(s^2 - 4)(s^2 - 1)s}.$$

La funzione ha come numeratore un polinomio di grado inferiore a quello del denominatore, per cui  $Q_{n-m} = 0$ . Per la (4.52) si ha:

$$F(s) = \frac{R_{F(s)}(-2)}{s+2} + \frac{R_{F(s)}(-1)}{s+1} + \frac{R_{F(s)}(0)}{s} + \frac{R_{F(s)}(1)}{s-1} + \frac{R_{F(s)}(2)}{s-2}.$$

Calcoliamo i residui:

$$R_{F(s)}(-2) = \left. \frac{15s^4 + 10s^3 - 45s^2 - 16s + 12}{(s+1)s(s-1)(s-2)} \right|_{s=-2} = \frac{24}{24} = 1,$$

$$R_{F(s)}(-1) = \left. \frac{15s^4 + 10s^3 - 45s^2 - 16s + 12}{(s+2)s(s-1)(s-2)} \right|_{s=-1} = \frac{-12}{-6} = 2,$$

$$R_{F(s)}(0) = \left. \frac{15s^4 + 10s^3 - 45s^2 - 16s + 12}{(s+2)(s+1)(s-1)(s-2)} \right|_{s=0} = \frac{12}{4} = 3,$$

$$R_{F(s)}(1) = \left. \frac{15s^4 + 10s^3 - 45s^2 - 16s + 12}{(s+2)(s+1)s(s-2)} \right|_{s=1} = \frac{-24}{-6} = 4,$$

$$R_{F(s)}(2) = \left. \frac{15s^4 + 10s^3 - 45s^2 - 16s + 12}{(s+2)(s+1)s(s-1)} \right|_{s=2} = \frac{120}{24} = 5.$$

Quindi possiamo scrivere  $F(s)$  nella forma

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s} + \frac{4}{s-1} + \frac{5}{s-2}.$$

■

## 4.7.2 Poli multipli

Prendiamo in considerazione una funzione razionale con un solo polo multiplo; la formula così ottenuta si estende poi facilmente al caso di funzioni razionali con più poli. Sia

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_m(s)}$$

con  $\tilde{P}_m(s)$  avente uno zero di molteplicità  $m$  in  $s_0$  e  $P_n(s_0) \neq 0$ . Si ha la seguente scomposizione:

$$F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + \frac{A_m}{(s-s_0)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-s_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(s-s_0)^2} + \frac{A_1}{(s-s_0)}, \quad (4.53)$$

ove il polinomio  $Q_{n-m}$  è presente solo se  $n \geq m$ ; le costanti a numeratore hanno l'espressione

$$\begin{aligned}
A_m &= R_{(s-s_0)^{m-1}F(s)}(s_0) = c_{-m}, \\
A_{m-1} &= R_{(s-s_0)^{m-2}F(s)}(s_0) = c_{-(m-1)}, \\
&\vdots \\
A_2 &= R_{(s-s_0)F(s)}(s_0) = c_{-2}, \\
A_1 &= R_{F(s)}(s_0) = c_{-1},
\end{aligned} \tag{4.54}$$

ove con

$$R_{(s-s_0)^{m-1}F(s)}(s_0), R_{(s-s_0)^{m-2}F(s)}(s_0), \dots R_{(s-s_0)F(s)}(s_0), R_{F(s)}(s_0)$$

si sono indicati rispettivamente i residui delle funzioni

$$(s-s_0)^{m-1}F(s), (s-s_0)^{m-2}F(s), \dots (s-s_0)F(s), F(s)$$

mentre

$$c_{-m}, c_{-(m-1)}, \dots c_2, c_{-1}$$

indicano i coefficienti di indice negativo dello sviluppo di Laurent di centro  $s_0$  di  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{c_{-m}}{(s-s_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(s-s_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_2}{(s-s_0)^2} + \frac{c_1}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + \dots \tag{4.55}$$

Dimostriamo le formule (4.53) e (4.54). Il coefficiente  $A_1$  si ottiene integrando la (4.53) su una circonferenza  $\gamma$  di centro  $s_0$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} F(s) ds &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} Q_{n-m}(s) ds + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{A_m}{(s-s_0)^m} ds + \\
&+ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{A_{m-1}}{(s-s_0)^{m-1}} ds + \dots + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{A_2}{(s-s_0)^2} ds + \\
&+ \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{A_1}{(s-s_0)} ds.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Ricordando la (4.5), tutti gli addendi a secondo membro della (4.56) sono nulli eccetto l'ultimo, che è

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} F(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{A_1}{(s-s_0)} ds = \frac{1}{2\pi j} A_1 2\pi j = A_1. \tag{4.57}$$

Integrando inoltre lo sviluppo di Laurent (4.55) di  $F(s)$  centrato in  $s_0$  si ha

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} F(s) ds = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{c_{-m}}{(s-s_0)^m} ds + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{c_{-(m-1)}}{(s-s_0)^{m-1}} ds + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{c_2}{(s-s_0)^2} ds + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} \frac{c_1}{(s-s_0)} ds + \\
& + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} c_0 ds + \frac{1}{2\pi j} \oint_{\gamma} c_1(s-s_0) ds + \dots = c_{-1}. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Le (4.57) e (4.58) ci permettono di concludere che

$$A_1 = c_{-1} = R_{F(s)}(s_0).$$

Per gli altri coefficienti  $A_2, A_3, \dots, A_m$  si integra su  $\gamma$  non la  $F(s)$ , ma le funzioni

$$(s-s_0)^{k-1} F(s) \quad k = 2, 3, \dots, m$$

e si ottiene:

$$A_k = c_{-k} = R_{(s-s_0)^{k-1} F(s)}(s_0).$$

■

**Esempio 4.26** Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione razionale

$$F(s) = \frac{s^5}{(s-1)^5}.$$

Per le (4.53) e (4.54) si ha:

$$F(s) = 1 + \frac{c_{-5}}{(s-1)^5} + \frac{c_{-4}}{(s-1)^4} + \frac{c_{-3}}{(s-1)^3} + \frac{c_{-2}}{(s-1)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-1)}.$$

Il calcolo dei coefficienti  $c_{-k}$  con  $k \in 1, 2, \dots, 5$  mediante i residui ci fornisce:

$$\begin{aligned}
c_{-5} &= R_{(s-1)^4 F(s)}(1) = s^5|_{s=1} = 1, \\
c_{-4} &= R_{(s-1)^3 F(s)}(1) = \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{ds} s^5 \right]_{s=1} = 5s^4|_{s=1} = 5, \\
c_{-3} &= R_{(s-1)^2 F(s)}(1) = \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{ds^2} s^5 \right]_{s=1} = \frac{1}{2} 20s^3|_{s=1} = 10, \\
c_{-2} &= R_{(s-1) F(s)}(1) = \frac{1}{3!} \left[ \frac{d^3}{ds^3} s^5 \right]_{s=1} = \frac{1}{6} 60s^2|_{s=1} = 10, \\
c_{-1} &= R_{F(s)}(1) = \frac{1}{4!} \left[ \frac{d^4}{ds^4} s^5 \right]_{s=1} = \frac{1}{24} 120s|_{s=1} = 5.
\end{aligned}$$

Osservando poi che la nostra funzione ha a numeratore e a denominatore due polinomi dello stesso grado, otteniamo subito che  $Q_0$  è il rapporto dei coefficienti di grado massimo:  $Q_0 = 1$ . Quindi

$$F(s) = 1 + \frac{1}{(s-1)^5} + \frac{5}{(s-1)^4} + \frac{10}{(s-1)^3} + \frac{10}{(s-1)^2} + \frac{5}{(s-1)}.$$

**Esempio 4.27** Scomporre in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione razionale

$$F(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 3s - 1}{(s+1)^2(s-1)}.$$

Si ha, con considerazioni analoghe a quelle dell'esercizio precedente,  $Q_0 = 2$ . Utilizzando la (4.52) per il polo semplice  $s_1 = 1$  e le (4.53) e (4.54) per il polo doppio  $s_2 = -1$  si ha:

$$F(s) = 2 + \frac{R_{F(s)}(1)}{(s-1)} + \frac{c_{-2}}{(s+1)^2} + \frac{c_{-1}}{(s+1)}.$$

Ora il calcolo dei coefficienti è dato da:

$$R_{F(s)}(1) = \left. \frac{2s^3 + 4s^2 + 3s - 1}{(s+1)^2} \right|_{s=1} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$c_{-2} = R_{(s+1)F(s)}(-1) = \left. \frac{2s^3 + 4s^2 + 3s - 1}{s-1} \right|_{s=-1} = \frac{-2}{-2} = 1,$$

$$\begin{aligned} c_{-1} &= R_{F(s)}(-1) = \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{ds} \frac{2s^3 + 4s^2 + 3s - 1}{(s+1)^2} \right]_{s=-1} = \\ &= \left. \frac{(6s^2 + 8s + 3)(s-1) - (2s^3 + 4s^2 + 3s - 1)}{(s+1)^2} \right|_{s=-1} = 0, \end{aligned}$$

da cui:

$$F(s) = 2 + \frac{2}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1)^2}.$$

### 4.7.3 Poli semplici complessi coniugati

Il caso di poli semplici complessi coniugati rientra in quello già visto per i poli semplici; tuttavia, soprattutto in vista della antitrasformata di Laplace, riteniamo opportuno presentare la scomposizione in una forma che conserva a denominatore polinomi di secondo grado a coefficienti reali.

Prendiamo in considerazione una funzione razionale con una coppia di poli semplici complessi coniugati; si può poi estendere la formula ottenuta al caso di funzioni razionali con più poli. Sia

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_2(s)}$$



con  $\tilde{P}_2(s)$  avente una coppia di zeri semplici in  $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$  e  $s_0^* = \sigma_0 - j\omega_0$ . Inoltre supponiamo che  $P_n(s)$  e  $\tilde{P}_2(s)$  siano polinomi a coefficienti reali (per cui la funzione  $F(s)$  sia hermitiana. Si ha la seguente scomposizione:

$$F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + 2\alpha \frac{s - \sigma_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2} - 2\beta \frac{\omega_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}, \quad (4.59)$$

ove il polinomio  $Q_{n-m}$  è presente solo se  $n \geq 2$ ; le costanti reali  $\alpha$  e  $\beta$  hanno la seguente espressione

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Re} R_{F(s)}(s_0), \\ \beta &= \operatorname{Im} R_{F(s)}(s_0), \end{aligned} \quad (4.60)$$

ovvero:

$$\alpha + j\beta = R_{F(s)}(s_0). \quad (4.61)$$

Dimostriamo le formule (4.59) e (4.61). Esse si ottengono da quelle per i poli semplici [vedi (4.52)] osservando che, per funzioni razionali a coefficienti reali, a poli complessi coniugati corrispondono residui complessi coniugati. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} F(s) &= \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + \frac{(\alpha + j\beta)}{(s - \sigma_0) - j\omega_0} + \frac{(\alpha - j\beta)}{(s - \sigma_0) + j\omega_0} = \\ &= Q_{n-m}(s) + \frac{(\alpha + j\beta)[(s - \sigma_0) + j\omega_0] + (\alpha - j\beta)[(s - \sigma_0) - j\omega_0]}{[(s - \sigma_0) - j\omega_0][(s - \sigma_0) + j\omega_0]} = \\ &= Q_{n-m}(s) + \\ &\quad + \frac{\alpha(s - \sigma_0) + j\beta(s - \sigma_0) + j\alpha\omega_0 - \beta\omega_0}{[(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2]} + \\ &\quad + \frac{\alpha(s - \sigma_0) - j\beta(s - \sigma_0) - j\alpha\omega_0 - \beta\omega_0}{[(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2]} = \\ &= Q_{n-m}(s) + \frac{2\alpha(s - \sigma_0)}{[(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2]} + \frac{-2\beta\omega_0}{[(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2]}, \end{aligned}$$

che dimostra la (4.59). ■

**Esempio 4.28** Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione

$$F(s) = \frac{10s - 22}{s^2 + 4s + 13}.$$

Il denominatore si può scrivere come

$$s^2 + 4s + 13 = (s + 2)^2 + 3^2,$$

per cui  $F(s)$  ha i due poli semplici complessi coniugati

$$\sigma_0 \pm j\omega_0 = -2 \pm j3,$$

e il residuo in  $-2 + j3$  è

$$\begin{aligned} R_{F(s)}(-2 + j3) &= \alpha + j\beta = \left[ \frac{10s - 22}{2s + 4} \right]_{s=-2+j3} \\ &= \frac{-20 + 30j - 22}{-4 + 6j + 4} = \frac{-42 + 30j}{6j} = 5 + 7j. \end{aligned}$$

Utilizzando le (4.59) e (4.61) si ha dunque:

$$F(s) = 2\alpha \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} - 2\beta \frac{3}{(s+2)^2 + 9} = 10 \frac{s+2}{(s+2)^2 + 9} - 14 \frac{3}{(s+2)^2 + 9},$$

che è la scomposizione richiesta dall'esercizio. ■

**Esempio 4.29** *Scomporre in fratti semplici la funzione*

$$F(s) = \frac{s^2}{2s^2 + 2s + 1}.$$

Scrivendo il denominatore come

$$2s^2 + 2s + 1 = 2 \left[ \left( s + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right],$$

determiniamo i due poli semplici complessi coniugati, che sono

$$\sigma_0 \pm j\omega_0 = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}.$$

Il residuo in  $-1/2 + j/2$  è

$$R_{F(s)}\left(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \alpha + j\beta = \left[ \frac{s^2}{4s + 2} \right]_{s=-1/2+j/2} = \frac{1/4 - j/2 - 1/4}{-2 + 2j + 2} = \frac{-j/2}{2j} = -\frac{1}{4}.$$

Utilizzando le (4.59) e (4.61) si ha dunque:

$$F(s) = \frac{1}{2} + 2\alpha \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2 + 1/4} - 2\beta \frac{1/2}{(s+1/2)^2 + 1/4} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{4}\right) \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2 + 1/4}.$$

**Esempio 4.30** *Si scomponga in fratti semplici la funzione*

$$F(s) = \frac{3s^5 + 7}{2s^3(s^2 + 1)}.$$

Il denominatore ha uno zero triplo in zero e due zeri semplici complessi coniugati in  $\pm j$ ; non annullandosi il numeratore di  $F(s)$  in tali punti,  $F(s)$  presenta un polo triplo in zero e due poli semplici complessi coniugati in  $\pm j$ . I residui e i coefficienti della scomposizione sono

$$c_{-3} = R_{s^2 F(s)}(0) = \left[ \frac{3s^5 + 7}{2(s^2 + 1)} \right]_{s=0} = \frac{7}{2},$$

$$c_{-2} = R_{s F(s)}(0) = \left[ \frac{d}{ds} \frac{3s^5 + 7}{2(s^2 + 1)} \right]_{s=0} = 0,$$

$$R_{F(s)}(0) = \left[ \frac{d^2}{ds^2} \frac{3s^5 + 7}{2(s^2 + 1)} \right]_{s=0} = -\frac{7}{2},$$

$$R_{F(s)}(j) = \left[ \frac{3s^5 + 7}{10s^4 + 6s^2} \right]_{s=j} = \frac{7}{4} + j\frac{3}{4}.$$

Utilizzando le (4.53), (4.54), (4.59) e (4.61) si ha dunque:

$$F(s) = \frac{3}{2} + \frac{7/2}{s^3} + \frac{-7/2}{s} + \frac{7}{2} \frac{s}{(s^2 + 1)} - \frac{3}{2} \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

che è la scomposizione richiesta dall'esercizio. ■

## 5

# Distribuzioni

Le distribuzioni, che desideriamo presentare in questo capitolo, sono una generalizzazione del concetto di funzione, intendendo con questa affermazione che si vuole poter pensare alle distribuzioni come a un insieme che contiene al suo interno anche le usuali funzioni integrabili (o il cui quadrato è integrabile) sugli intervalli limitati.

Pensiamo di presentare le distribuzioni attraverso tre tipi di riflessione, ciascuno dei quali ne sottolinea aspetti diversi.

Il modo più astratto (e quindi difficile) è quello di presentare le distribuzioni come *funzionali* lineari e continui su un opportuno spazio di funzioni di prova.

Si possono poi pensare le distribuzioni come *limite* di funzioni (a quadrato integrabile sugli intervalli limitati) in un senso opportuno che chiameremo *senso delle distribuzioni*.

Infine osserveremo che l'allargamento dell'insieme delle funzioni alle distribuzioni è stato anche fatto affinché si possa sempre derivare ogni funzione, anche discontinua, e questo evidentemente in un nuovo senso che chiameremo *derivata distribuzionale*.

Iniziamo introducendo alcune funzioni discontinue che dovremo spesso maneggiare nel seguito.

### 5.1 Il gradino e la porta

Indichiamo con  $u(t)$  la *funzione a gradino unitario* così definita (vedi figura 5.1):

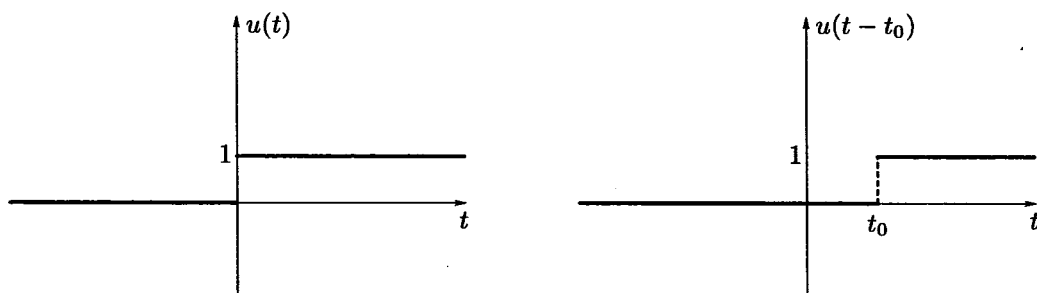


Fig. 5.1 Gradino unitario  $u(t)$  e sua traslata.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

È bene abituarsi fin da ora a considerare altre funzioni che si ottengono dalla  $u(t)$  mediante traslazioni o simmetrie (vedi le figure 5.1 e 5.2):

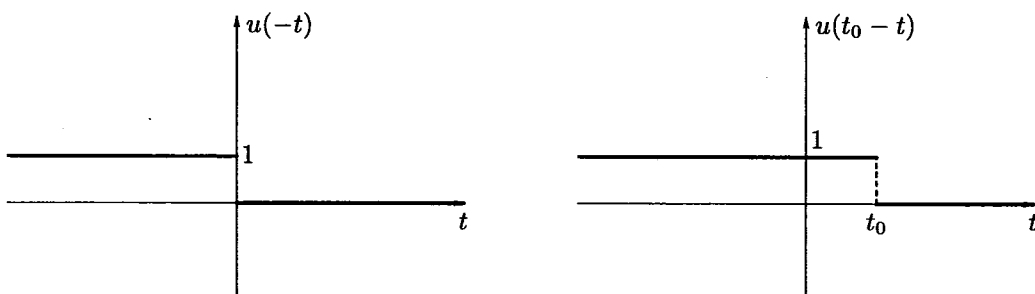


Fig. 5.2 Simmetria del gradino  $u(-t)$  e sue traslate  $u(t_0 - t)$ .

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > t_0 \\ 1/2 & \text{se } t = t_0 \\ 0 & \text{se } t < t_0, \end{cases}$$

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > 0 \\ 1/2 & \text{se } t = 0 \\ 1 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

$$u(t_0 - t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > t_0 \\ 1/2 & \text{se } t = t_0 \\ 1 & \text{se } t < t_0. \end{cases}$$

La differenza di due traslate del gradino dà origine alla *funzione porta*. Indichiamo con  $p_T(t)$  la funzione che vale 1 sull'intervallo  $] -T/2, T/2[$  di ampiezza  $T$  e zero per  $|t| > T/2$  e la chiamiamo porta (vedi figura 5.3) di larghezza (o ampiezza)  $T$ :

$$p_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 < t < T/2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } |t| = T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2. \end{cases} \quad (5.2)$$

È ancora importante abituarsi a considerare le traslate della porta (vedi figura 5.3):

$$p_T(t - t_0) = u(t + T/2 - t_0) - u(t - T/2 - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_0 - T/2 < t < t_0 + T/2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } |t - t_0| = T/2 \\ 0 & \text{se } |t - t_0| > T/2. \end{cases}$$

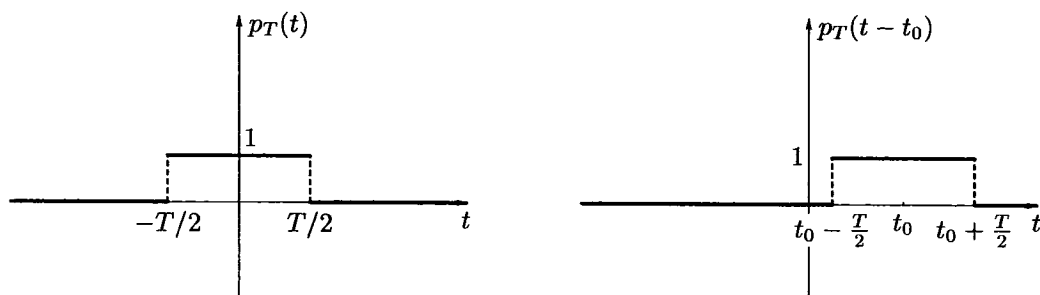


Fig. 5.3 Porta  $p_T(t)$  e traslata della porta  $p_T(t - t_0)$ .

## 5.2 Funzionali lineari

Indichiamo con  $\mathcal{D}$  l'insieme delle funzioni infinite volte derivabili e nulle all'esterno di un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}$  (vedi figura 5.4). Le funzioni che appartengono a  $\mathcal{D}$  sono dette *funzioni di prova* o *funzioni test*. Un funzionale lineare  $F$  su  $\mathcal{D}$  è una applicazione che ad ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$  associa un numero reale con le proprietà di linearità seguenti:

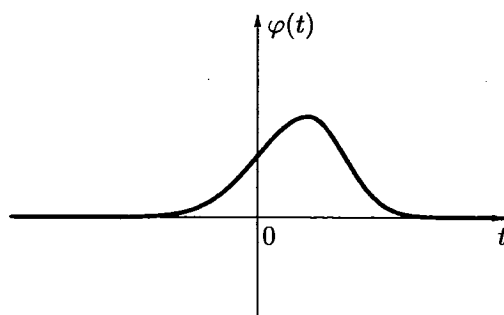


Fig. 5.4 Funzione di prova  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} F[\varphi_1 + \varphi_2] &= F[\varphi_1] + F[\varphi_2] && \text{per tutte le } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}, \\ F[c\varphi] &= cF[\varphi] && \text{per tutte le } \varphi \in \mathcal{D} \text{ e } c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Alle funzioni  $f(t)$  il cui quadrato è integrabile sugli intervalli limitati è associato in modo naturale un funzionale lineare:

$$F_{f(t)}[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt. \quad (5.3)$$

Le distribuzioni sono l'insieme (indicato con  $\mathcal{D}'$ ) dei *funzionali lineari e continui* su  $\mathcal{D}$ . La richiesta della continuità esige un discorso piuttosto complicato sulla topologia da considerare sull'insieme  $\mathcal{D}$  e a questo scopo riteniamo sufficiente quanto diremo nel paragrafo seguente sui limiti nel senso delle distribuzioni.

Facciamo un esempio di funzionale lineare associato a una funzione di quadrato integrabile.

**Esempio 5.1** Sia  $f(t) = p_2(t-1) = u(t) - u(t-2)$  si ha:

$$F_{f(t)}[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(t-1)\varphi(t) dt = \int_0^2 \varphi(t) dt,$$

ovvero alla funzione  $p_2(t)$  è associato il funzionale lineare (distribuzione) che a ogni  $\varphi \in \mathcal{D}$  (e per esempio positivo) associa il valore dell'area compresa tra il grafico di  $\varphi$  e l'asse delle  $t$  nell'intervallo tra 0 e 2. ■

Vi sono tuttavia dei funzionali lineari che non provengono da funzioni integrabili e che quindi definiscono degli oggetti nuovi, come nel seguente esempio.

**Esempio 5.2** Si consideri il funzionale lineare indicato con  $\delta$  (delta di Dirac) e così definito:

$$\delta[\varphi] = \varphi(0). \quad (5.4)$$

Per analogia con quanto avviene per le funzioni si usa scrivere la (5.4) nel modo seguente:

$$\delta[\varphi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t) dt = \varphi(0), \quad (5.5)$$

ove, oltre a  $\delta[\varphi]$ , anche  $\delta(t)$  è chiamata distribuzione, come avviene per le funzioni, si pensa a  $f(t)$  o a  $\delta(t)$  come a ciò che consente di costruire i funzionali (5.3) o (5.5). In (5.5) il simbolo  $\int$  non rappresenta un integrale, ma esclusivamente un funzionale lineare.

Con il simbolo  $\delta(t-t_0)$  si indica la traslata della  $\delta(t)$ , cui corrisponde il funzionale seguente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t) dt = \varphi(t_0).$$

Se la  $\delta(t-t_0)$  è moltiplicata per una costante reale  $\alpha$ , l'espressione  $\alpha\delta(t-t_0)$  descrive una distribuzione che applicata alla funzione di prova  $\varphi(t)$  dà il valore  $\alpha\varphi(t_0)$  e si usa dire che  $\alpha\delta(t-t_0)$  è una delta di Dirac centrata in  $t_0$  e di ampiezza  $\alpha$ .

## 5.3 Limiti nel senso delle distribuzioni

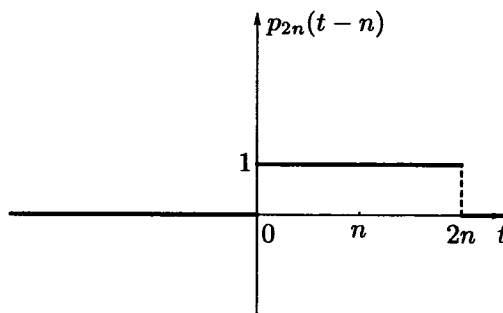
Iniziamo dando la definizione di limite distribuzionale di una successione di funzioni integrabili sugli intervalli limitati.

**Definizione 5.1** Sia  $f_n(t)$  una successione di funzioni, si dice che  $f_n(t)$  tende, nel senso delle distribuzioni, a  $f(t)$  se per ogni funzione di prova  $\varphi(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\varphi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt, \quad (5.6)$$

ovvero se il funzionale associato a  $f_n(t)$  tende al funzionale associato a  $f(t)$ .

Mostriamo un esempio in cui sia le  $f_n(t)$  che la  $f(t)$  sono delle funzioni.

Fig. 5.5 Successione  $p_{2n}(t-n)$ .

**Esempio 5.3** Consideriamo la successione di funzioni (vedi figura 5.5) seguente:

$$f_n(t) = p_{2n}(t-n) = u(t) - u(t-2n). \quad (5.7)$$

Per studiare il limite nel senso delle distribuzioni della (5.7) dobbiamo considerare i funzionali associati alle  $f_n(t)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{2n}(t-n) \varphi(t) dt = \int_0^{2n} \varphi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt. \quad (5.8)$$

Confrontando il primo e l'ultimo membro della (5.8) si ha il seguente limite nel senso delle distribuzioni:

$$p_{2n}(t-n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u(t). \quad (5.9)$$

■

Vediamo ora alcuni esempi di limiti distribuzionali che hanno come limite la distribuzione delta di Dirac  $\delta(t)$ .

**Esempio 5.4** Si mostri che il limite nel senso delle distribuzioni della successione di funzioni seguente:

$$f_n(t) = n p_{1/n}(t) = n [u(t + 1/(2n)) - u(t - 1/(2n))]$$

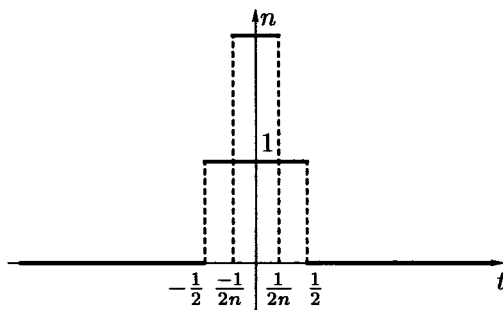
tende alla  $\delta(t)$  (vedi figura 5.6).

Osserviamo subito che le funzioni  $f_n(t)$  hanno le seguenti proprietà:

- 1) la parte di piano compresa tra il grafico di  $f_n(t)$  e l'asse delle  $t$  ha area 1 per ogni  $n$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt = 1 \quad \text{per tutte le } n; \quad (5.10)$$



Fig. 5.6 Le funzioni  $f_n(t) = n p_{1/n}(t)$ .

- 2) il massimo delle  $f_n(t)$ , che è raggiunto per  $t = 0$ , tende a  $+\infty$  quando  $n$  tende a  $+\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = +\infty; \quad (5.11)$$

- 3) il grafico delle  $f_n(t)$  "si assottiglia" al crescere di  $n$ , ovvero, in senso preciso, se  $t_0 \neq 0$  il limite per  $n$  che tende ad infinito di  $f_n(t_0)$  è zero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t_0) = 0, \quad (5.12)$$

ovvero la successione delle  $f_n(t)$  converge puntualmente a zero per  $t \neq 0$ .

Utilizzando le tre proprietà precedenti dimostriamo che, data una  $\varphi$ , la differenza tra il funzionale associato alle  $f_n(t)$  e quello associato alla  $\delta(t)$  può essere resa, in valore assoluto, più piccola di un arbitrario  $\varepsilon > 0$ , pur di prendere  $n$  abbastanza grande:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} n p_{1/n}(t) \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \right| < \varepsilon. \quad (5.13)$$

Infatti utilizzando dapprima la definizione di  $\delta(t)$  e poi la (5.10), il primo membro della (5.13) diviene:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} n p_{1/n}(t) \varphi(t) dt - \varphi(0) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} n p_{1/n}(t) \varphi(t) dt - \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} n p_{1/n}(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} n p_{1/n}(t) (\varphi(t) - \varphi(0)) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} n p_{1/n}(t) |\varphi(t) - \varphi(0)| dt. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ora osservando che  $p_{1/n}(t)$  vale 1 per  $t$  compreso tra  $-1/(2n)$  e  $+1/(2n)$  e zero altrove si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n p_{1/n}(t) |\varphi(t) - \varphi(0)| dt = n \int_{-1/(2n)}^{+1/(2n)} |\varphi(t) - \varphi(0)| dt. \quad (5.15)$$

La variabile di integrazione si trova nell'intervallo  $[-1/(2n), 1/(2n)]$  e quindi per  $n$  grande è vicina allo zero; dunque per la continuità della funzione di prova  $\varphi$  si ha:

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq \varepsilon \quad \forall n > n_0 \quad \text{per un opportuno } n_0. \quad (5.16)$$

La (5.15) diviene dunque:

$$n \int_{-1/(2n)}^{+1/(2n)} |\varphi(t) - \varphi(0)| dt \leq n \int_{-1/(2n)}^{+1/(2n)} \varepsilon dt = n\varepsilon 1/n = \varepsilon \quad (5.17)$$

e ciò mostra che  $np_{1/n}$  tende alla  $\delta(t)$  nel senso delle distribuzioni. ■

**Esempio 5.5** Si mostri che il limite nel senso delle distribuzioni della successione di funzioni:

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{(1 + n^2 t^2)}$$

è la distribuzione  $\delta(t)$  (vedi figura 5.7).

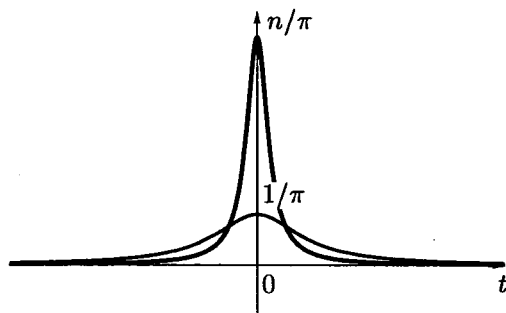


Fig. 5.7 Le funzioni  $f_n(t) = n/[\pi(1 + n^2 t^2)]$ .

Osserviamo subito che le funzioni  $f_n(t)$  hanno le seguenti proprietà:

- 1) la parte di piano compresa tra il grafico di  $f_n(t)$  e l'asse delle  $t$  ha area 1 per ogni  $n$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{(1 + n^2 t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + \tau^2)} d\tau = 1; \quad (5.18)$$

- 2) il massimo delle  $f_n(t)$ , che è raggiunto per  $t = 0$ , tende a  $+\infty$  quando  $n$  tende a  $+\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\pi} = +\infty; \quad (5.19)$$

- 3) il grafico delle  $f_n(t)$  "si assottiglia" al crescere di  $n$ , ovvero, in senso preciso, se  $t_0 \neq 0$  il limite per  $n$  che tende ad infinito di  $f_n(t_0)$  è zero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2(\pi t_0^2) + \pi} = 0. \quad (5.20)$$

Utilizzando le tre proprietà precedenti, analogamente a quanto fatto nell'esercizio 5.4, si può mostrare che, la differenza tra il funzionale associato alle  $f_n(t)$  e quello associato alla  $\delta(t)$  può essere resa, in valore assoluto, più piccola di un arbitrario  $\varepsilon > 0$  pur di prendere  $n$  abbastanza grande:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\pi(1+n^2t^2)} \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \right| < \varepsilon \quad (5.21)$$

e quindi:

$$\frac{n}{\pi(1+n^2t^2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(t)$$

nel senso delle distribuzioni. ■

**Esempio 5.6** Si mostri che il limite nel senso delle distribuzioni della successione di funzioni (gaussiane) seguente:

$$f_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2}$$

tende alla  $\delta(t)$  (vedi figura 5.8).

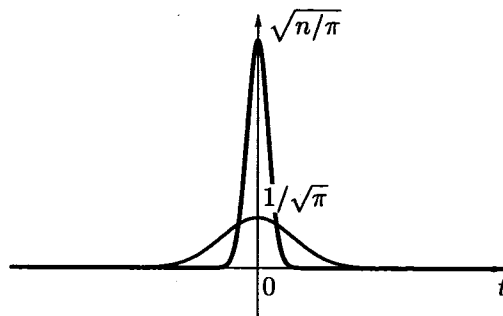


Fig. 5.8 Successione di gaussiane.

Osserviamo subito che le funzioni  $f_n(t)$  hanno le seguenti proprietà:

- 1) la parte di piano compresa tra il grafico di  $f_n(t)$  e l'asse delle  $t$  ha area 1 per ogni  $n$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} dt = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-r^2} \frac{1}{\sqrt{n}} dr = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\pi} = 1; \quad (5.22)$$

- 2) il massimo delle  $f_n(t)$ , che è raggiunto per  $t = 0$ , tende a  $+\infty$  quando  $n$  tende a  $+\infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} = +\infty; \quad (5.23)$$

3) il grafico delle  $f_n(t)$  “*si assottiglia*” al crescere di  $n$ , ovvero, in senso preciso, se  $t_0 \neq 0$  il limite per  $n$  che tende ad infinito di  $f_n(t_0)$  tende a zero:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{\pi}} n e^{-n(t_0^2)} = 0. \quad (5.24)$$

Utilizzando le tre proprietà precedenti, analogamente a quanto fatto negli esercizi 5.4 e 5.5, si può mostrare che, la differenza tra il funzionale associato alle  $f_n(t)$  e quello associato alla  $\delta(t)$  può essere resa, in valore assoluto, più piccola di un arbitrario  $\varepsilon > 0$  pur di prendere  $n$  abbastanza grande:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \right| < \varepsilon \quad (5.25)$$

e quindi:

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(t)$$

nel senso delle distribuzioni. ■

Desideriamo ora presentare un esempio, molto importante nelle applicazioni, di una successione di funzioni che tende alla  $\delta(t)$ , ma che non soddisfa alla condizione 3) di “*assottigliamento*” espressa dalla formula (5.12). Sostituiamo la condizione 3) con la richiesta che  $f_n(t)$  tenda a zero nel senso delle distribuzioni sugli intervalli che non contengono lo zero.

A questo scopo è bene premettere il seguente risultato:

**Teorema 5.1** *La successione di funzioni:*

$$f_n(t) = e^{jnt} \quad (5.26)$$

*converge a zero nel senso delle distribuzioni.*

Iniziamo con l'osservare che  $\varphi(t)$ , essendo una funzione di prova, è nulla all'esterno di un intervallo limitato, ovvero esistono due opportune costanti  $a$  e  $b$  per cui se  $t \leq a$  o se  $t \geq b$  si ha che  $\varphi(t) = 0$ ; quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jnt} \varphi(t) dt &= \int_a^b e^{jnt} \varphi(t) dt = \\ &= \left[ \frac{1}{jn} e^{jnt} \varphi(t) \right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{jn} e^{jnt} \varphi'(t) dt = \\ &= \frac{1}{jn} (e^{jnb} \varphi(b) - e^{jna} \varphi(a)) - \frac{1}{jn} \int_a^b e^{jnt} \varphi'(t) dt; \end{aligned}$$

poiché  $\varphi(a)$  e  $\varphi(b)$  sono nulle, il modulo del precedente integrale può essere facilmente maggiorato nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jnt} \varphi(t) dt \right| &= \left| \frac{1}{jn} \int_a^b e^{jnt} \varphi'(t) dt \right| \leq \\
 &\leq 1/n \int_a^b |e^{jnt}| |\varphi'(t)| dt = \\
 &= 1/n \int_a^b |\varphi'(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
 \end{aligned} \quad (5.27)$$

La (5.27) dimostra il teorema 5.1. ■

**Osservazione 5.1** In modo del tutto analogo a quello che si è fatto per il teorema 5.1 si può mostrare che:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nt) \varphi(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (5.28)$$

ovvero:

$$\sin(nt) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (5.29)$$

nel senso delle distribuzioni. ■

Consideriamo il seguente esempio di successione di funzioni che nel senso delle distribuzioni tende alla delta di Dirac.

**Esempio 5.7** Si mostri che il limite nel senso delle distribuzioni della successione di funzioni:

$$f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}$$

è la distribuzione  $\delta(t)$  (vedi figura 5.9).

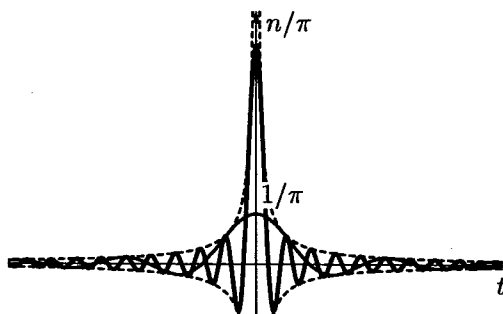


**Fig. 5.9** Successione di funzioni  $(\sin nt)/(\pi t)$ .

Pensiamo le  $f_n(t)$  prolungate per continuità nell'origine, ovvero:

$$f_n(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(nt)}{\pi t} = \frac{n}{\pi}. \quad (5.30)$$

Osserviamo poi che le funzioni  $f_n(t)$  hanno le seguenti proprietà:

- 1) l'integrale di  $f_n(t)$  tra  $-\infty$  e  $+\infty$  è uguale a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \pi = 1; \quad (5.31)$$

- 2) il massimo delle  $f_n(t)$ , che è raggiunto per  $t = 0$ , tende a  $+\infty$  quando  $n$  tende a  $+\infty$  (vedi la (5.30)):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\pi} = +\infty; \quad (5.32)$$

- 3) le  $f_n(t)$  tendono a zero nel senso delle distribuzioni sugli intervalli  $[a, b]$  che non contengono  $t_0 = 0$ , ovvero, qualunque sia la funzione di prova  $\varphi(t)$ , nulla per  $t \leq a$  e per  $t \geq b$  si ha:

$$\int_a^b \frac{\sin(nt)}{\pi t} \varphi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad 0 \notin [a, b] \quad (5.33)$$

La condizione 3) è verificata per il teorema 5.1: infatti sugli intervalli che non contengono l'origine si può considerare come funzione di prova la funzione  $\varphi(t)/t$ .

Utilizzando le tre proprietà precedenti, analogamente a quanto fatto negli esercizi 5.4, 5.5 e 5.6, si può mostrare che, la differenza tra il funzionale associato alle  $f_n(t)$  e quello associato alla  $\delta(t)$  può essere resa, in valore assoluto, più piccola di un arbitrario  $\varepsilon > 0$  pur di prendere  $n$  abbastanza grande:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{\pi t} \varphi(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt \right| < \varepsilon \quad (5.34)$$

e quindi:

$$\frac{\sin(nt)}{\pi t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \delta(t)$$

nel senso delle distribuzioni. ■

## 5.4 Derivate nel senso delle distribuzioni

Iniziamo cercando l'espressione del funzionale associato alla derivata  $f'(t)$  di una funzione derivabile  $f(t)$ , integrando per parti abbiamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = [f(t) \varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt; \quad (5.35)$$

ora, essendo  $\varphi(t)$  nulla all'esterno di un intervallo finito, il termine tra parentesi quadra nella (5.35) è nullo e si ha:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt.} \quad (5.36)$$

La (5.36) è la definizione di *derivata distribuzionale*. Se la  $f(t)$  è derivabile l'integrazione per parti fatta nella (5.35) mostra che la derivata distribuzionale coincide con la derivata *classica* di  $f(t)$ . Se però la funzione  $f(t)$  di quadrato integrabile non è derivabile in senso classico il secondo membro della (5.36) conserva significato e diviene l'espressione della derivata distribuzionale. Ogni distribuzione risulta derivabile in senso distribuzionale e la sua derivata individua il funzionale indicato dalla (5.36).

### 5.4.1 Regole pratiche di derivazione

Dalla definizione (5.36) si possono ricavare alcune regole pratiche che consentono in molti casi di ottenere in maniera semplice le derivate distribuzionali.

- 1) *Supponiamo che  $f(t)$  sia derivabile (in senso classico), allora la derivata distribuzionale coincide con la derivata classica.*

Infatti come abbiamo già osservato la (5.36) è conseguenza, in questo caso, di una integrazione per parti.

- 2) *Assumiamo l'ipotesi che  $f(t)$  sia continua per ogni  $t$  e che sia derivabile eccetto che in un insieme discreto di punti angolosi  $t_i$  ( $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ ), ovvero di punti in cui  $f(t)$  non sia derivabile, ma in cui esistano la derivata destra e la derivata sinistra. Allora la  $f'(t)$  distribuzionale coincide con la  $f'(t)$  classica negli intervalli di derivabilità di  $f(t)$ , mentre ha una discontinuità di tipo salto (di prima specie finita) nei punti  $t_i$  in cui  $f(t)$  ha dei punti angolosi e si ha:*

$$f'(t_i^+) - f'(t_i^-) = f'_+(t_i) - f'_-(t_i)$$

ovvero l'ampiezza del salto di  $f'(t)$  è uguale alla differenza tra la derivata destra e la derivata sinistra.

Dimostriamo questa affermazione nel caso che  $f(t)$  abbia un solo punto angoloso in  $t_0$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{-\infty}^{t_0} f(t) \varphi'(t) dt - \int_{t_0}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \\ &= - [f(t) \varphi(t)]_{-\infty}^{t_0^-} + \int_{-\infty}^{t_0} f'(t) \varphi(t) dt + \\ &\quad - [f(t) \varphi(t)]_{t_0^+}^{+\infty} + \int_{t_0}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = \\ &= - [f(t_0^-) \varphi(t_0^-)] + \int_{-\infty}^{t_0} f'(t) \varphi(t) dt + \quad (5.38) \\ &\quad + [f(t_0^+) \varphi(t_0^+)] + \int_{t_0}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (u(t_0 - t) f'(t) + u(t - t_0) f'(t)) \varphi(t) dt. \quad (5.39)$$

La differenza delle due parentesi quadre nella (5.38) è nulla poiché sia  $f$  che  $\varphi$  sono continue. Eguagliando la (5.37) con la (5.39) si ha:

$$f'(t) = (u(t_0 - t)f'(t) + u(t - t_0)f'(t)) \quad (5.40)$$

ove nel primo membro della (5.40) la  $f'(t)$  è la derivata distribuzionale mentre nel secondo membro della (5.40) le  $f'(t)$  sono le derivate classiche di  $f(t)$  nei due intervalli  $]-\infty, t_0[$  e in  $]t_0, +\infty[$  rispettivamente. E con ciò abbiamo provato questa seconda regola pratica.

- 3) *Assumiamo l'ipotesi che  $f(t)$  sia derivabile eccetto che in un insieme discreto di punti di discontinuità di prima specie finita  $t_i$  ( $i \in I \subseteq \mathbb{N}$ ), ovvero di punti in cui  $f(t)$  non sia continua, ma in cui esistano il limite destro e il limite sinistro. Esistano inoltre finiti in  $t_i$  i due limiti delle derivate:*

$$f'(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} f'(t) \quad f'(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} f'(t).$$

Allora la  $f'(t)$  distribuzionale coincide con la  $f'(t)$  classica negli intervalli di derivabilità di  $f(t)$ , mentre, nei punti di discontinuità  $t_i$ , presenta delle delta di Dirac centrate in tali punti e moltiplicate per un numero che coincide l'ampiezza del salto di  $f(t)$ :

$$f'(t_i) = [f(t_i^+) - f(t_i^-)] \delta(t - t_i).$$

Dimostriamo questa affermazione nel caso che  $f(t)$  abbia un solo punto di discontinuità di tipo salto in  $t_0$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t) dt = \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} &= - \int_{-\infty}^{t_0} f(t)\varphi'(t) dt - \int_{t_0}^{+\infty} f(t)\varphi'(t) dt = \\ &= - [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{t_0^-} + \int_{-\infty}^{t_0} f'(t)\varphi(t) dt + \\ &\quad - [f(t)\varphi(t)]_{t_0^+}^{+\infty} + \int_{t_0}^{+\infty} f'(t)\varphi(t) dt = \\ &= - [f(t_0^-)\varphi(t_0^-)] + \int_{-\infty}^{t_0} f'(t)\varphi(t) dt + \quad (5.42) \\ &\quad + [f(t_0^+)\varphi(t_0^+)] + \int_{t_0}^{+\infty} f'(t)\varphi(t) dt = \\ &= [(f(t_0^+) - f(t_0^-))\varphi(t_0)] + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} u(t_0 - t)f'(t)\varphi(t) dt + \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} u(t - t_0)f'(t)\varphi(t) dt = \end{aligned}$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [(f(t_0^+) - f(t_0^-))\delta(t - t_0) + (u(t_0 - t)f'(t) + u(t - t_0)f'(t))] \varphi(t) dt. \quad (5.43)$$

La differenza delle due parentesi quadre nella (5.42) non è nulla poiché  $f$  non è continua. Eguagliando la (5.41) con la (5.43) si ha:

$$f'(t) = (f(t_0^+) - f(t_0^-))\delta(t - t_0) + (u(t_0 - t)f'(t) + u(t - t_0)f'(t)) \quad (5.44)$$

ove nel primo membro della (5.44) la  $f'(t)$  è la derivata distribuzionale mentre nel secondo membro della (5.44) le  $f'(t)$  sono le derivate classiche di  $f(t)$  nei due intervalli  $]-\infty, t_0[$  e in  $]t_0, +\infty[$  rispettivamente. E con ciò abbiamo provato questa terza regola pratica.

**Esempio 5.8** Utilizzando le regole pratiche del paragrafo 5.4.1, calcolare le derivate successive fino alla terza, nel senso delle distribuzioni, della seguente funzione:

$$f(t) = \frac{1}{2}u(t)t^2.$$

La  $t^2u(t)$  è derivabile in senso classico, infatti:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ (1/2)t^2 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

ed essendo  $f(t)$  continua e

$$\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = 0,$$

risulta:

$$f'(t) = D\left(\frac{1}{2}t^2u(t)\right) = tu(t), \quad (5.45)$$

vedi la figura 5.10.

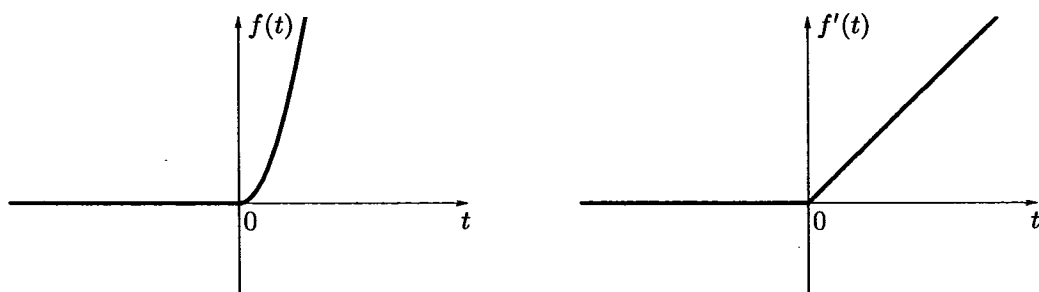


**Fig. 5.10** La funzione  $f(t) = (1/2)t^2u(t)$  e la sua derivata  $f'(t) = tu(t)$ .

Deriviamo ora la  $f'(t)$  che abbiamo ottenuto nella (5.45), tenendo presente che la funzione  $f'(t)$  da derivare è continua e ha in  $t_0 = 0$  un punto angoloso. Per il punto 2) delle regole pratiche di derivazione (vedi paragrafo 5.4.1) si ha:

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad f''(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

risulta cioè:

$$f''(t) = D^2 \left( \frac{1}{2} t^2 u(t) \right) = D(tu(t)) = u(t), \quad (5.46)$$

vedi la figura 5.11.

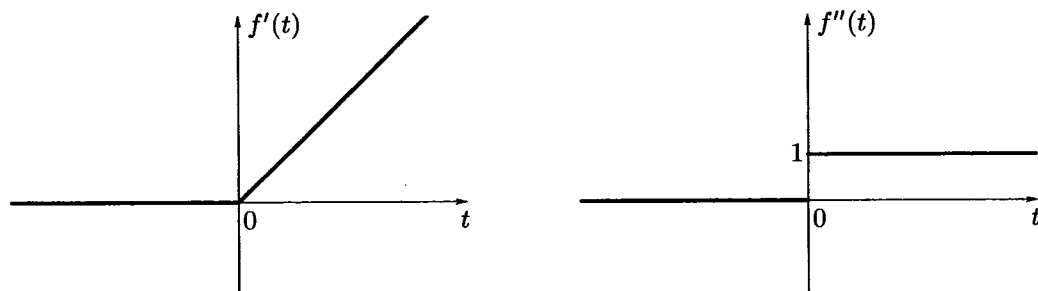


**Fig. 5.11** La funzione  $f'(t) = tu(t)$  e la sua derivata distribuzionale  $f''(t) = u(t)$ .

Deriviamo ora la  $f''(t)$  che abbiamo ottenuto nella (5.45), tenendo presente che la funzione  $f''(t)$  da derivare non è continua in  $t_0 = 0$ , ove vi è una discontinuità di tipo salto. Per il punto 3) delle regole pratiche di derivazione (vedi paragrafo 5.4.1) si ha che  $f'''(t)$  è data da una delta di Dirac centrata in  $t_0 = 0$ . Inoltre, poiché per  $t > 0$  la  $f''(t)$  è costante e così lo è per  $t < 0$ , la  $f'''(t)$  è nulla per  $t \neq 0$ . Risulta cioè:

$$f'''(t) = D^3 \left( \frac{1}{2} t^2 u(t) \right) = D^2(tu(t)) = D(u(t)) = \delta(t). \quad (5.47)$$

Volendo rappresentare graficamente la  $\delta(t)$ , bisogna usare un simbolo grafico, in quanto non si tratta più di una funzione. Si usa rappresentare la delta di Dirac con una freccia, vedi la figura 5.12.

■

## 5.4.2 Proprietà della delta di Dirac

Non sempre è possibile moltiplicare due distribuzioni: non ha senso, per esempio, moltiplicare tra loro  $\delta(t)$  con  $\delta(t)$ , o anche  $\delta(t)$  con  $u(t)$ . Tuttavia se  $f(t)$  è una funzione continua in  $t_0 = 0$ , è possibile moltiplicare  $f(t)$  con  $\delta(t)$  e si ha:

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t). \quad (5.48)$$

Più in generale se  $f(t)$  è continua in  $t_0$ , è possibile moltiplicare  $f(t)$  con  $\delta(t - t_0)$  e si ha:

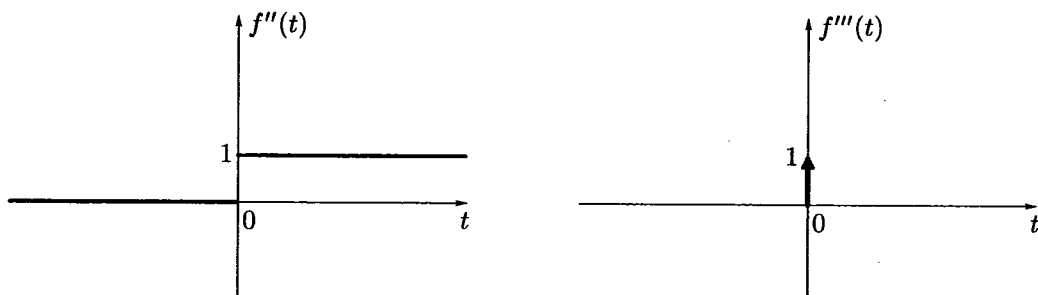


**Fig. 5.12** La funzione  $f''(t) = u(t)$  e la sua derivata distribuzionale  $f'''(t) = \delta(t)$ .

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0). \quad (5.49)$$

Infatti ai due membri di (5.48) sono associati due funzionali uguali:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\varphi(t) dt &= f(0)\varphi(0), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta(t)\varphi(t) dt &= f(0)\varphi(0). \end{aligned}$$

Inoltre se  $f(t)$  è una funzione derivabile in  $t_0 = 0$ , è possibile moltiplicare  $f(t)$  con  $\delta'(t)$  e si ha:

$$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t). \quad (5.50)$$

Più in generale se  $f(t)$  è derivabile in  $t_0$ , è possibile moltiplicare  $f(t)$  con  $\delta'(t - t_0)$  e si ha:

$$f(t)\delta'(t - t_0) = f(t_0)\delta'(t - t_0) - f'(t_0)\delta(t - t_0). \quad (5.51)$$

Infatti ai due membri di (5.50) sono associati due funzionali uguali:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t)\varphi(t) dt &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)\varphi(t))' \delta(t) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)\varphi'(t) + f'(t)\varphi(t)) \delta(t) dt = \\ &= -f(0)\varphi'(0) - f'(0)\varphi(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t))\varphi(t) dt &= -f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi'(t) dt + \\ &\quad - f'(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t) dt = f(0)(-\varphi'(0)) - f'(0)\varphi(0). \end{aligned}$$

Presentiamo ora delle proprietà che riguardano la parità e la disparità. Osservando che una funzione  $g(t)$  è pari se  $g(t) = g(-t)$  ed è dispari se  $g(t) = -g(-t)$ , si dice che una distribuzione  $f(t)$  è pari se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(-t) dt,$$

mentre  $f(t)$  è dispari se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(-t) dt.$$

Da queste definizioni di parità e disparità per distribuzioni è facile ricavare che  $\delta(t)$  è pari e che  $\delta'(t)$  è dispari o come si usa scrivere per analogia con le funzioni

$$\delta(t) = \delta(-t), \quad (5.52)$$

$$\delta'(t) = -\delta'(-t). \quad (5.53)$$

Talvolta può succedere di dover operare con dei cambiamenti di scala; pensando ai funzionali associati si ricava che

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

### 5.4.3 Regole di derivazione

Le proprietà di derivazione per le distribuzioni sono le stesse che per le funzioni:

a) linearità:

$$D(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha Df(t) + \beta Dg(t);$$

b) prodotto:

$$D(f(t)g(t)) = (Df(t))g(t) + f(t)(Dg(t));$$

c) reciproco:

$$D\left(\frac{1}{f(t)}\right) = \frac{-Df(t)}{f^2(t)};$$

d) funzione composta:

$$D(f(g(t))) = f'(g(t))g'(t).$$

**Esempio 5.9** Utilizzando le regole di derivazione e le proprietà della delta di Dirac, si facciano le tre derivate successive di:

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2u(t).$$

Si confrontino poi i risultati ottenuti con quelli dell'esempio 5.8.

Infatti utilizzando le proprietà di derivata del prodotto si ha:

$$f'(t) = tu(t) + \frac{1}{2}t^2\delta(t);$$

per la (5.48) si ha

$$\frac{1}{2}t^2\delta(t) = 0\delta(t) = 0$$

e quindi:

$$D\left(\frac{1}{2}t^2u(t)\right) = tu(t).$$

Di nuovo utilizzando la proprietà di derivata del prodotto e poi la (5.48)

$$D^2\left(\frac{1}{2}t^2\delta(t)\right) = D(tu(t)) = u(t) + t\delta(t) = u(t) + 0\delta(t) = u(t).$$

Il calcolo della derivata terza risulta essere dato da

$$D^3\left(\frac{1}{2}t^2\delta(t)\right) = D^2(tu(t)) = Du(t) = \delta(t).$$

■

**Esempio 5.10** Si faccia la derivata prima e seconda nel senso delle distribuzioni della funzione  $f(t)$  data dal grafico di figura (5.13).

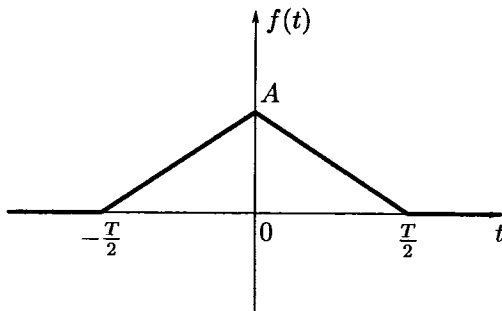
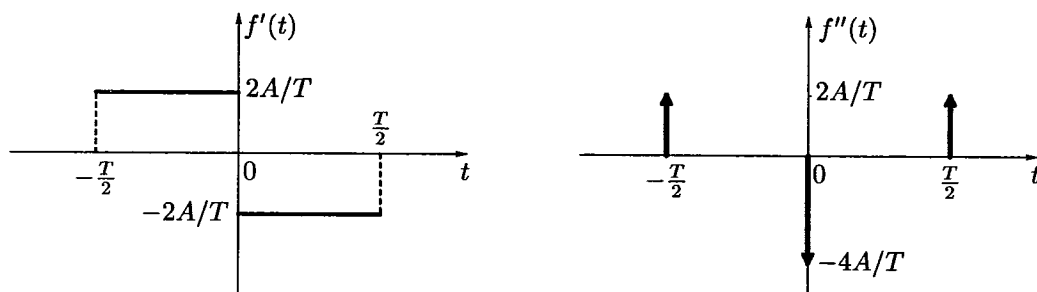


**Fig. 5.13** Il grafico della funzione  $f(t)$ .

Osservando che  $f(t)$  è continua e che ha tre punti angolosi in  $-T/2$ ,  $0$  e in  $T/2$ , si ha che  $f'(t)$  ha tre singolarità di tipo salto in  $-T/2$ ,  $0$  e in  $T/2$ , (vedi figura 5.14). La derivata successiva, per la seconda regola pratica del paragrafo 5.4.1, ha in  $-T/2$ ,  $0$  e in  $T/2$  delle delta di Dirac con coefficienti moltiplicativi uguali alle altezze dei salti (vedi figura 5.14).

Dalla figura 5.14 si ricava che:

$$f''(t) = \frac{2A}{T}\delta(t + T/2) - \frac{4A}{T}\delta(t) + \frac{2A}{T}\delta(t - T/2). \quad (5.54)$$

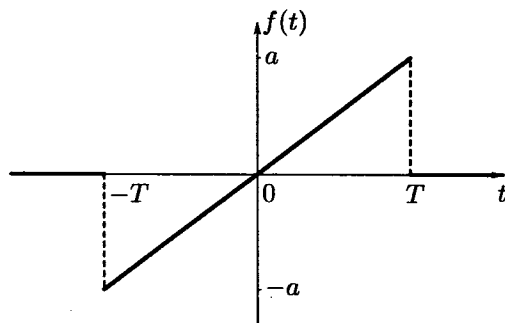
Fig. 5.14 I grafici di  $f'(t)$  e di  $f''(t)$ .

L'esercizio poteva anche essere svolto con le regole del presente paragrafo:

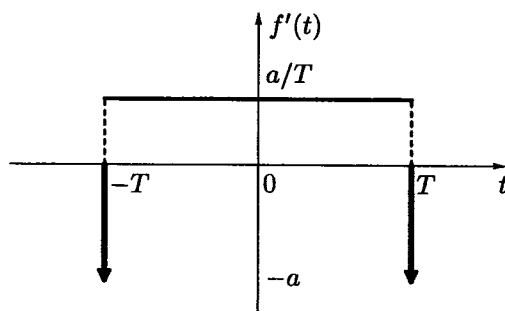
$$\begin{aligned}
 f(t) &= [u(t + T/2) - u(t)]\left(\frac{2A}{T}t + A\right) + [u(t) - u(t - T/2)]\left(-\frac{2A}{T}t + A\right), \\
 f'(t) &= [\delta(t + T/2) - \delta(t)]\left(\frac{2A}{T}t + A\right) + \frac{2A}{T}[u(t + T/2) - u(t)] + \\
 &\quad + [\delta(t) - \delta(t - T/2)]\left(-\frac{2A}{T}t + A\right) - \frac{2A}{T}[u(t) - u(t - T/2)] \\
 &= \frac{2A}{T}u(t + T/2) - \frac{4A}{T}u(t) + \frac{2A}{T}u(t - T/2), \\
 f''(t) &= \frac{2A}{T}\delta(t + T/2) - \frac{4A}{T}\delta(t) + \frac{2A}{T}\delta(t - T/2),
 \end{aligned}$$

ottenendo così lo stesso risultato che in (5.54). ■

**Esempio 5.11** Si faccia la derivata prima nel senso delle distribuzioni della funzione  $f(t)$  data dal grafico di figura (5.15).

Fig. 5.15 La funzione  $f(t)$ .

Osservando che  $f(t)$  ha due punti di discontinuità di tipo salto in  $-T$ , e in  $T$ , si ha che  $f'(t)$  ha in  $-T$ , e in  $T$  due delta di Dirac con coefficienti moltiplicativi uguali alle altezze dei salti (vedi figure 5.16).

Fig. 5.16 La distribuzione  $f'(t)$ .

Dalla figura 5.16 si ricava che:

$$f'(t) = -a\delta(t+T) + \frac{a}{T}[u(t+T) - u(t-T)] - a\delta(t-T). \quad (5.55)$$

L'esercizio poteva anche essere svolto con le regole del presente paragrafo:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a}{T} t [u(t+T) - u(t-T)], \\ f'(t) &= \frac{a}{T} [u(t+T) - u(t-T)] + \frac{a}{T} t [\delta(t+T) - \delta(t-T)] \\ &= \frac{a}{T} [u(t+T) - u(t-T)] + \frac{a}{T} (-T) \delta(t+T) - \frac{a}{T} T \delta(t+T), \end{aligned}$$

ottenendo così lo stesso risultato che in (5.55). ■

## 5.5 Convoluzione di funzioni

Il prodotto di convoluzione  $w(t)$ , tra due funzioni di quadrato integrabile  $x(t)$  e  $y(t)$ , viene indicato con il simbolo  $*$

$$w(t) = x(t) * y(t)$$

ed è definito dal seguente integrale:

$$w(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau. \quad (5.56)$$

**Esempio 5.12** Si calcoli il prodotto di convoluzione tra le seguenti due funzioni:

$$x(t) = e^{-t^2}, \quad y(t) = e^{-2t^2}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} e^{-2(t-\tau)^2} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2t^2 - 4t\tau + 3\tau^2)} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2t/\sqrt{3} - \sqrt{3}\tau)^2} e^{-2t^2/3} d\tau \\
&= e^{-2t^2/3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{3}} du \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} e^{-2t^2/3}.
\end{aligned}$$

Il prodotto di convoluzione è definito dalla espressione (5.56) anche in casi più generali, possiamo dire che è definito ogni volta che l'integrale nella (5.56) converge.

I casi di gran lunga più importanti nelle applicazioni sono i seguenti:

a) le due funzioni da convolvere hanno l'espressione

$$x(t) = u(t-a)\tilde{x}(t) \qquad y(t) = u(t-b)\tilde{y}(t)$$

con  $\tilde{x}(t)$  e  $\tilde{y}(t)$  a quadrato integrabile sugli intervalli finiti. In questo caso la (5.56) diviene:

$$\begin{aligned}
x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau-a)u(t-\tau-b)\tilde{x}(\tau)\tilde{y}(t-\tau) d\tau \\
&= u(t-(a+b)) \int_a^{t-b} \tilde{x}(\tau)\tilde{y}(t-\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Si osservi che l'ultimo membro della (5.57) è stato ottenuto riflettendo sulla figura 5.17, che ha come ascisse l'asse delle  $\tau$ , e sul fatto che:

$$\begin{aligned}
u(\tau-a)u(t-\tau-b) &= 0 & \text{se } t-b < a, \\
u(\tau-a)u(t-\tau-b) &= u(\tau-a) - u(\tau-t+b) & \text{se } t-b > a;
\end{aligned}$$

b) una delle due funzioni [per esempio la  $x(t)$ ] da convolvere è nulla all'esterno di un intervallo  $[a, b]$  e cioè ha una espressione del tipo:

$$x(t) = [u(t-a) - u(t-b)]\tilde{x}(t)$$

con  $\tilde{x}(t)$  e  $y(t)$  a quadrato integrabile sugli intervalli limitati. Applicando la (5.56) si ha



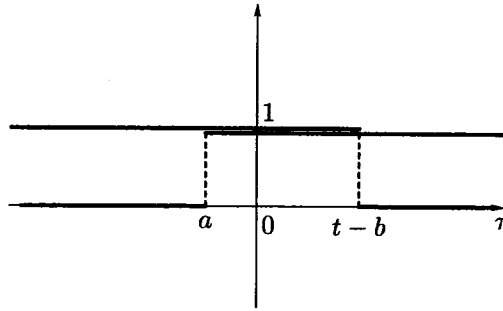


**Fig. 5.17** I due gradini  $u(\tau - a)$  e  $u(t - \tau - b)$ .

$$\begin{aligned}
 x(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau - a) - u(\tau - b) \tilde{x}(\tau) y(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_a^b \tilde{x}(\tau) y(t - \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Si osservi che l'ultimo membro della (5.58) è stato ottenuto riflettendo sul fatto che:

$$\begin{aligned}
 u(\tau - a) - u(\tau - b) &= 0 \quad \text{se } \tau < a \text{ o } \tau > b \\
 u(\tau - a) - u(\tau - b) &= 1 \quad \text{se } a < \tau < b.
 \end{aligned}$$

**Esempio 5.13** Come esempio relativo al punto a) si consideri

$$u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) u(t - \tau) d\tau = u(t) \int_0^t d\tau = tu(t).$$

■

**Esempio 5.14** Come esempio relativo al punto b) calcoliamo

$$\begin{aligned}
 [u(t+1) - u(t-1)] * t^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [u(\tau+1) - u(\tau-1)](t-\tau)^2 d\tau = \\
 &= \int_{-1}^1 (t-\tau)^2 d\tau = \\
 &= -\frac{(t-1)^3}{3} + \frac{(t+1)^3}{3} = 2t^2 + \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

■

## 5.6 Convoluzione di distribuzioni

Iniziamo con il prendere in considerazione il prodotto di convoluzione tra una distribuzione  $x(t)$  e una funzione di prova  $\varphi(t)$  (vedi paragrafo 5.2):

$$w(t) = x(t) * \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau. \quad (5.59)$$

La formula (5.59) può essere interpretata come il funzionale associato alla distribuzione  $x(t - \tau)$ .

**Esempio 5.15** Si calcoli la convoluzione della  $\delta(t)$  con una funzione di prova  $\varphi(t)$ .

Si ha:

$$\delta(t) * \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(t),$$

L'ultima uguaglianza è conseguenza delle (5.49) e (5.52). ■

Si può inoltre mostrare che il risultato del prodotto di convoluzione tra una distribuzione qualsiasi  $x(t)$  e una funzione di prova  $\varphi(t)$  è sempre una funzione infinite volte derivabile:

$$\varphi(t) \in \mathcal{D} \implies [x(t) * \varphi(t)] \in \mathcal{C}^\infty. \quad (5.60)$$

Si usa esprimere il risultato della (5.60) dicendo che la convoluzione regolarizza.

Se ora abbiamo due distribuzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  il loro prodotto di convoluzione fornisce una distribuzione cui è associato un funzionale così definito:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * y(t)) \varphi(t) dt = [x(t) * (y(t) * \varphi(-t))]_{t=0}}. \quad (5.61)$$

La definizione (5.61) ci consente di mostrare che la delta di Dirac è l'elemento unità della convoluzione. Infatti, qualunque sia la distribuzione  $x(t)$  si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) * \delta(t)) \varphi(t) dt &= \left[ x(t) * \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) \varphi(-\tau) d\tau \right]_{t=0} = \\ &= [x(t) * \varphi(-t)]_{t=0} = \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \varphi(-t + \tau) d\tau \right]_{t=0} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (5.62)$$

A secondo membro della (5.61)  $y(t) * \varphi(-t)$  è sempre definito poiché  $\varphi(t)$  è una funzione di prova nulla all'esterno di un intervallo limitato e il risultato fornisce una funzione infinite volte derivabile (vedi (5.60)) per la quale la convoluzione con  $x(t)$  non sempre è definita.

Nelle applicazioni i casi importanti di esistenza della convoluzione a secondo membro delle (5.61) sono i seguenti:

a) le due distribuzioni da convolvere sono tali che:

$$x(t) = 0 \quad \text{per } t < a \quad \quad y(t) = 0 \quad \text{per } t < b;$$

b) una delle due distribuzioni da convolvere è nulla all'esterno di un intervallo  $[a, b]$

**Esempio 5.16** Come esempio relativo al punto a) precedente consideriamo

$$u(t) * \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(t) * \delta(t-n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(t-n) = \sum_{n=0}^{[t]} 1 = ([t] + 1)u(t),$$

con  $[t]$  si è indicata la parte intera di  $t$ . ■

**Esempio 5.17** Come esempio relativo al punto b) precedente si calcoli la convoluzione tra la porta  $p_{1/2}(t)$  di larghezza  $1/2$ :

$$p_{1/2}(t) = u(t + 1/4) - u(t - 1/4)$$

e il treno di impulsi (o pettine di Dirac)  $s_1(t)$ :

$$s_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-n).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} p_{1/2}(t) * s_1(t) &= [u(t + 1/4) - u(t - 1/4)] * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-n) = \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} p_{1/2}(t-n). \end{aligned}$$

Si veda la figura 5.18. ■

### 5.6.1 Proprietà della convoluzione

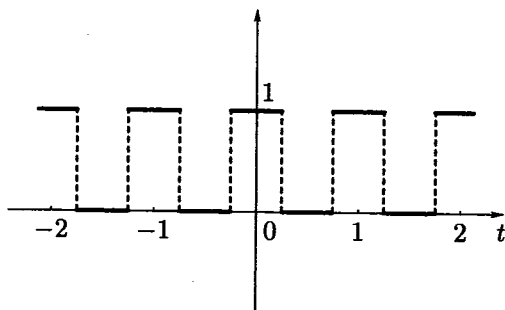
Utilizzando la definizione (5.61) si può mostrare che il prodotto di convoluzione gode delle seguenti proprietà relative a

1) commutatività:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t), \quad (5.63)$$

2) distributività:

$$x(t) * (h(t) + g(t)) = (x(t) * h(t)) + (x(t) * g(t)), \quad (5.64)$$

Fig. 5.18 Il prodotto di convoluzione  $p_{1/2}(t) * s_1(t)$ .

3) elemento unità:

$$x(t) * \delta(t) = x(t), \quad (5.65)$$

4) traslazione:

$$x(t) * \delta(t - T) = x(t - T), \quad (5.66)$$

5) derivata della convoluzione:

$$\frac{d}{dt} [x(t) * y(t)] = \left[ \frac{d}{dt} x(t) \right] * y(t) = x(t) * \left[ \frac{d}{dt} y(t) \right], \quad (5.67)$$

6) derivate di  $x(t)$ :

$$x(t) * \delta^{(n)}(t) = x^{(n)}(t), \quad (5.68)$$

7) regolarizzazione:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \in \mathcal{D}' \\ \varphi(t) \in \mathcal{C}^\infty \end{array} \right\} \Rightarrow [x(t) * \varphi(t)] \in \mathcal{C}^\infty, \quad (5.69)$$

8) causalità:

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = 0 \text{ per } t < 0 \\ y(t) = 0 \text{ per } t < t_0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) * y(t) = 0 \text{ per } t < t_0. \quad (5.70)$$

La dimostrazione di queste proprietà è già stata in parte fornita nel paragrafo precedente. La proprietà sulla unità del prodotto di convoluzione è stata dimostrata nella (5.62). La proprietà sul rispetto della causalità è conseguenza della (5.57). Le altre si ottengono facilmente ragionando sulla definizione di convoluzione (5.61) in cui intervengono dei funzionali lineari e degli integrali.

## 5.7 Distribuzioni limitate

Il prodotto di convoluzione, per la proprietà di regolarizzazione, è lo strumento idoneo per individuare delle distribuzioni con particolari caratteristiche, riconducendosi a relazioni valide per le funzioni.

**Definizione 5.2 (Distribuzioni limitate)** Una distribuzione  $x(t)$  è detta limitata o appartenente a  $B'$  se il prodotto di convoluzione di  $x(t)$  con una funzione test  $\varphi(t)$  fornisce una funzione limitata:

$$\exists K \in \mathbf{R} \quad \text{tale che} \quad |x(t) * \varphi(t)| \leq K.$$

■

**Esempio 5.18** Il treno di impulsi (o pettine di Dirac):

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

è una distribuzione limitata.

Infatti:

$$s_T(t) * \varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - nT) \varphi(t - \tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(t - nT); \quad (5.71)$$

essendo  $\varphi(t)$  nulla all'esterno di un intervallo limitato, risulta che, per ogni  $t$ , la sommatoria all'ultimo membro della (5.71) è una somma finita di addendi non nulli. Sia  $\varphi(t)$  nulla all'esterno dell'intervallo  $[a, b]$ , ponendo

$$S = b - a \quad \text{e} \quad K = \max \varphi(t)$$

e indicando con  $n_0$  un intero tale che  $n_0 T > S$ , si ha dapprima

$$\varphi(t) \varphi(t - n_0 T) = 0$$

e quindi

$$|s_T(t) * \varphi(t)| \leq n_0 K.$$

■

**Proposizione 5.1** Se  $x(t) \in B'$  allora anche  $x'(t) \in B'$ .

Infatti per la proprietà sulla derivata della convoluzione si ha:

$$x'(t) * \varphi(t) = x(t) * \varphi'(t) \in B'.$$

■

**Proposizione 5.2** *Se una funzione  $x(t)$  è limitata nel senso delle funzioni allora anche la distribuzione ad essa associata è limitata cioè appartiene a  $B'$ .*

Si tenga tuttavia presente che non vale il viceversa, come mostra il seguente esempio:

**Esempio 5.19** La funzione:

$$x(t) = 2t \cos t^2$$

non è limitata come funzione, mentre la distribuzione ad essa associata è limitata in quanto  $x(t)$  è derivata di una funzione limitata:

$$x(t) = 2t \cos t^2 = \frac{d}{dt} \sin t^2.$$

■

Per le distribuzioni limitate vale il seguente risultato di caratterizzazione:

**Proposizione 5.3** *La distribuzione  $x(t)$  è limitata se e solo se  $x(t)$  è derivata di ordine  $m$ , per un opportuno  $m$ , di una funzione continua, limitata e integrabile, cioè se:*

$$x(t) = D^m l(t),$$

con  $l(t)$  continua, limitata e integrabile.

## 5.8 Distribuzioni temperate

Le distribuzioni temperate sono il contesto più idoneo per presentare le trasformate di Fourier di cui ci occuperemo in seguito. Vediamo dunque la seguente definizione.

**Definizione 5.3 (Distribuzioni temperate)** *Una distribuzione  $y(t)$  è detta temperata o a crescita lenta se esiste un numero naturale  $n$  e una distribuzione limitata  $x(t)$  per cui:*

$$y(t) * \varphi(t) = (1 + t^2)^n x(t). \quad (5.72)$$

Dalla definizione precedente si può dedurre la seguente caratterizzazione delle distribuzioni temperate:

**Proposizione 5.4** *La distribuzione  $y(t)$  è temperata se e solo se  $y(t)$  è derivata di ordine  $m$ , per un opportuno  $m$ , del prodotto di  $(1 + t^2)^n$  per una funzione continua, limitata e integrabile, cioè se:*

$$y(t) = D^m [(1 + t^2)^n l(t)] \quad (5.73)$$

con  $l(t)$  continua, limitata e integrabile.

**Esempio 5.20** Si consideri la seguente distribuzione:

$$\begin{aligned} y(t) &= (3 + 5t + 7t^2 - 2t^3)s_1(t) = (3 + 5t + 7t^2 - 2t^3) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (3 + 5n + 7n^2 - 2n^3)\delta(t - n) \end{aligned}$$

e si mostri che è una distribuzione a crescita lenta.

In effetti la convoluzione di  $y(t)$  con una funzione di prova  $\varphi(t)$  ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \varphi(t) * y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - \tau) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (3 + 5n + 7n^2 - 2n^3)\delta(\tau - n) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (3 + 5n + 7n^2 - 2n^3) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t - \tau)\delta(\tau - n) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (3 + 5n + 7n^2 - 2n^3)\varphi(t - n), \end{aligned}$$

ora, indicando con  $[N, M]$  un intervallo (con  $N$  e  $M$  interi) all'esterno del quale  $\varphi$  è nulla, si ha:

$$\varphi(t) * y(t) = \sum_{n=[t]-M}^{[t]+1-N} (3 + 5n + 7n^2 - 2n^3)\varphi(t - n), \quad (5.74)$$

con  $[t]$  abbiamo indicato la parte intera di  $t$ . Nella (5.74) la sommatoria è finita e quindi si tratta di una funzione infinite volte derivabile e che, per  $t \rightarrow \infty$ , cresce come  $t^3$ ; è facile allora osservare che

$$x(t) = \frac{\sum_{n=[t]-M}^{[t]+1-N} (3 + 5n + 7n^2 - 2n^3)\varphi(t - n)}{(1 + t^2)^2}$$

soddisfa le condizioni della (5.72). ■

Le distribuzioni temperate possono ancora essere considerate da un altro punto di vista. Consideriamo, tenendo presente la caratterizzazione (5.73), il funzionale associato alla distribuzione a crescita lenta  $y(t)$ ; si ha:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\varphi(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} D^m[(1 + t^2)^n l(t)]\varphi(t) dt = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} l(t)(1 + t^2)^n D^m \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Affinché l'ultimo integrale nella (5.75) converga non è necessario che  $\varphi(t)$  sia nulla all'esterno di un intervallo limitato, ma è sufficiente che:

$$(1+t^2)^n D^m \varphi(t)$$

sia continua, limitata e integrabile.

L'insieme delle funzioni  $\varphi(t)$  per cui,  $\forall n \in \mathbb{N}$  e  $\forall m \in \mathbb{N}$ , la funzione

$$(1+t^2)^n D^m \varphi(t) \quad (5.76)$$

è continua, limitata e integrabile, è detto insieme delle *funzioni a decrescita rapida* ed è indicato con  $\mathcal{S}$ . Le distribuzioni temperate  $\mathcal{S}'$  sono le applicazioni lineari e continue sulle funzioni di prova  $\mathcal{S}$  a valori in  $\mathbb{R}$  o in  $\mathbb{C}$ . La continuità di una forma lineare significa che se la successione  $x_n(t)$  di distribuzioni temperate tende alla distribuzione  $x(t)$  allora:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt \quad (5.77)$$

con  $\varphi(t)$  arbitraria funzione di prova a decrescita rapida.

**Esempio 5.21** La funzione a campana seguente (detta anche gaussiana):

$$\varphi(t) = e^{-t^2}$$

è una funzione a decrescita rapida, cioè appartenente a  $\mathcal{S}$ . ■

Osserviamo che tutte le distribuzioni nulle all'esterno di un intervallo limitato sono distribuzioni temperate. Così anche tutte le distribuzioni limitate sono anche temperate.

Si osservi inoltre che:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}, \quad \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

**Esempio 5.22** La distribuzione

$$x(t) = e^t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$$

non è una distribuzione temperata, cioè non appartenente a  $\mathcal{S}'$ . ■

Le distribuzioni temperate possono anche essere caratterizzate secondo le indicazioni che seguono.

**Proposizione 5.5** La distribuzione  $x(t)$  è una distribuzione temperata se e solo se esiste una successione  $x_n(t)$  di funzioni a decrescita rapida tale che:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt, \quad (5.78)$$

per ogni  $\varphi(t) \in \mathcal{S}$ . ■



---

## 6

# Trasformata di Fourier

Diamo dapprima la definizione di trasformata di Fourier di una funzione e poi di una distribuzione.

**Definizione 6.1**    a) Se  $x(t)$  è una funzione integrabile, il seguente integrale:

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (6.1)$$

definisce, per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ , la trasformata di Fourier  $X(\omega)$  di  $x(t)$ .

b) Se  $x(t)$  è una distribuzione e se  $x_n(t)$  è una successione di funzioni integrabili tale che nel senso delle distribuzioni:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n(t) = x(t) \quad (6.2)$$

e se la trasformata di Fourier, secondo la definizione del punto a), di  $x_n(t)$  è per ogni  $n$ :

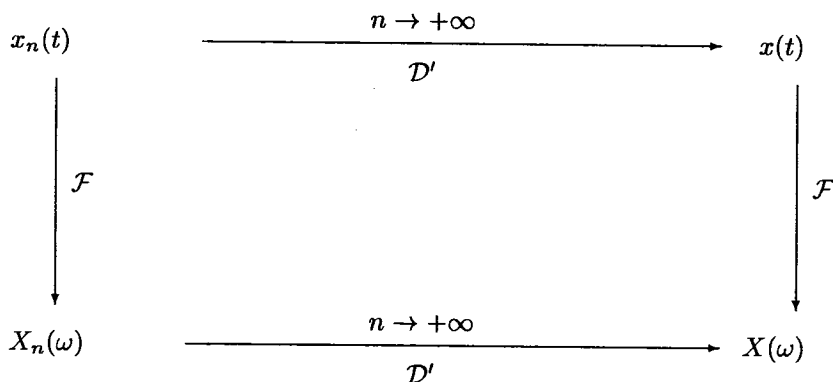
$$\mathcal{F}[x_n(t)] = X_n(\omega), \quad (6.3)$$

se inoltre esiste il limite nel senso delle distribuzioni delle  $X_n(\omega)$ :

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}[x_n(t)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega), \quad (6.4)$$

allora  $X(\omega)$  è la trasformata distribuzionale di  $x(t)$ .

**Osservazione 6.1** Il procedimento della definizione precedente al punto b) segue lo schema seguente:



Si può mostrare che la trasformata, così definita, è indipendente dalla scelta della successione  $x_n(t)$ . ■

**Osservazione 6.2** Se la funzione  $x(t)$  è infinite volte derivabile e a decrescita rapida si ha che la sua trasformata di Fourier è data dalla (6.1) e si può mostrare che la  $X(\omega)$  è anch'essa infinite volte derivabile e a decrescita rapida. ■

**Osservazione 6.3** Se la distribuzione  $x(t)$  è a crescita lenta, per la (5.73), si può esprimere nel modo seguente:

$$x(t) = D^m [(1+t^2)^n l(t)] \quad (6.5)$$

con  $l(t)$  continua, limitata e integrabile. Si ha allora che  $x(t)$  ha trasformata di Fourier data dalla seguente espressione:

$$\mathcal{F}[x(t)] = (j\omega)^m (1 - D^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (6.6)$$

La (6.6) potrebbe essere assunta come definizione di trasformata di Fourier di una distribuzione a crescita lenta. Per noi sarà invece conseguenza delle proprietà di derivata nel tempo e in frequenza che dimostreremo poco più avanti. ■

## 6.1 Calcolo di trasformate con la definizione

In questo paragrafo facciamo il calcolo, mediante la definizione, di alcune trasformate di Fourier.

**Esempio 6.1** Si verifichi il seguente risultato di trasformata di Fourier:

$$p_T(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}.$$

La  $p_T(t)$  è data dalla seguente espressione:

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T/2 < t < +T/2 \\ 0 & \text{se } |t| > T/2, \end{cases}$$

cioè è limitata ed è nulla all'esterno dell'intervallo  $[-T/2, +T/2]$  e quindi la sua trasformata di Fourier si può calcolare con una semplice integrazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[p_T(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_T(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{t=-T/2}^{t=+T/2} = -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2}) \\ &= T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}; \end{aligned} \quad (6.7)$$

vedi la figura 6.1. ■

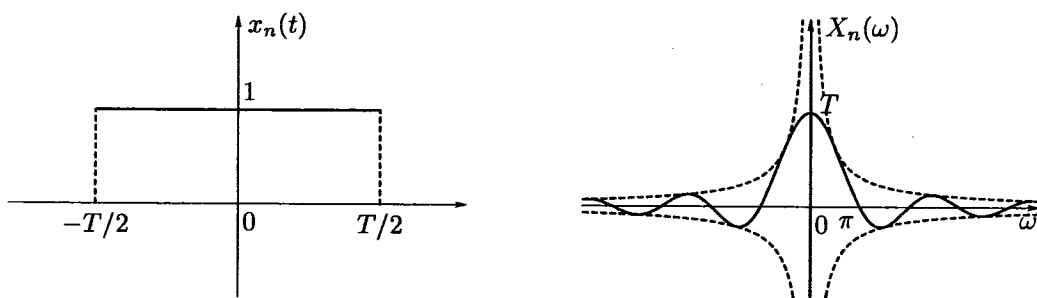


Fig. 6.1 Il segnale  $p_T(t)$  e la sua trasformata.

**Esempio 6.2** Si verifichi che, per ogni  $n$ , risulta:

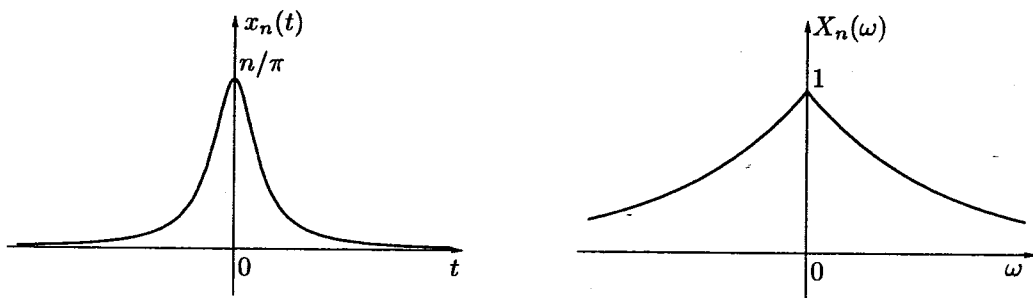
$$\frac{1}{\pi} \frac{n}{(1+n^2t^2)} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-|\omega|/n}.$$

Le  $x_n(t) = (1/\pi)(n/(1+n^2t^2))$  sono limitate e risultano integrabili nell'intervallo  $] -\infty, +\infty[$  e quindi la loro trasformata di Fourier si può ottenere con un integrale, che noi calcoliamo utilizzando il lemma di Jordan [vedi (4.38)]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_n(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{n}{(1+n^2t^2)} e^{-j\omega t} dt = \begin{cases} -2\pi j R(-j/n) & \text{se } \omega > 0 \\ 2\pi j R(j/n) & \text{se } \omega < 0 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} -2\pi j / \pi (-n/(-2jn)) e^{-\omega/n} & \text{se } \omega > 0 \\ 2\pi j / \pi (n/(2jn)) e^{-\omega/n} & \text{se } \omega < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$= e^{-|\omega|/n}. \quad (6.9)$$

Si veda la figura 6.2. ■

Fig. 6.2 Il segnale  $x_n(t)$  e la sua trasformata.

**Esempio 6.3** Si verifichi che, per ogni  $n$ , si ha:

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\omega^2/(4n)}.$$

Le  $x_n(t) = \sqrt{n/\pi} e^{-nt^2}$  sono limitate e sono integrabili nell'intervallo  $]-\infty, +\infty[$  e quindi le loro trasformate di Fourier si possono calcolare con un integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_n(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-(\sqrt{n}t + j\omega/(2\sqrt{n}))^2 - \omega^2/(4n)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-\tau^2} e^{-\omega^2/(4n)} \frac{1}{\sqrt{n}} d\tau \end{aligned} \quad (6.10)$$

ove nella (6.10) si è posto:

$$\tau = \sqrt{n}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{n}} \quad dt = \frac{1}{\sqrt{n}} d\tau;$$

ricordando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi},$$

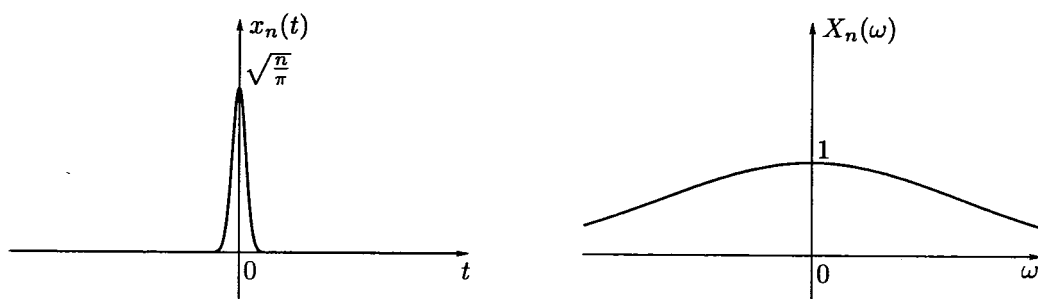
si ottiene:

$$X_n(\omega) = \mathcal{F}\left[\sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nt^2}\right] = e^{-\omega^2/(4n)}; \quad (6.11)$$

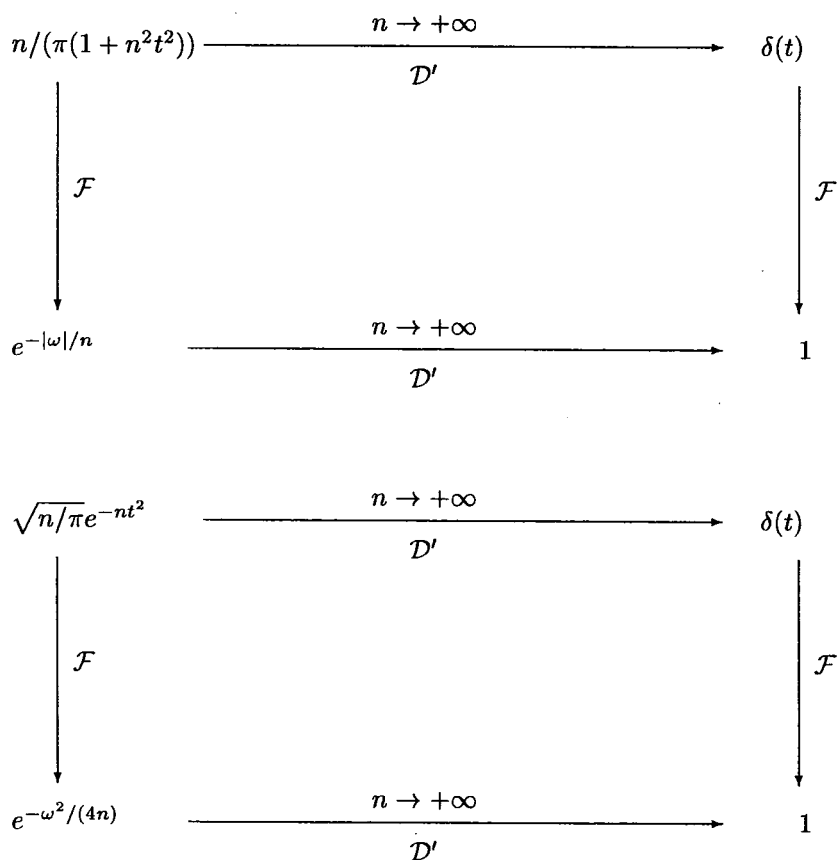
vedi la figura 6.3. ■

**Esempio 6.4** Si verifichi che la trasformata di Fourier della distribuzione delta di Dirac  $\delta(t)$  è la funzione costante uguale a 1:

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1.$$

Fig. 6.3 Il segnale  $x_n(t)$  e la sua trasformata.

Per ricavare la trasformata di Fourier della  $\delta(t)$ , possiamo utilizzare sia la successione di funzioni dell'esempio 6.2 che quella dell'esempio 6.3, in quanto, per le considerazioni fatte negli esempi 5.5 e 5.6, tutte e due tendono nel senso delle distribuzioni alla  $\delta(t)$ . Si ottiene:



i limiti sono calcolati nel senso delle distribuzioni, anche se quelli che riguardano le successioni  $X_n(\omega)$  hanno anche valore puntuale. ■

**Esempio 6.5** Si verifichi il seguente risultato di trasformata di Fourier:

$$e^{-\frac{|t|}{n}} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2 \frac{n}{1+n^2\omega^2}.$$

Le  $x_n(t) = e^{-|t|/n}$  sono limitate e sono integrabili nell'intervallo  $] -\infty, +\infty[$  e quindi la loro trasformata di Fourier si può calcolare con una semplice integrazione:

$$\begin{aligned} X_n(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|/n} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{t/n} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t/n} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \left[ \frac{1}{1/n - j\omega} e^{t/n - j\omega t} \right]_{t=-\infty}^{t=0} + \left[ \frac{1}{-1/n - j\omega} e^{-t/n - j\omega t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \\ &= \frac{1}{1/n - j\omega} + \frac{1}{1/n + j\omega} = \frac{2/n}{1/n^2 + \omega^2} = 2 \frac{n}{1+n^2\omega^2}; \end{aligned} \quad (6.12)$$

vedi la figura 6.4. ■

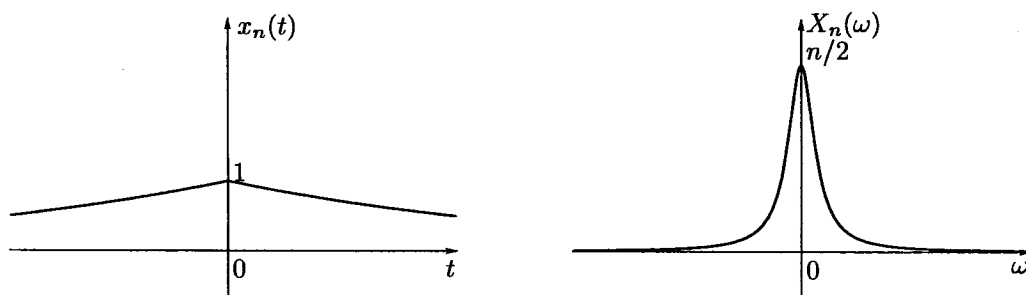


Fig. 6.4 Il segnale  $x_n(t)$  e la sua trasformata.

**Esempio 6.6** Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione costante uguale a 1, mostrando che:

$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega).$$

La funzione costante  $x(t) = 1$  non è integrabile nell'intervallo  $] -\infty, +\infty[$  e perciò per ricavare la trasformata di Fourier di 1, dobbiamo utilizzare una successione di funzioni che tenda alla funzione costante uguale a 1, come quella dell'esempio 6.5, in quanto nel senso delle distribuzioni (oltre che puntualmente) si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-|t|/n} = 1.$$

Tenendo allora presente il risultato dell'esempio 6.5 e il limite distribuzionale fatto nell'esempio 5.5, otteniamo il risultato riassunto nel seguente schema:

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-|t|/n} & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} & 1 \\
 \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} \\
 2n/(1+n^2\omega^2) & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{D'} & 2\pi\delta(\omega)
 \end{array}$$

Si ha così che  $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$ . ■

## 6.2 Antitrasformata di Fourier

In questo paragrafo vogliamo affrontare la questione di determinare un segnale  $x(t)$ , quando è nota la sua trasformata di Fourier  $X(\omega)$ . Sia pertanto:

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (6.13)$$

L'ultimo membro della (6.13) ha significato solo se  $x(t)$  è integrabile, tuttavia si usa spesso scriverlo ugualmente anche per  $x(t)$  distribuzione, sottintendendo il procedimento di passaggio al limite nel senso delle distribuzioni della definizione 6.1b.

**Proposizione 6.1** *Sia  $X(\omega)$  una distribuzione temperata, allora il segnale  $x(t)$  la cui trasformata di Fourier è  $X(\omega)$  si ottiene con la seguente formula di antitrasformazione secondo Fourier:*

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (6.14)$$

ove l'integrale all'ultimo membro della (6.14), se  $X(\omega)$  non è integrabile, va inteso come risultato di un limite distribuzionale del tipo seguente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{-\omega^2/(4n)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (6.15)$$

Nella (6.15) l'integrale va inteso come applicazione della distribuzione temperata  $X(\omega)$  alla funzione di prova a decrescita rapida:

$$\varphi(\omega) = e^{-\omega^2/(4n)} e^{j\omega t}.$$

Possiamo accennare a una giustificazione della formula (6.14), utilizzando il seguente schema, ove  $\omega$  è la variabile della funzione da trasformare e  $y$  la variabile della trasformata:

$$\begin{array}{ccc}
 e^{-\omega^2/(4n)} & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} & 1 \\
 \downarrow \mathcal{F} & & \downarrow \mathcal{F} \\
 \sqrt{4\pi n} e^{-ny^2} & \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'} & 2\pi\delta(y)
 \end{array}$$

Allora il funzionale nella (6.15) diviene:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-\omega^2/(4n)} e^{j\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right) e^{-\omega^2/(4n)} e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2/(4n)} e^{-j\omega(\tau-t)} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \sqrt{4\pi n} e^{-n(\tau-t)^2} d\tau. \quad (6.16)
 \end{aligned}$$

Passando ora al limite nel senso delle distribuzioni nella (6.16) si ha:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \sqrt{4\pi n} e^{-n(\tau-t)^2} d\tau \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) 2\pi\delta(t-\tau) d\tau = x(t) * \delta(t) = x(t)$$

e questo conclude il cenno di giustificazione della proposizione. ■

Forniamo ora un esempio di calcolo di antitrasformata, segnalando però che il calcolo delle antitrasformate è generalmente fatto con l'utilizzo delle proprietà (in particolare di quella di simmetria) che vedremo nel paragrafo seguente.

**Esempio 6.7** Utilizzando la formula (6.14), si calcoli la antitrasformata di Fourier della seguente funzione:

$$X(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega},$$

mostrando che:

$$\frac{2 \sin \omega}{\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} p_2(t).$$



Utilizzando la (6.14), si tratta di calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{2 \sin \omega}{\omega} \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 (e^{j\omega} - e^{-j\omega}) / (2j)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(1+t)\omega}}{j\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(t-1)\omega}}{j\omega} d\omega.\end{aligned}$$

Gli ultimi due integrali si possono calcolare con il lemma di Jordan [vedi (4.38)], osservando che:

$$\left| e^{j(1+t)(x+jy)} \right| = e^{-(1+t)y}, \quad \left| e^{j(t-1)(x+jy)} \right| = e^{-(t-1)y}.$$

Si ha cioè:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(1+t)\omega}}{j\omega} d\omega &= \begin{cases} 2\pi j \frac{1}{2} (1/(2\pi j)) & \text{se } t > -1 \\ -2\pi j \frac{1}{2} (1/(2\pi j)) & \text{se } t < -1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t+1) \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(t-1)\omega}}{j\omega} d\omega &= \begin{cases} 2\pi j \frac{1}{2} (1/(2\pi j)) & \text{se } t > 1 \\ -2\pi j \frac{1}{2} (1/(2\pi j)) & \text{se } t < 1 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t-1)\end{aligned}$$

e quindi in definitiva:

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{2 \sin \omega}{\omega} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t+1) - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t-1) = u(t+1) - u(t-1) = p_2(t)$$

■

## 6.3 Proprietà della trasformata di Fourier

In questo paragrafo indichiamo con  $X(\omega)$  e  $Y(\omega)$  le trasformate di Fourier rispettivamente di  $x(t)$  e di  $y(t)$ . Le proprietà valgono per ogni distribuzione a crescita lenta, tuttavia la giustificazione che daremo sarà solo per funzioni integrabili. La dimostrazione completa si può ottenere attraverso un passaggio al limite in senso distribuzionale del tipo di quello che abbiamo utilizzato per dimostrare la formula di antitrasformazione di Fourier (vedi la proposizione 6.1).

### 1) Linearità

Siano  $\lambda$  e  $\mu$  due costanti complesse, allora:

$$\boxed{\mathcal{F}[\lambda x(t) + \mu y(t)] = \lambda X(\omega) + \mu Y(\omega).} \quad (6.17)$$

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\lambda x(t) + \mu y(t)] e^{-j\omega t} dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt.$$

**Esempio 6.8** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$5p_2(t) + 7 \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+t^2)}.$$

Utilizzando la linearità (6.17) e gli esempi 6.1 e 6.2 si ha:

$$\mathcal{F} \left[ 5p_2(t) + 7 \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+t^2)} \right] = 5\mathcal{F}[p_2(t)] + 7\mathcal{F} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+t^2)} \right] = 5 \frac{2 \sin \omega}{\omega} + 7e^{-|\omega|}.$$

## 2) Traslazione nel tempo

Sia  $t_0$  un valore assegnato della variabile  $t$ , si ha:

$$\boxed{\mathcal{F}[x(t - t_0)] = X(\omega) e^{-jt_0\omega}}. \quad (6.18)$$

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-jt_0\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega(t-t_0)} d(t - t_0) = e^{-jt_0\omega} X(\omega).$$

**Esempio 6.9** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$u(t) - u(t - 5) = p_5(t - \frac{5}{2}).$$

Utilizzando la proprietà di traslazione nel tempo (6.18) e la trasformata calcolata nell'esempio 6.1, si ha:

$$\mathcal{F}[u(t) - u(t - 5)] = \mathcal{F}[p_5(t - 5/2)] = e^{-5j\omega/2} \frac{2 \sin 5\omega/2}{\omega}$$

## 3) Traslazione in frequenza

Sia  $\omega_0$  un valore assegnato della variabile  $\omega$ , si ha:

$$\boxed{\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} x(t)] = X(\omega - \omega_0)}. \quad (6.19)$$

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = X(\omega - \omega_0).$$

**Esempio 6.10** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$p_{2\pi}(t) \sin t.$$

Utilizzando la proprietà di linearità (6.17), quella di traslazione in frequenza (6.19) e l'esempio 6.1, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[p_{2\pi}(t) \sin t] &= \frac{1}{2j} \mathcal{F}[p_{2\pi}(t) e^{jt}] - \frac{1}{2j} \mathcal{F}[p_{2\pi}(t) e^{-jt}] \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2 \sin \pi(\omega - 1)}{(\omega - 1)} - \frac{1}{2j} \frac{2 \sin \pi(\omega + 1)}{(\omega + 1)}. \end{aligned}$$

#### 4) Riscaldamento

Sia  $a$  una costante reale, si ha:

$$\boxed{\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right).} \quad (6.20)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt &= \begin{cases} 1/a \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j\omega u/a} du & \text{se } a > 0 \\ 1/a \int_{+\infty}^{-\infty} x(u) e^{-j\omega u/a} du & \text{se } a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j\omega u/a} du = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right). \end{aligned}$$

**Esempio 6.11** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + (3t)^2)}.$$

Utilizzando la proprietà di riscaldamento (6.20) e l'esempio 6.2, si ha:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 + (3t)^2)}\right] = \frac{1}{3} e^{-|\omega|/3}.$$

## 5) Derivata nel tempo

Sia  $x'(t)$  la derivata prima di  $x(t)$ , si ha:

$$\mathcal{F}[x'(t)] = j\omega X(\omega). \quad (6.21)$$

Non dimostriamo questa proprietà; osserviamo che, se sono verificate le ipotesi che permettono di scambiare derivazione e integrazione, essa può essere interpretata nel modo seguente:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

**Esempio 6.12** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$\frac{d}{dt}p_{10}(t).$$

Utilizzando la proprietà di derivata nel tempo (6.21) e l'esempio 6.1, si ha:

$$\mathcal{F} \left[ \frac{d}{dt}p_{10}(t) \right] = j\omega \frac{2 \sin 5\omega}{\omega}.$$

## 6) Derivata in frequenza

Indichiamo con  $X'(\omega)$  la derivata prima di  $X(\omega)$ , si ha:

$$\mathcal{F}[-jtx(t)] = X'(\omega). \quad (6.22)$$

Analogamente a quanto visto per la (6.21), si può interpretare (6.22) nel seguente modo:

$$\frac{d}{d\omega}X(\omega) = \frac{d}{d\omega} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} -jt x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

**Esempio 6.13** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$t[u(t) - u(t-3)].$$

Utilizzando la proprietà di derivata in frequenza (6.22) e l'esempio relativo alla proprietà di traslazione nel tempo (6.18), si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[t[u(t) - u(t-3)]] &= j\mathcal{F}[-jt[u(t) - u(t-3)]] = \\ &= j \frac{d}{d\omega} \left[ e^{-j3\omega/2} \frac{2 \sin \frac{3}{2}\omega}{\omega} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{d\omega} \left[ \frac{(1 - e^{-j3\omega})}{\omega} \right] = \\
 &= \frac{j3\omega e^{-j3\omega} - (1 - e^{-j3\omega})}{\omega^2},
 \end{aligned}$$

che conclude l'esempio. ■

## 7) Simmetria

Indichiamo con  $x(t)$  un segnale nella variabile temporale  $t$  e con  $X(\omega)$  la sua trasformata di Fourier nella variabile  $\omega$ . Indichiamo con  $X(t)$  la funzione trasformata di  $x(t)$  pensata nella variabile  $t$ , cosa che è possibile in quanto sia la variabile temporale  $t$  che la variabile in frequenza  $\omega$  sono reali (e non complesse). Con queste premesse si ha:

$$\boxed{
 \begin{array}{ccc}
 x(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & X(\omega), \\
 X(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi x(-\omega).
 \end{array}
 } \quad (6.23)$$

Infatti dalla formula di antitrasformazione, si ha:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow 2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega,$$

e scambiando  $t$  con  $\omega$  si ottiene:

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}[X(t)].$$

■

**Esempio 6.14** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$\frac{\sin t}{t}.$$

Utilizzando la proprietà di simmetria (6.23) e l'esempio 6.1, si ha:

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{1}{2}p_2(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{\sin \omega}{\omega}, \\
 \frac{\sin t}{t} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi \frac{1}{2}p_2(-\omega) = \pi[u(\omega + 1) - u(\omega - 1)].
 \end{array}$$

■

### 8) Coniugazione

Indichiamo con  $x(t)$  un segnale nella variabile temporale  $t$  a valori complessi e con  $x^*(t)$  il segnale complesso coniugato di  $x(t)$ . Allora si ha:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & X(\omega), \\ x^*(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & X^*(-\omega). \end{array}} \quad (6.24)$$

Infatti dalla formula di trasformazione, si ricava:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right)^* = X^*(-\omega).$$

■

**Esempio 6.15** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$\cos t - j \sin t.$$

Utilizzando la proprietà di coniugazione (6.24), quella di traslazione in frequenza (6.19) e l'esempio 6.4, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos t - j \sin t] &= \mathcal{F}[(e^{jt})^*] = (2\pi\delta(-\omega - 1))^* = \\ &= (2\pi\delta(\omega + 1))^* = 2\pi\delta(\omega + 1). \end{aligned}$$

■

### 9) Realtà e parità

Se il segnale  $x(t)$  è reale e pari, allora anche la sua trasformata di Fourier è reale e pari e viceversa:

$$\boxed{x(t) \text{ reale e pari} \iff X(\omega) \text{ reale e pari.}} \quad (6.25)$$

Infatti, ricordando che un segnale è reale se è uguale al suo complesso coniugato e che un segnale è pari se è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, si ha:

$$\left. \begin{array}{ll} x(t) & \text{reale} \\ x(t) & \text{pari} \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} x(t) = x^*(t) \\ x(t) = x(-t) \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ X(\omega) = X(-\omega) \end{array} \right.$$

L'ultima uguaglianza significa subito che  $X(\omega)$  è pari, mentre le due relazioni nel dominio delle frequenze implicano:

$$X^*(-\omega) = X(-\omega) \quad \text{ovvero} \quad X^*(\omega) = X(\omega),$$

cioè  $X(\omega)$  è reale. Per la proprietà di simmetria segue anche l'implicazione inversa. ■

**Esempio 6.16** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$p_{10}(t) = u(t + 5) - u(t - 5).$$

Il segnale  $p_{10}(t)$  è reale e pari e l'esempio 6.1 ci fornisce subito:

$$\mathcal{F}[p_{10}(t)] = \frac{2 \sin 5\omega}{\omega},$$

che è una trasformata reale e pari, essendo rapporto di due funzioni reali e dispari. ■

### 10) Realtà e disparità

Il segnale  $x(t)$  è reale e dispari se e solo se la sua trasformata di Fourier è immaginaria pura e dispari, ovvero:

|                                                                     |        |
|---------------------------------------------------------------------|--------|
| $x(t)$ reale e dispari $\iff X(\omega)$ immaginario puro e dispari. | (6.26) |
|---------------------------------------------------------------------|--------|

Infatti, ricordando che un segnale è reale se è uguale al suo complesso coniugato e che un segnale è dispari se è simmetrico rispetto all'origine degli assi, si ha:

$$\left. \begin{array}{ll} x(t) \text{ reale} & \iff x(t) = x^*(t) \\ x(t) \text{ dispari} & \iff x(t) = -x(-t) \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ X(\omega) = -X(-\omega) \end{array} \right.$$

L'ultima uguaglianza significa subito che  $X(\omega)$  è dispari, mentre le due relazioni nel dominio delle frequenze implicano:

$$X^*(-\omega) = -X(-\omega) \quad \text{ovvero} \quad X^*(\omega) = -X(\omega),$$

ora un valore complesso il cui opposto coincide con il suo complesso coniugato è un valore immaginario puro, cioè  $X(\omega)$  è immaginario puro. ■

**Esempio 6.17** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente segnale:

$$\frac{1}{2}tp_2(t) = \frac{1}{2}t[u(t + 1) - u(t - 1)].$$

Il segnale  $\frac{1}{2}tp_2(t)$  è reale e dispari e la proprietà di derivata in frequenza (6.22) e l'esempio 6.1 ci forniscono subito:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}tp_2(t)\right] = j \frac{d}{d\omega} \frac{\sin \omega}{\omega} = j \frac{\omega \cos \omega - \sin \omega}{\omega^2},$$

che è una trasformata immaginaria pura e dispari, essendo data da  $j$  per il rapporto di una funzione dispari e di una pari. Per la proprietà di simmetria segue anche la implicazione inversa. ■

## 11) Convoluzione

Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due distribuzioni temperate per le quali sia definito il prodotto di convoluzione  $x(t) * y(t)$  (vedi (5.56) e (5.61)), allora:

$$\mathcal{F}[x(t) * y(t)] = X(\omega)Y(\omega). \quad (6.27)$$

Supponiamo di poter scambiare l'ordine di integrazione, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t) * y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}e^{-j\omega\tau} d(t-\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau Y(\omega) = X(\omega)Y(\omega). \end{aligned}$$

**Esempio 6.18** Si calcoli la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione

$$p_2(t) * p'_{10}(t),$$

ove  $p'_{10}$  è la derivata prima di  $p_{10}$ .

Per la proprietà della trasformata della convoluzione (6.27), ricordando la proprietà di derivata nel tempo (6.21), si ha:

$$\mathcal{F}[p_2(t) * p'_{10}(t)] = \mathcal{F}[p_2(t)] \mathcal{F}[p'_{10}(t)] = \frac{2 \sin \omega}{\omega} j\omega \frac{2 \sin 5\omega}{\omega} = 4j \frac{\sin \omega \sin 5\omega}{\omega}.$$

## 12) Prodotto

Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due distribuzioni temperate per le quali sia definito il prodotto  $x(t)y(t)$ , allora:

$$\mathcal{F}[x(t)y(t)] = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega). \quad (6.28)$$

Infatti, per la proprietà della convoluzione (6.27) e di quella di simmetria (6.23), si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[X(-t) * Y(-t)] &= \mathcal{F}[X(-t)] \mathcal{F}[Y(-t)] = 2\pi x(\omega) 2\pi y(\omega), \\ \mathcal{F}[4\pi^2 x(t)y(t)] &= 2\pi(X(\omega) * Y(\omega)), \\ \mathcal{F}[x(t)y(t)] &= \frac{1}{2\pi}(X(\omega) * Y(\omega)). \end{aligned}$$



**Esempio 6.19** Si calcoli la trasformata di Fourier del seguente prodotto:

$$p_2(t) \frac{\sin t}{t}.$$

Per la proprietà della trasformata del prodotto (6.28), ricordando l'esempio relativo alla proprietà di simmetria (6.23), si ha:

$$\mathcal{F} \left[ p_2(t) \frac{\sin t}{t} \right] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} [p_2(t)] * \mathcal{F} \left[ \frac{\sin t}{t} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{2 \sin \omega}{\omega} * \pi p_2(\omega).$$

■

**Osservazione 6.4** Siamo in grado ora di completare le riflessioni fatte nella osservazione 6.3. Ricordando infatti che una distribuzione a crescita lenta  $x(t)$ , per la (5.73), si può esprimere nel modo seguente:

$$x(t) = D^m [(1+t^2)^n l(t)], \quad (6.29)$$

con  $l(t)$  continua, limitata e integrabile. Possiamo dapprima applicare la proprietà di derivata nel tempo (6.21) e poi quella di derivata in frequenza (6.22) e otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} D^m [(1+t^2)^n l(t)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= (j\omega)^m \int_{-\infty}^{+\infty} [(1-(-jt)^2)^n l(t)] e^{-j\omega t} dt = \\ &= (j\omega)^m (1-D^2)^n \int_{-\infty}^{+\infty} l(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= (j\omega)^m (1-D^2)^n \mathcal{F}[l(t)]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

La (6.30) si può considerare come una giustificazione del fatto che le distribuzioni temperate hanno trasformata di Fourier. Inoltre si comprende che, affinché una distribuzione abbia trasformata di Fourier, devono esistere  $m$  e  $n$  tali per cui  $x(t) = D^m [(1+t^2)^n l(t)]$  [con  $l(t)$  continua, limitata e integrabile] ovvero  $x(t)$  deve essere a crescita lenta.

■

## 6.4 Trasformata di Fourier del gradino

Per arrivare alla trasformata di Fourier del gradino  $u(t)$  seguiamo alcune tappe. Dapprima calcoliamo la trasformata di Fourier della *pseudofunzione*  $1/t$ , poi utilizzando la proprietà di simmetria (6.23) ricaviamo la trasformata di Fourier della funzione  $\operatorname{sgn} t$  e infine con un semplice passaggio otteniamo la trasformata di  $u(t)$ .

È bene richiamare alcune considerazioni che avevamo fatto sul valor principale nel paragrafo 4.2.1. Si era osservato che la funzione  $1/t$  non è integrabile nell'intervallo  $[a, b]$  con  $a < 0 < b$ , tuttavia si poteva dare significato all'integrale di  $1/t$  sull'intervallo  $[a, b]$ , interpretandolo come *valor principale secondo Cauchy*. Se supponiamo di avere

una funzione di prova  $\varphi(t)$ , nulla all'esterno di un intervallo limitato, il seguente valor principale

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \quad (6.31)$$

definisce un funzionale lineare sulle funzioni infinite volte derivabili e nulle all'esterno di un intervallo limitato.

Ora le forme lineari (e continue) sulle funzioni di prova permettono di definire una distribuzione. Si ha allora che l'espressione (6.31) definisce una distribuzione che viene indicata col nome di *pseudofunzione*  $1/t$  e si scrive:

$$p.f. \frac{1}{t}.$$

Si tenga tuttavia presente che spesso si omettono, per praticità, le lettere *p.f.*

La distribuzione *p.f.*  $1/t$  non è limitata, ma è a crescita lenta, ed è quindi possibile calcolarne la trasformata di Fourier. Si tratta di interpretare l'integrale (6.1) della definizione di trasformata di Fourier come valor principale. Facciamo il calcolo nell'esempio seguente.

**Esempio 6.20** Verificare il seguente risultato di trasformata di Fourier:

$$p.f. \frac{1}{t} \xrightarrow{\mathcal{F}} -\pi j \operatorname{sgn}(\omega).$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier di *p.f.*  $1/t$  interpretando l'integrale della definizione (6.1) come valor principale:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ p.f. \frac{1}{t} \right] &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -2\pi j \frac{1}{2} R(0) & \text{se } \omega > 0 \\ +2\pi j \frac{1}{2} R(0) & \text{se } \omega < 0 \end{array} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} -\pi j & \text{se } \omega > 0 \\ +\pi j & \text{se } \omega < 0 \end{array} \right\} = -\pi j \operatorname{sgn}(\omega). \end{aligned}$$

Si osservi che l'integrale nella formula precedente è stato calcolato utilizzando il lemma di Jordan [vedi (4.4)]. Si osservi inoltre che la *p.f.*  $\frac{1}{t}$  è reale e dispari e che la sua trasformata è immaginaria pura e dispari, come si poteva prevedere per la proprietà (6.26). ■

Utilizzando la proprietà di simmetria (6.23), possiamo ora svolgere il seguente esempio.

**Esempio 6.21** Verificare il seguente risultato:

$$\operatorname{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} p.f. \frac{2}{j\omega}. \quad (6.32)$$

Infatti, per la proprietà di simmetria (6.23), si ha:

$$\mathcal{F}[-\pi j \operatorname{sgn}(t)] = 2\pi \text{p.f.} \frac{1}{-\omega} \quad (6.33)$$

e quindi per proprietà di linearità (6.17), si possono dividere ambo i membri della (6.33) per  $-\pi j$  e si ottiene così il risultato cercato. Si osservi che la  $\operatorname{sgn}(t)$  è reale e dispari e che la sua trasformata è immaginaria pura e dispari, come si poteva prevedere per la proprietà (6.26). ■

Possiamo ora ricavare la trasformata del gradino unitario  $u(t)$ .

**Esempio 6.22** Verificare che risulta:

$$\boxed{u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{p.f.} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega).} \quad (6.34)$$

Infatti la funzione  $u(t)$  può essere scritta nel modo seguente:

$$u(t) = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{sgn}(t))$$

e quindi, per la proprietà di linearità (6.17) e per gli esempi 6.6 e 6.21, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(t)] &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[1] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)] = \\ &= \frac{1}{2} 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \text{p.f.} \frac{2}{j\omega} = \\ &= \pi\delta(\omega) + \text{p.f.} \frac{1}{j\omega}. \end{aligned}$$

Come esercizio ricaviamo con un metodo nuovo la trasformata di Fourier della porta; si confronti poi questo metodo con quello dell'esempio 6.1.

**Esempio 6.23** Verificare che

$$u(t+1) - u(t-1) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2 \sin \omega}{\omega},$$

utilizzando la linearità della trasformata e il risultato (6.34).

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[p_2(t)] &= \mathcal{F}[u(t+1) - u(t-1)] = \mathcal{F}[u(t+1)] - \mathcal{F}[u(t-1)] = \\ &= e^{j\omega t} \mathcal{F}[u(t)] - e^{-j\omega t} \mathcal{F}[u(t)] = \\ &+ e^{j\omega t} \left[ \text{p.f.} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] - e^{-j\omega t} \left[ \text{p.f.} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \\ &= e^{j\omega t} \left[ \text{p.f.} \frac{1}{j\omega} \right] + \pi\delta(\omega) - e^{-j\omega t} \left[ \text{p.f.} \frac{1}{j\omega} \right] - \pi\delta(\omega) = \frac{2 \sin \omega}{\omega}. \end{aligned}$$

Si osservi che si è utilizzata la proprietà (5.48) della delta di Dirac. Si noti che la trasformata ottenuta ha una singolarità apparente per  $\omega = 0$ . Si osservi inoltre che la  $p_2(t)$  è reale e pari e che la sua trasformata è reale e pari, come si poteva prevedere per la proprietà (6.25). ■

## 6.5 Equazioni con distribuzioni

Iniziamo con una riflessione che ci introduca al fatto che questo paragrafo è inserito nel contesto delle trasformate di Fourier. Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due distribuzioni temperate, rispettivamente con trasformate di Fourier date da  $X(\omega)$  e  $Y(\omega)$  e tali che:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t). \quad (6.35)$$

Trasformiamo ambo i membri della (6.35), utilizzando la proprietà di derivata nel tempo (6.21), e otteniamo:

$$Y(\omega) = j\omega X(\omega). \quad (6.36)$$

La (6.36) può essere considerata come una equazione nella incognita  $X(\omega)$  e di termine noto  $Y(\omega)$ . Se si ha l'informazione che  $X(\omega)$  è una funzione, allora la soluzione sarà:

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(\omega). \quad (6.37)$$

Tuttavia se si cerca la soluzione della (6.36) in ambito distribuzionale bisogna tenere presente che la soluzione può non essere data solo dalla (6.37). Si ha infatti la seguente proposizione:

**Proposizione 6.2** *Le soluzioni, in ambito distribuzionale, della (6.36) sono:*

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega}Y(\omega) + k\delta(\omega), \quad (6.38)$$

con  $k$  costante complessa.

Infatti, per la proprietà (5.48) della  $\delta(t)$ , si ha che l'espressione (6.38) è tale che:

$$j\omega X(\omega) = j\omega \left[ \frac{1}{j\omega}Y(\omega) + k\delta(\omega) \right] = Y(\omega) + j\omega k\delta(\omega) = Y(\omega),$$

cioè è soluzione della (6.36). ■

Presentiamo una versione un po' più generale della proposizione 6.2, che ha dimostrazione analoga alla precedente e che noi tralasciamo.

**Proposizione 6.3** *Se  $W(\omega)$  ha  $n$  zeri distinti del primo ordine:*

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n,$$

*le soluzioni della equazione seguente:*

$$W(\omega)X(\omega) = Y(\omega) \quad (6.39)$$

sono:

$$X(\omega) = \frac{1}{W(\omega)}Y(\omega) + \sum_{i=1}^n k_i \delta(\omega - \omega_i), \quad (6.40)$$

con  $k_i$  costanti complesse.

**Osservazione 6.5** L'equazione (6.39) si presenta spesso quando la  $x(t)$  è una funzione limitata e nulla all'esterno di un intervallo limitato. In questo caso, potendosi calcolare la trasformata di Fourier con un integrale, si è sicuri che la  $X(\omega)$  è una funzione e quindi la soluzione della (6.39) non contiene termini impulsivi e dunque  $X(\omega)$  è data da:

$$X(\omega) = \frac{1}{W(\omega)}Y(\omega).$$

In questo caso  $W(\omega)$  può avere zeri di ordine superiore al primo. ■

**Esempio 6.24** Si calcoli la trasformata della porta  $p_T(t)$ , calcolando dapprima la trasformata di  $(p_T(t))'$  e poi, ottenuta una equazione del tipo della (6.36), la si risolva in ambito distribuzionale.

Poiché la  $p_T(t)$  è costante a tratti e ha due discontinuità di tipo salto in  $-T/2$  e in  $T/2$  la sua derivata distribuzionale, per le regole pratiche del paragrafo 5.4.1 (vedi la figura 6.5), ha due delta di Dirac centrate in  $-T/2$  e in  $T/2$ :

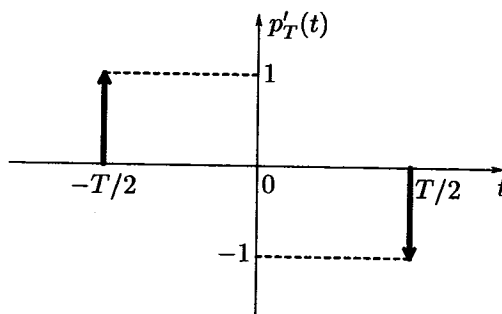


Fig. 6.5 La derivata distribuzionale della porta  $p_T(t)$ .

$$\frac{d}{dt}p_T(t) = \delta(t + T/2) - \delta(t - T/2). \quad (6.41)$$

Trasformando ora ambo i membri della (6.41) otteniamo:

$$j\omega \mathcal{F}[p_T(t)] = e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2} = 2j \sin(\omega T/2). \quad (6.42)$$

La (6.42) è una equazione in ambito distribuzionale nell'incognita  $\mathcal{F}[p_T(t)]$ , ma per l'osservazione 6.5 la sua soluzione è una funzione e dunque è sufficiente dividere la (6.42) per ottenere:

$$\mathcal{F}[p_T(t)] = \frac{2j \sin(\omega T/2)}{j\omega} = \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega}.$$

Si confronti il metodo con cui si è svolto questo esercizio con quello utilizzato negli esempi 6.1 e 6.23. ■

**Esempio 6.25** Si verifichi il seguente risultato, che riguarda la trasformata di Fourier del segnale "triangolare":

$$\left(\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t+a/2) + \left(-\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t-a/2) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a} \left(\frac{2 \sin(\omega a/2)}{\omega}\right)^2.$$

Segnaliamo alcuni modi che si possono utilizzare nello svolgere questo esempio.

- 1) Un primo modo per svolgere l'esercizio è quello di calcolarne la trasformata facendo l'integrale presente nella definizione 6.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ \left(\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t+a/2) + \left(-\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t-a/2) \right] &= \\ &= \int_{-a}^0 \left(\frac{1}{a}t + 1\right) e^{-j\omega t} dt + \int_0^a \left(-\frac{1}{a}t + 1\right) e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Con una integrazione per parti si conclude lo svolgimento.

I metodi seguenti utilizzano le proprietà di  $\mathcal{F}$  e sono più interessanti.

- 2) Utilizziamo le proprietà di linearità (6.17), di traslazione nel tempo (6.18) e di derivata in frequenza (6.22). Indicando con  $X(\omega)$  la trasformata che ci proponiamo di ricavare, si ha:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F} \left[ \left(\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t+a/2) + \left(-\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t-a/2) \right] = \\ &= \mathcal{F} \left[ \frac{1}{a} (t+a/2+a/2) p_a(t+a/2) \right] + \\ &\quad - \mathcal{F} \left[ \frac{1}{a} (t-a/2-a/2) p_a(t-a/2) \right] = \\ &= \frac{1}{a} e^{j\omega a/2} \mathcal{F}[t p_a(t)] + \frac{1}{2} e^{j\omega a/2} \mathcal{F}[p_a(t)] - \frac{1}{a} e^{-j\omega a/2} \mathcal{F}[t p_a(t)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-j\omega a/2} \mathcal{F}[p_a(t)] = \\ &= \frac{1}{a} 2j \sin(\omega a/2) j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[p_a(t)] + \frac{1}{2} 2 \cos(\omega a/2) \mathcal{F}[p_a(t)] = \\ &= \frac{-2}{a} \sin(\omega a/2) \frac{d}{d\omega} \frac{2 \sin(\omega a/2)}{\omega} + \frac{1}{2} 2 \cos(\omega a/2) \frac{2 \sin(\omega a/2)}{\omega} = \\ &= \frac{-2}{a} \sin(\omega a/2) \frac{a\omega \cos(\omega a/2) - 2 \sin(\omega a/2)}{\omega^2} + \frac{\sin(\omega a)}{\omega} = \\ &= \frac{1}{a} \left( \frac{2 \sin(\omega a/2)}{\omega} \right)^2. \end{aligned}$$

- 3) La funzione “a triangolo”, che dobbiamo trasformare, è continua e lineare a tratti, quindi, per le regole pratiche del calcolo delle derivate distribuzionali del paragrafo 5.4.1, ha la derivata prima che è una funzione costante a tratti e ha la derivata seconda che è somma di termini impulsivi. Se indichiamo con  $x(t)$  la funzione “a triangolo” da trasformare, si ha:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left(\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t + a/2) + \left(-\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t - a/2) \\
 x'(t) &= \frac{1}{a}p_a(t + a/2) + \left(\frac{1}{a}t + 1\right) (\delta(t + a) - \delta(t)) + \\
 &\quad -\frac{1}{a}p_a(t - a/2) + \left(-\frac{1}{a}t + 1\right) (\delta(t) - \delta(t - a)) = \\
 &= \frac{1}{a}p_a(t + a/2) - \delta(t) - \frac{1}{a}p_a(t - a/2) + \delta(t) = \\
 &= \frac{1}{a}p_a(t + a/2) - \frac{1}{a}p_a(t - a/2) = \\
 x''(t) &= \frac{1}{a}(\delta(t + a) - \delta(t)) - \frac{1}{a}(\delta(t) - \delta(t - a)) = \\
 &= \frac{1}{a}(\delta(t + a) - 2\delta(t) + \delta(t - a)) .
 \end{aligned}$$

Trasformando ora l'ultima equazione, otteniamo:

$$\begin{aligned}
 (j\omega)^2 X(\omega) &= \frac{1}{a} (e^{j\omega a} - 2 + e^{-j\omega a}) = \\
 &= \frac{1}{a} (e^{j\omega a/2} - e^{-j\omega a/2})^2 = \\
 &= \frac{1}{a} (2j \sin(\omega a/2))^2 .
 \end{aligned} \tag{6.43}$$

Per l'osservazione 6.5, l'equazione precedente ha soluzione senza termini impulsivi e quindi:

$$X(\omega) = \frac{1}{a} \frac{(2j \sin(j\omega a/2))^2}{(j\omega)^2} = \frac{1}{a} \left( \frac{2 \sin(j\omega a/2)}{\omega} \right)^2 .$$

- 4) Presentiamo ancora un modo di svolgere l'esercizio, osservando che:

$$\left(\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t + a/2) + \left(-\frac{1}{a}t + 1\right) p_a(t - a/2) = \frac{1}{a} (p_a(t) * p_a(t)) .$$

Per la proprietà della trasformata del prodotto di convoluzione 6.27 si ha:

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{a} (p_a(t) * p_a(t)) \right] = \frac{1}{a} \left( \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \right) \left( \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \right) ,$$

che coincide con il risultato ottenuto in precedenza con altri procedimenti. ■

**Esempio 6.26** Si calcoli la trasformata del segnale  $x(t) = (1/(2a))(t+a)p_{2a}(t)$ , calcolando dapprima la trasformata di  $x''(t)$  e poi, ottenuta una equazione del tipo della (6.39), la si risolva in ambito distribuzionale, tenendo conto dell'osservazione 6.5.

Poiché la  $x(t)$  è lineare a tratti e ha una discontinuità di tipo salto in  $a$  la sua derivata distribuzionale, per le regole pratiche del paragrafo 5.4.1 (vedi la figura 6.6), ha una delta

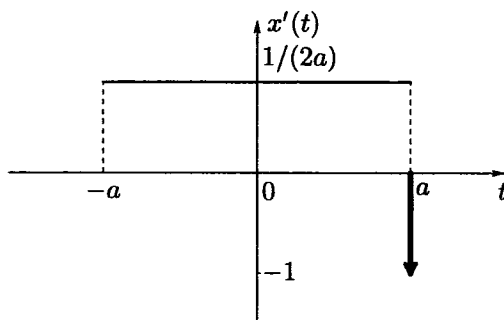


Fig. 6.6 La derivata distribuzionale del segnale  $x(t)$ .

di Dirac centrate in  $a$ :  $x'(t) = (1/(2a))p_{2a}(t) - \delta(t-a)$  e derivando ancora si ha:

$$x''(t) = \frac{1}{2a}\delta(t+a) - \frac{1}{2a}\delta(t-a) - \delta'(t-a)$$

e trasformando, si ha:

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 X(\omega) &= \frac{1}{2a}e^{j\omega a} - \frac{1}{2a}e^{-j\omega a} - j\omega e^{-j\omega a} = \\ &= \frac{1}{2a}2j \sin(\omega a) - j\omega e^{-j\omega a}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

La soluzione della (6.44) tenendo conto della osservazione 6.5 fornisce:

$$X(\omega) = \frac{j \sin(\omega a)}{-a\omega^2} + \frac{j\omega e^{-j\omega a}}{\omega}.$$

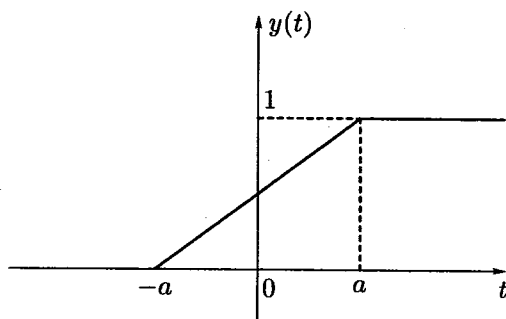
■

**Esempio 6.27** Si calcoli la trasformata del segnale  $y(t) = (1/(2a))(t+a)p_{2a}(t) + u(t-a)$ .

Il segnale da trasformare, (vedi la figura 6.7), è somma di due segnali: quello dell'esempio 6.26 e di  $u(t-a)$ . Per la proprietà di linearità delle trasformate (6.17), si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[y(t)] &= \mathcal{F}[x(t)] + \mathcal{F}[u(t-a)] = \\ &= \frac{j \sin(\omega a)}{-a\omega^2} + \frac{j\omega e^{-j\omega a}}{\omega} + e^{-j\omega a} \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) = \\ &= \frac{j \sin(\omega a)}{-a\omega^2} + \pi\delta(\omega). \end{aligned}$$



Fig. 6.7 Il segnale  $x(t)$  da trasformare.

**Osservazione 6.6** Il segnale  $y(t)$  dell'esempio 6.27 è continuo e ha come derivata distribuzionale:

$$y'(t) = \frac{1}{2a} p_{2a}(t). \quad (6.45)$$

Trasformando ambo i membri della (6.45) si ha:

$$j\omega Y(\omega) = \frac{2 \sin(\omega a)}{2a\omega}. \quad (6.46)$$

Alla equazione (6.46) non si può applicare l'osservazione 6.5, poiché il segnale  $y(t)$  è uguale a 1 per  $t \geq a$ , la sua soluzione è dunque del tipo (6.38):

$$Y(\omega) = \frac{\sin(\omega a)}{a j \omega^2} + k \delta(\omega), \quad (6.47)$$

rimane quindi il problema di determinare la costante  $k$ , che lo svolgimento dell'esempio 6.27 ci ha mostrato essere  $\pi$ . Diamo perciò l'indicazione che il metodo di trasformare la derivata di un segnale è comodo solo quando si ha da trasformare un segnale nullo all'esterno di un intervallo limitato, secondo quanto abbiamo già detto nella osservazione 6.5. ■

## 6.6 Altri esempi importanti di trasformate di Fourier

In questo paragrafo presentiamo il calcolo di alcune trasformate di Fourier.

**Esempio 6.28** Si giustifichi il seguente risultato di calcolo di trasformata di Fourier:

$$\sin \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi j [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (6.48)$$

Infatti si ha che:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] - \frac{1}{2j}\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= \frac{1}{2j}2\pi\delta(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j}2\pi\delta(\omega + \omega_0) = \pi j(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)).\end{aligned}$$

■

**Esempio 6.29** Verificare che:

$$\boxed{\cos \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]}. \quad (6.49)$$

Infatti si ha che:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}2\pi\delta(\omega + \omega_0) = \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)).\end{aligned}$$

■

**Esempio 6.30** La trasformata di Fourier di  $u(t) \sin \omega_0 t$  è data da:

$$\boxed{u(t) \sin \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi j}{2}[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] - \frac{\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)}}. \quad (6.50)$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t) \sin \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[u(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right] = \frac{1}{2j}\mathcal{F}[u(t)e^{j\omega_0 t}] - \frac{1}{2j}\mathcal{F}[u(t)e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= \frac{1}{2j}\left(\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)}\right) - \frac{1}{2j}\left(\pi\delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)}\right) = \\ &= \frac{\pi j}{2}(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)) - \frac{\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)}.\end{aligned}$$

■

**Esempio 6.31** Si verifichi il seguente calcolo di trasformata di Fourier:

$$\boxed{u(t) \cos \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] - \frac{j\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)}}. \quad (6.51)$$

Si ha che:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t) \cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[u(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathcal{F}[u(t) e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{F}[u(t) e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= \frac{1}{2} \left( \pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)} \right) + \frac{1}{2} \left( \pi \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{j(\omega + \omega_0)} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) - \frac{j\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)},\end{aligned}$$

la verifica risulta così conclusa. ■

**Esempio 6.32** Si verifichi che, se  $\text{Re } \alpha > 0$ , si ha:

$$\boxed{u(t)e^{-\alpha t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(j\omega + \alpha)}} \quad (6.52)$$

Poniamo  $\alpha = a + jb$  ovvero  $\text{Re } \alpha = a$  e  $\text{Im } \alpha = b$  e sia  $a > 0$ . Iniziamo allora a verificare che:

$$\mathcal{F}[u(t)e^{-at}] = \frac{1}{(j\omega + a)}.$$

Infatti si ha che:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t)e^{-at}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(j\omega + a)t} dt = \\ &= \left[ -\frac{1}{j\omega + a} e^{-(j\omega + a)t} (\cos \omega t - j \sin \omega t) \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega + a}.\end{aligned}$$

Riprendiamo ora l'esempio che ci richiede di trasformare  $x(t) = u(t)e^{-\alpha t}$  e indichiamo con  $y(t) = u(t)e^{-at}$ , risulta allora che:

$$x(t) = u(t)e^{-\alpha t} = u(t)e^{-(a+jb)t} = u(t)e^{-at} e^{-jbt} = y(t)e^{-jbt}$$

e, applicando la proprietà di traslazione in frequenza (6.19), si ha:

$$\mathcal{F}[u(t)e^{-\alpha t}] = \mathcal{F}[y(t)e^{-jbt}] = Y(\omega + b) = \frac{1}{j(\omega + b) + a} = \frac{1}{j\omega + \alpha}.$$

■

**Osservazione 6.7** Se, nella (6.52),  $\alpha$  è uguale a zero, ci si riconduce alla trasformata del gradino dell'esempio 6.22. Mentre, se  $\alpha < 0$ , il segnale da trasformare diviene a crescita esponenziale e quindi, non essendo temperato, non ammette trasformata di Fourier. ■

**Esempio 6.33** Si giustifichi che, se  $\sigma > 0$ , si ha:

$$\boxed{u(t)e^{-\sigma_0 t} \sin \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\omega_0}{(j\omega + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}} \quad (6.53)$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(t)e^{-\sigma_0 t} \sin \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[u(t) \frac{e^{-\sigma_0 t + j\omega_0 t} - e^{-\sigma_0 t - j\omega_0 t}}{2j}\right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left( + \frac{1}{j\omega + \sigma_0 - j\omega_0} \right) - \frac{1}{2j} \left( + \frac{1}{j\omega + \sigma_0 + j\omega_0} \right) = \\ &= \frac{\omega_0}{(j\omega + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

■

**Esempio 6.34** Si verifichi che, se  $\sigma > 0$ , il calcolo della trasformata di Fourier di  $u(t)e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$  è dato da:

$$\boxed{u(t)e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{j\omega + \sigma_0}{(j\omega + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}} \quad (6.54)$$

Per le proprietà si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u(t)e^{-\sigma_0 t} \cos \omega_0 t] &= \mathcal{F}\left[u(t) \frac{e^{-\sigma_0 t + j\omega_0 t} + e^{-\sigma_0 t - j\omega_0 t}}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( + \frac{1}{j\omega + \sigma_0 - j\omega_0} \right) + \frac{1}{2} \left( + \frac{1}{j\omega + \sigma_0 + j\omega_0} \right) = \\ &= \frac{j\omega + \sigma_0}{(j\omega + \sigma_0)^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

■

**Osservazione 6.8** Se, nelle (6.53) e (6.54),  $\sigma_0$  è uguale a zero, ci si riconduce alle trasformate (6.50) e (6.51). Mentre, se  $\sigma_0 < 0$ , il segnale da trasformare diviene a crescita esponenziale e quindi, non essendo temperato, non ammette trasformata di Fourier. ■

## 6.7 Trasformata del treno di impulsi

Nel capitolo sulle distribuzioni all'esempio 5.18 abbiamo già parlato della distribuzione limitata seguente:

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (6.55)$$

che viene indicata col nome di *treno di impulsi* o anche *pettine di Dirac*. Vogliamo ora mostrare che la trasformata di Fourier del treno di impulsi è un treno di impulsi nella variabile  $\omega$  con un opportuno periodo e costante moltiplicativa.

**Proposizione 6.4** *Si ha il seguente risultato:*

$$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} \omega_0 s_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad (6.56)$$

ove  $\omega_0 = 2\pi/T$

**Dimostrazione** Osserviamo innanzitutto che  $s_T(t)$  è periodica di periodo  $T$ , e che dal fatto che:

$$\delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-jnT\omega},$$

ricaviamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jnT\omega}. \quad (6.57)$$

Indicando con:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jnT\omega},$$

dalla (6.57) si ricava subito che  $S(\omega)$  è periodica di periodo  $\omega_0 = 2\pi/T$ :

$$S(\omega - \frac{2\pi}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jnT(\omega - 2\pi/T)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jnT\omega + 2\pi nj} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jnT\omega} = S(\omega). \quad (6.58)$$

Inoltre si ricava facilmente che:

$$e^{jT\omega} S(\omega) = S(\omega). \quad (6.59)$$

Infatti:

$$e^{jT\omega} S(\omega) = e^{jT\omega} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jnT\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(n-1)T\omega}$$

e se cambiamo l'indice di sommazione, ponendo  $n - 1 = m$ , ne segue:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j(n-1)T\omega} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jmT\omega} = S(\omega).$$

Rimane così provata la (6.59), che possiamo scrivere nel modo seguente:

$$(e^{jT\omega} - 1) S(\omega) = 0. \quad (6.60)$$

La (6.60) è una equazione del tipo (6.39) con  $Y(\omega) = 0$  e  $W(\omega) = (e^{jT\omega} - 1)$ . Essa ha allora, in ambito distribuzionale, come soluzione, una somma di delta di Dirac centrate negli zeri del primo ordine di  $e^{jT\omega} - 1$ . Si ha:

$$e^{jT\omega} - 1 = 0 \Rightarrow e^{jT\omega} = e^{2n\pi j} \Rightarrow \omega = \frac{2n\pi}{T} = n\omega_0 \quad (6.61)$$

per ogni  $n$  intero relativo. Dalle (6.60), (6.61) e (6.40) ricaviamo che:

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} k_n \delta(\omega - n\omega_0). \quad (6.62)$$

Abbiamo già osservato, nella (6.58), che  $S(\omega)$  è periodica di periodo  $\omega_0$  e perciò nella (6.62) si deve avere che i  $k_n$  sono tutti uguali ovvero  $k_n = \beta$  per un opportuno  $\beta$  e per ogni  $n$ . Siamo così arrivati alla seguente espressione:

$$S(\omega) = \beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0). \quad (6.63)$$

Per completare la dimostrazione della proposizione ci rimane ora da determinare  $\beta$ . A questo scopo osserviamo che il segnale costante uguale a 1 può essere scritto nel modo seguente:

$$1 = p_T(t) * s_T(t). \quad (6.64)$$

Infatti

$$p_T(t) * s_T(t) = p_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_T(t - nT) = 1.$$

Trasformiamo ambo i membri della (6.64), ricordando la proprietà di trasformata del prodotto di convoluzione (6.27) e gli esempi 6.1 e 6.6, si ha:

$$2\pi\delta(\omega) = \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} \beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \quad (6.65)$$

ma poiché:

$$\left[ \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} \right]_{\omega=n\omega_0} = 0,$$

per ogni  $n \neq 0$  mentre, il prolungamento per continuità in zero, ci dà:

$$\left[ \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} \right]_{\omega=0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega} = T.$$

La (6.65), allora, diviene:

$$2\pi\delta(\omega) = T\beta\delta(\omega),$$

da cui ricaviamo:

$$\beta = \frac{2\pi}{T} = \omega_0,$$

e questo completa la dimostrazione della proposizione. ■

## 6.8 Trasformata di Fourier di segnali periodici

Nel capitolo che abbiamo dedicato alle serie di Fourier, vi è un paragrafo relativo alle funzioni periodiche e la definizione, che lì abbiamo data, è valida anche per le distribuzioni. Si dice che una distribuzione  $x(t)$  è periodica se esiste un intero positivo  $T$  tale per cui:

$$x(t) = x(t - T), \quad (6.66)$$

interpretando l'uguaglianza (6.66) come una uguaglianza tra i funzionali associati a  $x(t)$  e a  $x(t - T)$ , ovvero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - T)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi(t + T) dt$$

per ogni funzione di prova  $\varphi(t)$ .

Ora una distribuzione periodica  $x(t)$  di periodo  $T$ , può essere pensata come somma di traslate di una distribuzione  $x_0(t)$  con  $x_0(t)$  uguale a  $x(t)$  nell'intervallo  $[-T/2, T/2[$  e nulla all'esterno di tale intervallo:

$$\exists T : x(t) = x(t - T) \iff x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT) \quad (6.67)$$

ove

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } -T/2 \leq t < T/2 \\ 0 & \text{se } t < -T/2 \quad \text{o} \quad t \geq T/2. \end{cases} \quad (6.68)$$

Ora la (6.67), ricordando la proprietà della convoluzione della delta di Dirac [vedi la (5.66)], può essere espressa nel modo seguente:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t) * \delta(t - nT) = x_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = x_0(t) * s_T(t). \quad (6.69)$$

Possiamo allora precisare meglio la definizione di distribuzione periodica dicendo che  $x(t)$  è periodica, se può essere scritta nella forma (6.69) con  $x_0(t)$  dato dalla (6.68). La trasformata di distribuzioni periodiche è allora ottenuta trasformando la (6.69). Per la (6.27) e ricordando la trasformata (6.56) del treno di impulsi, si ha:

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x_0(t)] \mathcal{F}[s_T(t)] = X_0(\omega) \omega_0 s_{\omega_0}(\omega), \quad (6.70)$$

con  $x_0$  evidentemente dato dalla (6.68). L'espressione (6.70) può essere ulteriormente elaborata esplicitando il treno di impulsi e utilizzando la (5.49):

$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= X_0(\omega) \omega_0 s_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(\omega) \delta(\omega - n\omega_0) = \\
 &= \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0).
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Ponendo poi:

$$\beta_n = \omega_0 X_0(n\omega_0), \tag{6.72}$$

possiamo affermare che una distribuzione periodica ha sempre trasformata di Fourier del tipo:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \beta_n \delta(\omega - n\omega_0). \tag{6.73}$$

Si può anzi affermare che una distribuzione  $x(t)$  è periodica se e solo se ha una trasformata di Fourier del tipo (6.73) ovvero data dalla somma di delta di Dirac distanziate tra loro di un multiplo di una costante  $\omega_0$  e modulate ("in altezza") da un coefficiente  $\beta_n$  che ha crescita (in dipendenza da  $n$ ) al più polinomiale. La crescita, al più polinomiale di  $\beta_n$ , è conseguenza del fatto che  $\beta_n$  è, a meno di una costante moltiplicativa, il valore di  $X_0$ , ovvero di una distribuzione temperata, in  $n\omega_0$ .

**Osservazione 6.9** Nella formula (6.67), il segnale periodico  $x(t)$  è pensato come somma delle traslate di un segnale  $x_0(t)$  uguale a  $x(t)$  nell'intervallo  $[-T/2, T/2[$  di ampiezza  $T$  e nullo altrove, ma è facile comprendere che può essere utilizzata una qualunque traslata  $\tilde{x}_0(t)$  di  $x_0(t)$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{x}_0(t - nT),$$

con

$$\tilde{x}_0(t) = x_0(t - a) = \begin{cases} x(t) & \text{se } a - T/2 \leq t < a + T/2 \\ 0 & \text{se } t < a - T/2 \text{ o } t \geq a + T/2. \end{cases}$$

Caso particolare abbastanza frequente è quello con  $a = T/2$ . ■

### 6.8.1 Legami tra serie e trasformate di funzioni periodiche

Supponiamo che  $x(t)$  sia una funzione e quindi che la trasformata di Fourier di  $x_0(t)$  sia ottenibile con il calcolo di un integrale. Cerchiamo di esplicitare la formula (6.72):

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= \omega_0 X_0(n\omega_0) = \omega_0 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t) e^{-j\omega t} dt \right]_{\omega=n\omega_0} = \omega_0 \left[ \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]_{\omega=n\omega_0} = \\
 &= 2\pi \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn(2\pi/T)t} dt \right] = 2\pi c_n,
 \end{aligned} \tag{6.74}$$



ove si è posto:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jn(2\pi/T)t} dt. \quad (6.75)$$

L'espressione di  $c_n$  nella (6.75) è la stessa della (2.21) che avevamo trovato nel capitolo sulle serie di Fourier [vedi (2.17)], ottenendo, per una funzione periodica  $x(t)$ , la seguente formula:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn2\pi/T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0}. \quad (6.76)$$

Possiamo dunque concludere che, per funzioni  $x(t)$  periodiche di periodo  $T$ , i coefficienti  $\beta_n$  delle delta di Dirac della trasformata di Fourier di  $x(t)$ , coincidono, a meno del fattore moltiplicativo  $2\pi$ , con i coefficienti  $c_n$  della serie di Fourier di  $x(t)$ :

$$c_n = \frac{\beta_n}{2\pi} = \frac{1}{T} X_0(n \frac{2\pi}{T}). \quad (6.77)$$

Si poteva arrivare allo stesso risultato per altra via e cioè trasformando l'espressione (6.76) che, per la proprietà di traslazione in frequenza e per l'esempio 6.6, ci dà:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0). \quad (6.78)$$

Confrontando ora le (6.73) e (6.78) si ritrova il legame, espresso dalla (6.77), tra la serie di Fourier e la trasformata di Fourier di una funzione periodica.

### 6.8.2 Esempi di trasformate di segnali periodici

In questa sezione presentiamo alcuni esempi di trasformate di funzioni periodiche, mostrandone anche il legame con la serie di Fourier.

**Esempio 6.35** Si determini la trasformata di Fourier del segnale  $x(t)$  (onda triangolare):

$$x(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(t - m\pi) & \text{se } m\pi \leq t < \frac{\pi}{2} + m\pi \\ & m \in \mathbb{Z} \\ -\frac{2}{\pi}(t - (m+1)\pi) & \text{se } m\pi + \frac{\pi}{2} \leq t < (m+1)\pi. \end{cases}$$

In figura 6.8 è rappresentata l'onda triangolare. Si osservi che:

$$T = \pi, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2, \quad f = \frac{1}{\pi}.$$

Inoltre si noti che  $x(t)$  è reale e pari e quindi la sua trasformata sarà reale e pari [vedi la (6.25)]. Poniamo:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } t < -\frac{\pi}{2} \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (6.79)$$

Utilizzando le funzioni "porta", la (6.79) si può scrivere:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{2}{\pi}(t)p_{\pi/2}(t - \pi/4) - \frac{2}{\pi}(t)p_{\pi/2}(t + \pi/4) = \\ &= \frac{2}{\pi}(t - \pi/4)p_{\pi/2}(t - \pi/4) + \frac{1}{2}p_{\pi/2}(t - \pi/4) + \\ &\quad - \frac{2}{\pi}(t + \pi/4)p_{\pi/2}(t + \pi/4) + \frac{1}{2}p_{\pi/2}(t + \pi/4). \end{aligned}$$

La trasformata di  $x_0(t)$  diviene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_0(t)] &= \frac{2}{\pi}\mathcal{F}[(t - \pi/4)p_{\pi/2}(t - \pi/4)] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[p_{\pi/2}(t - \pi/4)] + \\ &\quad - \frac{2}{\pi}\mathcal{F}[(t + \pi/4)p_{\pi/2}(t + \pi/4)] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[p_{\pi/2}(t + \pi/4)] = \\ &= \frac{2}{\pi}e^{-j\omega\pi/4}\mathcal{F}[(t)p_{\pi/2}(t)] + \frac{1}{2}e^{-j\omega\pi/4}\mathcal{F}[p_{\pi/2}(t)] + \\ &\quad - \frac{2}{\pi}e^{j\omega\pi/4}\mathcal{F}[(t)p_{\pi/2}(t)] + \frac{1}{2}e^{j\omega\pi/4}\mathcal{F}[p_{\pi/2}(t)] = \\ &= -\frac{2}{\pi}(2j\sin\omega\pi/4)j\frac{d}{d\omega}\frac{2\sin\omega\pi/4}{\omega} + \frac{1}{2}(2\cos\omega\pi/4)2\frac{\sin\omega\pi/4}{\omega} = \\ &= \frac{8}{\pi}(\sin\omega\pi/4)\frac{(\omega\pi/4)\cos(\omega\pi/4) - \sin(\omega\pi/4)}{\omega^2} + \frac{2\sin(\omega\pi/4)\cos(\omega\pi/4)}{\omega} = \\ &= \frac{4\pi\omega\sin(\omega\pi/4)\cos(\omega\pi/4) - 8\sin^2(\omega\pi/4)}{\pi\omega^2} = X_0(\omega). \end{aligned}$$

Si osservi che  $X_0(\omega)$  è prolungabile per continuità in 0 e si pone:

$$X_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{4\pi\omega\sin(\omega\pi/4)\cos(\omega\pi/4) - 8\sin^2(\omega\pi/4)}{\pi\omega^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Dalla espressione di  $X_0(\omega)$  possiamo ricavare l'espressione dei coefficienti  $\beta_n$ :

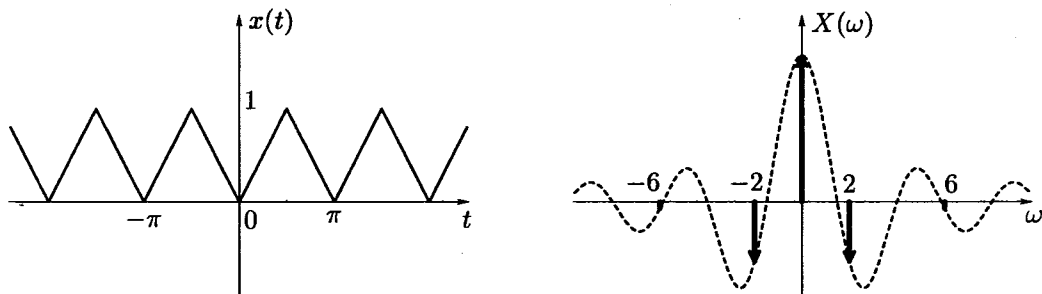
$$\begin{aligned} \beta_n &= \omega_0 X_0(n\omega_0) = 2X_0(2n) = 2\frac{8n\pi\sin(n\pi/2)\cos(n\pi/2) - 8\sin^2(n\pi/2)}{4\pi n^2} = \\ &= -2\frac{\sin^2(n\pi/2)}{\pi n^2} = 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad \text{se } n \neq 0 \\ \beta_0 &= 2\frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

e quindi la trasformata di Fourier di  $x(t)$  è data da:

$$X(\omega) = \pi\delta(\omega) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\delta(\omega - 2n), \quad (6.80)$$

si veda la figura 6.8.

La serie di Fourier di  $x(t)$ , per la (6.76) e la (6.77), è allora la seguente:

Fig. 6.8 L'onda triangolare e la sua trasformata  $X(\omega)$ .

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_n}{2\pi} e^{jn\omega_0} = \frac{1}{2} + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{((-1)^n - 1)}{\pi n^2} e^{jn\omega_0}.$$

Si confronti questo risultato, ottenuto attraverso il calcolo della trasformata, con quello che si era ottenuto nell'esempio 2.15. ■

**Esempio 6.36** Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale  $x(t)$  (onda quadra):

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 2m\pi \leq t < \pi + 2m\pi \\ & m \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{se } -\pi + 2m\pi \leq t < 2m\pi. \end{cases}$$

In figura 6.9 è rappresentata l'onda quadra. Si osservi che:

$$T = 2\pi, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 1, \quad f = \frac{1}{2\pi}.$$

Inoltre si noti che  $x(t)$  è reale e dispari e quindi la sua trasformata sarà immaginaria pura e dispari (vedi la (6.26)). Poniamo:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } -\pi \leq t < \pi \\ 0 & \text{se } t < -\pi \text{ o } t \geq \pi. \end{cases} \quad (6.81)$$

Utilizzando le funzioni "porta", la (6.81) si può scrivere:

$$x_0(t) = p_\pi(t - \pi/2) - p_\pi(t + \pi/2).$$

La trasformata di  $x_0(t)$  diviene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_0(t)] &= \mathcal{F}[p_\pi(t - \pi/2)] - \mathcal{F}[p_\pi(t + \pi/2)] = \\ &= e^{-j\omega\pi/2} \frac{2 \sin(\omega\pi/2)}{\omega} - e^{j\omega\pi/2} \frac{2 \sin(\omega\pi/2)}{\omega} = -2j \sin(\omega\pi/2) \frac{2 \sin(\omega\pi/2)}{\omega} = \\ &= -4j \frac{\sin^2(\omega\pi/2)}{\omega}. \end{aligned}$$

Si osservi che  $X_0(\omega)$  è prolungabile per continuità in 0 e si pone:

$$X_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} -4j \frac{\sin^2(\omega\pi/2)}{\omega} = 0.$$

Dalla espressione di  $X_0(\omega)$  possiamo ricavare l'espressione dei coefficienti  $\beta_n$ :

$$\begin{aligned} \beta_n &= \omega_0 X_0(n\omega_0) = X_0(n) = -4j \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n} = \\ &= -4j \frac{((-1)^n - 1)}{(-2)n} = \frac{2j((-1)^n - 1)}{n} \quad \text{se } n \neq 0 \\ \beta_0 &= 0 \end{aligned}$$

e quindi la trasformata di Fourier di  $x(t)$  è data da:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{2j((-1)^n - 1)}{n} \delta(\omega - n), \quad (6.82)$$

si veda la figura 6.9.

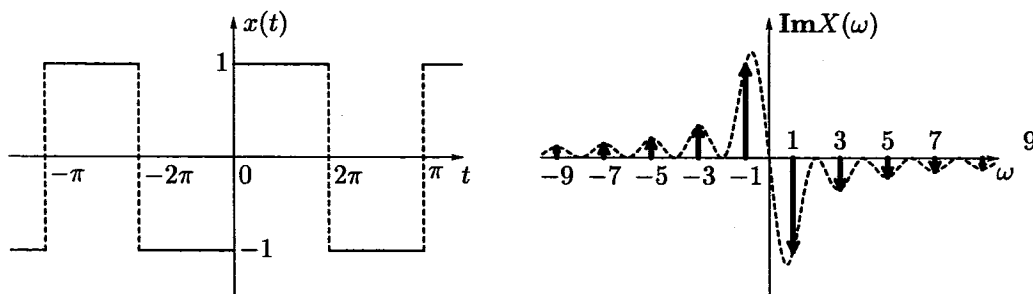


Fig. 6.9 L'onda quadra e  $\text{Im}X(\omega)$ .

La serie di Fourier di  $x(t)$ , per la (6.76) e la (6.77), è allora la seguente:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_n}{2\pi} e^{jn\omega_0} = \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{2j((-1)^n - 1)}{n} e^{jn}.$$

Si confronti questo risultato, ottenuto attraverso il calcolo della trasformata, con quello che si era ottenuto nell'esempio 2.16. ■

**Esempio 6.37** Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale  $x(t)$  (onda a dente di sega):

$$x(t) = t - 2m \quad 2m \leq t < 2m + 2.$$

In figura 6.10 è rappresentata l'onda a dente di sega. Si osservi che:

$$T = 2, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad f = \frac{1}{2}.$$

Inoltre si noti che  $x(t)$  è reale, ma non è né pari né dispari. Tuttavia, se si trasla di 1 verso il basso il segnale  $x(t)$  si ottiene un segnale dispari, dunque, eccetto il coefficiente  $\beta_0$ , ci si aspetta che i coefficienti  $\beta_n$  siano immaginari puri e  $\beta_n = -\beta_{-n}$  (vedi la (6.26)). Poniamo:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{se } t < 0 \text{ o } t \geq 2. \end{cases} \quad (6.83)$$

Utilizzando le funzioni "porta", la (6.83) si può scrivere:

$$x_0(t) = t[u(t) - u(t-2)] = tp_2(t-1) = (t-1)p_2(t-1) + p_2(t-1).$$

La trasformata di  $x_0(t)$  diviene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x_0(t)] &= \mathcal{F}[tp_2(t-1)] = \mathcal{F}[(t-1)p_2(t-1) + p_2(t-1)] = \\ &= e^{-j\omega} j \mathcal{F}[-jtp_2(t)] + e^{-j\omega} \mathcal{F}[p_2(t)] = e^{-j\omega} j \frac{d}{d\omega} \frac{2 \sin \omega}{\omega} + e^{-j\omega} \frac{2 \sin \omega}{\omega} = \\ &= j e^{-j\omega} \frac{2\omega \cos \omega - 2 \sin \omega}{\omega^2} + e^{-j\omega} \frac{2 \sin \omega}{\omega}. \end{aligned}$$

Si osservi che  $X_0(\omega)$  è prolungabile per continuità in 0 e si pone:

$$X_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[ j e^{-j\omega} \frac{2\omega \cos \omega - 2 \sin \omega}{\omega^2} + e^{-j\omega} \frac{2 \sin \omega}{\omega} \right] = 2.$$

Dalla espressione di  $X_0(\omega)$  possiamo ricavare l'espressione dei coefficienti  $\beta_n$ :

$$\begin{aligned} \beta_n &= \omega_0 X_0(n\omega_0) = \pi X_0(n\pi) = \\ &= j\pi e^{-jn\pi} \frac{2n\pi \cos n\pi - 2 \sin n\pi}{n^2 \pi^2} + \pi e^{-jn\pi} \frac{2 \sin n\pi}{n\pi} = j\pi \frac{2}{n\pi} = \frac{2j}{n} \quad \text{se } n \neq 0 \\ \beta_0 &= 2\pi, \end{aligned}$$

e quindi la trasformata di Fourier di  $x(t)$  è data da:

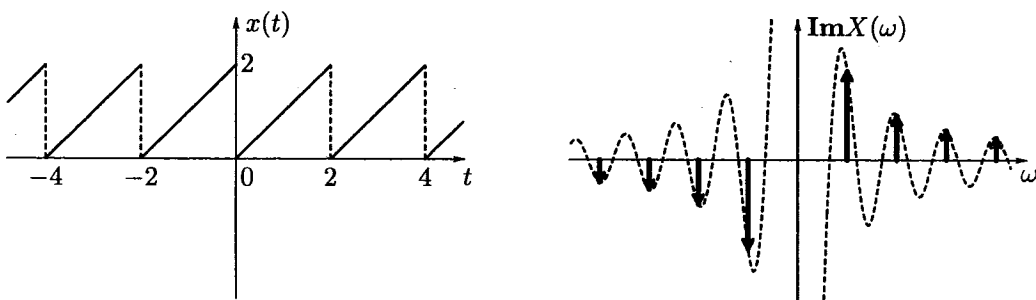
$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{2j}{n} \delta(\omega - n\pi), \quad (6.84)$$

si veda la figura 6.10.

La serie di Fourier di  $x(t)$ , per la (6.76) e la (6.77), è allora la seguente:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_n}{2\pi} e^{jn\omega_0} = 1 + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{2j}{n} e^{jn\pi}.$$

Si confronti questo risultato, ottenuto attraverso il calcolo della trasformata, con quello che si era ottenuto nell'esempio 2.17. ■

Fig. 6.10 L'onda a dente di sega e  $\text{Im}X(\omega)$ .

**Esempio 6.38** Si riottienga la trasformata di Fourier del treno di impulsi  $s_1(t)$ , con ragionamenti analoghi a a quelli degli esempi 6.35, 6.36 e 6.37:

$$x(t) = s_1(t) = \cdots + \delta(t+n) + \cdots + \delta(t+3) + \delta(t+2) + \delta(t+1) + \\ + \delta(t) + \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3) + \cdots + \delta(t-n) + \cdots$$

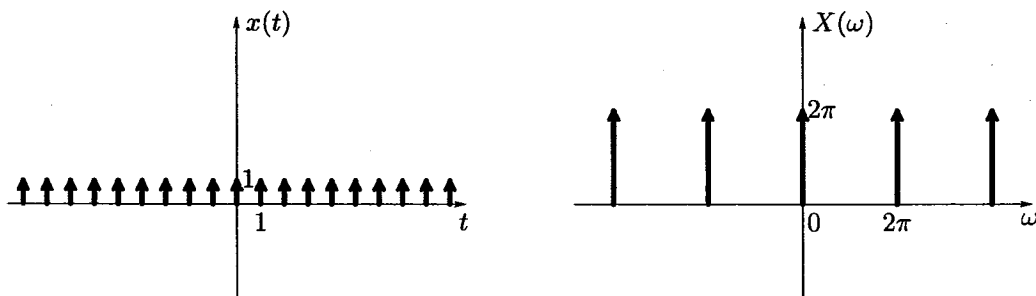


Fig. 6.11 Il treno di impulsi e la sua trasformata.

In figura 6.11 è rappresentato il treno di impulsi. Si osservi che:

$$T = 1, \quad \omega_0 = 2\pi, \quad f = 1.$$

Inoltre si noti che  $s_1(t)$  è reale e pari, e quindi per la (6.25) la sua trasformata sarà reale e pari. Poniamo:

$$x_0(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{se } t < 0 \text{ o } t \geq 1. \end{cases} \quad (6.85)$$

La (6.85) ha la seguente espressione:

$$x_0(t) = \delta(t).$$

La trasformata di  $x_0(t)$  è dunque:

$$\mathcal{F}[x_0(t)] = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1.$$

Dal fatto che  $X_0(\omega)$  è costante ricaviamo subito che i coefficienti  $\beta_n$  sono:

$$\beta_n = \omega_0 X_0(n\omega_0) = 2\pi X_0(2n\pi) = 2\pi,$$

per ogni  $n$ , e quindi la trasformata di Fourier di  $s_1(t)$  è data da:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - 2\pi n). \quad (6.86)$$

La (6.86) è trasformata del segnale  $s_1(t)$ , che non è una funzione, e quindi non ha senso in termini stretti porsi la questione relativa alla serie di Fourier di  $s_1(t)$ . Tuttavia in termini formali potremmo scrivere la serie di Fourier con i coefficienti:

$$c_n = \frac{\beta_n}{2\pi} = 1,$$

e si ha:

$$s_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_n}{2\pi} e^{jn\omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2n\pi}.$$

La convergenza di questa serie è di tipo distribuzionale. Si vedano, a questo riguardo, i grafici della figura 2.12, con il relativo esempio, nel paragrafo sui polinomi di Fourier. ■

**Esempio 6.39** Si ottenga la trasformata di Fourier del seguente segnale  $x(t)$  (costituito da archi di parabole):

$$x(t) = \begin{cases} (t+2-4m)^2 & \text{se } -2+4m \leq t < -1+4m \\ 2-(t-4m)^2 & \text{se } -1+4m \leq t < 1+4m \\ (t-2-4m)^2 & \text{se } 1+4m \leq t < 2+4m. \end{cases} \quad (6.87)$$

Si noti che  $x(t)$  è reale e pari, per cui la sua trasformata risulterà, per la (6.25), reale e pari. Poniamo:

$$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } -2 \leq t < 2 \\ 0 & \text{se } t < -2 \quad \text{o} \quad t \geq 2. \end{cases} \quad (6.88)$$

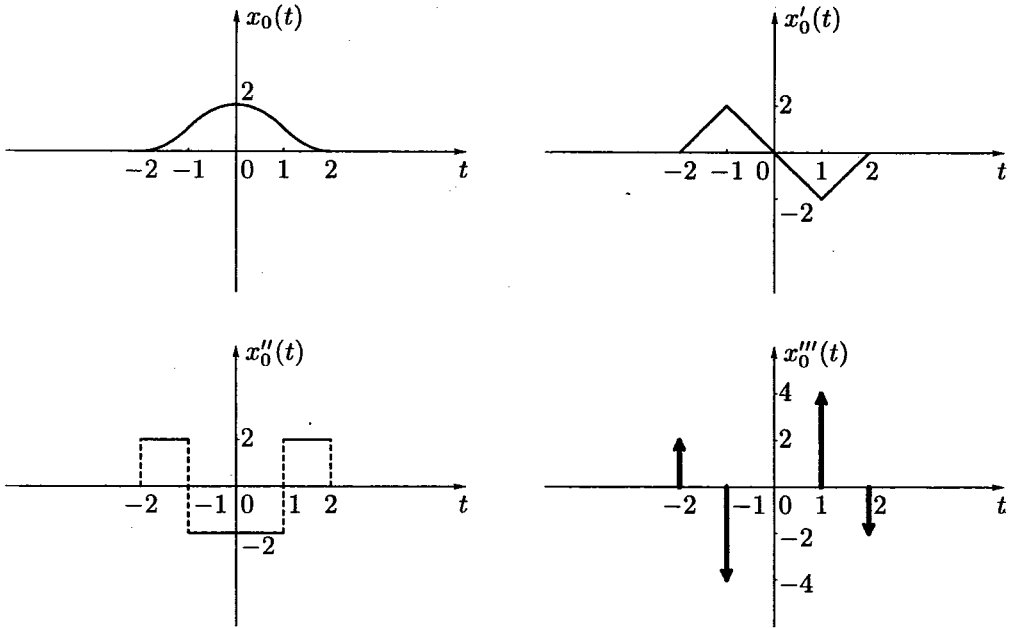
In figura 6.12 è rappresentata  $x_0(t)$ . Si osservi che:

$$T = 4, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad f = \frac{1}{4}.$$

Utilizzando le funzioni “porta”, la (6.88) si può scrivere:

$$x_0(t) = (t+2)^2 p_1(t+3/2) + (2-t^2) p_2(t) + (t-2)^2 p_1(t-3/2).$$

La funzione  $x_0(t)$  è continua e derivabile, formata da pezzi di polinomi di secondo grado, per cui la sua derivata distribuzionale  $x'_0(t)$  è una funzione continua e lineare a tratti, la  $x''_0(t)$  è una funzione costante a tratti e la derivata terza  $x'''_0(t)$  è somma di termini impulsivi:

Fig. 6.12 Il segnale  $x(t)$  e le sue derivate distribuzionali.

$$x_0'''(t) = 2\delta(t+2) - 4\delta(t+1) + 4\delta(t-1) - 2\delta(t-2), \quad (6.89)$$

vedi la figura 6.12. La trasformata di ambo i membri della (6.89) diviene:

$$\begin{aligned} (j\omega)^3 X_0(\omega) &= \mathcal{F}[x_0'''(t)] = \mathcal{F}[2\delta(t+2) - 4\delta(t+1) + 4\delta(t-1) - 2\delta(t-2)] = \\ &= 2e^{2j\omega} - 4e^{j\omega} + 4e^{-j\omega} - 2e^{-2j\omega} = 4j \sin 2\omega - 8j \sin \omega. \end{aligned} \quad (6.90)$$

La (6.90) è una equazione, che per l'osservazione 6.5, ha la seguente soluzione:

$$X_0(\omega) = \frac{4j \sin 2\omega - 8j \sin \omega}{(j\omega)^3}.$$

Si osservi che  $X_0(\omega)$  è prolungabile per continuità in 0 e si pone:

$$X_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{4 \sin 2\omega - 8 \sin \omega}{-\omega^3} = 4.$$

Dalla espressione di  $X_0(\omega)$  possiamo ricavare l'espressione dei coefficienti  $\beta_n$ :

$$\begin{aligned} \beta_n &= \omega_0 X_0(n\omega_0) = (\pi/2) X_0(n\pi/2) = \\ &= (\pi/2) \frac{4 \sin n\pi - 8 \sin(n\pi/2)}{-(n\pi/2)^3} = \frac{32 \sin(n\pi/2)}{n^3 \pi^2} \quad \text{se } n \neq 0 \\ \beta_0 &= 2\pi, \end{aligned}$$



e quindi la trasformata di Fourier di  $x(t)$  è data da:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2\pi\delta(\omega) + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{32 \sin(n\pi/2)}{n^3 \pi^2} \delta(\omega - n(\pi/2)) = \\ &= 2\pi\delta(\omega) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{32(-1)^k}{(2k+1)^3 \pi^2} \delta(\omega - (2k+1)(\pi/2)), \end{aligned} \quad (6.91)$$

si veda la figura 6.13.

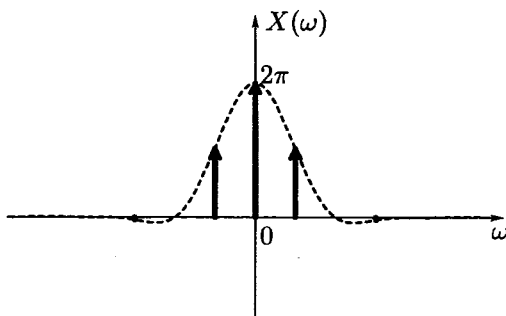


Fig. 6.13 La trasformata  $X(\omega)$ .

La serie di Fourier di  $x(t)$ , per la (6.76) e la (6.77), è allora la seguente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_n}{2\pi} e^{jn\omega_0} = 1 + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \frac{16 \sin(n\pi/2)}{n^3 \pi^3} e^{jn\pi/2} = \\ &= 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{16(-1)^k}{(2k+1)^3 \pi^3} e^{j(2k+1)(\pi/2)}. \end{aligned}$$

■

### 6.8.3 Il fenomeno di Gibbs

Nel capitolo dedicato alle serie di Fourier abbiamo presentato due paragrafi sulla convergenza puntuale e sulla convergenza uniforme. Si comprendeva come nei punti di discontinuità di una funzione periodica  $x(t)$  vi sono delle difficoltà nella convergenza della sua serie di Fourier. Se  $t_0$  è un punto di discontinuità di tipo salto per  $x(t)$  ovvero:

$$x(t) = x_c(t) + [x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0), \quad (6.92)$$

con  $x_c(t)$  funzione continua in  $t_0$ , la serie di Fourier converge puntualmente, in  $t_0$ , al punto medio del salto:  $(1/2)[x(t_0^+) - x(t_0^-)]$ . Inoltre, in nessun intorno di  $t_0$  la convergenza è uniforme. In realtà, nell'intorno del punto di discontinuità  $t_0$ , si presenta anche il fenomeno di Gibbs. Esso consiste nel fatto che, anche per valori grandi di  $n$ , il polinomio

di Fourier presenta delle perturbazioni vicino a  $t_0$  dell'ordine del 9% del salto. Ciò significa che se

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t},$$

l'errore che si commette, sostituendo il polinomio di Fourier di ordine  $n$  a  $x(t)$ ,

$$|x(t) - \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{jk\omega_0 t}|, \quad (6.93)$$

con  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  non è più piccolo di  $(9/100)[x(t_0^+) - x(t_0^-)]$  anche per  $n$  grande.

La spiegazione di questo fenomeno si può dare in modo abbastanza semplice con lo strumento delle trasformate. Infatti il polinomio di Fourier:

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

può essere pensato come la antitrasformata seguente:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \sum_{k=-n}^{+n} c_k 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) \right] = \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n 2\pi \delta(\omega - n\omega_0) \right) \cdot p_{(2n+1)\omega_0}(\omega) \right] = \\ &= \mathcal{F}^{-1} [X(\omega) \cdot p_{(2n+1)\omega_0}(\omega)]. \end{aligned}$$

Nella formula precedente la somma finita di delta di Dirac traslate è stata pensata come una somma infinita moltiplicata per una porta. Per comodità indichiamo:

$$2a = (2n + 1)\omega_0.$$

Per la proprietà della (6.27) si ha:

$$x_n(t) = x(t) * \mathcal{F}^{-1}[p_{2a}(\omega)] = x(t) * \frac{\sin at}{\pi t}, \quad (6.94)$$

ora, per la (6.92), la (6.94) diviene:

$$\begin{aligned} x_n(t) &= [x_c(t) + [x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0)] * \frac{\sin at}{\pi t} = \\ &= x_c(t) * \frac{\sin at}{\pi t} + [x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0) * \frac{\sin at}{\pi t}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Cerchiamo di valutare l'errore descritto nella (6.93):

$$|x(t) - x_n(t)| = |[x_c(t) + [x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0)] +$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ x_c(t) * \frac{\sin at}{\pi t} + [x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0) * \frac{\sin at}{\pi t} \right\} \Big| = \\
& \leq |x_c(t) - x_c(t) * \frac{\sin at}{\pi t}| + \\
& + |[x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0) - [x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0) * \frac{\sin at}{\pi t}|.
\end{aligned} \quad (6.96)$$

Il primo addendo nell'ultimo membro della (6.96) non presenta difficoltà, poiché, essendo  $x_c(t)$  continua, la convergenza, per  $n \rightarrow \infty$ , è uniforme. Il nostro problema si riduce dunque a studiare l'andamento del termine:

$$[x(t_0^+) - x(t_0^-)]u(t - t_0) * \frac{\sin at}{\pi t} = [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau - t_0) \frac{\sin a(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau. \quad (6.97)$$

Indichiamo la funzione di  $t$  della (6.97), nel modo seguente:

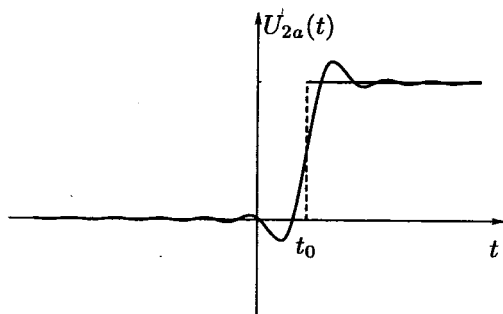


Fig. 6.14 La funzione  $U_{2a}(t)$ .

$$U_{2a}(t) = [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau - t_0) \frac{\sin a(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau. \quad (6.98)$$

Con la sostituzione  $a(t - \tau) = y$ , la (6.98) diviene:

$$\begin{aligned}
U_{2a}(t) &= [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \left[ \int_{t_0}^t \frac{\sin a(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau + \int_t^{+\infty} \frac{\sin a(t - \tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau \right] = \\
&= [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \left[ \int_0^{a(t-t_0)} \frac{\sin y}{\pi y} dy + \int_{-\infty}^0 \frac{\sin y}{\pi y} dy \right] = \\
&= [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(a(t - t_0)) \right),
\end{aligned} \quad (6.99)$$

avendo posto:

$$\text{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin y}{y} dy.$$

L'andamento della funzione  $U_{2a}(t)$  è mostrato nel grafico 6.14. La funzione  $U_{2a}(t)$  ha il suo primo massimo a destra di  $t_0$  per  $t_1 = t_0 + \pi/a$  e si ha che:

$$U_{2a}(t_1) = [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) \right) = [x(t_0^+) - x(t_0^-)] \cdot 1.09. \quad (6.100)$$

Questo valore del massimo è indipendente da  $a$ , dunque anche quando  $a$  è molto grande, cioè quando  $x_n(t)$  tende a  $x(t)$  e  $t_1$  tende a  $t_0$ , si ha un errore assoluto nell'intorno del punto di discontinuità  $t_0$  che è di circa il 9% del salto. ■

# 7

## Trasformata di Laplace

In questo capitolo ci occupiamo della trasformata di Laplace bilatera, ovvero di quella espressione della trasformata che tiene conto anche dei valori che il segnale  $x(t)$  da trasformare assume per  $t < 0$ . Osserveremo poi che con poche modifiche si può ottenere la trasformata unilatera.

### 7.1 Definizione e dominio di $\mathcal{L}$

Nella definizione seguente la formula (7.1) è valida in ambito distribuzionale, in quanto utilizza la trasformata di Fourier di distribuzioni. Tuttavia spesso si ha a che fare con segnali che sono funzioni e la cui trasformata può essere calcolata con un integrale.

**Definizione 7.1** Sia  $x(t)$  una distribuzione, noi indichiamo con  $X(s)$  la trasformata di Laplace (bilatera) di  $x(t)$  che è espressa dalla seguente relazione:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}](\omega) \quad (7.1)$$

per quei valori di  $s = \sigma + j\omega$ , per i quali  $x(t)e^{-\sigma t}$  ha trasformata di Fourier, ovvero  $x(t)e^{-\sigma t}$  è una distribuzione temperata. Se  $x(t)e^{-\sigma t}$  è una funzione integrabile nell'intervallo  $]-\infty, +\infty[$ , l'espressione (7.1) della trasformata di Laplace diviene:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt. \quad (7.2)$$

**Osservazione 7.1** Si tenga presente che la scrittura (7.2) mediante un integrale è spesso utilizzata per indicare delle trasformate che hanno significato solo in ambito distribuzionale. ■

Il fatto che nella definizione precedente si sia dovuto parlare di quei valori di  $s$  per cui le espressioni (7.1) o (7.2) hanno significato, ci introduce alla questione che riguarda il dominio della trasformata di Laplace.

## Dominio della trasformata di Laplace

È importante riflettere sull'insieme dei numeri complessi  $s$  per i quali  $x(t)e^{-\sigma t}$  è a crescita lenta o è integrabile, ovvero su quei valori di  $s$  per i quali l'espressione (7.1) o l'espressione (7.2) è definita.

**Definizione 7.2** Si dice dominio della trasformata di Laplace l'interno dell'insieme dei valori  $s$  per i quali le espressioni (7.1) o (7.2) sono definite. Il dominio della trasformata  $X(s)$  di  $x(t)$  si indica nel modo seguente:

$$\text{dom } \mathcal{L}X(s).$$

Il dominio fa parte della definizione di trasformata, in quanto esplicita la regione del piano complesso in cui le espressioni (7.1) o (7.2) hanno significato. ■

Per comprendere bene il senso della definizione precedente, richiamiamo il concetto di interno di un insieme, ricordando che l'interno di un insieme è costituito dall'insieme stesso privato del suo bordo. Nel caso che l'insieme sia dato da una striscia del piano delimitata da due rette parallele, il suo interno è formato dalla striscia stessa privata delle due rette che la delimitano.

È facile osservare che il dominio della trasformata di Laplace deve essere costituito da strisce verticali, in quanto la crescita lenta o la integrabilità di  $x(t)e^{-\sigma t}$  dipende da  $\sigma = \text{Re } s$  e non da  $\omega = \text{Im } s$ . Si può però ancora migliorare questa indicazione dimostrando che il dominio è formato da una unica striscia verticale, come mostra la proposizione seguente.

**Proposizione 7.1** Il dominio della trasformata di Laplace (bilatera) è formato da una striscia verticale del piano complesso o da un semipiano o da un piano.

**Dimostrazione** Se  $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$  e  $s_2 = \sigma_2 + j\omega_2$  sono due valori complessi del  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$  e se  $\sigma_1 < \sigma_2$ , preso un  $s = \sigma + j\omega$  con

$$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2,$$

abbiamo che:

$$x(t)e^{-\sigma t} = x(t)e^{-\sigma_1 t}e^{-(\sigma-\sigma_1)t} \quad (7.3)$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = x(t)e^{-\sigma_2 t}e^{(\sigma_2-\sigma)t}. \quad (7.4)$$

Ora la (7.3) permette di mostrare che  $x(t)e^{-\sigma t}$  è a crescita lenta per  $t$  che tende a  $+\infty$ ; infatti  $x(t)e^{-\sigma_1 t}$  è a crescita lenta per ipotesi e  $e^{-(\sigma-\sigma_1)t}$  tende a zero, per  $t \rightarrow +\infty$ , in quanto  $\sigma - \sigma_1 > 0$ . La (7.4) permette di mostrare che  $x(t)e^{-\sigma t}$  è a crescita lenta per  $t$  che tende a  $-\infty$ ; infatti  $x(t)e^{-\sigma_2 t}$  è a crescita lenta per ipotesi e  $e^{(\sigma_2-\sigma)t}$  tende a zero, per  $t \rightarrow -\infty$ , in quanto  $\sigma_2 - \sigma > 0$ . Nel caso in cui  $x(t)e^{-\sigma_1 t}$  e  $x(t)e^{-\sigma_2 t}$  siano integrabili, osservando che:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt &= \int_{-\infty}^0 x(t)e^{-\sigma_2 t}e^{(\sigma_2-\sigma)t}e^{-j\omega t} dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} x(t)e^{-\sigma_1 t}e^{-(\sigma-\sigma_1)t}e^{-j\omega t} dt, \end{aligned}$$

e facendo delle considerazioni analoghe alle precedenti possiamo concludere che  $x(t)e^{-\sigma t}$  è integrabile. ■

Spesso nelle applicazioni i segnali “iniziano” ad un certo istante  $t_0 = a$  ed in questo caso il dominio è sempre o un semipiano destro o tutto il piano complesso, come mostra la seguente proposizione.

**Proposizione 7.2** *Se il segnale  $x(t)$  è nullo per  $t < a$  (con  $a \in \mathbb{R}$ ), il dominio di  $X(s)$  è formato dalle  $s$  complesse che hanno parte reale maggiore di un opportuno  $\sigma'$  e non si esclude che  $\sigma'$  possa essere uguale a  $-\infty$ , nel qual caso il dominio della trasformata di Laplace è tutto il piano complesso.*

**Dimostrazione** In effetti se  $s_1 = \sigma_1 + j\omega_1$  è nel dominio della trasformata di Laplace, per ogni numero complesso  $s = \sigma + j\omega$  con  $\sigma > \sigma_1$ , si ottiene che  $x(t)e^{-\sigma t}$  è a crescita lenta, per  $t \rightarrow -\infty$ , poiché  $x(t)$  è nullo per  $t < a$ , ed è a crescita lenta, per  $t \rightarrow +\infty$ , per l'equazione (7.3). ■

Il valore  $\sigma'$  che compare nella proposizione precedente ha un ruolo importante nella delimitazione del dominio e perciò ne precisiamo la definizione.

**Definizione 7.3** *Nel caso di segnali  $x(t)$  nulli per  $t$  minore di un opportuno numero reale  $a$ , l'estremo inferiore  $\sigma'$  delle  $\sigma = \operatorname{Re} s$ , con  $s$  nel dominio della trasformata di Laplace, è detto ascissa di convergenza della trasformata di Laplace.* ■

Si tenga presente che non si è escluso che  $\sigma'$  sia uguale a  $-\infty$ . Inoltre è di grande rilievo la seguente proposizione che in certa misura giustifica il fatto che una parte del nostro libro è stata dedicata alle funzioni analitiche.

**Proposizione 7.3** *La trasformata di Laplace  $X(s)$  del segnale  $x(t)$  è una funzione analitica nel suo dominio  $\operatorname{dom}_{\mathcal{L}} X(s)$ .* ■

Presentiamo ora i primi importanti esempi di trasformata di Laplace.

**Esempio 7.1** *Si calcoli la trasformata di Laplace della porta  $p_T(t)$  (vedi figura 7.1).*

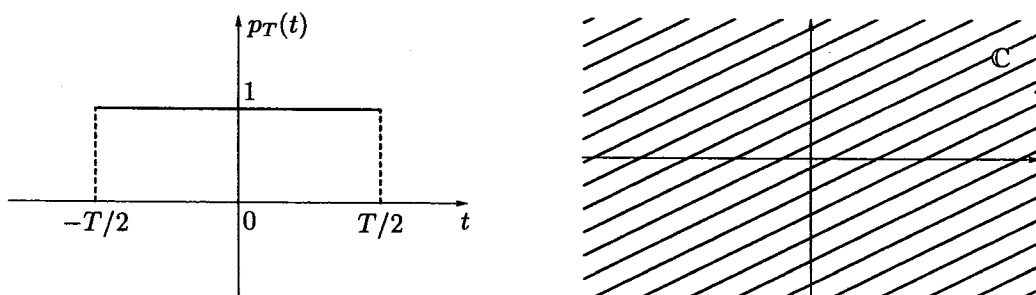


Fig. 7.1 La porta e il dominio della sua trasformata di Laplace.

La trasformata richiesta può essere ottenuta con il calcolo del seguente integrale:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[p_T(t)] &= \mathcal{L}[u(t + T/2) - u(t - T/2)] = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t + T/2) - u(t - T/2)] e^{-st} dt = \\
 &= \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{-T/2}^{+T/2} = \\
 &= -\frac{1}{s} e^{-sT/2} + \frac{1}{s} e^{sT/2} = \frac{2 \sinh(sT/2)}{s}.
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

L'integrale improprio è stato ricondotto a un integrale ordinario a causa del fatto che il segnale  $p_T(t)$  è nullo all'esterno di un intervallo limitato. È stato così possibile fare il calcolo della trasformata per ogni valore di  $s \in \mathbb{C}$  e quindi il dominio della trasformata, calcolata nella (7.5), è tutto il piano complesso. ■

**Esempio 7.2** Si calcoli la trasformata di Laplace del gradino unitario  $u(t)$  (vedi la figura 7.2).

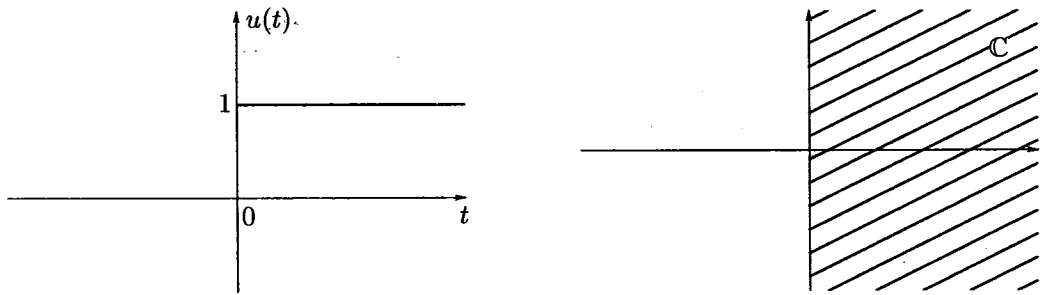


Fig. 7.2 Il gradino e il dominio della sua trasformata di Laplace.

A differenza di quanto abbiamo fatto per la trasformata di Fourier di  $u(t)$ , la trasformata di Laplace può essere ottenuta con il calcolo di un integrale:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \\
 &= \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Il calcolo del limite nella (7.6) dà come risultato zero solo se la parte reale di  $s$  è strettamente maggiore di zero; infatti per la formula di Eulero, per  $t \rightarrow +\infty$ :

$$e^{-st} = e^{-\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \rightarrow 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma > 0.$$

È stato così possibile fare il calcolo della trasformata per quei valori di  $s \in \mathbb{C}$  che hanno parte reale strettamente positiva e quindi il dominio della trasformata, calcolata nella (7.6), è il semipiano complesso delle  $\text{Re } s > 0$ . Alla stessa conclusione circa il



dominio della trasformata di Laplace  $X(s)$  di  $u(t)$  si poteva pervenire riflettendo sul fatto che  $X(s)$ , per la proposizione 7.2, ha come dominio un semipiano destro e, per la proposizione 7.3, in tale dominio è analitica. Dunque il dominio di  $X(s)$  deve essere un semipiano destro che non contiene singolarità di  $X(s)$ . Ora  $X(s) = 1/s$  ha una sola singolarità polare in 0 e quindi il suo dominio risulta essere l'insieme dei numeri complessi  $s$  con  $\operatorname{Re} s > 0$ . ■

**Esempio 7.3** Si calcoli la trasformata di Laplace della distribuzione delta di Dirac  $\delta(t)$  (vedi la figura 7.3).

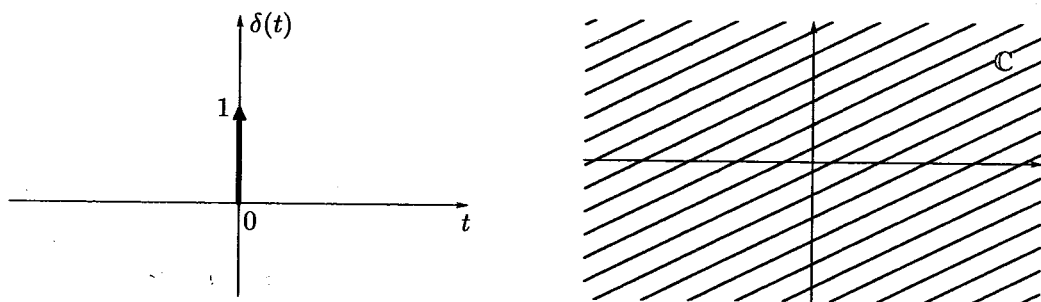


**Fig. 7.3** La  $\delta(t)$  e il dominio della sua trasformata di Laplace.

La trasformata richiesta deve essere calcolata in ambito distribuzionale mediante le trasformate di Fourier. Noi usiamo il simbolo di integrale, tenendo presente quanto è stato detto nella osservazione 7.1:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \mathcal{F}[\delta(t) e^{-\sigma t}] = \mathcal{F}[\delta(t)] = 1.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Il calcolo è stato fatto qualunque sia il valore di  $\sigma$  e quindi il dominio della trasformata, calcolata nella (7.7), è tutto il piano complesso. D'altronde si può anche osservare che la  $\delta(t)$  è nulla per  $t < 0$  e quindi per la proposizione 7.2 la sua trasformata deve avere come dominio un semipiano destro o tutto  $\mathbb{C}$ . Ora essendo  $\mathcal{L}[\delta(t)]$  uguale alla funzione costante 1 essa è analitica in tutto il piano complesso e quindi si può congetturare che  $\mathbb{C}$  sia il suo dominio. ■

## 7.2 Proprietà di $\mathcal{L}$

Negli esempi del paragrafo precedente si è fatto il calcolo di alcune trasformate fondamentali mediante la definizione della trasformata di Laplace. Ora, a parte i primi esempi, il modo con cui si calcolano le trasformate non è quello di applicare la definizione, ma di ricondursi a trasformate note mediante l'uso delle proprietà. La conoscenza e l'uso delle proprietà della trasformata di Laplace ha perciò una grande importanza e ad essa è dedicato il presente paragrafo.

## 1) Linearità

Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due segnali aventi trasformata di Laplace data da  $X(s)$  e  $Y(s)$  e con dominio  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$  e  $\text{dom } \mathcal{L}Y(s)$  rispettivamente e siano  $a$  e  $b$  due costanti complesse, allora:

$$\boxed{\mathcal{L}[ax(t) + by(t)] = aX(s) + bY(s)} \quad (7.8)$$

e il dominio di  $aX(s) + bY(s)$  include o coincide con l'intersezione di  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$  e di  $\text{dom } \mathcal{L}Y(s)$ .

Nel caso di segnali per i quali la trasformata di Laplace si possa ricavare con la formula (7.2), la proprietà di linearità dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [ax(t) + by(t)]e^{-st} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-st} dt$$

dimostra la proprietà.

**Esempio 7.4** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale:  $3u(t) + 5\delta(t)$ .

Utilizzando la linearità (7.8) e gli esempi 7.2 e 7.3 si ha:

$$\mathcal{L}[3u(t) + 5\delta(t)] = 3\mathcal{L}[u(t)] + 5\mathcal{L}[\delta(t)] = 3\frac{1}{s} + 5$$

con dominio il semipiano delle  $s$  con parte reale maggiore di 0. ■

## 2) Traslazione in $t$

Se  $x(t)$  ha trasformata  $X(s)$  con dominio  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$  e  $t_0$  è un valore assegnato della variabile  $t$ , si ha:

$$\boxed{\mathcal{L}[x(t - t_0)] = X(s)e^{-t_0s}} \quad (7.9)$$

con dominio uguale a  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$ .

Nel caso di segnali per i quali la trasformata di Laplace si possa ricavare con la formula (7.2), un cambiamento di variabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-st} dt = e^{-t_0s} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-s(t-t_0)} d(t - t_0) = e^{-t_0s} X(s)$$

dimostra la proprietà.

**Esempio 7.5** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale:  $u(t - \pi)$ .

Utilizzando la proprietà di traslazione nel tempo (7.9) e la trasformata calcolata nell'esempio 7.2, si ha:

$$\mathcal{L}[u(t - \pi)] = e^{-\pi s} \mathcal{L}[u(t)] = e^{-\pi s} \frac{1}{s}$$

che conclude l'esempio. ■

### 3) Traslazione in $s$

Sia  $x(t)$  con trasformata  $X(s)$  e dominio  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$  e sia  $s_0$  un valore assegnato della variabile  $s$ ; si ha:

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t} x(t)] = X(s - s_0) \quad (7.10)$$

con dominio formato dalle  $s$  tali per cui  $\text{Re}(s - s_0) \in \text{dom } \mathcal{L}X(s)$ .

Nel caso di segnali per i quali la trasformata di Laplace si possa calcolare con la formula (7.2), basta osservare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s_0 t} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(s-s_0)t} dt = X(s - s_0).$$

**Esempio 7.6** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale:  $u(t)e^{s_0 t}$ .

Utilizzando la proprietà di traslazione in  $s$  (7.10) e l'esempio 7.2, si ha:

$$\mathcal{L}[u(t)e^{s_0 t}] = \frac{1}{s - s_0}$$

con dominio dato dalle  $s$  tali per cui  $\text{Re } s > \text{Re } s_0$ . ■

### 4) Riscaldamento

Se  $x(t)$  ha trasformata  $X(s)$  con dominio  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$  e  $a$  è una costante reale, si ha:

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad (7.11)$$

con dominio dato dalle  $s$  tali per cui  $\text{Re}(s/a)$  appartiene a  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$ .

Se la trasformata di Laplace si può calcolare con la formula (7.2), il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-st} dt &= \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-su/a} du & \text{se } a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{+\infty}^{-\infty} x(u) e^{-su/a} du & \text{se } a < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-su/a} du = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

dimostra la proprietà.

**Esempio 7.7** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale  $p_2(\pi t)$ .

Utilizzando la proprietà di riscaldamento (7.11) e l'esempio 7.1, si ha:

$$\mathcal{L}[p_2(\pi t)] = \frac{1}{\pi} \frac{2 \sinh(s/\pi)}{s/\pi}$$

e con ciò l'esempio risulta terminato. ■

### 5) Derivata in $t$

Sia  $x(t)$  con trasformata  $X(s)$  e dominio  $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$ ; la trasformata della derivata prima  $x'(t)$  di  $x(t)$ , è:

$$\boxed{\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s)} \quad (7.12)$$

con dominio  $\supseteq \text{dom } \mathcal{L}X$ .

Il dominio della trasformata di  $x'(t)$  può essere più grande del dominio di  $x(t)$ , in quanto la moltiplicazione di  $X$  per  $s$  può rendere apparente una eventuale singolarità polare del primo ordine nell'origine.

Facciamo un cenno di dimostrazione nel caso in cui, per ogni  $s$ ,  $x(t)e^{-st}$  sia integrabile e tenda a zero per  $t$  che tende a  $\pm\infty$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-st} dt = [x(t)e^{st}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-s)e^{-st} dt.$$

Per l'ipotesi fatta la parentesi quadra è nulla e quindi ne segue la (7.12).

**Esempio 7.8** Si calcoli la trasformata di Laplace del seguente segnale:

$$\frac{d}{dt}p_2(t).$$

Utilizzando la proprietà di derivata nel tempo (7.12) e l'esempio 7.1, si ha:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}p_2(t)\right] = s \frac{2 \sinh s}{s} = 2 \sinh s$$

e ciò termina l'esempio. ■

### 6) Derivata in $s$

Sia  $X(s)$  la trasformata di Laplace di  $x(t)$  e sia  $X'(s)$  la derivata prima di  $X(s)$ , si ha:

$$\boxed{\mathcal{L}[-tx(t)] = X'(s)} \quad \star \quad (7.13)$$

con dominio uguale a  $\text{dom } \mathcal{L}X$ .

Supponendo verificate le ipotesi che permettono di scambiare la derivazione con l'integrazione, la (7.13) può essere ottenuta derivando la formula di trasformazione:

$$\frac{d}{ds}X(s) = \frac{d}{ds} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} -tx(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[-tx(t)].$$

**Esempio 7.9** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale  $tu(t)$ .

Utilizzando la proprietà di derivata in  $s$  (7.13) e l'esempio 7.2 si ha:

$$\mathcal{L}[tu(t)] = -\mathcal{L}[-tu(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[u(t)] = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

con dominio formato dalle  $s$  con  $\text{Re} > 0$ . ■

## 7) Coniugazione

Indichiamo con  $x(t)$  un segnale nella variabile reale  $t$  a valori complessi, con  $X(s)$  la sua trasformata di Laplace e con  $x^*(t)$  il segnale complesso coniugato di  $x(t)$ , si ha:

$$\boxed{\mathcal{L}[x^*(t)] = X^*(s^*)} \quad (7.14)$$

con dominio uguale a  $\text{dom } \mathcal{L}X$ .

Quando la trasformata di Laplace si può calcolare con la formula (7.2), basta osservare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{-st} dt = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-s^*t} dt \right)^* = (X(s^*))^*.$$

**Esempio 7.10** Si calcoli la trasformata di Laplace del seguente segnale:

$$(u(t)e^{jt})^*.$$

Utilizzando le proprietà di traslazione in  $s$  (7.10) e di coniugazione (7.14) e l'esempio 7.2, si ha:

$$\mathcal{L}[(u(t)e^{jt})^*] = \left( \frac{1}{s^* - j} \right)^* = \frac{1}{s + j}$$

con dominio dato dalle  $s$  con parte reale maggiore di 0. ■

## 8) Realtà ed hermitianeità

Indichiamo con  $x(t)$  un segnale e con  $X(s)$  la sua trasformata di Laplace, si ha:

$$\boxed{x(t) \text{ reale} \iff X(s) \text{ hermitiana.}} \quad (7.15)$$

Infatti, ricordando che un segnale è reale se è uguale al suo complesso coniugato, si ha:

$$\begin{array}{lll} x(t) \text{ reale} & \iff & x(t) = x^*(t) \\ x(t) = x^*(t) & \iff & X(s) = X^*(s^*) \\ X(s) = X^*(s^*) & \iff & X(s) \text{ hermitiana.} \end{array}$$

Ricordiamo che una funzione analitica è hermitiana se e solo se assume valori reali per valori reali della variabile.

**Esempio 7.11** Il segnale  $p_2(t)$  è reale e la sua trasformata (vedi esempio 7.1)

$$\mathcal{L}[p_2(t)] = \frac{2 \sinh s}{s},$$

è hermitiana. ■

## 9) Convoluzione

Siano  $x(t)$  e  $y(t)$  due segnali con trasformate  $X(s)$  e  $Y(s)$  rispettivamente e domini  $\text{dom } \mathcal{L}X$  e  $\text{dom } \mathcal{L}Y$ , inoltre sia definito il prodotto di convoluzione  $x(t) * y(t)$  [vedi (5.56) e (5.61)], allora:

$$\boxed{\mathcal{L}[x(t) * y(t)] = X(s)Y(s)} \quad (7.16)$$

con dominio dato da  $\text{dom } \mathcal{L}X \cap \text{dom } \mathcal{L}Y$ .

Se la trasformata di Laplace si può calcolare con la formula (7.2) e la convoluzione sia espressa con un integrale convergente, il seguente calcolo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t) * y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau) d\tau \right) e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}e^{-s\tau} d(t-\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau Y(s) = X(s)Y(s) \end{aligned}$$

indica come si può dimostrare la proprietà.

**Esempio 7.12** Si calcoli la trasformata di Laplace del seguente prodotto di convoluzione:

$$u(t) * u(t).$$

Per la proprietà della trasformata della convoluzione (7.16), si ha:

$$\mathcal{L}[u(t) * u(t)] = \mathcal{L}[u(t)] \mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

con dominio formato dalle  $s$  con  $\text{Re } s > 0$ . ■

## 7.3 Esempi importanti di trasformata di Laplace

In questo paragrafo desideriamo presentare alcuni esempi importanti di trasformata di Laplace. Iniziamo con un segnale che è un esponenziale reale per  $t > 0$ .

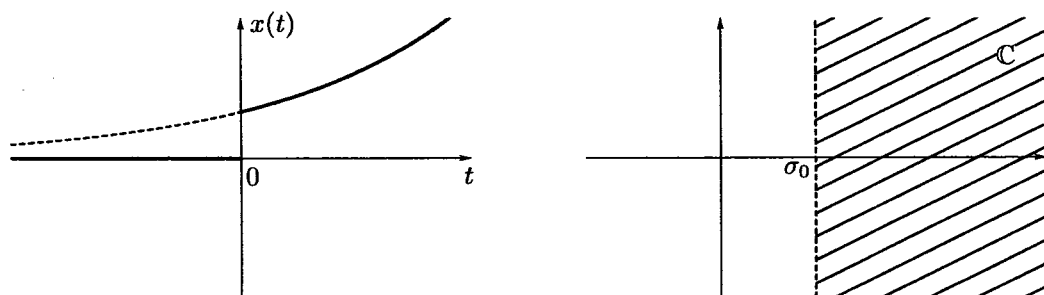
**Esempio 7.13** Si consideri il segnale

$$x(t) = u(t)e^{\sigma_0 t},$$

con  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$  (vedi figura 7.4 ove si è supposto  $\sigma_0 > 0$ ) e se ne calcoli la trasformata di Laplace.

Per la proprietà di traslazione nella variabile  $s$  si ha:

$$\mathcal{L}[u(t)e^{\sigma_0 t}] = \frac{1}{s - \sigma_0} = \frac{1}{(\sigma - \sigma_0) + j\omega},$$

Fig. 7.4 Trasformata di Laplace di  $u(t)e^{\sigma_0 t}$  e suo dominio.

con dominio  $\text{Re } s > \sigma_0$ , in quanto, se pensiamo all'integrale che definisce la trasformata, si ha che esso converge quando il parametro  $s$  è maggiore di  $\sigma_0$ ; inoltre si può osservare che la trasformata ottenuta ha un polo del primo ordine per  $s = \sigma_0$  ovvero che l'ascissa  $\sigma'$  di convergenza della trasformata è  $\sigma_0$ . ■

**Osservazione 7.2** Si osservi che, se  $\sigma_0$  è maggiore di 0, il segnale  $x(t) = u(t)e^{\sigma_0 t}$  non ha trasformata di Fourier, in quanto non è a crescita lenta. In questo caso il dominio della trasformata di Laplace di  $x(t)$  non contiene l'asse immaginario al suo interno né ha l'asse immaginario come bordo.

Se invece  $\sigma_0$  è minore di 0, il segnale  $x(t) = u(t)e^{\sigma_0 t}$  ha trasformata di Fourier, in quanto è a crescita lenta. In questo caso il dominio della trasformata di Laplace di  $x(t)$  contiene l'asse immaginario al suo interno. ■

Vediamo ora dei segnali, che per  $t > 0$ , sono dei segnali sinusoidali ovvero dei segnali che sono combinazioni di esponenziali complessi con all'esponente degli immaginari puri.

**Esempio 7.14** Si calcoli la trasformata di Laplace del seguente segnale:

$$x(t) = u(t) \sin \omega_0 t,$$

ove  $\omega_0$  è una costante reale.

Interpretiamo, dapprima, il  $\sin \omega_0 t$  come combinazione di esponenziali complessi, poi utilizziamo la proprietà di linearità e infine la proprietà di traslazione nella variabile  $s$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t) \sin \omega_0 t] &= \mathcal{L}[u(t) \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}] = \\ &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[u(t) e^{j\omega_0 t}] - \frac{1}{2j} \mathcal{L}[u(t) e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1}{(s - j\omega_0)} - \frac{1}{2j} \frac{1}{(s + j\omega_0)} = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Se avessimo scritto l'integrale, che definisce la trasformata di Laplace di  $x(t)$ , avremmo potuto facilmente osservare che tale integrale converge se  $\text{Re } s$  è maggiore di 0, ovvero

il dominio della trasformata di Laplace di  $x(t)$  è il semipiano destro a partire dall'asse immaginario, vedi figura 7.5. La trasformata ottenuta è una funzione analitica con due poli semplici sull'asse immaginario in  $\pm j\omega_0$ , ovvero l'ascissa  $\sigma'$  di convergenza della trasformata è 0. ■

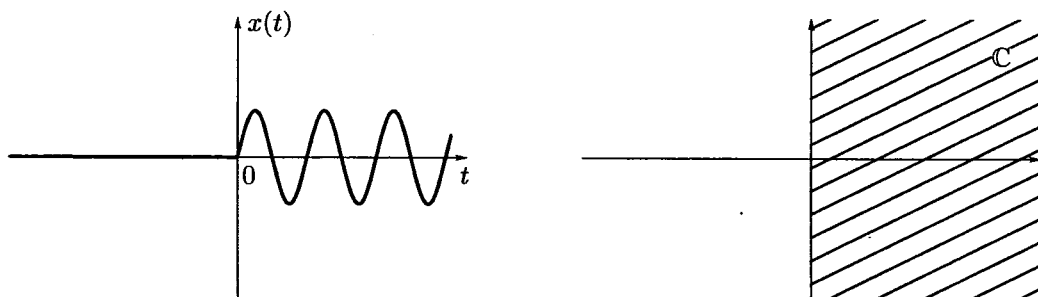


Fig. 7.5 Trasformata di Laplace di  $u(t) \sin \omega_0 t$  e suo dominio.

**Esempio 7.15** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale

$$x(t) = u(t) \cos \omega_0 t,$$

ove  $\omega_0$  è una costante reale.

Analogamente all'esempio precedente abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t) \cos \omega_0 t] &= \mathcal{L}[u(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}] = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[u(t) e^{j\omega_0 t}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[u(t) e^{-j\omega_0 t}] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(s - j\omega_0)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s + j\omega_0)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2s}{(s^2 + \omega_0^2)} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Il dominio della trasformata di Laplace di  $x(t)$  è il semipiano destro a partire dall'asse immaginario, vedi figura 7.6. La trasformata ottenuta è una funzione analitica con due poli semplici sull'asse immaginario nei punti  $\pm j\omega_0$  ovvero l'ascissa  $\sigma'$  di convergenza della trasformata è 0. ■

**Osservazione 7.3** I segnali considerati nei due esempi precedenti hanno anche trasformata di Fourier, ma questa ha dei termini impulsivi. Si osservi che il dominio della trasformata di Laplace non contiene l'asse immaginario, tuttavia ha l'asse immaginario come bordo. ■

Passiamo ora a considerare la trasformata di segnali che, per  $t > 0$ , sono dei segnali *cisoidali*, cioè dei segnali sinusoidali modulati in ampiezza da esponenziali reali.

**Esempio 7.16** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale



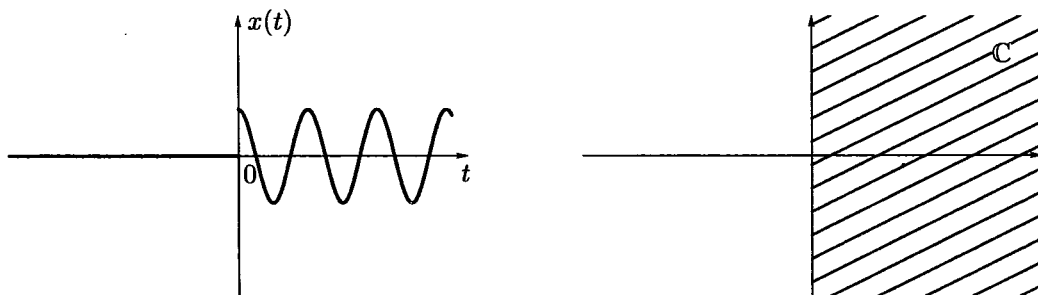


Fig. 7.6 Trasformata di Laplace di  $u(t) \cos \omega_0 t$  e suo dominio.

$$x(t) = u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t,$$

ove  $\sigma_0$  e  $\omega_0$  sono due costanti reali.

Interpretiamo, di nuovo, il segnale  $e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t$  come combinazione di esponenziali complessi, poi utilizziamo la proprietà di linearità e infine la proprietà di traslazione nella variabile  $s$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t] &= \mathcal{L}[u(t)e^{\sigma_0 t} \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}] = \\ &= \frac{1}{2j} \mathcal{L}[u(t)e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t}] - \frac{1}{2j} \mathcal{L}[u(t)e^{(\sigma_0 - j\omega_0)t}] = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1}{(s - \sigma_0 - j\omega_0)} - \frac{1}{2j} \frac{1}{(s - \sigma_0 + j\omega_0)} = \\ &= \frac{1}{2j} \frac{2j\omega_0}{[(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2]} = \frac{\omega_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Il dominio della trasformata di Laplace di  $x(t)$  è il semipiano destro a partire dalla retta verticale per  $\sigma_0$ , vedi figura 7.7. La trasformata ottenuta è una funzione analitica con due poli semplici complessi coniugati nei punti  $\sigma_0 \pm j\omega_0$  ovvero l'ascissa  $\sigma'$  di convergenza della trasformata è  $\sigma_0$ . ■

**Esempio 7.17** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale

$$x(t) = u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t,$$

ove  $\sigma_0$  e  $\omega_0$  è una costante reale.

Ragionando in modo analogo all'esempio precedente si ha:

$$\mathcal{L}[u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t] = \mathcal{L}[u(t)e^{\sigma_0 t} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}] =$$

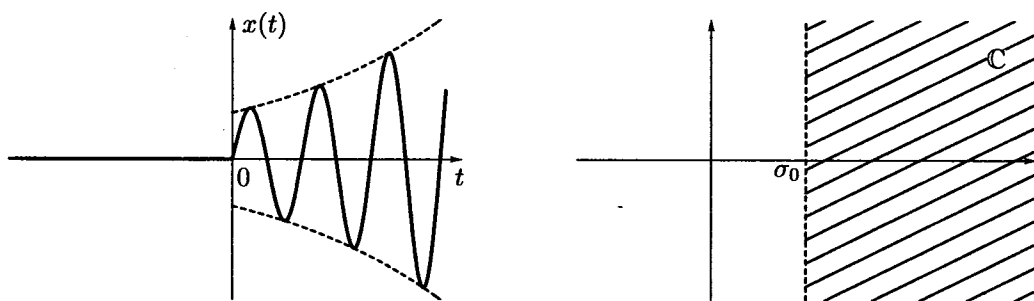


Fig. 7.7 Trasformata di Laplace di  $u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t$  e suo dominio.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \mathcal{L}[u(t)e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[u(t)e^{(\sigma_0 - j\omega_0)t}] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{[(s - \sigma_0) - j\omega_0]} + \frac{1}{2} \frac{1}{[(s - \sigma_0) + j\omega_0]} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2(s - \sigma_0)}{[(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2]} = \frac{(s - \sigma_0)}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}.
 \end{aligned}$$

Il dominio è il semipiano destro delle  $s \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re } s > \sigma_0$ , vedi figura 7.8. La trasformata ottenuta è una funzione analitica con due poli semplici complessi coniugati  $\sigma_0 \pm j\omega_0$  ovvero l'ascissa  $\sigma'$  di convergenza della trasformata è  $\sigma_0$ . ■

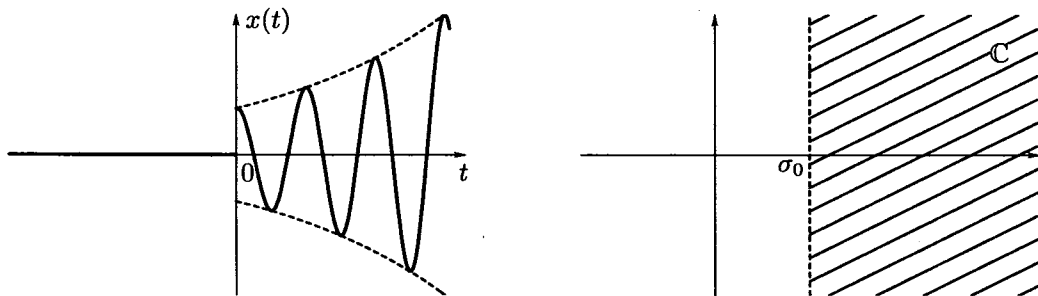


Fig. 7.8 Trasformata di Laplace di  $u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$  e suo dominio.

**Osservazione 7.4** Si osservi che, se  $\sigma_0 > 0$ , i segnali  $u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t$  e  $u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$  non hanno trasformata di Fourier, in quanto non sono a crescita lenta. In questo caso il dominio della trasformata di Laplace non contiene l'asse immaginario al suo interno né ha l'asse immaginario come bordo.

Invece, se  $\sigma_0 < 0$ , il segnali  $u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t$  e  $u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$  hanno trasformata di Fourier, in quanto sono a crescita lenta. In questo caso il dominio della trasformata di Laplace di  $x(t)$  contiene l'asse immaginario al suo interno. Confrontando la trasformata di Fourier di questi due segnali con quella di Laplace:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t] &= \frac{\omega_0}{(j\omega - \sigma_0)^2 + \omega_0^2} & \mathcal{F}[u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t] &= \frac{j\omega - \sigma_0}{(j\omega - \sigma_0)^2 + \omega_0^2} \\ \mathcal{L}[u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t] &= \frac{\omega_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2} & \mathcal{L}[u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t] &= \frac{s - \sigma_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2},\end{aligned}$$

si constata che in questi casi la trasformata di Fourier si può ottenere da quella di Laplace ponendo  $j\omega$  al posto di  $s$ , ovvero calcolando la trasformata di Laplace sull'asse immaginario. ■

Consideriamo, ora, come esempio, la trasformata di Laplace della gaussiana. Si tratta di un segnale per il quale le proprietà delle trasformate non ci sono utili e dobbiamo quindi svolgere l'esercizio applicando la definizione.

**Esempio 7.18** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale:

$$x(t) = e^{-t^2},$$

precisandone il dominio.

Il segnale in questione ha una decrescita sia a  $+\infty$  che a  $-\infty$  più rapida di un normale esponenziale, poiché all'esponente ha la seconda potenza di  $t$ . La trasformata può allora essere fatta con il calcolo dell'integrale:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-t^2}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+st)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+s/2)^2 + s^2/4} dt = e^{s^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+s/2)^2} dt.\end{aligned}\quad (7.17)$$

Per il calcolo dell'integrale nella (7.17) facciamo la sostituzione

$$\tau = t - s/2,$$

ove però la nuova variabile  $\tau$  è complessa e il nuovo cammino di integrazione è lungo una parallela all'asse reale nel piano complesso delle  $\tau$ . Si può tuttavia mostrare che tale integrale non cambia se, invece di prendere come cammino di integrazione una parallela all'asse reale, prendiamo proprio l'asse reale, allora la (7.17) diviene:

$$e^{s^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = e^{s^2/4} \sqrt{\pi},$$

in quanto è noto che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Abbiamo così ottenuto:

$$\mathcal{L}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{s^2/4}.$$

Il dominio è tutto il piano complesso, in quanto il calcolo dell'integrale si è potuto fare per ogni valore di  $s$ , vedi figura 7.9. In effetti la trasformata ottenuta è una funzione analitica in tutto il piano complesso delle  $s$  ovvero l'ascissa di convergenza  $\sigma'$  è  $-\infty$ . ■

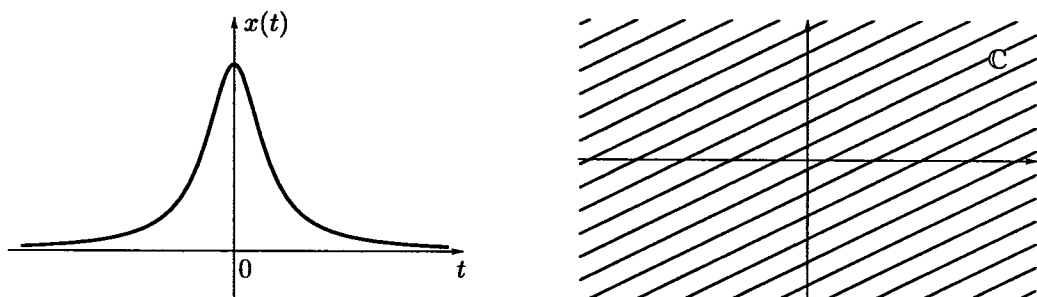


Fig. 7.9 Trasformata di Laplace della gaussiana e suo dominio.

**Osservazione 7.5** Anche per questo esempio è utile il confronto con la trasformata di Fourier

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-t^2}] &= \sqrt{\pi} e^{s^2/4} \\ \mathcal{F}[e^{-t^2}] &= \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.\end{aligned}$$

Si vede che la trasformata di Laplace, contenendo all'interno del suo dominio l'asse immaginario, può essere calcolata per  $\sigma = 0$  e in questo caso fornisce la trasformata di Fourier. ■

Proviamo ora a riprendere il segnale porta  $p_T(t)$ , per calcolarne la trasformata utilizzando le proprietà.

**Esempio 7.19** Utilizzando le proprietà, si calcoli la trasformata di Laplace di :

$$x(t) = p_T(t) = u(t + T/2) - u(t - T/2)$$

e si precisi quale è il dominio.

Utilizziamo dapprima la linearità e poi la proprietà di traslazione nel dominio del tempo. Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[p_T(t)] &= \mathcal{L}[u(t + T/2)] - \mathcal{L}[u(t - T/2)] = e^{Ts/2} \mathcal{L}[u(t)] - e^{-Ts/2} \mathcal{L}[u(t)] = \\ &= (e^{Ts/2} - e^{-Ts/2}) \frac{1}{s} = \frac{2 \sinh(Ts/2)}{s}.\end{aligned}$$

Per vedere quale è il dominio, osserviamo che il segnale  $p_T(t)$  è nullo per  $t < -T/2$  e quindi il suo dominio dovrà essere un semipiano destro. Inoltre la trasformata che abbiamo ottenuto ha solo una singolarità apparente in  $s = 0$  ed è dunque analitica in tutto il piano complesso. Queste considerazioni ci permettono di concludere che l'ascissa  $\sigma'$  di convergenza è  $-\infty$  ovvero il dominio è tutto il piano complesso. ■

Proponiamo ancora qualche esercizio che consenta di famigliarizzarsi con le proprietà delle trasformate. Il modo di svolgere gli esercizi non è unico e invitiamo il lettore a seguire anche altri procedimenti.

**Esempio 7.20** Utilizzando le proprietà, si calcoli la trasformata di Laplace del segnale  $x(t)$  dato graficamente nella figura 7.10 e si precisi quale è il dominio.

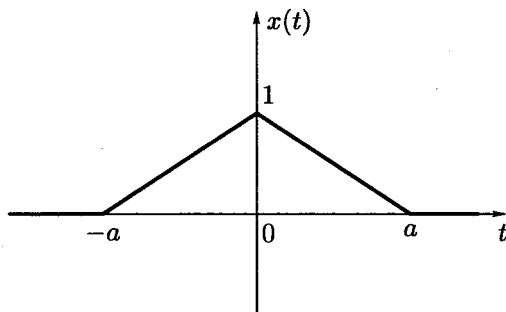


Fig. 7.10 Segnale triangolare.

Svolgiamo l'esercizio facendo in modo grafico le derivate prime e seconde di  $x(t)$ , utilizzando le regole pratiche di derivazione nel senso delle distribuzioni. Si vedano le figure 7.11.

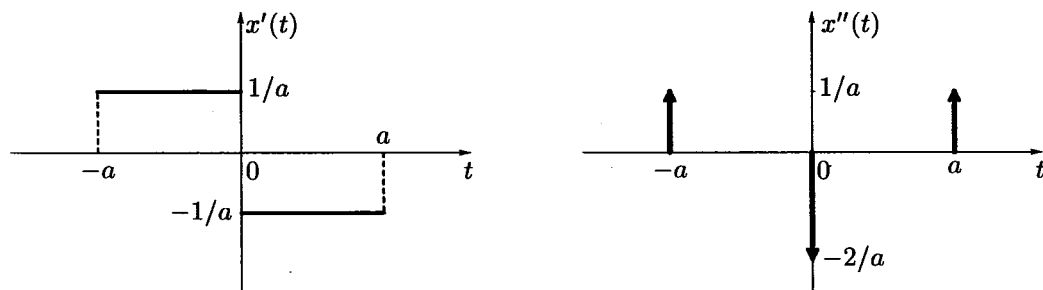


Fig. 7.11 Derivate distribuzionali del segnale triangolare.

Dalla seconda delle figure 7.11 si ricava:

$$x''(t) = \frac{1}{a} \delta(t+a) - \frac{2}{a} \delta(t) + \frac{1}{a} \delta(t-a). \quad (7.18)$$

La trasformata del primo membro della (7.18) ci fornisce:

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2 \mathcal{L}[x(t)], \quad (7.19)$$

mentre, utilizzando le proprietà, la trasformata del secondo membro della (7.18) ci dà:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{a} \delta(t+a) - \frac{2}{a} \delta(t) + \frac{1}{a} \delta(t-a) \right] = \frac{1}{a} \mathcal{L}[\delta(t+a)] - \frac{2}{a} \mathcal{L}[\delta(t)] + \frac{1}{a} \mathcal{L}[\delta(t-a)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{a} e^{as} - \frac{2}{a} + \frac{1}{a} e^{-as} = \\
 &= \frac{1}{a} \left( e^{as/2} - e^{-as/2} \right)^2 = \frac{4}{a} \sinh^2(as/2). \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

Le due equazioni (7.19) e (7.20) ci danno:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{4}{a} \frac{\sinh^2(as/2)}{s^2},$$

che ha una singolarità apparente per  $s = 0$  ed è dunque analitica in tutto il piano complesso. Concludiamo questo esercizio con qualche considerazione sul dominio. Il segnale  $x(t)$  è nullo all'esterno dell'intervallo  $[-a, a]$  e quindi, se pensassimo di calcolare la trasformata con l'integrale, non avremmo problemi di convergenza. Ne segue che il dominio è tutto il piano complesso. D'altronde la trasformata che abbiamo calcolata è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  e dovendo essere analitica in un semipiano destro la sua ascissa di convergenza  $\sigma'$  risulta  $-\infty$ . ■

**Esempio 7.21** Si calcoli la trasformata del segnale  $x(t)$  della figura 7.10, già considerato nell'esempio precedente, ricordando che:

$$x(t) = \frac{1}{a} (p_a(t) * p_a(t))$$

e si utilizzi la proprietà della trasformata del prodotto di convoluzione.

In effetti dal fatto che:

$$\begin{aligned}
 p_a(t) * p_a(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(\tau) p_a(t - \tau) d\tau = \\
 &= (t + a) p_a(t + a/2) + (a - t) p_a(t - a/2)
 \end{aligned}$$

Per la proprietà che afferma che un prodotto di convoluzione è trasformato in un prodotto ordinario delle trasformate, otteniamo:

$$\mathcal{L}[p_a(t) * p_a(t)] = \mathcal{L}[p_a(t)] \mathcal{L}[p_a(t)] = \left( \frac{2 \sinh(as/2)}{s} \right)^2.$$

Dividendo infine per  $a$  si termina l'esercizio. ■

**Esempio 7.22** Utilizzando le proprietà, si calcoli la trasformata di Laplace del segnale  $x(t)$  dato graficamente nella figura 7.12 e si precisi quale è il dominio.

Svolgiamo l'esercizio facendo in modo grafico le derivate prime e seconde di  $x(t)$ , utilizzando le regole pratiche di derivazione nel senso delle distribuzioni. Si vedano le figure 7.13.

Dalla seconda delle figure 7.13 si ricava:

$$x''(t) = \frac{1}{2a} \delta(t + a) - \frac{1}{2a} \delta(t - a) - \delta'(t - a). \quad (7.21)$$

La trasformata del primo membro della (7.21) ci fornisce:

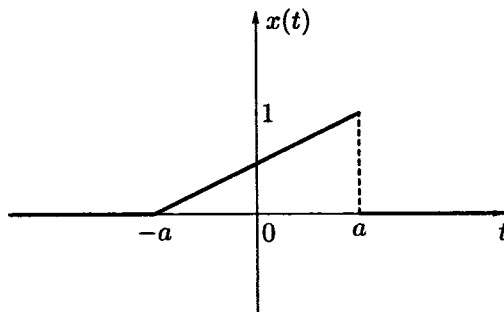


Fig. 7.12 Segnale a dente di sega.

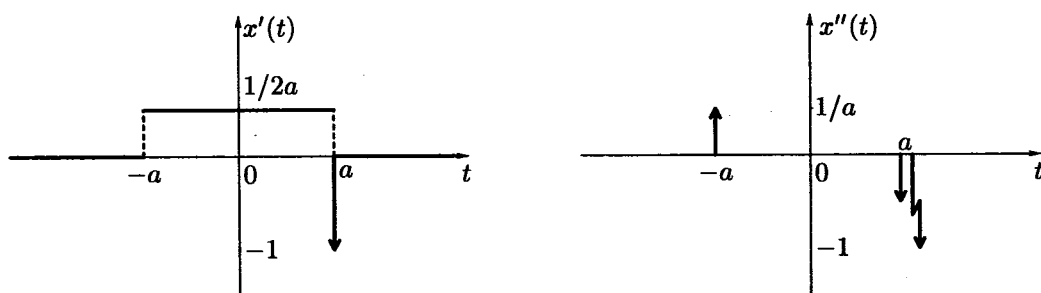


Fig. 7.13 Derivate distribuzionali del segnale a dente di sega.

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2 \mathcal{L}[x(t)], \quad (7.22)$$

mentre, utilizzando le proprietà, la trasformata del secondo membro della (7.21) ci dà:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2a}\delta(t+a) - \frac{1}{2a}\delta(t-a) - \delta'(t-a)\right] &= \frac{1}{2a}\mathcal{L}[\delta(t+a)] - \frac{1}{2a}\mathcal{L}[\delta(t-a)] + \\ &\quad -\mathcal{L}[\delta'(t-a)] = \\ &= \frac{1}{2a}e^{as} - \frac{1}{2a}e^{-as} - se^{-as} = \\ &= \frac{1}{2a}2\sinh(as) - se^{-as}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Le due equazioni (7.22) e (7.23) ci danno:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{a} \frac{\sinh(as)}{s^2} - \frac{e^{-as}}{s},$$

che ha una singolarità apparente per  $s = 0$  ed è dunque analitica in tutto il piano complesso. Se non si fosse persuasi del fatto che la funzione in (7.23) ha una singolarità apparente in  $s = 0$ , si sostituiscano a  $\sinh as$  e a  $e^{-as}$  i loro sviluppi di Taylor in potenze di  $s$ , e facilmente si arriverà a constatare l'analiticità di  $\mathcal{L}[x(t)]$ .

Il segnale  $x(t)$  è nullo all'esterno dell'intervallo  $[-a, a]$  e quindi l'integrale di Laplace non ha problemi di convergenza. Ne segue che il dominio è tutto il piano complesso.

D'altronde la trasformata è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  e la sua ascissa di convergenza  $\sigma'$  risulta  $-\infty$ . ■

**Esempio 7.23** Utilizzando le proprietà, si calcoli la trasformata di Laplace del segnale  $x(t)$ , detto *rampa limitata*, dato graficamente nella figura 7.14 e si precisi quale è il

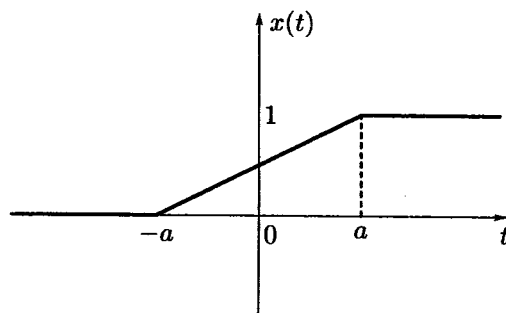


Fig. 7.14 Rampa limitata.

dominio.

Le derivate prime e seconde sono mostrate nelle figure 7.15.

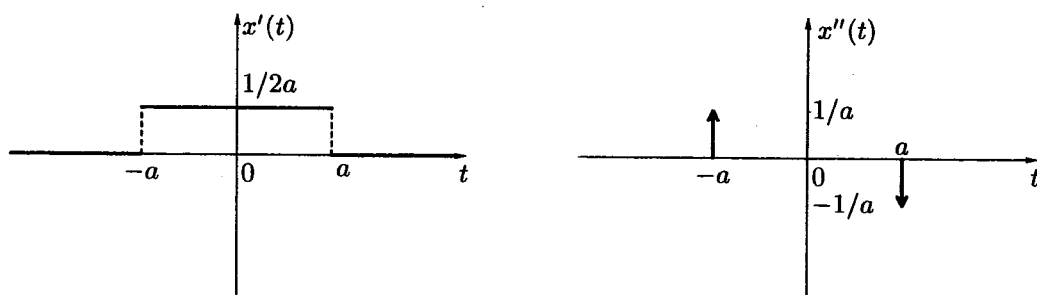


Fig. 7.15 Derivate distribuzionali della rampa limitata.

Dalla seconda delle figure 7.15 si ricava:

$$x''(t) = \frac{1}{2a} \delta(t+a) - \frac{1}{2a} \delta(t-a). \quad (7.24)$$

La trasformata del primo membro della (7.24) ci fornisce:

$$\mathcal{L}[x''(t)] = s^2 \mathcal{L}[x(t)], \quad (7.25)$$

mentre, utilizzando le proprietà, la trasformata del secondo membro della (7.24) ci dà:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1}{2a} \delta(t+a) - \frac{1}{2a} \delta(t-a)\right] &= \frac{1}{2a} \mathcal{L}[\delta(t+a)] - \frac{1}{2a} \mathcal{L}[\delta(t-a)] = \\ &= \frac{1}{2a} e^{as} - \frac{1}{2a} e^{-as} = \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2a} 2 \sinh(as). \quad (7.26)$$

Le due equazioni (7.25) e (7.26) ci danno:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{a} \frac{\sinh(as)}{s^2},$$

che ha una singolarità polare del primo ordine per  $s = 0$ , in quanto al numeratore vi è il  $\sinh as$  che ha in  $s = 0$  uno zero del primo ordine, mentre al denominatore vi è  $s^2$  che è uno zero del secondo ordine. Il segnale  $x(t)$  è nullo per  $t \leq -a$  e quindi l'integrale di Laplace non ha problemi di convergenza a  $-\infty$ . Ne segue che il dominio è un semipiano destro di  $\mathbb{C}$ . D'altronde la trasformata che abbiamo calcolata è analitica per  $s \neq 0$  e dovendo essere analitica in un semipiano destro la sua ascissa di convergenza  $\sigma'$  risulta uguale a 0. Il dominio della  $\mathcal{L}[x(t)]$  è dunque il semipiano delle  $s$  con  $\operatorname{Re} s > 0$ . ■

## 7.4 Legami tra le trasformate di Fourier e di Laplace

In questo paragrafo vogliamo mettere in evidenza i legami e le differenze tra le trasformate di Fourier e quelle di Laplace. Ricordiamo che la trasformata di Laplace che consideriamo è quella bilatera che abbiamo definito all'inizio di questo capitolo. Dovendo confrontare le trasformate che abbiamo indicato con lettere maiuscole, per evitare ambiguità, porremo come pedice  $\mathcal{F}$  o  $\mathcal{L}$  a seconda che si tratti di trasformata di Fourier o di Laplace:

$$\mathcal{F}[x(t)] = X_{\mathcal{F}}(\omega) \quad \mathcal{L}[x(t)] = X_{\mathcal{L}}(s).$$

Ricordiamo che il dominio della trasformata di Laplace è una striscia verticale (o un semipiano o piano) del piano complesso senza le rette verticali che lo delimitano, ovvero:

$$\operatorname{dom} X_{\mathcal{L}}(s) = \{s \in \mathbb{C} : \sigma' < \operatorname{Re} s < \sigma''\},$$

potendo anche essere  $\sigma'$  o  $\sigma''$  uguali  $\pm\infty$ . A seconda di come sia situato il dominio della trasformata di Laplace si possono presentare le situazioni descritte nel seguito.

i) Se il dominio di  $X_{\mathcal{L}}(s)$  contiene al proprio interno l'asse immaginario, ovvero:

$$\sigma' < 0 < \sigma'',$$

si ha che la trasformata di Fourier  $X_{\mathcal{F}}(\omega)$  di  $x(t)$  è la restrizione della trasformata di Laplace all'asse immaginario:

$$X_{\mathcal{F}}(\omega) = [X_{\mathcal{L}}(s)]_{s=j\omega} = X_{\mathcal{L}}(j\omega),$$

si passa cioè dalla trasformata di Laplace a quella di Fourier ponendo  $j\omega$  al posto di  $s$ .

**Esempio 7.24** Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale  $e^{-|t|}$ , utilizzando la trasformata di Laplace.

Si ha:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-|t|}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-st} dt = \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(1-s)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(1+s)t} dt = \\ &= \left[ \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t} \right]_{-\infty}^0 + \left[ \frac{1}{-(1+s)} e^{-(1+s)t} \right]_0^{+\infty},\end{aligned}\quad (7.27)$$

ora, indicando con  $\sigma = \operatorname{Re} s$  e con  $\omega = \operatorname{Im} s$ , si nota che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(1-s)t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{(1-\sigma)t} (\cos \omega t - j \sin \omega t) = 0$$

solo se  $(1 - \sigma) > 0$  ovvero se:

$$\operatorname{Re} s < 1, \quad (7.28)$$

inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(1+s)t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(1+\sigma)t} (\cos \omega t - j \sin \omega t) = 0$$

solo se  $-(1 + \sigma) < 0$  ovvero se:

$$\operatorname{Re} s > -1. \quad (7.29)$$

Con le condizioni (7.28) e (7.29) il calcolo della (7.27) ci dà:

$$\frac{1}{1-s} + \frac{-1}{-(1+s)} = \frac{2}{1-s^2}.$$

Il dominio è formato dalla striscia verticale del piano complesso individuata dalle due condizioni (7.28) e (7.29) e cioè:

$$-1 < \operatorname{Re} s < 1,$$

che contiene al suo interno l'asse immaginario. Si ha:

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \left[ \frac{2}{1-s^2} \right]_{s=j\omega} = \frac{2}{1-(j\omega)^2} = \frac{2}{1+\omega^2},$$

risultato che si poteva ottenere direttamente con altri procedimenti. ■

**Osservazione 7.6** Se il segnale  $x(t)$  è nullo per  $t < a$  (con  $a \in \mathbb{R}$ ), il dominio della sua trasformata di Laplace è un semipiano destro formato dai numeri complessi  $s$  con  $\operatorname{Re} s > \sigma'$ , essendo  $\sigma'$  l'ascissa di convergenza. La condizione sufficiente per passare dalla trasformata di Laplace a quella di Fourier ponendo  $j\omega$  al posto di  $s$  diviene:

$$\sigma' < 0.$$

■

**Esempio 7.25** Calcoliamo la trasformata di Fourier della porta  $u(t+a) - u(t-a)$ , utilizzando la trasformata di Laplace. Si ha:

$$\mathcal{L}[u(t+a) - u(t-a)] = \frac{2 \sinh as}{s},$$

con dominio formato da tutto il piano complesso e che quindi comprende al suo interno l'asse immaginario. Si ha:

$$\mathcal{F}[u(t+a) - u(t-a)] = \left[ \frac{2 \sinh as}{s} \right]_{s=j\omega} = \frac{2 \sinh aj\omega}{j\omega} = \frac{2j \sin a\omega}{j\omega} = \frac{2 \sin a\omega}{\omega},$$

che corrisponde al risultato già ottenuto con altri procedimenti. ■

- ii) Se il dominio della trasformata di Laplace  $X_{\mathcal{L}}(s)$  di  $x(t)$  non contiene l'asse immaginario al suo interno e non ha l'asse immaginario come bordo, ovvero se:

$$\sigma' < \sigma'' < 0 \quad \text{oppure} \quad 0 < \sigma' < \sigma'',$$

si ha che la trasformata di Fourier non esiste.

**Esempio 7.26** Si calcoli la trasformata di Laplace del segnale  $u(t)e^t$ , precisandone il dominio.

Si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)e^t] &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^te^{-st} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(1-s)t} dt. \end{aligned} \quad (7.30)$$

L'integrale nella (7.30) converge solo se  $\operatorname{Re} s > 1$  e in questo caso si ha:

$$\int_0^{+\infty} e^{(1-s)t} dt = \frac{1}{s-1},$$

con dominio formato dal semipiano destro di  $\mathbb{C}$  formato dalle  $s$  tali che:

$$\operatorname{Re} s > 1$$

e che quindi non comprende al suo interno e non ha come bordo l'asse immaginario. La trasformata di Fourier di  $x(t) = u(t)e^t$  non esiste, infatti  $x(t)$  cresce esponenzialmente e quindi si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{t-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^t (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt$$

non converge e inoltre non esiste nemmeno la trasformata nel senso delle distribuzioni in quanto per la trasformata distribuzionale è richiesta la crescita al più polinomiale. ■

- iii) Se il dominio della trasformata di Laplace  $X_{\mathcal{L}}(s)$  di  $x(t)$  ha l'asse immaginario come bordo, ovvero se:

$$\sigma' < \sigma'' = 0 \quad \text{oppure} \quad 0 = \sigma' < \sigma''$$

si ha che la trasformata di Fourier può esistere o non esistere; anche nel caso in cui esista non si può generalmente ottenere in modo semplice ponendo  $j\omega$  al posto di  $s$ .

**Esempio 7.27** Il segnale  $x(t) = u(t)e^{+\sqrt{t}}$  ha trasformata di Laplace con dominio dato da:

$$\text{dom } X_{\mathcal{L}}(s) = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re } s > 0\}$$

e non ha trasformata di Fourier avendo crescita più che polinomiale. ■

**Esempio 7.28** Il gradino unitario  $u(t)$  ha trasformata di Laplace data da:

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s},$$

con dominio il semipiano destro delle  $s$  con  $\text{Re } s > 0$ . Mentre la sua trasformata di Fourier, non è semplicemente:

$$\left[ \frac{1}{s} \right]_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega},$$

ma è:

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

e si tratta di una trasformata calcolata nel contesto delle distribuzioni. ■

Si può dare qualche indicazione più precisa in qualche situazione particolare, come è indicato nel seguente sottocaso.

- iv) Se la trasformata di Laplace  $X_{\mathcal{L}}(s)$  di  $x(t)$  ha come dominio il semipiano destro delle  $s$  con  $\text{Re } s > 0$ , se  $X_{\mathcal{L}}(s)$  ha sull'asse immaginario un numero finito di poli del primo ordine, che indichiamo con  $j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3, \dots, j\omega_n$ , e se

$$X_{\mathcal{L}}(s) = \frac{1}{s - j\omega_1} - \frac{1}{s - j\omega_2} - \frac{1}{s - j\omega_3} + \dots - \frac{1}{s - j\omega_n}$$

è analitica in un semipiano destro più grande del dominio di  $X_{\mathcal{L}}(s)$ , allora esiste la trasformata di Fourier di  $x(t)$  ed è data da:

$$X_{\mathcal{F}}(\omega) = X_{\mathcal{L}}(j\omega) + \alpha_1 \delta(\omega - \omega_1) + \alpha_2 \delta(\omega - \omega_2) + \alpha_3 \delta(\omega - \omega_3) + \cdots + \alpha_n \delta(\omega - \omega_n),$$

ove

$$\alpha_i = \pi R_X(j\omega_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

e si è indicato con  $R_X$  il residuo della funzione  $X_{\mathcal{L}}(s)$  nei poli del primo ordine  $j\omega_1, j\omega_2, j\omega_3, \dots, j\omega_n$ .

**Esempio 7.29** Si ricavi la trasformata di Fourier di  $x(t) = u(t) \sin \omega_0 t$  a partire da quella di Laplace.

Ricordiamo l'esercizio 7.14 del paragrafo precedente nel quale si è ottenuto il seguente risultato:

$$X_{\mathcal{L}}(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2},$$

con dominio il semipiano destro delle  $s$  con  $\text{Re } s > 0$ . Sull'asse immaginario, che è bordo del dominio, la  $X_{\mathcal{L}}(s)$  ha due poli semplici in  $\pm j\omega_0$ . Si ha dunque:

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{F}}(\omega) &= \left[ \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right]_{s=j\omega} + \frac{\pi}{2j} \delta(\omega - \omega_0) - \frac{\pi}{2j} \delta(\omega + \omega_0) = \\ &= \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} + \pi/(2j) \delta(\omega - \omega_0) - \pi/(2j) \delta(\omega + \omega_0), \end{aligned}$$

ove si è tenuto conto del fatto che i residui di  $X_{\mathcal{L}}(s)$  in  $\pm j\omega_0$  sono rispettivamente  $\pm 1/(2j)$ . ■

## 7.5 Antitrasformata di Laplace

Sia data una funzione  $X(s)$  analitica in una striscia verticale  $S$  del piano complesso; ci occupiamo del problema di trovare, se esiste, un segnale  $x(t)$  la cui trasformata di Laplace sia la  $X(s)$  con dominio  $S$ . Si tratta cioè del problema della antitrasformazione secondo Laplace.

La formula di antitrasformazione di Laplace si può ricondurre formalmente a una antitrasformazione secondo Fourier pur di considerare un  $\sigma = \text{Re } s$  appartenente al dominio, in quanto dal fatto che:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

si ricava che:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = e^{\sigma t} \mathcal{F}^{-1}[X(\sigma + j\omega)]. \quad (7.31)$$

Se supponiamo che la funzione  $X(\sigma + j\omega)$  sia integrabile tra  $-\infty$  e  $+\infty$  rispetto alla variabile  $\omega$ , la formula (7.31) diviene:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\sigma t} \mathcal{F}^{-1}[X(\sigma + j\omega)] = \\ &= e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d(j\omega) = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds \end{aligned} \quad (7.32)$$

e si può mostrare che questo risultato è indipendente dalla ascissa  $\sigma$  scelta all'interno del dominio. Evidenziamo la formula di antitrasformazione (7.32) nel seguente quadro:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds. \quad (7.33)$$

Dalla formula di antitrasformazione (7.31) si comprende come la condizione di antitrasformabilità secondo Laplace esige che la  $X(s)$  sia a crescita lenta lungo le linee verticali parallele all'asse immaginario e contenute all'interno del dominio.

L'integrale della (7.33) si può spesso calcolare utilizzando il lemma di Jordan.

**Esempio 7.30** Utilizzando la formula di antitrasformazione (7.33) si calcoli la antitrasformata di Laplace di  $X(s) = 1/s$  con dominio il semipiano destro delle  $s$  con  $\text{Re } s > 0$ .

Nella formula (7.33) possiamo fissare  $\sigma = 1$  e per il lemma di Jordan B otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[1/s] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{1-j\infty}^{1+j\infty} (1/s) e^{st} ds = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1/(2\pi j) \cdot 2\pi j R_{X(s)}(0) & \text{se } t > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases} \\ &= u(t). \end{aligned}$$

■

**Osservazione 7.7** Si tenga presente che sia la trasformata che l'antitrasformata sono uniche, nel senso che dato un segnale  $x(t)$  la sua trasformata  $X(s)$  con dominio la striscia verticale  $\text{dom}_{\mathcal{L}} X(s)$  è unica e  $X(s)$  è l'unica funzione analitica in  $\text{dom}_{\mathcal{L}} X(s)$  che ha come antitrasformata  $x(t)$ . Si faccia però molta attenzione al fatto che in questo discorso di unicità gioca un ruolo essenziale il dominio. Si può osservare infatti che una stessa

funzione analitica può essere trasformata di due segnali differenti, ma in tale caso sarà differente il dominio. ■

**Esempio 7.31** Si faccia la antitrasformata di Laplace di  $X(s) = 1/s$  con dominio il semipiano sinistro delle  $s$  con  $\operatorname{Re} s < 0$ .

Nella formula (7.33) possiamo fissare  $\sigma = -1$  e per il lemma di Jordan B otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[1/s] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-1-j\infty}^{-1+j\infty} (1/s) e^{st} ds = \\ &= \begin{cases} -1/(2\pi j) & 2\pi j R_{X(s)}(0) & \text{se } t < 0 \\ 0 & & \text{se } t > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t > 0 \end{cases} \\ &= -u(-t).\end{aligned}$$

In effetti per le proprietà di linearità e di riscaldamento si ha:

$$\mathcal{L}[-u(-t)] = -\frac{1}{-1} \frac{1}{s/|-1|} = \frac{1}{s},$$

ma, poiché  $u(-t)$  è limitata e nulla per  $t > 0$ , il dominio risulta essere il semipiano complesso delle  $s$  con  $\operatorname{Re} s < 0$ . Si confronti questo esempio con l'esempio 7.30. ■

L'esempio precedente è stato fornito allo scopo di sollecitare il lettore a prestare attenzione al dominio. Ma è chiaro che, nella maggior parte delle applicazioni, si ha a che fare con segnali che, nel dominio dei tempi, iniziano ad un certo istante  $t_0$  (cioè sono nulli per  $t < t_0$ ) e che quindi hanno come dominio un semipiano destro o tutto il piano complesso. Quando il dominio non è esplicitamente espresso, si sottintende allora che esso sia il più grande semipiano destro di  $\mathbb{C}$  in cui la  $X(s)$  è analitica e a crescita lenta lungo le direzioni parallele all'asse immaginario.

Desideriamo proseguire questo paragrafo con alcune considerazioni importanti riguardanti il problema della antitrasformazione. Nella maggior parte dei problemi applicativi non si ha necessità di applicare le formule (7.31) o (7.33) per fare la antitrasformazione, ma è sufficiente riconoscere nella espressione di  $X(s)$  una trasformata nota. Un caso molto frequente di funzione  $X(s)$  che si vuole antitrasformare è quello di una funzione razionale. All'uopo è di importanza notevole la scomposizione in fratti semplici che abbiamo considerato al termine del capitolo sul calcolo dei residui.

Grazie alla scomposizione, una funzione razionale risulta somma di addendi del tipo:

$$a_n s^n \quad \frac{A_{-m}}{(s-s_0)^m} \quad B_i \frac{s-\sigma_1}{(s-\sigma_1)^2 + \omega_1^2} \quad C_i \frac{\omega_1}{(s-\sigma_1)^2 + \omega_1^2}$$

ed è facile, per le proprietà delle trasformate, riconoscere che:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}[a_n \delta^{(n)}(t)] &= a_n s^n \\ \mathcal{L}[A_{-m} u(t) t^{m-1} / (m-1)! e^{s_0 t}] &= \frac{A_{-m}}{(s-s_0)^m} \\ \mathcal{L}[B_i u(t) e^{\sigma_1 t} \cos \omega_1 t] &= B_i \frac{\sigma - \sigma_1}{(\sigma - \sigma_1)^2 + \omega_1^2} \\ \mathcal{L}[C_i u(t) e^{\sigma_1 t} \sin \omega_1 t] &= C_i \frac{\omega_1}{(\sigma - \sigma_1)^2 + \omega_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Consideriamo in questo contesto il seguente esempio:

**Esempio 7.32** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della seguente funzione razionale:

$$X(s) = \frac{s^5 - 11s + 37s^3 - 5s^2 - 332s + 964}{(s^2 - 10s + 25)(s^2 - 4s + 13)}.$$

Osserviamo subito che non essendo specificato il dominio, consideriamo come dominio il più grande semipiano destro di analiticità per  $X(s)$ , ovvero le  $s \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} s > 5$ . Tenendo conto del fatto che il grado del numeratore è 5 mentre quello del denominatore è 4 e osservando che  $X(s)$  ha un polo doppio in  $s = 5$  e due poli semplici complessi coniugati in  $s = 2 \pm 3j$ , la scomposizione in fratti semplici è del tipo:

$$x(t) = a_1 s + a_0 + \frac{A_{-2}}{(s-5)^2} + \frac{A_{-1}}{s-5} + B \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9} + C \frac{3}{(s-2)^2 + 9}. \quad (7.35)$$

È facile riconoscere negli addendi della (7.35) delle trasformate note, per cui la antitrasformata  $x(t)$  della  $X(s)$  con  $\operatorname{dom} \mathcal{L} X(s)$  uguale alle  $s$  con  $\operatorname{Re} s > 5$  è del tipo:

$$x(t) = a_1 \delta'(t) + a_0 \delta(t) + A_{-2} u(t) t e^{5t} + A_{-1} u(t) e^{5t} + B u(t) e^{2t} \cos 3t + C u(t) e^{2t} \sin 3t.$$

Iniziando la divisione tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore di  $X(s)$  troviamo:

$$a_1 = 1 \qquad a_0 = 3,$$

mentre con il calcolo di opportuni residui otteniamo:

$$A_{-2} = R_{(s-5)X(s)}(5) = 3 \qquad A_{-1} = R_{X(s)}(5) = 0$$

ed ancora:

$$B = 2 \operatorname{Re} R_{X(s)}(2 + j3) = 1 \qquad C = -2 \operatorname{Im} R_{X(s)}(2 + j3) = 0,$$

per cui la seguente espressione:

$$x(t) = \delta'(t) + 3\delta(t) + 3u(t) t e^{5t} + u(t) e^{2t} \cos 3t$$

risulta essere la antitrasformata richiesta. ■

Utilizzando la scomposizione in fratti semplici e le formule (7.34), sviluppiamo i seguenti esempi.



**Esempio 7.33** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della seguente funzione razionale:

$$X(s) = \frac{3s^2 + 6s - 3}{s^2 + s - 2}.$$

La scomposizione in fratti ci fornisce:

$$\frac{3s^2 + 6s - 3}{s^2 + s - 2} = 3 + \frac{R_{X(s)}(1)}{s - 1} + \frac{R_{X(s)}(-2)}{s + 2}$$

e quindi:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3s^2 + 6s - 3}{s^2 + s - 2} \right] = 3\delta(t) + R_{X(s)}(1)u(t)e^t + R_{X(s)}(-2)u(t)e^{-2t}.$$

Il calcolo dei residui dà il seguente risultato:

$$R_{X(s)}(1) = 2 \qquad R_{X(s)}(-2) = 1,$$

per cui si ha:

$$x(t) = 3\delta(t) + 2u(t)e^t + u(t)e^{-2t}.$$

■

**Esempio 7.34** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della seguente funzione razionale:

$$X(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 2s + 3}{s^3 + s^2}.$$

La scomposizione in fratti ci fornisce:

$$\frac{2s^3 + 5s^2 + 2s + 3}{s^3 + s^2} = 2 + \frac{R_{X(s)}(-1)}{s + 1} + \frac{R_{sX(s)}(0)}{s^2} + \frac{R_{X(s)}(0)}{s}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s^3 + 5s^2 + 2s + 3}{s^3 + s^2} \right] = \\ &= 2\delta(t) + R_{X(s)}(-1)u(t)e^{-t} + R_{sX(s)}(0)tu(t) + R_{X(s)}(0)u(t). \end{aligned}$$

Il calcolo dei residui dà il seguente risultato:

$$R_{X(s)}(-1) = 4 \qquad R_{sX(s)}(0) = 3 \qquad R_{X(s)}(0) = -1,$$

per cui si ha:

$$x(t) = 2\delta(t) + 4u(t)e^{-t} + 3tu(t) - u(t).$$

■

**Esempio 7.35** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della funzione razionale

$$X(s) = \frac{s^2 + 3s + 24}{s^2 + 9}.$$

La scomposizione in fratti ci fornisce:

$$\frac{s^2 + 3s + 24}{s^2 + 9} = 1 + 2\operatorname{Re} R_{X(s)}(3j) \frac{s}{s^2 + 3^2} - 2\operatorname{Im} R_{X(s)}(3j) \frac{3}{s^2 + 3^2}$$

e quindi:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^2 + 3s + 24}{s^2 + 9} \right] = \delta(t) + 2\operatorname{Re} R_{X(s)}(3j)u(t) \cos 3t - 2\operatorname{Im} R_{X(s)}(3j)u(t) \sin 3t.$$

Il calcolo del residuo dà il seguente risultato:

$$R_{X(s)}(3j) = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}j,$$

per cui si ha:

$$x(t) = \delta(t) + 3u(t) \cos 3t + 5u(t) \sin 3t.$$

■

**Esempio 7.36** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della funzione razionale

$$X(s) = \frac{2s^2 + 11s + 74}{s^2 + 4s + 29}.$$

La scomposizione in fratti ci fornisce:

$$\begin{aligned} \frac{2s^2 + 11s + 74}{s^2 + 4s + 29} &= 2 + 2\operatorname{Re} R_{X(s)}(-2 + 5j) \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 5^2} + \\ &\quad - 2\operatorname{Im} R_{X(s)}(-2 + 5j) \frac{5}{(s + 2)^2 + 5^2} \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s^2 + 11s + 74}{s^2 + 4s + 29} \right] = \\ &= 2\delta(t) + 2\operatorname{Re} R_{X(s)}(-2 + 5j)u(t)e^{-2t} \cos 5t - 2\operatorname{Im} R_{X(s)}(-2 + 5j)u(t)e^{-2t} \sin 5t. \end{aligned}$$

Il calcolo del residuo dà il seguente risultato:

$$R_{X(s)}(-2 + 5j) = \frac{3}{2} - j,$$

per cui si ha:

$$x(t) = 2\delta(t) + 3u(t)e^{-2t} \cos 5t + 2u(t)e^{-2t} \sin 5t.$$

■

Talvolta si ha da antitrasformare non soltanto una funzione razionale, ma una funzione razionale moltiplicata per un esponenziale complesso. In questo caso, fatta la scomposizione in fratti semplici della parte razionale, è facile riconoscere trasformate note ricordando la proprietà di traslazione nel tempo. Gli esempi seguenti riguardano situazioni di questo tipo.

**Esempio 7.37** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della funzione

$$X(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^2 + s - 2} e^{-5s},$$

data dal prodotto di una funzione razionale per un esponenziale complesso.

La scomposizione in fratti semplici della parte razionale di  $X(s)$ , che indichiamo con  $Y(s)$ , ci fornisce:

$$\frac{2s^2 + 1}{s^2 + s - 2} = 2 + \frac{R_{Y(s)}(1)}{s - 1} + \frac{R_{Y(s)}(-2)}{s + 2}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2s^2 + 1}{s^2 + s - 2} e^{-5s} \right] = \\ &= 2\mathcal{L}^{-1} [e^{-5s}] + R_{Y(s)}(1)\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s - 1} e^{-5s} \right] + R_{Y(s)}(-2)\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 2} e^{-5s} \right] = \\ &= 2\delta(t - 5) + R_{Y(s)}(1)u(t - 5)e^{t-5} + R_{Y(s)}(-2)u(t - 5)e^{-2(t-5)}. \end{aligned}$$

Il calcolo dei residui dà il seguente risultato:

$$R_{Y(s)}(1) = 1 \qquad R_{Y(s)}(-2) = -3,$$

per cui si ha:

$$x(t) = 2\delta(t - 5) + u(t - 5)e^{t-5} - 3u(t - 5)e^{-2(t-5)}.$$

■

**Esempio 7.38** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della seguente funzione:

$$X(s) = \frac{1}{s} \sinh s.$$

Osserviamo che il  $\sinh s$  è una combinazione lineare di esponenziali complessi, per cui la funzione che ci è proposta da antitrasformare si riconduce alla somma di due esponenziali complessi per una funzione razionale. Si ha:

$$\frac{1}{s} \sinh s = \frac{1}{2s} e^s - \frac{1}{2s} e^{-s}$$

e quindi:

$$x(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} e^s \right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} e^{-s} \right] = \frac{1}{2} (u(t+1) - u(t-1)) = \frac{1}{2} p_2(t).$$

**Esempio 7.39** Si calcoli la antitrasformata di Laplace della seguente funzione:

$$X(s) = \frac{1}{s + \pi} \cosh s.$$

Osserviamo che il  $\cosh s$  è una combinazione lineare di esponenziali complessi, per cui la funzione che ci è proposta da antitrasformare si riconduce alla somma di due esponenziali complessi per una funzione razionale. Si ha:

$$\frac{1}{s + \pi} \cosh s = \frac{1}{2(s + \pi)} e^s + \frac{1}{2(s + \pi)} e^{-s}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1/2) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \pi} e^s \right] + (1/2) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + \pi} e^{-s} \right] = \\ &= (1/2) u(t+1) e^{-\pi(t+1)} + (1/2) u(t-1) e^{-\pi(t-1)}. \end{aligned}$$

## 7.6 Valore iniziale e valore finale

In questo paragrafo desideriamo mettere in evidenza alcune proprietà qualitative delle trasformate di Laplace, che hanno una valenza applicativa. Spesso gli utilizzatori delle trasformate di Laplace hanno interesse a leggere alcune proprietà della antitrasformata  $x(t)$  della  $X(s)$  senza dover calcolare esplicitamente la antitrasformata. Una di queste proprietà riguarda il comportamento in  $0_+$  di  $x(t)$  e prende il nome di *teorema del valore iniziale*.

Una indicazione intuitiva sulle ragioni che danno origine a questo teorema segue dalle considerazioni seguenti. Supponiamo che il segnale  $x(t)$  sia una funzione (e non distribuzione) nulla per  $t < 0$ , abbia limite finito per  $t \rightarrow 0_+$  e abbia trasformata di Laplace  $X(s)$  calcolabile attraverso l'integrale (7.2). Per le ipotesi fatte sulla nullità, per  $t < 0$ , di  $x(t)$ , la formula (7.2) diviene:

$$X(s) = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \quad (7.36)$$

ed è facile osservare che per  $\sigma$  che tende a  $+\infty$  l'esponenziale reale  $e^{-\sigma t}$  tende a zero se  $t > 0$ . Dunque per valori di  $\sigma$  molto grandi si può pensare di sostituire nell'integrale

della (7.36) a  $x(t)$  il suo valore limite per  $t \rightarrow 0_+$ , che indichiamo con  $x(0_+)$ . Con queste considerazioni la formula (7.36), per  $\operatorname{Re} s$  grande, diviene:

$$X(s) \approx \int_0^{+\infty} x(0_+) e^{-st} dt = x(0_+) \frac{1}{s},$$

e possiamo concludere che:

$$x(0_+) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} sX(s).$$

In modo più preciso il *teorema del valore iniziale* può essere enunciato nel modo seguente:

**Teorema 7.1 (del valore iniziale)** *Sia  $x(t)$  una funzione nulla per  $t < 0$  e sviluppabile in serie di Taylor in un intorno destro dello zero e sia  $X(s)$  la sua trasformata di Laplace, allora si ha che:*

$$\boxed{\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} sX(s) = x(0_+)} \quad (7.37)$$

e, nel caso che  $x(0_+) = 0$ ,  $x'(0_+) = 0$ ,  $x''(0_+) = 0$ ,  $\dots$ ,  $x^{(n-1)}(0_+) = 0$  si ha che:

$$\boxed{\lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^{n+1} X(s) = \frac{d^n x}{dt^n}(0_+).} \quad (7.38)$$

**Osservazione 7.8** Se  $X(s)$  è del tipo seguente:

$$X(s) = \sum_{i=1}^k X_i(s) e^{-\tau_i s},$$

ove le  $X_i(s)$  sono funzioni razionali proprie e le costanti reali  $\tau_i$  sono  $\geq 0$ , allora sono soddisfatte le ipotesi del teorema del valore iniziale. ■

**Esempio 7.40** Si valuti il valore iniziale  $x(0_+)$  del segnale che ha la seguente trasformata di Laplace:

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Per l'osservazione 7.8, possiamo applicare il teorema del valore iniziale e si ha:

$$x(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s \frac{s}{s^2 + 1} = 1.$$

Come verifica si può osservare che:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 1} \right] = u(t) \cos t$$

e quindi  $x(0_+) = \cos 0 = 1$ . ■

**Esempio 7.41** Si valuti il valore iniziale  $x(0_+)$  del segnale che ha la seguente trasformata di Laplace:

$$X(s) = \frac{2 \sinh sT}{s} e^{-sT}.$$

Tenendo conto del fatto che:

$$\frac{2 \sinh sT}{s} e^{-sT} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2sT},$$

possiamo utilizzare le indicazioni dell'osservazione 7.8 e applicare il teorema del valore iniziale e si ha:

$$x(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-2sT} \right) = 1.$$

Come verifica si può osservare che:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2 \sinh sT}{s} e^{-sT} \right] = p_{2T}(t - T).$$
■

**Esempio 7.42** Si valuti il valore iniziale del segnale che ha la seguente trasformata di Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Per l'osservazione 7.8, possiamo applicare il teorema del valore iniziale e si ha:

$$x(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s \frac{1}{(s+1)^2} = 0,$$

e quindi anche:

$$x'(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^2 \frac{1}{(s+1)^2} = 1.$$

Come verifica si può osservare che:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s+1)^2} \right] = u(t) t e^{-t},$$

e quindi, per  $t > 0$ , si ha che  $x'(t) = e^{-t}(1 - t)$ , che in 0 vale 1. ■

**Osservazione 7.9** Prendiamo ora in considerazione funzioni  $X(s)$  della forma seguente:

$$X(s) = \sum_{i=1}^k X_i(s) e^{-\tau_i s}, \quad (7.39)$$

come nella osservazione 7.8, ma con le funzioni  $X_i(s)$  razionali *non proprie*. A queste funzioni non è possibile applicare il teorema del valore iniziale, tuttavia, se scomponiamo le funzioni  $X_i(s)$  nella somma di un polinomio  $P_i(s)$  e di una funzione razionale propria  $W_i(s)$ :

$$X_i(s) = P_i(s) + W_i(s),$$

possiamo applicare il teorema del valore iniziale a:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^k W_i(s) e^{-\tau_i s}.$$

Si osservi che i termini  $P_i(s)$  danno luogo, nell'antitrasformata, a termini impulsivi, per cui l'addendo  $Y(s)$  di  $X(s)$  è anche detto parte non impulsiva di  $X(s)$ .

Con questa osservazione abbiamo allora precisato come il teorema del valore iniziale può essere applicato alla parte non impulsiva di funzioni del tipo rappresentato dalla formula (7.39). ■

**Esempio 7.43** Si applichi il teorema del valore iniziale alla parte non impulsiva della seguente funzione:

$$\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 1}.$$

Eseguito la divisione tra polinomi, otteniamo:

$$\frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 1} = 1 + \frac{s}{s^2 + 1},$$

e quindi applicando il teorema del valore iniziale alla parte non impulsiva si ha:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s}{s^2 + 1} = 1.$$

$$|\arg s| \leq k < \pi/2$$

Infatti si può controllare antitrasformando che:

$$x(t) = \delta(t) + u(t) \cos t$$

e quindi la parte non impulsiva di  $x(t)$  è  $u(t) \cos t$ , che ha come limite per  $t \rightarrow 0_+$  il valore 1. ■

Passiamo ora a fare qualche considerazione sul *teorema del valore finale*. Iniziamo riflettendo sul comportamento all'infinito della antitrasformata di una funzione razionale  $X(s)$ . Supponiamo dapprima che  $X(s)$  abbia tutti i suoi poli nel semipiano sinistro delle

$s$  con  $\operatorname{Re} s < 0$ , allora la sua antitrasformata di Laplace  $x(t)$  tende a zero per  $t \rightarrow +\infty$ . Infatti, se scomponiamo in fratti semplici la parte non impulsiva di  $X(s)$ , si ha che ogni addendo è del tipo:

$$\frac{A}{(s - s_0)^n} \quad \text{con } A \text{ costante e } \operatorname{Re} s_0 < 0,$$

cui corrisponde nell'antitrasformata un addendo del tipo:

$$Au(t)t^{n-1}e^{s_0 t} = Au(t)t^{n-1}e^{\sigma_0 t}(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t),$$

che, se  $\sigma_0 < 0$ , tende a 0 per  $t \rightarrow +\infty$ .

Se  $X(s)$  ha tutti i suoi poli con  $\operatorname{Re} s \leq 0$ , ma i poli che stanno sull'asse immaginario sono del primo ordine, allora  $x(t)$  è limitata per  $t \rightarrow +\infty$ . Infatti nella scomposizione in fratti semplici di  $X(s)$  ai poli semplici sull'asse immaginario corrispondono addendi del tipo:

$$\frac{B}{s - j\omega_0} \quad \text{con } B \text{ costante opportuna,}$$

cui corrisponde nell'antitrasformata un addendo del tipo:

$$Bu(t)e^{j\omega_0 t} = Bu(t)(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t),$$

che si mantiene limitato per  $t \rightarrow +\infty$ .

Si comprende infine che se  $X(s)$  ha anche solo un polo di ordine  $> 1$  sull'asse immaginario oppure anche solo un polo con  $\operatorname{Re} s > 0$ , la sua antitrasformata non si mantiene limitata per  $t \rightarrow +\infty$ .

Riassumiamo le considerazioni che abbiamo fatto sul comportamento all'infinito delle antitrasformate di Laplace di una funzione razionale nel modo seguente.

Siano  $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_n$ , tutti i poli della funzione razionale  $X(s)$ , allora:

$$\operatorname{Re} s_k < 0 \quad \forall k \quad \Rightarrow \quad x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} s_k \leq 0 \quad \forall k \\ \text{se } \{\operatorname{Re} s_k = 0\} \Rightarrow \{s_k \text{ polo 1}^{\circ} \text{ordine}\} \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) \text{ è limitata per } t \rightarrow +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \exists s_k \text{ con } \operatorname{Re} s_k = 0 \text{ e } s_k \text{ polo di ordine } > 1 \\ \text{oppure} \\ \exists s_k \text{ con } \operatorname{Re} s_k > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) \text{ non è limitata per } t \rightarrow +\infty.$$

Passiamo ora a presentare il teorema del valore finale.

**Teorema 7.2 (del valore finale)** Sia  $X(s)$  una funzione del tipo:

$$X(s) = \sum_{i=1}^k X_i(s)e^{-\tau_i s},$$



con le funzioni  $X_i(s)$  razionali (proprie o improprie) e le costanti  $\tau_i$  reali, inoltre ciascuna  $X_i$  abbia tutti i poli con parte reale negativa eccetto al più un polo del primo ordine in 0, allora, nel semipiano destro delle  $s$  con  $\operatorname{Re} s > 0$ , la  $X(s)$  è la trasformata di Laplace di un segnale  $x(t)$  tale per cui esiste finito il suo limite per  $t \rightarrow +\infty$  e si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = [sX(s)]_{s=0}.$$

**Esempio 7.44** Si studi il comportamento a  $+\infty$  della antitrasformata di Laplace della seguente funzione:

$$X(s) = \frac{s-1}{s(s+1)} \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Si consideri poi anche la possibilità di valutare il valore iniziale.

La  $X(s)$  è analitica in un semipiano destro che comprende al suo interno l'asse immaginario eccetto un polo semplice nell'origine. Siamo dunque nelle condizioni di applicabilità del teorema del valore finale e si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \left[ s \frac{s-1}{s(s+1)} \right]_{s=0} = -1.$$

Alla funzione  $X(s)$  si può anche applicare il teorema del valore iniziale e si ha:

$$x(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s-1}{s(s+1)} = 1.$$

$$|\arg s| \leq k < \pi/2$$

In effetti un semplice calcolo ci fornisce:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s-1}{s(s+1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-1}{s} + \frac{2}{s+1} \right] = -u(t) + 2u(t)e^{-t},$$

si veda la figura 7.16. ■

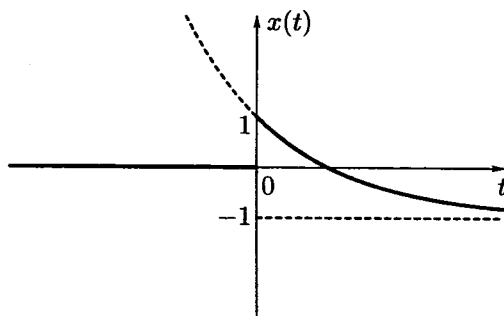


Fig. 7.16 Antitrasformata di Laplace di  $(s-1)/[s(s+1)]$ .

**Esempio 7.45** Si discuta se si possono applicare i teoremi del valore finale e iniziale alla funzione

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s-1)} \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Poiché  $X(s)$  ha un polo in  $s = 1$ , il semipiano destro del suo dominio non comprende l'asse immaginario e quindi non si può applicare il teorema del valore finale. È possibile invece applicare il teorema del valore iniziale e si ha:

$$x(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s \frac{s+1}{s(s-1)} = 1.$$

In effetti un semplice calcolo ci fornisce:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{s(s-1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-1}{s} + \frac{2}{s-1} \right] = -u(t) + 2u(t)e^t,$$

si veda la figura 7.17. ■

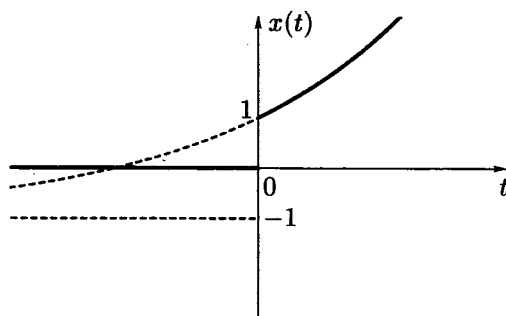


Fig. 7.17 Antitrasformata di Laplace di  $(s+1)/[s(s-1)]$ .

**Esempio 7.46** Si discuta se si possono applicare i teoremi del valore finale e iniziale alla funzione

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Poiché  $X(s)$  ha due poli sull'asse immaginario in  $s = j$  e in  $s = -j$ , non si può applicare il teorema del valore finale. È possibile invece applicare il teorema del valore iniziale e si ha:

$$x(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s \frac{s}{s^2 + 1} = 1.$$

Il calcolo della antitrasformata ci dà

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s}{s^2 + 1} \right] = u(t) \cos t,$$

che per  $t \rightarrow 0_+$  vale  $\cos 0 = 1$  e che per  $t \rightarrow +\infty$  non ammette limite, oscillando tra i valori  $-1$  e  $+1$ , si veda la figura 7.18. ■

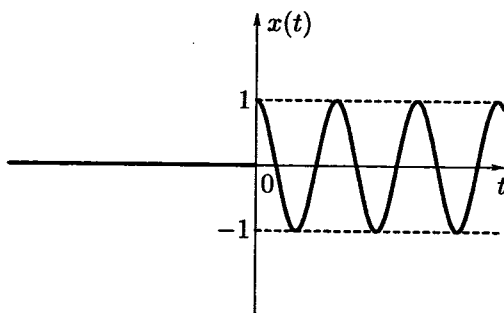


Fig. 7.18 Antitrasformata di Laplace di  $s/(s^2 + 1)$ .

## 7.7 Trasformata di segnali periodici per $t \geq 0$

I segnali periodici non hanno trasformata di Laplace bilatera, però nelle applicazioni spesso si devono trattare segnali che sono nulli per  $t < 0$ , ma che per  $t \geq 0$  coincidono con la restrizione a  $[0, +\infty)$  di un segnale periodico. In questo caso la trasformata di Laplace esiste e siamo interessati a studiarne l'espressione.

Diciamo che un segnale  $x(t)$  è periodico per  $t \geq 0$ , quando esiste un numero reale  $T > 0$  e un segnale  $x_0(t)$  con le caratteristiche seguenti:

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \text{ o } t \geq T \\ x(t) & \text{se } 0 \leq t < T \end{cases}$$

ed inoltre:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t - nT). \quad (7.40)$$

**Osservazione 7.10** Se il segnale  $x(t)$  è una funzione, l'essere periodico per  $t \geq 0$ , si può esprimere più semplicemente dicendo che esiste una funzione  $y(t)$  tale che:

$$x(t) = u(t)y(t)$$

con  $y(t)$  periodica. ■

La formula (7.40) consente di interpretare un segnale  $x(t)$  periodico per  $t \geq 0$ , come la somma delle traslate di un segnale  $x_0(t)$ . Ora la traslazione può essere ottenuta, grazie alle proprietà del prodotto di convoluzione, mediante la convoluzione con una  $\delta$  di Dirac traslata. Si ha cioè:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t - nT) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t) * \delta(t - nT) = x_0(t) * \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT). \quad (7.41)$$

Possiamo allora fare la trasformata di Laplace della (7.41), ricordando che  $\mathcal{L}$  trasforma la convoluzione in un prodotto:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}\left[x_0(t) * \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT)\right] = X_0(s) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs}, \quad (7.42)$$

ove si è indicato con  $X_0(s)$  la trasformata di  $x_0(t)$ . Si osservi che, essendo  $x_0(t)$  nulla all'esterno dell'intervallo  $[0, T)$ , la sua trasformata è analitica in tutto  $\mathbb{C}$  e dunque ha tutto il piano complesso come dominio. Il dominio di  $X(s)$  è invece il semipiano destro delle  $s$  che hanno parte reale strettamente positiva. Si ha allora che:

$$|e^{-Ts}| = e^{-\sigma T} < 1 \quad \text{Re } s > 0. \quad (7.43)$$

La sommatoria all'ultimo membro della (7.42) può allora essere interpretata come una serie geometrica di ragione  $e^{-Ts}$ , che avendo modulo minore di 1 è convergente e si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}. \quad (7.44)$$

Le relazioni (7.42), (7.43) e (7.44) ci permettono di concludere che per un segnale  $x(t)$  periodico per  $t \geq 0$  la sua trasformata di Laplace ha la seguente espressione:

$$\boxed{X(s) = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-Ts}}} \quad (7.45)$$

con dominio il semipiano destro delle  $s$  con  $\text{Re } s > 0$  e ove  $X_0(s) = \mathcal{L}[x_0(t)]$  è analitica in tutto  $\mathbb{C}$ .

**Esempio 7.47** Si faccia la trasformata di Laplace del segnale  $x(t)$  nullo per  $t < 0$  e che per  $t \geq 0$  coincide con un'onda triangolare, vedi la figura 7.19.

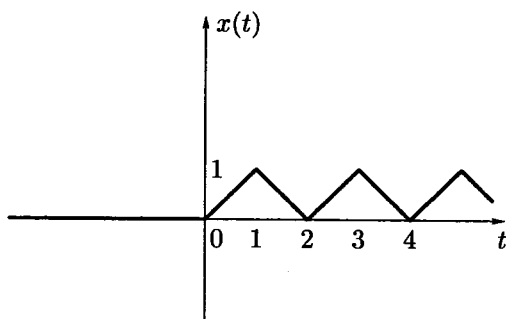
Nell'intervallo  $[0, 2)$  il segnale  $x(t)$  coincide con il segnale  $x_0(t)$  che ha la seguente espressione:

$$x_0(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ -t + 2 & \text{se } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{se } 2 \leq t \end{array} \right\} = tp_1(t - 1/2) + (2 - t)p_1(t - 3/2).$$

Si ricava subito che:

$$X_0(s) = \mathcal{L}[x_0(t)] = \frac{4 \sinh^2(s/2)}{s^2} e^{-s}$$

con dominio tutto il piano complesso  $\mathbb{C}$ . Utilizzando la formula (7.45), si ha:

Fig. 7.19 Segnale periodico per  $t \geq 0$ .

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-2s}} = \frac{[4e^{-s} \sinh^2(s/2)] / s^2}{1 - e^{-2s}}.$$

■

## 7.8 Trasformata di Laplace unilatera

Se  $x(t)$  è una funzione integrabile sugli intervalli limitati, si definisce come trasformata di Laplace unilatera la trasformata di Laplace di  $u(t)x(t)$  e cioè:

$$X_u(s) = \mathcal{L}_u[x(t)] = \mathcal{L}[u(t)x(t)] = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (7.46)$$

con dominio uguale al dominio di  $\mathcal{L}[u(t)x(t)]$ . È chiaro dalla formula (7.46), che, non essendoci problemi di convergenza dell'integrale per  $t \rightarrow -\infty$ , il dominio della trasformata unilatera è sempre un semipiano destro.

Se  $x(t)$  è una distribuzione, introduciamo

$$x_u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ x(t) & \text{se } t \geq 0, \end{cases} \quad (7.47)$$

e la trasformata unilatera di Laplace è definita dalla espressione:

$$X_u(s) = \mathcal{L}_u[x(t)] = \mathcal{L}[x_u(t)] = \mathcal{F}[x_u(t)e^{-\sigma t}] \quad (7.48)$$

con dominio dato dall'interno del semipiano destro delle  $s$  che hanno parte reale  $\sigma$  per cui:

$$x_u(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}'$$

ove  $\mathcal{S}'$  rappresenta lo spazio delle distribuzioni a crescita lenta.

Le proprietà delle trasformate di Laplace unilatera coincidono con le proprietà delle trasformate di Laplace bilatere, eccetto che per la proprietà di derivazione nel tempo.

Qualche considerazione deve anche essere fatta per la proprietà che riguarda il prodotto di convoluzione.

**Osservazione 7.11** La costruzione di  $x_u(t)$ , a partire dalla distribuzione  $x(t)$ , presenta qualche difficoltà dovuta essenzialmente al fatto che non sempre è definito il prodotto di una distribuzione per il gradino unitario. Senza entrare nei dettagli, osserviamo che  $x_u(t)$  si può ottenere come limite distribuzionale di una opportuna successione. ■

### 7.8.1 Proprietà di derivata in $t$ per $\mathcal{L}_u$

Iniziamo con il considerare un segnale che sia, almeno nell'intorno dello zero, una funzione continua. Possiamo allora scrivere, interpretando le derivate nel senso delle distribuzioni, la seguente espressione:

$$\begin{aligned} u(t)x'(t) &= (u(t)x(t))' - (u(t))'x(t) = \\ &= (u(t)x(t))' - \delta(t)x(t) = \\ &= (u(t)x(t))' - x(0)\delta(t), \end{aligned} \quad (7.49)$$

quindi la trasformata unilatera di  $x'(t)$  diviene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[x'(t)] &= \mathcal{L}[u(t)x'(t)] = \mathcal{L}[(u(t)x(t))' - x(0)\delta(t)] = \\ &= s\mathcal{L}[u(t)x(t)] - x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] = s\mathcal{L}_u[x(t)] - x(0), \end{aligned} \quad (7.50)$$

che è la proprietà di derivazione nel tempo per segnali continui nell'intorno dello zero.

Se però il segnale  $x(t)$ , non è una funzione continua in un intorno dello zero, la formula (7.49) non ha significato. Possiamo, con l'obiettivo di dare senso alla (7.49), cercare di dare significato al prodotto  $\delta(t)x(t)$ . L'idea è quella di approssimare la  $\delta(t)$  con una successione di funzioni  $d_n(t)$  e poi fare il limite distribuzionale di  $d_n(t)x(t)$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Purtroppo però, se  $x(t)$  non è continua in un intorno dell'origine, il risultato di tale limite dipende dalla successione scelta.

Noi scegliamo una approssimazione  $d_n(t)$  della delta di Dirac con  $d_n(t) = 0$  se  $t \geq 0$ . In questo modo, se  $x(t)$  è, per  $t < 0$  (o almeno in un intorno sinistro dello zero), una funzione per cui esiste finito il limite seguente:

$$\lim_{t \rightarrow 0_-} x(t) = x(0_-), \quad (7.51)$$

diamo al prodotto  $\delta(t)x(t)$  il valore  $x(0_-)\delta(t)$ .

Con queste premesse, sia  $x(t)$  un segnale con trasformata unilatera di Laplace data da  $X_u(s)$ , con dominio il semipiano destro  $\text{dom } \mathcal{L} X_u(s)$ , e sia definito il limite (7.51), allora la derivata distribuzionale  $x'(t)$  di  $x(t)$  è tale che:

$$\boxed{\mathcal{L}_u[x'(t)] = sX_u(s) - x(0_-),} \quad (7.52)$$

e per le derivate di ordine superiore si ha che:

$$\boxed{\mathcal{L}_u[x^{(n)}(t)] = s^n X_u(s) - s^{n-1}x(0_-) - \dots - sx^{(n-2)}(0_-) - x^{(n-1)}(0_-),} \quad (7.53)$$

con dominio che include o è uguale a  $\text{dom } \mathcal{L}X_u(s)$ .

**Osservazione 7.12** Nel contesto applicativo dell'ingegneria elettronica o più in generale dell'area dell'informazione, nella formula della trasformata di Laplace unilatera si usa l'espressione (7.47) per definire  $x_u(t)$  e si esprime la proprietà di derivazione in  $t$  come in (7.52), facendo intervenire  $x(0_-)$ . Si tenga presente che in altri contesti vi possono essere delle espressioni differenti che, per esempio nella proprietà che riguarda la derivazione in  $t$ , fanno intervenire  $x(0_+)$ . ■

**Esempio 7.48** Si determini la trasformata unilatera di Laplace della derivata prima del segnale  $x(t) = \cos t$ .

La formula (7.52) ci fornisce:

$$\mathcal{L}_u[(\cos t)'] = s\mathcal{L}_u[\cos t] - \cos 0 = s\mathcal{L}[u(t) \cos t] - 1 = s \frac{s}{s^2 + 1} - 1.$$

**Esempio 7.49** Si calcoli la trasformata unilatera di Laplace della derivata prima del segnale  $x(t) = u(t+1) + u(t)e^t$ .

Si osservi che  $x_u(t) = u(t)(1 + e^t)$  e che  $x(0_-) = 1$ . La formula (7.52) ci fornisce:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[(u(t+1) + u(t)e^t)'] &= s\mathcal{L}_u[u(t+1) + u(t)e^t] - 1 = s\mathcal{L}[u(t) + u(t)e^t] - 1 = \\ &= s \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \right) - 1 = \frac{2s-1}{s-1} - 1. \end{aligned}$$

## 7.8.2 Proprietà della convoluzione per $\mathcal{L}_u$

Quando abbiamo definito il prodotto di convoluzione, al termine del capitolo sulle distribuzioni, avevamo osservato che la convoluzione di due funzioni nulle per  $t < 0$  si riduce a un integrale tra 0 e  $t$ . Possiamo, tenendo presente questa indicazione, definire la *convoluzione unilatera* di due funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  nel modo seguente:

$$x(t) *_u y(t) = u(t)x(t) *_u y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)x(\tau)u(t-\tau)y(t-\tau) d\tau,$$

e quindi in conclusione:

$$x(t) *_u y(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau) d\tau. \quad (7.54)$$

Nel caso di due distribuzioni  $x(t)$  e  $y(t)$ , assumiamo come definizione la seguente:

$$x(t) *_u y(t) = x_u(t) *_u y_u(t). \quad (7.55)$$

È facile allora mostrare che:

$$\mathcal{L}_u \left[ \int_0^t x(t)y(t-\tau) d\tau \right] = \mathcal{L}_u [x(t)] \mathcal{L}_u [y(t)] = X_u(s)Y_u(s), \quad (7.56)$$

e nel caso di distribuzioni:

$$\mathcal{L}_u [x(t) * u y(t)] = \mathcal{L}_u [x_u(t) * y_u(t)] = \mathcal{L}_u [x(t)] \mathcal{L}_u [y(t)] = X_u(s)Y_u(s). \quad (7.57)$$

**Esempio 7.50** Si calcoli la trasformata di Laplace unilatera della seguente espressione:

$$\int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau.$$

Osserviamo che l'integrale da calcolare è la convoluzione unilatera di  $e^t$  e di  $\sin t$ , e quindi:

$$\mathcal{L}_u [e^t * u \sin t] = \mathcal{L}_u [e^t] \mathcal{L}_u [\sin t] = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2+1}. \quad (7.58)$$

Si può verificare che:

$$\int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau = (1/2) (e^{-t} - \cos t + \sin t),$$

che ha come trasformata di Laplace unilatera proprio l'ultimo membro della (7.58). ■

## 7.9 Uso della trasformata nei modelli differenziali

Un modello ingresso-uscita, che indichiamo con  $\mathcal{T}$ , è una relazione funzionale tra un segnale di ingresso (o eccitazione)  $e(t)$  e un segnale di uscita (o risposta)  $y(t)$ , vedi la figura 7.20, per cui scriviamo:

$$y(t) = \mathcal{T}e(t).$$

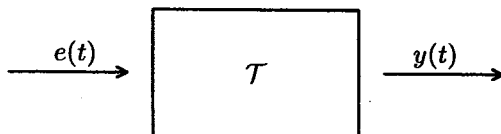


**Fig. 7.20** Modello ingresso-uscita.



Un modello ingresso-uscita si dice differenziale se il legame  $\mathcal{T}$  tra  $e(t)$  e  $y(t)$  può essere descritto da equazioni differenziali. Noi prendiamo in considerazione modelli differenziali per i quali le equazioni differenziali che intervengono sono a coefficienti costanti. Modelli di questo tipo descrivono i circuiti elettronici a parametri concentrati, ovvero circuiti in cui intervengono resistenze, capacità e induttanze ideali e non dipendenti dal tempo.

Per presentare l'espressione di un modello differenziale dobbiamo precisare alcune notazioni riguardanti gli operatori differenziali. Si chiama operatore differenziale di ordine  $n$  una espressione, che indichiamo con  $\mathcal{D}_n$ , del tipo seguente:

$$\mathcal{D}_n \left( \frac{d}{dt} \right) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} + a_0, \quad (7.59)$$

con  $a_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , costanti. L'applicazione dell'operatore  $\mathcal{D}_n$  alla distribuzione  $y(t)$  ci dà:

$$\mathcal{D}_n \left( \frac{d}{dt} \right) y(t) = a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t).$$

Per comodità utilizziamo la seguente simbologia per la derivazione:

$$D = \frac{d}{dt} \quad D^n = \frac{d^n}{dt^n}.$$

Cosideriamo ora un'altro operatore differenziale:

$$\mathcal{N}_m(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \cdots + b_1 D + b_0, \quad (7.60)$$

con  $b_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , costanti. Applicando  $\mathcal{N}_m(D)$  al segnale  $e(t)$ , si ha:

$$\mathcal{N}_m(D)e(t) = b_m e^{(m)}(t) + b_{m-1} e^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 e'(t) + b_0 e(t).$$

**Osservazione 7.13** Le notazioni (7.59) e (7.60) sono di tipo polinomiale, ove però la variabile del polinomio è l'operatore differenziale  $D$  e le potenze di  $D$  sono delle derivate di ordine superiore. Possiamo perciò associare all'operatore differenziale (7.59) il polinomio seguente:

$$\mathcal{D}_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad (7.61)$$

e all'operatore differenziale (7.60) il polinomio:

$$\mathcal{N}_m(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0. \quad (7.62)$$

■

Precisiamo ora cosa intendiamo per modello differenziale.

**Definizione 7.4** Un modello ingresso-uscita è detto modello differenziale se il legame tra il segnale di ingresso e quello di uscita può essere descritto da una relazione di questo tipo:

$$\boxed{\mathcal{D}_n(D)y(t) = \mathcal{N}_m(D)e(t)} \quad (7.63)$$

Supponendo che sia il segnale di ingresso  $e(t)$  che la risposta  $y(t)$  abbiano trasformata di Laplace  $E(s)$  e  $Y(s)$  rispettivamente, possiamo applicare la trasformata di Laplace ad ambo i membri della (7.63) e otteniamo:

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}_n(D)y(t)] = \mathcal{L}[\mathcal{N}_m(D)e(t)],$$

che per le proprietà della trasformata diviene:

$$\mathcal{D}_n(s)Y(s) = \mathcal{N}_m(s)E(s), \quad (7.64)$$

ove  $\mathcal{D}_n(s)$  e  $\mathcal{N}_m(s)$  sono i polinomi delle formule (7.61) e (7.62).

Se l'ingresso è nullo ( $e(t) = 0$ ), la risposta, che indichiamo con  $w(t)$ , prende il nome di *evoluzione propria* e soddisfa l'equazione:

$$\mathcal{D}_n(D)w(t) = 0.$$

Ora le evoluzioni proprie sono tutte del tipo:

$$w(t) = P(t)e^{\tilde{s}t},$$

per opportuni polinomi  $P(t)$  e costanti complesse  $\tilde{s}$ . Si tratta cioè di funzioni che non hanno trasformata di Laplace bilatera, eccetto che:

$$w(t) = 0.$$

D'altro canto, se  $y(t)$  è una risposta che soddisfa la (7.63) anche

$$y(t) + w(t)$$

soddisfa la (7.63), poiché:

$$\mathcal{D}_n(D)(y(t) + w(t)) = \mathcal{D}_n(D)y(t) + \mathcal{D}_n(D)w(t) = \mathcal{D}_n(D)y(t),$$

ma il metodo della trasformata di Laplace bilatera può essere applicato solo quando  $w(t) = 0$ .

Supponiamo ora che l'ingresso  $e(t)$ , oltre ad avere la trasformata di Laplace  $E(s)$ , sia nullo per  $t < t_0$ , e che quindi il suo dominio sia un semipiano destro dato dalle  $s$  che hanno  $\text{Re } s > \sigma'_e$ , ovvero:

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{per } t < t_0 \\ \mathcal{L}[e(t)] = E(s) & \text{con } \text{Re } s > \sigma'_e \end{cases} \quad (7.65)$$

Se  $e(t)$  ha le caratteristiche della (7.65), si dice *risposta forzata* la risposta  $y(t)$  che soddisfa la (7.63) e che è nulla per  $t < t_0$  e che quindi ha trasformata di Laplace con dominio un semipiano destro, dato dalle  $s$  con  $\text{Re } s > \sigma'_y$ , per un opportuno  $\sigma'_y$ , ovvero:

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{per } t < t_0 \\ \mathcal{L}[y(t)] = Y(s) & \text{con } \text{Re } s > \sigma'_y \\ \mathcal{D}_n(D)y(t) = \mathcal{N}_m(D)e(t) \end{cases} \quad (7.66)$$

**Osservazione 7.14** La risposta forzata definita dalle (7.66) è spesso indicata come risposta forzata a condizioni iniziali nulle. La specificazione “a condizioni iniziali nulle” è però non necessaria, salvo quando si vuole sottolineare la differenza in rapporto alla risposta forzata a condizioni iniziali non nulle cui accenneremo più avanti. ■

Nelle condizioni della (7.65) e (7.66) possiamo dividere ambo i membri della (7.64) per  $\mathcal{D}_n(s)$  e otteniamo:

$$Y(s) = \frac{\mathcal{N}_m(s)}{\mathcal{D}_n(s)} E(s), \quad (7.67)$$

con dominio il più grande semipiano destro di analiticità per  $\mathcal{N}_m(s)E(s)/\mathcal{D}_n(s)$ .

**Osservazione 7.15** Nelle ipotesi (7.65) e (7.66) la risposta forzata  $y(t)$  è unica e quindi la relazione (7.67) individua  $y(t)$  in modo unico. ■

Se poniamo in ingresso l'eccitazione  $e(t) = \delta(t)$ , la risposta forzata prende il nome di *risposta impulsiva* e si indica con  $h(t)$ . Poiché la trasformata della  $\delta(t)$  è 1, la trasformata di Laplace della  $h(t)$ , che indichiamo con  $H(s)$ , soddisfa, per la (7.67), alla seguente relazione:

$$H(s) = \frac{\mathcal{N}_m(s)}{\mathcal{D}_n(s)} \quad (7.68)$$

che dunque è una funzione razionale, che ha come dominio il più grande semipiano destro di analiticità per  $\mathcal{N}_m(s)/\mathcal{D}_n(s)$ . Scomponendo in fratti semplici la  $H(s)$ , si può facilmente farne la antitrasformata e ottenere la  $h(t)$ .

La funzione  $H(s)$ , trasformata della  $h(t)$  ed espressa dalla (7.68), prende il nome di *funzione di trasferimento*.

La funzione di trasferimento gioca un ruolo importante, poiché contiene, in generale, tutte le informazioni relative al modello differenziale. Infatti la (7.67) per la (7.68) diviene:

$$Y(s) = H(s)E(s) \quad (7.69)$$

**Osservazione 7.16** Abbiamo detto che la funzione di trasferimento  $H(s)$  conserva in generale tutte le informazioni del modello differenziale da cui proviene, ma vi è qualche eccezione, che, in termini di circuito elettronico, si esprime dicendo che vi sono dei modi propri incontrollabili e che sul modello differenziale si traduce nella presenza di divisori comuni ai due polinomi  $\mathcal{D}_n(s)$  e  $\mathcal{N}_m(s)$ . ■

**Osservazione 7.17** In assenza di modi propri incontrollabili, dalla  $H(s)$  e quindi dalla  $h(t)$ , si possono ricavare tutte le evoluzioni proprie del modello ovvero, in altri termini, tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata. Infatti l'equazione differenziale omogenea associata è:

$$\mathcal{D}_n(D)w(t) = 0$$

e la sua equazione caratteristica è:

$$\mathcal{D}_n(s) = 0$$

ove  $\mathcal{D}_n(s)$  è proprio il denominatore della  $H(s)$ . ■

**Esempio 7.51** Un modello differenziale è descritto dalla seguente relazione:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 3e'(t);$$

trovare la funzione di trasferimento del modello e la risposta forzata all'ingresso:

$$e(t) = u(t)e^t.$$

La relazione differenziale può essere scritta nel modo seguente:

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = 3De(t),$$

da cui, trasformando ambo i membri, si ha:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 3sE(s),$$

e quindi, dividendo per il polinomio del primo membro, si ha:

$$Y(s) = \frac{3s}{s^2 + 3s + 2}E(s).$$

La funzione di trasferimento è data da:

$$H(s) = \frac{3s}{s^2 + 3s + 2},$$

che ha come antitrasformata la risposta impulsiva seguente:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3s}{(s^2 + 3s + 2)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-3}{s+1} + \frac{6}{s+2} \right] = -3u(t)e^{-t} + 6u(t)e^{-2t}.$$

La trasformata di  $e(t)e^t$  è la seguente:

$$E(s) = \mathcal{L}[u(t)e^t] = \frac{1}{s-1},$$

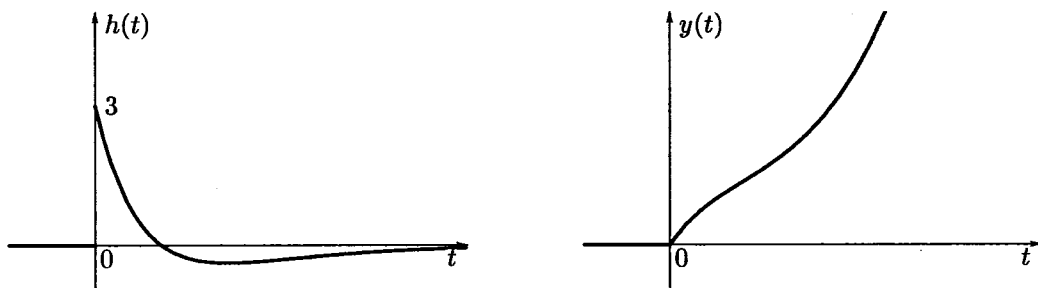
e quindi, per la (7.69), si ha:

$$Y(s) = \frac{3s}{(s^2 + 3s + 2)(s-1)},$$

con dominio il semipiano destro delle  $s$  con  $\text{Re } s > 1$ . Antitrasformando si ottiene:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3s}{(s^2 + 3s + 2)(s-1)} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{3/2}{s+1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-2}{s+2} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/2}{s-1} \right] = \\ &= (3/2)u(t)e^{-t} - 2u(t)e^{-2t} + (1/2)u(t)e^t. \end{aligned}$$

Vedi le figure 7.21. ■

Fig. 7.21 Risposta impulsiva  $h(t)$  e risposta forzata  $y(t)$ .

Passiamo ora a prendere in considerazione il caso in cui alla relazione differenziale (7.63), siano associate delle condizioni iniziali non tutte nulle.

Se  $e(t)$  è un ingresso, nullo per  $t < 0$  e che ammette trasformata di Laplace, si dice *risposta forzata a condizioni iniziali non nulle* quella risposta  $y(t)$  che soddisfa la relazione differenziale (7.63) e le  $n$  condizioni iniziali:

$$y(0_-) = c_0, y'(0_-) = c_1, y''(0_-) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(0_-) = c_{n-1},$$

con  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  costanti assegnate.

Se applichiamo ad ambo i membri della relazione (7.63) la trasformata di Laplace unilatera, otteniamo:

$$\mathcal{L}_u[\mathcal{D}_n(D)y(t)] = \mathcal{L}_u[\mathcal{N}_m(D)e(t)] \quad (7.70)$$

e quindi, per la (7.53), il primo membro diviene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[\mathcal{D}_n(D)y(t)] = & \mathcal{D}_n(s)Y(s) - a_n s^{n-1}y(0_-) - a_n s^{n-2}y'(0_-) + \\ & - a_{n-1} s^{n-2}y(0_-) - \dots - a_2 y'(0_-) - a_1 y(0_-), \end{aligned} \quad (7.71)$$

mentre il secondo membro, ricordando che si è supposto  $e(t)$  nullo  $t < 0$ , diviene:

$$\mathcal{L}_u[\mathcal{N}_m(D)e(t)] = \mathcal{N}_m(s)E(s),$$

da queste relazioni si può ricavare la  $Y(s)$  e quindi la  $y(t)$ .

**Esempio 7.52** Si calcoli la risposta forzata all'ingresso  $e(t) = u(t)e^t$  del modello differenziale dell'esempio 7.51, con le condizioni iniziali seguenti:

$$y(0_-) = 3 \qquad y'(0_-) = 0.$$

La relazione differenziale che lega ingresso e uscita è:

$$(D^2 + 3D + 2)y(t) = 3D(u(t)e^t),$$

e quindi la trasformata unilatera di Laplace ci dà:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) - 3y(0_-) = 3s \frac{1}{s-1},$$

e, sostituendo i valori delle condizioni iniziali, si ha:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 3s \frac{1}{s-1} + 3s + 9,$$

dividendo per  $(s^2 + 3s + 2)$ , si ha:

$$Y(s) = \frac{3s}{(s-1)(s^2 + 3s + 2)} + \frac{3s + 9}{s^2 + 3s + 2}.$$

Il primo addendo è già stato antitrasformato nell'esempio 7.51. Calcoliamo allora la antitrasformata del secondo addendo:

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[ \frac{3s + 9}{s^2 + 3s + 2} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[ \frac{6}{s+1} + \frac{-3}{s+2} \right] = 6e^{-t} - 3e^{-2t},$$

e quindi in definitiva la risposta forzata a condizioni iniziali non nulle, richiesta nell'esempio, è data da:

$$y(t) = (3/2)u(t)e^{-t} - 2u(t)e^{-2t} + (1/2)u(t)e^t + 6e^{-t} - 3e^{-2t}. \quad (7.72)$$

■

**Osservazione 7.18** Nel fare la antitrasformata unilatera di Laplace vi è ambiguità sui valori da dare alla antitrasformata per  $t < 0$ . Nell'esempio precedente abbiamo seguito un ragionamento che cerchiamo ora di palesare. Nella espressione (7.72), abbiamo distinto due addendi, che, per chiarezza, ora indichiamo nel modo seguente:

$$y_0(t) = (3/2)u(t)e^{-t} - 2u(t)e^{-2t} + (1/2)u(t)e^t$$

e

$$y_I(t) = 6e^{-t} - 3e^{-2t}$$

Si osservi che in  $y_0(t)$  abbiamo posto il fattore  $u(t)$ , in quanto  $y_0(t)$  coincide con la risposta forzata a condizioni iniziali nulle (si veda l'esercizio 7.51), mentre in  $y_I(t)$  abbiamo lasciato valori non nulli anche per  $t < 0$ , in quanto  $y_I(t)$  è il termine legato alle condizioni iniziali e quindi a ciò che è presente per  $t < 0$  (si veda la figura 7.22). ■

Gli stessi ragionamenti fatti per la trasformata di Laplace si possono ripetere per la trasformata di Fourier. È evidente che si dovrà richiedere l'esistenza della trasformata di Fourier di  $e(t)$  e di  $y(t)$ . In questo caso dalla:

$$\mathcal{F} [\mathcal{D}_n(D)y(t)] = \mathcal{F} [\mathcal{K}_m(D)e(t)],$$

otteniamo:

$$\mathcal{D}_n(j\omega)Y(\omega) = \mathcal{K}_m(j\omega)E(\omega),$$

e quindi ponendo:

$$H(\omega) = \frac{\mathcal{K}_m(j\omega)}{\mathcal{D}_n(j\omega)},$$

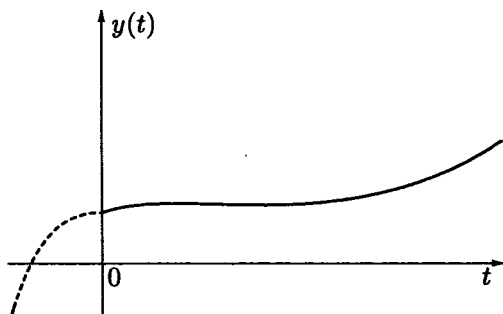


Fig. 7.22 Risposta forzata  $y(t)$  a condizioni iniziali non nulle.

si ricava infine:

$$Y(\omega) = H(\omega)E(\omega), \quad (7.73)$$

che viene detta funzione di trasferimento secondo Fourier.

### 7.9.1 RLC in serie

Consideriamo in questo paragrafo il circuito  $RLC$  in serie, con ingresso un generatore di tensione e uscita la tensione sul condensatore, vedi la figura 7.23.

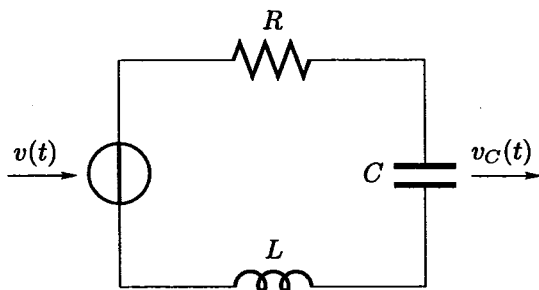


Fig. 7.23 Circuito  $RLC$  in serie.

Le costanti  $R$ ,  $L$  e  $C$  indicano rispettivamente i valori della resistenza, della induttanza e della capacità. Indichiamo con  $v(t)$  la tensione prodotta dal generatore di tensione, con  $v_R(t)$ ,  $v_L(t)$  e  $v_C(t)$  rispettivamente le tensioni sulla resistenza, sulla induttanza e sulla capacità. Con  $i(t)$  indichiamo la corrente del circuito.

Le equazioni costitutive sono:

$$\begin{cases} v_R(t) = Ri(t) \\ v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \end{cases} \quad (7.74)$$

Inoltre la somma delle cadute di tensione, con il loro segno, deve essere nulla e quindi:

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v(t). \quad (7.75)$$

Prendendo come incognita  $v_C(t)$ , dalle (7.74) ricaviamo

$$\begin{aligned} v_R(t) &= RC \frac{dv_C(t)}{dt} \\ v_L(t) &= LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2}, \end{aligned}$$

che poste nella (7.75), ci danno la seguente equazione differenziale:

$$LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v(t),$$

e dividendo per  $LC$  e ponendo  $y(t) = v_C(t)$  e  $e(t) = v(t)$  si ha:

$$y''(t) + (R/L)y'(t) + (1/LC)y(t) = (1/LC)e(t),$$

che può anche essere scritta nel modo seguente:

$$\left( D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC} \right) y(t) = \frac{1}{LC}e(t) \quad (7.76)$$

**Esempio 7.53** Nel circuito RLC in serie descritto dall'equazione (7.76), si considerino assegnate le seguenti costanti:

$$R = 5 \quad L = 2 \quad C = 1/2, \quad (7.77)$$

e si trovi la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva.

Dalla (7.76) con le costanti della (7.77) ricaviamo che la risposta impulsiva deve soddisfare la seguente equazione:

$$\left( D^2 + \frac{5}{2}D + 1 \right) h(t) = \delta(t),$$

che, mediante la trasformata di Laplace, diviene:

$$\left( s^2 + \frac{5}{2}s + 1 \right) H(s) = 1,$$

da cui ricaviamo subito la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s/2 + 1}.$$

Prima di antitrasformare possiamo osservare che siamo nelle condizioni di applicabilità sia del teorema del valore iniziale ( $H(s)$  è una funzione razionale propria), sia del



teorema del valore finale ( $H(s)$  è analitica in un semipiano destro che comprende l'asse immaginario). Per il teorema del valore iniziale si ha:

$$h(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s H(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s}{s^2 + 5s/2 + 1} = 0$$

$$h'(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^2 H(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s^2}{s^2 + 5s/2 + 1} = 1.$$

Mentre per il teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = [sH(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s}{s^2 + 5s/2 + 1} \right]_{s=0} = 0.$$

I poli di  $H(s)$  sono:

$$s_1 = -1/2 \quad s_2 = -2,$$

per cui:

$$H(s) = \frac{\mathbf{R}_H(-1/2)}{s + 1/2} + \frac{\mathbf{R}_H(-2)}{s + 2} = \frac{2/3}{s + 1/2} + \frac{-2/3}{s + 2},$$

con dominio le  $s \in \mathbb{C}$  con  $\mathbf{Re} s > -1/2$ . Antitrasformando la  $H(s)$ , otteniamo la risposta impulsiva seguente:

$$h(t) = (2/3)u(t)e^{-t/2} - (2/3)u(t)e^{-2t},$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.24. ■

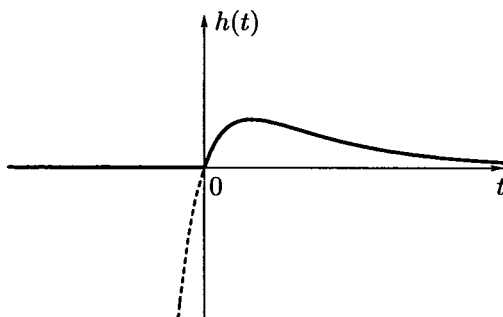


**Fig. 7.24** RLC in serie: risposta impulsiva.

**Esempio 7.54** Dato il circuito RLC in serie descritto dall'equazione (7.76), con le costanti della (7.77), si trovi la risposta forzata  $y_1(t)$  all'ingresso

$$e_1(t) = u(t).$$

Possiamo applicare la (7.69), e abbiamo:

$$Y_1(s) = H(s)E_1(s),$$

ove  $H(s)$  è stata calcolata nell'esempio 7.53 e la  $E_1(s)$  è data da:

$$E_1(s) = \mathcal{L}[u(t)] = 1/s,$$

e quindi si ha che:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + 5s/2 + 1} \frac{1}{s},$$

con dominio le  $s$  con  $\text{Re } s > 0$ .

Alla funzione  $Y_1(s)$  si può applicare sia del teorema del valore iniziale (si tratta di una funzione razionale propria), sia del teorema del valore finale ( $Y_1(s)$  è analitica in un semipiano destro che comprende l'asse immaginario ad eccezione di un polo semplice nell'origine). Il teorema del valore iniziale ci dà:

$$y_1(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s Y_1(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} = 0$$

$$y_1'(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^2 Y_1(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s^2}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} = 0$$

$$y_1''(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^3 Y_1(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s^3}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} = 1.$$

Mentre il teorema del valore finale ci fornisce:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = [sY_1(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} \right]_{s=0} = 1.$$

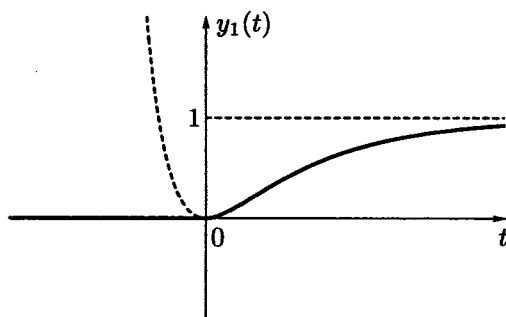
In effetti la antitrasformata di  $Y_1(s)$  è:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mathbf{R}(0)}{s} + \frac{\mathbf{R}(-1/2)}{s + 1/2} + \frac{\mathbf{R}(-2)}{s + 2} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} + \frac{-4/3}{s + 1/2} + \frac{2/3}{s + 2} \right] = \\ &= u(t) - (4/3)u(t)e^{-t/2} + (1/3)u(t)e^{-2t}. \end{aligned}$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.25. ■

**Esempio 7.55** Dato il circuito RLC in serie descritto dall'equazione (7.76), con le costanti della (7.77), si trovi la risposta forzata  $y_2(t)$  all'ingresso

$$e_2(t) = u(t) - u(t - T).$$

Fig. 7.25 RLC in serie: risposta forzata a  $u(t)$ .

Possiamo applicare la (7.69), e abbiamo:

$$Y_2(s) = H(s)E_2(s),$$

ove  $H(s)$  è stata calcolata nell'esempio 7.53 e la  $E_2(s)$  è data da:

$$E_2(s) = \mathcal{L}[u(t) - u(t - T)] = (1/s) - (1/s)e^{-sT},$$

e quindi si ha che:

$$Y_2(s) = \frac{1}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} - \frac{1}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} e^{-sT},$$

con dominio le  $s$  con  $\text{Re } s > -1/2$ .

Possiamo applicare sia il teorema del valore iniziale ( $Y_2(s)$  è somma di due funzioni razionali proprie di cui una moltiplicata per un esponenziale complesso), sia il teorema del valore finale ( $Y_2(s)$  è analitica in un semipiano destro che comprende l'asse immaginario). Dal teorema del valore iniziale ricaviamo:

$$y_2(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s Y_2(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s(1 - e^{-sT})}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} = 0$$

$$y_2'(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^2 Y_2(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s^2(1 - e^{-sT})}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} = 0$$

$$y_2''(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^3 Y_2(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s^3(1 - e^{-sT})}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} = 1.$$

Mentre dal teorema del valore finale otteniamo:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = [sY_2(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s(1 - e^{-sT})}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} \right]_{s=0} = 0.$$

In effetti la antitrasformata di  $Y_2(s)$  ci fornisce:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-sT}}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} \right] = \\ &= u(t) \left( 1 - (4/3)e^{-t/2} + (1/3)e^{-2t} \right) + \\ &\quad - u(t - T) \left( 1 - (4/3)e^{-(t-T)/2} + (1/3)e^{-2(t-T)} \right). \end{aligned}$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.26. ■

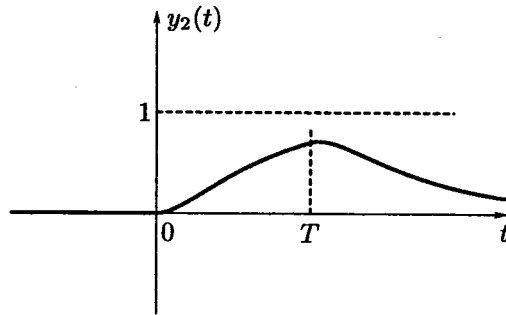


Fig. 7.26 RLC in serie: risposta forzata a  $u(t) - u(t - T)$ .

**Esempio 7.56** Dato il circuito RLC in serie descritto dall'equazione (7.76), con le costanti della (7.77), si trovi la risposta forzata  $y_3(t)$  all'ingresso

$$e_2(t) = u(t)$$

con le condizioni iniziali:

$$y_3(0_-) = 2 \qquad y_3'(0_-) = 2$$

Possiamo applicare le (7.70) e (7.71), e abbiamo:

$$\left( s^2 + \frac{5}{2}s + 1 \right) \mathcal{L}_u[y_3(t)] - sy_3(0_-) - y_3'(0_-) - (5/2)y_3(0_-) = \mathcal{L}_u[u(t)],$$

da cui si ottiene:

$$\mathcal{L}_u[y_3(t)] = \frac{1}{s(s^2 + 5s/2 + 1)} + \frac{2s + 7}{s^2 + 5s/2 + 1},$$

con dominio le  $s$  con  $\text{Re } s > 0$ . La antitrasformata del primo addendo è già stata calcolata nell'esempio 7.54, ci rimane quindi il seguente conto:

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[ \frac{2s + 7}{s^2 + 5s/2 + 1} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[ \frac{4}{s + 1/2} + \frac{-2}{s + 2} \right] = 4e^{-t/2} - 2e^{-2t},$$

e infine si ha:

$$y_3(t) = u(t) \left( 1 - (4/3)e^{-t/2} + (1/3)e^{-2t} \right) + 4e^{-t/2} - 2e^{-2t},$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.27. ■

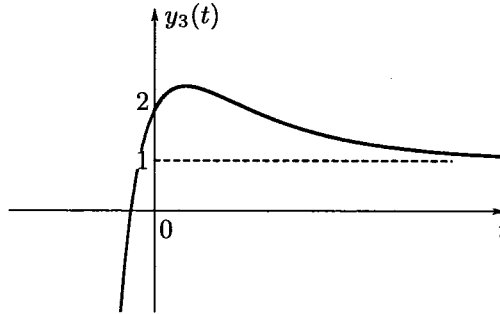


**Fig. 7.27** RLC in serie: risposta forzata a  $u(t)$  con condizioni iniziali.

### 7.9.2 RLC in parallelo

Consideriamo in questo paragrafo il circuito  $RLC$  in parallelo, con l'eccitazione data da una corrente di ingresso e uscita la tensione, vedi la figura 7.28.

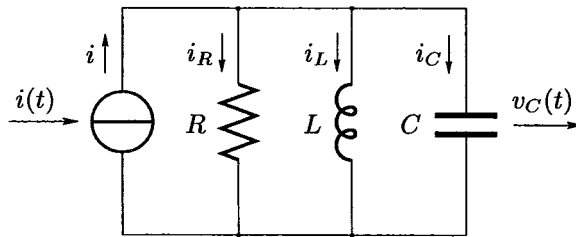


**Fig. 7.28** Circuito RLC in parallelo.

Le costanti  $R$ ,  $L$  e  $C$  indicano rispettivamente i valori della resistenza, della induttanza e della capacità. Indichiamo con  $i(t)$  la corrente di ingresso, con  $i_R(t)$ ,  $i_L(t)$  e  $i_C(t)$  le correnti sulle maglie con la resistenza, la induttanza e la capacità rispettivamente. Con  $v(t)$  indichiamo la tensione.

Le equazioni costitutive sono:

$$\begin{cases} i_R(t) = v(t)/R \\ i_C(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \\ i_L(t) = (1/L) \int v(t) dt \end{cases} \quad (7.78)$$

Inoltre la somma delle correnti sulle maglie deve uguagliare la corrente di ingresso e quindi:

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i(t). \quad (7.79)$$

Prendendo come incognita  $v(t)$ , dalle (7.78) e dalla (7.79) ricaviamo:

$$C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{R}v(t) + \frac{1}{L} \int v(t) dt = i(t),$$

che derivata membro a membro diviene:

$$C \frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L}v(t) = \frac{di(t)}{dt},$$

e dividendo per  $C$  e ponendo  $y(t) = v(t)$  e  $e(t) = i(t)$ , si ha:

$$y''(t) + (1/RC)y'(t) + (1/LC)y(t) = (1/C)e'(t),$$

che può anche essere scritta nel modo seguente:

$$\left( D^2 + \frac{1}{RC}D + \frac{1}{LC} \right) y(t) = \frac{1}{C}De(t) \quad (7.80)$$

**Esempio 7.57** Nel circuito RLC in parallelo descritto dall'equazione (7.80), si considerino assegnate le seguenti costanti:

$$R = 1/5 \quad L = 1/2 \quad C = 2, \quad (7.81)$$

e si trovi la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva.

Dalla (7.80) con le costanti della (7.81) ricaviamo che la risposta impulsiva deve soddisfare la seguente equazione:

$$\left( D^2 + \frac{5}{2}D + 1 \right) h(t) = (1/2)\delta'(t),$$

che, mediante la trasformata di Laplace, diviene:

$$\left( s^2 + \frac{5}{2}s + 1 \right) H(s) = (1/2)s,$$

da cui ricaviamo subito la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s}{2s^2 + 5s + 2}.$$

Osserviamo che siamo nelle condizioni di applicabilità sia del teorema del valore iniziale ( $H(s)$  è una funzione razionale propria), sia del teorema del valore finale ( $H(s)$  è analitica in un semipiano destro che comprende l'asse immaginario). Il teorema del valore iniziale nel nostro caso ci dà:

$$h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2}{2s^2 + 5s + 2} = 1/2,$$

$|\arg s| \leq k < \pi/2 \quad \quad \quad |\arg s| \leq k < \pi/2$

mentre il teorema del valore finale ci dà:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = [sH(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s^2}{2s^2 + 5s + 2} \right]_{s=0} = 0.$$

I poli di  $H(s)$  sono:

$$s_1 = -1/2 \quad s_2 = -2,$$

per cui:

$$H(s) = \frac{R_H(-1/2)}{s + 1/2} + \frac{R_H(-2)}{s + 2} = \frac{-1/6}{s + 1/2} + \frac{2/3}{s + 2},$$

con dominio le  $s \in \mathbb{C}$  con  $\text{Re } s > -1/2$ . Antitrasformando la  $H(s)$ , otteniamo la risposta impulsiva seguente:

$$h(t) = (-1/6)u(t)e^{-t/2} + (2/3)u(t)e^{-2t},$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.29. ■

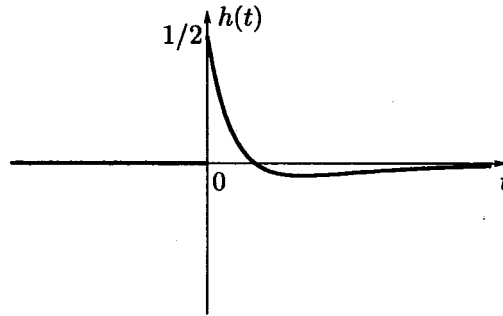


**Fig. 7.29** RLC in parallelo: risposta impulsiva.

**Esempio 7.58** Dato il circuito RLC in parallelo descritto dall'equazione (7.80), con le costanti della (7.81), si trovi la risposta forzata  $y_1(t)$  all'ingresso

$$e_1(t) = u(t).$$

Possiamo applicare la (7.69), e abbiamo:

$$Y_1(s) = H(s)E_1(s),$$

ove  $H(s)$  è stata calcolata nell'esempio 7.57 e la  $E_1(s)$  è data da:

$$E_1(s) = \mathcal{L}[u(t)] = 1/s,$$

e quindi si ha che:

$$Y_1(s) = \frac{s}{2s^2 + 5s + 2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{2s^2 + 5s + 2}$$

con dominio le  $s$  con  $\text{Re } s > -1/2$ .

Possiamo osservare che è possibile applicare sia il teorema del valore iniziale ( $Y_1(s)$  è una funzione razionale propria), sia il teorema del valore finale ( $Y_1(s)$  è analitica in un semipiano destro che comprende l'asse immaginario). Dal teorema del valore iniziale si ha:

$$y_1(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s Y_1(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s}{2s^2 + 5s + 2} = 0$$

$$y_1'(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^2 Y_1(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s^2}{2s^2 + 5s + 2} = 1/2$$

Mentre dal teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_1(t) = [sY_1(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s}{2s^2 + 5s + 2} \right]_{s=0} = 0.$$

In effetti la antitrasformata di  $Y_1(s)$  ci fornisce:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2s^2 + 5s + 2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\mathbf{R}(-1/2)}{s + 1/2} + \frac{\mathbf{R}(-2)}{s + 2} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/3}{s + 1/2} + \frac{-1/3}{s + 2} \right] = \\ &= (1/3)u(t)e^{-t/2} - (1/3)u(t)e^{-2t}. \end{aligned}$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.30. ■

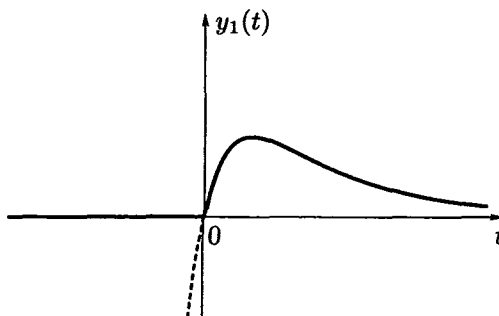


Fig. 7.30 RLC in parallelo: risposta forzata a  $u(t)$ .

**Esempio 7.59** Dato il circuito RLC in parallelo descritto dall'equazione (7.80), con le costanti della (7.81), si trovi la risposta forzata  $y_2(t)$  all'ingresso

$$e_2(t) = u(t) - u(t - T).$$



Possiamo applicare la (7.69), e abbiamo:

$$Y_2(s) = H(s)E_2(s),$$

ove  $H(s)$  è stata calcolata nell'esempio 7.57 e la  $E_2(s)$  è data da:

$$E_2(s) = \mathcal{L}[u(t) - u(t - T)] = (1/s) - (1/s)e^{-sT},$$

e quindi si ha che:

$$Y_2(s) = \frac{1}{2s^2 + 5s + 2} - \frac{1}{2s^2 + 5s + 2} e^{-sT},$$

con dominio le  $s$  con  $\text{Re } s > -1/2$ .

Siamo nelle condizioni di applicabilità sia del teorema del valore iniziale ( $Y_2(s)$  è somma di due funzioni razionali proprie di cui una moltiplicata per un esponenziale complesso), sia del teorema del valore finale ( $Y_2(s)$  è analitica in un semipiano destro che comprende l'asse immaginario). Per il teorema del valore iniziale si ha:

$$y_2(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s Y_2(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s(1 - e^{-sT})}{2s^2 + 5s + 2} = 0$$

$$y_2'(0_+) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} s^2 Y_2(s) = \lim_{\substack{s \rightarrow \infty \\ |\arg s| \leq k < \pi/2}} \frac{s^2(1 - e^{-sT})}{2s^2 + 5s + 2} = 1/2.$$

Mentre per il teorema del valore finale si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_2(t) = [sY_2(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s(1 - e^{-sT})}{2s^2 + 5s + 2} \right]_{s=0} = 0.$$

In effetti la antitrasformata di  $Y_2(s)$  ci fornisce:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{2s^2 + 5s + 2} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-sT}}{2s^2 + 5s + 2} \right] = \\ &= u(t) \left( (1/3)e^{-t/2} - (1/3)e^{-2t} \right) + \\ &\quad - u(t - T) \left( (1/3)e^{-(t-T)/2} - (1/3)e^{-2(t-T)} \right). \end{aligned}$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.31. ■

**Esempio 7.60** Dato il circuito RLC in parallelo descritto dall'equazione (7.80), con le costanti della (7.81), si trovi la risposta forzata  $y_3(t)$  all'ingresso

$$e_2(t) = u(t)$$

con le condizioni iniziali:

$$y_3(0_-) = 1 \qquad y_3'(0_-) = -3$$

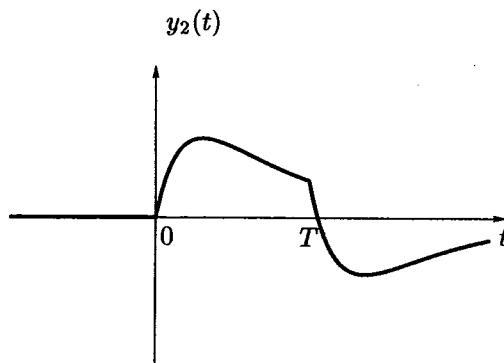


Fig. 7.31 RLC in parallelo: risposta forzata a  $u(t) - u(t - T)$ .

Possiamo applicare le (7.70) e (7.71), e abbiamo:

$$\left(s^2 + \frac{5}{2}s + 1\right) \mathcal{L}_u[y_3(t)] - sy_3(0_-) - y_3'(0_-) - (5/2)y_3(0_-) = \mathcal{L}_u[u(t)],$$

da cui si ottiene:

$$\mathcal{L}_u[y_3(t)] = \frac{1}{2s^2 + 5s + 2} + \frac{s - 1/2}{s^2 + 5s/2 + 1},$$

con dominio le  $s$  con  $\text{Re } s > -1/2$ . La antitrasformata del primo addendo è già stata calcolata nell'esempio 7.58, mentre

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[ \frac{s - 1/2}{s^2 + 5s/2 + 1} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[ \frac{-2/3}{s + 1/2} + \frac{5/3}{s + 2} \right] = -(2/3)e^{-t/2} + (5/3)e^{-2t},$$

e infine si ha:

$$y_3(t) = u(t) \left[ (1/3)e^{-t/2} - (1/3)e^{-2t} \right] - (2/3)e^{-t/2} + (5/3)e^{-2t},$$

il cui grafico qualitativo è indicato in figura 7.32. ■

## 7.10 Transitorio e regime

In questo paragrafo affrontiamo la questione relativa alla risposta forzata a un segnale nullo per  $t < 0$  e che coincide con un segnale periodico, di periodo  $a$ , per  $t \geq 0$ . Supporremo di avere un modello differenziale *stabile*, ovvero un modello la cui risposta impulsiva tenda a 0 per  $t \rightarrow +\infty$ . La stabilità, in termini di funzione di trasferimento  $H(s)$ , si traduce nell'avere  $H(s)$  tutti i poli con parte reale strettamente negativa.

In queste condizioni la risposta forzata si può decomporre nella somma di due addendi di cui uno è una funzione razionale con lo stesso denominatore della risposta impulsiva e quindi gli stessi poli, mentre l'altro è una frazione con a denominatore  $1 - e^{-as}$  e a numeratore una funzione analitica in tutto  $\mathbb{C}$ .

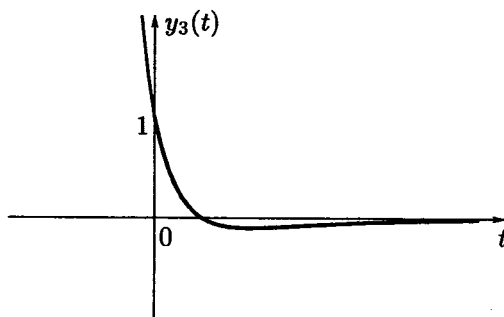


Fig. 7.32 RLC in parallelo: risposta forzata a  $u(t)$  con condizioni iniziali.

Sia dunque  $\mathcal{T}$  un modello differenziale, privo di modi propri incontrollabili, e con la seguente funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{N_m(s)}{D_n(s)},$$

con dominio un semipiano destro che comprende al suo interno l'asse immaginario. Sia  $e(t)$  un ingresso nullo per  $t < 0$  e che coincide con un segnale periodico, di periodo  $a$ , per  $t \geq 0$  e sia  $y(t)$  la risposta forzata a  $e(t)$ , allora esiste un polinomio  $P(s)$  e una funzione  $Y_{r,0}(s)$  analitica in tutto  $\mathbb{C}$  tali che:

$$Y(s) = H(s)E(s) = \frac{P(s)}{D_n(s)} + \frac{Y_{r,0}(s)}{1 - e^{-as}}, \quad (7.82)$$

ove il primo addendo, che indichiamo con:

$$Y_t(s) = \frac{P(s)}{D_n(s)},$$

prende il nome di termine di *transitorio*, così come la sua antitrasformata  $y_t(t)$ , mentre:

$$Y_r(s) = \frac{Y_{r,0}(s)}{1 - e^{-as}}$$

prende il nome di termine di *regime*, così come la sua antitrasformata  $y_r(t)$ .

La caratteristica di  $y_t(t)$  è che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_t(t) = 0,$$

mentre quella di  $y_r(t)$  è di essere periodica di periodo  $a$ :

$$y_r(t - a) = y_r(t).$$

Si può pensare  $y_r(t)$  come la risposta all'ingresso periodico (su tutto  $\mathbb{R}$ ), che coincide con l'ingresso  $e(t)$  per  $t \geq 0$ . Il termine di regime, in questo senso, potrebbe essere calcolato con l'uso della trasformata di Fourier.

### 7.10.1 RC passabasso

Consideriamo in questo paragrafo il circuito  $RC$  passabasso, con l'ingresso dato da un generatore di tensione e uscita la tensione sul condensatore, vedi la figura 7.33.

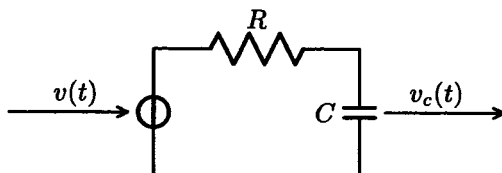


Fig. 7.33 Circuito  $RC$  passabasso.

Le costanti  $R$  e  $C$  indicano rispettivamente i valori della resistenza e della capacità. Indichiamo con  $v(t)$  la tensione di ingresso, con  $v_R(t)$  e  $v_C(t)$  le tensioni sulla resistenza e sulla capacità rispettivamente.

Le equazioni costitutive sono:

$$\begin{cases} v_R(t) = Ri(t) \\ i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \end{cases} \quad (7.83)$$

Inoltre la somma delle cadute di tensione deve essere nulla e quindi:

$$v_R(t) + v_C(t) = v(t). \quad (7.84)$$

Prendendo come incognita  $y(t) = v_C(t)$  e come ingresso  $e(t) = v(t)$ , dalle (7.78) e dalla (7.79) ricaviamo:

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = e(t),$$

e dividendo per  $C$  e ponendo  $y(t) = v(t)$  e  $e(t) = i(t)$ , si ha:

$$RCy'(t) + y(t) = e(t),$$

che, ponendo  $T = RC$ , può anche essere scritta nel modo seguente:

$$(TD + 1)y(t) = e(t). \quad (7.85)$$

La risposta all'impulso dovrà soddisfare l'equazione seguente:

$$(TD + 1)h(t) = \delta(t),$$

che trasformata dà:

$$(Ts + 1)H(s) = 1,$$

da cui si può ricavare la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

e, antitrasformando, la risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{T}u(t)e^{-t/T},$$

vedi la figura 7.34.

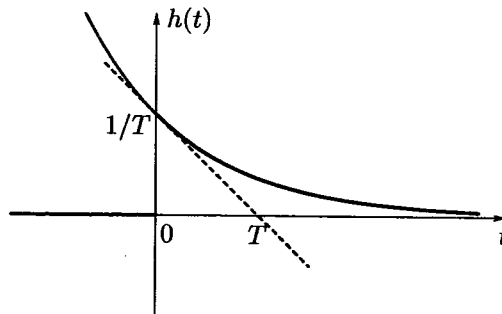


**Fig. 7.34** RC passabasso: risposta impulsiva.

Se l'ingresso  $e(t)$  è nullo per  $t < 0$  e coincide con  $e_0(t)$  per  $t \geq 0$  con  $e_0(t)$  periodica di periodo  $a$ , allora la risposta forzata  $y(t)$  ha come trasformata la seguente:

$$Y(s) = H(s)E(s) = H(s) \frac{E_0(s)}{1 - e^{-as}} = \frac{1/T}{s + 1/T} \frac{E_0(s)}{1 - e^{-as}},$$

che, seguendo la (7.82) può essere scomposta nel modo seguente:

$$Y(s) = \mathbf{R}_{Y(s)}[-1/T] \frac{1}{s + 1/T} + \left( (1/T)E_0(s) - \mathbf{R}_{Y(s)}[-1/T](1 - e^{-as}) \right) / (s + 1/T) \frac{1}{1 - e^{-as}}, \quad (7.86)$$

si osservi che:

$$Y_{r,0}(s) = \left( (1/T)E_0(s) - \mathbf{R}_{Y(s)}[-1/T](1 - e^{-as}) \right) / (s + 1/T)$$

è analitica in tutto C.

**Esempio 7.61** Sia dato il circuito RC passabasso, si trovi la risposta forzata all'ingresso:

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - na)$$

e si separi transitorio e regime.

Si ha che la risposta forzata  $y(t)$  deve soddisfare la seguente equazione:

$$Ty'(t) + y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - na),$$

che trasformata dà:

$$(Ts + 1)Y(s) = \frac{1}{1 - e^{-as}} \mathcal{L}[\delta(t)],$$

e quindi:

$$Y(s) = \frac{1}{(Ts + 1)(1 - e^{-as})},$$

che, per la (7.86), diviene:

$$Y(s) = \frac{1/T}{s + 1/T} + \frac{Y_{r,0}(s)}{1 - e^{-as}},$$

con:

$$Y_{r,0}(s) = \frac{1/T}{s + 1/T} - \frac{1/T}{1 - e^{a/T}} \frac{(1 - e^{-as})}{s + 1/T}.$$

Il termine di transitorio è dunque:

$$y_t(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/T}{s + 1/T} \right] = \frac{1/T}{1 - e^{a/T}} u(t) e^{-t/T},$$

mentre il termine di regime si ottiene antitrasformando dapprima  $Y_{r,0}(s)$ :

$$\begin{aligned} y_{r,0}(t) &= \mathcal{L}^{-1} [Y_{r,0}(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/T}{s + 1/T} - \frac{1/T}{1 - e^{a/T}} \frac{(1 - e^{-as})}{s + 1/T} \right] = \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-e^{a/T} + e^{-as}}{T(1 - e^{a/T})(s + 1/T)} \right] = \\ &= \frac{-e^{a/T}}{T(1 - e^{a/T})} u(t) e^{-t/T} + \frac{1}{T(1 - e^{a/T})} u(t - a) e^{-(t-a)/T} = \\ &= \frac{-e^{-(t-a)/T}}{T(1 - e^{a/T})} [u(t) - u(t - a)], \end{aligned}$$

e quindi:

$$y_r(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-e^{-(t-na-a)/T}}{T(1 - e^{a/T})} [u(t - na) - u(t - na - a)].$$

Nelle figure 7.35 sono illustrati i grafici di della risposta forzata  $y(t)$  e della risposta di regime  $y_r(t)$ . ■

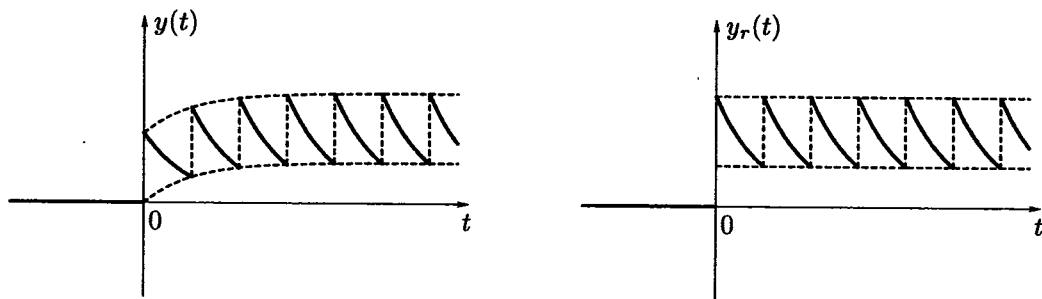


**Fig. 7.35** RC passabasso: risposta forzata e risposta di regime.

---

# Appendice A

## Numeri complessi

### A.1 Definizione di numero complesso

**Definizione A.1** *Data una coppia ordinata di numeri reali  $(a, b)$ , si definisce numero complesso l'espressione*

$$z = a + jb.$$

I numeri  $a$  e  $b$  sono detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di  $z$  e sono indicati con i simboli

$$\begin{aligned}a &= \operatorname{Re} z, \\b &= \operatorname{Im} z.\end{aligned}$$

I numeri con parte immaginaria nulla possono essere identificati con i numeri reali; per questo scriviamo semplicemente  $a$  invece che  $a + j0$ . I numeri con parte reale nulla sono detti *immaginari puri* e in questo caso scriviamo  $jb$  invece che  $0 + jb$ : in particolare il numero  $0 + j1$  è indicato semplicemente con  $j$  ed è detto *unità immaginaria*.

La rappresentazione geometrica di un numero complesso è del tutto naturale: nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  associamo al numero complesso  $z$  il punto di coordinate  $(a, b)$  oppure, in maniera equivalente, il vettore di componenti  $(a, b)$  (vedi figura A.1); in particolare il numero complesso 0 corrisponde all'origine, i numeri con parte immaginaria nulla ai punti dell'asse delle ascisse e gli immaginari puri ai punti dell'asse delle ordinate.

Il confronto tra due numeri complessi può essere fatto confrontando le parti reali e le parti immaginarie.

**Definizione A.2** *Due numeri complessi  $a + jb$  e  $c + jd$  sono uguali se e solo se  $a = c$  e  $b = d$ .*

### A.2 Operazioni tra numeri complessi

Nell'insieme dei numeri complessi si possono introdurre le operazioni di somma e di prodotto, tramite la seguente definizione.

**Definizione A.3** *Dati due numeri complessi  $a + jb$  e  $c + jd$ , la loro somma è il numero complesso*



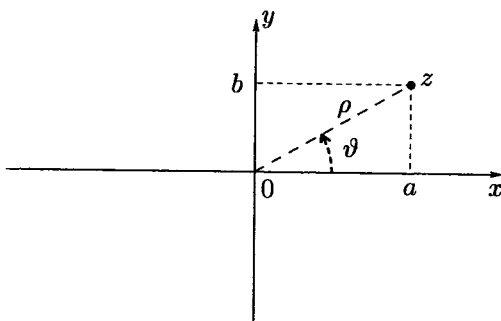


Fig. A.1 Forma cartesiana e forma trigonometrica di un numero complesso.

$$(a + c) + j(b + d),$$

mentre il loro prodotto è il numero complesso

$$(ac - bd) + j(ad + bc).$$

L'operazione di somma gode della proprietà associativa e della proprietà commutativa. Osserviamo che  $(a + jb) + 0 = a + jb$ , per cui lo zero ha la stessa proprietà formale che ha nei reali: quella di essere *elemento neutro* della somma. Per ogni numero  $a + jb$  è possibile definire un *opposto*, che è  $(-a) + j(-b)$ , tale che  $(a + jb) + [(-a) + j(-b)] = 0$ .

L'interpretazione geometrica della somma è molto semplice, se ricordiamo l'associazione fatta tra numeri complessi e vettori; si tratta di una somma "componente a componente", analoga alla somma di vettori mediante la regola del parallelogramma.

La differenza tra numeri complessi può essere definita tramite la somma e l'opposto; si pone infatti

$$(a + jb) - (c + jd) = (a + jb) + [(-c) + j(-d)] = (a - c) + j(b - d).$$

Anche il prodotto gode della proprietà associativa e della proprietà commutativa; inoltre si ha che  $(a + jb) \cdot 1 = a + jb$ ; il numero 1 è l'elemento neutro del prodotto (analogamente a quanto avviene nei reali). Per ogni numero  $a + jb \neq 0$  è possibile definire un *inverso* o *reciproco*, cioè un numero  $c + jd$ , tale che  $(a + jb)(c + jd) = 1$ .

L'inverso di  $z = a + jb$ , che si indica con  $1/z$ , è

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + j \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Il quoziente tra numeri complessi può essere definito come il prodotto del dividendo per il reciproco del divisore (che si suppone non nullo):

$$\frac{a + jb}{c + jd} = (a + jb) \cdot \left( \frac{c}{c^2 + d^2} + j \frac{-d}{c^2 + d^2} \right).$$

L'insieme dei numeri complessi, dotato delle operazioni di somma e prodotto appena viste, è indicato con il simbolo  $\mathbb{C}$ .

**Osservazione 1.1** È importante vedere come si comporta l'unità immaginaria  $j$  rispetto alla moltiplicazione; utilizzando la definizione A.3, si ha immediatamente che

$$j^2 = j \cdot j = (0 + j1)(0 + j1) = -1 + j0 = -1.$$

Questa relazione permette di interpretare la A.3 in modo formale come un prodotto che segue le regole dell'algebra (dei polinomi) con la convenzione che  $j^2 = -1$ . Possiamo svolgere le operazioni tra numeri complessi seguendo questa regola; da essa derivano anche le seguenti importanti relazioni

$$j^3 = -j, \quad j^4 = 1, \quad \frac{1}{j} = -j,$$

che consentono, in particolare, di calcolare tutte le potenze intere di  $j$ . ■

**Esempio A.1** Calcolare  $j^{34}$  e  $j^{-7}$ .

Osserviamo che  $j^{34} = j^{32} \cdot j^2 = (j^4)^8 \cdot j^2 = 1 \cdot (-1) = -1$ , mentre per quanto riguarda la seconda espressione possiamo scrivere

$$\frac{1}{j^7} = \frac{j}{j^8} = j.$$

**Osservazione 1.2** Nell'insieme dei numeri complessi non possono essere introdotte relazioni d'ordine con proprietà analoghe a quelle soddisfatte dalla relazione di minore o uguale in  $\mathbb{R}$ . Per questo non ha senso scrivere disuguaglianze tra numeri complessi, come  $z < 1$  oppure  $z \geq 1 + j$ . ■

## A.3 Forma trigonometrica di un numero complesso

La rappresentazione in forma vettoriale ci permette di introdurre un secondo modo di rappresentare un numero complesso: quello in forma trigonometrica.

Consideriamo il numero complesso  $z = a + jb$  e il punto  $P$  del piano che lo rappresenta (o il vettore  $\vec{OP}$ ). Possiamo rappresentare il vettore  $\vec{OP}$  assegnandone le componenti oppure assegnandone il modulo, che indichiamo con  $\rho$ , e l'angolo formato con l'asse reale positivo, intendendo come positivi gli angoli ottenuti mediante rotazione in verso antiorario dal semiasse reale positivo alla semiretta che contiene  $\vec{OP}$  (vedi ancora la figura A.1).

Il numero reale  $\rho$ , che risulta sempre maggiore o uguale a zero, si chiama *modulo* del numero complesso e si indica con  $|z|$ ; l'angolo  $\vartheta$  si chiama *argomento* del numero complesso e si indica con il simbolo  $\arg z$ .

Le relazioni che legano  $a$  e  $b$  al modulo e all'argomento sono:

$$\begin{cases} a = \operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z), \\ b = \operatorname{Im} z = |z| \sin(\arg z), \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

oppure

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \sin \vartheta = b/\rho, \\ \cos \vartheta = a/\rho. \end{cases}$$

Se  $a = 0$  il valore di  $\vartheta$  è  $\pm\pi/2$  (il segno è determinato da quello di  $b$ ); se invece  $a \neq 0$ , dividendo membro a membro le equazioni (A.2) e (A.2), si ha:

$$\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{b}{a} \quad (\text{A.2})$$

Il rapporto del seno e del coseno dà la tangente, per cui le equazioni (A.2) e (A.2) si possono scrivere, per  $a \neq 0$ , come

$$\tan \vartheta = \frac{b}{a}$$

o anche, ricordando che, nell'intervallo aperto  $]-\pi/2, \pi/2[$ , la tangente ha come funzione inversa l'arcotangente:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \arctan(b/a) & \text{se } a > 0 \\ \vartheta &= \arctan(b/a) \pm \pi & \text{se } a < 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Utilizzando le equazioni (A.1) si può scrivere il numero complesso nella seguente forma, detta *forma trigonometrica*:

$$z = |z|(\cos(\arg z) + j \sin(\arg z)). \quad (\text{A.4})$$

**Esempio A.2** Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso  $\sqrt{3} + j$ .

Utilizzando le equazioni (A.2), (A.2) e (A.2) possiamo scrivere

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \\ \cos \vartheta = \sqrt{3}/2, \\ \sin \vartheta = 1/2. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

La seconda equazione ha due soluzioni nell'intervallo  $[-\pi, \pi)$ :  $\vartheta_1 = \pi/6$  e  $\vartheta_2 = -\pi/6$ , mentre la terza ha le soluzioni:  $\vartheta_3 = \pi/6$  e  $\vartheta_4 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ . La soluzione comune alle due equazioni è allora:  $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_3 = \pi/6$ . A un risultato analogo si perviene risolvendo l'equazione

$$\vartheta = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il numero complesso  $z$  può quindi essere scritto nella forma

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

**Osservazione 1.3** Se utilizziamo la rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non abbiamo una corrispondenza biunivoca tra le coppie  $(|z|, \arg z)$  e

i punti del piano complesso. Mentre la formula (A.4) individua uno ed un solo punto del piano, non è vero il viceversa.

L'origine del piano complesso corrisponde alle (infinite) coppie della forma  $(0, \vartheta)$ , indipendentemente dal valore di  $\vartheta$ . Se assumiamo  $|z| \neq 0$ , notiamo che un punto del piano complesso individua sia la coppia  $(|z|, \vartheta)$ , ma sia le coppie del tipo  $(|z|, \vartheta + 2k\pi)$ , con  $k$  intero relativo. ■

## A.4 Interpretazione geometrica del prodotto

Per interpretare geometricamente il prodotto tra due numeri complessi, scriviamoli in forma trigonometrica

$$z_1 = \rho_1(\cos \vartheta_1 + j \sin \vartheta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos \vartheta_2 + j \sin \vartheta_2), \quad (\text{A.6})$$

e calcoliamo il prodotto:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 [\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + j(\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_2 \cos \vartheta_1)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + j \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Otteniamo quindi che il modulo del prodotto di due numeri complessi è il prodotto dei moduli dei fattori, mentre l'argomento è la somma degli argomenti dei fattori.

La formula (A.7) si presta a fornire l'interpretazione geometrica del prodotto tra numeri complessi: fissato  $z_1$ , osserviamo l'effetto prodotto su  $z_1$  dalla moltiplicazione per  $z_2$ . L'argomento di  $z_1$  passa da  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_1 + \vartheta_2$ : il vettore che rappresenta  $z_1$  risulta quindi ruotato (si veda la figura A.2) di un angolo  $\vartheta_2$ , pari all'argomento di  $z_2$ . Il prodotto corrisponde quindi a una *rotazione*.

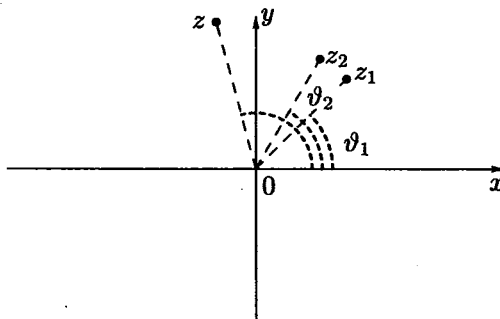


Fig. A.2 L'interpretazione geometrica del prodotto di numeri complessi.

Il modulo di  $z_1$  è moltiplicato per il modulo di  $z_2$ ; dal punto di vista geometrico, questo significa che il vettore  $OP_1$  viene "allungato" (se  $|z_2| > 1$ ) oppure "accorciato" (se  $|z_2| < 1$ ) di un fattore pari al modulo di  $z_2$ . Questa operazione è chiamata *omotetia*. Il prodotto di due numeri complessi corrisponde geometricamente alla combinazione di una rotazione e di una omotetia: una *roto-omotetia*.

Se  $|z_2| = 1$  la moltiplicazione per  $z_2$  si riduce a una semplice *rotazione*; ad esempio, se  $z_2 = j$ , il punto  $z_1$  viene ruotato di  $\pi/2$ .

## A.5 Modulo, argomento, complesso coniugato

**Proposizione A.1** *Il modulo di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:*

- 1)  $|z| \geq 0$  per ogni  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| = 0$  se e solo se  $z = 0$ ;
- 2)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$  per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ;
- 3)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

L'ultima proprietà esprime il fatto che in un triangolo la lunghezza di un lato è sempre minore o uguale alla somma degli altri due lati: per questo motivo, viene detta *disuguaglianza triangolare*.

**Proposizione A.2** *L'argomento di un numero complesso soddisfa le seguenti proprietà:*

- 1)  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$  per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ;
- 2)  $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$  per ogni  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 \neq 0$ .

La verifica di questa affermazione è immediata se si utilizza la forma trigonometrica dei numeri complessi.

**Definizione A.4** *Assegnato il numero complesso  $z = a + jb$  si dice complesso coniugato di  $z$  il numero complesso*

$$z^* = z - jb.$$

Geometricamente il punto che corrisponde a  $z^*$  è il simmetrico rispetto all'asse reale del punto che corrisponde a  $z$ . Il complesso coniugato è legato al modulo, alla parte reale e a quella immaginaria dalle relazioni:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2},$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2j},$$

$$|z|^2 = z z^*.$$

La verifica di queste relazioni si riduce a semplici calcoli, come quella delle relazioni che legano il complesso coniugato con le operazioni in  $\mathbb{C}$ :

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*,$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*.$$

**Esempio A.3** *Calcolare l'inverso di  $z = 2 + 3j$ .*

Le proprietà del coniugato sono utili nel calcolo dell'inverso di un numero complesso. Infatti si può scrivere:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{z^*}{|z|^2};$$

utilizzando questa formula abbiamo immediatamente

$$\frac{1}{2+3j} = \frac{2-3j}{13} = \frac{2}{13} - j\frac{3}{13}.$$

■

## A.6 La formula di De Moivre

Nella formula (A.7) del prodotto di due numeri complessi scritti in forma trigonometrica poniamo  $z_1 = z_2 = z = \rho(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$ ; otteniamo

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\vartheta + j \sin 2\vartheta)$$

che esprime il quadrato del numero complesso  $z$ .

Iterando questo procedimento è immediato dedurre la formula, detta *formula di De Moivre*, che permette di scrivere la potenza  $n$ -esima del numero complesso  $z$ :

$$z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta). \quad (\text{A.8})$$

**Esempio A.4** Dato il numero complesso  $z = 1 + j$ , scrivere  $z^4$ .

Scriviamo  $z$  in forma trigonometrica; dalle (A.2), (A.2) e (A.2) si ottiene:

$$\rho = \sqrt{2}, \quad \vartheta = \pi/4.$$

Utilizzando ora la formula di De Moivre, si ha:

$$(1+j)^4 = (\sqrt{2})^4(\cos 4\pi/4 + j \sin 4\pi/4) = 4(\cos \pi + j \sin \pi) = -4.$$

## A.7 Radici $n$ -esime di un numero complesso

Assegnato  $w \in \mathbb{C}$  vogliamo determinare i numeri complessi  $z$  tali che  $z^n = w$ . Questi numeri sono detti *radici  $n$ -esime di  $w$* : dimostriamo che ogni numero complesso ammette esattamente  $n$  radici  $n$ -esime distinte e troviamo una formula che permette di calcolarle.

A questo scopo scriviamo  $w$  e  $z$  in forma polare:

$$w = \sigma(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad \text{e} \quad z = \rho(\cos \vartheta + j \sin \vartheta).$$

L'equazione  $z^n = w$  diventa

$$\rho^n(\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta) = \sigma(\cos \varphi + j \sin \varphi).$$

Ricordando che due numeri complessi sono uguali se hanno lo stesso modulo e l'argomento che differisce per multipli di  $2\pi$ , dall'ultima equazione otteniamo

$$\rho^n = \sigma \quad \text{e} \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi,$$

da cui possiamo ricavare le seguenti formule

$$\rho = \sqrt[n]{\sigma} \quad \text{e} \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

La seconda di queste equazioni fornisce dei valori di  $\vartheta$  distinti in corrispondenza a  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ; la radice ottenuta con  $k = 0$  è detta *radice primitiva o fondamentale*.

Quando invece poniamo  $k = n$  troviamo il numero complesso che ha modulo e argomento, rispettivamente:

$$\rho = \sqrt[n]{\sigma}, \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi,$$

che coincide con la radice primitiva. Considerazioni analoghe si possono fare per  $k > n$  e per  $k < 0$ .

Le radici  $n$ -esime distinte di un numero complesso risultano quindi essere  $n$  e sono definite dalle relazioni

$$\rho = \sqrt[n]{\sigma}, \quad \vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{A.9})$$

I punti  $P_0, P_1, \dots, P_{n-1}$  corrispondenti alle radici  $n$ -esime di  $w$  si trovano tutti sulla medesima circonferenza di centro l'origine e raggio  $\sqrt[n]{\sigma}$  e sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati.

#### Esempio A.5 Calcolare le radici quinte di 1.

Poiché  $\sigma = 1$  e  $\varphi = 0$ , applicando la formula (A.9), otteniamo

$$\sqrt[5]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + j \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right) \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

I punti ottenuti sono i vertici di un pentagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio unitario (vedi la figura A.3). ■

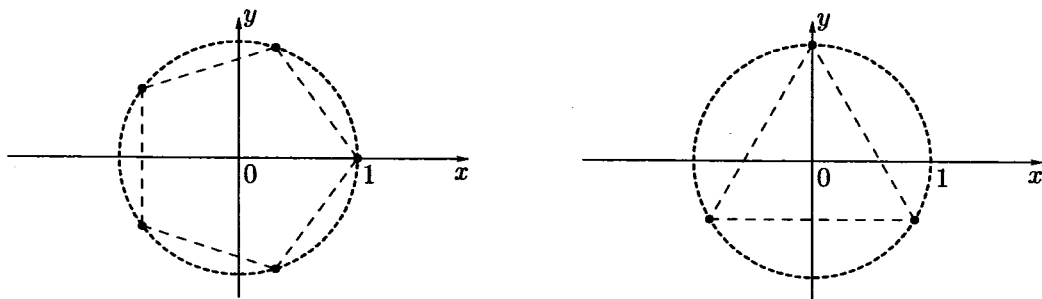


Fig. A.3 Radici quinte dell'unità e radici cubiche di  $-j$ .

#### Esempio A.6 Calcolare le radici terze di $-j$ .

In questo caso risulta  $\sigma = 1$  e  $\varphi = 3\pi/2$ . Applicando ancora la formula (A.9), otteniamo

$$\sqrt[3]{-j} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right) \quad \text{con } k = 0, 1, 2.$$

I punti ottenuti sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio unitario (vedi ancora la figura A.3). ■



---

# Appendice B

## Trasformata Zeta

In questa appendice presentiamo la trasformata Zeta, che ha alcune analogie con le trasformate di Fourier e di Laplace e che ha importanza applicativa.

La trasformata Zeta agisce su funzioni che sono definite sugli interi e le trasforma in serie di Laurent.

Iniziamo precisando alcune definizioni delle funzioni definite sugli interi. Consideriamo funzioni a valori reali o complessi.

### B.1 Funzioni sugli interi

Una funzione  $x(n)$  che abbia come dominio l'insieme degli interi relativi,  $n \in \mathbb{Z}$ , e sia a valori reali,  $x(n) \in \mathbb{R}$ , o a valori complessi,  $x(n) \in \mathbb{C}$ , è detta *funzione sugli interi*:

$$x: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{o} \quad \mathbb{C}.$$

Una funzione sugli interi  $x(n)$  è detta *limitata* se esiste una costante reale positiva  $M$  tale per cui:

$$|x(n)| \leq M,$$

per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

Una funzione sugli interi  $x(n)$  si dice *periodica* di periodo  $N$ , con  $N$  intero positivo, se:

$$x(n - N) = x(n).$$

Una funzione sugli interi  $x(n)$  è detta *causale* se:

$$x(n) = 0 \quad \text{se} \quad n < 0.$$

La funzione a *gradino*  $u(n)$  è quella funzione sugli interi per cui:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{se } n < 0 \end{cases},$$

mentre la funzione *porta*  $p_{2N}(n)$  è definita da:

$$p_{2N}(n) = u(n + N) - u(n - N),$$

e la delta di Dirac  $\delta(n)$  è tale che:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases}.$$

La *convoluzione* tra due funzioni sugli interi  $x(n)$  e  $y(n)$  è definita da:

$$x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n - m)y(m),$$

mentre la *convoluzione unilatera*:

$$x(n) *_u y(n) = \sum_{m=0}^n x(n - m)y(m).$$

Diamo un esempio di prodotto di convoluzione.

**Esempio B.1** Si faccia il prodotto di convoluzione di due gradini  $u(n)$ .

Applicando la definizione abbiamo:

$$u(n) * u(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u(n - m)u(m)$$

e possiamo osservare che questa sommatoria è nulla se  $n < 0$  e nel caso, di  $n \geq 0$ , è anche nulla per  $m > n$  e quindi:

$$u(n) * u(n) = u(n) \sum_{m=0}^n u(n - m)u(m),$$

ma, per  $0 \leq m \leq n$ , il prodotto  $u(n - m)u(m)$  vale 1 ed allora:

$$u(n) * u(n) = u(n) \sum_{m=0}^n 1 = (n + 1) u(n).$$

L'elemento unità della convoluzione è la  $\delta(n)$ :

$$x(n) * \delta(n) = x(n),$$

infatti nella sommatoria che definisce il prodotto di convoluzione:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n - m)\delta(m),$$

l'unico addendo non nullo è quello con l'indice  $m = 0$  e  $\delta(0) = 1$ .

Si dice *energia*  $E$  di una funzione sugli interi  $x(n)$  la seguente espressione:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n)]^2.$$

Dopo aver presentato le definizioni riguardanti le funzioni sugli interi, possiamo ora introdurre la trasformata Zeta.

## B.2 Trasformata Zeta bilatera

Sia  $x(n)$  una funzione sugli interi tale per cui la seguente serie

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (\text{B.1})$$

converge per qualche  $z \in \mathbb{C}$ , la (B.1) definisce una serie di Laurent che indichiamo con  $X(z)$ . La serie (B.1) ha come regione di convergenza una corona circolare. Se l'interno della corona circolare  $D$  di convergenza della (B.1) non è vuoto esistono  $r$  e  $R$  per cui:

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$$

e in  $D$ , che viene detto *dominio della trasformata Zeta*, si definisce

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad (\text{B.2})$$

come la *trasformata zeta* di  $x(n)$ .

**Esempio B.2** Si calcoli la trasformata Zeta della  $\delta(n)$ .

La formula di trasformazione e le proprietà della *delta*( $n$ ) ci consentono il seguente calcolo:

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = z^0 = 1,$$

con dominio tutto il piano complesso. ■

Si può mostrare che, se  $\gamma$  è una circonferenza inclusa in  $D$ , e se  $X(z)$  è la trasformata Zeta di  $x(n)$ , vale la seguente formula di antitrasformazione:

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} X(z)z^{n-1} dz.$$

**Esempio B.3** Si calcoli la antitrasformata Zeta della  $X(z) = 1$  con dominio tutto il piano complesso.

La formula di antitrasformazione e il calcolo degli integrali di linea con il metodo dei residui, considerando come  $\gamma$  una qualunque circonferenza di centro l'origine, ci fornisce:

$$\begin{aligned} x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[1] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} z^{n-1} dz = \begin{cases} R_{1/z}(0) & \text{se } n = 0 \\ R_{1/z^{1-n}}(0) & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{se } n \neq 0 \end{cases} = \delta(n). \end{aligned}$$

■

## B.3 Proprietà della trasformata Zeta

La formula che definisce la trasformata Zeta è utilizzata per il calcolo di alcuni primi esempi importanti o di casi particolari. In generale sono le proprietà a consentire un calcolo agevole delle trasformate. Molte delle proprietà che presenteremo hanno qualche analogia con quelle che abbiamo visto per le trasformate di Fourier o di Laplace.

### Linearità

Se  $x(n)$  e  $y(n)$  sono due funzioni sugli interi con trasformata Zeta data rispettivamente da  $X(z)$  e da  $Y(z)$ , si ha che, qualunque siano le costanti  $a$  e  $b$ :

$$\mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] = a\mathcal{Z}[x(n)] + b\mathcal{Z}[y(n)] = aX(z) + bY(z), \quad (\text{B.3})$$

con dominio che include o è uguale alla intersezione dei domini di  $X(z)$  e di  $Y(z)$ .

Infatti questa proprietà di linearità è conseguenza della definizione di somma di serie di Laurent e di prodotto di una serie di Laurent per una costante.

### Traslazione di $n_0$

Se  $x(n)$  è una funzione sugli interi con trasformata  $X(z)$  e se  $n_0 \in \mathbb{Z}$  si ha:

$$\mathcal{Z}[x(n - n_0)] = z^{-n_0} \mathcal{Z}[x(n)] = z^{-n_0} X(z), \quad (\text{B.4})$$

con dominio uguale al dominio di  $X(z)$ .

Infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n - n_0)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-n_0 - m} = \\ &= z^{-n_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m} = z^{-n_0} \mathcal{Z}[x(n)] = z^{-n_0} X(z), \end{aligned}$$

ove si è fatto il cambio di indice di sommazione:  $m = n - n_0$ .

**Moltiplicazione per  $a^n$** 

Se  $x(n)$  è una funzione sugli interi con trasformata  $X(z)$  e se  $a$  è una costante complessa si ha:

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right), \quad (\text{B.5})$$

con dominio dato dalla corona circolare formata dagli  $z \in \mathbb{C}$  tali che:

$$|a| \cdot r < |z| < |a| \cdot R,$$

ove  $r$  e  $R$  sono i raggi che individuano la corona circolare di convergenza della trasformata di  $x(n)$ .

Infatti

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right).$$

**Moltiplicazione per  $n$** 

Se  $x(n)$  è una funzione sugli interi con trasformata  $X(z)$  allora

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad (\text{B.6})$$

con dominio dato dalla stessa corona circolare di convergenza di  $X(z)$ .

Infatti la derivata di  $z^{-n}$  è data da:

$$\frac{dz^{-n}}{dz} = -nz^{-n-1} = \frac{n}{-z} z^{-n}$$

e quindi

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n) z^{-n} = -z \frac{d}{dz} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = -z \frac{d}{dz} X(z).$$

**Convoluzione**

Se  $x(n)$  e  $y(n)$  sono due funzioni sugli interi con trasformata Zeta data rispettivamente da  $X(z)$  e da  $Y(z)$  e se  $x(n)$  e  $y(n)$  hanno prodotto di convoluzione  $x(n) * y(n)$ , si ha che:

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = \mathcal{Z}[x(n)] * \mathcal{Z}[y(n)] = X(z)Y(z), \quad (\text{B.7})$$

con dominio che include o è uguale alla intersezione dei domini di  $X(z)$  e di  $Y(z)$ .

Infatti:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x(n) * y(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(n-m)y(m) \right) z^{-n} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-m) z^{-n} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-m-k} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) z^{-m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} = \\
&= \mathcal{Z}[y(n)] \mathcal{Z}[x(n)] = X(z) Y(z).
\end{aligned}$$

**Esempio B.4** Si calcoli la trasformata Zeta di  $u(n)$ .

Applicando la definizione si ha:

$$\mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - (1/z)},$$

che è una serie che converge se  $|1/z| < 1$  ovvero se  $|z| > 1$ . ■

**Esempio B.5** Si calcoli la trasformata Zeta di  $u(n)$ .

Applicando la definizione si ha:

$$\mathcal{Z}[nu(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) z^{-n} = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[u(n)] = -z \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - (1/z)} = \frac{1/z}{(1 - 1/z)^2}$$

che è una serie che converge se  $|1/z| < 1$  ovvero se  $|z| > 1$ . Si può ottenere questo risultato anche in altro modo, osservando che  $(n+1)u(n)$  si può ottenere come prodotto di convoluzione  $u(n) * u(n)$ , e quindi:

$$nu(n) = (n+1)u(n) - u(n) = u(n) * u(n) - u(n),$$

da cui ricaviamo:

$$\mathcal{Z}[nu(n)] = \mathcal{Z}[u(n) * u(n)] - \mathcal{Z}[u(n)] = \left( \frac{1}{1 - (1/z)} \right)^2 - \frac{1}{1 - (1/z)} = \frac{1/z}{(1 - 1/z)^2}.$$

■

**Esempio B.6** Si calcoli la trasformata Zeta della porta  $p_{2N}(n) = u(n+N) - u(n-N)$ .

Per la proprietà di linearità (B.3) e di traslazione (B.4), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}[u(n+N) - u(n-N)] &= \mathcal{Z}[u(n+N)] - \mathcal{Z}[u(n-N)] = \\
&= z^N \mathcal{Z}[u(n)] - z^{-N} \mathcal{Z}[u(n)] = \\
&= z^N (1 - z^{-2N}) \frac{1}{1 - 1/z},
\end{aligned}$$

che ha una singolarità apparente in  $z = 0$  e che risulta avere come dominio le  $z \neq 0$ . Si poteva anche svolgere l'esercizio applicando la definizione:

$$\mathcal{Z}[p_{2N}(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{2N}(n) z^{-n} = \sum_{n=-N}^{+N} z^{-n} = z^N \sum_{n=0}^{2N} z^{-n} = z^N \frac{1 - (1/z)^{2N+1}}{1 - 1/z}$$

con dominio dato dalle  $z \neq 0$ . ■

**Esempio B.7** Sia  $a$  una costante complessa, si calcoli la trasformata Zeta di  $a^n u(n)$ .

Applicando la proprietà di moltiplicazione per  $a^n$ , vedi la (B.5), si ha:

$$\mathcal{Z}[a^n u(n)] = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}},$$

che converge se  $|a/z| < 1$  ovvero se  $|z| > |a|$ . ■

**Esempio B.8** Si calcoli la trasformata Zeta di  $u(n) \sin \omega n$ .

Scrivendo la funzione  $\sin \omega n$  come combinazione di esponenziali complessi e applicando le proprietà si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[u(n) \sin \omega n] &= \mathcal{Z} \left[ \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j} u(n) \right] = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{1 - \frac{e^{j\omega}}{z}} - \frac{1}{1 - \frac{e^{-j\omega}}{z}} \right] = \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega}} \right) = \frac{z^2 - ze^{-j\omega} - z^2 + ze^{j\omega}}{2j(1 - z(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + z^2)} = \\ &= \frac{z \sin \omega}{1 - 2z \cos \omega + z^2} = \frac{(1/z) \sin \omega}{(1/z^2) - (2/z) \cos \omega + 1}, \end{aligned}$$

e il denominatore dell'ultima frazione si annulla per  $z = e^{j\omega}$ . Il dominio della trasformata è allora dato dagli  $z$  per cui  $|e^{j\omega}| < |z|$  ovvero  $|z| > 1$ . ■

**Esempio B.9** Si calcoli la trasformata Zeta di  $u(n) \cos \omega n$ .

In modo analogo all'esercizio precedente possiamo scrivere la funzione  $\cos \omega n$  come combinazione di esponenziali complessi e applicare le proprietà. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[u(n) \cos \omega n] &= \mathcal{Z} \left[ \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2} u(n) \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1 - \frac{e^{j\omega}}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{e^{-j\omega}}{z}} \right] = \\ &= \frac{z^2 - z \cos \omega}{1 - 2z \cos \omega + z^2} = \frac{1 - (1/z) \cos \omega}{(1/z^2) - (2/z) \cos \omega + 1}, \end{aligned}$$

il cui dominio è dato dagli  $z$  per cui  $|e^{j\omega}| < |z|$  ovvero  $|z| > 1$ . ■

**Esempio B.10** Si calcoli la trasformata Zeta di  $u(n)e^{-\sigma n} \sin \omega n$ .

Utilizziamo la trasformata di  $u(n) \sin \omega n$  e la proprietà di moltiplicazione per un esponenziale (B.5). Si ha:

$$\mathcal{Z}[u(n)e^{-\sigma n} \sin \omega n] == \frac{ze^{\sigma} \sin \omega}{1 - 2ze^{\sigma} \cos \omega + z^2 e^{2\sigma}} = \frac{(1/z)e^{-\sigma} \sin \omega}{(1/z^2)e^{-2\sigma} - (2/z)e^{-\sigma} \cos \omega + 1},$$

e il denominatore dell'ultima frazione si annulla per  $z = e^{-\sigma} e^{j\omega}$ . Il dominio della trasformata è allora dato dagli  $z$  per cui  $|e^{-\sigma} e^{j\omega}| < |z|$  ovvero  $|z| > e^{-\sigma}$ . ■

**Esempio B.11** Si calcoli la trasformata Zeta di  $u(n)e^{-\sigma n} \cos \omega n$ .

Utilizzando la trasformata di  $u(n) \cos \omega n$  e la proprietà di moltiplicazione per un esponenziale (B.5), ricaviamo:

$$\mathcal{Z}[u(n)e^{-\sigma n} \cos \omega n] == \frac{z^2 e^{2\sigma} - ze^{\sigma} \cos \omega}{1 - 2ze^{\sigma} \cos \omega + z^2 e^{2\sigma}} = \frac{1 - (1/z)e^{-\sigma} \cos \omega}{(1/z^2)e^{-2\sigma} - (2/z)e^{-\sigma} \cos \omega + 1},$$

il cui dominio è dato dagli  $z$  per cui  $|e^{-\sigma} e^{j\omega}| < |z|$  ovvero  $|z| > e^{-\sigma}$ . ■



---

# Appendice C

## Tabelle

### C.1 Proprietà delle trasformate di Fourier e di Laplace

| Proprietà               | Segnale                | Fourier                      | Laplace bilatera   |
|-------------------------|------------------------|------------------------------|--------------------|
| Linearità               | $ax(t) + by(t)$        | $aX(\omega) + bY(\omega)$    | $aX(s) + bY(s)$    |
| Traslazione nel tempo   | $x(t - t_0)$           | $e^{-j\omega t_0} X(\omega)$ | $e^{-st_0} X(s)$   |
| Traslazione in $\omega$ | $e^{j\omega_0 t} x(t)$ | $X(\omega - \omega_0)$       | $X(s - j\omega_0)$ |
| Traslazione in $s$      | $e^{s_0 t} x(t)$       |                              | $X(s - s_0)$       |
| Riscaldamento           | $x(at)$                | $(1/ a )X(\omega/a)$         | $(1/ a )X(s/a)$    |

| Proprietà            | Segnale                | Fourier                                | Laplace bilatera |
|----------------------|------------------------|----------------------------------------|------------------|
| Derivata nel tempo   | $x'(t)$                | $j\omega X(\omega)$                    | $sX(s)$          |
| Derivate nel tempo   | $x^{(n)}(t)$           | $(j\omega)^n X(\omega)$                | $s^n X(s)$       |
| Derivata in $\omega$ | $-jtx(t)$              | $X'(\omega)$                           |                  |
| Derivata in $s$      | $-tx(t)$               |                                        | $X'(s)$          |
| Simmetria            | $X(t)$                 | $2\pi x(-\omega)$                      |                  |
| Coniugazione         | $x^*(t)$               | $X^*(-\omega)$                         | $X^*(s^*)$       |
| Realtà e parità      | $x(t)$ reale e pari    | $X(\omega)$ reale e pari               |                  |
| Realtà e disparità   | $x(t)$ reale e dispari | $X(\omega)$ immaginaria pura e dispari | $X(s - s_0)$     |
| Convoluzione         | $x(t) * y(t)$          | $X(\omega)Y(\omega)$                   | $X(s)Y(s)$       |
| Prodotto             | $x(t)y(t)$             | $(1/2\pi)X(\omega)Y(\omega)$           |                  |

| Proprietà                                                                                                       | Segnale                                                                                        | Fourier                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x(t)$ periodica di<br>periodo $T = 2\pi/\omega_0$<br><br>$I = [t_0, t_0 + T)$<br>intervallo<br>di ampiezza $T$ | $x(t) = x(t - T)$<br><br>$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & t \in I \\ 0 & t \notin I \end{cases}$ | $X(\omega)$<br><br>$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega_0 X_0(n\omega) \delta(\omega - n\omega_0)$<br><br>$X_0(\omega) = \mathcal{F}[x_0(t)]$ |

| Proprietà                                                                                                                 | Segnale                                                                                                                                                         | Laplace                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y(t) = \begin{cases} x(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$<br><br>$x(t)$ periodica di<br>periodo $T = 2\pi/\omega_0$ | $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_0(t - nT)$<br><br>$x(t) = x(t - T)$<br><br>$x_0(t) = \begin{cases} x(t) & 0 \leq t < T \\ 0 & t < 0 \\ 0 & t \geq T \end{cases}$ | $Y(s) = \frac{X_0(s)}{1 - e^{-sT}}$<br><br>$X_0(s) = \mathcal{L}[x_0(t)]$<br><br>$X_0(s)$ analitica in $\mathbb{C}$ |

## C.2 Trasformate $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$ di alcune funzioni e distribuzioni

| $x(t)$                                            | $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$                                  | $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$        | $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$   |
|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| $\delta(t)$                                       | 1                                                                | 1                                 | $\forall s$                     |
| $\delta(t - t_0)$                                 | $e^{-j\omega t_0}$                                               | $e^{-t_0 s}$                      | $\forall s$                     |
| $u(t + T) - u(t - T)$                             | $\frac{2 \sin \omega T}{\omega}$                                 | $\frac{2 \sinh sT}{s}$            | $\forall s$                     |
| $u(t)$                                            | $\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$                         | $\frac{1}{s}$                     | $\text{Re } s > 0$              |
| $e^{-at^2}$<br>$a \in \mathbb{R} \ a > 0$         | $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$                          | $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{s^2/4a}$ | $\forall s$                     |
| $\frac{n/\pi}{1 + n^2 t^2}$<br>$n \in \mathbb{N}$ | $e^{- \omega /n}$                                                | non esiste                        |                                 |
| $u(t)$                                            | $\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$                         | $\frac{1}{s}$                     | $\text{Re } s > 0$              |
| $u(t - t_0)$                                      | $\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0}$        | $\frac{1}{s} e^{-t_0 s}$          | $\text{Re } s > 0$              |
| $u(t) e^{j\omega_0 t}$                            | $\pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)}$ | $\frac{1}{s - j\omega_0}$         | $\text{Re } s > 0$              |
| $u(t) e^{s_0 t}$<br>$\text{Re } s_0 < 0$          | $\frac{1}{j\omega - s_0}$                                        | $\frac{1}{s - s_0}$               | $\text{Re } s > \text{Re } s_0$ |
| $u(t) e^{s_0 t}$<br>$\text{Re } s_0 > 0$          | non esiste                                                       | $\frac{1}{s - s_0}$               | $\text{Re } s > \text{Re } s_0$ |

| $x(t)$                                                                                         | $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$                                                                                        | $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$                           | $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $u(t) \sin \omega_0 t$<br>$\omega_0 \in \mathbb{R}$                                            | $\frac{\pi}{2j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] +$<br>$\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$                  | $\text{Re } s > 0$            |
| $u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t$<br>$\sigma_0, \omega_0 \in \mathbb{R} \quad \sigma_0 < 0$ | $\frac{\omega_0}{(j\omega - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}$                                                                 | $\frac{\omega_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}$     | $\text{Re } s > \sigma_0$     |
| $u(t)e^{\sigma_0 t} \sin \omega_0 t$<br>$\sigma_0, \omega_0 \in \mathbb{R} \quad \sigma_0 > 0$ | non esiste                                                                                                             | $\frac{\omega_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}$     | $\text{Re } s > \sigma_0$     |
| $u(t) \cos \omega_0 t$<br>$\omega_0 \in \mathbb{R}$                                            | $\frac{\pi}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] +$<br>$\frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$   | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$                         | $\text{Re } s > 0$            |
| $u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$<br>$\sigma_0, \omega_0 \in \mathbb{R} \quad \sigma_0 < 0$ | $\frac{j\omega - \sigma_0}{(j\omega - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}$                                                       | $\frac{s - \sigma_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}$ | $\text{Re } s > \sigma_0$     |
| $u(t)e^{\sigma_0 t} \cos \omega_0 t$<br>$\sigma_0, \omega_0 \in \mathbb{R} \quad \sigma_0 > 0$ | non esiste                                                                                                             | $\frac{s - \sigma_0}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2}$ | $\text{Re } s > \sigma_0$     |
| $\sin \omega_0 t$<br>$\omega_0 \in \mathbb{R}$                                                 | $\frac{\pi}{j} (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$                                                | non esiste                                           |                               |
| $\cos \omega_0 t$<br>$\omega_0 \in \mathbb{R}$                                                 | $\pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$                                                          | non esiste                                           |                               |
| $\frac{\sin \omega_0 t}{t}$<br>$\omega_0 \in \mathbb{R}$                                       | $\pi [u(\omega + \omega_0) - u(\omega - \omega_0)]$                                                                    | non esiste                                           |                               |

| $x(t)$                                                                    | $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$                                                                  | $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$       | $\text{dom } \mathcal{L}X(s)$     |
|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| $tu(t)$                                                                   | $j\pi\delta'(\omega) - \frac{1}{\omega^2}$                                                       | $\frac{1}{s^2}$                  | $\text{Re } s > 0$                |
| $\frac{1}{2}t^2u(t)$                                                      | $\frac{j^2}{2}\pi\delta''(\omega) + \frac{1}{(j\omega)^3}$                                       | $\frac{1}{s^3}$                  | $\text{Re } s > 0$                |
| $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}u(t)$                                             | $\frac{j^{n-1}}{(n-1)!}\pi\delta^{(n-1)}(\omega) + \frac{1}{(j\omega)^n}$                        | $\frac{1}{s^n}$                  | $\text{Re } s > 0$                |
| $u(t)e^{j\omega_0 t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$<br>$\omega_0 \in \mathbb{R}$ | $\frac{j^{n-1}}{(n-1)!}\pi\delta^{(n-1)}(\omega - \omega_0) + \frac{1}{(j\omega - j\omega_0)^n}$ | $\frac{1}{(s - j\omega_0)^n}$    | $\text{Re } s > 0$                |
| 1                                                                         | $2\pi\delta(\omega)$                                                                             | non esiste                       |                                   |
| $e^{j\omega_0 t}$                                                         | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$                                                                  | non esiste                       |                                   |
| $\text{sgn } t$                                                           | $\frac{2}{j\omega}$                                                                              | non esiste                       |                                   |
| $\frac{1}{t}$                                                             | $-\pi j \text{sgn } \omega$                                                                      | non esiste                       |                                   |
| $ t $                                                                     | $-\frac{2}{\omega^2}$                                                                            | non esiste                       |                                   |
| $\frac{1}{t^2}$                                                           | $-\pi \omega $                                                                                   | non esiste                       |                                   |
| $e^{-\alpha t }$<br>$\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha > 0$              | $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$                                                            | $\frac{2\alpha}{\alpha^2 - s^2}$ | $-\alpha < \text{Re } s < \alpha$ |

### C.3 Proprietà della trasformata Zeta

| Proprietà                 | Segnale         | Zeta                        |
|---------------------------|-----------------|-----------------------------|
| Linearità                 | $ax(n) + by(n)$ | $aX(z) + bY(z)$             |
| Traslazione di $n_0$      | $x(n - n_0)$    | $z^{-n_0}X(z)$              |
| Moltiplicazione per $a^n$ | $a^n x(n)$      | $X\left(\frac{z}{a}\right)$ |
| Moltiplicazione per $n$   | $nx(n)$         | $-z \frac{dX(z)}{dz}$       |
| Convoluzione              | $x(n) * y(n)$   | $X(z) \cdot Y(z)$           |

## C.4 Trasformata $\mathcal{Z}$ di alcune funzioni sugli interi

| $x(n)$                             | $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$                                                                           | $\text{dom } \mathcal{Z}X(z)$ |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $\delta(n)$                        | 1                                                                                                    | $\forall z$                   |
| $u(n)$                             | $\frac{1}{1 - 1/z}$                                                                                  | $ z  > 1$                     |
| $nu(n)$                            | $\frac{1/z}{(1 - 1/z)^2}$                                                                            | $ z  > 1$                     |
| $u(n + N) - u(n - N)$              | $z^N \frac{1 - z^{-2N}}{1 - 1/z}$                                                                    | $\forall z$                   |
| $a^n u(n)$<br>$a \in \mathbb{C}$   | $\frac{1}{1 - a/z}$                                                                                  | $ z  >  a $                   |
| $u(n) \sin \omega n$               | $\frac{(1/z) \sin \omega}{(1/z^2) - (2/z) \cos \omega + 1}$                                          | $ z  > 1$                     |
| $u(n) \cos \omega n$               | $\frac{1 - (1/z) \cos \omega}{(1/z^2) - (2/z) \cos \omega + 1}$                                      | $ z  > 1$                     |
| $u(n) e^{-\sigma n} \sin \omega n$ | $\frac{(1/z) e^{-\sigma} \sin \omega}{(1/z^2) e^{-2\sigma} - (2/z) e^{-\sigma} \cos \omega + 1}$     | $ z  > e^{-\sigma}$           |
| $u(n) e^{-\sigma n} \cos \omega n$ | $\frac{1 - (1/z) e^{-\sigma} \cos \omega}{(1/z^2) e^{-2\sigma} - (2/z) e^{-\sigma} \cos \omega + 1}$ | $ z  > e^{-\sigma}$           |



---

# Indice analitico

- analiticità, 72
- antitrasformata
  - di Fourier, 166
  - di Laplace, 228
- antitrasformata Zeta, 282
- armoniche elementari, 22
- armonicità, 55
  
- causalità, 155
- classificazione
  - delle singolarità, 76
- condizione di Cauchy-Riemann, 52, 53, 72
- convergenza
  - nel senso della energia, 32
  - puntuale, 45
  - uniforme, 46
- convoluzione
  - di distribuzioni, 153
  - di funzioni, 150
  - proprietà, 154
  - unilatera, 246
  
- delta di Dirac, 134, 135, 140, 145, 147
  - proprietà, 145
- derivata
  - di  $f(z)$ , 52
  - distribuzionale, 141
  - regole, 57
- distribuzioni, 131
  - a crescita lenta, 157
  - limitate, 156
  - temperate, 157
  
- disuguaglianza
  - di Bessel, 33
  - di Cauchy, 93
  - triangolare, 276
- dominio
  - della trasformata di Laplace, 204
  - di una funzione, 49
  
- eccitazione, 247
- energia di un segnale, 25
- evoluzione propria, 249
  
- fenomeno di Gibbs, 200
- formula
  - di Cauchy, 62
  - di De Moivre, 277
  - di Eulero, 2
- frequenza, 21
  - angolare, 21
- funzionale, 131
  - lineare, 133
- funzione
  - a decrescita rapida, 159
  - analitica, 52, 72
  - analitica in  $\Omega \cup \Gamma$ , 61
  - analitica intera, 94
  - armonica, 55
  - continua, 50
  - di trasferimento, 250
  - di variabile complessa, 48
  - hermitiana, 108
  - olomorfa, 52
  - periodica, 21

- funzione sugli interi, 280
  - causale, 280
  - convoluzione, 281
  - convoluzione unilatera, 281
  - delta di Dirac, 281
  - energia, 282
  - gradino, 280
  - limitata, 280
  - periodica, 280
  - porta, 281
- funzioni
  - di prova, 133
  - test, 133
- gradino unitario, 131
- identità di Parseval, 33
- incremento, 50
- ingresso, 247
- integrale
  - di linea, 57
  - improprio, 103
- intorno, 10, 49
- laplaciano, 55
- lemma
  - di Jordan, 115
  - di Jordan A, 116
  - di Jordan B, 118
- limite
  - di funzione, 49
  - nel senso delle distribuzioni, 134
- modello
  - differenziale, 248
  - ingresso-uscita, 247
- norma, 26
- numero complesso
  - argomento, 273, 276
  - coniugato, 276
  - esponenziale, 3
  - forma
    - cartesiana, 271
    - trigonometrica, 273
  - immaginario puro, 271
  - modulo, 273, 276
- olomorfa, 52
- onda
  - a dente di sega, 38
  - quadra, 37
  - triangolare, 36
- operatore di Laplace, 55
- parte immaginaria, 271
- parte reale, 271
- periodo, 21
- pettine di Dirac, 188
- piano di Gauss, 11
- polinomio
  - di Fourier, 26
  - di Fourier di  $x(t)$ , 31
- polo
  - di ordine  $N$ , 76, 78
- porta, 132
- principio
  - del massimo, 95
  - di identità, 56, 95, 96
- prodotto
  - di convoluzione, 150
- proprietà
  - della media, 94
- proprietà di  $\mathcal{F}$ 
  - coniugazione, 173
  - convoluzione, 175
  - derivata in frequenza, 171
  - derivata nel tempo, 171
  - linearità, 168
  - prodotto, 175
  - realtà e disparità, 174
  - realtà e parità, 173
  - riscaldamento, 170
  - simmetria, 172
  - traslazione in frequenza, 169
  - traslazione nel tempo, 169
- proprietà di  $\mathcal{L}$ 
  - coniugazione, 212
  - convoluzione, 213
  - derivata in  $s$ , 211
  - derivata in  $t$ , 211
  - linearità, 209
  - realtà e hermitianicità, 212
  - riscaldamento, 210
  - traslazione in  $s$ , 210
  - traslazione in  $t$ , 209
- punto all'infinito, 11

- punto di accumulazione, 49
- punto di diramazione, 90
- radici  $n$ -esime, 277
- raggio di convergenza, 66
- rapporto incrementale, 50
- regime, 266
- regolarizzazione, 155
- residuo, 99
  - al finito, 99
  - all'infinito, 101
- ridotte, 14, 36
- risposta, 247
  - forzata, 249
  - impulsiva, 250
- risposta forzata
  - a condizioni iniziali non nulle, 252
  - a condizioni iniziali nulle, 250
- scomposizione in fratti, 120
  - poli coniugati, 127
  - poli multipli, 124
  - poli semplici, 121, 123
- segnale, 18
  - cisoidale, 18
  - continuo a tratti, 43
  - regolare a tratti, 44
  - regolarizzato, 44
- serie
  - convergente, 14
  - di Laurent, 73
  - di Taylor, 68
  - divergente, 14
  - indeterminata, 14
- serie di Fourier, 33, 34
  - coefficienti, 34
- serie di potenze, 64
- sfera di Neumann, 11
- singularità, 76
  - apparente, 76
  - essenziale, 76, 80
  - isolata, 76
  - isolata al finito, 76
  - isolata all'infinito, 88
  - non isolata, 92
  - non uniforme, 90
  - non uniformi, 90
  - polare, 76, 78
- stabile, 265
- successione
  - a valori complessi, 12
  - convergente, 12
  - divergente, 13
  - geometrica, 13
  - indeterminata, 13
- taglio, 90
- teorema
  - dei residui, 102
  - di Casorati, 97
  - di Cauchy, 61
  - di Liouville, 94
  - di Morera, 72
  - di Picard, 97
  - valore finale, 238
  - valore iniziale, 235
- transitorio, 266
- trasformata
  - di Fourier, 160
  - di Laplace, 204
  - di Laplace unilatera, 244
- trasformata di segnali periodici, 190
- trasformata Zeta, 280
  - dominio, 282
- treno di impulsi, 187
- unità immaginaria, 271
- uscita, 247
- valor principale, 103
- zero
  - di ordine  $N$ , 76, 77