FISICA

2

4ª Edizione

D. Halliday
R. Resnick
K.S. Krane

EDIZIONE ITALIANA A CURA DI
A. Pullia

CASA EDITRICE AMBROSIANA
MILANO

Titolo originale: Physics, 4th Edition
Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978, 1992 by John Wiley & Sons, Inc.

Copyright © 1967, 1982, 1994, C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana, Milano

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione
e di adattamento totale o parziale, con qualsiasi mezzo
(compresi i microfilm e le copie fotostatiche)
sono riservati per tutti i paesi.

L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione
a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15%
delle pagine del presente volume.
Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione Italiana
per i Diritti di Riproduzione delle Opere dell'Ingegno (AIDRO),
via delle Erbe 2, 20121 Milano, tel. e fax 02809506, e-mail: aidro@iol.it

Quando acquisterà efficacia (ai sensi dell'art. 181 ter l. 633/1941)
il nuovo testo dell'art. 68, co. 4 l. 633/1941, introdotto dall'art. 2 l. 248/2000,
la riproduzione a mezzo fotocopia potrà essere effettuata, per uso personale
(cioè privato e individuale), con pagamento, da parte del responsabile
del punto o centro di fotocopia, a SIAE del compenso di legge.

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori
del proprio catalogo editoriale.
La ristampa degli esemplari esistenti nelle biblioteche di tali opere
è pertanto consentita, senza limiti quantitativi e gratuitamente.
Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo
dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi
di altri editori o le opere antologiche.

Traduzione di Lanfranco Cicala, Alberto Pullia, Marco Pullia

Disegni di Giuseppe Maserati

Fotografie rielaborate elettronicamente da Centro dell'immagine, via Caravaggio 3, Milano

Prima edizione: 1967
Seconda edizione: 1982
Terza edizione: 1994

Ristampa
9 8 7 6 5 2001 2002 2003 2004

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli:
sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra loro. L'esperienza
suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori.
Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli.
Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a:

C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana
via Gargano 21, 20139 Milano
fax 02 52202260
e-mail: cearedaz@tin.it

Stampato da Grafiche Torriani
via Cattaneo, 11/13, Gorgonzola (MI)
per conto della C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana,
via Gargano 21, 20139 Milano

PREFAZIONE

La prima edizione di *Fisica per Studenti di Scienze ed Ingegneria* fu pubblicata nel 1960; l'edizione più recente (la terza), chiamata semplicemente *Fisica*, fu pubblicata nel 1977.

L'attuale quarta edizione (1992) è caratterizzata dall'aggiunta di un nuovo coautore per il testo.

Il testo è stato aggiornato per includere nuovi sviluppi in fisica ed in pedagogia. Sono stati apportati numerosi cambiamenti, dovuti in parte alla nostra lettura della letteratura relativa, in parte a commenti di numerosi utenti nelle edizioni precedenti ed in parte ai suggerimenti di un gruppo di revisori del manoscritto di questa edizione.

1. Questo volume segue il trattamento coerente dell'energia iniziato nei cap. 7 ed 8 e continuato nella Termodinamica nel Vol. 1. Le convenzioni per i segni per il lavoro ed altre forme di energia sono consistenti attraverso tutto il testo.

2. La relatività speciale, che era trattata nei Supplementi della precedente edizione, è integrata nel testo. Toccano questo argomento due capitoli: uno (nel Vol. 1) segue la trattazione delle onde meccaniche e l'altro (nel Vol. 2) segue quella delle onde elettromagnetiche. Alcuni particolari argomenti della relatività speciale (per esempio il moto relativo, i sistemi di riferimento, la quantità di moto e l'energia) sono trattati nel testo nei capitoli sulla Cinematica, Meccanica ed Elettromagnetismo. Questo approccio riflette la nostra convinzione che la relatività speciale dovrebbe essere trattata come parte della fisica classica. Tuttavia per quei docenti che vogliono ritardare l'insegnamento della relatività speciale sino alla fine del corso, le varie parti di relatività sono poste in paragrafi separati, che possono essere coerentemente saltati durante la prima lettura del testo.

3. Con riferimento alla terza edizione, sono stati effettuati alcuni cambiamenti nell'ordine di presentazione di alcune grandezze; per esempio l'energia potenziale elettrica viene introdotta prima del potenziale elettrico e la legge di Biot-Savart prima della legge di Ampère. La quantità di moto trasportata dalla radiazione elettromagnetica è stata spostata dal capitolo sulla luce (42) a quello sulle onde elettromagnetiche (41) e la riflessione da parte di specchi piani è ora trattata nel capitolo sulla riflessione e rifrazione su superfici piane (43). Il capitolo sulle oscillazioni elettromagnetiche è stato incorporato nel capitolo sull'induttanza (38).

4. Alcuni soggetti sono stati eliminati, tra questi i rettificatori, filtri, guide d'onda, linee di trasmissione e l'induttanza mutua. Abbiamo anche eliminato l'uso del vettore spostamento elettrico D e l'intensità di campo magnetico H.

5. Il Vol. 2 include otto capitoli (dal 49 al 56) che discutono la fisica quantistica ed alcune sue applicazioni. È stato aggiunto alla precedente versione un nuovo capitolo (il 56), che introduce la fisica delle particelle e la cosmologia ed è stata effettuata anche qualche variazione negli argomenti trattati nei capitoli sulla fisica atomica (da 49 a 51). Sono state poi distribuite nel testo altre moderne applicazioni come l'effetto Hall quantistico, i campi magnetici dei pianeti del sistema solare, recenti prove della conservazione della carica elettrica, la superconduttività, i monopoli magnetici e l'olografia.

6. Relativamente alla precedente versione è stato accresciuto il numero di problemi di fine capitolo: vi sono ora 1486 esercizi contro i 1222 precedenti; un aumento del 22%. Il numero delle Domande di fine capitolo è stato anche aumentato da 811 a 1027 (incremento del 27%). Abbiamo anche cercato di mantenere la qualità e la varietà dei problemi che erano state dei punti di forza delle precedenti edizioni di questo testo.

7. Vi sono nel Vol. 2 in media sei o sette esempi elaborati per capitolo, circa nella stessa misura dell'edizione precedente. Tuttavia, nella precedente edizione, come esempi venivano presentati spesso nuovi argomenti (per esempio la combinazione in parallelo o in serie di resistenze e capacità); questo invece viene fatto, in questa edizione, in opportuni sottoparagrafi.

Quindi in realtà viene ora offerto agli studenti un maggiore numero di esempi elaborati.

8. Vengono introdotte varie tecniche computazionali negli esempi elaborati e attraverso numerosi progetti al calcolatore mostrati alla fine dei capitoli. Alcuni programmi di calcolo sono riportati inoltre in appendice per incoraggiare gli studenti ad adottare questo metodo di calcolo nelle loro applicazioni.

9. Abbiamo inoltre aumentato e aggiornato i riferimenti bibliografici che appaiono come note di fine pagina nel testo. Alcuni riferimenti (spesso di riviste molto diffuse come «Scientific American») vengono suggeriti per allargare le conoscenze di base degli studenti in relazione a particolari argomenti; altri invece (spesso su riviste come «American Journal of Physics» o «Physics Teacher») vengono proposti per mostrare argomenti di particolare importanza pedagogica.

10. Le illustrazioni sono state completamente rifatte ed il loro numero nel Vol. 2 è stato aumentato del 26%, da 664 a 835 figure. Queste figure sono a colori per aumentarne la chiarezza o per renderle maggiormente pedagogiche.

11. Molte delle dimostrazioni, prove e argomentazioni dell'edizione precedente sono state messe in forma più stringente e ogni assunzione o approssimazione è stata chiarita. Abbiamo perciò migliorato il rigore del testo, senza rendere tuttavia più elevato il suo livello. Ci siamo sforzati di indicare sempre i limiti di validità delle leggi fisiche; abbiamo incoraggiato cioè gli studenti a porsi le seguenti domande: un particolare risultato si applica sempre o solo sotto certe condizioni? Che cosa succese andando verso situazioni relativistiche o quantistiche?

Nonostante lo sforzo di eliminare qualche argomento dell'edizione precedente, le aggiunte sopra menzionate hanno aumentato la lunghezza del testo. Si deve far notare tuttavia che pochi docenti vorranno seguire l'intero testo dall'inizio alla fine. Noi abbiamo sviluppato un testo che offre una rigorosa e completa introduzione alla fisica; ci è tuttavia chiaro che ogni docente sarà sicuramente in grado di trovare cammini alternativi attraverso il testo. Il docente che vuole trattare un minor numero di argomenti con maggiore profondità (con la convinzione che «meno è di più»), troverà facilmente un cammino alternativo, cortocircuitando alcune parti del testo. Alcuni paragrafi sono esplicitamente chiamati «facoltativi» (sono stampati con caratteri più piccoli) e possono essere saltati senza perdita di continuità. A seconda delle finalità del corso, possono essere saltati o trattati in modo meno accentuato altri paragrafi o addirittura alcuni capitoli.

Si fornisce in questo modo al docente un'ampia scelta di argomenti ridotti da coprire in corsi di prefissata lunghezza. Per i docenti che tengono corsi di fisica di particolare estensione o corsi più lunghi di un anno, questo testo fornisce materiale addizionale per un'esperienza interessante e globale. Crediamo che il testo faccia da strada fondamentale per addentrarsi nella fisica; molti percorsi naturalmente possono essere scelti e non è detto che tutti i percorsi debbano essere seguiti la prima volta. Chi «viaggia» per la prima volta, può essere incoraggiato a tornare ed esplorare i tratti saltati la prima volta.

Il testo è disponibile in volume separati: Il Volume 1 (capitoli da 1 a 26) riguarda la Cinematica, la Meccanica e la Termodinamica ed il Volume 2 (capitoli dal 27 al 56) riguarda l'Elettromagnetismo e l'Ottica. Gli ultimi otto capitoli introducono la fisica quantistica e alcune delle sue applicazioni. Il testo contiene molto di più dei contributi degli autori soltanto.

Abbiamo avuto infatti la fortuna di fruire dell'assistenza di Edward Derringh (Istituto di Tecnologia di Wentworth) nel preparare i problemi e di J. Richard Christman (Accademia Guardia Costa U.S.) nel preparare i progetti al Calcolatore. Abbiamo beneficiato inoltre dei commenti e critiche costruttive di un gruppo di revisori:

Robert P. Bauman (Università dell'Alabama)
Truman D. Black (Università del Texas, Arlington)
Edmond Brown (Istituto Politecnico Rensselaer)
J. Richard Christman (Accademia Guarda Costa U.S.)
Sumner Davis (Università della California, Berkeley)
Roger Freedman (Università della California, Santa Barbara)
James B. Gerhart (Università di Washington)
Richard Thompson (Università del Sud-California)
David Wallach (Università di Stato, Pennsylvania)
Roald K. Wangsness (Università dell'Arizona)

Siamo profondamente debitori a queste persone per il loro contributo sostanziale a questo progetto.

Maggio 1992

DAVID HALLIDAY
ROBERT RESNICK
KENNETH S. KRANE

PREFAZIONE ALL'EDIZIONE ITALIANA

La 4ª edizione del Volume 2 della *Fisica* di D. Halliday e R. Resnick, a cui si è aggiunto un terzo coautore K. Krane, viene presentata dalla Casa Editrice Ambrosiana nella Versione Estesa. Tale versione comprende oltre agli argomenti tradizionali di Elettromagnetismo e Ottica (trattati dal Cap. 27 al 48), anche otto capitoli (dal 49 al 56) dedicati ad una introduzione agli effetti quantistici applicati alla Fisica Atomica, alla Fisica dello Stato Solido, alla Fisica Nucleare e a quella Subnucleare. I primi capitoli, quelli tradizionali per i corsi di Fisica II, sono stati rielaborati rispetto alla versione precedente con qualche ridistribuzione degli argomenti e una ancora maggiore disponibilità di Esempi, di Domande e di Problemi di fine capitolo.

Nella versione italiana è stato aggiunto un paragrafo al Capitolo 40, per presentare le equazioni di Maxwell in forma differenziale.

Il testo fornisce, a mio avviso, un'ampia e completa introduzione alla Fisica; le conoscenze di base di matematica richieste sono relativamente semplici e il testo offre quindi la possibilità di lettura alla maggior parte degli studenti delle Facoltà Scientifiche.

La grande abbondanza di argomentazioni di carattere fisico, come l'uso di proprietà di simmetria, la messe notevole di esempi e applicazioni, la chiarezza delle illustrazioni rendono questo testo di gradevole e relativamente facile lettura.

La parte di fisica moderna può costituire un'ottima introduzione per coloro che poi la approfondiranno in corsi successivi e nello stesso tempo può fornire una visione panoramica abbastanza completa agli studenti che non avranno, nel seguito dei loro studi, altre occasioni di affrontare questi argomenti.

La traduzione in lingua italiana è opera di Lanfranco Cicala, Alberto e Marco Pullia; a questa hanno anche collaborato Adelio Rossi e Renata Stocker.

Milano, febbraio 1994 ANTONIO PULLIA

INDICE

CAPITOLO 27
LA CARICA ELETTRICA E LA LEGGE DI COULOMB 635

27-1 Cenni storici sull'elettromagnetismo 635
27-2 La carica elettrica 636
27-3 Conduttori e isolanti 637
27-4 La legge di Coulomb 638
27-5 La carica è quantizzata 641
27-6 La carica si conserva 643
Domande *644*
Problemi *645*

CAPITOLO 28
IL CAMPO ELETTRICO 649

28-1 I campi 649
28-2 Il campo elettrico E 650
28-3 Il campo elettrico di cariche puntiformi 651
28-4 Linee di forza 654
28-5 Il campo elettrico generato da distribuzioni di carica continue 656
28-6 Carica puntiforme in un campo elettrico 660
28-7 Dipolo in un campo elettrico 663
Domande *667*
Problemi *669*

CAPITOLO 29
LA LEGGE DI GAUSS 675

29-1 Il flusso di un campo vettoriale 675
29-2 Il flusso del campo elettrico 677
29-3 La legge di Gauss 679
29-4 Un conduttore carico isolato 681
29-5 Applicazioni della legge di Gauss 684
29-6 Prove sperimentali della legge di Gauss e della legge di Coulomb 688
29-7 Il modello nucleare dell'atomo (facoltativo) 691
Domande *693*
Problemi *694*

CAPITOLO 30
IL POTENZIALE ELETTRICO 701

29-1 Le forze elettrostatiche e gravitazionali 701
30-2 L'energia potenziale elettrica 702
30-3 Il potenziale elettrico 704
30-4 Il calcolo del potenziale dato il campo 706
30-5 Il potenziale dovuto a una carica puntiforme 707
30-6 Il potenziale di un insieme di cariche puntiformi 709
30-7 Il potenziale elettrico di distribuzioni di carica continue 711
30-8 Superfici equipotenziali 713
30-9 Il calcolo del campo dato il potenziale 714
30-10 Il conduttore isolato 716
30-11 L'acceleratore elettrostatico (facoltativo) 718
Domande *720*
Problemi *721*

CAPITOLO 31
CONDENSATORI E DIELETTRICI 729

31-1 La capacità 729
31-2 Il calcolo della capacità 730
31-3 Condensatori in serie e in parallelo 733
31-4 L'energia immagazzinata in un campo elettrico 735
31-5 Condensatore con dielettrico 737
31-6 I dielettrici dal punto di vista atomico 729
31-7 I dielettrici e la legge di Gauss 741
Domande *743*
Problemi *745*

CAPITOLO 32 CORRENTE E RESISTENZA 751

32-1 Correnti elettriche 751
32-2 Densità di corrente 753
32-3 Resistenza, resistività e conducibilità 755
32-4 La legge di Ohm 757
32-5 La legge di Ohm dal punto di vista microscopico 758
32-6 Trasferimenti di energia in un circuito elettrico 760
32-7 I semiconduttori (facoaltativo) 763
32-8 Superconduttività (facoltativo) 763
Domande *764*
Problemi *765*

CAPITOLO 33 CIRCUITI DC 771

33-1 La forza elettromotrice 771
33-2 Il calcolo della corrente in una singola maglia 773
33-3 Differenze di potenziale 774
33-4 Resistori in serie e in parallelo 776
33-5 Circuiti a molte maglie 779
33-6 Strumenti di misura 781
33-7 Circuiti *RL* 782
Domande *785*
Problemi *786*

CAPITOLO 34 IL CAMPO MAGNETICO 793

34-1 Il campo magnetico B 793
34-2 La forma magnetica su una carica in moto 794
34-3 Cariche in moto circolare 798
34-4 L'effetto Hall 803
34-5 Forza magnetica agente su una corrente 806
34-6 Momento agente su una spira percorsa da corrente 808
34-7 Il dipolo magnetico 810
Domande *811*
Problemi *813*

CAPITOLO 35 LA LEGGE DI AMPERE 819

35-1 La legge di Biot-Savart 819
35-2 Applicazioni della legge di Biot-Savart 821
35-3 Linee di forza di B 824
35-4 Due conduttori paralleli 825
35-5 La legge di Ampère 827
35-6 Solenoidi e toroidi 829
35-7 Elettromagnetismo e sistemi di riferimento (facoltativo) 823
Domande *832*
Problemi *834*

CAPITOLO 36 LA LEGGE DELL'INDUZIONE DI FARADAY 841

36-1 Gli esperimenti di Faraday 841
36-2 La legge dell'induzione di Faraday 842
36-3 La legge di Lenz 844
36-4 Forze elettromotrici derivanti dal moto 846
36-5 Campi elettrici indotti 848
36-6 Il betatrone 851
36-7 Induzione e moto relativo (facoltativo) 852
Domande *854*
Problemi *857*

CAPITOLO 37 PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA 865

37-1 La legge di Gauss per il magnetismo 865
37-2 Magnetismo storico e nucleare 867
37-3 Magnetizzazione 870
37-4 Materiali magnetici 872
37-5 Il magnetismo dei pianeti (facoltativo) 876
Domande *875*
Problemi *879*

CAPITOLO 38 L'INDUTTANZA 883

38-1 L'induttanza 883
38-2 Calcolo dell'induttanza 884
38-3 Circuiti *RL* 886
38-4 Energia immagazzinata nel campo magnetico 889
38-5 Circuiti oscillanti: trattazione qualitativa 892
38-6 Circuiti oscillanti: trattazione quantitativa 895
38-7 Oscillazioni forzate e smorzate 896
Domande *899*
Problemi *901*

ISBN 88-408-0777-2

CAPITOLO 39 CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA 907

39-1 Correnti alternate 907
39-2 Tre elementi separati 908
39-3 Il circuito *RLC* in serie 911
39-4 Potenza nei circuiti in corrente alternata 914
39-5 Il trasformatore (facoltativo) 916
Domande *917*
Problemi *919*

CAPITOLO 40 LE EQUAZIONI DI MAXWELL 925

40-1 Le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo 925
40-2 Campi magnetici indotti e corrente di spostamento 926
40-3 Le equazioni di Maxwell 929
40-4 Equazioni di Maxwell e cavità risonanti (facoltativo) 931
40-5 Forma differenziale delle equazioni di Maxwell 934
Domande *937*
Problemi *938*

CAPITOLO 41 ONDE ELETTROMAGNETICHE 941

41-1 Lo spettro elettromagnetico 941
41-2 Generazione di un'onda elettromagnetica 945
41-3 Onde elettromagnetiche ed equazioni di Maxwell 948
41-4 Trasporto di energia e vettore di Poynting 951
41-5 Quantità di moto e pressione di radiazione (facoltativo) 953
Domande *955*
Problemi *956*

CAPITOLO 42 LA NATURA E LA PROPAGAZIONE DELLA LUCE 961

42-1 La luce visibile 961
42-2 La velocità della luce 963
42-3 L'effetto Doppler per la luce 966
42-4 Derivazione dell'effetto Doppler (facoltativo) 968
42-5 Conseguenze dell'effetto Doppler relativistico (facoltativo) 970
Domande *971*
Problemi *972*

CAPITOLO 43 RIFLESSIONE E RIFRAZIONE SU SUPERFICI PIANE 975

43-1 Ottica geometrica e ottica ondulatoria 975
43-2 Riflessione e rifrazione 976
43-3 Derivazione della legge di riflessione 980
43-4 Formazione delle immagini su specchi piani 982
43-5 Derivazione della legge di rifrazione 984
43-6 Riflessione totale 987
Domande *989*
Problemi *990*

CAPITOLO 44 SPECCHI SFERICI E LENTI 998

44-1 Specchi sferici 998
44-2 Superfici rifrangenti sferiche 1003
44-3 Lenti sottili 1005
44-4 Sistemi ottici composti 1010
44-5 Strumenti ottici 1012
Domande *1015*
Problemi *1016*

CAPITOLO 45 INTERFERENZA 1023

45-1 Interferenza da doppia fenditura 1023
45-2 Coerenza 1026
45-3 Intensità nell'interferenza da doppia fenditura 1029
45-4 Interferenza da pellicole sottili 1032
45-5 Reversibilità ottica e cambiamenti di fase nella riflessione (facoltativo) 1035
45-6 Interferometo di Michelson 1037
45-7 Interferometro di Michelson e propagazione della luce (facoltativo) 1038
Domande *1039*
Problemi *1040*

CAPITOLO 46 DIFFRAZIONE 1045

46-1 Diffrazione e teoria ondulatoria della luce 1045
46-2 Diffrazione da singola fenditura 1048
46-3 Intensità nella diffrazione da singola fenditura 1050
46-4 Diffrazione da un foro circolare 1054
46-5 Doppia fenditura: combinazione di interferenza e diffrazione 1056
Domande *1060*
Problemi *1061*

CAPITOLO 47 RETICOLI E SPETTRI 1065

47-1 Fenditure multiple 1065
47-2 Reticoli di diffrazione 1069
47-3 Dispersione e potere risolutivo 1071
47-4 Diffrazione dei raggi X 1074
47-5 Olografia (facoltativo) 1077
Domande *1079*
Problemi *1081*

CAPITOLO 48 POLARIZZAZIONE 1086

48-1 Polarizzazione 1086
48-2 Lamine polarizzanti 1087
48-3 Polarizzazione per riflessione 1089
48-4 Birifrangenza 1091
48-5 Polarizzazione circolare 1094
48-6 Diffusione della luce 1097
48-7 Limiti quantistici 1100
Domande *1101*
Problemi *1102*

CAPITOLO 49 LUCE E FISICA DEI QUANTI 1106

49-1 Radiazione termica 1106
49-2 Legge dell'irraggiamento di Planck 1108
49-3 Quantizzazione dell'energia 1109
49-4 Capacità termiche dei solidi 1111
49-5 L'effetto fotoelettrico 1114
49-6 La teoria dei fotoni di Einstein 1116
49-7 Spettro compton 1117
Domande *1122*
Problemi *1123*

CAPITOLO 50 LA NATURA ONDULATORIA DELLA MATERIA 1127

50-1 Particelle che si comportano come onde 1124
50-2 Lunghezza d'onda di De Broglie 1129
50-3 Esperimenti sull'ipotesi di De Broglie 1130
50-4 Onde, pacchetti d'onde, particelle 1133
50-5 Relazioni di indeterminazione di Heisenberg 1135
50-6 La funzione d'onda 1138
50-7 Particelle intrappolate e densità di probabilità 1139
50-8 Effetto tunnel 1145
50-9 Il principio di corrispondenza 1148
50-10 Onde e particelle 1149
Domande *1152*
Problemi *1153*

CAPITOLO 51 LA STRUTTURA DELL'ATOMO D'IDROGENO 1157

51-1 La teoria di Bohr 1157
51-2 L'atomo d'idrogeno e l'equazione di Schrödinger 1163
51-3 Momento angolare 1165
51-4 L'esperimento di Stern e Gerlach 1169
51-5 Lo spin dell'elettrone 1171
51-6 I possibili stati dell'atomo d'idrogeno 1173
51-7 Lo stato fondamentale dell'idrogeno 1174
51-8 Gli stati eccitati dell'idrogeno 1175
51-9 Particolarità sulla struttura atomica (facoltativo) 1177
Domande *1179*
Problemi *1180*

CAPITOLO 52 FISICA ATOMICA 1189

52-1 Lo spettro dei raggi X 1185
52-2 Raggi X e classificazione progressiva degli elementi 1187

ISBN 88-408-0777-2

52-3 La costruzione degli atomi 1189
52-4 La tavola periodica 1191
52-5 Laser e luce laser 1194
52-6 Einstein e il laser 1197
52-7 Come funziona un laser 1198
52-8 Struttura molecolare 1201
Domande *1203*
Problemi *1204*

CAPITOLO 53 CONDUZIONE ELETTRICA NEI SOLIDI 1207

53-1 Elettroni di conduzione nei metalli 1207
53-2 Riempimento degli stati permessi 1209
53-3 Conduzione elettrica nei metalli 1212
53-4 Bande e intervalli 1213
53-5 Conduttori, isolanti e semiconduttori 1216
53-6 Semiconduttori drogati 1217
53-7 La giunzione p-n 1220
53-8 Optoelettronica 1224
53-9 Il transistor 1226
53-10 Superconduttori 1227
Domande *1229*
Problemi *1231*

CAPITOLO 54 FISICA NUCLEARE 1235

54-1 Alla scoperta del nucleo 1235
54-2 Alcune proprietà del nucleo 1237
54-3 Il decadimento radioattivo 1241
54-4 Il decadimento alfa 1243
54-5 Il decadimento beta 1245
54-6 La misura delle radiazioni ionizzanti 1247
54-7 La radioattività naturale 1248
54-8 Le reazioni nucleari 1250
54-9 I modelli nucleari (facoltativo) 1252
Domande *1255*
Problemi *1257*

CAPITOLO 55 ENERGIA DAL NUCLEO 1263

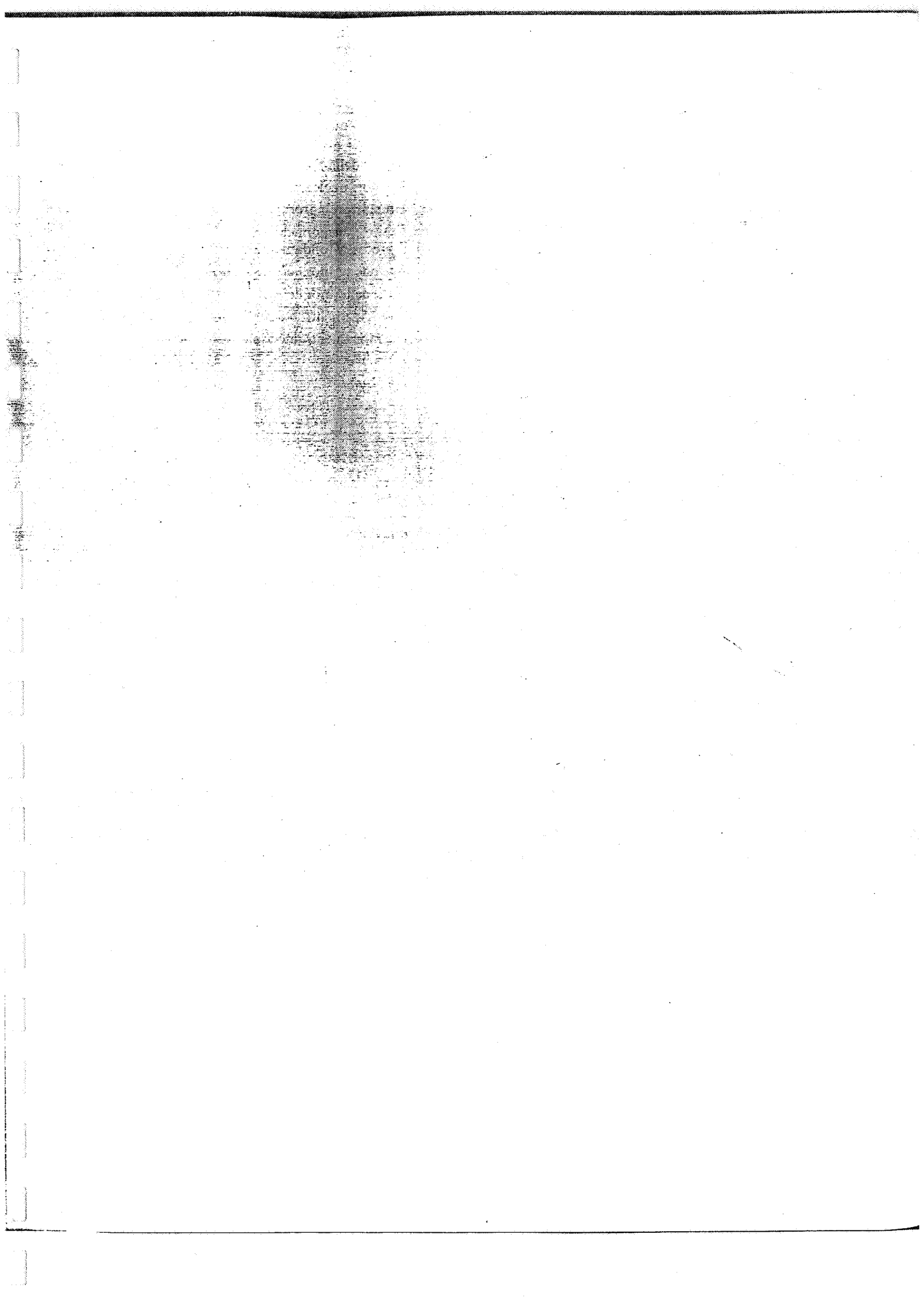
55-1 L'atomo e il nucleo 1263
55-2 Fissione nucleare: il processo fondamentale 1264
55-3 Teoria della fissione nucleare 1266
55-4 Reattori nucleari: i principi fondamentali 1268
55-5 Un reattore naturale 1271
55-6 Fusione termonucleare: il processo fondamentale 1272
55-7 Fusione termonucleare nelle stelle 1274
55-8 Fusione termonucleare controllata 1276
55-9 Il confinamento magnetico 1277
55-10 Il confinamento inerziale 1279
Domande *1280*
Problemi *1282*

CAPITOLO 56 FISICA DELLE PARTICELLE E COSMOLOGIA 1287

56-1 Interazioni fra particelle 1287
56-2 Famiglie di particelle 1290
56-3 Leggi di conservazione 1294
56-4 Il modello a quark 1296
56-5 La cosmologia del *big bang* 1301
56-6 La sintesi nucleare 1306
56-7 L'età dell'universo 1311
Domande *1314*
Problemi *1315*

APPENDICI

A Sistema internazionale di unità (SI) A-1
B Alcune costanti fondamentali della fisica A-3
C Alcuni dati astronomici A-4
D Proprietà degli elementi A-5
E Tavola periodica degli elementi A-7
F Particelle elementari A-8
G Fattori di conversione A-10
H Formule matematiche A-14
I Programmi al calcolatore A-16
J Premi Nobel per la fisica A-19
K Risposte ai problemi con numeri dispari A-23
FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI F-29
INDICE ANALITICO I-31



Capitolo 27

LA CARICA ELETTRICA E LA LEGGE DI COULOMB

Cominciamo qui uno studio dettagliato dell'elettromagnetismo, che proseguirà per una buona parte di questo testo. Le forze elettromagnetiche sono responsabili della struttura dell'atomo e del legame degli atomi nelle molecole e nei solidi. Molte delle proprietà dei materiali che abbiamo fin qui studiato hanno natura elettromagnetica, come l'elasticità dei solidi e la tensione superficiale dei liquidi. La forza di una molla, l'attrito e la forza normale traggono origine dalla forza elettromagnetica che agisce tra gli atomi.
Fra gli esempi di elettromagnetismo che studieremo ci sono la forza fra le cariche elettriche, come quella che si manifesta tra un elettrone e il nucleo nell'atomo; il moto di un corpo carico soggetto a una forza elettrica esterna, come nel caso di un elettrone nel fascio di un oscilloscopio; il moto di cariche elettriche nei circuiti e il comportamento degli elementi circuitali; la forza fra i magneti permanenti e le proprietà dei materiali magnetici; la radiazione elettromagnetica, che, in ultima analisi, porta allo studio dell'ottica, cioè allo studio della natura della luce e della sua propagazione. In questo capitolo cominciamo con una discussione sulla carica elettrica, sulle proprietà dei corpi carichi e sulla fondamentale forza elettrica fra due corpi carichi.

27-1 CENNI STORICI SULL'ELETTROMAGNETISMO

I filosofi greci, già nel 600 a.C., sapevano che sfregando un pezzo di ambra, esso attraeva pezzetti di paglia. C'è un collegamento fra questo antico esperimento e l'età dell'elettronica in cui viviamo, nella parola «elettrone» che deriva dalla parola greca designante l'ambra.

I Greci sapevano anche che alcune pietre esistenti normalmente in natura, che ora noi sappiamo essere composte di magnetite, avevano il potere di attrarre il ferro. A partire da queste semplici osservazioni le scienze della elettricità e del magnetismo si svilupparono per secoli in modo indipendente, fino a che nel 1820 Hans Christian Oersted trovò una connessione fra di esse: una corrente *elettrica* in un cavo ha il potere di deflettere un ago *magnetico* posto nelle immediate vicinanze. Oersted fece questa scoperta preparando un'esercitazione per i suoi studenti di fisica.

La nuova scienza dell'elettromagnetismo fu sviluppata da Michael Faraday (1791-1867), un geniale fisico sperimentale, capace di intuizioni fisiche prodigiose, le cui note di laboratorio non contengono neppure un'equazione. James Clerk Maxwell (1831-1879) sintetizzò le idee di Faraday in forma matematica, introdusse molte sue nuove idee e pose solide basi teoriche all'elettromagnetismo. Le quattro equazioni di Maxwell (vedi tab. 2 del cap. 40) giocano nell'elettromagnetismo lo stesso ruolo delle leggi di Newton nella meccanica classica o delle leggi della termodinamica nello studio del calore. Nei capitoli seguenti introdurremo e discuteremo singolarmente le equazioni di Maxwell.

Maxwell concluse che la luce ha natura elettromagnetica e che la sua velocità può essere dedotta da misure elettriche e magnetiche. Perciò l'ottica doveva essere intimamente connessa con l'elettricità e il magnetismo. Il significato delle equazioni di Maxwell è notevole e racchiude i principi fondamentali di tutti i dispositivi ottici ed elettromagnetici, come i motori, la radio, la televisione, i radar a microonde, i microscopi e i telescopi.

Lo sviluppo dell'elettromagnetismo classico non si concluse con i lavori di Maxwell. Il fisico inglese Oliver Heaviside (1850-1925) e specialmente il fisico tedesco H. A. Lorentz (1853-1928) contribuirono in modo sostanziale alla chiarificazione della teoria di Maxwell. Heinrich Hertz* (1857-1894) fece un grande passo in avanti quando, più di vent'anni dopo che Maxwell mise a punto la sua teoria, produsse in laboratorio le «onde maxwelliane» che oggi chiameremmo onde ra-

* Vedi *Heinrich Hertz*, Philip e Emily Morrison, «Scientific American», dicembre 1957, p 98.

ISBN 88-408-0777-2

dio. Subito dopo Marconi e altri svilupparono applicazioni pratiche delle onde elettromagnetiche di Maxwell ed Hertz. Albert Einstein basò la sua teoria della relatività sulle equazioni di Maxwell. L'articolo di Einstein del 1905 che introdusse la relatività speciale fu intitolato «Sulla elettrodinamica dei corpi in movimento».

Oggi l'elettromagnetismo è fonte di interesse su due piani. Sul piano pratico e applicativo, le equazioni di Maxwell sono utilizzate per studiare le proprietà elettriche e magnetiche dei nuovi materiali e per disegnare dispositivi elettronici sempre più complessi e sofisticati. Sul piano della fisica fondamentale, sono stati fatti particolari sforzi per unificare l'elettromagnetismo con le altre forze fondamentali della natura (vedi par. 6-1), in analogia con la unificazione delle forze elettriche e magnetiche fatta da Oersted, Faraday e Maxwell nell'elettromagnetismo. Un parziale successo fu ottenuto nel 1967 quando Steven Weinberg e Abdus Salam proposero indipendentemente l'uno dall'altro una teoria, inizialmente sviluppata da Sheldon Glashow, che unificò l'interazione elettromagnetica con l'interazione debole, che è responsabile di alcuni processi di decadimento radioattivo. Così come l'unificazione dell'elettromagnetismo di Maxwell fornì predizioni che potevano essere indagate sperimentalmente per verificare la teoria stessa, la teoria della interazione elettrodebole di Glashow-Weinberg-Salam dà predizioni univoche che possono essere provate sperimentalmente. Queste prove sono state effettuate con gli acceleratori di particelle ad alte energie ed hanno confermato le predizioni della teoria elettrodebole. Glashow, Salam e Weinberg condivisero nel 1979 il premio Nobel per lo sviluppo di questa teoria. Molti tentativi vengono oggi fatti dai fisici teorici per estendere l'unificazione alla interazione forte, che tiene uniti i nuclei atomici e ci sono speranze di includere nell'unificazione anche la forza gravitazionale, così che un'unica teoria raggruppi tutte le interazioni fondamentali conosciute.

27-2 LA CARICA ELETTRICA

Camminando sopra un tappeto in un giorno di aria secca può capitare di prendere la scossa toccando la maniglia di metallo della porta. Su scala più grande il fulmine è noto a tutti. Questi fenomeni lasciano pensare che negli oggetti familiari che ci circondano sia immagazzinata una grande quantità di *carica elettrica*.

La neutralità elettrica della maggior parte degli oggetti attorno a noi nasconde un enorme contenuto di cariche elettriche positive e negative che si cancellano esattamente agli effetti esterni. Solamente quando questo bilancio elettrico viene disturbato, la natura rivela gli effetti di una carica netta positiva o negativa. Quando diciamo che un corpo è «carico» intendiamo che la carica è sbilanciata anche se la carica netta è, in genere, una piccola frazione della carica totale positiva o negativa contenuta nel corpo (vedi esempio 2).

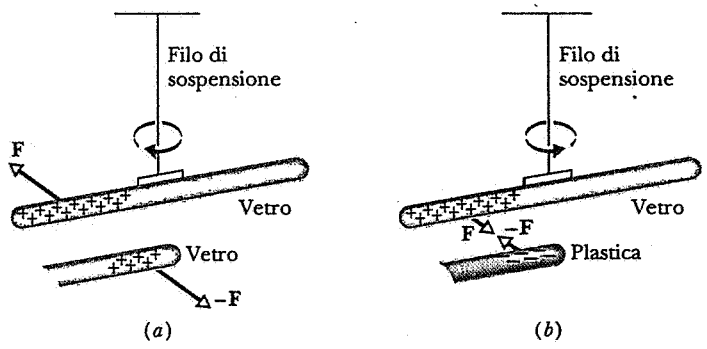


Figura 1 (*a*) Due bacchette caricate con carica dello stesso segno si respingono. (*b*) Due bacchette caricate con cariche di segno opposto si attraggono.

I corpi carichi esercitano forze l'uno sull'altro. Per mostrare ciò possiamo caricare una bacchetta di vetro strofinandola con un fazzoletto di seta. Il processo di strofinamento trasferisce una piccola quantità di carica da un corpo all'altro, alterando la neutralità di carica di ciascuno di essi. Appendiamo, poi, la bacchetta carica con un filo, come mostrato nella figura 1*a*, e portiamo nelle vicinanze una seconda bacchetta di vetro carica. Le due bacchette si respingeranno. Se, invece, portiamo nelle vicinanze una bacchetta di plastica opportunamente caricata per strofinamento con un pezzo di pelle, noteremo che le due bacchette si attraggono; vedi figura 1*b*.

Tutto ciò si spiega dicendo che esistono due tipi di carica, una delle quali (quella del vetro strofinato con seta) è chiamata *positiva*, l'altra (quella della plastica strofinata con pelle), dualmente, è chiamata *negativa*. Questi semplici esperimenti possono essere riassunti dicendo che:

cariche dello stesso segno si respingono,
cariche di segno opposto si attraggono.

Nel paragrafo 27-4 metteremo questa regola in forma quantitativa nella cosiddetta legge della forza di Coulomb. Considereremo soltanto cariche che siano a riposo oppure in movimento molto lento; questa restrizione definisce l'ambito dell'*elettrostatica*.

Fu Benjamin Franklin (1706-1790) a introdurre la terminologia di carica positiva e negativa; egli, oltre ad avere molti altri meriti, fu uno scienziato di fama

ISBN 88-408-0777-2

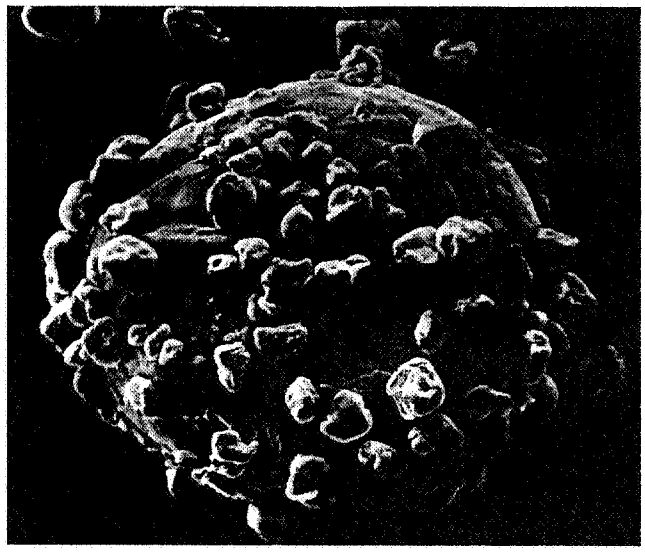


Figura 2 Un granulo portatore elettrizzato all'interno di una fotocopiatrice Xerox, coperto di particelle di toner che aderiscono su di esso per attrazione elettrostatica.

internazionale. È stato persino detto che i successi diplomatici di Franklin in Francia durante la Guerra d'Indipendenza americana furono resi possibili dalla sua indiscussa notorietà di scienziato.

Le forze elettriche fra i corpi carichi vengono utilizzate in molte applicazioni industriali, fra cui possiamo citare lo spruzzamento elettrostatico di vernici, il rivestimento di superfici con polveri, la stampa a getto di inchiostro, e la riproduzione di immagini in fotocopia. La figura 2 mostra l'esempio di un granulo portatore elettrizzato all'interno di una macchina fotocopiatrice, ricoperto di particelle di polvere nera (*toner*) che aderiscono al granulo per effetto di forze elettrostatiche. Le particelle di toner, cariche negativamente, vengono trasferite dai granuli su una distribuzione di carica positiva riproducente il documento da copiare, che si forma su un rullo rotante. Un foglio di carta carico positivamente attrae, poi, le particelle del toner dal rullo su di sé, e viene, infine, scaldato in modo che le particelle si fondano in loco per produrre l'immagine finale.

27-3 CONDUTTORI E ISOLANTI

Tenendo in mano una bacchetta di rame non è possibile caricarla, neppure se la si strofina con forza, indipendentemente dal materiale utilizzato per lo strofinamento. Se la bacchetta di rame ha un manico di plastica, invece, si riuscirà a caricarla. La spiegazione è che la carica può facilmente scorrere attraverso certi materiali, chiamati *conduttori*, fra cui il rame. In altri materiali, chiamati *isolanti*, le cariche non possono fluire da un punto a un altro; se immettiamo una carica in un isolante, essa permarrà nel punto in cui è stata posta; ciò avviene, per esempio, nella maggior parte dei materiali plastici. La bacchetta di rame non può essere caricata poiché tutte le cariche immesse possono facilmente scorrere attraverso il corpo dello sperimentatore (che è anch'esso conduttore) e raggiungere il suolo. Il manico di plastica, invece, blocca il moto della carica e le consente di accumularsi sul rame.

Il vetro, l'acqua distillata e i materiali plastici sono normali esempi di isolanti. Sebbene non esistano isolanti perfetti, il quarzo è un ottimo isolante; il suo potere isolante è migliore di quello del rame di un fattore 10^{25}.

Il rame, i metalli in genere, l'acqua di rubinetto e il corpo umano sono normali esempi di conduttori. Nei metalli un fenomeno chiamato *effetto Hall* (vedi par. 34-4) dimostra che le cariche libere di muoversi (elettroni) sono di segno negativo. Quando gli atomi di rame si aggregano per formare un corpo solido, i loro elettroni più esterni non restano legati ai singoli atomi, ma diventano liberi di muoversi all'interno della struttura cristallina rigida formata dagli ioni positivi fissi del reticolo. Questi elettroni mobili sono detti *elettroni di conduzione*. Le cariche positive nella bacchetta di rame sono fisse come in quella di vetro.

L'esperimento della figura 3 mette in luce la mobilità della carica nei conduttori. Una bacchetta di plastica caricata negativamente attrae uno qualunque dei due bordi di una bacchetta di rame scarica appesa al proprio centro. Gli elettroni di conduzione (liberi) nella bacchetta di rame vengono respinti dalle cariche negative della bacchetta di plastica posta nelle vicinanze e si spostano sul bordo opposto, lasciando una carica netta positiva sul primo estremo della bacchetta stessa.

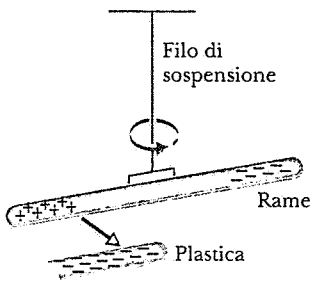


Figura 3 Ciascun bordo di una bacchetta di rame scarica viene attratto da una bacchetta carica. Nel caso illustrato gli elettroni di conduzione della bacchetta di rame vengono respinti sul bordo di destra, scoprendo sul bordo di sinistra una carica netta positiva.

Una bacchetta di vetro caricata positivamente attrarrà la bacchetta di rame attraverso lo stesso principio. In questo caso gli elettroni di conduzione della bacchetta di rame vengono attratti dalla carica positiva della bacchetta di vetro scoprendo sull'estremo opposto della bacchetta di rame stessa una carica netta positiva.

Questa distinzione fra conduttori e isolanti assume un significato quantitativo se si considera il numero di elettroni di conduzione disponibili in un dato volume di materiale. Nei normali conduttori ogni atomo fornisce un elettrone libero; di conseguenza potrebbero esserci circa 10^{23} elettroni di conduzione per cm^3. In un isolante a temperatura ambiente, d'altra parte, è poco probabile trovare anche un solo elettrone per cm^3.

A metà tra i conduttori e gli isolanti ci sono i *semiconduttori* come il silicio e il germanio; un tipico semiconduttore può contenere 10^{10}-10^{12} elettroni di conduzione per cm^3. Una proprietà dei semiconduttori è che la densità degli elettroni di conduzione può essere modificata considerevolmente con piccoli cambiamenti sul materiale, come l'introduzione di piccole quantità (meno di una parte su 10^9) di impurezze o una variazione della tensione applicata, della temperatura o della intensità di luce incidente sul materiale stesso.

Nel capitolo 32 considereremo la conduzione elettrica in vari materiali con maggior dettaglio; il capitolo 53 di questo testo mostra come la teoria quantistica porta a una più completa comprensione della conduzione elettrica.

27-4 LA LEGGE DI COULOMB

Charles Augustin Coulomb (1736-1806) tradusse l'attrazione e la repulsione elettrica in termini quantitativi e dedusse la legge che ne governa l'azione. Il suo strumento di misura, schematizzato in figura 4, assomiglia alla bacchetta appesa della figura 1, con la differenza che le cariche sono accumulate sopra le piccole sfere *a* e *b*.

Se *a* e *b* sono cariche, la forza elettrica agente sulla sferetta *a* tende a torcere il filo di sospensione. Coulomb misurava la torsione ruotando la testa di sospensione dell'angolo θ necessario a riportare le due sfere a una distanza prefissata l'una dall'altra. L'angolo θ è così una misura relativa della forza elettrica agente sulla carica *a*. Lo strumento di figura 4 è una *bilancia di torsione*; un simile apparecchio venne usato più tardi da Cavendish per misurare l'attrazione gravitazionale (vedi par. 16-3).

Gli esperimenti condotti da Coulomb e da altri suoi contemporanei mostrarono che la forza elettrica esercitata da un corpo carico su un secondo corpo carico dipende direttamente dal prodotto delle due cariche e inversamente dal quadrato della distanza fra di esse.* Cioè,

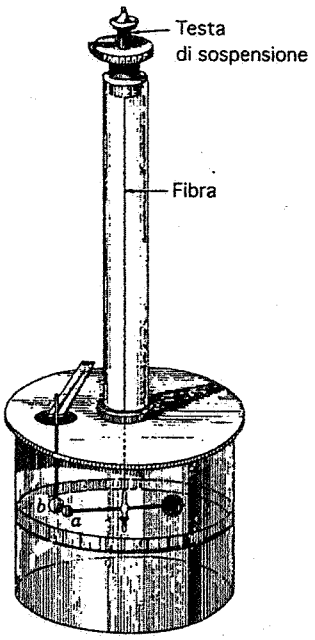


Figura 4 La bilancia di torsione di Coulomb. L'illustrazione è tratta dalla sua memoria del 1785 conservata presso l'Accademia delle Scienze di Parigi.

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

F è l'intensità della forza mutua che agisce su ciascuna delle due cariche *a* e *b*, q_1 e q_2 sono le cariche sulle sfere *a* e *b* e r è la distanza fra i loro centri. La forza su ciascuna carica dovuta all'altra agisce lungo la linea che connette le due cariche. Le due forze hanno versi opposti ma hanno uguale intensità anche se le cariche sono diverse.

Per tradurre la proporzionalità suddetta in una equazione introduciamo una costante moltiplicativa che chiamiamo, per ora, k. Otteniamo così la forza agente fra le cariche,

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (1)$$

* In questa analisi Coulomb non tenne ben in conto l'effetto dovuto allo spostamento delle cariche su una sfera a causa della seconda sfera carica adiacente, un effetto simile a quello illustrato in figura 3. Per una discussione su questo punto vedi *Precise Calculation of the Electrostatic Force Between Charged Spheres Including Induction Effects*, di Jack A. Soules, «American Journal of Phisycs», dicembre 1990, p. 1195.

ISBN 88-408-0777-2

L'equazione 1, che è chiamata *legge di Coulomb* è valida solo per i corpi carichi le cui dimensioni sono molto più piccole della distanza fra di essi. Spesso si dice che essa vale solo per *cariche puntiformi.**

La correttezza quantitativa della legge di Coulomb non può essere garantita dagli esperimenti di Coulomb. Le misure sulla bilancia di torsione sono difficili da effettuare se si richiede una accuratezza migliore di qualche percento. Tali misure, per esempio, non ci potrebbero convincere che l'esponente di r nella *equazione* 1 è esattamente 2 e non, per esempio, 2.01. Nel paragrafo 29-6 mostreremo che la legge di Coulomb può anche essere dedotta da un esperimento indiretto, che dimostra che l'esponente nella equazione 1 è pari a 2 con una incertezza di 1×10^{-16}.

La legge di Coulomb assomiglia alla legge della gravitazione universale di Newton, $F = Gm_1m_2/r^2$, che era nota da più di 100 anni ai tempi degli esperimenti di Coulomb. Entrambe sono leggi di proporzionalità inversa al quadrato della distanza e la carica q nella legge di Coulomb gioca lo stesso ruolo della massa m nella legge di gravitazione di Newton. Una differenza fra le due leggi è che le forze gravitazionali, per quanto si conosce, sono sempre attrattive, mentre le forze elettrostatiche possono essere attrattive o repulsive a seconda che le due cariche abbiano segno opposto o uguale.

C'è un'altra importante differenza tra le due leggi. Definendo la massa dalla seconda legge di Newton $F = ma$ e applicando, poi, la legge della gravitazione a masse note, potevamo determinare la costante G. Nel caso della legge di Coulomb dobbiamo adottare un procedimento inverso: *definiamo* un particolare valore per la costante k e poi utilizziamo la legge di Coulomb per determinare l'unità di misura della carica elettrica, come quella certa quantità di carica che produce una forza pari a una unità di misura standard.

Per esempio, consideriamo la forza agente fra due cariche uguali di grandezza q. Possiamo variare q fino a che la forza assume un particolare valore, per esempio 1 N per una distanza $r = 1$ m. Definiamo la carica q così costruita come l'unità di misura della carica. Tuttavia, è più preciso misurare la forza magnetica fra due cavi che portano una uguale corrente; con quest'ultimo approccio l'unità elettrica fondamentale del sistema internazionale SI è l'unità di corrente dalla quale deriva l'unità di carica. Il metodo operativo per definire l'unità di corrente, detta *ampere* (A) nel sistema SI è descritto nel paragrafo 35-4.

L'unità di carica del SI è il *coulomb* (C) che è definito come *la quantità di carica che fluisce in 1 secondo quando si ha una corrente stazionaria di 1 ampere.* Cioè,

$$dq = i\,dt, \tag{2}$$

dove dq (in coulomb) è la carica trasferita da una corrente i (in ampere) nell'intervallo dt (in secondi). Per esempio un filo percorso da una corrente stazionaria di 2 A trasporta una carica di 2×10^{-6} C in un tempo di 10^{-6} s.

Nel sistema SI la costante k è espressa nella seguente forma:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{3}$$

Quantunque tale scelta per la costante k faccia apparire la legge di Coulomb inutilmente complessa, essa si traduce, in ultima analisi, in una semplificazione nelle formule dell'elettromagnetismo, che vengono usate molto più spesso della legge di Coulomb.

ϵ_0, è chiamata *costante dielettrica del vuoto* (o *permettività del vuoto*) e ha un valore che è determinato dal valore assunto per la velocità della luce, come discuteremo nel capitolo 41. Il suo valore è

$$\epsilon_0 = 8.85418781762 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2}.$$

La costante k assume di conseguenza il valore (diamo le prime tre cifre significative):

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}.$$

Fatta questa scelta per la costante k, la legge di Coulomb può essere scritta come

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1q_2}{r^2}. \tag{4}$$

Sostituendo a k il valore numerico sopra riportato, esprimendo q in coulomb e r in metri si ottiene la forza in newton.

La legge di Coulomb in forma vettoriale

Finora abbiamo considerato solo l'intensità della forza fra due cariche, ottenuta in accordo con la legge di Coulomb. La forza però, essendo direzionale, è una grandezza di natura vettoriale. Nel caso della legge di Coulomb il verso della forza è determinato dal segno delle due cariche elettriche.

Come illustrato nella figura 5, supponiamo di avere due cariche puntiformi di valore q_1 e q_2 poste a una

* In senso stretto l'equazione 1 dovrebbe contenere i valori assoluti di q_1 e q_2: F darà così l'intensità della forza. Il verso della forza dipende dal segno delle cariche. Per ora ignoriamo questi dettagli che diventeranno importanti in questo paragrafo quando riscriveremo l'equazione 1 in forma vettoriale.

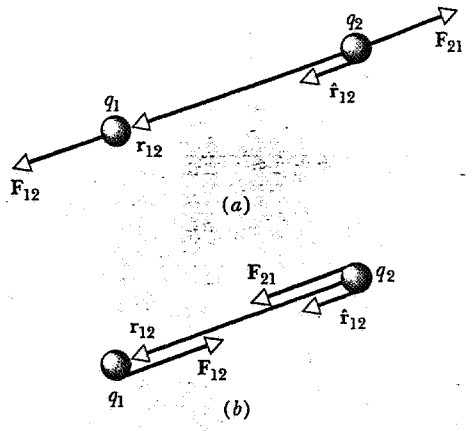


Figura 5 (*a*) Due cariche puntiformi q_1 e q_2 aventi lo stesso segno si respingono con forze uguali ed opposte. Il vettore $\mathbf{r}_{12}$ dà la posizione di q_1 rispetto a q_2, e il versore $\hat{\mathbf{r}}$ ha direzione e verso di $\mathbf{r}_{12}$. Si noti che $\mathbf{F}_{12}$ è parallela a $\mathbf{r}_{12}$. (*b*) Le due cariche hanno, ora, segni opposti e la forza è attrattiva. Si noti che $\mathbf{F}_{12}$ è antiparallela a $\mathbf{r}_{12}$.

distanza r_{12} l'una dall'altra. Per il momento assumiamo che le due cariche abbiano lo stesso segno, così che esse si respingano. Consideriamo la forza *sulla* particella 1 esercitata *dalla* particella 2, che indichiamo convenzionalmente come $\mathbf{F}_{12}$. Il vettore posizione che localizza la particella 1 relativamente alla particella 2 è $\mathbf{r}_{12}$; cioè se posizioniamo l'origine del nostro sistema di coordinate nella posizione della particella 2, allora $\mathbf{r}_{12}$ sarà il vettore posizione della particella 1.

Se le due cariche hanno lo stesso segno la forza è repulsiva e, come indicato nella figura 5*a*, $\mathbf{F}_{12}$ deve essere parallelo a $\mathbf{r}_{12}$. Se le due cariche hanno segni opposti, cone in figura 5*b*, la forza $\mathbf{F}_{12}$ è attrattiva e antiparallela rispetto a $\mathbf{r}_{12}$. In entrambi i casi possiamo rappresentare la forza come

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}. \tag{5}$$

Qui r_{12} è il modulo del vettore $\mathbf{r}_{12}$ e $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ indica il *versore* (vettore unitario) di $\mathbf{r}_{12}$. Cioè,

$$\hat{\mathbf{r}}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{6}$$

Abbiamo usato una forma simile alla equazione 5 per esprimere la forza gravitazionale (vedi eq. 2*a* e 2*b* del cap. 16). Un'altra relazione traspare dalla figura 5. In accordo con la terza legge di Newton, la forza esercitata *sulla* particella 2 *dalla* particella 1, $\mathbf{F}_{21}$, è uguale ed opposta a $\mathbf{F}_{12}$. Questa forza può allora essere espressa esattamente nella stessa forma:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}. \tag{7}$$

Qui $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ è un versore che punta dalla particella 1 alla particella 2; cioè esso sarebbe il versore della posizione della particella 2 se l'origine delle coordinate fosse posizionata sulla particella 1.

La forma vettoriale della legge di Coulomb è utile poiché contiene una informazione direzionale sulla forza ed esprime implicitamente se essa sia attrattiva o repulsiva. L'uso della forma vettoriale della legge di Coulomb è particolarmente importante quando si considerano le forze agenti su un insieme di più di due cariche puntiformi. In questo caso l'equazione 5 potrà essere applicata a ogni coppia di cariche e la forza complessiva agente su una carica qualsiasi potrà essere calcolata facendo la somma *vettoriale* di ciascun singolo contributo. Per esempio la forza sulla particella 1 di un insieme di cariche sarà

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \cdots, \tag{8}$$

dove $\mathbf{F}_{12}$ è la forza sulla particella 1 dovuta alla particella 2, $\mathbf{F}_{13}$ è la forza sulla particella 1 dovuta alla particella 3 e così via. L'equazione 8 è l'espressione matematica del *principio di sovrapposizione* applicato alle forze elettriche. Esso ci consente di considerare la forza agente fra ciascuna coppia di cariche come se tutte le altre non esistessero. Per esempio la forza $\mathbf{F}_{13}$ che la particella 3 esercita sulla particella 1 è valutata come se non fosse influenzata dalla presenza della particella 2. Il principio di sovrapposizione non è completamente ovvio e in alcune situazioni non è applicabile, per esempio nel caso di forze elettriche molto intense. Solo attraverso la sperimentazione si può verificarne l'applicabilità. In tutte le situazioni che incontreremo in questo testo, tuttavia, il principio di sovrapposizione è valido.

Il significato della legge di Coulomb va oltre la descrizione delle forze agenti tra sfere cariche. Essa, inserita nella struttura della fisica quantistica, descrive correttamente (1) le forze elettriche che legano gli elettroni di un atomo al nucleo, (2) le forze che legano gli atomi tra loro a formare le molecole e (3) le forze che legano gli atomi e le molecole a formare solidi e liquidi. Perciò gran parte delle forze che riguardano la nostra esperienza quotidiana che non siano di natura gravitazionale, sono elettriche. Per di più, a differenza della legge di gravitazione di Newton, che può essere considerata una utile approssimazione della più generale teoria di base della relatività, la legge di Coulomb è una relazione esatta per le cariche stazionarie e non una approssimazione di qualche teoria più generale. Essa si applica non solo agli oggetti macroscopici, ma anche alle particelle puntiformi come gli elettroni e i quark. La legge di Coulomb resta valida ai limiti quantistici (per esempio nel caso della forza elettrostatica fra il protone e l'elettrone nell'atomo di idrogeno).

ISBN 88-408-0777-2

Quando le particelle cariche si muovono a velocità prossima a quella della luce, come negli acceleratori di particelle ad alta energia, la legge di Coulomb non fornisce una descrizione esatta della interazione elettromagnetica; in questi casi è necessaria una analisi più completa basata sulle equazioni di Maxwell.

Esempio 1 La figura 6 mostra tre particelle cariche, mantenute ferme da forze non evidenziate. Quale forza elettrostatica agisce su q_1, per effetto delle altre due cariche? Assumiamo $q_1 = -1.2$ μC, $q_2 = +3.7$ μC, $q_3 = -2.3$ μC, $r_{12} = 15$ cm, $r_{13} = 10$ cm, $\theta = 32°$.

Soluzione Questo problema richiede l'uso del principio di sovrapposizione. Iniziamo a calcolare l'intensità delle forze che q_2 e q_3 esercitano su q_1. Sostituiamo il valore delle cariche nella equazione 5, omettendo, per il momento, il segno. Si ha così

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.2 \times 10^{-6}\mathrm{C})(3.7 \times 10^{-6}\mathrm{C})}{(0.15\ \mathrm{m})^2} = 1.77\ \mathrm{N}.$$

Le cariche q_1 e q_2 hanno segni opposti cosicché la forza fra di esse è attrattiva. Quindi $\mathbf{F}_{12}$ punta verso destra nella figura 6.

Inoltre si ha

$$F_{13} = \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.2 \times 10^{-6}\mathrm{C})(2.3 \times 10^{-6}\mathrm{C})}{(0.10\ \mathrm{m})^2} = 2.48\ \mathrm{N}.$$

q_1 e q_3 hanno lo stesso segno (negativo) cosicché la forza fra di esse è repulsiva. Pertanto $\mathbf{F}_{13}$ risulta essere come in figura 6.

Le componenti della forza risultante $\mathbf{F}_1$ agente su q_1 sono date, in accordo alla equazione 8, dalle espressioni

$$F_{1x} = F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13}\ \mathrm{sen}\theta = 1.77\ \mathrm{N} + (2.48\ \mathrm{N})(\mathrm{sen}\ 32°) = 3.08\ \mathrm{N}$$

e

$$F_{1y} = F_{12y} + F_{13y} = 0 - F_{13}\cos\theta = -(2.48\ \mathrm{N})(\cos 32°) = -2.10\ \mathrm{N}.$$

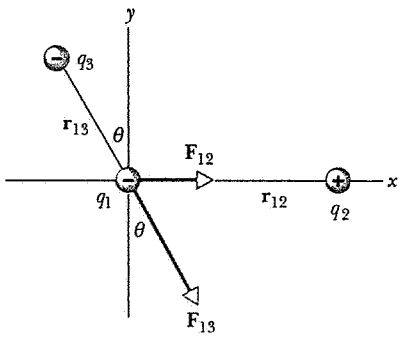


Figura 6 Esempio 1. Le tre cariche producono tre coppie di forze mutue di azione e reazione. Qui sono rappresentate soltanto le due forze che agiscono su q_1.

Da tali componenti si deduce che il modulo di $\mathbf{F}_1$ è pari a 3.73 N e che il vettore stesso è inclinato di un angolo pari a −34° rispetto all'asse x.

27-5 LA CARICA È QUANTIZZATA

Ai tempi di Franklin la carica elettrica era pensata come un fluido continuo, un'idea che si era mostrata utile in molte occasioni. Tuttavia oggi sappiamo che gli stessi fluidi come l'aria o l'acqua non sono continui, ma sono costituiti da atomi o molecole; la materia è discreta. Gli esperimenti mostrano che il fluido elettrico è anch'esso discreto, cioè è costituito da multipli di una certa carica elementare. Quindi una qualunque carica q che possa essere osservata e misurata direttamente può essere scritta nel seguente modo:

$$q = ne \qquad n = 0, \pm 2,\ \pm 2,\ \pm 3, \cdots, \tag{9}$$

in cui e, l'unità di *carica elementare*, ha il valore sperimentalmente determinato

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19}\ \mathrm{C},$$

con una incertezza sperimentale di circa 3 parti su 10^7. La carica elementare è una delle costanti fondamentali della natura.

Quando una grandezza fisica, come la carica, assume solo valori discreti anziché variabili con continuità, si dice che la grandezza è *quantizzata*. Abbiamo già visto che la materia, l'energia e il momento angolare sono quantizzati; la carica è un'altra importante grandezza fisica di questo tipo. L'equazione 9 ci dice che è possibile, per esempio, trovare una particella che abbia carica 0 oppure = 10e, oppure −6e, ma non è possibile trovare una particella con carica, diciamo, 3.57e. La tab. 1 mostra la carica e alcune altre proprietà delle

TABELLA 1 ALCUNE PROPRIETÀ DI TRE PARTICELLE

Particella	*Simbolo*[a]	*Carica*[b]	*Massa*[c]	*Momento angolare*[d]
Elettrone	e^-	−1	1	1/2
Protone	p	+1	1836.15	1/2
Neutrone	n	0	1838.68	1/2

[a] Ad ognuna delle particelle corrisponde una *antiparticella* avente stessa massa e stesso momento angolare della particella corrispondente, ma carica opposta. Le rispettive antiparticelle vengono indicate con i simboli e^+ (positrone), ($\bar{p}$) (antiprotone) e ($\bar{n}$) (antineutrone).
[b] In unità di carica elementare e.
[c] In unità di massa elettronica m_e.
[d] Il momento angolare di spin intrinseco, in unità di $h/2\pi$. Abbiamo introdotto questo concetto nel paragrafo 13-6 e lo approfondiremo nel paragrafo 51 di questo libro.

tre particelle fondamentali che costituiscono il mondo materiale attorno a noi.

Il quanto di carica è assai piccolo. Per esempio circa 10^{19} cariche elementari entrano nel filamento di una normale lampadina elettrica da 100 W, 120 V, ogni secondo e altrettante vi fuoriescono.

La granularità della carica elettrica non appare nei fenomeni di larga scala, così come non si apprezzano le singole molecole d'acqua quando vi si immerge una mano.

Dal 1964 i fisici hanno adottato una teoria sulle particelle elementari in accordo alla quale le particelle (per es. il protone e il neutrone) sono costituite da unità fondamentali più piccole, dette *quark*. Ai quark viene assegnata una carica elettrica frazionaria pari a 2/3 e e $-1/3$ e. I protoni e i neutroni sono costituiti da tre quark ciascuno. Il protone, con la sua carica $+e$ deve essere composto da due quark con carica 2/3 e ciascuno e un quark con carica $-1/3$ e. Il neutrone, con la sua carica netta nulla, deve includere due quark con carica $-1/3$ e e un quark con carica netta 2/3 e. Quantunque vi sia una chiara evidenza sperimentale dell'esistenza dei quark nel protone e nel neutrone, le collisioni ottenute alle più alte energie oggi raggiungibili negli acceleratori non hanno, finora, mai generato quark liberi. Forse i quark sono così fortemente legati fra di loro nei protoni e nei neutroni che l'energia raggiungibile negli acceleratori non è ancora sufficiente a liberarli. Alternativamente si dice che i quark obbediscono ad alcune leggi che governano il loro comportamento e che ne consentono l'esistenza soltanto in gruppi tali da formare cariche multiple di e. Non è, tuttavia, ancora chiaro il motivo per cui non si riescano ad osservare quark liberi.

Non è stata finora sviluppata alcuna teoria che ci consenta di calcolare la carica dell'elettrone. Né esiste una teoria definitiva che spieghi perché la carica fondamentale negativa (elettrone) sia in valore assoluto uguale alla carica fondamentale positiva (protone). Per il momento dobbiamo considerare il fondamentale «quanto» di carica elettrica come una proprietà della natura che si lascia misurare con precisione ma di cui ci sfugge il significato ultimo.

Esempio 2 Un penny elettricamente neutro contiene una ugual quantità di carica positiva e negativa. Qual è il valore di questa carica?

Soluzione La carica q è data da NZe, in cui N è il numero di atomi del penny e Ze è il valore della carica positiva e negativa di ciascun atomo.

Il numero N di atomi in un penny, assumendo, per semplicità, che sia di rame è $N_A m/M$, in cui N_A è il numero di Avogadro. La massa m della moneta è 3.11 g e la massa M di una mole (chiamata *massa molare*) di rame è 63.5 g. Si trova

$$N = \frac{N_A m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ atomi/mole})(3.11 \text{ g})}{63.5 \text{ g/mole}} = 2.95 \times 10^{22} \text{ atomi.}$$

Ogni atomo neutro ha una carica negativa di valore Ze associata ai suoi elettroni e una carica positiva dello stesso valore associata al suo nucleo; e è il valore della carica dell'elettrone cioè 1.60×10^{-19} C e Z è il numero atomico dell'elemento in questione. Per il rame Z è pari a 29. Il valore della carica totale positiva o negativa di un penny è quindi

$$q = NZe = (2.95 \times 10^{22})(29)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) = 1.37 \times 10^{5} \text{ C.}$$

Questa è una carica enorme. Per confronto, la carica che si può ottenere sfregando una bacchetta di plastica è circa 10^{-9} C, più piccola di un fattore 10^{14}. Se facessimo scorrere una carica di 1.37×10^5 C attraverso il filamento di una lampadina da 100 W, 120 V, essa funzionerebbe per un tempo di circa 38 h. C'è una gran quantità di carica nella materia!

Esempio 3 Nell'esempio 2 abbiamo visto che un penny di rame contiene una carica positiva e negativa pari a 1.37×10^5 C. Supponiamo che queste cariche possano essere concentrate in due punti separati, posti a una distanza di 100 m l'uno dall'altro. Quale forza attrattiva agirebbe su ciascun punto?

Soluzione Dall'equazione 4 abbiamo

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1.37 \times 10^5 \text{ C})^2}{(100 \text{ m})^2} = 1.69 \times 10^{16} \text{ N.}$$

Questo corrisponde a una forza peso di circa 2×10^{12} tonnellate! Se le cariche fossero saparate da una distanza pari al diametro della Terra la forza attrattiva sarebbe di 120 tonnellate. In questo esempio non abbiamo considerato il problema di concentrare le due cariche opposte in due regioni distinte, di dimensioni piccole rispetto alla distanza di separazione. Queste cariche, se mai si riuscisse a concentrarle in questo modo, esploderebbero per effetto delle forze repulsive di Coulomb. Questo esempio evidenzia come non si possa perturbare molto la neutralità elettrica della materia ordinaria. Se si cerca di estrarre una frazione considerevole della carica contenuta in un corpo, un'intensa forza di Coulomb si opporrà riportando la carica stessa nel suo luogo d'origine.

Esempio 4 La distanza media r fra il protone e l'elettrone nell'atomo di idrogeno è 5.3×10^{-11} m. (*a*) Qual è il valore medio della forza elettrostatica che attrae le due particelle? (*b*) Qual è il valore medio della forza gravitazionale che agisce fra le due particelle?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 4, per la forza elettrostatica, si ha che

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N.}$$

ISBN 88-408-0777-2

Sebbene questa forza possa sembrare piccola (è circa uguale al peso di un granello di polvere), essa produce un effetto importantissimo, cioè l'accelerazione dell'elettrone nell'atomo.

(*b*) Per la forza gravitazionale si ha che

$$F_g = G\frac{m_e m_p}{r^2}$$
$$= \frac{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(1.67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})}{(5.3 \times 10^{-11}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 3.6 \times 10^{-47}\ \mathrm{N}.$$

Si vede che la forza gravitazionale è più debole di quella elettrostatica di un fattore 10^{39}. Quantunque la forza gravitazionale sia debole, essa è sempre attrattiva. Perciò essa può cementare grandi masse , come nella formazione delle stelle e dei pianeti, così che grandi forze gravitazionali possano prendere corpo. La forza elettrostatica, invece, è repulsiva per cariche dello stesso segno, cosicchè non è possibile riunire una grande quantità di carica tutta dello stesso segno. Dobbiamo sempre avere insieme i due tipi di carica, in modo che si compensino quasi esattamente. Le cariche che incontriamo nelle nostre esperienze quotidiane sono il risultato di lievi variazioni di questo bilancio di cariche di segno opposto.

Esempio 5 Il nucleo di un atomo di ferro ha un raggio di circa 4×10^{-15} m e contiene 26 protoni. Quale forza elettrostatica repulsiva agisce fra due protoni in un tale nucleo se essi sono separati da una distanza pari a un raggio?

Soluzione Dall'equazione 4 si ha che

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_p q_p}{r^2}$$
$$= \frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(4 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})^2}$$
$$= 14\ \mathrm{N}.$$

Questa forza enorme agente su un singolo protone deve essere più che bilanciata dalla forza nucleare attrattiva che lega assieme i protoni nel nucleo. Tale forza, il cui raggio d'azione è così piccolo che il suo effetto svanisce al di fuori del nucleo, è nota come «forza nucleare forte».

27-6 LA CARICA SI CONSERVA

Quando una bacchetta di vetro viene strofinata con un pezzo di seta, una carica positiva si accumula sulla bacchetta. Le misure mostrano che una corrispondente carica negativa appare sulla seta. Ciò significa che lo strofinamento non crea carica ma semplicemente la trasferisce da un oggetto all'altro disturbando lievemente la neutralità di carica di ciascuno di essi. Il principio di *conservazione della carica elettrica* ha resistito alla prova di ogni esperimento, sia per fenomeni di larga scala che a livello atomico e nucleare. Nessuna eccezione è mai stata osservata.

Un interessante esempio della conservazione della carica elettrica viene dalla interazione tra un elettrone (carica $= -e$) e un positrone (carica $= +e$). Le due particelle possono semplicemente scomparire convertendo la loro energia a riposo in energia radiante. L'energia radiante può manifestarsi nella forma di due raggi gamma diretti in senso opposto aventi una energia totale $2m_e c^2$; perciò

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

La carica netta è nulla sia prima che dopo l'interazione; la carica cioè si conserva.

Certe particelle neutre, come il mesone π^o, possono decadere elettromagneticamente in due raggi gamma:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

Anche in questo decadimento la carica elettrica, che è nulla prima e dopo l'evento, si conserva. Un altro esempio è il decadimento del neutrone ($q = 0$) in un protone ($q = +e$), in un elettrone ($q = -e$) e in un'altra particella neutra, il neutrino ($q = 0$). La carica complessiva è nulla prima e dopo il decadimento, quindi si conserva. Sono stati condotti esperimenti per cercare il decadimento del neutrone in un protone senza emissione di un elettrone, il che violerebbe la conservazione della carica. Nessun evento di questo tipo è mai stato osservato e la frequenza relativa di tale evento rispetto a quello che conserva la carica è inferiore a 10^{-23} in base ai risultati sperimentali.

Il decadimento di un elettrone ($q = -e$) in particelle neutre come i raggi gamma (γ) o i neutrini (ν) è vietato; per esempio,

$$e^- \not\rightarrow \gamma + \nu,$$

poiché il decadimento violerebbe la conservazione della carica. I tentativi fatti per osservare questo decadimento sono stati vani ed hanno indicato che, se il decadimento avviene, l'elettrone deve avere una vita media di almeno 10^{22} anni!

Un altro esempio di conservazione della carica è la fusione di due nuclei di deuterio ^{2}H (chiamato «idrogeno pesante») a formare elio. Fra le reazioni possibili ci sono:

$$^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{H} + \mathrm{p},$$
$$^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \mathrm{n}.$$

Il nucleo di deuterio contiene un protone e un neutrone e perciò ha carica $+e$. Il nucleo dell'isotopo dell'idrogeno con massa 3, indicato ^{3}H e noto come *trizio*, contiene un protone e due neutroni ed ha perciò anch'esso carica $+e$. La prima rezione, perciò, ha una carica netta pari a $+e$ a destra e a sinistra e conserva la carica. Nella seconda reazione il neutrone non ha carica mentre il nucleo dell'isotopo dell'elio di massa 3

contiene due protoni ed un neutrone ed ha quindi carica $+2e$. La seconda reazione, perciò, conserva anch'essa la carica. La conservazione della carica spiega perché non si veda mai l'emissione di un protone nella seconda reazione o l'emissione di un neutrone nella prima.

DOMANDE

1. Sono date due sfere di metallo montate su un supporto trasportabile isolante. Trovare un modo per immettervi cariche uguali e opposte. Si può far uso di una bacchetta di vetro strofinata con un pezzo di seta ma non si possono toccare le sfere con essa. Le due sfere devono essere di uguale dimensione perché il metodo adottato funzioni?
2. Nel sistema della Domanda 1, si trovi un modo per immettere nelle due sfere una carica uguale e dello stesso segno. Di nuovo, le due sfere devono essere di uguale dimensione perché il metodo adottato funzioni?
3. Una bacchetta carica attira piccoli pezzetti di polvere di sughero secca, che dopo avere toccato la bacchetta, spesso sfuggono via violentemente. Si spieghi il fenomeno.
4. Gli esperimenti descritti nel paragrafo 27-2 potrebbero essere spiegati immaginando quattro tipi di carica associate al vetro, alla seta, alla plastica e alla pelle. Quale argomento si può trovare contro questa ipotesi?
5. Una carica positiva è portata molto vicino a un conduttore isolato da terra. Il conduttore venga messo a terra quando la carica è tenuta vicino. Il conduttore sarà carico positivamente, negativamente o resterà neutro se (*a*) la carica viene allontanata e viene rimosso, poi, il collegamento a terra; (*b*) il collegamento a terra viene rimosso e viene allontanata, poi, la carica?
6. Un isolante carico può essere scaricato facendolo passare sopra una fiamma. Spiegare come.
7. Strofinando una moneta con le dita, essa non sembrerà caricarsi. Perché?
8. Dopo avere passeggiato sopra un tappeto capita spesso di vedere una scintilla toccando la maniglia di una porta. (*a*) Che cosa la provoca? (*b*) Come si può evitarla?
9. Perché gli esperimenti sull'elettrostatica non funzionano bene nei giorni umidi?
10. Perché è consigliato toccare il contenitore di metallo di un computer prima di procedere all'istallazione di ogni accessorio interno?
11. Una bacchetta isolata da terra contiene carica elettrica. Come si può verificare ciò e stabilire il segno della carica?
12. Se una bacchetta carica è tenuta vicina a un estremo di una bacchetta di metallo non carica, come è mostrato nella figura 7, gli elettroni sono attratti verso il bordo. Perché il flusso di elettroni cessa? In fondo il metallo ne contiene una quantità quasi inesauribile.
13. Relativamente all'esperimento di figura 7, vi è una forza elettrica risultante sulla bacchetta di metallo? Si giustifichi la risposta.
14. Una persona in piedi sopra un pavimento isolante tocca un conduttore carico e isolato. Il conduttore viene scaricato completamente?
15. (*a*) Una bacchetta di vetro carica positivamente attrae un oggetto sospeso. Possiamo concludere che l'oggetto è carico negativamente? (*b*) Una bacchetta di vetro carica positivamente respinge un oggetto sospeso. Possiamo concludere che l'oggetto è carico positivamente?
16. Si spieghi che cosa si intende dicendo che le forze elettrostatiche obbediscono al principio di sovrapposizione.
17. La forza elettrica che una carica esercita su un'altra carica vicina cambia se vengono avvicinate delle altre cariche?
18. Una soluzione di solfato di rame è un conduttore. Quali particelle fungono da portatori di carica?
19. Se gli elettroni in un metallo come il rame sono liberi di muoversi nel volume di un campione, essi incontreranno, prima o poi, la zona superficiale del materiale. Perché non proseguono il loro cammino abbandonando il metallo?
20. Ci sarebbe stata una sostanziale differenza se Benjamin Franklin avesse chiamato positiva la carica dell'elettrone e negativa quella del protone?
21. La legge di Coulomb predice che la forza esercitata da una carica puntiforme su un'altra è proporzionale al prodotto delle due cariche. Come si potrebbe procedere per provare questo aspetto della legge in laboratorio?
22. Si spieghi come può un nucleo atomico essere stabile essendo formato da alcune particelle neutre (neutroni) e da altre che hanno ugual carica (protoni).
23. Un elettrone (carica $= -e$) si muove attorno ad un nucleo di elio (carica $= +2e$) in un atomo di elio. Quale particella esercita la maggior forza sull'altra?
24. La carica di una particella è una proprietà effettiva della particella, indipendentemente dal suo stato di moto. Si spieghi come questa affermazione può essere provata facendo una efficace prova sperimentale sulla neutralità elettrica dell'atomo di idrogeno.
25. Il teorema di Earnshaw dice che nessuna particella può restare in equilibrio stabile sotto la sola azione di forze elettrostatiche. Consideriamo, tuttavia, il punto P al centro di quattro

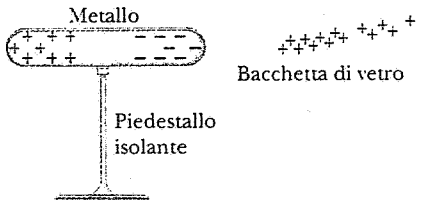


Figura 7 Domande 12 e 13.

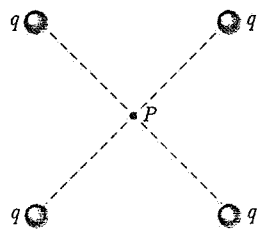


Figura 8 Domanda 25.

ISBN 88-408-0777-2

cariche positive uguali, come in figura 8. Se in quel punto mettiamo una carica positiva di prova sembrerebbe essere in equilibrio stabile. Ognuna delle quattro cariche esterne «spinge» la carica di prova verso il punto *P*. Eppure il teorema di Earnshaw resta valido. Si spieghi perché.

26. Il quanto di carica vale 1.6×10^{-19} C. C'è un analogo quanto di massa?

27. Che cosa significa dire che una grandezza fisica è (*a*) quantizzata o (*b*) soggetta al principio di conservazione?

28. Nel problema 4 si mostra che la forza elettrica è circa 10^{39} volte più intensa di quella gravitazionale. Da ciò si può concludere che una galassia, una stella o un pianeta debbano essere elettricamente essenzialmente neutri?

29. Come facciamo a sapere che le forze elettrostatiche non sono la causa dell'attrazione gravitazionale, fra Marte e la Terra, per esempio?

PROBLEMI

Paragrafo 27-4 La legge di Coulomb

1. Una carica puntiforme di $+3.12 \times 10^{-6}$ C dista 12.3 cm da una seconda carica puntiforme di -1.48×10^{-6} C. Si calcoli l'intensità della forza su ciascuna carica.

2. Quale deve essere la distanza fra una carica puntiforme $q_1 = 26.3$ μC e una carica puntiforme $q_2 = -47.1$ μC affinchè la forza elettrica attrattiva fra di esse sia pari a 5.66 N?

3. Durante la scarica a terra di un fulmine (vedi fig. 9) scorre una corrente di 2.5×10^4 A per un tempo di 20 μs. Quanta carica viene trasferita da questo evento?

4. Due particelle aventi la stessa carica vengono tenute ad una distanza di 3.20 mm; a un certo punto esse sono lasciate libere. Le accelerazioni iniziali delle particelle vengono misurate e risultano essere pari a 7.22 m/s^2 e 9.16 m/s^2. La massa della prima particella è 6.31×10^{-7} kg. Si determini (*a*) la massa della seconda particella e (*b*) il valore della carica.

5. La figura 10*a* mostra due cariche q_1 e q_2 tenute ferme ad una distanza *d* l'una dall'altra.(*a*) Trovare l'intensità della forza elettrica che agisce su q_1 Si assuma che $q_1 = q_2 = 21.3$ μC e $d = 1.52$ m. (*b*) Una terza carica $q_3 = 21.3$ μC viene avvicinata e posta come mostrato in figura 10*b*. Si determini l'intensità della forza elettrica agente su q_1.

6. Due sfere conduttrici identiche, 1 e 2, portano una ugual quantità di carica e sono tenute ad una distanza reciproca molto maggiore rispetto ai loro diametri. Esse si respingono con una forza elettrica di 88 mN. Si supponga che una terza sfera identica 3, dotata di un manico isolante e inizialmente scarica, venga messa in contatto prima con la sfera 1, poi con la sfera 2 e infine venga rimossa. Si trovi la forza che agisce alla fine tra le sfere 1 e 2. Vedi figura 11.

7. Tre particelle cariche sono poste lungo una linea retta, separate da una distanza *d* come mostrato in figura 12. Le cariche q_1 e q_2 sono tenute ferme. La carica q_3, che è libera di muoversi, viene a trovarsi in equilibrio rispetto all'azione delle forze elettriche. Si determini q_1 in funzione di q_2:

8. In figura 13 si trovino le componenti (*a*) orizzontale e (*b*) verticale della forza elettrica risultante, agente sulla carica in basso a sinistra del quadrato. Si assuma che $q = 1.13$ μC e $a = 15.2$ cm. Le cariche siano ferme.

9. Due cariche positive, entrambe di 4.18 μC e una carica negativa di −6.36 μC sono fissate ai vertici di un triangolo equilatero con lato di 13.0 cm. Trovare la forza elettrica sulla carica negativa.

10. Due piccole sfere vengono caricate positivamente con una carica totale pari a 52.6 μC. Le sfere si respingono con una forza di 1.19 N essendo tenute a una distanza di 1.94 m. Si calcoli la carica su ciascuna sfera.

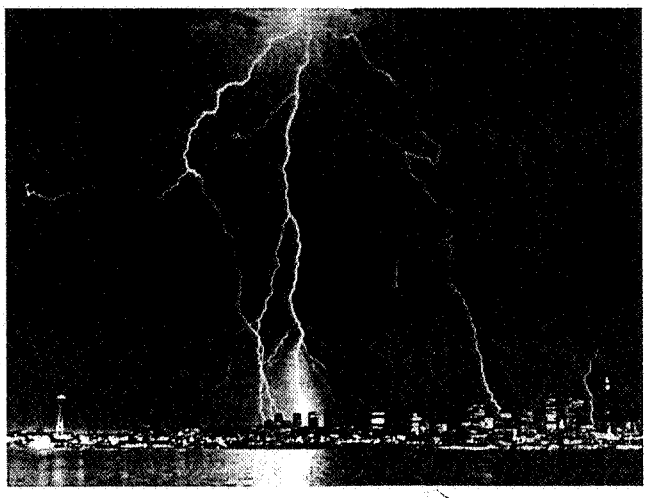


Figura 9 Problema 3.

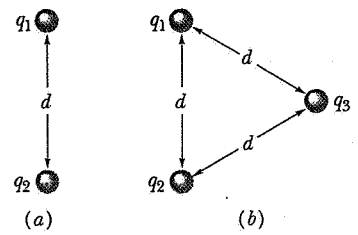


Figura 10 Problema 5.

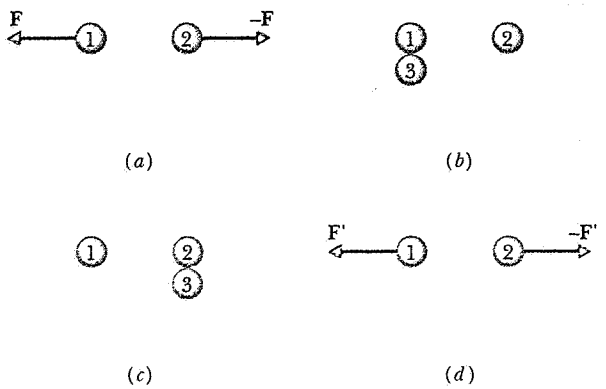


Figura 11 Problema 6.

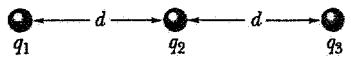


Figura 12 Problema 7.

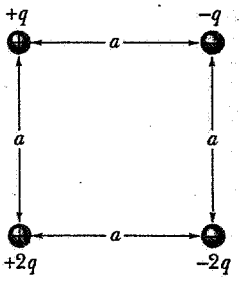


Figura 13 Problema 8.

11. Due sfere conduttrici identiche caricate con segno opposto si attraggono con una forza di 0.108 N essende tenute ad una distanza di 50.0 cm. Le sfere vengono improvvisamente collegate con un filo conduttore, che viene poi rimosso. Alla fine le sfere si respingono con una forza di 0.0360 N. Quali erano le cariche iniziali sulle sfere?
12. Due cariche di +1.07 μC e −3.28 μC vengono fissate ad una distanza di 61.8 cm. Dove può essere fissata una terza carica in modo che nessuna forza agisca su di essa?
13. Due cariche puntiformi *libere* $+q$ e $+4q$ si trovano ad una distanza L l'una dall'altra. Una terza carica viene posizionata in modo che l'intero sistema sia in equilibrio. (*a*) Si trovino il segno, il valore e la posizione della terza carica. (*b*) Si mostri che l'equilibrio è instabile.
14. Due cariche Q vengono fissate su due vertici opposti di un quadrato. Due cariche q vengono poste sugli altri due vertici. (*a*) Se la forza elettrica risultante su Q è nulla, come debbono essere correlate Q e q? (*b*) q può essere scelta in modo che la forza elettrica risultante su ogni carica sia nulla?
15. Una certa carica Q viene divisa in due parti $(Q-q)$ e q. Qual è la relazione tra Q e q perché le due frazioni, poste ad una data distanza, producano la massima repulsione coulombiana?
16. Due palline uguali di massa m sono appese con fili di seta di lunghezza L ed hanno uguale carica q come mostrato in figura 14. Si assuma che θ sia così piccolo che $\tan\theta$ possa essere sostituito con la quantità $\operatorname{sen}\theta$. (*a*) Si mostri che, in questa approssimazione, all'equilibrio si ha

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg}\right)^{1/3},$$

dove x è la distanza tra le palline. (*b*) Se $L = 122$ cm, $m = 11.2$ g e $x = 4.70$ cm, qual è il valore di q?

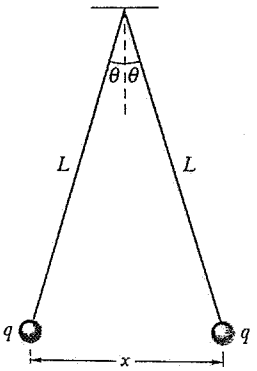


Figura 14 Problemi 16. 17 e 18.

17. Se le palline della figura 14 sono conduttrici, (*a*) che cosa succede quando una pallina viene scaricata? Si giustifichi la risposta. (*b*) Si calcoli la distanza tra le palline nella nuova situazione di equilibrio.
18. Si assuma che entrambe le palline del Problema 16 perdano carica con un tasso di 1.20 nC/s. Con quale velocità relativa istantanea $(= dx/dt)$ esse cominceranno ad avvicinarsi?
19. Due cariche puntiformi uguali q vengono tenute ad una distanza fissa pari a $2a$. Una carica puntiforme di prova viene messa su un piano normale alla linea che unisce le cariche a metà strada tra di esse. Si trovi il raggio R del circolo giacente su detto piano nei punti del quale la forza agente sulla particella di prova ha la massima intensità. Vedi figura 15.

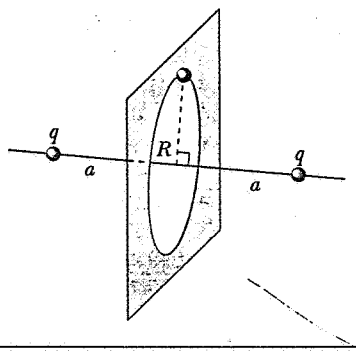


Figura 15 Problema 19

20. Tre palline, ognuna di massa pari a 13.3 g, vengono sospese con corde di seta lunghe 1.17 m ciascuna da un punto comune. Le palline hanno la stessa carica e si dispongono ai vertici di un triangolo equilatero di lato 15.3 cm. Si determini la carica di ogni pallina.
21. Un cubo di lato a ha una carica puntiforme q su ogni vertice. Si dimostri che la forza elettrica risultante su ognuna delle cariche è data da

$$F = \frac{0.262q^2}{\epsilon_0 a^2},$$

ed è diretta lungo la diagonale in direzione uscente dal cubo.
22. Due cariche positive di valore +Q vengono tenute ferme a una distanza d l'una dall'altra. Una particella di carica negativa $-q$ e massa m viene posta a metà strada tra di esse e poi spostata leggermente in direzione perpendicolare alla linea congiungente le prime due cariche e rilasciata. Mostrare che la particella descrive un moto armonico semplice di periodo pari a $(\epsilon_0 m\pi^3 d^3/qQ)^{1/2}$.
23. Si calcoli il periodo di oscillazione di una particella di carica positiva $+q$ spostata dal punto medio lungo la congiungente le due cariche del Problema 22.

Paragrafo 27-5 La carica è quantizzata

24. Trovare la carica totale in coulomb di 75.0 kg di elettroni.

ISBN 88-408-0777-2

25. In un cristallo di sale un atomo di sodio cede uno dei suoi elettroni ad un atomo vicino di cloro formando un legame *ionico*. Lo ione positivo di sodio e quello negativo di cloro si attraggono per effetto della forza elettrostatica. Calcolare la forza di attrazione se gli ioni distano 282 pm.
26. La forza elettrostatica tra due ioni identici separati da una distanza di 5.0×10^{-10} m è di 3.7×10^{-9} N. (*a*) Si trovi la carica di ciascuno ione. (*b*) Quanti elettroni mancano a ciascuno ione?
27. Un neutrone viene pensato come la riunione di un quark «up» di carica $+2/3\ e$ e due quark «down» di carica $-1/3\ e$ ciascuno. Se i quark down si trovano a una distanza di 2.6×10^{-15} m all'interno del neutrone, qual è la forza elettrica repulsiva tra di essi?
28. (*a*) Quanti elettroni devono essere tolti da un penny per lasciarlo con una carica di 1.15×10^{-7} C? (*b*) A quale frazione di elettroni corrisponde tale carica? Vedi esempio 2.
29. Un elettrone si trova nel vuoto vicino alla superficie della Terra. Dove dovrebbe essere messo un secondo elettrone perché il primo, soggetto all'azione elettrostatica del secondo e alla gravità, sia soggetto ad una forza nulla?
30. I protoni nei raggi cosmici colpiscono la Terra con un flusso, mediato sulla superficie della Terra, di 1500 protoni/$m^2 \cdot s$. Quale corrente elettrica riceve la Terra in forma di protoni incidenti nei raggi cosmici?
31. Si calcoli la quantità di carica positiva (in coulomb) presente in un bicchiere d'acqua. Si assuma che il volume dell'acqua contenuta nel bicchiere sia 250 cm^3.
32. Nel composto CsCl (cloruro di cesio), gli atomi di cesio sono situati sui vertici di un cubo che ha un atomo di cloro al suo centro. La lunghezza del lato del cubo è 0.40 nm; vedi figura 16. Gli atomi di cesio mancano di un elettrone ciascuno e gli atomi di cloro hanno un elettrone in eccesso ciascuno. (*a*) Qual è l'intensità della forza elettrica netta sull'atomo di cloro risultante dagli otto atomi di cesio mostrati in figura? (*b*) Si supponga che l'atomo di cesio indicato con una freccia venga rimosso (difetto cristallino). Quale sarà ora la forza elettrica netta sull'atomo di cloro risultante dai rimanenti sette atomi di cesio?
33. (*a*) Quanta carica positiva dovrebbe essere immessa sulla Terra e sulla Luna per neutralizzare la loro attrazione gravitazionale? È necessario conoscere la distanza tra la Terra e la Luna per risolvere questo problema? Perché o perché no? (*b*) Quante tonnellate di idrogeno sarebbero necessarie per fornire la carica positiva calcolata nella parte (*a*)? La massa molare dell'idrogeno è 1.008 g/mole.

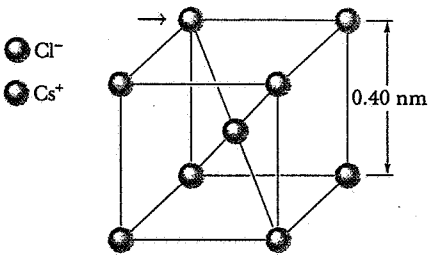


Figura 16 Problema 32.

34. Due studenti di fisica (Maria, che pesa 52.0 kg e Giovanni, che pesa 90.7 kg) si trovano a una distanza di 28.0 m l'uno dall'altro. Ciascuno di loro abbia uno sbilanciamento fra le cariche positive e quelle negative pari allo 0.01%, essendo uno studente positivo e l'altro negativo. Si stimi la forza di attrazione elettrostatica tra di loro. (*Suggerimento*: si sostituiscano gli studenti con sfere d'acqua e si utilizzino i risultati del Problema 31).

Paragrafo 27-6 La carica si conserva

35. Si identifichi l'elemento X nelle seguenti reazioni nucleari:

(a) $^{1}H + {}^{9}Be \rightarrow X + n;$

(b) $^{12}C + {}^{1}H \rightarrow X;$

(c) $^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + X.$

(*Suggerimento*: si veda l'Appendice E).

36. Nel decadimento radioattivo del ^{238}U ($^{238}U \rightarrow {}^{4}He + {}^{234}Th$) il centro della particella di ^{4}He emergente è, in un certo istante, a 12×10^{-15} m di distanza del centro del nucleo di ^{234}Th. In questo istante (*a*) qual è la forza sulla particella di ^{4}He e (*b*) qual è la sua accelerazione?

Capitolo 28

IL CAMPO ELETTRICO

Il 25 agosto 1989, dodici anni dopo il suo lancio, la navetta Voyager 2 *passò vicino al pianeta esterno Nettuno, ad una distanza di* 4.4×10^9 *km dalla Terra. Oltre ad altre scoperte il* Voyager *riportò l'osservazione di sei lune di Nettuno precedentemente sconosciute e di un insieme di anelli.*

Come vengono trasmesse queste informazioni da una enorme distanza come è quella tra il Voyager *e la Terra? La chiave per capire questo tipo di comunicazioni è il* campo elettromagnetico. *Gli elettroni che si muovono nei circuiti elettrici della strumentazione interna al* Voyager *producono un campo elettromagnetico e le variazioni del loro moto causano una perturbazione del campo che si propaga alla velocità della luce. Più di quattro ore dopo altri elettroni nei circuiti sulla Terra rivelano queste perturbazioni di campo e si muovono corrispondentemente.*

Questo esempio coinvolge i fenomeni connessi ai campi dipendenti dal tempo, prodotti da cariche in moto, mentre nel capitolo seguente tratteremo il campo statico associato a cariche ferme. Ciononostante l'esempio illustra l'utilità del concetto di campo nello studio dell'azione a grande distanza delle forze elettromagnetiche. Nei capitoli successivi introdurremo, in analogia, il campo magnetico associato a correnti statiche e puntualizzeremo come le onde elettromagnetiche (ad esempio le onde radio e la luce) possano essere viste in termini di campi elettromagnetici prodotti da cariche in moto e correnti variabili.

28-1 I CAMPI

La temperatura ha un valore definito in ogni punto della stanza nella quale l'osservatore si trova. Essa può essere misurata in ciascun punto disponendovi un termometro. Si potrà poi rappresentare la distribuzione di temperatura nella stanza attraverso una funzione matematica $T(x,y,z)$ oppure attraverso un grafico indicante la variazione di T. Una simile distribuzione di temperature è chiamata *campo di temperature*. In modo analogo potrà essere misurata la pressione in ciascun punto di un dato volume di fluido e si otterà conseguentemente un *campo di pressioni*, che descrive la variazione spaziale della pressione. Tali campi sono chiamati *campi scalari*, poiché la temperatura T e la pressione p sono grandezze scalari. Se la temperatura e la pressione non cambiano nel tempo, essi sono *campi statici*; altrimenti essi sono *campi variabili nel tempo* e devono essere rappresentati matematicamente da una funzione del tipo $T(x,y,z,t)$.

Come abbiamo discusso nel paragrafo 18-5, lo scorrimento di un fluido può essere rappresentato da un campo di velocità che è un esempio di *campo vettoriale* (vedi fig. 14-18 del cap. 18). Ad ogni punto del fluido viene associata una quantità vettoriale, la velocità $\mathbf{v}$ con la quale il fluido scorre in quel punto. Se la velocità del fluido rimane costante nel tempo il campo vettoriale può anche essere descritto come campo statico rappresentato dalla funzione matematica $\mathbf{v}(x,y,z)$. Si noti che, anche se il fluido sta scorrendo, il *campo* è statico se i valori puntuali di velocità non cambiano nel tempo.

Nel paragrafo 16-7 abbiamo introdotto il campo gravitazionale $\mathbf{g}$ definito nella equazione 19 del capitolo 16, come la forza gravitazionale $\mathbf{F}$ per unità di massa di prova m_0, cioè

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m_0}. \qquad (1)$$

Anche questo campo è un campo vettoriale e, per di più, è normalmente statico quando la distribuzione della massa della sorgente del campo non varia nel tempo. Vicino alla superficie della Terra e per punti non troppo lontani tra di loro esso è, inoltre, un campo *uniforme* cioè $\mathbf{g}$ è costante (in modulo, direzione e verso) in ogni punto della zona considerata.

Possiamo utilizzare l'equazione 1 per fornire una procedura operativa atta a misurare il campo gravitazionale. Si prenda un piccolo corpo di prova di massa

ISBN 88-408-0777-2

m_0 e lo si liberi nel campo gravitazionale che si vuole misurare. Si determini, poi, l'accelerazione del corpo in un punto arbitrario; l'equazione 1 dice che l'accelerazione del corpo $\mathbf{F}/m_0$ è uguale (in modulo, direzione e verso) al campo gravitazionale $\mathbf{g}$ in quel punto. In questa procedura è richiesto che il corpo di prova abbia una massa piccola per evitare che la sua azione di forza gravitazionale perturbi la distribuzione di massa del corpo sorgente, alterando, di conseguenza, il campo che si vuole misurare. Per esempio la Luna causa le maree, che modificano la distribuzione di massa della Terra e producono, di conseguenza, una variazione del campo gravitazionale generato dalla Terra stessa. La luna non è un corpo di prova adatto per la misura del campo gravitazionale della Terra!

Prima che il concetto di campo venisse definitivamente accettato, la forza gravitazionale tra i corpi era pensata come una interazione diretta e istantanea chiamata *azione a distanza*. Questa visione era utilizzata anche per le forze elettromagnetiche. Nel caso della gravitazione si poteva fare la schematizzazione

$$\text{massa} \leftrightarrows \text{massa},$$

indicante che due masse interagiscono direttamente fra di loro. In accordo con questa visione l'effetto del movimento di un corpo si trasmette istantaneamente al secondo corpo. Tale concezione viola, però, la teoria della relatività speciale, che limita la velocità di trasmissione di un segnale alla velocità della luce c. La interpretazione più moderna, basata sul concetto di campo, e oggi considerata parte essenziale della teoria della relatività generale, può essere rappresentata come

$$\text{massa} \leftrightarrows \text{campo} \leftrightarrows \text{massa},$$

in cui ognuna delle due masse non interagisce direttamente con l'altra, ma con il campo gravitazionale prodotto dall'altra. Cioè, la prima massa genera un campo gravitazionale che ha un certo valore in ogni punto dello spazio; la seconda interagisce con tale campo nella posizione in cui essa si trova. Il campo gioca, allora, un ruolo di mediazione nell'interazione gravitazionale fra i due corpi. La forza esercitata sulla seconda massa può essere calcolata attraverso l'equazione 1, una volta noto il campo $\mathbf{g}$ dovuto alla prima massa. La situazione è completamente simmetrica dal punto di vista della prima massa che interagisce col campo gravitazionale generato dalla seconda massa. I cambiamenti di posizione di una massa producono una variazione nel campo gravitazionale generato; questa variazione si propaga nello spazio alla velocità della luce. In tal modo il concetto di campo rende possibile una visione della interazione gravitazionale che non viola le restrizioni imposte dalla relatività speciale.

28-2 IL CAMPO ELETTRICO E

La descrizione del campo gravitazionale appena fatta può essere applicata, in analogia, all'elettrostatica. La legge di Coulomb, che descrive la forza fra le cariche elettriche, suggerisce l'idea dell'azione a distanza secondo la schematizzazione

$$\text{carica} \leftrightarrows \text{carica}.$$

Di nuovo, possiamo introdurre il campo come elemento di mediazione dell'interazione tra le cariche secondo la rappresentazione

$$\text{carica} \leftrightarrows \text{campo} \leftrightarrows \text{carica}.$$

Cioè la prima carica genera un *campo elettrico* e la seconda interagisce con tale campo. Simmetricamente, la seconda carica genera un campo elettrico e la prima interagisce con tale campo. Il problema di descrivere l'interazione tra due cariche si traduce perciò in due problemi separati: (1) determinare con una misura o con un calcolo il campo elettrico prodotto dalla prima carica in ogni punto dello spazio e (2) calcolare la forza che il campo esercita sulla seconda carica, posta in un particolare punto dello spazio.

In analogia con l'equazione 1 relativa al campo gravitazionale, definiamo il campo elettrico $\mathbf{E}$ associato a una assegnata distribuzione di cariche in termini della forza esercitata su una carica positiva di test q_0 in un punto particolare, come

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \qquad (2)$$

La direzione ed il verso del vettore $\mathbf{E}$ coincidono con quelli della forza $\mathbf{F}$ poiché q_0 è uno scalare positivo.

Dimensionalmente il campo elettrico è una forza per unità di carica e la sua unità di misura nel sistema SI è il newton/coulomb (N/C), quantunque sia più spesso dato, come discuteremo nel capitolo 30, nella unità equivalente di volt/metro (V/m). Si noti la somiglianza con il campo gravitazionale, in cui g (che è usualmente espresso nell'unità m/s^2) può anche essere espresso come una forza per unità di massa nei termini di newton/chilogrammo. Sia il campo gravitazionale che quello elettrico possono essere espressi come una forza divisa per una proprietà del corpo di prova (massa o carica). La tabella 1 contiene i valori tipici del campo elettrico che si ha in casi ricorrenti.

La figura 1 illustra il campo elettrico che agisce come intermediario nell'interazione tra due cariche. In figura 1*a*, la carica q_1 genera un campo elettrico nello spazio circostante descritto dall'ombreggiatura della figura. Il campo agisce sulla carica q_2 risultando nella forza $\mathbf{F}_2$. Dal punto di vista di q_1, come mostrato nella

 ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 1 ALCUNI CAMPI ELETTRICI[a]

Posizione	*Campo elettrico (N/C)*
Sulla superficie di un nucleo	3×10^{21}
Nell'atomo di idrogeno, sull'orbita dell'elettrone	5×10^{11}
Soglia per produrre scariche in aria	3×10^{6}
Sul rullo carico di una fotocopiatrice	10^{5}
Nell'acceleratore del fascio di elettroni di una TV	10^{5}
In prossimità di un pettine di plastica	10^{3}
Nella bassa atmosfera	10^{2}
All'interno di un cavo di rame per usi domestici	10^{-2}

[a] Valori approssimati.

figura 1*b*, possiamo analogamente dire che q_2 genera un campo elettrico e che la forza $\mathbf{F}_1$ su q_1 risulta dalla sua interazione con tale campo. Le forze, naturalmente, sono uguali e opposte ($\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$), anche se i due campi elettrici possono essere molto diversi (come indicato dalla differenza nelle ombreggiature delle figura 1*a* e 1*b*) nei casi in cui le cariche abbiano valori molto diversi.

Per utilizzare l'equazione 2 come procedura operativa atta a misurare il campo elettrico si devono adottare le stesse precauzioni prese nel caso della misura del campo gravitazionale: la carica di prova deve essere sufficientemente piccola da non disturbare la distribuzione delle cariche sorgenti che generano il campo elettrico che si vuole misurare. Cioè dovremmo più propriamente scrivere l'equazione 2 come

$$\mathbf{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0} \tag{3}$$

anche se sappiamo dal capitolo 27 che questo limite non può essere raggiunto veramente poiché la carica di prova non può essere più piccola della carica elementare e. Naturalmente se *calcoliamo* (anzichè misurare) il campo elettrico dovuto ad una assegnata distribuzione di cariche poste in punti fissi né il valore né il segno di q_0 influenzeranno il risultato. Come mostreremo nel seguito il campo elettrico di un insieme di cariche può essere calcolato senza riferirsi direttamente all'equazione 3.

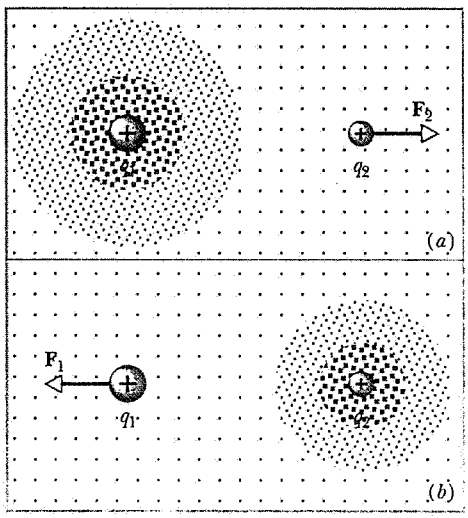


Figura 1 (*a*) La carica q_1 genera un campo elettrico che, a sua volta, esercita una forza $\mathbf{F}_2$ sulla carica q_2. (*b*) La carica q_2 genera un campo elettrico che, a sua volta, esercita una forza $\mathbf{F}_1$ sulla carica q_1. Se le cariche hanno valori diversi, i campi risultanti saranno diversi. Le forze, tuttavia, saranno sempre uguali in modulo ed opposte: cioè $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$.

Esempio 1 Un protone è posto in un campo elettrico uniforme **E**. Quale deve essere il modulo, la direzione e il verso di questo campo se la forza elettrostatica che agisce sul protone controbilancia esattamente il suo peso?

Soluzione Dall'equazione 2, sostituendo a q_0 il valore e e a F il valore mg si ha

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{mg}{e} = \frac{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$
$$= 1.0 \times 10^{-7}\ \text{N/C, diretto verso l'alto.}$$

Questo è un campo davvero molto debole. **E** deve puntare verticalmente verso l'alto per sostenere il protone (carico positivamente), perché $\mathbf{F} = q_0\mathbf{E}$ e $q_0 > 0$.

28-3 IL CAMPO ELETTRICO DI CARICHE PUNTIFORMI

In questo paragrafo considereremo il campo elettrico di cariche puntiformi; prima studieremo una carica singola, poi un insieme di cariche. Successivamente generalizzeremo ad una distribuzione continua di carica.

Si prenda una carica di prova q_0 e la si ponga ad una distanza r da una seconda carica puntiforme q. L'intensità della forza che agisce su q_0 è data dalla legge di Coulomb,

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}.$$

L'intensità del campo elettrico nel punto ove si trova la carica di prova è, dall'equazione 2,

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \tag{4}$$

La direzione di **E** è la stessa della direzione di **F**, lungo

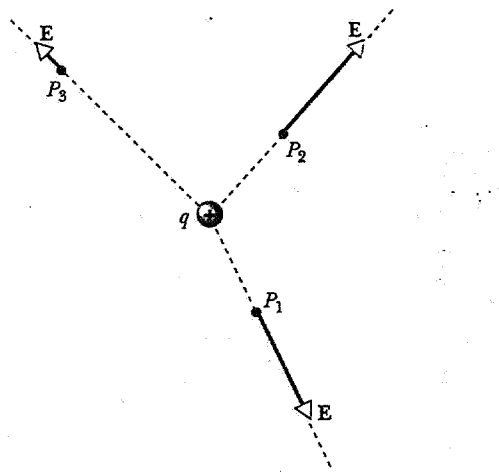


Figura 2 Il campo elettrico **E** in vari punti vicini ad una carica puntiforme positiva q. Si noti che il vettore **E** è sempre allineato ai raggi uscenti da q. I campi nei punti P_1 e P_2, che si trovano alla stessa distanza da q, hanno uguale intensità. Il campo nel punto P_3, che si trova a distanza doppia da q, è quattro volte meno intenso del campo nei punti P_1 e P_2.

una linea radiale con origine in q. Il verso è uscente da q se q è positiva e entrante in q se q è negativa. La figura 2 mostra il modulo, la direzione e il verso del campo elettrico **E** in vari punti vicini alla carica puntiforme positiva. Come dovrebbe essere fatta questa figura se la carica fosse negativa?

Per trovare **E** nel caso di un gruppo di N cariche puntiformi il procedimento è il seguente: (1) si calcola $\mathbf{E}_i$ dovuto a ciascuna carica i nel punto di interesse *come se la carica i fosse l'unica carica presente*. (2) Si sommano vettorialmente i campi calcolati separatamente e si trova così il campo risultante **E** nel punto in esame. In forma matematica,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \cdots \\ &= \sum \mathbf{E}_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, N).\end{aligned} \tag{5}$$

La somma è una somma vettoriale, fatta su tutte le cariche. L'equazione 5 (come l'eq. 8 del cap. 27) è un esempio di applicazione del principio di *sovrapposizione*, il quale stabilisce, in questo contesto, che in un assegnato punto i campi elettrici dovuti a separate distribuzioni di carica si sommano (vettorialmente) cioè si sovrappongono indipendentemente. Questo principio può non essere valido se l'intensità dei campi è estremamente alta, ma resta valido in tutte le situazioni che incontreremo in questo testo.

Esempio 2 In un atomo di elio ionizzato (un atomo di elio in cui uno dei due elettroni sia stato rimosso) l'elettrone e il nucleo sono separati da una distanza di 26.5 pm. Qual è il campo elettrico dovuto al nucleo nella posizione dell'elettrone?

Soluzione Usiamo l'equazione 4, con q (la carica del nucleo) uguale a $+2e$:

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \\ &= \left(8.99 \times 10^9 \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}\right) \frac{2(1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{(26.5 \times 10^{-12}\ \mathrm{m})^2} \\ &= 4.13 \times 10^{12}\mathrm{N/C}.\end{aligned}$$

Questo valore è 8 volte più grande del campo elettrico che agisce su un elettrone nell'idrogeno (vedi tab. 1). L'incremento è dovuto al fatto che (1) la carica nucleare nell'elio è doppia rispetto a quella dell'idrogeno e (2) il raggio dell'orbita dell'elettrone nell'atomo di elio è la metà di quello nell'atomo di idrogeno. Si stimi il campo su un elettrone, in un atomo ionizzato di uranio ($Z = 92$) in cui 91 elettroni siano stati rimossi. Un atomo ionizzato a tal punto può essere trovato all'interno delle stelle.

Esempio 3 La figura 3 mostra una carica q_1 di $+1.5\ \mu$C e una carica q_2 di $+2.3\ \mu$C. La prima carica è all'origine di un asse x e la seconda si trova nella posizione $x = L$ dove $L = 13$ cm. In quale punto P dell'asse x il campo elettrico è nullo?

Soluzione Innanzi tutto il punto deve trovarsi tra le due cariche poiché solo in questa regione le forze esercitate da q_1 e da q_2 su una carica di prova sono opposte. Se $\mathbf{E}_1$ è il campo elettrico dovuto a q_1 e $\mathbf{E}_2$ è il campo elettrico dovuto a q_2, il modulo di questi due vettori deve essere uguale, cioè

$$E_1 = E_2.$$

Dall'equazione 4 si ha pertanto

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{(L-x)^2},$$

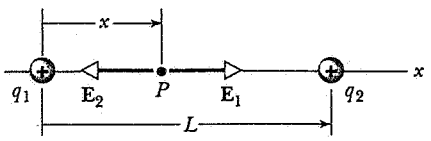


Figura 3 Esempio 3. Nel punto P i campi elettrici generati da q_1 e q_2 sono uguali ed opposti, così che il campo netto in P è nullo.

dove x è la coordinata del punto P. Risolvendo l'espressione si trova x,

$$x = \frac{L}{1 + \sqrt{q_2/q_1}} = \frac{13}{1 + \sqrt{2.3\ \mu\mathrm{C}/1.5\ \mu\mathrm{C}}} = 5.8\ \mathrm{cm}.$$

Questo risultato è positivo e minore di L, a conferma che il punto a campo nullo giace tra le due cariche.

Il dipolo elettrico

La figura 4 mostra una carica positiva ed una negativa di ugual valore q poste ad una distanza d l'una dall'altra, una configurazione chiamata *dipolo elettri-*

ISBN 88-408-0777-2

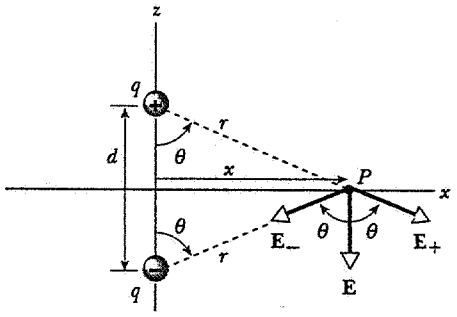


Figura 4 Due cariche aventi lo stesso valore e segni opposti formano un dipolo elettrico. Il campo elettrico **E** nei punti circostanti è dato dalla somma vettoriale dei campi generati dalle singole cariche. Nel punto *P* sull'asse *x* il campo ha soltanto una componente *z*.

co. Vogliamo calcolare il campo elettrico E nel punto *P*, posto lungo la linea mediana perpendicolare alla congiungente le cariche, ad una distanza *x* dalla congiungente stessa.

La carica positiva e quella negativa producono, rispettivamente, i campi elettrici $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$. Il modulo di ciascuno di questi due campi nel punto *P* è lo stesso, poiché *P* è equidistante dalle cariche positiva e negativa. La figura 4 mostra anche la direzione e il verso di $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$, determinati dalla direzione e dal verso delle forze dovute alle due cariche prese singolarmente, agenti su una carica di prova positiva posta nel punto *P*. Il campo elettrico totale nel punto *P* è determinato, in accordo con l'equazione 5, dalla somma vettoriale

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-.$$

Dall'equazione 4 l'intensità del campo generato da ciascuna carica è dato da

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{x^2 + (d/2)^2}. \qquad (6)$$

Poiché i campi $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$ hanno uguale intensità e giacciono allo stesso angolo θ rispetto alla direzione *z*, come mostrato in figura, la componente *x* del campo campo totale è $E_+ \operatorname{sen}\theta - E_- \operatorname{sen}\theta = 0$. Il campo totale **E** ha perciò soltanto la componente *z* non nulla, di valore

$$E = E_- \cos\theta + E_- \cos\theta = 2E_+ \cos\theta \qquad (7)$$

Dalla figura si vede che l'angolo θ è determinato dalla relazione

$$\cos\theta = \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}.$$

Utilizzando questo risultato e sostituendo l'equazione 6 nella equazione 7 si ottiene

$$E = (2)\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{q}{x^2 + (d/2)^2}\ \frac{d/2}{\sqrt{x^2 + (d/2)^2}}$$

cioè

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{qd}{[x^2 + (d/2)^2]^{3/2}}. \qquad (8)$$

L'equazione 8 dà l'intensità del campo elettrico nel punto *P* dovuto al dipolo.

Il campo è proporzionale al prodotto *qd*, il quale contiene il valore delle cariche del dipolo e della loro separazione. Questa fondamentale quantità può essere vista come una proprietà del dipolo stesso ed è chiamata *momento di dipolo elttrico p*. Si definisce quindi

$$p = qd. \qquad (9)$$

Il momento di dipolo è una proprietà fondamentale delle molecole, che spesso contengono una carica positiva ed una carica negativa uguali, separate da una distanza finita. Una molecola (*non* un cristallo) di un composto come il NaCl ne è un buon esempio. Possiamo vedere la molecola di NaCl come l'insieme di uno ione Na^+ (un atomo neutro di sodio al quale sia stato tolto un elettrone) con una carica elettrica $+e$ e di uno ione Cl^- (un atomo neutro di cloro al quale sia stato ceduto un eletrone) con una carica elettrica $-e$. La separazione tra Na e Cl nel composto NaCl può essere misurata e risulta essere pari a 0.236 nm (1 nm $= 10^{-9}$ m). Il momento di dipolo conseguente dovrebbe perciò essere

$$p = ed = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.236 \times 10^{-9}\ \text{m})$$
$$= 3.78 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}.$$

Il valore misurato è 3.00×10^{-29} C · m; ciò significa che l'elettrone non è completamente ceduto dal Na al Cl. In qualche misura l'elettrone è condiviso dal Na e dal Cl, cosicchè il momento di dipolo risulta essere un po' più piccolo di quanto previsto.

Spesso è utile conoscere il campo di un dipolo elettrico in un punto *P* la cui distanza *x* dal dipolo è molto grande rispetto alla separazione *d*. In questo caso il campo di dipolo può essere semplificato notevolmente facendo uso dello sviluppo in serie del binomio,

$$(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!}\ y^2 + \cdots.$$

Riscriviamo, innanzitutto, l'equazione 8 come

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{p}{x^3}\ \frac{1}{[1 + (d/2x)^2]^{3/2}}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ \frac{p}{x^3}\left[1 + \left(\frac{d}{2x}\right)^2\right]^{-3/2}$$

e applichiamo lo sviluppo del binomio al fattore tra parentesi quadre. Si ottiene

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}\left[1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{d}{2x}\right)^2 + \cdots\right].$$

Nel caso in esame è sufficiente arrestare lo sviluppo in serie al primo termine, cioè si considera significativo soltanto il primo termine del fattore tra parentesi e si ottiene così l'espressione della intensità del campo elettrico generato da un dipolo in punti distanti giacenti sul suo piano mediano:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3}. \qquad (10)$$

Si può ottenere una espressione simile per il campo lungo l'asse del dipolo (l'asse z della fig. 4); si veda il problema 11. Un risultato più generale, valido per il campo in un qualunque punto del piano xz, è dato nel problema 12. In ogni caso il campo nei punti distanti varia con la distanza r tra il punto e il dipolo come $1/r^3$. Questo è un risultato caratteristico per il campo elettrico di dipolo. Il campo varia più rapidamente con la distanza rispetto alla tipica dipendenza del tipo $1/r^2$ della carica puntiforme. Se immaginiamo che il punto P della figura 4 sia molto lontano dal dipolo, cioè che x sia molto grande rispetto a d, l'angolo θ sarà prossimo a 90° e i campi $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$ saranno quasi paralleli, nella direzione dell'asse x e rivolti in verso opposto. I due campi, perciò, si cancelleranno quasi completamente. La variazione di tipo $1/r^2$ di ciascuno dei campi generati dalle cariche puntiformi del dipolo viene accentuata dalla parziale cancellazione appena descritta, risultando in una variazione complessiva ancora più rapida, di tipo $1/r^3$, caratterizzante tipicamente i dipoli elettrici.

Esistono distribuzioni di carica più complicate che generano campi elettrici che diminuiscono ancor più rapidamente con la distanza. Si vedano i problemi 13 e 14 come esempi di variazione di tipo $1/r^4$ del campo di un *quadrupolo* elettrico.

28-4 LINEE DI FORZA

Il concetto del vettore campo elettrico non venne apprezzato da Michael Faraday, che ragionò sempre in termini di *linee di forza*. Quantunque non si voglia dare a tali linee quella importanza che Faraday diede loro, esse costituiscono un metodo conveniente e didattico per visualizzare il campo elettrico. Le utilizzeremo in tal senso in questa sede.

La figura 5 mostra le linee di forza attorno ad una carica puntiforme. Questa figura può essere pensata come una estensione della figura 2, ottenuta ponendo la carica di prova in molti punti attorno alla carica centrale. Nelle illustrazioni di questo paragrafo visualizzeremo le «cariche puntiformi» come piccole sfere uniformemente cariche anzichè come veri e propri punti geometrici. Tra l'altro vale la pena di notare che i disegni riportati nelle figure mostrano una sezione bidimensionale di una realtà fisica tridimensionale.

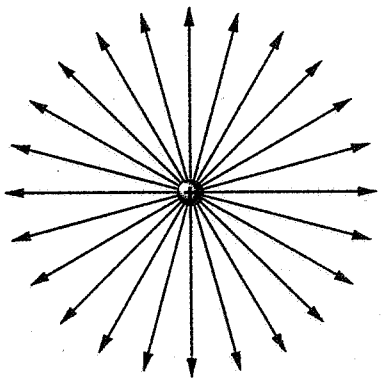


Figura 5 Linee di forza in prossimità di una carica puntiforme positiva. La direzione e il verso della forza su una carica positiva di prova, e quindi la direzione e il verso del campo elettrico, sono indicati attraverso le linee. La fittezza delle linee, in ciascun punto, è proporzionale all'intensità del campo nel punto. Si assume che le linee si chiudano su cariche negative distanti non illustrate.

Si notino le seguenti proprietà delle linee tracciate in figura 5. (1) *Le linee di forza danno la direzione del campo elettrico in ogni punto* (in configurazioni più complesse, in cui le linee di forza siano curve, la direzione di $\mathbf{E}$ in un punto arbitrario è data dalla tangente alla linea di forza passante per quel punto). Una carica positiva di prova liberata in un qualunque punto in prossimità della carica di figura 5, sarà soggetta ad una forza repulsiva diretta radialmente verso l'esterno e si muoverà in tale direzione. (2) *Le linee di forza escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative.* In figura 5 non è evidenziata alcuna carica negativa, ma si dovrebbe immaginare che in una zona lontana ci sia una sfera carica negativamente, che racchiude la carica positiva, sulla quale si possano chiudere le linee di forza. (3) *Le linee di forza sono tracciate in modo che il numero di linee per unità di area (perpendicolare alle linee) sia proporzionale alla intensità del campo elettrico.* Si immagini un elemento di superficie sferica avente area assegnata posto nelle vicinanze di una carica puntiforme. Molte linee di forza vi entreranno. Se spostiamo l'area radialmente verso l'esterno, un numero inferiore di linee di forza vi entrerà, poiché le linee di forza sono più distanziate fra di loro a distanze

ISBN 88-408-0777-2

crescenti dalla carica puntiforme. Ciò corrisponde alla variazione del campo elettrico con la distanza.

Se la carica puntiforme di figura 5 fosse negativa, la disposizione delle linee di forza sarebbe la stessa, con la sola differenza che le frecce punterebbero verso l'interno anzichè verso l'esterno. La forza su una carica positiva di prova sarebbe rivolta radialmente verso l'interno.

La figura 6 mostra le linee di forza relative a due cariche puntiformi positive uguali. Si immagini che le due cariche si trovino inizialmente molto distanti l'una dall'altra cosicchè esse esercitino un'azione di forza reciproca trascurabile e abbiano ciascuna una distribuzione di linee di forza come quella della figura 5. Esse vengano poi portate l'una vicina all'altra, per produrre una disposizione di linee di forza come quella mostrata in figura 6. Nel processo le linee di forza che originalmente erano tra le due cariche vengono deviate a destra o a sinistra. Si noti che nella zona tra le due cariche la concentrazione delle linee di forza è inferiore. Che cosa si deduce da ciò relativamente alla forza cui va soggetta una carica di prova posta in tale regione? Se ci si allontana dalle cariche le linee di forza diventano pressochè radiali, come si avrebbe con una singola carica di valore pari alla somma delle due cariche.

La figura 6 mostra che nelle regioni a destra e a sinistra della regione compresa tra le due cariche, le linee di forza sono quasi parallele tra di loro nel piano della figura. Si immagini ora che le due cariche vengano sostituite con un insieme di cariche uguali disposte lungo una linea retta, vicine ed equispaziate. La figura 7 mostra le linee di forza risultanti. Si noti che esse sono, ora, davvero parallele.

La figura 8 mostra le linee di forza nel caso di un dipolo elettrico, cioè di due cariche uguali di segno opposto. Qui si può notare che le linee di forza si chiudono sulla carica negativa. In questo caso la concentrazione delle linee di forza è massima nella regione compresa tra le due cariche. Che cosa si deduce da ciò relativamente al campo elettrico in tale zona? Si immagini, analogamente al caso appena discusso della figura 6, che le due cariche si trovino inizialmente molto distanti l'una dall'altra e che vengano poi portate l'una vicina all'altra. Le linee di forza non si *allontaneranno dalla* regione compresa tra le due cariche ma si *accumuleranno nella* stessa regione. Si osservi la direzione del campo elettrico nel piano ortogonale all'asse del

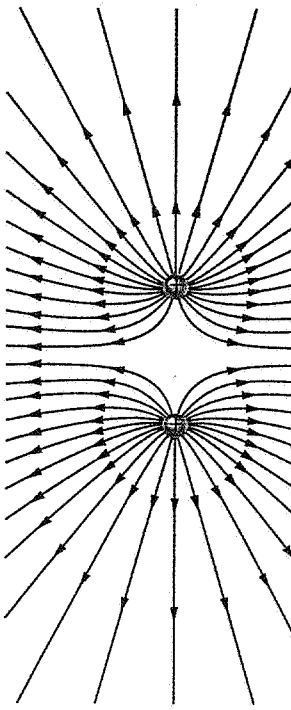


Figura 6 Linee di forza in prossimità di due cariche positive uguali.

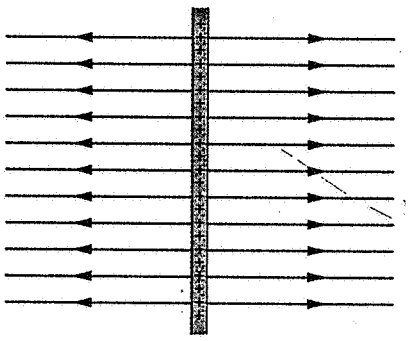


Figura 7 Linee di forza in prossimità di una lunga distribuzione rettilinea di carica. Per avere una rappresentazione tridimensionale si immagini di ruotare la figura sull'asse della distribuzione.

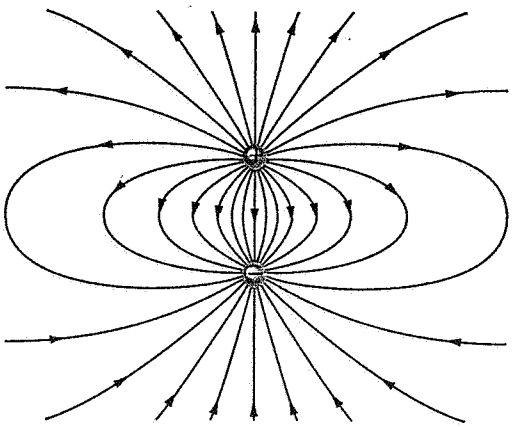


Figura 8 Linee di forza in prossimità di due cariche uguali in modulo e di segno opposto (dipolo elettrico).

dipolo passante per il punto medio tra le cariche, che era stato calcolato nel paragrafo precedente.

Le linee di forza possono essere rese visibili sperimentalmente applicando il campo elettrico in una sospensione di piccole particelle ottenuta in un fluido isolante. In figura 9 si vedono alcune fotografie delle immagini risultanti, simili ai disegni delle linee di forza che abbiamo schematizzato in questo paragrafo.

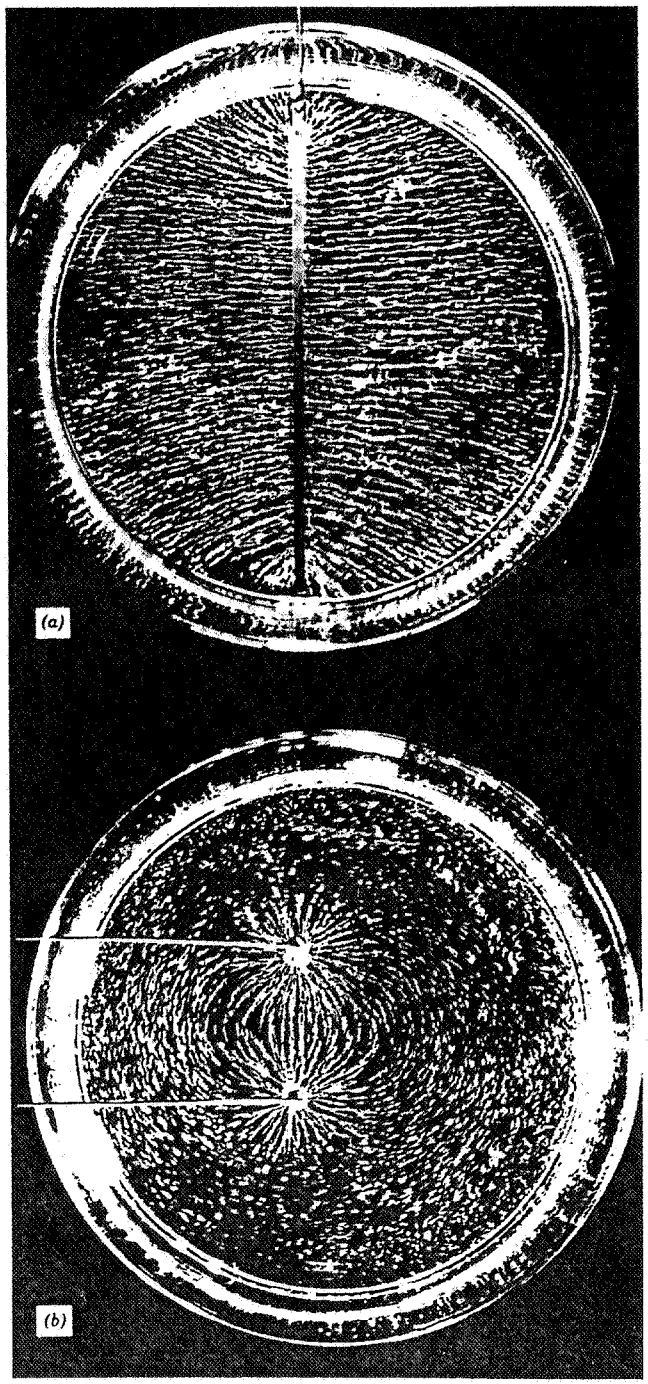


Figura 9 Fotografie della distribuzione delle linee di forza del campo elettrico in prossimità (*a*) di un piatto carico (che genera linee di forza parallele) e (*b*) di due bacchette che portano cariche uguali ed opposte (caso simile al dipolo elettrico della fig. 8). Le linee di forze vengono rese visibili grazie a piccoli semi di erba in sospensione in un liquido isolante.

Esempio 4 In figura 5, come varia l'intensità del campo elettrico con la distanza dal centro del corpo carico?

Soluzione Si supponga che N linee di campo terminino sulla sfera della figura 5. Si tracci una sfera concentrica immaginaria di raggio r. Il numero di linee per unità di area in ogni punto di questa sfera è $N/4\pi r^2$. Poiché E è proporzionale a tale quantità, possiamo scrivere $E \propto 1/r^2$. Perciò il campo elettrico prodotto da una sfera uniformemente carica varia come l'inverso del quadrato della distanza dal centro della sfera, come si era visto nel caso della carica puntiforme (vedi eq. 4). Nello stesso modo si può mostrare che il campo elettrico prodotto dalla lunga linea di cariche (fig. 7) varia come $1/r$, dove r è la distanza tra il punto dove si valuta il campo e la linea stessa. Otterremo questo risultato nel prossimo paragrafo.

28-5 IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA DISTRIBUZIONI DI CARICA CONTINUE

Ancorché la carica elettrica sia quantizzata (vedi par. 27-5), la riunione di un grande numero di cariche elementari può essere vista come una *distribuzione di carica continua*. Il campo generato da una distribuzione di carica continua può essere calcolato suddividendo la distribuzione in elementi infinitesimi dq. Ogni elemento di carica produce un campo $d\mathbf{E}$ nel punto P; il campo risultante nel punto P è poi calcolato con il principio di sovrapposizione, sommando (cioè integrando) i contributi di campo dovuti a tutti gli elementi di carica, cioè

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} \qquad (11)$$

L'integrazione, come la somma della equazione 5, è una operazione vettoriale; negli esempi che seguono vedremo come si risolve un integrale di questo tipo in tre casi. L'equazione 11 è una notazione sintetica che rappresenta tre integrali scalari, uno per ciascuna direzione dello spazio. Per esempio in coordinate cartesiane si ha

$$E_x = \int dE_x, \quad E_y = \int dE_y \quad \text{e} \quad E_z = \int dE_z.$$

Come si discuterà nel seguito, si può spesso semplifica-

 ISBN 88-408-0777-2

re il calcolo deducendo, sulla base di motivazioni di simmetria, che uno o due degli integrali sono nulli o che due di essi hanno ugual valore.

Nel calcolare il campo elettrico di una distribuzione di carica continua, il metodo generalmente adottato consta di tre passi: scegliere un elemento di carica dq arbitrario, trovare il campo elettrico $d\mathbf{E}$ nel punto di osservazione P e integrare sulla distribuzione di carica utilizzando l'equazione 11, per trovare il campo totale $\mathbf{E}$. In molti casi l'elemento di carica dq viene visto come una carica puntiforme e dà un contributo di campo $d\mathbf{E}$ di modulo pari a (vedi eq. 4)

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}, \tag{12}$$

dove r è la distanza dell'elemento di carica dq dal punto P. In altri casi i calcoli possono essere semplificati scegliendo l'elemento dq nella forma di una distribuzione elementare di carica che abbia un campo $d\mathbf{E}$ associato noto.

Una distribuzione di carica continua è descritta dalla sua *densità di carica*. In una distribuzione lineare, come un filo sottile sul quale viene posta una carica distribuita, un elemento di lunghezza ds porta una carica dq data da

$$dq = \lambda\, ds, \tag{13}$$

dove λ è la *densità di carica lineare* (o carica per unità di lunghezza) dell'oggetto. Se l'oggetto è uniformemente carico (cioè se la carica è distribuita uniformemente lungo l'oggetto) allora λ è costante ed è uguale alla carica totale q posta sull'oggetto divisa per la sua lunghezza totale L. Nel caso in esame

$$dq = \frac{q}{L}\,ds \quad \text{(carica lineare uniforme).} \tag{14}$$

Se la carica non è distribuita su una linea ma su una superficie, la carica dq su ciascun elemento di area dA è

$$dq = \sigma\, dA, \tag{15}$$

dove σ è la *densità di carica superficiale* (o carica per unità di area) dell'oggetto. Se la carica è distribuita uniformemente sulla superficie, allora σ è costante ed è uguale alla carica totale q divisa per l'area totale della superficie A, cioè

$$dq = \frac{q}{A}\,dA \quad \text{(carica superficiale uniforme).} \tag{16}$$

Possiamo considerare anche il caso in cui una carica è distribuita su un oggetto tridimensionale; in questo caso la carica dq su un elemento di volume dV è

$$dq = \rho\, dV, \tag{17}$$

dove ρ è la *densità di carica di volume* (o carica per unità di volume). Se l'oggetto è uniformemente carico, allora ρ è costante ed è uguale alla carica totale q divisa per il volume totale V cioè

$$dq = \frac{q}{V}\,dV \quad \text{(carica di volume uniforme).} \tag{18}$$

Considereremo ora alcuni esempi di calcolo del campo elettrico associato a distribuzioni continue di carica semplici.

Anello carico

La figura 10 mostra un anello sottile di raggio R caricato uniformemente con densità di carica lineare λ. Possiamo pensare che l'anello sia un oggetto di materiale plastico o comunque isolante cosicchè le cariche siano fisse lungo la circonferenza. Qual è il campo elettrico nel punto P posto ad una distanza z dal piano dell'anello lungo il suo asse?

Si consideri un elemento infinitesimale dell'anello di lunghezza ds posto in una arbitraria posizione sull'anello di figura 10. Esso contiene una quantità elementare di carica data dall'equazione 13, $dq = \lambda\, ds$. Questo elemento genera un campo infinitesimale $d\mathbf{E}$ nel punto P. Dall'equazione 4 si ha che

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, ds}{r^2} = \frac{\lambda\, ds}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)}. \tag{19}$$

Si noti che tutti gli elementi di carica che costituiscono l'anello si trovano alla stessa distanza r dal punto P.

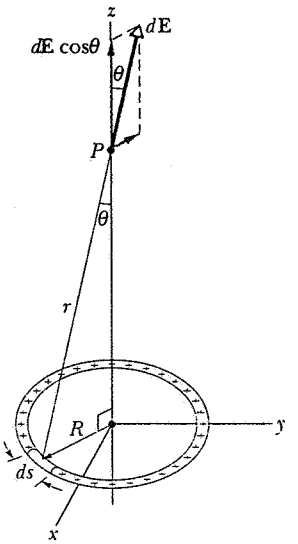


Figura 10 Una distribuzione di carica anulare ed uniforme. Un elemento dell'anello di lunghezza ds dà un contributo $d\mathbf{E}$ al campo elettrico nel punto P dell'asse dell'anello. Il campo elettrico totale in P è dato dalla somma di tutti questi contributi.

Per trovare il campo risultante in P dobbiamo sommare vettorialmente tutti i contributi di campo $d\mathbf{E}$ prodotti dagli elementi infinitesimali dell'anello. Vediamo, ora, come si può semplificare il calcolo sfruttando la simmetria del problema così da eliminare alcune integrazioni.

In particolare vogliamo dimostrare che il campo elettrico generato dall'anello carico uniformemente lungo il suo asse non ha componenti x e y. A questo scopo ragioniamo per assurdo, cioè supponiamo che tali componenti ci siano e mostriamo che le conseguenze di tale ipotesi conducono a un assurdo. Supponiamo che ci sia una componente x del campo nel punto P; una carica di prova posta in P accelererebbe nella direzione x. Ora supponiamo che qualcuno ruoti l'anello di 90° attorno all'asse z senza essere visto. L'osservatore può affermare che l'anello è stato ruotato? No, poiché l'anello è carico uniformemente e il suo stato fisico prima della rotazione è indistinguibile da quello dopo la rotazione, cioè la sua distribuzione di carica è invariante rispetto alla rotazione; ma una carica di prova posta nel punto P, ora accelererebbe nella direzione y dato che il campo (e, conseguentemente, la forza sulla carica di prova) deve ruotare con l'anello. Avremmo, quindi, una situazione in cui due distribuzioni di carica identiche producono forze diverse su una particella di prova. Questa è una conclusione inaccettabile, pertanto l'ipotesi iniziale deve essere sbagliata: non può esserci alcuna componente del campo elettrico perpendicolare all'asse dell'anello.

Un altro modo per giungere alla medesima conclusione consiste nel considerare due elementi di carica sull'anello posti sugli estremi opposti di un diametro. Il campo elettrico netto dovuto ai due elementi deve essere parallelo all'asse poiché le componenti perpendicolari all'asse si cancellano. *Tutti* gli elementi di carica dell'anello possono essere accoppiati secondo questo criterio, per cui il campo totale deve essere parallelo all'asse z.

Poiché vi è una sola componente di campo totale risultante (E_x e E_y sono nulli), la somma vettoriale si semplifica in una somma scalare di componenti lungo l'asse z. La generica componente z di $d\mathbf{E}$ è $dE\cos\theta$. Dalla figura 10 si vede che

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \tag{20}$$

Moltiplicando le equazioni 19 e 20 si trova

$$dE_z = dE\cos\theta = \frac{z\lambda\, ds}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}. \tag{21}$$

Per sommare i vari contributi dobbiamo soltanto sommare le lunghezze dei vari elementi poiché tutte le altre quantità nell'equazione 21 hanno lo stesso valore per ogni elemento di carica. Perciò

$$\begin{aligned} E_z &= \int dE\cos\theta = \frac{z\lambda}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \int ds \\ &= \frac{z\lambda(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}, \end{aligned} \tag{22}$$

in cui l'integrale vale semplicemente $2\pi R$, la circonferenza dell'anello. Ma $\lambda(2\pi R)$ è pari a q, la carica totale distribuita sull'anello, per cui possiamo riscrivere l'equazione 22 come

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad \text{(anello carico)}. \tag{23}$$

L'equazione 23 dà la direzione corretta del campo anche quando z è negativo?

Per i punti molto lontani dall'anello cioè quando $z \gg R$, possiamo trascurare R^2 rispetto a z^2 nel termine tra parentesi, per cui

$$E_z \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2} \quad (z \gg R), \tag{24}$$

che (sostituendo z con r) è l'equazione 4, il campo elettrico di una carica puntiforme. Ciò non deve sorprendere poiché a distanze sufficientemente grandi l'anello appare come una carica puntiforme. Dall'equazione 23 si nota anche che $E_z = 0$ per $z = 0$. Anche questo non deve sorprendere poiché una carica di prova posta al centro dell'anello verrà spinta con la stessa intensità in tutte le direzioni nel piano dell'anello, cioè subirà una forza netta nulla. Questo equilibrio è stabile o instabile?

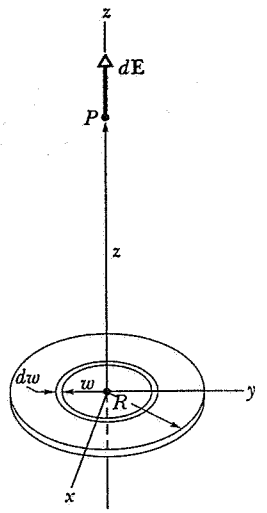


Figura 11 Un disco uniformemente carico. L'anello di raggio w e spessore dw dà un contributo $d\mathbf{E}$ al campo elettrico nel punto P dell'asse del disco. Il campo elettrico totale in P è dato dalla somma di tutti questi contributi.

 ISBN 88-408-0777-2

Disco carico

La figura 11 mostra un disco di plastica di raggio R, sulla cui faccia superiore è distribuita uniformemente una carica con densità σ. Qual è il campo elettrico nel punto P ad una distanza z dal disco lungo il suo asse?

Un metodo per risolvere il problema consiste nello scomporre il disco in sottili anelli concentrici calcolando, poi, il campo elettrico come la somma dei singoli contributi, cioè integrando i contributi di ogni anello elementare. In figura 11 è evidenziato un anello di raggio w e spessore dw, con una carica totale, in accordo con la equazione 15, pari a

$$dq = \sigma\, dA = \sigma(2\pi w)dw, \tag{25}$$

dove $dA = 2\pi w\, dw$ è l'area infinitesimale dell'anello.

Abbiamo già risolto il caso del campo elettrico generato da un anello carico. Sostituendo nell'equazione 23 q con dq (vedi eq. 25) e, sempre nell'equazione 23, R con w, otteniamo

$$dE_z = \frac{z\sigma 2\pi w\, dw}{4\pi\epsilon_0(z^2 + w^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}(z^2 + w^2)^{-3/2}(2w)dw.$$

Possiamo ora trovare E_z integrando sulla superficie del disco, cioè integrando rispetto alla variabile w con i limiti $w = 0$ e $w = R$. Si noti che z resta costante durante l'integrazione. Perciò

$$E_z = \int dE_z = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\int_0^R (z^2 + w^2)^{-3/2}(2w)dw. \tag{26}$$

Questo integrale è della forma $\int X^m\, dX$, in cui $X = (z^2 + w^2)$, $m = -\frac{3}{2}$ e $dX = (2w)dw$. Integrando si ottiene

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \text{ (disco carico)} \tag{27}$$

come risultato finale. Questa relazione è valida solo per $z > 0$ (vedi problema 28).

Se $R \gg z$, il termine tra parentesi nell'equazione 27 tende a zero e l'equazione si riduce a

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \qquad \text{(piano infinito).} \tag{28}$$

Questo è il campo elettrico generato da una distribuzione di carica piana e uniforme infinitamente estesa. Questo è un risultato importante che otterremo nel prossimo capitolo utilizzando un diverso approccio. Si noti che l'equazione 27 si riduce nell'equazione 28 anche se $z \to 0$; nei punti molto vicini il disco carico si comporta come se fosse di estensione infinita. Nel problema 24 verrà chiesto di mostrare che l'equazione 27 si riduce all'espressione del campo di una carica puntiforme quando $z \gg R$.

Filo carico infinito

In figura 12 è schematizzata una distribuzione di carica lineare di estensione infinita e avente densità di carica costante pari a λ. Qual è il campo elettrico $\mathbf{E}$ ad una distanza y dalla distribuzione?

L'intensità del contributo infinitesimale dE dovuto ad un elemento di carica dq $(= \lambda\, dz)$ è data dall'equazione 12, cioè

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\, dz}{y^2 + z^2}. \tag{29}$$

Il vettore $d\mathbf{E}$, come mostrato in figura 12, ha le seguenti componenti

$$dE_y = dE\cos\theta \quad \text{e} \quad dE_z = dE\,\text{sen}\theta.$$

Le componenti lungo y e z del vettore risultante $\mathbf{E}$ nel punto P sono date da

$$E_y = \int dE_y = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \cos\theta\, dE \tag{30a}$$

e

$$E_y = \int dE_z = \int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \text{sen}\theta\, dE. \tag{30b}$$

Anche in questo caso è utile fare ricorso a questioni di simmetria per semplificare il problema. Se il filo carico della figura 12 viene ruotato di 180° attorno all'asse y, scambiando di conseguenza le due porzioni di filo carico che giacciono sui semiassi z positivo e negativo, la situazione fisica resta invariata, cioè la distribuzione di carica resta identica, ma si invertono le componenti x e z del campo nel punto P. Perciò, nel punto P, non ci possono essere componenti di campo elettrico nella direzione x (o più genericamente in direzioni ortogonali all'asse y di rotazione) e nella direzione z.

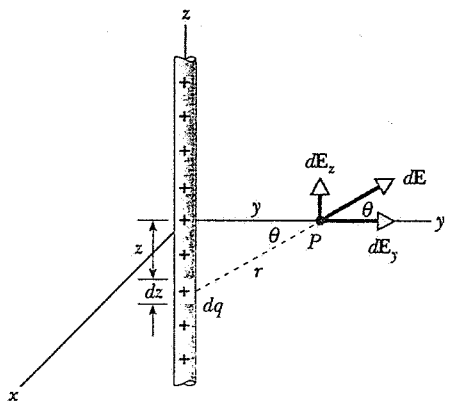


Figura 12 Una lunga distribuzione di carica rettilinea ed uniforme. L'elemento dz della linea dà un contributo $d\mathbf{E}$ al campo elettrico nel punto P, posto ad una distanza y dalla linea, piccola rispetto alla lunghezza della linea stessa.

Un altro modo per mostrare che E_z deve essere nullo consiste nel considerare che per ogni elemento di carica con z positiva c'è un corrispondente elemento di carica con z negativa tale che la le componenti z del loro campo si cancellino in P. Ciò è strettamente vero solo se l'asse y passa nel punto mediano della linea carica; comunque, quando la linea è di lunghezza infinita ogni suo punto è «mediano» e non ci si può mai trovare in prossimità di un estremo.

Poiché i contributi su E_y provenienti dal semiasse z positivo e dal semiasse z negativo sono uguali, possiamo scrivere

$$E = E_y = 2\int_{z=0}^{z=\infty} \cos\theta \, dE. \tag{31}$$

Si noti che si è cambiato l'estremo inferiore dell'integrale e si è introdotto un fattore 2 di compensazione. Sostituendo l'espressione di dE data nell'equazione 29 nella equazione 31 si ha

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{z=0}^{z=\infty} \cos\theta \frac{dz}{y^2 + z^2}. \tag{32}$$

Dalla figura 12 si vede che le quantità z e θ non sono indipendenti. Possiamo eliminare una delle due variabili, per esempio z, utilizzando la relazione (vedi figura)

$$z = y\tan\theta.$$

Differenziando, si ottiene

$$dz = y\sec^2\theta \, d\theta.$$

Sostituendo queste due espressioni si ottiene finalmente che

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos\theta \, d\theta.$$

Si noti che gli estremi di integrazione vanno posti, ora, sulla variabile θ anziché su z. Per esempio se $z \to +\infty$, allora $\theta \to \pi/2$ come si deduce dalla figura 12. Questo integrale si risolve immediatamente e si ottiene

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}. \tag{33}$$

Il problema in esame ha *simmetria cilindrica* rispetto all'asse z. In tutti i punti del piano xy ad una distanza r dal filo carico, il campo assume il valore

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{(filo infinito)}. \tag{34}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza del punto P di coordinate x, y dal filo carico.

Ci si può chiedere che senso abbia risolvere un problema relativo a un filo carico di lunghezza infinita quando ogni filo reale deve avere lunghezza finita (vedi problema 31). Nei punti abbastanza vicini ad un filo carico di lunghezza finita e sufficientemente lontani dai suoi bordi, l'equazione che abbiamo appena ricavato esprime un risultato così vicino a quello esatto che in molte situazioni pratiche la differenza può essere ignorata. È generalmente inutile ricavare un risultato esatto per ogni geometria che si incontra nei casi reali. Tanto più che se non vengono fatte ragionevoli approssimazioni o idealizzazioni, la maggior parte dei problemi più significativi ricorrenti in fisica e in ingegneria non può essere risolta affatto.

28-6 CARICA PUNTIFORME IN UN CAMPO ELETTRICO

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato la prima parte delle interazioni del tipo carica (⇄) campo (⇄) carica, cioè ci siamo chiesti: dato un certo insieme di cariche, qual è il campo elettrico risultante? In questo e nel prossimo paragrafo considereremo la seconda parte: che cosa succede quando poniamo una particella carica in un campo elettrico noto?

Dall'equazione 2 sappiamo che una particella di carica q posta in un campo elettrico $\mathbf{E}$ subisce una forza $\mathbf{F}$ data da

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Per studiare il moto della particella carica nel campo elettrico dobbiamo semplicemente fare uso della seconda legge di Newton, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, in cui la forza risultante sulla particella include la forza elettrica e tutte le altre forze che agiscono sulla particella stessa.

Come già abbiamo osservato studiando la legge di Newton, il problema si semplifica nel caso in cui la forza sia costante. Possiamo dunque incominciare a considerare i casi in cui il campo elettrico e la conseguente forza elettrica siano costanti. Una situazione di questo tipo si verifica quando connettiamo i morsetti di una batteria ad una coppia di piatti metallici paralleli, isolati l'uno dall'altro, come discuteremo nel prossimo capitolo. Se la distanza tra i due piatti è piccola rispetto alle loro dimensioni, il campo nella regione compresa tra i due piatti sarà praticamente uniforme, eccetto che nelle regioni vicine ai bordi. Negli esempi che seguono ipotizziamo che il campo esista solo nel volume racchiuso tra i piatti e scenda bruscamente a zero al di fuori di essi. In realtà il campo scende gradualmente a zero in una zona la cui estensione è circa

ISBN 88-408-0777-2

uguale alla distanza tra i due piatti; se questa distanza è sufficientemente piccola non si commette un errore apprezzabile calcolando il moto della particella come se non ci fossero effetti di disuniformità del campo.

Esempio 5 Una goccia d'olio carica avente raggio $R = 2.76\ \mu m$ e densità $\rho = 920\ kg/m^3$ è tenuta in equilibrio sotto le azioni di forza combinate del suo peso e di un campo elettrico uniforme rivolto verso il basso di intensità $E = 1.65 \times 10^6\ N/C$ (fig. 13). (*a*) Determinare il valore e il segno della carica sulla goccia. Si esprima il risultato nei termini della carica elementare *e*. (*b*) La goccia venga esposta ad una sorgente radioattiva che emette elettroni. Due elettroni colpiscano la goccia e ne vengano catturati, cambiando la sua carica di due unità. Se il campo elettrico viene tenuto al suo valore costante, quale sarà la conseguente accelerazione della goccia?

Soluzione (*a*) Per tenere la goccia in equilibrio il suo peso mg deve essere controbilanciato da una forza elettrica pari a qE uguale ed opposta. Dato che il campo elettrico è rivolto verso il basso, la carica q sulla goccia deve essere di segno negativo cosicchè la forza elettrica sia rivolta in direzione opposta al campo. La condizione di equilibrio è

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + q\mathbf{E} = 0.$$

Considerando le componenti y si ottiene

$$-mg + q(-E) = 0$$

quindi, risolvendo nella variabile q,

$$\begin{aligned} q &= -\frac{mg}{E} = -\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{E} \\ &= \frac{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6}\ m)^3(920\ kg/m^3)(9.8\ m/s^2)}{1.65 \times 10^6\ N/C} \\ &= -4.8 \times 10^{-19}\ C. \end{aligned}$$

Se scriviamo q nei termini della carica dell'elettrone $-e$, ponendo $q = n(-e)$, essendo n il numero di cariche elettroniche sulla goccia, si ottiene

$$n = \frac{q}{-e} = \frac{-4.8 \times 10^{-19}\ C}{-1.6 \times 10^{-19}\ C} = 3.$$

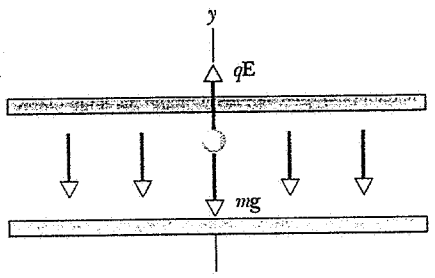


Figura 13 Esempio 5. Una goccia carica negativamente viene posta in un campo elettrico uniforme **E**. La goccia si muove sotto l'effetto combinato dalla forza peso $m\mathbf{g}$ e della forza elettrica $q\mathbf{E}$.

(*b*) Se aggiungiamo due elettroni alla goccia, la sua carica diventerà

$$q' = (n+2)(-e) = 5(-1.6 \times 10^{-19}\ C) = -8.0 \times 10^{-19}\ C.$$

La seconda legge di Newton può essere scritta come segue

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{g} + q'\mathbf{E} = m\mathbf{a}.$$

e, considerando le componenti lungo y, si ottiene

$$-mg + q'(-E) = ma.$$

Possiamo quindi ricavare l'accelerazione:

$$\begin{aligned} a &= -g - \frac{q'E}{m} \\ &= -9.80\ m/s^2 - \frac{-8.0 \times 10^{-19}\ C)(1.65 \times 10^6\ N/C)}{\frac{4}{3}\pi(2.76 \times 10^{-6}\ m)^3(920\ kg/m^3)} \\ &= -9.80\ m/s^2 + 16.3\ m/s^2 = +6.5\ m/s^2. \end{aligned}$$

La goccia accelera nella direzione positiva di y.

In questo calcolo abbiamo ignorato la forza di attrito viscoso, che è generalmente molto importante in queste situazioni. Abbiamo, in effetti, trovato l'accelerazione della goccia nell'istante in cui essa ha catturato i due elettroni. La forza di attrito viscoso, che dipende dalla velocità della goccia, è inizialmente nulla, se la goccia parte da ferma, e aumenta non appena la goccia incomincia a muoversi. L'accelerazione della goccia, pertanto, diminuirà nel tempo man mano che essa acquista velocità.

Questa configurazione sperimentale è alla base dell'esperimento di Millikan, che venne ideato e realizzato per misurare il valore della carica elettronica. L'esperimento verrà discusso più avanti in questo paragrafo.

Esempio 6 La figura 14 mostra il sistema di deflessione di una stampante a getto d'inchiostro. Una goccia d'inchiostro la cui massa m è pari a 1.3×10^{-10} kg possiede una carica q di -1.5×10^{-13} C e penetra tra i piatti di deflessione con velocità $v = 18$ m/s. La lunghezza L di questi piatti è 1.6 cm e il campo elettrico E tra i piatti è pari a 1.4×10^6 N/C. Qual è la deflessione verticale della goccia in corrispondenza dell'estremo di destra dei piatti? Si ignori l'effetto di bordo del campo elettrico.

Soluzione Sia t il tempo di passaggio della goccia nel sistema di deflessione. Gli spostamenti verticale ed orizzontale sono dati da

$$y = \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{e} \quad L = vt,$$

rispettivamente, in cui a è l'accelerazione verticale della goccia.

Come nel precedente problema possiamo scrivere la componente lungo y della seconda legge di Newton come $-mg + q(-E) = ma$. La forza elettrica che agisce sulla goccia, $-qE$, è molto maggiore in questo caso della forza gravitazionale mg cosicchè l'accelerazione della goccia può essere approssimata dal termine $-qE/m$. Eliminando t dalle due equazioni scritte sopra e sostituendo il valore dell'accelerazione a appena ricavato, si ottiene

$$\begin{aligned} y &= \frac{-qEL^2}{2mv^2} \\ &= \frac{-(-1.5 \times 10^{-13}\ C)(1.4 \times 10^6\ N/C)(1.6 \times 10^{-2}\ m)^2}{(2)(1.3 \times 10^{-10}\ kg)(18\ m/s)^2} \\ &= 6.4 \times 10^{-4}\ m = 0.64\ mm. \end{aligned}$$

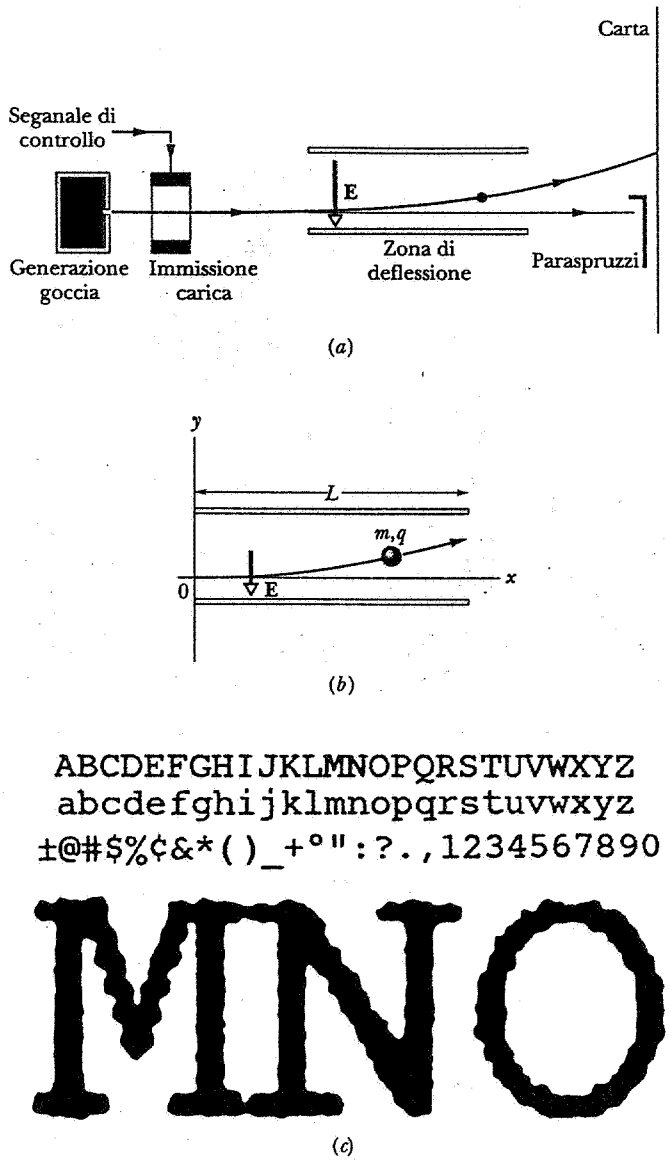


Figura 14 Esempio 6. (*a*) Principio di funzionamento di una stampante a getto d'inchiostro. Il segnale d'ingresso controlla la carica immessa nella goccia e quindi la posizione in cui la goccia colpirà la carta. Una forza trasversale dovuta al campo elettrico E deflette la goccia. (*b*) Dettaglio dei piatti di deflessione. La goccia si muove su una traiettoria parabolica nella regione compresa tra i piatti e prosegue in linea retta (linea tratteggiata) quando fuoriesce dalla zona di deflessione. (*c*) Esempi di stampa a getto d'inchiostro e ingrandimento di tre lettere. Ogni lettera richiede mediamente 100 gocce. Le gocce vengono prodotte ad una velocità di circa 100 000 gocce al secondo.

La deflessione sulla carta sarà maggiore di questa poiché la goccia di inchiostro percorre un cammino rettilineo dopo avere lasciato l'unità di deflessione fino al raggiungimento del foglio di carta, come mostrato in figura 14*b*. Per indirizzare le gocce d'inchiostro in modo che formino i caratteri voluti, è necessario dosare la carica q sulle gocce – dalla quale dipende proporzionalmente la deflessione – con una percentuale di errore di pochi percento. Nella nostra trattazione abbiamo ancora trascurato le forze di attrito viscoso che agiscono sulla goccia; esse sono in realtà non trascurabili alle alte velocità con cui si muovono le gocce stesse. L'analisi è identica a quella che si fa per il calcolo della deflessione di un fascio elettronico in un tubo a raggi catodici.

Misura della carica elementare

La figura 15 mostra lo schema dell'apparato utilizzato dal fisico americano Robert A.Millikan negli anni 1910-1913 per misurare la carica elementare e. Alcune goccioline d'olio vengono introdotte nella camera A attraverso un nebulizzatore. Alcune di esse si caricano positivamente, altre negativamente durante questo processo. Supponiamo che una goccia si infili casualmente in un piccolo buco sul piatto P_1 e raggiunga la camera C. Assumiamo che questa goccia abbia una carica q di segno negativo.

Se non c'è campo elettrico due forze agiscono sulla goccia, il suo peso mg e la forza di attrito viscoso rivolta verso l'alto, il cui valore è proporzionale alla velocità della goccia in caduta. La goccia raggiunge rapidamente una velocità finale costante v alla quale queste due forze sono esattamente bilanciate.

Un campo elettrico **E** rivolto verso il basso viene ora instaurato nella camera, applicando la batteria B ai piatti P_1 e P_2. Una terza forza $q\mathbf{E}$ ora agisce sulla goccia. Se q è negativa questa forza è diretta verso l'alto. Supponiamo che la goccia si muova verso l'alto ad una nuova velocità finale v'. In ogni caso la forza di attrito viscoso punta nella direzione opposta a quella del moto della goccia ed ha intensità proporzionale alla velocità della goccia. La carica q può essere dedotta dalle misure delle velocità v e v'.

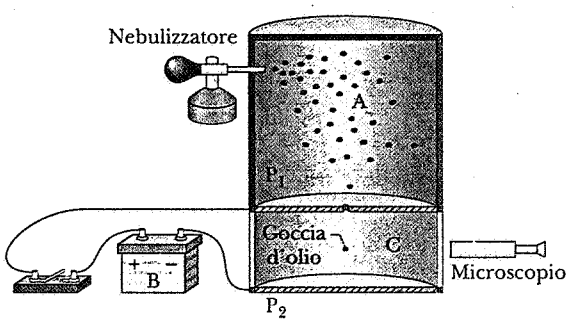


Figura 15 L'apparato dell'esperimento di Millikan della goccia d'olio, usato per misurare la carica elementare e. Il moto della goccia viene osservato in una camera C, dove essa è soggetta all'azione della forza gravitazionale, della forza elettrica dovuta alla batteria B e, se la goccia si muove, di una forza di attrito viscoso.

ISBN 88-408-0777-2

Millikan trovò che i valori delle cariche erano tutti consistenti con la relazione

$$q = ne \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots,$$

in cui e è la carica elementare, di valore 1.6×10^{-19} C. L'esperimento di Millikan è una prova convincente della quantizzazione della carica. Millikan fu insignito del premio Nobel per la fisica nel 1923 grazie soprattutto a questo lavoro. Le misure moderne della carica elementare si basano su una certa varietà di esperimenti, tutti più precisi del pionieristico esperimento di Millikan.

Il moto in campi elettrici non uniformi
(Facoltativo)

Finora abbiamo considerato soltanto campi elettrici uniformi, nei quali il campo è costante in intensità, direzione e verso in tutta la regione nella quale la particella si muove. Spesso, comunque, si incontrano campi elettrici non uniformi. Una volta calcolato il campo, bisogna risolvere le leggi di Newton nel caso di forze non costanti, come si è discusso nel capitolo 6. Considereremo brevemente un esempio di questa procedura.

La figura 16 mostra un anello carico positivamente il cui campo elettrico è dato dall'equazione 23 per i punti che giacciono sul suo asse. Si supponga di inviare una particella carica positivamente verso l'anello, lungo il suo asse z, a partire da una grande distanza e con velocità iniziale v_0. Quale sarà il moto della particella?

Possiamo risolvere questo problema utilizzando la tecnica numerica descritta nel paragrafo 8-4 per una forza dipendente dalla posizione. Si assuma di conoscere la posizione e la velocità iniziali della particella. Dopo avere calcolato il campo elettrico nella posizione iniziale, si può calcolare la sua accelerazione iniziale. In un piccolo intervallo di tempo possiamo considerare l'accelerazione costante e trovare la variazione di velocità e di posizione in tale intervallo, come descritto nel paragrafo 8-4. Nella nuova posizione, alla fine del primo intervallo di tempo, si ha un nuovo campo elettrico ed una nuova accelerazione. Si può, ora, trovare il cambiamento di posizione e di velocità alla fine di un secondo intervallo di tempo opportunamente piccolo. Proseguendo in questo modo, si trova la dipendenza dal tempo della velocità e della posizione della particella.

Applichiamo questo calcolo al sistema costituito da un anello carico di raggio $R = 3$ cm e con una densità di carica lineare $\lambda = +2 \times 10^{-7}$ C/m. Un protone ($q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) viene inviato lungo l'asse dell'anello da una posizione iniziale $z = +0.5$ m con velocità iniziale $v_{z0} = -7 \times 10^5$ m/s. (Il segno negativo indica che il protone si sta muovendo all'indietro rispetto al verso dell'asse z, cioè verso l'anello che giace nel piano xy). L'anello carico positivamente esercita una forza repulsiva sul protone, anch'esso carico positivamente, rallentandone la sua velocità. Nella figura 16*a* è tracciato il moto del protone nel caso in cui esso non abbia una energia cinetica iniziale sufficiente a fargli raggiungere il piano dell'anello. Il protone si ferma in breve in un punto di poco superiore al piano dell'anello e inverte il suo moto accelerando nella direzione positiva dell'asse z. Si noti che nelle zone distanti dall'anello, il protone si muove con velocità pressochè costante dato che il campo elettrico è molto debole.

La figura 16*b* mostra il moto nel caso in cui il protone abbia una energia cinetica iniziale sufficiente a fargli raggiungere e superare il piano dell'anello. La carica positiva rallenta il moto del protone ma non lo ferma. Il protone attraversa l'anello con una velocità minima in corrispondenza del punto di passaggio nel piano dell'anello. Anche in questo caso nelle zone lontane dall'anello il protone si muove con velocità pressoché costante.

Nel capitolo 30 discuteremo un metodo basato sulla conservazione dell'energia, che consente di calcolare direttamente v_z.

Il listato di un programma che calcola la soluzione di questo problema (e di altri problemi unidimensionali simili) può essere trovato in Appendice I. Il problema 58 è un altro esempio applicativo di questa tecnica. ■

28-7 DIPOLO IN UN CAMPO ELETTRICO

Nel paragrafo 28-3 abbiamo introdotto il dipolo elettrico, che può essere rappresentato con due cariche uguali ed opposte $+q$ e $-q$ separate da una distanza d. Se poniamo un dipolo in un campo elettrico *esterno*, la forza sulla carica positiva sarà rivolta in una direzione, quella sulla carica negativa in una direzione diversa. Per calcolare l'effetto netto di queste forze è conveniente introdurre il *vettore* **p** momento di dipolo. Il vettore **p** ha modulo $p = qd$, è diretto lungo la linea congiungente le due cariche nel verso che va dalla carica negativa a quella positiva. Dal punto di vista formale è conveniente adottare il momento di dipolo in forma vettoriale poiché – come spesso capita con le grandezze vettoriali – esso consente di scrivere le relazioni fondamentali sui dipoli elettrici in forma concisa.

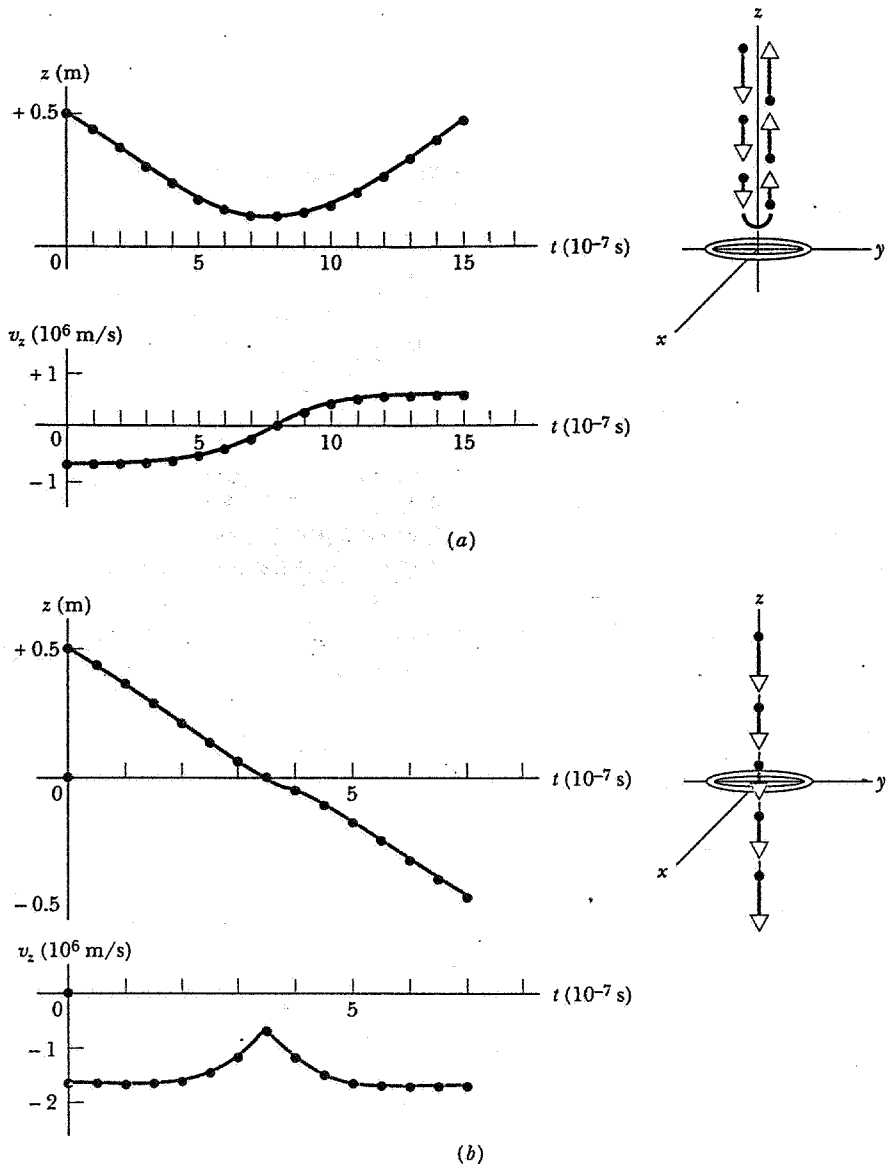


Figura 16 (*a*) Il moto di un protone proiettato lungo l'asse di un anello carico positivamente e uniformemente. I diagrammi riportano la posizione e la velocità. Il protone si arresta momentaneamente dopo circa 8×10^{-7} s e prosegue, poi, in verso opposto. I punti indicati sono il risultato di un calcolo numerico; le curve interpolano i punti. (*b*) Sa la velocità iniziale del protone è sufficiente, esso può oltrepassare l'anello. In questo caso la velocità del protone sarà minima nel punto in cui esso raggiunge il piano dell'anello.

La figura 17*a* mostra un dipolo in un campo elettrico **E** uniforme (il campo *non* è quello generato dal dipolo stesso ma è prodotto da una distribuzione di carica esterna non visibile in figura). Il momento di dipolo **p** forma un angolo θ con la direzione del campo. Assumiamo che il campo sia uniforme, cosicchè **E** abbia modulo, direzione e verso costanti nelle posizioni ove si trovano $+q$ e $-q$. Le forze su $+q$ e $-q$ hanno, perciò, la stessa intensità $F = qE$ e direzione; ma verso opposto, come mostrato nella figura 17*a*. La forza netta sul dipolo dovuta al campo esterno è perciò nulla ma c'è un momento torcente netto rispetto al centro di massa che tende a ruotare il dipolo fino a portare **p** ad essere allineato con **E**. Il momento torcente netto ri-

ISBN 88-408-0777-2

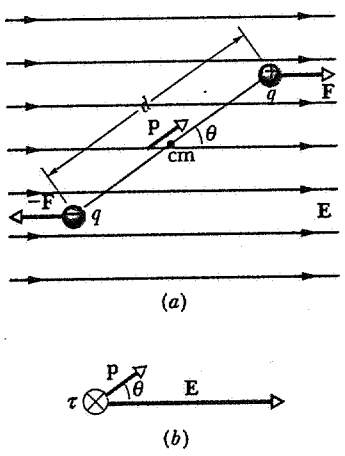


Figura 17 (*a*) Un dipolo elettrico in un campo elettrico uniforme. (*b*) La relazione vettoriale $\mathbf{t} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ mette in relazione il momento torcente **t** agente sul dipolo con il momento di dipolo **p** e il campo elettrico **E**. Il momento torcente ha verso entrante nel piano del foglio.

spetto al centro del dipolo dovuto alle due forze ha modulo:

$$\tau = F\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta + F\frac{d}{2}\operatorname{sen}\theta = Fd\operatorname{sen}\theta, \qquad (35)$$

la sua direzione è perpendicolare al piano del foglio e punta verso la pagina, come indicato nella figura 17*b*. Possiamo scrivere l'equazione 35 come

$$\tau = (qE)d\operatorname{sen}\theta = (qd)E\operatorname{sen}\theta = pE\operatorname{sen}\theta. \qquad (36)$$

L'equazione 36 può essere scritta in forma vettoriale come

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \qquad (37)$$

che è consistente con le proprietà dei prodotti vettoriali, come si deduce dai tre vettori della figura 17*b*.

Analogamente al caso della dinamica dei corpi soggetti a forze conservative (la forza elettrostatica è conservativa, come discuteremo nel capitolo 30), è possibile descrivere il sistema sia attraverso equazioni che fanno uso delle forze sia attraverso equazioni di bilancio energetico. Consideriamo perciò il lavoro fatto dal campo elettrico per ruotare il dipolo di un angolo θ. Utilizzando l'appropriata espressione del lavoro nei moti rotazionali (eq. 14 del cap. 12), il lavoro compiuto dal campo esterno per ruotare il dipolo da un angolo iniziale θ_0 ad un angolo finale θ, è

$$L = \int dL = \int_{\theta_0}^{\theta} \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \int_{\theta_0}^{\theta} -\tau d\theta \qquad (38)$$

dove τ è il momento torcente generato dal campo elettrico esterno. Il segno negativo nell'equazione 38 è dovuto al fatto che il momento torcente τ tende a *ridurre* θ; usando una terminologia vettoriale τ e $d\boldsymbol{\theta}$ hanno versi opposti, cosicchè $\boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} = -\tau d\theta$. Combinando le equazioni 38 e 43 si ottiene

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta} -pE\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -pE\int_{\theta_0}^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = pE(\cos\theta - \cos\theta_0). \qquad (39)$$

Dato che il lavoro compiuto dalla distribuzione di cariche generatrice del campo elettrico esterno uguaglia, con segno opposto, la variazione dell'energia potenziale del sistema campo + dipolo, si ha

$$\Delta U \equiv U(\theta) - U(\theta_0) = -L = -pE(\cos\theta - \cos\theta_0). \qquad (40)$$

Definiamo arbitrariamente l'angolo θ_0 di riferimento come 90° e poniamo l'energia potenziale a tale angolo pari a zero. Per un generico angolo θ l'energia potenziale è quindi

$$U = -pE\cos\theta, \qquad (41)$$

che può essere scritta in forma vettoriale come

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \qquad (42)$$

Così U è minima quando **p** ed **E** sono paralleli.

Il moto di un dipolo in un campo elettrico uniforme può perciò essere interpretato sia dal punto di vista delle forze (il momento torcente risultante sul dipolo tende a ruotarlo fino all'allineamento con il campo elettrico esterno) o dal punto di vista energetico (l'energia potenziale del sistema raggiunge un minimo quando il momento di dipolo è allineato con il campo elettrico esterno). La scelta tra i due approcci dipende dalla convenienza a livello di calcolo che si ha nell'applicazione ad ogni particolare problema preso in esame.

Esempio 7 Una molecola di vapore acqueo (H_2O) ha un momento di dipolo elettrico di modulo $p = 6.2 \times 10^{-30}$ C · m (questo elevato momento di dipolo determina molte delle proprietà che rendono l'acqua una sostanza tanto importante, come ad esempio la sua capacità di fungere da solvente quasi universale). La figura 18 dà una rappresentazione di questa molecola in cui si riconoscono tre nuclei e le nubi elettroniche circostanti. Il momento di dipolo **p** è visualizzato con un vettore sull'asse di simmetria. Il momento di dipolo non è nullo poiché il baricentro della carica positiva si discosta dal baricentro della carica negativa (un caso opposto è quello della molecola del biossido di carbonio, CO_2: in questo caso ci sono tre atomi disposti su una linea retta, con un atomo di carbonio al centro e due atomi di ossigeno sui lati. Il baricentro della carica positiva e quello della carica negativa coincidono con il centro di massa della molecola e il momento di dipolo elettrico del CO_2 è nullo). (*a*) A quale distanza si trovano i baricentri delle cariche positiva e negativa nella molecola di H_2O? (*b*) Qual è il momento torcente massimo su una mole-

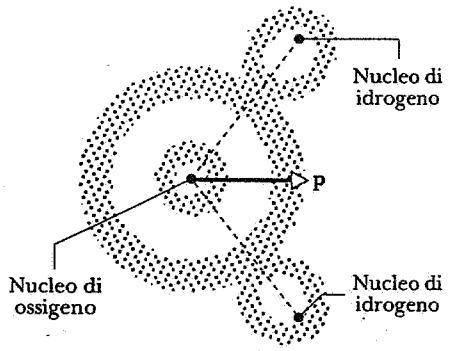


Figura 18 Una molecola di H_2O, in cui si riconoscono i tre nuclei, la nube elettronica e il vettore momento di dipolo elettrico **p**.

cola di H_2O in un campo elettrico tipico di laboratorio pari a 1.5×10^4 N/C? (*c*) Si supponga che il momento di dipolo di una molecola di H_2O sia inizialmente orientato nella direzione del campo ma abbia verso opposto. Quale lavoro viene compiuto dal campo elettrico per ruotare la molecola fino all'allineamento con il campo?

Soluzione (*a*) In questa molecola ci sono 10 elettroni e, corrispondentemente, 10 cariche positive. Possiamo scrivere il modulo del momento di dipolo,

$$p = qd = (10e)(d),$$

in cui d è la separazione che stiamo cercando ed e è la carica elementare. Perciò

$$d = \frac{p}{10e} = \frac{6.2 \times 10^{-30}\ \text{C} \cdot \text{m}}{(10)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})} = 3.9 \times 10^{-12}\ \text{m} = 3.9\ \text{pm}.$$

Questo è circa il 4% della distanza del legame OH nella stessa molecola.

(*b*) Come mostra l'equazione 36, il momento torcente è massimo quando $\theta = 90°$. Sostituendo questo valore nell'equazione si ottiene

$$\tau = pE\,\text{sen}\theta = (6.2 \times 10^{-30}\ \text{C} \cdot \text{m})(1.5 \times 10^4\ \text{N/C})(\text{sen}\ 90°) = 9.3 \times 10^{-26}\ \text{N} \cdot \text{m}.$$

(*c*) Il lavoro compiuto per ruotare il dipolo da $\theta_0 = 180°$ a $\theta = 0°$ è dato dall'equazione 39,

$$L = pE(\cos\theta - \cos\theta_0) = pE(\cos 0^0 - \cos 180^0) = 2pE = (2)(6.2 \times 10^{-30}\ \text{C} \cdot \text{m})(1.5 \times 10^4\ \text{N/C}) = 1.9 \times 10^{-25}\ \text{J}.$$

Per confronto, il contributo medio traslazionale all'energia interna ($= \frac{3}{2} kT$) di una molecola a temperatura ambiente è pari a 6.2×10^{-21} J, cioè 33 000 volte maggiore. Nelle condizioni di questo problema, l'agitazione termica vincerebbe la tendenza delle molecole ad allinearsi con il campo. Cioè, avendo un insieme di molecole a temperatura ambiente con momenti di dipolo orientati casualmente, l'applicazione di un campo elettrico di questa intensità non produrrebbe alcun effetto apprezzabile di allineamento dei momenti di dipolo, data l'elevata energia interna che essi possiedono. Se volessimo allineare i dipoli dovremmo applicare campi più intensi e/o lavorare a temperaure criogeniche.

DOMANDE

1. Elencare il maggior numero possibile di campi scalari e vettoriali.
2. (*a*) Relativamente all'attrazione gravitazionale tra la Terra e una pietra, è corretto dire che la Terra si trova nel campo gravitazionale della pietra? (*b*) Quanto vale il campo gravitazionale generato dalla pietra rispetto a quello generato dalla Terra?
3. Una sfera carica positivamente è appesa tramite una lunga corda di seta. Si vuole misurare E in un punto appartenente al piano orizzontale passante per la sfera. Per fare ciò si decide di procedere ponendo una carica positiva di prova q_0 nel punto in esame e misurando F/q_0. F/q_0 sarà maggiore, minore o uguale a E nel punto in osservazione?
4. Esplorando i campi elettrici con una carica di prova abbiamo spesso assunto, per convenienza, che la carica di prova fosse positiva. Ci sono sostanziali differenze usando una carica di prova negativa per determinare il campo? Si illustri un semplice esempio.
5. Le linee di forza del campo elettrico non si intersecano mai. Perché?
6. Perché le linee di forza vicine al bordo della figura 6 sembrano procedere radialmente rispetto al centro della figura, se immaginiamo di estenderle all'infinito?
7. Una carica puntiforme si sta muovendo in un campo elettrico ortogonalmente alle linee di forza. Su di essa agisce una forza?
8. Perché nella figura 9 i semi di erba si allineano con le linee di forza del campo elettrico? I semi di erba normalmente non portano carica elettrica (vedi «Demonstration of the Electric Fields of Current-Carrying Conductors», di O.Jefimenko, *American Journal of Physics*, gennaio 1962, pag.19).
9. Qual è l'origine dello «*static cling*» (aderenza statica), un fenomeno che a volte si manifesta sui vestiti quando vengono rimossi da una essiccatrice?
10. Due cariche puntiformi di valore e segno ignoti sono separate da una distanza d. Il campo elettrico sia nullo in un punto tra di esse, sulla linea congiungente le cariche. Che cosa si può concludere relativamente alle cariche?
11. Due cariche puntiformi di valore e segno ignoti sono separate da una distanza d. (*a*) Ammesso che sia possibile avere $E = 0$ in qualche punto situato sulla linea congiungente ma *non* sul tratto compreso tra le cariche, quali sono le condizioni ri-

ISBN 88-408-0777-2

chieste e dove è posizionato il punto? (*b*) È possibile disporre due cariche puntiformi in modo che ci siano *due* punti (non all'infinito) in cui $E = 0$? Se sì, sotto quali condizioni?

12. Due cariche puntiformi di valore e segno ignoti sono fissate ad una distanza d. È possibile avere $E = 0$ su punti esterni all'asse (esclusi gli infiniti)? Spiegare.
13. Nell'esempio 3, una carica posta nel punto P della figura 3 è in equilibrio poiché nessuna forza agisce su di essa. L'equilibrio è stabile (*a*) per spostamenti lungo la congiungente le due cariche e (*b*) per spostamenti ortogonali alla linea congiungente?
14. Nella figura 8 la forza sulla carica più in basso è rivolta verso l'alto ed è finita. La distribuzione delle linee di forza, però, indica che E è infinitamente grande nella posizione di tale carica (puntiforme). Una carica immersa in un campo elettrico di modulo infinito dovrebbe essere soggetta ad una forza di intensità infinita. Qual è la soluzione di questo dilemma?
15. Una carica puntiforme q di massa m viene liberata dallo stato di quiete in un campo elettrico non uniforme. (*a*) Essa dovrà necessariamente seguire la linea di forza che passa per il punto in cui è liberata? (*b*) In quali circostanze, ammesso che ciò sia possibile, una particella carica segue le linee di campo?
16. Tre piccole sfere x, y e z portano cariche di ugual valore con i segni indicati nella figura 19. Esse vengono poste ai vertici di un triangolo isoscele avente la distanza tra x e y uguale alla distanza tra x e z. Le sfere y e z sono tenute ferme e la sfera x è libera di muoversi su una superficie senza attrito. Quale cammino seguirà la sfera x dopo essere stata rilasciata?

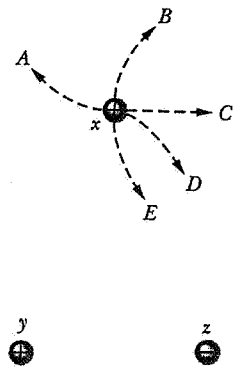


Figura 19 Domanda 16.

17. Una carica positiva e una carica negativa di ugual valore giacciono su una linea retta. Quali sono la direzione e il verso di E per i punti appartenenti a tale retta (*a*) tra le cariche, (*b*) oltre le cariche dalla parte della carica positiva, (*c*) oltre le cariche dalla parte della carica negativa e (*d*) fuori dalla linea, ma sul piano mediano tra le cariche?
18. Nel piano mediano di un dipolo elettrico il campo elettrico è parallelo o antiparallelo rispetto al momento di dipolo p?
19. In quale modo l'equazione 10 sbaglia nel determinare le linee di forza della figura 8, se viene omessa la condizione $x \gg d$?
20. (*a*) Due dipoli elettrici identici vengono posti su una linea retta come mostrato nella figura 20*a*. Quali sono direzione e verso della forza elettrica agente su ciascun dipolo per effetto del campo generato dall'altro? (*b*) Si supponga che i dipoli vengano posizionati come in figura 20*b*. Quali saranno ora direzione e verso delle forze?

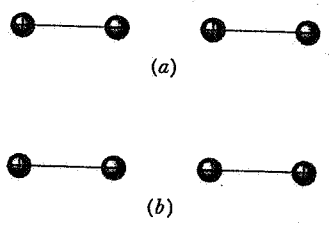


Figura 20 Domanda 20.

21. Confrontare il modo in cui E varia con r per (*a*) una carica puntiforme, (*b*) un dipolo, (*c*) un quadrupolo.
22. Quale difficoltà matematica si incontrerebbe nel calcolare il campo elettrico generato da un anello carico (o da un disco) nei punti *esterni* all'asse?
23. L'equazione 28 mostra che E ha lo stesso valore per tutti i punti posti di fronte ad un foglio infinito uniformemente carico. È questo risultato ragionevole? Si potrebbe pensare che il campo debba essere più intenso nei punti più vicini al foglio poiché le cariche sono più prossime.
24. Si descriva con parole proprie lo scopo dell'esperimento della goccia d'olio di Millikan.
25. Come influisce il segno della carica sull'esperimento della goccia d'olio di Millikan?
26. Perché Millikan non cercò di bilanciare direttamente gli elettroni nel suo apparato anziché gocce d'olio?
27. Un dipolo elettrico immerso in un campo uniforme viene ruotato fino a scambiare gli estremi. In che modo il lavoro compiuto dipende dalla orientazione iniziale del dipolo rispetto al campo?
28. Per quale orientazione di un dipolo elettrico immerso in un campo elettrico uniforme l'energia potenziale (*a*) è massima, (*b*) è minima?
29. Un dipolo elettrico viene posto in un campo elettrico non uniforme. C'è una forza netta non nulla agente su di esso?
30. Un dipolo elettrico viene tenuto in quiete in un campo elettrico esterno uniforme, come nella figura 17*a*, poi viene rilasciato. Si discuta il suo moto.
31. Un dipolo elettrico ha il suo momento di dipolo **p** allineato con un campo elettrico esterno E uniforme. (*a*) L'equilibrio è stabile o instabile? (*b*) Si discuta la natura dell'equilibrio se **p** ed E hanno verso opposto.

PROBLEMI

Paragrafo 28-2 Il campo elettrico **E**

1. Un elettrone viene accelerato verso destra a 1.84×10^9 m/s^2 da un campo elettrico. Si determini modulo, direzione e verso del campo elettrico.
2. L'aria umida si disgrega (le sue molecole diventano ionizzate) in un campo elettrico di 3.0×10^6 N/C. Qual è il valore della forza elettrica su (*a*) un elettrone e (*b*) uno ione (con un singolo elettrone mancante) in questo campo?
3. Una particella alfa, cioè il nucleo di un atomo di elio, ha una massa di 6.64×10^{-27} kg e una carica di $+2e$. Quali sono modulo, direzione e verso del campo elettrico che bilancia il suo peso?
4. In un campo elettrico uniforme vicino alla superficie della Terra, una particella avente una carica di -2.0×10^{-9} C è soggetta ad una forza elettrica di 3.0×10^{-6} N verso il basso. (*a*) Calcolare l'intensità del campo elettrico. (*b*) Quali sono modulo, direzione e verso della forza elettrica agente su un protone immesso in tale campo? (*c*) Qual è la forza gravitazionale sul protone? (*d*) Qual è il rapporto tra la forza elettrica e quella gravitazionale, in questo caso?

Paragrafo 28-3 Il campo elettrico di cariche puntiformi

5. Qual è il valore di una carica puntiforme scelta in modo che il suo campo elettrico ad una distanza di 75.0 cm valga 2.30 N/C?
6. Si calcoli il momento di dipolo per un elettrone e un protone posti ad una distanza di 4.30 nm.
7. Si calcoli l'intensità del campo elettrico generato da un dipolo avente momento di dipolo pari a 3.56×10^{-29} C · m, in un punto del piano mediano ortogonale all'asse ad una distanza di 25.4 nm dal dipolo stesso.
8. Si determini il campo elettrico nel punto centrale del quadrato di figura 21. Si assuma che $q = 11.8$ nC e $a = 5.20$ cm.

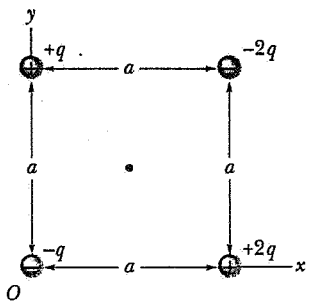


Figura 21 Problema 8.

9. Sul quadrante di un orologio viene fissata una serie di cariche puntiformi $-q$, $-2q$, $-3q$,..., $-12q$ in corrispondenza delle tacche orarie corrispondenti. Le lancette dell'orologio non perturbino il campo. A quale ora la lancetta delle ore punterà nella stessa direzione del campo osservato al centro del quadrante? (*suggerimento*: si considerino a coppie le cariche diametralmente opposte).
10. Nella figura 4 si consideri che entrambe le cariche siano positive. Si mostri che E nel punto P della figura, nell'ipotesi $x \gg d$, è dato da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{x^2}.$$

11. Nella figura 4 si consideri un punto ad una distanza z dal centro del dipolo *lungo il suo asse*. (*a*) Si mostri che per grandi z, il campo elettrico è dato da

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{p}{z^3}.$$

(si confronti con il campo elettrico in un punto del piano mediano ortogonale all'asse). (*b*) quali sono direzione e verso di **E**?
12. Si dimostri che le componenti del campo **E** di un dipolo sono date, in punti lontani, da

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3pxz}{(x^2+z^2)^{5/2}}, \qquad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p(2z^2-x^2)}{(x^2+z^2)^{5/2}},$$

dove x e z sono le coordinate del punto P nella figura 22. Si mostri, inoltre, che questo risultato generale include i risultati particolari dell'equazione 10 e del problema 11.

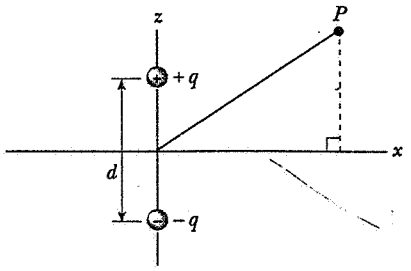


Figura 22 Problema 12.

13. Un tipo di quadrupolo elettrico è formato da quattro cariche poste ai vertici di un quadrato di lato $2a$. Un punto P si trova ad una distanza x dal centro del quadrupolo su una linea parallela a due lati opposti del quadrato, come illustrato in figura 23. Per $x \gg a$, mostrare che il campo elettrico nel punto P è dato approssimativamente da

$$E = \frac{3(2qa^2)}{2\pi\epsilon_0 x^4}.$$

(*Suggerimento*: considerare il quadrupolo come due dipoli).

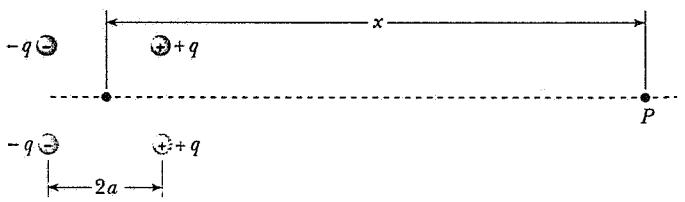


Figura 23 Problema 13.

14. La figura 24 mostra un tipo di quadrupolo elettrico. Esso consta di due dipoli il cui effetto sui punti esterni non si cancella del tutto. Si mostri che il valore di E sull'asse del qua-

ISBN 88-408-0777-2

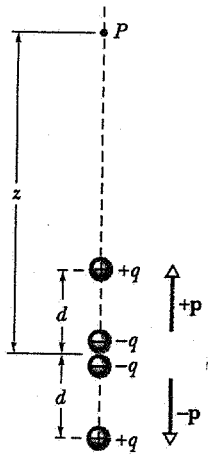


Figura 24 Problema 14.

drupolo nei punti che si trovano ad una distanza z da suo centro (si assuma $z \gg d$) è dato da

$$E = \frac{3Q}{4\pi\epsilon_0 z^4},$$

dove Q ($= 2qd^2$) è chiamato *momento di quadrupolo* della distribuzione di carica.

15. Si consideri l'anello di carica del paragrafo 28-5. Si supponga che la carica q non sia distribuita uniformemente sull'anello, ma che la carica q_1 sia distribuita uniformemente su metà circonferenza e la carica q_2 sia distribuita uniformemente sull'altra metà. Sia $q_1 + q_2 = q$. (*a*) Si trovi la componente del campo elettrico *parallela* all'asse in ogni punto dell'asse e si confronti il risultato con quello relativo alla distribuzione uniforme. (*b*) Si trovi la componente del campo elettrico *ortogonale* all'asse in ogni punto dell'asse e si confronti il risultato con quello relativo alla distribuzione uniforme.

Paragrafo 28-4 Linee di forza

16. La figura 25 illustra le linee di forza di un campo elettrico; la distribuzione delle linee nella direzione ortogonale alla pagina sia uniforme. (*a*) Se l'intensità del campo nel punto A è pari a 40 N/C, quale forza agisce su un elettrone posto in quel punto? (*b*) Qual è l'intensità del campo nel punto B?

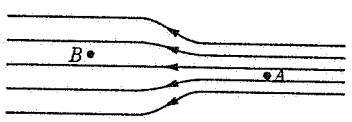


Figura 25 Problema 16.

17. Si traccino qualitativamente le linee di forza associate ad un disco sottile, uniformemente carico, di raggio R. (*Suggerimento*: si considerino come posizioni limite i punti molto vicini al disco, dove le linee di forza devono essere perpendicolari alla superficie e i punti molto lontani, dove il campo elettrico è analogo a quello generato da una carica puntiforme).
18. Si traccino qualitativamente le linee di forza associate a due cariche puntiformi separate $+q$ e $-2q$.
19. Tre cariche sono disposte in modo da formare un triangolo equilatero, come illustrato in figura 26. Si considerino le linee di forza associate a $+Q$ e $-Q$ e, in base ad esse, si individui la direzione e il verso della forza che agisce su $+q$ per effetto dell'azione elettrica delle altre due cariche. (*Suggerimento*: si veda la figura 8).

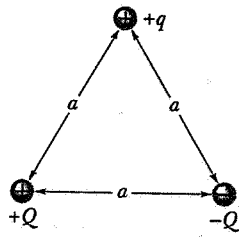


Figura 26 Problema 19.

20. (*a*) Nella figura 27 si individui il punto (o i punti) in cui il campo elettrico è nullo. (*b*) Si traccino qualitativamente le linee di forza.

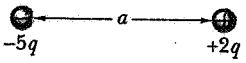


Figura 27 Problema 20.

21. Due cariche puntiformi vengono fissate ad una distanza d l'una dall'altra (fig. 28). Si tracci $E(x)$, assumendo $E = 0$ sulla carica di sinistra. Si considerino sia i valori positivi che quelli negativi di x. Si tracci E a valori positivi se E punta verso destra, a valori negativi se E punta verso sinistra. Si assuma $q_1 = +1.0 \times 10^{-6}$ C, $q_2 = +3.0 \times 10^{-6}$ C e $d = 10$ cm.

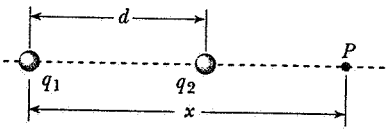


Figura 28 Problema 21.

22. Le cariche $+q$ e $-2q$ vengono fissate ad una distanza d l'una dall'altra come in figura 29. (*a*) Trovare E nei punti A, B e C. (*b*) Tracciare qualitativamente le linee di forza del campo elettrico.

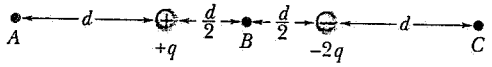


Figura 29 Problema 22.

23. Si assuma che l'esponente nella legge di Coulomb non sia 2 ma n. Si dimostri che per $n \neq 2$ è impossibile costruire linee che abbiano le stesse proprietà delle linee di forza discusse nel paragrafo 28-4. Per semplicità ci si riferisca alla carica puntiforme.

Paragrafo 28-5 Il campo elettrico generato da distribuzioni di carica continue

24. Si mostri che l'equazione 27, per il campo elettrico di un disco carico nei punti del suo asse, si riduce al campo di una carica puntiforme per $z \gg R$.

25. A quale distanza, lungo l'asse di un disco carico di raggio R, l'intensità del campo elettrico è uguale ad un mezzo del valore del campo che si ha al centro della superficie del disco?

26. A quale distanza, lungo l'asse di un disco carico di raggio R, l'intensità del campo elettrico assiale raggiunge un massimo?

27. (*a*) Quanta carica totale q deve portare un disco di raggio pari a 2.50 cm affinchè il campo elettrico sulla superficie del disco nel suo centro uguagli il valore al quale l'aria si ionizza producendo scariche? Si veda la tabella 1. (*b*) Si supponga che ogni atomo sulla superficie abbia una sezione efficace equivalente di 0.015 nm^2. Quanti atomi ci sono sulla superficie del disco? (*c*) La carica di cui al punto (*a*) risulta dalla somma di ciascun elettrone in eccesso che alcuni tra gli atomi superficiali possiedono. Quale frazione di atomi superficiali deve essere, in tal modo, carica?

28. Si riscriva l'equazione 27 in una forma che sia valida sia per le z positive che per le z negative (*suggerimento*: nello sviluppare l'integrale dell'eq. 26 si espliciti la quantità $z/\sqrt{z^2}$. Quanto vale questa quantità per $z < 0$?)

29. Alcuni valori misurati del campo elettrico E ad una distanza z lungo l'asse di un disco di plastica carico, sono elencati nella seguente tabella:

z (cm)	E (10^7 N/C)
0	2.043
1	1.732
2	1.442
3	1.187
4	0.972
5	0.797

Si calcoli (*a*) il raggio del disco e (*b*) la carica su di esso.

30. Una sottile bacchetta di vetro ha forma semicircolare di raggio r. Una carica $+q$ è uniformemente distribuita sulla metà superiore e una carica $-q$ è uniformmente distribuita sulla metà inferiore, come mostrato in figura 30. Si determini il campo elettrico E nel punto P, cioè nel centro della semicirconferenza.

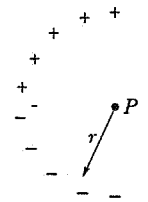


Figura 30 Problema 30.

31. Una sottile bacchetta isolante di lunghezza finita L possiede una carica totale q, distribuita uniformemente su di essa. Si mostri che E nel punto P appartenente all'asse y della figura 31 è dato da

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{(L^2 + 4y^2)^{1/2}}.$$

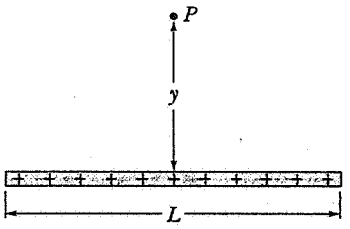


Figura 31 Problema 31.

32. Una bacchetta isolante di lunghezza L possiede una carica totale $-q$ distribuita uniformemente sulla sua lunghezza, come mostrato nella figura 32. (*a*) Qual è la densità lineare di carica sulla bacchetta? (*b*) Si determini il campo elettrico nel punto P ad una distanza a dal bordo della bacchetta. (*c*) Se P fosse molto lontano dalla bacchetta, ad una distanza molto maggiore rispetto alla lunghezza L, la bacchetta apparirebbe come una carica puntiforme. Si mostri che la risposta al punto (*b*) si riduce all'espressione del campo elettrico di una carica puntiforme per $a \gg L$.

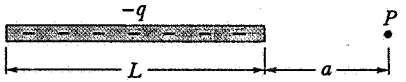


Figura 32 Problema 32.

33. Si traccino qualitativamente le linee di forza associate a tre lunghe distribuzioni di carica rettilinee e parallele, in un piano perpendicolare. Si assuma che l'intersezione delle linee di carica con tale piano formi un triangolo equilatero (fig. 33) e che ciascuna linea di carica abbia la stessa densità lineare di carica λ.

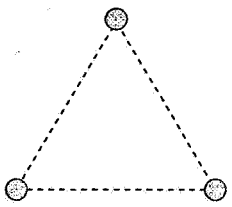


Figura 33 Problema 33.

34. Una bacchetta isolante «semiinfinita» (fig. 34) porta una carica per unità di lunghezza costante pari a λ. Si dimostri che il campo elettrico nel punto P forma un angolo di 45° rispetto alla bacchetta e che questo risultato è indipendente dalla distanza R.

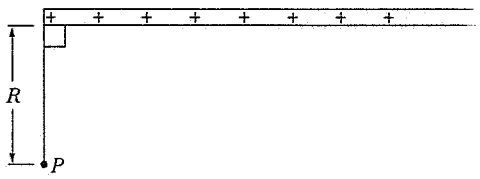


Figura 34 Problema 34.

ISBN 88-408-0777-2

35. Una tazza semisferica isolante avente raggio interno R porta una carica q distribuita uniformemente sulla sua superficie interna. Si determini il campo elettrico nel centro di curvatura (*suggerimento*: si consideri la tazza come un insieme di anelli).

Paragrafo 28-6 Carica puntiforme in un campo elettrico

36. Un'arma da difesa considerata per la Iniziativa Strategica di Difesa (Guerre Stellari) utilizza fasci di particelle. Per esempio un fascio di protoni che colpisce un missile nemico potrebbe renderlo inoffensivo. Questi fasci possono essere generati all'interno di «cannoni» utilizzando campi elettrici per accelerare le particelle cariche. (*a*) Quale accelerazione avrebbe un protone se il campo elettrico fosse di 2.16×10^4 N/C? (*b*) Quale velocità raggiungerebbe il protone se il campo agisse su una distanza di 1.22 cm?
37. Un elettrone in movimento con una velocità di 4.86×10^6 m/s viene proiettato lungo un campo elettrico avente intensità di 1030 N/C orientato in modo da rallentarne il moto. (*a*) Quale distanza percorre l'elettrone nel campo prima di fermarsi (temporaneamente) e (*b*) quanto tempo occorre perché l'elettrone si fermi? (*c*) Se il campo elettrico si interrompesse bruscamente dopo 7.88 mm, quale frazione della sua energia cinetica iniziale perderebbe l'elettrone, nell'attraversarlo?
38. Sia assegnato un campo elettrico uniforme in una regione compresa tra due piatti caricati di segno opposto. Un elettrone in quiete viene rilasciato sulla superficie del piatto carico negativamente e colpisce la superficie del piatto opposto dopo avere percorso 1.95 cm, 14.7 ns più tardi. (*a*) Qual è la velocità dell'elettrone quando esso colpisce il secondo piatto? (*b*) Qual è l'intensità del campo elettrico?
39. Due cariche uguali e opposte di valore 1.88×10^{-7} C sono tenute separate ad una distanza di 15.2 cm. (*a*) Quali sono modulo, direzione e verso di **E** in un punto a metà strada tra le cariche? (*b*) Quale forza (modulo, direzione e verso) agirebbe su un elettrone posto in tal punto?
40. Due cariche puntiformi di valore $q_1 = 2.16$ μC e $q_2 = 85.3$ nC sono separate da una distanza di 11.7 cm. (*a*) Si determini il valore del campo elettrico che ciascuna produce nel punto in cui si trova l'altra. (*b*) Si determini il valore della forza su ciascuna carica.
41. Nell'esperimento di Millikan una goccia di raggio pari a 1.64 μm e densità pari a 0.851 g/cm^3 è mantenuta in equilibrio con un campo elettrico di 1.92×10^5 N/C. Si determini la carica sulla goccia in unità e.
42. Due grandi piatti di rame paralleli sono posti ad una distanza di 5.00 cm e instaurano un campo elettrico uniforme tra di loro come mostrato nella figura 35. Un elettrone viene rilasciato dal piatto carico negativamente nello stesso momento in cui un protone viene rilasciato dal piatto carico positivamente. Si trascuri l'azione tra le particelle e si determini la loro distanza dal piatto positivo quando si incrociano. È sorprendente che non sia necessario conoscere il campo elettrico per risolvere questo problema?

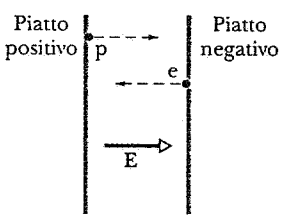


Figura 35 Problema 42.

43. In uno dei suoi primi esperimenti (nel 1911), Millikan osservò le seguenti cariche sulle singole gocce:

6.563×10^{-19}C	13.13×10^{-19}C	19.71×10^{-19}C
8.204×10^{-19}C	16.48×10^{-19}C	22.89×10^{-19}C
11.50×10^{-19}C	18.08×10^{-19}C	26.13×10^{-19}C

Quale valore per il quanto di carica e può essere dedotto da questi dati?
44. Un campo uniforme verticale **E** viene generato nella regione compresa tra due larghi piatti paralleli. Una piccola sfera conduttrice di massa m viene sospesa nel campo con un filo di lunghezza L. Si determini il periodo di questo pendolo quando si dà alla sfera una carica $+ q$ se il piatto inferiore (*a*) è caricato positivamente e (*b*) è caricato negativamente.
45. Nell'esempio 6 si determini la deflessione totale di una goccia di inchiostro che colpisce il foglio ad una distanza di 6.8 mm dagli estremi dei piatti di deflessione; si veda figura 14.
46. Un elettrone sia vincolato a muoversi lungo l'asse dell'anello carico discusso nel paragrafo 28-5. Si mostri che l'elettrone può avere piccole oscillazioni nel centro dell'anello, con frequenza data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}.$$

47. Un elettrone viene proiettato come in figura 36 alla velocità di $v_0 = 5.83 \times 10^6$ m/s e con un angolo $\theta = 39.0°$; E = 1870 N/C (diretto verticalmente verso l'alto), $d = 1.97$ cm, $L = 6.20$ cm. L'elettrone colpirà entrambi i piatti? Se colpisce un piatto, quale piatto colpisce e a quale distanza dal margine di sinistra?

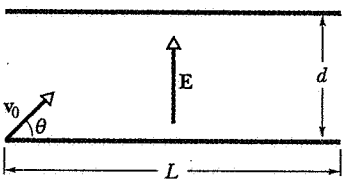


Figura 36 Problema 47.

Paragrafo 28-7 Dipolo in un campo elettrico

48. Un dipolo elettrico costituito da cariche di valore 1.48 nC separate da 6.23 μm, viene immesso in un campo elettrico di intensità pari a 1100 N/C. (*a*) Qual è il valore del momento di dipolo? (*b*) Qual è la differenza tra le energie potenziali corrispondenti a orientazioni del dipolo parallela e antiparallela al campo?
49. Un dipolo elettrico è costituito dalle cariche $+ 2e$ e $-2e$ separate da una distanza di 0.78 nm. Esso viene immesso in un campo elettrico di intensità pari a 3.4×10^6 N/C. Si determini il valore del momento torcente che agisce sul dipolo quando il momento di dipolo è (*a*) parallelo, (*b*) ortogonale e (*c*) opposto al campo elettrico.
50. Una carica $q = 3.16$ μC si trova a 28.5 cm da un piccolo dipolo lungo il suo asse. La forza esercitata sulla carica è pari a 5.22×10^{-16} N. Si tracci (*a*) la direzione e il verso della forza

sulla carica e (*b*) la direzione e il verso della forza sul dipolo. Si determini (*c*) il valore della forza sul dipolo e (*d*) il momento di dipolo.

51. Si determini il lavoro necessario per ruotare un dipolo elettrico fino a scambiarne gli estremi in un campo elettrico uniforme **E**, in funzione del momento di dipolo p e dell'angolo iniziale θ_0 tra **p** ed **E**.

52. Si determini la frequenza di oscillazione di un dipolo elettrico avente momento di dipolo p e momento d'inerzia I, per piccole ampiezze di oscillazione, attorno alla posizione di equilibrio in un campo elettrico uniforme E.

53. Si considerino due cariche puntiformi positive $+q$ uguali ad una distanza a l'una dall'altra. (*a*) Si determini una espressione di dE/dz nel punto mediano, essendo z la distanza dal punto medio lungo la linea congiungente le cariche. (*b*) Si dimostri che la forza su un piccolo dipolo posto in tale punto con il suo asse allineato con la congiungente le cariche, è data da $F = p(dE/dz)$, ove p è il momento di dipolo.

Progetti al computer

54. (*a*) Si scriva un programma al calcolatore o si programmi un foglio elettronico per calcolare le componenti del campo elettrico dovute a un insieme di cariche puntiformi. Si accetti in ingresso il numero delle particelle, la loro carica e le coordinate della loro posizione. Poi si chiedano le coordinate del punto in esame. Si scriva il programma in modo che accetti le coordinate di un nuovo punto di analisi, dopo avere mostrato le componenti del campo nel punto precedente. Per semplicità, si assuma che tutte le cariche siano nel piano xy e che il punto in esame sia in quel piano. Se la carica q_i ha coordinate x_i, y_i, allora il suo contributo di campo nel punto x, y è $E_{ix} = (1/4\pi\epsilon_0)q_i(x - x_i)/r_i^3$, $E_{iy} = (1/4\pi\epsilon_0)$ $q_i(y - y_i)/r_i^3$, $E_{iz} = 0$, essendo $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$. Il programma calcoli l'intensità del campo e l'angolo formato con l'asse x.

(*b*) Si supponga che due cariche siano collocate sull'asse x: $q_1 = 6.0 \times 10^{-9}$ C nel punto $x_1 = -0.030$ m e $q_2 = 3.0 \times 10^{-9}$ C nel punto $x_2 = 0.030$ m. Si utilizzi il programma per calcolare il campo elettrico nei seguenti punti lungo l'asse y: $y = 0$, 0.050, 0.100, 0.150 e 0.200 m. Si tracci un diagramma che mostri le posizioni delle cariche e, per ogni punto in esame, si disegni una freccia per rappresentare il campo elettrico. La sua lunghezza sia proporzionale all'intensità del campo in quel punto e formi un angolo appropriato con l'asse x. Facoltativamente si estenda il programma in modo che possa tracciare i vettori del campo sul video.

(*c*) Si utilizzi ora il programma per trovare il campo elettrico nei seguenti punti dell'asse y: $y = -0.050$, $y = -0.100$, $y = -0.150$, $y = -0.200$ m. Si traccino i vettori del campo su un diagramma. Qual è la relazione tra la componente x del campo nel punto $y = +0.50$ m e la componente x del campo nel punto $y = -0.50$ m? Qual è la relazione tra le componenti y in tali punti? La stessa relazione vale anche per il campo nelle altre coppie di punti?

55. Due cariche si trovano sull'asse x: $q_1 = -3.0 \times 10^{-9}$ C nel punto $x_1 = -0.075$ m e $q_2 = 3.0 \times 10^{-9}$ C nel punto $x_2 = 0.075$ m. Si utilizzi il programma descritto nel precedente esercizio per calcolare il campo elettrico nei punti sulla retta $y = 0.030$ m: $x = -0.150$, -0.100, -0.050, 0, 0.050, 0.100 e 0.150 m. Si tracci un diagramma che mostri la posizione delle cariche e in ogni punto si disegni una freccia per rappresentare modulo, direzione e verso del campo elettrico. Si consiglia di scrivere un programma che tracci automaticamente i vettori sul video.

Considerando i campi dovuti alle singole cariche si spieghi qualitativamente perché la componenente y del campo è negativa nei punti a x negativa, nulla nei punti a $x = 0$ e positiva nei punti a x positiva. Si spieghi anche perché la componenente x del campo cambia segno due volte nella regione considerata. Senza fare nuovi calcoli si traccino i vettori del campo nel maggior numero possibile di punti lungo la retta $y = -0.030$ m.

56. (*a*) Due cariche si trovano sull'asse x: $q_1 = 3.0 \times 10^{-9}$ C nel punto $x_1 = -0.075$ m e $q_2 = 6.0 \times 10^{-9}$ C nel punto $x_2 = 0.075$ m. Si utilizzi il programma descritto nel precedente esercizio e, con un procedimento per approssimazioni successive basato sulla analisi dell'errore si individui un punto in cui il campo elettrico totale si annulla. (*b*) Si ripeta la ricerca fatta al punto (*a*) nel caso in cui $q_1 = -3.0 \times 10^{-9}$ C mantenendo invariate le posizioni e il valore di q_2.

57. Si può fare uso di un computer per tracciare le linee di forza del campo elettrico. Si considerino le cariche nel piano xy e si vogliano tracciare le linee in tale piano. Si scelga un punto con coordinate x e y. Si calcolino le componenti E_x, E_y e la intensità E in quel punto. Un altro punto appartenente alla medesima linea di campo avrà coordinate $x + \Delta x$ e $y + \Delta y$, essendo $\Delta x = (E_x/E)\Delta s$, $\Delta y = (E_y/E)\Delta s$ ed essendo Δs la distanza dal primo punto. Queste espressioni sono approssimazioni valide per piccoli Δs. La retta che unisce i due punti sarà tangente al campo in un terzo punto compreso tra i primi due e sarà allineata con la linea di campo passante per i due punti, nell'ipotesi in cui la curvatura della linea di campo stessa sia trascurabile. Le componenti del campo e la sua intensità possono essere calcolati nel nuovo punto. Poi il procedimento può essere iterato in tutta la regione d'interesse.

(*a*) Si scriva un programma o si programmi un foglio elettronico per calcolare e disegnare le coordinate dei punti di una linea di campo.

Si accettino in ingresso le cariche, le loro coordinate, le coordinate del punto iniziale della linea e la distanza Δs fra punti adiacenti della linea stessa. Il calcolatore costruisca un elenco oppure tracci un insieme di punti fermandosi quando i punti si allontanano molto dalle cariche o si avvicinano troppo a una carica. Deve essere possibile calcolare più punti di quelli messi nell'elenco cosicchè si possa adottare Δs piccolo senza generare un elenco eccessivamente lungo.

(*b*) Si consideri un dipolo elettrico. La carica $q_1 = 7.1 \times 10^{-9}$ C sia posizionata nell'origine e la carica $q_2 = -7.1 \times 10^{-9}$ C sia posizionata sull'asse y in posizione $y = -0.40$ m. Si traccino quattro linee di campo. La prima inizi nel punto $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = 5 \times 10^{-3}$ m, la seconda nel punto $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = -5 \times 10^{-3}$ m, la terza nel punto $x = -5 \times 10^{-3}$ m, $y = 5 \times 10^{-3}$ m, la quarta nel punto $x = -5 \times 10^{-3}$ m e $y = -5 \times 10^{-3}$ m. Si scelga $\Delta s = 0.004$ m e si continui a tracciare la linea fino a che i punti non superino una distanza di 2 m dall'origine e non si avvicinino più di Δs a ciascuna carica.

(*c*) Si ripeta quanto descritto al punto precedente con la seguente variazione: $q_1 = q_2 = 7.1 \times 10^{-9}$ C. Si traccino altre quattro linee di campo, la prima inizi nel punto $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.395$ m, la seconda nel punto $x = 5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.405$ m, la terza nel punto $x = -5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.395$ m e la quarta nel punto $x = -5 \times 10^{-3}$ m, $y = -0.405$ m.

58. Il programma descritto in Appendice I può essere usato per

ISBN 88-408-0777-2

studiare il moto di una particella in un campo elettrico. Si considerino due particelle che esercitano una forza elettrica l'una sull'altra. Ognuna accelera per effetto del campo elettrico generato dall'altra e mentre le posizioni reciproche variano per effetto del moto, variano anche le forze esercitate tra le cariche stesse.

Due particelle identiche, ognuna con carica $q = 1.9 \times 10^{-9}$ C e massa $m = 6.1 \times 10^{-15}$ kg, partono con la stessa velocità di 3.0×10^{4} m/s nella direzione positiva dell'asse x. All'inizio una particella si trova nel punto $x = 0$, $y = 6.7 \times 10^{-3}$ m e l'altra nel punto $x = 0$, $y = -6.7 \times 10^{-3}$ m. Entrambe si trovano nel piano xy e si muovono sullo stesso piano. Si considerino soltanto le forze elettriche che le cariche esercitano l'una sull'altra.

(*a*) Si utilizzi un programma per tracciare le traiettorie dal tempo $t = 0$ s al tempo $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. Essendo la situazione simmetrica è necessario calcolare soltanto le posizioni e la velocità di una delle cariche. Si faccia uso della simmetria per trovare la posizione e la velocità della seconda carica all'inizio di ogni intervallo di integrazione. Si ponga $\Delta t = 1 \times 10^{-8}$ s come intervallo di integrazione.

(*b*) Si supponga ora che una delle particelle abbia carica $q = -1.9 \times 10^{-9}$ C, mantenendo uguali tutte le altre condizioni. Si tracci la traiettoria da $t = 0$ s a $t = 5.0 \times 10^{-7}$ s.

Capitolo 29

LA LEGGE DI GAUSS

La legge di Coulomb può essere sempre utilizzata nel calcolo del campo elettrico **E** *qualunque sia la distribuzione di carica a riposo in esame, sia essa continua o discreta. La sommatoria o l'integrale possono essere complicati (e può essere necessario un calcolatore per farne una quantificazione numerica), ma il campo elettrico risultante potrà essere sempre calcolato.*

Alcuni casi discussi nel precedente capitolo facevano uso di argomenti semplificativi basati sulla simmetria del problema. Per esempio nel calcolare il campo elettrico nei punti giacenti sull'asse di un anello carico, si è fatto uso di questioni di simmetria per dedurre che le componenti di **E** *perpendicolari all'asse devono essere nulle. In questo capitolo discuteremo una espressione alternativa alla legge di Coulomb, chiamata* legge di Gauss, *che fornisce un approccio più utile ed istruttivo al calcolo del campo elettrico nelle situazioni caratterizzate da una certa simmetria.*

Le situazioni che possono essere direttamente analizzate attraverso la legge di Gauss sono relativamente poche, ma quei casi in cui essa ha successo vengono risolti con sorprendente facilità. Sebbene la legge di Gauss e la legge di Coulomb forniscano il medesimo risultato nei casi in cui possono essere utilizzate entrambe, la legge di Gauss è considerata una equazione ancor più fondamentale della legge di Coulomb. Si potrebbe dire che mentre la legge di Coulomb è il cavallo di battaglia dell'elettrostatica, la legge di Gauss ne è il cuore.

29-1 IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

Prima di discutere la legge di Gauss, è necessario analizzare il concetto di *flusso*. Il flusso (designato con il simbolo Φ) è una proprietà di ogni campo vettoriale. La parola «flusso» deriva dalla parola latina *fluere* che significa «scorrere» ed è appropriato pensare al flusso di un particolare campo vettoriale come ad una misura dello «scorrimento» o della penetrazione dei vettori del campo attraverso una superficie immaginaria e fissa immersa nel campo. Dovremo effettivamente considerare il flusso del campo elettrico nella legge di Gauss, ma per ora consideriamo un esempio più familiare di campo vettoriale, cioè il campo di velocità di un fluido in movimento. Come è stato spiegato nel capitolo 18, il campo di velocità descrive la velocità del fluido nei punti attraverso cui esso scorre. Il campo di velocità rappresenta lo scorrimento del fluido. Il campo stesso non scorre, ma è una rappresentazione *fissa* dello scorrimento del fluido.

La figura 1 mostra il campo di velocità di un fluido incomprimibile, che, per semplicità, si assume scorrere in modo stazionario ed uniforme. Si assuma di immergere nel fluido un filo piegato in modo da costituire una spira quadrata di area A. Nella figura 1*a* il quadrato viene posizionato in modo che il suo piano sia perpendicolare alla direzione di scorrimento. Nell'analisi sullo scorrimento del fluido svolta precedentemente (cap.18), il moto effettivo delle particelle del fluido è stato rappresentato attraverso il campo di velocità associato al moto stesso. Perciò si può considerare sia l'effettivo scorrimento delle particelle materiali attraverso la spira oppure il flusso del campo di velocità attraverso la stessa spira.

Il concetto di campo di velocità ci fornisce l'astrazione necessaria per comprendere la legge di Gauss, ma, naturalmente, lo scorrimento del fluido attraverso la spira può essere ben descritto in termini del moto delle singole particelle che lo costituiscono.

L'intensità $|\Phi|$ del flusso del campo di velocità attraverso la linea chiusa di area A della figura 1*a* è definita in termini dell'entità di volume di fluido in transito (in unità m^3/s) cioè

$$|\Phi| = vA \qquad (1)$$

in cui v è il modulo della velocità in corrispondenza della spira. Il flusso può, in primo luogo, essere considerato come una misura della quantità di volume del fluido che passa attraverso la spira nell'unità di tempo. Utilizzando il concetto di campo (allo scopo di in-

ISBN 88-408-0777-2

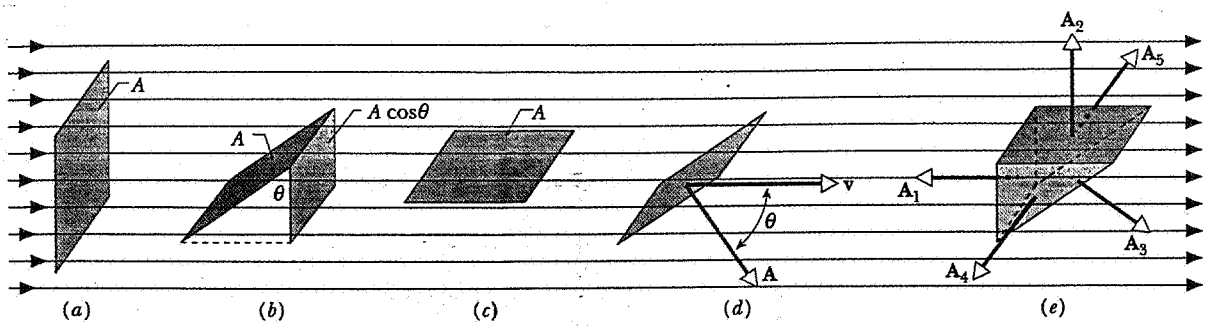


Figura 1 Una spira di area A viene immersa in un fluido in movimento, rappresentato da un campo di velocità. (*a*) La spira è collocata in modo che il suo piano sia ortogonale alla direzione di scorrimento. (*b*) La spira viene ruotata di un angolo θ; la sua proiezione ortogonale al flusso è pari ad $A\cos\theta$. (*c*) Quando $\theta = 90°$ nessuna delle linee di flusso passa attraverso il piano della spira. (*d*) L'area della spira è rappresentata da un vettore A perpendicolare al piano della spira. L'angolo tra A e il vettore del campo di velocità v è θ. (*e*) Una superficie chiusa costituita da cinque superfici piane. Il vettore A di ciascuna superficie è rappresentato nel verso uscente.

trodurre la legge di Gauss), tuttavia, è conveniente considerare il flusso come una misura del *numero di linee di campo passanti attraverso la spira.*

Nella figura 1*b* la spira viene ruotata in modo che il suo piano non sia più ortogonale alla direzione della velocità. Si noti che il numero di linee del campo di velocità che passano attraverso la spira è minore nella figura 1*b* rispetto alla figura 1*a*. La proiezione dell'area della spira è $A\cos\theta$ e, esaminando la figura 1*b*, ci si può convincere che il numero di linee di campo passanti attraverso la spira inclinata di area A è uguale al numero di linee di campo passanti attraverso la spira più piccola, di area $A\cos\theta$, perpendicolare alla direzione di scorrimento. Perciò il modulo del flusso nella situazione della figura 1*b* è

$$|\Phi| = vA\cos\theta \qquad (2)$$

Se la spira viene ruotata in modo che la velocità del fluido sia parallela alla sua superficie, come nel caso della figura 1*c*, il flusso diventa nullo, in corrispondenza a $\theta = 90°$ nell'equazione 2. Si noti che in questo caso nessuna linea di campo passa attraverso la spira.

La legge di Gauss, come vedremo nel seguito, riguarda il flusso netto attraverso una superficie *chiusa*. Si deve perciò distinguere tra flusso di segno positivo e flusso di segno negativo attraverso una assegnata superficie. Il membro a destra dell'equazione 2 può essere espresso come prodotto scalare fra v e un vettora A il cui modulo è l'area della superficie e la direzione è perpendicolare alla superficie (vedi fig. 1*d*). Tuttavia dato che la normale ad una superficie può puntare nel verso della figura 1*d* oppure nel verso opposto, dobbiamo stabilire un criterio per specificare il verso; altrimenti il segno di Φ non sarebbe univocamente definito. Per convenzione si sceglie come verso di A quello della *normale uscente* da una assegnata superficie chiusa. Perciò un flusso che fuoriesce dal volume racchiuso dalla superficie è considerato positivo e un flusso che entra in detto volume è considerato negativo. Con questa assunzione si può scrivere il flusso relativo ad una superficie chiusa costituita da varie singole superfici (fig. 1*e*, per esempio) come

$$\Phi = \sum \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}, \qquad (3)$$

essendo v il vettore velocità sulla superficie. La sommatoria viene svolta su tutte le singole superfici che costituiscono la superficie chiusa. Il flusso è una quantità scalare, poiché viene definito come il prodotto scalare di due vettori.

Esempio 1 Si consideri la superficie chiusa di figura 1*e*. La figura mostra un volume racchiuso da cinque superfici (1,2 e 3 parallele alle superfici delle fig. 1*a*, 1*c* e 1*d* cui si aggiungono le due superfici 4 e 5 che sono parallele alla direzione di scorrimento). Assumendo che il campo di velocità sia uniforme, cioè che abbia modulo, direzione e verso costanti ovunque, si determini il flusso totale attraverso la superficie chiusa.

Soluzione Utilizzando l'equazione 3, il flusso totale può essere scritto come la somma dei valori del flusso attraverso le cinque singole superfici:

$$\Phi = \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_1 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_3 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_4 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_5.$$

Si noti che per la superficie 1 l'angolo tra *la normale uscente* $\mathbf{A}_1$ e la velocità v è di 180°, cosicchè il prodotto scalare $\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_1$ può essere scritto come $-vA_1$. I contributi associati alle superfici 2, 4 e 5 sono nulli poiché in ciascun caso (come mostrato nella fig. 1*e*) il vettore A è perpendicolare a v. Per la superficie A_3 il flusso può essere scritto come $vA_3\cos\theta$, perciò il flusso totale è

$$\Phi = -vA_1 + 0 + vA_3\cos\theta + 0 + 0 = -vA_1 + vA_3\cos\theta$$

ISBN 88-408-0777-2

Data la geometria della figura 1*e*, inoltre, si deduce che $A_3 \cos\theta = A_1$ e si ottiene il risultato finale

$$\Phi = 0.$$

Cioè il flusso totale attraverso la superficie chiusa è nullo.

Il risultato dell'esempio precedente non dovrebbe sorprendere considerando che il campo di velocità è un modo equivalente per rappresentare il flusso effettivo di particelle materiali del fluido. Ogni linea di campo che entra nella superficie chiusa di figura 1*e* attraverso la superficie 1 esce dalla stessa superficie chiusa attraverso la superficie 3. In modo equivalente si può dire che, per la superficie chiusa della figura 1*e*, la quantità netta di fluido che penetra nel volume racchiuso dalla superficie è pari alla quantità netta di fluido che fuoriesce dal volume stesso. Questo vale *per ogni superficie chiusa* se non vi sono nel volume *sorgenti* o *pozzi*, cioè punti nei quali viene generato oppure intrappolato fluido nel tempo. Se ci fosse una sorgente racchiusa nel volume (come un cubo di ghiaccio fondente che introduce nuovo fluido nel volume stesso), allora una maggior quantità di fluido uscirebbe dalla superficie rispetto a quanto vi entrerebbe e il flusso totale sarebbe positivo. Se ci fosse un pozzo entro il volume, allora una maggior quantità di fluido entrerebbe attraverso la superficie rispetto a quanto ne uscirebbe e il flusso netto sarebbe negativo. Il flusso netto, positivo o negativo, attraverso la superficie dipende dalla efficienza della sorgente o del pozzo (cioè dal volume di fluido prodotto o assorbito nell'unità di tempo). Per esempio, se un solido fondente posto all'interno della superficie rilascia 1 cm^3 di fluido al secondo, allora troveremo un flusso netto positivo pari a + 1 cm^3/s.

La figura 1 illustra il caso particolare di un campo uniforme riferito a superfici piane. Si possono facilmente generalizzare questi concetti a campi non uniformi e superfici non piane, di forma e orientazione qualsivoglia. Una qualunque superficie arbitraria può essere scomposta in elementi infinitesimi di area dA che sono approssimativamente aree piane. Direzione e verso del vettore $d\mathbf{A}$ sono quelli della normale uscente dall'elemento infinitesimo. Il campo ha valore $\mathbf{v}$ in corrispondenza all'elemento e il flusso netto può essere determinato sommando i contributi di tutti gli elementi cioè, integrando sulla intera superficie:

$$\Phi = \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \qquad (4)$$

Le conclusioni cui si è giunti in precedenza restano valide anche in questo caso generale: se l'equazione (4) viene applicata ad una superficie chiusa, allora il flusso è (1) *nullo* se la superficie non contiene sorgenti o pozzi, (2) *positivo* e uguale in valore alla loro velocità di generazione se la superficie contiene soltanto sorgenti o (3) *negativo* e uguale in valore alla loro velocità di assorbimento se la superficie contiene soltanto pozzi. Se la superficie racchiude sia sorgenti che pozzi, il flusso netto può essere nullo, positivo o negativo a seconda che prevalgano le sorgenti o i pozzi.

Un secondo esempio è il campo gravitazionale $\mathbf{g}$ (vedere par. 16-7) vicino alla superficie della Terra, che (come il campo di velocità) è un campo vettoriale uniforme. Il flusso netto di $\mathbf{g}$ attraverso ogni superficie chiusa vuota è nullo. Se la superficie racchiude una massa (sorgente di campo gravitazionale) allora ci sarà un flusso uscente maggiore di quello entrante e il flusso netto di $\mathbf{g}$ attraverso la superficie sarà positivo.

Nel prossimo paragrafo applicheremo considerazioni simili al flusso di un altro campo vettoriale, coè il campo elettrico $\mathbf{E}$. Come si intuisce facilmente, parlando di elettrostatica le sorgenti e i pozzi del campo sono le cariche positive e negative e l'efficienza delle sorgenti e dei pozzi è proporzionale al valore delle cariche. La legge di Gauss mette in relazione il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa, calcolato in analogia con l'equazione 4, con la carica netta racchiusa dalla superficie.

29-2 IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO

Si immagini che le linee di campo della figura 1 rappresentino il campo elettrico di alcune cariche a riposo anzichè un campo di velocità. Ancorchè nulla scorra nel caso dell'elettrostatica possiamo ancora utilizzare il concetto di flusso. La definizione del flusso elettrico è simile a quella del flusso di velocità, ove si sostituisca $\mathbf{v}$ con $\mathbf{E}$ dovunque. In analogia con l'equazione 3 definiamo il flusso del campo elettrico Φ_E come

$$\Phi_E = \sum \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \qquad (5)$$

Come nel caso del flusso di velocità, il flusso Φ_E può essere considerato come una misura del numero di linee del campo elettrico che passano attraverso la superficie. Il pedice E di Φ_E ci ricorda che stiamo parlando del flusso *elettrico* e serve a distinguere il flusso elettrico dal flusso magnetico, che considereremo nel capitolo 36. L'equazione 5 si applica, come nel caso dell'equazione 3, solo nel caso in cui $\mathbf{E}$ è costante in modulo, direzione e verso su tutta l'area $\mathbf{A}$ inclusa nella somma.

Come il flusso di velocità, il flusso del campo elettri-

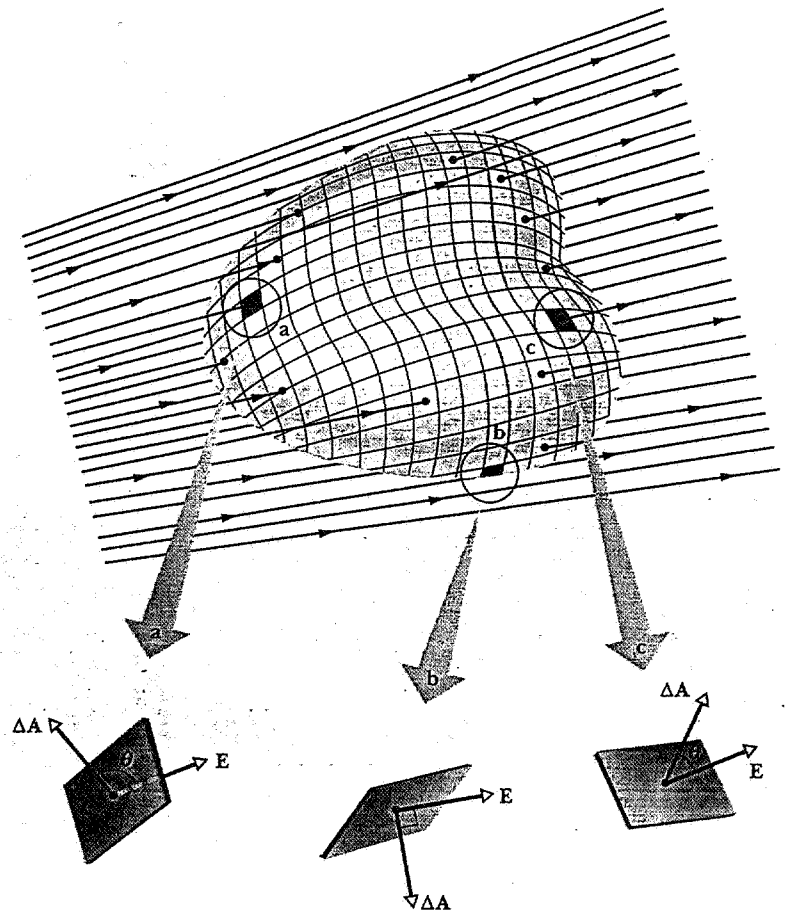


Figura 2 Una superficie di forma arbitraria immersa in un campo elettrico **E** non uniforme. La superficie è suddivisa in piccoli elementi di area $\Delta\mathbf{A}$. I vettori **E** e $\Delta\mathbf{A}$ sono evidenziati su tre elementi diversi (*a*, *b* e *c*).

co è uno scalare. La sua unità di misura è, dall'equazione 5, il $N \cdot m^2/C$.

La legge di Gauss riguarda il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa. Per definire Φ_E più in generale, soprattutto nei casi in cui **E** non sia uniforme, si consideri la figura 2, che mostra una superficie chiusa arbitraria immersa in un campo elettrico non uniforme. Si scomponga la superficie in piccoli quadrati di area ΔA, ciascuno dei quali sia abbastanza piccolo da poter essere considerato piano. Ogni elemento di area può essere rappresentato con un vettore $\Delta\mathbf{A}$ il cui modulo è l'area ΔA. La direzione e il verso di $\Delta\mathbf{A}$ sono quelli della normale uscente dalla superficie, come mostrato nella figura 1. Dato che i quadrati sono stati presi opportunamente piccoli, **E** può essere considerato costante per tutti i punti appartenenti al generico quadrato.

I vettori **E** e $\Delta\mathbf{A}$ che caratterizzano ogni quadrato formano un angolo θ l'uno rispetto all'altro. La figura 2 mostra un ingrandimento di tre quadrati sulla superficie, designati *a*, *b* e *c*. Si noti che per *a*, $\theta > 90°$ (**E** è entrante); per *b*, $\theta = 90°$ (**E** è parallelo alla superficie) e per *c*, $\theta < 90°$ (**E** è uscente).

Una prima definizione del flusso totale del campo elettrico attraverso la superficie è, in analogia con l'equazione 5,

$$\Phi_E = \sum \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A}, \qquad (6)$$

che indica la somma delle quantità scalari $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A}$ ripetuta per tutti gli elementi di area in cui la superficie è stata scomposta. Nei punti del tipo *a* nella figura 2, il contributo al flusso è negativo; nei punti del tipo *b* è nullo e nei punti del tipo *c* è positivo. Perciò se **E** è dovunque uscente ($\theta < 90°$), ciascun contributo $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A}$ è positivo e Φ_E ,che si riferisce a tutta la superficie, è pure positivo. Se **E** è dovunque entrante ($\theta > 90°$), ciascun contributo $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A}$ è negativo e Φ_E, che si riferisce a tutta la superficie, è pure negativo. Se **E** è dovunque parallelo alla superficie ($\theta = 90°$), ciascun contributo $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{A}$ è nullo e Φ_E ,che si riferisce a tutta la superficie, è pure nullo.

La definizione generale di flusso elettrico consiste nel passaggio al limite della equazione 6 per una scomposizione in elementi infinitesimali. Sostituendo la sommatoria estesa alla superficie con un integrale este-

ISBN 88-408-0777-2

so alla stessa superficie si ottiene

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \tag{7}$$

Questo *integrale di superficie* indica che la superficie in questione deve essere suddivisa negli elementi infinitesimali di area $d\mathbf{A}$ e che la quantità scalare $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ deve essera valutata per ogni elemento e sommata sull'intera superficie. Il cerchio sul segno di integrale indica che la superficie su cui è calcolato l'integrale è una superficie *chiusa*. Il flusso può essere calcolato su ogni superficie, sia essa chiusa o aperta; nella legge di Gauss, che introdurremo nel prossimo paragrafo, invece, rientrano soltanto superfici chiuse.

Esempio 2 La figura 3 mostra una superficie cilindrica ideale di raggio R immersa in un capo elettrico uniforme $\mathbf{E}$. L'asse del cilindro sia parallelo al campo. Quanto vale Φ_E per questa superficie chiusa?

Soluzione Il flusso Φ_E può essere scritto come la somma di tre termini integrali estesi alle superfici: (*a*) la parete terminale di sinistra del cilindro; (*b*) la superficie cilindrica; (*c*) la parete terminale di destra. Perciò, dalla equazione 7,

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

Per la parete terminale di sinistra, l'angolo θ è pari a 180° in tutti i punti, $\mathbf{E}$ ha valore costante e i vettori $d\mathbf{A}$ sono tutti paralleli. Perciò

$$\int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int E\, dA \cos 180^\circ = -E \int dA = -EA,$$

dove A ($= \pi R^2$) è l'area della parete di sinistra. Analogamente per la parete di destra,

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = +EA,$$

essendo nullo l'angolo θ in ogni punto. Infine, relativamente alla superficie cilindrica,

$$\int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

dato che $\theta = 90^\circ$ e quindi $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$ su tutta la superficie cilindrica. Perciò il flusso totale è

$$\Phi_E = -EA + 0 + EA = 0.$$

Come vedremo nel prossimo paragrafo, questo risultato può essere dedotto dal fatto che non ci sono sorgenti o pozzi di $\mathbf{E}$ (cioè cariche) entro la superficie chiusa della figura 3. Le linee di campo $\mathbf{E}$ (il campo è uniforme) penetrano nella parete di sinistra e riemergono dalla parete di destra, come nel caso della figura 1*e*.

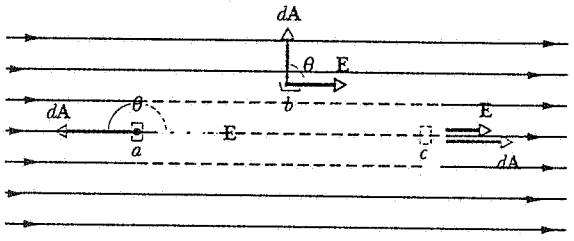


Figura 3 Esempio 2. Una superficie cilindrica chiusa viene immersa in un campo elettrico unforme $\mathbf{E}$ parallelo al suo asse.

29-3 LA LEGGE DI GAUSS*

Dopo avere definito il flusso del campo elettrico attraverso una superficie *chiusa*, siamo pronti per scrivere la legge di Gauss. Supponiamo di avere un insieme di cariche positive e negative, che generi un campo elettrico $\mathbf{E}$ in una certa regione dello spazio. Si costruisca in tale regione una immaginaria superficie chiusa, chiamata *superficie gaussiana*, che può racchiudere o meno alcune cariche. La legge di Gauss, che mette in relazione il flusso totale Φ_E attraverso questa superficie con la carica *netta* q racchiusa dalla superficie, può essere enunciata come

$$\epsilon_0 \Phi_E = q \tag{8}$$

oppure

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q. \tag{9}$$

Si vede come la legge di Gauss predica che Φ_E deve essere nullo per la superficie considerata nell'esempio 2, dato che la superficie non racchiude nessuna carica.

Come si è discusso nel paragrafo 28-4, l'intensità del campo elettrico è proporzionale al numero di linee di campo che attraversano un assegnato elemento di area disposto ortogonalmente al campo. L'integrale dell'equazione 9 è fondamentalmente un conteggio delle linee di campo che passano attraverso la superficie. È del tutto ragionevole che il numero di linee di campo che passano attraverso una superficie chiusa debba essere proporzionale alla carica netta racchiusa dalla superficie stessa, come espresso dall'equazione 9.

La scelta della superficie gaussiana è arbitraria. Essa è usualmente scelta in modo che la simmetria della di-

* Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fu un matematico tedesco che fece scoperte fondamentali nella teoria dei numeri, nella geometria e nella teoria della probabilità. Diede anche notevoli contributi all'astronomia e al problema della misura delle dimensioni e della forma della Terra. Si veda *Gauss*, di Ian Steward, «Scientific American», luglio 1977, pag. 122. (Trad. it. *Gauss*, «Le Scienze» 1977, 111:74.)

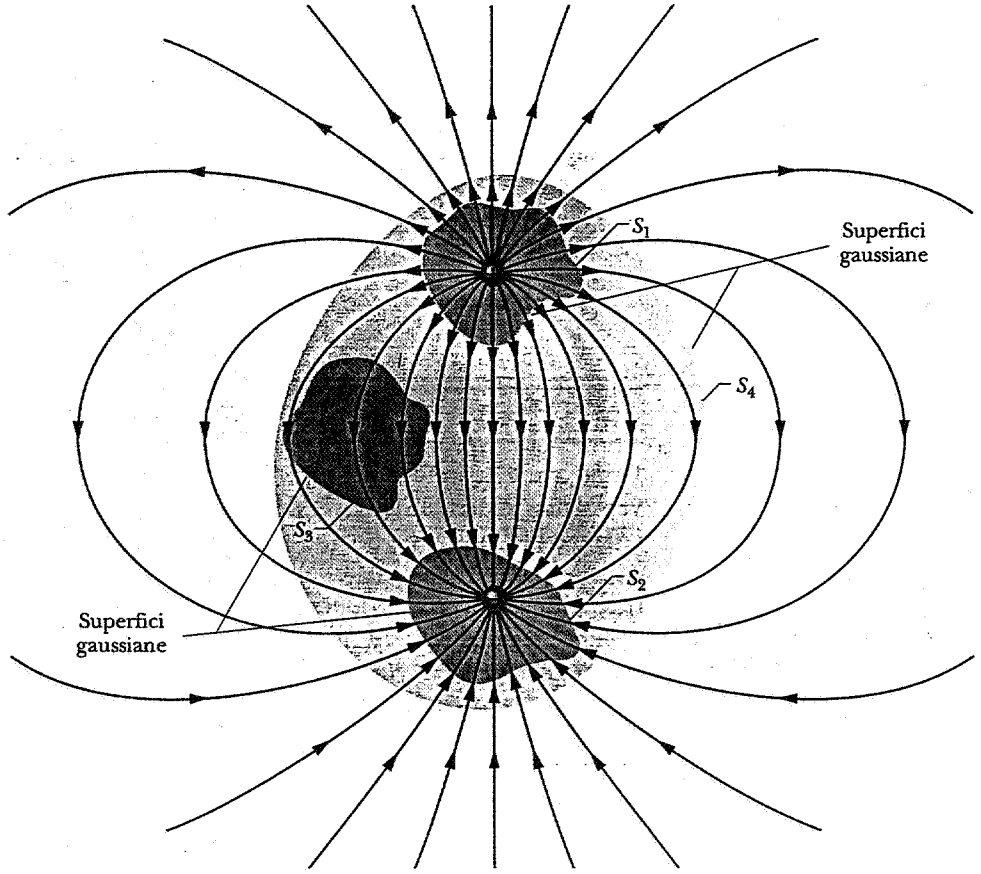


Figura 4 Due cariche uguali ed opposte e le linee di forza del campo elettrico generate nelle vicinanze. Sono evidenziate le sezioni di quattro superfici gaussiane chiuse.

stribuzione produca, almeno su una parte della superficie, un campo elettrico costante, che può essere poi portato fuori dall'integrale dell'equazione 9. In queste situazioni la legge di Gauss può essere utilizzata per calcolare il campo elettrico.

La figura 4 mostra le linee di forza (linee del campo elettrico) di un dipolo. Nelle vicinanze del dipolo, vengono disposte quattro superfici chiuse gaussiane, le cui intersezioni con il piano del foglio sono evidenziate nella figura. Sulla superficie S_1 il campo elettrico è dovunque uscente dalla superficie e quindi, come nel caso dell'elemento di superficie *c* della figura 2, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ è dovunque positivo. Calcolando l'integrale della equazione 9 sull'intera superficie chiusa si ottiene, perciò, un risultato positivo. L'equazione 9, per potere essere soddisfatta in questo caso, richiede che la superficie chiusa racchiuda una carica positiva, come effettivamente è. Usando la terminologia di Faraday, più linee di forza fuoriescono dalla superficie chiusa rispetto a quelle che vi entrano, per cui essa deve racchiudere una carica positiva.

Sulla superficie S_2 della figura 4, d'altra parte, il campo elettrico è dovunque entrante. Come nel caso dell'elemento di superficie *a* della figura 2, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ è dovunque negativo e l'integrale dell'equazione 9 dà un risultato negativo, il che implica che la superficie chiusa deve racchiudere una carica netta negativa (come effettivamente è). Più linee di forza entrano nella superficie chiusa rispetto a quelle che vi escono.

La superficie S_3 non racchiude alcuna carica per cui, in accordo con la legge di Gauss, il flusso totale attraverso la superficie deve essere nullo. Ciò non contrasta con la figura, nella quale si vede che tante linee di forza entrano nella parte alta della superficie quante ne escono nella parte bassa. Questo non è un caso; si può tracciare una superficie qualsivoglia nella figura 4 e, purchè essa non contenga nessuna delle due cariche, il numero di linee di campo che escono dalla superficie sarà uguale al numero di linee che vi entrano.

Anche la superficie S_4 non racchiude alcuna carica netta, dato che si è fatta l'ipotesi che il valore assoluto delle due cariche sia lo stesso. Ancora una volta il flusso totale attraverso la superficie deve essere nullo. Alcune linee di campo sono completamente contenute nella superficie e quindi non contribuiscono nel calcolo del flusso *attraverso* la superficie. Comunque, dato che ogni linea di campo che parte dalla carica positiva si chiude sulla carica negativa, a ciascuna linea di campo

ISBN 88-408-0777-2

generata dalla carica positiva che attraversa la superficie in verso uscente corrisponde una linea di campo assorbita dalla carica negativa che attraversa la superficie in verso entrante. Il flusso totale è pertanto nullo.

La legge di Gauss e la legge di Coulomb

La legge di Coulomb può essere dedotta dalla legge di Gauss e da alcune considerazioni di simmetria. Per ottenere ciò si applica la legge di Gauss ad una singola carica puntiforme q, come illustrato in figura 5. Quantunque la legge di Gauss valga per una generica superficie chiusa, è comodo scegliere una superficie sferica di raggio r centrata sulla carica. Il vantaggio che si ha nell'adottare questa superficie è che, per questioni di simmetria, $\mathbf{E}$ deve essere perpendicolare alla superficie, per cui l'angolo θ tra $\mathbf{E}$ e $d\mathbf{A}$ sarà nullo su tutta la superficie. Inoltre $\mathbf{E}$ è costante su tutta la superficie. *Costruire una superficie gaussiana che si avvalga dei vantaggi della simmetria è di fondamentale importanza nell'applicazione della legge di Gauss.*

Nella figura 5 sia $\mathbf{E}$ che $d\mathbf{A}$ in ogni punto della superficie gaussiana sono diretti radialmente in senso uscente, per cui la quantità $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ diviene semplicemente EdA. La legge di Gauss (eq. 9) perciò si riduce a

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 \oint E\, dA = q.$$

Dato che E è costante per tutti i punti della superficie sferica, esso può essere portato fuori dal segno di integrale, per cui

$$\epsilon_0 E \oint dA = q.$$

L'integrale è semplicemente la superficie totale della sfera, $4\pi r^2$. Si ottiene pertanto

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

oppure

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}. \qquad (10)$$

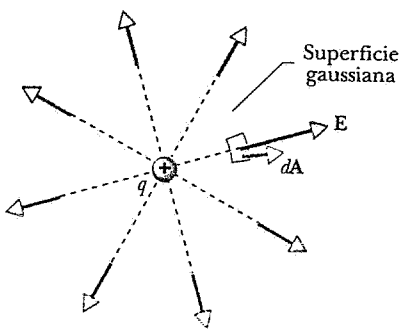


Figura 5 Una superficie gaussiana sferica tracciata intorno ad una carica positiva puntiforme q.

L'equazione 10 dà il modulo del campo elettrico $\mathbf{E}$ in tutti i punti che si trovano ad una distanza r da una singola carica puntiforme isolata q ed è identica all'equazione 4 del capitolo 28, che era stata ottenuta dalla legge di Coulomb. Perciò scegliendo una superficie gaussiana avente le opportune caratteristiche di simmetria, si può ricavare la legge di Coulomb dalla legge di Gauss. Queste due leggi sono del tutto equivalenti quando – come in questo capitolo – esse vengono applicate a problemi relativi a distribuzioni di cariche ferme o in moto lentamente variabile. La legge di Gauss è più generale poiché vale anche nel caso di cariche in rapido movimento. Nel caso di cariche in rapido movimento le linee di forza del campo elettrico si comprimono in un piano perpendicolare alla direzione del moto, perdendo così la loro simmetria sferica.

La legge di Gauss è una delle equazioni fondamentali della teoria elettromagnetica e verrà elencata nella tabella 2 del capitolo 40 come una delle equazioni di Maxwell. La legge di Coulomb non è compresa in tale tabella poiché, come abbiamo mostrato, essa può essere dedotta dalla legge di Gauss e da semplici questioni di simmetria relative al campo generato da una carica puntiforme.

È interessante notare che la scelta della costante di proporzionalità $1/4\pi\epsilon_0$ nella legge di Coulomb consente di scrivere l'equazione di Gauss in una forma semplice. Se avessimo scritto la costante di proporzionalità semplicemente come k, la legge di Gauss avrebbe assunto la forma $(1/4\pi k)\Phi_E = q$. Si preferisce, normalmente, lasciare il fattore 4π nella legge di Coulomb cosicchè esso non appaia nella legge di Gauss e in altre relazioni che verranno introdotte nel seguito, di uso frequente.

29-4 UN CONDUTTORE CARICO ISOLATO

La legge di Gauss consente di dimostrare un importante teorema relativo ai conduttori isolati:

una carica in eccesso posta su un conduttore isolato si sposta totalmente sulla superficie esterna del conduttore. Nessuna carica in eccesso può stazionare entro il corpo del conduttore.*

* Questa affermazione non si applica a un filo percorso da corrente, il quale non può essere considerato un conduttore «isolato» poiché è connesso ad un agente esterno come una batteria.

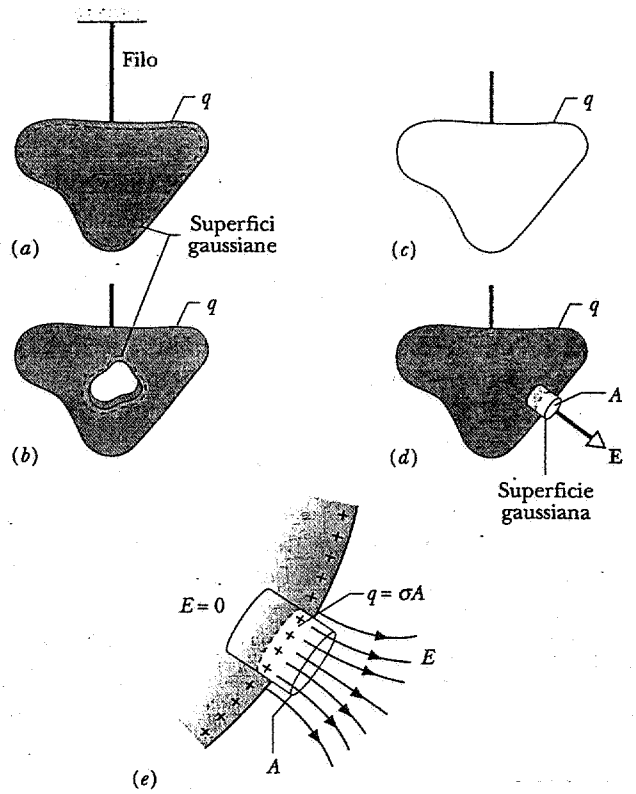


Figura 6 (*a*) Un conduttore metallico isolato appeso con un filo, sul quale è presente una carica q. E' tracciata una superficie gaussiana appena al di sotto della supeficie del conduttore. (*b*) Una cavità interna al conduttore è racchiusa da una diversa superficie gaussiana. (*c*) La cavità viene allargata in modo da asportare tutto il corpo del conduttore, lasciando solamente le cariche che stazionavano sulla sua superficie. (*d*) Una piccola superficie gaussiana è tracciata in prossimità della superficie del conduttore. (*e*) Una vista ingrandita della superficie gaussiana. Essa racchiude una carica q pari a σA. Il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo . Il campo elettrico sulla superficie è perpendicolare alla superficie stessa ed è costante in modulo.

Ciò non sembra essere irragionevole considerando il fatto che le cariche si respingono le une con le altre. Si può pensare che, spostandosi sulla superficie, le cariche aggiunte si dispongano il più possibile lontane le une dalle altre. Si può utilizzare la legge di Gauss per dare una prova quantitativa a questo argomento qualitativo.

La figura 6*a* mostra in sezione un conduttore isolato (un pezzo di rame, per esempio) appeso ad un filo, avente una carica in eccesso positiva pari a $+ q$. La linea tratteggiata illustra la sezione di una superficie gaussiana che si trova appena sotto la superficie del corpo.

La chiave della dimostrazione sta nella comprensione che in condizioni di equilibrio il campo elettrico all'interno del conduttore deve essere nullo Se ciò non fosse il campo esercitebbe una forza sugli elettroni di conduzione che sono presenti in ogni conduttore e si produrrebbero correnti all'interno del corpo. Tuttavia si sa, in base a valutazioni sperimentali, che non ci sono correnti stazionarie all'interno di un conduttore isolato. Campi elettrici transitori appaiono entro i conduttori durante il processo in cui essi vengono caricati, mà questi campi non durano a lungo. Le correnti interne agiscono rapidamente in modo da ridistribuire le cariche aggiunte cosicchè i campi elettrici interni si annullino, le correnti svaniscano e le condizioni di equilibrio (elettrostatico) si ripristinino.

Se **E** è nullo ovunque all'interno del conduttore, esso deve essere nullo anche sulla superficie gaussiana prescelta, poiché, per quanto prossima alla superficie, essa è completamente contenuta nel conduttore. Ciò significa che il flusso attraverso la superficie gaussiana deve essere nullo. La legge di Gauss dice allora che la carica netta contenuta nella superficie gaussiana deve pure essere nulla. Se la carica in eccesso non può stazionare all'interno della superficie gaussiana, essa può soltanto distribuirsi al di fuori di essa; ciò significa che *la carica in eccesso deve giacere sulla superficie esterna del conduttore.*

Un conduttore isolato contenente una cavità

La figura 6*b* mostra lo stesso conduttore appeso della figura 6*a*, al cui interno, però sia stata ricavata una cavità. Si potrebbe ragionevolmente pensare che l'asportazione di materiale neutro, operata per produrre la cavità, non debba variare la distribuzione di carica o il campo elettrico che si manifestavano in figura 6*a*. Dobbiamo ancora utilizzare, però, la legge di Gauss per darne una prova quantitativa.

Si tracci una superficie di Gauss che racchiuda la cavità, prossima alla sua parete, ma completamente contenuta nel volume del corpo conduttore. Poiché $E=0$ all'interno del conduttore, non può esserci flusso attraverso tale superficie gaussiana. Perciò, dalla legge di Gauss, la suddetta superficie non può racchiudere una carica netta. Si conclude che non può esserci una carica in eccesso distribuita sulla parete della cavità; essa rimane sulla superficie *esterna* del conduttore, come nella figura 6*a*.

Si supponga che alcune cariche vengano poste all'interno della cavità. La legge di Gauss richiede ancora che non ci sia una carica *netta* all'interno della superficie gaussiana, per cui una carica in eccesso deve essere attirata sulla parete della cavità (proprio come le cariche venivano attratte su un estremo della bacchetta di rame nella figura 3 del capitolo 27) affinchè sia nulla la carica netta contenuta nella superficie gaussiana.

Si supponga ora che, in qualche modo, la carica in

ISBN 88-408-0777-2

eccesso possa essere «congelata» sulla superficie del conduttore nel caso della situazione illustrata in figura 6*a*, per esempio incorporandola in un sottile rivestimento plastico e rimuovendo, poi, completamente, il conduttore, come mostrato nella figura 6*c*. Ciò equivale ad allargare la cavità della figura 6*b* fino a che essa comprenda l'intero conduttore, lasciando soltanto le cariche. Il campo elettrico non cambierebbe per nulla; esso rimarrebbe nullo entro il sottile guscio di cariche e rimarrebbe inalterato nei punti esterni. Il campo elettrico è generato dalle cariche e non dal conduttore. Il conduttore è soltanto un mezzo nel quale le cariche possono muoversi e cambiare la loro posizione.

Il campo elettrico esterno

Ancorchè la carica in eccesso su un conduttore isolato si trasferisca esclusivamente sulla sua superficie, tale carica, eccetto che nei casi di conduttori isolati sferici, in generale non si distribuisce uniformemente sulla superficie. In altre parole, la densità di carica superficiale σ ($= dq/dA$) varia da punto a punto sulla superficie.

Si può usare la legge di Gauss per trovare una relazione, in ogni punto della superficie, tra la densità superficiale σ in quel punto e il campo elettrico $\mathbf{E}$ appena al di fuori della superficie in corrispondenza dello stesso punto. La figura 6*d* mostra una superficie gaussiana cilindrica, avente le due basi di area (piccola) pari ad A. Le basi siano parallele alla superficie; l'una giaccia interamente entro il conduttore, l'altra interamente all'esterno. La piccola parete cilindrica sia perpendicolare alla superficie del conduttore. Una vista allargata della superficie gaussiana è mostrata nella figura 6*e*.

Il campo elettrico uscente da un conduttore carico isolato in condizioni di equilibrio elettrostatico deve essere, nella zona superficiale, perpendicolare alla parete del conduttore. Se non fosse così, ci sarebbe una componente di $\mathbf{E}$ nella direzione della parete. Essa genererebbe correnti superficiali che ridistribuirebbero le cariche sulla superficie, violando l'ipotesi di equilibrio elettrostatico. Perciò $\mathbf{E}$ deve essere perpendicolare alla superficie del conduttore. Il flusso attraverso la base esterna della superficie gaussiana di figura 6*e* è, dunque, pari a EA. Il flusso attraverso la base interna è nullo poiché $\mathbf{E} = 0$ in tuttti i punti interni del conduttore. Il flusso attraverso la parete cilindrica è pure nullo poiché le linee di campo sono parallele alla sua superficie e non possono, di conseguenza, intersecarla. La carica q racchiusa dalla superficie gaussiana è σA.

Il flusso totale può allora essere calcolato come

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \int_{\substack{\text{base}\\\text{est.}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} + \int_{\substack{\text{base}\\\text{int.}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} + \int_{\substack{\text{base}\\\text{laterale}}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$
$$= EA + 0 + 0 = EA.$$

Il campo elettrico può ora essere trovato applicando la legge di Gauss:

$$\epsilon_0 \Phi_E = q.$$

e, sostituendo i valori del flusso e della carica racchiusa ($= \sigma A$), si trova

$$\epsilon_0 EA = \sigma A$$

da cui

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \qquad (11)$$

Si confronti questo risultato con l'equazione 28 del capitolo 28 (che dedurremo di nuovo nel prossimo paragrafo facendo uso della legge di Gauss) la quale descrive il campo elettrico vicino a un piano carico: $E = \sigma/2\epsilon_0$. Il campo elettrico vicino a un conduttore è *doppio* rispetto a quello che si avrebbe con un piano carico, anche per i punti molto vicini al conduttore, dove esso appare come un piano carico. Come si può spiegare la differenza tra i due casi?

Un piano carico può essere realizzato spruzzando cariche su un lato di un sottile foglio di plastica. Le cariche si fissano ove cadono e non sono libere di muoversi. Non possiamo, però, caricare un conduttore nello stesso modo. Un sottile strato di materiale conduttore ha sempre due facce. Se spruzziamo cariche su un lato esse si muoveranno liberamente nel conduttore e si distribuiranno su tutte le superfici. Perciò se si desidera caricare un sottile strato conduttore fino ad un certo valore di densità di carica superficiale bisogna fornire sufficiente carica per coprire *entrambe* le superfici. In effetti occorre una quantità di carica doppia per fornire ad un sottile strato conduttore la medesima densità di carica superficiale fornita precedentemente ad un simile strato isolante.

Possiamo dedurre il campo elettrico nel caso di un sottile foglio conduttore facendo riferimento alla figu-

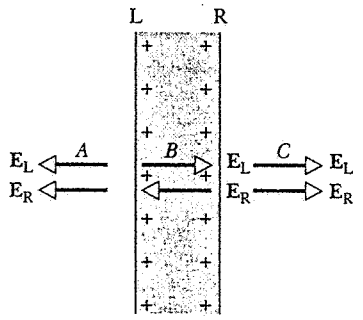


Figura 7 Il campo elettrico in prossimità di un foglio conduttore sottile. Si noti che la carica si distribuisce su entrambe le superfici. I campi E_L e E_R dovuti, rispettivamente, alle cariche distribuite sulle facce di sinistra e di destra, si sommano rinforzandosi nei punti A e C e si cancellano nei punti B interni al conduttore.

ra 7. Se pensiamo ad ognuna delle due facce del conduttore come ad un piano carico che produce un campo elettrico $\sigma/2\epsilon_0$ (in accordo con l'equazione 28 del capitolo 28), allora nel punto A i campi elettrici $\mathbf{E}_L$ dovuto alla faccia di sinistra ed $\mathbf{E}_R$ dovuto alla faccia di destra si sommano per dare il campo elettrico totale vicino al conduttore $\sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$. Nel punto C l'effetto è il medesimo. Nel punto B, invece, i campi $\mathbf{E}_L$ ed $\mathbf{E}_R$ sono uguali ed opposti e, sommandosi, si cancellano l'uno con l'altro producendo un campo nullo, come ci si aspetta all'interno del conduttore.

Esempio 3 Il campo elettrico uscente dalla superficie del rullo di una machina fotocopiatrice ha, in prossimità della superficie, modulo E pari a 2.3×10^5 N/C. Qual è la densità di carica superficiale sul rullo se esso è conduttore?

Soluzione Dall'equazione 11 si ha che

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(2.3 \times 10^5 \text{ N/C})$$
$$= 2.0 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 = 2.0 \ \mu\text{C/m}^2.$$

Esempio 4 Il modulo del campo elettrico normalmente presente nell'atmosfera terrestre appena sopra la superficie della Terra è di circa 150 N/C, diretto verso il basso. Qual è la carica superficiale netta totale distribuita sulla Terra? Si assuma che la Terra sia un conduttore.

Soluzione Le linee di forza entrano nelle cariche negative cosicchè, se il campo elettrico terrestre è diretto verso il basso, la densità di carica superficiale σ deve essere negativa. Dall'equazione 11 si trova

$$\sigma = \epsilon_0 E = (8.85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(-150 \text{ N/C})$$
$$= -1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

La carica totale accumulata sulla Terra q è pari alla densità di carica superficiale moltiplicata per $4\pi R^2$, l'area della superficie della Terra (assunta di forma sferica). Perciò

$$q = \sigma 4\pi R^2$$
$$= (-1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2)(4\pi)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2$$
$$= -6.8 \times 10^5 \text{ C} = -680 \text{ kC}.$$

29-5 APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI GAUSS

La legge di Gauss può essere utilizzata per calcolare $\mathbf{E}$ se la simmetria del problema è elevata. Un esempio di questo calcolo, relativo al campo di una carica puntiforme, è già stato discusso per l'equazione 10. Di seguito presenteremo altri esempi.

Linea carica infinita

La figura 8 mostra una porzione di una distribuzione di carica rettilinea ed infinita avente densità di carica lineare (carica per unità di lunghezza) $\lambda = dq/ds$. Si vuole trovare il campo elettrico ad una distanza r dalla linea.

Nel paragrafo 28-5 abbiamo discusso gli argomenti di simmetria che consentono di concludere che il campo elettrico, nel caso in analisi, può avere soltanto una componente radiale. Il problema, pertanto, ha una simmetria cilindrica. È utile, di conseguenza, scegliere una superficie gaussiana avente forma cilindrica di raggio r e altezza h, chiusa sui due estremi da superfici piane circolari perpendicolari all'asse. E è costante sulla superficie cilindrica e perpendicolare alla superficie stessa. Il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso tale superficie è $E(2\pi rh)$, dove $2\pi rh$ è l'area della superficie. Non c'è alcun flusso attraverso le basi poiché su di esse $\mathbf{E}$ è parallelo alla superficie cosicchè $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$ in ogni punto. La carica q racchiusa dalla superficie gaussiana della figura 8 è λh. La legge di Gauss (eq. 9) dà allora

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$

$$\epsilon_0 E(2\pi rh) = \lambda h,$$

cioè

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \qquad (12)$$

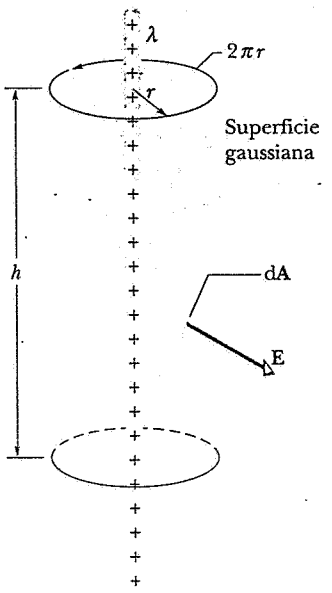


Figura 8 Una superficie gaussiana avente forma cilindrica racchiude una porzione di una distribuzione di carica rettilinea, uniforme ed infinita.

ISBN 88-408-0777-2

Si noti quanto sia più semplice arrivare alla soluzione utilizzando la legge di Gauss anzichè un metodo di integrazione, come descritto nel capitolo 28. Si noti anche che il vantaggio nell'uso della legge di Gauss consegue dall'aver scelto una opportuna superficie gaussiana adatta a sfruttare la simmetria cilindrica del campo elettrico generato dal filo carico infinito. Si è liberi di segliere una qualunque superficie chiusa , come un cubo o una sfera (vedi problema 48) come superficie gaussiana. Quantunque la legge di Gauss valga per ognuna di tali superfici, esse non sono adatte al problema in esame. Soltanto la superficie cilindrica della figura 8 è appropriata, nel caso in questione.

L'approccio basato sulla legge di Gauss è una tecnica di calcolo utile soltanto nei problemi che hanno un certo grado di simmetria, ma in tali casi la soluzione può essere raggiunta con estrema facilità.

Piano carico infinito

La figura 9 mostra una porzione di un foglio isolante carico, sottile ed infinito avente densità di carica superficiale (carica per unità di area) σ. Vogliamo calcolare il campo elettrico nei punti vicini alla superficie.

Una opportuna superficie gaussiana è un cilindro retto chiuso avente basi di area A, posto in modo tale da intersecare il piano carico come mostrato nella figura. Per ragioni di simmetria si può concludere che il campo elettrico $\mathbf{E}$ è orientato perpendicolarmente alle basi del cilindro nel verso uscente dal piano. Dato che $\mathbf{E}$ non interseca la superficie laterale del cilindro, non c'è alcun contributo al flusso totale attraverso tale superficie. Si assuma che le basi del cilindro siano equidistanti dal foglio. Per ragioni di simmetria il campo ha la stessa intensità sulle basi. Il flusso attraverso ciascuna delle due basi è EA ed è positivo su entrambe.

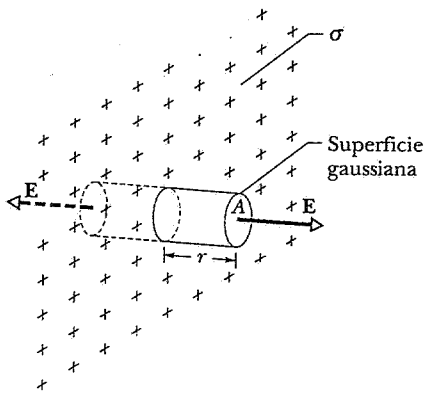


Figura 9 Una superficie gaussiana avente la forma di un piccolo cilindro chiuso sulle basi interseca una distribuzione di carica piana, uniforme ed infinita. Il campo è perpendicolare al piano della distribuzione cosicchè soltanto le basi della superficie gaussiana contribuiscono al flusso.

La legge di Gauss impone che

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q$$

$$\epsilon_0(EA + EA) = \sigma A,$$

dove σA è la carica racchiusa dalla superficie. Risolvendo, si ottiene

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{13}$$

Si noti che E è costante in entrambi i semispazi divisi dal foglio carico (per cui non era necessario assumere che le basi del cilindro fossero equidistanti dal foglio).

Quantunque un foglio isolante carico infinito non possa esistere fisicamente, la analisi svolta è utile poiché l'equazione 13 costituisce un risultato approssimativamente corretto anche per i fogli carichi reali (non infiniti) nei punti lontani dai bordi, la cui distanza dal foglio sia sensibilmente inferiore alle dimensioni del foglio.

Guscio sferico carico

La figura 10 mostra una sezione di un sottile guscio sferico carico avente densità di carica superficiale σ costante e una carica totale q ($= 4\pi r^2\sigma$), come si potrebbe ottenere spruzzando carica uniformemente su tutta la superficie di una palla di raggio R. Si utilizza la legge di Gauss per dimostrare due utili proprietà di questa distribuzione di carica, che possono essere sintetizzate nei due seguenti teoremi:

1. *Un guscio sferico carico uniformemente si comporta, rispetto ai punti esterni, come se tutta la sua carica fosse concentrata nel suo centro.*

2. *Un guscio sferico carico uniformemente non esercita alcuna forza elettrostatica su una particella carica posta al suo interno.*

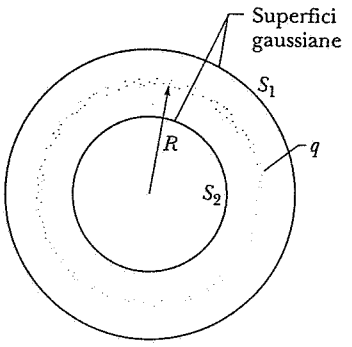


Figura 10 Sezione diametrale di un guscio sferico sottile sul quale è distribuita uniformemente una carica q. Il guscio è circondato da due superfici gaussiane sferiche concentriche, l'una interna, l'altra esterna al guscio stesso.

Questi due teoremi sono l'analogo elettrostatico dei due teoremi sulla gravitazione presentati nel capitolo 16. Vedremo quanto sia più semplice la dimostrazione utilizzando la legge di Gauss rispetto alla dimostrazione fornita nel paragrafo 16-5, in cui non si era tratto vantaggio dalla simmetria sferica del problema.

Nella figura 10 sono disegnate, oltre al guscio sferico carico, due superfici gaussiane sferiche concentriche, S_1 e S_2. Per questioni di simmetria si deduce che il campo può avere soltanto una componenete radiale (si assuma che ci sia una componente non radiale in un punto e si supponga che qualcuno ruoti – inosservato – il guscio di un certo angolo, su un diametro passante per il punto. Misurando ora il campo elettrico nel medesimo punto, ad esempio con una carica di prova, si concluderebbe che il campo elettrico ha cambiato direzione, anche se la distribuzione di carica è rimasta identica. Questa è chiaramente una contraddizione. Gli argomenti di simmetria continuerebbero a valere anche se la carica *non* fosse uniformemente distribuita sulla superficie del guscio?) Applicando la legge di Gauss alla superficie S_1, per la quale $r > R$ si ottiene

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q,$$

cioè

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2} \qquad \text{(superficie sferica, } r > R\text{)} \quad (14)$$

Proprio come si era fatto relativamente alla figura 5. Perciò *il guscio carico uniformemente si comporta come una carica puntiforme per tutti i punti esterni al guscio*. Ciò dimostra il primo teorema.

Applicando la legge di Gauss sulla superficie S_2, per la quale $r < R$, si ottiene

$$E = 0 \qquad \text{(superficie sferica } r < R\text{)}, \qquad (15)$$

dato che questa superficie gaussiana non racchiude alcuna carica e che E (per questioni di simmetria) deve avere la stessa intensità su tutta la superficie. *Il campo elettrico perciò è nullo all'interno di un guscio sferico carico uniformemente*; una carica di prova posta in qualunque punto all'interno del guscio non è soggetta ad alcuna forza elettrica. Ciò dimostra il secondo teorema.

Questi due teoremi valgono soltanto nel caso di gusci sferici carichi *uniformemente*. Se le cariche venissero spruzzate sulla superficie in modo non uniforme, cosicchè la densità di carica *non* fosse costante sulla superficie, questi teoremi non sarebbero più validi. La simmetria andrebbe persa e, di conseguenza, E non potrebbe essere portato fuori dal segno di integrale nella legge di Gauss. Il flusso rimarrebbe pari a q/ϵ_0 nei punti esterni e nullo nei punti interni, ma non saremmo in grado di mettere direttamente in relazione il flusso con il campo elettrico E, come si era invece fatto nel caso uniforme. Contrariamente al caso del guscio carico uniformemente, il campo *non* sarebbe nullo all'interno.

Distribuzione di carica a simmetria sferica

La figura 11 mostra una sezione di una distribuzione di carica a simmetria sferica di raggio R. La carica, in questo caso, è distribuita in un volume sferico. Non si assume che la densità di carica di volume ρ (carica per unità di volume) sia costante; tuttavia, si impone la restrizione che ρ in ogni punto dipenda *soltanto* dalla distanza di quel punto dal centro, condizione chiamata *simmetria sferica*. Cioè ρ può essere funzione di r, ma non delle coordinate angolari. Ora si vuole trovare una espressione per E nei punti esterni (vedi fig. 11*a*) e interni (vedi fig. 11*b*) alla distribuzione di carica. Si noti che l'oggetto della figura 11 non può essere un conduttore altrimenti l'eccesso di carica, come si è visto, stazionerebbe sulla sua superficie (e si potrebbero applicare i teoremi del paragrafo precedente per trovare E).

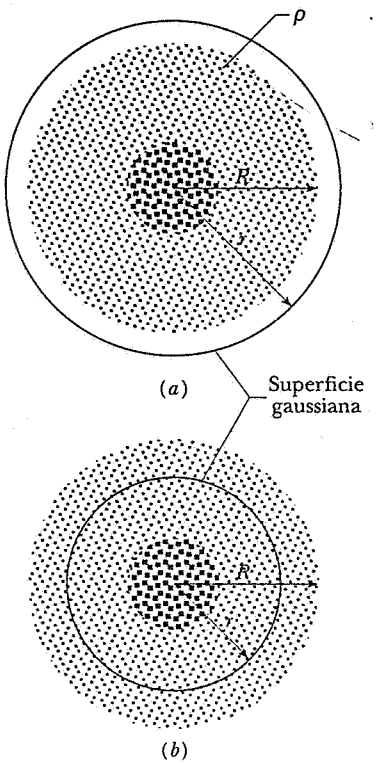


Figura 11 Sezione diametrale di una distribuzione di carica avente simmetria sferica, in cui la densità di carica di volume può variare con r. Nella figura sono tracciate due superfici gaussiane sferiche concentriche (*a*) all'esterno e (*b*) all'interno della distribuzione.

 ISBN 88-408-0777-2

Ogni distribuzione di carica avente simmetria sferica, come quella della figura 11, può essere vista come una successione di gusci sferici sottili concentrici. La densità di carica di volume ρ può variare da un guscio all'altro, ma si assume che ciascun guscio sia sufficientemente sottile da poter considerare ρ costante nel guscio stesso. Si possono utilizzare i risultati del precedente paragrafo per calcolare il contributo di ciascun guscio al campo elettrico totale. Il campo elettrico generato da ciascun guscio ha soltanto una componente radiale e quindi il campo elettrico totale prodotto dalla sfera deve avere, analogamente, soltanto una componente radiale (ciò si può anche dedurre direttamente da questioni di simmetria, ma non non è più vero nel caso delle distribuzioni in cui viene a mancare la simmetria sferica, cioè quando ρ dipende anche dalla direzione).

Calcoliamo il campo elettrico nei punti che si trovano ad una distanza radiale r, maggiore del raggio R della sfera, come mostrato nella figura 11*a*. Ogni guscio concentrico, avente una carica netta dq, dà un contributo radiale dE al campo elettrico in accordo con l'equazione 14. Il campo elettrico totale è la somma di tali contributi e, dato che ogni contributo è radiale, si può fare la somma algebrica di essi anzichè una somma vettoriale. La somma su tutti i gusci, dunque, dà

$$E = \int dE = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

quindi, essendo r costante nell'integrale svolto rispetto alla variabile q,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}, \qquad (16)$$

dove q è la carica totale contenuta nella sfera. Perciò, nei punti esterni ad una distribuzione di carica avente simmetria sferica, il campo elettrico ha il valore che avrebbe se la carica fosse concentrata nel suo centro. Questo risultato è simile a quello del caso gravitazionale riportato nel paragrafo 16-5. Entrambi i risultati obbediscono alla legge dell'inverso del quadrato delle distanze caratterizzante le corrispondenti leggi della forza .

Consideriamo, ora, il campo elettrico nei punti che si trovano all'interno della distribuzione di carica. La figura 11*b* illustra una superficie gaussiana di raggio $r < R$. La legge di Gauss dà

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 E(4\pi r^2) = q'$$

cioè

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r^2}, \qquad (17)$$

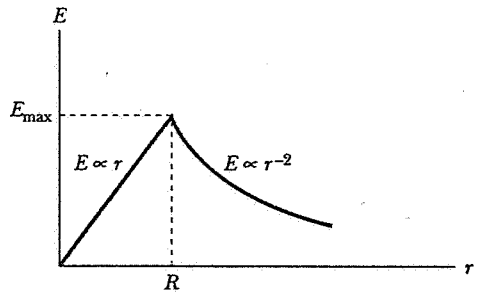


Figura 12 Il profilo di campo elettrico in funzione del raggio, associato ad una distribuzione di carica sferica ed uniforme di raggio R. L'andamento per $r > R$ vale per *ogni* distribuzione di carica a simmetria sferica, mentre per $r < R$ vale soltanto per distribuzioni *uniformi*.

in cui q' è quella parte di q contenuta *entro* la sfera di raggio r. In accordo con il secondo teorema del paragrafo precedente, la frazione di q che si trova al di fuori di questa sfera non contribuisce al campo **E** nei punti a distanza r dal centro.

Per completare il calcolo si deve esplicitare la carica q' contenuta nella sfera di raggio r; cioè, si deve conoscere $\rho(r)$. Si consideri il caso particolare in cui la sfera sia uniformemente carica, cosicchè la densità di carica ρ abbia lo stesso valore in tutti i punti della sfera di raggio R e sia nulla in tutti i punti esterni. Internamente a tale sfera uniformemente carica, la frazione di carica racchiusa in una sfera di raggio r è uguale alla frazione di volume occupato dalla stessa sfera, cioè

$$\frac{q'}{q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

ossia

$$q' = q\left(\frac{r}{R}\right)^3,$$

essendo $4/3\pi R^3$ il volume della distribuzione di carica sferica. L'espressione di E, dunque, diviene

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3} \quad \text{(sfera uniformemente carica, } r < R\text{)}. \qquad (18)$$

Questa espressione si annulla, come ci si aspetta, per $r = 0$. L'equazione 18 vale *soltanto* quando la densità di carica è uniforme, cioè indipendente da r. Si noti che le equazioni 16 e 18 forniscono lo stesso risultato, come deve ovviamente essere, nei punti che si trovano sulla superficie della distribuzione di carica (cioè per $r = R$). La figura 12 mostra il campo elettrico nei punti con $r < R$ (dato dall'eq. 18) e nei punti con $r > R$ (dato dall'eq. 16).

Esempio 5 Una bacchetta di plastica la cui lunghezza L è pari a 220 cm ed il cui raggio R è pari a 3.6 mm, porta una carica negativa q di valore 3.8×10^{-7} C, distribuita uniformemente sulla sua superficie. Qual è il campo elettrico in corrispondenza al punto mediano della bacchetta, in un punto appartenente alla superficie?

Soluzione Ancorchè la bacchetta non sia infinitamente lunga, per un punto superficiale prossimo alla metà, essa è effettivamente molto lunga, cosicchè è lecito utilizzare l'equazione 12. La densità di carica lineare sulla bacchetta è

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{-3.8 \times 10^{-7}\ \text{C}}{2.2\ \text{m}} = -1.73 \times 10^{-7}\ \text{C/m}.$$

Dall'equazione 12, quindi, si ha

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$
$$= \frac{-1.73 \times 10^{-7}\ \text{C/m}}{(2\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.0036\ \text{m})}$$
$$= -8.6 \times 10^{-5}\ \text{N/C}.$$

Il segno meno indica che, essendo la bacchetta carica negativamente, il verso del campo elettrico, diretto radialmente, è entrante verso l'asse della bacchetta. La scarica si genera, in aria secca a pressione atmosferica, per campi elettrici aventi intensità di circa 3×10^6 N/C. L'intensità del campo calcolata è inferiore di un fattore di circa 3.4; di conseguenza non ci dovrebbero essere scariche.

Esempio 6 La figura 13*a* mostra una porzione di due fogli carichi molto estesi aventi densità di carica superficiali uniformi $\sigma_+ = +6.8\ \mu\text{C/m}^2$ e $\sigma_- = -4.3\ \mu\text{C/m}^2$. Si trovi il campo elettrico E (*a*) alla sinistra dei due fogli, (*b*) nella regione compresa tra i due fogli e (*c*) alla destra dei due fogli.

Soluzione Consideriamo i due fogli separatamente e sommiamo, poi, i campi elettrici risultanti utilizzando il principio di sovrapposizione. Per il foglio carico positivamente si ha, dall'equazione 13, che

$$E_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} = \frac{6.8 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 3.84 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

Analogamente, per il foglio carico negativamente l'intensità del campo è

$$E_- = \frac{|\sigma_-|}{2\epsilon_0} = \frac{4.3 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2}{(2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)} = 2.43 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

La figura 13*a* mostra i due campi calcolati sopra, alla sinistra dei fogli, tra di essi e alla destra.

I campi risultanti in queste tre regioni si ottengono applicando il principio di sovrapposizione. Alla sinistra dei due fogli (assumendo che le componenti di E della figura 13 siano positive se E punta verso destra e negative se E punta verso sinistra)

$$E_L = -E_- + E_- = -3.84 \times 10^5\ \text{N/C} + 2.43 \times 10^5\ \text{N/C}$$
$$= -1.4 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

Il campo elettrico risultante in questa regione (negativo) punta verso sinistra, come illustrato nella figura 13*b*. Alla destra dei due fogli il campo elettrico ha la stessa intensità ma punta verso destra, come mostrato nella figura 13*b*.

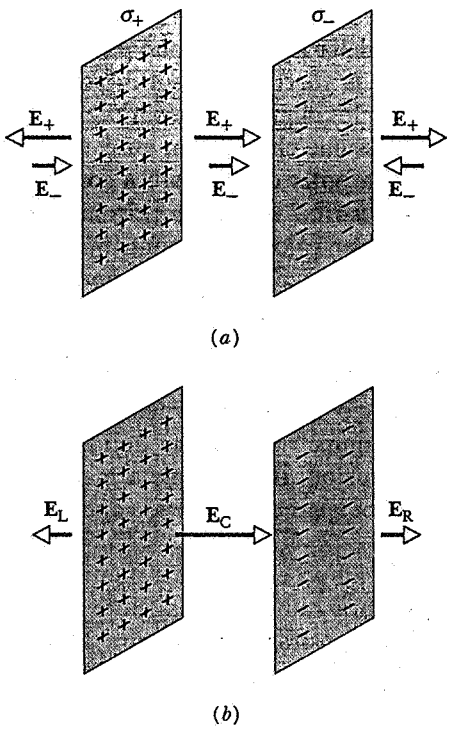


Figura 13 Esempio 6. (*a*) Su due fogli paralleli carichi sono presenti diverse distribuzioni di carica σ_+ e σ_-. I campi $\mathbf{E}_+$ ed $\mathbf{E}_-$ sono riferiti alle due distribuzioni di carica considerate singolarmente. (*b*) Il campo netto nelle regioni a sinistra (L), al centro (C) e a destra (R) dei fogli, è calcolato come somma vettoriale di $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$.

Tra i due fogli i due campi si sommano per dare

$$E_C = E_+ + E_- = 3.84 \times 10^5\ \text{N/C} + 2.43 \times 10^5\ \text{N/C}$$
$$= 6.3 \times 10^5\ \text{N/C}.$$

Al di fuori dei due fogli il campo elettrico è uguale a quello che si avrebbe con un unico foglio carico la cui densità di carica superficiale fosse $\sigma_+ + \sigma_-$ cioè $+2.5 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2$. I campi illustrati dalla figura 13 *b* mostrano quanto sopra asserito. Nei problemi 22 e 23 si analizzerà il caso in cui le densità di carica superficiali sono uguali in modulo ma opposte in segno ed anche il caso in cui esse sono uguali in modulo e segno.

29-6 PROVE SPERIMENTALI DELLA LEGGE DI GAUSS E DELLA LEGGE DI COULOMB

Nel paragrafo 29-4 si è dedotto che la carica in eccesso in un conduttore può trovarsi soltanto sulla sua superficie esterna. Nessuna carica può stare entro il volume del conduttore o sulla parete di una cavità al suo interno. Questo risultato è stato ottenuto direttamente

 ISBN 88-408-0777-2

dalla legge di Gauss. Perciò indagare se la carica giaccia davvero interamente sulla faccia esterna è un modo di indagare la legge di Gauss. Se una certa quantità di carica venisse trovata all'interno del conduttore o sulla superficie di una sua cavità interna (come la cavità di figura 6*b*), allora la legge di Gauss non sarebbe valida. Nel paragrafo 29-3 abbiamo dimostrato che la legge di Coulomb discende direttamente dalla legge di Gauss. Perciò se la legge di Gauss fallisce, anche la legge di Coulomb fallisce. In particolare la legge della forza potrebbe non essere esattamente una legge di proporzionalità inverse al quadrato della distanza. L'esponente di r potrebbe differire da 2 di una piccola quantità δ, cosicchè

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^{2+\delta}}, \qquad (19)$$

in cui δ è esattamente zero se valgono le leggi di Coulomb e di Gauss.

La misura diretta della forza tra due cariche, descritta nel capitolo 27, non può provare se δ sia zero con una precisione migliore del percento. La misura della carica entro un conduttore consente, invece, di provare che δ è zero con una precisione molto migliore, come si vedrà nel seguito.

In linea di principio l'esperimento si attiene alla procedura illustrata nella figura 14. Una sfera metallica carica viene appesa con un filo isolante ed immessa in un contenitore metallico che si appoggia su un piedestallo isolante. Quando la sfera viene portata a contatto con l'interno del contenitore metallico, i due oggetti formano un *unico conduttore* e, se la legge di Gauss è valida, tutte le cariche accumulate sulla sfera devono spostarsi sulla superficie esterna del conduttore composto, come si vede nella figura 14*c*. Quando la sfera viene rimossa, non dovrebbe più portare alcuna carica. Mettendo in contatto altri oggetti metallici isolati con l'interno del contenitore non si trasferisce alcuna carica agli oggetti stessi. La carica può essere trasferita soltanto dall'esterno del contenitore metallico.

Benjamin Franklin è stato il primo a notare che non può esserci carica all'interno di un contenitore metallico isolato. Nel 1755 egli scrisse ad un amico:

> Ho elettrificato una scatola d'argento, posta su un piedestallo e vi ho immesso una pallina di sughero avente diametro di un pollice, sospesa con un filo di seta, fino a che il sughero ha toccato il fondo della scatola. Il sughero non veniva attratto dalla parte interna della scatola, come invece avveniva all'esterno e, quando esso veniva estratto, pur avendo toccato il fondo, non risultava elettrificato dal contatto con la scatola, come invece sarebbe stato toccando la parete esterna. Il fatto è singolare. Mi chiedi una spiegazione; non la conosco...

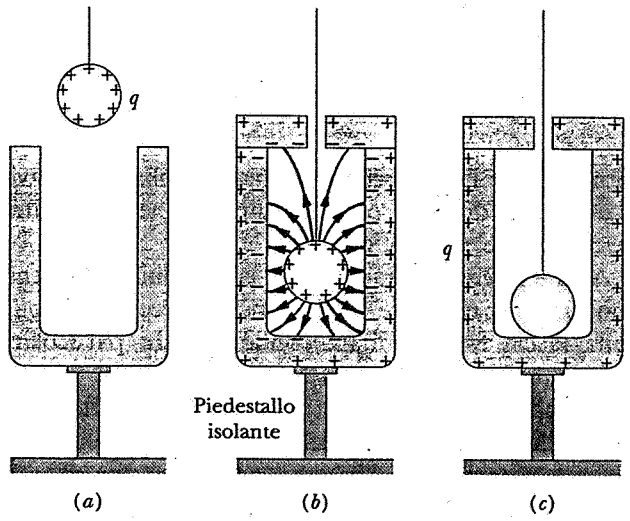


Figura 14 Un esperimento ideato da Benjamin Franklin per mostrare che la carica immessa in un conduttore si sposta sulla sua superficie. (*a*) Una sfera metallica carica viene abbassata in un contenitore di metallo scarico. (*b*) La sfera giace internamente al contenitore, il quale viene chiuso con un coperchio conduttore. Sono rappresentate qualitativamente le linee di forza che vanno dalla sfera al contenitore. La sfera attrae cariche di segno opposto sulla superficie interna del contenitore. (*c*) Quando la sfera tocca il fondo essa può essere vista come un tutt'uno con il contenitore stesso, per cui la sua carica netta deve scorrere sulla superficie esterna della scatola. La sfera viene poi rimossa dalla scatola. Osservando sperimentalmente che essa è scarica se ne deduce che la sua carica deve essersi riversata nel contenitore.

Circa 10 anni più tardi Franklin portò questo «fatto singolare» all'attenzione del suo amico Joseph Priestley (1733-1804). Nel 1786 (circa 20 anni prima degli esperimenti di Coulomb) Priestley riprodusse le osservazioni di Franklin e, con notevole acume, capì che da ciò derivava la legge dell'inverso del quadrato delle distanze per la forza elettrica. Perciò l'approccio indiretto è non solo più accurato di quello diretto descritto nella sezione 27-4, ma fu realizzato prima.

Priestley, ragionando in analogia con la gravitazione, asserì che il fatto che nessuna forza elettrica agisse sulla pallina di sughero di Franklin, quando essa era circondata da un contenitore metallico, era simile al fatto (vedi par. 16-5) che nessuna forza gravitazionale agisce su una particella rinchiusa entro un guscio sferico di materia; come la gravitazione ubbidisce ad una legge dell'inverso del quadrato, così, forse, doveva essere anche per la forza elettrica. Considerando l'esperimento di Franklin, Priestley così ragionò:

> Non possiamo dedurre da tutto ciò che l'attrazione elettrica è soggetta alle stesse leggi della gravitazione ed è perciò in accordo con la legge dei quadrati del-

le distanze, dato che si può facilmente dimostrare che se la Terra avesse la forma di un guscio, un corpo all'interno di esso non verrebbe attirato più da una parte che dall'altra?

Si noti come la conoscenza di una disciplina (la gravitazione) sia di aiuto per la comprensione di un'altra disciplina (l'elettrostatica).

Anche Michael Faraday condusse alcuni esperimenti concepiti per mostrare che la carica in eccesso staziona sulla faccia esterna di un conduttore. In particolare egli costruì una grande scatola metallica chiusa montata su supporti isolanti e caricata con un potente generatore elettrostatico. Usando le parole di Faraday:

> Entrai nel cubo e ci vissi dentro e, usando candele accese, elettrometri ed ogni metodo di misura di stati elettrici, non trovai alcun segnale su di essi ... quantunque nello stesso tempo il cubo venisse potentemente caricato dall'esterno e la sua superficie esterna diffondesse grandi scintille e luminescenze.

La legge di Coulomb è estremamente importante nella fisica e se δ non fosse rigorosamente zero ci sarebbero serie conseguenze nella comprensione dell'elettromagnetismo e della fisica quantistica. Il miglior modo per misurare δ consiste nell'indagare *sperimentalmente* se una carica in eccesso, posta su un conduttore isolato, si muova o non si muova *interamente* sulla sua superficie esterna.

Moderni esperimenti, condotti con notevole precisione, hanno mostrato che se δ nell'equazione 19 non è esattamente pari a zero, è comunque estremamente piccolo. La tabella 1 riassume i risultati dei più importanti esperimenti relativi a questa indagine.

La figura 15 illustra l'apparato utilizzato da Plimpton e Lawton per misurare δ. Esso è costituito, in linea di principio, da due gusci metallici concentrici, A e B, il primo dei quali ha un diametro di 1.5 m. Il guscio più interno contiene un elettrometro molto sensibile E connesso in modo da misurare la carica che

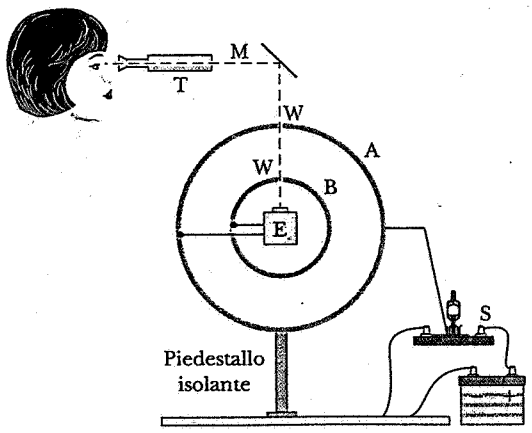


Figura 15 Una versione più moderna e più precisa dell'apparato della figura 14, anch'essa pensata per dimostrare che la carica netta staziona interamente sulla superficie esterna di un conduttore. Una certa quantità di carica viene immessa nella sfera A spostando l'interruttore S sulla destra. L'elettrometro di precisione E viene utilizzato per osservare se una pur piccola quantità di carica non si sposti sulla sfera piccola B. Ci si aspetta che tutta la carica rimanga sulla superficie esterna (sfera A).

eventualmente scorra tra i due gusci A e B. Se i due gusci sono elettricamente connessi, ogni carica posta sull'insieme dei due gusci dovrebbe spostarsi sul guscio più esterno A, ammesso che sia esatta la legge di Gauss (e quindi la legge di Coulomb).

Spostando l'interruttore S verso destra, una certa carica può essere immessa sull'insieme dei gusci. Se una parte di tale carica si trasferisse sul guscio B, essa dovrebbe attraversare l'elettrometro e provocherebbe una deflessione dell'ago che verrebbe osservata otticamente usando l'oculare T, lo specchio M e la finestra W.

L'esperimento venne realizzato spostando l'interruttore S alternativamente a destra e a sinistra, cioè collegando l'insieme dei gusci alla batteria o a terra; ma nessun segnale venne osservato. Conoscendo la sensibilità dell'elettrometro, Plimpton e Lawton calcolarono che δ dell'equazione 19 differisce da zero di non più di 2×10^{-9}, un valore davvero molto piccolo. Negli anni

TABELLA 1 ESPERIMENTI SULLA LEGGE DI COULOMB

Ideatori dell'esperimento	*Data*	*δ (Eq. 19)*
Franklin	1755	
Priestley	1767	...in accordo con i quadrati...
Robison	1769	< 0.06
Cavendish	1773	< 0.02
Coulomb	1785	qualche percento al massimo
Maxwell	1873	$< 5 \times 10^{-5}$
Plimpton e Lawton	1936	$< 2 \times 10^{-9}$
Bartlett, Goldhagen e Phillips	1970	$< 1.3 \times 10^{-13}$
Williams, Faller e Hill	1971	$< 1.0 \times 10^{-16}$

ISBN 88-408-0777-2

successivi al loro esperimento il limite superiore di δ è stato migliorato di oltre sette ordini di grandezza, da fisici sperimentali che disponevano di versioni più dettagliate e precise dello stesso apparato di base.

29-7 IL MODELLO NUCLEARE DELL'ATOMO *(Facoltativo)*

Un atomo è costituito da elettroni carichi negativamente legati ad un nucleo di carica positiva. Il nucleo positivo raccoglie la quasi totalità della massa dell'atomo poiché gli elettroni hanno un massa che è circa 1/4000 della massa dell'atomo. Nei primi anni del XX secolo c'è stato un grande interesse relativamente alla distribuzione di tale carica positiva.

In accordo con una teoria che era molto popolare in quegli anni, la carica positiva sarebbe distribuita più o meno uniformemente in tutto il volume sferico dell'atomo. Questo modello della struttura dell'atomo è chiamato *modello di Thomson* in onore di J.J. Thomson che lo propose (Thomson fu il primo a misurare il rapporto carica massa dell'elettrone ed è perciò spesso ritenuto lo scopritore dell'elettrone). Esso viene anche detto modello «a panettone», poiché gli elettroni sarebbero incorporati nella sfera di carica positiva distribuita come le uvette in un panettone.

Un modo per indagare questo modello consiste nel determinare il campo elettrico dell'atomo osservandone gli effetti su un fascio di proiettili carichi positivamente inviati nelle sue immediate vicinanze. Le particelle del fascio vengono deflesse dal campo elettrico dell'atomo. Nella discussione che segue considereremo soltanto l'effetto della sfera di carica positiva sul proiettile. Si assume che il proiettile abbia una massa molto *inferiore* rispetto a quella dell'atomo e molto *superiore* rispetto a quella dell'elettrone. In tal modo gli elettroni hanno un effetto trascurabile sulla deflessione del proiettile e l'atomo permane nel suo stato di quiete quando il proiettile viene deflesso.

Il campo elettrico dovuto ad una sfera di carica positiva distribuita uniformemente è descritto dall'equazione 16 per i punti all'esterno della sfera e dall'equazione 18 per i punti all'interno. Calcoliamo il campo elettrico sulla superficie che, come è mostrato nella figura 12, è il campo *più intenso* prodotto da questa distribuzione. Consideriamo un atomo pesante, come l'oro, che abbia una carica positiva Q pari a $79e$ e un raggio R di circa 1.0×10^{-10} m. Trascurando gli elettroni il campo elettrico in $r = R$ dovuto alle cariche positive è

$$E_{max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{(9\times10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1.6\times10^{-19}\ \text{C})}{(1.0\times10^{-10}\ \text{m})^2}$$
$$= 1.1\times10^{13}\ \text{N/C}.$$

Come proiettili adatti all'esperimento in esame, possono essere utilizzate le particelle alfa che hanno una carica positiva q pari a $2e$ ed una massa m di 6.64×10^{-27} kg. Le particelle alfa sono nuclei di atomi di elio, che vengono emessi in alcuni processi di decadimento radioattivo. Un tipico valore di energia cinetica per queste particelle potrebbe essere $K = 6$ MeV cioè 9.6×10^{-13} J. A questa energia la particella ha una velocità di

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(9.6\times10^{-13}\ \text{J})}{6.64\times10^{-27}\ \text{kg}}} = 1.7\times10^7\ \text{m/s}.$$

Si noti che questa velocità è circa $0.06c$, il che giustifica l'uso di relazioni non relativistiche tra la velocità e l'energia cinetica.

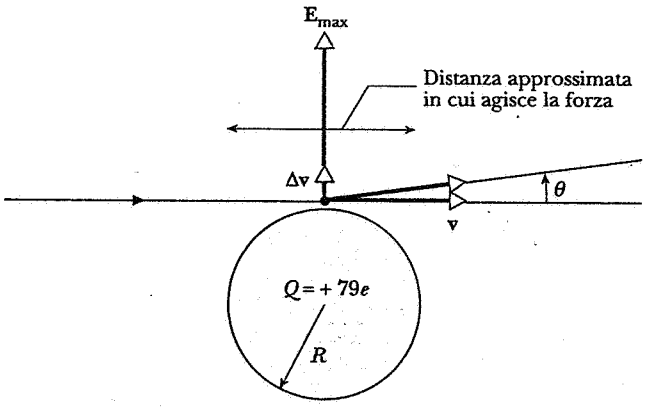


Figura 16 Deflessione di un proiettile carico positivamente in transito sopra la superficie di un atomo carico, rappresentato come una distribuzione uniforme sferica di carica positiva. Il campo elettrico agente sul proiettile causa una deflessione trasversale corrispondente all'angolo θ.

Supponiamo che la particella passi vicino alla superficie dell'atomo, dove agisce il campo elettrico massimo che esso può produrre. La forza corrispondente sulla particella è

$$F = qE_{max} = (2\times1.6\times10^{-19}\ \text{C})(1.1\times10^{13}\ \text{N/C}) = 3.5\times10^{-6}\ \text{N}.$$

La figura 16 mostra un diagramma schematico dell'esperimento di deflessione. Il calcolo della deflessione è relativamente complicato, ma si possono fare alcune approssimazioni che lo semplificano e consentono di arrivare ad una stima grossolana della deflessione massima. Assumiamo che la forza suddetta sia costante ed agisca soltanto durante il tempo Δt che il proiettile impiega per percorrere una distanza uguale alla lunghezza del diametro dell'atomo, come è indicato nella figura 16. Questo intervallo di tempo è

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = \frac{2(1.0\times10^{-10}\ \text{m})}{1.7\times10^7\ \text{m/s}} = 1.2\times10^{-17}\ \text{s}.$$

La forza imprime alla particella una accelerazione trasversa a che, a sua volta, produce una velocità trasversa Δv data da

$$\Delta v = a\,\Delta t = \frac{F}{m}\Delta t = \frac{3.5\times10^{-6}\ \text{N}}{6.64\times10^{-27}\ \text{kg}}1.2\times10^{-17}\ \text{s}.$$
$$= 6.6\times10^3\ \text{m/s}.$$

Questa è una piccola variazione se confrontata con il valore della velocità della particella (1.7×10^7 m/s). La particella verrà deflessa di un piccolo angolo θ di cui si può dare una stima

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\Delta v}{v} = \tan^{-1}\frac{6.6\times10^3\ \text{m/s}}{1.7\times10^7\ \text{m/s}} = 0.02°$$

Questo tipo di esperimento venne condotto per la prima volta da Ernest Rutherford e dai suoi collaboratori H.Geiger e E.Marsden nell'università di Manchester nel 1911. La figura 17 illustra i dettagli dell'esperimento che fecero per misurare l'angolo di deflessione. Un fascio di particelle alfa proveniente dalla sorgente radioattiva S veniva inviato sulla sottile lamella d'oro T ed era poi osservato dal rivelatore D che poteva essere spostato ad un qualuque angolo θ rispetto alla direzione del fascio incidente. Rutherford determinò, così, il numero di particelle per unità di tem-

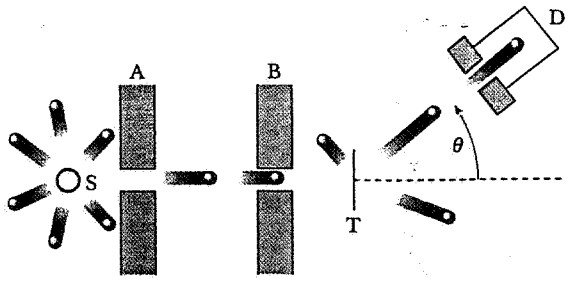


Figura 17 Configurazione dell'esperimento allestito per studiare la deflessione delle particelle alfa. Le particelle vengono emesse da una sorgente S e incidono su un bersaglio sottile T (lamina d'oro). Le particelle alfa deflesse vengono osservate attraverso il rivelatore D che può essere spostato a vari angoli θ.

po che, deviate dal processo di diffusione, colpivano il rivelatore ai vari angoli.

I risultati degli esperimenti sono mostrati schematicamente nella figura 18. Quantunque molte particelle vengano deviate ad angoli piccoli rispetto alla direzione di incidenza, come previsto dal nostro calcolo grossolano, alcune particelle, circa 1 su 10^4, vengono deviate ad un angolo così elevato da invertirne la direzione del moto. Questo risultato è sorprendente se si accetta il modello di Thomson, per il quale si è stimata una deflessione *massima* di circa 0.02°. Utilizzando le parole di Rutherford: "Era sicuramente il più incredibile evento che mi capitò in tutta la mia vita. Era come se un proiettile da 15 pollici sparato contro un foglio di carta velina tornasse indietro fino a colpirti di rimbalzo".

Basandosi su questo tipo di esperimento di deflessione, Rutherford concluse che la carica positiva di un atomo non era distribuita su una sfera avente lo stesso diametro dell'atomo, ma era concentrata in una piccola regione (il *nucleo*) nel centro di esso. Nel caso di un atomo d'oro, il nucleo ha un raggio di circa 7×10^{-15} m (7fm), più o meno 10^{-4} volte più piccolo del raggio dell'atomo. Cioè il nucleo occupa un volume pari a 10^{-12} volte quello dell'atomo!

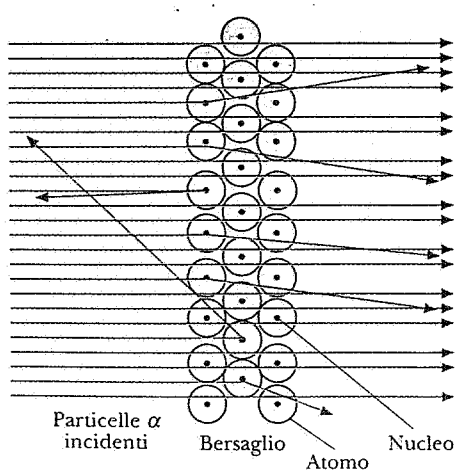


Figura 18 Rappresentazione schematica del processo di deflessione. La maggior parte delle particelle alfa attraversa il bersaglio senza subire alcuna perturbazione, alcune vengono deflesse di un angolo alfa piccolo. Occasionalmente (un caso su 10^4) una particella viene deflessa ad un angolo superiore a 90°.

Calcoliamo il campo elettrico massimo e la corrispondente forza esercitata su una particella alfa che passa vicino alla superficie del nucleo. Se consideriamo il nucleo come una sfera carica uniformemente avente carica netta di $Q = 79e$ e raggio $R = 7$ fm, il campo elettrico massimo è

$$E_{\max} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \frac{(9 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(79)(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})}{(7.0 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})^2}$$

Esso è più di otto ordini di grandezza maggiore del campo elettrico che agirebbe su una particella in transito sulla superficie di un atomo descritto con il modello a panettone. La forza corrispondente è

$$F = qE_{\max} = 2(1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(2.3 \times 10^{21}\ \mathrm{N/C}) = 740\ \mathrm{N}.$$

Questa è una grande forza! Proviamo a fare la stessa semplificazione che avevamo fatto nel calcolo precedente e supponiamo che questa forza sia costante ed agisca sulla particella soltanto durante il tempo Δt che serve alla particella per percorrere una distanza uguale al diametro del nucleo dell'atomo:

$$\Delta t = \frac{2R}{v} = \frac{2(7.0 \times 10^{-15}\ \mathrm{m})}{1.7 \times 10^7\ \mathrm{m})} = 8.2 \times 10^{-22}\ \mathrm{s}.$$

La variazione corrispondente di velocità della particella può essere stimata essere:

$$\Delta v = a\,\Delta t = \frac{F}{m}\,\Delta t = \frac{740\ \mathrm{N}}{6.64 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}} 8.2 \times 10^{-22}\ \mathrm{s}$$
$$= 9 \times 10^7\ \mathrm{m/s}.$$

Questo valore è confrontabile con il modulo della velocità stessa. Si conclude che un nucleo atomico produce un campo elettrico che è sufficientemente grande per potere invertire il moto del proiettile.

Possiamo misurare il raggio del nucleo inviandogli contro particelle alfa e misurando la loro deflessione. La deflessione può essere misurata con molta precisione *assumendo* che il proiettile sia sempre all'esterno della distribuzione di carica del nucleo, nel qual caso il campo elettrico è dato dalla equazione 16. Tuttavia, se inviamo il proiettile con sufficiente energia, esso può penetrare nella regione in cui $r < R$, dove c'è un campo elettrico diverso* (dato, per esempio, dall'eq. 18 se assumiamo che la distribuzione della carica nucleare sia uniforme) e dove, perciò, la sua deflessione sarà diversa da quella che calcoleremmo ipotizzando che il proiettile sia sempre al di fuori del nucleo. Trovare l'energia alla quale ciò avviene è un modo per misurare il raggio del nucleo dell'atomo. Da questi esperimenti si deduce che il raggio del nucleo di un atomo avente numero di massa atomica A, è circa $R_0A^{1/3}$, dove R_0 è circa 1.2 fm.

L'analisi di Rutherford è molto più dettagliata di quella che abbiamo qui descritto. Egli fu in grado di derivare una formula che dava l'esatta relazione tra il numero di particelle deviate e l'angolo di deflessione, basandosi soltanto sulla legge di tipo $1/r^2$ del campo elettrico e sottopose a test sperimentale tale formula per angoli compresi tra 0° e 180°. La sua formula dipendeva anche dal *numero atomico* Z degli atomi bersaglio per cui l'esperimento di deflessione forniva uno strumento sperimentale diretto per misurare il numero Z di un atomo. Egli concluse che la deflessione avviene come schematizzato nella figura 18: c'è soltanto

* (N.d.T.) In queste condizioni intervengono forze estremamente più intense di quelle elettriche. le forze nucleari «forti».

ISBN 88-408-0777-2

una piccola probabilità di avere un evento di deflessione, cosicchè la maggior parte delle particelle attraversano il bersaglio senza esserne deflesse e la probabilità di avere più di un singolo evento di deflessione sulla stessa particella è trascurabile. Ciò è in accordo con l'assunzione che il nucleo abbia una dimensione molto piccola rispetto a quella dell'atomo. L'atomo è per lo più costituito da spazio vuoto e c'è soltanto una piccola probabilità che il proiettile transiti nelle vicinanze di un nucleo, incontrando un campo elettrico sufficientemente intenso da esserne deflesso. Non c'è praticamente nessuna probabilità che ciò accada due volte al medesimo proiettile.*

Questa classica e accurata serie di esperimenti e la brillante interpretazione di essi costituì il fondamento della moderna fisica atomica e nucleare. Rutherford, pertanto, è generalmente ritenuto il fondatore di tali discipline.

* (N.d.T.) Questo è vero soltanto se la lamina che fa da bersaglio è molto sottile.

DOMANDE

1. Qual è la base dell'affermazione che le linee di forza del campo elettrico iniziano e finiscono soltanto sulle cariche elettriche?
2. Le cariche positive sono talvolta chiamate «sorgenti» e le cariche negative «pozzi» di campo elettrico. Come si giustifica questa terminologia? Ci sono sorgenti e/o pozzi di campo gravitazionale?
3. Per analogia con Φ_E, come si potrebbe definire il flusso Φ_g di un campo gravitazionale? Qual è il flusso del campo gravitazionale terrestre attraverso le pareti di una stanza in cui non sia contenuta materia? E attraverso una superficie sferica che circonda da vicino la Terra? E attraverso una superficie sferica di raggio pari alla distanza Terra-Luna?
4. Si consideri la superficie gaussiana che circonda una parte della distribuzione di carica della figura 19. (*a*) Quali cariche contribuiscono al campo elettrico nel punto *P*? (*b*) Il valore che si ottiene calcolando il flusso attraverso la superficie in esame sarebbe maggiore, uguale o minore se si considerasse il campo elettrico generato soltanto dalle cariche q_1 e q_2 anzichè quello generato da tutte le cariche?

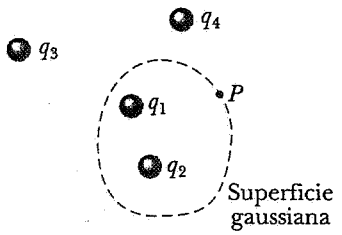


Figura 19 Domanda 4.

5. Si supponga che un campo elettrico, in una certa regione, sia costante in direzione e verso, ma sia decrescente in intensità. Che cosa si può concludere relativamente alla carica contenuta in quella regione? Si traccino schematicamente le linee di forza.
6. È esattamente vero che la legge di Gauss stabilisce che il numero totale di linee di forza intersecanti ogni superficie chiusa in verso uscente è proporzionale alla carica netta positiva racchiusa dalla superficie stessa?
7. Una carica puntiforme è posta nel centro di una superficie gaussiana sferica. Φ_E cambia (*a*) se la superficie viene sostituita con una superficie cubica avente lo stesso volume? (*b*) Se la sfera viene sostituita con un cubo avente volume pari a un decimo del volume di partenza? (*c*) Se la carica viene spostata dal centro della sfera di partenza, ma rimane dentro di essa? (*d*) Se la carica viene portata appena fuori dalla sfera di partenza? (*e*) Se una seconda carica viene posta vicina, appena fuori dalla sfera di partenza e (*f*) se la seconda carica viene messa all'interno della superficie gaussiana?
8. Nella legge di Gauss,

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q,$$

E è necessariamente il campo elettrico associato alla carica *q*?
9. Una superficie racchiude un dipolo elettrico. Che cosa si può dire relativamente a Φ_E attraverso tale superficie?
10. Si supponga che una superficie gaussiana non racchiuda alcuna carica netta. La legge di Gauss richiede che il campo elettrico **E** sia nullo in tutti i punti della superficie? L'inverso di questa affermazione è vero? Cioè, se **E** è nullo su tutta la superficie, la legge di Gauss richiede che essa non contenga alcuna carica netta?
11. La legge di Gauss è utile nel calcolo del campo elettrico generato da tre cariche uguali poste sui vertici di un triangolo equilatero? Si spieghi perché oppure perché no.
12. Una carica totale *Q* è distribuita uniformemente in un cubo di lato *a*. Il campo elettrico risultante in un punto esterno *P* ad una distanza *r* dal centro *C* del cubo è dato dalla espressione $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$? Si veda la figura 20. *E* può essere trovato costruendo una superficie gaussiana cubica «concentrica»? Se no, si spieghi perché. Che cosa si può dire di *E* se $r \gg a$?

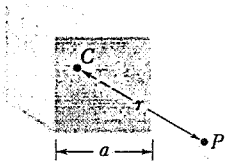


Figura 20 Domanda 12.

13. **E** è necessariamente nullo all'interno di un pallone di gomma carico, se esso è (*a*) sferico o (*b*) a forma di salsiccia? Per ciascuna forma si assuma che la carica sia distribuita uniformemente sulla superficie. Come cambierebbe la situazione – ammesso che cambi – se il pallone avesse una sottile pellicola di vernice conduttrice sulla sua superficie esterna?

14. Un pallone di gomma sferico porta una carica distribuita uniformemente sulla sua superficie. Quando il pallone viene gonfiato come varia E nei punti (*a*) interni al pallone, (*b*) appartenenti alla superficie del pallone e (*c*) esterni al pallone?
15. Nel paragrafo 29-3 abbiamo visto che la legge di Coulomb può essere dedotta dalla legge di Gauss. Ciò implica necessariamente che la legge di Gauss possa essere dedotta dalla legge di Coulomb?
16. La legge di Gauss continuerebbe a valere se l'esponente della legge di Coulomb non fosse esattamente 2?
17. Una grande, isolata cavità conduttrice porta una carica positiva. Una piccola sfera metallica appesa ad un filo isolante e contenente una carica negativa dello stesso valore viene introdotta dall'alto nella scatola fino a toccarne la superficie interna; poi viene estratta. Quale sarà alla fine la carica contenuta (*a*) nel conduttore e (*b*) nella sfera?
18. Si può dedurre dagli argomenti del paragrafo 29-4 che gli elettroni nei cavi di un impianto elettrico domestico si muovano soltanto sulla superficie dei cavi stessi? In caso contrario, perché?
19. Nel paragrafo 29-4 si è assunto che E sia uguale a zero in tutti i punti interni a un conduttore isolato. Tuttavia ci sono senz'altro campi elettrici molto intensi all'interno del conduttore, nei punti vicini agli elettroni o ai nuclei. Ciò invalida la dimostrazione del paragrafo 29-4? Si motivi la risposta.
20. La legge di Gauss, così come è applicata nel paragrafo 29-4, richiede che tutti gli elettroni di conduzione all'interno di un conduttore isolato risiedano sulla sua superficie?
21. Una carica puntiforme q viene posta al centro di una cavità sferica metallica. Quale carica ci sarà (*a*) sulla superficie interna e (*b*) sulla superficie esterna della sfera? (*c*) Se un oggetto metallico viene portato vicino alla sfera, le risposte ai punti (*a*) e (*b*) cambieranno? Cambierà il modo in cui la carica si distribuisce sulla sfera?
22. Se una carica $-q$ è distribuita uniformemente sulla superficie di un guscio metallico sferico sottile e isolato di raggio a, non ci sarà alcun campo elettrico all'interno. Se, ora, una carica puntiforme $+q$ viene posta nel centro della sfera, non ci sarà alcun campo elettrico all'esterno. Questa carica puntiforme può essere spostata di una distanza $d < a$ dal centro così che il sistema acquisti un momento di dipolo e produca un campo esterno. Come si può render conto dell'energia che appare all'esterno, immagazzinata in tale campo?
23. Come si può rimuovere completamente la carica in eccesso accumulata in un piccolo conduttore?
24. Si spieghi perché la simmetria sferica della figura 5 consenta di affermare che E può avere soltanto una componente radiale in ogni punto di osservazione (*suggerimento*: si supponga che vi siano altre componenti, per esempio nelle direzioni corrispondenti ai meridiani ed ai paralleli sulla superficie della Terra. La simmetria sferica richiede che tali componenti rimangano uguali da ogni prospettiva di osservazione. Si possono immaginare linee di campo di questo tipo che soddisfino al criterio accennato?)
25. Si spieghi perché la simmetria della figura 8 consente di affermare che E può avere soltanto una componente radiale in ogni punto di osservazione. Si ricordi che, in questo caso, il campo osservato non solo deve restare lo stesso al variare della posizione di osservazione sulla linea carica, ma deve anche restare lo stesso se la figura viene capovolta.
26. La carica *totale* su una bacchetta carica infinita è infinita. Perché E non è anch'esso infinito? Dopo tutto, in accordo con la legge di Coulomb, se q è infinita anche il campo E è infinito.
27. Si spieghi perché la simmetria della figura 9 consente di affermare che E può avere soltanto una componente perpendicolare al foglio. Perché, per esempio, E non può avere una componente parallela al foglio? Si ricordi che, in questo caso, il campo osservato non solo deve restare lo stesso al variare della posizione di osservazione sul foglio, ma deve anche restare lo stesso se la figura viene ruotata attorno a una linea perpendicolare al foglio.
28. Il campo generato da una distribuzione di carica uniforme, piana e infinita è uniforme ed ha uguale intensità in tutti i punti, indipendentemente dalla distanza dalla superficie della distribuzione stessa. Si spieghi come ciò può essere, data la natura di dipendenza dall'inverso del quadrato delle distanze della legge di Coulomb.
29. Penetrando in una distribuzione di carica sferica ed uniforme, E dovrebbe decrescere poiché vi è una minor quantità di carica entro una sfera concentrica passante per il punto di osservazione. D'altra parte E dovrebbe crescere poiché ci si avvicina al centro di questa carica. Quale effetto è dominante e perché?
30. Data una distribuzione di carica a simmetria sferica (non necessariamente con densità di carica uniforme nella direzione radiale), E è necessariamente massimo sulla superficie? Si commentino le varie possibilità.
31. L'equazione 16 resta vera relativamente alla figura 11*a* se (*a*) c'è una cavità sferica concentrica nel corpo, (*b*) c'è una carica puntiforme Q nel centro di questa cavità o (*c*) la carica Q è dentro la cavità ma non al suo centro?
32. Un atomo è normalmente *elettricamente neutro*. Perché, allora, una particella alfa dovrebbe essere deflessa dall'atomo in ogni circostanza?

PROBLEMI

Paragrafo 29-2 Il flusso del campo elettrico

1. La superficie quadrata mostrata nella figura 21 misura 3.2 mm su ogni lato. Essa è immersa in un campo elettrico uniforme con $E = 1800$ N/C. Le linee del campo formano un angolo di 65° con la normale «uscente», come illustrato. Si calcoli il flusso attraverso la superficie.
2. Un cubo di lato pari a 1.4 m è orientato come mostrato nella figura 22, in una regione di campo elettrico uniforme. Si trovi il flusso attraverso la faccia più chiara se il campo elettrico, in N/C, è dato da (*a*) $6\mathbf{i}$, (*b*) $-2\mathbf{j}$ e (*c*) $-3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$. (*d*) Si calcoli il flusso totale attraverso il cubo per ognuno di questi campi.
3. Si calcoli Φ_E attraverso (*a*) la base piatta e (*b*) la superficie curva di un emisfero di raggio R. Il campo E sia uniforme e parallelo all'asse dell'emisfero e le linee di E entrino attraverso la base piatta (si faccia uso della normale uscente).

ISBN 88-408-0777-2

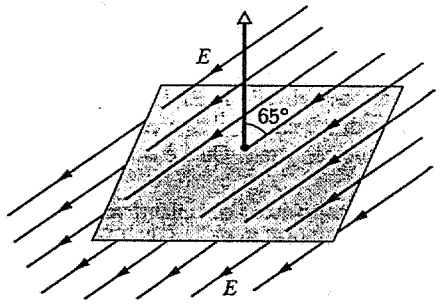


Figura 21 Problema 1.

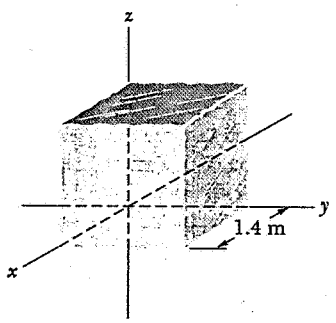


Figura 22 Problema 2.

Paragrafo 29-3 La legge di Gauss

4. In un conduttore isolato complessivamente scarico, una certa quantità di carica viene separata portando nelle immediate vicinanze una bacchetta carica positivamente, come mostrato nella figura 23. Si calcoli il flusso attraverso le cinque superfici gaussiane tracciate. Si assuma che la carica negativa indotta sul conduttore sia uguale alla carica positiva q sulla bacchetta.

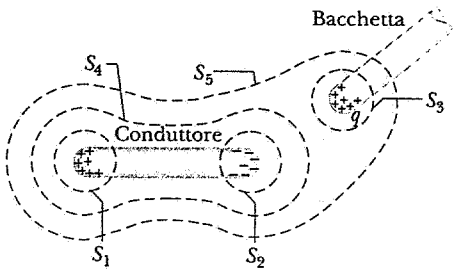


Figura 23 Problema 4.

5. Una carica puntiforme di 1.84 μC si trova al centro di una superficie gaussiana cubica di lato pari a 55 cm. Si trovi Φ_E attraverso la superficie.

6. Il flusso elettrico netto attraverso ciascuna faccia di un dado ha modulo uguale al numero che compare sulla faccia stessa (da 1 a 6) moltiplicato per l'unità 10^3 N · m^2/C. Il flusso è entrante per i numeri dispari e uscente per quelli pari. Qual è la carica netta contenuta nel dado?

7. Una carica puntiforme + q si trova ad una distanza d 2 da una superficie quadrata di lato d ed è proprio sopra al centro del quadrato. come è mostrato nella figura 24. Si trovi il flusso del campo elettrico attraverso il quadrato (*suggerimento*: si pensi al quadrato come a una faccia di un cubo di lato d).

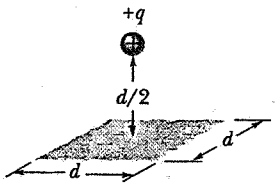


Figura 24 Problema 7.

8. Una retina per farfalle si trova in un campo elettrico uniforme E come mostrato nella figura 25. Il telaio, un cerchio di raggio a, è disposto perpendicolarmente al campo. Si trovi il flusso del campo attraverso la retina, relativamente alla normale uscente.

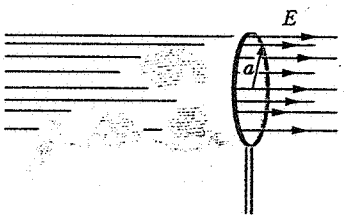


Figura 25 Problema 8.

9. Sperimentalmente si trova che il campo elettrico in una certa regione dell'atmosfera della Terra è diretto verticalmente verso il basso. Ad una altitudine di 300 m il campo vale 58 N/C e ad una altitudine di 200 m esso vale 110 N/C. Si trovi la quantità netta di carica contenuta in un cubo avente lato di 100 m posizionato ad una altitudine tra i 200 e i 300 m. Si trascuri la curvatura della Terra.

10. Si trovi il flusso netto attraverso il cubo del problema 2 e della figura 22 quando il campo elettrico è dato, in unità di misura SI, da (*a*) $\mathbf{E} = 3y\mathbf{j}$ e (*b*) $\mathbf{E} = -4\mathbf{i} + (6 + 3y)\mathbf{j}$. (*c*) In ciascun caso, quanta carica è contenuta nel cubo?

11. La «legge di Gauss per la gravitazione» è

$$\frac{1}{4\pi G}\Phi_g = \frac{1}{4\pi G}\oint \mathbf{g}\cdot d\mathbf{A} = -m,$$

dove m è la massa contenuta e G è la costante di gravitazione universale. Si derivi, da essa, la legge della gravitazione di Newton. Qual è il significato del segno meno?

12. Una carica puntiforme q viene posta su un vertice di un cubo di lato a. Qual è il flusso attraverso ognuna delle facce del cubo? (*Suggerimento*: si usino la legge di Gauss e argomenti di simmetria)

13. Le componenti del campo elettrico della figura 26 sono: $E_x = bx^{1/2}$, $E_y = E_z = 0$, essendo $b = 8830$ N/C · $m^{1/2}$. Si calcoli (*a*) il flusso Φ_E attraverso il cubo e (*b*) la carica contenuta nel cubo. Si assuma $a = 13.0$ cm.

Paragrafo 29-4 Un conduttore carico isolato

14. Una sfera conduttrice uniformemente carica avente raggio di 1.22 m ha una densità di carica superficiale di 8.13 μC/m^2.

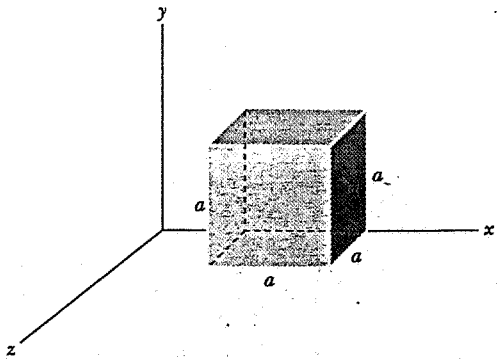


Figura 26 Problema 13.

(*a*) Si determini la carica sulla sfera. (*b*) Qual è il flusso totale del campo elettrico uscente dalla superficie della sfera? (*c*) Calcolare il campo elettrico sulla superficie della sfera.

15. I veicoli spaziali che transitano attraverso lo strato di radiazione terrestre collidono con elettroni intrappolati. Dato che nello spazio non esiste una terra, la quantità di carica accumulata può essere notevole e può danneggiare i componenti elettronici, causando malfunzionamenti nei circuiti di controllo e anomalie operative. Un satellite sferico di 1.3 m di diametro accumula 2.4 μC di carica per ogni rivoluzione orbitale. (*a*) Si determini la densità di carica superficiale. (*b*) Si calcoli il conseguente campo elettrico appena all'esterno della superficie del satellite.
16. L'equazione 11 ($E = \sigma/\epsilon_0$) dà il campo elettrico nei punti prossimi alla superficie di un corpo conduttore. Si applichi questa equazione ad una sfera conduttrice di raggio r, avente una carica q sulla sua superficie e si mostri che il campo elettrico all'esterno della sfera è uguale al campo elettrico di una carica puntiforme posizionata al centro della sfera.
17. Una sfera conduttrice su cui è presente una carica Q è circondata da un guscio sferico conduttore. (*a*) Qual è la carica netta sulla superficie interna del guscio? (*b*) Una carica q viene posta al di fuori del guscio. Qual è ora la carica netta sulla superficie interna del guscio? (*c*) Se q viene spostata in una posizione intermedia tra il guscio e la sfera qual è la carica netta sulla superficie interna del guscio? (*d*) Le risposte date ai punti precedenti valgono anche se il guscio e la sfera non sono concentrici?
18. Su un conduttore isolato di forma arbitraria è presente una carica netta di + 10 μC. All'interno del conduttore vi è una cavità nella quale è racchiusa una carica $q = +3.0$ μC. Qual è la carica (*a*) sulla parete della cavità e (*b*) sulla superficie esterna del conduttore?
19. Su una superficie piana quadrata avente lato di 8.0 cm è distribuita una carica totale di 6.0 μC. (*a*) Usando l'approssimazione del piano infinito si calcoli il campo elettrico ad una distanza di 0.50 mm dalla superficie del piano in corrispondenza al suo centro. (*b*) Si stimi il campo ad una distanza di 30 m.

Paragrafo 29-5 Applicazioni della legge di Gauss

20. Una distribuzione rettilinea di carica genera un campo di 4.52×10^4 N C ad una distanza di 1.96 m. Si calcoli la densità di carica lineare.
21. (*a*) Il rullo della macchina fotocopiatrice dell'esempio 3 ha una lunghezza di 42 cm e un diametro di 12 cm. Qual è la carica totale sul rullo? (*b*) Il costruttore vuole produrre una versione da tavolo della macchina. Per fare ciò è necessario ridurre la dimensione del rullo fino ad una lunghezza di 28 cm ed un diametro di 8.0 cm. Il campo elettrico sulla superficie del rullo deve restare uguale. Qual è la carica totale necessaria?
22. Due fogli sottili, molto estesi ed isolanti vengono caricati positivamente e posti l'uno di fronte all'altro, come illustrato nella figura 27. Si determini **E** nei punti (*a*) alla sinistra dei due fogli, (*b*) tra i due fogli e (*c*) alla destra dei due fogli. Si assuma la stessa densità di carica superficiale σ sui due fogli. Si considerino soltanto punti lontani dai bordi, la cui distanza dai fogli sia piccola rispetto alle loro dimensioni (*suggerimento*: si veda l'esempio 6).

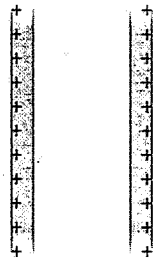


Figura 27 Problema 22.

23. Due grandi piatti metallici sono affacciati come mostrato nella figura 28. Su di essi è presente una carica avente densità superficiale, rispettivamente, $+\sigma$ e $-\sigma$ sulle superfici interne. Si determini **E** nei punti (*a*) alla sinistra dei piatti, (*b*) tra di essi e (*c*) alla destra dei piatti. Si considerino soltanto punti lontani dai bordi, la cui distanza dai piatti sia piccola rispetto alle loro dimensioni (*suggerimento*: si veda l'esempio 6).

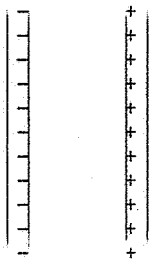


Figura 28 Problema 23.

24. Un elettrone rimane fermo in un campo elettrico diretto verso il basso in presenza del campo gravitazionale terrestre. Se il campo elettrico è generato dalla carica immessa su due grandi piatti paralleli conduttori. caricati con segno opposto e posti ad una distanza di 2.3 cm l'uno dall'altro, qual è la densità di carica superficiale, assunta uniforme, sui piatti?
25. Su una piccola sfera avente massa m di 1.12 mg è presente una carica $q = 19.7$ nC. Essa è appesa nel campo gravitazionale attraverso un filo di seta e forma un angolo $\theta = 27.4°$ con un grande foglio isolante carico uniformemente, come mostrato nella figura 29. Si determini la densità di carica superficiale σ sul foglio.

ISBN 88-408-0777-2

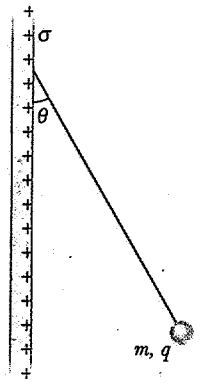


Figura 29 Problema 25.

26. Due sottili gusci sferici concentrici carichi hanno rispettivamente, raggio pari a 10.0 cm e 15.0 cm. La carica sul guscio interno vale 40.6 nC e quella sul guscio esterno vale 19.3 nC. Si determini il campo elettrico (*a*) per $r = 12.0$ cm, (*b*) per $r = 22.0$ cm e (*c*) per $r = 8.18$ cm dal centro dei gusci.

27. Su un cavo sottile rettilineo molto lungo è presente una densità di carica di -3.60 nC/m statica. Il cavo viene circondato da una distribuzione di carica uniforme cilindrica avente raggio di 1.50 cm, coassiale con il cavo. La densità di carica di volume ρ del cilindro deve essere scelta in modo che il campo elettrico netto al di fuori del cilindro sia nullo. Si calcoli la densità di carica positiva necessaria ρ.

28. La figura 30 mostra una carica $+ q$ distribuita uniformemente su una sfera di raggio a e posta nel centro di un guscio conduttore sferico avente raggio interno b e raggio esterno c. Sul guscio esterno è presente una carica $- q$. Si determini $E(r)$ nei punti (*a*) interni alla sfera ($r < a$), (*b*) tra la sfera e il guscio ($a < r < b$), (*c*) interni al guscio ($b < r < c$) e (*d*) esterni al guscio ($r > c$). (*e*) Quale carica appare sulle superfici interna ed esterna del guscio?

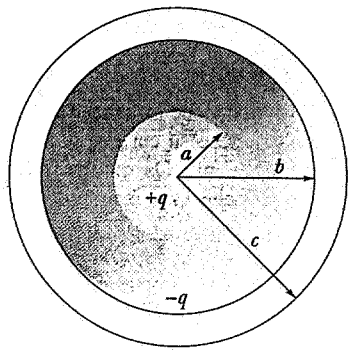


Figura 30 Problema 28.

29. Su un cilindro conduttore molto grande (lunghezza L) è presente una carica totale $+ q$. Esso è circondato da un guscio cilindrico conduttore (anch'esso di lunghezza L) su cui è presente una carica totale $-2q$, come mostrato in sezione nella figura 31. Si utilizzi la legge di Gauss per determinare (*a*) il campo elettrico nei punti esterni al guscio conduttore, (*b*) la distribuzione di carica sul guscio conduttore e (*c*) il campo elettrico nella regione compresa tra il cilindro e il guscio.

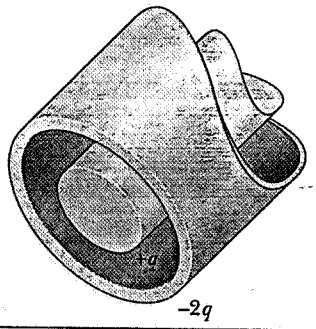


Figura 31 Problema 29.

30. La figura 32 mostra una carica puntiforme $q = 126$ nC nel centro di una cavità sferica di raggio pari a 3.66 cm ricavata in un pezzo di metallo. Si utilizzi la legge di Gauss per determinare il campo elettrico (*a*) nel punto P_1, a metà strada tra il centro e la superficie e (*b*) nel punto P_2.

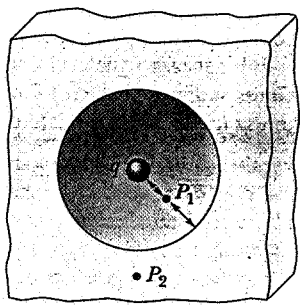


Figura 32 Problema 30.

31. Un protone orbita con una velocità $v = 294$ km/s appena al di fuori di una sfera carica avente raggio $r = 1.13$ cm. Si determini la carica contenuta nella sfera.

32. Su una superficie piana isolante molto estesa è distribuita uniformemente una carica con densità σ. Un piccolo foro circolare di raggio R viene ricavato nel punto centrale del foglio, come mostrato nella figura 33. Si ignori la distorsione delle linee di campo su tutti i bordi e si calcoli il campo elettrico nel punto P, ad una distanza z dal centro del foro lungo il suo asse (*suggerimento*: si veda l'eq. 17 del cap. 28 e si usi il principio di sovrapposizione).

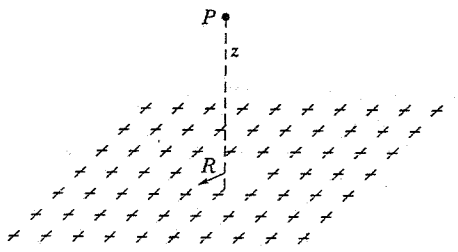


Figura 33 Problema 32.

33. La figura 34 mostra una sezione di un lungo tubo metallico avente parete sottile e raggio R, sulla cui superficie è presente una carica per unità di lunghezza λ. Si determini l'espressione

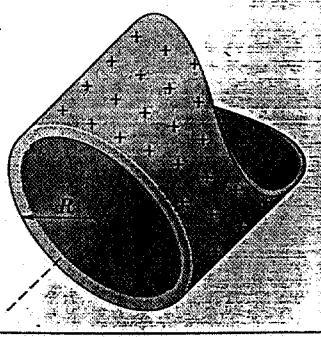


Figura 34 Problema 33.

di E per varie distanze r dall'asse del tubo, considerando i casi (*a*) $r > R$ e (*b*) $r < R$. (*c*) Si traccino i risultati da $r = 0$ ad $r = 5.0$ cm, assumendo che $\lambda = 2.0 \times 10^{-8}$ C/m e $R = 3.0$ cm (*suggerimento*: si utilizzino superfici gaussiane cilindriche coassiali con il tubo metallico).

34. La figura 35 mostra una sezione di due lunghi cilindri metallici concentrici di raggio a e b. Sui due cilindri è presente una carica per unità di lunghezza uguale ed opposta λ. Utilizzando la legge di Gauss si dimostri che (*a*) $E = 0$ per $r < a$ e (*b*) nella zona compresa tra i cilindri E è dato da

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}.$$

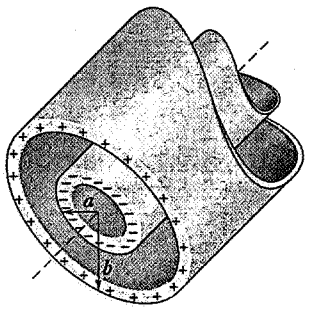


Figura 35 Problema 34.

35. Nel sistema del problema 34 un positrone percorre un'orbita circolare e concentrica con i cilindri nella regione tra essi compresa. Si determini la sua energia cinetica espressa in eV. Si assuma che $\lambda = 30$ nC/m. (Perché non è necessario conoscere i raggi dei cilindri?).

36. La figura 36 mostra un contatore Geiger, utilizzato per rivelare radiazione ionizzante. Il contatore è costituito da un cavo centrale sottile, su cui è presente una carica positiva, circondato da un cilindro conduttore concentrico su cui è presente una carica negativa uguale in modulo a quella del cavo. Tale sistema genera un forte campo elettrico radiale all'interno del cilindro. Il cilindro contiene un gas inerte a bassa pressione. Quando una particella entra nel sistema attraverso la parete del cilindro, essa ionizza alcuni atomi del gas. Gli elettroni liberi così rilasciati vengono attratti dal cavo centrale positivo. Il campo elettrico è così intenso che nel percorso compreso tra due collisioni successive con gli atomi del gas, gli elettroni acquistano una energia sufficiente per ionizzare nuovamente gli atomi del gas stesso. Molti elettroni liberi vengono quindi rilasciati e il processo si ripete fino a che essi raggiungono il cavo. La «valanga» di elettroni è raccolta dal cavo e genera un segnale che registra il passaggio della particella incidente. Si supponga che il raggio del cavo centrale sia di 25 μm, il raggio del cilindro 1.4 cm e la lunghezza del tubo 16 cm. Il campo elettrico sulla parete del cilindro è pari a 2.9×10^4 N/C. Si calcoli la quantità di carica positiva sul cavo centrale (*suggerimento*: si veda il problema 34).

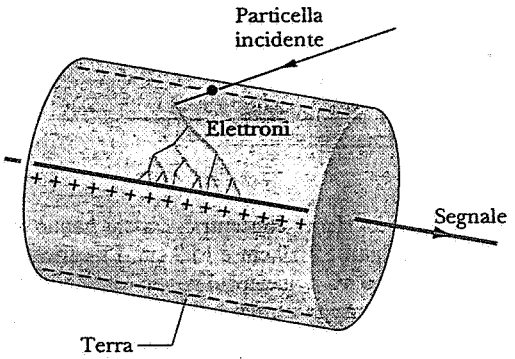


Figura 36 Problema 36.

37. Due lunghi cilindri concentrici carichi hanno raggio di 3.22 cm e 6.18 cm. La densità di carica superficiale sul cilindro interno è 24.7 μC/m^2 e quella sul cilindro esterno è −18.0 μC/m^2. Si determini il campo elettrico a (*a*) $r = 4.10$ cm e (*b*) $r = 8.20$ cm.

38. Nel centro di un guscio sferico metallico, sottile e scarico vi è una carica puntiforme q. Si derivi l'espressione del campo elettrico (*a*) all'interno del guscio e (*b*) all'esterno del guscio, utilizzando la legge di Gauss. (*c*) Il guscio ha qualche effetto sul campo generato da q? (*d*) La presenza di q genera qualche effetto sul guscio? (*e*) Se una seconda carica puntiforme viene posta al di fuori del guscio, essa subisce una forza? (*f*) La carica posta all'interno del guscio subisce una forza? (*g*) C'è qui una contraddizione con la terza legge di Newton? Perché o perché no?

39. Un elettrone di 115 keV viene proiettato contro un foglio di plastica piano molto esteso su cui vi è una densità di carica superficiale di −2.08 μC/m^2. Da quale distanza deve essere inviato l'elettrone affinchè esso incominci a non riuscire a raggiungere il foglio?

40. Le particelle di polvere cariche dello spazio interstellare, ognuna con un elettrone in eccesso e ciascuna con la stessa massa, formano una nuvola stabile, sferica e uniforme. Si determini la massa di ogni particella.

41. Una carica positiva è distribuita uniformemente in un lungo guscio cilindrico isolante avente raggio interno R e raggio esterno $2R$. A quale distanza radiale dalla superficie esterna della distribuzione di carica l'intensità del campo elettrico si dimezza rispetto al valore che ha sulla superficie?

42. Nella regione sferica $a < r < b$ c'è una carica per unità di volume pari a $\rho = A/r$, dove A è costante. Al centro ($r = 0$) della cavità c'è una carica puntiforme q. Quale dovrebbe essere il valore di A affinchè il campo elettrico abbia intensità costante nella regione $a < r < b$?

43. Si mostri che sotto l'azione di sole forze elettrostatiche l'equilibrio stabile è impossibile (*suggerimento*: Si assuma che in un

ISBN 88-408-0777-2

certo punto P in un campo elettrico E, una carica $+q$ stia in condizioni di equilibrio stabile. Si tracci una superficie gaussiana sferica attorno a P. Si immagini come E debba puntare su questa superficie e si applichi la legge di Gauss per mostrare che l'ipotesi fatta porta ad una contraddizione). Questo risultato è noto come teorema di Earnshaw.

44. Su una regione sferica è presente una carica per unità di volume ρ uniforme. Sia r il vettore che va dal centro della sfera ad un punto generico P interno alla sfera. (*a*) Si mostri che il campo elettrico in P è dato da $\mathbf{E} = \rho\mathbf{r}/3\epsilon_0$. (*b*) Una cavità sferica è ricavata nella sfera spraddetta, come mostrato nella figura 37. Utilizzando i concetti della sovrapposizione si mostri che il campo elettrico in tutti i punti della cavità è $\mathbf{E} = \rho\mathbf{a}/3\epsilon_0$ (campo uniforme), essendo a il vettore che collega il centro della sfera con il centro della cavità. Si noti che ambedue i risultati sono indipendenti dal raggio della sfera e da quello della cavità.

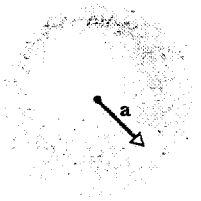


Figura 37 Problema 44.

45. Una carica è distribuita uniformemente in un cilindro infinitamente lungo di raggio R. (*a*) Si mostri che E ad una distanza r dall'asse del cilindro ($r < R$) è dato da

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

dove ρ è la densità di carica di volume. (*b*) Quale risultato si dovrebbe ottenere per $r > R$?

46. Una lastra piana di spessore d ha densità di carica di volume ρ uniforme. Si determini l'intensità del campo elettrico in tutti i punti dello spazio, sia (*a*) internamente che (*b*) esternamente alla lastra, in funzione di x, la distanza misurata dal piano mediano della lastra.

47. Su una sfera isolante di raggio R c'è una distribuzione di carica non uniforme pari a $\rho = \rho_s r/R$, dove ρ_s è una costante e r è la distanza dal centro della sfera. Si mostri che (*a*) la carica totale sulla sfera è $Q = \pi\rho_s R^3$ e (*b*) il campo elettrico all'interno della sfera è dato da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R^4}r^2.$$

48. Si costruisca una superficie gaussiana *sferica* centrata su una linea di carica infinitamente lunga, si calcoli il flusso attraverso la sfera e si mostri che, di conseguenza, la legge di Gauss è soddisfatta.

Paragrafo 29-7 Il modello nucleare dell'atomo

49. In una memoria del 1911 Ernest Rutherford scrisse:

> Per dare un'idea della forza necessaria per deflettere una particella alfa a grande angolo, si consideri un atomo che contenga una carica puntiforme positiva Ze nel suo centro e sia circondato da una distribuzione di elettricità negativa $-Ze$ uniformemente distribuita a forma sferica di raggio R. Il campo elettrico E... ad una distanza r dal centro per un punto *interno* all'atomo [è]:
>
> $$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right).$$
>
> Si verifichi questa equazione.

50. La figura 38 mostra il modello dell'atomo di Thomson per l'elio ($Z = 2$). Due elettroni, a riposo, sono incorporati nella sfera di carica positiva pari a $2e$. Si determini la distanza d tra gli elettroni necessaria perché la configurazione sia in equilibrio statico.

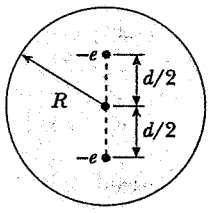


Figura 38 Problema 50.

Progetti al calcolatore

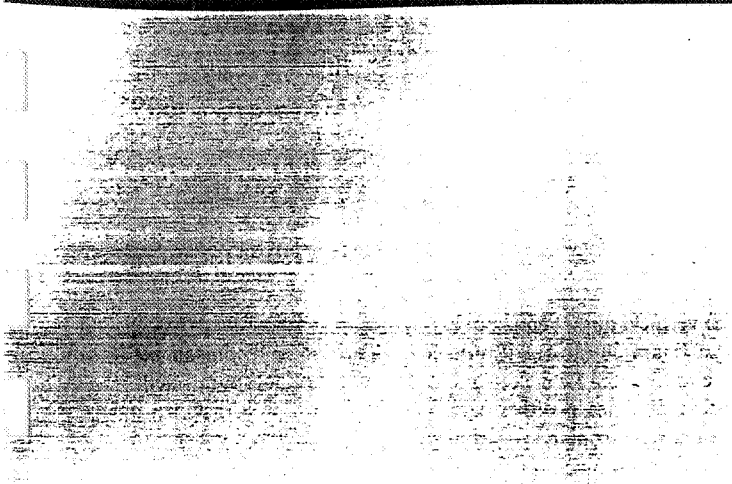
51. Modificando il programma dato in appendice 1, di cui si è fatto uso nel paragrafo 28-6 per calcolare la traiettoria di una particella in un campo elettrico non uniforme, si trovi la traiettoria di una particella che viene deviata in un processo di deflessione dal campo elettrico di un'altra particella, come nell'esperimento di Rutherford (vedi par. 29-7).

Si scelga il protone ($q = +e$, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) come particella deviata e un atomo d'oro ($Q = +79e$) come bersaglio, che si assume essere fisso nell'origine del sistema di coordinate xz. Si utilizzino le componenti E_x ed E_z del campo elettrico del bersaglio per determinare le componenti dell'accelerazione a_x ed a_z del protone. Si ipotizzi che la posizione iniziale del protone sia $z_0 = 3$ fm (il parametro d'impatto b) mentre x_0 sia molto grande e negativo (diciamo -2000 fm) e supponiamo che il protone inizialmente si muova parallelamente all'asse x ($v_{0_x} > 0$, $v_{0_z} = 0$) con una velocità corrispondente ad una energia cinetica K di 4.7 MeV. Si impongano piccoli incrementi di tempo nel fare il calcolo e si tabulino x, z, v_x, v_z, $r = (x^2 + z^2)^{1/2}$ e $\Phi = \tan^{-1}(z/x)$ come funzioni del tempo t. Si tracci la traiettoria della particella e la si confronti con la traiettoria calcolata, che può essere dedotta, partendo dalla legge di Newton, attraverso la espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b}\operatorname{sen}\phi + \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 b^2 K}(\cos\phi - 1).$$

Per evitare errori , l'incremento di tempo deve essere scelto molto piccolo. Per verificare se il tempo scelto sia sufficientemente breve, si lanci il programma e si esamini la traiettoria a tempi sufficientemente grandi, nei quali il protone sia lontano dal nucleo d'oro, dopo la deflessione. La traiettoria dovrebbe essere simmetrica nelle due parti che precedono e seguono il punto di massimo avvicinamento del protone al bersaglio e le velocità iniziale e finale dovrebbero essere uguali.

Si ripeta il calcolo per diversi valori del parametro d'impatto. Per ciascun valore di b si determini l'angolo di deflessione $\theta = \pi - \phi$, valutando ϕ per $r \to \infty$ dopo la deflessione. Si tracci θ in funzione di b e si provi a determinare la relazione tra di essi.



Capitolo 30

IL POTENZIALE ELETTRICO

Nei capitoli 7 e 8 abbiamo appreso che in taluni casi l'approccio energetico allo studio della dinamica delle particelle materiali può portare non solo a semplificazioni, ma anche a una comprensione più profonda della materia. Nel capitolo 16 abbiamo utilizzato il metodo energetico nei casi relativi alla forza gravitazionale; siamo stati così in grado di determinare alcune grandezze come la velocità di fuga e i parametri orbitali dei pianeti e dei satelliti.

Un vantaggio del metodo energetico è che, mentre la forza è un vettore, l'energia è uno scalare. Nei problemi relativi a forze e campi vettoriali, i calcoli che richiedono somme ed integrali sono spesso complicati. Per esempio, quando abbiamo calcolato il campo elettrico generato da distribuzioni di carica continue (capitolo 28), è stato necessario tenere conto della natura vettoriale del campo e svolgere gli integrali di conseguenza.

*In questo capitolo estenderemo il metodo energetico allo studio dell'elettrostatica. Incominceremo con l'*energia potenziale elettrica, *una quantità scalare che caratterizza una forza elettrostatica proprio come l'energia potenziale gravitazionale caratterizza una forza gravitazionale. Successivamente generalizzeremo al caso di una distribuzione di carica arbitraria e introdurremo il concetto di* potenziale elettrico. *Si determinerà il potenziale per distribuzioni di carica discrete e continue e si mostrerà che il campo elettrico e il potenziale elettrico sono completamente correlati; dato uno, si può trovare l'altro.*

30-1 LE FORZE ELETTROSTATICHE E GRAVITAZIONALI

L'analogia tra le forze elettrostatiche e quelle gravitazionali consente di semplificare la derivazione delle quantità elettrostatiche, facendo riferimento alla derivazione delle quantità gravitazionali corrispondenti, svolta nel capitolo 16. Si notino le analogie tra le due leggi di forza:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \text{(gravitazionale)}, \qquad (1a)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \text{(elettrostatica)}, \qquad (1b)$$

che danno, rispettivamente, la forza gravitazionale tra due particelle di massa m_1 e m_2 e la forza elettrostatica tra due particelle di carica q_1 e q_2, in entrambi i casi poste ad una distanza r l'una dall'altra. Le due leggi di forza hanno esattamente la stessa forma: una costante (G o $1/4\pi\epsilon_0$) che determina l'intensità della forza, moltiplicata per una proprietà delle due particelle (massa o carica) divisa per il quadrato della loro separazione. Cioè, sia la legge di Newton della gravitazione che la legge di Coulomb sono *leggi dell'inverso dei quadrati.*

Nel paragrafo 16-7 abbiamo introdotto il campo gravitazionale **g**, definito in ogni punto come la forza gravitazionale per unità di massa esercitata su un corpo di prova avente massa m_0 posto in quello stesso punto. Il campo elettrico **E** è stato definito nell'equazione 2 del capitolo 28 in un modo molto simile, come la forza elettrostatica per unità di carica esercitata su una carica di prova q_0. Si noti l'analogia tra le definizioni matematiche:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m_0} \qquad \text{(gravitazionale)}, \qquad (2a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \qquad \text{(elettrostatica)}, \qquad (2b)$$

In entrambi i casi le equazioni 2 definiscono una procedura operativa per misurare il campo.

È interessante ricordare che la differenza di energia potenziale ΔU per spostamenti di una particella tra il punto a e il punto b sotto l'effetto di una forza **F** è uguale al lavoro compiuto dalla forza cambiato di segno, cioè:

$$\Delta U = -L_{ab}. \qquad (3)$$

dove L_{ab} è il lavoro compiuto dalla forza quando la particella si sposta dal punto a al punto b. L'equazio-

ISBN 88-408-0777-2

ne 3 si applica soltanto se la forza è conservativa; infatti l'energia potenziale è definita *soltanto* per forze conservative, come si è discusso nel paragrafo 8-2. Possiamo anche riscrivere l'equazione 3 come

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \qquad (4)$$

Nel capitolo 8 si è generalizzato il concetto di differenza di energia potenziale nel concetto di energia potenziale definendo nulla l'energia potenziale in un punto di riferimento comodo. È conveniente, come descritto nel paragrafo 16-6, scegliere il punto di riferimento per l'energia potenziale in corrispondenza ad una distanza infinita tra le particelle (dove la forza è nulla, in accordo all'equazione 1*a*) ponendo a zero l'energia potenziale in tale condizione.

L'energia potenziale può essere definita per una particolare forza solo se la forza è conservativa; si deve, perciò, appurare che la natura della forza sia conservativa, prima di cercare di calcolare la sua energia potenziale. Nel paragrafo 16-6 (si veda specialmente la fig. 13 del cap. 16) abbiamo mostrato che la forza gravitazionale $1/r^2$ è conservativa ed abbiamo dedotto che il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale, quando una particella si sposta dal punto *a* al punto *b*, è indipendente dal cammino che unisce i due punti. Possiamo fare gli stessi ragionamenti sulla forza elettrostatica ottenendo i medesimi risultati: *la forza elettrostatica è conservativa e può essere descritta da una energia potenziale*. Esporremo i passaggi matematici necessari nel prossimo paragrafo.

C'è una importante proprietà per la quale la forza elettrostatica differisce dalla forza gravitazionale: le forze gravitazionali sono sempre attrattive mentre le forze elettrostatiche (a seconda dei segni delle cariche) possono essere sia attrattive che repulsive. Come vedremo nel prossimo paragrafo questa differenza si ripercuote sul segno dell'energia potenziale, ma non inficia in alcun modo gli argomenti basati sulla analogia tra le due forze.

30-2 L'ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA

Sollevando una pietra dalla superficie della Terra, la variazione dell'energia potenziale gravitazionale del sistema pietra-Terra è, in accordo con l'equazione 4 del capitolo 8, il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale cambiato di segno. Nel caso elettrostatico si ragiona allo stesso modo.

Nel paragrafo 30-1 abbiamo già concluso, per analogia con la forza gravitazionale, che la forza elettrostatica è conservativa e perciò *possiamo associare una energia potenziale a ogni sistema in cui una particella carica è soggetta a una forza elettrostatica*. La variazione di energia potenziale elettrostatica associata a un assegnato spostamento di una particella di carica q, in un campo elettrico $\mathbf{E}$, è data dall'equazione 4, in cui alla forza $\mathbf{F}$ si sostituisca la forza elettrostatica $q\mathbf{E}$:

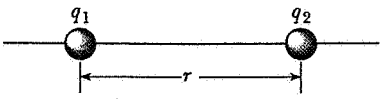


Figura 1 Due cariche q_1 e q_2 poste ad una distanza r l'una dall'altra.

$$U_b - U_a = -\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -q\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \qquad (5)$$

dove l'integrale è esteso al cammino della particella da un punto iniziale *a* ad un punto finale *b*. Dato che la forza elettrica è conservativa, l'integrale è indipendente dal cammino e dipende soltanto dalle posizioni iniziale e finale *a* e *b*. Si considerino due particelle di carica q_1 e q_2 poste ad una distanza r l'una dall'altra (fig. 1). Si assuma inizialmente che le cariche abbiano segni opposti, cosicchè la forza tra di esse sia attrattiva. Se q_2 viene spostata verso *destra*, la forza elettrica compie lavoro negativo, il termine a destra dell'equazione 5 è positivo e l'energia potenziale del sistema cresce. Se la carica q_2 viene rilasciata dalla posizione raggiunta, la distanza tra le cariche tende spontaneamente a diminuire, verso il valore iniziale; l'energia potenziale del sistema ora decresce mentre l'energia cinetica del sistema cresce, in analogia con il caso gravitazionale.

Se le due cariche della figura 1 hanno lo stesso segno, uno spostamento di q_2 verso *sinistra* accresce l'energia potenziale del sistema (dato che la forza elettrica compie lavoro negativo anche in questo caso). Se le cariche vengono rilasciate, la loro distanza reciproca tende a crescere; la decrescita conseguente di energia potenziale è accompagnata da una corrispondente crescita di energia cinetica, man mano che le particelle si allontanano.

Calcoliamo ora l'espressione dell'energia potenziale del sistema di due cariche puntiformi illustrato nella figura 1. Utilizziamo l'equazione 5, assumendo che q_2 possa avvicinarsi o allontanarsi da q_1 lungo la linea che unisce le due cariche, che si assume essere l'asse x. La componente E_x del campo elettrico dovuto a q_1 lungo questa linea è $q_1/4\pi\epsilon_0 r^2$. Questa componente è positiva o negativa in accordo con il segno di q_1. La figura 2 mostra le corrispondenti relazioni tra i vettori. Il vettore $\mathbf{r}$ ($= r\mathbf{i}$, dove $\mathbf{i}$ è il versore dell'asse x) indivi-

ISBN 88-408-0777-2

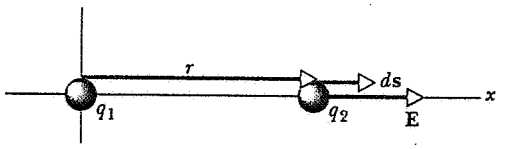


Figura 2 La carica q_2 si muove relativamente a q_1 secondo uno spostamento $d\mathbf{s}$. Il campo elettrico dovuto alla carica positiva q_1 ha il verso illustrato.

dua q_2 rispetto a q_1 e il vettore $d\mathbf{s}$ (= $dr\mathbf{i}$) indica lo spostamento di q_2. Perciò $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_x dr$ e così, se q_2 viene spostata da a a b, la variazione dell'energia potenziale è data dall'equazione 5,

$$U_b - U_a = -q_2 \int_{r_a}^{r_b} E_x dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right). \qquad (6)$$

L'equazione 6 vale sia se q_2 si avvicina a q_1,sia se q_2 si allontana da q_1; nel primo caso $r_b < r_a$ e nel secondo caso $r_b > r_a$. L'equazione vale anche per qualsiasi combinazione dei segni di q_1 e q_2. Inoltre, poiché ΔU è indipendente dal cammino per una forza conservativa, l'equazione 6 vale per un qualunque cammino che unisca a con b; scegliamo il cammino rettilineo per semplificare il calcolo, ma il risultato è valido per un *qualsivoglia* cammino.

Analogamente a quanto si è fatto nel paragrafo 16-6, possiamo scegliere un punto di riferimento a tale che r_a corrisponda ad una distanza infinita tra le particelle e porre l'energia potenziale U_a a zero per definizione. Sia r la distanza nel punto finale b cosicchè l'equazione 6 si riduca a

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (7)$$

Si confronti questo risultato con l'equazione 15 del capitolo 16 relativa all'energia potenziale gravitazionale, che può essere scritta come $U(r) = -Gm_1m_2/r$. Se la forza elettrica è attrattiva, q_1 e q_2 hanno segni opposti e quindi il prodotto q_1q_2 è negativo. In questo caso l'energia potenziale elettrica, data dall'equazione 7, è negativa, come nel caso analogo dell'energia potenziale gravitazionale.

Se la forza elettrica è repulsiva, q_1 e q_2 hanno lo stesso segno e il prodotto q_1q_2 è positivo. In questo caso, che non ha un analogo gravitazionale, l'energia potenziale è positiva. Se q_2 viene spostata verso q_1 da una distanza iniziale infinita, l'energia potenziale cresce rispetto al suo valore iniziale (che abbiamo posto essere zero per definizione). Se, poi, liberiamo q_2 dallo stato di riposo, essa si sposterà verso distanze crescenti da q_1, acquistando energia cinetica mentre il sistema perderà energia potenziale.

Esempio 1 Due protoni nel nucleo dell'atomo di ^{238}U si trovano ad una distanza di 6 fm. Qual è l'energia potenziale associata alla forza elettrica che agisce tra queste due particelle?

Soluzione Dall'equazione 7, ove $q_1 = q_2 = +1.60 \times 10^{-19}$ C, si ottiene

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{(8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{6.0 \times 10^{-15} \text{ m}}$$
$$= 3.8 \times 10^{-14} \text{ J} = 2.4 \times 10^5 \text{ eV} = 240 \text{ keV}.$$

I due protoni non si allontanano poiché sono trattenuti dalla *forza forte* attrattiva che lega insieme il nucleo. Contrariamente alla forza elettrica non c'è una semplice funzione energia potenziale che rappresenti la forza forte.

Energia potenziale di un sistema di cariche

Si supponga di avere un sistema di cariche puntiformi trattenute in posizioni fisse da forze non specificate. Possiamo calcolare l'energia potenziale totale di questo sistema applicando l'equazione 7 a ciascuna coppia di cariche del sistema. Per esempio, avendo un sistema a tre cariche, come mostrato nella figura 3, l'energia potenziale elettrica del sistema è

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}}. \qquad (8)$$

Si noti che l'energia potenziale è una proprietà del sistema, non di ogni singola carica.

Da questo esempio di può capire immediatamente il vantaggio che si ha nell'utilizzare un metodo energetico: la somma richiesta dall'equazione 8 è una somma *algebrica* di scalari. Se si cercasse di calcolare il campo elettrico delle tre cariche, bisognerebbe fare una più complicata somma *vettoriale*.

C'è un altro modo per interpretare l'energia potenziale del sistema. Si supponga che, inizialmente, le tre cariche siano a distanza infinita le une dalle altre. Si trasporti la prima carica q_1 dall'infinito nella posizione indicata nella figura 3. Non c'è, per ora, nessuna variazione di energia potenziale, poiché le altre cariche non sono ancora presenti. Portando q_2 nella sua posizione finale, si fornisce al sistema una energia poten-

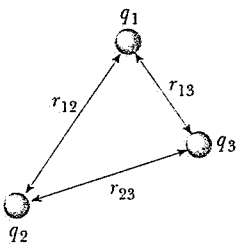


Figura 3 Un insieme di tre cariche.

ziale $q_1q_2/4\pi\epsilon_0 r_{12}$. Per ultimo, portando q_3 dall'infinito nella sua posizione finale si forniscono al sistema due termini addizionali di energia potenziale: $q_1q_3/4\pi\epsilon_0 r_{13}$ e $q_2q_3/4\pi\epsilon_0 r_{23}$, essendo il primo l'energia potenziale di q_3 nel campo prodotto da q_1 e il secondo l'energia potenziale di q_3 nel campo prodotto da q_2. Si può iterare questo processo per costituire una qualunque distribuzione di cariche. L'energia potenziale risultante è indipendente dall'ordine con cui le varie cariche vengono avvicinate.

Quando un agente esterno muove le cariche da una distanza infinita per costituire una distribuzione come quella della figura 3, l'agente stesso compie un lavoro per vincere le forze che derivano dall'interazione tra le cariche in gioco. L'agente esterno, in effetti, fornisce energia al sistema di cariche. Ciò può essere facilmente inteso considerando il caso particolare in cui tutte le cariche abbiano lo stesso segno. Le cariche che si trovano già al loro posto finale esercitano una forza repulsiva sulle nuove cariche che vengono aggiunte e l'agente esterno deve spingere le nuove cariche verso la loro destinazione. In effetti l'agente esterno spende energia per costituire la distribuzione di carica. L'energia è immagazzinata nel campo elettrico del sistema e possiamo renderne conto in termini di energia potenziale della distribuzione risultante. Se dovesse improvvisamente scomparire il vincolo che trattiene le cariche nella loro posizione, esse acquisterebbero energia cinetica mentre il sistema si disgregherebbe; l'energia cinetica totale di tutte le particelle, acquistata all'infinito, è, per il principio di conservazione dell'energia, uguale all'energia fornita dall'agente esterno per costituire il sistema. Se le cariche avessero segni diversi e l'energia potenziale totale fosse di segno negativo, le particelle tenderebbero a muoversi in modo da avvicinarsi, se improvvisamente liberate dalle loro posizioni. In questo caso l'agente esterno dovrebbe fornire energia al sistema in forma di lavoro per disgregarlo e portare le cariche a distanze infinite.

Riassumiamo tutto ciò come segue:

L'energia potenziale elettrica di un sistema di particelle puntiformi fisse è uguale al lavoro che un agente esterno deve fornire per aggregare il sistema stesso, trasportando ogni carica nella sua posizione finale da una distanza infinita. Si suppone che le cariche siano in quiete nelle posizioni iniziale e finale.

In questa definizione si pone il riferimento della energia potenziale in corrispondenza a distanze infinite tra le cariche e si pone l'energia potenziale a zero in tali condizioni di riferimento.

Per distribuzioni di carica continue l'energia potenziale può essere calcolata con un metodo simile, suddividendo la distribuzione in piccoli elementi e trattando ogni elemento come una carica puntiforme. In questo testo non approfondiremo tali casi.

Esempio 2 Nel sistema mostrato nella figura 3 si assuma che $r_{12} = r_{13} = r_{23} = d = 12$ cm e che $q_1 = +q$, $q_2 = -4q$ e $q_3 = +2q$, dove $q = 150$ nC. Qual è l'energia potenziale del sistema?

Soluzione Utilizzando l'equazione 8 si ottiene

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d}\right)$$
$$= -\frac{10q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$
$$= -\frac{(8.99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})(10)(150 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})^2}{0.12\ \mathrm{m}}$$
$$= -1.7 \times 10^{-2}\ J = -17\ \mathrm{mJ}.$$

L'energia potenziale negativa in questo caso significa che dovrebbe essere compiuto lavoro negativo da un agente esterno per costituire la struttura, partendo da tre cariche infinitamente lontane l'una dall'altra ed in quiete. In altri termini, un agente esterno dovrebbe compiere un lavoro di + 17 mJ per disgregare completamente la struttura.

30-3 IL POTENZIALE ELETTRICO

La forza agente tra due particelle cariche dipende dal valore e dal segno di ciascuna carica. È stato utile introdurre una grandezza vettoriale, il campo elettrico, definito (vedi l'eq. 2*b*) come la forza per unità di carica di prova. Attraverso questa definizione possiamo ora parlare di campo elettrico associato ad un singola carica.

In molte applicazioni è utile ragionare con una grandezza scalare associata, ottenuta dall'energia potenziale in modo simile. Questa grandezza è chiamata *potenziale elettrico* ed è definita come l'*energia potenziale per unità di carica di prova.*

Si supponga di avere un insieme di cariche relativamente al quale si voglia determinare il potenziale elettrico in un certo punto P. Poniamo una carica positiva di prova q_0 ad una distanza infinita dall'insieme di cariche, dove il campo elettrico è nullo. Portiamo, poi, tale carica di prova dall'infinito al punto P. In questo processo, l'energia potenziale vari da 0 a U_P. Il potenziale elettrico nel punto P dovuto all'insieme di cariche è definito come

$$V_P = \frac{U_P}{q_0}. \qquad (9)$$

Si noti che, come risulta dall'equazione 9, il potenziale

ISBN 88-408-0777-2

è una grandezza scalare, poiché esso viene calcolato a partire dalle grandezze scalari U e q.

Il potenziale, definito in questo modo, è indipendente dal valore della carica di prova, come lo è il campo elettrico definito in accordo con l'equazione 2*b* (analogamente al caso del campo elettrico si assume che q_0 sia una carica molto piccola, così che essa abbia un effetto trascurabile sull'insieme di cariche di cui si vuole misurare il potenziale). L'equazione 9 può essere letta come un metodo operativo per misurare il potenziale. Come nel caso del campo elettrico, nel seguito descriveremo procedure matematiche più convenienti per il calcolo di V.

In funzione della distribuzione di cariche, il potenziale V_P può essere positivo, negativo o nullo. Si supponga che il potenziale sia positivo in un assegnato punto dello spazio; in accordo con l'equazione 9, l'energia potenziale in quel punto è positiva. Se dovessimo portare una carica di prova dall'infinito a quel punto, il campo elettrico compierebbe lavoro negativo, il che indica che, in media, la carica di prova è stata soggetta a una forza repulsiva. *Il potenziale nei pressi di una carica isolata positiva è pertanto positivo.* Se il potenziale in un punto è negativo, vale l'inverso: portando una carica di prova dall'infinito in un punto dello spazio al finito, il campo elettrico compie lavoro positivo e, in media, la forza è attrattiva. *Il potenziale nei pressi di una carica isolata negativa è pertanto negativo.*

Se il potenziale è nullo in un punto, nessun lavoro netto viene compiuto dal campo elettrico quando la carica di prova viene spostata dall'infinito al punto in analisi, anche se essa può attraversare regioni in cui è soggetta ad una forza attrattiva e regioni in cui è soggetta ad una forza repulsiva.

Un potenziale nullo in un punto non significa necessariamente che il campo elettrico sia nullo in quel punto. Si consideri, per esempio, un punto che sia a metà strada tra due cariche uguali ed opposte. I potenziali dovuti alle due cariche in quel punto hanno ugual valore e segno opposto, per cui il potenziale totale in quel punto è nullo. Tuttavia, i campi elettrici delle due cariche hanno stessa direzione e verso nel punto e il campo elettrico totale nel punto non è certamente nullo.

Invece di riferirsi ad un punto all'infinito, è spesso preferibile determinare la *differenza di potenziale elettrico* tra due punti a e b in un campo elettrico. Per fare ciò, spostiamo una carica di prova q_0 da a a b. La differenza di potenziale elettrico è definita attraverso una estensione dell'equazione 9 come

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0}. \qquad (10)$$

Il potenziale nel punto b può essere maggiore, uguale o minore di quello nel punto a, a seconda del segno della differenza di energia potenziale tra i due punti o, equivalentemente, del lavoro, cambiato di segno, compiuto dal campo elettrico quando una carica di prova positiva viene spostata da un punto all'altro. Per esempio se b ha un potenziale maggiore di a ($V_b - V_a > 0$), il campo elettrico compie un lavoro *negativo* quando la carica di prova viene portata da a a b.

L'unità di misura del potenziale nel sistema SI è, come segue dall'equazione 9, il joule/coulomb. Questa unità ricorre molto spesso ed è anche chiamata, in una unica espressione, *volt* (abbreviazione: V),

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb}.$$

Il nome comune «tensione» è spesso usato per il potenziale in un punto o per la differenza di potenziale tra due punti. Quando si mettono in contatto le sonde di un *voltmetro* con due punti di un circuito elettrico, si misura la differenza di potenziale (in volt) o tensione tra i due punti.

L'equazione 10 può essere riscritta

$$\Delta U = q\Delta V, \qquad (11)$$

essa stabilisce che quando una *qualunque* carica q si muove tra due punti la cui differenza di potenziale è ΔV, il sistema va soggetto ad una variazione di energia potenziale ΔU data dall'equazione 11. La differenza di potenziale ΔV è dovuta alle altre cariche, che vengono tenute a riposo in modo che il moto della carica q non la possa alterare. In relazione all'equazione 11, quando ΔV è espressa in volt e q in coulomb, ΔU risulta essere espressa in joule.

Dall'equazione 11 si può vedere che l'*elettron-volt*, introdotto precedentemente come unità di energia, discende direttamente dalla definizione di potenziale o differenza di potenziale. Se ΔV è espresso in volt e q in unità di carica fondamentale e, allora ΔU è espresso in elettron-volt (eV). Per esempio, si consideri un sistema in cui un atomo di carbonio, dal quale siano stati rimossi sei elettroni ($q = +6e$), si muove attraverso una differenza di potenziale di + 20kV. La conseguente variazione di energia potenziale è

$$\Delta U = q\Delta V = (+6e)(+20 \text{ kV}) = +120 \text{ keV}.$$

Svolgere questi calcoli in unità di eV è di grande convenienza quando si ha a che vedere con atomi o nuclei, in cui la carica è facilmente espressa in termini di e.

Si ricordi che le *differenze di potenziale* hanno significato assoluto mentre l'equazione 9 dipende dall'assegnazione arbitraria dello zero del potenziale nella posizione di riferimento (l'infinito); questo potenziale di riferimento potrebbe essere stato fissato indifferentemente ad un altro valore, per esempio −100 V. Analo-

gamente qualunque punto potrebbe essere scelto come posizione di riferimento del potenziale. In molti problemi viene scelto, come riferimento, il potenziale della Terra, fissato convenzionalmente a zero. La posizione del punto di riferimento e il valore del potenziale in quel punto sono fissati convenientemente; altre scelte comporterebbero una variazione nel potenziale della stessa quantità dovunque, ma non modificherebbero i risultati relativamente alle differenze di potenziale.

Si è già rilevato che il campo elettrico è conservativo e quindi la differenza di energia potenziale tra due punti a e b dipende soltanto dalle posizioni dei punti e non dal cammino scelto per spostarsi da un punto all'altro. L'equazione 10, pertanto, suggerisce che la differenza di potenziale è, analogamente, indipendente dal cammino: la differenza di potenziale tra due punti in un campo elettrico è indipendente dal cammino con il quale la carica di prova si muove spostandosi dal primo al secondo punto.

Esempio 3 Una particella alfa ($q = +2e$) in un acceleratore nucleare si sposta da un elettrodo a potenziale $V_a = +6.5 \times 10^6$ V ad un secondo elettrodo a potenziale $V_b = 0$. (*a*) Qual è la variazione corrispondente di energia potenziale del sistema ? (*b*) Assumendo che gli elettrodi e le loro cariche non si muovano e che nessuna forza esterna agisca sul sistema, qual è la variazione di energia cinetica della particella?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 11 si ha che

$$\Delta U = U_b - U_a = q(V_b - V_a)$$
$$= (+2)(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0 - 6.5 \times 10^6\ \text{V})$$
$$= -2.1 \times 10^{-12}\ \text{J}.$$

(*b*) Se nessuna forza esterna agisce sul sistema, la sua energia meccanica $E = U + K$ deve mantenersi costante. Cioè, $\Delta E = \Delta U + \Delta K = 0$, per cui

$$\Delta K = -\Delta U = +2.1 \times 10^{-12}\ \text{J}.$$

La particella alfa acquista una energia cinetica pari a 2.1×10^{-12} J, nello stesso modo in cui una particella che cade nel campo gravitazionale terrestre acquisisce energia cinetica.

Per rendersi conto delle semplificazioni che ne derivano, si provi a risolvere il problema esprimendo le energie in eV.

30-4 IL CALCOLO DEL POTENZIALE DATO IL CAMPO

Dato il campo elettrico **E** si può calcolare il potenziale V, e, dato V, si può risalire al campo **E**. Qui discuteremo il calcolo di V dato **E**; il calcolo di **E** dato V è discusso nel paragrafo 30-9.

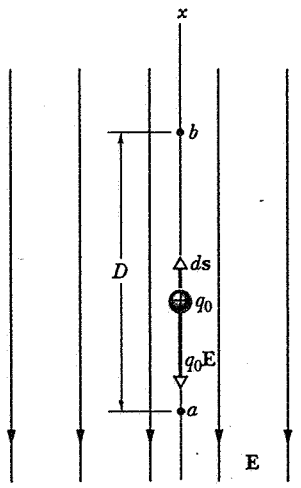


Figura 4 La carica di prova q_0 si sposta di una distanza L, da a a b, nel campo elettrico uniforme **E**.

I punti a e b della figura 4 si trovino in un campo elettrico uniforme **E**, generato da una distribuzione di cariche non mostrata e sia a ad una distanza D da b nella direzione del campo. Si assuma che una carica di prova positiva q_0 si muova da a a b lungo il segmento di retta che unisce i punti.

La forza elettrica sulla carica è $q_0\mathbf{E}$ ed è diretta come l'asse x in verso negativo. Quando la carica di prova si muove da a a b nella direzione del vettore $d\mathbf{s}$, il lavoro compiuto dal campo elettrico (costante) è dato da

$$L_{ab} = F_x \Delta x = (-q_0 E)(D) = -q_0 E D. \qquad (12)$$

Utilizzando la definizione di differenza di energia potenziale, $\Delta U = -L$, possiamo combinare le equazioni 10 e 12 ottenendo

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0} = \frac{-L_{ab}}{q_0} = ED. \qquad (13)$$

Questa equazione mette in luce la correlazione tra la differenza di potenziale e l'intensità del campo per un singolo caso particolare. Si noti che, in accordo con questa equazione, un'altra unità di misura del SI per **E** è il volt/metro (V/m). Si consiglia di mostrare, per esercizio, che il volt/metro è equivalente al newton/coulomb (N/C); quest'ultima unità di misura è quella adottata precedentemente per **E** nel paragrafo 28-2.

Nella figura 4, b ha un potenziale maggiore di a. Ciò è ragionevole poiché il campo elettrico compie lavoro negativo sulla carica di prova positiva quando essa si muove da a a b. La figura 4 potrebbe essere utilizzata per illustrare il processo di caduta di un sasso da a a b nel campo gravitazionale uniforme in prossimità della superficie della Terra. Tutto ciò che si deve fare è sostituire la carica di prova q_0 con una massa di

ISBN 88-408-0777-2

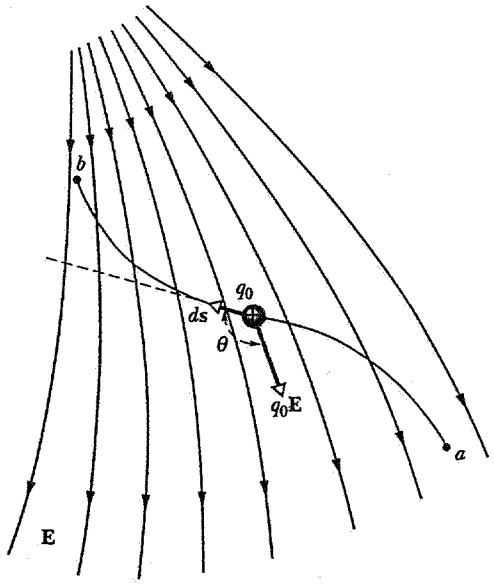


Figura 5 La carica di prova q_0 si sposta da a a b nel campo elettrico non uniforme **E**.

prova m_0 e sostituire il campo elettrico **E** con il campo gravitazionale **g**.

Qual è la correlazione tra V ed **E** nel caso più generale in cui il campo *non* è uniforme e in cui il corpo di prova si muove lungo un cammino che *non* è rettilineo, come nella figura 5? Il campo elettrico esercita una forza $q_0\mathbf{E}$ sulla carica di prova, come illustrato. Uno spostamento infinitesimo lungo il cammino è rappresentato da $d\mathbf{s}$. Per determinare il lavoro totale L_{ab} compiuto dal campo elettrico quando la carica di prova si sposta da a a b, sommiamo (cioè, integriamo) i contributi al lavoro su tutti i segmenti infinitesimi nei quali il cammino è scomposto. Ciò si esprime come

$$L_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q_0 \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \qquad (14)$$

Un tale integrale è chiamato *integrale di linea*, come è stato discusso nel paragrafo 7-3.

Essendo $V_b - V_a = (U_b - U_a)/q_0 = -L_{ab}/q_0$, l'equazione 14 dà

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \qquad (15)$$

È spesso conveniente scegliere il punto a come il punto di riferimento all'infinito, dove V_a viene posto uguale a zero. Si può, quindi, trovare il potenziale in ogni punto P arbitrario utilizzando l'equazione 15:

$$V_P = -\int_\infty^P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \qquad (16)$$

Queste due equazioni consentono di calcolare la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi o il potenziale in un punto qualsiasi, in presenza di un noto campo elettrico **E**.

Esempio 4 Nella figura 6 la carica di prova q_0 venga spostata da a a b sul cammino acb. Si calcoli la differenza di potenziale tra a e b.

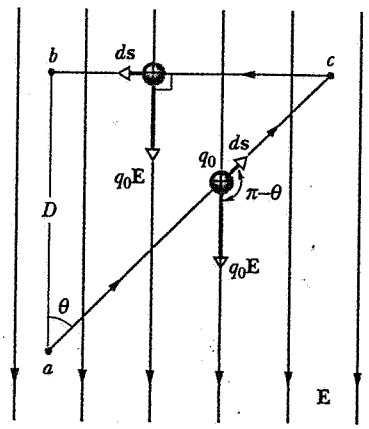


Figura 6 Esempio 4. Una carica di prova q_0 si sposta lungo il cammino acb nel campo elettrico uniforme **E**.

Soluzione Per il cammino ac si ha, dall'equazione 15,

$$V_c - V_a = -\int_a^c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_a^c E\, ds \cos(\pi - \theta)$$
$$= E\cos\theta \int_a^c ds.$$

L'integrale è la lunghezza della linea ac, e vale $D/\cos\theta$. Pertanto

$$V_c - V_a = E\cos\theta \frac{D}{\cos\theta} = ED.$$

I punti b e c hanno lo stesso potenziale poiché non viene compiuto nessun lavoro spostando una carica dal primo al secondo punto, essendo **E** e $d\mathbf{s}$ ortogonali su tutti i punti del segmento cb. Perciò

$$V_b - V_a = (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = 0 + ED = ED.$$

Questo è lo stesso valore ricavato per un cammino rettilineo e diretto che collega a e b, un risultato prevedibile poiché la differenza di potenziale tra due punti è indipendente dal cammino.

30-5 IL POTENZIALE DOVUTO A UNA CARICA PUNTIFORME

La figura 7*a* mostra due punti a e b vicini ad una carica puntiforme isolata q. Per semplicità conviene assumere che a, b e q giacciano su una linea retta. Vogliamo calcolare la differenza di potenziale tra i punti a e

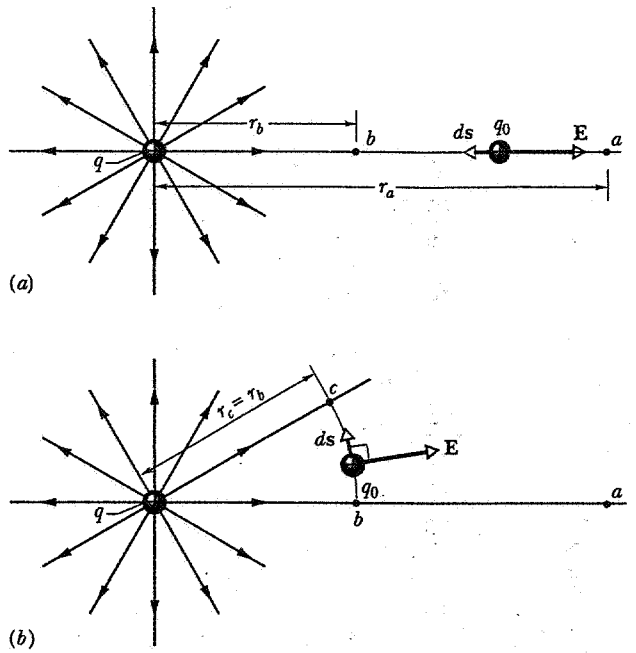


Figura 7 (*a*) Una carica di prova q_0 si sposta da *a* a *b* lungo una linea radiale che ha origine nella carica positiva puntiforme *q* responsabile del campo **E**. (*b*) La carica di prova ora si sposta da *b* a *c* lungo l'arco di circonferenza centrato in *q*.

b, assumendo che una carica positiva di prova q_0 venga spostata lungo una linea radiale da *a* a *b*.

Nella figura 7*a*, sia **E** che *d***s** (= *d***r**) hanno soltanto una componente radiale. Perciò $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E dr$ e, sostituendo questa relazione nell'equazione 15, si ha,

$$V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{r_a}^{r_b} E\, dr.$$

Utilizzando l'espressione del campo elettrico per una carica puntiforme, $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, si ottiene

$$V_b - V_a = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right). \quad (17)$$

L'equazione 17 dà la differenza di potenziale tra i punti *a* e *b*. L'integrazione è stata semplificata scegliendo di spostare la carica di prova lungo un cammino radiale; essendo il potenziale indipendente dal cammino, l'equazione 17 *vale* per qualsiasi cammino tra *a* e *b*. Cioè la differenza di potenziale è una proprietà dei punti *a* e *b* e non del cammino *ab*.

Per di più l'equazione 17 vale per differenze di potenziale tra due punti anche se essi non appartengono alla stessa linea radiale. La figura 7*b* mostra due punti arbitrari *a* e *c*. Poiché la differenza di potenziale è indipendente dal cammino, si può liberamente scegliere un cammino conveniente per il calcolo della differenza di potenziale stessa. Scegliamo il cammino *abc*, in cui *ab* è radiale e *bc* è un arco di circonferenza centrato su *q*. Nessun lavoro è compiuto dal campo lungo il cammino *bc*, poiché **E** è perpendicolare a *d***s** in tutti i punti del cammino stesso. Pertanto la differenza di potenziale tra *a* e *c* è ancora data dall'equazione 17.

Cercando il potenziale in un punto qualsiasi (anziché la differenza di potenziale tra due punti) è norma-

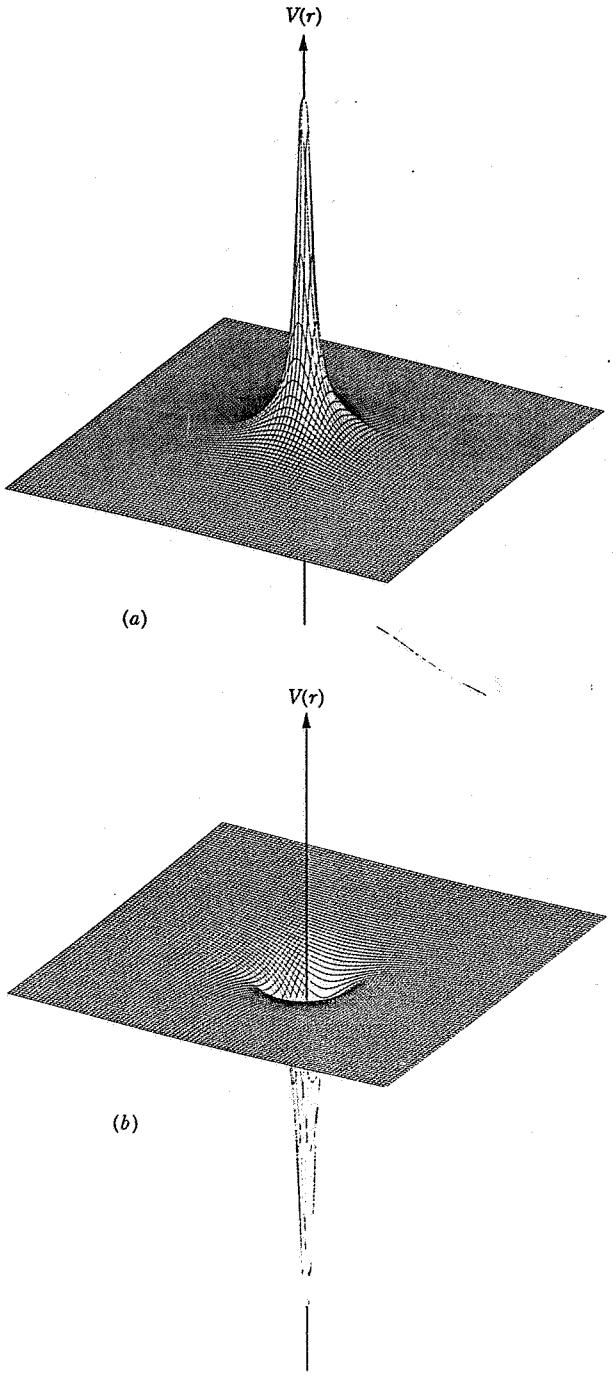


Figura 8 Diagramma creato al calcolatore del potenziale $V(r)$ su un piano passante per una carica puntiforme (*a*) positiva e (*b*) negativa.

ISBN 88-408-0777-2

le fissare il punto di riferimento all'infinito. Nel caso in esame poniamo a all'infinito (cioè si pone $r_a \to \infty$) e poniamo per convenzione $V_a = 0$ in questa posizione. Sostituendo queste relazioni nell'equazione 17 ed omettendo il pedice b si ha che

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (18)$$

L'equazione 18 vale anche per qualunque distribuzione di carica a simmetria sferica con carica totale pari a q, purchè r sia maggiore del raggio della distribuzione. Si noti che l'equazione 18 si sarebbe anche potuta ottenere direttamente dall'equazione 16.

L'equazione 18 mostra che il potenziale dovuto ad una carica puntiforme positiva si annulla a grandi distanze e cresce fino a un grande valore positivo avvicinandosi alla carica. Se q è negativa, il potenziale assume un grande valore negativo in prossimità della carica. La figura 8 mostra un diagramma tracciato al calcolatore dell'equazione 18 relativamente ad una carica puntiforme positiva e ad una carica puntiforme negativa. Si noti che il potenziale non dipende in alcun modo dal segno della *carica di prova* utilizzata nel calcolo.

Esempio 5 Quale deve essere il valore di una carica puntiforme positiva isolata affinchè il potenziale elettrico a 15 cm dalla carica sia pari a + 120 V?

Soluzione Risolvendo l'equazione 18 si trova q,

$$\begin{aligned} q &= V4\pi\epsilon_0 r \\ &= (120\text{ V})(4\pi)(8.9 \times 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.15\text{ m}) \\ &= 2.0 \times 10^{-9}\text{ C} = 2.0\text{ nC}. \end{aligned}$$

Questa carica è confrontabile con le cariche che possono essere prodotte per attrito, per esempio strofinando un palloncino.

Esempio 6 Qual è il potenziale elettrico sulla superficie di un nucleo d'oro? Si assuma che il raggio sia 7.0×10^{-15} m; il numero atomico Z è 79.

Soluzione Il nucleo, assunto a simmetria sferica, si comporta elettricamente per i punti esterni come se fosse una carica puntiforme. Quindi si può utilizzare l'equazione 18, che dà, posto $q = 79e$,

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} &= \frac{(9.0 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(79)(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})}{7.0 \times 10^{-15}\text{ m}} \\ &= 1.6 \times 10^7\text{ V}. \end{aligned}$$

Questo grande potenziale positivo non ha alcun effetto al di fuori dell'*atomo* d'oro poiché è compensato da un potenziale negativo uguale associato ai 79 elettroni dell'atomo.

30-6 IL POTENZIALE DI UN INSIEME DI CARICHE PUNTIFORMI

Il potenziale nei punti dello spazio associato ad un gruppo di N cariche puntiformi si determina (1) calcolando il potenziale V_i dovuto ad ogni singola carica, come se le altre cariche non ci fossero e (2) sommando le quantità così ottenute:

$$V = V_1 + V_2 + \cdots + V_N,$$

cioè, utilizzando l'equazione 18,

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \qquad (19)$$

dove q_i è il valore (modulo e segno) della i-esima carica e r_i è la distanza di questa carica dal punto in esame. Ancora una volta, sono manifesti i benefici che si traggono dall'utilizzo del potenziale, che è uno *scalare*: la somma da fare per determinare V è una *somma algebrica* anzichè una somma vettoriale, come quella usata per il calcolo di $\mathbf{E}$ nel caso di un gruppo di cariche puntiformi (eq. 5 del cap. 28). L'uso del potenziale al posto del campo elettrico si traduce in un importante vantaggio nel calcolo.

Il potenziale in un punto dovuto ad una singola carica non è condizionato dalla presenza delle altre cariche. Per trovare il potenziale totale basta sommare i potenziali di ciascuna carica considerata come se fosse l'unica carica presente. Questo è il *principio di sovrapposizione*, che si applica al potenziale così come al campo elettrico.

Esempio 7 Si calcoli il potenziale nel punto P, posto al centro del quadrato di cariche puntiformi mostrate nella figura 9*a*. Si assuma che $d = 1.3$ m e che le cariche siano

$$q_1 = +12\text{ nC}, \quad q_3 = +31\text{ nC},$$
$$q_2 = -24\text{ nC}, \quad q_4 = +17\text{ nC}.$$

Soluzione Dall'equazione 19 si ha che

$$V_P = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + q_2 + q_3 + q_4}{R}.$$

La distanza R tra ciascuna carica e il centro del quadrato è $d/\sqrt{2}$ ossia 0.919 m, quindi

$$\begin{aligned} V_P &= \frac{(8.99 \times 10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(12 - 24 + 31 + 17) \times 10^{-9}\text{ C}}{0.919\text{ m}} \\ &= 3.5 \times 10^2\text{ V}. \end{aligned}$$

Vicino a ciascuna delle tre cariche positive della figura 9*a* il potenziale può assumere un valore positivo indeterminatamente

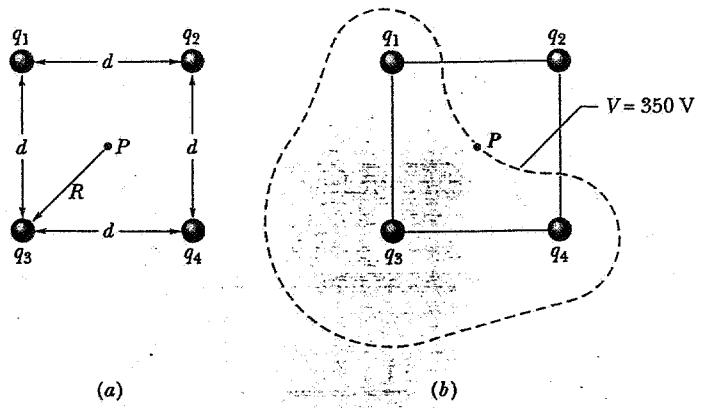


Figura 9 Esempio 7 (*a*) Quattro cariche vengono tenute ferme sui vertici di un quadrato. (*b*) La curva unisce i punti che hanno lo stesso potenziale (350 V) del punto P al centro del quadrato.

grande. Vicino all'unica carica negativa della figura il potenziale può assumere un valore negativo indeterminatamente grande. Ci possono quindi essere altri punti interni al quadrato che hanno lo stesso potenziale del punto P. La linea tratteggiata della figura 9*b* unisce i punti del piano che hanno questo stesso valore del potenziale. Come si discuterà più avanti, nel paragrafo 30-8, le *superfici equipotenziali* costituiscono un utile strumento per rappresentare i potenziali di diverse distribuzioni di carica.

Il potenziale di un dipolo

Due cariche uguali di segno opposto, $\pm q$ poste ad una distanza d l'una dall'altra, costituiscono un dipolo elettrico (par. 28-3). Il momento di dipolo elettrico **p** ha valore qd e va dalla carica negativa alla carica positiva. Vogliamo determinare il potenziale elettrico associato al dipolo.

Un punto P è individuato dalle coordinate r e θ nella figura 10. Per questioni di simmetria è chiaro che il potenziale non varia se il punto P ruota attorno all'asse z, restando costanti r e θ (si consideri una rotazione equivalente del dipolo sull'asse z: non ci sono cambiamenti nella situazione fisica). Perciò, una volta determinato V in tutti i punti del piano della figura 10, si è di fatto determinato V in tutti i punti dello spazio. Applicando l'equazione 19 si ha che

$$V_P = \sum_i V_i = V_1 + V_2$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{-q}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}, \quad (20)$$

che è una relazione esatta.

Nel caso dei dipoli che si incontrano in natura, come, ad esempio, molte molecole, il punto di osservazione P è normalmente molto distante dal dipolo in modo che $r \gg d$. In queste condizioni si può dedurre dall'equazione 10 che

$$r_2 - r_1 \approx d\cos\theta \quad \text{e} \quad r_1 r_2 \approx r^2,$$

e il potenziale si riduce a

$$V \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2}. \quad (21)$$

Si noti che $V = 0$ ovunque nel piano equatoriale ($\theta = 90°$). Ciò significa che il campo elettrico del dipolo non compie lavoro quando una carica di prova viene portata dall'infinito nel punto medio del dipolo su una linea qualsiasi (per esempio l'asse x della figura 10). Per un valore assegnato di r, il potenziale assume valore massimo positivo per $\theta = 0°$ ed il suo valore massimo negativo per $\theta = 180°$. Si noti che V non dipende autonomamente da q e d ma soltanto dal loro prodotto p.

Quantunque alcune molecole, come l'acqua, abbiano momento di dipolo elettrico permanente (vedi fig. 18 del cap. 28), gli atomi singoli e molte altre molecole non hanno alcun momento di dipolo. Tuttavia il momento di dipolo può essere indotto ponendo *qualunque* atomo o molecola in un campo elettrico esterno. L'azione del campo, come illustrato nella figura 11, separa i centri di carica positiva e negativa. Si può dire che

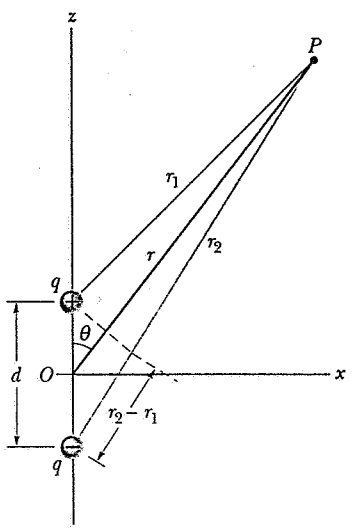


Figura 10 Un punto P nel campo di un dipolo elettrico.

ISBN 88-408-0777-2

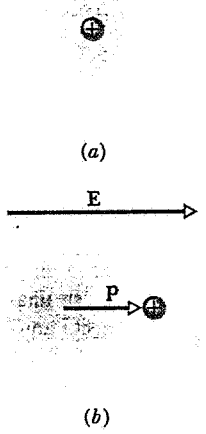


Figura 11 (*a*) Un atomo viene rappresentato dal suo nucleo positivo e dalla nuvola elettronica diffusa e negativa. I centri delle cariche positiva e negativa coincidono. (*b*) Quando l'atomo viene immesso in un campo elettrico esterno le cariche positiva e negativa sono soggette a forze opposte e i centri di carica vengono spostati così da non coincidere più. L'atomo acquista un momento di dipolo indotto.

l'atomo viene *polarizzato* ed acquista un *momento di dipolo elettrico indotto*. Il momento di dipolo indotto scompare quando il campo elettrico viene rimosso.

I dipoli elettrici sono importanti anche in casi diversi rispetto a quelli che riguardano gli atomi e le molecole. Le antenne radio e TV sono spesso costituite da un cavo o una barra metallica in cui gli elettroni si muovono avanti e indietro periodicamente. In un certo istante una estremità dell'antenna è positiva e l'altra è negativa. Mezzo periodo dopo, la polarità dell'antenna è completamente contraria. Questo è un dipolo elettrico *oscillante*. È chiamato così perché il suo momento di dipolo varia in modo periodico nel tempo.

Esempio 8 Un *quadrupolo elettrico* consiste in due dipoli elettrici collocati in modo tale da cancellarsi quasi completamente, per quanto riguarda i loro effetti elettrici, nei punti distanti (fig. 12). Si calcoli $V(r)$ nei punti dell'asse del quadrupolo.

Soluzione Applicando l'equazione 19 alla fig. 12 si ha che

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r-d} + \frac{-2q}{r} + \frac{q}{r+d}\right)$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2qd^2}{r(r^2-d^2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2qd'^2}{r^3(1-d^2/r^2)}.$$

Poiché $d \ll r$, è lecito trascurare d^2/r^2 rispetto a 1, per cui il potenziale si riduce a

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{r^3}, \qquad (22)$$

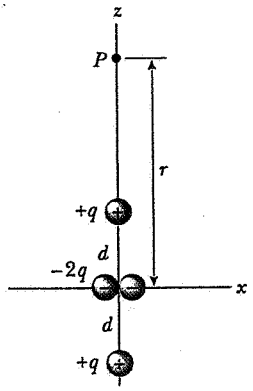


Figura 12 Esempio 8. Un quadrupolo elettrico costituito da due dipoli elettrici orientati in versi opposti.

essendo Q ($= 2qd^2$) il *momento di quadrupolo elettrico* dell'insieme di cariche della figura 12. Si noti che V varia (1) come $1/r$ per una carica puntiforme (eq. 18), (2) come $1/r^2$ per un dipolo (eq. 21) e (3) come $1/r^3$ per un quadrupolo (eq. 22).

Si noti anche che (1) un dipolo consta di due cariche uguali ed opposte che non coincidono esattamente nello spazio cosicchè i loro effetti elettrici nei punti lontani non si cancellano completamente e (2) un quadrupolo consta di due dipoli uguali ed opposti che non coincidono nello spazio cosicchè i loro effetti elettrici nei punti lontani ancora una volta non si cancellano completamente. Si può continuare a costruire insiemi di cariche sempre più complessi. Questo processo ha una sua utilità in considerazione del fatto che il potenziale elettrico di una *qualsiasi* distribuzione di carica può essere rappresentato come una serie di termini a potenza crescente $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$, ecc. Il contributo $1/r$, chiamato termine di *monopolo*, dipende dalla carica netta della distribuzione, mentre i termini successivi ($1/r^2$ è il termine di *dipolo*, $1/r^3$ è il termine di *quadrupolo* e così via) indicano come la carica è distribuita. Questo tipo di analisi è detta *sviluppo in serie di multipoli.*

30-7 IL POTENZIALE ELETTRICO DI DISTRIBUZIONI DI CARICA CONTINUE

Per calcolare il potenziale elettrico di una distribuzione di carica continua, si può utilizzare lo stesso metodo adottato nel paragrafo 28-5 per calcolare il campo elettrico di una distribuzione di carica continua. Il calcolo è più semplice, nel caso del potenziale, poiché il potenziale è uno scalare e non è perciò necessario tenere conto delle diverse direzioni dei contributi dovuti ai diversi elementi di carica della distribuzione.

Analogamente ai casi visti nel paragrafo 28-5, si assume di avere una distribuzione lineare di carica con densità di carica lineare λ oppure una distribuzione di carica superficiale con densità di carica superficiale σ oppure una distribuzione di carica volumica con densi-

tà di carica di volume ρ. Scomponiamo la distribuzione in piccoli elementi di carica dq, ove

$$dq = \lambda ds, \quad dq = \sigma dA, \quad \text{o} \quad dq = \rho dv,$$

in accordo con la geometria del problema.*

Ogni elemento dq può essere considerato come una carica puntiforme che dà un contributo dV al potenziale complessivo, esprimibile, in accordo con l'equazione 18, come

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}. \tag{23}$$

Per determinare il potenziale dell'intera distribuzione, è necessario integrare i singoli contributi di ciascun elemento, cioè

$$V = \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}. \tag{24}$$

In molti problemi, l'oggetto in esame è uniformemente carico, cosicchè la densità di carica è costante e può essere portata fuori dal segno di integrale.

A titolo di esempio, determiniamo il potenziale elettrico in un punto P, posto lungo l'asse z, di un anello carico uniformemente avente raggio R e carica totale netta q (fig. 13). Si consideri un elemento di carica dq sull'anello. Il potenziale dV associato a questo elemento è dato dall'equazione 23. Tutti gli elementi dell'anello sono alla stessa distanza r dal punto P per cui, integrando sull'anello, r resta costante e può essere portata fuori dall'integrale. La parte restante dell'integrale, $\int dq$, dà semplicemente la carica totale q sull'anello. Il potenziale nel punto P può essere quindi espresso come

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}} \quad \text{(anello carico)}, \tag{25}$$

essendo $r = \sqrt{(R^2+z^2)}$.

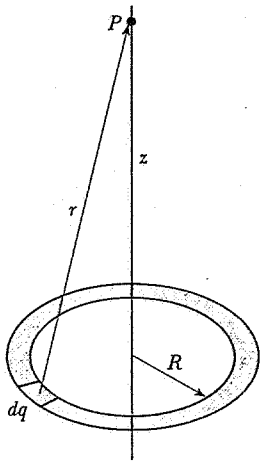


Figura 13 Anello uniformemente carico. Per trovare il potenziale in P si calcola l'effetto complessivo di tutti gli elementi di carica simili a dq.

* Scriviamo l'elemento di volume come dv, così da non poterlo confondere con il contributo elementare al potenziale dV.

Esempio 9 Si calcoli il potenziale in un punto dell'asse di un disco circolare plastico di raggio R, su una faccia del quale vi sia una carica distribuita con una densità uniforme σ.

Soluzione Il disco è mostrato nella figura 14. Si consideri un elemento di carica dq avente la forma di un anello sottile di raggio w e larghezza dw, per il quale

$$dq = \sigma(2\pi w)(dw),$$

dove $(2\pi w)(dw)$ è la superficie dell'anello sottile. Il contributo di questo anello al potenziale nel punto P è dato dall'equazione 25:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma 2\pi w\, dw}{\sqrt{w^2+z^2}}.$$

Il potenziale V si calcola per integrazione su tutti gli anelli nei quali il disco può essere scomposto, cioè

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^R (w^2+z^2)^{-1/2} w\, dw,$$

da cui si ottiene

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - z) \quad \text{(disco uniformemente carico)}. \tag{26}$$

Questo risultato generale vale per ogni valore positivo di z. Nel caso particolare in cui $z \gg R$, la quantità $\sqrt{(R^2+z^2)}$ può essere approssimata come

$$\sqrt{R^2+z^2} = z\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{1/2} = z\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}+\cdots\right) \approx z + \frac{R^2}{2z},$$

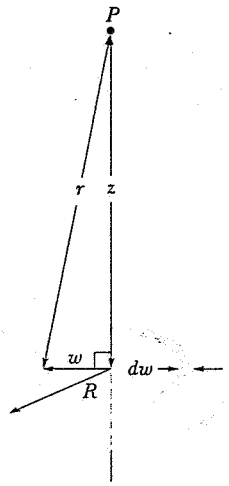


Figura 14 Esempio 9. Un disco plastico di raggio R porta, su una facccia, una densità di carica uniforme σ. L'elemento di carica dq è un anello uniformemente carico.

ISBN 88-408-0777-2

in cui la quantità tra parentesi del secondo membro viene espressa attraverso lo sviluppo in serie. Utilizzando questa approssimazione, l'equazione 26 diviene

$$V \approx \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(z + \frac{R^2}{2z} - z\right) = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z},$$

dove q ($= \sigma\pi R^2$) è la carica totale sul disco. Questo risultato limite poteva essere previsto poiché il disco si comporta come una carica puntiforme per $z \gg R$.

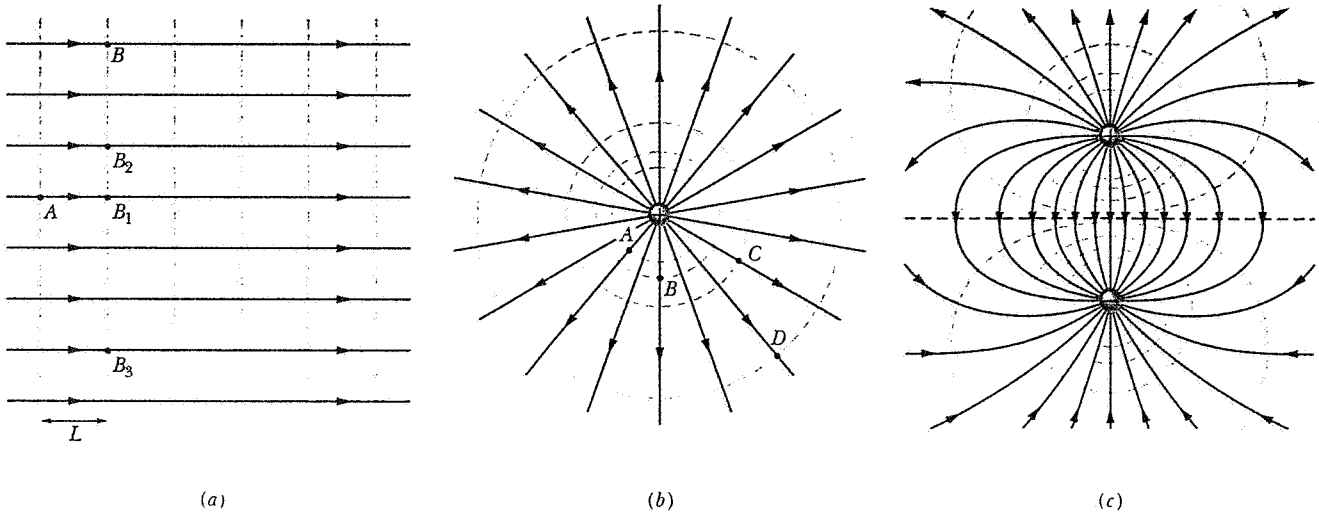
30-8 SUPERFICI EQUIPOTENZIALI

Le linee di forza (o, equivalentemente, le linee alle quali il campo elettrico è tangente) sono uno strumento conveniente per visualizzare il campo generato da una qualunque distribuzione di carica. Si può dare una seconda rappresentazione grafica basata sul concetto di potenziale elettrico. Essa consiste nel tracciare una famiglia di superfici ciascuna delle quali riunisce i punti che hanno lo stesso potenziale. Queste superfici vengono chiamate *superfici equipotenziali.*

Si consideri dapprima un campo elettrico uniforme **E**, descritto dalle linee di forza della figura 15*a*. Come si è ricavato nell'equazione 4, la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi (come A e B_1 della figura 15*a*) separati da una distanza L nella direzione del campo, è pari a EL. Cioè il lavoro compiuto dal campo elettrico quando una carica positiva di prova q_0 viene spostata da A a B_1 è pari a q_0EL. Se, poi, la carica di prova viene spostata perpendicolarmente al campo come, per esempio, dal punto B_1 al punto B_2 o B_3, il campo elettrico non compie alcun lavoro (poiché $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$) e la differenza di potenziale tra B_1 e B_2 o B_3 è nulla. Infatti tutti i punti della retta passante per B_1, B_2 e B_3 hanno lo stesso potenziale. Se dovessimo estendere questa situazione di campo uniforme nelle tre dimensioni, i punti che hanno lo stesso assegnato valore di potenziale appartengono ad un piano: *per un campo elettrico uniforme le superfici equipotenziali sono piane.* La figura 15*a* mostra (in sezione) una famiglia di superfici piane equipotenziali. Il valore della differenza di potenziale tra un punto qualunque di un piano e un punto qualunque di un secondo piano della famiglia è EL, essendo L la distanza (fissa) tra i due piani.

Il potenziale di una carica puntiforme dipende dalla distanza radiale dalla carica (eq. 18). Perciò tutti i punti ad ugual raggio hanno lo stesso potenziale. *Le superfici equipotenziali di una carica puntiforme formano una famiglia di superfici sferiche concentriche,* mostrate in sezione nella figura 15*b*. Le circonferenze sono state tracciate in modo che la differenza di potenziale tra una di esse e quella più vicina resti costante (cioè $\Delta V_{AB} = \Delta V_{BC} = \Delta V_{CD}$); le superfici equipotenziali di una carica puntiforme *non* sono equispaziate, a differenza del caso della figura 15*a*. Per un dipolo le superfici equipotenziali sono più complicate (fig. 15*c*).

Quando una carica di prova si sposta su una superficie equipotenziale, il campo elettrico non compie lavoro. Ciò deriva direttamente dall'equazione 10, infatti se $\Delta V = 0$, allora $\Delta U = 0$ e il lavoro L è, corrispondentemente, uguale a zero. Inoltre, data l'indipendenza del potenziale dal cammino, questo risultato vale per ogni coppia di punti appartenenti alla medesima superficie equipotenziale anche se il cammino tra di es-



(a) (b) (c)

Figura 15 Linee di forza (a tratto continuo) e sezioni di superfici equipotenziali (linea tratteggiata) relativamente a (*a*) un campo uniforme, (*b*) una carica positiva puntiforme e (*c*) un dipolo elettrico.

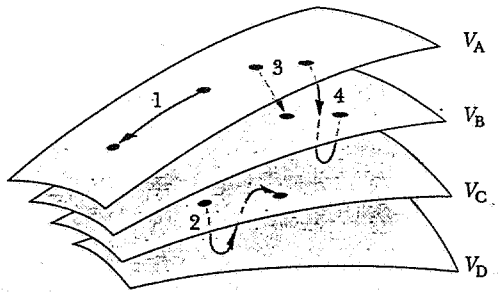


Figura 16 Quattro superfici equipotenziali. Sono tracciati quattro cammini possibili su cui spostare una carica di prova.

si non giace completamente sulla superficie equipotenziale stessa.

La figura 16 mostra una famiglia arbitraria di superfici equipotenziali. Il lavoro compiuto dal campo quando una carica si sposta sul cammino 1 o 2 è nullo poiché entrambi i cammini partono e terminano sulla stessa superficie equipotenziale. Lungo i cammini 3 e 4 il lavoro non è nullo ma ha lo stesso valore poiché i potenziali iniziale e finale sono identici; i cammini 3 e 4 connettono la stessa coppia di superfici equipotenziali.

Da un esame della figura 15 si vede che le superfici equipotenziali sono sempre perpendicolari alle linee di forza e quindi a **E**. Se **E** non fosse perpendicolare ad una superficie equipotenziale, avrebbe una componente che giace sulla superficie equipotenziale stessa. Questa componenente eserciterebbe una forza su una carica di prova e, di conseguenza, il lavoro da essa compiuto sulla carica di prova, quando la particella si sposta sulla superficie equipotenziale, non sarebbe nullo. Ma, in accordo con l'equazione 10, **E** non può compiere lavoro se la superficie è effettivamente equipotenziale. Perciò **E** deve essere perpendicolare alle superfici equipotenziali in ogni punto dello spazio. Nel prossimo paragrafo analizzeremo il calcolo di **E**, a partire da V; esso mette nuovamente in luce, come vedremo, il fatto che **E** deve sempre essere perpendicolare ad una superficie equipotenziale.

30-9 IL CALCOLO DEL CAMPO DATO IL POTENZIALE

Il potenziale V e il campo **E** sono descrizioni equivalenti per l'elettrostatica. L'equazione 16, $V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$, indica come calcolare V a partire da **E**. Ora vedremo come calcolare **E** conoscendo V in una certa regione dello spazio. Si è già visto come risolvere questi problemi dal punto di vista grafico. Se **E** è noto in ogni punto dello spazio, si possono tracciare le linee di forza; successivamente si può disegnare una famiglia di superfici equipotenziali, in base alla regola dell'ortogonalità rispetto alle linee di forza. Questa famiglia descrive l'andamento di V. Viceversa, se V è assegnato come una funzione della posizione, si può tracciare direttamente un insieme di superfici equipotenziali. Le linee di forza del campo possono, poi, essere disegnate come quelle linee che si mantengono ortogonali alle superfici equipotenziali in ogni punto; così si descrive l'andamento di **E**. Qui si vuole determinare l'equivalente matematico di questo secondo procedimento grafico, per calcolare matematicamente **E** in funzione di V. Si veda la figura 15 come esempio di famiglie di linee di forza e superfici equipotenziali.

La figura 17 mostra la sezione di una famiglia di superfici equipotenziali equispaziate con un incremento di potenziale fisso pari a dV. La figura mostra che **E** in un punto P generico forma un angolo retto con la superficie equipotenziale passante per P.

Si supponga che una carica di prova q_0 si sposti da P come indicato dal vettore $d\mathbf{s}$ sulla superficie equipotenziale $V + dV$. Il lavoro compiuto dal campo elettrico è pari a $-q_0 dV$. Il lavoro compiuto dal campo sulla carica di prova può anche essere calcolato in altro modo, in base alla definizione di lavoro,

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

dove $\mathbf{F}$ $(= q_0\mathbf{E})$ è la forza che agisce sulla carica per effetto del campo elettrico. Il lavoro compiuto dal campo può pertanto essere scritto come

$$L = q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = q_0 E\, ds \cos\theta.$$

Le due espressioni ricavate per il lavoro devono essere uguali, per cui

$$-q_0 dV = q_0 E\, ds \cos\theta$$

cioè

$$E\cos\theta = -\frac{dV}{ds}.$$

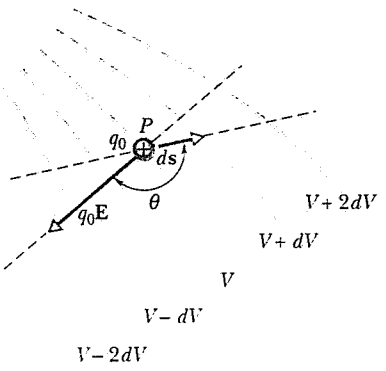


Figura 17 Una carica di prova q_0 viene spostata da una superficie equipotenziale ad un'altra attraverso lo spostamento $d\mathbf{s}$.

 ISBN 88-408-0777-2

$E\cos\theta$, che designamo come E_s, è la componente di **E** nella direzione di ds (fig. 17). Si ottiene, pertanto,

$$E_s = -\frac{dV}{ds}. \tag{27}$$

A parole, questa equazione stabilisce che *la variazione infinitesimale di potenziale cambiata di segno e divisa per il corrispondente spostamento elementare in una direzione qualsiasi è la componente di* **E** *in quella direzione*. Il segno meno implica che **E** è rivolto verso V *decrescenti*, come in figura 17. Dall'equazione 27 consegue che una appropriata unità di misura di **E** è il volt/metro (V/m).

La componente E_s avrà un massimo quando la direzione e il verso dello spostamento coincidono con la direzione e il verso di **E**. In questo caso E_s coincide con la piena intensità del campo E e l'equazione 27 si riscrive come

$$E = \left(-\frac{dV}{ds}\right)_{\max}. \tag{28}$$

Il valore massimo di dV/ds in un dato punto è detto anche *gradiente del potenziale* in quel punto. La direzione ds in cui $-\frac{dV}{ds}$ ha il suo valore massimo è sempre perpendicolare alla superficie equipotenziale passante per il punto, come il campo **E** (vedi fig. 17). Si considerino ancora le superfici equipotenziali nel caso di un campo uniforme (fig. 15*a*) e si immagini che le linee di campo vengano rimosse da tale figura. Si supponga che una carica di prova venga posta nel punto A e che essa venga spostata ad una distanza ds in una direzione qualsiasi e che venga misurata la corrispondente variazione di potenziale (per esempio misurando il lavoro compiuto sulla carica di prova). Dalla figura 15*a* si capisce che, per un assegnato spostamento ds, la massima variazione del potenziale si avrà portando la carica il più lontano possibile dal primo piano equipotenziale e il più vicino possibile al successivo. Ciò si verifica spostando la carica perpendicolarmente al piano, il che indica che il campo elettrico deve essere perpendicolare al piano equipotenziale. Adottando e iterando questo procedimento per molti punti, si può tracciare una «mappa» del campo elettrico per un qualunque insieme di superfici equipotenziali.

Scegliendo lo spostamento ds in modo che risulti allineato, di volta in volta, con i tre assi x, y e z si possono ricavare le tre componenti di **E** in ogni punto, utilizzando l'equazione 27:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \text{e} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{29*}$$

* (N.d.T.) Le tre relazioni (29) relative alle componenti di **E** si possono scrivere in forma unica vettoriale nel seguente modo: **E** = − grad V, dove «grad» è un operatore chiamato gradiente.

Pertanto, se V è noto in tutti i punti dello spazio, cioè se la funzione $V(x, y, z)$ è nota, le componenti di **E** e quindi **E** possono essere trovati calcolando le derivate.**

Ci sono quindi due metodi per calcolare **E** nel caso di distribuzioni di carica continue. Il primo si basa sull'integrazione della legge di Coulomb (vedi eq. 11 e 12 del cap. 28) e il secondo consiste nel derivare V (vedi eq. 29). Dal punto di vista pratico, il secondo metodo è spesso più semplice.

Esempio 10 Utilizzando l'equazione 26 per il potenziale assiale di un disco uniformemente carico, si derivi un'espressione per il campo elettrico nei punti appartenenti all'asse.

Soluzione Per questioni di simmetria **E** deve giacere sull'asse del disco (asse z). Utilizzando l'equazione 29 si ha che

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{d}{dz}[(z^2 + R^2)^{1/2} - z]$$
$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right).$$

Questa è la stessa espressione che è stata ricavata nel paragrafo 28-5 per integrazione diretta, usando la legge di Coulomb; si faccia un confronto con l'equazione 27 di questo capitolo.

Esempio 11 La figura 18 mostra un punto P (distante) nel campo di un dipolo che si trova nell'origine di un sistema di coordinate xz. Si calcoli **E** in funzione della posizione.

Soluzione Per questioni di simmetria **E**, nei punti del piano della figura 18, appartiene al piano xz stesso e può essere espresso attraverso le componenti E_x e E_z essendo E_y nulla. Esprimiamo, inizialmente, il potenziale in coordinate cartesiane anzichè polari, utilizzando le relazioni

$$r = (x^2 + z^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}}.$$

V è dato dall'equazione 21,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}.$$

sostituendo r^2 e $\cos\theta$, si ottiene

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Calcoliamo E_z dall'equazione 29, ricordando che x va considerata costante in questo calcolo,

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x^2 + z^2)^{3/2} - z[\frac{3}{2}(x^2 + z^2)^{1/2}](2z)}{(x^2 + z^2)^3}$$
$$= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{x^2 - 2z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}}. \tag{30}$$

(**) Il simbolo $\frac{\partial V}{\partial x}$ indica una *derivata parziale*. Nel fare questa derivata della funzione $V(x, y, z)$, la quantità x viene vista come una variabile e y e z vengono considerate costanti. Analoghe considerazioni valgono per $\frac{\partial V}{\partial y}$ e $\frac{\partial V}{\partial z}$.

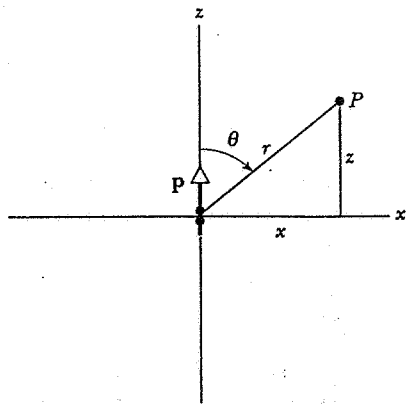


Figura 18 Esempio 11. Un dipolo viene posto nell'origine del piano xz.

La relazione $x = 0$ individua i punti distanti dal dipolo appartenenti al suo asse (cioè l'asse z) e l'espressione di E_z si riduce a

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{z^3}.$$

Questo risultato è in perfetto accordo con quello trovato nel capitolo 28 (vedi problema 11 del cap. 28) per il campo lungo l'asse di un dipolo. Si noti che, lungo l'asse z, $E_x = 0$ per motivi di simmetria.

Ponendo $z = 0$ nell'equazione 30 si ottiene E_z per punti distanti appartenenti al piano mediano del dipolo:

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{x^3},$$

che è ancora in perfetto accordo con il risultato trovato nel capitolo 28 (vedi eq. 10) dato che, sempre per motivi di simmetria, $E_x = 0$ nel piano mediano. Il segno meno in questa equazione indica che **E** punta nella direzione negativa dell'asse z.

La componente E_x può anche essere trovata dall'equazione 29, ricordando che z va considerata costante in questo calcolo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{pz}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+z^2)^{-5/2}(2x)$$
$$\frac{3p}{4\pi\epsilon_0}\frac{xz}{(x^2+z^2)^{5/2}}. \qquad (31)$$

Come ci si aspetta E_x si annulla sia sull'asse del dipolo ($x = 0$) che sul piano mediano ($z = 0$).

30-10 IL CONDUTTORE ISOLATO

Nel paragrafo 29-4 si è fatto uso della legge di Gauss per dimostrare un importante teorema relativo ai conduttori isolati: una carica in eccesso posta su un conduttore isolato si sposta interamente sulla faccia esterna del conduttore. All'equilibrio nessuna carica può stazionare all'interno del corpo del conduttore o su una superficie interna, anche se il conduttore è dotato di cavità (purchè non ci sia alcuna carica netta racchiusa all'interno delle cavità).

Questa proprietà dei conduttori può essere tradotta in modo equivalente utilizzando la terminologia del potenziale:

Una carica in eccesso posta su un conduttore isolato si distribuisce sulla superficie in modo che tutti i punti del conduttore – sulla superficie e all'interno – assumano il medesimo potenziale.

Questa proprietà vale anche se il conduttore ha cavità interne, sia che esse contengano una carica netta oppure no.

La dimostrazione di questa affermazione si basa sulla osservazione sperimentale che, nelle situazioni di stato stazionario, non ci sono correnti interne al conduttore. Se due punti interni a un conduttore fossero a diversi potenziali, allora alcune cariche libere (presumibilmente elettroni) si muoverebbero dalla regione a più basso potenziale verso quella a più alto potenziale. Tali spostamenti di cariche contraddirebbero l'osservazione sperimentale di correnti nulle nello stato stazionario. Perciò i punti interni non possono avere potenziali diversi.

Possiamo anche dare una prova di questa affermazione in base all'equazione 15. Nel paragrafo 29-4 si è appreso che il campo elettrico si annulla in un conduttore. Se $\mathbf{E} = 0$ *ovunque* all'interno di un conduttore, allora l'integrale $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ è nullo su ogni cammino tra due punti a e b interni al conduttore. Perciò $V_b - V_a = 0$ per tutte le coppie di punti e il potenziale deve assumere lo stesso valore.

Nel paragrafo 29-4 si è anche dedotto che il campo elettrico vicino alla superficie di un conduttore è perpendicolare alla sua superficie. Ciò è congruente con l'affermazione in base a cui la superficie di un conduttore è equipotenziale; come si è mostrato nel paragrafo 30-9, il campo elettrico è sempre perpendicolare alle superfici equipotenziali.

La figura 19 mostra l'andamento del potenziale al variare della distanza radiale per un guscio sferico conduttore isolato avente raggio pari a 1 m e una carica di 1.0 μC. Nei punti esterni al guscio $V(r)$ può essere calcolato utilizzando l'equazione 16, poiché la carica q è vista dai punti esterni come se essa fosse concentrata al centro della sfera. L'equazione 16 dà correttamente il potenziale per tutti i punti che vengono percorsi avvicinandosi al guscio dall'esterno fino a raggiungere la superficie del guscio. Si supponga ora che ci sia un piccolo foro sulla superficie, appena sufficiente per introdurre una carica di prova all'interno del guscio. Nessuna forza elettrica agisce sulla carica di prova, quando questa viene spostata all'interno, per

ISBN 88-408-0777-2

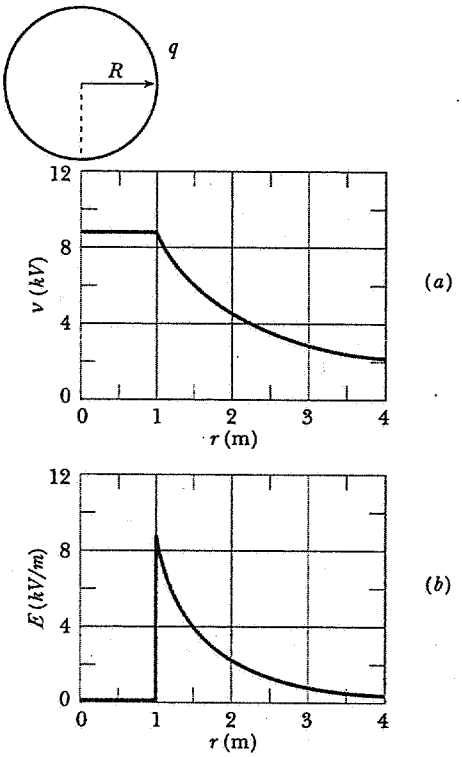


Figura 19 (*a*) Il potenziale e (*b*) il campo elettrico di un guscio sferico uniformemente carico.

cui il potenziale deve mantenersi costante in tutti i punti interni. Come è illustrato nella figura 19*a*, il potenziale all'interno della superficie sferica è ovunque uguale al potenziale della superficie.

La figura 19*b* mostra il campo elettrico generato da questo stesso guscio sferico. Si noti che $\mathbf{E} = 0$ dovunque, all'interno del guscio. La figura 19*b* può essere ottenuta dalla figura 19*a* attraverso una operazione di derivata, in accordo con l'equazione 28; viceversa si può ottenere la figura 19*a* dalla figura 19*b* integrando, in accordo con l'equazione 16.

La figura 19 descrive esattamente anche il caso di un conduttore sferico *pieno* anzichè vuoto, come nel caso del guscio. Si confronti, invece, la figura 19*b* (sfera o guscio sferico conduttori) con la figura 12 del capitolo 29, che descriveva il caso di una sfera *non conduttrice*. La differenza tra i due casi è giustificata dal fatto che la carica nella sfera o nel guscio conduttori staziona interamente sulla superficie, mentre nel caso della sfera non conduttrice essa può essere distribuita nel volume.

Un conduttore in un campo elettrico esterno

Tutti i punti di un conduttore devono avere lo stesso potenziale sia che esso contenga una carica netta oppure no. Questo è anche vero nel caso in cui il campo elettrico che produce il potenziale è imposto dall'esterno anzichè essere il risultato di una carica netta distribuita sul conduttore.

La figura 20 mostra un conduttore scarico posto in un campo elettrico esterno. Il campo era uniforme prima che il conduttore vi venisse immerso. Gli elettroni liberi del conduttore si spostano per effetto del campo; le cariche negative tendono ad accumularsi su un lato del conduttore, le cariche positive sull'altro. Come mostrato nella figura 20, le linee di campo, che partono e terminano su cariche libere, vengono distorte rispetto alla loro iniziale distribuzione uniforme. Le superfici equipotenziali sono piane nelle regioni uniformi lontane dal conduttore e, avvicinandosi al conduttore, assumono gradualmente la forma della sua superficie esterna che, come si è già detto, deve essere equipotenziale. Se le cariche superficiali del conduttore potessero in qualche modo essere «congelate» nello spazio e il conduttore venisse rimosso dalla zona del campo, le linee di campo resterebbero invariate. In particolare, nella regione precedentemente occupata dal conduttore, le cariche genererebbero un campo uniforme rivolto verso sinistra nella figura 20 che cancellerebbe esattamente il campo uniforme originale per dare un campo totale nullo all'interno della regione. Al di fuori di questa regione le cariche superficiali produrrebbero un campo che, combinandosi vettorialmente con il campo originale, darebbe il campo risultante illustrato nella figura.

Una distribuzione di linee di campo come quella tracciata nella figura 20 può essere resa visibile immergendo il conduttore in una sospensione di piccole particelle che si allineano con le linee di campo (vedi fig.

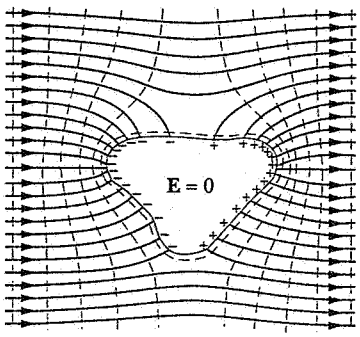


Figura 20 Un conduttore scarico viene immesso in un campo elettrico esterno. Gli elettroni di conduzione si distribuiscono sulla superficie in modo da produrre una distribuzione di carica come quella mostrata in figura, che azzera il campo elettrico all'interno del conduttore. Si noti la distorsione delle linee di forza del campo elettrico (tratto continuo) e delle superfici equipotenziali (linee tratteggiate) quando il conduttore viene posto nel campo elettrico inizialmente uniforme.

9 del cap. 28). In alternativa le superfici equipotenziali possono essere ricostruite attraverso una coppia di sensori di una opportuna strumentazione elettronica, tenendo fermo un sensore e utilizzando l'altro per individuare tutti i punti che producono una differenza di potenziale nulla rispetto al primo sensore.

Scarica per effetto corona *(Facoltativo)*

Quantunque la carica superficiale sia distribuita uniformemente su un conduttore sferico, ciò *non* si verifica nel caso di conduttori aventi una forma qualsiasi. Vicino a punte o a bordi molto netti, la densità di carica superficiale – e quindi il campo elettrico appena al di fuori della superficie – può raggiungere valori estremamente elevati.

Per comprendere qualitativamente come ciò avvenga, si considerino due sfere conduttrici di diverso raggio collegate con un lungo cavo sottile (fig. 21). Si porti il sistema così costituito ad un potenziale arbitrario V. I potenziali (uguali) delle due sfere sono (eq. 18)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R_2},$$

da cui si ricava

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{32}$$

Si noti che l'equazione 18, che era stata ricavata inizialmente per una carica puntiforme, vale per qualunque distribuzione di carica a simmetria sferica. Si assume che le sfere siano così lontane che la carica della prima non abbia alcun effetto sulla distribuzione di carica della seconda e viceversa.

Il rapporto tra le densità di carica superficiali delle due sfere è

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^2}{q_2/4\pi R_2^2} = \frac{q_1 R_2^2}{q_2 R_1^2}.$$

Combinando questo risultato con l'equazione 32, si ha che

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}. \tag{33}$$

L'equazione 33 indica che la sfera più piccola ha una maggiore densità di carica superficiale. Nella geometria della figura 21 ciò implica che il campo elettrico vicino alla sfera più piccola sia maggiore del campo elettrico vicino alla sfera più grande. Più piccolo è il raggio della sfera, più intenso è il campo elettrico vicino alla sua superficie. Sulla superficie di un conduttore aguzzo (ossia di raggio molto piccolo) il campo elettrico può essere sufficientemente intenso da ionizzare le molecole dell'aria circostante; di conseguenza l'aria, che normalmente non conduce, può diventare conduttrice ed estrarre carica dal conduttore. Questo effetto è detto *scarica per effetto corona*. Gli spruzzatori elettrostatici di vernice utilizzano il principio dell'effetto corona per trasferire carica alle gocce di vernice, le quali vengono poi accelerate da un campo elettrico. Le macchine fotocopiatrici basate sul processo xerografico utilizzano un filo per produrre una scarica per effetto corona che trasferisca carica ad una superficie ricoperta di selenio; la carica viene neutralizzata nelle regioni su cui incide la luce, mentre nelle rimanenti aree le cariche attraggono una fine polvere nera che forma le immagini. ■

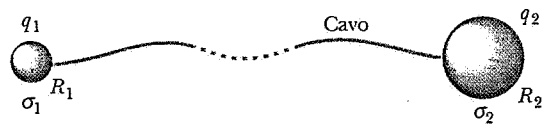


Figura 21 Due sfere conduttrici connesse da un lungo cavo sottile.

(*) Si veda *The lightning-rod Fallacy* di Richard H. Price e Ronald J. Crowley, «American Journal of Physics», settembre 1985, pag. 843, per una accurata discussione su questo fenomeno.

30-11 L'ACCELERATORE ELETTROSTATICO *(Facoltativo)*

Molti studi sui nuclei si basano su reazioni nucleari che avvengono allorquando un fascio di particelle incide su un bersaglio. Un metodo utilizzato per accelerare le particelle negli esperimenti di fisica nucleare si basa su una tecnica di natura elettrostatica. Una particella avente carica positiva q si muove in una regione dove esiste una differenza di potenziale negativa ΔV e va soggetta, di conseguenza, ad un cambiamento della sua energia potenziale pari a $\Delta U = q\Delta V$, in accordo con l'equazione 11. L'aumento corrispondente di energia cinetica della particella è $\Delta K = -\Delta U$ e, assumendo che la particella parta dalla quiete, la sua energia cinetica finale sarà

$$K = -q\Delta V. \tag{34}$$

Per atomi ionizzati q è normalmente positiva (quantunque esista una importante applicazione dell'eq. 34 che utilizza ioni negativi e differenze di potenziale positive). Per accelerare il fascio alla più alta energia possibile è desiderabile avere la più alta differenza di potenziale possibile. Per le applicazioni di interesse in fisica nucleare le particelle devono acquistare energie di milioni di elettron-volt (MeV) per vincere la forza repulsiva di Coulomb tra le particelle incidenti e quelle del bersaglio. Per raggiungere energie cinetiche di vari MeV occorrono differenze di potenziale di milioni di volt.

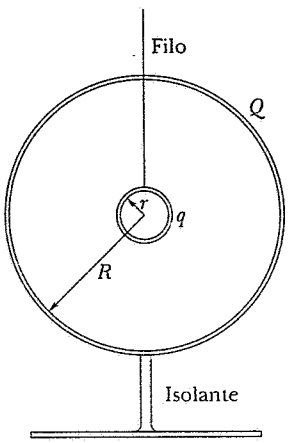


Figura 22 Una piccola sfera carica viene sospesa in un grande guscio sferico carico.

ISBN 88-408-0777-2

Un dispositivo elettrostatico capace di produrre differenze di potenziale tanto grandi è illustrato nella figura 22. Una piccola sfera conduttrice di raggio r su cui è presente una carica q è posta all'interno di un più grande guscio sferico di raggio R su cui è distribuita una carica Q. Le due sfere vengono connesse elettricamente e la carica q, di conseguenza, si sposta interamente sul conduttore più esterno, indipendentemente dalla quantità di carica Q che già vi staziona (vedi anche fig. 14 del cap. 29 e la discussione relativa nel par. 29-6). Se esiste un meccanismo capace di rifornire la carica q del conduttore interno attraverso un generatore esterno, la carica Q sulla sfera esterna e il suo potenziale possono, in linea di principio, essere accresciuti illimitatamente. In realtà il potenziale finale raggiungibile è limitato dalle scariche che iniziano a prodursi nell'aria ad un certo valore caratteristico (si veda la fig. 23).

Questo noto principio dell'elettrostatica fu applicato per la prima volta ad un acceleratore di particelle nucleari da Robert J. Van de Graaff agli inizi del 1930 e l'acceleratore è divenuto famoso come l'*acceleratore di Van de Graaff*. Potenziali di parecchi milioni di volt sono facilmente raggiunti. Il potenziale massimo raggiungibile è limitato dalle perdite di carica attraverso i supporti isolanti o attraverso l'aria (talvolta sostituita da un gas isolante ad alta pressione) che circondano l'elettrodo ad alto potenziale.

La figura 24 mostra lo schema di base dell'acceleratore di Van de Graaff. La carica viene iniettata per effetto corona da un elettrodo appuntito posto nella posizione A, su una cinghia mobile di materiale isolante (normalmente gomma). La cinghia porta la carica all'interno della sfera ad alta tensione, dove viene prelevata da un secondo elettrodo a punta B spostandosi sul conduttore esterno. All'interno della sfera ad alta tensione viene posta una sorgente di ioni positivi, per esempio nuclei di idrogeno (protoni) o di elio (particelle alfa). Gli ioni, fuoriuscendo dall'elettrodo, vengono accelerati dall'elevato potenziale, acquistando, nel processo, una energia cinetica di parecchi MeV. L'apparato è normalmente racchiuso in un contenitore contenente gas isolante per evitare le scariche elettriche.



Figura 23 Un generatore elettrostatico ad un potenziale di 2.7 milioni di volt. Esso produce scariche dovute alla conduzione attraverso l'aria.

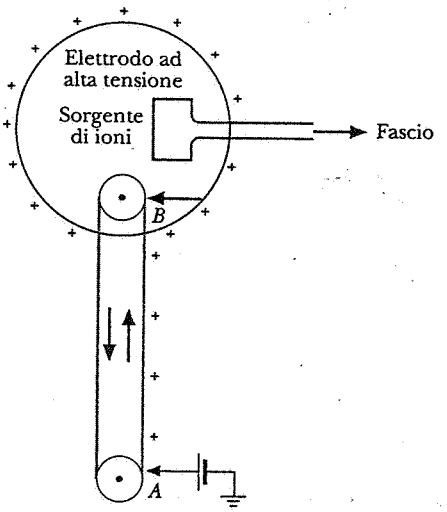


Figura 24 Schema dell'acceleratore di Van De Graaf. Una carica positiva viene immessa sulla cinghia nel punto A e rimossa dalla cinghia stessa nel punto B, da cui si sposta sull'elettrodo che assume il potenziale V. Ioni carichi positivamente vengono respinti dall'elettrodo positivo formando il fascio.

Una ingegnosa modifica di questo schema di base fa uso dello stesso elevato potenziale per accelerare gli ioni due volte, producendo un ulteriore aumento di energia cinetica. Una sorgente di ioni *negativi*, costituiti aggiungendo un elettrone ad un atomo neutro, è posta al di fuori dell'elettrodo positivo ad alta tensione; questi ioni vengono, quindi, accelerati verso l'elettrodo. All'interno di questo, il fascio passa attraverso una camera, contenente un gas o una lamina sottile, concepita per rimuovere vari elettroni dagli ioni negativi, trasformandoli in ioni positivi. Gli ioni positivi, a loro volta, vengono respinti dal potenziale positivo dell'elettrodo, come nel caso precedente. Questi acceleratori «tandem» di Van de Graaff producono, normalmente, una tensione di 25 milioni di volt all'elettrodo per accelerare ioni come il carbonio o l'ossigeno ad energie cinetiche maggiori di 100 MeV.

Esempio 12 Si calcoli la differenza di potenziale tra le due sfere illustrate nella figura 22.

Soluzione La differenza di potenziale $V(R) - V(r)$ viene da due contributi: uno associato alla piccola sfera, l'altro al grande guscio sferico. Essi possono essere calcolati indipendentemente e sommati algebricamente. Si consideri inizialmente il guscio esterno. La figura 19*a* mostra che il potenziale in tutti i punti interni ha lo stesso valore del potenziale sulla superficie. Perciò il contributo del guscio alla differenza di potenziale $V(R) - V(r)$ è nullo.

Non resta che valutare tale differenza considerando soltanto la sfera piccola. Per tutti i punti esterni alla sfera piccola essa si comporta come una carica puntiforme e la differenza di potenziale può essere trovata dall'equazione 19:

$$V(R) - V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

Questa espressione dà la differenza di potenziale tra la sfera inter-

na e il guscio esterno. Si noti che essa è *indipendente dalla carica Q sul guscio esterno*. Se q è positiva, la differenza sarà sempre negativa, il che indica che il guscio esterno sarà sempre ad un potenziale più basso. Se la carica positiva può scorrere tra le sfere, essa scorre sempre dal potenziale più alto al più basso, cioè dalla sfera interna al guscio esterno, indipendentemente dalla quantità di carica che si è già raccolta sulla sfera esterna. ■

DOMANDE

1. Siamo liberi di considerare il potenziale della superficie della Terra pari a + 100 V anzichè zero? Quale effetto avrebbe tale ipotesi sui valori misurati (*a*) dei potenziali e (*b*) delle differenze di potenziale?
2. Che cosa succederebbe ad un osservatore che si trova su un pavimento isolato quando il suo potenziale venisse accresciuto di 10 kV rispetto a quello della Terra?
3. Perché l'elettron-volt è spesso una unità di misura più conveniente del joule?
4. Come si dovrebbe confrontare un proton-volt con un elettron-volt? La massa del protone è 1840 volte maggiore di quella dell'elettrone.
5. Gli elettroni tendono a spostarsi nelle regioni ad alto potenziale o a basso potenziale?
6. Il lavoro per unità di carica richiesto per trasferire una carica elettrica da un punto ad un altro in un campo elettrostatico, dipende dalla quantità di carica trasferita?
7. Si distingua tra differenza di potenziale e differenza di energia potenziale. Si diano esempi di affermazioni in cui queste due terminologie sono utilizzate appropriatamente.
8. Si stimi l'energia complessiva di tutti gli elettroni che colpiscono lo schermo di un oscilloscopio a raggi catodici in un secondo.
9. Perché è possibile schermare una stanza dalle forze elettriche ma non dalle forze gravitazionali?
10. Si supponga che la Terra abbia una carica netta non nulla. Perché è ancora possibile utilizzare la Terra come un punto di riferimento standard del potenziale ed assegnarle il potenziale $V = 0$?
11. Ci può essere una differenza di potenziale tra due conduttori sui quali è presente la stessa quantità di carica?
12. Si facciano esempi di situazioni in cui il potenziale di un corpo carico abbia segno opposto rispetto a quello della sua carica.
13. Due superfici equipotenziali si possono intersecare?
14. Un elettricista viene accidentalmente fulminato e il giornale riporta: «Egli ha accidentalmente toccato un cavo ad alta tensione e 20,000 V di elettricità gli hanno attraversato il corpo». Si commenti questa affermazione.
15. I consigli dati agli escursionisti della montagna sorpresi da fulmini e temporali dicono di (*a*) spostarsi subito dai picchi e dalle creste e di sostare all'aperto acquattati toccando terra soltanto con i piedi uniti. Qual è la base di questi buoni consigli?
16. Se $E = 0$ in un dato punto, V deve essere uguale a zero in quel punto? Si diano alcuni esempi per giustificare la risposta.
17. Conoscendo E soltanto in un assegnato punto, si può calcolare V in quel punto? In caso contrario, quale informazione aggiuntiva occorre?
18. Nelle figura 16 il campo elettrico E è maggiore sulla sinistra o sulla destra?
19. Il disco isolante uniformemente carico dell'esempio 9 è una superficie a potenziale costante? Spiegare.
20. Si è visto che l'interno di un conduttore cavo è un ambiente schermato dal campo generato dalle cariche esterne. Mettendosi *all'esterno* di un conduttore cavo che contiene alcune cariche, si è schermati dal campo di queste cariche? Si giustifichi la risposta.
21. Se la superficie di un conduttore carico è equipotenziale, ciò significa che la carica è distribuita uniformemente sulla superficie?
22. Nel paragrafo 30-10 si è ricordato che la carica fornita *all'interno* di un conduttore isolato si trasferisce *interamente* sulla superficie esterna del conduttore, indipendentemente dalla quantità che già vi staziona. Questo processo può essere ripetuto all'infinito? In caso contrario che cosa lo blocca?
23. Perché un atomo isolato non può avere un momento di dipolo elettrico permanente?
24. Gli ioni e gli elettroni agiscono come centri di condensazione; gocce d'acqua si formano intorno a loro in aria. Si spieghi il perché.
25. Se V è costante in una regione dello spazio, che cosa si può dire di E in tale regione?
26. Nel capitolo 16 si è visto che il campo gravitazionale è nullo all'interno di un guscio sferico di materia. Il campo elettrico è nullo non soltanto dentro un guscio sferico conduttore isolato, ma anche entro un conduttore isolato di forma qualsiasi. Il campo gravitazionale è nullo all'interno di un guscio di materia, ad esempio, cubico? In caso contrario, in quale modo l'analogia non è completa?
27. Come ci si può assicurare che il potenziale elettrico in una data regione dello spazio abbia valore costante?
28. Si descriva una disposizione di tre cariche puntiformi poste a distanze finite le une dalle altre, che abbia energia potenziale elettrica nulla.
29. Una carica viene deposta su un conduttore isolato di forma cubica perfetta. Quale sarà la densità di carica relativa nei vari punti del cubo (superfici, bordi e vertici)? Che cosa succede alla carica se il cubo si trova in aria?
30. Si è visto (par. 30-10) che il potenziale all'interno di un conduttore è uguale a quello della sua superficie. (*a*) Che cosa succede se il conduttore ha forma irregolare ed ha cavità interne di forma irregolare? (*b*) Che cosa succede se la cavità ha un piccolo foro che la connette con l'esterno? (*c*) Che cosa succede se la cavità è completamente chiusa ma vi è una carica sospesa all'interno di essa? Si discuta sul potenziale all'interno di un materiale conduttore e in punti diversi all'interno di una cavità.
31. Su un guscio sferico conduttore isolato è presente una carica negativa. Che cosa succede se un oggetto metallico caricato positivamente viene messo in contatto con la parte interna del guscio? Si discutano i tre casi in cui la carica positiva sia (*a*) minore, (*b*) uguale e (*c*) maggiore del modulo della carica negativa.
32. Una sfera metallica scarica sospesa con un filo di seta è posta in un campo elettrico esterno uniforme. Qual è il valore del campo elettrico nei punti interni alla sfera? La risposta cambia se sulla sfera vi è una carica?

ISBN 88-408-0777-2

PROBLEMI

Paragrafo 30-2 L'energia potenziale elettrica

1. Nel modello a quark delle particelle fondamentali un protone è composto da tre quark: due quark «up», ognuno con una carica + 2/3 e, e un qurk «down» con una carica -1/3 e. Si supponga che i tre quark siano equidistanti l'uno dall'altro. Si assuma che la distanza sia pari a $1.32\text{-}10^{-15}$ m e si calcoli (*a*) l'energia potenziale dell'interazione tra i due quark «up» e (*b*) l'energia potenziale elettrica totale del sistema.
2. Si derivi una espressione per il lavoro richiesto perché un agente esterno disponga le quattro cariche della figura 25 come mostrato. Ciascun lato del quadrato abbia lunghezza a.

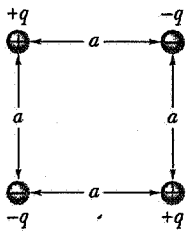


Figura 25 Problema 2.

3. Un decennio prima che Einstein pubblicasse la sua teoria della relatività, J. J. Thomson ipotizzò che l'elettrone fosse composto da piccole parti e che la sua massa fosse dovuta alla interazione elettrica tra le parti. Inoltre egli azzardò che l'energia fosse pari a mc^2. Si faccia una stima grossolana della massa dell'elettrone nel seguente modo: si assuma che l'elettrone sia composto da tre parti identiche portate in posizione dall'infinito e che esse siano disposte nei vertici di un triangolo equilatero di lato pari al raggio classico dell'elettrone, 2.82×10^{-15} m. (*a*) Si trovi l'energia potenziale elettrica totale di questa configurazione. (*b*) Si divida per c^2 e si confronti il risultato con la massa accettata dell'elettrone (9.11×10^{-31} kg) Il risultato migliora se si assume un maggior numero di parti. Oggi l'elettrone è pensato come una singola particella indivisibile.
4. Le cariche mostrate nella figura 26 sono fisse nello spazio. Si determini il valore della distanza x tale che l'energia potenziale elettrica del sistema sia nulla.

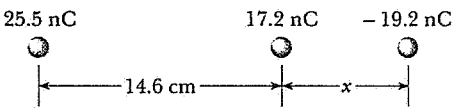


Figura 26 Problema 4.

5. La figura 27 illustra una rappresentazione ideale di un nucleo di ^{238}U ($Z = 92$) durante la fissione. Si calcoli (*a*) la forza repulsiva che agisce su ciascun frammento e (*b*) l'energia potenziale elettrica mutua dei due frammenti. Si assuma che i frammenti abbiano la stessa dimensione e carica, abbiano forma sferica e si tocchino in un punto. Il raggio del nucleo sferico iniziale di ^{238}U è 8.0 fm. Si assuma che il materiale del quale i nuclei sono composti abbia densità costante.

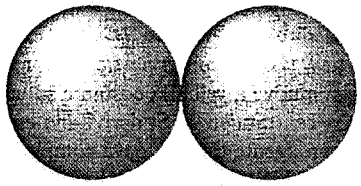


Figura 27 Problema 5.

Paragrafo 30-3 Il potenziale elettrico

6. Due superfici conduttrici parallele, piatte, spaziate di $d = 1.0$ cm hanno una differenza di potenziale ΔV di 10.3 kV. Un elettrone viene proiettato da un piatto verso l'altro. Qual è la velocità iniziale dell'elettrone se esso si ferma proprio sulla superficie del secondo piatto? Si trascurino gli effetti relativistici.
7. In un tipico lampo di un flash la differenza di potenziale tra i punti dove avviene la scarica è 1.0×10^9 V e la quantità di carica trasferita è 30 C. (*a*) Quanta energia viene rilasciata? (*b*) Se tutta l'energia rilasciata venisse utilizzata per accelerare un'automobile di 1200 kg a riposo, quale sarebbe la sua velocità finale? (*c*) Se tale energia venisse impiegata per fondere ghiaccio, quanto ghiaccio fonderebbe a 0 °C?
8. La differenza di potenziale elettrico tra due punti di scarica durante un temporale è di 1.23×10^9 V. Qual è la variazione dell'energia potenziale elettrica di un elettrone che si muove tra questi punti? Si dia la risposta in (*a*) joules e (*b*) elettronvolt.
9. (*a*) A quale differenza di potenziale deve essere sottoposto un elettrone, in accordo con la meccanica newtoniana, per acquistare una velocità v uguale alla velocità della luce c? (*b*) La meccanica newtoniana non vale più quando $v \to c$. Pertanto, utilizzando l'espressione relativistica corretta dell'energia cinetica (vedi eq. 27 del cap. 21)

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right]$$

al posto della relazione newtoniana $K = \frac{1}{2}mv^2$, si determini la velocità effettivamente raggiunta nella differenza di potenziale di cui al punto (*a*). Si esprima questa velocità come frazione della velocità della luce.
10. Un elettrone viene lanciato con una velocità iniziale di 3.44×10^5 m/s verso un protone che si trova a riposo. Se l'elettrone è, inizialmente, ad una grande distanza dal protone, a quale distanza da esso la sua velocità sarà raddoppiata rispetto alla velocità iniziale?
11. Una particella di carica q è tenuta in una posizione fissa nel punto P e una seconda particella di massa m, avente la stessa carica q, è, inizialmente, tenuta a riposo ad una distanza r_1 da P. La seconda particella viene poi rilasciata e viene respinta dalla prima. Si determini la sua velocità nell'istante in cui essa è ad una distanza r_2 da P. Si assuma $q = 3.1$ μC, $m = 18$ mg, $r_1 = 0.90$ mm e $r_2 = 2.5$ mm.
12. Si calcoli (*a*) il potenziale elettrico associato al nucleo dell'atomo di idrogeno alla distanza media in cui si trova l'elettrone ($r = 5.29 \times 10^{-11}$ m). (*b*) l'energia potenziale elettrica dell'atomo quando l'elettrone si trova a tale distanza radiale e

(*c*) l'energia cinetica dell'elettrone, assumendo che esso si muova su un'orbita circolare con raggio r centrata sul nucleo. (*d*) Quanta energia è richiesta per ionizzare l'atomo di idrogeno? Si esprimano tutte le energie in elettron-volt.

13. Una particella di carica positiva Q viene mantenuta in una posizione fissa P. Una seconda particella di massa m e carica negativa $-q$ si muove a velocità costante su una circonferenza di raggio r_1 centrata su P. Si derivi una espressione per il lavoro L che un agente esterno deve compiere sulla seconda particella, affinchè il raggio del moto circolare centrato in P venga aumentato fino ad un raggio r_2.
14. Nel rettangolo mostrato nella figura 28 i lati misurano 5.0 cm e 15 cm, inoltre $q_1 = -5.0$ μC e $q_2 = +2.0$ μC. (*a*) Quali sono i potenziali elettrici nei vertici A e B? (*b*) Quale lavoro bisogna compiere per spostare una terza carica $q_3 = +3.0$ μC da B ad A lungo la diagonale del rettangolo? (*c*) In questo processo il lavoro esterno è convertito in energia potenziale elettrostatica o viceversa? Si spieghi.

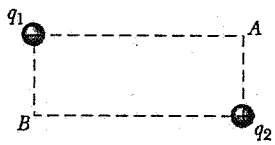


Figura 28 Problema 14.

15. Tre cariche di + 122 μC ciascuna vengono poste sui vertici di un triangolo equilatero avente lato di 1.72 m. Se è resa disponibile una energia con una potenza di 831 W, quanti giorni occorreranno per spostare una delle tre cariche nel punto medio delle altre due?

Paragrafo 30-4 Il calcolo del potenziale dato il campo

16. Un piano carico infinito ha una densità di carica $\sigma = 0.12$ μC/m^2. A quale distanza si trovano le superfici equipotenziali il cui potenziale differisce da quello del piano carico di 48 V?
17. Due grandi piatti paralleli conduttori vengono posti ad una distanza di 12.0 cm l'uno dall'altro e sulle loro superfici sono presenti cariche uguali e opposte. Un elettrone posto a metà strada tra i due piatti è soggetto ad una forza di 3.90×10^{-15} N. (*a*) Si trovi il campo elettrico nella posizione dell'elettrone. (*b*) Qual è la differenza di potenziale tra i due piatti?
18. Nell'esperimento di Millikan della goccia d'olio (vedi par. 28-6), un campo elettrico di 1.92×10^5 N/C viene instaurato tra due piatti posti ad una distanza di 1.50 cm. Si trovi la differenza di potenziale tra i due piatti.
19. Un contatore Geiger è costituito da un cilindro metallico avente diametro di 2.10 cm, lungo il cui asse viene teso un filo avente diametro di 1.34×10^{-4} cm. Si assuma che tra il cilindro e il filo venga applicata una tensione di 855 V. Quale sarà il campo elettrico sulla superficie (*a*) del filo e (*b*) del cilindro? (*Suggerimento*: si utilizzi il risultato del problema 36, cap. 29).
20. Il campo elettrico in una sfera isolante di raggio R. all'interno della quale vi sia una carica distribuita uniformemente. è diretto radialmente ed ha intensità

$$E(r) = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

dove q è la carica totale nella sfera e r è la distanza dal centro della sfera . (*a*) Si determini il potenziale $V(r)$ all'interno della sfera, assumendo $V = 0$ per $r = 0$. (*b*) Qual è la differenza di potenziale elettrico tra un punto della superficie e il centro della sfera? Se q è positiva, quale dei punti è a più alto potenziale? (*c*) Si mostri che il potenziale ad una distanza r dal centro, essendo $r < R$, è dato da

$$V = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3},$$

dove lo zero del potenziale è fissato per $r = \infty$. Perché questo risultato è diverso da quello della parte (*a*)?

Paragrafo 30-5 Il potenziale dovuto ad una carica puntiforme

21. Un nucleo d'oro contiene una carica positiva uguale a quella di 79 protoni ed ha un raggio di 7.0 fm (vedi esempio 6). Una particella alfa (che è costituita da due protoni e due neutroni), lontana dal nucleo, sta viaggiando con una energia cinetica K nella direzione del nucleo. La particella alfa giunge a contatto con la superficie del nucleo proprio quando la sua velocità sta invertendo verso. (*a*) Si calcoli K. (*b*) L'energia effettiva delle particelle alfa utilizzate da Rutherford e dai suoi collaboratori nell'esperimento che portò alla definizione del concetto di nucleo atomico, era di 5 MeV. Che cosa se ne può concludere?
22. Si calcoli la velocità di fuga di un elettrone dalla superficie di una sfera uniformemente carica di raggio 1.22 cm essendo la carica pari a 1.76×10^{-15} C. Si trascurino le forze gravitazionali.
23. Una carica puntiforme q vale + 1.16 μC. Si consideri il punto A, posto ad una distanza di 2.06 m e il punto B, posto ad una distanza di 1.17 m nella direzione diametralmente opposta, come illustrato nella figura 29*a*. (*a*) Si trovi la differenza di potenziale $V_A - V_B$. (*b*) Si svolga il punto (*a*) quando i punti A e B sono disposti come in figura 29*b*.

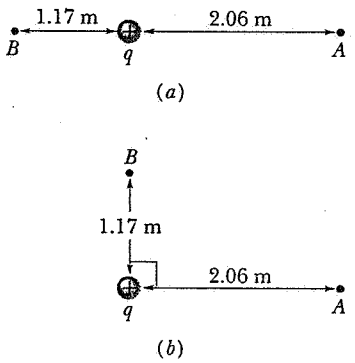


Figura 29 Problema 23.

24. Molti dei materiali che costituiscono gli anelli di Saturno (vedi fig. 30) sono nella forma di sottili particelle di polvere del diametro di 1.0 μm. Questi granelli si trovano in una regione che contiene un gas ionizzato rarefatto e raccolgono elettroni in eccesso. Se il potenziale elettrico sulla superficie di un granello è di −400 V, quanti elettroni avrà raccolto?
25. Quando una navicella spaziale si muove nel gas ionizzato rarefatto della ionosfera terrestre. il suo potenziale cambia tipicamente di −1.0 V per ogni rivoluzione. Assumendo che la

ISBN 88-408-0777-2

navicella sia una sfera di raggio 10 m, si stimi la quantità di carica che essa raccoglie.

26. Una particella di massa m, carica $q > 0$ e energia cinetica iniziale K viene proiettata (dall'«infinito») verso un nucleo pesante di carica Q, assunto in posizione fissa nel sistema di riferimento adottato. (*a*) Se la mira è «perfetta», a quale distanza dal centro del nucleo si troverà la particella quando essa si troverà istantaneamente ferma? (*b*) Con una certa mira imperfetta l'avvicinamento massimo della particella al nucleo è due volte la distanza calcolata al punto (*a*). Si determini la velocità della particella in corrispondenza a questo suo massimo avvicinamento. Si assuma che la particella non raggiunga la superficie del nucleo.



Figura 30 Problema 24.

27. Una goccia d'acqua sferica su cui è presente una carica di 32.0 pC ha un potenziale di 512 V sulla sua superficie. (*a*) Qual è il raggio della goccia? (*b*) Se due gocce simili , aventi stessa carica e stesso raggio, si combinano per formare un'unica goccia sferica, quale sarà il potenziale sulla superficie della nuova goccia così formata?

28. Si supponga che la carica negativa di una moneta di rame da un centesimo di dollaro venga rimossa e portata ad una grande distanza dalla Terra – per esempio su una galassia lontana – e che la carica positiva venga distribuita uniformemente sulla superficie della Terra. Di quanto varierebbe il potenziale elettrico sulla superficie della Terra? (vedi esempio 2 del cap. 27).

29. Un campo elettrico di circa 100 V/m viene spesso osservato sulla superficie della Terra. Se questo campo fosse costante sull'intera superficie, quale sarebbe il potenziale elettrico in un punto della superficie?. Si veda l'esempio 6.

Paragrafo 30-6 Il potenziale di un insieme di cariche puntiformi

30. La molecola di ammoniaca NH_3 ha un momento di dipolo elettrico permanente pari a 1.47 D, dove D è l'unità debye di valore 3.34×10^{-30} C · m. Si calcoli il potenziale elettrico associato ad una molecola di ammoniaca in un punto che si trova ad una distanza di 52.0 nm dall'asse del dipolo.

31. (*a*) Relativamente alla figura 31 si derivi una espressione per $V_A - V_B$. (*b*)Il risultato ottenuto si riduce alla risposta prevista quando $d = 0$? Quando $a = 0$? Quando $q = 0$?

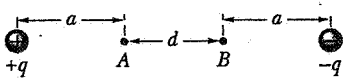


Figura 31 Problema 31.

32. Nella fig. 32 si trovino, se esistono, i punti nei quali (*a*) $V = 0$ e (*b*) $\mathbf{E} = 0$. Si considerino soltanto punti dell'asse.

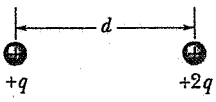


Figura 32 Problema 32.

33. Una carica puntiforme $q_1 = +6e$ viene tenuta fissa nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane. Una seconda carica puntiforme $q_2 = -10e$ viene fissata in $x = 9.60$ nm, $y = 0$. Il luogo dei punti del piano xy nei quali $V = 0$ è una circonferenza centrata sull'asse x, come mostrato nella figura 33. Si trovi (*a*) la posizione x_c del centro della circonferenza e (*b*) il raggio R della circonferenza. (*c*) La linea equipotenziale a $V = 5$ V è ancora una circonferenza?

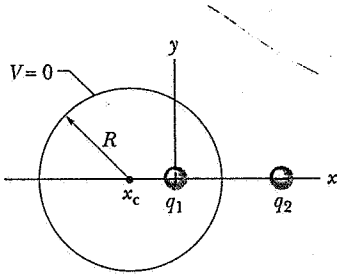


Figura 33 Problema 33.

34. Due cariche $q = +2.13$ μC sono fisse nello spazio ad una distanza $d = 1.96$ cm l'una dall'altra, come mostrato nella fig. 34. (*a*) Qual è il potenziale elettrico nel punto C? (*b*) Una terza carica $Q = +1.91$ μC viene portata lentamente dall'infinito in C. Quanto lavoro è necessario? (*c*) Qual è l'energia potenziale U della configurazione quando la terza carica è al suo posto?

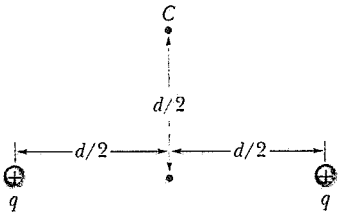


Figura 34 Problema 34.

35. Relativamente alla configurazione delle cariche della figura 35, si mostri che $V(r)$ nei punti dell'asse verticale, assumendo $r \gg d$, è dato da

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}\left(1+\frac{2d}{r}\right).$$

(*Suggerimento*: la configurazione delle cariche può essere vista come la somma di una carica isolata e di un dipolo).

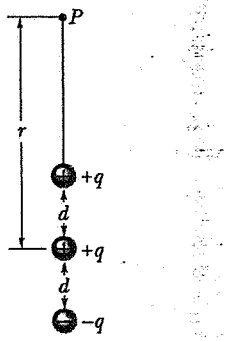


Figura 35 Problema 35.

Paragrafo 30-7 Il potenziale elettrico di distribuzioni di carica continue

36. La figura 36 mostra la sezione di un foglio «infinito» di carica distribuita uniformemente con densità σ, in direzione ortogonale al piano della pagina. (*a*) Quanto lavoro è compiuto dal campo elettrico generato dal foglio, quando una piccola carica di prova positiva q_0 viene spostata da una posizione iniziale appartenente al foglio ad una posizione finale posta a una distanza z perpendicolarmente al foglio? (*b*) Si utilizzi il risultato del punto (*a*) per mostrare che il potenziale elettrico di un foglio carico infinito può essere scritto come

$$V = V_0 - (\sigma/2\epsilon_0)z,$$

dove V_0 è il potenziale della superficie del foglio.

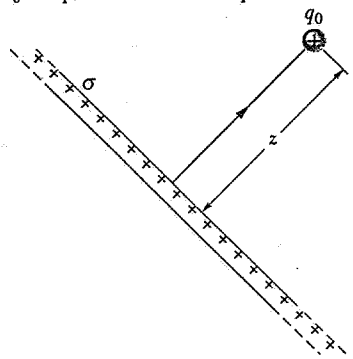


Figura 36 Problema 36.

37. Una carica elettrica di −9.12 nC è uniformemente distribuita su un anello di raggio pari a 1.48 m che giace nel piano yz ed ha centro nell'origine. Una carica puntiforme di −5.93 pC è posizionata sull'asse x nel punto $x = 3.07$ m. Si calcoli il lavoro compiuto da un agente esterno nello spostare la carica puntiforme nell'origine.

38. Una quantità di carica positiva Q è distribuita su un anello piatto isolante avente raggio interno a e raggio esterno b. La carica è distribuita in modo che la densità di carica (carica per unità di area) sia data da $\sigma = k/r^3$, dove r è la distanza dal centro dell'anello di un punto su di esso. Si mostri che il potenziale nel centro dell'anello è dato da

$$V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{a+b}{ab}\right).$$

Paragrafo 30-8 Superfici equipotenziali

39. Due rette cariche sono parallele all'asse z. Una, avente carica per unità di lunghezza $+\lambda$, si trova ad una distanza a alla destra dell'asse, l'altra, avente carica per unità di lunghezza $-\lambda$, si trova ad una distanza a alla sinistra dell'asse (le linee e l'asse z appartengono allo stesso piano). Si traccino alcune superfici equipotenziali.

40. Muovendosi da A a B lungo una linea di campo elettrico, il campo compie un lavoro di 3.94×10^{-19} J su un elettrone, come mostrato nella figura 37. Quali sono le differenze di potenziale elettrico (*a*) $V_B - V_A$, (*b*) $V_C - V_A$ e (*c*) $V_C - V_B$?

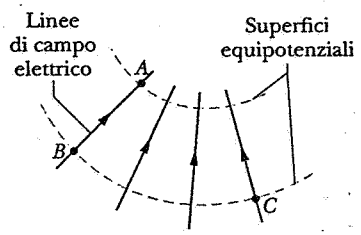


Figura 37 Problema 40.

41. Si consideri una carica puntiforme $q = 1.5 \times 10^{-8}$ C. (*a*) Qual è il raggio di una superficie equipotenziale avente potenziale di 30 V? (*b*) Le superfici i cui potenziali differiscono per una costante (per esempio 1 V) sono regolarmente spaziate?

42. Nella figura 38 si traccino qualitativamente (*a*) le linee di forza e (*b*) le intersezioni delle superfici equipotenziali con il piano della figura (*suggerimento*: si consideri il comportamento vicino a ciascuna carica puntiforme ed a notevole distanza dalle due cariche).

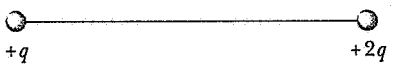


Figura 38 Problema 42.

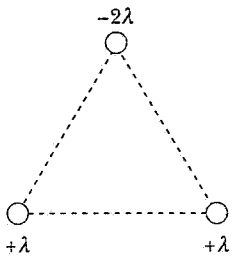


Figura 39 Problema 43.

ISBN 88-408-0777-2

43. Tre lunghe distribuzioni di carica rettilinee e parallele hanno rispettive densità di carica come indicato nella figura 39. Si traccino alcune linee di forza e le intersezioni di alcune superfici equipotenziali con il piano della figura.

Paragrafo 30-9 Il calcolo del campo dato il potenziale

44. Si supponga che il potenziale elettrico lungo l'asse x segua l'andamento illustrato nella figura 40. Tra i segmenti illustrati (si ignori il comportamento nei punti estremi) si determinino quelli in cui E_x ha (*a*) il suo massimo valore assoluto e (*b*) il suo minimo valore assoluto. (*c*) Si tracci il diagramma di E_x in funzione di x.

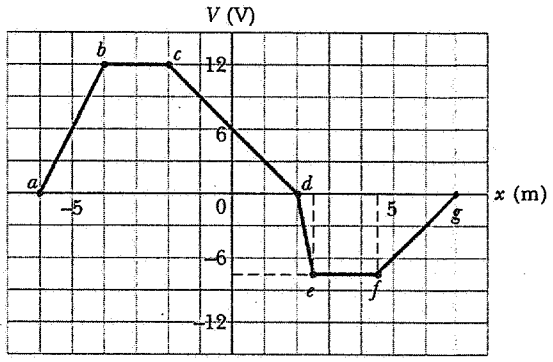


Figura 40 Problema 44.

45. Due grandi piatti metallici paralleli sono posti ad una distanza di 1.48 cm e portano cariche uguali ed opposte sulle loro superfici affacciate. Il piatto negativo viene messo a terra e il suo potenziale è assunto essere nullo. Sapendo che il potenziale a metà strada tra i due piatti vale + 5.52 V, qual è il campo elettrico in questa regione?
46. Dall'equazione 25 si derivi una espressione di E nei punti appartenenti all'asse di un anello carico uniformemente.
47. Si calcoli il gradiende di potenziale radiale, in V/m, sulla superficie di un nucleo d'oro. Si veda l'esempio 6.
48. Il problema 49 del capitolo 29 considera il calcolo di Rutherford del campo elettrico ad una distanza r dal centro di un atomo. Rutherford calcolò il potenziale elettrico come

$$V = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right).$$

(*a*) Si mostri come l'espressione del campo elettrico data nel problema 49 del capitolo 29 discenda correttamente da questa espressione di V. (*b*) Perché questa espressione di V non va a zero quando $r \to \infty$?

49. Il potenziale elettrico V nello spazio compreso tra i piatti di un particolare (e ora obsoleto) tubo a vuoto è dato da $V = 1530x^2$, dove V è espresso in volt e x, la distanza da uno dei piatti è espressa in metri. Si determinino modulo. direzione e verso del campo elettrico in $x = 1.28$ cm.
50. Una carica per unità di lunghezza λ è distribuita uniformemente lungo un segmento di retta di lunghezza L. (*a*) Si determini il potenziale (assunto nullo all'infinito) nel punto P, posto ad una distanza y da un estremo del segmento carico e sulla stessa linea (vedi fig. 41). (*b*) Si utilizzi il risultato del punto (*a*) per calcolare la componente y del campo elettrico nel punto P. (*c*) Si determini la componente nella direzione perpendicolare al segmento del campo elettrico nel punto P.

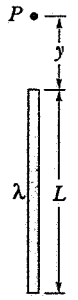


Figura 41 Problema 50.

51. Su una bacchetta sottile di lunghezza L posta sull'asse x con un estremo nell'origine ($x = 0$), come mostrato nella figura 42, c'è una distribuzione di carica lineare $\lambda = kx$, essendo k costante. (*a*) Assumendo che il potenziale sia nullo all'infinito, si trovi V nel punto P dell'asse y. (*b*) Si determini la componente verticale E_y del campo elettrico nel punto P a partire dal risultato del punto (*a*) ed anche attraverso il calcolo diretto. (*c*) Perché E_x, la componente orizzontale del campo elettrico in P, non può essere trovata utilizzando il risultato del punto (*a*)? (*d*) A quale distanza dalla bacchetta lungo l'asse y, il potenziale è uguale alla metà del valore sull'estremo sinistro della bacchetta?

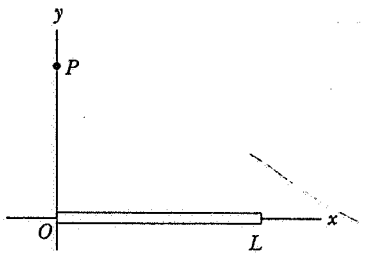


Figura 42 Problema 51.

Paragrafo 30-10 Il conduttore isolato

52. su un guscio sferico sottile di raggio esterno pari a 20 cm c'è una carica di + 3.0 μC. Si traccino i diagrammi (*a*) del modulo del campo elettrico **E** e(*b*) del potenziale V in funzione della distanza r dal centro del guscio.
53. Si considerino due sfere conduttrici 1 e 2 molto distanti l'una dall'altra. La seconda abbia un diametro doppio rispetto a quello della prima. Sulla sfera più piccola ci sia inizialmente una carica positiva q e la sfera più grande sia inizialmente scarica. Si colleghino, ora, le due sfere con un lungo cavo sottile. (*a*) Quali saranno i potenziali finali V_1 e V_2 sulle sfere? (*b*) Si trovino le cariche finali q_1 e q_2 sulle sfere in funzione di q.
54. Se la Terra avesse una carica netta equivalente ad 1 elettrone/m^2 di densità superficiale (una ipotesi molto irrealistica), (*a*) quale sarebbe il potenziale della Terra? (*b*) Quale sarebbe il campo elettrico generato dalla Terra appena al di fuori della sua superficie?
55. Una carica di 15 nC può essere prodotta per semplice strofinio. A quale potenziale si porterebbe una sfera isolata conduttrice di raggio pari a 16 cm sulla quale venisse immessa tale carica?

 ISBN 88-408-0777-2

56. Si trovi (*a*) la carica e (*b*) la densità di carica sulla superficie di una sfera conduttrice avente raggio di 15.2 cm il cui potenziale è 215 V.

57. Si consideri la Terra come un conduttore sferico di raggio pari a 6370 km e inizialmente scarico. Una sfera metallica avente raggio di 13 cm, caricata con −6.2 nC viene *messa a terra*, cioè viene messa in contatto elettrico con la Terra. Si mostri che questo processo scarica effettivamente la sfera, calcolando la frazione degli elettroni in eccesso, in origine presenti sulla sfera, che vi restano dopo che essa è stata messa a Terra.

58. Due sfere conduttrici, una di raggio pari a 5.88 cm e l'altra di raggio pari a 12.2 cm, ognuna con una carica di 28.6 nC sono molto distanti l'una dall'altra. Se le sfere vengono collegate con un cavo conduttore, si trovi (*a*) la carica finale e (*b*) il potenziale di ciascuna sfera.

59. Si consideri un guscio sferico sottile, isolato, uniformemente carico con densità σ (C/m^2) costante. Quanto lavoro deve essere compiuto per spostare una piccola carica di prova positiva q_0 (*a*) dalla superficie del guscio al suo interno, attraverso un piccolo foro, (*b*) da un punto della superficie ad un altro, indipendentemente dal cammino, (*c*) da un punto ad un altro punto interni al guscio e (*d*) da un qualunque punto P esterno al guscio allo stesso punto P su un qualunque cammino, che può anche intersecare il guscio? (*e*) Con le condizioni poste, ha importanza se il guscio è conduttore?

60. Due identiche sfere conduttrici di raggio pari a 15.0 cm sono separate da una distanza di 10.0 m. Qual è la carica su ciascuna sfera se il potenziale di una è + 1500 V e quello dell'altra è −1500 V? Quali ipotesi si fanno nel dare la risposta?

61. L'oggetto metallico della figura 43 è un solido di rotazione attorno all'asse orizzontale. Assumendo che esso sia carico negativamente, si traccino grossolanamente alcune superfici equipotenziali e alcune linee di forza. Si facciano ragionamenti fisici anzichè una analisi matematica.

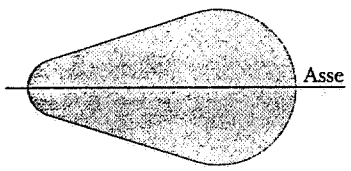


Figura 43 Problema 61.

62. Una sfera di rame avente raggio di 1.08 cm è ricoperta da uno strato molto sottile di nichel. Alcuni atomi di nichel sono radioattivi e ciascun atomo, decadendo, emette un elettrone. La metà di questi elettroni penetrano nella sfera di rame depositandovi, ciascuno, 100 keV di energia. L'altra metà degli elettroni fuoriescono all'esterno, portando via ciascuno una carica $-e$. Lo strato di nichel abbia una attività di 10.0 mCi (= 10.0 millicurie = 3.70×10^8 decadimenti radioattivi al secondo). La sfera è appesa con un lungo cavo isolante ed è isolata dall'ambiente circostante. Quanto tempo occorre perché il potenziale della sfera aumenti di 1000 V?

63. Una sfera metallica avente raggio di 16.2 cm ha una carica netta di 31.5 nC. (*a*) Si trovi il potenziale elettrico sulla superficie della sfera. (*b*) A quale distanza dalla superficie della sfera il potenziale elettrico diminuisce di 550 V?

Paragrafo 30-11 L'acceleratore elettrostatico

64. (*a*) Quanta carica occorre per portare una sfera metallica isolata avente raggio di 1.0 m ad un potenziale di 1.0 MV? Si ripeta per una sfera avente raggio di 1.0 cm. (*b*) Perché utilizzare una grande sfera in un acceleratore elettrostatico, quando lo stesso potenziale può essere raggiunto utilizzando una carica minore su una sfera più piccola? (*suggerimento*: si calcolino le densità di carica).

65. La differenza di potenziale tra il guscio ad alto potenziale di un acceleratore di Van de Graaff e il punto in cui le cariche vengono iniettate sulla cinghia in movimento è pari a 3.41 MV. Se la cinghia trasferisce carica al guscio con una velocità di 2.83 mC/s, quale potenza minima deve essere fornita per muovere la cinghia?

66. L'elettrodo ad alta tensione di un acceleratore elettrostatico è un guscio sferico metallico carico con un potenziale $V = +$ 9.15 MV. (*a*) La scarica nel gas in cui è posta la macchina avviene ad un campo elettrico $E = 100$ MV/m. Per evitare la scarica, quale vincolo bisogna porre sul raggio r del guscio? (*b*) Una lunga cinghia trasferisce carica al guscio ad una velocità di 320 μC/s e il potenziale del guscio rimane costante per via delle perdite di carica. Quale potenza minima è richiesta per trasferire la carica? (*c*) La cinghia sia larga $w = 48.5$ cm e si muova ad una velocità $v = 33.0$ m/s. Qual è la densità di carica superficiale sulla cinghia?

Progetti al calcolatore

67. La carica $q_1 = -1.2 \times 10^{-9}$ C si trova nell'origine e la carica $q_2 = 2.5 \times 10^{-9}$ C si trova nel punto $x = 0$, $y = 0.5$ m, nel piano xy. Si scriva un programma al calcolatore o si programmi un foglio elettronico per calcolare il potenziale elettrico associato a queste cariche in ogni punto nel piano xy. Il programma deve chiedere le coordinate del punto, e fornire sul video il potenziale. Successivamente il programma deve chiedere le coordinate di un altro punto. Si assuma lo zero del potenziale in un punto molto distante dalle cariche.
(*a*) Si utilizzi il programma per tracciare la superficie equipotenziale a 5 V nel piano xy. Su un foglio di carta millimetrata si traccino gli assi che vanno da −5 m a + 5 m nelle direzioni x e y. Si evidenzino le posizioni delle cariche. Si ponga inizialmente $x = 0$ e si provino vari valori di y fino a che se ne trovino due a distanza minore di 0.005 m con potenziali a cavallo di $V = 5$ V. Si evitino le posizioni delle cariche. Si prenda la posizione intermedia tra i due punti come un punto della superficie. Dato che la superficie è chiusa si devono trovare due punti con la medesima coordinata x. Dopo averli individuati, li si evidenzino sul grafico. Poi si passi alla coordinata $x =$ 0.25 m. Si prosegua con incrementi di x di 0.25 m. sino a che si interseca la superficie equipotenziale, cioè fino a quando non si trova più alcun punto a potenziale di 5 V. Si completi il diagramma evidenziando i punti della superficie equipotenziale per valori negativi di x. Dato che la superficie è simmetrica attorno a $x = 0$, non c'è bisogno di ripetere tutto il procedimento. Si tracci la superficie unendo i punti evidenziati.
(*b*) Ora si tracci la superficie equipotenziale a 3 V nel piano xy. Si presti attenzione in questo caso. Per alcuni valori di x ci sono 4 punti in cui $V = 3$ V. Ci sono, infatti, due superfici equipotenziali a 3 V.

68. L'intensità di un campo elettrico è data da $E = dV/ds$, dove ds è la distanza (infinitesima) tra le superfici equipotenziali V

ISBN 88-408-0777-2

e $V + dV$. E può essere approssimato con $|\Delta V/\Delta s|$ per due superfici separate da una distanza finita Δs. Si consideri la configurazione di carica del problema precedente e si utilizzi il programma per tracciare la superficie equipotenziale a 6 V nelle vicinanze del punto dove essa attraversa l'asse x. Se non si è eseguito il precedente problema, si tracci anche la superficie equipotenziale a 5 V nella stessa regione. Il metodo più efficiente consiste nel porre $y = -0.1$, 0 e 0.1 m in successione; per ciascun valore di y si ricerchino due valori molto vicini di x che stiano a cavallo della superficie equipotenziale. Si tracci una linea perpendicolare da una superficie all'altra e si misuri Δs, poi si calcoli $E = |\Delta V/\Delta s|$, con $\Delta V = 1$ V, esprimendo E in V/m e Δs in metri. Si verifichi l'accuratezza dei risultati conseguiti utilizzando la legge di Coulomb per calcolare l'intensità del campo elettrico nel punto dell'asse x a metà strada tra le superfici equipotenziali.

Capitolo 31

CONDENSATORI E DIELETTRICI

Un condensatore è un dispositivo che immagazzina energia nella forma di un campo elettrostatico. Tale dispositivo viene utilizzato, per esempio, per alimentare la lampada di un flash che richiede, per breve tempo, un rilascio di energia elettrica superiore a quella che una batteria può generalmente fornire. Si può, però, assorbire l'energia in un tempo relativamente lungo (alcuni secondi) dalla batteria ed immagazzinarla in un condensatore, che poi la rilascia rapidamente (qualche millisecondo) nella lampada. Condensatori molto più potenti vengono utilizzati per fornire intensi impulsi laser nel tentativo di indurre una fusione termonucleare in piccoli volumi di idrogeno. In questo caso la potenza fornita è dell'ordine di 10^{14} W, circa 200 volte di più della capacità di generazione degli Stati Uniti, ma per un tempo brevissimo, di circa 10^{-9} s.*

I condensatori vengono anche utilizzati per produrre campi elettrici, come il dispositivo a piatti paralleli che deflette i fasci di particelle cariche, come illustrato nelle figure 13-15 del capitolo 28. In questo capitolo analizzeremo i condensatori dal punto di vista del campo elettrostatico e della energia immagazzinata.

I condensatori hanno altre importanti funzioni nei circuiti elettrici, specialmente nel caso di tensioni e correnti variabili nel tempo. Per quanto riguarda la trasmissione e la ricezione di segnali radio e TV, i condensatori sono componenti fondamentali degli oscillatori elettromagnetici, come vedremo nel capitolo 39.

31-1 LA CAPACITÀ

La figura 1 mostra un condensatore generico, costituito da due conduttori a e b di forma arbitraria. Indipendentemente dalla loro geometria questi conduttori vengono chiamati *piatti* o *armature*. Si assume che essi siano totalmente isolati dall'ambiente circostante. Inoltre si assume, per il momento, che i conduttori si trovino nel vuoto.

Un condensatore viene detto *carico* se i suoi piatti portano cariche uguali ed opposte $+q$ e $-q$, rispettivamente. Si noti che q *non* è la carica netta nel condensatore, che è nulla. Nella trattazione che verrà svolta nel seguito sui condensatori, q rappresenterà il valore assoluto della carica su ciascun piatto; cioè q rappresenta soltanto il modulo, mentre il segno della carica sul piatto specifico dovrà essere esplicitato.

Si può cambiare la carica di un condensatore collegando i suoi terminali ad una batteria. Poiché i piatti sono conduttori, essi sono equipotenziali e tutta la differenza di potenziale della batteria si manifesta tra i due piatti. Nel caricare il condensatore la batteria trasferisce cariche uguali ed opposte sui due piatti. Per questioni di comodità il *modulo* della differenza di potenziale tra i piatti verrà indicato con la notazione V.

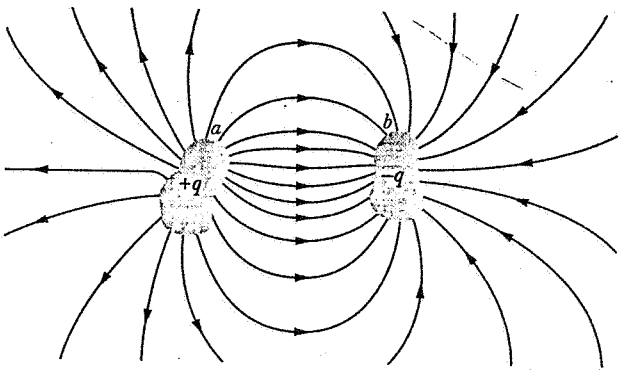


Figura 1 Due conduttori isolati costituiscono un condensatore. Quando il condensatore viene caricato i conduttori portano cariche uguali e opposte $+q$ e $-q$. I due conduttori, indipendentemente dalla loro forma, vengono chiamati *piatti* o *armature* del condensatore.

Come verrà discusso nel prossimo paragrafo, c'è una proporzionalità diretta tra il modulo della carica q in un condensatore e la differenza di potenziale V tra i suoi piatti. Cioè si può scrivere

$$q = CV \qquad (1)$$

* Si veda *Capacitors* di Donald M. Trotter, Jr., «Scientific American», giugno 1988, pag. 86. (Trad. it. *I condensatori* «Le Scienze» 1988, 241:76).

ISBN 88-408-0777-2

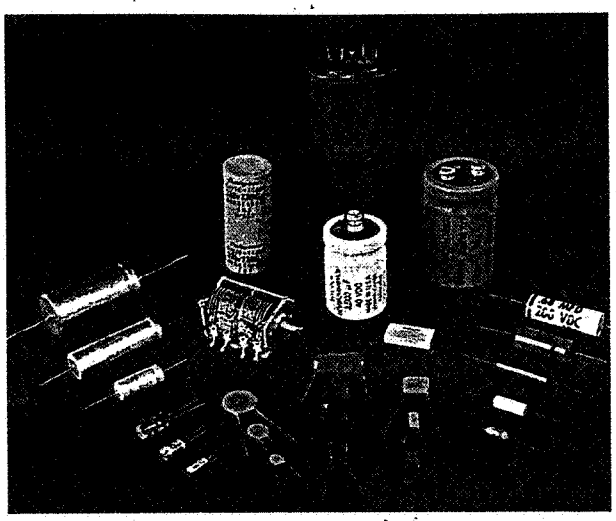


Figura 2 Assortimento di condensatori, che possono essere normalmente trovati nei circuiti elettronici.

in cui C, la costante di proporzionalità, è chiamata *capacità* del condensatore. Nel prossimo paragrafo si mostrerà anche che C dipende dalla forma e dalla posizione reciproca dei piatti e si calcolerà la effettiva dipendenza di C da questi parametri in tre importanti casi particolari. C dipende anche dal materiale che viene interposto tra i piatti (vedi par. 31-5); per il momento, comunque, si assume che vi sia il vuoto.

L'unità di misura della capacità nel sistema SI, che consegue dall'equazione 1, è il coulomb/volt che viene detto *farad* (abbreviazione: F):

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb/volt}.$$

L'unità di misura prende il nome da Michael Faraday che, oltre a dare molti altri contributi fondamentali, sviluppò il concetto di capacità. I sottomultipli del farad, il *microfarad* ($1\ \mu F = 10^{-6}$ F) e il *picofarad* (1 pF $= 10^{-12}$ F), sono unità molto più usate nei casi pratici. La figura 2 mostra alcuni condensatori di valore compreso tra il picofarad e il microfarad che potrebbero essere trovati in schede elettroniche o nei calcolatori.

Esempio 1 Un condensatore di una cella di memoria RAM (dall'inglese *Random Access Memory*, memoria ad accesso libero) di un circuito integrato ha una capacità di 55 fF. Se esso viene caricato a 5.3 V, quanti elettroni in eccesso ci saranno sul suo piatto negativo?

Soluzione Se il piatto negativo ha N elettroni in eccesso, esso ha un modulo di carica netta $q = Ne$. Utilizzando l'equazione (1) si ottiene

$$N = \frac{q}{e} = \frac{CV}{e} = \frac{(55 \times 10^{-15}\text{ F})(5.3\text{ V})}{1.60 \times 10^{-19}\text{ C}} = 1.8 \times 10^{6} \text{ electrons}.$$

Questo è un numero di elettroni assai piccolo. Un granello di polvere domestica, così leggero da non posarsi praticamente mai, contiene circa 10^{17} elettroni (e lo stesso numero di protoni).

Analogia con lo scorrimento di un fluido *(facoltativo)*

Quando si ha a che fare con semplici circuiti elettrici è spesso utile stabilire analogie tra il moto delle cariche elettriche e il moto di particelle materiali, come quello di scorrimento di un fluido. Nel caso del condensatore si può fare una analogia tra un condensatore che immagazzina una carica q e un contenitore rigido di volume v (si utilizza la notazione v al posto della notazione V per non confonderla con quella della differenza di potenziale) contenente n moli di un gas ideale. La pressione del gas p è direttamente proporzionale ad n per una fissata temperatura, in accordo con la legge dei gas ideali (vedi eq. 7 del cap. 23)

$$n = \left(\frac{v}{RT}\right)p.$$

Per il condensatore (eq. 1)

$$q = (C)V.$$

Il confronto mostra che la capacità C del condensatore corrisponde al volume v del contenitore, assumendo che il gas venga mantenuto ad una temperatura fissa. In effetti la parola «capacità» richiama l'analogo concetto, in base al quale il volume di un contenitore di gas ha una certa «capacità».

Si può immettere una maggior quantità di gas nel contenitore imponendo una pressione più alta. Analogamente si può immettere una maggior quantità di carica in un condensatore imponendo una tensione più alta ai suoi terminali.

Si noti che una qualunque quantità di carica può essere immessa in un condensatore, come una qualunque massa di gas può essere immessa in un contenitore, fino a certi limiti. Questi limiti corrispondono al punto di scarica elettrica per la capacità e rottura meccanica delle pareti per il contenitore. ■

31-2 IL CALCOLO DELLA CAPACITÀ

Si vuole, ora, calcolare la capacità di un condensatore, data la sua geometria. Dato che desideriamo considerare un certo numero di diverse geometrie, è opportuno sviluppare un procedimento generale per semplificare il lavoro. Il procedimento consiste nei seguenti passi: (1) si assume che ci sia una carica q sui piatti; (2) si calcola il campo elettrico $\mathbf{E}$ tra i due piatti in funzione della carica q, utilizzando la legge di Gauss; (3) conoscendo $\mathbf{E}$, si calcola la differenza di potenziale V tra i piatti dall'equazione 15 del capitolo 30; (4) si calcola C dalla relazione $C = q/V$ (vedi eq. 1).

Prima di incominciare, conviene semplificare sia il calcolo del campo elettrico che quello della differenza di potenziale, facendo alcune ipotesi. Le discuteremo in successione nel seguito.

ISBN 88-408-0777-2

Il calcolo del campo elettrico

Il campo elettrico è legato alla carica sui piatti dalla legge di Gauss, ossia

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q. \tag{2}$$

Qui q è la carica contenuta nella superficie gaussiana e l'integrale è esteso a tutta la superficie. Si considerino solo i casi in cui, qualunque sia il flusso che attraversa la superficie gaussiana, il campo elettrico E abbia modulo costante E e i vettori $\mathbf{E}$ e $d\mathbf{A}$ siano paralleli. L'equazione 2, allora, si riduce a

$$\epsilon_0 EA = q, \tag{3}$$

in cui A è l'area di quella parte di superficie gaussiana attraverso cui vi è effettivamente un flusso. Per questioni di comodità la superficie gaussiana viene tracciata in modo che essa racchiuda completamente la carica del piatto positivo; si veda la figura 3 come esempio.

Il calcolo della differenza di potenziale

La differenza di potenziale tra i piatti è legata al campo elettrico $\mathbf{E}$ dall'equazione 15 del capitolo 30,

$$V_f - V_i = -\int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \tag{4}$$

in cui l'integrale è svolto su un qualunque cammino che vada da un piatto all'altro. Si sceglierà sempre un cammino che segua una linea di campo elettrica dal piatto positivo al piatto negativo, come mostrato nella figura 3. Per questo cammino, i vettori $\mathbf{E}$ e $d\mathbf{s}$ hanno stessa direzione e verso cosicchè $V_f - V_i = -V$. Si può riscrivere l'equazione 4 come

$$V = \int_+^- E\, ds, \tag{5}$$

in cui i segni + e − vogliono ricordare che il cammino di integrazione inizia sul piatto positivo e termina su quello negativo.

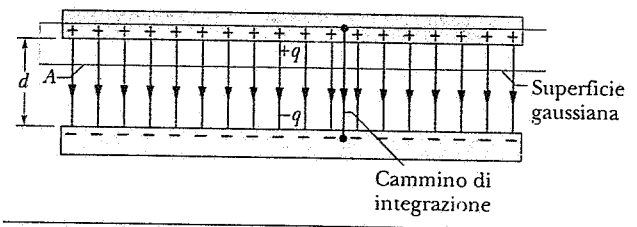


Figura 3 Un condensatore a piatti paralleli carico. È tracciata una superficie gaussiana che racchiude tutta la carica del piatto positivo. La linea verticale evidenziata indica il cammino di integrazione utilizzato nell'equazione 5.

Il campo elettrico tra i piatti di un condensatore è la somma dei campi dovuti ai due piatti: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$, dove $\mathbf{E}_+$ è il campo generato dalle cariche sul piatto positivo ed $\mathbf{E}_-$ è il campo generato dalle cariche sul piatto negativo. Per la legge di Gauss, E_+ ed E_- devono essere, ciascuno, proporzionale a q, cosicchè E sarà proporzionale a q e, dall'equazione 5, V sarà pure proporzionale a q. Cioè, se q viene raddoppiata (la carica di *ciascun* piatto), $\mathbf{E}$ e V raddoppieranno. Dato che V è proporzionale a q, il rapporto q/V deve essere costante e indipendente da q. Si definisce questo rapporto come la capacità C, in accordo con l'equazione 1.

Ora siamo pronti ad applicare le equazioni 3 e 5 a qualche caso particolare.

Il condensatore a piatti paralleli

Si assume che, come è suggerito dalla figura 3, i piatti di questo condensatore siano così grandi e così vicini l'un l'altro da poter trascurare la distorsione del campo elettrico sui bordi dei piatti. Si assume che $\mathbf{E}$ sia costante in tutto il volume compreso tra i piatti.

Si tracci, ora, una superficie gaussiana che racchiuda tutta la carica q del piatto positivo, come mostrato nella figura 3. Il campo elettrico può quindi essere dedotto dall'equazione 3: $E = q/\epsilon_0 A$, dove A è l'area dei piatti. L'equazione 5, quindi, porta a

$$V = \int_+^- E\, ds = \frac{q}{\epsilon_0 A} \int_0^d ds = \frac{qd}{\epsilon_0 A}. \tag{6}$$

Nell'equazione 6 E è costante e può essere portato fuori dal segno di integrale; il secondo integrale è, semplicemente, pari alla separazione tra i piatti d.

Si noti che, nell'equazione 6, V è data da una costante per q. In accordo con l'equazione 1, questa costante è $1/C$, per cui

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{(condensatore a piatti paralleli).} \tag{7}$$

La capacità dipende, effettivamente, soltanto da fattori geometrici, cioè l'area A e la separazione d dei piatti.

Per inciso, possiamo qui osservare che dall'equazione 7 traspare il motivo per cui si è scelta una costante elettrostatica della forma $1/4\pi\epsilon_0$ nella legge di Coulomb. Se non si fosse fatta tale scelta, l'equazione 7, che viene usata più frequentemente, nei casi pratici, dell'equazione di Coulomb, avrebbe avuto una forma più complicata. Si nota, inoltre, che l'equazione 7 suggerisce una unità di misura per la costante di elettrica del vuoto ϵ_0 che è più appropriata nei problemi che coinvolgono i condensatori, cioè

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m} = 8.85\ \text{pF/m}.$$

Precedentemente si era espressa questa costante come

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2},$$

che coinvolge unità di misura comode quando si trattano problemi che utilizzano la legge di Coulomb. Le due combinazioni di unità di misura sono equivalenti.

Il condensatore cilindrico

La figura 4 mostra, in sezione, un condensatore cilindrico di lunghezza L costituito da due cilindri coassiali di raggi a e b. Si assume che $L \gg b$ cosicchè si possa trascurare la distorsione del campo elettrico in corrisponenza degli estremi del cilindro.

Quale superficie gaussiana, si sceglie un cilindro di lunghezza L e raggio r, chiuso da due basi circolari. Applicando l'equazione 3 si ha che

$$q = \epsilon_0 EA = \epsilon_0 E(2\pi rL)$$

in cui $2\pi rL$ è l'area della parte curva della superficie gaussiana. Risolvendo si ottiene E:

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Lr}. \qquad (8)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione 5 si ottiene

$$V = \int_+^- E\,ds = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right). \qquad (9)$$

Dalla relazione $C = q/V$, sostituendo V, si ottiene

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln\,(b/a)} \quad \text{(condensatore cilindrico)}. \qquad (10)$$

Si vede che la capacità del condensatore cilindrico, come quella del condensatore a piatti paralleli, dipende soltanto da fattori geometrici, in questo caso L, b ed a.

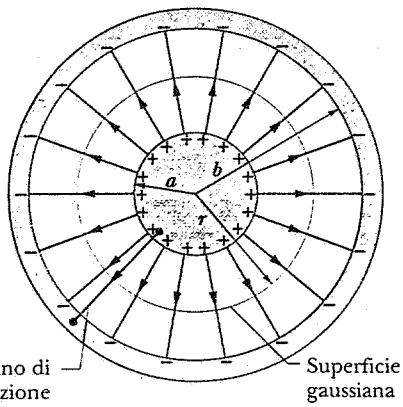


Figura 4 Un lungo condensatore cilindrico è mostrato in sezione. È tracciata una superficie gaussiana che racchiude il conduttore interno. È evidenziato il cammino di integrazione utilizzato nell'equazione 5. La stessa figura può anche rappresentare una sezione diametrale di un condensatore sferico.

Il condensatore sferico

La figura 4 può anche rappresentare una sezione diametrale di un condensatore sferico, costituito da due gusci sferici di raggi a e b. Come superficie gaussiana si sceglie una sfera di raggio r. Applicando l'equazione 3 a questa superficie si ha che

$$q = \epsilon_0 EA = \epsilon_0 E(4\pi r^2),$$

in cui $4\pi r^2$ è l'area della superficie gaussiana sferica. Risolvendo questa equazione si ricava E, cioè,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}, \qquad (11)$$

che, come ci si aspetta, è la stessa espressione del campo elettrico generato da una distribuzione di carica uniforme sferica.

Sostituendo questa espressione nell'equazione 5, si ottiene

$$V = \int_+^- E\,ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}. \qquad (12)$$

Sostituendo l'equazione 12 nell'equazione 1 e ricavando, poi, C, si ottiene

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad \text{(condensatore sferico)}. \qquad (13)$$

La sfera isolata

Si può attribuire una capacità ad un singolo conduttore isolato assumendo che il «piatto mancante» sia una sfera conduttrice di raggio infinito. Dopo tutto le linee di forza che partono dalla superficie di un conduttore isolato carico devono pur terminare da qualche parte; le pareti della stanza in cui il conduttore viene posto, per esempio, possono approssimare effettivamente la sfera di raggio infinito.

Ponendo $b \to \infty$ nell'equazione 13 e sostituendo R ad a, si ottiene

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad \text{(sfera isolata)}. \qquad (14)$$

Confrontando le equazioni 7, 10, 13 e 14, si nota che C è sempre espressa come il prodotto tra ϵ_0 e una quantità che ha le dimensioni di una lunghezza. L'unità di misura di ϵ_0 (F/m) sono consistenti con questa relazione.

Esempio 2 I piatti di un condensatore a piatti paralleli sono separati da una distanza $d = 1.0$ mm. Quale deve essere l'area dei piatti se la capacità vale 1.0 F?

ISBN 88-408-0777-2

Soluzione Dall'equazione 7 si ha che

$$A = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1.0\ \text{F})(1.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}} = 1.1 \times 10^{5}\ \text{m}^2.$$

Questa è l'area di un quadrato con un lato maggiore di 10 km. Il farad è una unità di misura davvero grande. La tecnologia di oggi, ciononostante, ha consentito la fabbricazione di condensatori da 1 F di dimensioni molto modeste. Questi «supercondensatori» vengono usati come alimentatori di tensione di sicurezza per calcolatori; essi possono alimentare la memoria di un calcolatore per più di 30 giorni in caso di mancanza di alimentazione.

Esempio 3 La zona compresa tra i conduttori di un lungo cavo coassiale, utilizzato per trasmettere segnali TV, ha un raggio interno $a = 0.15$ mm e un raggio esterno $b = 2.1$ mm. Qual è la capacità per unità di lunghezza di questo cavo?

Soluzione Dall'equazione 10 si ha che

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln (b/a)} = \frac{(2\pi)(8.85\ \text{pF/m})}{\ln (2.1\ \text{mm}/0.15\ \text{mm})} = 21\ \text{pF/m}.$$

Esempio 4 Qual è la capacità della Terra, vista come una sfera conduttrice isolata di raggio pari a 6370 km?

Soluzione Dall'equazione 14 si ha che

$$C = 4\pi\epsilon_0 R = (4\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(6.37 \times 10^{6}\ \text{m})$$
$$= 7.1 \times 10^{-4}\ \text{F} = 710\ \mu\text{F}.$$

Una piccola supercapacità da 1 F ha una capacità circa 1400 volte maggiore di quella della Terra.

31-3 CONDENSATORI IN SERIE E IN PARALLELO

Analizzando i circuiti elettrici è spesso desiderabile conoscere la *capacità equivalente* di due o più condensatori collegati insieme in un certo modo. Con «capacità equivalente» si intende la capacità di un singolo condensatore che – inserito nel circuito al posto dell'insieme suddetto di due o più condensatori – non produca alcun cambiamento nel funzionamento complessivo del circuito. In un circuito elettrico un condensatore è indicato col simbolo (⊣⊢), che ricorda il condensatore a piatti paralleli, ma rappresenta qualunque tipo di condensatore.

Condensatori collegati in parallelo

La figura 5 mostra due condensatori collegati *in parallelo*. Ci sono tre proprietà che caratterizzano una connessione in parallelo di elementi circuitali. (1) Se ci si sposta da a a b si può seguire uno qualunque dei vari (in questo caso due) cammini *paralleli*, ognuno dei quali passa attraverso *uno soltanto* degli elementi collegati in parallelo. (2) Quando una batteria che presenta una differenza di potenziale V viene connessa ad un insieme di elementi collegati in parallelo (cioè i suoi morsetti vengono applicati ai punti a e b della figura 5), la stessa differenza di potenziale V si presenta su ciascun elemento del collegamento in parallelo. I fili e i piatti del condensatore sono conduttori e quindi equipotenziali. Il potenziale del punto a si riporta su tutti i fili collegati ad a e sui due piatti di sinistra dei condensatori; analogamente il potenziale del punto b si riporta su tutti i fili collegati a b e sui due piatti di destra dei condensatori. (3) La carica totale fornita dalla batteria alla connessione in parallelo si suddivide tra i vari elementi.

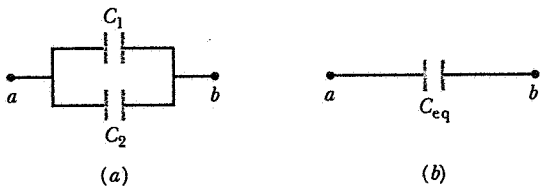


Figura 5 (a) Due condensatori collegati in parallelo. (b) Capacità equivalente che può essere sostituita alla connessione in parallelo della figura (a).

Tenendo a mente questi principi, possiamo, ora, trovare la capacità equivalente C_{eq} che dà la capacità totale tra i punti a e b, come indicato nella figura 5b. Si assume che una batteria avente differenza di potenziale V sia connessa tra i punti a e b. Per ogni condensatore possiamo scrivere (utilizzando l'eq. 1)

$$q_1 = C_1 V \quad \text{e} \quad q_2 = C_2 V. \tag{15}$$

Per scrivere queste equazioni si è fatto uso dello stesso valore di differenza di potenziale sui condensatori in accordo con la seconda proprietà dei collegamenti in parallelo, enunciata in precedenza. La batteria preleva una carica q da un lato del circuito e la sposta sul lato opposto. Questa carica viene suddivisa tra i due elementi, in accordo con la terza proprietà, cosicchè la somma delle cariche sui due condensatori deve essere pari alla carica totale:

$$q = q_1 + q_2. \tag{16}$$

Se gli elementi collegati in parallelo venissero sostituiti con un singolo condensatore C_{eq} connesso alla stessa batteria, la condizione che il circuito operi nello stesso modo significa che la stessa carica q deve essere trasferita dalla batteria all'elemento circuitale. Cioè, per il condensatore equivalente,

$$q = C_{eq} V. \tag{17}$$

Sostituendo l'equazione 16 nell'equazione 17 ed utilizzando, successivamente, le equazioni 15, si ottiene

$$C_{eq}V = C_1V + C_2V,$$

cioè

$$C_{eq} = C_1 + C_2. \qquad (18)$$

Se avessimo più di due condensatori in parallelo, potremmo, prima sostituire C_1 e C_2 con il loro equivalente C_{12}, determinato in accordo con l'equazione 18. Si trova, poi, la capacità equivalente della connessione in parallelo di C_{12} con il terzo condensatore C_3. Iterando questo procedimento si può estendere l'equazione 18 al caso di un numero qualsiasi di condensatori collegati in parallelo:

$$C_{eq} = \sum_n C_n \qquad \text{(connessione in parallelo).} \qquad (19)$$

Cioè, per trovare la capacità equivalente di un insieme di condensatori collegati in parallelo, si sommano semplicemente le singole capacità. Si noti che la capacità equivalente è sempre maggiore della più grande singola capacità dell'insieme. L'insieme di condensatori connessi in parallelo immagazzina più carica di uno qualunque dei condensatori che la compongono.

Condensatori collegati in serie

La figura 6 mostra due condensatori collegati *in serie*. Ci sono tre proprietà che caratterizzano una connessione in serie di elementi circuitali. (1) Se ci si sposta dal punto *a* al punto *b* si deve passare attraverso *tutti* gli elementi circuitali *in successione*. (2) Quando una batteria viene collegata alla connessione, la differenza di potenziale V della batteria uguaglia la somma delle differenze di potenziale su ciascun elemento. (3) La carica q ceduta a ciascun elemento della connessione in serie ha lo stesso valore.

Per capire quest'ultima proprietà si consideri la regione della figura 6 racchiusa dalla linea tratteggiata. Si assuma che la batteria immetta una carica $-q$ sul piatto di sinistra di C_1. Dato che sui piatti di un condensatore si accumulano cariche uguali ed opposte, una carica $+q$ comparirà sul piatto di destra di C_1. Ma il conduttore a forma di H racchiuso dalla linea tratteggiata è elettricamente isolato dal resto del circuito; inizialmente esso non porta alcuna carica in eccesso e nessuna carica può esservi trasferita. Se una carica $+q$ appare sul piatto di destra di C_1, allora una carica $-q$ deve apparire sul piatto di sinistra di C_2. Cioè, n $(= q/e)$ elettroni si spostano dal piatto di destra di C_1 al piatto di sinistra di C_2. Se ci fossero più di due condensatori in serie, un ragionamento simile potrebbe essere ripetuto sull'intera linea di condensatori e il risultato sarebbe che il piatto di sinistra di *ogni* condensatore della connessione in serie deve portare una carica $-q$ e il piatto di destra di *ogni* condensatore della connessione in serie deve portare una carica $+q$.

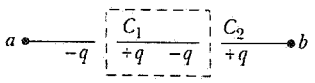


Figura 6 Collegamento in serie di due condensatori.

Per i singoli condensatori potremmo scrivere, utilizzando l'equazione 1,

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \qquad (20)$$

con la stessa carica q per ciascun condensatore, ma con differenze di potenziale diverse su ciascuno di essi. In accordo con la seconda proprietà di una connessione in serie, si ha che

$$V = V_1 + V_2. \qquad (21)$$

Si cerca la capacità equivalente C_{eq} che possa descrivere il comportamento della connessione, cioè sulla quale la batteria immetta la stessa quantità di carica:

$$V = \frac{q}{C_{eq}}. \qquad (22)$$

Sostituendo l'equazione 21 nella 22 e usando, poi, le equazioni 20, si ottiene

$$\frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2},$$

cioè

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \qquad (23)$$

Se ci fossero più condensatori in serie, potremmo utilizzare l'equazione 23 per trovare la capacità equivalente C_{12} dei primi due. Poi si potrebbe trovare la capacità equivalente della connessione in serie di C_{12} e del successivo condensatore C_3. Proseguendo in tal modo si può determinare la capacità equivalente di un qualunque numero di condensatori in serie,

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_n \frac{1}{C_n} \qquad \text{(connessione in serie).} \qquad (24)$$

Cioè la capacità equivalente di un insieme di condensatori connessi in serie, è pari al reciproco della somma dei reciproci della singole capacità. Si noti che la capacità equivalente è sempre minore della più piccola singola capacità dell'insieme. Talvolta i condensatori

 ISBN 88-408-0777-2

possono essere collegati in modi che non sono immediatamente identificabili come una connessione in serie o in parallelo. Come l'esempio 5 mostra, tali collegamenti possono spesso (ma non sempre) essere scomposti in unità più piccole analizzabili come connessioni in serie o in parallelo.

Esempio 5 (*a*) Si trovi la capacità equivalente della connessione mostrata nella figura 7*a*. Si assuma che

$$C_1 = 12.0\ \mu\text{F}, \quad C_2 = 5.3\ \mu\text{F}, \quad \text{e} \quad C_3 = 4.5\ \mu\text{F}.$$

(*b*) Una differenza di potenziale $V = 12.5$ V viene applicata ai morsetti della rete della figura 7*a*. Qual è la carica su C_1?

Soluzione (*a*) I condensatori C_1 e C_2 sono collegati in parallelo. Dall'equazione 18, la loro capacità equivalente è

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 12.0\ \mu\text{F} + 5.3\ \mu\text{F} = 17.3\ \mu\text{F}.$$

Come mostrato nella figura 7*b*, C_{12} e C_3 sono collegati in serie. Dall'equazione 23 si trova la capacità equivalente finale (fig. 7*c*),

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{17.3\ \mu\text{F}} + \frac{1}{4.5\ \mu\text{F}} = 0.280\ \mu\text{F}^{-1},$$

cioè

$$C_{123} = \frac{1}{0.280\ \mu\text{F}^{-1}} = 3.57\ \mu\text{F}.$$

(*b*) Si considerano i condensatori equivalenti C_{12} e C_{123} esattamente come si farebbe con normali condensatori aventi le medesime capacità. La carica su C_{123} nella figura 7*c* è, quindi,

$$q_{123} = C_{123}V = (3.57\ \mu\text{F})(12.5\ \text{V}) = 44.6\ \mu\text{C}.$$

Questa stessa carica è presente su ciascun condensatore della connessione in serie della figura 7*b*. La differenza di potenziale su C_{12} in tale figura è, quindi,

$$V_{12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{44.6\ \mu\text{C}}{17.3\ \mu\text{F}} = 2.58\ \text{V}.$$

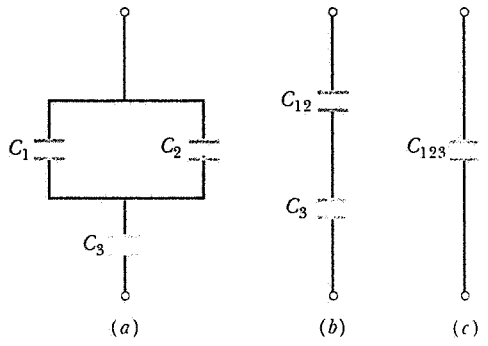


Figura 7 Esempio 5. (*a*) Rete di tre condensatori. (*b*) La connessione in parallelo di C_1 e C_2 viene sostituita con una capacità equivalente C_{12}. (*c*) La connessione in serie di C_3 e C_{12} viene sostituita con la capacità equivalente C_{123}.

Questa stessa differenza di potenziale appare su C_1 nella figura 7*a*, così che

$$q_1 = C_1V_1 = (12\ \mu\text{F})(2.68\ \text{V}) = 31\ \mu\text{C}.$$

31-4 L'ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CAMPO ELETTRICO

Come si è precisato nella introduzione di questo capitolo, una importante funzione dei condensatori è quella di immagazzinare energia elettrostatica. Tale funzione è alla base di numerose applicazioni che vanno dalle lampade dei flash fotografici ai sistemi laser (fig. 8). Il funzionamento di questi dispositivi dipende dalla carica e dalla scarica di condensatori.

Nel paragrafo 30-2 si è mostrato che una qualunque configurazione di carica ha una certa *energia potenzia-*



Figura 8 Il banco di 10000 condensatori al Lawrence Livermore National Laboratory immagazzina 60 MJ di energia e la rilascia in 1 ms a speciali lampade che pilotano un sistema di laser. L'installazione fa parte del progetto Nova, che mira a produrre reazioni di fusione nucleare.

le elettrica U, uguale al lavoro L (che può essere positivo o negativo) compiuto da un agente esterno che costruisce la configurazione di carica a partire dai suoi singoli componenti assunti, in origine, a distanza infinita l'uno dall'altro ed a riposo. Questa energia potenziale è simile a quella dei sistemi meccanici, come una molla schiacciata o il sistema Terra-Luna.

Come semplice esempio, un certo lavoro viene compiuto quando due cariche uguali ed opposte vengono allontanate l'una dall'altra. Questa energia è immagazzinata nella forma di energia potenziale del sistema e può essere restituita come energia cinetica se le cariche vengono liberate. Analogamente, un condensatore carico immagazzina una energia potenziale elettrica U uguale al lavoro L compiuto da un agente esterno quando il condensatore viene caricato. Questa energia può essere restituita se il condensatore si scarica. Si può visualizzare il lavoro compiuto per caricare il condensatore immaginando che un agente esterno prelevi elettroni dal piatto positivo e li depositi su quello negativo, provocando una separazione di cariche. Normalmente, il lavoro compiuto per la carica è fornito da una batteria, a spese del suo contenuto di energia chimica.

Si supponga che nell'istante t una carica q' sia già stata trasferita da un piatto all'altro. La differenza di potenziale V' tra i piatti, in quel momento, è $V' = q'/C$. Se una carica infinitesimale dq' viene ora trasferita da un piatto all'altro, il conseguente piccolo cambiamento dU di energia potenziale elettrica sarà, in accordo con l'equazione 10 del capitolo 30 ($\Delta V = \Delta U/q_0$),

$$dU = V'\,dq' = \frac{q'}{C}dq'.$$

Se questo processo viene ripetuto fino a trasferire una carica totale q, l'energia potenziale totale sarà

$$U = \int dU = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' \qquad (25)$$

cioè

$$U = \frac{q^2}{2C}. \qquad (26)$$

Dalla relazione $q = CV$, U può anche essere scritta come

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2. \qquad (27)$$

È ragionevole supporre che l'energia immagazzinata in un condensatore si manifesti nel campo elettrico tra i due piatti, proprio come l'energia trasportata da un'onda elettromagnetica può essere localizzata nel suo campo elettrico. Quando q o V nelle equazioni 26 e 27 aumentano, per esempio, lo stesso avviene per il campo elettrico E; quando q e V sono nulli, pure E è nullo.

Nel condensatore a piatti paralleli, trascurando gli effetti di bordo, il campo elettrico ha lo stesso valore in tutti i punti tra i piatti. Ne consegue che la *densità di energia u*, che è l'energia immagazzinata per unità di volume, deve anche essere uguale ovunque tra i due piatti; u è data dall'energia immagazzinata U divisa per il volume Ad, cioè

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}.$$

Sostituendo la relazione $C = \epsilon_0 A/d$ (vedi eq. 7) si ha che

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2.$$

V/d, però, è il campo elettrico E, così che

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \qquad (28)$$

Quantunque questa relazione sia stata dedotta per il caso particolare del condensatore a piatti paralleli, essa è valida in generale. *Se c'è un campo elettrico* **E** *in tutti i punti di una regione dello spazio (vuoto), si può pensare che quei punti siano il luogo dove risiede una energia immagazzinata, il cui valore per unità di volume è* $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$.

In generale E dipende dalla posizione, per cui u è una funzione delle coordinate. Nel caso particolare del condensatore a piatti paralleli, E e u non variano con la posizione nella regione compresa tra i piatti.

Esempio 6 Un condensatore C_1 di 3.55 μF viene caricato ad una differenza di potenziale $V_0 = 6.30$ V, utilizzando una batteria. La batteria viene poi rimossa e il condensatore viene connesso ad un secondo condensatore C_2 di 8.95 μF, come mostrato nella figura 9. Dopo che l'interruttore S è stato chiuso, una certa carica scorre da C_1 a C_2 fino a che non si raggiunge una condizione di equilibrio.in cui entrambi i condensatori presentano la stessa differenza di potenziale V. (*a*) Qual è la differenza di potenziale finale comune? (*b*) Qual è l'energia immagazzinata nel campo elettrico prima e dopo che l'interruttore S della figura 9 venga commutato?

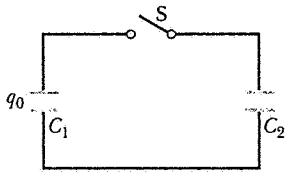


Figura 9 Esempio 6. Il condensatore C_1, caricato con una differenza di potenziale V_0 da una batteria che viene successivamente rimossa, porta una carica q_0. Quando l'interruttore S viene chiuso la carica viene condivisa con C_2.

ISBN 88-408-0777-2

Soluzione (*a*) Alla fine del processo di trasferimento, la carica iniziale q_0 viene condivisa dai due condensatori, in modo che

$$q_0 = q_1 + q_2.$$

Facendo uso della relazione $q = CV$ per ciascun termine si ha

$$C_1 V_0 = C_1 V + C_2 V,$$

cioè

$$V = V_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6.30\ \text{V})(3.55\ \mu\text{F})}{3.55\ \mu\text{F} + 8.95\ \mu\text{F}} = 1.79\ \text{V}.$$

Se, in un contesto simile a quello della figura 9, fosse nota la tensione della batteria V_0 e il valore di C_1, si potrebbe determinare la capacità incognita C_2 misurando il valore di V.

(*b*) L'energia iniziale immagazzinata è

$$U_i = \tfrac{1}{2} C_1 V_0^2 = \tfrac{1}{2}(3.55 \times 10^{-6}\ \text{F})(6.30\ \text{V})^2 = 7.05 \times 10^{-5}\ \text{J} = 70.5\ \mu\text{J}.$$

L'energia finale è

$$U_f = \tfrac{1}{2} C_1 V^2 + \tfrac{1}{2} C_2 V^2 = \tfrac{1}{2}(C_1 + C_2) V^2 = \tfrac{1}{2}(3.55 \times 10^{-6}\ \text{F} + 8.95 \times 10^{-6}\ \text{F})(1.79\ \text{V})^2 = 2.00 \times 10^{-5}\ \text{J} = 20.0\ \mu\text{J}.$$

Si conclude che $U_f < U_i$ circa del 72%. Ciò non viola il principio di conservazione dell'energia. L'energia «mancante» appare in forma di energia termica nei cavi di collegamento, come verrà discusso nel prossimo capitolo*.

Esempio 7 Su una sfera conduttrice isolata avente raggio $R = 6.85$ cm c'è una carica $q = 1.25$ nC. (*a*) Quanta energia viene immagazzinata nel campo elettrico generato da questo conduttore carico? (*b*) Qual è la densità di energia sulla superficie della sfera? (*c*) Qual è il raggio R_0 di una superficie sferica concentrica che racchiude la metà dell'energia potenziale totale di cui al punto (*a*)?

Soluzione (*a*) Dalle equazioni 26 e 14 si ha che

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{(1.25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(8\pi)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(0.0685\ \text{m})} = 1.03 \times 10^{-7}\ \text{J} = 103\ \text{nJ}.$$

(*b*) Dall'equazione 28,

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2,$$

Si deve ora esplicitare E sulla superficie della sfera. E è dato da

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R^2}.$$

La densità di energia è, quindi,

$$u = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} = \frac{(1.25 \times 10^{-9}\ \text{C})^2}{(32\pi^2)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(0.0685\ \text{m})^4} = 2.54 \times 10^{-5}\ \text{J/m}^3 = 25.4\ \mu\text{J/m}^3.$$

(*c*) L'energia immagazzinata da un guscio sferico nella zona compresa tra i raggi r e $r + dr$ è

$$dU = (u)(4\pi r^2)(dr),$$

dove $(4\pi r^2)(dr)$ è il volume del guscio sferico. Utilizzando il risultato della parte (*b*) si può esprimere la densità di energia, valutata per un raggio r, e così si ottiene:

$$dU = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} 4\pi r^2\, dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{dr}{r^2}.$$

La condizione richiesta da questo problema è

$$\int_R^{R_0} dU = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} dU$$

cioè, utilizzando l'espressione di dU ricavata sopra e cancellando i termini costanti da entrambi i lati,

$$\int_R^{R_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2},$$

che diviene

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2R}.$$

Ricavando R_0 si ottiene

$$R_0 = 2R = (2)(6.85\ \text{cm}) = 13.7\ \text{cm}.$$

La metà dell'energia immagazzinata è contenuta in una superficie sferica il cui raggio è il doppio di quello della sfera carica.

31-5 CONDENSATORE CON DIELETTRICO

Finora la capacità è stata calcolata assumendo che non ci sia nessun materiale nello spazio compreso tra i piatti del condensatore. La presenza di materiale altera la capacità del condensatore e il campo elettrico tra i suoi piatti. In questo paragrafo si discuterà l'effetto dell'inserimento tra i piatti di un condensatore di un materiale isolante, detto *dielettrico*.

Michael Faraday investigò per primo nel 1837 l'effetto del riempimento della regione compresa tra i piatti di un condensatore con un dielettrico. Faraday costruì due condensatori identici riempiti, l'uno con dielettrico e l'altro con aria in normali condizioni. Gli esperimenti di Faraday mostrarono che quando entrambi i condensatori venivano caricati con la *stessa*

* Una piccola quantità di energia viene persa anche per irraggiamento. Per una discussione critica, si veda *Two-Capacitor Problem: A More Realistic View* di R.A. Powell, «American Journal of physics», maggio 1979, pag. 460.

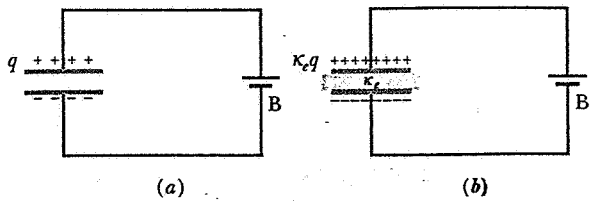


Figura 10 (*a*) Un condensatore a vuoto, inizialmente scarico viene caricato dalla batteria B. In un circuito la batteria è rappresentata con il simbolo (⊣⊢), in cui la linea più lunga indica il potenziale positivo. La batteria mantiene una differenza di potenziale costante ai morsetti. (*b*) La batteria resta collegata quando la regione tra i piatti del condensatore viene riempita con una piastra di dielettrico. In questo caso la differenza di potenziale resta costante mentre aumenta la carica immagazzinata.

differenza di potenziale, la carica sul condensatore con il dielettrico era più grande di quella sull'altro.

Dato che q è maggiore a parità di V quando è presente il dielettrico, ne consegue dalla relazione $C = q/V$ che la capacità di un condensatore *aumenta* se un dielettrico viene inserito tra i piatti (si assume che, a meno di una esplicita specificazione, il dielettrico riempia completamente lo spazio compreso tra i piatti). Il fattore adimensionale che accresce la capacità, relativamente al valore C_0 che il condensatore assume quando non c'è alcun dielettrico, è chiamato *costante dielettrica relativa* κ_e*:

$$\kappa_e = C/C_0. \qquad (29)$$

La costante dielettrica è una proprietà fondamentale del materiale ed è indipendente dalla dimensione o dalla forma del conduttore. Nella tabella 1 sono elencate le costanti dielettriche di alcuni materiali. Si noti che, per molte applicazioni pratiche, l'aria e il vuoto sono equivalenti nei loro effetti dielettrici.

La figura 10 mostra alcuni aspetti degli esperimenti di Faraday. La batteria B carica inizialmente il condensatore con una carica q e viene lasciata collegata per assicurare che la differenza di potenziale V e il campo elettrico E tra i piatti restino costanti. Successivamente una piastra di materiale dielettrico viene inserita tra i piatti e la carica aumenta di un fattore $\kappa_e q$. La carica addizionale $(\kappa_e - 1)q$ viene trasferita dalla batteria dal piatto negativo a quello positivo allorché la piastra di dielettrico è inserita.

Alternativamente, come illustrato nella figura 11, la batteria, una volta caricato il condensatore con una carica q, può essere rimossa. Quando, poi, la piastra di dielettrico viene inserita, la carica deve restare costante (poiché non vi è possibilità che si sposti), ma

* (N.d.T.) L'aggettivo «relativa» ricorda che è riferita al vuoto (dove assume il valore 1); nel seguito questo aggettivo verrà sottinteso.

TABELLA 1 ALCUNE PROPRIETÀ DEI DIELETTRICI[a]

Materiale	*Costante dielettrica* κ_e	*Rigidità dielettrica* (kV/mm)
Vuoto	1 (esattamente)	∞
Aria (1 atm)	1.00059	3
Polistirolo	2.6	24
Carta	3.5	16
Olio	4.5	12
Pyrex	4.7	14
Mica	5.4	160
Porcellana	6.5	4
Silicio	12	
Acqua (25°C)	78.5	
Acqua (20°C)	80.4	
Ceramica	130	
Titanato di stronzio	310	8

[a] Valori relativi alla temperatura ambiente.

cambierà la differenza di potenziale tra i piatti del condensatore. In questo caso si trova che la differenza di potenziale *decresce* di un fattore κ_e, da V a V/κ_e. Anche il campo elettrico decresce di un fattore κ_e. La diminuzione di V può essere prevista sulla base della relazione $q = CV$; se q è costante, l'aumento di C del fattore κ_e deve essere compensato da una equivalente diminuzione di V dello stesso fattore.

Se la funzione di un condensatore è quella di immagazzinare carica, allora si può dire che la sua efficacia è aumentata dalla presenza di dielettrico, il quale consente di immagazzinare una quantità di carica di un fattore κ_e maggiore a parità di differenza di potenziale. Tuttavia, la presenza del dielettrico limita anche la differenza di potenziale che può essere mantenuta sui piatti. Se questo valore limite viene superato si ha una scarica disruptiva ed il materiale dielettrico si rompe, stabilendo un cammino conduttivo tra i piatti. Ogni materiale dielettrico ha una caratteristica *rigidità dielettrica*, che è il valore massimo del campo elettrico che esso può sopportare senza rompersi. Alcuni di questi valori sono elencati nella tabella 1.

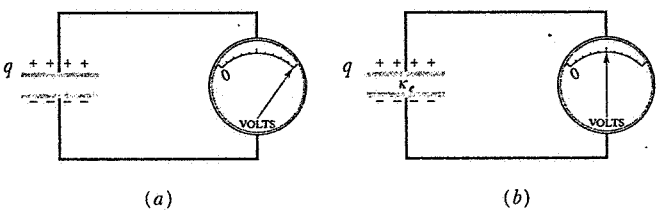


Figura 11 (*a*) Un condensatore a vuoto, inizialmente scarico viene caricato da una batteria, che viene successivamente rimossa. Il voltmetro indica la differenza di potenziale tra i piatti. (*b*) La regione tra i piatti del condensatore viene riempita con una piastra di dielettrico. La carica resta costante, ma la differenza di potenziale decresce.

ISBN 88-408-0777-2

Per un condensatore a piatti paralleli con dielettrico, la capacità è

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{d}. \tag{30}$$

L'equazione 7 è un caso particolare di questo risultato, quando $\kappa_e = 1$ e descrive il caso in cui vi è il vuoto tra i due piatti. La capacità di un *qualunque* condensatore è aumentata di un fattore κ_e quando l'intero spazio dove esiste campo elettrico viene riempito con un dielettrico. Le equazioni 10, 13 e 14 vanno corrette in modo analogo per tenere conto della presenza di un eventuale dielettrico nella regione compresa tra i piatti.

La sostituzione di ϵ_0 con $\kappa_e\epsilon_0$ tiene conto dell'effetto del dielettrico inserito tra i piatti del condensatore. Questa unica sostituzione è sufficiente per modificare ogni equazione dell'elettrostatica al fine di tenere conto della presenza di un dielettrico che riempia tutto lo spazio. Il campo elettrico di una carica puntiforme q immessa in un dielettrico, per esempio, è dato da (vedi eq. 4 del cap. 28)

$$E = \frac{1}{4\pi\kappa_e\epsilon_0}\frac{q}{r^2}. \tag{31}$$

L'equazione 31 dà il campo elettrico *totale* nel dielettrico. Il campo generato da una carica puntiforme è ancora dato dalla legge di Coulomb (senza il fattore κ_e), ma lo stesso dielettrico produce un altro campo elettrico che si combina con il campo della carica puntiforme per dare l'equazione 31.

Allo stesso modo il campo elettrico vicino alla superficie di un conduttore carico ed isolato, immerso in un dielettrico è

$$E = \frac{\sigma}{\kappa_e\epsilon_0}. \tag{32}$$

Il conduttore dà un contributo σ/ϵ_0 al campo e il dielettrico dà un contributo aggiuntivo cosicchè il campo totale è dato dalla equazione 32. Sia nell'equazione 31 che nell'equazione 32 la presenza del dielettrico è descritta dalla sostituzione di ϵ_0 con $\kappa_e\epsilon_0$. Si noti che l'effetto di questa sostituzione è di indebolire il campo elettrico. Nel prossimo paragrafo si vedrà come le proprietà microscopiche dei dielettrici spieghino questa diminuzione del campo elettrico.

Esempio 8 Un condensatore a piatti paralleli la cui capacità C_0 è 13.5 pF presenta una differenza di potenziale $V = 12.5$ V tra i suoi piatti. Nessuna batteria è connessa e una piastra di porcellana ($\kappa_e = 6.5$) viene infilata tra i piatti come mostrato nella figura 11*b*. Qual è l'energia immagazzinata dal condensatore prima e dopo che la piastra venga inserita?

Soluzione L'energia immagazzinata inizialmente è data dall'equazione 27 come

$$U_i = \tfrac{1}{2}C_0V^2 = \tfrac{1}{2}(13.5 \times 10^{-12}\text{ F})(12.5\text{ V})^2$$
$$= 1.055 \times 10^{-9}\text{ J} = 1055\text{ pJ}.$$

Si può scrivere l'energia finale, in base all'equazione 26, nella forma

$$U_f = \frac{q^2}{2C}$$

dato che, nelle condizioni del problema, q (ma non V) resta costante quando la piastra viene inserita. Una volta che la piastra è stata posizionata la capacità aumenta al valore κ_eC_0 così che

$$U_f = \frac{q^2}{2\kappa_eC_0} = \frac{U_i}{\kappa_e} = \frac{1055\text{ pJ}}{6.5} = 162\text{ pJ}.$$

L'energia immagazzinata dopo che la piastra è stata introdotta è più piccola di un fattore $1/\kappa_e$.

L'energia «mancante», in linea di principio dovrebbe manifestarsi chiaramente alla persona che introduce il dielettrico nel condensatore. Il condensatore, infatti, eserciterà una forza sulla piastra e compierà un lavoro su di essa, pari a

$$L = U_i - U_f = 1055\text{ pJ} - 162\text{ pJ} = 893\text{ pJ}.$$

Se la piastra venisse inserita senza vincoli e senza attriti, essa oscillerebbe avanti e indietro tra i piatti. Il sistema costituito dal condensatore e dalla piastra manterebbe un valore costante di energia di 1055 pJ; l'energia fluttuerebbe periodicamente tra l'energia cinetica della piastra mobile e l'energia potenziale del campo elettrico. Nell'istante in cui la piastra riempie completamente la regione compresa tra i piatti, la sua energia cinetica varrebbe 893 pJ.

31-6 I DIELETTRICI DAL PUNTO DI VISTA ATOMICO

Si vuole, ora, capire che cosa succeda dal punto di vista atomico quando si immette un dielettrico in un campo elettrico. Ci sono due possibilità. Le molecole di alcuni dielettrici, come l'acqua (vedi fig. 18 del cap. 28), hanno momento di dipolo elettrico permanente. In tali materiali (chiamati *dielettrici polari*), i momenti di dipolo elettrico $\mathbf{p}$ tendono ad allinearsi con il campo elettrico esterno, come si vede nella figura 12. Dato che le molecole sono in costante agitazione termica, l'allineamento non è completo, ma aumenta all'aumentare del campo elettrico applicato o al diminuire della temperatura. In assenza di campo esterno i dipoli si orientano a caso.

Nei *dielettrici non polari*, le molecole non hanno momento di dipolo elettrico permanente ma possono acquistarne per *induzione* quando vengono immesse in un campo elettrico. Nel paragrafo 30-6 (vedi fig. 11 del cap. 30), si vede che il campo elettrico esterno ten-

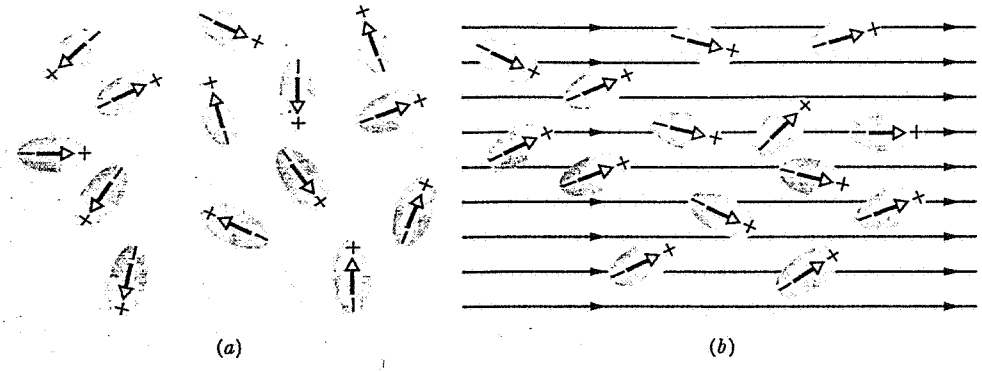


Figura 12 (*a*) Un insieme di molecole aventi momento di dipolo permanente. Quando non c'è un campo elettrico esterno le molecole si orientano a caso. (*b*) Un campo elettrico esterno genera un parziale allineamento dei dipoli. L'agitazione termica si oppone ad un allineamento completo.

de a separare le cariche positive da quelle negative nell'atomo o nella molecola. Questo *momento di dipolo elettrico indotto* è presente soltanto quando c'è un campo elettrico esterno. Esso è proporzionale al campo elettrico (per normali intensità del campo) e si genera già allineato con il campo elettrico, come suggerisce la figura 11 del capitolo 30. I dielettrici polari possono anche acquistare momento di dipolo elettrico indotto se immessi in un campo esterno.

Utilizziamo un condensatore a piatti paralleli, su cui è presente una carica fissa q non collegato ad alcuna batteria, per generare un campo elettrico esterno uniforme $\mathbf{E}_0$ nel quale immettiamo una piastra dielettrica (fig. 13*a*). L'effetto complessivo dell'allineamento e dell'induzione è una lieve separazione del centro della carica positiva dell'intera piastra dal centro della carica negativa. Quantunque la piastra resti complessivamente neutra, essa diviene *polarizzata*, come suggerisce la figura 13*b*. L'effetto complessivo è un accumulo di carica positiva sulla faccia destra della piastra e un accumulo di carica negativa sulla faccia sinistra; all'interno della piastra non appare nessuna carica in eccesso in ogni dato elemento di volume.

Dato che la piastra, complessivamente, rimane neutra, la *carica superficiale indotta* positiva deve essere uguale in modulo alla carica superficiale indotta negativa. Si noti che in questo processo gli elettroni del dielettrico vengono spostati dalla loro posizione di equilibrio di una distanza considerevolmente minore di un diametro atomico. Non c'è alcun trasferimento di cariche su distanze macroscopiche, come avviene quando si instaura una corrente in un conduttore.

La figura 13*c* mostra che le cariche superficiali indotte si dispongono sempre in modo tale che il campo elettrico $\mathbf{E}'$ generato *da esse* si opponga al campo elettrico esterno $\mathbf{E}_0$. Il campo *risultante* $\mathbf{E}$ nel dielettrico è la somma vettoriale di $\mathbf{E}_0$ ed $\mathbf{E}'$. Esso punta nella stessa direzione di $\mathbf{E}_0$ ma è meno intenso. *Quando si pone*

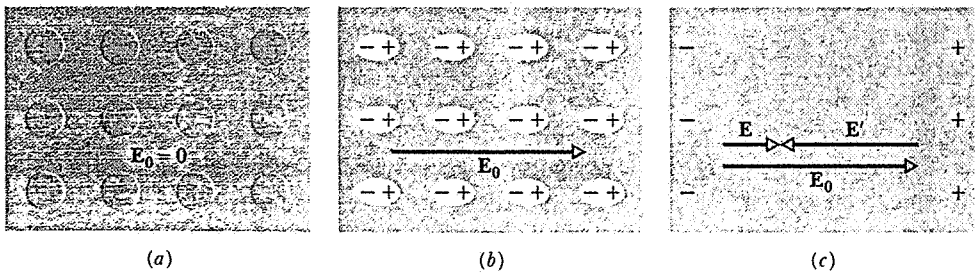


Figura 13 (*a*) Una piastra di dielettrico. I circoli indicano la simmetria sferica degli atomi all'interno della piastra. (*b*) Un campo elettrico esterno E_0 separa le cariche positive e negative dell'atomo. Un elemento di volume interno alla piastra non contiene carica netta, ma c'è una carica superficiale indotta netta sulle facce della piastra stessa. Negativa a sinistra e positiva a destra. (*c*) Le cariche superficiali indotte nette producono un campo elettrico indotto netto E' che si oppone al campo applicato E_0. All'interno della piastra il campo netto E è la somma vettoriale di E_0 e E'.

ISBN 88-408-0777-2

un dielettrico in un campo elettrico, appaiono cariche superficiali indotte che tendono a indebolire il campo all'interno del dielettrico.

Questo indebolimento del campo elettrico si manifesta, nella figura 11, come una riduzione della differenza di potenziale tra i piatti di un condensatore carico isolato, quando viene inserito un dielettrico tra i piatti. La relazione $V = Ed$ per un condensatore a piatti paralleli (vedi eq. 6) sia che ci sia un dielettrico oppure no, indica che la riduzione di V, descritta nella figura 11, è direttamente connessa con la riduzione di E descritta nella figura 13. Sia E che V sono attenuati del fattore κ_e (si noti che ciò vale soltanto quando la batteria non è collegata. Se la batteria rimanesse connessa, V resterebbe costante ma aumenterebbe q. Il campo elettrico, rafforzato da questa carica addizionale sul condensatore, si opporrebbe al campo E′ nel dielettrico e il risultato sarebbe un campo complessivo E costante).

La carica indotta spiega perché una bacchetta carica attragga pezzettini scarichi di materiale isolante, come la carta. La figura 14 mostra un pezzetto di carta nel campo di una bacchetta carica. Come mostrato, sulla carta compaiono cariche superficiali. Il lato carico negativamente della carta viene attratto dalla bacchetta e il lato carico positivamente viene respinto. Queste forze non hanno la stessa intensità poiché il lato negativo, essendo più vicino alla bacchetta, giace in un campo più intenso ed è soggetto ad una forza maggiore. L'effetto complessivo è attrattivo. Se un dielettrico viene posto in un campo elettrico *uniforme*, appariranno cariche superficiali indotte ma il dielettrico non sarà soggetto ad alcuna forza netta.

Nell'esempio 8 si è puntualizzato che, se una piastra dielettrica viene inserita in un condensatore a piatti paralleli avente una carica q fissa sui piatti, sulla piastra stessa agirà una forza che la attira nel condensatore. Questa forza è dovuta all'attrazione elettrostatica tra le cariche $\pm q$ sul condensatore e le cariche $\mp q'$ sulla piastra dielettrica. Quando la piastra è inserita nel condensatore solo parzialmente, né q né q' sono distribuite uniformemente (si veda la domanda 26).

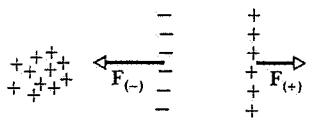


Figura 14 Una bacchetta carica attira un pezzetto di carta scarico poichè forze non bilanciate agiscono sulle cariche superficiali indotte.

31-7 I DIELETTRICI E LA LEGGE DI GAUSS

Finora l'uso della legge di Gauss è stato limitato alle situazioni in cui non era presente alcun dielettrico. Ora si vuole applicare questa legge ad un condensatore a piatti paralleli riempito con un materiale di costante dielettrica pari a κ_e.

La figura 15 mostra il condensatore con e senza dielettrico. Si assume che la carica q sui piatti sia la stessa in entrambi i casi. Le superfici gaussiane vengono tracciate come nella figura 3.

Se non c'è alcun dielettrico (fig. 15*a*), la legge di Gauss dà

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 E_0 A = q$$

cioè

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}. \tag{33}$$

Se c'è il dielettrico (fig. 15*b*), la legge di Gauss dà

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 EA = q - q'$$

cioè

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}, \tag{34}$$

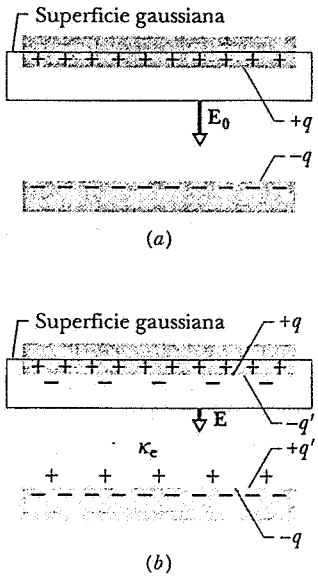


Figura 15 (*a*) Un condensatore a piatti paralleli. (*b*) Una piastra di dielettrico viene inserita tra i piatti, restando costante la carica q sui piatti. La carica indotta q' appare sulle superfici della piastra.

in cui $-q'$, la *carica superficiale indotta*, deve essere distinta da q, la *carica libera* sui piatti. Queste due cariche $+q$ e $-q'$, entrambe racchiuse dalla superficie gaussiana, hanno segno opposto; la carica *netta* all'interno della superficie gaussiana è $q + (-q') = q - q'$.

Il dielettrico riduce il campo elettrico del fattore k_e, per cui

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A}. \tag{35}$$

Sostituendo questa relazione nell'equazione 34 si ha

$$\frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

cioè

$$q' = q\left(1 - \frac{1}{\kappa_e}\right). \tag{36}$$

Ciò mostra che la carica superficiale indotta q' è sempre minore in modulo della carica libera q ed è nulla se non c'è alcun dielettrico, cioè se $k_e = 1$.

Ora si può scrivere la legge di Gauss nel caso della figura 15*b*, nella forma

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q - q', \tag{37}$$

essendo ancora $q - q'$ la carica netta contenuta nella superficie gaussiana. Sostituendo q' con l'espressione esplicita (vedi eq. 36) e riarrangiando opportunamente l'equazione 37, si ha

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q. \tag{38}$$

Questa importante relazione, quantunque ricavata per un condensatore a piatti paralleli, è valida in generale ed è la forma nella quale la legge di Gauss viene normalmente scritta in presenza di dielettrici. Si noti che:

1. L'integrale del flusso ora è relativo a $\kappa_e \mathbf{E}$ anziché $\mathbf{E}$. Ciò è consistente con la *riduzione* di E in un dielettrico di un fattore κ_e, dato che $\kappa_e \mathbf{E}$ (dielettrico presente) uguaglia $\mathbf{E}_0$ (nessun dielettrico). Generalizzando, si tiene conto del fatto che κ_e può non essere costante tenendolo sotto il segno di integrale.

2. La carica q contenuta dalla superficie gaussiana è la *sola carica libera*. La carica superficiale indotta viene volutamente omessa nel termine di destra dell'equazione 38, dato che se ne è tenuto conto attraverso l'introduzione di κ_e nel termine a sinistra. Le equazioni 37 e 38 sono formulazioni del tutto equivalenti.

Esempio 9 La figura 16 mostra un condensatore a piatti paralleli con piatti di area A distanti d l'uno dall'altro. Una differenza di potenziale V_0 viene applicata sui piatti. La batteria viene, poi, staccata e una piastra dielettrica di spessore b e costante dielettrica κ_e viene inserita tra i piatti, come mostrato. Si assuma che

$$A = 115\ \text{cm}^2, \quad d = 1.24\ \text{cm}, \quad b = 0.78\ \text{cm},$$
$$\kappa_e = 2.61, \quad V_0 = 85.5\ \text{V}.$$

(*a*) Qual è la capacità C_0 prima che la piastra venga inserita? (*b*) Quale carica libera appare sui piatti? (*c*) Qual è il campo elettrico E_0 nelle zone vuote tra i piatti e la piastra dielettrica? (*d*) Si calcoli il campo elettrico E nella piastra dielettrica. (*e*) Qual è la differenza di potenziale tra i piatti, dopo che la piastra dielettrica è stata introdotta? (*f*) Qual è la capacità quando la piastra è posizionata?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 7 si ha che

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{(8.55 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}{1.24 \times 10^{-2}\ \text{m}}$$
$$= 8.21 \times 10^{-12}\ \text{F} = 8.21\ \text{pF}.$$

(*b*) La carica libera sui piatti può essere trovata dall'equazione 1,

$$q = C_0 V_0 = (8.21 \times 10^{-12}\ \text{F})(85.5\ \text{V})$$
$$= 7.02 \times 10^{-10}\ \text{C} = 702\ \text{pC}.$$

Poiché la batteria viene staccata prima che la piastra venga inserita, la carica libera rimane invariata quando la piastra viene posizionata all'interno del condensatore.

(*c*) Si applica la legge di Gauss nella forma data dall'equazione 38 alla superficie gaussiana tracciata nella parte alta della figura 16 che racchiude soltanto la carica libera del piatto superiore del condensatore. Si ha che

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \epsilon_0 (1) E_0 A = q$$

cioè

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{7.02 \times 10^{-10}\ \text{C}}{(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)}$$
$$= 6900\ \text{V/m} = 6.90\ \text{kV/m}.$$

Si noti che κ_e è posto pari a 1 in questa equazione poiché la superficie gaussiana sulla quale viene integrata la legge di Gauss non passa attraverso nessun dielettrico. Si noti anche che il valo-

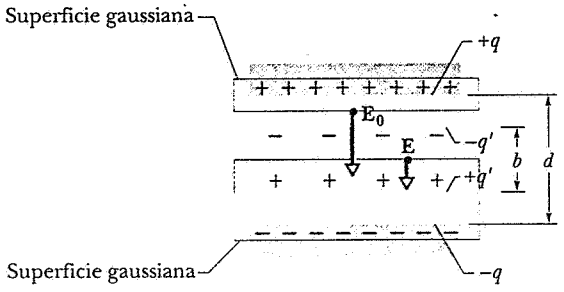


Figura 16 Esempio 9. Un condensatore a piatti paralleli contiene un dielettrico che riempie solo parzialmente lo spazio compreso tra i piatti.

ISBN 88-408-0777-2

re E_0 resta invariato quando la piastra è introdotta. Esso dipende soltanto dalla carica libera sui piatti.

(*d*) Si applica ancora l'equazione 38, questa volta sulla superficie gaussiana tracciata nella parte inferiore della figura 16 che racchiude soltanto la carica libera $-q$. Si trova

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = -\epsilon_0 \kappa_e EA = -q$$

cioè

$$E = \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{6.90 \text{ kV/m}}{2.61} = 2.64 \text{ kV/m}.$$

Il segno meno compare quando si calcola il prodotto scalare $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ poiché $\mathbf{E}$ e $d\mathbf{A}$ hanno versi opposti, essendo $d\mathbf{A}$ sempre orientato nella direzione della normale *uscente* dalla superficie gaussiana.

(*e*) Per trovare la differenza di potenziale si usa l'equazione 6,

$$\begin{aligned} V &= \int_+^- E\, ds = E_0(d-b) + Eb \\ &= (6900 \text{ V/m})(0.0124 \text{ m} - 0.0078 \text{ m}) \\ &\quad + (2640 \text{ V/m})(0.0078 \text{ m}) \\ &= 52.3 \text{ V}. \end{aligned}$$

Questo valore va confrontato con la differenza di potenziale originalmente applicata di 85.5 V.

TABELLA 2 RIASSUNTO DEI RISULTATI DELL'ESEMPIO 9

Grandezza	*Unità di misura*	*Senza piastra*	*Piastra sottile*	*Piastra spessa*
C	pF	8.21	13.4	21.4
q	pC	702	702	702
q'	pC	–	433	433
V	V	85.5	52.3	32.8
E_0	kV/m	6.90	6.90	6.90[a]
E	kV/m	–	2.64	2.64

[a] Assumendo che le zone vuote siano molto piccole.

(*f*) Dall'equazione 1, la capacità con la piastra posizionata è

$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{V} = \frac{7.02 \times 10^{-10} \text{ C}}{52.3 \text{ V}} \\ &= 1.34 \times 10^{-11} \text{ F} = 13.4 \text{ pF}. \end{aligned}$$

La tabella 2 sintetizza i risultati di questo esempio ed elenca anche i risultati che si sarebbero ottenuti se la piastra dielettrica avesse riempito completamente lo spazio tra i piatti.

DOMANDE

1. Un condensatore è collegato ad una batteria. (*a*) Perché i due piatti ricevono cariche uguali in modulo? (*b*) Ciò resta vero se i piatti hanno dimensioni diverse?
2. Si abbiano due condensatori C_1 e C_2 tali che $C_1 > C_2$. Come si dovrebbero configurare i condensatori perché C_2 possa contenere più carica di C_1?
3. La relazione $\sigma \div 1/R$, in cui σ è la densità di carica superficiale e R è il raggio di curvatura (vedi eq. 33 del cap. 30) indica che la carica posta su un conduttore isolato si concentra sulle punte ed evita le zone piatte, dove $R = \infty$. Come si concilia ciò con la figura 3, in cui la carica staziona sulle superfici piane di entrambi i piatti?
4. In relazione all'equazione 1 ($q = CV$) abbiamo detto che C è una costante. Si è, però, puntualizzato (vedi eq. 7) che C dipende dalla geometria (ed anche, come si è visto successivamente, dal mezzo). Rispetto a quali variabili, allora, ci si riferiva nel dire che C è una costante?
5. Relativamente alla figura 1, si supponga che a e b siano isolanti e la carica sia distribuita arbitrariamente sulle superfici. (*a*) L'equazione 1 ($q = CV$) continuerebbe a valere e C sarebbe indipendente dalla disposizione delle cariche? (*b*) Come sarebbe definito V in questo caso?
6. È dato un condensatore a piatti paralleli con piatti quadrati di area A e separazione d, nel vuoto. Qual è, qualitativamente, l'effetto di ciascuna delle modifiche seguenti sulla capacità?
   (*a*) Ridurre d. (*b*) Inserire una piastra di rame tra i piatti, che non tocchi i piatti. (*c*) Raddoppiare l'area di entrambi i piatti. (*d*) Raddoppiare l'area di un solo piatto. (*e*) Far slittare i piatti parallelamente l'uno rispetto all'altro in modo che l'area di sovrapposizione sia ridotta del 50%. (*f*) Raddoppiare la differenza di potenziale tra i piatti.
7. Sono dati due conduttori isolati, ciascuno dei quali ha una certa capacità (vedi fig. 17). Dopo avere unito i conduttori con un cavo sottile, come va calcolata la capacità della connessione? Unendo i conduttori con il cavo sottile si realizza una connessione in serie o in parallelo?

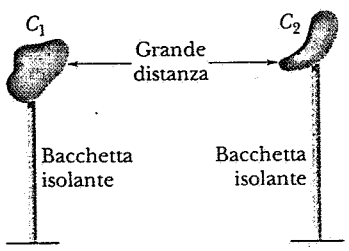


Figura 17 Domanda 7.

8. La capacità di un condensatore risente della presenza di un secondo conduttore scarico ed isolato elettricamente. Perché?
9. Un foglio di alluminio di spessore trascurabile viene posto tra i piatti di un condensatore, come indicato nella figura 18.

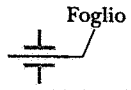


Figura 18 Domanda 9.

Quale effetto si ha sulla capacità se (*a*) il foglio è elettricamente isolato e (*b*) il foglio è collegato al piatto superiore.

10. I condensatori vengono spesso conservati con un cavo connesso ai loro terminali. Perché?

11. Se, in un condensatore a piatti paralleli, non si trascurassero gli effetti di bordo sulle linee del campo elettrico, si calcolerebbe una capacità maggiore o minore?

12. Due dischi di rame sono posti l'uno di fronte all'altro ad una certa distanza. In quali modi si potrebbe ridurre la capacità di questo condensatore?

13. Ci si aspetta che la costante dielettrica di un materiale vari con la temperatura? In caso affermativo, come? Ha importanza, in questo quesito, se le molecole abbiano un momento di dipolo permanente?

14. Si discutano analogie e differenze delle due situazioni in cui (*a*) una piastra dielettrica e (*b*) una piastra conduttrice vengono inserite tra i piatti di un condensatore a piatti paralleli. Si assuma che lo spessore della piastra sia pari alla metà della distanza tra i piatti.

15. Un condensatore a piatti paralleli riempito di olio è progettato per avere una capacità C e per operare correttamente, senza avere una scarica, sotto un certo valore di differenza di potenziale V_m. Il progettista, però, non ha fatto un buon progetto e il condensatore di tanto in tanto ha una scarica. Che cosa si potrebbe fare, per ridisegnare il condensatore mantenendo C e V_m inalterati ed utilizzando lo stesso dielettrico?

16. Si mostri che la costante dielettrica di un conduttore può essere considerata infinitamente grande.

17. Per una assegnata differenza di potenziale un condensatore immagazzina una quantità di carica maggiore se c'è un dielettrico tra i suoi piatti o se c'è il vuoto? Si spieghi in termini di rappresentazione microscopica della situazione.

18. Un campo elettrico può polarizzare i gas in vari modi: distorcendo la nube elettronica delle molecole; orientando molecole polari; rafforzando o allentando i legami nelle molecole polari. Come si differenzia ciò dalla polarizzazione delle molecole nei liquidi e nei solidi?

19. Un pezzo di dielettrico immerso in un campo elettrico non uniforme è soggetto ad una forza netta. Perché non vi è forza netta se il campo è uniforme?

20. Un getto d'acqua di rubinetto può essere deflesso se si pone una bacchetta carica nelle sue immediate vicinanze. Si spieghi con cura come ciò avvenga.

21. L'acqua ha una alta costante dielettrica (vedi tab. 1). Perché non viene usata comunemente come materiale dielettrico nei condensatori?

22. La figura 19 mostra un condensatore reale da 1 F, disponibile per gli studenti nei laboratori universitari. Esso ha un diametro di soli pochi centimetri. Tenendo conto del risultato dell'esempio 2, come può essere costruito tale condensatore?

23. Una piastra dielettrica viene inserita da un bordo in un condensatore carico a piatti paralleli (i piatti siano orizzontali e la batteria sia stata staccata) e poi lasciata libera. Si descriva che cosa succede, trascurando gli attriti.

24. Un condensatore a piatti paralleli viene caricato usando una batteria, che, poi, viene staccata. Successivamente una piastra dielettrica viene inserita tra i piatti. Si descriva qualitativamente che cosa succede alla carica, alla capacità, alla differenza di potenziale, al campo elettrico e all'energia immagazzinata.



Figura 19 Domanda 22.

25. Mentre un condensatore a piatti paralleli resta collegato ad una batteria, una piastra dielettrica viene inserita tra i piatti. Si descriva qualitativamente che cosa succede alla carica, alla capacità, alla differenza di potenziale, al campo elettrico e all'energia immagazzinata. È necessario compiere lavoro per inserire la piastra?

26. Si assuma che una piastra dielettrica di spessore uguale alla separazione tra i piatti di un condensatore a piatti paralleli carico, sia inserita tra i piatti soltanto per metà. Si tracci qualitativamente la distribuzione della carica q sui piatti e della carica indotta q' sulla piastra.

27. Due condensatori identici sono connessi come indicato nella figura 20. Una piastra dielettrica viene inserita tra i piatti di un condensatore mentre la batteria rimane connessa. Si descriva qualitativamente che cosa succede alla carica, alla capacità, alla differenza di potenziale, al campo elettrico e all'energia immagazzinata in ciascun condensatore.

28. In questo capitolo si è ipotizzato di essere in condizioni elettrostatiche; cioè, ad esempio, che la differenza di potenziale V tra i piatti di un condensatore resti costante. Si supponga, tutavia, che, come spesso accade in pratica, V vari sinusoidalmente nel tempo, con frequenza angolare ω. Ci si aspetta che la costante dielettrica κ_e vari con ω?

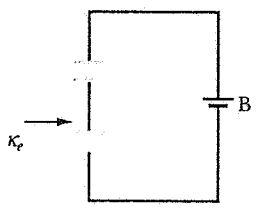


Figura 20 Domanda 27.

ISBN 88-408-0777-2

PROBLEMI

Paragrafo 31-1 La capacità

1. Un elettrometro è uno strumento per misurare la carica statica. La carica viene posta sui piatti di un condensatore e viene misurata la differenza di potenziale. Quale carica minima può essere misurata da un elettrometro con una capacità di 50 pF e una sensibilità sulla misura di tensione di 0.15 V?.
2. I due oggetti metallici della figura 21 hanno cariche nette di + 73.0 pC e −73.0 pC; ciò si traduce in una differenza di potenziale tra di essi di 19.2 V. (*a*) Qual è la capacità del sistema? (*b*) Se le cariche vengono incrementate fino a + 210 pC e −210 pC, quale sarà la differenza di potenziale?



Figura 21 Problema 2.

3. Il condensatore della figura 22 ha una capacità di 26.0 μF ed è inizialmente scarico. La batteria fornisce 125 V. Dopo che l'interruttore S è rimasto chiuso per un lungo tempo, quanta carica avrà attraversato la batteria B?

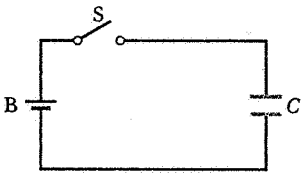


Figura 22 Problema 3.

Paragrafo 31-2 Il calcolo della capacità

4. Un condensatore a piatti paralleli ha piatti circolari aventi raggio di 8.22 cm distanti 1.31 mm l'uno dall'altro. (*a*) Si calcoli la capacità. (*b*) Quale carica comparirà sui piatti se è applicata una differenza di potenziale di 116 V?
5. Gli elettrodi di un diodo contenuto in un tubo a vuoto sono nella forma di due cilindri concentrici e il catodo è il cilindro più interno. Il diametro del catodo è 1.62 mm e il diametro della placca è 18.3 mm. Entrambi gli elettrodi hanno una lunghezza di 2.38 cm. Si calcoli la capacità del diodo.
6. Due fogli di alluminio sono separati da una distanza di 1.20 mm, presentano una capacità di 9.70 pF e vengono caricati con una tensione di 13.0 V. (*a*) Si calcoli l'area dei piatti. (*b*) La distanza tra i due piatti viene, poi, ridotta a 0.10 mm mantenendo costante la carica. Si trovi il nuovo valore di capacità. (*c*) Di quanto varia la differenza di potenziale? Si spieghi come potrebbe essere costruito un microfono in base a questo principio.
7. I piatti di un condensatore sferico hanno raggi di 38.0 mm e 40.0 mm. (*a*) Se ne calcoli la capacità. (*b*) Quale dovrebbe essere l'area di un condensatore a piatti paralleli con una uguale distanza tra i piatti ed ugual capacità?
8. Si supponga che i due gusci sferici di un condensatore sferico abbiano raggi approssimativamente uguali. In queste condizioni il dispositivo approssima un condensatore a piatti paralleli tale che $b - a = d$. Si mostri che, in tali condizioni, l'equazione 13 del condensatore sferico si riduce all'equazione 7 del condensatore a piatti paralleli.
9. Nel paragrafo 31-2 è stata calcolata la capacità di un condensatore cilindrico. Utilizzando l'approssimazione (vedi appendice H) $\ln(1 + x) \approx x$ quando $x \ll 1$, si mostri che la capacità approssima quella di un condensatore a piatti paralleli quando la distanza tra i due cilindri è piccola.
10. Un condensatore viene progettato per operare, con capacità costante, in un ambiente a temperatura variabile. Come illustrato nella figura 23, il condensatore è un condensatore del tipo a piatti paralleli con «distanziatori» plastici per mantenere i piatti allineati. (*a*) Si mostri che l'entità della variazione della capacità con la temperatura è data da

$$\frac{dC}{dT} = C\left(\frac{1}{A}\frac{dA}{dT} - \frac{1}{x}\frac{dx}{dT}\right),$$

dove A è l'area del piatto e x è la distanza tra i piatti. (*b*) Se i piatti fossero in alluminio, quale dovrebbe essere il coefficiente di dilatazione termica dei distanziatori affinchè la capacità non vari con la temperatura? (Si trascuri l'effetto dei distanziatori sulla capacità).

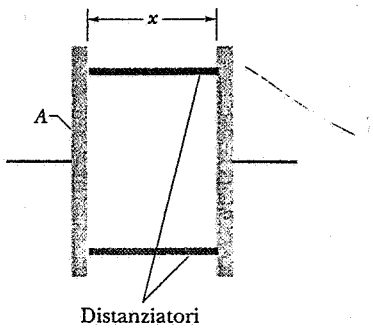


Figura 23 Problema 10.

Paragrafo 31-3 Condensatori in serie e in parallelo

11. Quanti condensatori da 1.00 μF devono essere connessi in parallelo per immagazzinare una carica di 1.00 C applicando sui condensatori una differenza di potenziale di 110 V?
12. Nella figura 24, si trovi la capacità equivalente dell'insieme dei condensatori. Si assuma che $C_1 = 10.3$ μF, $C_2 = 4.80$ μF e $C_3 = 3.90$ μF.

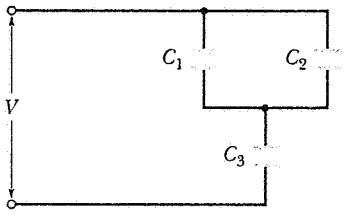


Figura 24 Problemi 12, 19 e 36.

13. Nella figura 25 si trovi la capacità equivalente dell'insieme dei condensatori. Si assuma che $C_1 = 10.3\ \mu F$, $C_2 = 4.80\ \mu F$ e $C_3 = 3.90\ \mu F$.

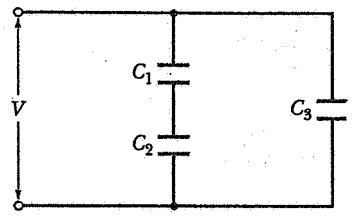


Figura 25 Problema 13.

14. Ciascuno dei condensatori scarichi della figura 26 ha una capacità di 25.0 μF. Una differenza di potenziale di 4200 V viene applicata quando l'interruttore S è chiuso. Quanta carica attraversa lo strumento A?

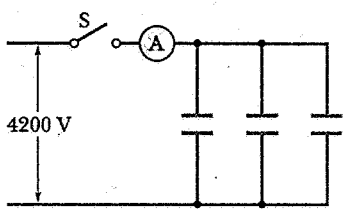


Figura 26 Problema 14.

15. Un condensatore da 6.0 μF viene collegato in serie con un condensatore da 4.0 μF; una differenza di potenziale di 200 V viene applicata sulla coppia di condensatori. (*a*) Si determini la capacità equivalente. (*b*) Qual è la carica su ciascun condensatore? (*c*) Qual è la differenza di potenziale su ciascun condensatore?
16. Si svolga di nuovo il problema 15 relativamente agli stessi due condensatori, ma collegati in parallelo.
17. (*a*) Tre condensatori vengono collegati in parallelo. Ciascuno di essi ha piatti di area A e distanza tra i piatti d. Quale deve essere la separazione tra i piatti (aventi sempre area A) di un quarto condensatore, perché la sua capacità sia uguale a quella dell'insieme descritto?
18. La figura 27 mostra un condensatore variabile funzionante in aria, del tipo utilizzato nei sintonizzatori radio. Esso è costituito da due serie connesse di piatti alternati. Una serie è fissata mentre l'altra può ruotare rispetto alla prima. Si consideri un numero totale n di piatti con polarità alternate, ciascuno di area A e separato dai piatti adiacenti da una distanza d. Si mostri che questo condensatore ha una capacità massima pari a

$$C = \frac{(n-1)\epsilon_0 A}{d}.$$

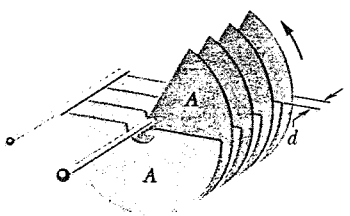


Figura 27 Problema 18.

19. Relativamente alla figura 24, si supponga che il condensatore C_3 subisca una rottura elettrica, divenendo equivalente ad un conduttore. Quale variazione (*a*) nella carica e (*b*) nella differenza di potenziale si avrà sul condensatore C_1? Si assuma che $V = 115$ V.
20. Si abbiano a disposizione molti condensatori da 2.0 μF, ciascuno in grado di reggere 200 V senza rompersi. Come si potrebbero connettere tali condensatori affinchè la connessione presenti una capacità equivalente ai morsetti pari (*a*) a 0.40 μF o (*b*) a 1.2 μF e sia in grado di sopportare senza rottura una differenza di potenziale di 1000 V?
21. La figura 28 mostra due condensatori in serie. La parte rigida centrale di altezza b si possa muovere verticalmente. Si mostri che la capacità equivalente della connessione in serie è indipendente dalla posizione della parte centrale ed è data da

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{a-b}.$$

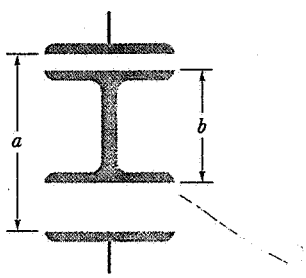


Figura 28 Problema 21.

22. Un condensatore da 108 pF viene caricato con una differenza di potenziale di 52.4 V; la batteria viene staccata. Il condensatore viene poi connesso in parallelo con un secondo condensatore inizialmente scarico. La differenza di potenziale che si misura cade a 35.8 V Si determini la capacità di questo secondo condensatore.
23. Nella figura 29 i condensatori $C_1 = 1.16\ \mu F$ e $C_2 = 3.22\ \mu F$ vengono caricati entrambi con una differenza di potenziale $V = 96.6$ V ma con polarità opposta; i punti a e c si trovano dalla parte dei piatti positivi di C_1 e C_2 e i punti b e d si trovano, corrispondentemente, dalla parte dei piatti negativi. Gli interruttori S_1 ed S_2 vengono, poi, chiusi. (*a*) Quale sarà la

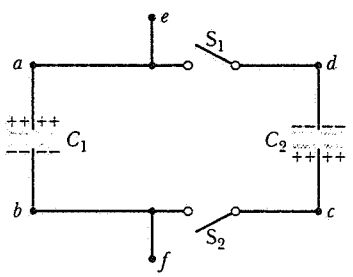


Figura 29 Problema 23.

ISBN 88-408-0777-2

differenza di potenziale finale tra i punti e ed f? (*b*) Quale sarà la carica su C_1? (*c*) Quale sarà la carica su C_2?

24. Quando l'interruttore S viene chiuso sulla sinistra nella figura 30, i piatti del condensatore C_1 si portano ad una differenza di potenziale V_0. C_2 e C_3 siano inizialmente scarichi. L'interruttore venga, ora, portato sulla destra. Quali saranno le cariche finali q_1, q_2, q_3, sui rispettivi condensatori?

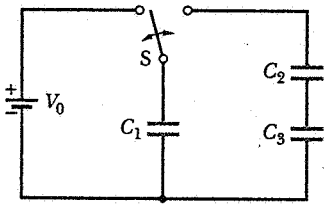


Figura 30 Problema 24.

25. La figura 31 mostra due condensatori identici di capacità C in un circuito con due diodi D (ideali). Una batteria da 100 V viene collegata ai morsetti di ingresso, (*a*) inizialmente con il polo positivo sul morsetto a e (*b*) successivamente con il polo positivo sul morsetto b. In ciascuno dei due casi, qual è la differenza di potenziale sui morsetti di uscita? (Un diodo ideale ha la proprietà che la carica positiva può scorrere al suo interno soltanto nella direzione della freccia e la carica negativa può scorrere al suo interno soltanto nella direzione opposta).

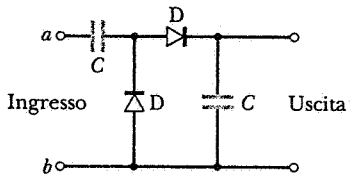


Figura 31 Problema 25.

26. Un condensatore ha piatti quadrati, ognuno di lato a, che formano un angolo θ l'uno rispetto all'altro come mostrato nella figura 32. Si mostri che per θ piccoli la capacità è data dall'espressione

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{a\theta}{2d}\right).$$

(*Suggerimento*: il condensatore può essere suddiviso in strisce differenziali che sono in effetti in parallelo).

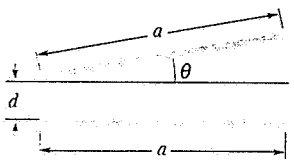


Figura 32 Problema 26.

27. Nella figura 33 la batteria B fornisce 12 V. (*a*) Si determini la carica su ciascun condensatore quando l'interruttore S_1 viene chiuso e (*b*) quando (successivamente) l'interruttore S_2 viene anch'esso chiuso. Si assuma che $C_1 = 1.0\ \mu F$, $C_2 = 2.0\ \mu F$, $C_3 = 3.0\ \mu F$ e $C_4 = 4.0\ \mu F$.

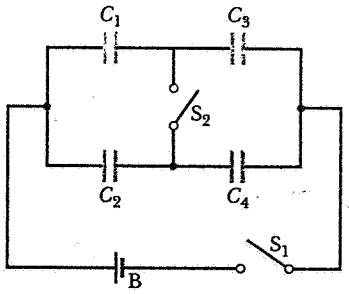


Figura 33 Problema 27.

28. Si determini la capacità equivalente tra i punti x e y della figura 34. Si assuma che $C_2 = 10\ \mu F$ e che gli altri condensatori siano da 4.0 μF (*suggerimento*: si applichi una differenza di potenziale V tra x e y e si scrivano tutte le relazioni che coinvologono le cariche e le differenze di potenziale per i singoli condensatori).

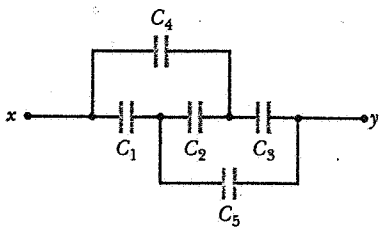


Figura 34 Problema 28.

Paragrafo 31-4 L'energia immagazzinata in un campo elettrico

29. Quanta energia è immagazzinata in un volume di 2.0 m^3 d'aria in presenza di un campo elettrico uniforme avente intensità di 150 V/m?

30. I tentativi di costruzione di un reattore per la fusione termonucleare controllata porterebbero, in caso di successo, a rifornire il mondo con una grande quantità di energia utilizzando l'idrogeno pesante presente nell'acqua del mare. Il processo richiede elevate correnti elettriche per brevi tempi all'interno di bobine elettromagnetiche. Per fornire tali correnti si ricorre a condensatori. Per esempio nell'ambito dell'esperimento ZT-40, presso i laboratori nazionali di Los Alamos, vi sono stanze piene di condensatori. Uno dei banchi di condensatori si traduce in una capacità equivalente di 61.0 mF caricata a 10.0 kV. Si calcoli l'energia immagazzinata (*a*) in joule e (*b*) in kW · h.

31. Un condensatore a piatti paralleli operante in aria, avente un'area di 42.0 cm^2 e una separazione tra i piatti di 1.30 mm, viene caricato con una differenza di potenziale di 625 V. Si determini (*a*) la capacità, (*b*) la quantità di carica su ciascun piatto, (*c*) l'energia immagazzinata, (*d*) il campo elettrico tra i piatti e (*e*) la densità di energia tra i piatti.

32. Due condensatori da 2.12 μF e 3.88 μF sono collegati in serie e caricati con una differenza di potenziale di 328 V. Si calcoli l'energia totale immagazzinata nei condensatori.

33. Una sfera metallica isolata di diametro pari a 12.6 cm ha un potenziale di 8150 V. Si calcoli la densità di energia del campo elettrico vicino alla superficie della sfera.

34. Un banco di 2100 condensatori da 5.0 μF collegati in parallelo è impiegato per immagazzinare energia elettrica. Quanto costerebbe caricare tale banco a 55 kV, assumendo una spesa di 3.0 centesimi/kW · h?
35. Un condensatore viene caricato fino a che l'energia immagazzinata è pari a 4.0 J. La batteria viene, poi, staccata. Un secondo condensatore scarico viene successivamente connesso in parallelo al primo. (*a*) Se la carica si distribuisce in parti uguali qual è, alla fine, l'energia totale immagazzinata nei campi elettrici? (*b*) Dove finisce l'energia in eccesso?
36. Nella figura 34 si trovi (*a*) la carica, (*b*) la differenza di potenziale e (*c*) l'energia immagazzinata per ciascun condensatore.
37. Un condensatore a piatti paralleli ha piatti di area A e separazione d. Esso viene caricato con una differenza di potenziale V. La batteria viene poi staccata e i piatti vengono spostati fino ad avere una separazione pari a $2d$. Si trovino le espressioni - in funzione di A, d e V - di: (*a*) la nuova differenza di potenziale, (*b*) l'energia immagazzinata iniziale e finale e (*c*) il lavoro necessario per separare i piatti.
38. Un condensatore cilindrico ha raggi a e b come indicato nella figura 4. Si mostri che la metà dell'energia potenziale elettrica immagazzinata giace in un cilindro il cui raggio è

$$r = \sqrt{ab}.$$

39. (*a*) Si calcoli la densità di energia di un campo elettrico ad una distanza r da un elettrone a riposo. (*b*) Si assuma, ora, che l'elettrone non sia puntiforme ma sia una sfera di raggio R sulla cui superficie è distribuita la carica elettronica. Si determini l'energia associata al campo elettrico dell'elettrone in un ambiente vuoto, in funzione di R. (*c*) Se, ora, si associa questa energia alla massa dell'elettrone si può calcolare, usando $E_0 = mc^2$, il valore di R. Si calcoli questo raggio numericamente; esso è spesso detto il *raggio classico* dell'elettrone.
40. Si mostri che i piatti di un condensatore a piatti paralleli si attraggono con una forza pari a

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}.$$

Si dimostri ciò calcolando il lavoro necessario per accrescere la separazione tra i piatti da x a $x + dx$, restando la carica q costante.
41. Utilizzando il risultato del problema 40 si mostri che la forza per unità di area (la *pressione elettrostatica*) che agisce su entrambi i piatti del condensatore, è data da $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. In realtà questo risultato è valido in generale, per un conduttore di forma qualsiasi in presenza di un campo elettrico E in corrispondenza della sua superficie.
42. Una bolla di sapone di raggio R_0 riceve, lentamente, una carica q. A causa della mutua repulsione delle cariche sulla superficie, il raggio aumenta lievemente a R. La pressione dell'aria all'interno della bolla scende, per effetto dell'espansione, a $p(V_0/V)$, essendo p la pressione atmosferica, V_0 il volume iniziale e V il volume finale. Si mostri che

$$q^2 = 32\pi^2\epsilon_0 pR(R^3 - R_0^3).$$

(*Suggerimento*: Si considerino le forze che agiscono su una piccola area della bolla carica. Esse sono dovute a (*i*) pressione del gas, (*ii*) pressione atmosferica, (*iii*) pressione elettrostatica: si veda il problema 41).
43. Un condensatore a piatti paralleli operante in aria ha una capacità di 1.32 pF. La separazione tra i piatti viene raddoppiata e lo spazio compreso tra i piatti viene riempito di cera. La nuova capacità è 2.57 pF. Si ricavi la costante dielettrica della cera.
44. Dato un condensatore da 7.40 μF operante in aria, viene chiesto di modificarlo per immagazzinare fino a 6.61 μJ con una differenza di potenziale massima di 630 V. Quale dielettrico della tabella 1 è opportuno utilizzare per riempire la zona compresa tra i piatti?
45. Per costruire un condensatore a piatti paralleli si hanno a disposizione due piatti di rame, un foglio di mica (spessore = 0.10 mm, $\kappa_e = 5.4$), un foglio di vetro (spessore = 0.20 mm, $\kappa_e = 7.0$) e una piastra di paraffina (spessore = 1.00 cm, $\kappa_e = 2.0$). Per ottenere la capacità massima, quale foglio va interposto ai piatti del condensatore?
46. Un condensatore a piatti paralleli operante in aria ha una capacità di 51.3 pF. (*a*) Se ciascuno dei suoi piatti ha un'area di 0.350 m^2, qual è la loro separazione? (*b*) Se la regione compresa tra i piatti viene, ora, riempita con un materiale che ha costante dielettrica pari a 5.60, quanto vale la capacità?
47. Un cavo coassiale usato in una linea di trasmissione risponde come una capacità «distribuita» al circuito che lo alimenta. Si calcoli la capacità di un cavo lungo 1.00 km con raggio interno pari a 0.110 mm e raggio esterno pari a 0.588 mm. Si assuma che lo spazio compreso tra i conduttori sia riempito con polistirolo.
48. Una certa sostanza ha costante dielettrica pari a 2.80 e rigidità dielettrica di 18.2 MV/m. Se essa viene impiegata come materiale dielettrico in un condensatore a piatti paralleli, quale area minima devono avere i piatti del condensatore affinchè la capacità sia pari a 68.4 nF e il condensatore possa sopportare una differenza di potenziale di 4.13 kV?
49. Si chiede di costruire un condensatore con una capacità di circa 1.0 nF ed una tensione di rottura di oltre 10 kV. Si pensa di utilizzare la parete cilindrica di un bicchiere di Pyrex rivestendo le pareti interna ed esterna con fogli di alluminio (si trascurino gli effetti di bordo). Qual è (*a*) la capacità e (*b*) la tensione di rottura? Si faccia uso di un bicchiere alto 15 cm con raggio interno di 3.6 cm e raggio esterno di 3.8 cm.
50. Si chiede di progettare un condensatore trasportabile che possa immagazzinare 250 kJ di energia. Si sceglie il tipo a piatti paralleli con dielettrico. (*a*) Qual è il minimo volume adottabile per il condensatore facendo uso di un dielettrico compreso nella lista della tabella 1? (*b*) I condensatori moderni ad alte prestazioni possono immagazzinare 250 kJ in volumi di 0.087 m^3. Assumendo che il dielettrico utilizzato abbia la stessa rigidità dielettrica di quelli candidati per il punto (*a*), quale deve essere la sua costante dielettrica?
51. Una piastra di rame di spessore b viene inserita in un condensatore a piatti paralleli, come mostrato nella figura 35. (*a*) Quale sarà la capacità dopo che la lastra è stata introdotta? (*b*) Se una carica q viene mantenuta sui piatti, si trovi il rapporto tra l'energia immagazzinata prima e quella immagazzi-

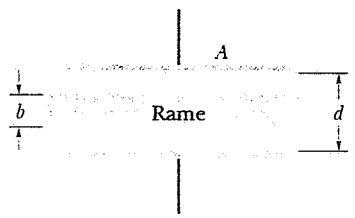


Figura 35 Problema 51.

ISBN 88-408-0777-2

nata dopo che la piastra venga inserita. (*c*) Quale lavoro viene compiuto sulla lastra, mentre viene inserita? La lastra viene attratta nel condensatore oppure è necessario spingerla?

52. Si riconsideri il problema 51, assumendo che venga tenuta costante la differenza di potenziale V anzichè la carica.

53. Una camera di ionizzazione cilindrica ha un anodo a filo al centro avente raggio di 0.180 mm e un catodo coassiale cilindrico avente raggio di 11.0 mm. Essa è riempita con un gas la cui rigidità dielettrica è 2.20 MV/m. Si determini la differenza di potenziale massima che può essere applicata tra l'anodo e il catodo perché il gas non presenti rotture elettriche prima che la radiazione penetri nella camera.

54. Un condensatore a piatti paralleli viene riempito con due dielettrici, come mostrato nella figura 36. Si mostri che la capacità è data da

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}}{2}\right).$$

Si verifichi questa formula in tutti i casi limite che si possono pensare. (*Suggerimento*: non è lecito considerare il sistema come due capacità collegate in parallelo?)

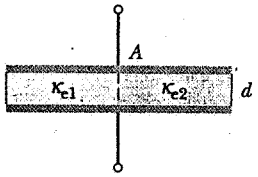


Figura 36 Problema 54.

55. Un condensatore a piatti paralleli viene riempito con due dielettrici, come mostrato nella figura 37. Si dimostri che la capacità è data dall'espressione

$$C = \frac{2\epsilon_0 A}{d}\left(\frac{\kappa_{e1}\kappa_{e2}}{\kappa_{e1} + \kappa_{e2}}\right).$$

Si verifichi questa formula in tutti i casi limite che si possono pensare. (*Suggerimento*: non è lecito considerare il sistema come due capacità collegate in parallelo?)

56. Qual è la capacità del condensatore della figura 38?

Paragrafo 31-7 I dielettrici e la legge di Gauss

57. Un condensatore a piatti paralleli ha una capacità di 112 pF, un'area dei piatti di 96.5 cm^2 e uno strato di mica come dielettrico con costante dielettrica $\kappa_e = 5.40$. Si applichi una tensione di 55.0 V e si calcoli (*a*) l'intensità del campo elettrico nella mica, (*b*) la quantità di carica libera sui piatti e (*c*) la quantità di carica superficiale indotta.

58. Nell'esempio 9 si supponga che la batteria resti collegata mentre la piastra dielettrica viene inserita. Si calcoli (*a*) la capacità, (*b*) la carica sui piatti del condensatore, (*c*) il campo elettrico tra i piatti e (*d*) il campo elettrico nella piastra, dopo che essa è stata introdotta.

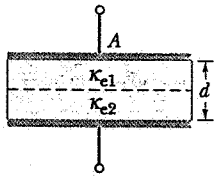


Figura 37 Problema 55.

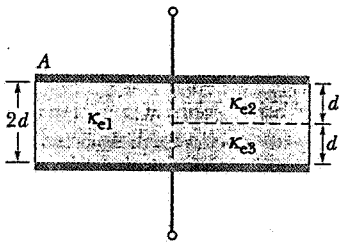


Figura 38 Problema 56.

59. Due piatti paralleli di area pari a 110 cm^2 vengono caricati con cariche uguali e opposte di 890 nC. Il campo elettrico all'interno del materiale dielettrico interposto ai piatti, vale 1.40 MV/m. (*a*) Si calcoli la costante dielettrica del materiale. (*b*) Si determini la quantità di carica indotta sulle superfici del dielettrico.

60. Nel condensatore dell'esempio 9 (fig. 16), (*a*) quale frazione di energia è immagazzinata nelle intercapedini di aria? (*b*) Quale frazione è immagazzinata nella piastra?

61. Un condensatore a piatti paralleli ha piatti di area pari a 0.118 m^2 posti ad una distanza di 1.22 cm l'uno dall'altro. Una batteria carica i piatti ad una differenza di potenziale di 120 V e viene, poi, staccata. Una piastra dielettrica di spessore pari a 4.30 mm e con costante dielettrica pari a 4.80 viene poi posizionata simmetricamente tra i piatti. (*a*) Si determini la capacità prima che la piastra venga inserita. (*b*) Qual è la capacità quando la piastra è posizionata? (*c*) Qual è la carica libera q prima e dopo che la piastra venga inserita? (*d*) Si determini il campo elettrico nello spazio compreso tra i piatti e il dielettrico. (*e*) Qual è il campo elettrico nel dielettrico? (*f*) Quando la piastra è in posizione qual è la differenza di potenziale tra i piatti? (*g*) Quale lavoro esterno è necessario per introdurre la piastra?

62. Una piastra dielettrica di spessore b viene inserita tra i piatti di un condensatore a piatti paralleli con una separazione tra i piatti d. Si dimostri che la capacità è data da

$$C = \frac{\kappa_e \epsilon_0 A}{\kappa_e d - b(\kappa_e - 1)}.$$

(*Suggerimento*: si ricavi la formula seguendo le indicazioni dell'esempio 9). Questa formula predice il corretto risultato numerico dell'esempio 9? Si verifichi che la formula dà risultati ragionevoli nel caso particolare in cui $b = 0$, $k_e = 1$ e $b = d$.

Capitolo 32

CORRENTE E RESISTENZA

Nei precedenti cinque capitoli si è discussa l'elettrostatica, *in cui le cariche venivano considerate a riposo. In questo capitolo si affronta lo studio delle* correnti elettriche, *cioè delle cariche in moto. Vi sono moltissimi esempi che coinvolgono le correnti elettriche, a partire dalle intense correnti attraverso cui si scaricano i fulmini alle minuscole correnti nervose che regolano la nostra attività muscolare. Sono comuni le correnti che scorrono attraverso conduttori solidi (cavi elettrici domestici, lampadine), semiconduttori (circuiti integrati), gas (lampade a fluorescenza), liquidi (batterie automobilistiche) ed anche il vuoto (tubi catodici televisivi).*

Su scala planetaria, si possono ricordare i movimenti delle particelle cariche intrappolate nelle fasce di Van Allen, che si spostano avanti e indietro tra il polo nord magnetico e il polo sud magnetico al di sopra dell'atmosfera. Sulla scala del sistema solare enormi correnti di protoni, elettroni e ioni escono radialmente dal sole formando il vento solare. Su scala galattica i raggi cosmici, che sono, per lo più, protoni ad alta energia, viaggiano attraverso la galassia.

32-1 CORRENTI ELETTRICHE

Gli elettroni liberi all'interno di un conduttore metallico isolato, come l'elemento di cavo illustrato nella figura 1*a*, si muovono di moto casuale come le molecole di un gas racchiuso in un contenitore. La loro agitazione termica non dà luogo ad alcun moto direzionale netto lungo il filo. Se si interseca l'elemento di cavo con un piano immaginario fisso, il flusso medio con cui gli elettroni attraversano il piano in un senso uguaglia il flusso medio con cui gli elettroni attraversano il piano in senso opposto. Il flusso *netto* medio è nullo (per parlare di flusso medio si assume che il tempo di osservazione sia sufficientemente lungo perché le piccole fluttuazioni statistiche nel numero di elettroni che attraversano il piano per unità di tempo possano essere considerate ininfluenti. In alcuni casi queste fluttuazioni sono significative. Per esempio esse possono contribuire al rumore elettrico nei circuiti).

Sia nel caso in cui il conduttore della figura 1*a* sia carico che nel caso in cui sia scarico, non c'è flusso netto medio di carica al suo interno. In assenza di un campo applicato dall'esterno, non vi è alcun campo elettrico nel volume del conduttore né parallelamente alla superficie. Anche se vi è una gran disponibilità di elettroni liberi, su di essi non agisce alcuna forza e non si producono flussi netti medi di carica.

Nella figura 1*b* una batteria viene collegata ai terminali di un conduttore. Se la batteria mantiene la differenza di potenziale V e il cavo ha una lunghezza L, allora, nel conduttore, si stabilisce un campo elettrico di intensità V/L. Questo campo elettrico **E** agisce sugli elettroni e imprime loro un moto netto in senso opposto ad **E**. Se la batteria mantenesse la sua differenza di potenziale nominale a tempo indeterminato, le cariche

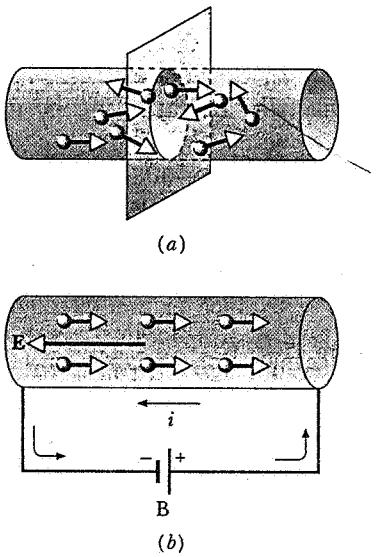


Figura 1 (*a*) In un conduttore isolato gli elettroni si muovono in modo caotico. Il flusso di carica netto attraverso una sezione qualsiasi del conduttore è nullo. (*b*) Una batteria B genera un campo elettrico **E** all'interno del conduttore. Il campo elettrico, a sua volta, imprime agli elettroni un moto netto lungo il conduttore stesso.

ISBN 88-408-0777-2

continuerebbero a circolare indefinitamente. In realtà una batteria può alimentare una corrente elettrica soltanto nel periodo in cui essa è in grado di convertire energia chimica in energia elettrica; ad un certo punto le sue risorse energetiche si esauriscono e la differenza di potenziale nominale non può più essere mantenuta.

L'esistenza di un campo elettrico all'interno di un conduttore non contraddice il paragrafo 29-4, in cui si affermava che E deve essere nullo all'interno di un conduttore. Tale affermazione si riferiva ad uno stato in cui tutti gli spostamenti netti di carica erano nulli (elettrostatica) e si assumeva che il conduttore fosse isolato e che nessuna differenza di potenziale venisse deliberatamente mantenuta da un agente esterno, come una batteria, su due punti arbitrari. In questo capitolo, che riguarda il caso di cariche in moto, questa condizione non è più valida.

Se una carica *netta dq* attraversa una superficie in un intervallo di tempo *dt*, si dice che vi è una *corrente elettrica i*, essendo

$$i = dq/dt. \tag{1}$$

Relativamente alla corrente in un cavo, si assume che *dq* sia la carica che passa attraverso una sezione del cavo stesso in un tempo *dt*.

Si noti che è il flusso di carica *netta dq* che conta, perché si abbia una corrente elettrica. Nella figura 1*a* il numero di elettroni che attraversano il piano in un verso uguaglia il numero di elettroni che attraversano il piano in verso opposto; quantunque vi sia un gran numero di elettroni che attraversano il piano, la corrente è complessivamente nulla. Per fare un altro esempio, il flusso d'acqua che attraversa un tubo per innaffiare non si traduce in una corrente elettrica, in accordo con la definizione data, poiché le molecole elettricamente neutre che scorrono attraverso una sezione del tubo portano cariche positive e negative uguali; perciò il flusso netto di carica è nullo.

L'unità di misura della corrente nel sistema SI è l'*ampere* (abbreviazione: A). In accordo con l'equazione 1 si ha che

$$1 \text{ ampere} = 1 \text{ coulomb/secondo}$$

È utile ricordare che – come già è stato puntualizzato nel paragrafo 27-4 – l'equazione 1 fornisce la definizione di coulomb, dato che l'ampere è una unità fondamentale del sistema SI (vedi appendice A). La determinazione di questa unità fondamentale verrà discussa nel paragrafo 35-4.

La carica netta che attraversa la superficie in un intervallo di tempo finito si ricava integrando la corrente:

$$q = \int i\, dt. \tag{2}$$

Se la corrente è costante nel tempo, la carica q che fluisce nell'intervallo di tempo t determina la corrente secondo la relazione

$$i = q/t. \tag{3}$$

In questo capitolo verranno considerate soltanto correnti costanti nel tempo; le correnti variabili verranno analizzate nel capitolo 33. Quantunque ci siano molti tipi diversi di corrente (alcuni dei quali sono stati menzionati nell'introduzione), in questo capitolo ci si limiterà a considerare il movimento di elettroni all'interno di conduttori solidi.

Si assume che, in condizioni stazionarie, le cariche non si accumulino né vengano rilasciate da una zona dell'elemento di cavo in analisi. Utilizzando la terminologia del paragrafo 18-2, non ci siano sorgenti o pozzi di carica nel cavo. Quando si è fatta questa ipotesi nell'ambito dello studio dei fluidi incomprimibili, si è concluso che il volume di fluido che scorre nell'unità di tempo attraverso una sezione qualsiasi di un tubo è invariante anche se l'area della sezione cambia. Il fluido scorre più velocemente dove il tubo presenta una strozzatura e più lentamente dove il tubo presenta un rigonfiamento, ma la portata volumetrica di fluido che attraversa una qualsiasi sezione fissa del tubo, misurata, per esempio, in litri/secondo, resta costante. Analogamente *la corrente elettrica i è la stessa in tutte le sezioni di un conduttore, anche se l'area della sezione può variare da un punto ad un altro.*

Nei metalli i portatori di carica sono gli elettroni, negli elettroliti o nei conduttori gassosi (plasmi) essi possono anche essere ioni positivi, negativi o entrambi contemporaneamente. È necessaria una convenzione per indicare il verso di una corrente elettrica, poiché le cariche di segni opposti si muovono in senso opposto in un assegnato campo. Una carica positiva che scorre in un senso è equivalente in quasi tutti gli effetti esterni ad una carica negativa che si muove in senso opposto. Quindi, per questioni di semplicità e consistenza algebrica, si adotta la seguente convenzione:

> *Il verso della corrente è quello nel quale si muoverebbero le cariche positive, anche se gli effettivi portatori di carica sono negativi.*

Se i portatori di carica sono negativi, essi si muoveranno, semplicemente, nel verso opposto a quello indicato dalla freccia della corrente (vedi fig. 1*b*).

Nella maggior parte delle circostanze i circuiti elettrici verranno analizzati assumendo il verso della corrente sopra riportato, senza preoccuparsi se gli effettivi portatori di carica siano positivi o negativi. In casi rari (vedi, per esempio, l'effetto Hall nel paragrafo 34-4), si deve tener conto del segno dei portatori di carica.

ISBN 88-408-0777-2

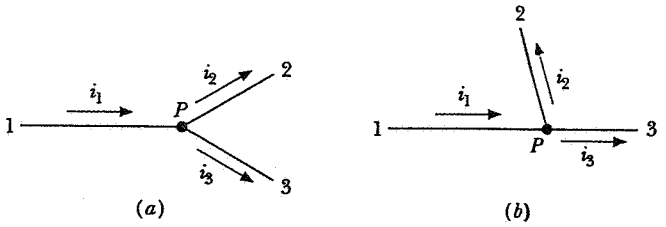


Figura 2 (*a*) Nel punto *P* la corrente i_1 si partisce nelle due correnti i_2 e i_3 in modo che $i_1 = i_2 + i_3$. (*b*) Cambiando l'orientazione dei cavi non cambia il modo in cui le correnti si sommano. Ciò illustra come le correnti obbediscano alle regole delle somme scalari.

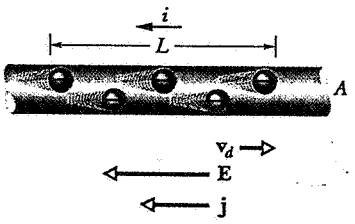


Figura 3 Il campo elettrico sospinge gli elettroni verso destra. La corrente elettrica *i* (il cui verso di scorrimento è convenzionalmente quello delle cariche positive) va verso sinistra. Anche la densità di corrente **j** si riferisce a portatori di carica positivi, cosicchè **j** ed **E** hanno stesso verso.

Anche se le si assegna un verso, la corrente non è un vettore ma uno scalare. La freccia che si traccia per indicare lo scorrimento della corrente indica solamente il senso del flusso di carica attraverso il cavo e *non* deve essere scambiata per un vettore. La corrente non obbedisce alle leggi della somma vettoriale, come si può vedere nella figura 2. La corrente i_1 nel cavo 1 si divide in due parti i_2 e i_3 nei cavi 2 e 3, in modo che $i_1 = i_2 + i_3$. Cambiando la direzione dei cavi non cambia il modo in cui le correnti vanno sommate, come, invece, avverrebbe se si trattasse di vettori.

32-2 DENSITÀ DI CORRENTE

La corrente *i* è una caratteristica specifica di ogni singolo conduttore. È una quantità macroscopica come la massa e il volume di un oggetto o la lunghezza di una bacchetta. Una quantità microscopica direttamente correlata con la corrente è la *densità di corrente* **j**. Essa è una grandezza vettoriale ed è una caratteristica locale di ciascun punto interno a un conduttore, anziché una caratteristica complessiva del conduttore nel suo insieme. Se la corrente è distribuita uniformemente su tutta la sezione trasversa *A* di un conduttore, come illustrato nella figura 3, il modulo della densità di corrente in tutti i punti della sezione è

$$j = i/A. \tag{4}$$

Il vettore **j**, in ciascun punto, ha la direzione e il verso della forza a cui sarebbe soggetto un portatore di carica positivo posto in quel punto. Un elettrone posto in quel punto si muoverebbe in verso opposto a **j**. Nella figura 3, **j** è un vettore costante ed è rivolto orizzontalmente verso sinistra; gli elettroni si sposteranno orizzonalmente verso destra.

In generale, per una particolare superficie (che non deve essere necessariamente piana) che taglia un conduttore, *i* è il flusso del vettore **j** attraverso quella superficie, cioè

$$i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}, \tag{5}$$

dove $d\mathbf{A}$ è l'elemento di superficie e l'integrale è esteso a tutta la superficie in questione. La direzione del vettore $d\mathbf{A}$ è assunta essere perpendicolare all'elemento di superficie e il verso è fissato in modo che l'integrale di $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$ (vedi eq. 5) dia una corrente *i* positiva. L'equazione 4 (scritta come $i = jA$) è un caso particolare dell'equazione 5, in cui la superficie di integrazione è una sezione piana del conduttore, **j** è costante su tutta la sezione ed è, inoltre, perpendicolare ad essa. In generale, comunque, l'equazione 5 può essere applicata ad *ogni* superficie attraverso cui si desideri conoscere la corrente. L'equazione 5 mostra chiaramente che *i* è uno scalare, dato che il termine integrando $\mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$ è uno scalare.

Il campo elettrico esercita una forza ($= -e\mathbf{E}$) sugli elettroni del conduttore, ma questa forza non produce una accelerazione *netta* poiché gli elettroni collidono con gli atomi o gli ioni che costituiscono il conduttore. Questo insieme ordinato di ioni, tenuti insieme da intense forze elastiche di origine elettromagnetica, è chiamato *reticolo* (vedi fig. 11 del cap. 14). L'effetto complessivo delle collisioni consiste in un trasferimento dell'energia cinetica degli elettroni accelerati dal campo al reticolo sotto forma di energia vibrazionale. Gli elettroni acquisiscono una velocità media costante detta *velocità di deriva* v_d avente direzione e verso del vettore $-\mathbf{E}$. C'è una stretta analogia con il caso di una sfera che, immersa in un fluido viscoso, cade in un campo gravitazionale uniforme **g** raggiungendo una velocità finale costante. La forza gravitazionale ($m\mathbf{g}$) che agisce sulla sfera non ne accresce l'energia cinetica, che è costante, a regime; una certa quantità di energia, invece, viene trasferita al fluido nelle collisioni molecolari e produce un lieve aumento di temperatura.

Possiamo calcolare la velocità di deriva v_d dei portatori di carica a partire dalla densità di corrente j. La figura 3 mostra gli elettroni di conduzione in un cavo, in movimento verso destra ad una velocità di deriva costante v_d. Il numero di elettroni di conduzione in un tratto di cavo di lunghezza L è nAL, dove n è il numero di elettroni di conduzione per unità di volume e AL è il volume del tratto di cavo. Una quantità di carica

$$q = (nAL)e$$

esce da questo elemento di cavo attraverso il suo estremo destro in un tempo t dato da

$$t = \frac{L}{v_d}.$$

La corrente i è

$$i = \frac{q}{t} = \frac{nALe}{L/v_d} = nAev_d.$$

Ricavando v_d e ricordando che $j = i/A$ (vedi eq. 4), si ottiene

$$v_d = \frac{i}{nAe} = \frac{j}{ne}. \qquad (6)$$

Dato che sia v_d che j sono vettori, si può riscrivere l'equazione 6 come una equazione vettoriale. Seguendo le convenzioni adottate per il vettore densità di corrente, $\mathbf{j}$ avrà la stessa direzione di $\mathbf{v}_d$ ma verso opposto. L'equazione 6 riscritta in forma vettoriale sarà, quindi,

$$\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}_d. \qquad (7)$$

La figura 3 mostra che, per gli elettroni, i vettori $\mathbf{j}$ e $\mathbf{v}_d$ hanno stessa direzione e versi opposti.

Come verrà chiarito nei seguenti esempi, la velocità di deriva nei normali conduttori è piuttosto bassa, spesso nell'ordine dei cm/s. Al contrario, il moto di agitazione termica degli elettroni di conduzione nei metalli avviene con velocità tipiche intorno ai 10^6 m/s.

Esempio 1 Un estremo di un cavo di alluminio da 2.5 mm di diametro è saldato ad un cavo di rame da 1.8 mm di diametro. Il cavo risultante porta una corrente stazionaria i di 1.3 A. Qual è la densità di corrente in ciascun cavo?

Soluzione Si può ritenere che la densità di corrente sia costante in ciascun cavo eccetto che nei punti prossimi alla saldatura. La densità di corrente è data dall'equazione 4,

$$j = \frac{i}{A}.$$

L'area della sezione ortogonale del cavo di alluminio è

$$A_{Al} = \frac{1}{4}\pi d^2 = (\pi/4)(2.5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2 = 4.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

cosicchè

$$j_{Al} = \frac{1.3\ \text{A}}{4.91 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 2.6 \times 10^5\ \text{A/m}^2 = 26\ \text{A/cm}^2.$$

Come si può verificare facilmente, l'area della sezione ortogonale del cavo di rame è pari a 2.54×10^{-6} m^2, cosicchè

$$j_{Cu} = \frac{1.3\ \text{A}}{2.54 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 5.1 \times 10^5\ \text{A/m}^2 = 51\ \text{A/cm}^2.$$

Il fatto che i cavi siano di materiali diversi non importa in questo contesto.

Esempio 2 Qual è la velocità di deriva degli elettroni di conduzione nel cavo di rame dell'esempio 1?

Soluzione La velocità di deriva è data dall'equazione 6,

$$v_d = \frac{j}{ne}.$$

Nel rame c'è, con ottima approssimazione, mediamente un elettrone di conduzione per atomo. Il numero n di elettroni per unità di volume è perciò uguale al numero di atomi per unità di volume e si può ricavare dalla relazione

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho_m}{M} \quad \text{oppure} \quad \frac{\text{atomi/m}^3}{\text{atomi/mole}} = \frac{\text{massa/m}^3}{\text{massa/mole}}.$$

Qui ρ_m è la densità (di massa) del rame, N_A è il numero di Avogadro e M è la massa di una mole del rame*. Perciò

$$n = \frac{N_A\rho_m}{M} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{elettroni/mole})(8.96 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)}{63.5 \times 10^{-3}\ \text{kg/mole}}$$
$$= 8.49 \times 10^{28}\ \text{elettroni/m}^3.$$

Si ha, quindi,

$$v_d = \frac{5.1 \times 10^5\ \text{A/m}^2}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{elettroni/m}^3)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C/elettrone})}$$
$$= 3.8 \times 10^{-5}\ \text{m/s} = 14\ \text{cm/h}.$$

Si dovrebbe essere in grado di mostrare che, nel cavo di alluminio, $v_d = 2.7 \times 10^{-5}$ m/s = 9.7 cm/h. Si spieghi, in termini fisici, perché la velocità di deriva sia minore nell'alluminio rispetto al rame, anche se i due fili portano la stessa corrente.

Se gli elettroni si spostano con una velocità tanto piccola, perché gli effetti elettrici sembrano essere istantanei, manifestandosi non appena l'interruttore viene chiuso, come quando viene accesa la luce in una stanza? Questo quesito rivela la possibile confusione che può essere fatta non distinguendo tra la velocità di deriva degli elettroni e la velocità con cui si trasmettono lungo i cavi le *variazioni* di campo elettrico. Quest'ultima velocità approssima la velocità della luce. Analogamente, quando si apre il rubinetto per innaffiare i fiori, e il tubo di gomma è pieno d'acqua, un'onda di pressione si propaga lungo il tubo alla velocità del suono in acqua. La velocità con la quale l'acqua si muove nel tubo – misurabile, per esempio, con indicatori colorati – è molto più piccola.

---

* Si usa il pedice m per chiarire che la densità considerata in questo momento è la densità di massa (kg/m^3) e non la densità di carica (C/m^3).

ISBN 88-408-0777-2

Esempio 3 Una striscia di silicio, di larghezza $w = 3.2$ mm e spessore $d = 250$ μm, porta una corrente i di 190 mA. Si assuma di avere un silicio *semiconduttore di tipo n*, «drogato» con una quantità controllata di impurezze di fosforo. Il drogaggio ha l'effetto di aumentare enormemente n, il numero di portatori di carica liberi (elettroni, in questo caso) per unità di volume, rispetto al valore che si ha nel silicio puro. In questo caso $n = 8.0 \times 10^{21}$ m^{-3}. (*a*) Qual è la densità di corrente nella striscia? (*b*) Qual è la velocità di deriva?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 4,

$$j = \frac{i}{wd} = \frac{190 \times 10^{-3}\ \text{A}}{(3.2 \times 10^{-3}\ \text{m})(250 \times 10^{-6}\ \text{m})} = 2.4 \times 10^{5}\ \text{A/m}^2.$$

(*b*) Dall'equazione 6,

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{2.4 \times 10^{5}\ \text{A/m}^2}{(8.0 \times 10^{21}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})} = 190\ \text{m/s}.$$

La velocità di deriva (190 m/s) degli elettroni in questo silicio semiconduttore è molto maggiore della velocità di deriva (3.38×10^{-5} m/s) degli elettroni di conduzione del conduttore metallico di rame dell'esempio 2, anche se le densità di corrente sono simili. Il numero di portatori di carica in questo semiconduttore (8.0×10^{21} m^{-3}) è molto più piccolo del numero di portatori di carica nel conduttore di rame (8.49×10^{28} m^{-3}). Una quantità inferiore di portatori di carica nell'unità di volume (caso del semiconduttore rispetto al rame) deve spostarsi più rapidamente per generare la stessa densità di corrente.

32-3 RESISTENZA, RESISTIVITÀ E CONDUCIBILITÀ

Se si applica la stessa differenza di potenziale tra le estremità di bacchette di rame e di legno geometricamente simili, ne risultano correnti assai diverse. La caratteristica del conduttore che entra in gioco in questo contesto è la sua *resistenza* elettrica. La resistenza di un conduttore tra due punti si determina applicando una differenza di potenziale V tra quei punti e misurando la corrente i che ne risulta. La resistenza R è data da

$$R = V/i. \tag{8}$$

Se V è in volt e i in ampere, la resistenza R è in volt/ampere, a cui viene dato il nome di ohm (abbreviazione: Ω), cosicchè

$$1\ \text{ohm} = 1\ \text{volt/ampere}.$$

Un conduttore la cui funzione in un circuito è quella di fornire una data resistenza è detto *resistore* (simbolo:).

Il flusso di carica attraverso un conduttore è spesso messo in analogia con il flusso d'acqua che scorre attraverso un tubo per effetto della differenza di pressione agli estremi del tubo stesso, stabilita, per esempio, da una pompa. La differenza di pressione è l'analogo della differenza di potenziale tra i morsetti di un conduttore, stabilita, per esempio, da una batteria. La portata d'acqua (litri/secondo) è analoga alla corrente elettrica (coulomb/secondo, o ampere). La portata dell'acqua per una assegnata differenza di pressione è determinata dalla natura del tubo: lunghezza, sezione e asperità all'interno (per esempio, granelli di sabbia). Queste caratteristiche del tubo possono essere messe in analogia con la resistenza di un conduttore.

L'ohm non è una unità fondamentale del sistema SI (vedi appendice A); non esiste alcun oggetto campione la cui resistenza costituisca il riferimento standard dell'ohm. Ciononostante la resistenza è una unità di misura così importante nelle scienze e nella tecnologia che un *riferimento standard pratico* viene conservato al National Institue of Standards and Technology. Dal 1 gennaio 1990 la *definizione dell'ohm* si basa sull'*effetto Hall quantistico* (vedi par. 34-4), un fenomeno preciso ed altamente riproducibile che è indipendente dalle proprietà specifiche di ogni diverso materiale.

Una grandezza legata alla resistenza è la *resistività* ρ, che è caratteristica del materiale anzichè del particolare oggetto; essa è definita dalla relazione

$$\rho = \frac{E}{j}. \tag{9}$$

Le unità di misura di ρ sono quelle del campo E (V/m) divise per quelle della densità di corrente j (A/m^2), e sono equivalenti a $\Omega \cdot$ m. La figura 3 indica che E e j sono vettori; l'equazione 9 può essere riscritta in forma vettoriale come

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}. \tag{10}$$

Le equazioni 9 e 10 valgono soltanto per i materiali *isotropi*, le cui proprietà elettriche sono invarianti in tutte le direzioni.

La resistività del rame è pari a 1.7×10^{-8} $\Omega \cdot$ m; quella del quarzo fuso è circa 10^{16} $\Omega \cdot$ m. Poche proprietà fisiche sono misurabili su un campo così ampio di valori. La tabella 1 elenca le resistività di alcuni materiali comuni.

Alcune sostanze non possono essere classificate facilmente come conduttori o isolanti. I materiali plastici hanno in genere elevata resistività, che porterebbe a classificarli come isolanti. Per esempio i cavi elettrici domestici utilizzano normalmente rivestimenti di plastica come isolante. Tuttavia, «drogando» opportunamente i materiali plastici con particolari sostanze chi-

TABELLA 1 RESISTIVITÀ DI ALCUNI MATERIALI A TEMPERATURA AMBIENTE (20 °C)

Materiale	*Resistività* ρ ($\Omega \cdot$ m)	*Coefficiente termico di resistività* $\bar{\alpha}$ (per °C)
Metalli tipici		
Argento	1.62×10^{-8}	4.1×10^{-3}
Rame	1.69×10^{-8}	4.3×10^{-3}
Alluminio	2.75×10^{-8}	4.4×10^{-3}
Tungsteno	5.25×10^{-8}	4.5×10^{-3}
Ferro	9.68×10^{-8}	6.5×10^{-3}
Platino	10.6×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Manganin[a]	48.2×10^{-8}	0.002×10^{-3}
Semiconduttori tipici		
Silicio puro	2.5×10^{3}	-70×10^{-3}
Silicio di tipo n[b]	8.7×10^{-4}	
Silicio di tipo p[c]	2.8×10^{-3}	
Isolanti tipici		
Vetro	$10^{10} - 10^{14}$	
Polistirolo	$> 10^{14}$	
Quarzo fuso	$\approx 10^{16}$	

[a] Lega specificamente progettata per avere un basso valore di α.
[b] Silicio puro «drogato» con impurezze di fosforo fino ad avere una densità di portatori di carica liberi di $10^{23}/m^3$.
[c] Silicio puro «drogato» con impurezze di alluminio fino ad avere una densità di portatori di carica liberi di $10^{23}/m^3$.

miche, la loro conducibilità può raggiungere quella del rame.

Talvolta si preferisce parlare di *conducibilità* σ di un materiale anziché di resistività. Queste sono grandezze reciproche, legate dalla relazione

$$\sigma = 1/\rho. \tag{11}$$

L'unità di misura di σ nel sistema SI è $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. L'equazione 10 può essere riscritta in termini di conducibilità come

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{12}$$

Conoscendo la resistività ρ di un materiale, si può calcolare la resistenza R di un particolare pezzo di quel materiale. Si consideri un conduttore cilindrico avente sezione ortogonale di area A e lunghezza L, attraverso cui scorra una corrente stazionaria i, avendo applicato una differenza di potenziale V tra i suoi terminali (vedi fig. 4). Se le sezioni ortogonali del cilindro, in corrispondenza dei suoi terminali, sono superfici equipotenziali, il campo elettrico e la densità di corrente saranno costanti in tutti i punti del cilindro e pari a

$$E = \frac{V}{L} \quad \text{e} \quad j = \frac{i}{A}.$$

* Vedi *Plastic that Conduct Electricity*, di Richard B. Kaner e Alan G. MacDiarmid, «Scientific American», febbraio 1988, pag. 106. (Trad. it. *Materie plastiche che conducono l'elettricità* «Le Scienze», 236:80).

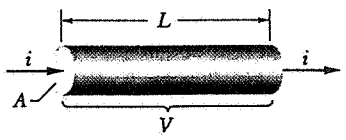


Figura 4 Una differenza di potenziale V è applicata ad un conduttore cilindrico di lunghezza L e sezione ortogonale A. Ne risulta una corrente i.

La resistività ρ è

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{V/L}{i/A}.$$

Ma V/i è la resistenza R, per cui

$$R = \rho \frac{L}{A}. \tag{13}$$

Vogliamo far notare che l'equazione 13 si applica soltanto a conduttori omogenei e isotropi con sezione ortogonale uniforme, soggetti a un campo elettrico uniforme.

Esempio 4 Un blocco di ferro ha le seguenti dimensioni: 1.2 cm × 1.2 cm × 15 cm. (*a*) Qual è la resistenza del blocco misurata tra le due facce quadrate? (*b*) Qual è la resistenza tra due facce rettangolari opposte? La resistività del ferro a temperatura ambiente è $9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.

Soluzione (*a*) L'area di ciascuna faccia quadrata è $(1.2 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$, cioè $1.44 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. Dall'equazione 13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(0.15\ \text{m})}{1.44 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 1.0 \times 10^{-4}\ \Omega = 100\ \mu\Omega.$$

(*b*) L'area di una faccia rettangolare è $(1.2 \times 10^{-2}\ \text{m})(0.15\ \text{m})$ cioè $1.80 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$. Dall'equazione 13,

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(9.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})(1.2 \times 10^{-2}\ \text{m})}{1.80 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} = 6.5 \times 10^{-7}\ \Omega = 0.65\ \mu\Omega.$$

Si assume in ciascun caso che le superfici su cui viene applicata la differenza di potenziale, usando il blocco come un resistore, siano equipotenziali. Altrimenti l'equazione 13 non sarebbe valida.

Quantità microscopiche e macroscopiche *(Facoltativo)*

V, i ed R sono quantità *macroscopiche*, relative ad un particolare oggetto o ad una regione estesa. Le corrispondenti quantità microscopiche sono $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$ e ρ (o σ); queste sono grandezze puntuali, che assumono un valore in ciascun punto del corpo in esame. Le quantità macroscopiche si correlano tra loro in base all'equazione 8 ($V = iR$) e le quantità microscopiche in base alle equazioni 9, 10 e 12.

ISBN 88-408-0777-2

Le quantità macroscopiche possono essere ricavate integrando le quantità microscopiche, facendo uso delle relazioni, già introdotte,

$$i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}$$

e

$$V_{ab} = -V_{ba} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

L'integrale della corrente è un integrale di superficie, esteso su una qualunque sezione trasversa del conduttore. L'integrale del campo è un integrale di linea esteso ad una linea arbitraria che collega due superfici equipotenziali individuate da a e b. Nel caso di un lungo filo collegato ad una batteria, la superficie equipotenziale a può essere scelta come una sezione ortogonale prossima al morsetto positivo della batteria e la superficie equipotenziale b può essere scelta come una sezione ortogonale prossima al morsetto negativo della batteria.

Si può esprimere la resistenza di un conduttore tra a e b in funzione delle quantità microscopiche, dividendo le due precedenti equazioni:

$$R = \frac{V_{ab}}{i} = \frac{\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{\int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{A}}.$$

Se il conduttore è un lungo cilindro avente sezione ortogonale di area A e lunghezza L e se i punti a e b sono sui suoi estremi, quest'ultima equazione si riduce a

$$R = \frac{EL}{jA} = \rho \frac{L}{A},$$

che coincide con l'equazione 13.

Le quantità macroscopiche V, i ed R sono di interesse primario quando si effettuano misure elettriche su reali oggetti conduttori. Queste sono quantità i cui valori vengono indicati dai più comuni strumenti di misura. Le quantità microscopiche $\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$ e ρ sono di primaria importanza quando si studia il comportamento fondamentale della materia (piuttosto che di oggetti specifici), come nell'area di ricerca della fisica dello *stato solido* (o *materia condensata*). Nel paragrafo 32-5 si descriverà, per esempio, la *resistività* dal punto di vista atomico e non la *resistenza* di un particolare oggetto metallico. Le quantità microscopiche sono anche importanti quando si studia il comportamento interno di oggetti conduttori aventi forma irregolare. ■

La dipendenza della resistività dalla temperatura *(Facoltativo)*

La figura 5 mostra, in sintesi, i risultati di alcune misure sperimentali di resistività del rame a diverse temperature. Nell'uso pratico di questo tipo di dati, sarebbe comodo esprimerli nella forma di una equazione. In un limitato intervallo di temperature, la relazione tra la resistività e la temperatura è praticamente lineare. Si possono interpolare i dati con una linea retta, in una regione selezionata della figura 5. Scegliendo un punto di riferimento, come quello indicato (T_0, ρ_0) nella figura, si può esprimere la resistività ρ ad ogni arbitraria temperatura T attraverso l'equazione empirica della retta tracciata nella figura 5, cioè

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \overline{\alpha}(T - T_0). \qquad (14)$$

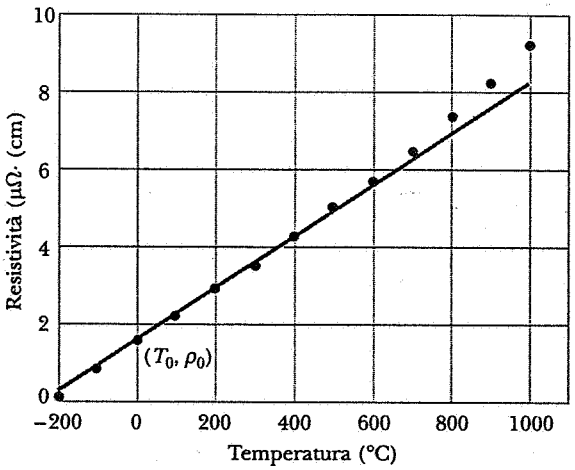


Figura 5 I punti indicano misure sperimentali della resistività del rame in funzione della temperatura. Su uno specificato intervallo di temperature la variazione della resistività in funzione di T può essere approssimata con una linea retta; la retta mostrata, per esempio, interpola i dati da −100 °C a 400 °C.

[Questa espressione è molto simile a quella della dilatazione termica lineare ($\Delta L = \overline{\alpha} L \Delta T$), che è stata introdotta nel par. 22-5]. Il coefficiente angolare di questa retta è ($\rho_0 \overline{\alpha}$). Ricavando ($\overline{\alpha}$) dall'equazione 14, si ottiene

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0}, \qquad (15)$$

La quantità $\overline{\alpha}$ è il *coefficiente termico medio* della resistività, nell'intervallo di temperature comprese tra i punti utilizzati per determinare la pendenza della retta. Si può definire, più in generale, il coefficiente termico della resistività come

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT}, \qquad (16)$$

che è la variazione percentuale della resistività $d\rho/\rho$ divisa per la variazione della temperatura dT. Cioè α esprime la dipendenza della resistività dalla temperatura *ad una particolare temperatura*, mentre $\overline{\alpha}$ esprime la dipendenza media *su un particolare intervallo*. Il coefficiente α dipende, in generale, dalla temperatura.

In molti casi pratici, l'equazione 14 fornisce risultati che sono sufficientemente accurati. Alcuni valori tipici di $\overline{\alpha}$ sono elencati nella tabella 1. Quando occorre una alta precisione, come nell'uso di termometri a resistenza di platino per la misura della temperatura (vedi par. 22-3), l'approssimazione lineare non è più sufficiente. In questo caso bisogna aggiungere i termini proporzionali a $(T - T_0)^2$ e $(T - T_0)^3$ nell'equazione 14 per aumentare la precisione. I coefficienti di questi termini addizionali devono essere determinati empiricamente, in analogia al termine $\overline{\alpha}$ dell'equazione 14. ■

32-4 LA LEGGE DI OHM

Si selezioni un particolare campione di materiale conduttore, si applichi ad esso una differenza di potenzia-

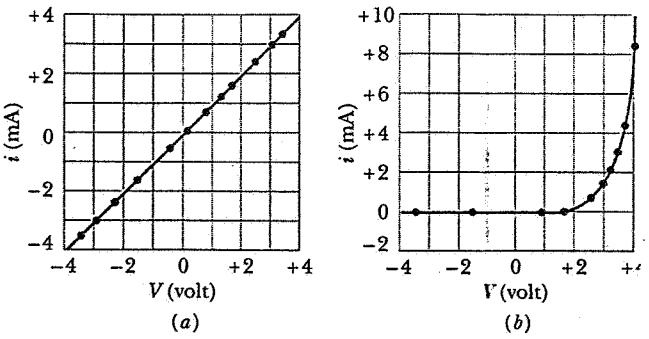


Figura 6 (*a*) Diagramma corrente-tensione per un materiale che obbedisce alla legge di Ohm, specificamente un resistore da 1000 Ω. (*b*) Diagramma corrente-tensione per un materiale che non obbedisce alla legge di Ohm, specificamente un diodo a giunzione *pn*.

le e si misuri la corrente risultante. Ripetendo la misura per vari valori della differenza di potenziale, si evidenzino, di volta in volta, i valori sperimentali in un diagramma come quello della figura 6*a*. I punti, chiaramente, si dispongono lungo una linea retta, da cui si deduce che il rapporto V/i (l'inverso del coefficiente angolare della retta) è costante. La resistenza dell'oggetto in esame è costante ed è indipendente dalla differenza di potenziale applicata o dalla corrente che vi scorre. Si noti che la retta prosegue anche per differenze di potenziale e correnti negative.

In questo caso si dice che il materiale obbedisce alla *legge di Ohm*:

> *Un oggetto conduttore obbedisce alla legge di Ohm se la resistenza tra due punti qualsiasi è indipendente dal valore e dalla polarità della differenza di potenziale applicata.*

Un materiale o un elemento circuitale che obbedisce alla legge di Ohm è detto *ohmico*.

Nei circuiti elettronici esistono dispositivi che *non* obbediscono alla legge di Ohm. Un esempio di diagramma corrente-tensione relativo ad un dispositivo non ohmico (una giunzione *pn*) è illustrato nella figura 6*b*. Si noti che la corrente non aumenta linearmente con la tensione ed anche che il dispositivo non si comporta simmetricamente per differenze di potenziale positive e negative.

È il caso di sottolineare che la relazione $V = iR$ *non* implica necessariamente che valga la legge di Ohm. Un conduttore obbedisce alla legge di Ohm soltanto se il diagramma di V in funzione di i è lineare, cioè se R è indipendente da V e da i. La relazione $R = V/i$ resta la definizione generale di resistenza di un conduttore sia nel caso in cui la legge di Ohm valga che nel caso in cui non valga.

L'equivalente microscopico della relazione $V = iR$ è l'equazione 10, $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j}$. Si dice che un materiale conduttore obbedisce alla legge di Ohm se il diagramma di E in funzione di j è lineare, cioè se la resistività ρ è indipendente da E e da j. La legge di Ohm è una proprietà specifica di alcuni materiali; non è una legge generale dell'elettromagnetismo come invece, per esempio, è la legge di Gauss.

Analogia tra la corrente e il flusso di calore

(Facoltativo)

C'è una stretta analogia tra il flusso di carica alimentato da una differenza di potenziale e il flusso di calore alimentato da una differenza di temperatura. Si consideri una lastra sottile elettricamente conduttrice, avente spessore Δx e area A. Una differenza di potenziale ΔV venga mantenuta tra le facce opposte. La corrente i è data dalle equazioni 8 ($i = V/R$) e 13 ($R = \rho L/A$), cioè

$$i = \frac{V_a - V_b}{R} = \frac{(V_a - V_b)A}{\rho L} = -\frac{(V_b - V_a)A}{\rho \Delta x}.$$

Nel caso limite in cui la lastra abbia spessore dx, l'espressione precedente diventa

$$i = -\rho^{-1} A \frac{dV}{dx}$$

cioè, sostituendo l'inverso della resistività con la conduttività σ,

$$\frac{dq}{dt} = -\sigma A \frac{dV}{dx}. \qquad (17)$$

Il segno meno dell'equazione 17 indica che una carica positiva scorre nella direzione di V decrescente, cioè dq/dt è positivo quando dV/dx è negativo.

La analoga equazione del calore (vedi par. 25-7) è

$$\frac{dQ}{dt} = -kA \frac{dT}{dx}, \qquad (18)$$

in cui k, la conducibilità termica, corrisponde a σ e dT/dx, il gradiente di temperatura, corrisponde a dV/dx, il gradiente di potenziale. Nei metalli puri c'è qualcosa di più che una analogia matematica formale tra le equazioni 17 e 18. L'equazione del calore e quella della carica descrivono entrambe fenomeni legati agli elettroni liberi all'interno del metallo; empiricamente un buon conduttore elettrico (per esempio l'argento) è anche un buon conduttore di calore e la conducibilità elettrica σ è direttamente correlata con la conducibilità termica k. ■

32-5 LA LEGGE DI OHM DAL PUNTO DI VISTA MICROSCOPICO

Come già precisato in precedenza, la legge di Ohm non è una legge fondamentale dell'elettromagnetismo poiché dipende dalle proprietà del mezzo conduttore. La legge è formalmente molto semplice ed è curioso che molti materiali la seguano con grande precisione, mentre altri materiali non la seguono affatto. Cerchia-

ISBN 88-408-0777-2

mo di capire perché i metalli seguano la legge di Ohm, che può essere scritta nella forma microscopica (vedi eq. 10) $\mathbf{E} = \rho\mathbf{j}$.

In un metallo gli elettroni di valenza non si legano ad atomi singoli ma sono liberi di muoversi nel reticolo e sono detti *elettroni di conduzione*. Nel rame c'è un elettrone di conduzione per ogni atomo, mentre gli altri 28 elettroni restano legati al nucleo formando, con il nucleo stesso, ioni fissi.

La teoria della conduzione elettrica nei metalli è spesso basata sul *modello ad elettroni liberi*, nel quale (in prima approssimazione) si assume che gli elettroni di conduzione siano liberi di muoversi in tutto il volume del materiale conduttore, in modo simile alle molecole di un gas racchiuso in un contenitore. Infatti l'insieme degli elettroni di conduzione viene chiamato, talvolta, *gas elettronico*. Come vedremo, comunque, non si può trascurare l'effetto degli ioni fissi nei punti reticolari su questo «gas».

La distribuzione di velocità classica maxwelliana (vedi par. 24-3) applicata al gas di elettroni, suggerirebbe che gli elettroni di conduzione abbiano una larga distribuzione di velocità che si estende da zero all'infinito, con un ben preciso valor medio. Invece, studiando il caso degli elettroni non si possono trascurare gli effetti quanto-meccanici che portano a sostanziali differenze rispetto al caso dei gas classici. Nella distribuzione quantistica (vedi fig. 16 del cap. 24) gli elettroni che contribuiscono effettivamente alla conduzione elettrica sono concentrati in un intervallo di energie cinetiche, e quindi di velocità, molto stretto. Con ottima approssimazione, si può assumere che gli elettroni si muovano con una velocità media uniforme. Nel caso del rame questa velocità è intorno a $\overline{v} = 1.6 \times 10^6$ m/s. Inoltre, mentre la velocità media maxwelliana dipende fortemente dalla temperatura, la velocità efficace ottenuta dalla distribuzione quantistica, è praticamente indipendente dalla temperatura.

In assenza di campo elettrico gli elettroni si muovono casualmente, analogamente alle molecole di un gas in un contenitore. Occasionalmente un elettrone collide con uno ione del cristallo, subendo, nel processo di interazione, una brusca variazione di direzione del moto. Come nel caso delle collisioni delle molecole di un gas, si può parlare di libero cammino medio λ e di tempo medio τ per indicare la distanza media percorsa ed il tempo medio tra una collisione e la successiva (le collisioni tra elettroni sono rare e non influiscono sulle proprietà elettriche del conduttore).

In un cristallo metallico ideale (privo di difetti e impurità) a 0 K, non ci sarebbero collisioni elettrone-reticolo, in accordo con le previsioni della fisica quantistica; cioè $\lambda \to \infty$ se $T \to 0$ K nei cristalli ideali. Le collisioni avvengono nei cristalli reali poiché (1) gli ioni reticolari ad una temperatura T vibrano intorno alla loro posizione di equilibrio in modo casuale; (2) possono essere presenti alcune impurezze, cioè atomi estranei e (3) il cristallo può contenere imperfezioni reticolari, come atomi assenti e atomi posizionati male. Di conseguenza la resistività di un metallo può essere accresciuta (1) innalzando la temperatura, (2) aggiungendo piccole quantità di impurezze e (3) sottoponendo il cristallo a sforzi meccanici intensi al fine di aumentare il numero di imperfezioni cristalline.

Quando si applica un campo elettrico in un metallo, gli elettroni modificano il loro moto casuale in modo tale da derivare lentamente in senso opposto al campo con una velocità di deriva v_d. La velocità di deriva è in genere molto più piccola della velocità media $\overline{v}$ (di un fattore anche pari a 10^{10}; vedi esempio 2). La figura 7 dà un'idea della relazione tra queste due velocità. La linea continua rappresenta un possibile cammino casuale seguito da un elettrone in assenza di campo elettrico; l'elettrone si muove da x ad y, incappando in sei collisioni lungo il cammino. La linea tratteggiata mostra come questo stesso evento potrebbe essere modificato in presenza di un campo elettrico $\mathbf{E}$. Si noti che l'elettrone raggiunge il punto y' anziché il punto y. Tracciando la figura 7 si è assunto che la velocità di deriva v_d fosse $0.02\,\overline{v}$; in realtà, è più probabile che sia $10^{-10}\,\overline{v}$, per cui la «deriva» illustrata nella figura è esagerata.

Si può calcolare la velocità di deriva v_d in funzione del campo elettrico E applicato e di $\overline{v}$ e λ. Quando in un metallo viene imposto un campo E, un generico elettrone è soggetto ad una forza eE, la quale gli impartisce una accelerazione a data dalla seconda legge di Newton,

$$a = \frac{eE}{m}.$$

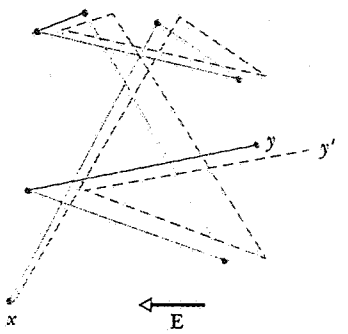


Figura 7 La linea grigia rappresenta il cammino di un elettrone che si muove da x a y, subendo sei collisioni. La linea verde mostra quale cammino *avrebbe potuto* seguire in presenza di un campo elettrico E. Si noti il graduale ma continuo spostamento nel verso di $-\mathbf{E}$ (in realtà la linea tratteggiata dovrebbe essere lievemente incurvata per rappresentare l'andamento parabolico della traiettoria seguita dall'elettrone tra una collisione e l'altra).

Si consideri un elettrone che ha appena subito una collisione con uno ione reticolare. La collisione, in generale, annulla momentaneamente la tendenza alla deriva, cosicchè l'elettrone – subito dopo la collisione – acquista una direzione di moto casuale. Per tutto il tempo che precede la collisione successiva la componente della velocità dell'elettrone nella direzione del campo cresce. L'incremento di velocità medio è pari a $a(\lambda/\bar{v})$ cioè $a\tau$, essendo τ il tempo medio tra una collisione e la successiva. Questa variazione di velocità è la velocità di deriva v_d, cioè*

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \tag{19}$$

v_d può anche essere espressa in termini di densità di corrente (vedi eq. 6),

$$v_d = \frac{j}{ne} = \frac{eE\tau}{m}.$$

Combinando quest'ultima espressione con l'equazione 9 ($\rho = E/j$), si ottiene, infine,

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}. \tag{20}$$

Si noti che m, n ed e in questa equazione sono costanti. Perciò l'equazione 20 può essere letta come una conferma teorica del fatto che i metalli obbediscono alla legge di Ohm, ammesso che il tempo medio τ sia anch'esso costante. In particolare bisogna mostrare che τ non dipende dal campo elettrico applicato E. In questo caso ρ non dipende da E; questo (vedi par. 32-4) è il criterio per dire che il materiale obbedisce alla legge di Ohm. La grandezza τ dipende dalla distribuzione di velocità degli elettroni di conduzione. Si è visto che questa distribuzione dipende molto poco dal campo elettrico applicato, dato che $\bar{v}$ è dell'ordine di 10^6 m/s e v_d (vedi esempio 2) è dell'ordine di 10^{-4} m/s, cioè 10^{10} volte più piccola. Qualunque sia il valore di τ (per esempio nel rame a 20 °C) in assenza di campo, esso non varierà significativamente quando viene applicato un campo. Perciò la parte a destra dell'equazione 20 è indipendente da E (e quindi ρ è indipendente da E) e il materiale, di conseguenza, obbedisce alla legge di Ohm.

Esempio 5 (*a*) Qual è il tempo medio τ tra due collisioni successive per gli elettroni di conduzione del rame? (*b*) Qual è il libero cammino medio λ? Si assuma una velocità efficace $\bar{v}$ di 1.6×10^6 m/s.

Soluzione (*a*) Dall'equazione 20 si ha che

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$
$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.69 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$
$$= 2.48 \times 10^{-14}\ \text{s}.$$

Il valore di n, il numero di elettroni di conduzione per unità di volume nel rame, è stato ricavato nell'esempio 2; il valore di ρ è riportato nella tabella 1.

(*b*) Il libero cammino medio è definito come

$$\lambda = \tau\bar{v} = (2.48 \times 10^{-14}\ \text{s})(1.6 \times 10^6\ \text{m/s})$$
$$= 4.0 \times 10^{-8}\ \text{m} = 40\ \text{nm}.$$

Esso è circa 150 volte la distanza tra due ioni adiacenti nel reticolo cristallino del rame. Una trattazione completa, basata sulla fisica quantistica, rivela che non si può considerare una «collisione» come una interazione diretta tra l'elettrone e lo ione. In realtà si tratta di una interazione tra l'elettrone e la vibrazione termica del reticolo, una imperfezione del reticolo o un atomo di impurezze. Un elettrone può viaggiare in un reticolo «ideale» (cioè un reticolo geometricamente «perfetto» vicino allo zero assoluto) molto liberamente. In queste condizioni sono stati osservati liberi cammini medi di 10 cm.

32-6 TRASFERIMENTI DI ENERGIA IN UN CIRCUITO ELETTRICO

La figura 8 mostra un circuito costituito da una batteria B collegata ad una «scatola nera». Una corrente stazionaria i scorre nei cavi di collegamento e una differenza di potenziale V_{ab} si stabilisce tra i morsetti a e b. La scatola può contenere un resistore, un motore, un accumulatore ed altri elementi.

Il morsetto a, collegato al polo positivo della batteria, ha un potenziale più alto del morsetto b. L'energia potenziale di una carica dq che attraversa la scatola

* Si potrebbe pensare che l'equazione 19 debba, in realtà, essere scritta come $v_d = \frac{1}{2}a\tau$, pensando che, essendo $a\tau$ la velocità *finale*, la velocità *media* deve essere la metà. Il fattore aggiuntivo $\frac{1}{2}$ sarebbe corretto riferendosi ad un singolo elettrone che percorre un cammino medio tra due collisioni successive, ed assumendo la sua velocità di deriva pari alla media delle velocità assunte nel tempo τ tra le due collisioni. Tuttavia la velocità di deriva è proporzionale alla densità di corrente j e deve essere calcolata come la media delle velocità di *tutti* gli elettroni considerati nello stesso istante. Per ciascun elettrone la velocità in un qualsiasi istante è at, dove t è il tempo trascorso dall'ultima collisione dello stesso elettrone. Dato che l'accelerazione a è la stessa per tutti gli elettroni, il valore medio di at in un dato istante è $a\tau$, dove τ è il tempo medio trascorso dall'ultima collisione, che coincide con il tempo medio tra due collisioni successive. Per una discussione su questo punto vedi *Electricity and Magnetism*, seconda edizione, di Edward Purcell (McGraw-Hill, 1985), paragrafo 4.4. Si veda anche *Drift Speed and Collision Time*, di Donald E. Tilley, «American Journal of Physics», giugno 1976, pag. 597.

 ISBN 88-408-0777-2

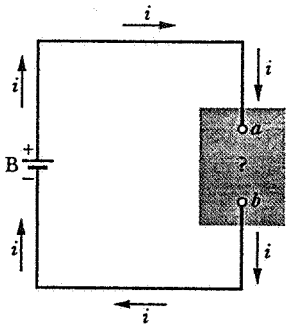


Figura 8 La batteria B genera una corrente i in un circuito che contiene una «scatola nera», cioè un dispositivo ignoto.

dal punto a al punto b, decresce di una quantità pari a dqV_{ab} (vedi par. 30-3). Il principio di conservazione dell'energia dice che l'energia elettrica persa dalla carica deve essere trasferita alla scatola in una qualche forma. La forma in cui questa energia viene acquisita dalla scatola dipende da ciò che vi è contenuto. In un intervallo di tempo dt l'energia trasferita all'interno della scatola è quindi

$$dU = dq\ V_{ab} = i\ dt\ V_{ab}.$$

Da cui consegue che la *velocità* di trasferimento di energia, o potenza P, è

$$P = \frac{dU}{dt} = iV_{ab}. \tag{21}$$

Se il dispositivo contenuto nella scatola è un motore, l'energia verrà resa in gran parte sotto forma di lavoro meccanico; se il dispositivo è un accumulatore in fase di ricarica, l'energia verrà in gran parte immagazzinata sotto forma di energia chimica.

Se il dispositivo è un resistore, l'energia apparirà in esso sotto forma di energia interna (associata al moto atomico e osservata, probabilmente, come un incremento di temperatura). Per meglio intendere ciò, si consideri una pietra di massa m che cade da un'altezza h. Essa, durante la caduta, perde la sua energia potenziale gravitazionale mgh. Se la pietra precipita nel vuoto o, più realisticamente, in aria, questa energia si trasforma in energia cinetica. Se la pietra sprofonda nel mare, invece, la sua velocità di caduta diviene presto costante, il che significa che la sua energia cinetica non aumenta più. L'energia potenziale, che continua ad essere ceduta dalla pietra in modo uniforme, acquista la forma di energia interna della stessa pietra e dell'acqua circostante. È l'attrito viscoso dell'acqua sulla superficie della pietra che ne blocca l'accelerazione; l'energia potenziale gravitazionale si trasforma in energia interna proprio sulla superficie della pietra.

Il cammino di un elettrone in un resistore è molto simile a quello della pietra in acqua. Mediamente gli elettroni si muovono con velocità di deriva v_d costante e, di conseguenza, non acquistano energia cinetica. Essi perdono energia potenziale elettrica nelle collisioni con gli atomi del resistore. L'effetto di questo processo è un aumento dell'ampiezza delle vibrazioni atomiche; ciò corrisponde, su scala macroscopica, ad un aumento di temperatura. Successivamente ci può essere un flusso di energia uscente dal resistore nella forma di calore, se l'ambiente è ad una temperatura minore di quella del resistore.

Nel caso di un resistore si possono combinare le equazioni 8 ($R = V/i$) e 21 ottenendo

$$P = i^2R \tag{22}$$

e

$$P = \frac{V^2}{R}. \tag{23}$$

Si noti che l'equazione 21 descrive trasferimenti di energia di *tutti* i tipi; le equazioni 22 e 23 si applicano, invece, soltanto al caso del trasferimento di energia elettrica in energia interna in un resistore. Le equazioni 22 e 23 sono conosciute sotto il nome di *legge di Joule*, e il fenomeno del trasferimento dell'energia dal resistore all'ambiente circostante sotto forma di calore è detto dissipazione per *effetto Joule*. Questa legge è una applicazione del principio di conservazione dell'energia al caso particolare in cui l'energia elettrica viene trasferita ad un resistore sotto forma di energia interna.

L'unità di misura della potenza suggerita dall'equazione 21 è il volt-ampere che, come si vede esplicitando il volt (joule/coulomb) e l'ampere (coulomb/secondo), è equivalente al watt:

$$1\ \text{volt} \cdot \text{ampere} = 1\,\frac{\text{joule}}{\text{coulomb}} \cdot \frac{\text{coulomb}}{\text{secondo}} = 1\,\frac{\text{joule}}{\text{secondo}} = 1\ \text{watt}.$$

Il watt è stato introdotto come unità di misura della potenza nel paragrafo 7-5.

Esempio 6 Si consideri un pezzo di cavo per riscaldamento, costituito da una lega contenente nickel-cromo-ferro, avente una resistenza R di 72 Ω. Esso venga collegato ad una linea da 120 V. In quali circostanze il cavo dissiperà più calore? (*a*) Esso viene collegato alla linea per tutta la sua lunghezza. (*b*) il cavo viene tagliato in due e le due metà vengono connesse alla linea in parallelo.

Soluzione (*a*) La potenza P dissipata dall'intero cavo è, in base all'equazione 23,

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{(120\ \text{V})^2}{72\ \Omega} = 200\ \text{W}.$$

(*b*) La potenza per un cavo di metà lunghezza (e quindi metà resistenza) è

$$P' = \frac{V^2}{\frac{1}{2}R} = \frac{(120\ V)^2}{36\ \Omega} = 400\ \text{W}.$$

Ci sono due metà connesse in parallelo, cosicchè la potenza assorbita dalla coppia è 800 W, quattro volte di più del singolo cavo. Ciò sembra suggerire che si potrebbe acquistare un cavo da riscaldamento, tagliarlo a metà, e ricollegarlo in modo da avere un effetto di riscaldamento quadruplo. Perché questa non è una buona idea?

32-7 I SEMICONDUTTORI *(Facoltativo)*

Una classe di materiali, detti *semiconduttori* si colloca a metà tra i conduttori e gli isolanti, per le proprietà di conduzione dell'elettricità. Tra i vari elementi il silicio e il germanio sono comuni esempi di semiconduttori a temperatura ambiente. Una importante proprietà dei semiconduttori è che la loro conducibilità può essere variata enormemente da fattori esterni, come variazioni nella temperatura, nel potenziale applicato, nella luce incidente. Si può vedere nella tabella 1 che, quantunque il silicio puro sia un cattivo conduttore, una bassa concentrazione di atomi di impurezze (aggiunti al silicio puro nelle proporzioni di un atomo di impurezze per 10^6 atomi di silicio) può far variare la conducibilità di sei o sette ordini di grandezza. Si può anche osservare che la conducibilità del silicio è di almeno un ordine di grandezza più sensibile alle variazioni di temperatura di quella di un comune conduttore. In virtù di queste proprietà, i semiconduttori hanno vasta applicazione come dispositivi nei circuiti di controllo e commutazione e sono ora divenuti componenti fondamentali nei circuiti integrati e nelle memorie dei calcolatori.

Per descrivere le proprietà di conduttori, isolanti e semiconduttori nei dettagli microscopici è necessario ricorrere all'applicazione dei principi della fisica quantistica. Tuttavia si può arrivare a una comprensione qualitativa delle differenze tra conduttori, isolanti e semiconduttori in base alla figura 9, che mostra gli stati di energia che rappresentano tipicamente gli elettroni nei conduttori, nei semiconduttori e negli isolanti. Gli elettroni possono avere soltanto alcune energie permesse, che sono discrete o *quantizzate* (vedi par. 8-8) e che si raggruppano in *bande*. All'interno di una banda gli stati di energia permessi, che sono tanto vicini gli uni agli altri da costituire virtualmente un continuo, possono essere *occupati* (gli elettroni possiedono le energie permesse) o *vuoti* (nessun elettrone possiede quelle energie). Tra le bande c'è un *intervallo di energie proibite*, nel quale non vi sono stati che possano essere occupati dagli elettroni. Un elettrone può saltare da uno stato occupato ad uno stato libero. Alle temperature normali, la distribuzione di energia interna consente agli elettroni di saltare su stati di energia più alti.

La figura 9*a* illustra le bande di energia di un conduttore. La banda di valenza, che è la più alta banda occupata dagli elettroni, è soltanto parzialmente occupata, cosicchè gli elettroni hanno molti livelli vuoti sui quali possono facilmente saltare. L'applicazione di un campo elettrico può spingere gli elettroni a compiere questi piccoli salti e ad acquisire una energia cinetica per dare luogo ad una corrente. Questa libertà di movimento degli elettroni è ciò che rende un materiale conduttore.

La figura 9*b* mostra le bande che potrebbero caratterizzare un semiconduttore, come il silicio. A temperature molto basse la banda di valenza è completamente occupata e la banda più alta (di conduzione) è completamente vuota. Alle temperature ordinarie c'è una probabilità piccola che un elettrone della banda di valenza abbia sufficiente energia per poter scavalcare l'intervallo di energie proibite e approdare, così, agli stati vuoti della banda di conduzione. La probabilità che avvenga tale salto dipende dalla distribuzione di energia, che, in accordo con l'equazione 27 del capitolo 24, è proporzionale al fattore $e^{-\Delta E/kT}$, essendo ΔE l'intervallo di energia proibito. Assumendo $\Delta E = 0.7$ eV e $kT = 0.025$ eV a temperatura ambiente, il fattore esponenziale vale $7 \cdot 10^{-13}$. Quantunque questo sia un numero piccolo, ci sono così tanti elettroni disponibili nel materiale semiconduttore (circa 10^{23} per grammo), che un numero non trascurabile sarà nella banda di conduzione (circa 10^{11} per grammo). In questa banda gli elettroni possono muoversi facilmente dagli stati occupati agli stati vuoti vicini accrescendo così la capacità del semiconduttore di

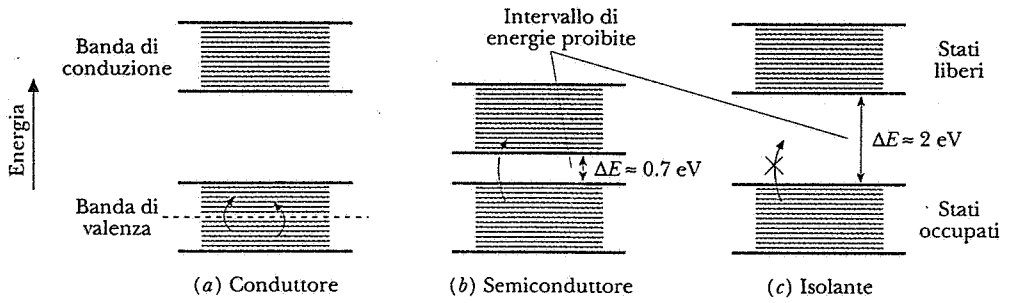


Figura 9 (*a*) Bande di energia caratteristiche di un conduttore. Al di sotto della linea tratteggiata quasi tutti gli stati sono occupati, mentre al di sopra sono quasi tutti liberi. Gli elettroni possono facilmente saltare da stati occupati a stati liberi, come indicato dalle frecce. (*b*) In un semiconduttore la linea che separa gli stati occupati dagli stati liberi si colloca nell'intervallo di energie proibite. La conducibilità elettrica dipende dal numero di elettroni che riescono a saltare nella banda di conduzione. (*c*) Le bande di energia di un isolante assomigliano a quelle di un semiconduttore; la differenza principale sta nell'ampiezza dell'intervallo di energie proibite. Alle temperature ordinarie c'è una probabilità nulla che un elettrone salti negli stati vuoti della banda di conduzione.

ISBN 88-408-0777-2

trasportare carica elettrica (nel processo di salto nella banda di conduzione, gli elettroni lasciano dei *buchi* nella banda di valenza. Altri elettroni nella banda di valenza possono saltare in questi buchi contribuendo anch'essi alla conducibilità).

Un'altra differenza tra i conduttori e i semiconduttori risiede nella differenza tra i coefficienti termici della resistività. I metalli non sono conduttori perfetti per la imperfezione della loro struttura reticolare causata dalla presenza di impurezze o difetti nel reticolo. La vibrazione degli ioni reticolari attorno alla loro posizione di equilibrio contribuisce notevolmente nel comportamento resistivo dei metalli. Dato che questo effetto aumenta con la temperatura, la resistività dei metalli aumenta con la temperatura. Lo stesso effetto, naturalmente, si ha anche nei semiconduttori, ma esso è decisamente superato da un effetto opposto di *decrescita* della resistività con la temperatura. All'aumentare della temperatura un numero più consistente di elettroni acquisisce una energia sufficiente per scavalcare l'intervallo di energie proibite e, così, raggiunge la banda di conduzione, aumentando la conducibilità del materiale oppure, il che è lo stesso abbassandone la resistività. Come mostrato nella tabella 1, il silicio (in contrasto con i metalli elencati) ha un coefficiente termico della resistività *negativo*.

La figura 9*c* mostra una tipica configurazione di bande di un isolante, come il cloruro di sodio. La struttura a bande è molto simile a quella di un semiconduttore, con la banda di valenza occupata e la banda di conduzione vuota. La differenza più evidente è l'entità dell'intervallo di energie proibite, che può essere tipicamente 2 eV o più nel caso di un isolante (in confronto, per esempio, con 0.7 eV di un semiconduttore). Questo carattere distintivo, apparentemente lieve, implica un'enorme differenza nel fattore esponenziale che dà la probabilità che un elettrone acquisisca abbastanza energia da scavalcare l'intervallo proibito. Per un isolante, a temperatura ambiente, il fattore $e^{-\Delta E/kT}$ vale, tipicamente, 2×10^{-35}, cosicchè in un grammo di materiale (10^{23} atomi) c'è una probabilità trascurabile che anche *un singolo elettrone* si trovi nella banda di conduzione, dove potrebbe muoversi liberamente. Negli isolanti, quindi, tutti gli elettroni sono costretti a stare nella banda di valenza, dove non vi sono stati vuoti da occupare. Essi, quindi, non sono affatto liberi di spostarsi nel materiale.

Si noti che la differenza fondamentale tra i semiconduttori e gli isolanti sta nel rapporto tra l'entità dell'intervallo di energie proibite e kT. A temperature molto basse un semiconduttore diviene un isolante mentre a temperature molto alte (comunque superiori al punto in cui il materiale vaporizzerebbe), un isolante diventerebbe semiconduttore.

Si considererà più in dettaglio l'applicazione della teoria quantistica alla struttura dei semiconduttori nel capitolo 53 del testo. ■

32-8 SUPERCONDUTTIVITÀ *(Facoltativo)*

Abbassando la temperatura di un conduttore, la resistività diminuisce, come è indicato nella figura 5. Che cosa succede quando ci si avvicina allo zero assoluto?

La parte di resistività dovuta alla interazione degli elettroni con la vibrazione degli atomi reticolari intorno alla loro posizione di equilibrio, decresce al decrescere della temperatura, dato che la ampiezza della vibrazione diminuisce con la temperatura. In accordo con la teoria quantistica, gli atomi mantengono un certo moto vibrazionale minimo anche allo zero assoluto. Per di più il contributo alla resistività dei difetti e delle impurità permane anche allo zero assoluto. Ci si aspetta, pertanto, che la resistività decresca al decrescere della temperatura, ma rimanga finita alle più basse temperature. Molti materiali manifestano, infatti, questo tipo di comportamento.

Un tipo di comportamento completamente diverso fu scoperto nel 1911 dal fisico tedesco Kammerlingh Onnes, mentre studiava la resistività del mercurio alle basse temperature. Egli scoprì che, al di sotto di una temperatura di circa 4 K, il mercurio perdeva improvvisamente tutta la sua resistività e diveniva un conduttore *perfetto*, detto *superconduttore*. Non si osservava una variazione graduale, tipo quella descritta dall'equazione 14 e dalla figura 5, ma di una transizione brusca, come indicato nella figura 10. La resistività di un superconduttore non è molto piccola; è nulla! Se viene immessa una corrente in un anello superconduttore, essa si mantiene indefinitamente, anche senza alcun campo elettrico che la alimenti.

La disponibilità di materiali superconduttivi si presta ad un grande numero di possibili applicazioni. (1) L'energia può essere trasportata ed immagazzinata in cavi elettrici senza perdite resistive. Una compagnia di fornitura di energia elettrica potrebbe, quindi, produrre energia elettrica in sovrappiù, quando la domanda è scarsa (per esempio di notte), e immagazzinarla sotto forma di una corrente in un anello superconduttore. La potenza elettrica potrebbe essere, poi, erogata nei momenti di picco della richiesta, il giorno successivo. Un anello di questo tipo è operativo a Tacoma (Washington), e può immagazzinare 5 MW di potenza. In anelli sperimentali più piccoli, sono state immagazzinate correnti per parecchi anni senza attenuazione. (2) Gli elettromagneti superconduttivi possono produrre campi magnetici più intensi degli elettromagneti convenzionali. Come verrà discusso nel capitolo 35, un cavo percorso da corrente genera un campo magnetico nello spazio circostante, così come una carica elettrica genera un campo elettrico. Con cavi superconduttori possono essere utilizzate correnti più intense e, di conseguenza, possono essere prodotti campi magnetici più intensi. Fra le applicazioni di questa tecnologia, si possono ricordare i treni a levitazione magnetica e i magneti impiegati per incurvare la traiettorie dei fasci di particelle nei grandi acceleratori come al Fermilab. (3) Componenti superconduttori nei circuiti elettronici non genererebbero alcun riscaldamento per effetto Joule e consentirebbero una ulteriore miniaturizzazione. La prossima generazione di grossi calcolatori potrebbe impiegare componenti superconduttori.

I progressi nell'applicazione di questa affascinante tecnologia durante i 75 anni successivi alla scoperta di Kammerlingh Onnes, sono stati scarsi per una ragione: gli elementi e i composti che manifestano un comportamento superconduttivo, lo fanno soltanto alle basse temperature, in molti casi sotto i 20 K. Per raggiungere queste temperature il materiale superconduttore viene

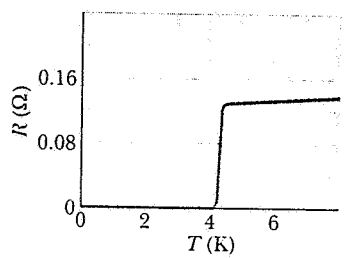


Figura 10 La resistività del mercurio scende a zero ad una temperatura di circa 4 K. Il mercurio a questa temperatura è solido.

generalmente immerso in un bagno di elio liquido a 4 K. L'elio liquido è costoso e così, pur essendoci state molte applicazioni scientifiche della superconduttività, poche sono state le applicazioni commerciali che potessero ammortizzare l'alto costo dell'elio liquido.

A partire dal 1986, è stata scoperta una serie di materiali ceramici che manifestavano comportamento superconduttore a temperature relativamente alte. I primi tra questi materiali mantenevano le proprietà dei superconduttori fino a 90 K. Pur essendo questa una temperatura assai bassa negli standard ordinari, essa può essere raggiunta in un bagno di azoto liquido (77 K), con un costo di circa un ordine di grandezza inferiore rispetto al caso dell'elio liquido. Tali materiali aprono, quindi, grandi possibilità commerciali rese inaccessibili dall'impiego di elio liquido come mezzo criogenico.*

La superconduttività non va vista soltanto come un miglioramento delle proprietà conduttive rispetto a materiali che sono già buoni conduttori. I migliori conduttori a temperatura ambiente (rame, argento ed oro) non mostrano mai le proprietà dei superconduttori.

Una comprensione approfondita di queste considerazioni può essere raggiunta su basi microscopiche. I materiali ordinari sono buoni conduttori se vi sono elettroni liberi che possono muoversi facilmente nel reticolo. Gli atomi di rame, argento ed oro, hanno un singolo elettrone di valenza debolmente legato che può essere ceduto al gas di elettroni racchiuso nel reticolo. In base ad una teoria, la superconduttività dipende dal moto di *coppie* di elettroni altamente correlati. Dato che gli elettroni, in generale, non tendono a formare coppie, deve verificarsi una circostanza particolare: i due elettroni interagiscono fortemente con il reticolo e, come effetto indiretto, tra di loro. La situazione è simile a quella di due barche in un lago dove la scia lasciata dal moto di una barca fa spostare l'altra, anche se la prima barca non esercita direttamente una forza sulla seconda. Perciò un buon conduttore ordinario si ha quando gli elettroni interagiscono *debolmente* con il reticolo, mentre un comportamento superconduttore sembra richiedere che gli elettroni interagiscano *fortemente* con il reticolo.

Altri dettagli relativi ai superconduttori e all'applicazione della teoria quantistica, per una comprensione del fenomeno, possono essere trovati nel capitolo 53. ■

* Vedi *The New Superconductors: Prospects for Applications*, di Alan M. Wolsky, Robert F. Giese e Edward J. Daniels, «Scientific American», febbraio 1989, pag. 60 e *Superconductors Beyond 1-2-3*, di Robert J. Cava, «Scientific American», agosto 1990, pag. 42.

DOMANDE

1. Si elenchino altre quantità fisiche che, come la corrente, siano scalari contraddistinti da un verso rappresentato da una freccia.
2. Nella nostra convenzione per la direzione della freccia indicante una corrrente (*a*) sarebbe stato più conveniente, se possibile, assumere che i portatori di carica fossero negativi? (*b*) Sarebbe stato più conveniente, se possibile, contraddistinguere l'elettrone come positivo, il protone come negativo e così via?
3. Quale evidenza sperimentale si può citare per mostrare che le cariche elettriche responsabili delle correnti e quelle dell'elettrostatica sono le stesse?
4. Si spieghi con parole proprie perché, in questo capitolo, si può avere $\mathbf{E} \neq 0$ all'interno di un conduttore mentre, nel paragrafo 29-4, doveva essere $\mathbf{E} = 0$.
5. Una corrente i entra da un vertice di un foglio quadrato di rame ed esce dal vertice opposto. Si rappresenti con una serie di frecce nei punti interni al quadrato la densità di corrente $\mathbf{j}$. Si richiede un disegno intuitivo e non una descrizione matematica.
6. Esiste una logica negli standard dimensionali adottati per i cavi elettrici domestici? Si veda il problema 6. In caso contrario, perché viene adottato questo standard?
7. Una differenza di potenziale V viene applicata ad un filo di rame di diametro d e lunghezza L. Qual è l'effetto sulla velocità di deriva dell'elettrone (*a*) raddoppiando V. (b) raddoppiando L e (*c*) raddoppiando d.
8. Perché non è possibile ricavare la velocità di deriva degli elettroni misurando il tempo che impiegano per percorrere una certa distanza lungo un conduttore?
9. Si descrivano brevemente alcuni possibili progetti di resistori variabili.
10. Una differenza di potenziale V viene applicata su un cilindro di carbone, stringendolo tra due elettrodi di rame, come illustrato nella figura 11. Si discutano i problemi che si presentano volendo calcolare la resistenza del cilindro di carbone facendo uso della relazione $R = \rho L/A$.

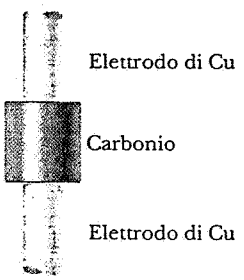


Figura 11 Domanda 10.

11. È dato un cubo di alluminio e una coppia di morsetti di una batteria. Come vanno connessi i morsetti al cubo affinchè si abbia (*a*) la massima e (*b*) la minima resistenza?
12. Come si potrebbe misurare la resistenza di un blocco di metallo a forma di biscotto? Si forniscano dettagli precisi per chiarire il concetto.
13. Scivolando sui sedili di un'automobile si possono produrre

ISBN 88-408-0777-2

differenze di potenziale di migliaia di volt. Perché non si corre pericolo di restare folgorati?

14. Si voglia indagare sperimentalmente se il filamento di una lampadina obbedisce alla legge di Ohm. Si discutano le difficoltà.
15. La velocità di deriva degli elettroni in un conduttore metallico percorso da corrente cambia quando il metallo viene riscaldato? Si spieghi.
16. Si spieghi perché la quantità di moto che gli elettroni di conduzione trasferiscono agli ioni reticolari di un conduttore metallico non produce una forza risultante sul conduttore stesso.
17. Si elenchino in una tabella le analogie e le differenze tra il flusso di carica lungo un conduttore, il flusso d'acqua attraverso un tubo orizzontale e la conduzione di calore attraverso una piastra. Si considerino i seguenti quesiti: che cosa causa il flusso? Che cosa vi si oppone? Quali particelle (se ve ne sono) partecipano al processo? In quali unità di misura va misurato il flusso?
18. Come va applicata la relazione $V = iR$ ai resistori che non obbediscono alla legge di Ohm?
19. Una vacca e un uomo si trovano in un prato quando un fulmine colpisce il suolo nelle vicinanze. Perché è più probabile che resti uccisa la vacca? Il fenomeno responsabile è detto «tensione a gradino».
20. Le linee della figura 7 dovrebbero essere lievemente curve. Perché?
21. Un fusibile in un circuito elettrico è un cavo progettato per fondere, e conseguentemente aprire il circuito, nel caso in cui la corrente superi un certo valore nominale. Quali sono alcune caratteristiche dei fili ideali da fusibile?
22. Perché una lampadina diviene meno luminosa con l'uso?
23. Il carattere e la qualità della vita quotidiana sono influenzati fortemente dai dispositivi che non obbediscono alla legge di Ohm. Che cosa si potrebbe dire a sostegno di questa affermazione?
24. Da un foglio di uno studente: «La relazione $R = V/i$ ci dice che la resistenza di un conduttore è direttamente proporzionale alla differenza di potenziale applicata». Che cosa si può dire riguardo a questa affermazione?
25. La resistività del carbone ha un coefficiente termico negativo. Ciò significa che la sua resistività scende all'aumentare della temperatura. La resistività scomparirà completamente ad una temperatura sufficientemente elevata?
26. Quale particolare caratteristica devono avere i fili da riscaldamento?
27. L'equazione 22 ($P = i^2R$) sembra suggerire che la velocità di crescita dell'energia interna di un resistore diminuisca al diminuire della resistenza. L'equazione 23 ($P = V^2/R$) sembra suggerire esattamente l'opposto. Come si spiega questo paradosso?
28. Perché le compagnie di produzione di energia elettrica abbassano la tensione nei periodi di forte richiesta? Che cosa si risparmia?
29. La resistenza del filamento di una lampada da 500 W è minore o maggiore di quella di una lampada da 100 W? Entrambe le lampade funzionino a 120 V.
30. Cinque fili di lunghezza e diametro uguali vengono collegati a turno a due punti mantenuti ad ugual differenza di potenziale. L'energia interna si svilupperà ad una velocità maggiore nel filo con (*a*) minore o (*b*) maggiore resistenza?
31. Perché è preferibile trasferire 10 MW di potenza elettrica a grande distanza utilizzando una tensione di 10 kV anzichè di 220 V?

PROBLEMI

Paragrafo 32-2 Densità di corrente

1. Una corrente di 4.82 A scorre in un resistore da 12.4 Ω per un tempo di 4.60 minuti. (*a*) Quanta carica e (*b*) quanti elettroni passano attraverso una sezione del resistore in questo tempo?
2. La corrente in un fascio di elettroni di un tipico schermo video è di 200 μA. Quanti elettroni colpiscono lo schermo in un minuto?
3. Si supponga di avere 2.10×10^8 ioni positivi, ciascuno con due cariche in eccesso, per centimetro cubico, in movimento direzionato con velocità pari a 1.40×10^5 m/s. (*a*) Si calcoli la densità di corrente, in modulo, direzione e verso. (*b*) Si può calcolare la corrente totale di questo fascio di ioni? In caso contrario, di quale informazione addizionale c'è bisogno?
4. Una corrente piccola, ma misurabile, di 123 pA scorre in un filo di rame avente diametro di 2.46 mm. Si calcoli (*a*) la densità di corrente e (*b*) la velocità di deriva degli elettroni. Si veda l'esempio 2.
5. Si supponga che il materiale di cui è costituito un fusibile (vedi domanda 21) fonda quando la densità di corrente raggiunge i 440 A/cm^2. Quale diametro va scelto per un filo cilindrico utilizzato per limitare la corrente a 0.552 A?
6. Il Codice Elettrico Nazionale degli Stati Uniti, che fissa una massima corrente per i fili di rame di varie dimensioni rivestiti con isolanti in gomma, è mostrato (in parte) sotto. Si tracci la densità di corrente massima in funzione del diametro. Quale cavo ha la massima densità di corrente ammessa?

Identificativo[a]	4	6	8	10	12	14	16	18
Diametro (in mil)[b]	204	162	129	102	81	64	51	40
Corrente massima (A)	70	50	35	25	20	15	6	3

[a] Riferimento per identificare il diametro del filo.
[b] 1 mil = 10^{-3} pollici.

7. Una corrente scorre in un tubo a gas quando una differenza di potenziale sufficientemente alta viene applicata sui suoi due elettrodi. Il gas si ionizza; gli elettroni si muovono verso l'elettrodo positivo e gli ioni verso quello negativo. Quali sono modulo, direzione e verso della corrente in un tubo contenente idrogeno nel quale 3.1×10^{18} elettroni e 1.1×10^{18} protoni attraversano una sezione del tubo stesso in un secondo?
8. Una giunzione *pn* è costituita da due diversi materiali semiconduttori di forma cilindrica, con uguale raggio di 0.165 mm, come illustrato nella figura 12. In una certa applicazio-

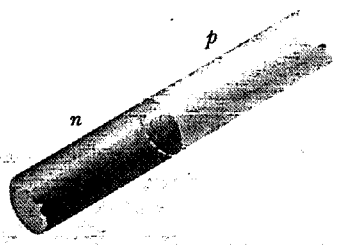


Figura 12 Problema 8.

ne 3.50×10^{15} elettroni al secondo scorrono attraverso la giunzione dalla parte *n* alla parte *p*, mentre 2.25×10^{15} buchi al secondo scorrono in senso opposto (un buco si comporta come una particella con carica pari a $+1.6 \times 10^{-19}$ C). Si determini (*a*) la corrente totale e (*b*) la densità di corrente.

9. Si disponga di una sfera conduttrice isolata avente raggio di 13 cm. Un filo porta una corrente di 1.0000020 A sulla sfera. Un altro filo porta una corrente di 1.0000000 A all'esterno della sfera. Quanto impiegherà la sfera per acquistare un potenziale di 980 V?
10. La cinghia di un acceleratore elettrostatico è larga 52.0 cm e si muove alla velocità di 28.0 cm/s. La cinghia porta carica nella sfera con una intensità di 95.0 μA. Si calcoli la densità di carica superficiale della cinghia. Si veda il paragrafo 30-11.
11. Vicino alla Terra la densità di protoni del vento solare è pari a 8.70 cm^{-3} e la loro velocità è pari a 470 km/s. (*a*) Si determini la densità di corrente di questi protoni. (*b*) Se il campo magnetico terrestre non li deflettesse, i protoni colpirebbero la Terra. Quale corrente totale riceverebbe la Terra?
12. In un ipotetico laboratorio di ricerca sulla fusione si produce un gas di elio ad alta temperatura completamente ionizzato, essendo ogni atomo di elio separato in due elettroni liberi e un nucleo rimanente carico (particelle alfa). Un campo elettrico applicato causa lo spostamento delle particelle alfa verso est con una velocità di 25 m/s e degli elettroni verso ovest con una velocità di 88 m/s. La densità delle particelle alfa è pari a 2.8×10^{15} cm^{-3}. Si calcoli la densità di corrente netta; si specifichi il verso della corrente.
13. Quanto tempo impiegano gli elettroni per andare dalla batteria di una automobile al motorino di avviamento? Si assuma che la corrente sia pari a 115 A e che gli elettroni viaggino attraverso un cavo di rame con sezione di 31.2 mm^2 e lunghezza di 85.5 cm. Si veda l'esempio 2.
14. Un fascio stazionario di particelle alfa ($q = 2e$) che si propagano con energia cinetica pari a 22.4 MeV trasporta una corrente di 250 nA. (*a*) Se il fascio è diretto perpendicolarmente ad una superficie piana, quante particelle alfa colpiscono la superficie in 2.90 s? (*b*) In ogni istante quante particelle alfa ci sono in una lunghezza pari a 18.0 cm di fascio? (*c*) In quale differenza di potenziale è necessario accelerare ogni particella alfa dalla quiete per farle acquistare una energia di 22.4 MeV?
15. Nei due anelli di accumulo e di intersezione da 950 m di circonferenza al CERN, protoni di energia cinetica pari a 28.0 GeV formano fasci di corrente da 30.0 A ciascuno. (*a*) Si determini la carica totale trasportata dai protoni in ciascun anello. Si assuma che i protoni viaggino alla velocità della luce. (*b*) Un fascio viene deflesso fuori dall'anello contro un blocco di rame da 43.5 kg. Di quanto salirà la temperatura del blocco?
16. (*a*) La densità di corrente in un conduttore cilindrico di raggio R varia in accordo all'equazione

$$j = j_0(1 - r/R),$$

dove r è la distanza dall'asse. Quindi la densità di corrente ha un massimo j_0 sull'asse $r = 0$ e decresce linearmente a zero sulla superficie $r = R$. Si calcoli la corrente in termini di j_0 e della sezione ortogonale del conduttore $A = \pi R^2$. (*b*) Si supponga che, invece, la densità di corrente abbia un massimo j_0 sulla superficie e decresca linearmente a zero sull'asse, cosicchè

$$j = j_0 r/R.$$

Si calcoli la corrente. Perché il risultato è diverso da quello del punto (*a*)?

Paragrafo 32-3 Resistenza, resistività e conducibilità

17. Una rotaia di acciaio di un tram ha sezione trasversa di 56 cm^2. Qual è la resistenza di una rotaia lunga 11 km? La resistività dell'acciaio è pari a 3.0×10^{-7} $\Omega \cdot m$.
18. Un essere umano può essere folgorato se una pur piccola corrente di 50 mA lo attraversa vicino al cuore. Un elettricista che lavora a mani nude e sudate, impugnando due conduttori con le due mani realizza un buon contatto elettrico. Se la resistenza dell'elettricista è pari a 1800 Ω, quale sarebbe la tensione fatale? (Gli elettricisti spesso lavorano con cavi sotto tensione).
19. Un cavo lungo 4.0 m e avente diametro pari a 6.0 mm ha una resistenza di 15 mΩ. Una differenza di potenziale di 23 V è applicata sugli estremi. (*a*) Qual è la corrente nel cavo? (*b*) Si calcoli la densità di corrente. (*c*) Si calcoli la resistività del materiale di cui è costituito il cavo. Di quale materiale si tratta? Vedi tabella 1.
20. Un fluido avente una resitività di 9.40 $\Omega \cdot m$ invade lo spazio compreso tra i piatti di un condensatore a piatti paralleli da 110 pF. Quando lo spazio viene completamente riempito dal fluido, quale sarà la resistenza tra i piatti?
21. Si mostri che, se le variazioni dimensionali di un conduttore al variare della temperatura potessero essere trascurate, la resistenza varierebbe con la temperatura in accordo con la legge $R - R_0 = \bar{\alpha} R_0(T - T_0)$.
22. Dalla pendenza della linea della figura 5, si stimi il coefficiente termico medio di resistività del rame a temperatura ambiente e lo si confronti con il valore dato nella tabella 1.
23. (*a*) A quale temperatura la resistenza di un conduttore di rame raddoppierebbe a partire da una temperatura di 20 °C? (Si scelga il punto a 20 °C come riferimento nominale nell'equazione 14; si confronti la risposta data con l'equazione 5). (*b*) Questa stessa temperatura si applica a tutti i conduttori di rame, indipendentemente dalla forma e dalla dimensione?
24. L'avvolgimento di rame di un motore ha una resistenza di 50 Ω a 20 °C, quando il motore è fermo. Dopo un funzionamento ininterrotto di varie ore la resistenza sale a 58 Ω. Qual è la temperatura dell'avvolgimento? Si trascurino le variazioni dimensionali dell'avvolgimento. Vedi tabella 1.
25. Un grosso bruco, lungo 4 cm, striscia nel verso della deriva degli elettroni lungo una barretta di rame, avente un diametro di 5.2 mm, in cui scorre una corrente di 12 A. (*a*) Si determini la differenza di potenziale tra i due estremi del bruco. (*b*) La sua coda è positiva o negativa, in confronto alla sua testa? (*c*) Quanto tempo impiega il bruco per percorrere una distanza di 1.0 cm viaggiando di pari passo con lo spostamento di deriva degli elettroni nel cavo?

ISBN 88-408-0777-2

26. Una bobina viene costituita avvolgendo per 250 giri un cavo di rame contrassegnato dal numero 8 (vedi problema 6) in un unico strato su un supporto cilindrico avente diametro di 12.2 cm. Si determini la resistenza della bobina. Si trascuri lo spessore del rivestimento isolante. Si veda la tabella 1.

27. Un cavo avente una resistenza di 6 Ω viene fatto passare attraverso una matrice in modo che la sua lunghezza finale risulta triplicata. Si determini la resistenza finale del cavo, assumendo che la resistività del rame e la sua densità non cambino durante il processo di allungamento.

28. Quale deve essere il diametro di un cavo di ferro affinchè esso abbia la stessa resistenza di un cavo di rame avente diametro di 1.19 mm, avendo entrambi i cavi la stessa lunghezza?

29. Due conduttori sono realizzati con lo stesso materiale ed hanno la stessa lunghezza. Il conduttore A è un cavo pieno di diametro D. Il conduttore B è un tubo cavo di diametro esterno pari a $2D$ e diametro interno pari a D. Si trovi il rapporto delle resistenze R_A/R_B, osservato tra gli estremi dei due conduttori.

30. Su un cavo di rame e su un cavo di ferro di uguale lunghezza viene applicata la stessa differenza di potenziale agli estremi. (*a*) Quale deve essere il rapporto dei loro raggi perché la corrente sia la stessa? (*b*) La densità di corrente può essere resa uguale con una oculata scelta dei raggi?

31. Un cavo elettrico è costituito da 125 fili sottili, ciascuno con una resistenza di 2.65 μΩ. La stessa differenza di potenziale viene applicata tra i terminali di ciascun filo sottile e genera una corrente totale di 750 mA. (*a*) Qual è la corrente in ciascun filo sottile? (*b*) Qual è la differenza di potenziale applicata? (*c*) Qual è la resistenza del cavo?

32. Una comune lampadina per *flash* viene alimentata, in condizioni operative da una tensione di 2.90 V e una corrente di 310 mA. Se la resistenza del filamento è pari, a freddo (T_0 = 20 °C), a 1.12 Ω, si calcoli la temperatura del filamento quando la lampadina viene accesa. Il filamento è fatto di tungsteno. Si assuma che l'equazione 14 valga nel campo di temperature considerato.

33. Quando una tensione di 115 V viene applicata su un cavo di lunghezza pari a 9.66 m, la densità di corrente è pari a 1.42 A/cm^2. Si calcoli la conducibilità del materiale di cui è costituito il cavo.

34. Un blocco di materiale a forma rettangolare piena, ha una sezione ortogonale di 3.50 cm^2, una lunghezza di 15.8 cm e una resistenza di 935 Ω. Il materiale di cui è costituito il blocco ha 5.33×10^{22} elettroni di conduzione/m^3. Una differenza di potenziale di 35.8 V viene mantenuta tra i suoi estremi. (*a*) Si determini la corrente nel blocco. (*b*) Assumendo che la densità di corrente sia uniforme, qual è il suo valore? Si calcoli (*c*) la velocità di deriva degli elettroni di conduzione e (*d*) il campo elettrico nel blocco.

35. Il rame e l'alluminio vengono presi in considerazione per fabbricare una linea di trasmissione ad alta tensione che deve trasportare una corrente di 62.3 A. La resistenza per unità di lunghezza deve essere 0.152 Ω/km. Si calcoli, per ciascuno dei due materiali, (*a*) la densità di corrente e (*b*) la massa di 1.00 m di cavo. Le densità del rame e dell'alluminio sono 8960 kg/m^3 e 2700 kg m^3, rispettivamente.

36. Nella bassa atmosfera della Terra ci sono ioni negativi e positivi, prodotti dagli elementi radioattivi del suolo e dai raggi cosmici dello spazio. In una certa regione, l'intensità del campo elettrico atmosferico è di 120 V/m, in direzione verticale verso il basso. Per effetto di questo campo gli ioni positivi

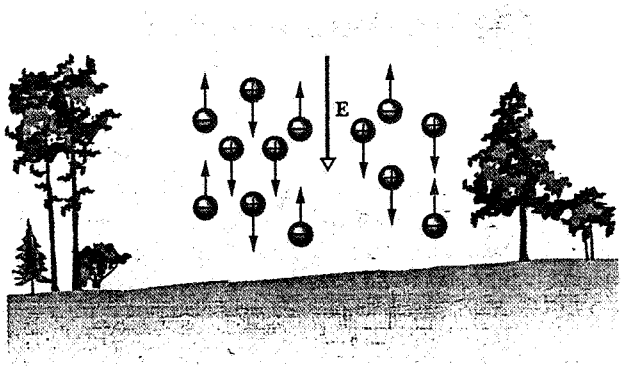


Figura 13 Problema 36.

(620 per cm^3), con una singola carica in eccesso, si spostano verso il basso e quelli negativi (550 per cm^3), anch'essi con una singola carica in eccesso, si spostano verso l'alto; vedi figura 13. Il valore misurato della conducibilità è 2.70×10^{-14}/Ω · m. Si calcoli (*a*) la velocità di deriva degli ioni, assunta uguale per gli ioni positivi e quelli negativi e (*b*) la densità di corrente.

37. Una bacchetta di un certo metallo è lunga 1.6 m ed ha un diametro di 5.5 mm. La resistenza tra i suoi estremi (a 20°C) vale 1.09×10^{-3} Ω. Un disco viene costruito con questo stesso materiale ed ha un diametro di 2.14 cm e uno spessore di 1.35 mm. (*a*) Di quale materiale si tratta? (*b*) Qual è la resistenza tra le due facce circolari opposte, assumendo che esse siano superfici equipotenziali?

38. Quando una bacchetta di metallo viene riscaldata, non solo la sua resistenza, ma anche la sua lunghezza e la sua sezione trasversa variano. La relazione $R = \rho L/A$ suggerisce che tutte e tre le grandezze dovrebbero essere considerate nel calcolo di ρ alle varie temperature. (*a*) Se la temperatura varia di 1.0 °C, quale variazione percentuale in R, L ed A si ha per un conduttore di rame? (*b*) Quale conclusione se ne trae? Il coefficiente di dilatazione lineare è 1.7×10^{-5}/°C.

39. Si desidera fabbricare un lungo conduttore cilindrico che abbia un coefficiente termico di resistività prossimo a zero a 20°C. Se tale conduttore viene realizzato assemblando alternativamente dischi di ferro e carbone, si trovi il rapporto tra gli spessori dei dischi (per il carbone $\rho = 3500 \times 10^{-8}$ Ω · m e $\alpha = -0.50 \times 10^{-3}$/°C).

40. Un resistore ha la forma di un tronco di cono circolare (vedi fig. 14). I raggi delle basi sono a e b e l'altezza è L. Se l'assottigliamento è lieve, si può assumere che la densità di corrente sia uniforme su una qualunque sezione ortogonale. (*a*) Si calcoli la resistenza di questo oggetto. (*b*) Si mostri che la risposta si riduce a $\rho L/A$ nel caso particolare in cui l'assottigliamento è nullo ($a = b$).

Paragrafo 32-4 La legge di Ohm

41. In un ipotetico dispositivo elettronico, la differenza di potenziale V in volt, misurata sul dispositivo, è legata alla corrente i in mA dalla relazione $V = 3.55i^2$. (*a*) Si determini la resistenza quando la corrente è pari a 2.40 mA. (*b*) A quale valore di corrente la resistenza è uguale a 16.0 Ω?

42. Utilizzando i dati della figura 6*b*, si tracci la resistenza del diodo *pn* a giunzione in funzione della differenza di potenziale applicata.

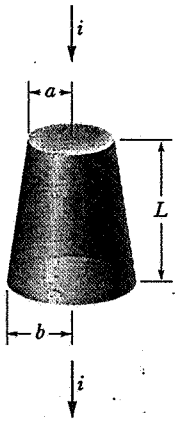


Figura 14 Problema 40.

Paragrafo 32-5 La legge di Ohm dal punto di vista microscopico

43. Si calcoli il tempo medio tra due collisioni successive per gli elettroni di conduzione nell'alluminio a 20 °C. Ogni atomo di alluminio contribuisce con tre elettroni di conduzione. Si prendano i dati necessari dalla tabella 1 e dalla appendice D. Si veda anche l'esempio 2.
44. Si mostri che, in accordo con il modello a elettroni liberi della conduzione nei metalli e alla fisica classica, la resistività dei metalli dovrebbe essere proporzionale a $\sqrt{T}$, essendo T la temperatura assoluta (*suggerimento*: si considerino gli elettroni come un gas ideale).

Paragrafo 32-6 Trasferimenti di energia in un circuito elettrico

45. Una radio portatile da 9.9 V e 7.5 W viene lasciata accesa dalle 9:00 p.m. alle 3:00 a.m. Quanta carica è passata nei fili?
46. Le luci di un'automobile in moto assorbono 9.7 A dall'alternatore a 12 V, che è azionato dal motore. Si assuma che l'alternatore abbia una efficienza dell'82% e si calcoli la potenza che il motore deve fornire per alimentare le luci.
47. Una stufa elettrica alimentata da una linea a 120 V, ha una resistenza calda di 14.0 Ω. (*a*) Quanta potenza elettrica viene dissipata in calore? (*b*) Per 5.22 centesimi/kW · h, quanto costerà far funzionare la stufa per 6 h e 25 min?
48. La massima corrente ritenuta sicura per vari tipi di cavo di diverse dimensioni rivestiti in gomma viene fissata da un ente nazionale. Per il cavo di rame rivestito in gomma #10 (diametro = 0.10 pollici) la massima corrente di sicurezza è pari a 25 A. Con questa corrente si determini (*a*) la densità di corrente, (*b*) il campo elettrico, (*c*) la differenza di potenziale per un cavo di lunghezza pari a 1000 piedi e (*d*) la potenza elettrica dissipata in un cavo di lunghezza pari a 1000 piedi.
49. Una lampadina da 100 W viene alimentata da una tensione di 120 V. (*a*) Quanto costerà lasciare la lampadina accesa per un mese (31 giorni)? Si assuma un costo per l'energia elettrica pari a 6 centesimi/kW · h. (*b*) Qual è la resistenza della lampadina? (*d*) La resistenza varia quando la lampadina è accesa?
50. Un cavo riscaldante al nickel-cromo dissipa 500 W quando la differenza di potenziale applicata è pari a 110 V e la temperatura del cavo è di 800 °C. Quanta potenza dissiperebbe se venisse mantenuto a 200 °C immergendolo in un bagno di olio da raffreddamento? La differenza di potenziale applicata resti uguale. α per il nickel-cromo a 800 °C è 4.0×10^{-4}/°C.
51. Un acceleratore lineare produce un fascio impulsato di elettroni. La corrente dell'impulso vale 485 mA e la durata dell'impulso è 95.0 ns. (*a*) Quanti elettroni sono accelerati per ogni impulso? (*b*) Si determini la corrente media per una macchina operante a 520 impulsi/s. (*c*) Se gli elettroni vengono accelerati all'energia di 47.7 MeV, quali sono i valori della potenza media e di picco per l'acceleratore.
52. Un resistore cilindrico avente raggio di 5.12 mm e lunghezza di 1.96 cm viene fabbricato con un materiale che ha una resistività di $3.50 \times 10^{-5}\ \Omega \cdot$ m. Quali sono (*a*) la densità di corrente e (*b*) la differenza di potenziale quando la dissipazione di potenza è 1.55 W?
53. Un elemento riscaldante è fatto funzionare mantenendo una differenza di potenziale di 75 V su un cavo di nickel cromo avente una sezione ortogonale di 2.6 mm^2 ed una resistività di $5.0 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot$ m. (*a*) Se l'elemento dissipa 4.8 kW, qual è la lunghezza del cavo? (*b*) Se una differenza di potenziale di 110 V viene utilizzata per ottenere la stessa potenza in uscita, quale dovrebbe essere la lunghezza?
54. Un avvolgimento di filo di nickel cromo viene immerso in un liquido. Quando la differenza di potenziale applicata è pari a 12 V e la corrente è pari a 5.2 A, il liquido bolle, evaporando ad una velocità di 21 mg/s. Si calcoli il calore di vaporizzazione del liquido.
55. Un avvolgimento resistivo, collegato ad una batteria esterna, viene posto all'interno di un cilindro adiabatico riempito di gas ideale e dotato di un pistone senza attriti. Una corrente i = 240 mA scorre attraverso l'avvolgimento, che ha una resistenza $R = 550\ \Omega$. A quale velocità v il pistone, di massa m = 11.8 kg, deve essere innalzato affinchè la temperatura del gas resti invariata? Si veda la figura 15.

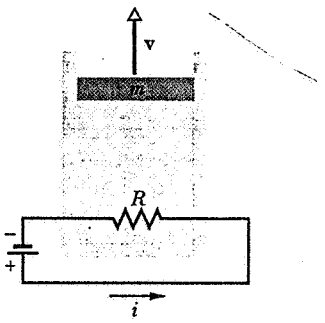


Figura 15 Problema 55.

56. Un riscaldatore elettrico a immersione impiega, normalmente, 93.5 minuti per riscaldare l'acqua fredda, in un contenitore isolato, fino a una certa temperatura, dopo di che un termostato spegne il riscaldatore. Un giorno la tensione di linea viene ridotta del 6.20% a causa di un sovraccarico. Quanto tempo ci vorrà, ora, per riscaldare l'acqua? Si assuma che la resistenza dell'elemento riscaldante sia la stessa in ciascuno di questi due modi di funzionamento.
57. Due sfere isolate conduttrici, ognuna di raggio pari a 14.0 cm, vengono caricate a potenziali pari a 240 e 440 V e vengono, poi, collegate con un cavo sottile. Si calcoli l'energia interna sviluppata nel cavo.
58. La corrente trasportata da un fascio di elettroni in un particolare tubo a raggi catodici, vale 4.14 mA. La velocità degli elettroni è pari a 2.82×10^7 m/s e il fascio percorre una distanza di 31.5 cm prima di raggiungere lo schermo. (*a*) Quan-

ISBN 88-408-0777-2

ti elettroni vi sono nel fascio in ogni istante? (*b*) Si trovi la potenza dissipata sullo schermo (si ignorino gli effetti relativistici).

59. Un riscaldatore da 420 W a immersione viene posto in un contenitore contenente 2.10 litri d'acqua a 18.5 °C. (*a*) Quanto tempo impiegherà a far bollire l'acqua, assumendo che il 77% dell'energia disponibile venga assorbito dall'acqua? (*b*) Quanto tempo ci vorrà per far evaporare la metà dell'acqua in ebollizione?

60. Un condensatore da 32 μF viene collegato ad un generatore di tensione programmato. Nell'intervallo da $t = 0$ a $t = 3$ s la tensione di uscita del generatore è pari a $V(t) = 6 + 4t - 2t^2$ volt. In $t = 0.50$ s si determini (*a*) la carica sul condensatore, (*b*) La corrente nel condensatore e (*c*) la potenza in uscita dal generatore.

61. Una differenza di potenziale V viene applicata ad un filo avente sezione ortogonale di area A, lunghezza L e conduttività σ. Si vuole variare la differenza di potenziale applicata e allungare il cavo affinchè la potenza dissipata venga aumentata di un fattore 30 e la corrente venga aumentata di un fattore 4. Quali dovranno essere i nuovi valori (*a*) di lunghezza e (*b*) di area della sezione ortogonale?

Capitolo 33

CIRCUITI DC

Nel precedente capitolo sono state discusse alcune proprietà generali della corrente e della resistenza. In questo capitolo si incomincerà a studiare il comportamento di circuiti elettrici specifici che includono elementi resistivi, tra cui resistori e resistenze interne di elementi circuitali quali batterie o cavi.

Ci si limiterà, in questo capitolo, a considerare circuiti in corrente continua *(o circuiti DC, dall'inglese «direct current») nei quali il verso della corrente non cambia nel tempo. Nei circuiti DC che contengono solamente batterie e resistori l'intensità della corrente non cambia nel tempo, mentre nei circuiti DC che contengono condensatori, l'intensità della corrente può variare nel tempo. I circuiti in* corrente alternata *(o circuiti AC, dall'inglese «alternating current»), in cui la corrente cambia verso periodicamente, verranno presi in considerazione nel capitolo 39.*

33-1 LA FORZA ELETTROMOTRICE

Una sorgente esterna di energia è generalmente necessaria per spostare le cariche nei circuiti elettrici. Il circuito, in questo senso, deve contenere un dispositivo che mantenga una differenza di potenziale tra due punti, un po' come in un circuito a circolazione di fluido è richiesto un dispositivo analogo (una pompa) per mantenere una differenza di *pressione* tra due punti.

Un qualunque dispositivo che svolga questo compito in un circuito elettrico è detto sorgente di *forza elettromotrice* (indicata dal simbolo $\mathcal{E}$; abbreviazione: f.e.m.). È talvolta utile considerare un generatore di f.e.m. come un meccanismo che crea una «montagna» di potenziale e porta le cariche sulla «vetta», da cui esse scendono poi verso «valle» attraverso il resto del circuito. Un ordinario generatore di f.e.m. è la comune batteria; un altro è il generatore elettrico che si trova negli impianti di produzione di potenza. Le celle solari sono generatori di f.e.m. usate tanto nelle navicelle spaziali quanto nelle calcolatrici tascabili. Altri generatori di f.e.m. meno comuni sono le celle a combustibile utilizzate per alimentare lo *space shuttle* e le termopile. I sistemi biologici, tra cui il cuore umano, funzionano pure come sorgenti di f.e.m.

La figura 1*a* mostra un generatore di f.e.m. $\mathcal{E}$, che potrebbe essere una batteria, collegato ad un resistore R. Il generatore di f.e.m. mantiene il suo morsetto superiore ad un alto potenziale e quello inferiore ad un basso potenziale, come indicato dai segni + e −. Nel circuito esterno portatori di carica positiva verrebbero sospinti nelle direzioni indicate dalle frecce i. In altre parole nel circuito della figura 1*a* viene generata una corrente circolante in verso orario.

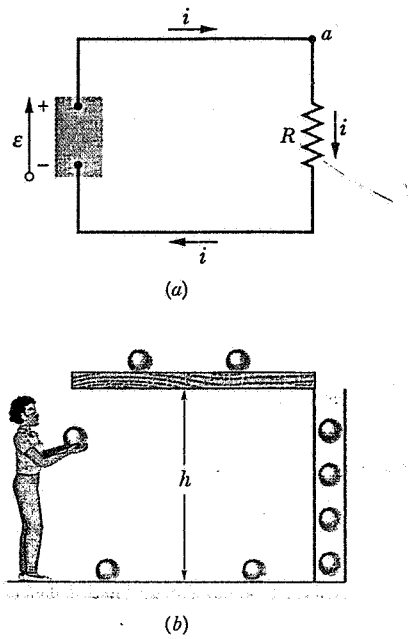


Figura 1 (*a*) Semplice circuito elettrico in cui la f.e.m. compie lavoro sui portatori di carica e genera una corrente stazionaria attraverso il resistore. (*b*) Analogo gravitazionale in cui il lavoro compiuto dalla persona produce un flusso stazionario di bocce che cadono in un mezzo viscoso.

ISBN 88-408-0777-2

Una f.e.m. viene rappresentata da una freccia posta a fianco del generatore, che punta nel verso in cui la f.e.m., agendo da sola, farebbe muovere un portatore di carica positiva nel circuito esterno. Porremo un circoletto sulla coda della freccia indicante una f.e.m. per non confonderla con una freccia indicante una corrente.

Un generatore di f.e.m. deve essere capace di compiere lavoro sui portatori di carica in arrivo. Internamente, il generatore sposta le cariche positive da un punto a basso potenziale (il morsetto negativo) ad un punto ad alto potenziale (il morsetto positivo). Le cariche, così, si muovono attraverso il circuito esterno, dissipando energia nel processo e ritornano sul morsetto negativo dal quale vengono portate nuovamente sul morsetto positivo per effetto della f.e.m., e così via (si noti che, in accordo con la nostra usuale convenzione, si analizza il circuito come se scorresse carica positiva. Il moto reale degli elettroni è in verso opposto).

Quando una corrente stazionaria viene mantenuta nel circuito della figura 1*a*, una carica dq scorre attraverso una *qualsiasi* sezione del circuito nel tempo dt. In particolare questa carica penetra nel generatore di f.e.m. $\mathcal{E}$ dal morsetto a basso potenziale e ne fuoriesce dal morsetto ad alto potenziale. Il generatore deve compiere una quantità di lavoro dL sui portatori di carica (positiva) per costringerli a raggiungere il punto ad alto potenziale. La f.e.m. $\mathcal{E}$ del generatore è definita come il lavoro per unità di carica, cioè

$$\mathcal{E} = dL/dq. \qquad (1)$$

L'unità di misura della f.e.m. è il joule/coulomb, che è il volt (abbreviazione: V):

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule/coulomb}.$$

Si noti che la forza elettromotrice non è in realtà una forza (vedi eq. 1); cioè non si misura in newton. Il nome ha radici storiche.

Il lavoro compiuto da un generatore di f.e.m. sui portatori di carica al suo interno, deve provenire da una fonte di energia interna al generatore. La fonte di energia può essere chimica (come nelle batterie o nelle celle a combustibile), meccanica (una dinamo), termica (una termopila) o radiante (cella solare). Il generatore di f.e.m. può essere descritto come un dispositivo in cui una diversa fonte di energia viene convertita in energia elettrica. L'energia fornita dal generatore di f.e.m. della figura 1*a* viene immagazzinata nei campi elettrico e magnetico* che circondano il circuito. Questa energia immagazzinata non aumenta poiché viene convertita in energia interna nel resistore e dissipata per effetto Joule, con la stessa velocità con la quale è fornita. Il campo elettrico e quello magnetico giocano il ruolo di intermediari nel processo di trasferimento di energia, agendo come serbatoi di accumulo.

La figura 1*b* mostra l'analogo gravitazionale della figura 1*a*. Nella figura in alto il generatore di f.e.m. compie lavoro sui portatori di carica. Questa energia, immagazzinata di passaggio come energia del campo elettromagnetico, appare di fatto come energia interna nel resistore R. Nella figura in basso la persona, nel sollevare le bocce dal pavimento allo scaffale, compie lavoro su di esse. Questa energia viene immagazzinata di passaggio come energia del campo gravitazionale. Le bocce scivolano lentamente ed uniformemente lungo lo scaffale e cadono dal bordo destro in un cilindro pieno di olio viscoso. Esse scendono verso il fondo ad una velocità pressochè costante, vengono raccolte da un dispositivo non illustrato e scorrono lentamente verso sinistra sul pavimento. L'energia immessa nel circuito dalla persona proviene dalla sua energia (chimica) interna. La circolazione delle cariche nella figura 1*a* termina di fatto quando la sorgente di f.e.m. si scarica; la circolazione delle bocce della figura 1*b* termina quando la persona ha esaurito le forze.

La figura 2*a* mostra un circuito contenente due batterie ideali (prive di resistenza interna) A e B, un resi-

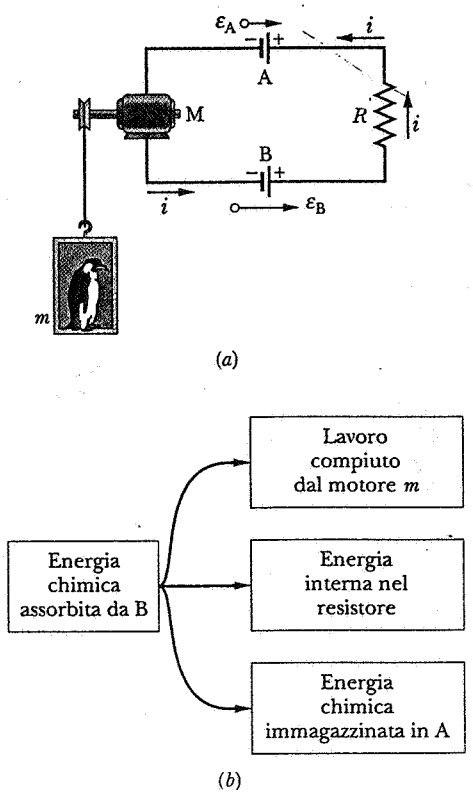


Figura 2 (*a*) $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$. La batteria B determina il verso della corrente nel circuito a singola maglia. (*b*) Trasferimenti di energia in questo circuito.

* Una corrente in un cavo genera un campo magnetico e tale campo, come il campo elettrico, può essere visto come un luogo in cui è immagazzinata energia (vedi par. 38-4).

ISBN 88-408-0777-2

store di resistenza R e un motore elettrico ideale M utilizzato per sollevare un peso. Le batterie vengono collegate in modo da sospingere le cariche nel circuito in versi opposti; il verso effettivo della corrente è determinato dalla batteria B, che produce la f.e.m. maggiore. La figura 2*b* mostra i trasferimenti di energia in questo circuito. L'energia chimica della batteria B diminuisce costantemente trasformandosi nelle tre forme elencate sulla destra. La batteria A viene caricata mentre la batteria B viene scaricata. Ancora una volta il campo elettrico e quello magnetico che circondano il circuito agiscono come intermediari.

Reversibilità *(Facoltativo)*

Un aspetto della definizione di f.e.m. ideale è che il processo di trasferimento di energia sia *reversibile*, almeno in linea di principio. Si ricordi che un processo reversibile consiste in una sequenza di stati di equilibrio; la sequenza può essere invertita con un cambiamento infinitesimo nell'ambiente che circonda il sistema (vedi par. 26-1). Una batteria, per esempio, può essere sia caricata che scaricata; una dinamo può essere azionata meccanicamente producendo energia elettrica, oppure può essere fatta funzionare all'inverso come un motore. I trasferimenti di energia (reversibili) sono, in questo caso,

$$\text{elettrica} \rightleftarrows \text{chimica}$$

e

$$\text{elettrica} \rightleftarrows \text{meccanica}.$$

Il trasferimento di energia da energia elettrica in energia interna non è reversibile. Si può facilmente alzare la temperatura di un conduttore fornendogli energia elettrica, ma *non* è possibile generare corrente elettrica in un anello di rame innalzando la temperatura uniformemente. Conseguentemente a questa mancanza di reversibilità, non si può associare una f.e.m. all'effetto Joule, o meglio, ai trasferimenti di energia nei cavi o negli elementi circuitali in cui sia implicato un riscaldamento per effetto Joule. ■

33-2 IL CALCOLO DELLA CORRENTE IN UNA SINGOLA MAGLIA

Si consideri un circuito a singolo anello o maglia, come quello della figura 1*a*, contenente un generatore di f.e.m. $\mathcal{E}$ e un resistore R. In un tempo dt una quantità di energia data da $i^2R\,dt$ appare nel resistore sotto forma di energia interna (si veda l'eq. 22 del cap. 32). In questo stesso tempo una carica dq $(= i\,dt)$ attraversa il generatore di f.e.m. e il generatore compie un lavoro su questa carica (vedi eq. 1) dato da

$$dL = \mathcal{E}\,dq = \mathcal{E}i\,dt.$$

Dal principio di conservazione dell'energia, il lavoro compiuto dal generatore deve uguagliare l'energia interna depositata nel resistore, cioè

$$\mathcal{E}i\,dt = i^2R\,dt.$$

Ricavando i, si ottiene

$$i = \mathcal{E}/R. \tag{2}$$

Si può anche ricavare l'equazione 2 considerando che, ammesso che il potenziale elettrico abbia un significato fisico, un dato punto può avere un unico valore di potenziale in un dato istante. Se si parte da un punto del circuito della figura 1*a* e ci si sposta sul circuito stesso in un senso, sommando algebricamente le variazioni di potenziale rilevate, si deve ritrovare lo stesso potenziale quando si raggiunge il punto di partenza. Si può sintetizzare questa regola come segue:

La somma algebrica delle variazioni di potenziale rilevate su un circuito chiuso in un giro completo è nulla.

Questa affermazione è detta *seconda legge di Kirchoff*; più in breve viene anche detta *legge delle maglie*. Questa legge è un modo particolare per esprimere il principio di conservazione dell'energia per un portatore di carica che attraversa un circuito chiuso.

Nella figura 1*a* si consideri un punto a, avente potenziale V_a e si percorra il circuito in senso orario (il valore numerico di V_a non è importante poiché, in genere, nei circuiti elettrici sono significative le *differenze* di potenziale). Passando attraverso il resistore si rileva una variazione di potenziale pari a $-iR$. Il segno meno indica che la parte alta del resistore ha un potenziale più alto della parte bassa, il che deve essere vero nel contesto della figura, perché i portatori di carica positiva si spostano spontaneamente dal potenziale più alto al potenziale più basso. Attraversando la batteria dal basso verso l'alto si rileva un *aumento* di potenziale pari a $+\mathcal{E}$, poiché la batteria compie lavoro (positivo) sui poratatori di carica; cioè li trasferisce da un punto a basso potenziale a un punto ad alto potenziale. Sommando algebricamente tutte le variazioni di potenziale al potenziale iniziale V_a si deve ritrovare V_a, cioè

$$V_a - iR + \mathcal{E} = V_a.$$

Ciò si traduce nella relazione

$$-iR + \mathcal{E} = 0.$$

che è indipendente dal valore di V_a e che afferma esplicitamente che la somma algebrica delle variazioni di potenziale deve essere nulla per un giro completo in una singola maglia. Questa relazione equivale alla equazione 2.

I due modi descritti per determinare la corrente in un circuito a singola maglia, il primo basato sul princi-

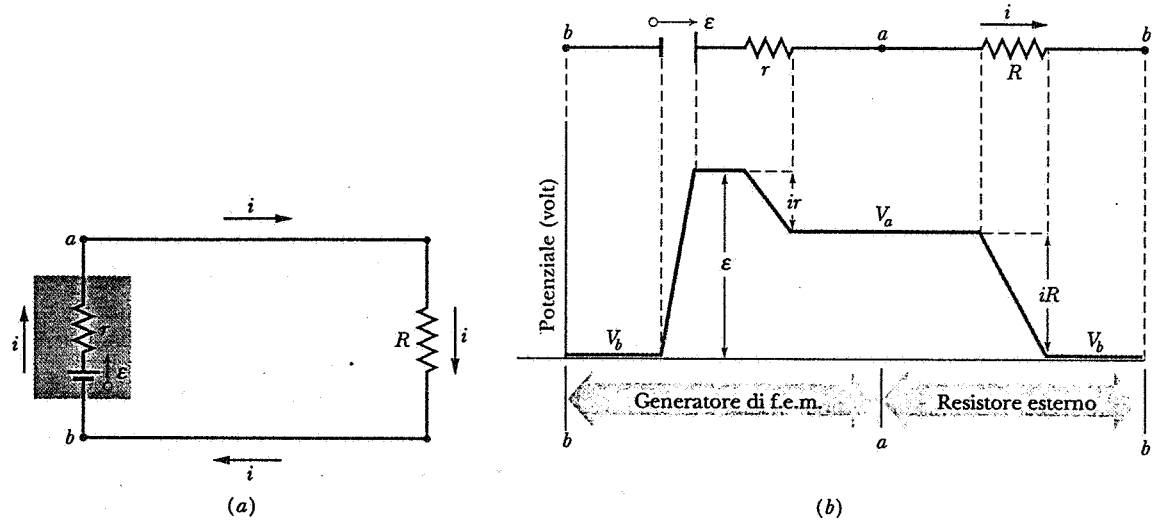


Figura 3 (*a*) Circuito a singola maglia contenente un generatore di f.e.m. con resistenza interna *r*. (*b*) Stesso circuito ridisegnato disponendo i vari componenti su una linea orizzontale. Le variazioni di potenziale incontrate percorrendo il circuito in senso orario a partire dal punto *b* sono tracciate sotto.

pio di conservazione dell'energia e il secondo sul concetto di potenziale, sono del tutto equivalenti poiché le differenze di potenziale sono definite in termini di lavoro ed energia (vedi par. 30-3).

Per prepararsi allo studio di circuiti più complessi è conveniente esaminare le regole per determinare le differenze di potenziale; tali regole seguono dalla precedente discussione. Esse non andrebbero tanto memorizzate ma comprese a fondo, in modo che appaia, poi, banale derivarle per ogni applicazione specifica.

1. La variazione di potenziale su un resistore, attraversato nel verso della corrente, è pari a $-iR$; nel verso opposto essa è $+iR$.

2. La variazione di potenziale su un generatore di f.e.m., attraversato nel verso della f.e.m. (il verso della freccia, ossia dal morsetto negativo a quello positivo), è pari a $+\mathcal{E}$; se, invece, il generatore viene attraversato nel verso opposto, la variazione di potenziale è pari a $-\mathcal{E}$.

Si tenga presente, infine, che il verso della corrente è inteso come il senso di scorrimento delle cariche positive, opposto a quello reale degli elettroni.

Resistenza interna di un generatore di f.e.m.

La figura 3*a* mostra un circuito a singola maglia, che evidenzia il fatto che ogni generatore di f.e.m. reale ha una *resistenza interna r*. Questa resistenza non può essere rimossa – benchè ciò sarebbe gradevole – poiché è una parte propria del dispositivo. La figura illustra la resistenza *r* e la f.e.m. separatamente, quantunque esse occupino fisicamente la stessa regione dello spazio.

Si può applicare la legge delle maglie partendo da un punto qualunque del circuito. Partendo dal punto *b* e spostandosi in senso orario, si ottiene

$$V_b + \mathcal{E} - ir - iR = V_b$$

cioè

$$+\mathcal{E} - ir - iR = 0.$$

Si confrontino queste equazioni con la figura 3*b*, che mostra graficamente le variazioni di potenziale. Nello scrivere queste equazioni, si noti che *r* ed *R* vengono attraversate nel senso della corrente ed $\mathcal{E}$ nel senso della f.e.m. La stessa equazione si ottiene partendo da un qualunque altro punto del circuito, o percorrendolo in senso antiorario. Ricavando *i* si ottiene

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \qquad (3)$$

Si noti che la resistenza interna *r* *diminuisce* la corrente che la f.e.m. può immettere nel circuito esterno.

33-3 DIFFERENZE DI POTENZIALE

Spesso si desidera determinare la differenza di potenziale tra due punti di un circuito. Nella figura 3*a*. per esempio, ci si può chiedere come la differenza di potenziale V_{ab} $(= V_a - V_b)$ tra i punti *a* e *b* dipenda dai parametri fissi del circuito: $\mathcal{E}$, *r* ed *R*. Per trovare la relazione, si può partire dal punto *b* ed attraversare il

ISBN 88-408-0777-2

circuito in senso antiorario fino a raggiungere il punto a, passando attraverso il resistore R. Se V_a e V_b sono, rispettivamente, i potenziali in a e b, si ha

$$V_b + iR = V_a$$

dato che il potenziale rilevato attraversando il resistore nel verso della corrente varia in senso opposto. Si può riscrivere questa relazione in termini di V_{ab}, come

$$V_{ab} = V_a - V_b = +iR,$$

che dice che V_{ab} ha ampiezza iR e che il punto a è più positivo del punto b. Combinando quest'ultima equazione con l'equazione 3, si ha

$$V_{ab} = \mathcal{E}\frac{R}{R+r}. \qquad (4)$$

In conclusione, per trovare la differenza di potenziale tra due punti qualsiasi di un circuito, si parte da un punto e ci si sposta lungo il circuito verso l'altro punto, sommando algebricamente le variazioni di potenziale incontrate. Questa somma algebrica è la differenza di potenziale tra i punti. Tale procedura è simile a quella che si adotta per trovare la corrente in un anello chiuso, con l'unica differenza che qui le differenze di potenziale vengono sommate soltanto su una parte dell'anello e non su tutta la maglia.

Si può seguire un *qualunque* cammino tra i due punti lungo il circuito ottenendo lo stesso valore di differenza di potenziale, dato che un aspetto fondamentale del concetto di potenziale è l'*indipendenza dal cammino*. La differenza di potenziale tra due punti qualsiasi può avere soltanto un valore; si deve ottenere lo stesso risultato su tutti i cammini che collegano i punti in esame (analogamente, considerando due punti di una collina, la differenza di potenziale gravitazionale misurata tra di essi è la stessa indipendentemente dal cammino seguito per spostarsi dal primo al secondo punto). Nella figura 3*a* possiamo ricalcolare V_{ab} seguendo un cammino che parte da a e procede in senso antiorario attraverso il generatore di f.e.m. (ciò equivale a partire da a nella figura 3*b* spostandosi verso sinistra fino a raggiungere b). Si ha che

$$V_a + ir - \mathcal{E} = V_b$$

cioè

$$V_{ab} = V_a - V_b = +\mathcal{E} - ir.$$

Combinando questo risultato con l'equazione 3 si ottiene l'equazione 4.

La quantità V_{ab} è la differenza di potenziale sui morsetti della batteria. Si vede dall'equazione 4 che V_{ab} è uguale a $\mathcal{E}$ soltanto se la batteria non ha resistenza interna ($r = 0$) o il circuito esterno è aperto ($R = \infty$).

Esempio 1 Qual è la corrente nel circuito della figura 4*a*? Le f.e.m. e i resistori hanno i seguenti valori:

$$\mathcal{E}_1 = 2.1\ \text{V}, \quad \mathcal{E}_2 = 4.4\ \text{V},$$
$$r_1 = 1.8\ \Omega, \quad r_2 = 2.3\ \Omega, \quad R = 5.5\ \Omega.$$

Soluzione Le due f.e.m. sono connesse l'una all'altra in verso opposto, ma $\mathcal{E}_2$, essendo maggiore di $\mathcal{E}_1$, determina il verso della corrente nel circuito, che è antiorario. La legge delle maglie, ap-

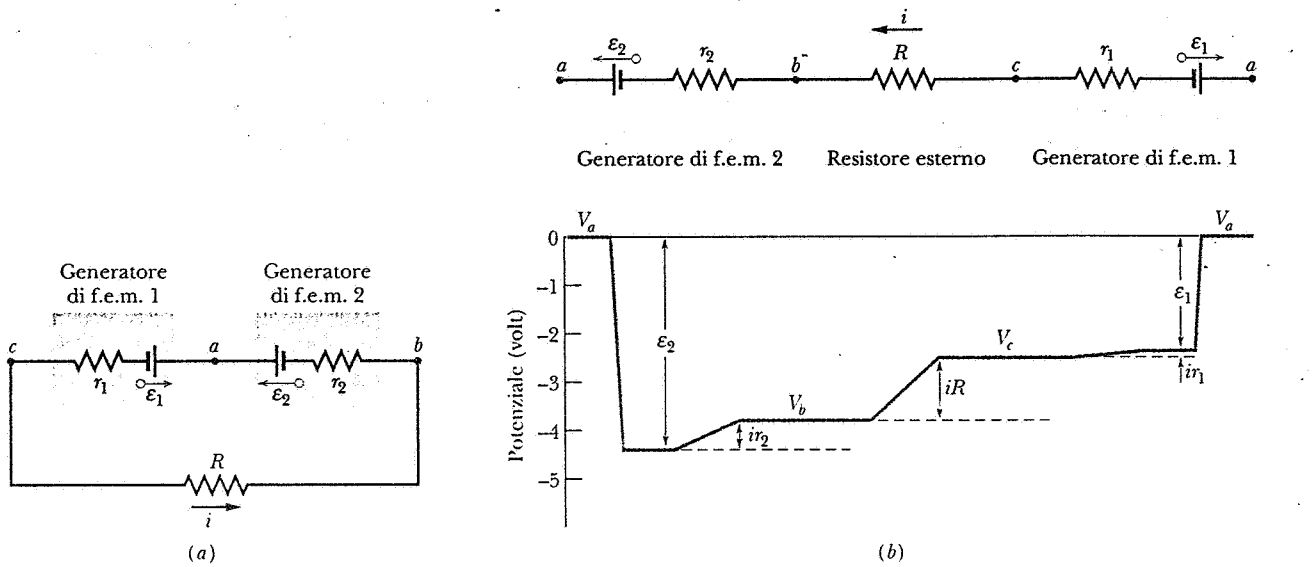


Figura 4 Esempi 1 e 2. (*a*) Circuito a singola maglia contenente due generatori di f.e.m. (*b*) Variazioni di potenziale incontrate percorrendo il circuito in senso orario a partire dal punto a.

plicata in senso orario a partire dal punto a, si traduce nella relazione

$$-\mathcal{E}_2 + ir_2 + iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0.$$

Si verifichi che questa stessa equazione può essere ottenuta applicando la legge delle maglie in senso antiorario o partendo da un punto diverso da a. Si confronti, inoltre, questa relazione con il diagramma delle variazioni di potenziale della figura 4*b*.

Ricavando la corrente i, si ottiene

$$i = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2} = \frac{4.4\text{ V} - 2.1\text{ V}}{5.5\ \Omega + 1.8\ \Omega + 2.3\ \Omega} = 0.24\text{ A}.$$

Non è necessario conoscere a priori il verso della corrente. Per mostrare ciò, si assuma che la corrente nella figura 4*a* scorra in senso orario, cioè in senso opposto al verso della freccia della corrente della figura 4*a*. La legge delle maglie porterebbe (spostandosi in senso orario dal punto a) a

$$-\mathcal{E}_2 - ir_2 - iR - ir_1 + \mathcal{E}_1 = 0$$

cioè

$$i = -\frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{R + r_1 + r_2}.$$

Sostituendo i valori numerici, si ha $i = -0.24$ A. Il segno meno indica che la corrente scorre in senso opposto a quello che si era fissato in partenza.

In circuiti più complessi che contengono molte maglie e rami, è spesso impossibile prevedere il verso reale di scorrimento delle correnti in tutte le parti del circuito. Tuttavia il verso della corrente su ciascun ramo può essere scelto arbitrariamente. Se, poi, si ottiene un risultato di segno positivo, significa che la corrente scorre effettivamente, in quel ramo, nel verso ipotizzato; se si ottiene un risultato di segno negativo la corrente scorre effettivamente in verso opposto a quello ipotizzato. In entrambi i casi il valore numerico è corretto.

Esempio 2 (*a*) Qual è la differenza di potenziale tra il punto a e il punto b nella figura 4*a*? (*b*) Qual è la differenza di potenziale tra i punti a e c nella figura 4*a*?

Soluzione (*a*) La differenza di potenziale incognita è la tensione che cade ai morsetti della batteria 2, che include la f.e.m. $\mathcal{E}_2$ e la resistenza interna r_2. Partendo dal punto b e percorrendo il circuito in senso antiorario fino a raggiungere il punto a, passando attraverso il generatore di f.e.m., si trova

$$V_b - ir_2 + \mathcal{E}_2 = V_a$$

cioè

$$V_a - V_b = -ir_2 + \mathcal{E}_2 = -(0.24\text{ A})(2.3\ \Omega) + 4.4\text{ V} = +3.8\text{ V}.$$

Si vede che a è più positivo di b e la differenza di potenziale tra i due punti (3.8 V) è *più piccola* della f.e.m. (4.4 V); si veda la figura 4*b*.

Si può verificare questo risultato partendo dal punto b nella figura 4*a* e attraversando il circuito in senso orario fino a raggiungere il punto a. Su questo cammino si trova

$$V_b + iR + ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a$$

cioè

$$V_a - V_b = iR + ir_1 + \mathcal{E}_1$$
$$= (0.24\text{ A})(5.5\ \Omega + 1.8\ \Omega) + 2.1\text{ V} = +3.8\text{ V}.$$

esattamente come prima. La differenza di potenziale tra i due punti ha lo stesso valore indipendentemente dal cammino seguito per spostarsi dall'uno all'altro.

(*b*) Si noti che la differenza di potenziale tra a e c, è la differenza di potenziale ai morsetti della batteria 1, costituita dalla f.e.m. $\mathcal{E}_1$ e dalla resistenza interna r_1. Si parta, ora, dal punto c e si attraversi il circuito in senso orario fino a raggiungere il punto a. Si trova

$$V_c + ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a$$

cioè

$$V_a - V_c = ir_1 + \mathcal{E}_1 = (0.24\text{ A})(1.8\ \Omega) + 2.1\text{ V} = +2.5\text{ V}.$$

Ciò indica che a è ad un più alto potenziale di c. La differenza di potenziale finale (2.5 V) è, in questo caso, *più grande* della f.e.m. (2.1 V); si veda la figura 4*b*. La carica viene forzata attraverso $\mathcal{E}_1$ nel senso opposto a quello in cui si sposterebbe se $\mathcal{E}_1$ agisse da sola; se $\mathcal{E}_1$ fosse una batteria ricaricabile, essa si caricherebbe a spese di $\mathcal{E}_2$.

33-4 RESISTORI IN SERIE E IN PARALLELO

Come nel caso dei condensatori (vedi par. 31-3), i resistori spesso vengono inseriti nei circuiti in varie combinazioni. Nell'analizzare questi circuiti è utile sostituire la combinazione di resistori con una singola *resistenza equivalente* R_{eq} il cui valore viene scelto in modo che il comportamento del circuito non vari. Si considerano due modi in cui i resistori possono essere combinati.

Resistori collegati in parallelo

Riprendiamo la definizione di collegamento in parallelo di elementi circuitali del paragrafo 31-3: ci si può spostare nella combinazione attraversando *soltanto un* elemento; la stessa differenza di potenziale V appare su ciascun elemento e il flusso di carica si suddivide tra i vari elementi.

La figura 5 mostra due resistori collegati in parallelo. Si cerca la resistenza equivalente tra i punti a e b. Si assuma di collegare una batteria (o un altro generatore di f.e.m.) che mantenga una differenza di potenziale V tra i punti a e b. La differenza di potenziale su

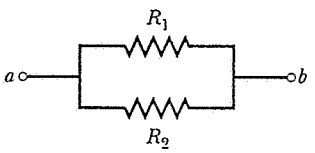


Figura 5 Resistori in parallelo.

ISBN 88-408-0777-2

ciascun resistore è V. Le correnti che attraversano ciascun resistore, in base all'equazione 2, sono

$$i_1 = V/R_1 \quad \text{e} \quad i_2 = V/R_2. \tag{5}$$

In accordo con le proprietà di una connessione in parallelo, la corrente totale i deve essere suddivisa tra i rami, per cui

$$i = i_1 + i_2. \tag{6}$$

Se sostituissimo la rete di resistori collegati in parallelo con una singola resistenza equivalente R_{eq}, attraverso essa scorrerebbe la stessa corrente totale i (dato che l'operazione di sostituzione non deve variare il comportamento del circuito). La corrente è allora

$$i = V/R_{eq}. \tag{7}$$

Sostituendo le equazioni 5 e 7 nell'equazione 6, si ottiene

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

cioè

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{8}$$

Per determinare la resistenza equivalente di una rete di più di due resistori in parallelo, si deve iniziare a trovare la resistenza equivalente R_{12} dei resistori R_1 e R_2 utilizzando l'equazione 8. Si trova poi la resistenza equivalente di R_{12} e R_3, usando ancora l'equazione 8. Procedendo in tal modo si ottiene una espressione generale della resistenza equivalente di una combinazione in parallelo di un numero qualsiasi di resistori,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_n \frac{1}{R_n} \quad \text{(combinazione in parallelo).} \tag{9}$$

Cioè, per trovare la resistenza equivalente di una combinazione in parallelo, si sommano i reciproci delle singole resistenze e si prende, infine, il reciproco della sommatoria. Si noti che R_{eq} è sempre *più piccola* della più piccola resistenza della combinazione in parallelo; offrendo più cammini alla corrente, si ottiene una corrente maggiore per una assegnata differenza di potenziale.

Nel caso particolare di due resistori in parallelo, l'equazione 8 può essere scritta come

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \tag{10}$$

cioè il prodotto di due resistenze diviso per la loro somma.

Resistori collegati in serie

La figura 6 mostra due resistori collegati in serie. Ricordiamo le proprietà di una connessione in serie di elementi circuitali (vedi par. 31-3): per passare attraverso la combinazione bisogna attraversare, in successione, *tutti* gli elementi; una batteria collegata alla combinazione produce (in generale) una diversa caduta di potenziale su ciascun elemento e la stessa corrente percorre ciascun elemento.

Si supponga che una batteria con differenza di potenziale V sia collegata sui punti a e b della figura 6. Una corrente i si stabilisce nella combinazione e in ciascun resistore. Le differenze di potenziale sui resistori sono

$$V_1 = iR_1 \quad \text{e} \quad V_2 = iR_2. \tag{11}$$

La somma di queste differenze di potenziale deve fornire la differenza di potenziale tra i punti a e b, imposta dalla batteria, cioè

$$V = V_1 + V_2. \tag{12}$$

Se si sostituisse la combinazione con la sua resistenza equivalente R_{eq}, scorrerebbe la stessa corrente i, per cui

$$V = iR_{eq}. \tag{13}$$

Combinando le equazioni 11, 12 e 13 si ottiene

$$iR_{eq} = iR_1 + iR_2,$$

cioè

$$R_{eq} = R_1 + R_2. \tag{14}$$

Estendendo questo risultato ad una combinazione in serie di un numero qualsiasi di resistori, si ottiene

$$R_{eq} = \sum_n R_n \quad \text{(combinazione in serie).} \tag{15}$$

Cioè, per trovare la resistenza equivalente di una combinazione in serie, si calcola la somma delle singole resistenze.

Si noti che la resistenza equivalente di una combinazione in serie è sempre *più grande* della più grande resistenza della serie; aggiungendo più resistori in serie si ottiene una minor corrente per una assegnata differenza di potenziale.

Confrontando questi risultati con le equazioni 19 e 24 del capitolo 31 relativo alle reti in serie e in parallelo di condensatori, si vede che i resistori in parallelo si sommano come i condensatori in serie e i resistori in

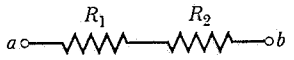


Figura 6 Resistori in serie.

serie si sommano come i condensatori in parallelo. Ciò ha a che vedere con i diversi modi in cui le due quantità vengono definite, essendo la resistenza il rapporto tensione/corrente e la capacità il rapporto carica/tensione.

Occasionalmente i resistori possono essere connessi in modi che non sono né in serie né in parallelo. In tali casi la resistenza equivalente può, talvolta, essere determinata spezzando il problema in sottoproblemi in cui si possono riconoscere semplici collegamenti in serie o in parallelo.

Esempio 3 (*a*) Si trovi la resistenza equivalente della connessione illustrata nella figura 7*a*, assumendo che $R_1 = 4.6\ \Omega$, $R_2 = 3.5\ \Omega$ e $R_3 = 2.8\ \Omega$. (*b*) Qual è il valore della corrente che scorre attraverso R_1 quando una batteria da 12.0 V viene connessa tra i punti *a* e *b*?

Soluzione (*a*) Si considera, inizialmente, la resistenza equivalente R_{12} della combinazione in parallelo di R_1 e R_2. Utilizzando l'equazione 10 si ottiene

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(4.6\ \Omega)(3.5\ \Omega)}{4.6\ \Omega + 3.5\ \Omega} = 2.0\ \Omega.$$

R_{12} e R_3 sono in serie, come evidenziato nella figura 7*b*. Utilizzando l'equazione 14 si può determinare la resistenza equivalente R_{123} di questa combinazione in serie, che è la resistenza equivalente della rete complessiva iniziale:

$$R_{123} = R_{12} + R_3 = 2.0\ \Omega + 2.8\ \Omega = 4.8\ \Omega.$$

(*b*) Collegando una batteria da 12 V tra i punti *a* e *b* della figura 7*c*, la corrente risultante è

$$i = \frac{V}{R_{123}} = \frac{12.0\ \text{V}}{4.8\ \Omega} = 2.5\ \text{A}.$$

Con questa corrente nella combinazione in serie della figura 7*b*, la differenza di potenziale su R_{12} è

$$V_{12} = iR_{12} = (2.5\ \text{A})(2.0\ \Omega) = 5.0\ \text{V}.$$

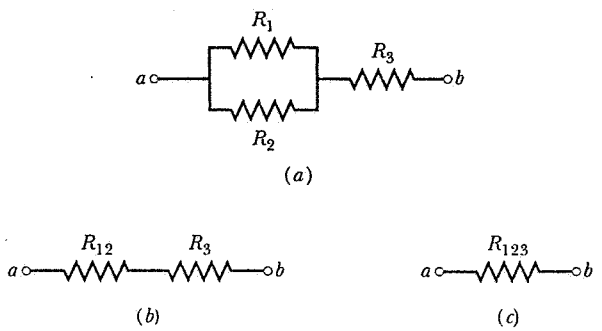


Figura 7 Esempio 3. (*a*) Connessione in parallelo di R_1 e R_2 a loro volta in serie con R_3. (*b*) La connessione in parallelo di R_1 e R_2 viene sostituita dalla resistenza equivalente R_{12}. (*c*) La connessione in serie di R_{12} e R_3 viene sostituita dalla resistenza equivalente R_{123}.

In una connessione in parallelo, la stessa differenza di potenziale appare su ciascun elemento (e sulla loro combinazione). La differenza di potenziale su R_1 (e R_2) è, perciò, pari a 5.0 V e la corrente attraverso R_1 è

$$i_1 = \frac{V_{12}}{R_1} = \frac{5.0\ \text{V}}{4.6\ \Omega} = 1.1\ \text{A}.$$

Esempio 4 La figura 8*a* mostra un cubo costituito da 12 resistori, ciascuno avente resistenza R. Si determini R_{12}, la resistenza equivalente su un lato del cubo.

Soluzione Quantunque in questo problema sembri, a prima vista, molto complicato trovare una scomposizione in sottoparti

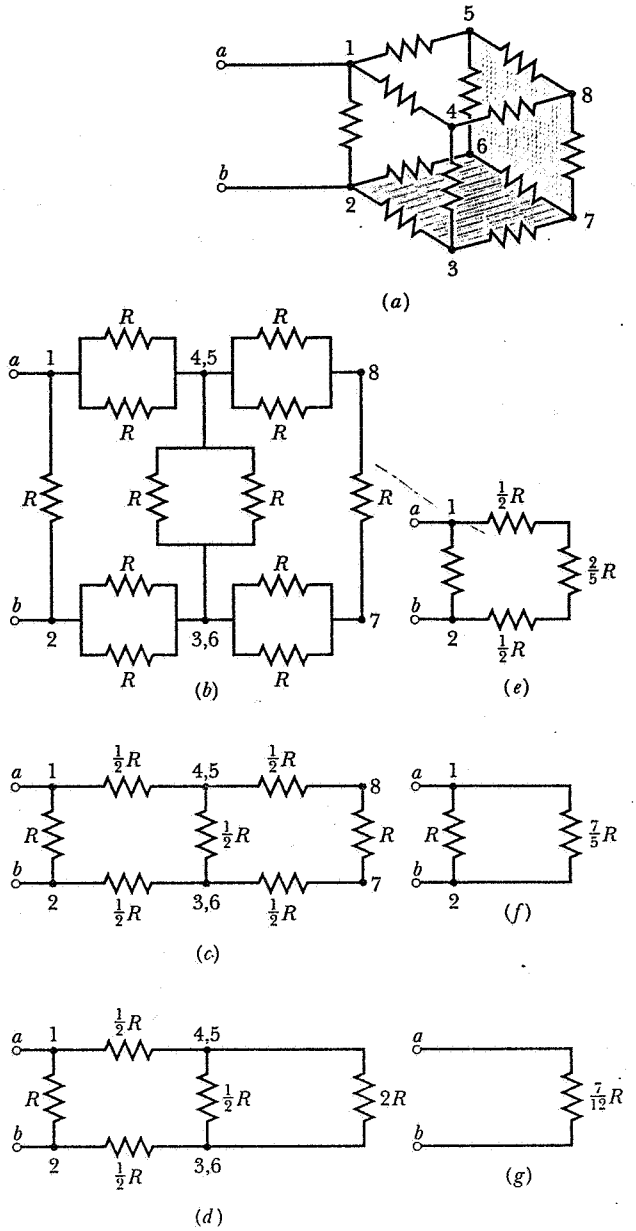


Figura 8 Esempio 4. (*a*) Cubo formato da 12 resistori identici. (*b*) - (*g*) Riduzione del cubo ad una singola resistenza equivalente.

ISBN 88-408-0777-2

costituite da semplici collegamenti in serie e in parallelo, la simmetria delle connessioni suggerisce un modo per procedere. Per questioni di simmetria, i punti 3 e 6 devono avere lo stesso potenziale. Così pure i punti 4 e 5.

Se due punti hanno il medesimo potenziale, le correnti nel circuito non variano collegando i due punti con un cavo. Nel cavo non scorre corrente poiché non c'è alcuna differenza di potenziale ai suoi estremi. I punti 3 e 6 possono perciò essere connessi con un cavo, così come i punti 4 e 5.

Ciò consente di ritracciare il cubo come nella figura 8*b*. Riferendosi a questa rappresentazione è molto semplice ridurre il circuito visto dai terminali di ingresso ad un singolo resistore, facendo uso delle regole che descrivono le connessioni in serie e in parallelo dei resistori. Nella figura 8*c* si fa un primo passo sostituendo le cinque combinazioni in parallelo di resistori con i loro resistori equivalenti di resistenza pari a $\frac{1}{2}R$.

Nella figura 8*d* si sono sommati i tre resistori in serie nella maglia di destra, ottenendo una singola resistenza equivalente pari a $2R$. Nella figura 8*e* si sono sostituiti i due resistori che formano la maglia di destra nella rete della figura 8*d* con un singolo resistore equivalente pari a $\frac{2}{5}R$. Per compiere questa operazione è utile ricordare che la resistenza equivalente di due resistori in parallelo è uguale al loro prodotto diviso per la loro somma (vedi eq. 10).

Nella figura 8*f* si sono sommati i tre resistori in serie della figura 8*e*, ottenendo una resistenza equivalente pari a $\frac{7}{5}R$ e, infine, nella figura 8*g* questa connessione in parallelo viene ridotta alla singola resistenza equivalente, cioè

$$R_{12} = \frac{7}{12}R.$$

Lo stesso metodo può essere adottato per determinare R_{13}, la resistenza equivalente di un cubo lungo la diagonale di una faccia e R_{17}, la resistenza equivalente lungo la diagonale del cubo (vedi problema 29).

33-5 CIRCUITI A MOLTE MAGLIE

La figura 9 mostra un circuito contenente più di un anello o maglia. Per semplicità, vengono trascurate le resistenze interne delle batterie. Analizzando questo tipo di circuiti è conveniente considerarne i *nodi* e i *rami*. Un nodo, in un circuito a molti rami come quello della figura 9, è un punto in cui tre o più cavi si riuniscono. Nel circuito della figura 9 ci sono due nodi, nei punti *b* e *d* (i punti *a* e *c* della figura 9 *non* sono nodi perché soltanto due cavi vi convergono).

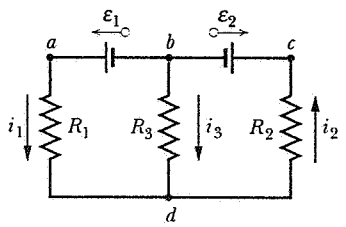


Figura 9 Circuito a due maglie. Essendo note le f.e.m. e le resistenze si vogliono trovare le tre correnti.

Un ramo è un qualunque cammino che parte da un nodo e, procedendo sul circuito, giunge su un secondo nodo. Ci sono tre rami nel circuito della figura 9; cioè, ci sono tre cammini che collegano i nodi *b* e *d*; il primo è il ramo di sinistra *bad*, il secondo è il ramo di destra *bcd* e il terzo è il ramo centrale *bd*.

Nei circuiti a singola maglia, come quelli delle figure 3 e 4, c'è soltanto una corrente da determinare. Nei circuiti a molte maglie, invece, ogni ramo ha una sua propria corrente, che deve essere determinata analizzando il circuito. Nel circuito della figura 9 le tre correnti (incognite) vengono designate i_1 (per il ramo *bad*), i_2 (per il ramo *bcd*) e i_3 (per il ramo *bd*). I versi delle correnti sono stati posti arbitrariamente. Esaminando attentamente il circuito si nota che i_3 deve avere verso opposto a quello indicato. Si è fissato deliberatamente il verso errato per mostrare come il formalismo delle procedure matematiche porta a conclusioni corrette anche nel caso di supposizioni iniziali arbitrarie.

Si noti che non si può analizzare il circuito della figura 9 in termini di collegamenti in serie e in parallelo. Riprendendo i criteri che definivano le connessioni in serie e in parallelo, si conclude che non è possibile considerare una qualunque combinazione di R_1, R_2 e R_3 come una rete di resistori in serie o in parallelo.

Le tre correnti, i_1, i_2 e i_3 portano tutte carica verso il punto *d* oppure sottraggono carica dal nodo *d*. Le cariche non si accumulano nel nodo *d* poiché il circuito si trova in uno stato di funzionamento stazionario; le correnti uscenti rimuovono carica dal nodo con la stessa velocità con la quale le correnti entranti ne immettono. Nel nodo *d* la carica totale entrante per unità di tempo è data da $i_1 + i_3$ e quella uscente è data da i_2. Traducendo ciò in un bilancio tra le correnti entranti e quelle uscenti si ha che

$$i_1 + i_3 = i_2. \tag{16}$$

Questa equazione suggerisce un principio generale per l'analisi dei circuiti a molte maglie:

> *In ogni nodo la somma delle correnti che lo lasciano (quelle indicate con una freccia che esce dal nodo), uguaglia la somma delle correnti che vi entrano (quelle indicate con una freccia che entra nel nodo).*

Questa *legge dei nodi*, che viene anche chiamata *prima legge di Kirchoff*, è semplicemente una forma del principio di conservazione della carica. Gli strumenti di base per l'analisi di un circuito sono, ora, (1) il principio di conservazione dell'energia (la legge delle maglie, vedi par. 33-2) e (2) il principio di conservazione della carica (legge dei nodi).

Per il circuito della figura 9, la legge dei nodi porta soltanto ad una equazione tra tre incognite. Applicando la legge dei nodi al punto b si ottiene esattamente la stessa equazione, come si può facilmente verificare. Per ricavare le tre incognite servono altre due equazioni indipendenti; esse possono essere individuate applicando la legge delle maglie.

In un circuito a singola maglia c'è soltanto un anello sul quale applicare la legge delle maglie e la corrente è uguale in qualunque punto dell'anello. In un circuito a molte maglie ci sono vari anelli e la corrente, in generale, *non* è la stessa in tutte le parti di ciascuna maglia.

Se percorriamo la maglia di sinistra della figura 9 in senso antiorario partendo e terminando nel punto b, la legge delle maglie dà

$$\mathcal{E}_1 - i_1R_1 + i_3R_3 = 0. \tag{17}$$

La maglia di destra dà (con un percorso che si sviluppa ancora in senso antiorario a partire dal punto b)

$$-i_3R_3 - i_2R_2 - \mathcal{E}_2 = 0. \tag{18}$$

Queste due equazioni, unite alla relazione ricavata in precedenza, con la legge dei nodi (equazione 16), sono le tre equazioni indipendenti necessarie per ricavare le incognite i_1, i_2 e i_3. Risolvendole (si svolgano i passaggi matematici per esercizio), si trova

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1(R_2 + R_3) - \mathcal{E}_2R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}, \tag{19}$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_1R_3 - \mathcal{E}_2(R_1 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}, \tag{20}$$

$$i_3 = \frac{-\mathcal{E}_1R_2 - \mathcal{E}_2R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}. \tag{21}$$

L'equazione 21 mostra che, qualunque sia il valore numerico delle f.e.m. e delle resistenze, la corrente i_3 ha sempre valore negativo. Ciò significa che essa è rivolta sempre verso l'alto nella figura 9, come era stato osservato sin dall'inizio. Le correnti i_1 e i_2 possono avere un qualunque verso, a seconda dei valori numerici delle f.e.m. e delle resistenze.

Per esaminare questi risultati si verifichi che le equazioni 19-21 si riducono a conclusioni ragionevoli nei casi limite. Per $R_3 = \infty$, ad esempio, si trova

$$i_1 = i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2} \quad \text{e} \quad i_3 = 0.$$

Come si riducono queste equazioni per $R_2 = \infty$?

La legge delle maglie può essere applicata all'anello più grande costituito dall'intero circuito *abcda* della figura 9. Ciò sembra implicare che ci siano più equazioni di quelle necessarie, dato che ci sono soltanto tre incognite e sono già state scritte tre equazioni in cui esse comparivano. In realtà la legge delle maglie applicata sull'anello *abcda* dà

$$-i_1R_1 - i_2R_2 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 = 0,$$

che è la somma delle equazioni 17 e 18. L'anello più grande porta ad una equazione che non è *indipendente* dalle altre precedentemente scritte. Nei circuiti a più maglie il numero di equazioni indipendenti deve essere uguale al numero dei rami (o delle singole correnti). Il numero delle equazioni *al nodo* indipendenti è inferiore di 1 al numero dei nodi (nel caso del circuito della figura 9, che presenta due nodi, si ha una equazione al nodo). Le restanti equazioni devono essere equazioni *alle maglie*.

Esempio 5 La figura 10 mostra un circuito i cui elementi hanno i seguenti valori numerici

$$\mathcal{E}_1 = 2.1\ \text{V}, \quad \mathcal{E}_2 = 6.3\ \text{V},$$
$$R_1 = 1.7\ \Omega, \quad R_2 = 3.5\ \Omega.$$

Si determinino le correnti nei tre rami del circuito.

Soluzione Si rappresentino le correnti come mostrato nella figura, scegliendo per le correnti versi arbitrari. Scrivendo una equazione al nodo a si trova

$$i_1 + i_2 = i_3. \tag{22}$$

Ora, partendo dal punto a si percorra la maglia di sinistra del circuito in senso antiorario. Si trova

$$-i_1R_1 - \mathcal{E}_1 - i_1R_1 + \mathcal{E}_2 + i_2R_2 = 0$$

cioè

$$2i_1R_1 - i_2R_2 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1. \tag{23}$$

Percorrendo la maglia di destra del circuito in senso orario, partendo dal punto a, si trova

$$+i_3R_1 - \mathcal{E}_2 + i_3R_1 + \mathcal{E}_2 + i_2R_2 = 0$$

cioè

$$i_2R_2 + 2i_3R_1 = 0. \tag{24}$$

Le espressioni 22, 23 e 24 sono tre equazioni indipendenti nelle

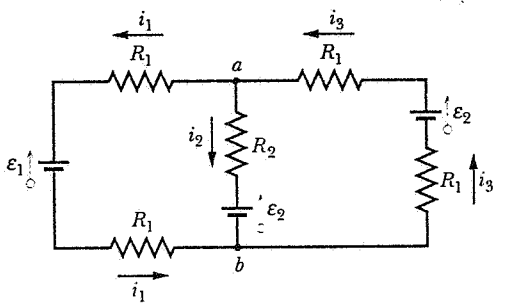


Figura 10 Esempi 5 e 6. Circuito a due maglie.

ISBN 88-408-0777-2

tre incognite i_1, i_2 e i_3. Si può risolvere questo sistema di equazioni ricavando le tre incognite. Con i necessari passaggi algebrici si ottiene

$$i_1 = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(2R_1 + R_2)}{4R_1(R_1 + R_2)}$$

$$= \frac{(6.3\ \text{V} - 2.1\ \text{V})(2 \times 1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)}{(4)(1.7\ \Omega)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)} = 0.82\ \text{A},$$

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{2(R_1 + R_2)}$$

$$= \frac{6.3\ \text{V} - 2.1\ \text{V}}{(2)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega} = 0.40\ \text{A},$$

$$i_3 = \frac{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)R_2}{4R_1(R_1 + R_2)}$$

$$= \frac{(6.3\ \text{V} - 2.1\ \text{V})(3.5\ \Omega)}{(4)(1.7\ \Omega)(1.7\ \Omega + 3.5\ \Omega)} = 0.42\ \text{A}.$$

I segni delle correnti indicano che i versi di i_1 e i_3 erano stati fissati correttamente sul circuito, mentre il verso di i_2 era stato posto erroneamente: i_2 scorre verso l'alto, e non verso il basso, nel ramo centrale del circuito della figura 10. Si può lasciare il verso errato sulla figura ricordondo, però, che il valore numerico di i_2 è negativo, in tutti i calcoli successivi che riguardano le correnti.

Esempio 6 Qual è la differenza di potenziale tra i punti a e b della figura 10?

Soluzione Percorrendo il ramo ab della figura 10 e assumendo i versi della corrente indicati, si ha che

$$V_a - i_2R_2 - \mathcal{E} = V_b,$$

cioè

$$V_a - V_b = \mathcal{E}_2 + i_2R_2$$
$$= 6.3\ \text{V} + (-0.40\ \text{A})(3.5\ \Omega) = +4.9\ \text{V}.$$

Il segno positivo indica che a ha un potenziale più positivo di b. Ci si aspetta questo risultato osservando lo schema del circuito, infatti tutte e tre le batterie hanno il loro morsetto positivo verso l'alto.

33-6 STRUMENTI DI MISURA

Molti strumenti di misura elettronici contengono circuiti che possono essere analizzati con i metodi descritti in questo capitolo. Ne discuteremo tre

L'amperometro

Uno strumento di misura per le correnti è chiamato *amperometro*. Per misurare la corrente in un cavo è, in genere, necessario interrompere il cavo ed inserire l'amperometro in modo che la corrente vi scorra all'interno; si veda la figura 11.

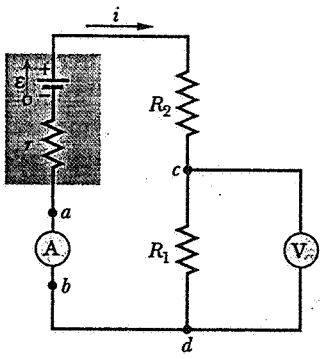


Figura 11 Circuito a singola maglia che illustra il collegamento di un amperometro A, che misura la corrente i, e un voltmetro V, che misura la differenza di potenziale tra i punti c e d.

È essenziale che la resistenza R_A dell'amperometro sia molto piccola (nel caso ideale nulla) in confronto alle altre resistenze del circuito. Altrimenti la presenza dello strumento cambierebbe la corrente che si vuole misurare. Nel circuito a singola maglia della figura 11, la condizione richiesta, assumendo che il voltmetro sia sconnesso, è

$$R_A \ll r + R_1 + R_2.$$

Un amperometro può anche essere impiegato come un *ohmetro* per misurare una resistenza incognita; si veda il problema 40.

Il voltmetro

Uno strumento per misurare le differenze di potenziale è chiamato *voltmetro*. Per trovare la differenza di potenziale tra due punti di un circuito, i morsetti del voltmetro vengono connessi a quei punti senza spezzare il circuito; si veda la figura 11.

È essenziale che la resistenza R_V di un voltmetro sia molto grande (nel caso ideale infinita) rispetto alle resistenze del circuito sul quale il voltmetro viene connesso. Altrimenti una corrente significativa scorrerebbe nello strumento producendo una variazione nella corrente che attraversa l'elemento circuitale in parallelo con lo strumento e, di conseguenza, producendo una variazione sulla differenza di potenziale che si vuole misurare. Nella figura 11, la condizione richiesta è

$$R_V \gg R_1.$$

Spesso un singolo strumento viene progettato in modo che possa essere commutato attraverso un interruttore esterno ad amperometro, voltmetro o ohmetro. Un tale tipo di strumento viene chiamato *multimetro*. La lettura esterna può essere fatta attraverso un ago che si sposta su una scala oppure attraverso un indicatore digitale.

Il potenziometro

Un *potenziometro* è un dispositivo utile per misurare una f.e.m. incognita $\mathcal{E}_x$ confrontandola con una f.e.m. standard nota $\mathcal{E}_s$. La figura 12 mostra i suoi elementi base. Il resistore che si estende da *a* ad *e* è un resistore di precisione dotato di un contatto scorrevole posizionato, nella figura, nel punto *d*. La resistenza *R* indicata nella figura è la resistenza tra i punti *a* e *d*.

Quando si utilizza lo strumento, $\mathcal{E}_s$ viene dapprima inserita nel circuito al posto di $\mathcal{E}$ e il contatto scorrevole viene spostato fino a che la corrente *i* si annulla, come si può vedere sull'amperometro ad alta sensibilità A. Il potenziometro viene detto, in tale condizione, *bilanciato*; il valore di *R* in questa situazione è R_s. Considerando la maglia *abcda* in questo punto di equilibrio, si ricava

$$\mathcal{E}_s = i_0 R_s. \qquad (25)$$

Poiché $i = 0$ sul ramo *abcd*, la resistenza interna *r* del generatore standard di f.e.m. (o dell'amperometro) non ha alcun effetto, cioè non presenta una differenza di potenziale ai suoi morsetti da aggiungere alla f.e.m.

Il processo viene ora ripetuto inserendo nel circuito $\mathcal{E}_x$ al posto di $\mathcal{E}_s$. Il potenziometro viene nuovamente bilanciato. La corrente i_0 resta costante (poiché $i = 0$) e il nuovo punto di equilibrio è tale che

$$\mathcal{E}_x = i_0 R_x. \qquad (26)$$

Dalle equazioni 25 e 26 si ha, infine,

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_s \frac{R_x}{R_s}. \qquad (27)$$

La f.e.m. incognita può essere trovata in termini della f.e.m. nota con due aggiustamenti del resistore di precisione. Si noti che questo risultato è indipendente dal valore di i_0.

Nel passato il potenziometro serviva come strumento capace di fornire al laboratorio di ricerca una unità di misura standard di tensione, consentendo di determinare una f.e.m. incognita rispetto alla f.e.m. di una *cella standard* accuratamente calibrata (un dispositivo elettrochimico simile ad una batteria). Oggi il volt viene definito in base ad una precisa unità standard che è relativamente semplice da riprodurre in laboratorio, il gradino di tensione quantizzato determinato dall'insieme di due superconduttori separati da un sottile strato isolante, detto *giunzione Josephson.**

Il potenziometro è un esempio di *strumento a zero*, che consente di effettuare misure di precisione aggiustando il valore di un elemento circuitale fino a che un indicatore raggiunge lo zero. In questo caso lo zero consente di misurare $\mathcal{E}_x$ quando nessuna corrente scorre attraverso il generatore di f.e.m., cosicchè la misura non risulta influenzata dal valore della resistenza interna *r* del generatore stesso. Un altro strumento a zero è il ponte di Wheatstone; vedi problema 46.

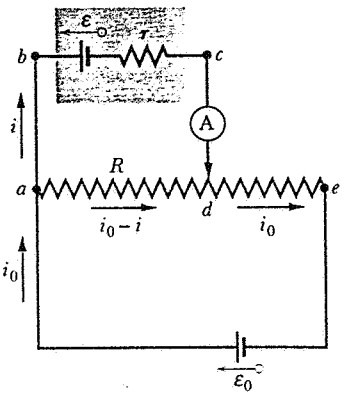


Figura 12 Elementi di base di un potenziometro, usato per confrontare le f.e.m.

33-7 CIRCUITI *RC*

Nei paragrafi precedenti sono stati presi in considerazione circuiti contenenti soltanto resistori, in cui la corrente non variava nel tempo. Ora verrà introdotto il condensatore come elemento circuitale, il che porta allo studio delle correnti variabili nel tempo.

Si supponga di caricare il condensatore della figura 13 spostando l'interruttore S nella posizione *a* (poi si

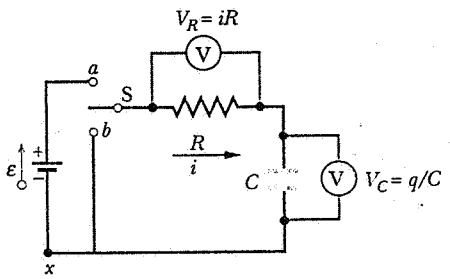


Figura 13 Quando l'interruttore S è chiuso su *a* il condensatore *C* viene caricato dalla f.e.m. e attraverso il resistore *R*. Una volta che il condensatore è carico l'interruttore viene chiuso su *b* e il condensatore si scarica attraverso *R*. Il voltmetro collegato ad *R* misura la differenza di potenziale V_R ($= iR$) sul resistore e, quindi, determina la corrente *i*. Il voltmetro collegato a *C* misura la differenza di potenziale V_C ($= q/C$) sul condensatore e, quindi, determina la carica *q*.

* Brian Josephson, scienziato britannico, era uno studente di 22 anni quando scoprì le proprietà di questa giunzione, che gli fruttarono il premio Nobel per la fisica nel 1973.

ISBN 88-408-0777-2

considererà la posizione *b*). Quale corrente si stabilisce nel circuito a singola maglia risultante? Applichiamo il principio di conservazione dell'energia.

Nel tempo dt una carica dq (= idt) si sposta attraverso ogni sezione del circuito. Il lavoro (= $\mathcal{E}dq$; vedi eq.1) compiuto dal generatore di f.e.m. deve uguagliare l'energia interna (= i^2Rdt) liberata nel resistore nel tempo dt, sommata all'aumento dU dell'energia U (= $q^2/2C$; vedi eq. 26 del cap. 31) che viene immagazzinata nel condensatore. Il principio di conservazione dell'energia, quindi, dice che

$$\mathcal{E}\,dq = i^2R\,dt + d\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

cioè

$$\mathcal{E}\,dq = i^2R\,dt + \frac{q}{C}dq.$$

Dividendo per dt si ottiene

$$\mathcal{E}\frac{dq}{dt} = i^2R + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}.$$

Dato che q è la carica sul piatto superiore, i positiva significa dq/dt positivo. Essendo $i = dq/dt$ questa equazione diviene

$$\mathcal{E} = iR + \frac{q}{C}. \tag{28}$$

L'equazione 28 si ottiene anche con la legge delle maglie ricavata dal principio di conservazione dell'energia. Partendo dal punto x e percorrendo il circuito in senso orario, si osserva un aumento di potenziale attraversando il generatore di f.e.m. e una diminizione di potenziale attraversando il resistore e il condensatore, cioè

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0,$$

che è equivalente all'equazione 28.

Per risolvere l'equazione 28 si sostituisce i con dq/dt, da cui

$$\mathcal{E} = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}. \tag{29}$$

L'equazione 29 può essere riscritta come

$$\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{RC}. \tag{30}$$

Integrando questo risultato nel caso in cui $q = 0$ in $t = 0$, e ricavando poi q si ottiene

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}). \tag{31}$$

Si può mostrare che questa funzione $q(t)$ è davvero una soluzione dell'equazione 29 sostituendola nell'equazione e verificando l'identità. Differenziando l'equazione 31 rispetto al tempo si ottiene

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}. \tag{32}$$

Sostituendo q (vedi eq. 31) e dq/dt (vedi eq. 32) nell'equazione 29 si ottiene una identità, come si può facilmente verificare. L'equazione 31, perciò, è una soluzione dell'equazione 29.

In laboratorio si possono determinare i e q convenientemente misurando grandezze a loro proporzionali, cioè la differenza di potenziale V_R(= iR) sul resistore e la differenza di potenziale V_C(= q/C) sul condensatore. Queste misure possono essere realizzate abbastanza facilmente, come illustrato nella figura 13, collegando un voltmetro (o un oscilloscopio) sul resistore e sul condensatore. La figura 14 mostra i diagrammi risultanti di V_R e V_C. Si noti quanto segue: (1) in $t = 0$, $V_R = \mathcal{E}$ (la piena differenza di potenziale appare su R) e $V_C = 0$ (il condensatore non è carico). (2) Per $t \to \infty$, $V_C \to \mathcal{E}$ (la capacità si carica pienamente), e $V_R \to 0$ (la corrente si esaurisce). (3) In un tempo qualsiasi $V_R + V_C = \mathcal{E}$, come richiede l'equazione 29.

La quantità RC nelle equazioni 31 e 32 ha le dimensioni di un tempo (dato che l'esponente deve essere una grandezza adimensionale) ed è detta *costante di tempo capacitiva* τ_C del circuito:

$$\tau_C = RC. \tag{33}$$

Questo è il tempo in cui la carica sul condensatore è cresciuta fino a raggiungere una frazione $1 - e^{-1}$ ($\approx$ 63%) del valore finale $C\mathcal{E}$. Per mostrare ciò, basta porre $t = \tau_C = RC$ nell'equazione 31, cosicchè

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) = 0.63C\mathcal{E}.$$

Nella figura 14*a* si vede che, quando un condensatore

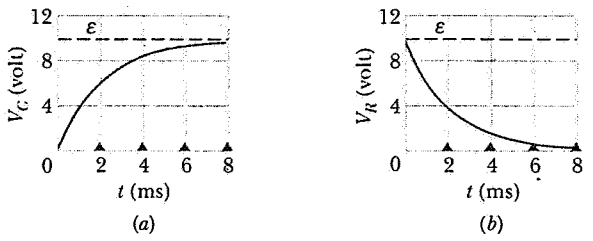


Figura 14 (*a*) Come indicato dalla differenza di potenziale V_C, durante la fase di carica, la carica accumulata sul condensatore aumenta nel tempo e V_C si avvicina al valore della f.e.m. $\mathcal{E}$. L'origine dell'asse dei tempi coincide con l'istante in cui l'interruttore viene chiuso su *a*. (*b*) La differenza di potenziale sul resistore diminuisce nel tempo, avvicinandosi a 0 al crescere del tempo. Quando il condensatore è completamente carico essa si annulla poichè la corrente attraverso il resistore è nulla. Le curve sono state tracciate con $\mathcal{E}$ = 10 V, R = 2000 Ω e C = 1 μF. I triangolini in basso indicano successive costanti di tempo.

in un circuito vede ai suoi morsetti una resistenza, la carica accumulata sul condensatore raggiunge (pressochè) il valore limite con un *ritardo* legato alla costante di tempo RC. Se non vi fosse alcun resistore ($RC = 0$), la carica salirebbe immediatamente al valore limite finale. Quantunque si sia mostrato che questo ritardo deriva da una applicazione della legge delle maglie ai circuiti RC, è importante cercare di raggiungere una comprensione fisica delle cause del ritardo.

Nell'istante in cui l'interruttore S della figura 13 viene posto su a, la carica sul condensatore è nulla. In questa situazione, l'equazione 28 dice che $\mathcal{E} = iR$ per cui $i = \mathcal{E}/R$. Per effetto di questa corrente, una carica scorre sul condensatore e la differenza di potenziale sul condensatore aumenta nel tempo. L'equazione 28 mostra che ora, essendo la f.e.m. $\mathcal{E}$ costante, ogni aumento di differenza di potenziale sul condensatore deve essere bilanciato da una corrispondente *diminuzione* di differenza di potenziale sul resistore, accompagnata da una conseguente diminuzione di corrente. Questa diminuzione di corrente si traduce in una più lenta carica del condensatore. Il processo prosegue finchè la corrente si azzera, e non c'è più alcuna caduta di potenziale sul resistore. La piena differenza di potenziale della f.e.m. appare ora sul condensatore, il quale è totalmente carico ($q = C\mathcal{E}$). A meno di una alterazione del circuito, non vi è più alcun flusso di carica. Si rivedano i passaggi necessari per ricavare le equazioni 31 e 32 e si studi la figura 14 tenendo a mente gli argomenti qualitativi di questo paragrafo.

Esempio 7 Un resistore R (= 6.2 MΩ) e un condensatore C (= 2.4 μF) vengono collegati in serie ed una batteria da 12 V avente resistenza interna trascurabile è applicata all'insieme. (*a*) Qual è la costante di tempo capacitiva di questo circuito? (*b*) In quanto tempo, dopo che la batteria è stata connessa, la differenza di potenziale sul condensatore raggiunge il valore di 5.6 V?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 33,

$$\tau_C = RC = (6.2 \times 10^6\ \Omega)(2.4 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 15\ \text{s}.$$

(*b*) La differenza di potenziale sul condensatore è pari a $V_C = q/C$, il che, in accordo con l'equazione 31, può essere scritto come

$$V_C = \frac{q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}).$$

Ricavando t, si ottiene (essendo $\tau_C = RC$)

$$t = -\tau_C \ln\left(1 - \frac{V_C}{\mathcal{E}}\right)$$

$$= -(15\ \text{s}) \ln\left(1 - \frac{5.6\ \text{V}}{12\ \text{V}}\right) = 9.4\ \text{s}.$$

Come era stato trovato in precedenza, dopo un tempo τ_C (= 15 s), la differenza di potenziale sul condensatore è $0.63\mathcal{E} = 7.6$ V. È, quindi, ragionevole che, nel tempo (più breve) di 9.4 s, la differenza di potenziale sul condensatore raggiunga il valore (più piccolo) di 5.6 V.

La scarica di un condensatore

Si assuma, ora, che l'interruttore S della figura 13 sia stato mantenuto nella posizione a per un tempo molto più lungo di RC. Il condensatore sarà, di fatto, carico al massimo e nessuna carica scorrerà nel circuito. L'interruttore S venga ora portato nella posizione b. Come varieranno nel tempo la carica sul condensatore e la corrente?

Con l'interruttore S nella posizione b, il condensatore si scarica attraverso il resistore. Non c'è alcuna f.e.m. nel circuito e l'equazione 28, con $\mathcal{E} = 0$, diviene semplicemente

$$iR + \frac{q}{C} = 0. \tag{34}$$

Ponendo $i = dq/dt$ la precedente equazione si traduce (confrontare con l'eq. 29) in

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{35}$$

La soluzione, come si può facilmente ricavare con una integrazione (dopo avere separato le variabili scrivendo $dq/q = -dt/RC$) e verificare con una sostituzione, è

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C}, \tag{36}$$

essendo q_0 la carica iniziale sul condensatore (= $\mathcal{E}C$, in questo caso). La costante di tempo capacitiva τ_C (= RC) appare in questa espressione per la scarica del condensatore, così come appariva nella espressione per la carica del condensatore (vedi eq. 31). Si capisce che in un tempo $t = \tau_C = RC$ la carica sul condensatore si riduce a $q_0 e^{-1}$, che è circa il 37% della carica iniziale q_0.

Derivando l'equazione 36, si trova la corrente durante la scarica,

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/\tau_C}. \tag{37}$$

Il segno meno indica che la corrente ha verso opposto a quello fissato sulla figura 13. Ciò non sorprende, poiché il condensatore si sta, ora, scaricando. Dato che $q_0 = C\mathcal{E}$, l'equazione 37 può essere scritta come

$$i = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_C}. \tag{38}$$

La corrente iniziale, determinata ponendo $t = 0$ nell'equazione 38, è $-\mathcal{E}/R$. Ciò è ragionevole poiché la differenza di potenziale iniziale sul resistore è $\mathcal{E}$.

ISBN 88-408-0777-2

Le differenze di potenziale su R e C, che sono, rispettivamente, proporzionali a i e q, possono essere ancora misurate come indicato nella figura 13. I tipici risultati sono mostrati nella figura 15. Si noti che, come suggerito dall'equazione 36, V_C $(= q/C)$ decresce esponenzialmente a partire dal suo valore massimo, che si ha in $t = 0$, mentre V_R $(= iR)$ è negativa e cresce esponenzialmente fino allo zero. Si noti anche che $V_C + V_R = 0$, come richiesto dall'equazione 34.

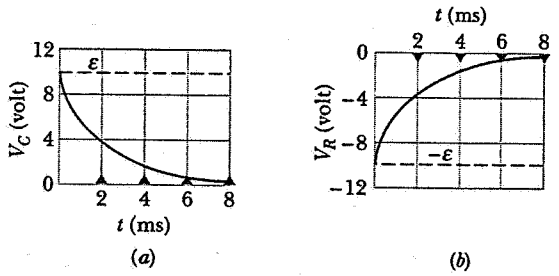


Figura 15 (*a*) Una volta che il condensatore si è caricato completamente, l'interruttore della figura 13 viene spostato da *a* a *b* e il condensatore si scarica. L'origine dell'asse dei tempi viene ora fissata nell'istante di quest'ultima commutazione. La differenza di potenziale sul condensatore decresce esponenzialmente a zero. (*b*) Quando l'interruttore viene chiuso su *b*, la differenza di potenziale sul resistore è negativa rispetto ai valori assunti durante la fase di carica (fig. 14). L'intensità della corrente scende esponenzialmente a zero e così pure la differenza di potenziale sul resistore.

Esempio 8 Un condensatore C si scarica attraverso un resistore R. (*a*) Dopo quante costanti di tempo la carica si dimezza rispetto al valore iniziale? (*b*) Dopo quante costanti di tempo l'energia immagazzinata si dimezza rispetto al valore iniziale?

Soluzione (*a*) La carica sul condensatore varia in accordo all'equazione 36,

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C},$$

in cui q_0 è la carica iniziale. Si cerca il tempo t in cui $q = \frac{1}{2} q_0$, cioè

$$\tfrac{1}{2} q_0 = q_0 e^{-t/\tau_C}.$$

Semplificando per q_0 ed estraendo il logaritmo naturale da entrambi i membri, si trova

$$-\ln 2 = -\frac{t}{\tau_C}$$

cioè

$$t = (\ln 2)\tau_C = 0.69\tau_C.$$

La carica si dimezza, dunque, dopo 0.69 costanti di tempo.

(*b*) L'energia immagazzinata nel condensatore è

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} e^{-2t/\tau_C} = U_0 e^{-2t/\tau_C},$$

in cui U_0 è l'energia immagazzinata iniziale. Il tempo nel quale $U = \frac{1}{2} U_0$ si determina attraverso la relazione

$$\tfrac{1}{2} U_0 = U_0 e^{-2t/\tau_C}.$$

Semplificando per U_0 ed estraendo il logaritmo naturale da entrambi i membri, si ottiene

$$-\ln 2 = -2t/\tau_C$$

cioè

$$t = \tau_C \frac{\ln 2}{2} = 0.35\tau_C.$$

L'energia immagazzinata si dimezza dopo 0.35 costanti di tempo. Ciò si verifica indipendentemente dalla energia iniziale immagazzinata. Il tempo necessario perché la *carica* si riduca di un fattore un mezzo $(0.69\tau_C)$ è più lungo del tempo necessario perché l'*energia* si riduca di un fattore un mezzo. Perché?

DOMANDE

1. Il verso della f.e.m. fornita da una batteria dipende dal verso del flusso di corrente attraverso la batteria stessa?
2. Relativamente alla figura 2 si discutano i cambiamenti che risulterebbero accrescendo la massa m di una quantità tale che il «motore» inverta direzione e diventi un «generatore», cioè una sorgente di f.e.m.
3. Si discuta in dettaglio l'affermazione in base a cui l'approccio energetico e la legge delle maglie utilizzati per analizzare i circuiti sono esattamente la stessa cosa.
4. Si escogiti un metodo per misurare la f.e.m. e la resistenza interna di una batteria.
5. Qual è l'origine della resistenza interna di una batteria? Essa dipende da quanto la batteria è vecchia o dalla sua dimensione?
6. La corrente che scorre in una batteria avente f.e.m. $\mathcal{E}$ e resistenza interna r viene abbassata attraverso un mezzo esterno. La differenza di potenziale ai morsetti della batteria deve necessariamente crescere o decrescere? Si spieghi.
7. Come si potrebbe calcolare V_{ab} nella figura 3*a* seguendo un cammino da *a* a *b* che non appartiene al circuito?
8. Una lampadina da 25 W, 120 V, funziona con luminosità normale quando è connessa a un banco di batterie. Una lampadina da 500 W, 120 V, funziona con debole luminosità quando è connessa allo stesso banco. Come mai avviene ciò?
9. In quali circostanze la differenza di potenziale ai morsetti di una batteria eccede la sua f.e.m.?
10. Le automobili, in genere, utilizzano un sistema elettrico alimentato a 12 V. Anni fa era in uso anche un sistema a 6 V. Perché c'è stato il cambiamento? Perché non utilizzare 24 V?
11. La legge delle maglie si basa sul principio di conservazione

dell'energia e la legge dei nodi sul principio di conservazione della carica. Si spieghi come queste leggi siano basate su tali principi.

12. In quali circostanze è preferibile collegare le batterie in parallelo? In quali in serie?
13. Si confrontino, mettendone in luce analogie e differenze, le formule che danno i valori equivalenti delle connessioni in serie e in parallelo di (*a*) condensatori e (*b*) resistori.
14. In quali circostanze è utile collegare i resistori in parallelo? E in serie?
15. Qual è la differenza tra una f.e.m. e una differenza di potenziale?
16. In riferimento alla figura 9, si utilizzino argomenti qualitativi per mostrare che i_3 è tracciata in verso errato.
17. Si spieghi con parole proprie perché la resistenza di un amperometro deve essere molto piccola mentre quella di un voltmetro deve essere molto grande.
18. Le leggi dei nodi e delle maglie valgono per un circuito che contiene un condensatore?
19. Si mostri che il prodotto RC nelle equazioni 31 e 32 ha le dimensioni di un tempo, cioè che 1 secondo = 1 ohm × 1 farad.
20. Un condensatore, un resistore e una batteria vengono connessi in serie. La carica immagazzinata dal condensatore non è influenzata dalla resistenza del resistore. Quale funzione ha, allora, il resistore?
21. Si spieghi perché, nell'esempio 8, l'energia si dimezza più rapidamente della carica.
22. Il lampo di un flash di una macchina fotografica è alimentato dalla scarica di un condensatore sulla lampadina. Perché la lampadina non viene connessa direttamente alla batteria di alimentazione utilizzata per caricare il condensatore?
23. Il tempo richiesto perché la carica su un condensatore di un circuito RC salga ad una data frazione del suo valore finale dipende dal valore della f.e.m. applicata? Il tempo necessario perché la carica vari di una certa quantità dipende dalla f.e.m. applicata?
24. Un condensatore viene collegato ai morsetti di una batteria. La carica che effettivamente appare sui piatti del condensatore dipende dal valore della resistenza interna della batteria?
25. Si escogiti un metodo per utilizzare un circuito RC per misurare resistenze molto alte.
26. Nella figura 13 si supponga che l'interruttore S sia chiuso su *a*. Si spieghi perché, considerando che il morsetto negativo della batteria non è connesso con la resistenza R, la corrente che attraversa R deve essere $\mathcal{E}/R$, come richiesto dall'equazione 32.
27. Nella figura 13 si supponga che l'interruttore S sia chiuso su *a*. Perché la carica sul condensatore C non sale istantaneamente a $q = C\mathcal{E}$? Dopo tutto il morsetto positivo della batteria è collegato a un piatto del condensatore e quello negativo all'altro.

PROBLEMI

Paragrafo 33-1 Forza elettromotrice

1. Una corrente di 5.12 A circola per un tempo di 5.75 min in un circuito alimentato da una batteria da 6.00 V. Di quanto si riduce l'energia chimica della batteria?
2. (*a*) Quanto lavoro compie un generatore di f.e.m. da 12.0 V su un elettrone che passa dal morsetto positivo a quello negativo? (*b*) Se scorrono 3.40×10^{18} elettroni al secondo qual è la potenza in uscita del generatore?
3. Una batteria da automobile da 12 V eroga inizialmente una carica di 125 A · h. Assumendo che il potenziale ai morsetti della batteria resti costante fino alla completa scarica della batteria, per quanto tempo essa può liberare energia con una potenza di 110 W?
4. Una batteria standard di un flash può cedere all'incirca 2.0 W · h di energia prima di scaricarsi. (*a*) Se la batteria costa 80 centesimi, qual è il costo per tenere accesa una lampadina da 100 W per 8 ore? (*b*) Qual è il costo se l'energia viene fornita da una compagnia al costo di 12 centesimi per kW · h?

Paragrafo 33-3 Differenze di potenziale

5. Nella figura 16 il potenziale nel punto P è pari a 100 V. Qual è il potenziale nel punto Q?
6. Nella figura 17 è mostrato schematicamente il circuito usato per segnalare il livello di benzina in una automobile. L'indicatore (posto sul cruscotto) ha una resistenza interna di 10 Ω. Il sensore del livello di benzina nel serbatoio è costituito da un galleggiante che comanda un resistore variabile con resistenza pari a 140 Ω quando il serbatoio è vuoto e a 20 Ω quando il serbatoio è pieno, e linearmente variabile con il livello della benzina. Si determini la corrente nel circuito quando il serbatoio è (*a*) vuoto, (*b*) pieno per metà e (*c*) pieno.
7. (*a*) Nella figura 18, quale valore deve avere R se la corrente è pari a 50 mA? Si assuma $\mathcal{E}_1 = 2.0$ V, $\mathcal{E}_2 = 3.0$ V e $r_1 = r_2 = 3.0$ Ω. (*b*) Qual è la potenza dissipata in R?

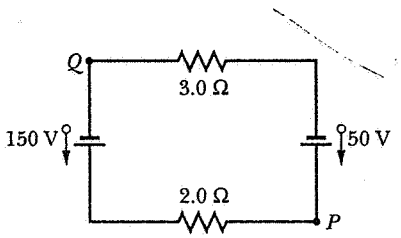


Figura 16 Problema 5.

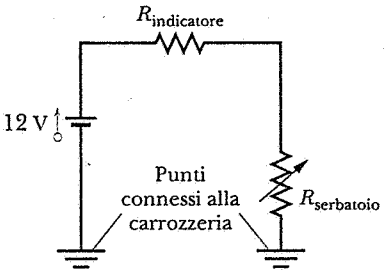


Figura 17 Problema 6.

ISBN 88-408-0777-2

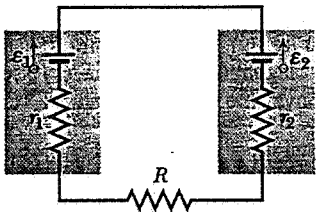


Figura 18 Problema 7.

8. La corrente in un circuito a singola maglia è pari a 5.0 A. Quando una resistenza aggiuntiva di 2.0 Ω viene inserita in serie, la corrente scende a 4.0 A. Qual era la resistenza nel circuito originale?
9. La porzione di circuito AB (vedi fig. 19) assorbe 53.0 W di potenza quando una corrente $i = 1.20$ A scorre nel verso indicato. (*a*) Si determini la differenza di potenziale tra A e B. (*b*) Se l'elemento C non ha resistenza interna, qual è la f.e.m.? Quale morsetto, di destra o di sinistra, è positivo?

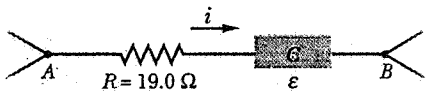


Figura 19 Problema 9.

10. Si vuole generare energia interna in un resistore da 108 mΩ con una potenza di 9.88 W collegandolo ad una batteria la cui f.e.m. è pari a 1.50 V. (*a*) Qual è la resistenza interna della batteria? (*b*) Quale differenza di potenziale cade sul resistore?
11. Il motorino di avviamento di una automobile sta girando lentamente e il meccanico deve decidere se sostituire il motorino, il cavo o la batteria. Il manuale del produttore dice che la batteria da 12 V non può avere una resistenza interna maggiore di 0.020 Ω, il motorino di 0.200 Ω e il cavo di 0.040 Ω. Accendendo il motorino si misura una tensione di 11.4 V sulla batteria, 3.0 V sul cavo e una corrente di 50 A. Quale parte è difettosa?
12. Due batterie hanno la stessa f.e.m. $\mathcal{E}$, ma resistenze r_1 e r_2 interne diverse ($r_1 > r_2$). Esse vengono collegate in serie ad una resistenza esterna R. (*a*) Si determini il valore di R che rende nulla la differenza di potenziale ai morsetti di una batteria. (*b*) Quale tra le due batterie?
13. Una cella solare genera una differenza di potenziale di 0.10 V quando ad essa viene collegato un resistore da 500 Ω ed una differenza di potenziale di 0.16 V quando viene impiegato un resistore da 1000 Ω. Quali sono (*a*) la resistenza interna e (*b*) la f.e.m. della cella solare? (*c*) L'area della cella è pari a 3.0 cm^2 e l'intensità della luce incidente è 2.0 mW/cm^2. Qual è l'efficienza della cella nella conversione dell'energia della luce in energia interna del resistore esterno da 1000 Ω?
14. (*a*) Nel circuito della figura 3*a* si mostri che la potenza liberata in R come energia interna è massima quando R uguaglia la resistenza interna r della batteria. (*b*) Si mostri che questa massima potenza è pari a $P = \mathcal{E}^2/4r$.
15. Una batteria avente f.e.m. $\mathcal{E} = 2.0$ V e resistenza interna $r = 0.50$ Ω aziona un motore. Il motore solleva un oggetto da 2 N a velocità costante $v = 0.50$ m/s. Assumendo che non ci siano perdite di potenza, si trovi (*a*) la corrente i nel circuito e (*b*) la differenza di potenziale V tra i morsetti del motore. (*c*) Si discuta il fatto che ci sono due soluzioni a questo problema.

Paragrafo 33-4 Resistori in serie e in parallelo

16. Quattro resistori da 18 Ω vengono collegati in parallelo ad una batteria da 27 V. Qual è la corrente che scorre attraverso la batteria?
17. Usando soltanto due resistori - singolarmente, in serie o in parallelo - si riescono ad ottenere resistenze di 3.0, 4.0, 12 e 16 Ω. Quali sono le resistenze dei resistori?
18. Nella figura 20 si determini la resistenza equivalente tra i punti (*a*) A e B, (*b*) A e C e (*c*) B e C.

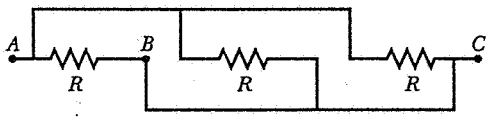


Figura 20 Problema18.

19. Un circuito contenente cinque resistori collegati ad una batteria da 12 V è mostrato nella figura 21. Si determini la caduta di potenziale sul resistore da 5.0 Ω.

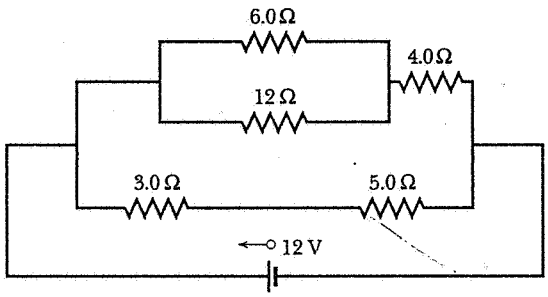


Figura 21 Problema 19.

20. Una linea elettrica da 120 V è protetta da un fusibile da 15 A. Qual è il massimo numero di lampadine da 500 W che possono essere simultaneamente alimentate dalla linea?
21. Due resistori R_1 e R_2 possono essere collegati sia in serie che in parallelo ad una batteria avente f.e.m. $\mathcal{E}$ e resistenza interna nulla. Si desidera che la potenza dissipata per effetto Joule nel collegamento in parallelo sia cinque volte maggiore di quello nel collegamento in serie. Se $R_1 = 100$ Ω, quanto vale R_2?
22. È dato un certo numero di resistori da 10 Ω, ciascuno in grado di dissipare soltanto 1.0 W. Qual è il numero minimo di resistori di questo tipo necessari per assemblare, con collegamenti in serie o in parallelo, un resistore equivalente da 10 Ω capace di dissipare 5.0 W?
23. Una lampadina da 120 V, progettata per funzionare in tre modi, a 100, 200 e 300 W, brucia un filamento. In seguito essa funziona con la stessa intensità nei modi minimo e massimo, ma non funziona affatto nel modo intermedio. (*a*) Come sono collegati i due filamenti all'interno della lampadina? (*b*) Si calcoli la resistenza dei filamenti.
24. (*a*) Si trovi la resistenza equivalente della rete illustrata nella figura 22. (*b*) Si determini la corrente in ciascun resistore. Si ponga $R_1 = 112$ Ω, $R_2 = 42.0$ Ω, $R_3 = 61.6$ Ω, $R_4 = 75.0$ Ω e $\mathcal{E} = 6.22$ V.

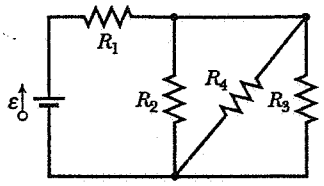


Figura 22 Problema 24.

25. Due rotaie conduttrici A e B, aventi una lunghezza di 42.6 m ed una sezione ortogonale di 91.0 cm^2, vengono collegate in serie. Un potenziale di 630 V è applicato sugli estremi della connessione. Le resistenze delle rotaie sono pari a 76.2 e 35.0 $\mu\Omega$. Si determinino (*a*) la resistività delle rotaie, (*b*) la densità di corrente in ciascuna rotaia, (*c*) l'intensità del campo elettrico in ciascuna rotaia e (*d*) la differenza di potenziale su ciascuna rotaia.
26. Nel circuito della figura 23, $\mathcal{E}$, R_1 e R_2 hanno valori costanti ma R può essere variata. Si trovi l'espressione di R che massimizza il riscaldamento dello stesso resistore.

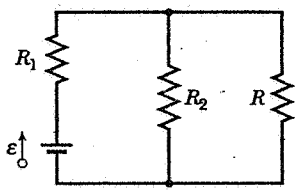


Figura 23 Problema 26.

27. Relativamente alla rete della figura 24 si determini la resistenza equivalente tra i punti (*a*) F e H e (*b*) F e G.

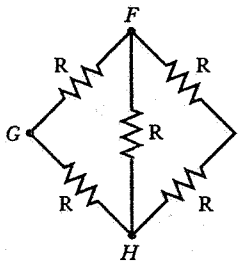


Figura 24 Problema 27.

28. Si determini la resistenza equivalente tra i punti x e y mostrati nella figura 25. Quattro resistori hanno ugual resistenza R, come mostrato; il resistore «intermedio» vale $r \neq R$ (si veda il problema 28 del cap. 31).

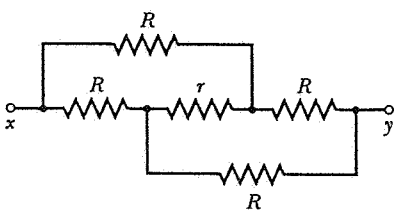


Figura 25 Problema 28.

29. Dodici resistori, ciascuno con resistenza di R ohm, formano un cubo (vedi fig. 8*a*). (*a*) Si determini R_{13}, la resistenza equivalente della diagonale di una faccia. (*b*) Si determini R_{17}, la resistenza equivalente di una diagonale del cubo.

Paragrafo 33-5 Circuiti a molte maglie

30. Nella figura 26 si determini (*a*) la corrente in ciascun resistore e (*b*) la differenza di potenziale tra a e b. Si ponga $\mathcal{E}_1 = 6.0$ V, $\mathcal{E}_2 = 5.0$ V, $\mathcal{E}_3 = 4.0$ V, $R_1 = 100\ \Omega$ e $R_2 = 50\ \Omega$.

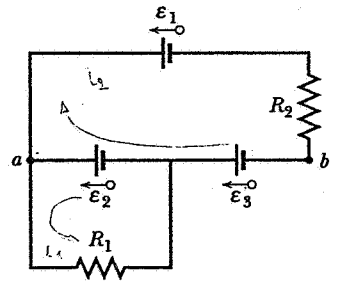


Figura 26 Problema 30.

31. Due lampadine, una avente resistenza R_1, l'altra avente resistenza R_2 ($< R_1$), sono collegate (*a*) in parallelo e (*b*) in serie. Quale lampadina è più luminosa in ciascun caso?
32. Nella figura 9 si calcoli la differenza di potenziale $V_c - V_d$ tra i punti c e d lungo il maggior numero possibile di cammini. Si assuma che $\mathcal{E}_1 = 4.22$ V, $\mathcal{E}_2 = 1.13$ V, $R_1 = 9.77\ \Omega$ e $R_2 = 11.6\ \Omega$ e $R_3 = 5.40\ \Omega$.
33. Quale corrente legge l'amperometro A della figura 27, in funzione di $\mathcal{E}$ e R? Si assuma che A abbia resistenza interna nulla.

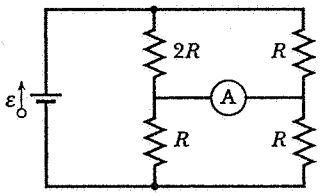


Figura 27 Problema 33.

34. Quando i fanali di una automobile vengono accesi, un amperometro collegato in serie indica 10.0 A e un voltmetro collegato in parallelo indica 12.0 V. Si veda la figura 28. Quando il motorino di avviamento viene azionato, l'amperometro indica 8.0 A e le luci si affievoliscono. Se la resistenza interna della

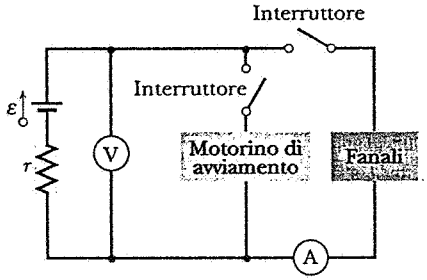


Figura 28 Problema 34.

ISBN 88-408-0777-2

batteria vale 50.0 mΩ e quella dell'amperometro è trascurabile, quali sono (*a*) la f.e.m. della batteria e (*b*) la corrente nel motorino di avviamento quando i fanali vengono accesi?

35. La figura 29 mostra una batteria collegata ad un resistore uniforme R_0. Un contatto scorrevole può muoversi sul resistore da $x = 0$ (sulla sinistra) ad $x = 10$ cm (sulla destra). Si trovi l'espressione della potenza dissipata nel resistore R in funzione di x. Si tracci la funzione con $\mathcal{E} = 50$ V, $R = 2000\ \Omega$ e $R_0 = 100\ \Omega$.

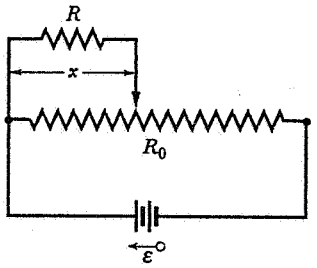


Figura 29 Problema 35.

36. Sono date due batterie aventi f.e.m. $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ e resistenze interne r_1 e r_2. Esse possono essere collegate (*a*) in serie o (*b*) in parallelo e sono utilizzate per fissare una corrente in un resistore R, come mostrato nella figura 30. Si determini l'espressione della corrente che attraversa R per entrambe le connessioni.

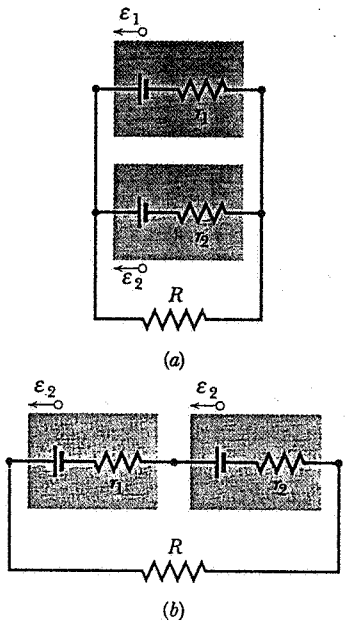


Figura 30 Problema 36.

37. (*a*) Si calcoli la corrente attraverso ciascun generatore di f.e.m. della figura 31. (*b*) Si calcoli $V_b - V_a$ assumendo che $R_1 = 1.20\ \Omega$, $R_2 = 2.30\ \Omega$, $\mathcal{E}_1 = 2.00$ V, $\mathcal{E}_2 = 3.80$ V e $\mathcal{E}_3 = 5.00$ V.

38. Una batteria avente f.e.m. $\mathcal{E}_1$ e resistenza interna $r_1 = 140\ \Omega$ è utilizzata per alimentare un dispositivo con resistenza interna $R = 34\ \Omega$. La f.e.m. $\mathcal{E}_1$, però, fluttua tra 25 e 27 V; di conseguenza anche la corrente attraverso R fluttua. Per stabilizzare la corrente, una seconda batteria, con resistenza interna $r_2 = 0.11\ \Omega$, viene introdotta in parallelo alla prima. La seconda batteria ha una f.e.m. stabile. Si veda la figura 32. Si trovi la variazione di corrente attraverso R al variare di $\mathcal{E}_1$ (*a*) prima e (*b*) dopo che la seconda batteria venga introdotta nel circuito. (*c*) Quale dovrebbe essere il valore di $\mathcal{E}_2$ affinchè la corrente media attraverso R, calcolata con $\mathcal{E}_1 = 26$ V (il suo valor medio), non vari dopo avere inserito la seconda batteria?

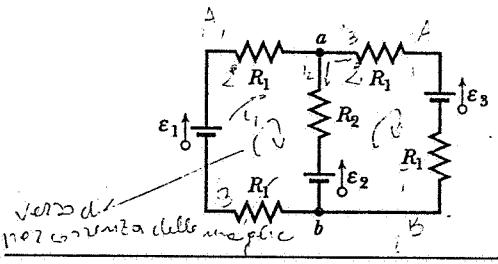


Figura 31 Problema 37.

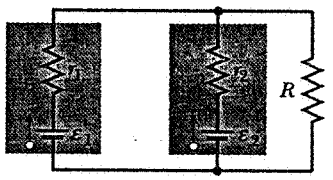


Figura 32 Problema 38.

39. Nella figura 33 si immagini che un amperometro venga inserito nel ramo che contiene R_3. (*a*) Quale corrente indicherà, assumendo che $\mathcal{E} = 5.0$ V, $R_1 = 2.0\ \Omega$, $R_2 = 4.0\ \Omega$ e $R_3 = 6.0\ \Omega$? (*b*) L'amperometro e il generatore di f.e.m. vengano, ora, scambiati fisicamente. Si mostri che la lettura dell'amperometro resta invariata.

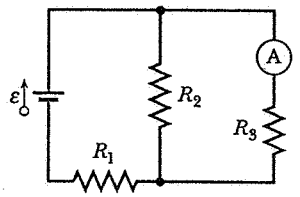


Figura 33 Problema 39.

Paragrafo 33-6 Strumenti di misura

40. Un semplice ohmetro è costituito dalla connessione di una batteria da flash di 1.50 V in serie con un resistore R ed un amperometro da 1.00 mA di fondo scala, come mostrato nella figura 34. R è regolata in modo che, quando i morsetti del

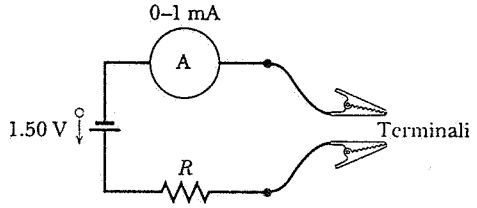


Figura 34 Problema 40.

circuito vengono cortocircuitati fra di loro, l'amperometro indichi il valore di fondo scala 1.00 mA. Quale resistenza esterna, inserita tra i morsetti, produce una deflessione dell'ago dell'amperometro (*a*) del 10%, (*b*) del 50% e (*c*) del 90% del fondo scala? (*d*) Se l'amperometro ha una resistenza interna di 18.5 Ω e la resistenza interna della batteria è trascurabile, qual è il valore di R?

41. Nella figura 11 si assuma che $\mathcal{E} = 5.0$ V, $r = 2.0$ Ω, $R_1 = 5.0$ Ω e $R_2 = 4.0$ Ω. Se $R_A = 0.10$ Ω, quale errore percentuale si commette leggendo la corrente? Si assuma che il voltmetro non sia presente.

42. Nella figura 11 si assuma che $\mathcal{E} = 3.0$ V, $r = 100$ Ω, $R_1 = 250$ Ω e $R_2 = 300$ Ω. Se $R_V = 5.0$ kΩ, quale errore percentuale si commette leggendo la differenza di potenziale su R_1? Si ignori la presenza dell'amperometro.

43. Un voltmetro (resistenza interna R_V) e un amperometro (resistenza interna R_A) vengono collegati per misurare una resistenza R, come si vede nella figura 35*a*. La resistenza è data da $R = V/i$, dove V è la lettura del voltmetro e i è la corrente nel resistore R. Una parte della corrente segnalata dall'amperometro (i') scorre attraverso il voltmetro cosicchè il rapporto tra le letture degli strumenti ($= V/i'$) dà soltanto una resistenza *apparente* R'. Si dimostri che R e R' soddisfano la relazione

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_V}.$$

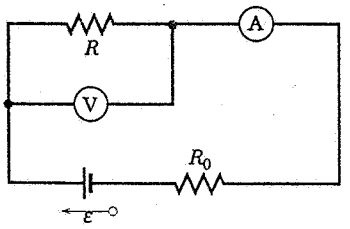
Si noti che se $R_V \to \infty$, $R' \to R$.

44. Per misurare una resistenza, gli strumenti di misura possono anche essere collegati come mostrato nella figura 35*b*. Anche in questo caso il rapporto delle letture degli strumenti dà soltanto una resistenza apparente R'. Si dimostri che R' e R soddisfano la relazione

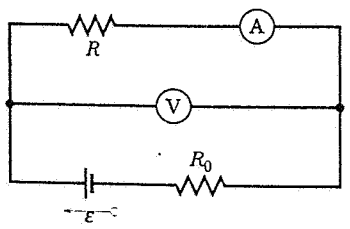
$$R = R' - R_A,$$

in cui R_A è la resistenza dell'amperometro. Si noti che se $R_A \to 0$, $R' \to R$.

45. Nella figura 35 le resistenze interne dell'amperometro e del voltmetro siano pari a 3.00 Ω e 300 Ω, rispettivamente. (*a*) Se



(*a*)



(*b*)

Figura 35 Problemi 43, 44 e 45.

$R = 85$ Ω, quale sarà la lettura degli strumenti nelle due diverse connessioni? (*b*) Quale resistenza apparente R' risulterà in entrambi i casi? Si assuma che $\mathcal{E}_1 = 12.0$ V e $R_0 = 100$ Ω.

46. Nella figura 36 R_s deve essere tarata in modo che i punti a e b abbiano esattamente lo stesso potenziale (si può verificare questa situazione collegando momentaneamente un amperometro sensibile tra a e b; se i due punti sono allo stesso potenziale l'amperometro non indicherà alcuna corrente). Si mostri che, una volta realizzata la taratura, vale la seguente relazione:

$$R_x = R_s(R_2/R_1).$$

Una resistenza incognita (R_x) può essere misurata rispetto ad uno standard campione (R_s) utilizzando questa rete, detta ponte di Wheatstone.

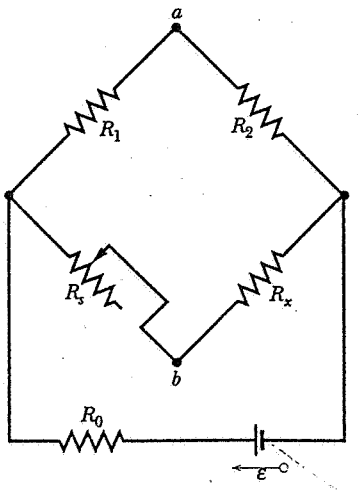


Figura 36 Problemi 46 e 47.

47. Si dimostri che, se i punti a e b della figura 36 vengono connessi con un filo avente resistenza r, la corrente nel filo è data da

$$i = \frac{\mathcal{E}(R_s - R_x)}{(R + 2r)(R_s + R_x) + 2R_sR_x},$$

dove $\mathcal{E}$ è la f.e.m. della batteria. Si assuma che R_1 e R_2 siano uguali ($R_1 = R_2 = R$) e che R_0 sia nulla. Questa formula è consistente con i risultati del problema 46?

Paragrafo 33-7 Circuiti RC

48. In un circuito RC in serie, $\mathcal{E} = 11.0$ V, $R = 1.42$ MΩ e $C = 1.80$ μF. (*a*) Si calcoli la costante di tempo. (*b*) Si trovi la carica massima che si accumula sul condensatore. (*c*) Quanto tempo ci vuole perché si accumuli una carica pari a 15.5 μC?

49. Quante costanti di tempo devono trascorrere prima che la carica su un condensatore in un circuito RC raggiunga il valore di equilibrio a meno dell'1%?

50. Un resistore da 15.2 kΩ ed un condensatore sono collegati in serie ed una tensione di 13.0 V viene applicata sulla connessione. La tensione sul condensatore raggiunge 5.00 V in 1.28 μs. (*a*) Si calcoli la costante di tempo. (*b*) Si trovi la capacità del condensatore.

51. Un circuito RC viene scaricato chiudendo un interruttore nell'istante $t = 0$. La differenza di potenziale iniziale sul con-

ISBN 88-408-0777-2

densatore è pari a 100 V. Se la differenza di potenziale decresce a 1.06 V dopo 10.0 s, (*a*) si calcoli la costante di tempo del circuito. (*b*) Quale sarà la differenza di potenziale in $t =$ 17 s?

52. L'elemento di controllo di un gioco elettronico consiste in un resistore variabile collegato ai piatti di un condensatore da 220 nF. Il condensatore viene caricato a 5.00 V e poi scaricato su un resistore. Il tempo necessario perché la differenza di potenziale sui piatti decresca a 800 mV viene misurato da un orologio interno. Se i tempi di scarica utilizzabili vanno da 10.0 μs a 6.00 ms, quali possono essere i valori di resistenza del resistore variabile?

53. La figura 37 mostra il circuito di alimentazione di una lampada a intermittenza, del tipo di quelle utilizzate per segnalare l'ingombro delle costruzioni particolarmente alte. La lampada fluorescente L è collegata in parallelo al condensatore C di un circuito RC. La corrente scorre soltanto quando il potenziale raggiunge il valore d'innesco V_L; quando ciò avviene, il condensatore si scarica sulla lampada e produce un lampo molto breve. Si supponga che sia necessario avere due lampi al secondo. Utilizzando una lampada con una tensione d'innesco $V_L = 72$ V, una batteria da 95 V e un condensatore da 0.15 μF, quale deve essere la resistenza R del resistore?

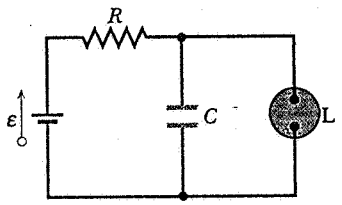


Figura 37 Problema 53.

54. Un condensatore da 1.0 μF con una energia immagazzinata iniziale pari a 0.50 J viene scaricato attraverso un resistore da 1.0 MΩ. (*a*) Qual è la carica iniziale nel condensatore? (*b*) Qual è la corrente attraverso il resistore quando la scarica ha inizio? (*c*) Si determini V_C, la tensione sul condensatore e V_R, la tensione sul resistore, in funzione del tempo. (*d*) Si esprima la potenza dissipata nel resistore in funzione del tempo.

55. Un resistore da 3.0 MΩ ed un condensatore da 1.0 μF vengono connessi in un circuito a singola maglia con un generatore di f.e.m. $\mathcal{E} = 4.0$ V. 1.0 s dopo avere stabilito la connessione, con quale dipendenza dal tempo (*a*) aumenta la carica sul condensatore, (*b*) l'energia viene immagazzinata nel condensatore, (*c*) l'energia interna si sviluppa nel resistore e (*d*) l'energia viene ceduta dal generatore di f.e.m.?

56. (*a*) Si completino i passaggi per ottenere l'equazione 31 dall'equazione 30. (*b*) In modo analogo si ottenga l'equazione 36 dall'equazione 35. Si noti che $q = q_0$ (condensatore carico) in $t = 0$.

57. Si provi che, quando l'interruttore S della figura 13 viene spostato dalla posizione *a* alla posizione *b*, tutta l'energia immagazzinata nel condensatore viene trasformata in energia interna del resistore. Si assuma che il condensatore sia completamente carico prima di spostare l'interruttore.

58. Un condensatore C, inizialmente scarico, viene totalmente caricato da una f.e.m. $\mathcal{E}$ costante in serie ad un resistore R. (*a*) Si mostri che l'energia finale immagazzinata nel condensatore è la metà dell'energia fornita dalla f.e.m. (*b*) Integrando direttamente i^2R sul tempo di carica, si mostri che l'energia interna dissipata dal resistore è anch'essa pari alla metà dell'energia fornita dalla f.e.m.

Capitolo 34

IL CAMPO MAGNETICO

La scienza del **magnetismo** *ha la sua origine in tempi antichi. Essa nacque dall'osservazione che certe pietre che si trovano in natura potevano attrarsi e potevano anche attrarre piccoli pezzi di un metallo, il ferro, ma non altri metalli, quali l'oro o l'argento. La parola «magnetismo» viene dal nome della regione di Magnesia in Asia Minore, uno dei luoghi dove queste pietre furono trovate.*

Oggi abbiamo tratto grandi vantaggi pratici da quella scoperta, dai magnetini per chiusura ermetica di sportelli alle cassette audio magnetiche e ai dischetti dei calcolatori. Le proprietà magnetiche di singoli nuclei atomici vengono utilmente sfruttate in campo medico per tracciare immagini di organi interni al corpo. Le navicelle spaziali hanno misurato il magnetismo della Terra e di altri pianeti per studiarne la struttura interna.

In questo capitolo cominceremo il nostro studio del magnetismo considerando il campo magnetico ed i suoi effetti su una carica elettrica in moto. Nel prossimo capitolo, considereremo i campi magnetici generati da correnti elettriche. Nei successivi capitoli, continueremo ad esplorare la stretta relazione fra elettricità e magnetismo, che sono legati insieme col termine comune di elettromagnetismo.

34-1 IL CAMPO MAGNETICO B

Proprio come nei tempi antichi, piccoli pezzi di ferro sono ancora usati per rivelare la presenza di effetti magnetici. La figura 1 mostra la distribuzione di limatura di ferro nello spazio vicino ad un piccolo *magnete permanente*, in questo caso una corta sbarretta di ferro. La figura 2 mostra una corrispondente distribuzione per un filo percorso da corrente.

Descriviamo lo spazio intorno ad un magnete od ad un filo percorso da corrente come la sede di un *campo magnetico,* proprio come abbiamo descritto lo spazio intorno ad un oggetto carico come la sede di un campo elettrico. L'intensità e la orientazione del campo magnetico, che definiremo nel prossimo paragrafo, sono indicate dal vettore **B**.* La figura 3 mostra un elettromagnete, che può essere usato per produrre forti campi magnetici nei laboratori.

In elettrostatica, abbiamo rappresentato simbolicamente la relazione fra campo elettrico e carica elettrica come

$$\text{carica elettrica} \rightleftarrows \mathbf{E} \rightleftarrows \text{carica elettrica.} \qquad (1)$$

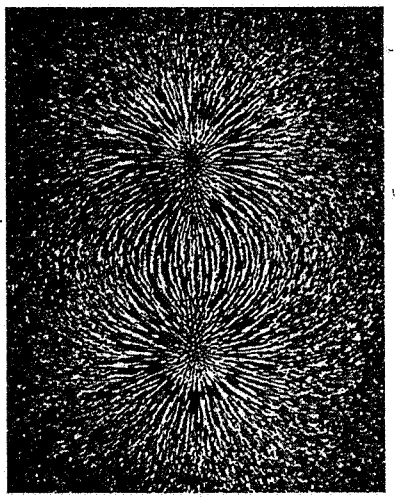


Figura 1 Limatura di ferro sparsa su un foglio di carta sopra ad una sbarra magnetica. La distribuzione della limatura suggerisce la forma delle linee del campo magnetico.

Questo significa che cariche elettriche producono un campo elettrico, che a sua volta può esercitare una forza di origine elettrica su altre cariche.

È allettante l'idea di provare ad utilizzare la simmetria fra campi elettrici e magnetici scrivendo

$$\text{carica magnetica} \rightleftarrows \mathbf{B} \rightleftarrows \text{carica magnetica} \qquad (2)$$

Tuttavia, singole cariche magnetiche (chiamate monopoli magnetici, vedi par. 37-1) non esistono o sono così rare che una tale relazione non ha alcun valore pra-

* Non c'è una convenzione generale su come denominare i campi vettoriali in magnetismo. **B** può essere chiamato *induzione magnetica* o *densità di flusso magnetico*, mentre un altro vettore di campo, denotato con **H**, può essere chiamato campo magnetico. Noi considereremo **B** come la grandezza fondamentale e la chiameremo quindi campo magnetico.

ISBN 88-408-0777-2

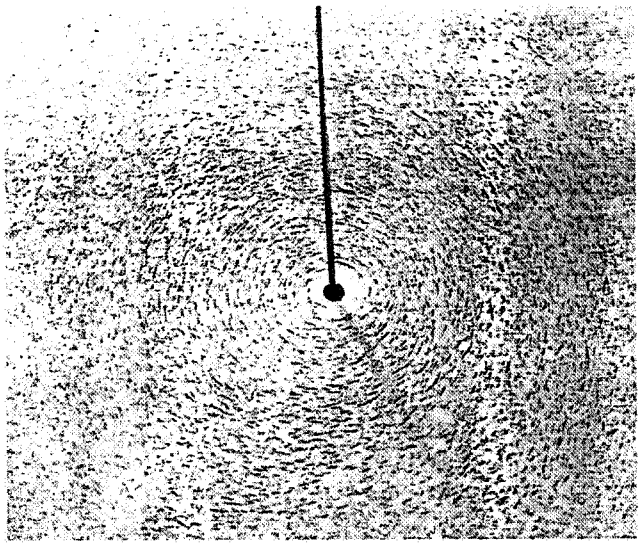


Figura 2 Limatura sparsa sopra ad un foglio di carta attraversato da un cavo percorso da corrente. La distribuzione della limatura suggerisce la forma delle linee del campo magnetico.

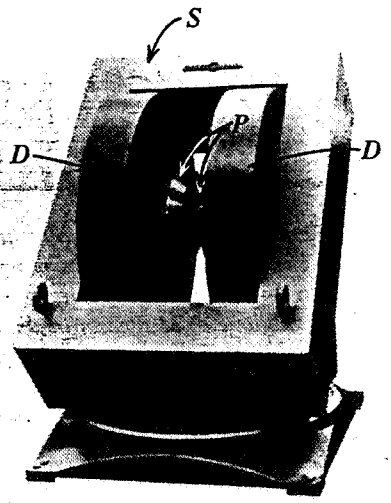


Figura 3 Un elettromagnete da laboratorio, consistente in due avvolgimenti D di circa 1 m di diametro e due poli di ferro P, assemblati su un telaio rigido S. Un forte campo magnetico, in questo caso orizzontale, è stabilito nei pochi centimetri di spazio fra i due poli.

tico. Una relazione più utile è

$$\text{carica elettrica in moto} \rightleftarrows \mathbf{B} \rightleftarrows \text{carica elettrica in moto} \quad (3)$$

che può anche essere scritta come

$$\text{corrente elettrica} \rightleftarrows \mathbf{B} \rightleftarrows \text{corrente elettrica} \quad (4)$$

Una carica elettrica *in moto* od una corrente elettrica producono un campo magnetico, che può allora esercitare una forza magnetica su altre cariche *in moto* o su correnti. C'è infatti una simmetria fra l'equazione 1 per il campo elettrico e le *equazioni* 3 o 4 per il campo magnetico.

Un'altra similitudine fra **B** ed **E** è che vengono rappresentati entrambi con linee di campo. Come nel caso delle linee di campo elettrico, le linee di **B** sono disegnate in maniera tale che la loro tangente in un punto dà la direzione di **B** in quel punto, ed il numero di linee che attraversano una qualsiasi superficie normale ad esse dà una misura dell'intensità di **B**. Cioè le linee sono ravvicinate dove B è grande e si diradano dove B assume piccoli valori. Comunque, c'è un'importante differenza fra i due casi: la forza elettrica su una particella carica è sempre parallela alle linee di E mentre, come vedremo, la forza magnetica su una particella carica in moto è sempre perpendicolare alle linee di **B**. Una differenza di questo genere è suggerita da un confronto tra le *equazioni* 1 e 3: l'equazione 1 implica un solo vettore (E), mentre l' equazione 3 implica due vettori (**B** e v). La forza magnetica su una carica in moto è quindi più complessa della forza elettrica su una carica statica. Un'altra differenza, come vedremo, è che le linee di E cominciano e finiscono sempre in corrispondenza di cariche, mentre le linee di B formano sempre percorsi chiusi.

34-2 LA FORZA MAGNETICA SU UNA CARICA IN MOTO

Il nostro scopo in questo capitolo è quello di stabilire un insieme di procedure atte a determinare se un campo magnetico sia presente in una certa regione dello spazio (come fra i poli dell'elettrocalamita di fig. 3) e di studiarne gli effetti in termini della forza di origine magnetica esercitata su oggetti, quali cariche in moto, che siano presenti in quella regione.

Nel prossimo paragrafo considereremo la sorgente del campo **B** ed il calcolo della sua intensità e della sua orientazione.

Consideriamo quindi un insieme di misure che, almeno in linea di principio, potrebbero essere fatte per studiare la forza magnetica che può agire su una carica elettrica. (In questi esperimenti terremo conto solo di forze elettriche o magnetiche; assumeremo che questi esperimenti possano essere condotti in un ambiente dove altre forze, quali la gravità, possano essere trascurate).

1. Per prima cosa controlliamo la presenza di una forza *elettrica* mettendo una piccola carica di prova fer-

ISBN 88-408-0777-2

ma in vari punti dello spazio. Successivamente possiamo sottrarre la forza elettrica (se presente) dalla forza totale, il che, presumibilmente, lascia solo la forza magnetica. Assumiamo che ciò sia stato fatto, cosicché d'ora in avanti possiamo ignorare ogni forza elettrica che agisca sulla carica.

2. Successivamente lanciamo una carica positiva di prova q attraverso un punto particolare P con una velocità **v**. Si trova che la forza magnetica **F**, se presente, agisce sempre lateralmente, cioè ad angoli retti rispetto alla direzione di **v**. Possiamo ripetere l'esperimento lanciando la carica in P lungo differenti direzioni; si trova che, indipendentemente dalla direzione di **v**, la forza magnetica è sempre ad angoli retti rispetto a quella direzione.

3. Quando variamo la direzione di **v** attraverso il punto P, troviamo che l'intensità F varia da zero quando **v** ha una certa direzione, fino ad un massimo quando è ad angolo retto rispetto a quella direzione. Ad angoli intermedi, l'intensità F varia come il seno dell'angolo ϕ che il vettore velocità forma con quella particolare direzione. (Si noti che, in realtà, ci sono due orientazioni di **v** per cui **F** è nulla; queste orientazioni sono opposte l'una all'altra, cioè $\phi = 0°$ oppure $\phi = 180°$).

4. Quando variamo l'intensità della velocità, troviamo che l'intensità di **F** varia proporzionalmente.

5. Si trova, inoltre, che F è proporzionale all'intensità della carica di prova q, e che **F** ha verso opposto quando q cambia segno.

Definiamo ora il campo magnetico **B** nel modo seguente, basandoci su queste osservazioni: l'orientazione di **B** nel punto P è la stessa di una delle direzioni di **v** (quale delle due sarà specificato tra poco) lungo cui la forza è nulla, e l'intensità di **B** è determinata dall' intensità $F_\perp$ della massima forza, esercitata quando la carica di prova è lanciata perpendicolarmente alla direzione di **B**; cioè,

$$B = \frac{F_\perp}{qv}. \tag{5}$$

Ad angoli arbitrari queste osservazioni sono sintetizzabili con la formula

$$F = qvB \operatorname{sen}\phi, \tag{6}$$

dove ϕ è il più piccolo dei due angoli fra **v** e **B**. Siccome **F**, **v** e **B** sono vettori, l'equazione 6 può essere scritta come un prodotto vettoriale:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{7}$$

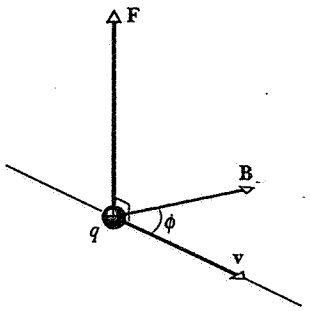


Figura 4 Una particella con carica positiva q che si muove con velocità **v** attraverso un campo magnetico **B** risente di una forza magnetica di deflessione **F**.

Scrivendo $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ invece di $\mathbf{B} \times \mathbf{v}$ abbiamo specificato quale delle due orientazioni possibili di **B** vogliamo usare.

La fig. 4 mostra le relazioni geometriche fra i vettori **F**, **v** e **B**. Osserviamo che, come sempre nel caso di un prodotto vettoriale, **F** è perpendicolare al piano formato da **v** e **B**. Quindi **F** è sempre perpendicolare a **v**, e la forza magnetica è una forza che deflette sempre lateralmente.Osserviamo inoltre che **F** si annulla quando **v** è parallela od antiparallela alla direzione di **B** (nel cui caso $\phi = 0°$ oppure $\phi = 180°$, e $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$), e che **F** ha la massima intensità, uguale a qvB, quando **v** forma un angolo retto con **B**.

Siccome la forza magnetica è sempre perpendicolare a **v**, non può cambiarne l'intensità ma solo la direzione. Equivalentemente, la forza agisce sempre ad angoli retti rispetto allo spostamento della particella e non può quindi compiere lavoro su di essa. Un campo magnetico costante, quindi, non può cambiare l'energia cinetica di una particella carica in moto (nel capitolo 36 considereremo campi magnetici variabili nel tempo, che *possono* cambiare l'energia cinetica di una particella. In questo capitolo ci occupiamo solo di campi magnetici che non variano nel tempo).

L'equazione 7, che serve da definizione di campo magnetico **B**, dà sia la sua intensità che la sua orientazione. Abbiamo definito il campo elettrico analogamente, attraverso l'equazione $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, in modo che, misurando la forza elettrica, si possa misurare l'intensità *e* l'orientazione del campo elettrico. I campi magnetici non possono essere misurati così semplicemente con una singola misura. Come la figura 4 suggerisce, misurare **F** per una sola **v** non è sufficiente a determinare **B**, perché la direzione di **F** non indica la direzione di **B**. Dobbiamo prima trovare la direzione di **B** (per esempio, determinando la direzione di **v** per cui la forza si annulla) e, successivamente, determinarne l'intensità con una seconda misura.

Nel SI l'unità di misura di **B** è il *tesla* (la cui abbreviazione è T). Dall'equazione 5 segue che

$$1 \text{ tesla} = 1\frac{\text{newton}}{\text{coulomb} \cdot \text{metro/secondo}} = 1\frac{\text{newton}}{\text{ampere} \cdot \text{metro}}.$$

Una precedente unità di misura (non del SI) per **B**, ancora di uso comune, è il *gauss*, convertibile in tesla mediante la relazione

$$1 \text{ tesla} = 10^4 \text{ gauss}.$$

Nella tabella 1 sono riportati alcuni valori tipici di campi magnetici.

TABELLA 1 VALORI TIPICI DI ALCUNI CAMPI MAGNETICI[a]

Posizione	*Campo magnetico* (T)
Sulla superficie di una stella di neutroni (calcolato)	10^8
Vicino ad un magnete superconduttore	5
Vicino ad un forte elettromagnete	1
Vicino ad una piccola calamita	10^{-2}
Sulla superficie della Terra	10^{-4}
Nello spazio interstellare	10^{-10}
In una stanza magneticamente schermata	10^{-14}

[a] Valori approssimati

In figura 5 (vedi anche fig.1) sono mostrate le linee di **B** di una sbarra magnetica. Osserviamo che le linee di **B** passano attraverso il magnete, formando percorsi chiusi. Dall'addensarsi delle linee di campo all'esterno del magnete, vicino agli estremi, possiamo dedurre che il campo magnetico ha qui la maggior intensità. Queste estremità sono chiamate *poli* del magnete, con la convenzione *nord* e *sud* data al polo da cui le linee rispettivamente escono ed entrano.

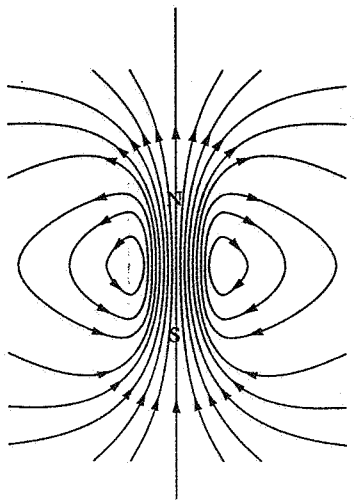


Figura 5 Le linee del campo magnetico di una barra magnetica. Le linee formano anelli chiusi, uscendo dal magnete dal suo polo nord ed entrandoci nel polo sud.

Poli magnetici di segno opposto si attraggono (quindi il polo nord di un magnete attrae il polo sud di un altro magnete), e poli dello stesso segno si respingono. Un'ordinaria bussola magnetica non è altro che un magnete sospeso, il cui polo nord punta nella direzione del nord geografico. Quindi il polo magnetico terrestre nella regione artica deve essere un polo magnetico *sud*, ed il polo in Antartide deve essere un polo magnetico *nord*. Vicino all'equatore le linee di campo sono quasi parallele alla superficie terrestre e dirette dal sud al nord geografico (come si può dedurre girando al contrario la fig. 5).

Esempio 1 Un campo magnetico uniforme **B**, con valore 1.2 mT, punta verticalmente verso l'alto, attraverso lo spazio della stanza in cui si trova un osservatore. Un protone da 5.3 MeV si muove orizzontalmente da sud a nord attraverso un certo punto della stanza. Si determini la forza magnetica di deflessione che agisce sul protone quando esso passa per il punto. La massa del protone è 1.67×10^{-27} kg.

Soluzione La forza magnetica di deflessione dipende dalla velocità del protone, che possiamo determinare dalla relazione $K = \frac{1}{2}mv^2$. Ricavando v, si trova

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(5.3)\text{ MeV }(1.60 \times 10^{-13}\text{ J/MeV})}{1.67 \times 10^{-27}\text{ kg}}}$$
$$= 3.2 \times 10^7 \text{ m/s}.$$

Dall'equazione 6 si ha

$$F = qvB \operatorname{sen}\phi$$
$$= (1.60 \times 10^{-19}\text{ C})(3.2 \times 10^7\text{ m/s})(1.2 \times 10^{-3}\text{ T}(\operatorname{sen} 90°)$$
$$= 6.1 \times 10^{-15}\text{ N}.$$

Questa può sembrare una forza poco intensa, ma agisce su una particella di piccola massa, dando luogo ad una accelerazione elevata, vale a dire

$$a = \frac{F}{m} = \frac{6.1 \times 10^{-15}\text{ N}}{1.67 \times 10^{-27}\text{ kg}} = 3.7 \times 10^{12}\text{ m/s}^2.$$

Rimane da trovare la direzione di **F** quando, come in figura 6, **v** punta orizzontalmente da sud a nord, e **B** è diretto verso l'alto. Usando l'equazione 7 e la regola della mano destra per il prodotto vettore, possiamo concludere che la forza **F** di deflessione deve puntare orizzontalmente da ovest ad est, come mostrato in figura 6.

Se la carica della particella fosse negativa, la forza magnetica di deflessione punterebbe nel verso opposto, cioè orizzontalmente da est ad ovest. Ciò risulta automaticamente dall'equazione 7, sostituendo q con $-q$.

In questo calcolo abbiamo usato l'espressione classica (approssimata) $K = \frac{1}{2}mv^2$ per l'energia cinetica del protone, piutto-

ISBN 88-408-0777-2

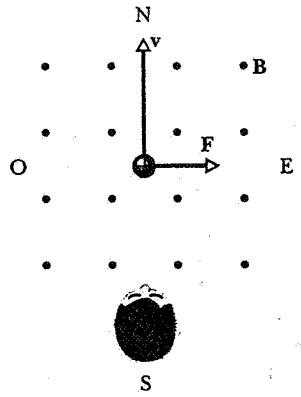


Figura 6 Esempio 1. Vista da sopra di uno studente seduto in una stanza in cui un campo magnetico diretto verso l'alto defletto verso est un protone in moto (i puntini, che rappresentano le punte di frecce, simboleggiano vettori che puntano fuori dalla pagina).

sto che l'espressione relativistica (esatta) data dall'equazione 25 del capitolo 7. Tale approssimazione è lecita per $K \ll mc^2$, dove mc^2 è l'energia a riposo della particella. In questo caso $K = 5.3$ MeV, e l'energia a riposo di un protone è 938 MeV (vedi Appendice F). Per questo protone è quindi corretto usare l'espressione classica $K = \frac{1}{2}mv^2$ per l'energia cinetica. Avendo a che fare con particelle energetiche, bisogna prestare molta attenzione a questo riguardo.

La forza di Lorentz

Se un campo elettrico **E** ed un campo magnetico **B** agiscono contemporaneamente su una particella carica, la forza totale su di essa può essere espressa come

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{8}$$

Questa forza prende il nome di forza di Lorentz. La forza di Lorentz non è un nuovo tipo di forza: è semplicemente la somma delle forze elettriche e delle forze magnetiche che possono agire contemporaneamente su una particella carica. La parte elettrica di questa forza agisce su ogni particella carica, sia ferma che in moto; la parte magnetica agisce solo su particelle cariche in moto.

Un uso comune della forza di Lorentz si ha quando un fascio di particelle cariche passa attraverso una regione in cui **E** e **B** sono perpendicolari l'uno all'altro ed alla velocità delle particelle. Se **E**, **B**, e **v** sono orientati come mostrato in figura 7, allora la forza elettrica $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ agisce nel verso opposto rispetto alla forza magnetica $\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Possiamo regolare i campi magnetico ed elettrico finché i valori delle forze sono uguali. In questo caso la forza di Lorentz si annulla. In termini scalari si ha, quindi:

$$qE = qvB \tag{9}$$

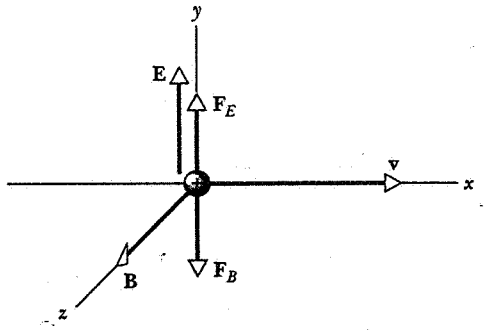


Figura 7 Una particella carica positivamente, in moto in una regione in cui ci siano campi elettrici e magnetici perpendicolari fra loro, risente dell'azione di una forza elettrica $\mathbf{F}_E$ e di una magnetica $\mathbf{F}_B$ opposte.

oppure

$$v = \frac{E}{B}. \tag{10}$$

I campi **E** e **B** disposti perpendicolarmente agiscono perciò da selettore di velocità: solo particelle con velocità $v = E/B$ passano indisturbate dai due campi attraverso la regione, mentre particelle con altre velocità vengono deflesse. Questo valore di v è indipendente dalla carica e dalla massa delle particelle.

Fasci di particelle cariche vengono spesso ottenuti con metodi che danno una distribuzione di velocità nota (ad esempio, una distribuzione termica quale quella di fig. 11 del cap. 24). Usando un selettore di velocità possiamo isolare dal fascio particelle con una velocità predefinita. Questo principio fu impiegato nel 1897 da J.J. Thomson nella scoperta dell'elettrone e nella misura del suo rapporto carica su massa. In figura 8 è mostrata una versione moderna del suo apparato. Thomson misurò inizialmente la deflessione verticale y del fascio quando il solo campo elettrico era presente. Dall'esempio 6 del capitolo 28, tale deflessione è

$$y = -\frac{qEL^2}{2mv^2}. \tag{11}$$

In questa espressione, come nella figura 8, E è l'intensità del campo elettrico e si assume che il verso positivo di y sia rivolto verso l'alto. La deflessione y di una particella carica negativamente è positiva nell'equazione 11 ed in figura 8.

Successivamente il campo magnetico veniva attivato e regolato finchè la deflessione del fascio risultava nulla (cioè finchè diveniva equivalente a quella con nessun campo presente). In questo caso $v = E/B$ e, ricavando il rapporto carica su massa con $q = -e$, si ottiene

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{B^2L^2}. \tag{12}$$

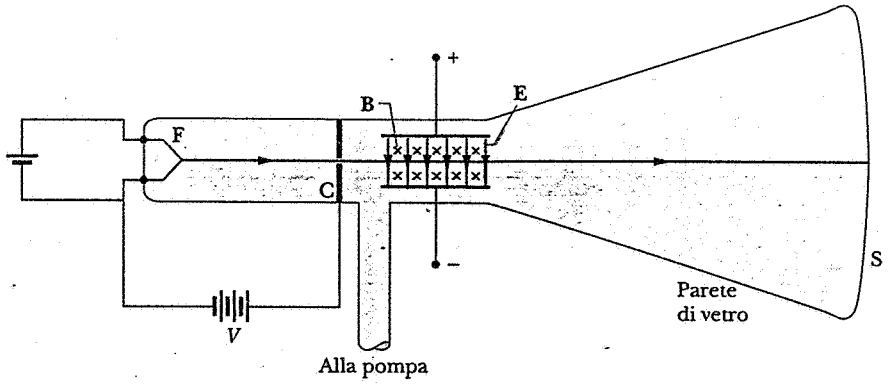


Figura 8 Una versione moderna dell'apparato di J.J. Thomson per la determinazione del rapporto carica su massa per l'elettrone. Il filamento F produce un fascio di elettroni con una certa distribuzione di velocità. Il campo elettrico **E** è prodotto collegando una batteria con le piastre terminali. Il campo magnetico **B** è prodotto per mezzo di bobine percorse da corrente (non mostrate). Il fascio forma una macchia visibile dove colpisce lo schermo S (le croci, che rappresentano le code di frecce, indicano vettori **B** che puntano verso la pagina).

Il valore determinato da Thomson per e/m (espresso in unità moderne) era 1.7×10^{11} C/kg, in buon accordo coll'attuale valore di $1.75881962 \times 10^{11}$ C/kg.

Un'altra applicazione del selettore di velocità si ha nello spettrometro di massa, un apparecchio per la separazione, a seconda della massa, di ioni (vedi par. 1-5). Un fascio di ioni, che può contenere particelle con differenti masse e che può essere ottenuto dai vapori di materiale riscaldato in un forno (vedi fig. 9), viene fatto passare attraverso un selettore di velocità. Esso lascia passare solo ioni aventi una certa velocità e, quando il fascio risultante viene fatto passare attraverso un secondo campo magnetico, le traiettorie delle particelle sono archi circolari (come vedremo nel prossimo paragrafo) i cui raggi sono determinati dalla quantità di moto delle particelle. Siccome tutte le particelle hanno la stessa velocità, il raggio della traiettoria è determinato dalla massa, ed ogni componente del fascio con massa diversa segue una traiettoria di raggio differente. Questi atomi possono venire raccolti e misurati o altrimenti composti in nuovo fascio per esperimenti successivi. Si vedano i problemi 17 e 22-24 per altri dettagli sulla separazione di ioni in funzione della loro massa.

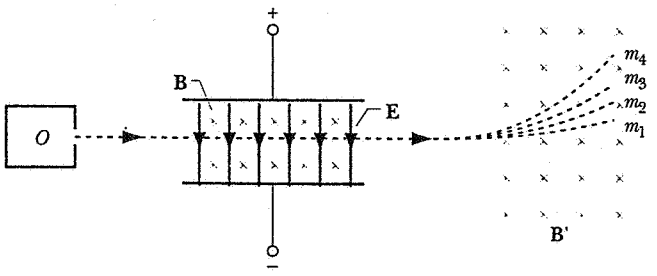


Figura 9 Diagramma schematico di uno spettrometro di massa. Un fascio di atomi ionizzati aventi masse differenti esce da un forno O ed entra in una regione dove vi sono i campi **E** e **B** perpendicolari. Solo gli ioni che si muovono con velocità $v = E/B$ passano senza subire deflessioni attraverso la regione. Un secondo campo magnetico **B**′ deflette gli ioni su orbite circolari i cui raggi sono determinati dalla massa degli atomi.

34-3 CARICHE IN MOTO CIRCOLARE

La figura 10 mostra un fascio di elettroni in moto in una camera sottovuoto in cui c'è un campo magnetico uniforme diretto perpendicolarmente al piano della figura. La forza di deflessione magnetica è l'unica forza importante che agisce sugli elettroni. Il fascio segue una traiettoria chiaramente circolare. Vediamo di comprendere questo fatto.

La forza di deflessione magnetica ha due caratteristiche che influenzano il moto di particelle cariche: (1) non ne cambia la velocità, e (2) agisce sempre perpendicolarmente alla velocità delle particelle. Queste sono esattamente le caratteristiche necessarie affinché una particella si muova di moto circolare uniforme, come nel caso degli elettroni in figura 10.

Siccome **B** è perpendicolare a v, l'intensità della forza magnetica può essere scritta come qvB, e dalla seconda legge di Newton con accelerazione centripeta v^2/r si ha

$$|q|vB = m\frac{v^2}{r} \qquad (13)$$

ISBN 88-408-0777-2

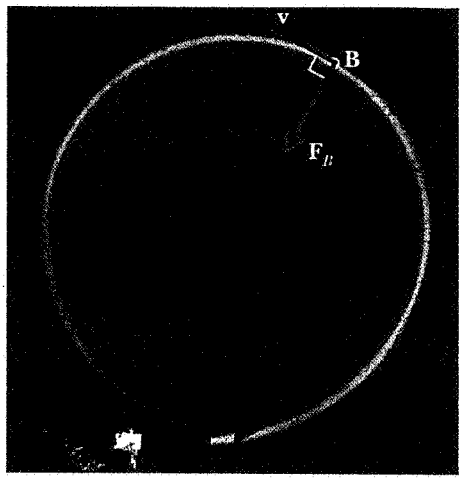


Figura 10 Elettroni in moto circolare in una camera contenente gas a bassa pressione. Il fascio è reso visibile da collisioni con gli atomi del gas. Un campo magnetico uniforme **B**, che esce perpendicolarmente dal piano della figura, riempie la camera. La forza magnetica $\mathbf{F}_B$ è diretta radialmente verso l'interno.

cioè

$$r = \frac{mv}{|q|B} = \frac{p}{|q|B}. \tag{14}$$

Quindi il raggio della traiettoria è determinato dalla quantità di moto delle particelle, dalla loro carica e dal valore del campo magnetico. Se la sorgente avesse emesso gli elettroni ad una velocità inferiore, questi si sarebbero mossi su una traiettoria di raggio più piccolo.

La velocità angolare del moto circolare è

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m}, \tag{15}$$

e la corrispondente frequenza è

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m}. \tag{16}$$

Si osserva che la frequenza associata al moto circolare non dipende dalla velocità della particella (almeno finchè $v \ll c$, come vedremo oltre). Quindi, se gli elettroni in figura 10 fossero emessi con velocità inferiore, per compiere un giro su una circonferenza più piccola essi richiederebbero lo stesso tempo di elettroni più veloci su una circonferenza più grande. La frequenza data dall'equazione 16 è detta *frequenza di ciclotrone*, perché le particelle in un ciclotrone girano a questa frequenza. La frequenza è caratteristica di una determinata particella in moto in un campo magnetico, analogamente al pendolo oscillante od al sistema massa-molla, che sono caratterizzati da una propria frequenza.

Il ciclotrone

Il ciclotrone (vedi fig. 11) è un acceleratore che produce fasci di particelle energetiche cariche, che possono

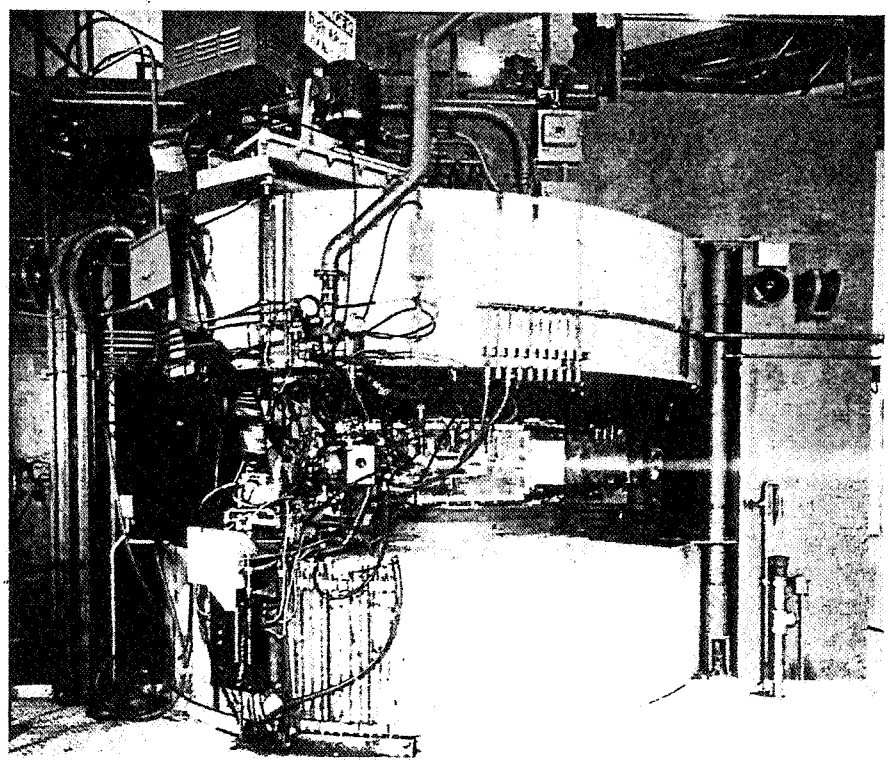


Figura 11 Un ciclotrone. I magneti sono nelle due grosse camere in alto ed in basso. Il fascio è visibile quando emerge dall'acceleratore perchè, analogamente al fascio di elettroni di figura 10, ionizza le molecole d'aria con cui collide.

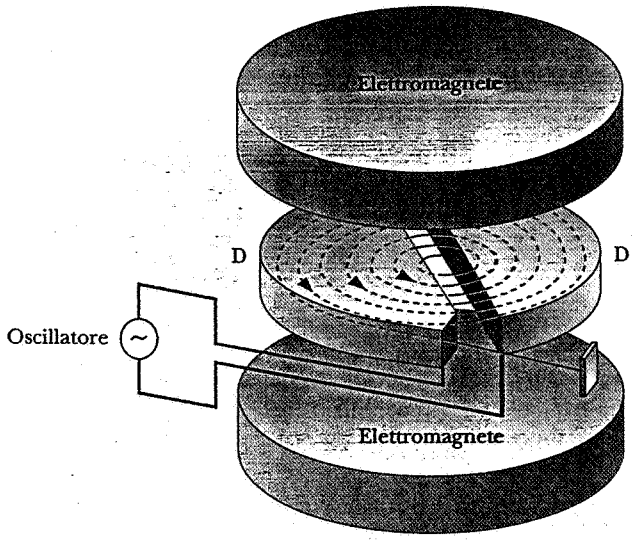


Figura 12 I componenti di un ciclotrone, con la sorgente S e le dees. Gli elettromagneti provvedono a fornire un campo magnetico uniforme verticale. Le particelle spiralizzano verso l'esterno dentro le cavità, guadagnando energia ogni volta che attraversano il gap che le separa.

essere usati in esperimenti di reazioni nucleari. La figura 12 mostra uno spaccato schematico di ciclotrone. Esso consiste in due cavità metalliche sagomate a forma di D chiamate *dees**. Le dees sono fatte di materiale conduttore, quale fogli di rame, e sono aperte lungo il loro lato dritto. Sono collegate ad un generatore elettrico oscillante, che mantiene fra di esse una differenza di potenziale oscillante. Un campo magnetico è perpendicolare al piano delle dees. Al centro dell'apparato c'è una sorgente che emette gli ioni che si vogliono accelerare. Quando gli ioni sono nella zona compresa fra le due cavità, vengono accelerati dalla differenza di potenziale mantenuta fra di esse. In seguito entrano in una delle due dees, dove non risentono dell'azione del campo elettrico (il campo elettrico dentro ad un conduttore è nullo), mentre il campo magnetico (che non è schermato dalle due cavità di rame) piega la loro traiettoria in una curva circolare, senza cambiare il valore v della velocità d'ingresso. Le particelle compiono quindi un mezzo giro dentro la cavità e poi escono da essa. Quando si trovano di nuovo fra le due dees, l'oscillatore ha invertito la direzione del campo elettrico, cosicché le particelle vengono ulteriormente accelerate. Muovendosi con una velocità maggiore, esse si muovono su un'orbita di raggio più grande, come indicato dall'equazione 14. Comunque, *in accordo con l'equazione 16. impiegano esattamente lo stesso tempo per muoversi sulla semicirconferenza di raggio maggiore* nella cavità successiva; questa è la caratteristica peculiare del modo di operare del ciclotrone. La frequenza dell'oscillatore deve essere regolata in modo da eguagliare quella di ciclotrone (determinata da campo magnetico, carica e massa delle particelle che devono essere accelerate); questa uguaglianza fra frequenze è detta *condizione di risonanza.* Se la condizione di risonanza è soddisfatta, le particelle continuano ad accelerare fra le dees ed a muoversi in circolo all'interno delle cavità, incrementando progressivamente la propria energia ad ogni giro, finchè non vengono deflesse fuori dall'acceleratore. La velocità finale delle particelle è determinata dal raggio R a cui esse lasciano l'acceleratore. Dall'equazione 14,

$$v = \frac{|q|BR}{m}, \tag{17}$$

e la corrispondente energia cinetica (non relativistica) delle particelle è

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}. \tag{18}$$

Ciclotroni tipici producono fasci di protoni con energie massime dell'ordine dei 10 MeV. Per una data massa, ioni con carica elettrica più elevata emergono con energie che aumentano con il quadrato della carica.

È in qualche modo sorprendente che l'energia nell'equazione 18 dipenda dal campo magnetico, che non accelera le particelle, ma non dipenda dalla differenza di potenziale elettrico che, invece, le accelera. Una differenza di potenziale maggiore dà alla particella una «spinta» più forte ad ogni ciclo; il raggio aumenta più rapidamente, e le particelle fanno meno cicli prima di lasciare l'acceleratore. Con una differenza di potenziale inferiore, le particelle fanno più cicli ma ricevono una «spinta» più debole ogni volta. Quindi l'energia delle particelle è indipendente dalla differenza di potenziale.

Il sincrotrone

In linea di principio, si dovrebbe essere in grado di aumentare l'energia del fascio di particelle in un ciclotrone aumentando il raggio. Intorno ai 50 MeV, però, la condizione di risonanza non può più essere soddisfatta. Per capire questo effetto dobbiamo tornare all'equazione 14, in cui abbiamo usato la quantità di moto classica mv. Perfino per un protone con un'energia cinetica di 50 Mev si ha che $v/c = 0.3$; quindi l'espressione classica mv non dovrebbe più essere usata. L'espressione $r = p/|q|B$ è, comunque, corretta se si utilizza l'espressione relativistica per la quantità di moto. p

* Così dette dalla pronuncia inglese della lettera 'd'. (N.d.T.).

 ISBN 88-408-0777-2

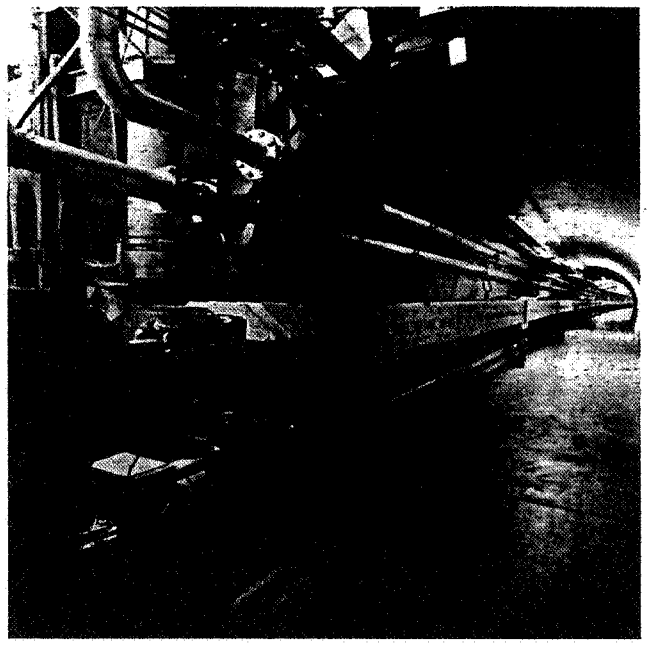


Figura 13 Una vista del tunnel del Fermilab. Il fascio accelerato passa attraverso molte sezioni di magneti, di sezione rettangolare e di lunghezza di circa 2 m, alcuni dei quali qui visibili.

$= mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (vedi eq. 22 del cap. 9), e così l'equazione 16 diviene

$$\nu = \frac{|q|B\sqrt{1 - v^2/c^2}}{2\pi m}. \qquad (19)$$

In questo caso la frequenza non è più costante (come era nell'eq. 16) ma dipende ora dalla velocità v. La risonanza fra la frequenza delle particelle e quella dell'oscillatore non c'è più.

A questa difficoltà si può ovviare regolando il campo magnetico in modo che aumenti a grandi raggi. Ciclotroni operanti su questo principio includono gli acceleratori per protoni (protosincrotroni) da 500 MeV nei laboratori di fisica nucleare vicino a Vancouver, e Zurigo. L'aumento in energia è limitato dal costo della costruzione di magneti sempre più grandi; per raggiungere un'energia di circa 500 GeV bisognerebbe impiegare un magnete che copra un'area di circa 4 chilometri quadrati!

Energie più elevate sono raggiunte impiegando un acceleratore di progetto differente, chiamato *sincrotrone*. Un esempio è il protosincrotrone da 1000 GeV al Fermi National Accelerator Laboratory vicino a Chicago (vedi fig. 13; vedi anche fig. 19 del cap. 10). Invece di un singolo magnete, questo sincrotrone impiega molti magneti (circa 3000) disposti lungo una circonferenza; ogni magnete curva il fascio di un piccolo angolo (0.1°). Negli spazi fra un magnete e l'altro un campo elettrico accelera le particelle. Le particelle sono accelerate a fiotti (bursts), e sia la frequenza del potenziale accelerante sia l'intensità del campo magnetico sono variate man mano che le particelle vengono accelerate, mantenendo così la risonanza a tutte le energie ed il raggio dell'orbita costante. Nell'acceleratore del Fermilab, i protoni compiono circa 400 000 rivoluzioni intorno alla circonferenza da 4 miglia per raggiungere la massima energia. Siccome impiegano circa 10 s per coprire questa distanza a velocità vicine a quella della luce, ciò implica che l'acceleratore produca un burst ogni 10 s.

Al momento ci sono progetti per la costruzione di un sincrotrone ancora più grosso, il Superconducting Supercollider (SSC). L'anello dell'SSC sarà circa 20 volte più grande e produrrà particelle circa 20 volte più energetiche che il Fermilab.*

La bottiglia magnetica

Un campo magnetico non uniforme può essere usato per catturare particelle cariche in una regione di spazio. La figura 14 mostra una vista schematica del principio di funzionamento di una bottiglia magnetica. Le particelle cariche tendono a muoversi circolarmente attorno alla direzione del campo. Supponiamo che esse abbiano un moto di deriva laterale, verso destra. Il moto risultante è quindi quello elicoidale, simile alla forma di una molla. Il campo aumenta nei pressi delle estremità della «bottiglia magnetica», e la forza ha una piccola componente che punta verso il centro della regione, che inverte la direzione del moto delle particelle e fa sì che spiralizzino nella direzione opposta, finchè sono eventualmente riflesse dall'estremità oppo-

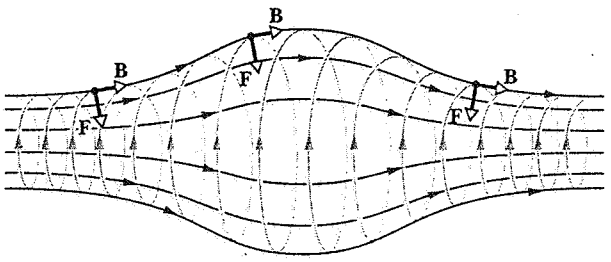


Figura 14 Una particella carica che spiralizza in un campo magnetico non uniforme. Il campo è più intenso agli estremi sinistro e destro che al centro. Le particelle possono essere intrappolate, spiralizzando avanti e indietro fra le due regioni a campo più intenso. Si osservi che la forza magnetica agli estremi di questa «bottiglia magnetica» ha componenti, che puntano verso l'interno, che servono a confinare le particelle.

* Cfr. *The Superconducting Supercollider*, by J. David Jackson, Maury Tigner and Stanley Wojcicki, «Scientific American», Marzo 1986, p. 66. (Trad. it *Il supercollisore a magneti superconduttori*, «Le Scienze», 213:60.)

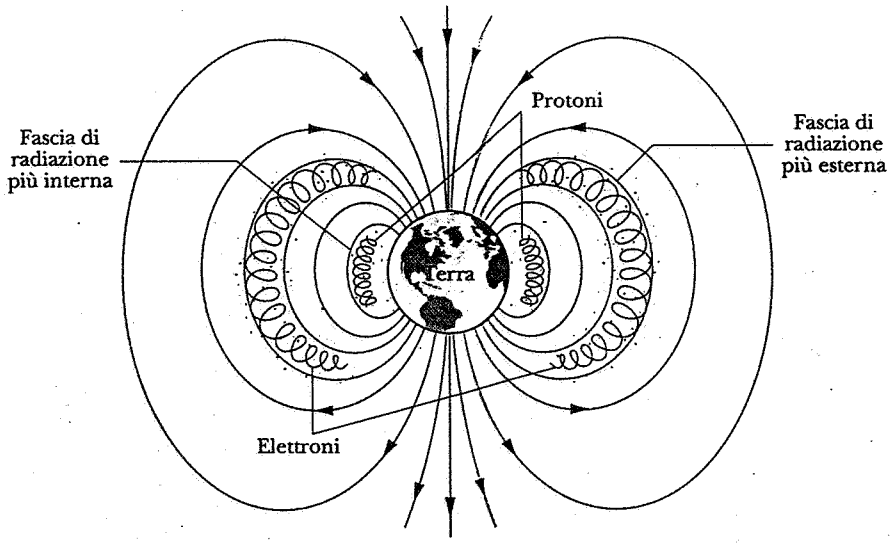


Figura 15 Il campo magnetico terrestre, con protoni ed elettroni intrappolati nelle fasce di radiazioni di Van Allen.

sta. Le particelle continuano a muoversi avanti e indietro, confinate nello spazio fra le due regioni con campo forte. Tale dispositivo è usato per confinare i gas caldi ionizzati (chiamati *plasmi*) che sono usati nella ricerche di fusioni termonucleari controllate.

Un fenomeno simile avviene nel campo magnetico terrestre, come mostrato in figura 15. Elettroni e protoni sono intrappolati in differenti regioni del campo terrestre e spiralizzano avanti ed indietro fra le regioni a campo forte vicino ai poli in un tempo di pochi secondi. Questi campi sono responsabili delle cosiddette fasce di radiazioni di Van Allen che circondano la terra.

Esempio 2 Un particolare ciclotrone è progettato con cavità di raggio $R = 75$ cm e con magneti che sono in grado di fornire un campo di 1.5 T. (a) Quale dovrebbe essere la frequenza dell'oscillatore se devono venire accelerati deuteroni? (b) Qual è la massima energia dei deuteroni che può essere ottenuta?

Soluzione (*a*) Un deuterone è un nucleo di idrogeno pesante, con carica $q = +e$ e massa di 3.34×10^{-27} kg, circa il doppio della massa dell'ordinario idrogeno. Usando l'equazione 16 si trova la frequenza:

$$\nu = \frac{|q|B}{2\pi m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5\ \text{T})}{2\pi(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 1.1 \times 10^{7}\ \text{Hz} = 11\ \text{MHz}.$$

(*b*) La massima energia si ha quando i deuteroni emergono al massimo raggio R. In accordo con l'equazione 18,

$$K = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.5\ \text{T})^2(0.75\ \text{m})^2}{2(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 4.58 \times 10^{-12}\ \text{J} = 30\ \text{MeV}.$$

Deuteroni di questa energia in aria hanno un percorso di pochi metri, come suggerito dalla figura 11.

Calcolo numerico del cammino *(Facoltativo)*

Consideriamo una particella avente carica positiva q e massa m che passi per l'origine muovendosi lungo l'asse x ad una velocità v_0 al tempo $t = 0$ (vedi fig. 16). Un campo magnetico uniforme B_0 è parallelo all'asse z. Qual'è il cammino della particella?

Ci sono tre modi per risolvere questo problema: (1) usare l'equazione 14 per trovare il cammino, sapendo che deve essere una circonferenza; (2) usare l'equazione 7 per trovare le componenti della forza sulla particella e poi risolvere analiticamente la legge di Newton per ottenere $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$; (3) risolvere la legge di Newton numericamente. Per mostrare l'uso di una tecnica generale che può essere usata anche quando il campo non è uniforme, scegliamo il metodo 3. I metodi 1 e 2 sono considerati nei problemi 34 e 35.

Cominciamo scrivendo le componenti della forza, usando l'equazione 7 e l'espressione per le componenti del prodotto vettoriale (vedi eq. 17 del cap. 3):

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q(v_yB_z - v_zB_y)\mathbf{i} +$$
$$+ q(v_zB_x - v_xB_z)\mathbf{j} + q(v_xB_y - v_yB_x)\mathbf{k},$$

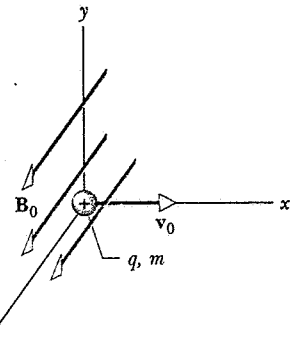


Figura 16 Una particella di carica q e massa m passa per l'origine con una velocità v_0 nella direzione x positiva in una regione in cui c'è un campo uniforme B_0 lungo la direzione z.

ISBN 88-408-0777-2

cioè, con $B_x = B_y = 0$ e con $B_z = B_0$,

$$F_x = q(v_y B_z - v_z B_y) = q v_y B_0,$$
$$F_y = q(v_z B_x - v_x B_z) = -q v_x B_0,$$
$$F_z = q(v_x B_y - v_y B_x) = 0.$$

Con forze nulle lungo l'asse z, non ci sarà accelerazione in questa direzione. La velocità iniziale non ha componenti z, e quindi $v_z = 0$ a tutti i tempi. Il moto è quindi confinato al piano xy. Considerando solo moti in x ed y, la seconda legge di Newton diviene allora

$$\text{componente } x: \quad F_x = q v_y B_0 = m\frac{dv_x}{dt},$$
$$\text{componente } y: \quad F_y = -q v_x B_0 = m\frac{dv_y}{dt}.$$

Risolviamo queste equazioni numericamente, come abbiamo fatto nei paragrafi 6-6, 6-7 e 6-8. Il moto è diviso in intervalli di tempo t che sono piccoli a sufficienza per poter considerare l'accelerazione costante durante l'intervallo. Riscriviamo le equazioni riportate sopra in modo che forniscano gli incrementi di velocità δv_x e δv_y durante l'intervallo δt:

$$\delta v_x = (qB_0/m) v_y \delta t,$$
$$\delta v_y = -(qB_0/m) v_x \delta t.$$

Cominciando dal primo intervallo (da $t = 0$ a $t = \delta t$), in cui $v_x = v_0$ e $v_y = 0$, troviamo gli incrementi di velocità e poi usiamo le formule con l'accelerazione costante per determinare la posizione e la velocità alla fine dell'intervallo:

$$v_x = v_{0x} + \delta v_x$$
$$v_y = v_{0y} + \delta v_y$$
$$x = x_0 + \bar{v}_x \delta t = x_0 + \tfrac{1}{2}(v_{0x} + v_x)\delta t$$
$$y = y_0 + \bar{v}_y \delta t = y_0 + \tfrac{1}{2}(v_{0y} + v_y)\delta t$$

dove $\bar{v}_x$ e $\bar{v}_y$ sono le componenti della velocità media nell'intervallo. Continuando attraverso il secondo ed i successivi intervalli, possiamo determinare x ed y ad ogni tempo futuro. In Appendice I è riportato un programma in linguaggio BASIC che compie questo calcolo. La Figura 17*a* mostra il moto risultante, calcolato per una particella con velocità iniziale $v_0 = 3.0 \times 10^6$ m/s in un campo $B_0 = 0.15$ T. Naturalmente non deve sorprendere che il moto segua percorsi circolari.

Il vantaggio di questo metodo sta nel fatto che può essere facilmente adattato ai casi in cui il campo non è uniforme. In questi casi il moto non è circolare, cosicché il metodo 1 non può essere impiegato e la seconda legge di Newton può non essere facilmente risolubile per via analitica, cosicché anche il metodo 2 può non essere usato. Il metodo 3 può venire impiegato indipendentemente dalla natura del campo.

Per esempio, supponiamo che nel piano xy il campo abbia ancora la sola componente z non nulla, ma che aumenti con la distanza dall'origine della particella secondo l'equazione

$$B = B_0\left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right).$$

dove R è il raggio dell'orbita della particella nel caso precedente (corrispondente al campo B_0). Solo un piccolo cambiamento è richiesto nel programma (vedi Appendice I) ed il risultato è mostrato in figura 17*b*. Questa bella figura simmetrica così sagomata a forma di fiore è un risultato sorprendente di questo calcolo. Calcoli analoghi sono fatti per progettare i campi magnetici non uniformi che sono usati per confinare e focalizzare fasci di particelle cariche in un gran numero di applicazioni, quali acceleratori e reattori a fusione. ■

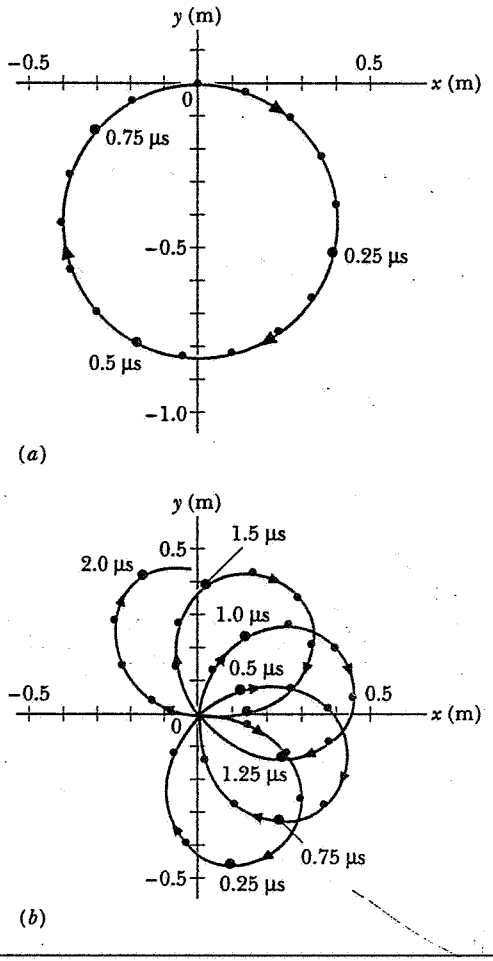


Figura 17 (*a*) Il cammino di una particella è una circonferenza se il campo è uniforme. I punti mostrano la posizione calcolata ad intervalli di 0.05 s. (*b*) Il cammino di una particella nel caso di un particolare campo non uniforme.

34-4 L' EFFETTO HALL

Nel 1879 Edwin H.Hall* condusse un esperimento che permise di misurare direttamente il segno e la densità (numero di cariche per unità di volume) dei portatori di cariche in un conduttore. L'*effetto Hall* gioca un ruolo cruciale nella nostra comprensione della conduzione elettrica nei metalli e nei semiconduttori.

* Al tempo della sua scoperta, Hall era uno studente ventiquattrenne laureatosi alla John Hopkins University. Il suo supervisore alla ricerca era il professore Henry A. Rowland, che aveva mostrato pochi anni prima che una carica in moto produce lo stesso campo magnetico di una corrente elettrica.

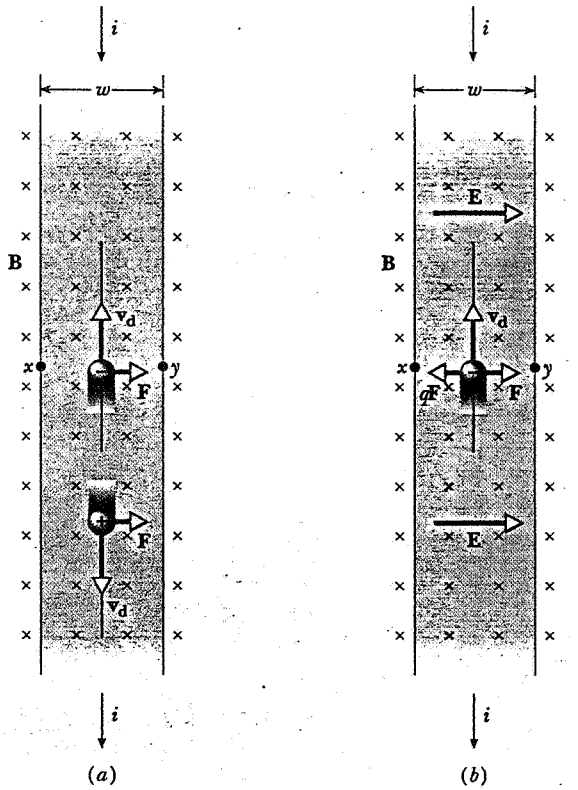


Figura 18 Una striscia di rame immersa in un campo magnetico **B** è percorsa da una corrente *i*. (*a*) La situazione subito dopo che il campo è stato «acceso», e (*b*) la situazione all'equilibrio, che si instaura rapidamente. Si noti come le cariche negative si accumulano sul lato destro della striscia, lasciando così cariche positive non compensate sulla sinistra. Il punto *x* è ad un potenziale superiore rispetto ad *y*.

Consideriamo una striscia di materiale di larghezza *w* percorsa da una corrente *i*, come mostrato in figura 18. Il verso della corrente è quello convenzionale, opposto a quello del moto degli elettroni. Un campo magnetico uniforme **B** è stabilito perpendicolarmente al piano della striscia, ponendola, ad esempio, fra i poli di un elettromagnete. I portatori di carica (elettroni) subiscono l'azione di una forza magnetica di deflessione $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, come mostrato in figura, e si muovono verso il margine destro della striscia. Osserviamo che cariche positive che si muovono nel verso della corrente *i* risentono di una forza di deflessione nello *stesso* verso della forza che agisce sugli elettroni.

L'accumulo di cariche sul lato destro della striscia (e la corrispondente carenza di cariche di quel segno sul margine opposto), che è l'effetto Hall, produce un campo elettrico **E** attraverso la striscia, come mostrato in figura 18*b*. In altre parole, una differenza di potenziale $V = E/w$, detta *differenza di potenziale Hall* (o tensione Hall), si instaura attraverso la striscia. Possiamo misurare *V* connettendo i terminali di un voltmetro ai punti *x* ed *y* di figura 18. Come mostreremo poi, il segno di *V* dà il segno dei portatori di carica, e l'intensità di *V* dà la loro densità (numero per unità di volume). Se, ad esempio, i portatori sono elettroni, un eccesso di cariche negative si accumula sul lato destro della striscia, ed il punto *y* è ad un potenziale inferiore rispetto al punto *x*. Questo può sembrare una conclusione ovvia nel caso dei metalli; tuttavia bisogna tenere conto del fatto che i lavori di Hall vennero condotti circa 20 anni prima della scoperta dell'elettrone da parte di Thomson, e la natura della conduzione elettrica nei metalli non era così ovvia a quel tempo.

Assumiamo che la conduzione nel materiale sia dovuta a portatori di cariche di un determinato segno (positivo o negativo) che si muovono con una velocità di deriva $\mathbf{v}_d$. Quando i portatori di carica si muovono, vengono deflessi verso destra, in figura 18, dalla forza magnetica. Accumulandosi sul lato destro, le cariche creano un campo che agisce all'interno del conduttore e che si oppone al moto laterale di ulteriori cariche. Ad un certo punto, viene raggiunto l'equilibrio, e la tensione Hall raggiunge il suo massimo; la forza laterale magnetica ($q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$) è allora bilanciata dalla forza elettrica laterale ($q\mathbf{E}$). In termini vettoriali, la forza laterale totale sui portatori di cariche è, in queste condizioni, nulla:

$$q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = 0, \tag{20}$$

cioè

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \tag{21}$$

Dato che $\mathbf{v}_d$ e **B** sono perpendicolari, possiamo scrivere l'equazione 21 in termini dei loro moduli come

$$E = v_d B. \tag{22}$$

Dall'equazione 6 del capitolo 32 possiamo esprimere la velocità di deriva come $v_d = j/ne$, dove *j* è la densità di corrente nella striscia e *n* è la densità dei portatori di carica. La densità di corrente *j* è la corrente *i* per unità di superficie attraverso una sezione trasversale *A* della striscia. Se *t* è lo spessore della striscia, allora la sezione trasversale *A* può essere scritta come *wt*. Sostituendo *V*/*w* per il campo elettrico *E*, otteniamo

$$\frac{V}{w} = v_d B = \frac{j}{ne} B = \frac{i}{wtne} B$$

cioè, ricavando la densità di portatori di cariche

$$n = \frac{iB}{etV}. \tag{23}$$

Da una misura del valore della differenza di potenziale Hall *V*, possiamo trovare la densità dei portatori di carica. La tabella 2 raccoglie i dati riguardanti l'effetto Hall per diversi metalli e semiconduttori. Per alcuni

ISBN 88-408-0777-2

metalli monovalenti (Na, K, Cu, Ag) l'effetto Hall indica che ogni atomo contribuisce approssimativamente con un elettrone libero alla conduzione. Per altri metalli, il numero di elettroni per atomo può essere più grande di uno (Al) o più piccolo (Sb). Per alcuni metalli (Be, Zn), la differenza di potenziale Hall mostra che i portatori di cariche hanno segno positivo. In questo caso la conduzione è dominata dalle lacune, livelli energetici non occupati nella banda di valenza (vedi par. 32-7 e cap. 53). Le lacune corrispondono all'assenza di elettroni e, perciò, si comportano da portatori di carica positivi in moto attraverso il materiale.

Per alcuni materiali, semiconduttori in particolare, vi è sostanziale contributo sia dagli elettroni sia dalle lacune, e la semplice interpretazione dell'effetto Hall in termini di conduzione dovuta al moto di un solo tipo di portatore di cariche non è più sufficiente. In questi casi è necessario svolgere calcoli più dettagliati basati sulla teoria quantistica.

TABELLA 2 RISULTATI PER L'EFFETTO HALL PER ALCUNI MATERIALI

Materiale	n (10^{28}/m^3)	*Segno di* V	*Numero per atomo*[a]
Na	2.5	−	0.99
K	1.5	−	1.1
Cu	11	−	1.3
Ag	7.4	−	1.3
Al	21	−	3.5
Sb	0.31	−	0.09
Be	2.6	+	2.2
Zn	19	+	2.9
Si (puro)	1.5×10^{-12}	−	3×10^{-13}
Si (di tipo n, tipicamente)	10^{-7}	−	2×10^{-8}

[a] Numero di portatori di carica per atomo di ciascun materiale quale viene determinato dal numero per unità di volume, dalla densità e dalla massa molare del materiale

Esempio 3 Una striscia di rame spessa 150 m è posta in un campo magnetico $B = 0.65$ T perpendicolare al piano della striscia, ed una corrente $i = 23$ A viene fatta passare attraverso di essa. Quale differenza di potenziale Hall V si instaurerebbe attraverso la striscia se ci fosse un portatore di carica per atomo ?

Soluzione Nell'esempio 2 del capitolo 32 abbiamo calcolato il numero di portatori di carica per unità di volume per il rame, assumendo che ogni atomo contribusca con un elettrone, ed abbiamo trovato

$$n = 8.49 \times 10^{28} \text{ elettroni/m}^3.$$

Dall'equazione 23 allora,

$$V = \frac{iB}{net} = \frac{(23 \text{ A})(0.65 \text{ T})}{(8.49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})(150 \times 10^{-6} \text{ m})}$$
$$= 7.3 \times 10^{-6} \text{ V} = 7.3 \ \mu\text{V}.$$

Questa differenza di potenziale, per quanto piccola, è facilmente misurabile.

L' effetto Hall quantistico* *(Facoltativo)*

Riscriviamo l'equazione 23 come

$$\frac{V}{i} = \frac{1}{etn} B. \tag{24}$$

Il membro a sinistra ha le dimensioni di una resistenza (tensione diviso corrente), anche se non è una resistenza nel senso convenzionale. È comunemente chiamata *resistenza Hall*. Possiamo determinare la resistenza Hall misurando la differenza di potenziale Hall V in un materiale percorso da una corrente i.

Dall'equazione 24 ci si attenderebbe che la resistenza Hall cresca linearmente col campo magnetico B per un dato campione (per cui n e t sono costanti). Un grafico della resistenza Hall in funzione di B dovrebbe essere una linea retta.

Durante alcuni esperimenti condotti nel 1980, il fisico tedesco Klaus von Klitzing scoprì che, per forti campi e basse temperature (circa 1 K), la resistenza Hall non cresce linearmente con il campo; invece, il grafico mostra una serie di «gradini», come mostrato in figura 19. Questo effetto è divenuto noto con il nome di *effetto Hall quantistico*, e nel 1985 von Klitzing fu insignito del premio Nobel per la sua scoperta.

La spiegazione di questo effetto coinvolge le orbite circolari su cui gli elettroni sono forzati a muoversi dal campo. La meccanica quantistica vieta che le orbite si sovrappongano. Aumentando il campo, il raggio orbitale decresce, permettendo così che più orbite si raggruppino avvicinandosi da un lato del materiale. Siccome il moto degli elettroni è quantizzato (solo certe orbite sono permesse), le variazioni del moto orbitale avvengono bruscamente, corrispondendo ai gradini della figura 19. Una unità di misura

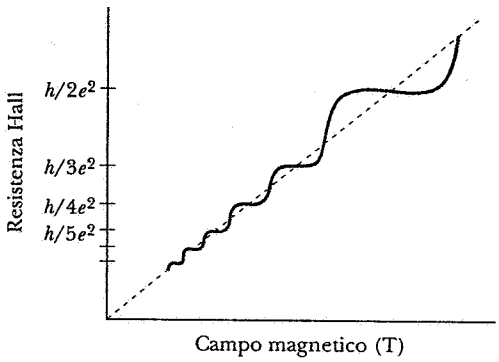


Figura 19 L'effetto Hall quantistico. La linea tratteggiata mostra l'andamento classico aspettato. I gradini mostrano l'andamento quantistico.

* Cfr. *The Quantized Hall Effect*, by Bertrand I. Halperin, «Scientific American», aprile 1986, pag. 52. (Trad. it. *L'interpretazione dell'effetto Hall quantistico*, «Le Scienze» 214:62.)

naturale per la resistenza corrispondente al moto orbitale è h/e^2, dove h è la costante di Planck, e i gradini della figura 19 corrispondono alle resistenze Hall $h/2e^2$, $h/3e^2$, $h/4e^2$, etc.

La resistenza Hall quantistica h/e^2 ha il valore di 25812.806 Ω ed è nota con una precisione migliore di 1 su 10^{10}, cosicchè l'effetto Hall quantistico ha fornito un nuovo standard per la resistenza. Questo standard, che può essere replicato esattamente nei laboratori di tutto il mondo per la determinazione dell'ohm, è stato adottato nel 1990. ■

34-5 FORZA MAGNETICA AGENTE SU UNA CORRENTE

Una corrente è un insieme di cariche in moto. Siccome un campo magnetico esercita una forza laterale su una carica in moto, dovrebbe esercitare anche una forza laterale su un cavo percorso da corrente. Cioè, una forza laterale è esercitata sugli elettroni di conduzione nel cavo, ma siccome gli elettroni non possono sfuggire lateralmente, la forza deve essere trasmessa al cavo stesso. In figura 20 è mostrato un cavo posto in una regione in cui è presente un campo magnetico **B**. Quando il cavo non è attraversato da corrente (vedi fig. 20*a*), non risente di alcuna deflessione. Quando una corrente lo attraversa, esso si piega (vedi fig. 20*b*); quando la corrente viene invertita, anche la deflessione si inverte. La deflessione si inverte anche quando viene invertito il campo **B**.

Per comprendere questo effetto, consideriamo le singole cariche fluenti nel cavo (vedi fig. 21). Usiamo il modello a carica libera per la corrente in un cavo, assumendo che gli elettroni si muovano con una velocità di deriva $\mathbf{v}_d$ costante. La direzione effettiva del moto degli elettroni è naturalmente opposta alla direzione che prendiamo per la corrente i nel cavo.

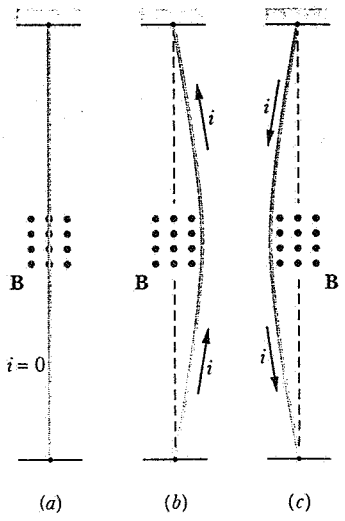


Figura 20 Un cavo flessibile passa attraverso i poli di un magnete. (*a*) Il cavo non è percorso da corrente. (*b*) Una corrente passa ora nel cavo. (*c*) La direzione della corrente è invertita.

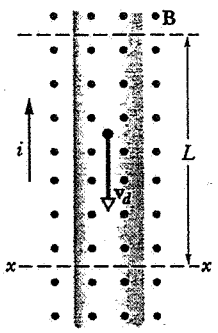


Figura 21 Ingrandimento di un pezzo, lungo L, del cavo della Fig. 20*b*. La direzione della corrente è verso l'alto, il che significa che gli elettroni vanno verso il basso. Un campo magnetico esce dal piano della figura, cosicchè il cavo è deflesso verso destra.

Il cavo attraversa una regione in cui esiste un campo uniforme **B**. La forza laterale su ciascun elettrone (di carica $q = -e$) dovuta al campo magnetico è $-e\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$. Consideriamo la forza laterale totale su un tratto di cavo di lunghezza L. Una forza identica (intensità e orientazione) agisce su ogni elettrone nel tratto, e la forza totale F sul tratto è quindi uguale al numero N di elettroni moltiplicato per la forza sul singolo elettrone:

$$\mathbf{F} = -Ne\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \tag{25}$$

Quanti elettroni sono contenuti nel segmento considerato? Se n è la densità (numero per unità di volume) di elettroni, allora il numero totale N di elettroni nel segmento è nAL, dove A è la sezione trasversale del cavo. Sostituendo nell'equazione 25, si ottiene

$$\mathbf{F} = -nALe\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}. \tag{26}$$

L'equazione 6 del capitolo 32 ($v_d = i/nAe$) ci permette di scrivere l'equazione 26 in termini della corrente i. Per mantenere il carattere vettoriale della relazione 26, definiamo il vettore **L** come quel vettore avente intensità uguale alla lunghezza del segmento e orientazione come la corrente (opposta al moto degli elettroni). I vettori $\mathbf{v}_d$ ed **L** hanno versi opposti, e possiamo riscrivere la relazione scalare $nALev_d = iL$ come

$$-nALe\mathbf{v}_d = i\mathbf{L}. \tag{27}$$

Sostituendo l'equazione 27 nell'equazione 26, si ottiene l'espressione della forza agente sul segmento:

$$\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \tag{28}$$

ISBN 88-408-0777-2

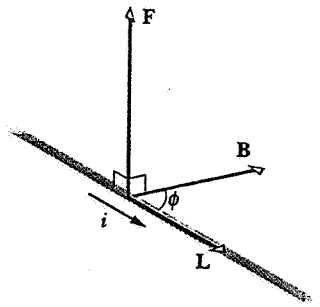


Figura 22 Un segmento orientato **L** di cavo forma un angolo con un campo magnetico. Si confronti attentamente con la figura 4.

L'equazione 28 è simile all'equazione 7 ($\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$), in modo che può essere presa come equazione che definisce il campo magnetico. La figura 22 mostra le relazioni vettoriali fra **F**, **L** e **B**; si confrontino con quelle di figura 4 per osservare le analogie fra l'equazione 28 e la 7.

Se il segmento è perpendicolare alla direzione del campo, l'intensità della forza può essere scritta

$$F = iLB. \tag{29}$$

Se il campo non è uniforme, o il cavo non è dritto, possiamo immaginare il cavo come composto di tanti piccoli tratti di lunghezza ds; prendendoli piccoli a sufficienza, in modo che siano approssimativamente diritti ed il campo sia uniforme, la forza su ogni tratto può essere scritta come

$$d\mathbf{F} = i\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \tag{30}$$

Possiamo trovare la forza totale sul segmento di lunghezza L integrando opportunamente lungo di esso.

Esempio 4 Un segmento orizzontale rettilineo di cavo di rame è attraversato da una corrente $i = 28$ A. Quale intensità e orientazione dovrà avere il campo magnetico necessario a mantenere il cavo sospeso in aria, bilanciando il suo peso? La densità lineare sia pari a 46.6 g/m.

Soluzione In figura 23 è mostrata la disposizione. Per una lunghezza L di cavo si ha (vedi eq. 29)

$$mg = iLB,$$

cioè

$$B = \frac{(m/L)g}{i} = \frac{(46.6 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(9.8\ \text{m/s}^2)}{28\ \text{A}}$$
$$= 1.6 \times 10^{-2}\ \text{T} = 16\ \text{mT}.$$

Questo è circa 400 volte il campo magnetico terrestre.

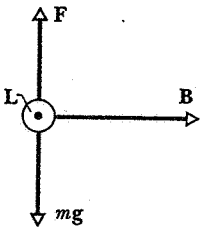


Figura 23 Esempio 4. Un cavo (mostrato in sezione) può essere sospeso in un campo magnetico, con la forza **F**, diretta verso l'alto, che bilancia la forza di gravità, diretta verso il basso. La corrente nel cavo esce dal foglio.

Esempio 5 In figura 24 è mostrato un segmento di cavo, posto in un campo magnetico uniforme **B** che è diretto perpendicolarmente al piano della figura, uscente verso l'alto. Se il segmento è attraversato da una corrente i, qual è la forza magnetica risultante **F** che agisce su di esso?

Soluzione In accordo con l'equazione 29, la forza magnetica che agisce su ogni sezione rettilinea ha intensità

$$F_1 = F_3 = iLB$$

e punta verso il basso, come mostrato dalle frecce nella figura. La forza dF che agisce su un segmento di arco di lunghezza $ds = Rd\theta$ ha valore

$$dF = iB\, ds = iB(R\, d\theta)$$

ed è diretta radialmente verso O, il centro dell'arco. Osserviamo che solo la componente diretta verso il basso ($d\mathbf{F}\ \text{sen}\theta$) di questo elemento di forza è efficace. La componente orizzontale ($d\mathbf{F}\cos\theta$) è cancellata da una componente orizzontale diretta nel verso op-

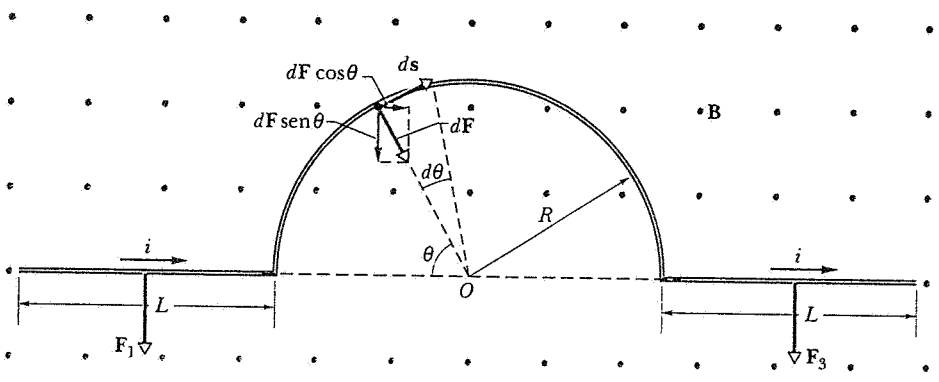


Figura 24 Esempio 5. Un cavo percorso da una corrente i è immerso in un campo magnetico. La forza risultante è diretta verso il basso.

posto, dovuta ad un segmento disposto simmetricamente dall'altra parte dell'arco.

La forza totale sull'arco punta verso il basso ed è data da

$$F_2 = \int_0^{\pi} dF \operatorname{sen}\theta = \int_0^{\pi} (iBR\, d\theta) \operatorname{sen}\theta$$
$$= iBR \int_o^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2iBR.$$

La forza risultante sull'intero cavo è allora

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = iLB + 2iBR + iLB$$
$$= iB(2L + 2R).$$

Osserviamo che questa forza è la stessa che agirebbe su un cavo rettilineo di lunghezza $2L + 2R$. Questo è vero qualunque sia la forma del segmento centrale, disegnato come una semicirconferenza in figura 24.

Esempio 6 Una spira rettangolare (vedi fig. 25), consistente in nove avvolgimenti di larghezza $a = 0.103$ m e lunghezza $b = 0.685$ m è appesa ad un piatto di una bilancia. Una porzione della spira passa attraverso una regione in cui c'è un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano della spira stessa, come mostrato in figura 25. Il dispositivo è accuratamente regolato in modo che il peso della spira sia bilanciato da un ugual peso (non mostrato) sul piatto opposto. Una corrente $i = 0.224$ A viene fatta circolare nel cavo. Si trova che per riportare la bilancia nella sua condizione iniziale di equilibrio, deve essere aggiunta, sul piatto di destra, una massa m = 13.7 g. Si determini intensità e orientazione del campo magnetico.

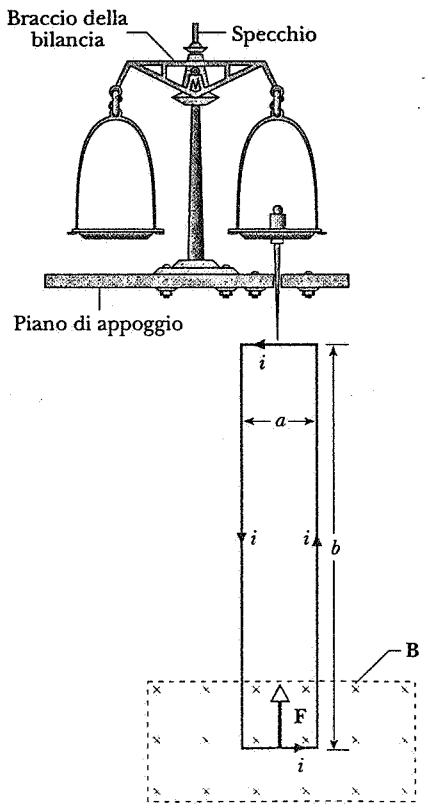


Figura 25 Esempio 6. Questo apparato può essere usato per misurare **B**. Un fascio di luce riflesso da uno specchio sulla bilancia provvede ad una misura molto sensibile della deflessione.

Soluzione Indipendentemente dal fatto che il campo entri od esca dal piano della spira, le forze agenti sulle due porzioni dei lati più lunghi si cancellano. Consideriamo quindi la sola forza F sul lato inferiore della spira, che ha intensità iaB per ciascuno dei nove avvolgimenti della spira. Dato che è necessario aggiungere peso allo stesso piatto a cui la spira è sospesa, la forza magnetica agente sul lato inferiore della spira punta verso l'alto; la forza magnetica F è bilanciata dal peso addizionale mg su quel lato. Affinchè la forza punti verso l'alto, il campo magnetico dovrà entrare nel piano del disegno (si provi ciò con la regola della mano destra per il prodotto vettoriale). La condizione di equilibrio è

$$mg = F = 9(iaB)$$

cioè

$$B = \frac{mg}{9ia} = \frac{(0.0137\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)}{9(0.224\text{ A})(0.103\text{ m})} = 0.647\text{ T}.$$

Un dispositivo operante in questo modo può essere impiegato per misure accurate di campi magnetici.

34-6 MOMENTO AGENTE SU UNA SPIRA PERCORSA DA CORRENTE

Quando una spira percorsa da corrente è posta in un campo magnetico, risente di una coppia che tende a farla ruotare attorno ad un asse particolare, che possiamo prendere, per generalità, passante attraverso il centro di massa della spira. Questo effetto è la base del funzionamento dei motori elettrici, come anche dei galvanometri, su cui sono basati i misuratori analogici di corrente e di tensione.

La figura 26 mostra una spira rettangolare in un campo magnetico **B**. Per semplicità è mostrata solo la spira; assumiamo che i fili che portano la corrente alla spira siano intrecciati, in modo che non venga esercitata alcuna forza magnetica netta su di essi. Assumiamo inoltre che la spira sia sospesa in modo da essere completamente libera di ruotare intorno ad un asse qualsiasi.

Il campo magnetico **B** è nella direzione dell'asse y del sistema di coordinate di figura 26. La spira è orientata in modo che l'asse z giaccia nel suo piano. In questo orientamento, i lati 1 e 3 della spira sono perpendicolari a **B** (nel prossimo paragrafo, considereremo il caso più generale in cui la spira possiede una orientazione arbitraria). Il piano della spira è indicato da un versore **n** che è perpendicolare al piano stesso; il verso di **n** è determinato mediante la regola della mano de-

ISBN 88-408-0777-2

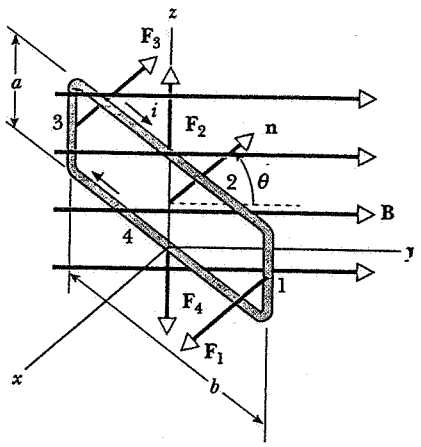


Figura 26 Una spira rettangolare percorsa da una corrente i è posta in un campo magnetico uniforme. Il versore **n** è normale al piano della spira e forma un angolo con il campo. Una coppia agisce facendo ruotare la spira intorno all'asse z in modo che **n** si allinei con **B**.

stra, in modo che se le dita della vostra mano destra piegano nel verso della corrente nella spira, il pollice dà il verso di **n**. Il vettore **n** forma un angolo θ con **B**.

La forza netta agente sulla spira può essere determinata usando l'equazione 28, $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$, per calcolare la forza su ognuno dei quattro lati (se i lati dell'anello non fossero diritti, sarebbe necessario usare l'equazione 30 per trovare la forza magnetica su di essi). Come indicato in figura 22, la forza su ogni segmento deve essere perpendicolare sia a **B** che alla direzione della corrente del segmento. Quindi l'intensità della forza F_2 sul lato 2 (di lunghezza b) è

$$F_2 = ibB \text{ sen } (90° - \theta) = ibB \cos\theta. \qquad (31)$$

Questa forza punta nella direzione z positiva. La forza $\mathbf{F}_4$ agente sul lato 4 ha valore

$$F_4 = ibB \text{ sen } (90° + \theta) = ibB \cos\theta, \qquad (32)$$

e punta nella direzione z negativa. Queste forze sono uguali ed opposte e non danno contributo alla forza totale sulla spira. Inoltre, hanno la stessa linea d'azione, cosicché anche la coppia netta a loro dovuta è nulla.

Le forze $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_3$ hanno intensità uguale e pari ad iaB. Esse hanno verso opposto, essendo orientate parallelamente ed antiparallelamente all'asse x in figura 26, cosicchè anch'esse danno un contributo netto nullo alla forza totale sulla spira. La somma delle quattro forze dà una risultante nulla e possiamo quindi concludere che il centro di massa non accelera sotto l'azione della forza magnetica totale.

I momenti dovuti alle forze $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_3$ *non* si elidono, perchè non agiscono lungo la stessa retta. Queste due forze tendono a far ruotare la spira intorno ad un asse parallelo all'asse z. *Il verso di rotazione tende ad allineare* **n** *con* **B**. Cioè, nella situazione di figura 26, la spira ruoterebbe in senso orario se vista dal semiasse positivo z, riducendo in tal modo l'angolo θ. Se la corrente nel cavo venisse invertita, **n** avrebbe verso opposto e la spira ruoterebbe di un angolo (uguale a $\pi - \theta$ in fig. 26) necessario a riallineare **n** con **B**.

Le forze $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_3$ hanno un braccio del momento rispetto all'asse z pari a $(b/2)\text{sen}\theta$, e così il momento totale è

$$\tau = 2(iaB)(b/2)\text{sen}\theta = iabB \text{ sen}\theta, \qquad (33)$$

dove il fattore 2 entra perchè entrambe le forze contribuiscono in egual misura al momento. Osserviamo che se **n** è già parallelo a **B** (cioè $\theta = 0$), non c'è alcun momento.

L'equazione 33 dà il momento su una singola spira nel campo. Se avessimo una bobina con N avvolgimenti (come può esserci in un galvanometro od un motore), l'equazione 33 dà la coppia su ogni spira, ed il momento totale sulla bobina sarebbe

$$\tau = NiAB \text{ sen}\theta, \qquad (34)$$

dove abbiamo sostituito il prodotto ab con A, l'area della spira rettangolare.

Si può mostrare che l'equazione 34 vale in generale, *per tutte le spire piane di area A, rettangolari o meno.* Generalizzeremo questo risultato nel prossimo paragrafo.

Esempio 7 Voltmetri ed amperometri analogici, in cui la lettura è mostrata dallo spostamento di una lancetta su una scala, funzionano misurando la coppia esercitata da un campo magnetico su un filo percorso da corrente. In figura 27 è mostrato lo schema di un *galvanometro*, sul quale sono basati amperometri e voltmetri. La bobina è lunga 2.1 cm ed alta 1.2 cm; ha 250 spire ed è montata in modo che possa ruotare in un campo magnetico radiale uniforme $B = 0.23$ T. Una molla fornisce una controcoppia che bilancia la coppia magnetica, facendo sì che ci sia una deflessione angolare corrispondente ad una corrente stazionaria nel cavo. Se una corrente di 100 A produce una deflessione angolare di 28°(= 0.49 rad), quale deve essere la costante di torsione della molla?

Soluzione Imponendo che la coppia magnetica (vedi eq. 34) sia uguale alla coppia di richiamo della molla, si ottiene

$$\tau = NiAB \text{ sen}\theta = \kappa\phi.$$

in cui ϕ è la deflessione angolare della lancetta ed A ($= 2.52 \times 10^{-4}$ m^2) è l'area della bobina. Si noti che la normale al piano della bobina forma sempre un angolo retto con il campo magnetico (radiale), cosicchè $\theta = 90°$ per tutte le posizioni della lancetta.

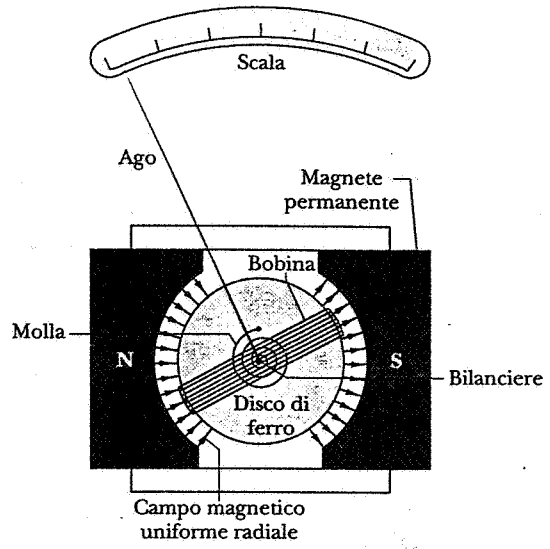


Figura 27 Esempio 7. Schema rudimentale di un galvanometro. A seconda del circuito esterno, il dispositivo può funzionare da voltmetro o da amperometro.

Ricavando κ si ha

$$\kappa = \frac{NiAB \operatorname{sen}\theta}{\phi}$$

$$= \frac{(250)(100 \times 10^{-6}\ \text{A})(2.52 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(0.23\ \text{T})(\operatorname{sen} 90°)}{0.49\ \text{rad}}$$

$$= 3.0 \times 10^{-6}\ \text{N} \cdot \text{m/rad}.$$

Molti amperometri e voltmetri moderni sono digitali, a lettura diretta ed operano in un modo che non implica una spira mobile.

34-7 IL DIPOLO MAGNETICO

Nel paragrafo 28-7 abbiamo considerato l'effetto di un campo *elettrico* **E** su un dipolo elettrico, che abbiamo descritto come due cariche uguali ma di segno opposto separate da una certa distanza. Definendo il dipolo elettrico **p** in una certa maniera, avevamo trovato (vedi eq. 37 del cap. 37) che il campo elettrico esercita una coppia sul dipolo elettrico che tende a farlo ruotare in modo che **p** si allinei con **E**. Questa affermazione appare molto simile a quella fatta alla fine del paragrafo precedente a proposito dell'effetto di un campo magnetico su una spira percorsa da corrente: la coppia sulla spira tende a farla ruotare cosicchè il versore normale **n** si allinei con **B**. Questa somiglianza suggerisce che si possano usare equazioni analoghe a quelle del dipolo elettrico per analizzare l'effetto di un campo magnetico su una spira. Inoltre, siamo incoraggiati a stabilire questa analogia dalla somiglianza fra le linee di campo di un dipolo elettrico (vedi fig. 8 e 9*b* del cap. 28) e quelle di una barra magnetica, che è un'esempio di *dipolo magnetico* (vedi fig. 1 e 5 di questo capitolo).

La coppia agente su un dipolo elettrico è (vedi eq. 37 del cap. 28)

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}, \tag{35}$$

che può essere scritta in termini di moduli come $\tau = pE \operatorname{sen}\theta$, dove θ è l'angolo fra **p** ed **E**. L'equazione 34 di questo capitolo dà il momento su una spira percorsa da corrente come $\tau = NiAB \operatorname{sen}\theta$. La somiglianza fra queste due espressioni è sorprendente. Definiamo, per analogia con il caso elettrico, un vettore *momento di dipolo magnetico*, avente intensità

$$\mu = NiA \tag{36}$$

e orientazione parallela ad **n** (vedi fig. 26). Cioè, con le dita della mano destra chiusa, orientate come la corrente, il pollice dà la direzione di μ. Possiamo quindi scrivere l'equazione 34 come $\tau = \mu B \operatorname{sen}\theta$, oppure, in forma vettoriale

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \tag{37}$$

Quantunque l'equazione 37 sia stata provata soltanto per questo caso particolare, essa dà la più generale descrizione della coppia esercitata su *ogni* tipo di spira piana percorsa da corrente, immersa in un campo magnetico uniforme **B**. Non importa quale sia la forma della spira o l'angolo fra il suo piano ed il campo.

Possiamo proseguire nell'analogia fra campi elettrici e magnetici considerando il lavoro compiuto per cambiare l'orientamento di un dipolo magnetico immerso in un campo magnetico, mettendolo in relazione con l'energia potenziale di un dipolo in un campo elettrico. Possiamo scrivere l'energia potenziale come

$$U = -\mu B \cos\theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \tag{38}$$

per un dipolo magnetico il cui momento formi un angolo θ con **B**. Questa equazione è simile alla corrispondente espressione per un dipolo elettrico, $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ (vedi eq. 42 del cap. 28).

La forza magnetica, come tutte le forze che dipendono dalla velocità, in generale *non* è conservativa e non può quindi essere rappresentata da una energia potenziale. In questo caso speciale, in cui il momento sul dipolo dipende dalla sua posizione relativa al campo, *è* possibile definire un'energia potenziale per il *sistema* dipolo immerso nel campo. È il caso di sottolineare che l'energia potenziale non è caratteristica del solo campo, ma del dipolo *nel* campo. In generale non possiamo definire «un'energia potenziale magnetica» scalare di una carica puntiforme od un «potenziale

ISBN 88-408-0777-2

magnetico» del campo stesso come abbiamo fatto per il campo elettrico nel capitolo 30.

Moltissimi sistemi fisici sono dotati di momento magnetico di dipolo: la Terra, le barre magnetiche, le spire percorse da corrente, gli atomi, i nuclei, e le particelle elementari. La tabella 3 ne dà alcuni valori tipici; si veda il capitolo 37 per maggiori dettagli sui momenti magnetici di dipolo.

TABELLA 3 ALCUNI MOMENTI DI DIPOLO MAGNETICO

Sistema	μ (J/T)
Nucleo di atomo di azoto	2.0×10^{-28}
Protone	1.4×10^{-26}
Elettrone	9.3×10^{-24}
Atomo di azoto	2.8×10^{-23}
Tipica bobina piccola[a]	5.4×10^{-6}
Piccola barra magnetica	5
Bobina superconduttiva	400
Terra	8.0×10^{22}

[a] Ad esempio quella dell'esempio 8

L'equazione 38 suggerisce che come unità di misura per μ si possa prendere l'energia divisa per il campo magnetico, cioè J/T. L'equazione 36 suggerisce unità di corrente per superficie, cioè $A \cdot m^2$. Si può mostrare che queste due unità sono equivalenti e che la scelta fra di esse è una questione di convenienza. Come indicato dall'esempio dell'azoto, i momenti magnetici di dipolo nucleari sono tipicamente da tre a sei ordini di grandezza più piccoli dei momenti di dipolo atomici. Parecchie conclusioni discendono immediatamente da questa osservazione. (1) Gli elettroni non possono essere costituenti dei nuclei; altrimenti i momenti magnetici nucleari avrebbero valori tipici simili a quelli degli elettroni. (2) Gli effetti magnetici ordinari nei materiali sono determinati dal magnetismo *atomico*, piuttosto che da quello *nucleare*, molto più debole. (3) Per esercitare una coppia sufficiente ad allineare dipoli nucleari è richiesto un campo da tre a sei ordini di grandezza circa più intenso di quello necessario ad allineare dipoli atomici.

Esempio 8 (*a*) Qual è il momento magnetico di dipolo della bobina dell'Esempio 7, assumendo che sia percorsa da una corrente di 85 μA? (*b*) Il momento magnetico di dipolo della bobina è allineato ad un campo magnetico esterno di 0.85 T. Quanto lavoro dovrebbe essere fatto da un agente esterno per ruotare la bobina di 180°?

Soluzione (*a*) Il valore del momento magnetico di dipolo della bobina, la cui area A è 2.52×10^{-4} m^2, è

$$\mu = NiA$$
$$= (250)(85 \times 10^{-6}\ \text{A})(2,52 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)$$
$$= 5.36 \times 10^{-6}\ \text{A} \cdot \text{m}^2 = 5.36 \times 10^{-6}\ \text{J/T}.$$

La direzione di μ, come si capisce osservando la figura 27, deve essere quella della lancetta. Si può verificare questa affermazione mostrando che, assumendo di orientare nella direzione della lancetta, la coppia prevista dall'equazione 37 muoverebbe la lancetta in senso orario sulla scala.

(*b*) Il lavoro esterno è uguale all'incremento dell'energia potenziale del sistema, che è

$$L = \Delta U = -\mu B \cos 180° - (-\mu B \cos 0°) = 2\mu B$$
$$= 2(5.36 \times 10^{-6}\ \text{J/T})(0.85\ \text{T}) = 9.1 \times 10^{-6}\ \text{J} = 9.1\ \mu\text{J}.$$

Questo è circa il lavoro necessario a sollevare una pastiglia di aspirina per un tratto di 3 mm.

DOMANDE

1. Dei tre vettori nell'equazione $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, quali a coppie sono sempre perpendicolari fra di loro ? Quali possono formare fra loro un angolo qualsiasi ?
2. Perchè non si definisce la direzione del campo magnetico **B** semplicemente come la direzione della forza magnetica che agisce su una carica in moto ?
3. Immaginate di sedervi in una stanza rivolgendo le spalle al muro. Un fascio di elettroni, che viaggia orizzontalmente dalla parete alle vostre spalle a quella di fronte, viene deflesso alla votra destra. Qual'è la direzione del campo magnetico che esiste nella stanza ?
4. Come si può escludere che la forza agente fra due magneti è elettrostatica?
5. Se un elettrone, che attraversa una certa regione, non viene deflesso, possiamo essere sicuri che in quella regione non vi sia alcun campo magnetico?
6. Se un elettrone in moto è deflesso lateralmente passando attraverso una certa regione, possiamo essere sicuri che in quella regione vi è un campo magnetico ?
7. Un fascio di elettroni può essere deflesso sia da un campo elettrico che da uno magnetico. Uno dei due metodi è migliore dell'altro?
8. I campi elettrici possono essere rappresentati da superfici equipotenziali. Può essere fatta la stessa cosa per i campi magnetici? Si giustifichi la risposta.
9. Una forza magnetica è conservativa o non conservativa? Si

giustifichi la risposta. Si può definire un'energia potenziale magnetica analogamente a quanto fatto per l'energia potenziale elettrica e gravitazionale?

10. Una particella carica passa attraverso un campo magnetico ed è deflessa. Questo significa che una forza ha agito su di essa e ne ha cambiato la quantità di moto. Da qualche parte c'è una forza di reazione; su quale oggetto agisce?
11. Nell'esperimento di Thomson abbiamo trascurato la deflessione dovuta al campo gravitazionale ed al campo magnetico terrestre. Che errori abbiamo introdotto così facendo ?
12. Immaginate che la stanza in cui siete seduti sia sede di un campo magnetico uniforme, diretto verticalmente verso il basso. Dal centro della stanza due elettroni vengono emessi orizzontalmente con la stessa velocità iniziale ma in versi opposti. (*a*) Si descriva il loro moto. (*b*) Si descriva il loro moto se una particella è un elettrone e l'altra è un positrone, cioè un elettrone carico positivamente (le particelle rallenteranno gradualmente man mano che collidono con le molecole d'aria nella stanza).
13. La figura 28 mostra le tracce di un elettrone (e^-) e di un positrone (e^+) in una camera a bolle. Un campo magnetico attraversa la camera, perpendicolarmente al piano della figura. Perchè le tracce sono spirali e non circonferenze ? Cosa si può dire circa le particelle dalle loro tracce ? Qual è il verso del campo magnetico ?

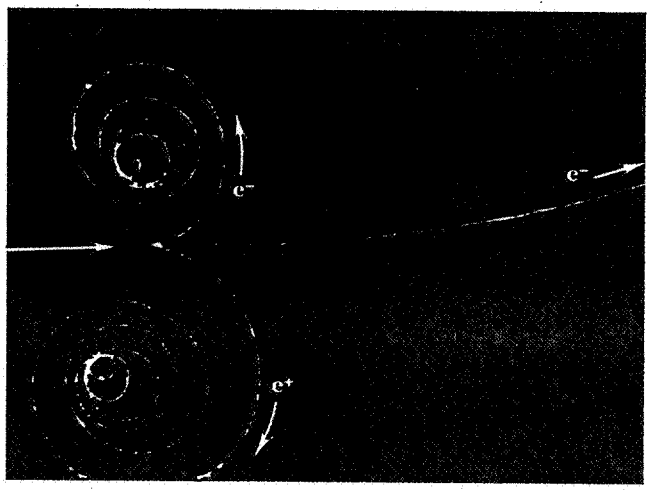


Figura 28 Domanda 13.

14. Quali sono le principali funzioni (*a*) del campo elettrico e (*b*) del campo magnetico nel ciclotrone ?
15. In un dato campo magnetico, chi fra un elettrone ed un protone in moto con la stessa velocità, avrebbe la frequenza di rivoluzione maggiore? Si considerino gli effetti relativistici.
16. Qual è il principio che permette il funzionamento di un ciclotrone? Si ignorino le considerazioni relativistiche.
17. Un cavo scoperto di rame esce dal muro di una stanza, la attraversa ed entra nel muro opposto. Sapendo che c'è una corrente stazionaria circolante nel cavo, come si può determinarne il verso? Si descriva il maggior numero possibile di procedimenti atti a risolvere il problema. Si può utilizzare qualunque strumento ritenuto necessario, ma non si può tagliare il cavo.
18. Si discuta della possibilità di usare l'effetto Hall per misurare l'intensità di un campo magnetico.
19. (*a*) Nel misurare la differenza di potenziale Hall, perchè bisogna porre attenzione a che i punti x ed y della figura 18 siano opposti fra loro ? (*b*) Se uno dei due contatti è mobile, quale procedura si può seguire per essere sicuri che i due punti siano propriamente situati ?
20. Nel paragrafo 34-5, abbiamo stabilito che un campo magnetico **B** esercita una forza laterale, ad esempio, sugli elettroni di conduzione di un cavo di rame percorso da una corrente i. Abbiamo tacitamente ammesso che questa fosse la stessa forza che agisce sul conduttore stesso. Ci sono alcune lacune in questo ragionamento? Se così fosse, quale sarebbe il ragionamento corretto?
21. Un cavo retttilineo di rame percorso da una corrente i è posto in un campo magnetico, perpendicolarmente ad esso. Sappiamo che **B** esercita una forza laterale sugli elettroni liberi (o di conduzione). È così anche nel caso degli elettroni legati ? Dopotutto, essi non sono fermi. Si discuta la questione.
22. L'equazione 28 ($\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$) vale per un cavo rettilineo di sezione variabile, senza regolarità, lungo la sua lunghezza (un cavo con le «gobbe»)?
23. Una corrente in un campo magnetico risente di una forza. Quindi dovrebbe essere possibile pompare liquidi conduttori facendoli attraversare da una corrente (nella direzione appropriata) e ponendoli in un campo magnetico. Si progetti una simile pompa. Questo principio è usato per pompare il sodio liquido (un conduttore liquido altamente corrosivo) in alcuni reattori nucleari, dove è usato come liquido di refrigerazione. Quali vantaggi ha una pompa del genere?
24. Un campo magnetico uniforme riempe una certa regione cubica di spazio. Si può immettere dall'esterno un elettrone in modo che viaggi su orbite circolari chiuse all'interno del cubo?
25. Un conduttore, perfino nel caso in cui è attraversato da corrente, ha carica totale nulla. Perchè allora un campo magnetico esercita una forza, non nulla, su di esso ?
26. Si vuole modificare un galvanometro per farne (*a*) un amperometro e (*b*) un voltmetro. Cosa si deve fare in ciascuno dei due casi ?
27. Una spira rettangolare è immersa in un campo magnetico esterno con arbitrario orientamento. Quanto lavoro è richiesto per ruotare la spira intorno ad un asse perpendicolare al suo piano?
28. L'equazione 37 ($\tau = \mu \times \mathbf{B}$) mostra che non vi è coppia su una spira percorsa da corrente in un campo magnetico esterno se l'angolo fra l'asse della spira ed il campo è (*a*) 0° oppure (*b*) 180°. Si discuta la natura dell'equilibrio (cioè se è stabile, indifferente od instabile) di queste due posizioni.
29. Nell'esempio 8 abbiamo mostrato che il lavoro richiesto per ruotare una spira percorsa da corrente di 180° in un campo magnetico esterno è $2\mu B$. Questo risultato vale indipendentemente dall'orientamento iniziale della spira?
30. In una data regione è presente un campo magnetico uniforme diretto verticalmente verso l'alto. Una spira circolare viene immessa nella regione in modo che il suo piano sia orizzontale. Per quale verso della corrente circolante nella spira, essa sarà in equilibrio stabile rispetto a forze e coppie di origine magnetica ?
31. Il momento esercitato da un campo magnetico su un dipolo può essere usato per misurare l'intensità del campo magnetico stesso. Per una misura accurata è importante che il mo-

ISBN 88-408-0777-2

mento di dipolo sia piccolo o no? Si ricordi che, nel caso della misura di un campo elettrico, la carica di prova doveva essere la più piccola possibile, per non disturbare la sorgente del campo.

32. È data una piccola sfera che non fa attrito, delle dimensioni di una pallina da ping-pong. Sapendo che essa contiene un dipolo magnetico, quali esperimenti si potrebbero fare per determinarne modulo e orientazione?

PROBLEMI

Paragrafo 34-2 La forza magnetica su una carica in moto

1. Quattro particelle seguono i cammini mostrati in figura 29 mentre attraversano il campo magnetico. Cosa si può concludere a proposito della carica di ciascuna delle quattro particelle ?

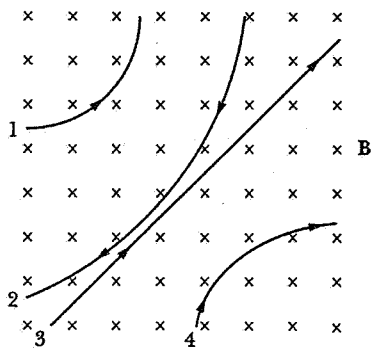


Figura 29 Problema 1.

2. Un elettrone in un tubo televisivo si muove a 7.2×10^6 m/s in un campo magnetico di intensità pari a 83 mT. (*a*) Senza conoscere la direzione del campo, quali sono la massima e la minima intensità della forza che l'elettrone può sentire a causa del campo ? (*b*) Ad un certo punto l'accelerazione dell'elettrone è di 4.9×10^6 m/s^2. Qual è l'angolo fra la velocità dell'elettrone ed il campo magnetico ?
3. Un campo elettrico di 1.5 kV/m ed un campo magnetico di 0.44 T agiscono su un elettrone in moto in maniera che questi risenta di una forza nulla. (*a*) Si calcoli la velocità minima v dell'elettrone. (*b*) Si disegnino i vettori **E**, **B** e **v**.
4. Un protone in moto ad un angolo di 23.0° rispetto ad un campo magnetico di 2.63 mT risente di una forza magnetica di 6.48×10^{-17} N. Si calcoli (*a*) la velocità e (*b*) l'energia cinetica in eV dell'elettrone.
5. Un protone proveniente da raggi cosmici va ad urtare la Terra vicino all'equatore con una velocità verticale di 2.8×10^7 m/s. Si assuma che la componente orizzontale del campo magnetico terrestre all'equatore sia 30 T. Si determini il rapporto fra le forze magnetica e gravitazionale agenti sul protone.
6. Un elettrone è accelerato da una differenza di potenziale di 1.0 kV e si muove verso una regione compresa tra due piastre piane parallele separate da una distanza di 20 mm. Tra le piastre esiste una differenza di potenziale di 100 V. Se l'elettrone entra nella regione muovendosi perpendicolarmente al campo elettrico fra le piastre, quale campo magnetico, perpendicolare sia al percorso dell'elettrone che al campo elettrico, è necessario affinchè l'elettrone viaggi in linea retta?
7. Un elettrone in un campo magnetico uniforme ha velocità $\mathbf{v} = 40\mathbf{i} + 35\mathbf{j}$ km/s. Risente di una forza $\mathbf{F} = -4.2\mathbf{i} + 4.8\mathbf{j}$ fN. Assumendo che $B_x = 0$, si calcoli il campo magnetico.
8. Una sorgente produce ioni di ^{6}Li di massa uguale a 6.01 u (= unità di massa atomica), ciascuno dei quali ha carica netta + e. Gli ioni sono accelerati da una differenza di potenziale di 10.8 kV e poi fatti passare orizzontalmente in una regione in cui c'è un campo magnetico verticale $B = 1.22$ T. Si calcoli l'intensità del campo elettrico orizzontale che deve essere mantenuto nella stessa regione per permettere agli ioni di passare senza alcuna deflessione.
9. Gli elettroni nel fascio di un tubo televisivo hanno un'energia cinetica di 12.0 keV. Il tubo è orientato in modo che gli elettroni si muovano dal sud magnetico al nord magnetico. La componente verticale del campo magnetico terrestre punta verso il basso ed ha intensità di 0.55 T. (*a*) In quale direzione sarà deflesso il fascio ? (*b*) qual è l'accelerazione di un elettrone dovuta al campo magnetico ? (*c*) Di quanto verrà deflesso il fascio muovendosi di 20.0 cm attraverso il tubo della televisione?
10. Un elettrone ha velocità iniziale di $12.0\mathbf{j} + 15.0\mathbf{k}$ km/s ed una accelerazione costante di $(2.00 \times 10^{12}$ m/s$^2)\mathbf{i}$ in una regione in cui sono presenti campi elettrici e magnetici. Essendo $\mathbf{B} = 400\mathbf{i}$ T, si trovi il campo elettrico E.

Paragrafo 34-3 Cariche in moto circolare

11. (*a*) In un campo magnetico B = 0.50 T, per quale raggio dell'orbita un elettrone avrà velocità pari ad un decimo della velocità della luce ? (*b*) Quale sarà la sua energia cinetica in eV? Si ignorino i piccoli effetti relativistici.
12. Un elettrone da 1.22 keV si muove su un'orbita circolare in un piano perpendicolare ad un campo magnetico uniforme. L'orbita ha raggio 2.47 cm. Si calcoli (*a*) la velocità dell'elettrone, (*b*) il campo magnetico, (*c*) la frequenza di rivoluzione e (*d*) il periodo del moto.
13. Un elettrone è accelerato da fermo da una differenza di potenziale di 350 V. Esso entra in un campo magnetico di intensità pari a 200 mT perpendicolarmente al campo. Calcolare (*a*) la velocità dell'elettrone e (*b*) il raggio del suo percorso nel campo magnetico.
14. S. A. Goudsmit escogitò un metodo per determinare accuratamente le masse di ioni pesanti, misurando il loro periodo di rivoluzione in un campo magnetico noto. Uno ione di sodio, di carica uguale a quella dell'elettrone, compie 7.00 rivoluzioni in un campo di 45.0 mT in 1.29 sec. Si calcoli la sua massa, in unità di massa atomica. In realtà, le misure di massa vengono compiute in modo molto più accurato di quanto questi dati suggeriscano.
15. Una particella alfa (q = + 2*e*, m = 4.0 u), si muove su un cammino circolare di raggio 4.5 cm in un campo magnetico B = 1.2 T. Si calcoli (*a*) la sua velocità, (*b*) il suo periodo di

rivoluzione, (*c*) la sua energia cinetica in eV e (*d*) la differenza di potenziale alla quale dovrebbe essere sottoposta per raggiungere questa energia.

16. Un fascio di elettroni la cui energia cinetica è K emerge da una «finestra» fatta da una sottile lamina alla fine di un tubo acceleratore. Una piastra di metallo è posta ad una distanza d da questa finestra perpendicolarmente al fascio emergente (*vedi* fig. 30). (*a*) Si mostri come si possa evitare che il fascio colpisca la piastra, applicando un campo magnetico B tale che

$$B \geq \sqrt{\frac{2mK}{e^2 d^2}},$$

in cui m ed e sono massa e carica dell'elettrone. (*b*) Come dovrebbe essere orientato **B**?

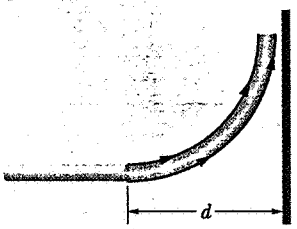


Figura 30 Problema 16.

17. Lo spettrometro di massa di Bainbridge, mostrato in figura 31, separa ioni aventi la stessa velocità. Gli ioni, dopo essere entrati attraverso le fenditure S_1 ed S_2, passano attraverso un selettore di velocità composto da un campo elettrico prodotto dalle piastre cariche P e P′, ed un campo magnetico **B** perpendicolare al campo elettrico ed al percorso degli ioni. Quegli ioni che passano non deviati attraverso i campi incrociati **E** e **B** entrano in una regione dove esiste un secondo campo magnetico **B**′, e vengono quindi costretti a muoversi su orbite circolari. Una lastra fotografica registra il loro arrivo. Si mostri che $q/m = E/rBB'$, dove r è il raggio dell'orbita circolare.

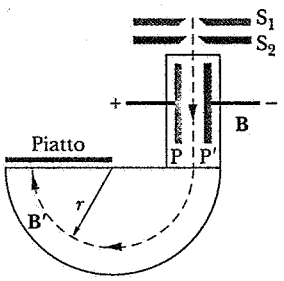


Figura 31 Problema 17.

18. Un fisico sta progettando un ciclotrone per accelerare protoni fino a $0.100c$. Il magnete usato produce un campo di 1.40 T. Si determini (*a*) il raggio del ciclotrone e (*b*) la corrispondente frequenza dell'oscillatore. Considerazioni relativistiche non sono importanti.
19. In un esperimento nucleare un protone con energia cinetica K_p si muove in un campo magnetico uniforme su un cammino circolare. Quale energia devono avere (*a*) una particella alfa e (*b*) un deuterone se si muovono sulla stessa orbita? (Per un deuterone, $q = +e$, $m = 2.0$ u; per una particella alfa, $q = +2e$, $m = 4.0$ u).
20. Un protone, un deuterone ed una particella alfa, accelerate sotto la stessa differenza di potenziale V, entrano in una regione con un campo magnetico uniforme, muovendosi perpendicolarmente rispetto a **B**. (*a*) Si trovino le loro energie cinetiche. Se il raggio dell'orbita del protone è r_p, quali sono i raggi delle orbite del (*b*) deuterone e della (*c*) particella alfa, in termini di r_p?
21. Un protone, un deuterone ed una particella alfa con la stessa energia cinetica entrano in una regione di campo magnetico uniforme, muovendosi perpendicolarmente a **B**. Il protone si muove su una circonferenza di raggio r_p. In termini di r_p, quali sono i raggi delle orbite (*a*) del deuterone e (*b*) della particella alfa?
22. La figura 32 mostra la disposizione usata per misurare le masse di ioni. Uno ione di massa m e carica $+q$ è prodotto sostanzialmente fermo nella sorgente S, una camera in cui hanno luogo scariche nel gas. Lo ione è accelerato da una differenza di potenziale V ed è poi fatto entrare in un campo magnetico **B**. Nel campo esso si muove lungo un semicerchio, andando a colpire una lastra fotografica a distanza x dalla fenditura d'ingresso. Si mostri che la massa m dello ione è data da

$$m = \frac{B^2 q}{8V} x^2$$

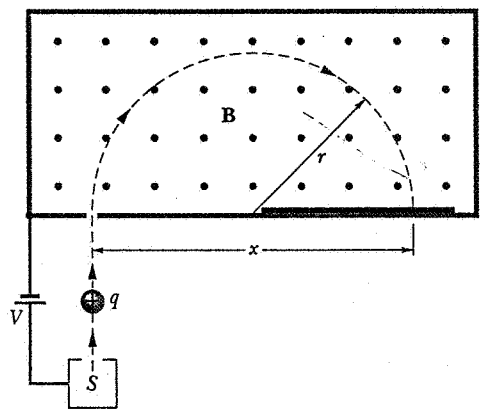


Figura 32 Problema 22.

23. Due tipi di atomi ionizzati una sola volta ed aventi la stessa carica q e differenza di massa Δm, vengono introdotti nello spettrometro di massa descritto nel Problema 22. (*a*) Si calcoli la differenza di massa in funzione di V, q, m, B, e della distanza Δx fra le macchie sulla lastra fotografica. (*b*) Si calcoli Δx per un fascio di atomi di cloro ionizzati una sola volta, di massa 35.0 e 37.0 u se $V = 7.33$ kV e $B = 520$ mT.
24. In uno spettrometro di massa (*vedi* problema 22) usato per scopi commerciali, ioni di uranio di massa 238 u e carica $+2e$ sono separati da specie simili. Gli ioni sono prima accelerati mediante una differenza di potenziale di 105 kV e poi fatti passare in un campo magnetico, dove si muovono su un arco di 180° di raggio 97.3 cm. Vengono infine raccolti in una cavità dopo essere passati attraverso una fenditura di larghezza 1.20 mm ed altezza 1.14 cm. (*a*) Qual'è l'intensità del campo magnetico perpendicolare nel separatore? Se la mac-

ISBN 88-408-0777-2

china è progettata per separare 90.0 mg per ora, si calcoli (*b*) la corrente degli ioni desiderati nella macchina e (*c*) l'energia interna dissipata nella cavità in 1.00 ore.

25. Una particella neutra è ferma in un campo magnetico di intensità B. Al tempo $t = 0$ essa decade in due particelle cariche ciascuna di massa m. (*a*) Se la carica di una particella è $+ q$, quale sarà la carica dell'altra? (*b*) Le due particelle schizzano via su due percorsi distinti che giacciono entrambi nel piano perpendicolare a B. Ad un certo istante le particelle collidono. Si esprima il tempo trascorso dal decadimento fino alla collisione in funzione di m, B e q.

26. Un deuterone in un ciclotrone si muove in un campo magnetico su un'orbita di 50 cm. A causa di una collisione «di striscio» con un bersaglio, il deuterone si scinde, con trascurabile perdita di energia cinetica, in un protone ed un neutrone. Si discuta il moto successivo di ciascuno dei due prodotti. Si assuma che l'energia del deuterone al momento della rottura venga egualmente divisa fra protone e neutrone.

27. (*a*) Che velocità deve avere un protone per girare intorno alla terra all'equatore su un'orbita circolare, se il campo magnetico terrestre è lì ovunque orizzontale e diretto lungo lungo i meridiani? Gli effetti relativistici devono essere considerati. Il campo magnetico terrestre sia 41 μT all'equatore. (*b*) Si disegnino i vettori velocità e campo magnetico corrispondenti a questa situazione.

28. Si calcoli il raggio del percorso di un elettrone da 10.0 MeV che si muove perpendicolarmente ad un campo magnetico uniforme di 2.20 T. Si usi (*a*) sia l'espressione non relativistica che (*b*) quella relativistica. (*c*) Si calcoli il periodo reale di rivoluzione del moto circolare. Il risultato è indipendente dalla velocità dell'elettrone?

29. Misure di ionizzazione mostrano che una determinata particella nucleare è portatrice di carica doppia ($q = 2e$) e si muove con una velocità di $0.710c$ su orbite circolari di raggio 4.72 m in un campo magnetico di 1.33 T. Si trovi la massa della particella e la si identifichi.

30. Il protosincrotrone al Fermilab accelera protoni fino ad un'energia cinetica di 500 GeV. A queste energie, si determini (*a*) il rapporto tra la velocità dei protoni e quella della luce e (*b*) il campo magnetico sull'orbita dei protoni, che ha un raggio di curvatura di 750 m (il protone ha un'energia di massa di 938 MeV)

31. Un positrone (un elettrone carico positivamente) da 22.5 eV viene proiettato in un campo magnetico uniforme $B = 455$ μT; la sua velocità forma un angolo di 65.5° con **B**. Si trovi (*a*) il periodo, (*b*) il passo p e (*c*) il raggio r del percorso ad elica che esso segue. Si osservi la figura 33.

32. Nella teoria di Bohr dell'atomo di idrogeno l'elettrone può essere pensato in moto su un'orbita circolare di raggio r intorno al protone. Supponiamo che un tale atomo sia posto in un campo magnetico, con il piano dell'orbita disposto perpendicolarmente rispetto a **B**. (*a*) Se l'elettrone si muove in senso orario per un osservatore che guarda nella stessa direzione di **B**, la sua frequenza angolare aumenterà o diminuirà? (*b*) Che cosa succede se si muove in senso antiorario? Si assuma che il raggio orbitale non cambi. [*Suggerimento*: la forza centripeta è ora parzialmente elettrica ($\mathbf{F}_E$) e parzialmente magnetica ($\mathbf{F}_B$)] (*c*) Si mostri che il cambiamento nella frequenza di rivoluzione causato dal campo magnetico è approssimativamente dato da

$$\Delta\nu = \pm\frac{Be}{4\pi m}.$$

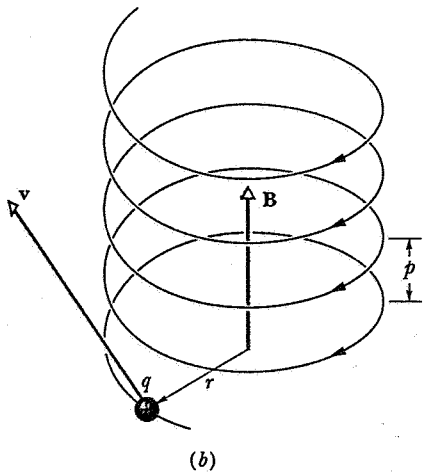


Figura 33 Problema 31.

Simili spostamenti in frequenza furono osservati da Zeeman nel 1896. [*Suggerimento*: si calcoli la frequenza di rivoluzione senza campo e con campo. Si effettui la sottrazione, considerando che, siccome gli effetti dovuti al campo magnetico sono molto piccoli, alcuni – ma non tutti – termini contenenti B possono essere posti uguale a zero, commettendo un errore trascurabile].

33. Si stimi la lunghezza del percorso totale coperto da un deuterone in un ciclotrone durante il processo di accelerazione. Si abbia un potenziale di accelerazione fra le due cavità di 80 kV, un raggio delle dee di 53 cm ed una frequenza dell'oscillatore di 12 MHz.

34. Si consideri una particella di massa m e carica q che si muova nel piano xy sotto l'influenza di un campo magnetico uniforme **B** che punta nella direzione $+ z$. Si determini l'espressione delle coordinate $x(t)$ ed $y(t)$ della particella come funzione del tempo t, assumendo che la particella si muova su una circonferenza di raggio R centrata nell'origine delle coordinate.

35. Si consideri la particella del problema 34, ma questa volta si *dimostri* (anzichè *assumerlo*) che la particella si muove su orbite circolari, integrando l'equazione di Newton esplicitamente. (*Suggerimento*: si risolva l'espressione di F_y rispetto a v_x e si sostituisca nell'espressione di F_x ottenendo un'equazione che può essere integrata in v_y. Si faccia lo stesso con v_x per sostituzione nell'equazione di F_y. Infine si ricavi $x(t)$ ed $y(t)$ da v_x e v_y).

Paragrafo 34-4 L'effetto Hall

36. Un conduttore di 4.0 cm di lunghezza, 1.2 cm di larghezza e 9.5 m di spessore è percorso longitudinalmente da una corrente di 3.2 A. Quando un campo magnetico di 1.4 T è applicato perpendicolarmente al conduttore si misura una differenza di potenziale Hall di 40 V. Da questi dati si trovi (*a*) la velocità di deriva dei portatori di carica e (*b*) la densità dei portatori di carica. Dalla tabella 2 si identifichi il conduttore. (*c*) Si tracci su un diagramma la polarità della tensione Hall per un prefissato verso della corrente e del campo magnetico, assumendo che i portatori di carica siano elettroni.

37. Si mostri che, in termini del campo elettrico Hall E e della densità di corrente j, il numero di portatori di carica per uni-

tà di volume è dato da

$$n = \frac{jB}{eE}.$$

38. (*a*) Si mostri che il rapporto tra il campo elettrico Hall E ed il campo elettrico E_c responsabile della corrente è

$$\frac{E}{E_c} = \frac{B}{ne\rho},$$

dove ρ è la resistività del materiale. (*b*) Si calcoli numericamente questo rapporto relativamente all'esempio 3. Si utilizzi la tabella 1 del capitolo 32.

39. Una striscia di metallo lunga 6.5 cm, larga 0.88 cm e spessa 0.76 mm si muove con velocità costante v attraverso un campo magnetico $B = 1.2$ mT perpendicolare alla striscia stessa, come mostrato in figura 34. Una differenza di potenziale di 3.9 V è misurata fra i punti x ed y attraverso la striscia. Si determini la velocità v.

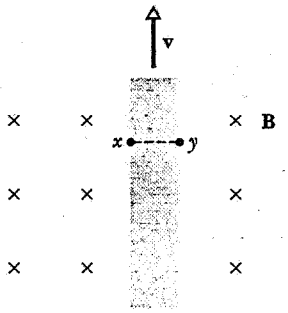


Figura 34 Problema 39.

Paragrafo 34-5 Forza magnetica agente su una corrente

40. Un conduttore orizzontale di una linea di potenza è percorso da una corrente di 5.12 kA da nord a sud. Il campo magnetico terrestre nelle vicinanze della linea è di 58.7 μT ed è diretto verso il nord, inclinato verso il basso di 70.0° rispetto alla linea. Si determini l'intensità e la orientazione della forza magnetica dovuta al campo terrestre su 100 m di conduttore.

41. Un cavo di lunghezza pari a 62.0 cm e di massa pari a 13.0 g è sospeso con un paio di bacchette flessibili in un campo magnetico di 440 mT. Si determini il valore e il verso della corrente nel cavo richiesta per annullare la tensione delle bacchette. Si veda figura 35.

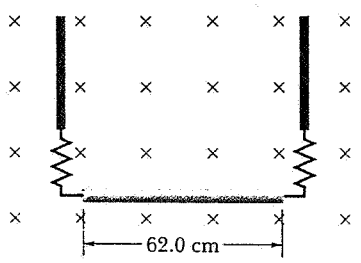


Figura 35 Problema 41.

42. Un cavo metallico di massa m può scorrere senza attrito lungo due binari orizzontali separati da una distanza d, come illustrato in figura 36. L'insieme giace in un campo magnetico uniforme **B**. Una corrente costante i fluisce dal generatore G lungo un binario, passa attraverso il cavo e poi lungo il secondo binario. Si trovi la velocità (modulo e verso) del cavo, assumendo che sia fermo per $t = 0$.

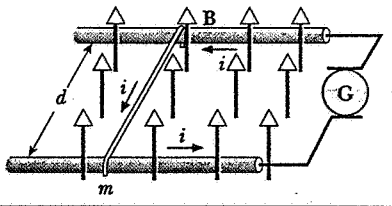


Figura 36 Problema 42.

43. Si consideri la possibilità di progettare un nuovo tipo di treno elettrico. Il motore è guidato dalla forza dovuta alla componente verticale del campo magnetico terrestre, che agisce su un asse della locomotiva percorso da corrente. Analogamente al Problema 42 la corrente entra da uno dei due binari, passa dalla ruota in contatto con esso nell'asse del locomotore, fluisce attraverso l'altra ruota e torna al generatore nel secondo binario. (*a*) Quale corrente è necessaria per ottenere una modesta forza di 10 kN? Si consideri la componente verticale del campo terrestre pari a 10 μT e la lunghezza dell'asse pari a 3 m. (*b*) Quanta potenza sarebbe persa per ogni ohm di resistenza nelle rotaie? (*c*) Un treno così concepito è completamente o solo marginalmente irrealistico?

44. In figura 37 è mostrato un cavo di forma arbitraria, percorso da una corrente i tra i punti a e b. Il cavo giace in un piano che forma un angolo retto con un campo magnetico **B**. Si dimostri che la forza che agisce sul cavo è la stessa che agirebbe su un cavo rettilineo congiungente gli stessi estremi. (*Suggerimento*: si rimpiazzi la linea del cavo con una serie di pezzetti paralleli e perpendicolari alla retta congiungente a e b).

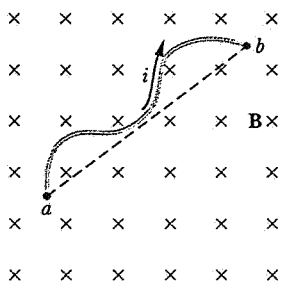


Figura 37 Problema 44.

45. Un cavo sagomato ad U di massa m e lunghezza L è immerso in un bagno di mercurio (*vedi* fig. 38). Il cavo è in un campo magnetico omogeneo B. Se una carica $q = \int i\,dt$, è inviata attraverso il cavo, questi salterà in aria. Si calcoli, dall'altezza h raggiunta dal cavo, l'ammontare di carica o impulso di corrente, assumendo che il tempo dell'impulso sia molto piccolo rispetto al tempo di volo. Si ricorda che l'impulso della forza $\int F\,dt$, è uguale ad mv. (*Suggerimento*: si metta in relazione $\int i\,dt$ con $\int F\,dt$). Si determini q per B = 0.12 T, m = 13 g, L = 20 cm e h = 3.1 m.

46. Una sbarra di rame di 1.15 kg è ferma su due binari orizzontali distanti fra loro 0.95 m. Il coefficiente di attrito statico è

ISBN 88-408-0777-2

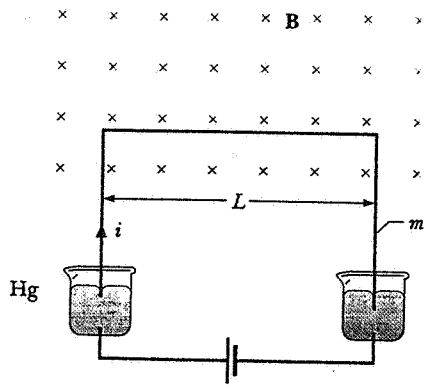


Figura 38 Problema 45.

0.58. Si calcoli il campo magnetico minimo necessario a far spostare la sbarra quando viene fatta passare una corrente di 53.2 A da un binario all'altro.

47. Un conduttore lungo e rigido, giacente lungo l'asse x, è percorso da una corrente di 5.0 A nel verso $-x$. Un campo magnetico $\mathbf{B}$ è presente e vale $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 8x^2\mathbf{j}$, con x in metri e B in mT. Si calcoli la forza sul segmento lungo 2 m che giace fra $x = 1.2$ m ed $x = 3.2$ m.

Paragrafo 34-6 Momento agente su una spira percorsa da corrente

48. La figura 39 mostra una bobina rettangolare di 12 cm per 5 cm composta da 20 spire di cavo. Essa è percorsa da una corrente di 0.10 A ed è incernierata lungo un lato. È montata con il suo piano che forma un angolo di 33° con la direzione di un campo magnetico di 0.50 T. Si calcoli il momento agente sulla bobina rispetto all'asse dato dalla cerniera.

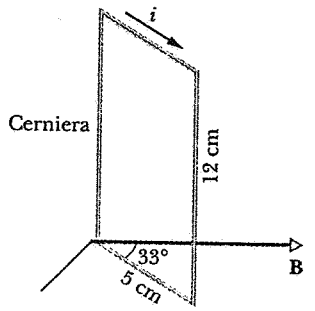


Figura 39 Problema 48.

49. Una spira percorsa da una corrente di 4.00 A ha la forma di un triangolo rettangolo di lati 50, 120 e 130 cm. Viene posta in un campo magnetico uniforme di 75.0 mT la cui direzione è parallela alla corrente nel lato di 130 cm. (*a*) Si determini la forza magnetica agente su ciascuno dei 3 lati della spira. (*b*) Si mostri che la forza magnetica totale sulla spira è nulla.

50. Un orologio circolare da muro ha raggio di 15 cm. Un cavo viene avvolto sei volte intorno al suo perimetro; attraverso esso viene poi fatta passare una corrente di 2.0 A in senso orario. L'orologio è situato dove ha sede un campo magnetico esterno uniforme di 70 mT (ma ugualmente l'orologio «spacca il secondo»). Esattamente alle 13.00 la lancetta delle ore punta nella direzione del campo magnetico esterno. (*a*) Dopo quanto tempo la lancetta dei minuti punterà nella direzione del momento agente sull'avvolgimento dovuto al campo magnetico? (*b*) Quanto vale questo momento?

51. Un cavo di lunghezza L è percorso da una corrente i. Si mostri che, se il cavo è avvolto ad anello, la coppia massima in un dato campo magnetico si ha quando la spira è formata da un solo avvolgimento e vale

$$\tau = \frac{1}{4\pi} L^2 iB.$$

52. Si dimostri che la relazione $\tau = NiAB \operatorname{sen}\theta$ vale per spire di forma arbitraria e non solo per spire rettangolari come quella della figura 26 (*suggerimento*: si rimpiazzi la spira di forma arbitraria con un insieme di spire approssimativamente rettangolari, molto lunghe e sottili, adiacenti l'una all'altra, in modo che la distribuzione di corrente sia equivalente a quella della spira originale).

53. La figura 40 mostra una spira circolare di raggio a immersa in un campo magnetico divergente radialmente simmetrico. La tangente alla circonferenza in ogni punto è perpendicolare al campo, mentre quest'ultimo forma un angolo θ con la normale al piano della spira. Le estremità ritorte del cavo non hanno importanza in questo problema. Si determini l'intensità e la orientazione della forza che il campo esercita sull'anello, se quest'ultimo è percorso da una corrente i come mostrato in figura.

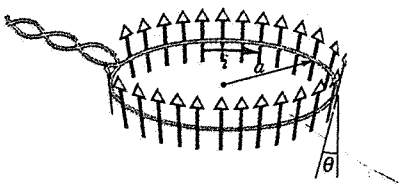


Figura 40 Problema 53.

54. Un galvanometro ha resistenza di 75.3 Ω; la sua lancetta va a fondoscala quando passa una corrente di 1.62 mA attraverso la sua bobina. (*a*) Si determini il valore della resistenza ausiliaria richiesta per convertire il galvanometro in un voltmetro che vada a fondoscala quando legge una tensione di 1.00 V. Come va connessa? (*b*) Si determini il valore della resistenza ausiliaria richiesta per convertire il galvanometro in un amperometro che vada a fondoscala quando legge una corrente di 50.0 mA. Come va connessa?

55. La figura 41 mostra un cilindro di legno di massa $m = 262$ g e lunghezza $L = 12.7$ cm, con $N = 13$ giri di cavo avvolto in-

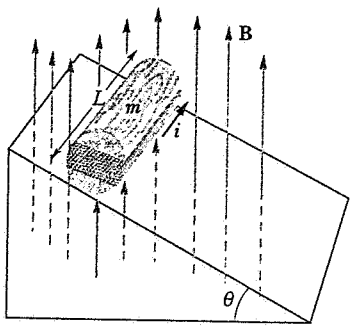


Figura 41 Problema 55.

torno ad esso longitudinalmente, in modo che il piano dell'avvolgimento così formato contenga l'asse del cilindro. Qual è la corrente minima che deve attraversare l'avvolgimento in modo da evitare che il cilindro scivoli lungo un piano inclinato di un angolo rispetto all'orizzontale, in presenza di un campo magnetico di 477 mT, se il piano degli avvolgimenti è parallelo al piano inclinato ?

Paragrafo 34-7 Il dipolo magnetico

56. Una bobina circolare di 160 spire ha raggio 1.93 cm. (*a*) Si calcoli la corrente che genera un momento magnetico di 2.33 $A \cdot m^2$. (*b*) Si trovi il momento massimo di cui la bobina, percorsa da questa corrente, può risentire in un campo magnetico uniforme di 34.6 mT.

57. Il momento magnetico di dipolo della Terra è di 8.0×10^{22} J/T. Si assuma che sia prodotto da cariche in moto nello strato fuso esterno del nucleo della Terra. Se il raggio di tale regione è di 3500 km, si calcoli la corrente richiesta.

58. Una spira circolare, di raggio pari a 16 cm, è percorsa da una corrente di 2.58 A. Essa viene posta in un campo magnetico di 1.20 T in modo che il suo piano formi un angolo di 41.0° con esso. (*a*) Si calcoli il momento di dipolo magnetico della spira. (*b*) Si trovi il momento agente sull'anello.

59. Due spire circolari e concentriche, di raggio 20.0 e 30.0 cm, giacenti nel piano *xy*, sono percorse in senso orario da una corrente di 7.00 A. (*a*) Si determini il momento magnetico netto di questo sistema. (*b*) Si ripeta il calcolo nel caso in cui si inverta il verso della corrente nell'anello esterno.

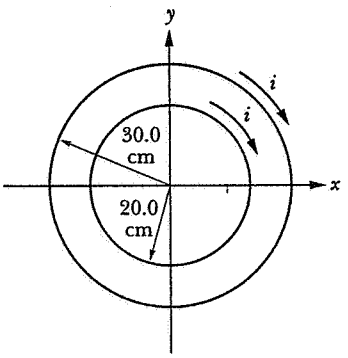


Figura 42 Problema 59.

60. Una spira circolare avente raggio di 8.0 cm, è percorsa da una corrente di 0.20 A. Un versore parallelo al momento di dipolo della spira è dato da 0.60i − 0.80j. Se la spira è situata in un campo magnetico espresso in T dato da $\mathbf{B} = 0.25\mathbf{i} + 0.30\mathbf{k}$, si trovi (*a*) il momento agente sulla spira e (*b*) l'energia magnetica potenziale della spira.

Esercizi al calcolatore

61. Una particella di carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 1.7 \times 10^{-27}$ kg si muove in un campo magnetico uniforme di 1.1 T nella direzione *z* positiva. Al tempo $t = 0$ è nell'origine ed ha una velocità di 6.0×10^5 m/s nella direzione *x* positiva. (*a*) Si usi il programma riportato in Appendice I per tracciare la posizione della particella dal tempo $t = 0$ al tempo $t = 6.5 \times 10^{-8}$ s. Si adotti $\Delta t = 3 \times 10^{-11}$ s per l'intervallo d'integrazione. Si richiede che il programma calcoli e indichi la velocità della particella quando ne mostra la posizione. (*b*) La velocità è costante entro l'accuratezza del calcolatore? Se le prime due cifre significative della velocità calcolata non sono costanti, si riduca il valore di *t* e si provi ancora. (*c*) Si misuri il raggio dell'orbita e si confronti il risultato con mv/qB.

62. Il campo magnetico nei pressi dell'origine è diretto lungo la direzione *z* positiva e la sua intensità, espressa in tesla, è data da $B = 50r$, dove *r* è la distanza in metri dall'asse *z*. Una particella di carica 1.6×10^{-19} C e massa 1.7×10^{-27} kg deve essere iniettata nel campo con una velocità di 6.0×10^5 m/s nella direzione *y* negativa da un punto dell'asse *x*. Se la distanza iniziale dall'asse *z* è data dall'equazione $mv^2/r = qvB$ allora l'orbita sarà circolare. (*a*) Qual è questa distanza? (*b*) Si usi un programma per disegnare l'orbita da t = 0, quando la particella viene iniettata, fino a $t = 1.2 \times 10^{-7}$ s. Si prendano come coordinate iniziali $x = R$ ed $y = 0$, dove *R* è il valore trovato per *r* nella parte (*a*). Si prenda come intervallo di integrazione $\Delta t = 5 \times 10^{-11}$ s. Il programma deve calcolare la velocità per ogni punto mostrato. La velocità è costante? Se le prime due cifre significative della velocià calcolata non sono costanti, si riduca il valore di Δt. L'orbita è circolare? (*c*) Ora si faccia partire la particella da $x = 0.5R$, $y = 0$ e si tracci l'orbita per lo stesso intervallo di tempo. È circolare? La velocità è costante?

63. (*a*) Si consideri un campo magnetico nella direzione *z* positiva, con intensità in tesla di $B = 7.0 \times 10^{-3}/x$. Una particella di carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C è inizialmente in $x = 5.0 \times 10^{-2}$ m, $y = 0$ e si muove nella direzione *y* positiva con una velocità di 7.0×10^5 m/s. Si usi un programma per disegnare l'orbita da $t = 0$ fino a $t = 2.5 \times 10^{-6}$ s. Si prenda come intervallo d'integrazione $\Delta t = 2.5 \times 10^{-10}$ s. Il programma deve calcolare la velocità per ogni punto mostrato. La velocità è costante? Se le prime due cifre significative della velocià calcolata non sono costanti, si riduca il valore di Δt. L'orbita è circolare? (*b*) Si supponga, ora, che la carica parta dallo stesso punto ma con una velocità di 7.0×10^5 m/s nella direzione *y* negativa. Si utilizzi un programma per disegnare l'orbita da $t = 0$ fino a $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. Si adotti come intervallo d'integrazione $\Delta t = 8 \times 10^{-11}$ s. Si controlli la costanza della velocità per vedere se Δt necessita di regolazioni. (*c*) Si osservi che in entrambi i casi la carica si muove nella direzione *y* negativa quando spiralizza nel campo. Si spieghi qualitativamente la forma delle due orbite. (*d*) Come vanno cambiate le condizioni iniziali in modo che la carica si muova nella direzione *y* *positiva*?

64. Un campo magnetico uniforme di 1.2 T è orientato lungo la direzione *z* positiva ed un campo elettrico uniforme lungo la *x* negativa. Una particella di carica $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C e massa $m = 1.7 \times 10^{-26}$ kg parte dall'origine con una velocità di 5.0×10^4 m/s nella direzione *y* positiva. Per ognuno dei seguenti valori di campo elettrico si usi un programma per disegnare l'orbita da $t = 0$ fino a $t = 1.0 \times 10^{-6}$ s. Si prenda come intervallo di integrazione $\Delta t = 1 \times 10^{-9}$ s. (*a*) 1.0×10^4 V/m. (*b*) 3.0×10^4 V/m. (*c*) 6.0×10^4 V/m. (*d*) 9.0×10^4 V/m.

Capitolo 35

LA LEGGE DI AMPÈRE

Nel capitolo precedente si è studiato l'effetto di un campo magnetico su una carica in moto. Ci si occuperà ora della sorgente del campo stesso e in questo capitolo si studierà il campo magnetico generato da un filo percorso da corrente. Si introdurranno due metodi per calcolare **B***: uno basato su una tecnica diretta, analogo alla legge di Coulomb per il calcolo del campo elettrico, ed un altro basato su argomenti di simmetria, analogo alla legge di Gauss per il campo elettrico.*
In analogia con quanto visto nei capitoli precedenti nel caso del campo elettrico generato da semplici distribuzioni di carica, si studierà in questo capitolo il campo magnetico generato da semplici distribuzioni di corrente: fili diritti e spire circolari. Si discuterà il campo magnetico di dipolo, che è analogo al campo elettrico di dipolo. Infine si mostrerà che la relazione tra campo elettrico e campo magnetico è più profonda di una semplice somiglianza tra le equazioni; la relazione si estende alla trasformazione dei campi l'uno nell'altro quando le distribuzioni di carica o corrente vengano osservate da sistemi di riferimento inerziali differenti.

35-1 LA LEGGE DI BIOT-SAVART

La scoperta che le correnti generano campi magnetici, fu fatta da Hans Christian Oersted nel 1820. Oersted osservò che, come illustrato in figura 1, quando una bussola viene posta vicino ad un filo diritto percorso da corrente, l'ago si dispone sempre perpendicolarmente al piano individuato dal filo e dal punto dove è posta la bussola (trascurando l'influenza del campo magnetico terrestre sulla bussola).

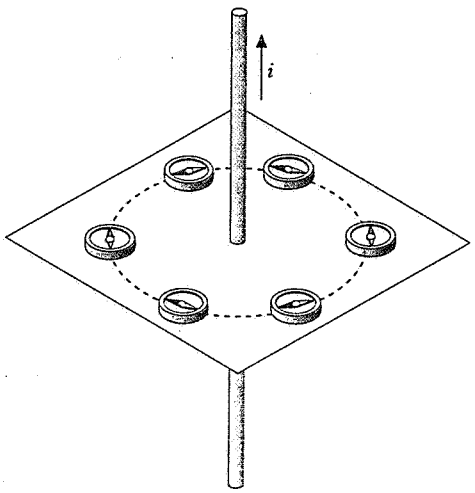


Figura 1 Esperimento di Oersted. La direzione dell'ago della bussola è sempre perpendicolare al piano individuato dal filo e dal punto dove è posta la bussola.

Questa fu la prima evidenza sperimentale della connessione tra elettricità e magnetismo e segnò l'inizio dello sviluppo di una teoria formale dell'elettromagnetismo. In termini moderni, analizziamo l'esperimento di Oersted dicendo che la corrente che scorre nel filo genera un campo magnetico che esercita un momento torcente sull'ago della bussola e lo allinea con il campo.

Sviluppiamo ora una procedura per calcolare il campo magnetico generato da una data distribuzione di corrente. Prima di considerare il campo magnetico, rivediamo l'analoga procedura per calcolare il campo elettrico.

In figura 2 sono rappresentate due distribuzioni di carica q_1 e q_2 di dimensioni e forma arbitrarie. Consideriamo gli elementi di carica dq_1 e dq_2 nelle due di-

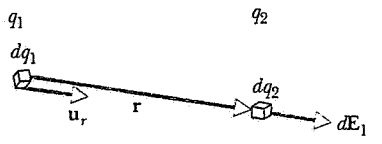


Figura 2 Due distribuzioni di carica arbitrarie q_1 e q_2. Un elemento di carica dq_1 genera un campo elettrico $d\mathbf{E}_1$ nella posizione di dq_2.

ISBN 88-408-0777-2

stribuzioni. Il campo elettrico $d\mathbf{E}_1$ generato da dq_1 in dq_2 è dato da

$$d\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq_1}{r^2}\mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq_1}{r^3}\mathbf{r}, \qquad (1)$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore da dq_1 a dq_2 (fig. 2), r il suo modulo e $\mathbf{u}$ $(= \mathbf{r}/r)$ è il versore nella direzione di $\mathbf{r}$. Per trovare il campo elettrico totale che agisce su dq_2 dovuto all'intera distribuzione di carica q_1, integriamo su q_1:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq_1}{r^2}\mathbf{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{dq_1}{r^3}\mathbf{r}, \qquad (2)$$

La forza $d\mathbf{F}_{21}$ che agisce su dq_2, dovuta alla distribuzione di carica q_1 si può allora scrivere

$$d\mathbf{F}_{21} = \mathbf{E}_1\, dq_2. \qquad (3)$$

Le equazioni 1 e 2 (per il campo elettrico generato da una distribuzione di carica) e 3 (per la forza che agisce su una carica dovuta ad una distribuzione di carica) prese insieme possono essere considerate come una forma della legge di Coulomb per trovare la forza elettrostatica tra due cariche.

Nel caso di campi magnetici, cerchiamo la forza tra due elementi di *corrente* (fig. 3). Cioè, consideriamo due correnti i_1 e i_2 ed i corrispondenti elementi di corrente $i_1\, d\mathbf{s}_1$ e $i_2\, d\mathbf{s}_2$. Assumiamo, basandoci sui risultati del capitolo precedente, che le direzioni relative degli elementi di corrente (specificate dai vettori $d\mathbf{s}_1$ e $d\mathbf{s}_2$) siano importanti e che la forza tra correnti possa coinvolgere un prodotto vettore. La legge di Coulomb per la forza tra cariche è stata sviluppata come conseguenza di risultati sperimentali; una legge analoga per la forza magnetica è stata proposta nel 1820 dal fisico francese André-Marie Ampère* poco dopo che ebbe sentito i risultati di Oersted. La forza magnetica $d\mathbf{F}_{21}$ esercitata sull'elemento di corrente 2 da i_1 si può scrivere, usando l'equazione 30 del capitolo 34,

$$d\mathbf{F}_{21} = i_2\, d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}_1, \qquad (4)$$

dove il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ nella posizione dell'elemento di corrente $i_2\, d\mathbf{s}_2$ è generato dall'intera corrente i_1. Il contributo $d\mathbf{B}_1$ di ciascun elemento di i_1 al campo totale $\mathbf{B}_1$ è dato da

$$d\mathbf{B}_1 = k\frac{i_1\, d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{u}_r}{r^2} = k\frac{i_1\, d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}}{r^3}, \qquad (5)$$

dove $\mathbf{r}$ è il vettore che va dall'elemento di corrente 1 all'elemento di corrente 2 e $\mathbf{u}_r$ è il versore di $\mathbf{r}$. Le equazioni 4 e 5 insieme esprimono la forza magnetica

* Vedi L. Pearce Williams, *André Marie Ampère*, «Scientific American», gennaio 1989, pag. 90.

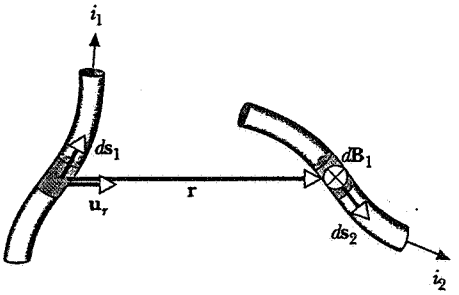


Figura 3 Due distribuzioni arbitrarie di corrente i_1 e i_2. L'elemento di corrente nel segmento ds_1 di un filo genera un campo magnetico $d\mathbf{B}_1$ nella posizione del segmento ds_2 dell'altro filo.

tra due elementi di corrente in maniera analoga a come le equazioni 1 e 3 la esprimono per elementi di carica.

Nell'equazione 5 compare una costante k indeterminata, proprio come si era inclusa una costante analoga nella legge di Coulomb (vedi equazione 1 del capitolo 27). Si ricorderà che in elettrostatica vi erano due possibilità per stabilire la costante nella legge di Coulomb: (1) fissare la costante in maniera arbitraria e usare la legge della forza per stabilire sperimentalmente l'unità di carica, oppure (2) definire l'unità di carica e stabilire sperimentalmente la costante. Abbiamo scelto la seconda opzione definendo l'unità di carica in termini di unità di corrente. Nel caso della costante nella legge della forza magnetica, scegliamo la prima possibilità: fissiamo la costante in maniera opportuna ed usiamo la legge della forza per definire l'unità di corrente, l'ampere. La costante k, nelle unità del SI viene fissata a 10^{-7} tesla · metro/ampere (T · m/A). Tuttavia, come nel caso dell'elettrostatica, è conveniente scrivere la costante in una forma differente:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}, \qquad (6)$$

dove la costante μ_0, detta *permeabilità magnetica del vuoto*, ha il valore esatto

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}.$$

La permeabilità magnetica del vuoto μ_0 gioca un ruolo, nel calcolo dei campi magnetici, analogo a quello giocato dalla costante dielettrica del vuoto, ϵ_0, nel calcolo dei campi elettrici. Le due costanti non sono indipendenti l'una dall'altra; come si vedrà nel capitolo 41, esse sono legate alla velocità della luce nel vuoto c dalla relazione $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Perciò *non* siamo liberi di scegliere entrambe le costanti in maniera arbitraria: possiamo fissarne una arbitrariamente, ma la seconda è determinata attraverso il valore di c.

Siamo ora in grado di scrivere l'espressione generale

ISBN 88-408-0777-2

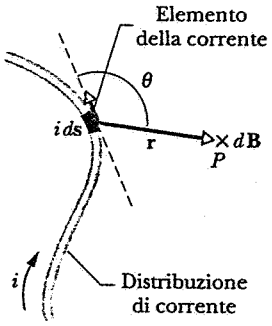


Figura 4 L'elemento $i\,d\mathbf{s}$ di una generica distribuzione di corrente genera un campo magnetico $d\mathbf{B}$ ortogonale ed entrante rispetto al piano del foglio nel punto P.

del campo magnetico generato da una distribuzione arbitraria di corrente. La figura 4 illustra la geometria generale. Non stiamo più considerando la forza tra due elementi di corrente; invece, calcoliamo il campo $d\mathbf{B}$ nel punto P dovuto ad un singolo elemento di corrente $i\,d\mathbf{s}$. Se siamo interessati a calcolare l'effetto di tale campo su cariche in moto o su correnti nel punto P, usiamo le formule sviluppate nel capitolo precedente. Tralasciando gli indici che compaiono nell'equazione 5 e usando l'espressione 6 per la costante k, si ottiene

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (7)$$

Questo risultato è noto come *legge di Biot-Savart*. $d\mathbf{B}$ è diretto nella stessa direzione di $d\mathbf{s}\times\mathbf{u}_r$ (o di $d\mathbf{s}\times\mathbf{r}$), ortogonale ed entrante nel foglio in figura 4.

Utilizzando la legge di Biot-Savart si può esprimere il modulo di $d\mathbf{B}$ come

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i\,ds\,\mathrm{sen}\theta}{r^2}, \qquad (8)$$

dove θ è l'angolo tra $d\mathbf{s}$ (che è orientato come la corrente i) e $\mathbf{r}$,come mostrato in figura 4.

Per determinare il campo magnetico totale $\mathbf{B}$ generato dall'intera distribuzione di corrente, si deve integrare su tutti gli elementi di corrente $i\,d\mathbf{s}$:

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{i\,d\mathbf{s}\times\mathbf{r}}{r^3}. \qquad (9)$$

Esattamente come abbiamo fatto nel capitolo 28 per i campi elettrici, dobbiamo tenere conto nel calcolo di questo integrale del fatto che non tutti gli elementi $d\mathbf{B}$ sono nella stessa direzione (vedi paragrafo 28-5 per esempi di questo tipo di integrale di vettori nel caso di campi elettrici).

35-2 APPLICAZIONI DELLA LEGGE DI BIOT-SAVART

Filo rettilineo infinitamente lungo

Illustriamo la legge di Biot-Savart applicandola al campo $\mathbf{B}$ generato da un filo rettilineo infinitamente lungo percorso da una corrente i. La figura 5 mostra un generico elemento di corrente $i\,d\mathbf{s}$. Il modulo del contributo $d\mathbf{B}$ di tale elemento al campo magnetico nel punto P è dato dall'equazione 8,

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{ds\,\mathrm{sen}\theta}{r^2}.$$

Indichiamo con x la posizione lungo il filo, in modo che l'elemento di corrente sia $i\,dx$. L'orientazione del contributo al campo $d\mathbf{B}$ nel punto P per ogni elemento è la stessa, e precisamente ortogonale ed entrante nel piano della figura. Questa è la direzione del prodotto vettoriale $d\mathbf{s}\times\mathbf{r}$. Possiamo così calcolare un integrale scalare invece dell'integrale vettoriale dell'equazione 9 e B si può scrivere

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{\mathrm{sen}\theta\,dx}{r^2}. \qquad (10)$$

Ora x, θ e r non sono indipendenti, essendo legati (*vedi* fig. 5) dalle relazioni:

$$r = \sqrt{x^2+R^2}$$

e

$$\mathrm{sen}\theta = \mathrm{sen}(\pi-\theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}},$$

sicché l'equazione 10 diventa

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\,\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\Bigg|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

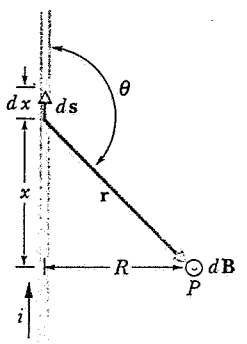


Figura 5 Il campo magnetico $d\mathbf{B}$ generato in P da un elemento di corrente di un filo rettilineo infinitamente lungo è diretto ortogonalmente al piano della figura (con verso entrante).

ovvero

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}. \tag{11}$$

Questo problema ricorda il suo analogo elettrostatico. Abbiamo determinato una espressione per il campo elettrico **E** generato da una bacchetta carica infinitamente lunga con metodi di integrazione, usando la legge di Coulomb (par. 28-5). Abbiamo risolto lo stesso problema usando la legge di Gauss (par. 29-5). Più avanti in questo capitolo, vedremo una legge per i campi magnetici, la legge di Ampère, che è simile alla legge di Gauss in quanto semplifica il calcolo del campo magnetico in casi (come questo) che presentano un elevato grado di simmetria.

Spira circolare percorsa da corrente

La figura 6 mostra una spira circolare di raggio R lungo cui scorre una corrente i. Calcoliamo **B** in un punto P sull'asse ad una distanza z dal centro della spira.

L'angolo θ tra l'elemento di corrente $i\,d\mathbf{s}$ e **r** è di 90°. Dalla legge di Biot-Savart, sappiamo che il vettore $d\mathbf{B}$ generato da tale elemento è normale al piano individuato da $i\,d\mathbf{s}$ e da **r** e forma quindi un angolo retto con **r**, come mostrato in figura.

Scomponiamo $d\mathbf{B}$ in due componenti, una, $d\mathbf{B}_{\parallel}$, nella direzione dell'asse della spira, e l'altra, $d\mathbf{B}_{\perp}$, normale a tale asse. Solo la componente $d\mathbf{B}_{\parallel}$ contribuisce al campo magnetico totale **B** nel punto P. Ciò perché le componenti $d\mathbf{B}_{\parallel}$ generate da ciascun elemento di corrente giacciono sull'asse e si sommano direttamente; le componenti $d\mathbf{B}_{\perp}$, invece, giacciono in direzioni diverse ortogonali all'asse e, per ragioni di simmetria, la somma di tutti i $d\mathbf{B}_{\perp}$ su un giro completo è nulla. (Un elemento di corrente diametralmente opposto, indicato in figura 6, genera un uguale $d\mathbf{B}_{\parallel}$ ma un $d\mathbf{B}_{\perp}$ opposto.) Possiamo quindi sostituire all'integrale vettoriale su tutti i $d\mathbf{B}$, l'integrale scalare sulla sola componente parallela:

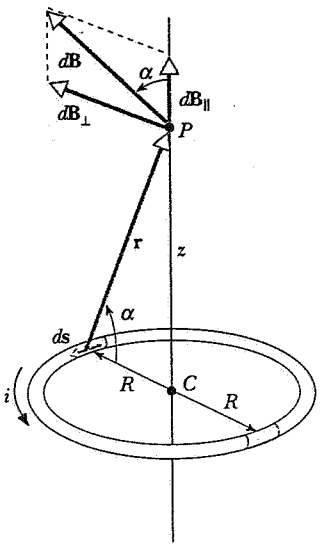


Figura 6 Una spira circolare percorsa da corrente. L'elemento $i\,d\mathbf{s}$ della spira genera un campo $d\mathbf{B}$ in un punto P sull'asse della spira.

$$B = \int dB_{\parallel}. \tag{12}$$

Per l'elemento di corrente di figura 6 la legge di Biot-Savart (eq. 8) dà:

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{ds\ \text{sen}\ 90°}{r^2}. \tag{13}$$

Inoltre

$$dB_{\parallel} = dB\cos\alpha,$$

che, combinata con l'equazione 13, dà:

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i \cos\alpha\ ds}{4\pi r^2}. \tag{14}$$

La figura 6 mostra che r ed α non sono indipendenti l'una dall'altra. Esprimiamo ciascuna di esse in termini di z, la distanza del punto P dal centro della spira. Le relazioni sono

$$r = \sqrt{R^2 + z^2}$$

e

$$\cos\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Sostituendo queste espressioni nell'equazione 14 per $dB_{\parallel}$ si ottiene

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}}\,ds.$$

Si noti che i, R e z hanno lo stesso valore per tutti gli elementi di corrente. Integrando questa equazione si ottiene

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 i R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds$$

o, notando che ds è semplicemente la circonferenza della spira ($= 2\pi R$),

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{15}$$

Al centro della spira ($z = 0$), l'equazione 15 si riduce a

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}. \tag{16}$$

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 1 ALCUNE EQUAZIONI PER I DIPOLI

Proprietà	*Dipolo elettrico*	*Dipolo magnetico*
Momento torcente in un campo esterno	$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$	$\tau = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$
Energia in un campo esterno	$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$	$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$
Campo in punti lontani lungo l'asse	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}$	$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3}$
Campo in punti lontani in direzione perpendicolare all'asse	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{x^3}$	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu}{x^3}$

Il modulo del campo magnetico sull'asse di una spira circolare è dato dall'equzione 15. Il campo assume il valore massimo nel piano della spira (eq. 16) e decresce all'aumentare della distanza z. Il verso del campo è determinato dalla regola della mano destra: prendendo il filo con la mano destra, con il pollice nella direzione della corrente, le dita si chiudono nel verso del campo magnetico.

Se $z \gg R$, in modo da non considerare punti vicini alla spira, l'equazione 15 si riduce a

$$B = \frac{\mu_0 i R^2}{2z^3}.$$

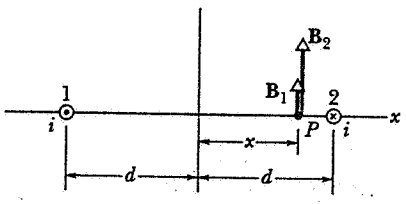
Per una bobina avvolta fittamente, composta da N spire circolari identiche, il campo totale è N volte questo valore, o (sostituendo l'area della spira, $A = \pi R^2$)

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NiA}{z^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\mu}{z^3}, \qquad (17)$$

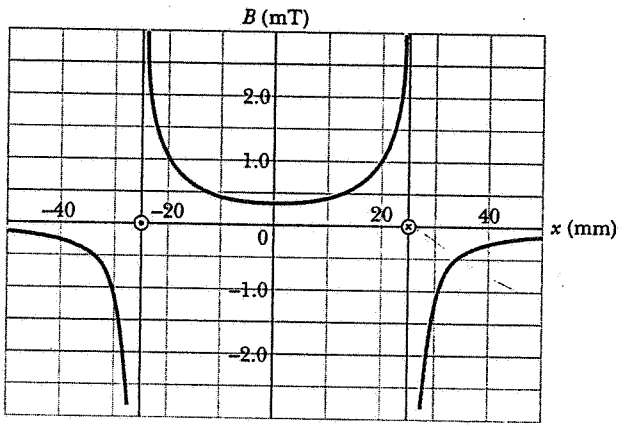
dove μ è il *momento di dipolo magnetico* (par. 34-7) della spira di corrente. Ciò ricorda il risultato ottenuto nel problema 11 del capitolo 28 [$E = (1/2\pi\epsilon_0)(p/z^3)$], che è la formula per il campo elettrico sull'asse di un dipolo *elettrico*. Il problema 33 fornisce un esempio del calcolo del campo magnetico in punti lontani perpendicolarmente all'asse di un dipolo magnetico.

Abbiamo mostrato in due modi che possiamo considerare una spira di corrente come un dipolo magnetico: essa è sottoposta ad un momento torcente dato da $\tau = \mu \times \mathbf{B}$ quando viene posta in un campo magnetico *esterno* (vedi equazione 37 del capitolo 34); genera essa stessa un campo magnetico dato, per punti sull'asse, dalla equazione 17. La tabella 1 riassume alcune proprietà dei dipoli elettrici e magnetici.

Esempio 1 Si considerino due fili lunghi e paralleli, distanti $2d$ l'uno dall'altro. Nei due fili scorra una corrente i in direzioni opposte, come mostrato in figura 7*a*. Si ricavi un'espressione per il campo magnetico B nel punto P sulla congiungente i due fili, ad una distanza x dal punto medio.



(*a*)



(*b*)

Figura 7 Esempio 1. (*a*) I campi magnetici nel punto P generati dalle correnti nei fili 1 e 2. (*b*) Il campo risultante in P, calcolato per $i = 25$ A e $d = 25$ mm.

Soluzione Un esame della figura 7*a* mostra che il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ generato da i_1 ed il campo magnetico $\mathbf{B}_2$ generato da i_2, sono paralleli in P. Ciascuno è dato dalla equazione 11 ($B = \mu_0 i / 2\pi R$), sicché

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(d+x)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-x)} = \frac{\mu_0 i d}{\pi(d^2 - x^2)}.$$

Un esame di questo risultato mostra che (1) B è simmetrico rispetto a $x = 0$; (2) B assume il valore minimo ($= \mu_0 i / \pi d$) per $x = 0$; e (3) $B \to \infty$ per $x \to \pm d$. Quest'ultima conclusione non è corretta, perché l'equazione 11 non può essere applicata a punti all'interno dei fili. In realtà (*vedi* esempio 5) il campo dovuto ad ogni filo si annulla nel centro del filo stesso.

Si dimostri che il risultato ottenuto per il campo totale rimane valido anche per punti con $|x| > d$. In figura 7*b* è riportato l'andamento di B in funzione di x per $i = 25$ A e $d = 25$ mm.

Esempio 2 Nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno, l'elettrone gira intorno al nucleo su un'orbita di raggio 5.29×10^{-11} m con una frequenza di rivoluzione ν di 6.63×10^{15} Hz (giri/s). (*a*) Qual è il valore del campo magnetico B generato al centro dell'orbita? (*b*) Qual è il momento di dipolo magnetico equivalente?

Soluzione (*a*) La corrente è data dalla quantità di carica che passa per un punto qualsiasi dell'orbita in un secondo, e cioè

$$i = e\nu = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(6.63 \times 10^{15}\ \text{Hz}) = 1.06 \times 10^{-3}\ \text{A}$$

Il campo magnetico B al centro dell'orbita è dato dall'equazione 16,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(1.06 \times 10^{-3}\ \text{A})}{2(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})} = 12.6\ \text{T}.$$

(*b*) Dall'equazione 36 del capitolo 34 con N (numero di spire) = 1, si ottiene

$$\mu = iA = (1.06 \times 10^{-3}\ \text{A})(\pi)(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})^2 = 9.31 \times 10^{-24}\ \text{A}\cdot\text{m}^2.$$

Esempio 3 La figura 8 mostra una striscia piatta di rame di larghezza a e di spessore trascurabile attraverso cui scorre una corrente i. Si determini il campo magnetico **B** in un punto P che si trova su di un asse di simmetria ortogonale, ad una distanza R dal centro della striscia.

Soluzione Dividiamo la striscia in striscioline di larghezza dx, ciascuna delle quali può essere trattata come un filo attraverso cui scorre una corrente $i(dx/a)$. Il contributo dB al campo nel punto P, per l'elemento evidenziato in figura 8, è dato dalla forma differenziale dell'equazione 11, o

$$dB = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i(dx/a)}{R\sec\theta},$$

in cui $r = R/\cos\theta = R\sec\theta$. Si noti che il vettore $d\mathbf{B}$ è perpendicolare alla linea indicata da r. Solo la sua componente orizzontale $dB\cos\theta$ ha una risultante non nulla; la componente verticale viene cancellata dal contributo della strisciolina simmetrica rispetto al centro della striscia (la seconda strisciolina evidenziata in figura 8). Perciò B nel punto P è dato dall'integrale (scalare)

$$B = \int dB\cos\theta = \int \frac{\mu_0 i(dx/a)}{2\pi R\sec\theta}\cos\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi aR}\int \frac{dx}{\sec^2\theta}.$$

Le variabili x e θ non sono indipendenti, essendo legate dalla relazione

$$x = R\tan\theta$$

o

$$dx = R\sec^2\theta\, d\theta.$$

I limiti su θ sono $\pm\alpha$, dove $\alpha = \tan^{-1}(a/2R)$. Sostituendo dx nell'espressione di B, si ottiene

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi aR}\int \frac{R\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\alpha = \frac{\mu_0 i}{\pi a}\tan^{-1}\frac{a}{2R}.$$

Questo è il risultato generale per il campo magnetico generato da una striscia. Per punti lontani dalla striscia, α è un angolo piccolo, per cui $\alpha \approx \tan\alpha = a/2R$. Si ottiene così il risultato approssimato,

$$B \approx \frac{\mu_0 i}{\pi a}\left(\frac{a}{2R}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{R}.$$

Questo risultato era prevedibile perché per punti lontani la striscia non è distinguibile da un filo (vedi eq. 11).

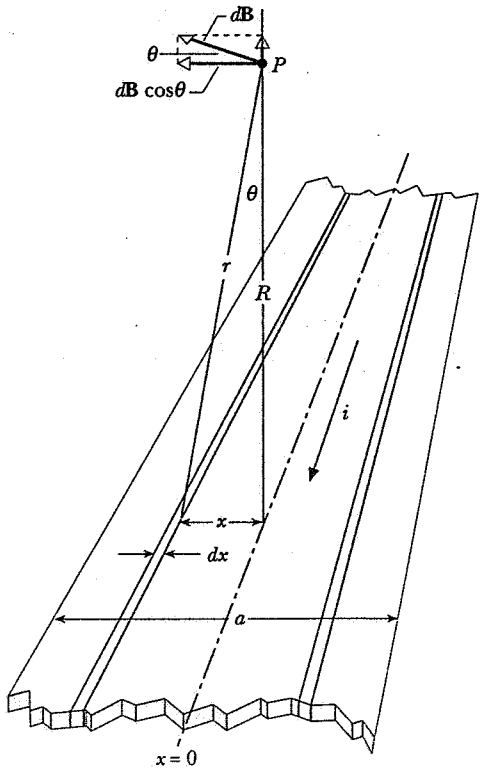


Figura 8 Esempio 3. Una striscia di larghezza a attraverso cui scorre una corrente i.

35-3 LINEE DI FORZA DI B

La figura 9 mostra le linee di forza che rappresentano il campo magnetico **B** in prossimità di un filo indefinito percorso da corrente. Si noti l'aumentare della distanza tra due linee successive all'aumentare della distanza dal filo. Ciò rappresenta la diminuzione di B come $1/r$ prevista dall'equazione 11.

La figura 10 mostra le linee di forza associate al campo magnetico generato da un filo indefinito orizzontale percorso da corrente ed immerso in un campo magnetico *esterno* uniforme $\mathbf{B}_e$ perpendicolare al filo e diretto verso sinistra. In ogni punto il campo magnetico risultante $\mathbf{B}_r$ è dato dalla somma vettoriale di $\mathbf{B}_e$ e $\mathbf{B}_i$ dove $\mathbf{B}_i$ è il campo magnetico generato dalla corren-

ISBN 88-408-0777-2

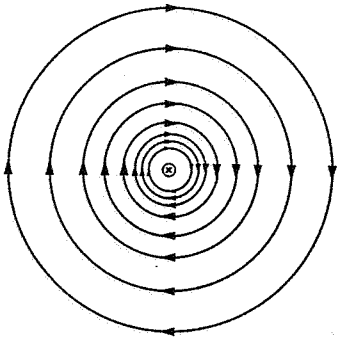


Figura 9 Le linee di forza del campo magnetico generato da un lungo filo rettilineo percorso da corrente sono circonferenze concentriche. Il loro verso è dato dalla regola della mano destra.

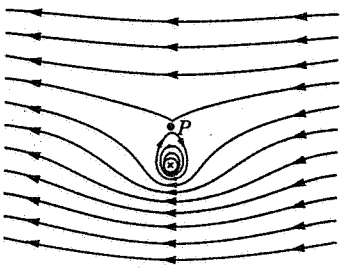


Figura 10 Un lungo filo rettilineo percorso da corrente in direzione perpendicolare alla pagina (con verso entrante) è immerso in un campo magnetico esterno uniforme. Le linee di forza del campo magnetico riportate si riferiscono al campo risultante dalla somma vettoriale del campo magnetico esterno e del campo magnetico generato dalla corrente che scorre nel filo.

te nel filo. I campi $\mathbf{B}_e$ e $\mathbf{B}_i$ tendono a cancellarsi sopra al filo e si rinforzano sotto al filo. Nel punto P in figura 10, $\mathbf{B}_e$ e $\mathbf{B}_i$ si cancellano esattamente e $\mathbf{B}_t = 0$. Molto vicino al filo, le linee di forza sono circolari e $\mathbf{B}_t \approx \mathbf{B}_i$.

Per Michael Faraday, che per primo ne espresse il concetto, le linee di forza del campo magnetico rappresentavano l'azione di forze meccaniche, un po' come nastri di gomma deformati. Usando l'interpretazione di Faraday, si può facilmente vedere che il filo della figura 10 è spinto verso l'alto dalla «tensione» delle linee di forza. Questo concetto è di limitata utilità, ed oggi si impiegano le linee di forza soprattutto a scopo di visualizzazione. Per i calcoli quantitativi si usano i campi vettoriali e si descriverebbe la forza che agisce sul filo di figura 10 usando la relazione $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$.

Applicando tale formula alla figura 10, ricordiamo che la forza che agisce sul filo è causata dal *campo esterno* in cui il filo è immerso, $\mathbf{B}_e$, che è diretto verso sinistra. Poiché $\mathbf{L}$ è entrante nel piano della figura, la forza magnetica che agisce sul filo ($= i\mathbf{L} \times \mathbf{B}_e$) è diretta verso l'alto. È importante usare solo il campo *esterno* nel calcolo perché il campo generato dalla corrente nel filo non può esercitare una forza sul filo stesso, proprio come il campo gravitazionale della terra non può esercitare una forza sulla terra stessa ma solo su un altro corpo. In figura 9, per esempio, il filo non è sottoposto ad alcuna forza magnetica perchè non ci sono campi esterni.

35-4 DUE CONDUTTORI PARALLELI

Poco dopo la scoperta di Oersted che un conduttore attraverso cui scorre una corrente deflette l'ago di una bussola, Ampère concluse che due conduttori di quel tipo si attirano con una forza di natura magnetica.

Analizziamo l'interazione magnetica di due correnti in modo simile alla nostra analisi dell'interazione elettrica tra due cariche:

$$\text{carica} \rightleftarrows \mathbf{E} \rightleftarrows \text{carica}.$$

Cioè una carica genera un campo elettrico e l'altra carica interagisce con il campo nella sua posizione. Usiamo una procedura analoga per l'interazione magnetica:

$$\text{corrente} \rightleftarrows \mathbf{B} \rightleftarrows \text{corrente}.$$

Ora una corrente genera un campo magnetico e l'altra corrente interagisce con il campo.

Il filo 1 in figura 11, attraverso cui scorre la corrente i_1, genera un campo magnetico $\mathbf{B}_1$ il cui modulo nella posizione del secondo filo è, usando l'equazione 11,

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}.$$

Usando la regola della mano destra si vede che il campo $\mathbf{B}_1$ nella posizione del filo 2 è diretto verso il basso, come mostrato in figura.

Il filo 2, attraverso il quale scorre una corrente i_2, può essere così considerato immerso in un campo ma-

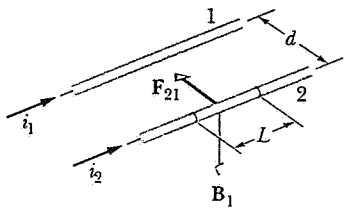


Figura 11 Due fili paralleli percorsi da corrente nello stesso verso si attraggono reciprocamente. Il campo $\mathbf{B}_1$ nella posizione del filo 2 è generato dalla corrente che scorre nel filo 1.

gnetico *esterno* $\mathbf{B}_1$. Un tratto di lunghezza L di questo filo è quindi sottoposto ad una forza magnetica laterale $\mathbf{F}_{21} = i_2 \mathbf{L} \times \mathbf{B}_1$ di intensità

$$F_{21} = i_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L i_1 i_2}{2\pi d}. \qquad (18)$$

La regola che stabilisce la direzione del prodotto vettore mostra che $\mathbf{F}_{21}$ giace nel piano dei fili ed è diretta verso il filo 1 in figura 11.

Avremmo potuto iniziare dal filo 2 calcolando il campo magnetico $\mathbf{B}_2$ da esso prodotto nella posizione del filo 1 e trovando quindi la forza $\mathbf{F}_{12}$ che agisce su un tratto di lunghezza L del filo 1 a causa del campo generato dal filo 2. Tale forza, per correnti parallele e dirette nello stesso verso, sarebbe stata diretta verso il filo 2 in figura 11. Le forze che due fili esercitano l'uno sull'altro sono uguali in modulo e di verso opposto; esse formano una coppia azione-reazione secondo la terza legge di Newton.

Se le correnti in figura 11 fossero state parallele ma dirette in versi opposti, le forze sui fili sarebbero state opposte: i fili si sarebbero respinti. La regola generale è:

Correnti parallele e concordi si attraggono, correnti parallele ma discordi si respingono.

Questa regola in un certo senso è opposta alla regola per le cariche elettriche, nel senso che correnti simili (parallele e concordi) si attraggono, cariche simili (stesso segno) si respingono.

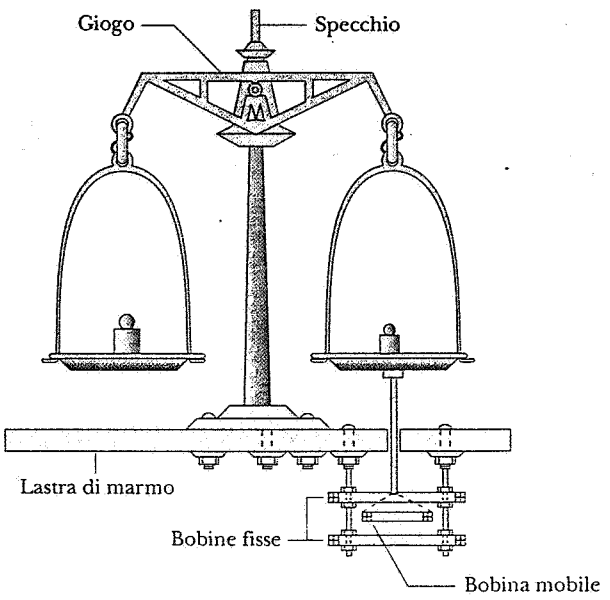


Figura 12 Una bilancia per correnti.

La forza tra fili paralleli indefiniti è usata per definire l'ampère. Dati due fili indefiniti, di sezione circolare trascurabile, distanti 1 m e nel vuoto, l'ampère è definito come quella corrente che scorrendo in ciascun filo provoca una forza di 2×10^{-7} newton per metro di lunghezza.

Misure dirette di corrente possono essere fatte con una bilancia per correnti, mostrata schematicamente in figura 12. Una bilancia per correnti è costituita da una bobina di filo accuratamente avvolto posta tra altre due bobine; le bobine esterne sono fissate ad un tavolo, mentre la bobina interna è appesa al braccio di una bilancia. Tutte e tre le bobine sono percorse dalla stessa corrente.

Proprio come i fili paralleli della figura 11, le bobine esercitano forze l'una sull'altra che possono essere misurate caricando pesi sul piatto della bilancia. La corrente si può determinare dalla forza così misurata e dalla geometria delle bobine. Questa configurazione, che impiega bobine è più pratica dei lunghi fili paralleli di figura 11. Le misure effettuate con la bilancia per correnti vengono usate per calibrare altri, più convenienti standard secondari per misurare correnti.

Esempio 4 Attraverso un filo lungo orizzontale fissato ad un supporto rigido scorre una corrente i_a di 96 A. Esattamente sopra di esso e ad esso parallelo c'è un filo sottile attraverso cui scorre una corrente i_b di 23 A e che pesa 0.073 N/m. A che distanza dal filo più basso deve essere posto questo secondo filo se lo si vuole sostenere per repulsione magnetica?

Soluzione Perché vi sia repulsione le due correnti devono essere di verso opposto. Perché vi sia equilibrio la forza magnetica per unità di lunghezza deve essere uguale al peso per unità di lunghezza e deve essere diretta in verso opposto. Ricavando d dall'equazione 18 si ottiene

$$d = \frac{\mu_0 i_a i_b}{2\pi (F/L)} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(96\ \mathrm{A})(23\ \mathrm{A})}{2\pi (0.073\ \mathrm{N/m})}$$
$$= 6.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 6.0\ \mathrm{mm}.$$

Assumiamo che il diametro dei fili sia molto minore della distanza che li separa. Questa ipotesi è necessaria perché nel ricavare l'equazione 18 abbiamo tacitamente supposto che il campo magnetico generato da un filo fosse omogeneo in tutti i punti dell'altro filo.

L'equilibrio del filo sospeso è stabile o instabile rispetto a spostamenti verticali? Ciò può essere esaminato spostando verticalmente il filo ed esaminando come cambiano le forze che su di esso agiscono. L'equilibrio è stabile o instabile rispetto a spostamenti orizzontali?

Supponiamo ora che il filo sia posto sotto al filo fissato rigidamente. Come si può fare a sostenerlo? L'equilibrio è stabile o instabile rispetto a spostamenti verticali? E rispetto a spostamenti orizzontali?

ISBN 88-408-0777-2

35-5 LA LEGGE DI AMPÈRE

La legge di Coulomb può essere considerata una legge fondamentale dell'elettrostatica; la si può usare per calcolare il campo elettrico prodotto da una qualsiasi distribuzione di carica. Nel capitolo 29, tuttavia, abbiamo visto che la legge di Gauss permette di risolvere una certa classe di problemi, quelli con un elevato grado di simmetria, con facilità ed eleganza. Inoltre abbiamo mostrato che la legge di Gauss conteneva in sé stessa la legge di Coulomb per una carica puntiforme. La legge di Gauss è considerata più fondamentale della legge di Coulomb, e la legge di Gauss è una delle quattro equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo (le equazioni di Maxwell).

La situazione è analoga per quanto riguarda il magnetismo. Usando la legge di Biot-Savart, si può calcolare il campo magnetico prodotto da una qualsiasi distribuzione di corrente, esattamente come abbiamo usato l'equazione 2 (che è equivalente alla legge di Coulomb) per calcolare il campo elettrico generato da una qualsiasi distribuzione di carica. Un approccio più fondamentale ai campi magnetici usa una legge che (come la legge di Gauss per i campi elettrici) sfrutta le simmetrie presenti in certi problemi per semplificare il calcolo di **B**. Questa legge è considerata più fondamentale della legge di Biot-Savart e porta ad un'altra delle equazioni di Maxwell.

Questo nuovo risultato è detto *legge di Ampère* e si esprime

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i. \tag{19}$$

Si ricorderà che, usando la legge di Gauss, si è dapprima costruita una superficie chiusa immaginaria (una superficie gaussiana) che racchiudeva una certa quantità di carica. Usando la legge di Ampère costruiamo dapprima una curva chiusa immaginaria (detta *spira amperiana*), come indicato in figura 13. Il primo membro dell'equazione 19 ci dice di dividere tale curva in segmentini di lunghezza ds. Muovendoci lungo la curva (il verso in cui ci muoviamo determina il verso di ds), calcoliamo la quantità $\mathbf{B} \cdot ds$ e sommiamo (integriamo) tutti questi contributi lungo la spira.

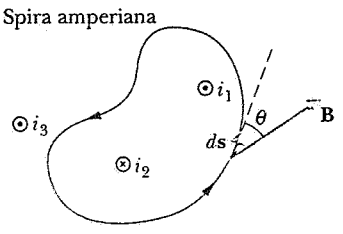


Figura 13 Legge di Ampère applicata ad un cammino arbitrario che concatena due fili ma esclude il terzo. Si notino le direzioni delle correnti.

L'integrale al primo membro della 19 è detto *integrale di linea*. (Abbiamo usato in precedenza gli integrali di linea nel capitolo 7 per calcolare il lavoro e nel capitolo 30 per calcolare le differenze di potenziale.) Il cerchio sovrimpresso al segno di integrale ci ricorda che l'integrale di linea deve essere valutato su un cammino *chiuso*. Detto θ l'angolo tra ds e **B**, l'integrale di linea si può scrivere

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B\, ds \cos\theta. \tag{20}$$

Il secondo membro dell'equazione 19 è la corrente totale «concatenata» con la spira; cioè, è la corrente totale trasportata da fili che attraversano la superficie delimitata dalla spira*. Come per le cariche nel caso della legge di Gauss, le correnti «esterne» alla spira non sono comprese. La figura 13 mostra tre fili percorsi da corrente. Il campo magnetico **B** è generato dalle correnti in tutti i fili. Tuttavia, nel calcolo del secondo membro dell'equazione 19, teniamo conto solo delle correnti i_1 e i_2, perché il filo attraverso cui scorre i_3 non attraversa la superficie racchiusa dalla spira. I due fili che attraversano la spira trasportano correnti in versi opposti. Per assegnare il segno alle correnti si usa la regola della mano destra: con le dita della mano destra nella direzione di percorrenza della spira, le correnti nella direzione del pollice (come i_1) vengono considerate positive, mentre le correnti in direzione opposta (come i_2) vengono considerate negative. La corrente netta i nel caso della figura 13 è quindi $i = i_1 - i_2$.

Il campo magnetico **B** sulla spira e nel suo interno dipende certamente anche da i_3; tuttavia, l'integrale di $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ lungo la spira *non* dipende dalle correnti, come i_3, che non attraversano la superficie racchiusa dalla spira. Ciò è ragionevole perché $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ per il campo generato da i_1 o i_2 ha sempre lo stesso segno quando ci si muove lungo la spira; $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ per il campo generato da i_3, invece, cambia segno lungo il cammino di integrazione e contributi positivi e negativi si cancellano esattamente.

Si noti che il fatto di includere nella legge di Biot-Savart la costante arbitraria 4π riduce la costante che compare nella legge di Ampère semplicemente a μ_0. (Una semplificazione analoga la si era ottenuta per la

* Questa definizione è univoca nel caso di una spira piana ed intendendo come superficie delimitata dalla spira la porzione di piano corrispondente. Nel caso di una spira non piana esistono infinite superfici che hanno come contorno la spira. Si può comunque dimostrare che la superficie in questione può essere una qualsiasi. [N.d.T.]

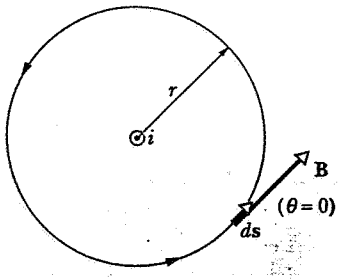


Figura 14 Una spira amperiana circolare viene usata per determinare il campo magnetico generato da un filo rettilineo infinito. Il filo è perpendicolare alla pagina e il verso della corrente è uscente dalla pagina.

legge di Gauss includendo la costante 4π nella legge di Coulomb.)

È stato possibile utilizzare la legge di Gauss per calcolare campi elettrici solo in casi con elevato grado di simmetria. In tali casi si è dedotto che E fosse costante e potesse quindi essere fattorizzato nell'integrale. Scegliamo le spire amperiane in maniera simile, cioè tali che B sia costante e che possa quindi essere portato fuori dall'integrale.

Per chiarire il concetto, usiamo la legge di Ampère per calcolare il campo magnetico ad una distanza r da un filo rettilineo infinitamente lungo percorso da corrente, un problema che abbiamo già risolto usando la legge di Biot-Savart. Come illustrato in figura 14, scegliamo come spira amperiana un cerchio di raggio r. Per motivi di simmetria, B può dipendere unicamente da r (e non, per esempio, dalla coordinata angolare). Scegliendo un cammino di integrazione che sia a distanza costante dal filo, sappiamo che B è costante lungo il percorso.

Sappiamo dagli esperimenti di Oersted che **B** ha solo componente tangenziale. L'angolo θ è quindi zero, e l'integrale di linea diventa

$$\oint B\, ds \cos\theta = B \oint ds = B(2\pi r).$$

Si noti che l'integrale di ds lungo il cammino di integrazione è semplicemente la lunghezza del percorso, o $2\pi r$ nel caso di una circonferenza. Il secondo membro della legge di Ampère è semplicemente $\mu_0 i$ (presa positiva, in accordo con la regola della mano destra). La legge di Ampère porta quindi a

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

ovvero

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

Questa è identica alla equazione 11, che avevamo ottenuto (con molta più fatica) usando la legge di Biot-Savart.

Esempio 5 Si derivi un'espressione per **B** ad una distanza r dal centro di un filo cilindrico lungo di raggio R con $r < R$. Nel filo scorra una corrente i distribuita uniformemente sulla sezione del filo.

Soluzione In figura 15 è mostrata una spira amperiana all'interno del filo. Motivi di simmetria suggeriscono che **B** sia costante in modulo lungo la spira e tangente ad essa. Dalla legge di Ampère si ricava

$$B(2\pi r) = \mu_0 i \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

dove il secondo membro comprende solo la corrente che attraversa la superficie racchiusa dal cammino di integrazione. Ricavando B si ottiene

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R^2}.$$

Sulla superficie del filo ($r = R$) questa equazione si riduce all'espressione che si ottiene mettendo $r = R$ nella equazione 11 ($B = \mu_0 i/2\pi R$). Cioè entrambe le espressioni portano allo stesso risultato per il campo alla superficie del filo. La figura 16 mostra la dipendenza di B da r all'interno ed all'esterno del filo.

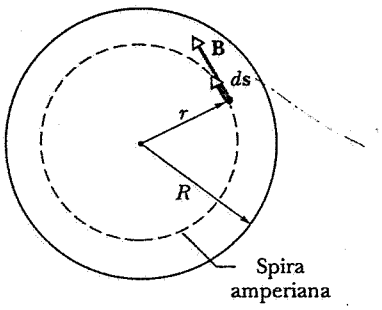


Figura 15 Esempio 5. Un lungo filo rettilineo attraverso cui scorre una corrente in verso uscente dalla pagina e distribuita in modo uniforme sulla sezione circolare. Una spira amperiana circolare è tracciata all'interno del filo.

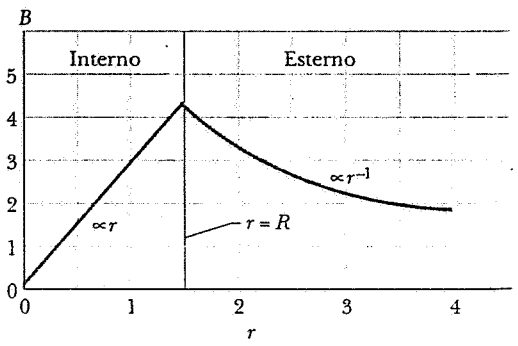


Figura 16 Andamento qualitativo del campo magnetico per il filo di figura 15. Si noti che il massimo si trova sulla superficie del filo.

ISBN 88-408-0777-2

35-6 SOLENOIDI E TOROIDI

Due tipi di dispositivi pratici basati su avvolgimenti di spire di corrente sono i *solenoidi* e i *toroidi*. I solenoidi vengono spesso impiegati per generare un campo magnetico uniforme, proprio come un condensatore a piatti paralleli viene usato per generare un campo elettrico uniforme. Nei campanelli e negli altoparlanti, è spesso un solenoide a generare il campo magnetico che accelera un materiale magnetico. Per generare campi magnetici elevati vengono usati anche i toroidi.

Solenoidi

Un solenoide è un lungo filo avvolto a forma di una fitta elica cilindrica e percorso da una corrente i. Assumiamo che l'elica sia molto lunga rispetto al suo diametro. Qual'è il campo magnetico **B** generato dal solenoide?

In figura 17 è riportata, a scopo puramente illustrativo, una sezione di un solenoide «stirato». Per punti vicini ad una singola spira del solenoide, l'osservatore non è conscio che il filo è curvo. Il filo si comporta, dal punto di vista magnetico, circa come se fosse un filo rettilineo infinitamente lungo e le linee di forza di **B** generate dalla spira considerata sono circa dei centri concentrici.

Il campo del solenoide è dato dalla somma vettoriale dei campi generati da tutte le spire che lo compongono. La figura 17 suggerisce che il campo tenda ad annullarsi tra fili adiacenti. Suggerisce inoltre che, in punti interni al solenoide e sufficientemente lontani dai fili, **B** sia parallelo all'asse del solenoide. Nel caso limite di fili a sezione quadrata e avvolti fittamente, il solenoide diviene una superficie cilindrica percorsa da corrente e motivi di simmetria rendono rigorosamente vero il fatto che **B** sia parallelo all'asse del solenoide. Nel seguito supporremo di essere in questo caso.

Per punti come P in figura 17 il campo generato dalla parte superiore delle spire del solenoide (indicata con $\odot$ perché uscente dalla pagina) è diretto verso sinistra e tende a cancellarsi con il campo generato dalla parte inferiore delle spire del solenoide (indicata con $\otimes$ perché la corrente è entrante) che è diretto verso destra. Al tendere del solenoide verso la idealità, cioè, al tendere di esso verso la configurazione di superficie cilindrica infinitamente lunga percorsa da corrente il campo **B** in punti esterni tende a zero. Considerare nullo il campo esterno è una buona approssimazione per un solenoide reale se la sua lunghezza è molto maggiore del suo diametro e se si considerano solo punti esterni nella regione centrale del solenoide, ovvero lontano dagli estremi. In figura 18 sono riportate le linee di forza di **B** per un solenoide reale, lontano dalla idealità in quanto la lunghezza non è molto maggiore del diametro. Persino in questo caso la densità di linee di forza nel piano centrale mostra che il campo esterno è molto più debole del campo interno.

Applichiamo la legge di Ampère

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i,$$

al cammino rettangolare *abcd* nel solenoide ideale di figura 19. Scriviamo l'integrale come la somma di quattro integrali, uno per ogni lato del rettangolo:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_c^d \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_d^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \tag{21}$$

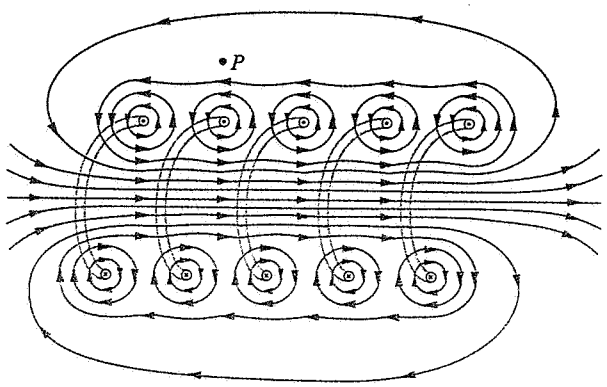


Figura 17 Linee di forza del campo magnetico di un solenoide «stirato» per rappresentarlo in modo più chiaro.

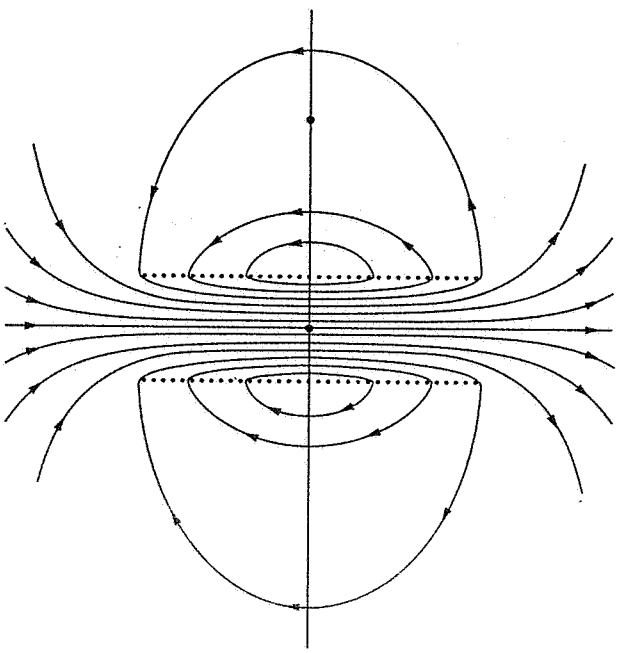


Figura 18 Linee di forza del campo magnetico per un solenoide di lunghezza finita. Si noti che il campo è più intenso all'interno che all'esterno (le linee di forza sono più fitte).

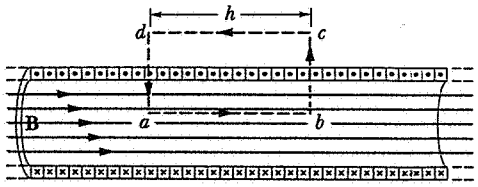


Figura 19 Una spira amperiana (il rettangolo *abcd*) usata per calcolare il campo di questo lungo solenoide ideale.

Il primo integrale al secondo membro è Bh, dove B è il modulo di **B** all'interno del solenoide e h è la lunghezza arbitraria del percorso di integrazione da a a b. Si noti che il cammino ab, benché parallelo all'asse del solenoide, non deve necessariamente coincidere con esso. Si troverà che B all'interno del solenoide è costante su tutta la sezione e indipendente dalla distanza dall'asse (come suggerito dall'equispaziatura delle linee di forza di **B** in figura 18 vicino al centro del solenoide).

Il secondo e il quarto integrale nell'equazione 21 sono nulli perché o **B** è perpendicolare al cammino di integrazione (per i punti all'interno del solenoide) o è nullo (per punti esterni). In entrambi i casi $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ è nullo, e di conseguenza l'integrale è a sua volta nullo. Il terzo integrale, quello sul lato del rettangolo esterno al solenoide, è nullo perché abbiamo assunto **B** nullo per punti esterni ad un solenoide ideale.

Su tutto il cammino di integrazione, l'integrale vale Bh. La corrente totale i che attraversa la spira amperiana non è la corrente i_0 che scorre nel solenoide perché l'avvolgimento attraversa il cammino di integrazione più di una volta. Sia n il numero di spire del solenoide per unità di lunghezza; la corrente totale, uscente dalla pagina in figura 19, che attraversa la spira amperiana è

$$i = i_0 n h.$$

La legge di Ampère diventa allora

$$Bh = \mu_0 i_0 n h$$

ovvero

$$B = \mu_0 i_0 n \qquad (22)$$

L'equazione 22 mostra che il campo magnetico all'interno di un solenoide dipende solo dalla corrente i_0 e dal numero di spire per unità di lunghezza n.

Sebbene l'equazione 22 sia stata ricavata per un solenoide ideale infinitamente lungo, vale piuttosto bene anche per punti interni vicini al centro di solenoidi reali. Per un solenoide ideale, l'equazione 22 suggerisce che B non dipenda dal diametro né dalla lunghezza del solenoide e che B sia costante su tutta la sezione del solenoide. Un solenoide è un dispositivo semplice che permette di creare un campo magnetico uniforme.

Toroidi

In figura 20 è rappresentato un toroide, che può essere considerato come un solenoide piegato a forma di ciambella. Calcoliamo il campo magnetico all'interno usando la legge di Ampère e alcune considerazioni sulla simmetria.

Per motivi di simmetria, le linee di forza di **B** formano cerchi concentrici all'interno del toroide, come mostrato in figura. Si scelga come spira amperiana un cerchio di raggio r concentrico con il toroide e lo si percorra in senso orario. Dalla legge di Ampère si ottiene

$$B(2\pi r) = \mu_0 i_0 N,$$

dove i_0 è la corrente che scorre nelle spire del toroide ed N è il numero totale di spire. Da ciò si ottiene

$$B = \frac{\mu_0 i_0 N}{2\pi r}. \qquad (23)$$

Diversamente da quanto avviene nel caso del solenoide, B non è costante sulla sezione del toroide. Il lettore, usando la legge di Ampère, mostri che $B = 0$ all'esterno di un toroide ideale.

Un esame più approfondito dell'equazione 23 giustifica la nostra precedente affermazione che «un toroide è un solenoide piegato a forma di ciambella». Il denominatore nell'equazione 23, $2\pi r$, è la circonferenza centrale del toroide, e $N/2\pi r$ è proprio n, il numero di spire per unità di lunghezza. Con queste sostituzioni, l'equazione 23 si riduce a $B = \mu_0 i_0 n$, che è l'espressione del campo magnetico nella regione centrale di un solenoide. La direzione del campo magnetico all'interno di un toroide (o di un solenoide) segue la regola della mano destra: chiudendo le dita nel verso della corrente, il pollice indica il verso del campo magnetico.

Sui toroidi è basato il *tokamak*, un'apparecchiatura impiegata per studiare la fusione nucleare; ne discuteremo il funzionamento nel capitolo 55.

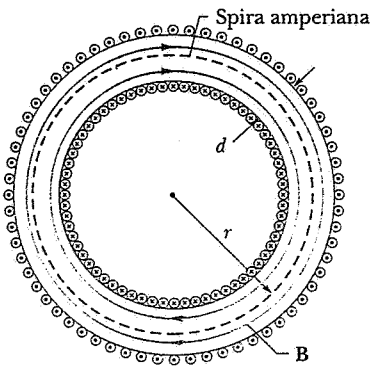


Figura 20 Un toroide. Il campo interno si può determinare usando la spira amperiana mostrata.

ISBN 88-408-0777-2

Esempio 6 Si consideri un solenoide di lunghezza $L = 1.23$ m e di diametro interno $d = 3.55$ cm. Il solenoide sia composto da cinque strati di 850 spire l'uno e vi scorra una corrente $i_0 = 5.57$ A. Si calcoli il campo magnetico B al centro del solenoide.

Soluzione Usando l'equazione 22 si ottiene

$$B = \mu_0 i_0 n = (4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(5.57\ \text{A})\left(\frac{5 \times 850\ \text{spire}}{1.23\ \text{m}}\right)$$
$$= 2.42 \times 10^{-2}\ \text{T} = 24.2\ \text{mT}.$$

Si noti che l'equazione 22 può essere usata anche se il solenoide è avvolto in più strati perché l'espressione di B non dipende dal diametro delle spire.

Il campo esterno ad un solenoide *(Facoltativo)*

Abbiamo finora trascurato il campo esterno ad un solenoide, ma persino per un solenoide ideale, il campo in punti esterni agli avvolgimenti non è veramente nullo. In figura 21 è mostrato un cammino amperiano a forma di cerchio di raggio r. Poiché l'avvolgimento del solenoide è un'elica cilindrica una spira dell'avvolgimento attraversa la superficie delimitata dal cammino amperiano. Il prodotto $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ per questo cammino dipende dalla componente tangenziale del campo B_t, sicché dalla legge di Ampère si ottiene

$$B_t(2\pi r) = \mu_0 i_0$$

ossia

$$B_t = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r}, \tag{24}$$

che è lo stesso campo (in modulo e direzione e verso) che sarebbe generato da un filo rettilineo. Si noti che l'avvolgimento illustrato in figura 21, oltre a trasportare la corrente attorno alla superficie del solenoide, trasporta corrente da sinistra a destra e in questo senso si comporta come un filo rettilineo per punti esterni al solenoide.

Il campo tangenziale è molto minore del campo interno (eq. 22), come si può vedere considerando il rapporto

$$\frac{B_t}{B} = \frac{\mu_0 i_0/2\pi r}{\mu_0 i_0 n} = \frac{1}{2\pi r n}.$$

Supponiamo che il solenoide sia costituito da un solo strato di avvolgimenti in cui le spire sono una a contatto con l'altra, come in figura 19. Ogni intervallo di lunghezza del solenoide di lunghezza pari al diametro D del filo contiene una spira, sicché il numero di spire per unità di lunghezza n è uguale a $1/D$. Il rapporto diviene allora

$$\frac{B_t}{B} = \frac{D}{2\pi r}. \tag{25}$$

Per un filo tipico, $D = 0.1$ mm. La distanza r per un punto esterno deve essere maggiore o uguale al raggio del solenoide, diciamo qualche centimetro. Così $B_t/B \leq 0.001$, e il campo tangenziale esterno è quindi trascurabile rispetto al campo interno lungo l'asse. Siamo perciò tranquilli quando trascuriamo il campo esterno.

Tracciando un cerchio amperiano di raggio minore del raggio del solenoide, il lettore dimostri che il campo interno del solenoide ha componente tangenziale nulla. ■

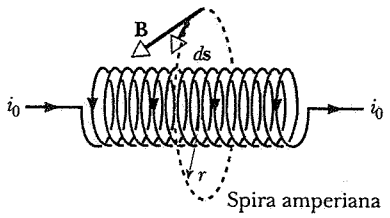


Figura 21 Una spira amperiana circolare è usata per determinare il campo magnetico tangenziale all'esterno di un solenoide.

35-7 ELETTROMAGNETISMO E SISTEMI DI RIFERIMENTO *(Facoltativo)*

In figura 22*a* è illustrata una particella di carica q positiva a riposo vicino ad un filo rettilineo infinito percorso da una corrente i. Osserviamo la situazione in un sistema di riferimento S in cui il filo è a riposo. All'interno del filo ci sono elettroni che si muovono con velocità di deriva v_d e ioni positivi a riposo. In un qualunque tratto di filo vi sono un ugual numero di cariche ioniche e di elettroni, e la carica netta è nulla. Gli elettroni possono essere considerati ad ogni istante come una distribuzione di carica lineare, che genera nella posizione di q un campo elettrico dato dalla equazione 33 del capitolo 28:

$$E = \frac{\lambda_-}{2\pi\epsilon_0 r},$$

dove λ_- è la densità lineare di carica degli elettroni (una quantità negativa in questo caso). Anche gli ioni generano un campo elet-

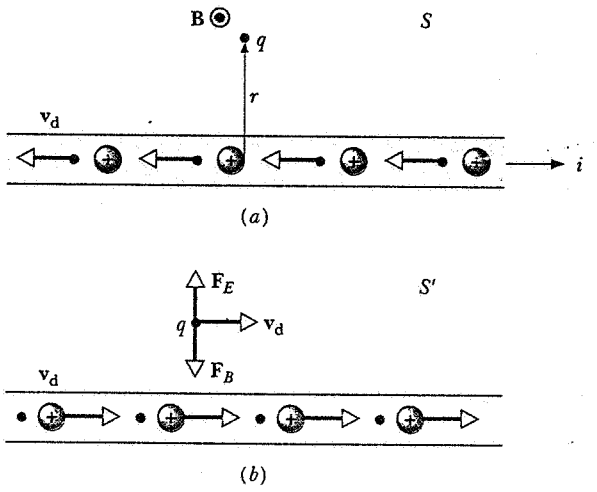


Figura 22 (*a*) Una particella di carica q è a riposo in equilibrio accanto ad un filo percorso da una corrente i. La situazione è vista in un sistema di riferimento S a riposo rispetto alla particella. (*b*) La stessa situazione osservata in un sistema di riferimento S' che si muove con la velocità di deriva degli elettroni nel filo. La particella è in equilibrio dinamico anche in questo sistema di riferimento in cui è sottoposta alle forze $\mathbf{F}_B$ e $\mathbf{F}_E$.

trico dato da un'espressione simile, che dipende dalla loro densità lineare di carica λ_+. Poiché le densità di carica sono uguali in modulo ed opposte in segno, $\lambda_+ + \lambda_- = 0$, il campo elettrico che agisce sulla particella è nullo.

Nella posizione della particella c'è un campo magnetico non nullo, ma poiché la particella è a riposo la forza magnetica è nulla. Perciò la particella, in questo sistema di riferimento, non è sottoposta a forze di natura elettromagnetica.

Ora consideriamo la situazione dal punto di vista di un sistema di riferimento S' in moto con velocità v_d (la velocità di deriva degli elettroni) parallela alla direzione del filo. In figura 22*b* è schematizzata questa situazione in cui gli elettroni sono a riposo e gli ioni si muovono verso destra con velocità v_d. Chiaramente in questo caso, essendo in moto, la particella è sottoposta ad una forza magnetica $\mathbf{F}_B$, come mostrato in figura.

Osservatori in diversi sistemi di riferimento inerziali devono essere d'accordo che se non c'è accelerazione nel sistema di riferimento S, non ci deve essere neanche in S'. La particella, quindi, non deve essere sottoposta a forze in S', e quindi deve esserci un'altra forza, oltre a $\mathbf{F}_B$, che agisce su di essa perché si abbia una risultante nulla.

Questa ulteriore forza che agisce in S' deve essere di natura elettrica. Consideriamo in figura 22*a* un tratto di lunghezza L del filo. Possiamo considerare questo tratto di filo composto da due regoli, un regolo carico positivamente a riposo (gli ioni) ed uno carico negativamente in moto (gli elettroni). I due regoli hanno la stessa lunghezza (in S) e contengono lo stesso numero di cariche. Quando trasformiamo questi regoli in S', troviamo che il regolo carico negativamente ha una lunghezza maggiore in S'. In S, questo regolo in moto ha la sua *lunghezza contratta*, in accordo con l'effetto di contrazione relativistica delle lunghezze che abbiamo considerato nel paragrafo 21-3. In S' è a riposo ed ha la sua *lunghezza propria*, che è maggiore della lunghezza contratta in S. La densità lineare di carica negativa λ'_- in S' è minore in modulo di quella in S (cioè $|\lambda'_-| < |\lambda_-|$), perché la stessa quantità di carica è distribuita su una lunghezza maggiore in S'.

Per le cariche positive, la situazione è opposta. In S, le cariche positive, sono a riposo e il regolo carico positivamente ha la sua lunghezza propria. In S', è in moto e la sua lunghezza è contratta. La densità lineare di carica positiva λ'_+ in S' è maggiore che in S ($\lambda'_+ > \lambda_+$), perché la stessa quantità di carica è distribuita su una lunghezza minore. Perciò abbiamo le seguenti relazioni per le densità di carica:

$$\text{in } S: \qquad \lambda_+ = |\lambda_-|,$$

$$\text{in } S': \qquad \lambda'_+ > |\lambda'_-|.$$

La carica q è sottoposta ai campi elettrici generati dalle due distribuzioni di carica. In S', questi campi non si cancellano perché le densità di carica sono diverse. Il campo elettrico nella posizione di q in S' perciò è dovuto ad una densità di carica netta positiva e q è respinta dal filo. La forza elettrica $\mathbf{F}_E$ su q, quindi, si oppone alla forza magnetica $\mathbf{F}_B$, come mostrato in figura 22*b*. Un calcolo dettagliato* mostra che la forza elettrica che ne risulta è uguale in modulo ed opposta in verso alla forza magnetica e che la forza netta in S' è nulla. Così la particella non è accelerata in nessuno dei due sistemi di riferimento. Possiamo estendere questo risultato a situazioni diverse dal caso particolare in cui S' si muove con velocità v_d rispetto ad S. In altri sistemi di riferimento, la forza elettrica e la forza magnetica avranno valori diversi dai loro valori in S'; tuttavia, in ogni sistema di riferimento esse sono uguali in modulo ed opposte in verso e la forza netta sulla particella è nulla in *ogni* sistema di riferimento.

Questo è un risultato notevole. Secondo la relatività speciale campi elettrici e magnetici non hanno esistenza separata. Un campo puramente elettrico o puramente magnetico in un sistema di riferimento ha sia componenti elettriche che componenti magnetiche in un altro sistema di riferimento. Usando le equazioni di trasformazione relativistiche, possiamo facilmente passare da un sistema all'altro e possiamo spesso risolvere problemi complicati scegliendo un sistema di riferimento in cui i campi hanno una forma più semplice e trasformando il risultato nel sistema di riferimento originale. La relatività speciale può essere molto utile per risolvere certi problemi, perché può risultare più semplice usare le tecniche relativistiche rispetto alle tecniche classiche.

In linguaggio matematico diciamo che le equazioni dell'elettromagnetismo (le equazioni di Maxwell) sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Si ricordi la discussione fatta nel paragrafo 3-6 riguardo alle leggi fisiche invarianti: abbiamo scritto la legge in un sistema di riferimento, l'abbiamo trasformata in un altro sistema di riferimento ed abbiamo ottenuto una legge con la stessa forma matematica. Per esempio la legge di Gauss, una delle quattro equazioni di Maxwell, ha esattamente la stessa forma in ogni sistema di riferimento.

Le parole di Einstein sono chiare e precise: «La forza che agisce su un corpo in un campo magnetico non è nient'altro che un campo elettrico.» (In effetti l'articolo originale di Einstein del 1905, in cui sono state presentate per la prima volta le idee della relatività speciale, era intitolato «Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento.») In questo contesto possiamo considerare il magnetismo come un effetto relativistico, che dipende dalla velocità della carica rispetto all'osservatore. Tuttavia, diversamente da altri effetti relativistici, ha conseguenze osservabili anche a velocità molto minori di quella della luce. ■

* Vedi, per esempio, R. Resnick, *Introduzione alla relatività ristretta*, Casa Editrice Ambrosiana, capitolo 4.

DOMANDE

1. Un fascio di protoni da 20 MeV viene estratto da un ciclotrone. Queste particelle generano un campo magnetico?
2. Si discutano analogie e differenze tra la legge di Coulomb e la legge di Biot-Savart.
3. Si consideri una linea di flusso di campo magnetico. Il modulo di B è costante o varia lungo la linea? Si dia un esempio per ogni caso.
4. In elettronica, fili che portano correnti uguali ma in versi opposti sono spesso attorcigliati l'uno attorno all'altro per ridurre la loro influenza magnetica in punti lontani. Perché questo metodo funziona?
5. Si considerino due cariche, in un primo caso (*a*) dello stesso

ISBN 88-408-0777-2

segno e in un secondo caso (*b*) di segni opposti, che si muovono con uguale velocità su percorsi paralleli. Si confrontino le direzioni delle forze elettriche e magnetiche nei due casi.

6. Esistono metodi alternativi al movimento di cariche, per generare un campo magnetico?
7. Descrivere dettagliatamente tre modi in cui si può misurare il campo magnetico **B** in un punto P a distanza r da un filo rettilineo infinitamente lungo percorso da una corrente i.
   Si basino i tre metodi su (*a*) la traiettoria di una carica q che passi dal punto P con velocità **v** parallela al filo; (*b*) la forza per unità di lunghezza esercitata su di un secondo filo passante per P parallelo al primo e percorso da una corrente i'; (*c*) il momento a cui è sottoposto un dipolo magnetico in P.
8. Come si può misurare il momento di dipolo magnetico dell'ago di una bussola?
9. Una spira circolare di filo giace sul pavimento della stanza in cui vi trovate. Attraverso essa scorre una corrente costante i in senso orario guardando la spira dall'alto. Quali sono direzione e verso del momento di dipolo magnetico di questa spira?
10. **B** è uniforme per tutti i punti all'interno di una spira circolare percorsa da corrente? Spiegare.
11. Spiegare la relazione tra la figura 10 e l'equazione $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$.
12. Due fili rettilinei infiniti paralleli sono percorsi dalla stessa corrente i, nello stesso verso. Disegnare approssimativamente le linee di flusso del campo magnetico risultante **B**.
    La figura suggerisce un'attrazione tra i fili?
13. Attraverso una molla, alla cui estremità inferiore è appeso un peso, viene fatta scorrere una corrente i.
    Cosa accade?
14. L'equazione 11 ($B = \mu_0 i/2\pi R$) suggerisce che ci sia un grande campo magnetico in punti vicini ad un filo percorso da corrente. Dato che ci sono una corrente i ed un campo magnetico **B**, perché non c'è una forza sul filo stesso in accordo con l'equazione $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$?
15. Due fili rettilinei infiniti passano uno accanto all'altro ad angolo retto. Se i fili sono liberi di muoversi, cosa accade quando attraverso di essi si fa scorrere una corrente?
16. Due fili fissati passano uno accanto all'altro, senza toccarsi, ad angolo retto, come mostrato in figura 23. Essi sono percorsi dalla stessa corrente i nelle direzioni indicate. In quale/i regione/i ci saranno dei punti in cui il campo magnetico è nullo?

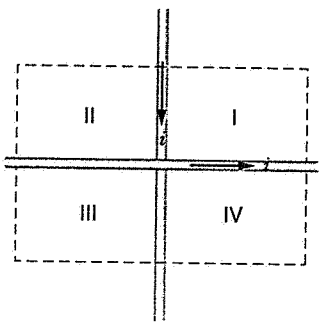


Figura 23 Domanda 16.

17. Una spira di filo flessibile di forma irregolare è appoggiata su un piano senza attrito e fissata nei punti a e b, come mostrato in figura 24. Se ora facciamo scorrere una corrente i attraverso il filo, esso cercherà di formare una spira circolare o di racchiudersi ulteriormente?

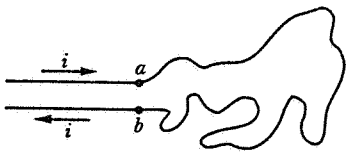


Figura 24 Domanda 17.

18. Il cammino di integrazione lungo il quale applichiamo la legge di Ampère può passare attraverso un conduttore?
19. Consideriamo un cammino di integrazione attorno ad un cavo che contiene 12 fili percorsi ciascuno da una corrente diversa (alcune in direzioni opposte). Come si calcola i nella legge di Ampère?
20. Applicare qualitativamente la legge di Ampère ai tre percorsi di figura 25.

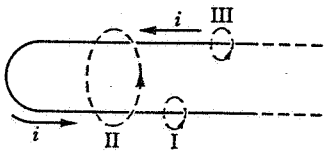


Figura 25 Domanda 20.

21. Discutere analogie e differenze tra la legge di Gauss e la legge di Ampère.
22. Sono sufficienti le motivazioni di simmetria per dire che le linee di flusso di B attorno a un filo rettilineo infinitamente lungo sono dei cerchi concentrici?
23. Si consideri un tubo di rame infinitamente lungo percorso da una corrente i.
    C'è campo magnetico all'interno? E all'esterno?
24. Si consideri un conduttore a sezione quadrata infinitamente lungo al cui interno sia ricavata una cavità coassiale, sempre a sezione quadrata. Vi sia una corrente distribuita uniformemente sulla sezione del conduttore. Il campo magnetico all'interno della cavità è nullo? Giustificare la risposta.
25. Si cosideri un filo rettilineo infinito di raggio R percorso da una corrente i.
    In che modo il campo magnetico generato dipende da R? Considerare sia la regione interna che quella esterna al conduttore.
26. Si consideri un filo rettilineo percorso da una corrente i. Cosa dice la legge di Ampère per (*a*) un cammino di integrazione che racchiuda il filo ma non sia circolare, (*b*) un cammino di integrazione che non racchiuda il filo, (*c*) un cammino di integrazione che racchiuda il filo ma che non giaccia su un piano?
27. Si considerino due solenoidi coassiali, come in figura 26. Attraverso di essi scorra la stessa corrente, ma in direzioni opposte. Se non c'è campo magnetico all'interno del solenoide interno, cosa si può dire riguardo a n, il numero di spire per unità di lunghezza dei due solenoidi? Quale dei due è maggiore, sempre che uno lo sia?

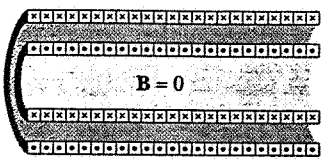


Figura 26 Domanda 27.

28. Il campo magnetico al centro di una spira circolare di corrente ha modulo $B = \mu_0 i/2R$ (vedi eq. 16). Il campo *elettrico* al centro di un anello uniformemente carico, invece, è *nullo*. Perché questa differenza?
29. Si consideri un circuito a forma di cubo, come quello di figura 27, attraverso cui scorra una corrente i. Usando argomenti di simmetria, si dimostri che il campo magnetico nel centro è nullo.
30. Come esercizio di rappresentazione vettoriale, si confronti la figura 16 del capitolo 18, che riguarda il flusso di un fluido, con la figura 9 di questo capitolo, che riguarda il campo magnetico. Quali analogie si possono trovare?

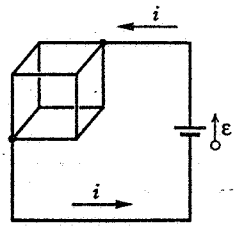


Figura 27 Domanda 29.

31. L'equazione 22 ($B = \mu_0 i_0 n$) vale anche per un solenoide di sezione quadrata?
32. Un toroide è descritto come un solenoide piegato a forma di ciambella. Il campo magnetico all'esterno di un solenoide, non è nullo. Cosa si può dire dell'intensità del campo magnetico all'esterno di un toroide ideale?
33. La corrente che scorre in un filo è costituita dalla deriva di elettroni e a questa corrente è associato un campo magnetico. Che corrente e che campo magnetico misurerebbe un osservatore che si muovesse con velocità uguale alla velocità di deriva degli elettroni?

PROBLEMI

Paragrafo 35-2 Applicazioni della legge di Biot-Savart

1. Un filo scoperto di rame #10 (2.6 mm di diametro) può portare una corrente di 50 A senza surriscaldarsi. Per questa corrente, qual'è il campo magnetico alla superficie del filo?
2. Un topografo sta usando una bussola 6.3 m sotto a un cavo attraverso cui scorre una corrente di 120 A. La lettura della bussola sarà affidabile? Si tenga conto che la componente orizzontale del campo magnetico terrestre in quel punto è di 21 μT (= 0.21 Gauss).
3. Il cannone elettronico da 25 kV di un tubo TV spara un fascio di elettroni del diametro di 0.22 mm sullo schermo con una intensità di 5.6×10^{14} al secondo. Si calcoli il campo magnetico prodotto dal fascio in un punto ad 1.5 mm dal centro del fascio stesso.
4. In un certo punto delle Filippine, il campo magnetico terrestre è di 39.0 μT, è orizzontale e diretto verso nord. Il campo totale è nullo 8.13 cm al di sopra di un filo rettilineo orizzontale attraverso cui scorre una corrente. Determinare (*a*) la corrente, (*b*) la direzione del filo.
5. Si consideri un filo rettilineo attraverso cui scorre una corrente di 48.8 A ed un elettrone che viaggia con velocità $v = 1.08 \times 10^7$ m/s ad una distanza di 5.20 cm dal filo. Si calcoli la forza magnetica che agisce sull'elettrone nel caso che la velocità dell'elettrone sia diretta (*a*) verso il filo, (*b*) parallelamente al filo e (*c*) in direzione normale ai due casi precedenti.
6. Un conduttore rettilineo attraverso cui scorre una corrente i si divide in due rami semicircolari come mostrato in figura 28. Qual'è il campo magnetico al centro della spira così formata?

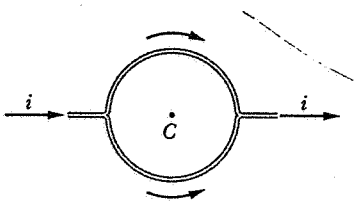


Figura 28 Problema 6.

7. Due fili rettilinei paralleli distano 8.10 cm l'uno dall'altro. Nei due fili scorra la stessa corrente i.
   Quanto deve valere i perché nei punti di mezzo tra i due fili vi sia un campo magnetico di 296 mT?
8. Si considerino due fili rettilinei, distanti 0.75 cm l'uno dall'altro, perpendicolari al piano della pagina come in figura 29. Nel filo 1 scorra una corrente di 6.6 A in verso entrante. Che

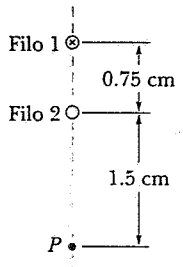


Figura 29 Problema 8.

ISBN 88-408-0777-2

corrente (intensità e verso) deve scorrere nel filo 2 affinché il campo magnetico in P sia nullo?

9. La figura 30*a* mostra un tratto di filo, attraversato da una corrente i, piegato in modo da formare un avvolgimento di una spira. In figura 30*b* lo stesso tratto di filo è stato piegato più strettamente in modo da formare un avvolgimento di due spire più piccole. (*a*) Detti B_a e B_b i campi magnetici al centro dei due avvolgimenti, quanto vale il rapporto B_a/B_b? (*b*) Quanto vale il rapporto tra i momenti di dipolo magnetico μ_a/μ_b?

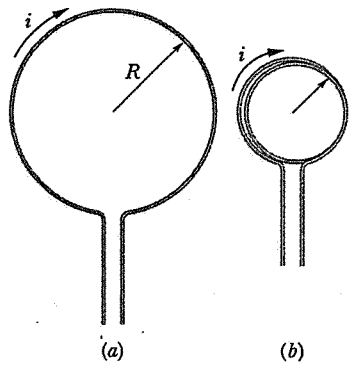


Figura 30 Problema 9.

10. La figura 31 mostra una disposizione detta *bobina di Helmholtz*. Essa consiste di due bobine coassiali ciascuna di N spire e di raggio R, separate da una distanza R. In esse scorre la stessa corrente i nella stessa direzione. Si determini il campo magnetico nel punto P in posizione centrale tra le bobine.

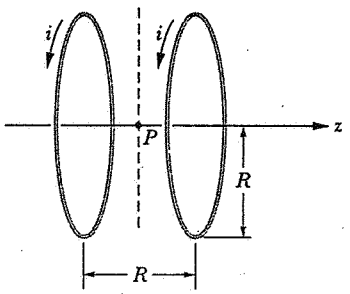


Figura 31 Problemi 10, 26 e 27.

11. Uno studente costruisce un elettromagnete avvolgendo 320 spire di filo attorno ad un cilindro di legno di diametro $d = 4.80$ cm. La bobina viene connessa ad una batteria che fa circolare nel filo una corrente di 4.2 A. (*a*) Qual'è il momento magnetico di questo apparecchio? (*b*) A che distanza $z \gg d$ lungo l'asse il campo magnetico di questo dipolo sarà di 5.0 μT (approssimativamente un decimo del campo magnetico terrestre)?

12. Si pieghi un filo in modo da formare una lunga molletta per capelli, come in figura 32. Se nel filo scorre una corrente di 11.5 A, (*a*) che campo magnetico (modulo e direzione) c'è nel punto *a*? (*b*) e nel punto *b* molto lontano da *a*? Si consideri $R = 5.20$ mm.

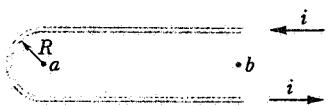


Figura 32 Problema 12.

13. Si consideri un filo, piegato come in figura 33, attraverso cui scorra una corrente i. Due sezioni rettilinee semi-infinite, tangenti ad uno stesso cerchio, sono connesse da un arco di circonferenza di angolo θ. Quanto deve valere θ perché il campo magnetico nel centro del cerchio sia nullo?

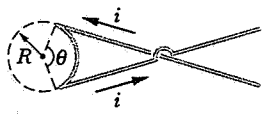


Figura 33 Problema 13.

14. Si consideri un tratto di filo di lunghezza L percorso da una corrente i. (*a*) Si dimostri che il campo magnetico nel punto P a distanza D lungo la normale ad una estremità del filo (fig. 34), è dato da

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi D} \frac{L}{(L^2 + D^2)^{1/2}}.$$

(*b*) Si dimostri che il campo magnetico nel punto Q lungo l'asse del filo è nullo.

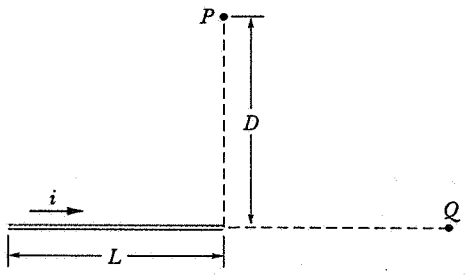


Figura 34 Problema 14.

15. Si consideri il circuito di figura 35. I tratti curvi sono archi di cerchio di raggi a e b. I tratti dritti sono in direzione radiale. Si determini il campo magnetico B nel punto P, supponendo che nel circuito circoli una corrente i.

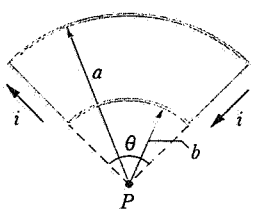


Figura 35 Problema 15.

16. Si consideri un tratto di filo rettilineo di lunghezza L attraversato da una corrente i. Si dimostri che il campo magnetico **B**, in un punto ad una distanza R lungo la normale al punto medio del filo (fig. 36), è dato da

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \frac{L}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}}.$$

Si mostri che questa espressione si riduce ad un risultato noto per $L \to \infty$.

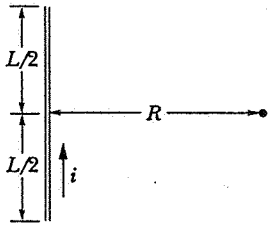


Figura 36 Problema 16.

17. Si dimostri che il campo magnetico B al centro di una spira rettangolare, di lunghezza L e di larghezza W, percorsa da una corrente i, è dato da

$$B = \frac{2\mu_0 i}{\pi} \frac{(L^2 + W^2)^{1/2}}{LW}.$$

Si mostri inoltre che nel caso $L \gg W$ il risultato è consistente con quello dell'esempio 1.

18. Si consideri una spira quadrata di lato a percorsa da una corrente i. (*a*) Si dimostri che B in un punto sull'asse della spira ad una distanza z dal centro della spira è dato da

$$B(z) = \frac{4\mu_0 i a^2}{\pi(4z^2 + a^2)(4z^2 + 2a^2)^{1/2}}.$$

(*b*) a cosa si riduce nel centro della spira?

19. Il campo magnetico sull'asse di una spira quadrata di lato a è dato nel problema 18. (*a*) Si dimostri che per $z \gg a$ il campo è quello di un dipolo magnetico (eq. 17). (*b*) Si determini il momento di dipolo magnetico di questa spira.

20. Si considerino due spire di lunghezza L, una di forma quadrata e una di forma circolare, percorse da una corrente i. Si dimostri che il campo magnetico al centro della spira quadrata è più intenso di quello al centro della spira circolare.

21. In figura 37 è riportata la sezione di un nastro sottile, infinitamente lungo, di larghezza w, percorso da una corrente i entrante nella pagina, distribuita uniformemente sulla sezione. Si calcolino modulo e orientazione del campo magnetico **B** nel punto P che giace nel piano del nastro ad una distanza d dal suo bordo. (*Suggerimento*: immaginate che il nastro sia costituito da molti fili paralleli affiancati l'uno all'altro).

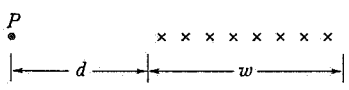


Figura 37 Problema 21.

22. Si considerino due fili paralleli infinitamente lunghi, distanti 12.2 cm l'uno dall'altro, percorsi da una corrente i di 115 A. In figura 38 sono rappresentati una sezione dei fili (perpendicolari al piano della figura) ed il punto P che giace sull'asse del segmento d che unisce i due fili. Si determini il campo magnetico nel punto P (direzione e modulo) nel caso che la corrente nel filo di sinistra sia uscente dalla pagina e la corrente nel filo di destra sia (*a*) uscente, (*b*) entrante.

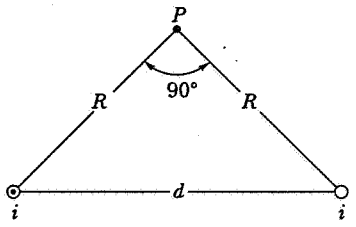


Figura 38 Problema 22.

23. Rifacendosi alla figura 7*a*, si supponga che le correnti siano entrambe uscenti dal piano della figura. Si dimostri che il campo magnetico nel piano definito dai fili è dato da

$$B = \frac{\mu_0 i x}{\pi(x^2 - d^2)}.$$

Siano $i = 25$ A e $d = 2.5$ cm; si rappresenti in un grafico B nell'intervallo -2.5 cm $< x <$ 2.5 cm. Si trascuri il diametro dei fili.

24. In figura 39 sono rappresentati due fili paralleli separati da una distanza d, percorsi in versi opposti da una corrente i. (*a*) Si mostri che il campo magnetico nel punto P equidistante dai due fili è dato da

$$B = \frac{2\mu_0 i d}{\pi(4R^2 + d^2)}.$$

(*b*) Come è orientato **B**?

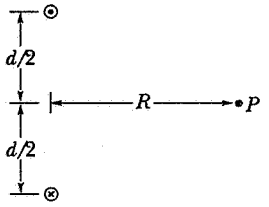


Figura 39 Problema 24.

25. Si consideri il circuito di figura 40, percorso da una corrente i. Si calcoli il momento di dipolo magnetico del circuito.

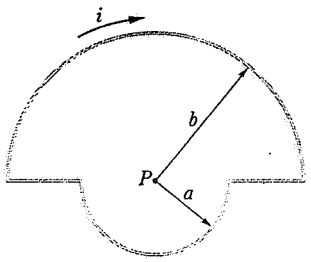


Figura 40 Problema 25.

ISBN 88-408-0777-2

26. Si considerino due bobine di 300 spire percorse da una corrente i. Esse siano disposte coassialmente ad una distanza pari al loro raggio, come in figura 31. Supponendo $R = 5.0$ cm e $i = 50$ A, si rappresenti in un grafico B in funzione della posizione sull'asse nell'intervallo -5 cm $< z <$ 5 cm prendendo per $z = 0$ il punto medio P tra le bobine. Tali bobine generano un campo quasi uniforme in un intorno di P. (*Suggerimento*: vedi equazione 15).

27. Nel problema 10 (fig. 31) si lasci variare la distanza s tra le bobine (non più, quindi, necessariamente uguale al raggio R delle bobine). (*a*) Si mostri che la derivata prima del campo (dB/dz) si annulla nel punto medio P indipendentemente da s. Perché ci si aspetta questo risultato? (*b*) Si mostri che anche la derivata seconda del campo magnetico (d^2B/dz^2) si annulla in P se $s = R$. Ciò spiega il perché della uniformità di B in un intorno di P per questa particolare distanza tra le bobine.

28. Si consideri una spira circolare di raggio 12 cm percorsa da una corrente di 13 A. Al centro di questa vi sia una bobina di 50 spire di raggio 0.82 cm percorsa da una corrente di 1.3 A. (*a*) Che campo magnetico genera nel suo centro la spira più grande? (*b*) Si calcoli il momento che agisce sulla bobina interna supponendo gli assi della spira e della bobina perpendicolari. Si assuma il campo magnetico generato dalla spira esterna costante su tutto il volume occupato dalla bobina.

29. (*a*) Si consideri un filo piegato a forma di poligono regolare di n lati, tale da essere inscritto in un cerchio di raggio a. Si mostri che il campo magnetico nel centro del cerchio è dato da

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2\pi a} \tan(\pi/n).$$

(*b*) Si mostri che per $n \to \infty$ questo risultato tende all'espressione per il campo magnetico al centro di una spira circolare. (*c*) Si determini il momento di dipolo del poligono.

30. Si consideri un filo piegato come in figura 41, in modo che non ci sia contatto in P. Il raggio della sezione circolare sia R. Si determini il campo magnetico **B** (modulo ed orientazione) nel centro C della sezione circolare quando nel circuito scorre una corrente i. (*b*) Si ruoti ora la parte circolare attorno al diametro perpendicolare alla sezione rettilinea (tratteggiato in figura) in modo da allineare il momento magnetico della spira con la direzione della corrente nella parte dritta del filo. Si determini **B** in C in questo caso.

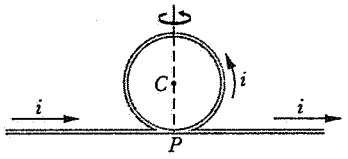


Figura 41 Problema 30.

31. Si calcoli **B** nel punto P di figura 42. (*a*) Il campo in P è più o meno intenso del campo nel centro del quadratro?

32. Si consideri un sottile disco di plastica, di raggio R, su cui sia distribuita in maniera uniforme una carica q. Se il disco ruota attorno al suo asse con una frequenza angolare ω, (*a*) si mostri che il campo magnetico al centro del disco è

$$B = \frac{\mu_0 \omega q}{2\pi R}$$

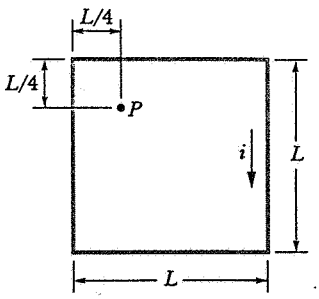


Figura 42 Problema 31.

e (*b*) il momento di dipolo magnetico del disco è

$$\mu = \frac{\omega q R^2}{4}.$$

(*Suggerimento*: Il disco rotante è equivalente ad un insieme di spire percorse da corrente).

33. Si consideri la spira rettangolare percorsa dalla corrente i riportata in figura 43. Il punto P si trovi ad una distanza x dal centro della spira. Si determini un'espressione per il campo magnetico generato dalla corrente nel punto P, supponendo che il punto P si trovi molto lontano dalla spira. Si verifichi che l'espressione coincida con il risultato riportato in tabella 1, con $\mu = iab$. (*Suggerimento*: lati opposti del rettangolo possono essere trattati insieme, ma attenzione ai versi della corrente).

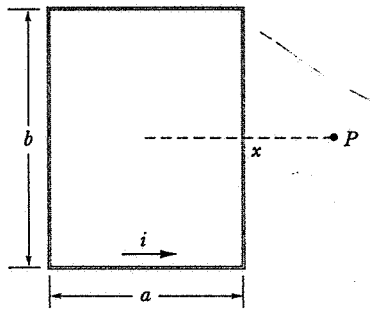


Figura 43 Problema 33.

Paragrafo 35-4 Due conduttori paralleli

34. In figura 44 sono rappresentati cinque fili rettilinei, paralleli, infinitamente lunghi che giacciono nel piano xy. In ogni filo scorra una corrente $i = 3.22$ A nel verso delle x crescenti. La distanza tra due fili successivi sia $d = 8.30$ cm. Si determini la forza magnetica per unità di lunghezza che agisce su ciascun filo.

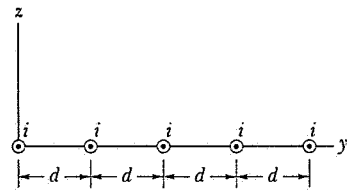


Figura 44 Problema 34.

35. Si considerino quattro fili rettilinei, paralleli, infinitamente lunghi disposti, come in figura 45, a quadrato. In ciascuno di essi scorra una corrente i in verso uscente dalla figura. Si calcoli la forza per unità di lunghezza (modulo ed orientazione) che agisce su un qualunque filo, assumendo $i = 18.7$ A ed $a = 24.5$ cm. (Nel caso di particelle che si muovono nella stessa direzione in un plasma, questo effetto è noto come «*pinch effect*», effetto di strizzamento).

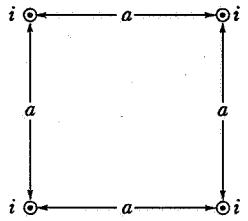


Figura 45 Problema 35.

36. Si consideri il sistema rappresentato in figura 46. Nel filo rettilineo scorra una corrente $i_1 = 28.6$ A e nella spira rettangolare scorra una corrente $i_2 = 21.8$ A. Si calcoli la forza risultante che agisce sulla spira quando $a = 1.10$ cm, $b = 9.20$ cm e $L = 32.3$ cm.

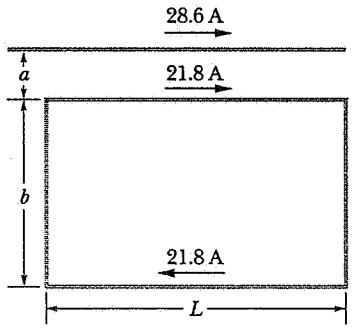


Figura 46 Problema 36.

37. In figura 47 è riportato uno schema idealizzato di un «cannone elettromagnetico a rotaia», disegnato per sparare proiettili fino a velocità di 10 km/s. (Si sta studiando la possibilità di impiegare tali apparecchiature come difesa anti missile.) Il proiettile P si trova tra due rotaie con le quali è in contatto e lungo cui può scorrere. Un generatore G fornisce una corrente che scorre lungo una rotaia, attraversa il proiettile e torna al generatore attraverso la seconda rotaia. (*a*) Siano w la distanza tra le rotaie, r il raggio delle rotaie (supposte cilindriche) e i la corrente. Si mostri che la forza che agisce sul proiettile è diretta verso destra e che il suo modulo vale approssimativamente:

$$F = \frac{1}{2}\left(\frac{i^2\mu_0}{\pi}\right)\ln\left(\frac{w+r}{r}\right).$$

(*b*) Se il proiettile (in questo caso una pallottola di prova) parte dall'estremità sinistra della rotaia con velocità iniziale nulla, si determini la velocità di uscita del proiettile dall'estremità destra della rotaia. Si assuma $i = 450$ kA, $w = 12$ mm, $r = 6.7$ cm, $L = 4.0$ m e che la massa della pallottola sia $m = 10$ g.

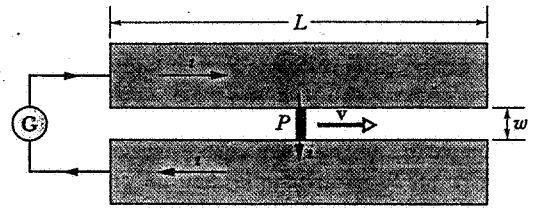


Figura 47 Problema 37.

38. Nell'esempio 4, si supponga di spostare leggermente verso il basso il filo superiore e quindi di lasciarlo libero. Si mostri che il moto del filo che ne risulta è armonico con la stessa frequenza di oscillazione che avrebbe un pendolo di lunghezza d.

Paragrafo 35-5 La legge di Ampère

39. In ciascuno degli otto conduttori mostrati in figura 48 scorre una corrente di 2.0 A, in verso entrante o uscente dalla pagina. Sono indicati due percorsi di integrazione. Quanto vale $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ lungo (*a*) il percorso a puntini e (*b*) lungo il percorso tratteggiato?

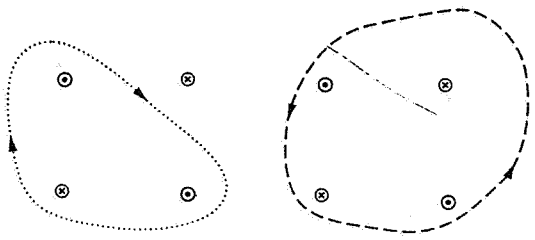


Figura 48 Problema 39.

40. In figura 49 sono rappresentati otto conduttori che attraversano la pagina in direzione ad essa perpendicolare. Il k-esimo conduttore ($k = 1, 2, ..., 8$) è attraversato da una corrente $k\,i_0$; se k è dispari, la corrente è uscente dalla pagina, se k è pari, è entrante. Si calcoli $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ lungo il percorso indicato in figura.

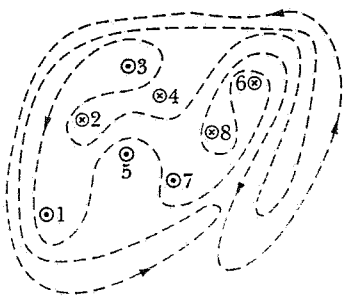


Figura 49 Problema 40.

ISBN 88-408-0777-2

41. In una certa regione vi sia una densità di corrente uniforme, diretta nel verso delle z crescenti, di 15 A/m^2. Quanto vale $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ lungo il cammino definito dai tre segmenti rettilinei che uniscono $(4d, 0, 0)$ a $(4d, 3d, 0)$ a $(0, 0, 0)$ a $(4d, 0, 0)$ per $d = 23$ cm?

42. Si consideri un filo cilindrico infinito di raggio R percorso da una corrente i distribuita uniformemente sulla sezione. A quali *due* distanze dall'asse il campo magnetico generato dalla corrente è la metà del campo sulla superficie del filo?

43. Si dimostri che un campo magnetico uniforme **B** non può annullarsi in maniera discontinua quando ci si muova in direzione ad esso perpendicolare, come indicato dalla freccia in *a* in figura 50. (*Suggerimento*: si applichi la legge di Ampère al percorso rettangolare tratteggiato in figura.) Nei magneti reali si ha sempre un effetto di bordo, cioè **B** si annulla gradualmente. Si modifichino le linee di forza di **B** in figura in modo da rendere più realistica la situazione.

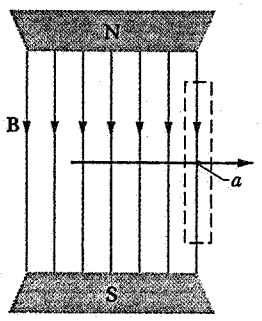


Figura 50 Problema 43.

44. In figura 51 è rappresentata una sezione di un conduttore cilindrico cavo di raggi a e b, attraverso cui scorre una corrente i distribuita in maniera uniforme. (*a*) Usando la spira amperiana mostrata, si dimostri che $B(r)$ per $b < r < a$ è dato da

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r}.$$

(*b*) Si verifichi la formula nei casi particolari $r = a$, $r = b$, e $b = 0$. (*c*) Assumendo $a = 2.0$ cm, $b = 1.8$ cm e $i = 100$ A, si tracci il grafico di $B(r)$ nell'intervallo $0 < r < 6$ cm.

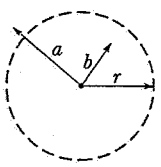


Figura 51 Problema 44.

45. In figura 52 è rappresentata la sezione di un cavo coassiale di raggi a, b e c. Nei due conduttori scorra una corrente i, distribuita in maniera uniforme, in versi opposti. Si determini l'espressione di $B(r)$ negli intervalli (*a*) $r < c$, (*b*) $c < r < b$, (*c*) $b < r < a$ e (*d*) $r > a$. (*e*) Si verifichino le espressioni trovate in tutti i casi limite. (*f*) Assumendo $a = 2.0$ cm, $b = 1.8$ cm, $c = 0.40$ cm e $i = 120$ A si tracci il grafico di $B(r)$ nell'intervallo $0 < r < 3$ cm.

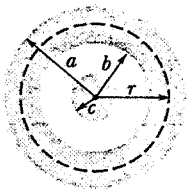


Figura 52 Problema 45.

46. Si consideri un conduttore costituito da una quantità infinita di fili rettilinei infinitamente lunghi, affiancati l'uno all'altro, ciascuno dei quali è percorso da una corrente i_0. Si dimostri che le linee di forza di **B** sono come in figura 53 e che B per tutti i punti sopra e sotto al conduttore è dato da

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0 n i_0,$$

dove n è il numero di fili per unità di lunghezza. Si derivi l'espressione sia usando la legge di Ampère che considerando il problema come un caso limite dell'esempio 3.

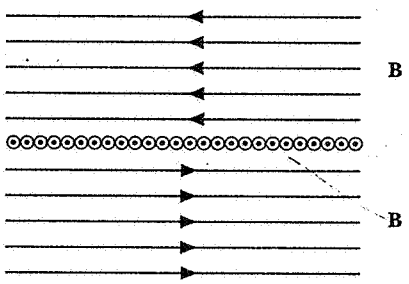


Figura 53 Problema 46.

47. Si consideri un conduttore cilindrico infinitamente lungo percorso da corrente e sia a il raggio del cilindro. La densità di corrente vari linearmente con il raggio, $j = j_0 r/a$. Si determini il campo magnetico all'interno del filo. Si esprima il risultato in termini della corrente totale i che scorre nel filo.

48. In figura 54 è rappresentata la sezione di un lungo conduttore cilindrico di raggio a contenente una lunga cavità cilindrica di raggio b. Gli assi dei due cilindri sono paralleli e sono separati da una distanza d. Una corrente i, distribuita uniformemente sull'area tratteggiata in figura, scorra nel conduttore. (*a*) Usando il principio di sovrapposizione, si dimostri che il campo nel centro del buco è dato da

$$B = \frac{\mu_0 i d}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

(*b*) Si discutano i due casi particolari $b = 0$ e $d = 0$. (*c*) Usando la legge di Ampère, dimostrare che il campo magnetico nella cavità è uniforme. (*Suggerimento*: Si consideri il buco come se fosse percorso da due correnti, uguali in modulo ed opposte in verso, di densità uguale alla densità di corrente presente nel conduttore, che si cancellano reciprocamente. In questo modo si sovrappongono i campi generati da due cilindri di corrente uniforme.)

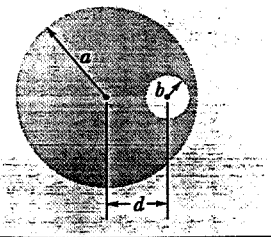


Figura 54 Problema 48.

49. Un tubo circolare infinitamente lungo, di raggio esterno R, è percorso da una corrente i_0 (distribuita in modo uniforme e in verso entrante nella pagina in figura 55). Ad una distanza $3R$ dall'asse del tubo, vi sia un filo rettilineo ad esso parallelo. Si calcoli la corrente che deve scorrere nel filo affinché il campo magnetico nel punto P sia uguale in modulo ed opposto in verso al campo nel centro del tubo.

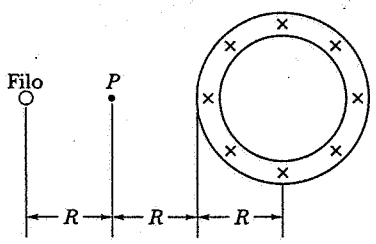


Figura 55 Problema 49.

Paragrafo 35-6 Solenoidi e toroidi

50. Si calcoli l'intensità del campo magnetico all'interno di un solenoide lungo 95.6 cm, di raggio 1.90 cm, composto da 1230 spire e percorso da una corrente di 3.58 A.

51. Un solenoide lungo 1.33 m e di diametro 2.60 cm sia percorso da una corrente di 17.8 A. Si calcoli la lunghezza del filo che costituisce il solenoide sapendo che il campo all'interno è di 22.4 mT.

52. Si consideri un toroide di sezione quadrata, di lato 5.20 cm, di raggio interno 16.2 cm e costituito da 535 spire. Si calcoli il campo (*a*) al raggio interno, (*b*) al raggio esterno, quando nel solenoide scorra una corrente di 813 mA.

53. Si consideri un solenoide infinitamente lungo composto da 100 spire per centimetro di lunghezza. Un elettrone si muove, all'interno del solenoide, su una circonferenza di 2.30 cm di raggio, perpendicolarmente all'asse del solenoide. Si calcoli la corrente che scorre nel solenoide sapendo che la velocità dell'elettrone è 0.0460 c (c = velocità della luce nel vuoto).

54. Si consideri un lungo solenoide composto da 115 spire/cm e di raggio 7.20 cm percorso da una corrente di 1.94 mA. All'interno del solenoide, in posizione assiale, vi sia un filo rettilineo percorso da una corrente di 6.30 A. (*a*) A che distanza dall'asse il campo magnetico è diretto a 40.0° rispetto all'asse? (*b*) Che intensità ha ivi il campo magnetico?

55. Un interessante (e frustrante) effetto si verifica quando si tenta di confinare elettroni e ioni positivi (un plasma) nel campo magnetico di un toroide. Le particelle il cui moto è perpendicolare a B non si muovono su percorsi circolari perché il campo magnetico varia al variare della distanza dall'asse del toroide. Questo effetto, che è mostrato (molto amplificato) in figura 56, fa sì che particelle di segno opposto derivino in versi opposti in direzione parallela all'asse del toroide. (*a*) Che segno ha la carica il cui moto è rappresentato in figura? (*b*) Se la traiettoria della particella ha un raggio di curvatura di 11 cm quando si trova a 125 cm dall'asse, qual'è il raggio di curvatura quando essa si trova a 110 cm dall'asse?

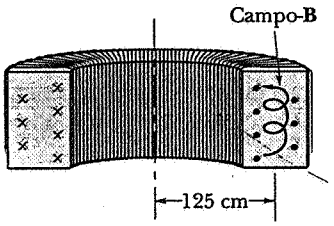


Figura 56 Problema 55.

56. Si derivi l'equazione del solenoide (eq. 22) a partire dall'espressione del campo sull'asse di una spira circolare (eq. 15). (*Suggerimento*: Si suddivida il solenoide in una successione di spire di spessore infinitesimo e si integri. *Vedi* figura 17.)

Capitolo 36

LA LEGGE DELL'INDUZIONE DI FARADAY

Spesso si può prevedere il risultato di un esperimento considerando come è collegato per simmetria con altri esperimenti. Per esempio, una spira percorsa da corrente in un campo magnetico è sottoposta ad una coppia (dovuta alla presenza del campo) che la fa ruotare. Si consideri una situazione simile: una spira, attraverso cui non scorre alcuna corrente, si trovi immersa in un campo magnetico e sia fatta ruotare da una coppia esterna. Si trova che una corrente viene generata nella spira! Nel caso di una spira in un campo magnetico, una corrente produce una coppia ed una coppia produce una corrente. Questo è un esempio della simmetria della natura.

La comparsa di corrente nella spira è un esempio di applicazione della legge dell'induzione di Faraday, *che è l'argomento di questo capitolo. La legge di Faraday, che è una delle equazioni di Maxwell, è stata dedotta da una grande quantità di esperimenti semplici e diretti, che possono venir facilmente realizzati in laboratorio e che dimostrano direttamente la sua validità.*

36-1 GLI ESPERIMENTI DI FARADAY

La legge dell'induzione di Faraday è stata scoperta per mezzo degli esperimenti svolti da Michael Faraday in Inghilterra nel 1831 e da Joseph Henry negli Stati Uniti circa nello stesso periodo*. Anche se Faraday pubblicò i suoi risultati per primo, il che gli conferisce la priorità di scoperta, l'unità di misura dell'induttanza (vedi cap. 38) nel Sistema Internazionale si chiama *henry* (abbreviazione H). D'altra parte, l'unità di misura della capacità, come abbiamo già visto, si chiama *farad* (abbreviazione F). Nel capitolo 38, in cui si discuteranno le oscillazioni nei circuiti capacitivi-induttivi, si vedrà quanto sia appropriato collegare i nomi di questi due talenti contemporanei.

In figura 1 è mostrata una spira collegata ad un amperometro. Normalmente ci si aspetta che l'amperometro indichi una corrente nulla, perché non sembrano esserci generatori di forza elettromotrice. Tuttavia, se spingiamo un magnete verso la spira, con il polo nord rivolto verso la spira, accade qualcosa di notevole. *Mentre il magnete si muove*, l'ago dell'amperometro si sposta, indicando che una corrente sta circolando nella spira. Se teniamo fermo il magnete, rispetto alla spira, l'amperometro indica una corrente nulla. Se *allontaniamo* il magnete, l'ago dell'amperometro si muove, ma dalla parte opposta, il che significa che la corrente nella spira circola in verso opposto. Se si ripete l'esperimento con il magnete rovesciato, cioé con il polo sud rivolto verso la spira, gli spostamenti dell'ago dell'amperometro sono in verso opposto al caso precedente.

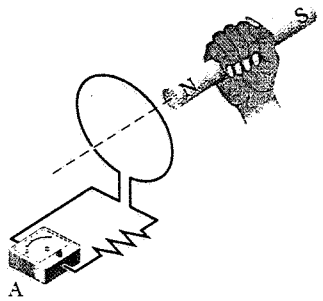


Figura 1. L'ago dell'amperometro A si sposta quando il magnete è in moto rispetto alla bobina.

* Oltre al fatto di aver scoperto contemporaneamente e indipendentemente la legge dell'induzione, Faraday e Henry ebbero molti altri aspetti simili nella loro vita. Entrambi fecero i garzoni da ragazzi. Faraday a 14 anni faceva il garzone di un rilegatore di libri a Londra. Henry a 13 anni faceva il garzone di un orologiaio ad Albany, New York. Anni dopo, Faraday fu nominato direttore della Royal Institution di Londra, la cui fondazione fu in gran parte dovuta ad un americano, Benjamin Thompson (il Conte Rumford). Henry, d'altra parte, divenne segretario della Smithsonian Institution di Washington, DC, che fu fondata grazie alla donazione di un inglese, James Smithson.

ISBN 88-408-0777-2

Tanto più velocemente si muove il magnete, tanto maggiore sarà la corrente segnalata dall'amperometro. Ulteriori esperimenti mostrano che *ciò che conta è il moto relativo del magnete rispetto alla bobina.* Non fa alcuna differenza il fatto che sia il magnete a muoversi verso la spira piuttosto che il viceversa.

La corrente che compare in questo esperimento viene detta *corrente indotta* e viene generata da una *forza elettromotrice (f.e.m.) indotta.* Si noti che non vi sono batterie in alcun punto del circuito. Faraday riuscì a dedurre da esperimenti come questo la legge che permette di calcolare modulo e verso delle f.e.m. indotte. Tali f.e.m. hanno effetti pratici molto importanti. È molto probabile che le lampadine della stanza in cui state leggendo il libro siano alimentate da una f.e.m. indotta prodotta da un generatore di corrente commerciale.

In un altro esperimento si utilizza l'apparecchiatura illustrata in figura 2. Le bobine sono poste una accanto all'altra, ma ferme l'una rispetto all'altra. Quando, azionando l'interruttore S, si chiude il circuito di destra, facendo così circolare una corrente, l'ago dell'amperometro si sposta per un momento; quando, successivamente, si apre il circuito interrompendo la corrente, l'ago dell'amperometro si sposta ancora, ma in verso opposto. Nessuna parte dell'apparato si muove in questo esperimento.

Gli esperimenti mostrano che c'è una f.e.m. indotta nella bobina di sinistra della figura 2 ogni volta che la corrente nella bobina di destra *sta cambiando.* Ciò che conta è *la velocità di cambiamento della corrente, non l'intensità.*

La caratteristica comune di questi due esperimenti è il *moto* o la *variazione.* La causa della f.e.m. indotta è il magnete *in moto* o la corrente *che varia.* Nel prossimo paragrafo studieremo quantitativamente questo effetto.

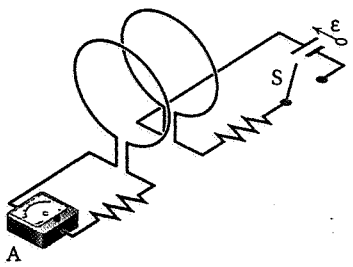


Figura 2. L'ago dell'amperometro A si sposta per qualche istante quando viene azionato l'interruttore S, sia per chiudere che per aprire il circuito. Le bobine non vengono mosse.

36-2 LA LEGGE DELL'INDUZIONE DI FARADAY

Si immaginino le linee di forza del campo magnetico che escono dal magnete di figura 1 e dalla spira di destra di figura 2. Alcune di queste linee attraversano la spira di sinistra di entrambe le figure. Quando si muove il magnete nella situazione della figura 1 o si apre o si chiude il circuito di figura 2, il numero di linee di forza del campo magnetico che attraversa la spira di sinistra cambia. Come dimostrato dagli esperimenti di Faraday, e come la tecnica di Faraday delle linee di forza ci aiuta ad intuire, *è la variazione del numero di linee di forza del campo magnetico che attraversa una spira che induce una forza elettromotrice nella spira stessa.* In particolare, è la *velocità con cui varia* il numero di linee di forza che attraversano la spira che determina la f.e.m. indotta.

Per quantificare questa affermazione introduciamo il *flusso del campo magnetico*, Φ_B. Come il flusso del campo elettrico (vedi par. 29-2), anche il flusso del campo magnetico può essere considerato come una misura del numero di linee di forza che attraversano una superficie. Analogamente al flusso del campo elettrico (vedi equazione 7 del capitolo 29), il flusso del campo magnetico attraverso una *qualunque* superficie è definito da

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \qquad (1)$$

Dove $d\mathbf{A}$ è un elemento della superficie di integrazione (vedi fig. 3) attraverso cui si vuole calcolare il flusso (per esempio la superficie racchiusa dalla spira di sinistra in figura 1). Se il campo magnetico è costante in direzione e modulo su una superficie piana di area A, il flusso si può scrivere

$$\Phi_B = BA\cos\theta, \qquad (2)$$

dove θ è l'angolo tra la normale alla superficie e la direzione del campo.

L'unità di misura del flusso del campo magnetico nel SI è il tesla · metro^2, che viene detto *weber* (abbre-

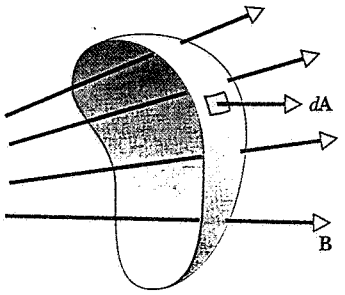


Figura 3. Il campo magnetico B attraverso un'area A dà un flusso del campo magnetico attraverso la superficie. L'elemento di area $d\mathbf{A}$ è rappresentato da un vettore.

ISBN 88-408-0777-2

viazione Wb). Cioé,

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ tesla} \cdot \text{metro}^2.$$

Invertendo questa relazione si nota che un tesla è equivalente a un weber/metro^2, che è l'unità di misura che veniva usata prima che venisse adottato il tesla nel SI. In termini di flusso del campo magnetico, la f.e.m. indotta in un circuito è data dalla *legge dell'induzione di Faraday*:

*La f.e.m. indotta in un circuito è uguale alla velocità con cui varia il flusso del campo magnetico attraverso il circuito, cambiata di segno.**

In termini matematici, la legge di Faraday si scrive

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{3}$$

dove $\mathcal{E}$ è la f.e.m. indotta. Se la velocità di variazione del flusso è espressa in weber al secondo, la f.e.m. è espressa in volt. Il segno meno nell'equazione 3 è molto importante, perché ci indica il verso della f.e.m. indotta. Questo segno sarà esaminato in dettaglio nel prossimo paragrafo.

Se la bobina è formata da N spire, viene indotta una f.e.m. in ciascuna di esse, sicché la f.e.m. totale indotta nel circuito è data dalla somma delle singole f.e.m., come nel caso di batterie collegate in serie. Se la bobina è avvolta così strettamente da poter considerare le spire coincidenti, cioé supponendo che la variazione di flusso sia la stessa per tutte le spire, allora la f.e.m. totale indotta è

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{4}$$

Ci sono molti modi di cambiare il flusso attraverso una spira: muovere un magnete rispetto alla spira (come in figura 1), cambiare la corrente in un circuito vicino (come in figura 2 e anche in un trasformatore), muovere la spira in un campo magnetico non uniforme, ruotare la spira in un campo magnetico fissato in modo da cambiare l'angolo θ dell'equazione 2 (come in un generatore), o cambiare le dimensioni o la forma della spira. In ognuno di questi casi, nella spira viene indotta una f.e.m.

Infine si noti che benché l'equazione 3 sia nota coma legge di Faraday, non fu scritta in questa forma da Faraday, che non conosceva molto bene la matematica. Infatti il lavoro in tre volumi sull'elettromagnetismo pubblicato da Faraday, che è una pietra miliare della fisica e della chimica, non contiene una sola equazione!

* Questa equivale alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico, cambiata di segno [N.d.T.].

Esempio 1 Si consideri il lungo solenoide S di figura 4. Esso sia composto da 220 spire/cm di diametro $d = 3.2$ cm e sia percorso da una corrente $i = 1.5$ A. Al centro di S vi sia una bobina C composta da 130 spire strettamente impacchettate di diametro $d_c = 2.1$ cm. La corrente nel solenoide cresca linearmente da 0 a 1.5 A in 0.16 s. Qual'è il valore assoluto (cioé trascurando il segno) della f.e.m. indotta nell'avvolgimento interno mentre la corrente nel solenoide sta aumentando?

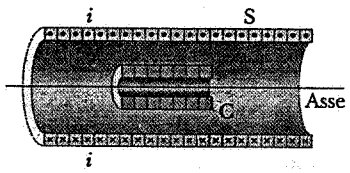


Figura 4. Esempio 1. Una bobina C si trova all'interno di un solenoide S. Nel solenoide scorre una corrente in verso tale da uscire dalla pagina dalla parte alta e da rientrare nella pagina dalla parte bassa, come indicato dai punti e dalle croci. Quando la corrente nel solenoide varia, nella bobina compare una f.e.m. indotta.

Soluzione Il valore assoluto del flusso finale attraverso ogni spira della bobina interna è dato dall'equazione 2, con $\theta = 0$,

$$\Phi_B = BA.$$

Il campo magnetico B al centro del solenoide è dato dall'equazione 22 del capitolo 35, cioé

$$\begin{aligned} B = \mu_0 in &= (4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A})(1.5 \text{ A}) \\ &\quad \times (220 \text{ spire/cm})(100 \text{ cm/m}) \\ &= 4.15 \times 10^{-2} \text{ T}. \end{aligned}$$

In termini del suo diametro d_c, l'area della bobina centrale (non quella del solenoide) è data da $\pi d_c^2/4 = 3.46 \times 10^{-4}$ m^2. Il valore assoluto del flusso finale attraverso ogni spira della bobina è quindi

$$\begin{aligned} \Phi_B &= (4.15 \times 10^{-2} \text{ T})(3.46 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \\ &= 1.44 \times 10^{-5} \text{ Wb} = 14.4 \text{ } \mu\text{Wb}. \end{aligned}$$

La f.e.m. indotta segue quindi dalla legge di Faraday (eq. 4) in cui trascuriamo il segno meno perché siamo interessati unicamente al modulo:

$$\mathcal{E} = \frac{N\,\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

in cui N è il numero di spire della bobina interna C. La variazione di flusso attraverso ogni spira della bobina interna è di 14.4 μWb. Tale variazione avviene in un tempo di 0.16 s e di conseguenza il modulo della f.e.m. indotta vale

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \frac{N\,\Delta\Phi_B}{\Delta t} &= \frac{(130)(14.4 \times 10^{-6} \text{ Wb})}{0.16 \text{ s}} \\ &= 1.2 \times 10^{-2} \text{ V} = 12 \text{ mV}. \end{aligned}$$

Nel prossimo paragrafo si studierà il modo di determinare il verso della f.e.m. indotta. Per il momento possiamo stabilire il verso con il seguente argomento. Si supponga che un aumento di flusso

causato dal solenoide esterno generi una corrente nella bobina interna tale da generare un campo magnetico nella stessa direzione del campo del solenoide. Ciò aumenterebbe il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide, e quindi la corrente che scorre nel solenoide aumenterebbe aumentando a sua volta il campo (e il flusso) all'interno dell'avvolgimento interno e così via. Questo risultato sembra ragionevole?

36-3 LA LEGGE DI LENZ

Finora non è stato specificato il verso delle f.e.m. indotte. Benché sia possibile determinarlo formalmente dalla legge di Faraday, preferiamo fornire una argomentazione basata sul principio di conservazione dell'energia. In meccanica, la conservazione dell'energia spesso permette di risolvere dei problemi senza una analisi dettagliata. Si userà qui lo stesso approccio. La regola per determinare il verso delle f.e.m. indotte fu proposta nel 1834 da Heindrich Friedrich Lenz (1804-1865) ed è nota come *legge di Lenz*:

> *La corrente indotta in una spira conduttrice chiusa ha un verso tale da opporsi alla variazione che la ha generata.*

Il segno meno nella legge di Faraday suggerisce questa opposizione.

La legge di Lenz si riferisce alle *correnti* indotte, ciò significa che si applica solo a circuiti conduttori chiusi. Se il circuito è aperto, generalmente si può pensare a ciò che accadrebbe se il circuito *fosse* chiuso e determinare in questo modo il verso delle f.e.m. indotte.

Si consideri il primo degli esperimenti di Faraday descritto nel paragrafo 36-1. In figura 5 sono illustrati il polo nord di un magnete e la sezione di una spira conduttrice accanto ad esso. Quando si avvicina il magnete alla spira (o la spira al magnete) nella spira viene indotta una corrente. In che verso?

Una spira percorsa da corrente genera un campo magnetico che, a grande distanza, è simile a quello di un dipolo magnetico i cui i poli coincidono con le facce della spira. Il polo nord, come per una sbarra magnetica, è la faccia della spira *da* cui escono le linee di forza di **B**. Se, come dice la legge di Lenz, la spira deve opporsi all'avvicinamento del magnete, la faccia della spira rivolta *verso* il magnete deve corrispondere al polo nord. I due poli nord- quello della spira e quello del magnete- in questo modo si respingono. La regola della mano destra permette quindi di determinare il verso della corrente tale da rivolgere il polo nord dalla parte giusta. In figura 5 il verso è antiorario se si guarda la spira dal magnete.

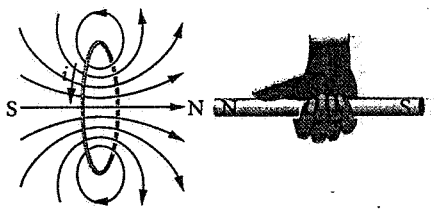


Figura 5. Quando il magnete viene spinto verso la spira, la corrente indotta *i* ha il verso mostrato, generando in questo modo un campo magnetico che si oppone al moto del magnete. Questo illustra l'applicazione della legge di Lenz.

Quando si spinge il magnete verso la spira (o la spira verso il magnete), compare una corrente indotta. In termini della legge di Lenz questo avvicinamento è la «variazione» che genera la corrente indotta, e, secondo questa legge, la corrente indotta si oppone a questo «avvicinamento». Se allontaniamo il magnete dalla spira, la corrente indotta si oppone a questo «allontanamento» creando un polo sud sulla faccia destra della spira di figura 5. Perché la faccia destra della spira corrisponda al polo sud, la corrente deve circolare in verso opposto al caso precedente cioé in verso opposto a quello riportato in figura 5. Sia che il magnete venga avvicinato sia che venga allontanato dalla spira, la corrente indotta nella spira si opporrà a tale moto.

L'agente che fa muovere il magnete verso la spira o che lo allonta deve sempre vincere la resistenza opposta dalla corrente indotta e deve quindi fare un lavoro. Per il principio di conservazione dell'energia questo lavoro fatto sul sistema deve essere esattamente uguale all'energia interna (termica) prodotta nella spira perché questi sono i soli trasferimenti di energia che avvengono nel sistema. Per muovere il magnete più velocemente è necessaria una potenza maggiore e di conseguenza aumenta corrispondentemente la potenza termica nella spira. Se si taglia la spira e poi si ripete l'esperimento, non c'è corrente indotta e quindi non ci sono variazioni di energia termica né forze agenti sul magnete e quindi non è necessario fare un lavoro per muoverlo. C'è ancora una f.e.m. indotta nel circuito, ma come una batteria collegata ad un circuito aperto non fa circolare corrente.

Se la corrente in figura 5 circolasse in verso opposto a quello mostrato quando il magnete viene avvicinato alla spira, la faccia destra della spira corrisponderebbe ad un polo sud ed attirerebbe il magnete verso di sé. Basterebbe quindi dare una spintina iniziale al magnete per far iniziare il processo e poi esso proseguirebbe spontaneamente. Il magnete verrebbe accelerato verso la spira aumentando costantemente la sua energia cinetica. Contemporaneamente la corrente nella spira aumenterebbe nel tempo e verrebbe dissipata sempre

ISBN 88-408-0777-2

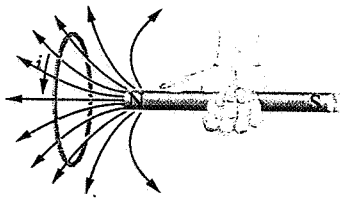


Figura 6. Un altro modo di vedere il funzionamento della legge di Lenz. Quando il magnete viene spinto verso la spira, il flusso del campo magnetico attraverso alla spira aumenta. La corrente indotta nella spira genera un campo magnetico che si oppone all'aumento di flusso.

più potenza termica nella spira. Insomma avremmo ottenuto energia in cambio di nulla! Inutile dire che ciò è impossibile.

Applichiamo la legge di Lenz alla figura 5 in un altro modo. In figura 6 sono mostrate le linee di forza del campo magnetico della sbarra magnetica*. Da questo punto di vista la «variazione» è l'aumento del flusso del campo magnetico Φ_B attraverso la spira, causato dall'avvicinamento del magnete. La corrente indotta si oppone a questa variazione generando un campo magnetico che si oppone all'aumento di flusso causato dall'avvicinamento del magnete. Perciò il campo generato dalla corrente indotta deve avere verso opposto rispetto a quello del magnete e quindi deve essere diretto verso destra, in accordo con la conclusione precedente.

Ciò che è importante non è che il campo sia opposto al *campo* del magnete, ma che si opponga alla *variazione*, che in questo caso è un aumento di flusso attraverso la spira. Se si allontana il magnete, si riduce Φ_B attraverso la spira. Il campo indotto deve opporsi alla diminuzione di Φ_B (cioè alla variazione) *aumentando* il campo magnetico. In ogni caso il campo indotto si oppone alla variazione che lo genera.

Siamo ora in grado di determinare il verso della corrente nella bobina C dell'esempio 1. Il campo del solenoide è diretto verso destra ed è crescente. La corrente in C deve opporsi a questa variazione di flusso e quindi deve generare un campo in direzione opposta a quello generato da S. La corrente in C circola quindi in verso opposto alla corrente in S. Se la corrente in S stesse *diminuendo*, invece di aumentare, argomentazioni analoghe mostrerebbero che le correnti in C circolerebbero nello stesso verso di quelle in S.

Correnti di Foucault

Quando il flusso del campo magnetico attraverso un conduttore cambia, nel materiale compaiono delle correnti indotte (fig. 7). Queste correnti vengono dette *correnti di Foucault o correnti parassite*. In alcuni casi le correnti di Foucault possono produrre effetti indesiderati. Per esempio, aumentano l'energia interna e di conseguenza possono causare un aumento della temperatura del materiale. Per questo motivo i materiali che si trovano in campi magnetici variabili sono spesso *laminati* cioè costituiti da molti strati sottili isolati l'uno dall'altro. Invece di un unico grande percorso le correnti di Foucault seguono molti percorsi più piccoli aumentando così la lunghezza totale del percorso e di conseguenza la resistenza corrispondente; la potenza dissipata per effetto Joule $\mathcal{E}^2/R$ è minore e l'aumento di energia interna lo è a sua volta. D'altra parte l'effetto riscaldante delle correnti di Foucault può essere sfruttato a nostro vantaggio, come ad esempio avviene nelle *fornaci a induzione*; in esse un campione di materiale può essere riscaldato utilizzando un campo magnetico rapidamente variabile. Le fornaci a induzione vengono usate in quei casi in cui non è possibile avere un contatto termico con il materiale da riscaldare, ad esempio quando si trova in una camera a vuoto.

Le correnti di Foucault sono correnti reali e producono gli stessi effetti di una corrente reale. In particolare, sulla parte della corrente di Foucault che attraversa il campo magnetico in figura 7, viene esercitata una forza $\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}$. Questa forza viene trasmessa al materiale e, usando la legge di Lenz, si può dimostrare che si oppone al moto del conduttore (vedi domanda 26). Ciò dà luogo ad una forma di *frenamento magnetico*, in cui campi magnetici applicati ad una ruota che gira o ad una rotaia in movimento causano forze frenanti. Un tale freno non ha parti in movimento o connessioni meccaniche e non si consuma per attrito come i normali freni meccanici. Inoltre è più efficente ad alte velocità (dato che la forza magnetica aumenta all'aumentare della velocità relativa), dove il consumo dei freni meccanici sarebbe massimo.

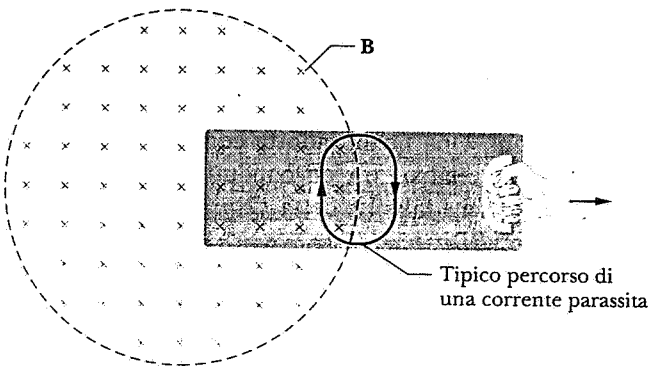


Figura 7. Quando il materiale conduttore viene estratto dal campo magnetico, una corrente indotta (corrente parassita) appare come mostrato.

* Ci sono due campi magnetici in questo problema: quello del magnete e quello della spira. Accertatevi di avere sempre chiaro di quale si sta parlando.

36-4 FORZE ELETTROMOTRICI DERIVANTI DAL MOTO

L'esempio di figura 6, benché facile da capire qualitativamente, non si presta a calcoli quantitativi. Si consideri la figura 8, in cui è rappresentata una spira rettangolare di filo conduttore di larghezza D, un'estremità della quale è immersa in un campo magnetico uniforme **B** normale al piano della spira. Tale campo **B** può essere prodotto, ad esempio, nel traferro di un grosso elettromagnete. La linea tratteggiata delimita la zona in cui è presente il campo. La spira viene mossa verso destra con velocità costante v.

La situazione descritta in figura 8 non differisce in modo sostanziale da quella di figura 6. In entrambi i casi un magnete ed una spira conduttrice sono in moto relativo; in entrambi i casi si sta facendo cambiare nel tempo il flusso del campo magnetico attraverso la spira. La differenza importante tra le due situazioni è che quella di figura 8 permette di fare calcoli più semplici.

L'agente esterno (la mano in figura 8) tira la spira verso destra a velocità costante v esercitando una forza F. Vogliamo calcolare la potenza meccanica $P = Fv$ impiegata dall'agente esterno o, equivalentemente, la velocità con cui viene fatto il lavoro sulla spira, e confrontarla con la velocità con cui la corrente indotta produce energia interna. Il flusso Φ_B attraverso la spira in figura 8 è

$$\Phi_B = BDx$$

dove Dx è l'area della parte della spira in cui B non è nullo. Si trova la f.e.m. $\mathcal{E}$ dalla legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BDx) = -BD\frac{dx}{dt} = BDv, \quad (5)$$

dove si è posto $-dx/dt$ uguale alla velocità v con cui la spira viene estratta dal campo magnetico, dato che x diminuisce. Si noti che la sola dimensione della spira che compare nell'equazione 5 è la lunghezza D dell'estremità sinistra della spira. Come si vedrà in seguito, la f.e.m. indotta in figura 8 può essere considerata localizzata qui. Una f.e.m. indotta come questa, generata dal moto relativo tra un conduttore ed un campo magnetico, viene talvolta detta *f.e.m. di movimento*.

La f.e.m. BDv genera nella spira una corrente data da

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BDv}{R}, \quad (6)$$

dove R è la resistenza della spira. Dalla legge di Lenz si deduce che questa corrente deve circolare (e quindi $\mathcal{E}$ deve essere orientata) in senso orario in figura 8; essa si oppone alla variazione (la diminuzione di Φ_B) generando un campo nello stesso verso del campo esterno attraverso la spira.

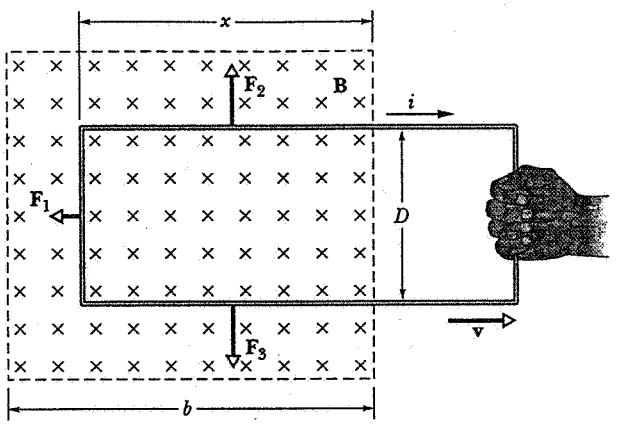


Figura 8. Quando la spira conduttrice chiusa viene estratta dal campo, in essa viene prodotta una corrente indotta i. La corrente dissipa energia per effetto Joule alla stessa velocità con cui viene effettuato lavoro meccanico sulla spira.

La corrente nella spira dà luogo alle forze magnetiche $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ che agiscono sui tre conduttori secondo l'equazione 28 del capitolo 34,

$$\mathbf{F} = i\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (7)$$

Poiché $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$ sono uguali in modulo ma opposte in verso, si cancellano l'un l'altra; $\mathbf{F}_1$, che è la forza che si oppone al movimento della spira, è data, in modulo, dalle equazioni 6 e 7

$$F_1 = iDB \text{ sen } 90° = \frac{B^2D^2v}{R}. \quad (8)$$

L'agente esterno che tira la spira deve esercitare su di essa una forza F uguale in modulo ad F_1, dato che si è assunto che la spira si muova con velocità costante. Deve quindi fornire una potenza

$$P = F_1v = \frac{B^2D^2v^2}{R}. \quad (9)$$

Si può anche calcolare che potenza viene dissipata nella spira, per effetto Joule, dalla corrente indotta. Questa è data da

$$P = i^2R = \left(\frac{BDv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2D^2v^2}{R}, \quad (10)$$

che è in perfetto accordo con l'equazione 9 che esprime la potenza meccanica fornita dall'agente esterno alla spira. Il lavoro fatto dall'agente esterno viene dissipato per effetto Joule come calore nella spira.

La figura 9 mostra una vista laterale della spira nel campo magnetico. In figura 9*a* la spira è ferma; in fi-

ISBN 88-408-0777-2

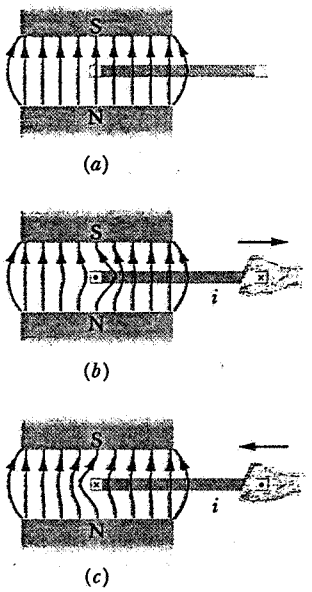


Figura 9. Linee di forza del campo magnetico che agiscono su una spira conduttrice in un campo magnetico quando la spira (*a*) è a riposo, (*b*) esce dal campo e (*c*) entra nel campo. Qualunque tentativo di muovere la spira in direzione ortogonale al campo dà luogo ad una forza che si oppone al movimento.

gura 9*b* la spira viene mossa verso destra; in figura 9*c* la spira viene mossa verso sinistra. Le linee di forza di **B** in queste figure rappresentano il campo risultante, somma del campo dovuto al magnete e del campo generato dalla eventuale corrente indotta. Secondo la visione di Faraday, in cui le linee di forza del campo magnetico vengono viste come nastri di gomma deformati (vedi par. 35-3), le linee di forza in figura 9 suggeriscono in modo convincente che l'agente esterno che muove la spira deve sempre vincere una forza che gli si oppone.

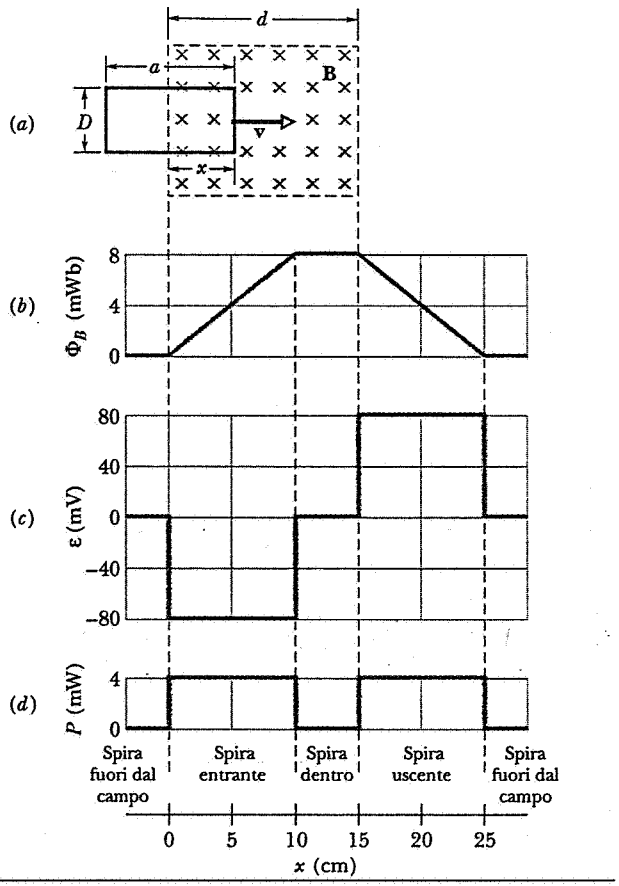


Figura 10. Esempio 2. (*a*) Una spira conduttrice chiusa viene sospinta a velocità costante attraverso una regione in cui vi è un campo magnetico uniforme **B**. (*b*) Il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione della coordinata x dell'estremità destra della spira. (*c*) La f.e.m. indotta in funzione di x. (*d*) La potenza dissipata per effetto Joule nella spira quando essa viene mossa.

Esempio 2 In figura 10*a* è rappresentata una spira rettangolare di resistenza R, larghezza D e lunghezza a che viene spostata con velocità costante v in una regione di lunghezza d in cui è presente un campo magnetico uniforme **B**, generato da un magnete. Si traccino in un grafico, in funzione della posizione x dell'estremità destra della spira, (*a*) il flusso Φ_B attraverso alla spira, (*b*) la f.e.m. indotta $\mathcal{E}$, (*c*) la potenza termica P nella spira. Si assuma $D = 4$ cm, $a = 10$ cm, $d = 15$ cm, $R = 16\ \Omega$, $B = 2.0$ T, e $v = 1.0$ m/s.

Soluzione (*a*) Il flusso Φ_B è nullo quando la spira è fuori dal campo; vale BDa quando la spira è completamente immersa nel campo; vale BDx quando la spira sta entrando nella regione a campo non nullo e $BD[a - (x - d)]$ quando ne sta uscendo. Queste conclusioni, che il lettore deve verificare, sono mostrate graficamente in figura 10*b*.

(*b*) La f.e.m. indotta $\mathcal{E}$ è data da $\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$, che si può scrivere

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx}\,v,$$

dove $d\Phi_B/dx$ è la pendenza della curva di figura 10*b*. La f.e.m. $\mathcal{E}$ è rappresentata, in funzione di x, in figura 10*c*. Usando lo stesso tipo di ragionamento impiegato nel caso della figura 8, si deduce dalla legge di Lenz che quando la spira entra nel campo magnetico la f.e.m. E agisce in senso antiorario, guardando dall'alto. Si noti che non vi è alcuna f.e.m. quando la spira è completamente immersa nel campo magnetico perché il flusso Φ_B non cambia nel tempo, come si può vedere in figura 10*b*.

(*c*) La potenza termica nella spira è data da $P = \mathcal{E}^2/R$. La si può calcolare elevando al quadrato l'ordinata della curva del grafico 10*c* e dividendo per R. Il risultato è riportato in figura 10*d*. Se si tiene conto degli effetti di bordo del campo magnetico, che in generale non possono essere trascurati (vedi problema 43 capitolo 35), gli angoli e i gradini dei grafici di figura 10 diventano delle curve smussate e continue. Cosa cambierebbe nelle curve di figura 10 se la spira venisse tagliata in modo da non formare più un percorso chiuso?

Esempio 3 Una barra di rame di lunghezza R ruota con velocità angolare ω in un campo magnetico uniforme **B**, come mostrato in figura 11. Si determini la f.e.m. $\mathcal{E}$ che si sviluppa tra gli estremi

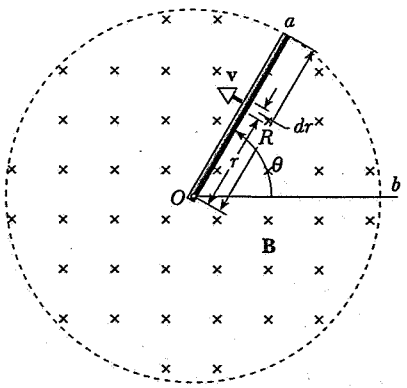


Figura 11. Esempio 3. Una bacchetta di rame ruota in un campo magnetico uniforme.

della barra. (Si potrebbe misurare questa f.e.m. mettendo una rotaia circolare conduttrice sul cammino tratteggiato in figura e connettendo un voltmetro tra la rotaia ed il punto O.)

Soluzione Se un filo di lunghezza dr viene mosso con velocità v in direzione normale ad un campo magnetico $\mathbf{B}$, si sviluppa una f.e.m. $d\mathcal{E}$ (vedi eq. 5) data da

$$d\mathcal{E} = Bv\,dr.$$

La barra può essere divisa in elementi di lunghezza dr, la cui velocità è $v = \omega r$. Ciascun elemento è perpendicolare a $\mathbf{B}$ e si muove in direzione perpendicolare a $\mathbf{B}$, sicché, poiché le f.e.m. $d\mathcal{E}$ dei vari elementi sono «in serie»,

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^R Bv\,dr = \int_0^R b\omega r\,dr = \tfrac{1}{2}B\omega R^2.$$

Altrimenti si può utilizzare il seguente approccio. Si consideri che in ogni istante il flusso attraverso il settore aOb in figura 11 è dato da

$$\Phi_B = BA = B(\tfrac{1}{2}R^2\theta),$$

dove $\frac{1}{2}R^2\theta$ è l'area del settore. Derivando si ottiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \tfrac{1}{2}BR^2\frac{d\theta}{dt} = \tfrac{1}{2}B\omega R^2.$$

dalla legge di Faraday si ha che questo è il modulo di $\mathcal{E}$ e si ha un perfetto accordo con il risultato precedente.

36-5 CAMPI ELETTRICI INDOTTI

Si consideri una spira di filo conduttore posta in un campo magnetico (come in figura 12*a*). Il campo, supposto uniforme sulla superficie della spira, può essere generato da un elettromagnete. Cambiando la corrente nell'elettromagnete, si può variare l'intensità del campo magnetico.

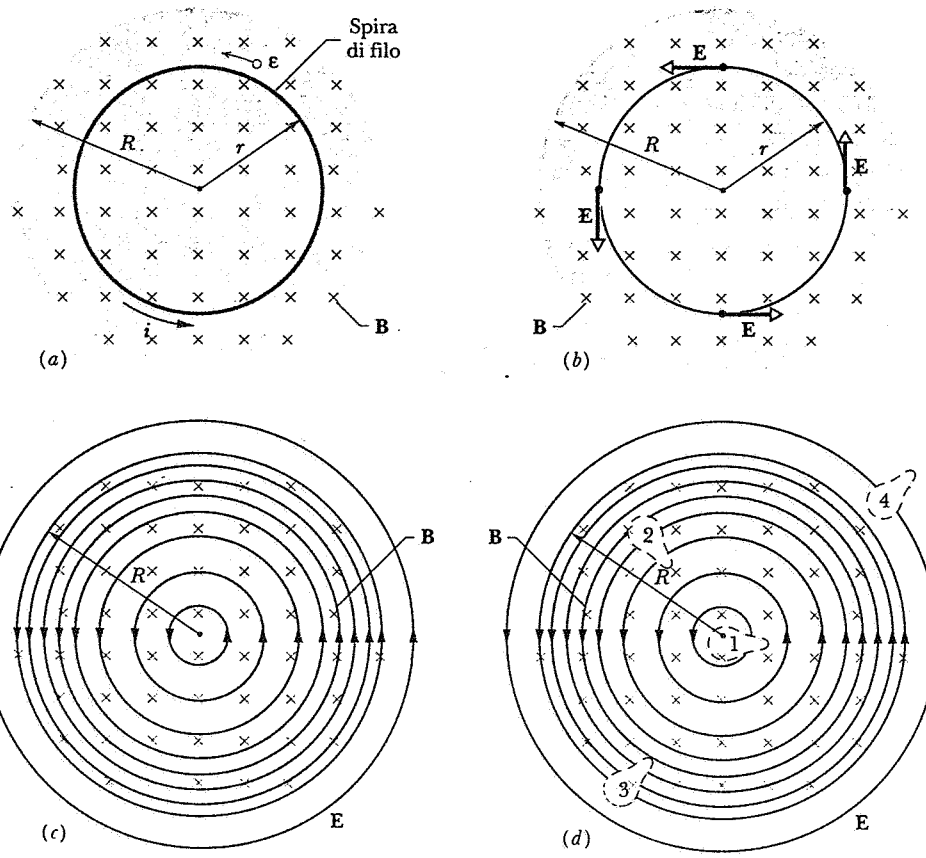


Figura 12. (*a*) Se il campo magnetico aumenta a velocità costante, appare una corrente costante, come mostrato, nel filo della spira di raggio r. (*b*) Campi elettrici indotti sono presenti nella regione anche quando la spira di filo viene tolta. (*c*) Illustrazione completa dei campi elettrici indotti, mostrati dalle linee di forza. (*d*) Quattro cammini chiusi simili lungo cui si può calcolare la f.e.m. indotta.

ISBN 88-408-0777-2

Variando **B**, varia nel tempo il flusso attraverso alla spira e, usando le leggi di Faraday e di Lenz, si possono stabilire intensità e verso della f.e.m. e della corrente indotte. Prima che il campo iniziasse a variare, nella spira non circolava alcuna corrente; mentre il campo varia, le cariche si muovono nella spira. Perché le cariche inizino a muoversi, devono essere accelerate da un campo elettrico. Tale *campo elettrico indotto* è presente quando il campo magnetico varia, in accordo con la legge di Faraday.

Il campo elettrico indotto è reale quanto un qualunque campo generato da cariche ferme; per esempio, esercita una forza $q_0\mathbf{E}$ su una carica di prova. Inoltre la presenza del campo elettrico non è legata alla presenza della spira; anche se la spira venisse rimossa il campo elettrico ci sarebbe lo stesso. Si potrebbe riempire la regione con un «gas» di elettroni o di atomi ionizzati; queste particelle sarebbero sottoposte al medesimo campo elettrico indotto **E**.

Si sostituisca, quindi, la spira di filo conduttore con un percorso circolare di raggio r arbitrario (vedi fig. 12*b*). Il percorso, che scegliamo in un piano perpendicolare alla direzione di **B**, racchiude una regione in cui il campo magnetico varia alla velocità $d\mathbf{B}/dt$. Si supponga che $d\mathbf{B}/dt$ sia indipendente dalla posizione su tutta l'area racchiusa dal percorso. Il percorso circolare racchiude un flusso Φ_B che varia alla velocità $d\Phi_B/dt$ a causa della variazione del campo magnetico. Poiché compare una f.e.m. lungo il percorso, compare anche un campo elettrico in tutti i punti della circonferenza. Per motivi di simmetria, si può dire che **E** deve avere lo stesso modulo in tutti i punti della circonferenza. Inoltre **E** non può avere componenti radiali, una conclusione che segue dalla legge di Gauss: si costruisca una superficie cilindrica ideale perpendicolare al piano di figura 12*b*. Se ci fosse una componente radiale non nulla, ci sarebbe un flusso del campo elettrico non nullo attraverso questa superficie, il che implicherebbe una carica netta all'interno del cilindro. Poiché non c'è una tale carica, il flusso del campo elettrico deve essere nullo e con lui anche la componente radiale di **E**. Il campo elettrico indotto è quindi tangenziale e le linee di forza del campo elettrico sono delle circonferenze concentriche, come in figura 12*c*.

Si consideri una carica di prova q_0 che si muova lungo il percorso circolare di figura 12*b*. Il lavoro L fatto sulla carica dal campo elettrico indotto in un giro è $\mathcal{E}q_0$. Equivalentemente si può esprimere il lavoro fatto come la forza elettrica q_0E per lo spostamento $2\pi r$ fatto in un giro. Uguagliando queste due espressioni di L e semplificando q_0, si ottiene

$$\mathcal{E} = E(2\pi r). \tag{11}$$

Il secondo membro dell'equazione 11 si può esprimere come integrale di linea di **E** lungo il cerchio, che si può scrivere in casi più generali (per esempio quando E non è costante o quando il percorso non è un cerchio) come

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \tag{12}$$

Si noti che l'equazione 12 si riduce direttamente all'equazione 11 nel caso particolare considerato di percorso circolare con **E** tangenziale costante.

Sostituendo la f.e.m. dall'equazione 12, la legge dell'induzione di Faraday ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$) si puo scrivere

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{13}$$

È in questa forma che la legge di Faraday appare come una delle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo. In questa forma, è evidente che la legge di Faraday implica che un campo magnetico variabile genera un campo elettrico.

In figura 12, si era supposto che il campo magnetico fosse crescente; cioè, sia $d\mathbf{B}/dt$ che $d\Phi_B/dt$ positivi. Per la legge di Lenz, la f.e.m. indotta si oppone a questa variazione, e così la corrente indotta crea un campo magnetico uscente dalla pagina. Poiché la corrente deve circolare in senso antiorario, le linee di forza del campo elettrico indotto **E** (che è la causa della corrente) devono essere anche loro in senso antiorario. Se, d'altro canto, il campo stesse diminuendo ($d\Phi_B/dt < 0$), le linee di forza del campo elettrico indotto sarebbero in senso orario, in modo che la corrente indotta si opporrebbe ancora alla variazione di Φ_B.

La legge di Faraday, nella forma dell'equazione 13, si può applicare a percorsi di qualunque forma, non solo al caso particolare del percorso circolare scelto in figura 12*b*. In figura 12*d* sono illustrati quattro cammini di questo tipo, tutti della stessa forma e della stessa area, ma posti in posizioni differenti rispetto al campo variabile. Per i percorsi 1 e 2, la f.e.m. indotta è la stessa perché questi cammini sono completamente immersi nel campo magnetico variabile ed hanno quindi lo stesso valore per $d\Phi_B/dt$. Tuttavia, sebbene la f.e.m. $\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ sia la stessa per i due cammini, la distribuzione dei vettori campo elettrico attorno ai cammini è differente, come indicato dalle linee di forza del campo elettrico. Per il cammino 3, la f.e.m. è minore perché sia Φ_B che $d\Phi_B/dt$ sono minori, e per il cammino 4 la f.e.m. indotta è nulla, anche se il campo elettrico non è nullo in ogni punto del percorso.

I campi elettrici indotti che sono generati dal processo dell'induzione, non sono associati a cariche, ma a un flusso del campo magnetico variabile. Sebbene

entrambi i tipi di campo elettrico esercitino forze sulle cariche, c'è una differenza fondamentale tra di essi. Il modo più semplice di rendersi conto di questa differenza è osservare che le linee di forza del campo elettrico associato ad una variazione del flusso del campo magnetico possono formare dei percorsi chiusi (*vedi* fig. 12); le linee di forza del campo elettrico associato a delle cariche non formano mai dei percorsi chiusi, ma partono da una carica positiva per terminare su una carica negativa.

L'equazione 15 del capitolo 30, che definiva la differenza di potenziale tra due punti a e b, è

$$V_b - V_a = \frac{-L_{ab}}{q_0} = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \qquad (14)$$

Se il potenziale deve avere un significato utile, questo integrale (e L_{ab}) deve avere lo stesso valore a prescindere dal cammino scelto per andare da un punto all'altro. Ciò è sempre stato vero in tutti i casi esaminati nei primi capitoli.

Un caso particolarmente interessante si ha quando i due punti a e b coincidono. Il cammino che li unisce è allora un percorso chiuso; V_a deve coincidere con V_b e l'equazione 14 si riduce a

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \qquad (15)$$

Tuttavia quando è in gioco un flusso del campo magnetico variabile, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ *non* è nullo, ma, in accordo con la legge di Faraday (vedi eq. 13), vale $-d\Phi_B/dt$. I campi elettrici associati a cariche stazionarie sono *conservativi*, ma quelli associati a campi magnetici variabili sono *non conservativi*; *vedi* paragrafo 8-2. I campi elettrici (non conservativi) generati per induzione, non possono essere descritti da un potenziale elettrico.

Una argomentazione simile si può impiegare per i campi magnetici prodotti da correnti. Anche le linee di forza di **B** formano percorsi chiusi (vedi figura 9 del capitolo 35) e di conseguenza il potenziale magnetico non ha significato in tali casi.

Esempio 4 Assumendo, in figura 12*b*, $R = 8.5$ cm e $dB/dt = 0.13$ T/s. (*a*) Si calcoli il modulo di **E** per $r = 5.2$ cm. (*b*) Si calcoli il modulo di **E** per $r = 12.5$ cm.

Soluzione (*a*) Dalla legge di Faraday (eq. 13) si ottiene

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

poiché $r < R$, il flusso attraverso il cammino circolare di raggio r vale

$$\Phi_B = B(\pi r^2),$$

sicché

$$E(2\pi r) = -(\pi r^2)\frac{dB}{dt}.$$

Ricavando E e prendendo il modulo, si trova

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| r. \qquad (16)$$

Si noti che il campo elettrico indotto E dipende da dB/dt, ma non da B. Per $r = 5.2$ cm, si ottiene, per il modulo di **E**

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| r = \tfrac{1}{2}(0.13 \text{ T/s})(5.2 \times 10^{-2} \text{ m})$$
$$= 0.0034 \text{ V/m} = 3.4 \text{ mV/m}.$$

(*b*) In questo caso si ha $r > R$, sicché tutto il flusso attraversa il cammino circolare. Così

$$\Phi_B = B(\pi R^2)$$

Dalla legge di Faraday (eq. 13) si ottiene

$$E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -(\pi R^2)\frac{dB}{dt}.$$

Risolvendo per E, si trova:

$$E = \frac{1}{2}\left|\frac{dB}{dt}\right| \frac{R^2}{r}. \qquad (17)$$

In questo caso viene indotto un campo elettrico anche in punti che sono ben fuori dal campo magnetico (variabile), un importante risultato che rende possibili i trasformatori (vedi par. 39-5). Per $R = 12.5$ cm, dall'equazione 17 si ottiene

$$E = \tfrac{1}{2}(0.13 \text{ T/s})\frac{(8.5 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{12.5 \times 10^{-2} \text{ m}}$$
$$= 3.8 \times 10^{-3} \text{ V/m} = 3.8 \text{ mV/m}.$$

Le equazioni 16 e 17 danno lo stesso risultato, come devono, per $r = R$. In figura 13 è riportato, in un grafico, l'andamento di $E(r)$ dato da queste due equazioni.

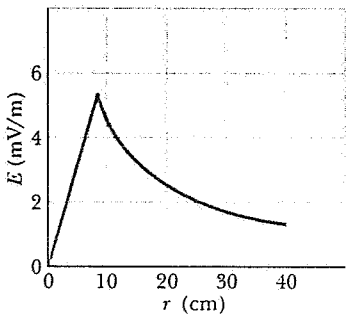


Figura 13. Il campo elettrico indotto trovato nell'esempio 4.

ISBN 88-408-0777-2

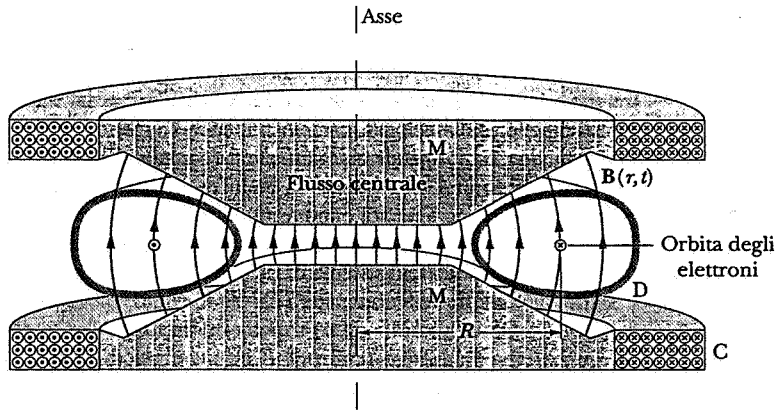


Figura 14. Una sezione di un betatrone: sono illustrate l'orbita degli elettroni accelerati e una «fotografia» del campo magnetico dipendente dal tempo in un certo istante durante il ciclo. Il campo magnetico viene prodotto dalle bobine C e la sua forma è determinata dalla sagomatura dei poli magnetici M.

36-6 IL BETATRONE*

Il betatrone è un dispositivo per accelerare elettroni (noti anche come particelle beta) fino ad alte energie usando i campi elettrici indotti da campi magnetici variabili. Questi elettroni di alta energia possono essere impiegati per la ricerca fondamentale in fisica o per produrre raggi x utili per la ricerca applicata nell'industria e a scopo medico, ad esempio nella terapia contro il cancro. Il betatrone fornisce una eccellente dimostrazione della «realtà» dei campi elettrici indotti. Tipicamente i betatroni sono in grado di fornire elettroni da 100 MeV, nel qual caso gli elettroni sono altamente relativistici ($v = 0.999987c$). I betatroni sono in grado di produrre enormi correnti, dell'ordine di $10^3 - 10^5$ A. Essi sono, tuttavia, macchine impulsate, che producono «pacchetti» di elettroni di durata dell'ordine del μs o meno separati da intervalli dell'ordine di 0.01 – 1 s.

In figura 14 è illustrata una sezione della struttura interna di un betatrone. Esso consiste di un grosso elettromagnete M, il cui campo (indicato dalle linee di forza) può essere variato cambiando la corrente che scorre nelle bobine C. Gli elettroni circolano nella camera a vuoto, a forma di ciambella, D. La loro orbita è normale al piano della figura. Gli elettroni escono dal foglio dalla parte sinistra della figura ed entrano dalla parte destra. Il campo magnetico ha diverse funzioni: (1) guida gli elettroni su un percorso circolare; (2) il campo magnetico variabile genera un campo elettrico indotto che accelera gli elettroni lungo il percorso; (3) mantiene costante il raggio dell'orbita; (4) inietta gli elettroni sull'orbita e li estrae quando hanno raggiunto l'energia finale; (5) fornisce una forza di richiamo che si oppone alla tendenza degli elettroni ad uscire dall'orbita, sia verticalmente che orizzontalmente. È notevole che il campo magnetico sia in grado di adempiere a tutti questi compiti.

Le bobine sono percorse da una corrente alternata e generano il campo magnetico mostrato in figura 15. Perché gli elettroni circolino nel verso indicato in figura 14 (antiorario guardando dall'alto), il campo magnetico deve essere diretto verso l'alto (che corrisponde alla parte positiva in figura 15). Inoltre, se gli elettroni devono essere accelerati (invece che decelerati), il campo deve essere crescente ($dB/dt > 0$ in modo che sia $d\Phi_B/dt > 0$) durante il ciclo. In questo modo solo il primo quarto di periodo di figura 15 risulta utile per il funzionamento del betatrone; gli elettroni vengono iniettati a $t = 0$ ed estratti a $t = T/4$. Nei rimanenti 3/4 di periodo l'apparato non fornisce fascio

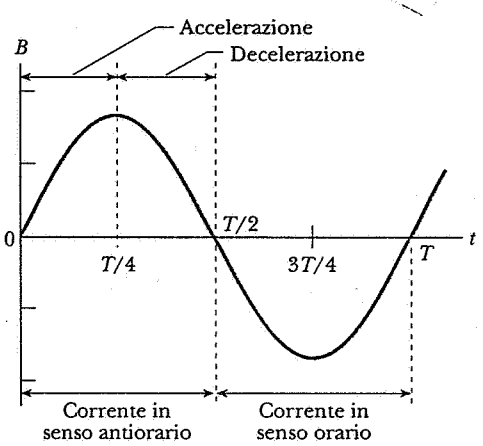


Figura 15. La variazione in funzione del tempo del campo magnetico B di un betatrone durante un ciclo.

Esempio 5 Si consideri un betatrone da 100 MeV, in cui il raggio dell'orbita sia di 84 cm. Nella regione racchiusa dall'orbita il campo magnetico cresca periodicamente (60 volte al secondo) da zero ad un campo massimo $B_{av,m} = 0.80$ T (in media), in un intervallo utile di un quarto di periodo, cioè di 4.2 ms. (*a*) Quanta energia guadagna mediamente in un giro un elettrone? (*b*) Qual'è la velocità *media* di un elettrone durante il processo di accelerazione?

* Per un articolo di rivista sugli sviluppi e le applicazioni di betatroni e apparecchiature simili, vedi Chris A. Kapetanakos and Phillip Sprangle, *Ultra-high-current Electron Induction Accelerators*, «Physics Today», febbraio 1985, pag. 58.

Soluzione (*a*) Il flusso attraverso la regione delimitata dall'orbita passa da zero ad un massimo di

$$\Phi_B = (B_{av,m})(\pi R^2)$$
$$= (0.80\ \text{T})(\pi)(0.84\ \text{m})^2 = 1.8\ \text{Wb}.$$

Il valor medio di $d\Phi_B/dt$ durante l'intervallo di accelerazione vale allora

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{av} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{1.8\ \text{Wb}}{4.2 \times 10^{-3}\ s} = 430\ \text{Wb/s}.$$

Dalla legge di Faraday (eq. 3) questa è anche la f.e.m. media in volt. Così l'energia degli elettroni aumenta al ritmo di 430 eV per giro, con questa variazione di flusso. Per raggiungere l'energia finale di 100 MeV, sono necessari circa 230 *000 giri dell'orbita, un percorso di circa 1200 km.*

(*b*) La durata del processo di accelerazione è di 4.2 ms, la lunghezza del percorso è di 1200 km. La velocità media durante l'accelerazione è quindi

$$\bar{v} = \frac{1200 \times 10^3\ \text{m}}{4.2 \times 10^{-3}\ \text{s}} = 2.86 \times 10^8\ \text{m/s}.$$

cioè il 95% della velocità della luce nel vuoto. La velocità finale degli elettroni, quando essi hanno raggiunto l'energia di 100 MeV, è del 99.9987% della velocità della luce nel vuoto.

36-7 INDUZIONE E MOTO RELATIVO *(Facoltativo)*

Nel paragrafo 35-7, si è visto che la classificazione degli effetti elettromagnetici come effetti puramente elettrici o puramente magnetici dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore. Cioè, ciò che in un sistema di riferimento è un campo magnetico può essere un misto di campo elettrico e di campo magnetico in un altro sistema di riferimento. Poiché la f.e.m. che deriva dal movimento dipende dalla velocità con cui si muove l'oggetto nel campo magnetico, essa dipende chiaramente dal sistema di riferimento dell'osservatore. Altri osservatori, in differenti sistemi di riferimento, misureranno velocità e intensità di campo magnetico differenti. È perciò essenziale, quando si calcolano le f.e.m. e le correnti indotte, specificare il sistema di riferimento dell'osservatore.

In figura 16*a* è mostrata una spira chiusa mossa a velocità v da un agente esterno (non illustrato) rispetto ad un magnete che genera un campo magnetico uniforme **B** in una certa regione. Per un osservatore S, a riposo rispetto al magnete impiegato per generare il campo magnetico **B**, la f.e.m. indotta è una *f.e.m. di movimento* perché la spira conduttrice è in moto rispetto all'osservatore.

Si consideri un portatore di carica positiva al centro del lato sinistro della spira. Per l'osservatore S, questa carica q è costretta a muoversi verso destra, insieme alla spira, con velocità **v** attraverso il campo magnetico **B** ed è quindi sottoposta alla forza magnetica $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (non mostrata in figura 16*a*). Questa forza fa sì che il portatore si muova in su (in direzione y) lungo il conduttore; acquista quindi una velocità di deriva $\mathbf{v}_d$, come mostrato in figura 16*a*.

La velocità di equilibrio della carica è ora **V**, la somma vettoriale di **v** e di $\mathbf{v}_d$. In questa situazione la forza magnetica $\mathbf{F}_B$ è

$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{V} \times \mathbf{B} \qquad (18)$$

in direzione (come al solito) perpendicolare alla velocità risultante **V** del portatore, come mostrato in figura 16*a*.

Se agisse unicamente $\mathbf{F}_B$, essa spingerebbe i portatori di carica fuori dal conduttore, attraverso la parete sinistra. Poiché ciò non

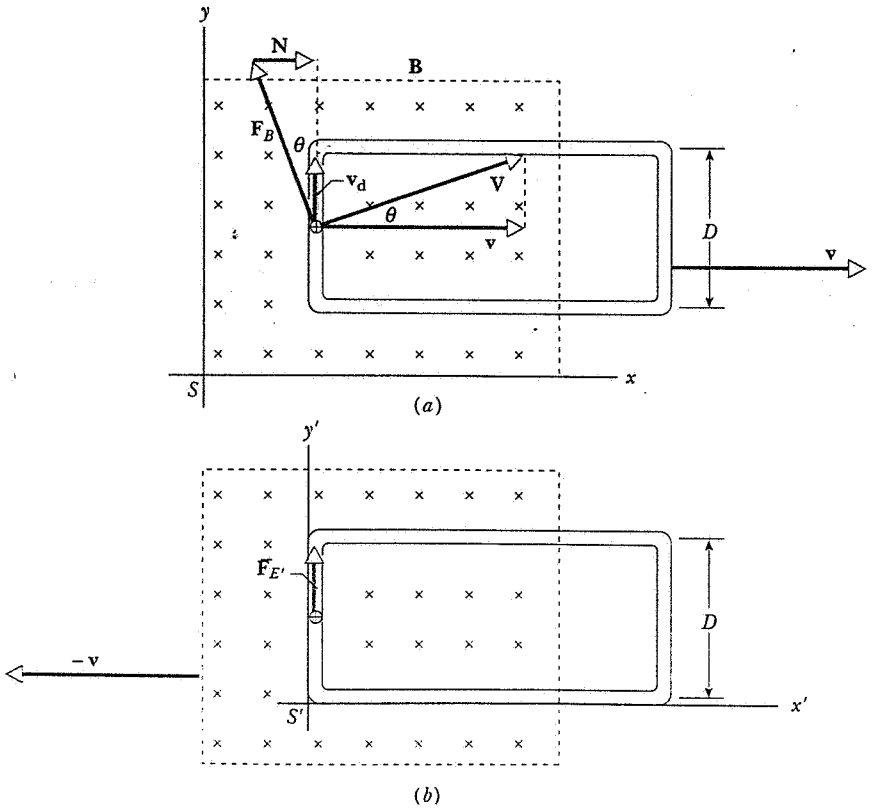


Figura 16. Una spira conduttrice chiusa si trova in moto relativo rispetto ad un magnete che genera il campo **B**. (*a*) Un osservatore S, in quiete rispetto al magnete, vede la spira muoversi verso destra ed osserva una forza magnetica $F_B\cos\theta$ che agisce sui portatori di carica positivi diretta verso l'alto. (*b*) Un osservatore S', in quiete rispetto alla spira, vede il magnete muoversi verso sinistra ed osserva una forza *elettrica* che agisce sui portatori di carica positivi diretta verso l'alto. In entrambe le figure vi sono delle forze interne di collisione (non mostrate) che impediscono ai portatori di carica di accelerare indefinitamente.

ISBN 88-408-0777-2

accade, la parete sinistra del conduttore deve esercitare una forza normale N sui portatori (vedi fig. 16*a*) di modulo tale che v_d sia parallela all'asse del filo; in altre parole, N deve cancellare esattamente la componente orizzontale di $\mathbf{F}_B$, lasciando solo la componente $F_B \cos\theta$ che giace lungo la direzione del conduttore. Anche quest'ultima componente della forza che agisce sul portatore viene cancellata, in questo caso dalla media delle forze impulsive che agiscono sul portatore durante le collisioni interne mentre si muove nel filo con velocità (costante) v_d.

L'energia cinetica del portatore di carica rimane costante mentre si muove lungo il filo. Ciò è in accordo col fatto che la risultante delle forze che agiscono sul portatore ($= \mathbf{F}_B + \overline{\mathbf{F}}_i + \mathbf{N}$) è nulla. Il lavoro fatto da $\mathbf{F}_B$ è nullo perché le forze magnetiche, agendo in direzione normale alla velocità della carica in moto, non possono fare un lavoro su quella carica. Così il lavoro (negativo) fatto sul portatore dalla forza media associata alle collisioni interne deve essere cancellato esattamente dal lavoro (positivo) fatto sul portatore dalla forza N. In definitiva, N è fornita dall'agente esterno che tira la spira attraverso il campo magnetico ed il lavoro meccanico fatto da tale agente viene trasformato in energia interna (termica) nella spira, come si è visto nel paragrafo 36-4.

Calcoliamo ora il lavoro dL fatto sul portatore nell'intervallo di tempo dt dalla forza N; cioè

$$dL = N(v\,dt) \tag{19}$$

in cui $v\,dt$ è la distanza che la spira (ed il portatore) percorre verso destra in figura 16*a* nell'intervallo di tempo dt. Si può scrivere per N (vedi figura 16*a* ed equazione 18)

$$N = F_B \operatorname{sen}\theta = (qVB)(v_d/V) = qBv_d. \tag{20}$$

Sostituendo l'equazione 20 nella 19 si ottiene

$$\begin{aligned} dL &= (qBv_d)(v\,dt) \\ &= (qBv)(v_d\,dt) = qBv\,ds \end{aligned} \tag{21}$$

in cui ds ($= v_d\,dt$) è la distanza percorsa dal portatore lungo il filo nell'intervallo di tempo dt.

Il lavoro totale si ottiene integrando l'equazione 21 lungo la spira

$$L = \oint dL = qBvD. \tag{22}$$

Ciò perché i contributi della parte superiore e della parte inferiore della spira, essendo uguali in modulo ed opposti in segno, si cancellano l'un l'altro e perché nella parte della spira che si trova fuori dal campo magnetico non viene fatto alcun lavoro. Un agente fisico che compie lavoro sui portatori di carica, generando in questo modo una corrente in una spira conduttrice chiusa, può essere considerato come una f.e.m.. Usando l'equazione 22 si trova

$$\mathcal{E} = \frac{L}{q} = \frac{qBvD}{q} = BDv, \tag{23}$$

che è in accordo col risultato ottenuto dalla legge dell'induzione di Faraday; vedi equazione 5. La f.e.m. di movimento è quindi connessa intimamente alla deflessione di una particella carica in moto in un campo magnetico.

Si consideri ora come apparirebbe la situazione di figura 16*a* ad un osservatore S' *a riposo rispetto alla spira*. Per questo osservatore, il magnete si muove verso sinistra in figura 16*b* con velocità $-\mathbf{v}$, e la carica q non si muove in direzione x' con la spira, ma deriva in senso orario lungo la spira. S' misura una f.e.m. $\mathcal{E}'$ che viene giustificata, a livello microscopico, postulando che il magnete in moto induca nella spira un campo elettrico $\mathbf{E}'$. La f.e.m. $\mathcal{E}'$ è legata ad $\mathbf{E}'$ dall'equazione 12

$$\mathcal{E}' = \oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}.$$

Il campo indotto $\mathbf{E}'$, che ha la stessa origine dei campi discussi nel paragrafo 36-5, esercita una forza $q\mathbf{E}'$ sul portatore di carica.

Il campo elettrico indotto $\mathbf{E}'$ che è efficace per produrre la corrente, esiste solo nel lato sinistro della spira. (Svolgendo l'integrale dell'equazione 12 lungo la spira, i contributi del lato superiore e del lato inferiore della spira, e la parte della spira fuori dal campo magnetico danno contributo nullo.) Usando l'equazione 12 si ottiene

$$\mathcal{E}' = E'D. \tag{24}$$

Per moti a velocità molto minori di quella della luce nel vuoto, le f.e.m. date dalle equazioni 23 e 24 devono coincidere, perché il moto relativo della spira rispetto al magnete è identico nei due casi di figura 16. Uguagliando i secondi membri

$$E'D = BDv,$$

o

$$E' = vB. \tag{25}$$

In figura 16*b* il vettore E' è diretto verso l'alto lungo l'asse del lato sinistro della spira perché è in questa direzione che si osserva il moto delle cariche positive. Le direzioni di $\mathbf{v}$ e di $\mathbf{B}$ sono mostrate chiaramente in figura. Si nota allora che l'equazione 25 è in accordo con la relazione vettoriale più generale

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{26}$$

L'equazione 26 non è stata dimostrata tranne che nel caso particolare di figura 16; tuttavia questa è valida in generale, indipendentemente dall'angolo tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$.

L'equazione 26 si interpreta nel seguente modo. L'osservatore S, a riposo rispetto al magnete vede solo un campo magnetico. Per tale osservatore, la forza deriva dal moto della carica nel campo magnetico $\mathbf{B}$. L'osservatore S', a riposo rispetto alla spira vede anche un campo elettrico $\mathbf{E}'$ ed attribuisce la forza che agisce sulla carica (inizialmente a riposo rispetto ad S') al campo elettrico. S sostiene che la forza è di natura puramente magnetica, mentre S' sostiene che la forza è di natura puramente elettrica. Dal punto di vista di S, la f.e.m. indotta è data da $\oint(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$. Dal punto di vista di S', la stessa f.e.m. indotta è data da $\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{s}$, dove $\mathbf{E}'$ è il vettore campo elettrico (indotto) che S' osserva nei vari punti del circuito.

Per un terzo osservatore S'', in moto relativo sia rispetto al magnete che rispetto alla spira, la forza che fa muovere le cariche lungo la spira non è né di natura puramente magnetica né di natura puramente elettrica, ma un po' dell'una e un po' dell'altra. In somma, nell'equazione

$$\mathbf{F}/q = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

in sistemi di riferimento diversi si osservano diversi valori di $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{v}$, ma, quando questi vengono utilizzati, in tutti i sistemi di riferimento si osserva il medesimo valore di $\mathbf{F}/q$ e tutti gli osservatori osservano nella spira la stessa f.e.m. indotta (che dipende unicamente dal moto *relativo*). Cioè, la forza totale (e quindi l'accelerazione) è la stessa per tutti gli osservatori, ma ogni osservatore va-

luta in maniera differente i contributi di natura elettrica e di natura magnetica alla forza totale.

Il punto fondamentale è che ciò che ad un osservatore sembra un campo magnetico può sembrare un misto di campo elettrico e di campo magnetico ad un altro osservatore in un altro sistema di riferimento inerziale. Entrambi gli osservatori, tuttavia, si trovano d'accordo sul risultato globale misurabile, la corrente nella spira nel caso di figura 16. Si deve quindi concludere che campi magnetici e campi elettrici non sono indipendenti l'uno dall'altro e non hanno un'esistenza separata univocamente definibile; essi dipendono dal sistema di riferimento inerziale in cui li si osserva, come si era già visto nel paragrafo 35-7.

Tutti i risultati ottenuti in questo paragrafo sono stati ricavati nell'ipotesi che la velocità di S rispetto a S' fosse molto minore della velocità della luce c. Se v è confrontabile con c, bisogna applicare le trasformazioni relativistiche appropriate. In questo caso, si troverebbe che la f.e.m. indotta, misurata in S e in S', non sarebbe la stessa e il campo elettrico indotto non sarebbe dato dall'equazione 26. Tuttavia, definendo accuratamente tutte le quantità in modo adeguato ad una trattazione relativistica, si troverebbe ancora che le leggi fondamentali dell'elettromagnetismo, compresa la legge di Faraday, valgono in tutti i sistemi di riferimento inerziali*. Infatti sono state queste considerazioni che hanno portato Einstein a scoprire la teoria della relatività ristretta; nel linguaggio della relatività ristretta, si dice che le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz. ■

* Per una discussione accurata delle f.e.m. derivanti dal moto in caso di velocità non necessariamente molto inferiori a c, vedi Murray D. Sirkis, *Applications of Special Relativity to a Simple System in which a Motional emf Exists*, «American Journal of Physics», giugno 1986, pag. 538.

Ulteriori considerazioni sulle trasformazioni relativistiche dei campi elettrici e magnetici si possono trovare in Robert Resnick, *Introduzione alla relatività ristretta*, Casa Editrice Ambrosiana, 1968, cap. 4.

DOMANDE

1. Si mostri che 1 volt = 1 weber/secondo.
2. Le f.e.m. e le correnti indotte differiscono in qualche modo dalle f.e.m. e dalle correnti fornite da una batteria collegata ad una spira chiusa?
3. Il modulo della tensione elettrica indotta in una bobina attraverso cui si muove un magnete dipende dall'intensità del campo magnetico del magnete? Se sì, si spieghi in che modo.
4. Si spieghi con parole proprie la differenza tra un campo magnetico **B** e il flusso di un campo magnetico Φ_B. Sono vettori o scalari? In che unità di misura si esprime ciascuno di essi? Che relazione c'è tra le unità di misura? Sono (uno, entrambi o nessuno) definiti in un dato punto dello spazio?
5. Una particella ferma può essere messa in moto da un campo magnetico? Se no, perché? Se sì, come? Si considerino sia campi statici che campi variabili.
6. Si giustifichino qualitativamente le configurazioni di linee di forza del campo magnetico nelle figure 9*a-c*.
7. Nella legge di Faraday, la f.e.m. indotta dipende dalla resistenza del circuito? Se sì, come?
8. Si consideri una sbarra magnetica che cade lungo l'asse di un lungo tubo di rame. Si descrivano il moto del magnete e gli scambi di energia che hanno luogo. Si trascuri la resistenza dell'aria.
9. State giocando con una spira di metallo, muovendola avanti e indietro in un campo magnetico, come in figura 9. Come potete sapere, senza esaminarla accuratamente, se la spira è chiusa o è tagliata?
10. In figura 17 è illustrata una guida di legno inclinata che per un tratto attraversa un intenso campo magnetico. Si descriva il moto di un disco di rame che rotola lungo la guida dall'alto al basso.
11. In figura 18 è mostrato un anello di rame appeso al soffitto con due fili. Descrivere in dettaglio il modo più efficiente in cui si potrebbe usare una sbarra magnetica per far oscillare l'anello avanti e indietro.

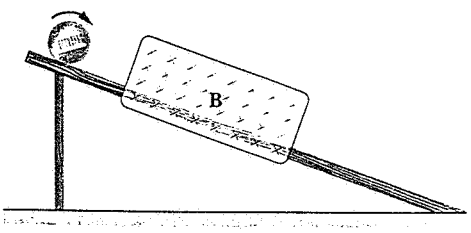


Figura 17. Domanda 10.

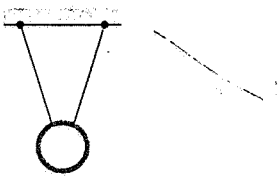


Figura 18. Domanda 11.

12. Si consideri un lungo solenoide al cui interno si muove, lungo l'asse, una sbarra magnetica. Il moto del magnete induce una f.e.m. nel solenoide? Spiegare la risposta.
13. Si considerino i due anelli conduttori di figura 19. Sia d la distanza tra i centri dei due anelli lungo l'asse comune. Se nell'anello più grande viene improvvisamente fatta circolare, con una batteria non mostrata in figura, una corrente i in senso orario (guardando da sinistra verso destra), (*a*) in che verso circola la corrente nel secondo anello? (*b*) In che direzione e verso è rivolta la forza che agisce sull'anello più piccolo (sempre che ce ne sia una)?

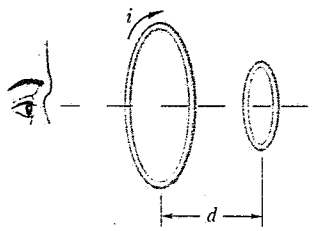


Figura 19. Domanda 13.

ISBN 88-408-0777-2

14. In che verso è rivolta la f.e.m. indotta nella bobina Y di figura 20 (*a*) quando la bobina Y viene avvicinata alla bobina X? (*b*) Quando la corrente in X viene diminuita senza cambiare la posizione relativa delle bobine?

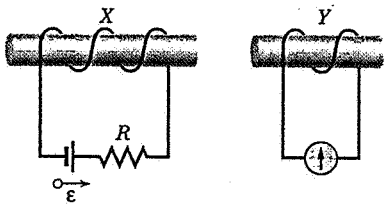


Figura 20. Domanda 14.

15. Il polo nord di un magnete viene allontanato da un anello di rame, come mostrato in figura 21. In che verso è diretta la corrente nella parte dell'anello più lontana dal lettore?

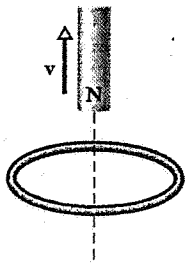


Figura 21. Domanda 15.

16. Si consideri una spira conduttrice circolare che si muove con velocità costante attraverso regioni di campo magnetico costante diretto normalmente alla pagina, come indicato in figura 22. In quali delle sette posizioni indicate la f.e.m. indotta è (*a*) in senso orario, (*b*) in senso antiorario, (*c*) nulla?

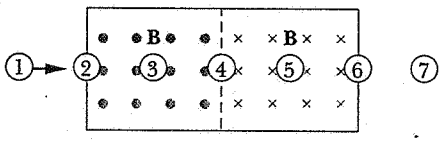


Figura 22. Domanda 16.

17. Un piccolo solenoide, in cui scorre una corrente costante, viene avvicinato ad una spira conduttrice, come mostrato in figura 23. In che verso è diretta la f.e.m. indotta, per l'osservatore rappresentato in figura?

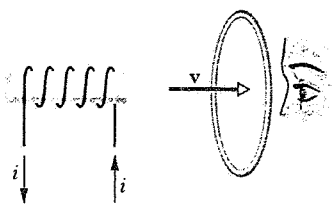


Figura 23. Domanda 17.

18. La resistenza R del circuito di sinistra, in figura 24, viene aumentata a velocità costante. In che senso circola la corrente indotta nel circuito di destra?

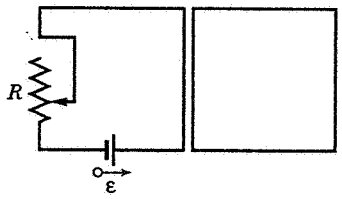


Figura 24. Domanda 18.

19. In che verso è diretta, attraverso la resistenza R di figura 25, la corrente indotta (*a*) immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore S, (*b*) dopo un po' di tempo che S è chiuso e (*c*) immediatamente dopo l'apertura di S? (*d*) Quando l'interruttore viene mantenuto chiuso, da che parte dell'avvolgimento più lungo escono le linee di forza del campo magnetico? Questo è il polo nord equivalente della bobina. (*e*) Come fanno gli elettroni di conduzione della bobina che contiene R a sapere cosa accade al flusso all'interno della bobina lunga? Che cosa li fa muovere?

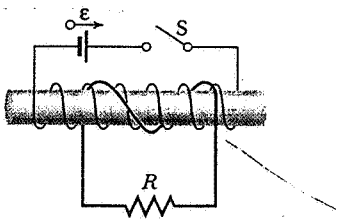


Figura 25. Domanda 19.

20. È possibile che una corrente indotta generi un campo magnetico **B** nello stesso verso del campo magnetico che la ha indotta? Giustificare la risposta.

21. Riassumere in una sola frase tutti i modi per determinare il verso della f.e.m. indotta.

22. Si consideri la spira di filo conduttore rappresentata in figura 26. Essa ruota, con velocità angolare costante, attorno all'asse x. Nella regione è presente un campo magnetico B, uniforme, diretto nel verso delle y crescenti. In che parte della rotazione la corrente indotta nella spira è (*a*) diretta da P a Q, (*b*) diretta da Q a P e (*c*) nulla? Ripetere l'esercizio nel caso che la spira ruoti in senso opposto a quello mostrato in figura.

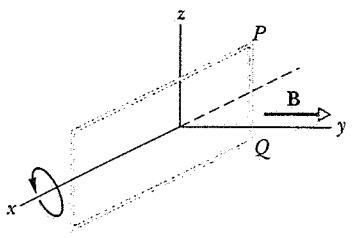


Figura 26. Domanda 22.

23. In figura 27 il tratto di filo mobile si muove verso destra con velocità costante v. Nel circuito circola una corrente indotta i in senso antiorario. In che verso è orientato il campo magnetico (supposto uniforme, costante nel tempo e in direzione ortogonale alla pagina) nella regione A?

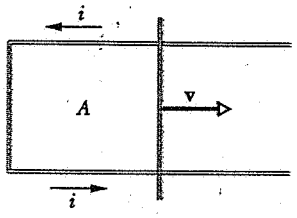


Figura 27. Domanda 23.

24. La spira conduttrice di figura 28 viene estratta dal campo magnetico in cui si trova, tirandola verso l'alto. (*a*) In che direzione circola la corrente indotta? (*b*) Trascurando il peso della spira, è necessaria una forza per estrarre la spira? (*c*) L'energia totale dissipata nella spira, dipende dal tempo impiegato per estrarla?

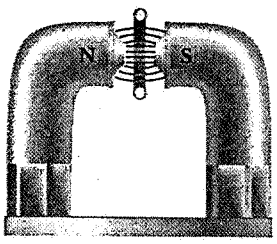


Figura 28. Domanda 24.

25. Si consideri una spira piana conduttrice chiusa, immersa in un campo magnetico uniforme. In quali modi si può muovere la spira senza indurre in essa una f.e.m.? Si considerino sia moti traslazionali che rotazionali.
26. In figura 29 è illustrata una striscia di rame, libera di oscillare come un pendolo attorno al punto O in un campo magnetico ad essa perpendicolare. Si spieghi perché, se nella striscia sono ricavate delle fessure (come in figura), essa oscilla liberamente, mentre una striscia senza fessure viene fortemente frenata (*smorzamento magnetico*). (*Suggerimento*: si usi la legge di Lenz; si considerino i percorsi su cui si muovono i portatori di carica se devono opporsi al moto della striscia)

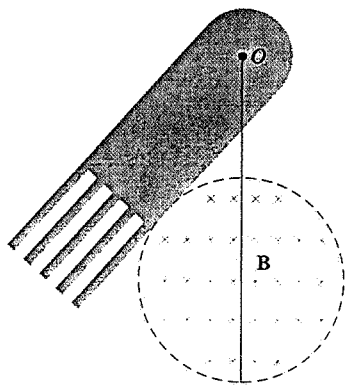


Figura 29. Domanda 26.

27. Si consideri un foglio conduttore che giace in un piano ortogonale ad un campo magnetico **B**, come mostrato in figura 30. (*a*) Se **B** cambia improvvisamente, l'intera variazione non viene rivelata immediatamente in P (schermaggio elettromagnetico). Si spieghi il motivo. (*b*) Se la resistenza del foglio fosse nulla, la variazione non verrebbe mai rivelata in P. Perché? (*c*) Se **B** varia in modo periodico con una frequenza elevata e il foglio conduttore è fatto di un materiale a bassa resistenza, la regione intorno a P è quasi completamente schermata dalle variazioni di flusso. Spiegare. (*d*) Perché un tale conduttore non è efficace come schermo per campi magnetici statici?

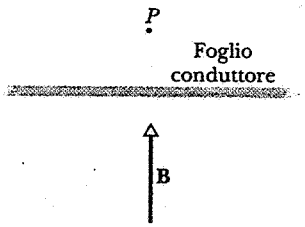


Figura 30. Domanda 27.

28. (*a*) In figura 12*b* è necessario che il cerchio di raggio r sia una spira conduttrice perché vi siano **E** ed $\mathcal{E}$? (*b*) Se il cerchio di raggio r non fosse concentrico col campo magnetico (diciamo, ad esempio, spostato un po' a sinistra), $\mathcal{E}$ cambierebbe? Cambierebbe il campo elettrico **E** nei vari punti del cerchio? (*c*) Per un cerchio concentrico di raggio r, con $r > R$, esiste una f.e.m.? Esistono campi elettrici?
29. Si considerino un anello di rame ed un anello di legno delle stesse dimensioni, messi in modo tale che la variazione del campo magnetico attraverso essi sia uguale. Si confrontino i campi elettrici indotti nei due anelli.
30. Si consideri un aereo di linea in volo a quota costante sopra l'Alaska, dove le linee di forza del campo magnetico terrestre hanno una grande componente verso il basso. In quale delle ali (destra o sinistra) vi sono più elettroni?
31. Come è possibile che le f.e.m. indotte lungo i cammini 1 e 2 di figura 12*d* siano uguali? I campi elettrici indotti sono molto più deboli nei dintorni del cammino 1 che nei dintorni del cammino 2, come si vede dalla spaziatura delle linee di forza. Vedere anche figura 13.
32. Il funzionamento del ciclotrone (vedi par. 34-3) è basato sulla *risonanza*. Vale la stessa cosa anche per il betatrone? Discutere la risposta.
33. Si dimostri che, nel betatrone di figura 14, le linee di forza di **B** sono tracciate in modo coerente con il verso di rotazione degli elettroni.
34. Si consideri il betatrone di figura 14. Si supponga di volere aumentare il raggio dell'orbita degli elettroni aggiungendo improvvisamente una quantità addizionale di flusso $\Delta\Phi_B$ (generato alimentando improvvisamente una bobina ausiliaria non raffigurata). Le linee di forza del campo magnetico **B** associato a questo flusso addizionale devono essere nello stesso verso delle linee di forza mostrate in figura o in verso opposto? Si supponga che il campo magnetico sull'orbita rimanga praticamente invariato da questa variazione di flusso.

ISBN 88-408-0777-2

35. Perché, nel betatrone di figura 14, il nucleo in ferro del magnete è costruito in modo laminare invece di essere un unico blocco, come nel ciclotrone?
36. In figura 16*a* si vede che sui portatori di carica del lato sinistro della spira agisce una forza ($F_B \cos\theta$). Tuttavia, se nella spira deve circolare una corrente, che in effetti c'è, è necessario che qualche tipo di forza agisca anche sui portatori negli altri tre lati della spira al fine di mantenere in questi la stessa velocità di deriva v_d. Quale ne è la fonte? (*Suggerimento*: se il lato sinistro fosse l'unico conduttore e gli altri tre lati fossero isolanti, non si accumulerebbe carica positiva in alto e carica negativa in basso?)

PROBLEMI

Paragrafo 36-2 La legge dell'induzione di Faraday

1. In certi punti dell'emisfero nord, il campo magnetico terrestre ha una intensità di 42 mT ed è diretto verso il basso con un angolo di 57° rispetto alla verticale. Si calcoli il flusso attraverso una superficie orizzontale di 2.5 m^2; vedi figura 31.

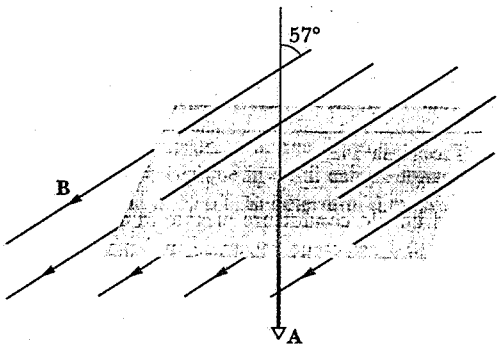


Figura 31. Problema 1.

2. Si consideri un'antenna UHF circolare per televisione del diametro di 11.2 cm. Il campo magnetico del segnale TV, supposto uniforme, sia normale al piano della spira e, in un certo momento, la sua intensità cambi alla velocità di 157 mT/s. Si determini la f.e.m. nell'antenna.
3. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira illustrata in figura 32 sia dato dalla seguente relazione

$$\Phi_B = 6t^2 + 7t,$$

dove Φ_B è espresso in milliweber e t in secondi. (*a*) Si calcoli il modulo della f.e.m. indotta nella spira a $t = 2.0$ s. (*b*) In che direzione scorre la corrente attraverso il resistore?

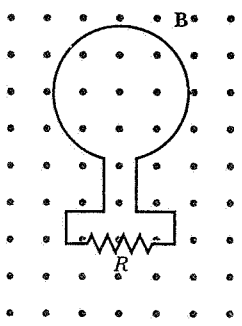


Figura 32. Problemi 3 e 11.

4. Il campo magnetico attraverso una spira circolare di raggio 16 cm e di resistenza 8.5 Ω, cambia nel tempo come mostrato in figura 33. Si calcoli la f.e.m. nella spira in funzione del tempo. Si considerino gli intervalli di tempo (*a*) da $t = 0$ a $t = 2$ s, (*b*) da $t = 2$ a $t = 4$ s e (*c*) da $t = 4$ a $t = 8$ s. Il campo magnetico (uniforme) sia ortogonale al piano della spira.

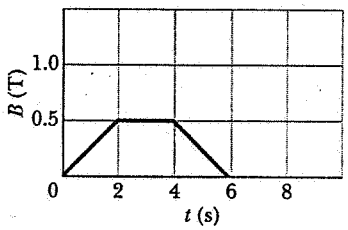


Figura 33. Problema 4.

5. Si consideri un anello di filo di rame (diametro del filo = 2.50 mm) di 10.4 cm di diametro giacente in un piano ortogonale ad un campo magnetico uniforme. (*a*) Calcolare la resistenza del filo. (Vedi tabella 1 del capitolo 32.) (*b*) A che velocità deve cambiare il campo magnetico se si vuole che nella spira circoli una corrente indotta di 9.66 A?
6. Una antenna circolare di area A e di resistenza R è perpendicolare ad un campo magnetico uniforme **B**. Il campo diminuisce linearmente passando da una intensità B a zero in un intervallo di tempo Δt. Si determini un'espressione per l'energia dissipata nella spira.
7. Si supponga che la corrente nel solenoide dell'esempio 1 non cambi come nell'esempio, ma secondo la legge $i = 3.0\,t + 1.0\,t^2$, dove i è espressa in ampere e t è espresso in secondi. (*a*) Si tracci in un grafico l'andamento della f.e.m. indotta nella bobina in funzione del tempo nell'intervallo 0 - 4 s. (*b*) Assumendo che la resistenza della bobina sia di 0.15 Ω, che corrente circola in essa a $t = 2.0$ s?
8. In figura 34 è raffigurata una bobina, formata da 120 spire di raggio 1.8 cm, di resistenza totale 5.3 Ω. Al suo interno è infilato un solenoide come quello dell'esempio 1. Se la corrente che scorre nel solenoide viene variata come nell'esempio, (*a*)

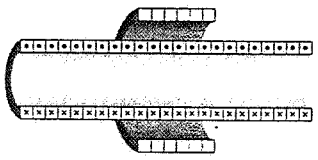


Figura 34. Problema 8.

che corrente viene indotta nella bobina esterna mentre varia la corrente nel solenoide? (*b*) Come fanno gli elettroni di conduzione della bobina a «sapere» che si devono muovere per creare una corrente? Dopo tutto, il flusso del campo magnetico è confinato all'interno del solenoide.

9. Si consideri una spira circolare di filo di rame (diametro del filo = 1.10 mm), lunga 52.5 cm. La spira sia posta in un campo magnetico uniforme ad essa perpendicolare, che cresce al ritmo costante di 9.82 mT/s. Che potenza viene dissipata nella spira?

10. Si consideri una spira costituita da due semicerchi identici, di raggio 3.7 cm, che giacciono in piani mutuamente ortogonali. La spira è stata costruita piegando una spira circolare lungo un diametro fino a rendere le due metà mutuamente ortogonali. La spira si trovi in un campo magnetico uniforme di intensità 76 mT diretto ortogonalmente al suddetto diametro ed in direzione tale da formare angoli di 62° e di 28° con i piani in cui giacciono i due semicerchi, come mostrato in figura 35. Il campo magnetico si annulla linearmente nel tempo in un intervallo di 4.5 ms. Calcolare la f.e.m. indotta.

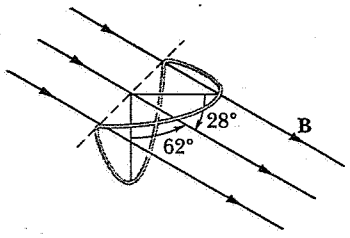


Figura 35. Problema 10.

11. Sia $\Phi_B(0)$ il flusso del campo magnetico attraverso la spira di figura 32 al tempo $t = 0$. Successivamente il campo magnetico **B** vari in modo continuo ma non specificato in intensità e direzione in modo che al tempo t il flusso del campo magnetico sia $\Phi_B(t)$. (*a*) Si dimostri che la carica netta $q(t)$ che ha attraversato il resistore nell'intervallo di tempo tra zero e t è

$$q(t) = \frac{1}{R}[\Phi_B(0) - \Phi_B(t)],$$

indipendentemente dal modo in cui è cambiato **B**. (*b*) Nel caso particolare $\Phi_B(0) = \Phi_B(t)$ si ottiene $q(t) = 0$. La corrente indotta deve necessariamente essere sempre nulla tra 0 e t?

12. Attorno ad un nucleo cilindrico (area della sezione = 12.2 cm^2), sono avvolte 125 spire di filo di rame isolato. I due capi dell'avvolgimento sono collegati ad un resistore. La resistenza totale del circuito sia di 13.3 Ω. Un campo magnetico applicato dall'esterno uniforme longitudinale nel nucleo passa da 1.57 T a 1.57 T nell'altro verso in 2.88 ms. Quanta carica scorre attraverso il circuito? (*Suggerimento*: vedi problema 11.)

13. Si consideri un campo magnetico uniforme **B**, la cui intensità varia nel tempo con velocità costante dB/dt. Si immagini ora di avere una massa m di rame con cui formare un filo di raggio r da impiegare per costruire una spira circolare di raggio R. Si dimostri che la corrente indotta nella spira è indipendente dai raggi del filo e della spira e. supponendo **B** perpendicolare alla spira, è data da

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt},$$

dove ρ è la resistività e δ è la densità del rame.

14. Si consideri una spira conduttrice quadrata di lato 2.3 m ortogonale ad un campo magnetico uniforme. Come mostrato in figura 36, metà della superficie della spira sia immersa nel campo magnetico. La spira contenga una batteria da 2.0 V con resistenza interna trascurabile. Se l'intensità del campo magnetico varia secondo la legge $B = 0.042 - 0.87t$, con B in tesla e t in secondi, quale è la f.e.m. totale nel circuito?

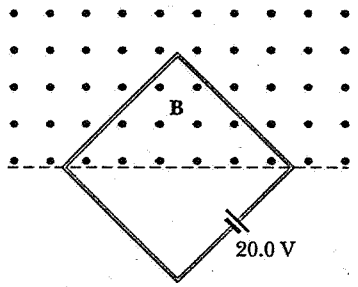


Figura 36. Problema 14.

15. Si consideri un filo conduttore piegato in archi di cerchio di raggio $r = 10.4$ cm come mostrato in figura 37. Ogni arco sottenda un angolo al centro di 90°. *ab* giaccia nel piano *xy*, *bc* nel piano *yz* e *ca* nel piano *zx*. (*a*) Nella regione vi sia un campo magnetico uniforme diretto nel verso delle x crescenti la cui intensità aumenta nel tempo ad un ritmo di 3.32 mT/s. Si calcoli la f.e.m. indotta. (*b*) Qual è il verso della f.e.m. indotta nel segmento *bc*?

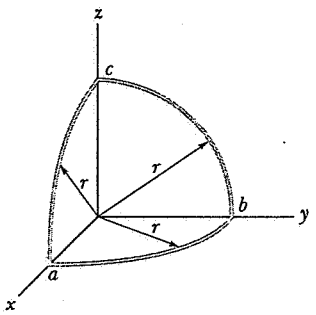


Figura 37. Problema 15.

16. Si consideri la situazione illustrata in figura 38, in cui $a = 12$ cm e $b = 16$ cm. La corrente nel filo rettilineo sia data da $i =$

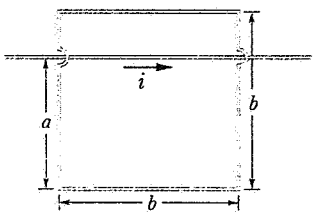


Figura 38. Problema 16.

ISBN 88-408-0777-2

$4.5t^2 - 10t$, dove i è espressa in ampere e t in secondi. Determinare la f.e.m. nella spira quadrata a $t = 3.0$ s.

17. In figura 39, il lato del quadrato è di 2.0 cm. Nella regione vi è un campo magnetico, in direzione normale ed uscente dalla pagina, la cui intensità è data da $B = 4t^2y$, dove B è espresso in tesla, t in secondi e y in metri. Si determinino la f.e.m. indotta lungo il quadrato a $t = 2.5$ s ed il suo verso.

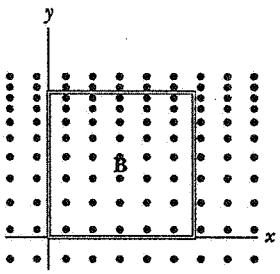


Figura 39. Problema 17.

Paragrafo 36-4 Forze elettromotrici derivanti dal moto

18. Un'automobile, con una antenna radio lunga 110 cm, viaggia a 90 km/h in una regione in cui il campo magnetico terrestre ha una intensità di 55 μT. Si determini il massimo valore possibile della f.e.m. indotta.
19. Una spira circolare del diametro di 10 cm è posta in un campo magnetico uniforme di 0.50 T, in modo che l'asse della spira formi un angolo di 30° con il campo. Se la spira viene fatta ruotare rispetto alla direzione del campo magnetico, in modo che il suo asse spazzi una superficie conica (l'angolo tra l'asse e il campo non cambia), ad una frequenza di 100 giri al minuto, che f.e.m. viene indotta nella spira?
20. In figura 40 è rappresentata una bacchetta conduttrice di lunghezza L che viene spinta lungo dei binari conduttori orizzontali e senza attrito, a velocità costante v. Nella regione in cui si muove la bacchetta vi è un campo magnetico verticale B. Assumendo $L = 10.8$ cm, $v = 4.86$ m/s e $B = 1.18$ T, (*a*) si determini la f.e.m. indotta nella bacchetta. (*b*) Si calcoli la corrente indotta nella spira, assumendo che la resistenza della bacchetta sia di 415 mΩ e che la resistenza dei binari sia trascurabile. (*c*) Che potenza viene dissipata nella bacchetta? (*d*) Si determini la forza che bisogna applicare alla bacchetta per mantenerla in moto uniforme. (*e*) Che potenza deve fornire la forza che agisce sulla bacchetta? Confrontare con la risposta al punto (*c*).

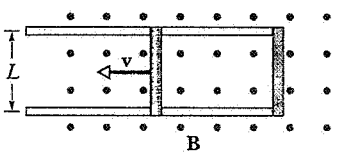


Figura 40. Problema 20.

21. In figura 41 è rappresentata una bacchetta di metallo di massa m e di lunghezza L che può scivolare su due lunghi binari orizzontali senza attrito. Un campo magnetico uniforme verticale B è presente nella regione in cui la bacchetta può muoversi. Il generatore G fa circolare nel circuito formato dai binari e dalla bacchetta, una corrente costante i. Si determini la velocità della bacchetta in funzione del tempo, supponendo che la bacchetta sia ferma all'istante $t = 0$.

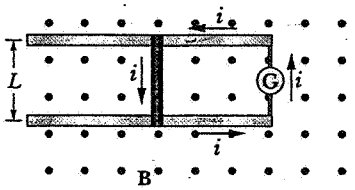


Figura 41. Problemi 21 e 22.

22. Si consideri la situazione del problema 21 (vedi fig. 41), sostituendo al generatore di corrente una batteria che fornisca una f.e.m. costante $\mathcal{E}$. (*a*) Si dimostri che ora la velocità della bacchetta tende ad un valore costante v e se ne determinino modulo, direzione e verso. (*b*) Che corrente scorre nella bacchetta quando questo valore viene raggiunto? (*c*) Si esaminino la situazione di questo problema e la situazione del problema precedente dal punto di vista energetico.
23. Si consideri una spira circolare di un materiale elastico conduttore immersa in un campo magnetico uniforme di 785 μT, ad essa normale. La spira viene tirata fino ad avere un raggio di 1.23 m. Quando la spira viene lasciata libera il raggio comincia a diminuire alla velocità di 7.50 cm/s. Calcolare la f.e.m. indotta al momento del rilascio.
24. In figura 42 sono mostrate due spire coassiali. La spira più piccola (di raggio r) è posta sopra alla spira più grande (di raggio R) ad una distanza $x \gg R$. In questa approssimazione il campo magnetico generato dalla corrente i che scorre nella spira più grande è circa costante, sulla porzione di piano delimitata dalla spira piccola, ed uguale al valore sull'asse. Supponendo che x aumenti a velocità costante $dx/dt = v$, (*a*) determinare il flusso del campo magnetico attraverso la spira piccola in funzione di x. (*b*) Calcolare la f.e.m. indotta nella spira piccola. (*c*) Determinare il verso della corrente indotta nella spira piccola.

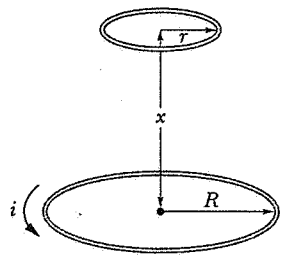


Figura 42. Problema 24.

25. Si consideri una piccola sbarra magnetica che venga fatta passare attraverso una spira lungo l'asse. Si tracci qualitativamente il grafico (*a*) della corrente indotta e (*b*) della potenza di produzione di energia interna nella spira, in funzione della posizione del centro del magnete. Si supponga che sia il polo nord del magnete ad attraversare per primo la spira e che il magnete si muova a velocità costante. Si consideri positiva la corrente indotta quando circola in senso orario guardando la spira dalla posizione di partenza del magnete.

26. Si consideri un filo rigido a forma di semicerchio di raggio a, fatto ruotare con frequenza ν in un campo magnetico uniforme, come illustrato in figura 43. Determinare (*a*) la frequenza e (*b*) l'ampiezza della f.e.m. indotta nella spira.

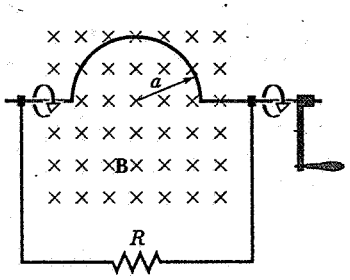


Figura 43. Problema 26.

27. Si consideri una bobina rettangolare formata da N spire di lunghezza a e di larghezza b, che viene fatta ruotare a frequenza ν in un campo magnetico uniforme **B**, come in figura 44. (*a*) Si dimostri che nella spira viene indotta una f.e.m. data da

$$\mathcal{E} = 2\pi\nu NabB \text{ sen } 2\pi\nu t = \mathcal{E}_0 \text{ sen } 2\pi\nu t$$

È su questo principio che funzionano i generatori di corrente alternata commerciali. (*b*) Progettare una bobina che produca una f.e.m. $\mathcal{E}_0 = 150$ V ruotando con una frequenza di 60 giri al secondo in un campo magnetico uniforme di 0.50 T.

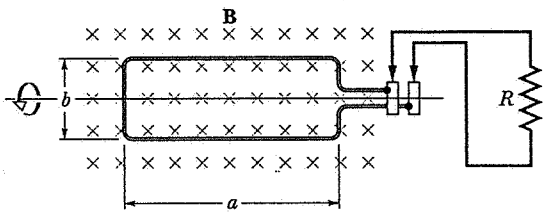


Figura 44. Problema 27.

28. Si consideri un filo conduttore di lunghezza L. Esso può venire avvolto in N spire e venire usato come bobina di un generatore. Per ottenere la massima f.e.m., che valore di N sceglierreste?

29. Si consideri un motore elettrico la cui bobina sia formata da 97 spire di area 190 cm^2 e che ruoti in un campo magnetico uniforme di 0.33 T. Alla bobina venga applicata una differenza di potenziale di 24 V. Se non è attaccato alcun carico e trascurando gli attriti, determinare la velocità di rotazione in condizioni di equilibrio dinamico.

30. Si consideri un generatore costituito da una bobina di 100 spire rettangolari, di dimensioni 50 cm per 30 cm, immersa in un campo magnetico uniforme di intensità $B = 3.5$ T. Calcolare il massimo valore della f.e.m. indotta quando la bobina viene fatta ruotare alla frequenza di 1000 giri al minuto attorno ad un asse perpendicolare a **B**.

31. In una certa località, il campo magnetico della terra ha una intensità B = 59 μT ed è diretto verso il basso con un angolo di 70° rispetto all'orizzontale. Si consideri una bobina formata da 950 spire circolari di raggio 13 cm. La bobina, che giace inizialmente in posizione orizzontale, viene fatta ruotare di 180° attorno ad un diametro, terminando quindi ancora in posizione orizzontale. Se la bobina, di resistenza 85 Ω, è collegata ad un galvanometro di resistenza 140 Ω, quanta carica attraversa il galvanometro? (*Suggerimento*: vedi problema 11.)

32. In una situazione analoga a quella dell'esempio 3, siano $B = 1.2$ T e $R = 5.3$ cm. Se $\mathcal{E} = 1.4$ V, a che accelerazione è sottoposto un punto all'estremità della barra rotante?

33. In figura 45 è rappresentata una bacchetta di lunghezza L che viene fatta muovere con velocità costante v su dei binari conduttori orizzontali. In questo caso il campo magnetico in cui si muove la bacchetta non è uniforme, ma è il campo magnetico generato dalla corrente i che scorre in un filo parallelo ai binari. Con riferimento alla figura siano $v = 4.86$ m/s, $a = 10.2$ mm, $L = 9.83$ cm e $i = 110$ A. (*a*) Si calcoli la f.e.m. indotta nella bacchetta. (*b*) Si calcoli la corrente che scorre nella spira conduttrice supponendo che la resistenza della bacchetta sia di 415 mΩ e che la resistenza dei binari sia trascurabile. (*c*) Con che velocità viene prodotta energia interna nella bacchetta? (*d*) Che forza bisogna applicare alla barra perchè il suo moto sia uniforme? (*e*) Che potenza deve fornire la suddetta forza? Confrontare con la risposta al punto (*c*).

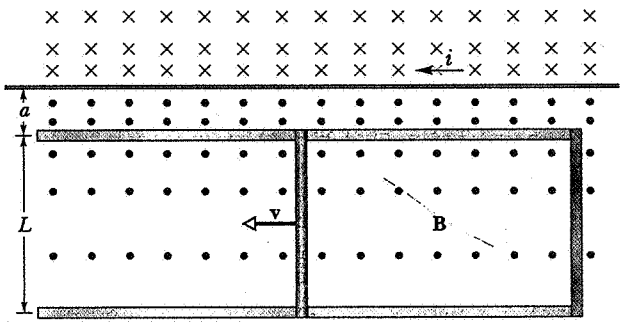


Figura 45. Problema 33.

34. Si considerino due rotaie conduttrici rettilinee, che formano un angolo θ nel punto in cui le loro estremità si uniscono. Si consideri, inoltre, una barra conduttrice in contatto con le rotaie ed ortogonale alla loro bisettrice. La barra parta dal

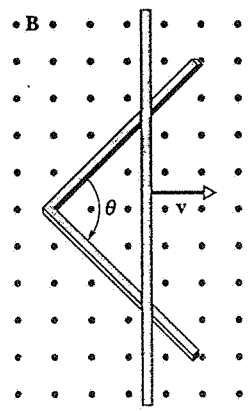


Figura 46. Problema 34.

ISBN 88-408-0777-2

vertice all'istante $t = 0$ e si muova con velocità costante v verso destra, come mostrato in figura 46. Nella regione sia presente un campo magnetico **B** ortogonale al piano della figura ed uscente dalla pagina. (*a*) Determinare la f.e.m. indotta in funzione del tempo. (*b*) Se $\theta = 110°$, $B = 352$ mT e $v = 5.21$ m/s, in che istante la f.e.m. indotta sarà di 56.8 V?

35. Si consideri una spira rettangolare di lunghezza a, larghezza b e resistenza R, posta in prossimità di un filo rettilineo infinitamente lungo percorso da una corrente i, come mostrato in figura 47. La distanza iniziale tra la spira e il filo sia D. Si determini (*a*) il flusso del campo magnetico attraverso la spira e (*b*) la corrente indotta nella spira quando questa si allontana in direzione ortogonale al filo con velocità v.

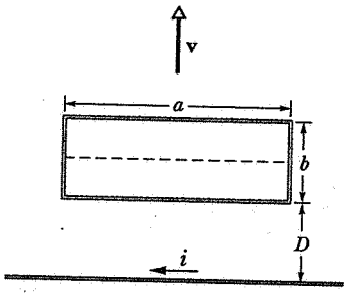


Figura 47. Problema 35.

36. In figura 48 è rappresentato un «generatore omopolare», un dispositivo in cui il rotore è costituito da un disco solido conduttore. Questa macchina può fornire f.e.m. maggiori di macchine in cui il rotore è costituito da una spira di filo perchè può ruotare con velocità angolari molto maggiori prima che la forza centrifuga distrugga il rotore. (*a*) Si dimostri che la f.e.m. prodotta è data da

$$\mathcal{E} = \pi \nu B R^2$$

dove ν è la frequenza di rivoluzione, R il raggio del rotore e B è il campo magnetico uniforme perpendicolare al rotore. (*b*) determinare la coppia che deve fornire il motore che fa girare il rotore quando la corrente in uscita è i.

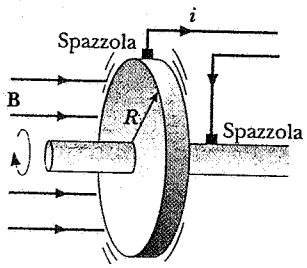


Figura 48. Problema 36.

37. Una bacchetta di lunghezza L e resistenza R scivoli verso il basso senza attrito lungo due rotaie parallele di resistenza trascurabile, come in figura 49. Le estremità inferiori delle rotaie siano collegate, come mostrato in figura, in modo da formare una spira conduttrice con la bacchetta come lato superiore. Il piano in cui giacciono le rotaie formi un angolo θ con il piano orizzontale e nella regione esista un campo magnetico verticale **B**. (*a*) Si dimostri che la velocità della bacchetta tende ad una velocità limite data da

$$v = \frac{mgR}{B^2L^2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}.$$

(*b*) Si mostri che la potenza dissipata nella bacchetta è uguale alla velocità con cui essa perde energia potenziale gravitazionale. (*c*) Discutere la situazione nel caso in cui **B** fosse diretto verso il basso anziché verso l'alto.

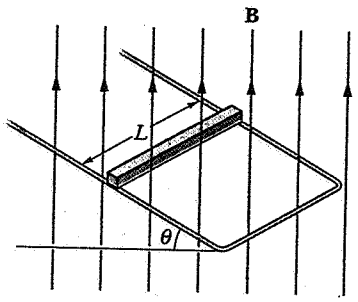


Figura 49. Problema 37.

38. Si consideri un filo conduttore la cui sezione ha area 1.2 mm^2 e la cui resistività è di $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Con tale filo si realizzi il circuito di figura 50, cioè un semicerchio di raggio $r = 24$ cm collegato, in Q, ad uno spezzone di filo rettilineo OQ. Il tratto di filo OP sia libero di ruotare attorno ad O mantenendo con il semicerchio un contatto mobile in P. Questo circuito si trovi in un campo magnetico di intensità $B = 0.15$ T uscente dal piano della figura. Il tratto di filo OP si trovi inizialmente a riposo a $\theta = 0$, e si muova poi con un'accelerazione angolare costante di 12 rad/s^2. (*a*) Determinare la resistenza della spira $OPQO$ in funzione di θ. (*b*) Determinare il flusso del campo magnetico attraverso la spira in funzione di q. (*c*) Per quale valore di θ la corrente indotta è massima? (*d*) Quanto vale, al suo massimo, la corrente indotta?

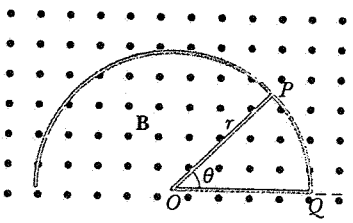


Figura 50. Problema 38.

39. Un freno elettromagnetico a «correnti di Focault», consiste in un disco di conducibilità σ e di spessore t che ruota attorno ad un asse passante per il suo centro con un campo ma-

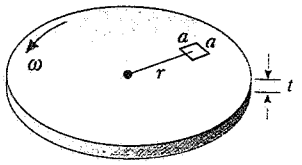


Figura 51. Problema 39.

gnetico **B** applicato perpendicolarmente al disco su un'areola a^2, come in figura 51. Supponendo che l'areola a^2 si trovi ad una distanza r dall'asse, si determini un'espressione approssimata della coppia che tende a frenare il disco quando la sua velocità angolare è ω.

Paragrafo 36-5 Campi elettrici indotti

40. Si consideri un lungo solenoide di diametro 12.6 cm. Facendo scorrere nel solenoide una corrente i, all'interno del solenoide viene generato un campo magnetico uniforme $B = 28.6$ mT. Diminuendo i, il campo magnetico viene diminuito alla velocità di 6.51 mT/s. Calcolare (*a*) il campo elettrico indotto ad una distanza di 2.20 cm dall'asse del solenoide, (*b*) il campo elettrico indotto ad una distanza di 8.20 cm dall'asse.

41. In figura 52 sono rappresentate due regioni circolari R_1 ed R_2, rispettivamente di raggio r_1 e r_2. In R_1 è presente un campo magnetico uniforme $B_1 = 48.6$ mT in direzione entrante nella pagina e in R_2 un campo magnetico uniforme $B_2 = 77.2$ mT in direzione uscente (si trascuri ogni effetto di bordo). Entrambi i campi diminuiscano alla velocità di 8.50 mT/s. Si calcoli l'integrale $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ per ciascuno dei tre percorsi indicati in figura.

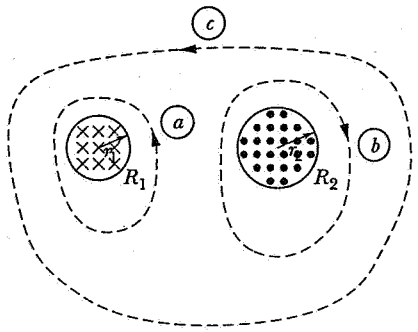


Figura 52. Problema 41.

42. In figura 53 è rappresentato un campo magnetico uniforme **B** confinato in un volume cilindrico di raggio R. L'intensità di **B** decresca nel tempo con velocità costante di 10.7 mT/s. A che accelerazione (modulo, direzione e verso) è sottoposto un elettrone che si trovi in a, b o c? Si assuma $r = 4.82$ cm. (Il fatto che B non si possa annullare in maniera discontinua oltre R, non cambia la risposta al quesito finché vi è simmetria rispetto all'asse perpendicolare alla figura passante per b.)

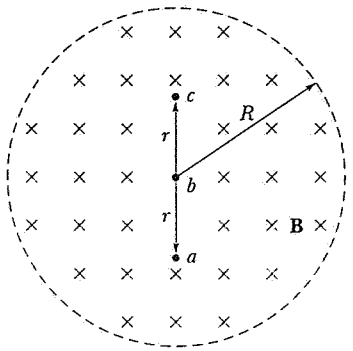


Figura 53. Problema 42.

43. Si dimostri che il campo elettrico **E** in un condensatore a piatti paralleli non può annullarsi improvvisamente (in maniera discontinua) quando ci si sposta in direzione ad esso ortogonale, come suggerito dalla freccia in figura 54 (vedi punto *a*). Nei condensatori reali c'è sempre un effetto di bordo delle linee di forza, il che significa che **E** si annulla in modo continuo e graduale; confrontare col problema 43 del capitolo 35. (*Suggerimento*: si applichi la legge di Faraday al percorso rettangolare tratteggiato.)

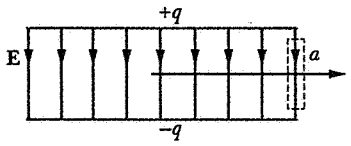


Figura 54. Problema 43.

44. All'inizio del 1981al Francis Bitter National Magnet Laboratory del MIT, entrò in funzione un magnete cilindrico del diametro di 3.3 cm che produce un campo di 30 T, allora il campo statico più intenso del mondo. Il campo può essere variato in modo sinusoidale tra 29.6 T e 30.0 T alla frequenza di 15 Hz. Quando ciò avviene, qual è il massimo valore del campo elettrico indotto ad una distanza radiale di 1.6 cm dall'asse? Questo magnete è descritto in «Physics Today», agosto 1984.

45. Si consideri un campo magnetico **B** confinato in un volume cilindrico di raggio R. Una barra metallica di lunghezza L sia posta come in figura 55. Se B varia con velocità dB/dt, si dimostri che la f.e.m. indotta dalla variazione del campo magnetico tra le estremità della barra è data da

$$\mathcal{E} = \frac{dB}{dt}\,\frac{L}{2}\sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}.$$

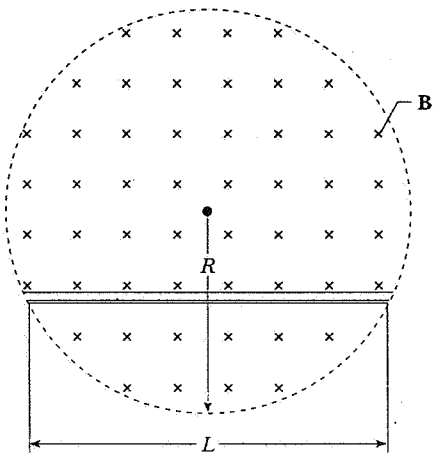


Figura 55. Problema 45.

Paragrafo 36-6 Il betatrone

46. In figura 56*a* è riportata una vista dall'alto dell'orbita degli elettroni in un betatrone. Gli elettroni vengono accelerati su un'orbita circolare nel piano xy e successivamente vengono

ISBN 88-408-0777-2

estratti e fatti incidere su un bersaglio T. Il campo magnetico **B** sia diretto nel verso dell'asse z (l'asse z è diretto in verso uscente dalla pagina). Il campo magnetico B_z vari sinusoidalmente come mostrato in figura 56*b*. Si rammenti che il campo magnetico deve (*i*) guidare gli elettroni sulla loro orbita circolare e (*ii*) generare il campo elettrico che li accelera. Quali quarti di periodo (*a*) soddisfano la richiesta (*i*), (*b*) soddisfano la richiesta (*ii*) e infine (*c*) in quali quarti di periodo può funzionare il betatrone?

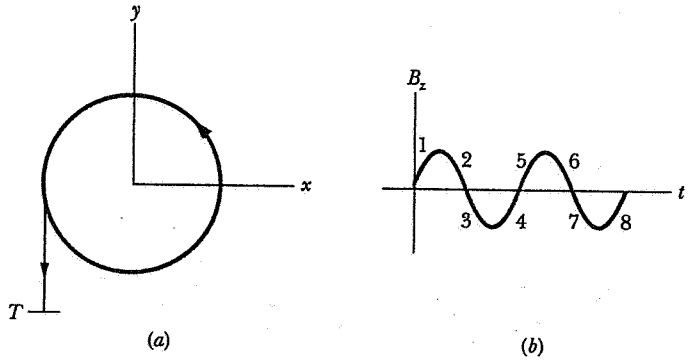


Figura 56. Problema 46.

47. Si consideri un betatrone in cui il raggio dell'orbita degli elettroni sia di 32 cm e il campo magnetico sull'orbita sia dato da $B_{orb} = 0.28 \sin 120\pi t$, con t in secondi e B_{orb} in tesla. Nel betatrone il valore medio B_{av} del campo magnetico racchiuso dall'orbita degli elettroni è uguale al doppio del campo B_{orb} sull'orbita. (*a*) Si calcoli il campo elettrico indotto che accelera gli elettroni a $t = 0$. (*b*) Calcolare l'accelerazione degli elettroni in quell'istante. Si trascurino gli effetti relativistici.

48. Alcune misure del campo magnetico massimo in funzione della posizione radiale in un certo betatrone sono:

r (cm)	B (tesla)	r (cm)	B(tesla)
0	0.950	81.2	0.409
10.2	0.950	83.7	0.400
68.2	0.950	88.9	0.381
73.2	0.528	91.4	0.372
75.2	0.451	93.5	0.360
77.3	0.428	95.5	0.340

Si mostri graficamente che la relazione menzionata nel problema 47, $B_{av} = 2B_{orb}$, fondamentale per il funzionamento di un betatrone, è soddisfatta per un orbita di raggio $R = 84$ cm. (*Suggerimento*: si noti che

$$B_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R B(r) 2\pi r \, dr$$

e si valuti l'integrale graficamente.)

Paragrafo 36-7 Induzione e moto relativo

49. (*a*) Si dia una stima per θ in figura 16. Si ricordi che un valore tipico di v_d è 4×10^{-2} cm/s. Si assuma $v = 15$ cm/s. (*b*) È chiaro che θ sarà piccolo. Tuttavia, è necessario che θ sia diverso da zero perché le argomentazioni relative a tale figura siano valide?

Capitolo 37

PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA

I materiali magnetici hanno un ruolo sempre più importante nella nostra vita quotidiana. Materiali come il ferro, che possono costituire magneti permanenti a temperatura ambiente, vengono usati normalmente nei motori elettrici e nei generatori ed anche in certi tipi di altoparlanti. Altri materiali possono essere «magnetizzati» e «smagnetizzati» con relativa facilità; questi materiali vengono largamente usati per immagazzinare informazioni in applicazioni come cassette magnetiche (per audio e video registratori), dischetti per calcolatori e carte di credito. Altri tipi di materiale sono analoghi ai dielettrici, in quanto acquisiscono un campo magnetico indotto in risposta ad un campo magnetico esterno; il campo indotto scompare quando il campo esterno viene rimosso.
In questo capitolo si considererà la struttura interna dei materiali che è responsabile delle loro proprietà magnetiche. Si considererà una forma magnetica della legge di Gauss, che tiene conto della apparente non esistenza di poli magnetici isolati. Si vedrà che il comportamento di materiali magnetici diversi, può essere compreso in termini del momento di dipolo magnetico dei singoli atomi. Una spiegazione completa delle proprietà magnetiche della materia richiede i metodi della meccanica quantistica, che sono oltre il livello di questo testo, ma una spiegazione qualitativa si può dare basandosi sui principi discussi in questo capitolo.

37-1 LA LEGGE DI GAUSS PER IL MAGNETISMO

In figura 1*a* è rappresentato il campo elettrico associato ad una barra isolante sulle cui estremità siano state depositate uguali quantità di carica positiva, ad un estremo, e negativa, all'altro. Questo è un esempio di dipolo elettrico. In figura 1*b* è mostrato il caso analogo del dipolo magnetico, una sbarra magnetica, con il polo nord ad un estremo ed il polo sud all'altro. A questo livello elettricità e magnetismo sembrano molto simili. (Per una ulteriore conferma di questa similarità si confrontino la figura 9*b* del capitolo 28 e la figura 1 del capitolo 34.) Infatti si potrebbe essere spinti a postulare l'esistenza di poli magnetici isolati, analoghi alle cariche elettriche; se tali poli esistessero, genererebbero campi magnetici (analogamente ai campi elettrici generati dalle cariche) proporzionali alla «carica magnetica» del polo ed inversamente proporzionali al quadrato della distanza dal polo. Come si vedrà, questa ipotesi non è in accordo con gli esperimenti.

Si taglino a metà gli oggetti di figura 1 e si separino le due parti. La figura 2 mostra che il caso elettrico e quello magnetico non sono più simili. Nel caso del dipolo elettrico, si ottengono due oggetti che, se separati

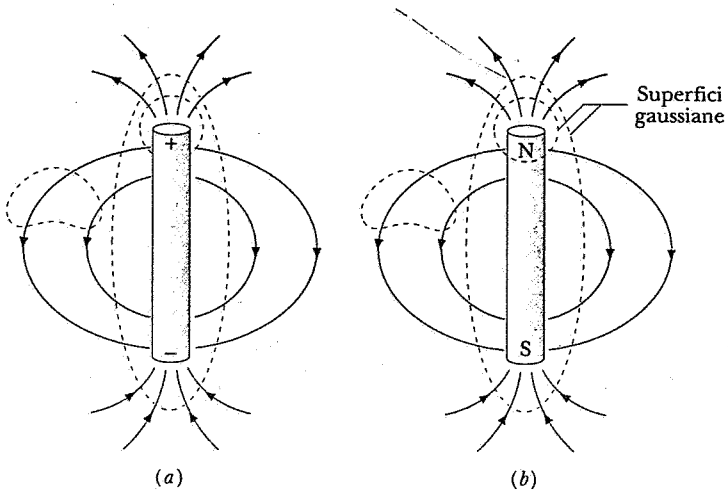


Figura 1 (*a*) Un dipolo elettrico, costituito da una bacchetta isolante con una carica positiva ad una estremità ed una carica negativa all'altra. Sono rappresentate diverse superfici gaussiane. (*b*) Un dipolo magnetico, costituito da un magnete a barra con un polo nord ad una estremità ed un polo sud all'altra.

da una distanza sufficientemente grande, possono essere considerati come due cariche puntiformi di segno opposto, ciascuna in grado di generare il campo caratteristico di una carica puntiforme. Nel caso della sbarra magnetica, tuttavia, non si ottengono un polo nord

ISBN 88-408-0777-2

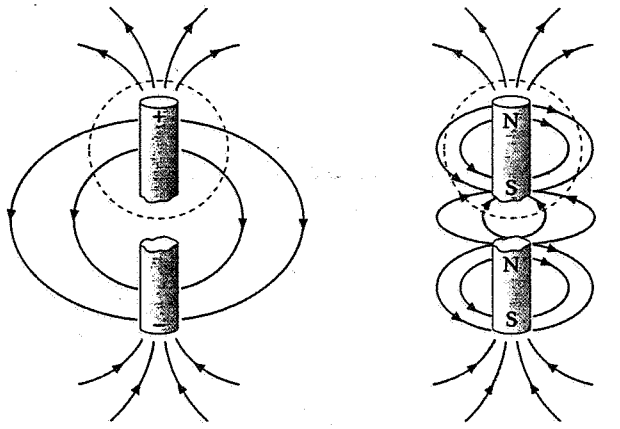


Figura 2 (*a*) Se si taglia a metà il dipolo elettrico di figura 1*a*, la carica positiva viene isolata su una metà e la carica negativa sull'altra metà. (*b*) Se si taglia a metà il dipolo magnetico di figura 1*b*, si ottiene una nuova coppia di poli nord e sud. Si noti la differenza delle linee di forza dei due campi.

ed un polo sud isolati, ma due magneti ciascuno col suo polo nord ed il suo polo sud.

Questa sembra una differenza importante tra dipoli elettrici e dipoli magnetici: un dipolo elettrico può essere diviso in due cariche singole (o «poli»), mentre il dipolo magnetico no. Ogni volta che si cerca di dividere il polo nord e il polo sud di un dipolo magnetico si crea una nuova coppia di poli. È un po' come cercare di tagliare un pezzo di corda con due capi cercando di ottenere due pezzi di corda con un solo capo!

Questo effetto avviene a livello microscopico, fino al livello di singolo atomo. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, ogni atomo si comporta come un dipolo magnetico con un polo nord ed un polo sud, e per quanto se ne sa finora, la struttura magnetica fondamentale è il dipolo, non il monopolo.

Questa differenza tra campi elettrici e campi magnetici viene espressa matematicamente dalla legge di Gauss. In figura 1*a*, il flusso del campo elettrico attraverso superfici gaussiane differenti dipende dalla carica netta racchiusa da ciascuna superficie. Se la superficie non racchiude alcuna carica, o nessuna carica netta (cioè uguali quantità di carica positiva e di carica negativa, ad esempio tutto il dipolo), il flusso del vettore campo elettrico attraverso la superficie è nullo. Se la superficie taglia il dipolo, in modo da racchiudere una carica netta q, il flusso Φ_E del campo elettrico è dato dalla legge di Gauss:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0. \qquad (1)$$

Analogamente si possono costruire superfici gaussiane per il campo magnetico, come in figura 1*b*. Se la superficie gaussiana non contiene una «carica magnetica» netta, il flusso Φ_B del campo magnetico attraverso la superficie è nullo. Tuttavia, come si è già visto, anche le superfici gaussiane che tagliano una sbarra magnetica non racchiudono alcuna carica magnetica netta, perché ogni taglio del magnete dà luogo a pezzi con sia polo nord che polo sud. La forma magnetica della legge di Gauss si scrive

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \qquad (2)$$

Il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

In figura 3 è riportata una rappresentazione più dettagliata dei campi magnetici di una sbarra magnetica e di un solenoide, che possono essere considerati entrambi dei dipoli magnetici. Si noti, in figura 3*a*, che le linee di forza di **B** entrano nella superficie gaussiana all'interno del magnete e ne escono all'esterno. Il flusso entrante è uguale al flusso uscente, e il flusso netto

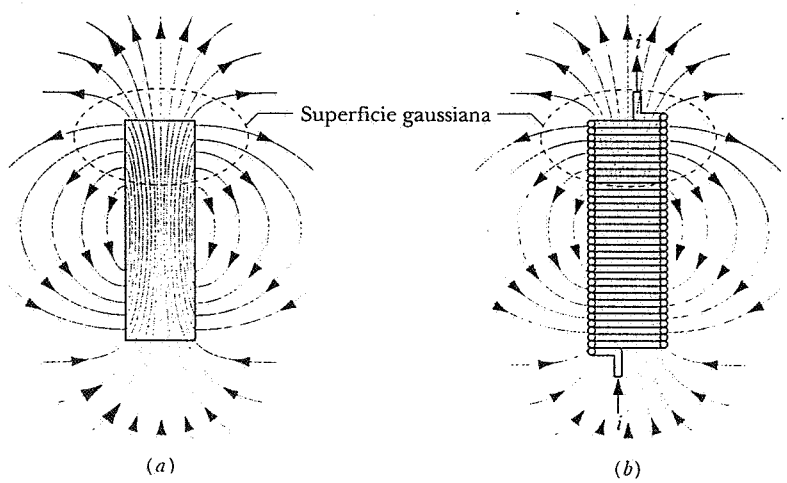


Figura 3 Linee di forza del campo magnetico **B** per (*a*) una sbarra magnetica e (*b*) un corto solenoide. Le linee tratteggiate rappresentano superfici gaussiane.

ISBN 88-408-0777-2

Φ_B per la superficie è nullo. La stessa cosa vale per la superficie gaussiana che attraversa il solenoide in figura 3*b*. In nessun caso vi è un punto da cui escono o in cui convergono le linee di forza di **B**; cioè, *non vi sono cariche magnetiche isolate.*

Monopoli magnetici

Si è visto, nel capitolo 29, che la legge di Gauss per i campi elettrici è equivalente alla legge di Coulomb, che è basata sull'osservazione sperimentale della forza tra cariche puntiformi. Anche la legge di Gauss per il magnetismo è basata su un'osservazione sperimentale, la mancata osservazione di poli magnetici isolati.

L'esistenza di cariche magnetiche isolate fu proposta nel 1931 dal fisico teorico Paul Dirac sulla base di argomentazioni di meccanica quantistica e di simmetria. Egli chiamò queste cariche *monopoli magnetici* e calcolò i valori che ci si aspettava per alcune loro proprietà, compreso il valore della «carica magnetica fondamentale» (analoga alla carica *e* dell'elettrone). Seguendo le previsioni di Dirac, i monopoli magnetici sono stati cercati sia usando grandi acceleratori di particelle che esaminando campioni di materia terrestre ed extraterrestre. Nessuna di queste prime ricerche riuscì a dimostrare l'esistenza dei monopoli magnetici.

Recenti tentativi di unificare le leggi della fisica, raggruppando in un unica trattazione le interazioni forte, debole ed elettromagnetica hanno risvegliato l'interesse per i monopoli magnetici. Queste teorie prevedono l'esistenza di monopoli magnetici con masse molto grandi, circa 10^{16} volte la massa del protone. Queste masse sono decisamente troppo grandi per essere prodotte con un qualsiasi acceleratore sulla Terra; in effetti le condizioni perché simili particelle si possano formare, si sono realizzate, probabilmente, solo nei primi istanti di vita dell'universo. La ricerca dei monopoli magnetici continua anche oggi, ma una prova sperimentale della loro esistenza non è ancora stata ottenuta.* Per il momento si suppone che o i monopoli magnetici non esistano, in modo che l'equazione 2 sia valida esattamente ed universalmente, o che, se esistono, siano così rari che l'equazione 2 è un'ottima approssimazione. L'equazione 2 acquista in questo modo un ruolo fondamentale nella descrizione del comportamento dei campi magnetici in natura e diventa una delle quattro equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, le equazioni di Maxwell.

* Vedi: Susan B. Felch. *Searches for Magnetic Monopoles and Fractional Electric Charges.* «The Physics Teacher», marzo 1984, pag. 142. Vedi inoltre Richard A. Carrigan, Jr. e W. Peter Trower. *Monopoli magnetici superpesanti.* «Le Scienze», 166:28.

37-2 MAGNETISMO ATOMICO E NUCLEARE

Le differenze nel comportamento macroscopico dei campi elettrici e magnetici si possono apprezzare meglio esaminando la struttura atomica e nucleare che genera i campi. Si consideri il dielettrico illustrato in figura 13 del capitolo 31. Il mezzo è costituito da dipoli elettrici che vengono allineati da un campo elettrico esterno. Questi dipoli generano un campo elettrico indotto nel mezzo. Se si taglia il mezzo in due parti, supponendo di non tagliare in due alcun dipolo, si ottengono due dielettrici simili; ciascuno possiede una carica indotta positiva ad una estremità ed una carica indotta negativa dall'altra parte. Si può continuare a dividere in questo modo il materiale fino al livello di singola molecola o di singolo atomo, che presenta ancora una carica negativa da una parte e una carica positiva dall'altra. Infine, con un ultimo taglio, si possono dividere e separare le cariche positive e le cariche negative. Il mezzo magnetico, macroscopicamente, sembra comportarsi in modo simile. In figura 4, un mezzo magnetico è rappresentato come un insieme di dipoli magnetici. Se si taglia il mezzo a metà, senza tagliare alcun dipolo, ciascuna delle due metà presenta un polo sud da una parte ed un polo nord dall'altra. Si può continuare a dividere il mezzo in questo modo fino a raggiungere il livello atomico. A questo punto, però, si scopre che il dipolo magnetico non è costituito, come nel caso del dipolo elettrico, da due cariche magnetiche di segno opposto, ma piuttosto da una piccola spira di corrente data, per esempio, dal moto dell'elettrone nell'atomo. Proprio come nel caso delle spire percorse da corrente, considerate nel paragrafo 34-7, alla corrente atomica è associato un momento di dipolo magnetico. Non c'è modo di dividere questo dipolo in

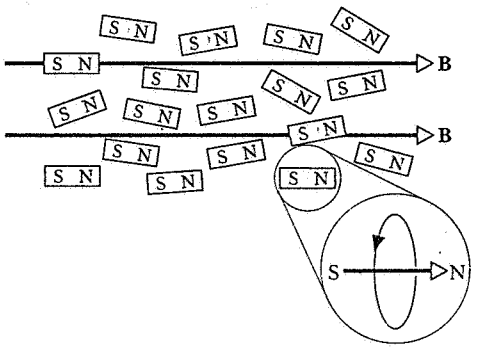


Figura 4 Un materiale magnetico può essere considerato come un insieme di momenti di dipolo magnetico, ciascuno coi suoi poli nord e sud. Microscopicamente, ciascun dipolo è in realtà una spira di corrente che non può essere divisa in poli magnetici isolati.

due poli separati, sicché l'unità fondamentale del magnetismo è il dipolo.

Si consideri un modello semplice in cui l'elettrone si muove, nell'atomo, su un'orbita circolare. Il momento di dipolo magnetico di questa spira di corrente è dato dall'equazione 36 del capitolo 34:

$$\mu = iA, \tag{3}$$

dove i è la corrente associata al moto orbitale dell'elettrone ed A è l'area racchiusa dall'orbita. La corrente è data dalla carica dell'elettrone divisa per il periodo di rivoluzione

$$i = \frac{e}{T} = \frac{e}{2\pi r/v}, \tag{4}$$

dove r è il raggio dell'orbita e v è la velocità tangenziale dell'elettrone. Il momento magnetico si può allora scrivere

$$\mu = iA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)(\pi r^2) = \frac{erv}{2}. \tag{5}$$

In termini di momento angolare, $l = mvr$, si scrive

$$\mu_l = \frac{e}{2m} l. \tag{6}$$

Si è scritto μ_l per rammentare che questo contributo al momento di dipolo magnetico dipende dal momento angolare orbitale l.

Generalizziamo l'equazione 6 notando che: (1) sia μ che l sono vettori, sicché l'equazione 6 dovrebbe essere scritta in forma vettoriale, e (2) *tutti* gli elettroni dell'atomo contribuiscono con il loro moto al momento di dipolo magnetico. Si ottiene perciò

$$\boldsymbol{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}, \tag{7}$$

dove $\boldsymbol{\mu}_L$ è il momento di dipolo magnetico totale dell'atomo e $\mathbf{L} = \Sigma \mathbf{l}_i$ è il momento angolare totale, somma dei contributi di tutti gli elettroni dell'atomo. Il segno meno appare a causa del fatto che la carica dell'elettrone è negativa, per cui la corrente è in direzione opposta al moto dell'elettrone e quindi il momento angolare ed il momento magnetico sono in verso opposto.

Dalla meccanica quantistica (vedi par. 13-6) si sa che una qualsiasi componente del momento angolare orbitale L è quantizzata e può assumere come valore solo un multiplo intero di $= h/2\pi$, dove h è la costante di Planck. Cioè il momento angolare orbitale può assumere come valori $h/2\pi$, $2(h/2\pi)$, $3(h/2\pi)$ eccetera, ma mai, per esempio, $1.8(h/2\pi)$ o $4.2(h/2\pi)$. Una unità naturale in cui misurare i momenti di dipolo atomici, detta *magnetone di Bohr* μ_B, si ottiene ponendo $L = h/2\pi$ nell'equazione 7. In tal caso il momento magnetico vale un magnetone di Bohr μ_B, cioè

$$\mu_B = \frac{e}{2m}\frac{h}{2\pi} = \frac{eh}{4\pi m}. \tag{8}$$

Sostituendo i valori appropriati per la carica e la massa dell'elettrone nell'equazione 8, si ottiene

$$\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}.$$

I momenti di dipolo magnetico associati al moto orbitale degli elettroni in un atomo hanno valori tipici dell'ordine di μ_B.

Momenti magnetici intrinseci

Esperimenti fatti negli anni '20 facendo passare fasci di atomi attraverso campi magnetici, dimostrarono che il modello appena esposto della struttura magnetica di dipolo dell'atomo non era sufficiente a spiegare le proprietà osservate. Era necessario introdurre un nuovo tipo di momento magnetico per l'elettrone, detto *momento magnetico intrinseco* μ_s. Associato a questo momento magnetico, per analogia con l'equazione 6, vi è un momento angolare intrinseco s. La relazione vettoriale tra il momento magnetico intrinseco e il momento angolare intrinseco si può scrivere

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{s}. \tag{9}$$

Per un elettrone la componente del momento angolare intrinseco s su un qualunque asse fissato, prevista dalla meccanica quantistica e confermata dagli esperimenti deve valere $\frac{1}{2}(h/2\pi)$,* come mostrato in figura 19 del capitolo 13. Può essere conveniente figurarsi l'elettrone come una sferetta di carica che ruota attorno ad un suo asse. (Per questo il momento angolare intrinseco s viene normalmente chiamato «spin»** .) Tuttavia questo modello non è esattamente corretto perché, per quanto se ne sa finora, l'elettrone è una particella puntiforme di raggio nullo.***

---

* La apparente differenza di un fattore 2 tra l'equazione 6 e l'equazione 9 deriva dal fatto che l'unità di base per s per l'elettrone è $\frac{1}{2}(h/2\pi)$, mentre l'unità di base per l è $h/2\pi$. In entrambi i casi l'unità fondamentale per μ è μ_B. In realtà il fattore che differenzia l'equazione 6 dall'equazione 9 non è esattamente 2; il fattore previsto per l'elettrone è 2.002 319 304 386, un risultato che è stato verificato sperimentalmente fino alla dodicesima cifra.

** In inglese far ruotare (ad esempio una trottola) si dice «to spin». [N.d.T.]

*** La natura puntiforme dell'elettrone (nel senso che esso non mostra una struttura interna) è stata provata fino a distanze dell'ordine di 10^{-16} cm. Nulla si può in realtà dire attualmente per distanze minori. [N.d.T.]

ISBN 88-408-0777-2

Per analogia con l'equazione 7 si può definire un momento di dipolo magnetico intrinseco *totale* $\boldsymbol{\mu}_S$ di un atomo come

$$\boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{m}\mathbf{S}, \qquad (10)$$

dove $\mathbf{S} = \Sigma\, \mathbf{s}_i$ è lo spin totale degli elettroni nell'atomo.

Il momento angolare orbitale e il momento di dipolo magnetico orbitale di un *singolo* elettrone, sono proprietà del suo particolare stato di moto. Il momento angolare intrinseco (spin) ed il momento di dipolo magnetico intrinseco di un singolo elettrone sono caratteristiche fondamentali dell'elettrone stesso, come la sua massa o la sua carica elettrica. Infatti, ogni particella elementare ha un certo momento angolare intrinseco ed un corrispondente momento di dipolo magnetico intrinseco. In tabella 1 sono riportati alcuni esempi di questi valori. Si noti l'incredibile precisione di queste misure, in cui l'incertezza è sull'ultima o sulle ultime due cifre. I valori per il neutrone o il protone hanno una precisione rispettivamente di una parte su 10^7 e 10^8, mentre il valore misurato nel caso dell'elettrone ha una precisione di una parte su 10^{11}, che corrisponde alla misura più precisa che sia mai stata effettuata!

Le proprietà magnetiche di un materiale sono determinate dal momento di dipolo magnetico totale dei suoi atomi, ottenuto dalla somma vettoriale della parte orbitale, equazione 7, e della parte di spin, equazione 10. In un atomo complesso, con molti elettroni, le somme necessarie a determinare **L** e **S** possono essere molto complicate. In molti casi, tuttavia, gli elettroni si accoppiano a due a due in modo da annullare **L** e **S**. I materiali composti da questi atomi, sono virtualmente non magnetici, a parte un debole effetto detto *diamagnetismo* che sarà trattato nel paragrafo 37-4. In altri atomi o **L** o **S** (o entrambi) può essere non nullo; questi atomi sono responsabili del campo magnetico indotto in certi materiali che è analogo al campo *elettrico* indotto in un materiale dielettrico. Questi materiali vengono detti *paramagnetici*. Il tipo più familiare di magnetismo è il *ferromagnetismo*, in cui, a causa delle interazioni fra atomi, gli effetti magnetici persistono anche quando il campo magnetico esterno viene rimosso. Nel paragrafo 37-4 si vedrà come il semplice modello del magnetismo atomico presentato può aiutare a capire anche il comportamento ferromagnetico.

TABELLA 1 SPIN E MOMENTI MAGNETICI DI ALCUNE PARTICELLE

Particella	s (in unità di $h/2\pi$)	μ_s (in unità di μ_B)
Elettrone	$\frac{1}{2}$	−1.001 159 652 193
Protone	$\frac{1}{2}$	+0.001 521 032 202
Neutrone	$\frac{1}{2}$	−0.001 041 875 63
Deuterone (^{2}H)	1	+0.000 466 975 448
Alpha	0	0
Fotone	1	0

Magnetismo nucleare

Il nucleo, che è composto da protoni e da neutroni in moto orbitale nel loro mutuo campo di forze, ha un momento magnetico che può essere scomposto in due parti: una parte orbitale, dovuta al moto dei protoni (i neutroni, essendo elettricamente neutri, non contribuiscono al momento magnetico orbitale pur contribuendo al momento angolare orbitale) ed una parte intrinseca, dovuta al momento magnetico intrinseco dei protoni e dei neutroni. (Può sembrare strano che un neutrone, che è elettricamente neutro, abbia un momento magnetico intrinseco non nullo. Se il neutrone fosse veramente una particella elementare senza carica elettrica, infatti, non avrebbe alcun momento di dipolo magnetico. Il fatto che il momento di dipolo magnetico del neutrone non sia nullo è già una indicazione che il neutrone è una particella composta, e si può giustificare abbastanza bene supponendo il neutrone composto da tre quark carichi.)

I nuclei hanno momento di dipolo magnetico orbitale e di spin che possono essere espressi nella forma delle equazioni 7 e 10. Tuttavia, la massa che appare in queste equazioni (la massa dell'elettrone) deve essere sostituita dalla massa del protone o del neutrone, che è circa 1800 volte la massa dell'elettrone. I momenti di dipolo magnetico nucleari sono tipicamente più piccoli dei momenti di dipolo magnetico atomici di un fattore 10^3 e il loro contributo alle proprietà magnetiche dei materiali è generalmente trascurabile.

Gli effetti del magnetismo nucleare diventano importanti nel caso della *risonanza magnetica nucleare*, in cui il nucleo viene sottoposto ad una radiazione elettromagnetica di una certa frequenza ben definita, tale da far sì che il momento magnetico nucleare cambi direzione. Si possono allineare i momenti magnetici dei nuclei di un campione di materiale con un campo magnetico statico; la direzione dei dipoli si inverte quando essi assorbono la radiazione elettromagnetica variabile nel tempo. Tale assorbimento si può rivelare facilmente. Questo effetto è la base della acquisizione di immagini di risonanza magnetica («magnetic resonance imaging», MRI), una tecnica diagnostica in cui le immagini degli organi del corpo si possono ottenere usando una radiazione molto meno dannosa dei raggi X (vedi fig. 5).

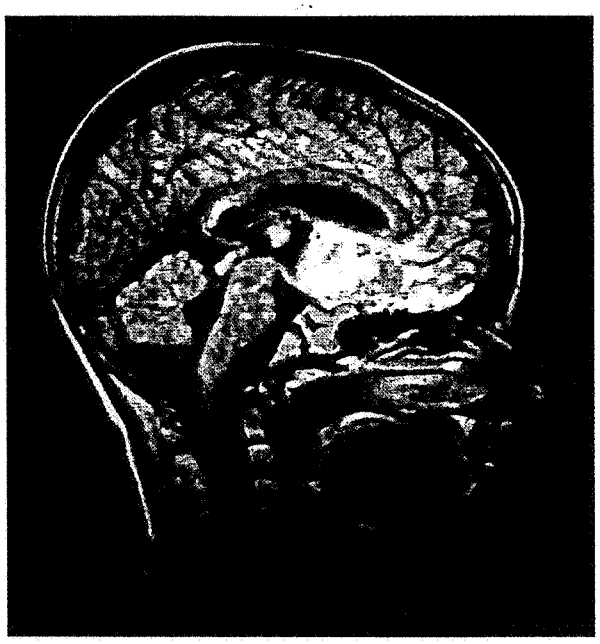


Figura 5 Una sezione di una testa umana, ripresa con la tecnica della risonanza magnetica nucleare (MRI). Essa mostra dettagli non visibili con le riprese a raggi x e non comporta rischi per la salute del paziente dovuti a radiazioni.

Esempio 1 Un neutrone si trova in un campo magnetico di intensità $B = 1.5$ T. Lo spin del neutrone sia inizialmente parallelo al campo e orientato nello stesso verso. Che lavoro è necessario fare per invertire il verso dello spin del neutrone?

Soluzione L'energia di interazione di un dipolo magnetico con un campo magnetico è data dall'equazione 38 del capitolo 34, $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Dalla tabella 1 si vede che il momento di dipolo magnetico del neutrone è negativo, come quello dell'elettrone. Ciò significa che la componente dello spin su qualsiasi asse è in direzione opposta alla componente del momento di dipolo. Quando lo spin è nello stesso verso del campo, come nella situazione iniziale di questo problema, $\boldsymbol{\mu}$ è opposto al campo sicché l'energia iniziale U_i è

$$U_i = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = |\mu|B,$$

poiché l'angolo tra $\boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{B}$ è di 180°. La relazione è scritta in termini del modulo di $\boldsymbol{\mu}$ perché del segno si è già tenuto conto nel prodotto scalare. Quando lo spin cambia verso («spin flip»), è il momento magnetico che si viene a trovare nel verso del campo e l'energia finale è

$$U_f = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -|\mu|B.$$

Il lavoro fatto sul sistema è uguale alla variazione di energia, cioè

$$\begin{aligned} L &= U_f - U_i = -|\mu|B - |\mu|B = -2|\mu|B \\ &= -2(0.00104\ \mu_B)[(9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})/\mu_B](1.5\ T) \\ &= -2.9 \times 10^{-26}\ \text{J} = -0.18\ \mu\text{eV}. \end{aligned}$$

Il lavoro fatto sul sistema è *negativo*, cioè è il sistema ad aver fatto un lavoro *positivo* sull'ambiente esterno. Questa energia potrebbe essere trasmessa all'esterno sotto forma di radiazione elettromagnetica; tale radiazione sarebbe nella regione delle microonde dello spettro elettromagnetico ed avrebbe una frequenza di 44 MHz, leggermente al di sotto delle frequenze su cui riceve una radio nella banda FM.

37-3 MAGNETIZZAZIONE

Nel capitolo 31 si è studiato l'effetto che si ottiene riempiendo lo spazio tra le armature di un condensatore con un dielettrico e si è trovato che l'inserimento del dielettrico, mantenendo costante la carica sulle armature, riduce il campo elettrico tra le armature stesse. Cioè, se $\mathbf{E}_0$ è il campo elettrico senza dielettrico, allora il campo elettrico in presenza del dielettrico è dato dall'equazione 35 del capitolo 31, che si scrive, in forma vettoriale,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0/\kappa_e. \tag{11}$$

L'effetto del dielettrico è caratterizzato dalla costante dielettrica κ_e.

Si consideri, invece, un mezzo magnetico composto da atomi il cui momento di dipolo magnetico sia $\boldsymbol{\mu}_i$. In generale questi dipoli saranno diretti in varie direzioni. Si calcoli il momento di dipolo magnetico netto $\boldsymbol{\mu}$ di un volume V del materiale prendendo la somma vettoriale di tutti i dipoli contenuti nel volume: $\boldsymbol{\mu} = \Sigma\boldsymbol{\mu}_i$. Si definisce *magnetizzazione* $\mathbf{M}$ del mezzo, il momento di dipolo magnetico netto per unità di volume,

$$\mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{V} = \frac{\Sigma\boldsymbol{\mu}_i}{V} \tag{12}$$

Per considerare la magnetizzazione una quantità microscopica, l'equazione 12 dovrebbe essere scritta come limite per il volume che tende a zero. Questo permette di considerare un materiale come *uniformemente* magnetizzato.

Si consideri un tale materiale immerso in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}_0$. Il campo applicato «magnetizza» il materiale ed allinea i dipoli. I dipoli allineati generano un loro campo magnetico, analogo al campo *elettrico* generato dai dipoli elettrici in un mezzo dielettrico (vedi par. 31-6). In ogni punto dello spazio il campo magnetico è dato dalla somma del campo esterno $\mathbf{B}_0$ e del campo magnetico generato dai dipoli $\mathbf{B}_M$, cioè

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_M. \tag{13}$$

Il campo $\mathbf{B}_M$ può comprendere contributi dati da dipoli permanenti nei materiali paramagnetici (analoghi ai dielettrici polari) e da dipoli indotti in qualsiasi materiale (come nei dielettrici non polari).

ISBN 88-408-0777-2

Il campo di magnetizzazione $\mathbf{B}_M$ è legato alla magnetizzazione $\mathbf{M}$ del mezzo, che (come definito dall'equazione 12) è determinato dai dipoli nel materiale. In campi deboli, $\mathbf{M}$ è proporzionale al campo esterno $\mathbf{B}_0$. Tuttavia, $\mathbf{B}_M$ in generale è difficile da calcolare a meno che la magnetizzazione non sia uniforme e che la geometria non presenti un alto grado di simmetria. Come esempio di tale caso, si consideri un lungo solenoide (ideale) di sezione circolare riempito con un materiale magnetico (vedi fig. 6). In questo caso il campo esterno (il campo del solenoide) è uniforme; sia $\mathbf{B}_0$ che $\mathbf{M}$ sono paralleli all'asse e si può dimostrare che $\mathbf{B}_M = \mu_0\mathbf{M}$ all'interno del solenoide. (Si controllino le dimensioni e si dimostri che $\mu_0\mathbf{M}$ ha le dimensioni di un campo magnetico.)

Si può quindi scrivere il campo totale nella seguente forma

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0\mathbf{M} \tag{14}$$

come mostrato in figura 6*b*. In campi deboli $\mathbf{M}$ cresce proporzionalmente al campo esterno $\mathbf{B}_0$, sicché $\mathbf{B}$ deve essere proporzionale a $\mathbf{B}_0$. In tal caso si può scrivere

$$\mathbf{B} = \kappa_m\mathbf{B}_0, \tag{15}$$

dove κ_m è la *permeabilità magnetica relativa* del materiale, definita relativamente al vuoto, per il quale $\kappa_m = 1$. La permeabilità magnetica relativa dei materiali più comuni (ad eccezione dei materiali ferromagnetici) ha valori molto vicini a 1, come si vedrà nel prossimo paragrafo. Per i materiali non ferromagnetici, la permeabilità magnetica relativa può dipendere da fattori come la temperatura o la densità del materiale, ma non dal campo $\mathbf{B}_0$. In situazioni normali, l'equazione 15 descrive una relazione lineare in cui il campo $\mathbf{B}$ nel materiale cresce linearmente al crescere del campo esterno $\mathbf{B}_0$. Per i materiali ferromagnetici, d'altro canto, l'equazione 15 definisce un certo valore di κ_m che dipende dal campo esterno, di modo che l'equazione 15 non è più lineare.*

Combinando le equazioni 14 e 15, si può scrivere la magnetizzazione indotta dal campo esterno come

$$\mu_0\mathbf{M} = (\kappa_m - 1)\mathbf{B}_0. \tag{16}$$

La quantità $\kappa_m - 1$ ha valori tipicamente dell'ordine di 10^{-6} - 10^{-3}, per materiali non ferromagnetici, sicché il contributo al campo totale dovuto alla magnetizzazione $\mu_0\mathbf{M}$ è generalmente molto minore di $\mathbf{B}_0$. Ciò è molto diverso da quanto accade nel caso dei campi elettrici, in cui κ_e ha valori tipici, per i materiali più comunemente usati, tra 3 e 100. Il campo elettrico totale è modificato sostanzialmente dalla presenza di un dielettrico, mentre il contributo al campo magnetico totale di un mezzo magnetico, tranne che nel caso di materiali ferromagnetici, è molto piccolo.

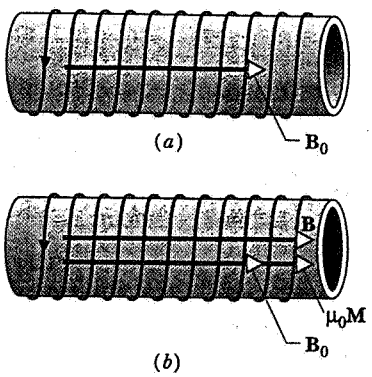


Figura 6 (*a*) In un solenoide vuoto, la corrente genera un campo magnetico $\mathbf{B}_0$. (*b*) Quando il solenoide viene riempito con un materiale magnetico, il campo totale $\mathbf{B}$ è dato dal contributo $\mathbf{B}_0$ della corrente e dal contributo $\mu_0\mathbf{M}$ del materiale magnetico.

Esempio 2 Il campo magnetico all'interno di un certo solenoide ha una intensità di 6.5×10^{-4} T quando il solenoide è vuoto. Quando esso viene riempito di ferro, il campo diventa di 1.4 T. (*a*) Determinare la permeabilità magnetica relativa in queste condizioni. (*b*) Determinare il momento magnetico medio di un atomo di ferro in queste condizioni.

Soluzione (*a*) Dall'equazione 15 si ottiene (considerando solo i moduli)

$$\kappa_m = \frac{B}{B_0} = \frac{1.4\text{ T}}{6.5 \times 10^{-4}\text{ T}} = 2300.$$

(*b*) Usando l'equazione 14, si ottiene

$$M = \frac{B - B_0}{\mu_0} = \frac{1.4\text{ T} - 6.5 \times 10^{-4}\text{ T}}{4\pi \times 10^{-7}\text{ T} \cdot \text{m/A}} = 1.11 \times 10^6\text{ A/m}.$$

Si noti che l'unità di misura di M può anche scriversi $\text{A} \cdot \text{m}^2/\text{m}^3$. Ciò rappresenta il momento magnetico per unità di volume del ferro. Per determinare il momento magnetico per atomo, è necessaria la densità n degli atomi (il numero di atomi per unità di volume):

$$n = \frac{\text{atomi}}{\text{volume}} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}\frac{\text{atomi}}{\text{massa}} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}\frac{\text{atomi/mole}}{\text{massa/mole}} = \rho\frac{N_A}{m}.$$

dove ρ è la densità del ferro, N_A il numero di Avogadro e m è la massa molare del ferro. Sostituendo i valori, si ottiene

* Anche in questo caso vi è una analogia tra campi elettrici e campi magnetici. Esistono materiali dielettrici, detti *ferroelettrici*, per cui la relazione tra $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{E}_0$ non è lineare; cioè, κ_e dipende dal campo esterno $\mathbf{E}_0$. Con tali materiali si possono costruire dei dipoli elettrici quasi permanenti, detti *elettreti*, che sono analoghi ai magneti permanenti. La maggior parte dei materiali dielettrici comunemente usati sono lineari, mentre la maggior parte dei materiali magnetici utili sono non lineari.

$$n = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)\frac{6.02 \times 10^{23} \text{ atomi/mole}}{0.0559 \text{ kg/mole}}$$
$$= 8.45 \times 10^{28} \text{ atomi/m}^3.$$

Il momento magnetico medio per atomo è dunque

$$\mu = \frac{M}{n} = \frac{1.11 \times 10^6 \text{ A/m}}{8.45 \times 10^{28}/\text{m}^3} = 1.31 \times 10^{-23} \text{ J/T} = 1.4\ \mu_B.$$

Questo risultato è in accordo con il valore che ci si aspetta per un momento di dipolo magnetico atomico. Il calcolo suggerisce che ogni atomo del campione contribuisca alla magnetizzazione del materiale con tutto il suo momento di dipolo magnetico, un fatto che caratterizza i materiali ferromagnetici.

37-4 MATERIALI MAGNETICI

Sulla base di quanto esposto nei paragrafi precedenti, si possono ora capire alcune caratteristiche di tre tipi di materiali magnetici. Come si vedrà, questa classificazione dipende in parte dal momento di dipolo magnetico degli atomi del materiale e in parte dall'interazione tra gli atomi.

Paramagnetismo

Il paramagnetismo si ha in materiali i cui atomi possiedono un momento di dipolo magnetico permanente; non importa se il momento di dipolo magnetico è di tipo orbitale o di spin.

In un campione di materiale paramagnetico, in assenza di campo esterno, i momenti di dipolo atomici sono orientati in maniera casuale (vedi fig. 7*a*). La magnetizzazione, calcolata secondo l'equazione 12, è nulla perché l'orientamento casuale dei $\boldsymbol{\mu}_i$ fa sì che la somma vettoriale sia nulla, proprio come la direzione casuale delle velocità delle molecole di un gas fa sì che la velocità del centro di massa del campione sia nulla.

Quando il materiale viene immerso in un campo

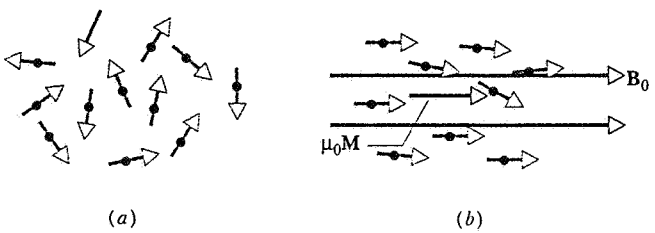


Figura 7 (*a*) In un materiale non magnetizzato, i momenti magnetici atomici sono orientati in modo casuale. (*b*) Quando viene applicato un campo esterno $\mathbf{B}_0$, i dipoli ruotano tendendo ad allinearsi col campo, e la somma vettoriale dei momenti di dipolo atomici dà un contributo $\mu_0\mathbf{M}$ al campo nel materiale.

TABELLA 2 PERMEABILITÀ RELATIVA DI ALCUNI MATERIALI PARAMAGNETICI A TEMPERATURA AMBIENTE

Materiale	$\kappa_m - 1$
Gd_2O_3	1.2×10^{-2}
$CuCl_2$	3.5×10^{-4}
Cromo	3.3×10^{-4}
Tungsteno	6.8×10^{-5}
Alluminio	2.2×10^{-5}
Magnesio	1.2×10^{-5}
Ossigeno (1 atm)	1.9×10^{-6}
Aria (1 atm)	3.6×10^{-7}

magnetico (magari mettendo il campione in un solenoide), le coppie che agiscono sui dipoli tendono ad allinearli col campo (vedi fig. 7*b*). La somma vettoriale dei momenti di dipolo non è più nulla. Il campo all'interno del materiale ora è formato da due contributi: il campo esterno $\mathbf{B}_0$ ed il campo indotto dalla magnetizzazione $\mu_0\mathbf{M}$ dovuto ai dipoli. Si noti che questi due campi sono paralleli; la presenza dei dipoli aumenta il campo magnetico esterno, al contrario di ciò che accade nel caso dei campi elettrici in cui il campo dei dipoli è opposto al campo esterno e riduce il campo elettrico totale all'interno del materiale (vedi fig.13 cap. 31). Il rapporto tra $\mu_0\mathbf{M}$ e $\mathbf{B}_0$ è dato, secondo l'equazione 16, da $\kappa_m - 1$, che è un numero piccolo e positivo per i materiali paramagnetici. In tabella 2 sono riportati alcuni valori tipici.

L'agitazione termica degli atomi tende a distruggere l'allineamento dei dipoli, e di conseguenza la magnetizzazione diminuisce all'aumentare della temperatura. Pierre Curie scoprì che la magnetizzazione M e la temperatura T sono inversamente proporzionali. Si può scrivere, quindi,

$$M = C\frac{B_0}{T}, \tag{17}$$

che è nota come *legge di Curie*, e la costante C *viene detta costante di Curie*.

Poichè la magnetizzazione di un certo campione dipende dalla somma vettoriale dei suoi dipoli magnetici atomici, la magnetizzazione raggiunge il suo massimo valore quando tutti i dipoli sono paralleli. Se vi sono N dipoli nel volume V, il massimo valore di μ è $N\mu_i$, che si ottiene quando tutti gli N dipoli magnetici μ_i sono paralleli. In tal caso

$$M_{\max} = \frac{N}{V}\mu_i. \tag{18}$$

Quando la magnetizzazione raggiunge questo valore di *saturazione*, ulteriori aumenti del campo esterno $\mathbf{B}_0$ non hanno alcun effetto sulla magnetizzazione. La leg-

ISBN 88-408-0777-2

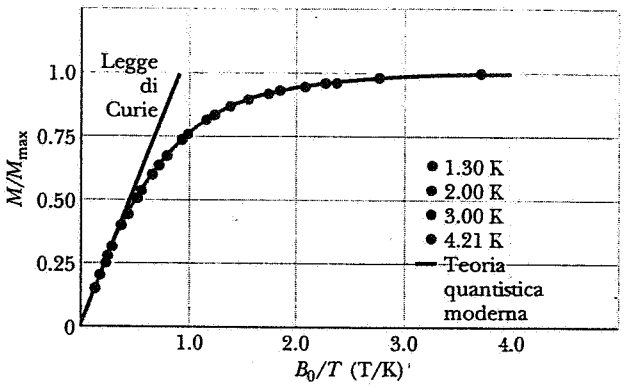


Figura 8 Per un materiale paramagnetico, il rapporto tra la magnetizzazione M ed il suo valore di saturazione M_{max} dipende da B_0/T.

ge di Curie, che richiede che M cresca linearmente al crescere di $\mathbf{B}_0$, vale solo quando la magnetizzazione è lontana dalla saturazione, cioè quando B_0/T è piccolo.* In figura 8 è riportato l'andamento della magnetizzazione M, in unità di M_{max}, in funzione di B_0/T per varie temperature per l'allume di cromo $CrK(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$, un sale paramagnetico. (Sono gli ioni di cromo ad essere responsabili del paramagnetismo di questo sale.) Si noti l'avvicinamento alla saturazione e si noti che la legge di Curie è valida solo per valori piccoli di B_0/T (cioè per bassi campi esterni o per alte temperature). Una analisi completa, usando la meccanica statistica quantistica, dà risultati in ottimo accordo coi dati sperimentali.

Quando il campo magnetico esterno in cui si trova un materiale paramagnetico viene rimosso, l'agitazione termica fa sì che i momenti di dipolo magnetico si orientino nuovamente in maniera casuale; le forze magnetiche tra gli atomi sono troppo deboli per mantenere l'allineamento e impedire che i dipoli si orientino in modo casuale. Questo effetto può essere sfruttato per raffreddare un campione usando la tecnica della *smagnetizzazione adiabatica*. Un campione viene magnetizzato a temperatura costante. I dipoli si portano in uno stato di energia minima allineandosi completamente o parzialmente col campo esterno e, facendo questo, devono cedere energia al materiale circostante. Questa energia fluisce, sotto forma di calore, al serbatoio termico dell'ambiente. A questo punto il campione viene isolato termicamente dall'ambiente e smagnetizzato adiabaticamente. Quando i dipoli diventano disposti in direzioni casuali, il loro aumento di energia magnetica deve essere compensato da una corrispondente diminuzione dell'energia interna del sistema (dato che non ci può essere uno scambio di calore con un sistema isolato durante un processo adiabatico). La temperatura del campione deve quindi diminuire. La temperatura più bassa che si può raggiungere è determinata dal campo residuo generato dai dipoli. La smagnetizzazione dei dipoli magnetici atomici può essere usata per raggiungere temperature dell'ordine di 0.001 K, mentre la smagnetizzazione dei dipoli nucleari, che sono molto più piccoli, permette di raggiungere temperature dell'ordine di 10^{-6} K.

Diamagnetismo

Nel 1847, Michael Faraday scoprì che un campione di bismuto viene *respinto* da un forte magnete. Egli chiamò le sostanze che si comportano in tale modo diamagnetiche. (Al contrario, le sostanze paramagnetiche sono sempre *attirate* da un magnete.) Il diamagnetismo si ha in tutti i materiali. Tuttavia, esso è generalmente un effetto molto minore del paramagnetismo e quindi lo si può osservare facilmente solo in materiali che non siano paramagnetici. Tali materiali potrebbero essere quelli con momento di dipolo magnetico atomico nullo. Un momento di dipolo magnetico nullo si può avere nel caso in cui la somma vettoriale dei momenti di dipolo magnetico (orbitali e di spin) dovuti ai vari elettroni dell'atomo è nulla. Il diamagnetismo è analogo all'effetto dei campi elettrici indotti in elettrostatica. Un campione di materiale elettricamente neutro, ad esempio un pezzetto di carta, viene attirato da una bacchetta carica di qualunque segno. Le molecole della carta non hanno un momento di dipolo elettrico permanente, ma acquisiscono un momento di dipolo *indotto* a causa del campo elettrico e questi momenti indotti possono essere attirati dal campo (vedi figura 14 del capitolo 31).

Nei materiali diamagnetici, atomi che non hanno un momento di dipolo magnetico *permanente* ne acquisiscono uno *indotto* quando vengono immersi in un campo magnetico esterno. Si considerino gli elettroni che orbitano in un atomo come spire di corrente. Quando viene applicato un campo esterno $\mathbf{B}_0$, il flusso attraverso la spira cambia. Per la legge di Lenz, il moto deve cambiare in modo che il campo indotto si opponga all'aumento di flusso. Un calcolo basato su orbite circolari (vedi prob. 25), mostra che la variazione del moto consiste in un leggero aumento o in una leggera diminuzione della velocità dell'elettrone, tale da apportare una variazione nella velocità angolare del moto orbitale di

$$\Delta\omega = \pm\frac{eB_0}{2m}. \qquad (19)$$

dove B_0 è il modulo del campo esterno e m è la massa

* Per B_0/T piccolo, si intende che l'energia magnetica del dipolo $\mu_i B_0$ deve essere molto minore dell'energia termica $(3/2)kT$, cioè $B_0/T \ll (3/2)\,k/\mu_i$. (Vedi anche esempio 3). [N.d.T.]

TABELLA 3 PERMEABILITÀ RELATIVA DI ALCUNE SOSTANZE DIAMAGNETICHE A TEMPERATURA AMBIENTE

Sostanza	$\kappa_m - 1$
Mercurio	-3.2×10^{-5}
Argento	-2.6×10^{-5}
Bismuto	-1.7×10^{-5}
Alcool etilico	-1.3×10^{-5}
Rame	-9.7×10^{-6}
Diossido di carbonio (1 atm)	-1.1×10^{-8}
Azoto (1 atm)	-5.4×10^{-9}

dell'elettrone. Questa variazione di velocità angolare cambia il momento magnetico orbitale degli elettroni (vedi equazione 5 ed esempio 4).

Se si avvicina un atomo di un materiale come il bismuto al polo nord di un magnete, il campo (diretto in verso uscente dal polo) tende ad aumentare il flusso attraverso la spira di corrente che rappresenta l'elettrone in moto orbitale nell'atomo. Secondo la legge di Lenz, ci deve essere un campo indotto diretto in verso opposto (verso il polo). Il polo nord indotto si trova sul lato della spira rivolto verso il magnete e i due poli nord si respingono.

Questo effetto si ha a prescindere dal verso in cui è percorsa l'orbita, sicché la magnetizzazione in un materiale diamagnetico è opposta al campo esterno. Il rapporto tra il contributo al campo dovuto alla magnetizzazione $\mu_0 M$ e il campo esterno B_0, dato secondo l'equazione 16 da $\kappa_m - 1$, ha valori, per materiali diamagnetici tipici, compresi tra -10^{-5} e -10^{-6}. In tabella 3 sono riportati i valori della permeabilità magnetica relativa di alcuni materiali diamagnetici.

Ferromagnetismo

Il ferromagnetismo, come il paramagnetismo, si ha in materiali in cui gli atomi hanno un momento di dipolo magnetico permanente. Ciò che distingue i materiali ferromagnetici dai materiali paramagnetici è il fatto che nei materiali ferromagnetici vi è una forte interazione tra momenti di dipolo magnetici atomici vicini che li mantiene allineati anche quando il campo magnetico esterno viene rimosso. Il fatto che questo accada o meno dipende dall'intensità dei singoli dipoli atomici e, poiché il campo di un dipolo dipende dalla distanza, dalla separazione tra gli atomi del materiale. Certi atomi potrebbero essere ferromagnetici in un certo materiale ma non in un altro, perchè la loro distanza è differente. Materiali ferromagnetici a temperatura ambiente familiari sono il ferro, il cobalto e il nickel. Elementi ferromagnetici meno noti, alcuni dei quali sono ferromagnetici solo a basse temperature, sono alcune terre rare come il gadolinio e il disprosio. Anche composti e leghe possono essere ferromagnetici; per esempio il diossido di cromo CrO_2, il componente principale dei nastri magnetici, è ferromagnetico anche se né il cromo né l'ossigeno sono ferromagnetici a temperatura ambiente.

Si può diminuire l'accoppiamento tra atomi vicini, che causa il ferromagnetismo, aumentando la temperatura del materiale. La temperatura a cui un materiale ferromagnetico diviene paramagnetico è detta *temperatura di Curie*. La temperatura di Curie del ferro, ad esempio, è di 770 °C; al di sopra di questa temperatura il ferro è paramagnetico. La temperatura di Curie del gadolinio è di 16 °C; a temperature superiori il gadolinio è paramagnetico, mentre a temperature inferiori ai 16 °C il gadolinio ha un comportamento ferromagnetico.

L'aumento del campo nei materiali ferromagnetici è considerevole. Il campo magnetico totale B all'interno di un materiale ferromagnetico può essere 10^3 o 10^4 volte più intenso del campo applicato $\mathbf{B}_0$. La permeabilità magnetica relativa κ_m di un materiale ferromagnetico non è costante; né il campo B né la magnetizzazione $\mathbf{M}$ crescono linearmente al crescere di $\mathbf{B}_0$, anche per bassi valori di $\mathbf{B}_0$.

Si inserisca un materiale ferromagnetico, come il ferro, nel solenoide di figura 6*b*. Si supponga che la corrente sia inizialmente nulla e che il ferro non sia magnetizzato, sicché inizialmente sia $\mathbf{B}_0$ che $\mathbf{M}$ siano nulli. Si aumenti $\mathbf{B}_0$ aumentando la corrente nel solenoide. La magnetizzazione aumenta rapidamente e tende ad un valore di saturazione, come indicato in figura 9 dal tratto *ab*. Si diminuisca ora la corrente fino a zero. La magnetizzazione non ripercorre il cammino (sul grafico) percorso in precedenza, ma, invece, il ferro rimane magnetizzato (punto *c*) anche quando il campo esterno $\mathbf{B}_0$ è nullo. Se poi si inverte la direzione della corrente nel solenoide, si raggiunge una magnetizzazione di saturazione in verso opposto (punto *d*) e riportando a zero la corrente nel solenoide si trova che il campione ha acquistato una magnetizzazione permanente nel punto *e*. Si può quindi aumentare ancora la corrente per tornare alla magnetizzazione di saturazione nella direzione originale (punto *b*). Il cammino *bcdeb* può essere seguito ripetutamente.

Il comportamento illustrato in figura 9 viene detto *isteresi*. Nei punti *c* ed *e* il ferro è magnetizzato anche se nel solenoide non scorre alcuna corrente. Inoltre il ferro «si ricorda» come è stato magnetizzato: una corrente negativa produce una magnetizzazione diversa dalla magnetizzazione prodotta da una corrente positiva. Questa «memoria» è essenziale per il funzionamento dell'immagazzinamento magnetico di informazioni, ad esempio su nastro magnetico o su dischetti per calcolatori.

ISBN 88-408-0777-2

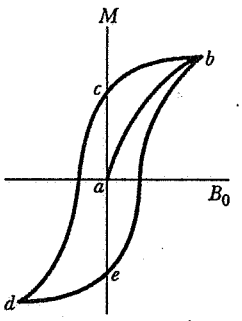


Figura 9 Variazione della magnetizzazione di un campione di materiale ferromagnetico quando il campo applicato viene cambiato. Il percorso *bcdeb* viene detto *curva di isteresi.*

L'avvicinamento alla saturazione di un materiale ferromagnetico avviene attraverso un meccanismo diverso da quello di un materiale paramagnetico (che si è descritto come rotazione di momenti di dipolo magnetici individuali per allinearsi col campo esterno). Un materiale come il ferro è composto da un grande numero di microscopici cristalli. All'interno di ogni cristallo vi sono dei *domini magnetici**, delle regioni di circa 0.01 mm di dimensioni in cui l'accoppiamento dei dipoli magnetici produce un allineamento pressocché perfetto dei dipoli magnetici di tutti gli atomi. In figura 10 è riportata una disposizione dei domini magnetici in un cristallo di nickel. Vi sono molti domini, con i dipoli diretti in direzioni diverse, e il risultato della somma vettoriale di questi dipoli in un campione non magnetizzato dà una magnetizzazione nulla.

Quando il materiale ferromagnetico viene posto in un campo esterno, possono accadere due effetti: (1) dipoli che non appartengono a domini allineati col campo possono allinearsi con esso, aumentando così le dimensioni dei domini che sono allineati a spese dei domini che non lo sono; (2) un intero dominio non allineato può allinearsi col campo esterno. In ciascun caso alla fine vi sono più dipoli allineati col campo ed il materiale ha una forte magnetizzazione. Quando il campo viene rimosso i confini dei domini non ritornano completamente nella loro posizione precedente ed il materiale rimane magnetizzato nella direzione del campo applicato.

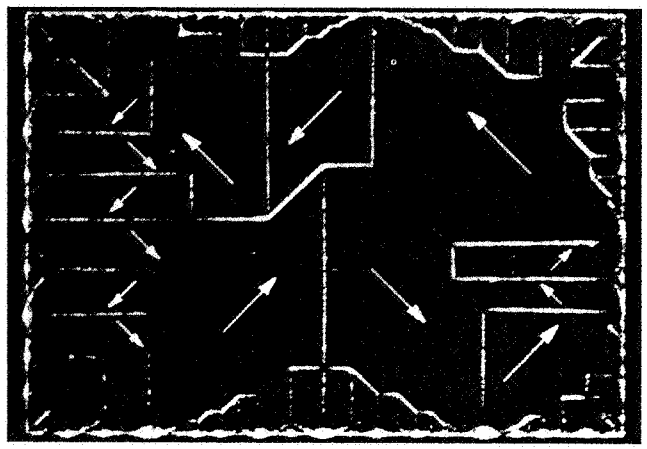


Figura 10 Disposizione dei domini in un cristallo di nickel. Le righe bianche, che mostrano i contorni dei domini, sono prodotte con polvere di ossido di ferro sparsa sulla superficie. Le frecce indicano l'orientazione dei dipoli magnetici all'interno dei domini.

* Queste regioni vengono spesso chiamate *domini di Weiss*, in onore del fisico francese Pierre-Ernest Weiss che ne ipotizzò per primo l'esistenza nel 1907. [N.d.T.]

Esempio 3 Si consideri una sostanza paramagnetica i cui atomi possiedano un momento di dipolo magnetico di 3.3 μ_B. Tale sostanza si trovi in un campo magnetico di 5.2 T. A che temperatura bisogna raffreddare il campione in esame, affinché l'energia magnetica di ogni atomo sia uguale alla energia cinetica traslazionale media per atomo?

Soluzione L'energia magnetica di un dipolo in un campo esterno è $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$, mentre l'energia cinetica traslazionale media per atomo è data da $(3/2)kT$ (vedi par. 23-4). Esse sono uguali in modulo quando la temperatura è:

$$T = \frac{\mu B}{(3/2)k} = \frac{(3.3)(9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(5.2\ \text{T})}{(1.5)(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})} = 7.7\ \text{K}.$$

Esempio 4 Si calcoli la variazione del momento magnetico di un elettrone che si muove su un'orbita circolare in un atomo, quando viene posto in un campo magnetico $\mathbf{B}_0$ di 2.0 T in direzione normale al piano dell'orbita. Si assuma un raggio dell'orbita $r = 5.29 \times 10^{-11}$ m, che corrisponde allo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno.

Soluzione L'equazione 5 si può scrivere

$$\mu = \tfrac{1}{2} erv = \tfrac{1}{2} er^2\omega,$$

usando $v = r\omega$. La variazione $\Delta\mu$ di momento magnetico che corrisponde ad una variazione di velocità angolare è data da

$$\Delta\mu = \tfrac{1}{2} er^2 \Delta\omega = \tfrac{1}{2} er^2 \left(\pm \frac{eB_0}{2m}\right) = \pm \frac{e^2 B_0 r^2}{4m}$$

$$= \pm \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2 (2.0\ \text{T})(5.29 \times 10^{-11}\ \text{m})^2}{4(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})}$$

$$= \pm 3.9 \times 10^{-29}\ \text{J/T},$$

dove è stata impiegata l'equazione 19 per $\Delta\omega$.

Confrontando il risultato con il valore del momento magnetico $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24}$ J/T, si nota che questo effetto ammonta solo a circa 4×10^{-6} volte il momento magnetico. Ciò è in accordo con quanto ci si aspetta per gli effetti diamagnetici (vedi tab. 3).

37-5 IL MAGNETISMO DEI PIANETI *(Facoltativo)*

Sebbene la bussola fosse già in uso come strumento per la navigazione da diversi secoli, la spiegazione del suo comportamento non fu ben capita finché, nel 1600, sir William Gilbert, il medico della regina Elisabetta I, propose l'idea che la Terra fosse un enorme magnete con i poli vicino ai poli geografici. In seguito altri ricercatori hanno tracciato mappe accurate del campo magnetico terrestre e veicoli spaziali hanno studiato i campi magnetici di altri pianeti.

Il campo magnetico della Terra può essere considerato in prima approssimazione il campo di un dipolo di momento $\mu = 8.0 \times 10^{22}$ J/T. Il campo alla superficie ha una intensità che varia da circa 30 μT vicino all'equatore a circa 60 μT vicino ai poli. (Per un dipolo ci si aspetta che il campo lungo l'asse sia doppio del campo alla stessa distanza nel piano normale passante per il punto medio; vedi tabella 1 del capitolo 35.) L'asse del dipolo forma un angolo di circa 11.5° con l'asse di rotazione della Terra (che a sua volta forma un angolo di 23.5° con la normale al piano dell'orbita della Terra attorno al Sole, come mostrato in figura 11). Quello che viene normalmente chiamato polo nord magnetico, che si trova nelle regioni settentrionali del Canada, è in effetti il polo sud del dipolo Terra, per come lo si è definito dalla convergenza delle linee di forza. Il polo sud magnetico, che si trova nella regione antartica, coincide col polo nord del dipolo, dato che le linee di forza di **B** sono uscenti. Mettendola in un altro modo, l'estremità dell'ago della bussola che indica il nord è il polo nord del magnete sospeso nella bussola; esso è attirato dal polo sud del magnete Terra che si trova vicino al polo nord geografico.

Il campo magnetico della Terra ha una importanza pratica non solo nella navigazione, ma anche nella ricerca di giacimenti minerari e nel campo delle comunicazioni. Esso è stato perciò ampiamente studiato per molti anni, sulla superficie misurandone intensità e direzione e più in alto con satelliti orbitali. Tra i suoi altri effetti vi sono le fasce di Van Allen che circondano la Terra (vedi figura 15 del capitolo 34) e le cosiddette «luci del nord», l'aurora boreale* (vedi fig. 12).

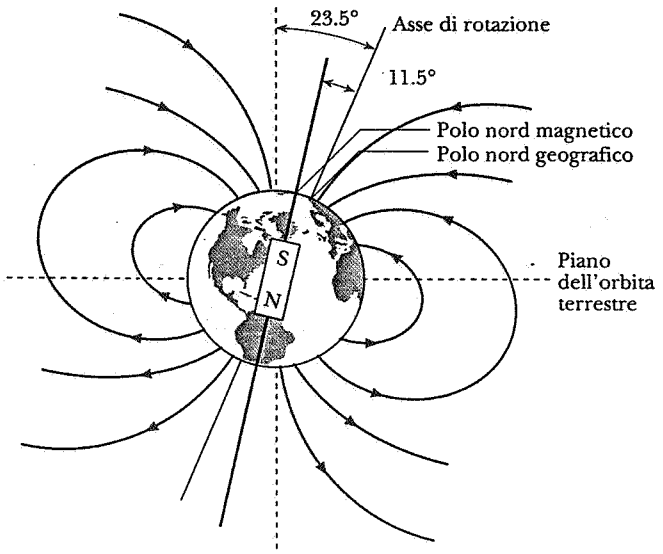


Figura 11 Una rappresentazione semplificata del campo magnetico della Terra vicino alla superficie. Si noti che il polo nord magnetico è in realtà il polo sud del dipolo che rappresenta il campo della Terra. L'asse magnetico giace circa a metà tra l'asse di rotazione della Terra e la normale al piano dell'orbita terrestre (linea verticale tratteggiata).



Figura 12 La spettacolare aurora boreale, nota anche come «northern lights».

Dato che si trovano in natura delle rocce magnetizzate, può venire la tentazione di spiegare il campo magnetico terrestre con un nucleo di rocce magnetizzate all'interno della Terra. Tale spiegazione, tuttavia, non può essere corretta perché la temperatura del centro della Terra è di diverse migliaia di gradi, molto più alta della temperatura di Curie del ferro. Il ferro al centro della Terra non può quindi essere ferromagnetico.

Inoltre da misure effettuate nelle ultime centinaia di anni, si sa che il nord magnetico si sposta rispetto al polo nord geografico, e da registrazioni geologiche si sa che i poli si invertono su una scala di tempi di centinaia di migliaia di anni. (Inoltre, come si vedrà in seguito, alcuni pianeti che hanno una composizione simile a quella della Terra non hanno campi magnetici, mentre altri pianeti che certamente non contengono materiali magnetici hanno un campo molto intenso.) Tali osservazioni sono difficili da spiegare se si suppone l'esistenza di un nucleo magnetico.

L'esatta sorgente del magnetismo terrestre non è ancora ben capita, ma probabilmente dipende da qualche specie di effetto *dinamo*. La parte più esterna del nucleo terrestre contiene minerali allo stato liquido che possono facilmente condurre elettricità. Un piccolo campo magnetico iniziale fa sì che in questo conduttore in movimento scorrano delle correnti, per la legge dell'induzione di Faraday. Tali correnti possono aumentare il campo magnetico e questo campo aumentato è quello che si osserva come campo magnetico terrestre. Tuttavia, come è noto da quanto visto in precedenza sull'induzione, un conduttore che si muove in un campo magnetico è sottoposto ad una forza frenante. La fonte dell'energia necessaria a vincere tale forza frenante e a mantenere il nucleo in movimento non è ancora stata compresa.

La Terra contiene una registrazione delle variazioni sia di direzione che di intensità del campo magnetico. Antichi campioni di ceramiche, ad esempio, contengono piccole particelle di ferro che sono state magnetizzate dal campo magnetico terrestre durante il raffreddamento dopo la cottura. Dall'intensità della magnetizza-

* Vedi: Syun-Ichi Akasofu, *The dynamic Aurora*, «Scientific American», maggio, 1989, pag. 90.

ISBN 88-408-0777-2

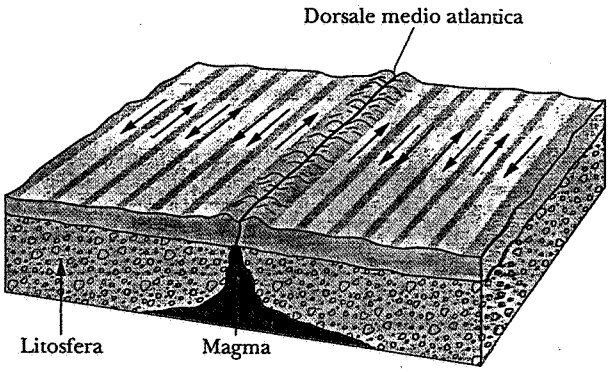


Figura 13 Quando il magma fuoriesce da una spaccatura del fondo dell'oceano e si raffredda, conserva una registrazione della direzione del campo magnetico terrestre in quel momento (frecce). Ciascun segmento potrebbe rappresentare un intervallo di tempo compreso tra 100 000 e 1 000 000 di anni.

zione di queste particelle, si può dedurre l'intensità del campo nel luogo e nel momento della cottura. Una registrazione geologica di origine simile si trova sul fondo dell'oceano (vedi fig. 13). Quando il magma fuso fuoriesce da una dorsale oceanica* e si solidifica, le particelle di ferro si magnetizzano. La direzione della magnetizzazione indica la direzione del campo magnetico terrestre. Dalla configurazione della magnetizzazione, si può dedurre che i poli magnetici della Terra si sono invertiti periodicamente nella storia geologica. Questa inversione avviene circa ogni 100 000 - 1 000 000 anni ed è divenuta più frequente in ere più recenti. Le ragioni di queste inversioni e della loro frequenza crescente non sono note, ma presumibilmente sono connesse in qualche modo all'effetto dinamo.**

Quando ci si allontana dalla Terra, il suo campo decresce e si cominciano ad osservare modificazioni dovute al *vento solare*, un flusso di particelle cariche provenienti dal sole (vedi fig. 14). L'effetto di ciò è una lunga coda associata al campo magnetico terrestre che si estende per molte migliaia di diametri terrestri. Poiché il sole ha un effetto così grande sul campo magnetico terrestre, anche a distanza di pochi raggi terrestri, esso può influenzare fenomeni che riguardano il campo terrestre come l'aurora boreale e le comunicazioni radio.

Negli ultimi anni, sonde spaziali interplanetarie sono riuscite a misurare la direzione e l'intensità dei campi magnetici dei pianeti. Queste osservazioni avvalorano la teoria dell'effetto dinamo come causa di questi campi magnetici. In tabella 4 sono riportati i valori dei momenti di dipolo magnetico e del campo alla superficie dei pianeti.

Venere, il cui nucleo è simile a quello della Terra, non ha campo magnetico perché la sua rotazione è troppo lenta (una rivoluzione ogni 244 giorni terrestri) per generare un effetto dinamo apprezzabile. Marte, che ha un periodo di rivoluzione simile a quello terrestre, non ha un campo perché il suo nucleo è presumibilmente troppo piccolo, fatto che si deduce dalla densità media misurata di Marte. I pianeti più esterni (Giove e oltre) sono composti soprattutto da idrogeno e da elio, che normalmente non sono magnetici; tuttavia, alle alte pressioni e temperature che ci sono

* Le dorsali oceaniche sono catene montuose che si trovano sul fondo degli oceani. Esse si formano per fuoriuscita di magma tra due zolle tettoniche adiacenti. [N.d.T.]

** Vedi: Jeremy Bloxham e David Gubbins, *The Evolution of the Earth's Magnetic Field*, «Scientific American», dicembre, 1989, pag. 68; e Charles R. Carrigan e David Gubbins, *L'origine del campo magnetico terrestre*, «Le Scienze», 128:58.

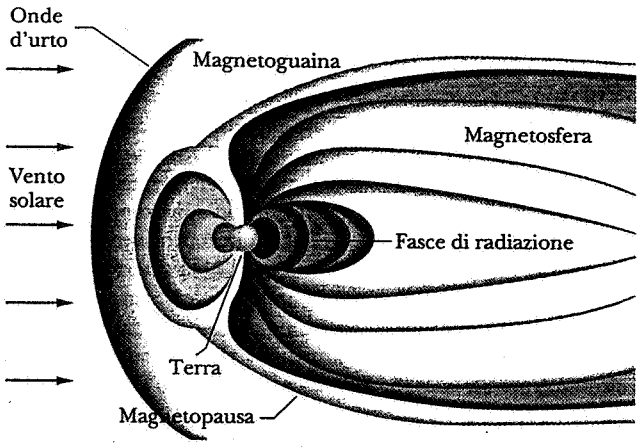


Figura 14 Il campo magnetico lontano dalla superficie della Terra mostra l'influenza del campo di dipolo quanto quella del vento solare. La lunga coda magnetica si allunga per diverse migliaia di diametri terrestri.

TABELLA 4 CAMPI MAGNETICI NEL SISTEMA SOLARE

Pianeta	μ (A · m^2)	*B alla superficie* (μT)
Mercurio	5×10^{19}	0.35
Venere	$< 10^{19}$	< 0.01
Terra	8.0×10^{22}	30
Marte	$< 2 \times 10^{18}$	< 0.01
Giove	1.6×10^{27}	430
Saturno	4.7×10^{25}	20
Urano	4.0×10^{24}	10-100
Nettuno	2.2×10^{24}	10-100

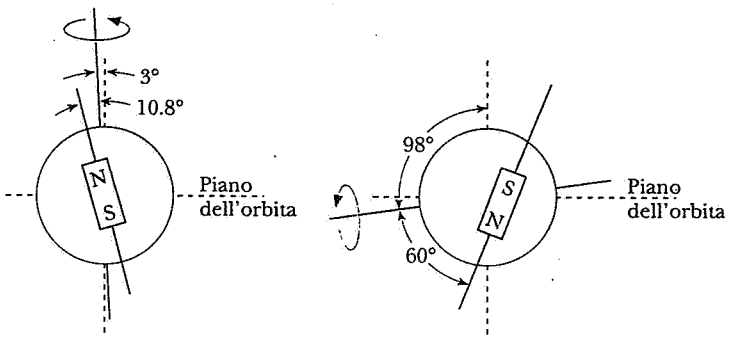


Figura 15 (*a*) L'orientamento dell'asse del dipolo magnetico di Giove rispetto al suo asse di rotazione ed al piano della sua orbita. Si noti che, al contrario di ciò che accade nel caso della Terra, il polo nord magnetico è un vero polo nord del campo di dipolo. (*b*) L'orientamento dell'asse del dipolo magnetico di Urano.

vicino al centro di questi pianeti, l'idrogeno e l'elio possono comportarsi come metalli, in particolare possono avere grande conducibilità elettrica e permettere l'effetto dinamo.

In figura 15 sono riportati l'asse rotazionale e l'asse magnetico di Giove e di Urano; si confrontino questi con il caso della Terra riportato in figura 11. Si noti che l'asse di rotazione di Urano è quasi parallelo al piano della sua orbita, diversamente degli altri pianeti. Si noti inoltre che l'asse magnetico di Urano è diretto in una direzione molto diversa dall'asse di rotazione e che il dipolo è spostato rispetto al centro del pianeta. Una situazione analoga si ha nel caso di Nettuno. Sfortunatamente le informazioni su questi pianeti sono limitate a quelle che si sono potute ottenere da voli spaziali che sono passati nelle vicinanze del pianeta per un solo giorno o circa. Se si potessero esaminare le loro altre proprietà fisiche e le loro registrazioni geologiche, si potrebbe imparare molto sul magnetismo dei pianeti.* ■

Esempio 5 Misurando la componente orizzontale B_h del campo magnetico della Terra a Tucson, Arizona, si trova una intensità di 26 μT. Con un ago magnetico, come quello di una bussola, libero di ruotare nel piano verticale si può misurare l'angolo tra la direzione del campo ed il piano orizzontale, detto *inclinazione* ϕ_i. L'inclinazione misurata a Tucson è di 59°. Determinare modulo e componente verticale del campo.

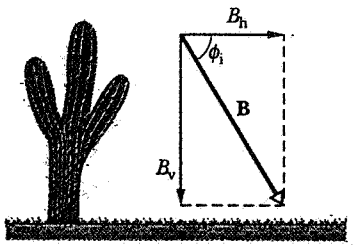


Figura 16 Esempio 5. Le componenti orizzontale e verticale del campo magnetico terrestre nei dintorni di Tucson, Arizona. L'angolo ϕ_i è l'inclinazione magnetica.

Soluzione Come illustrato in figura 16, il modulo del campo si può ricavare da

$$B = \frac{B_h}{\cos\phi_i} = \frac{26\ \mu T}{\cos 59^\circ} = 50\ \mu T.$$

La componente verticale è data da

$$B_v = B_h \tan\phi_i = (26\ \mu T)(\tan 59^\circ) = 43\ \mu T.$$

Come ci si aspetta per un campo di dipolo (vedi fig. 11), i valori misurati dell'inclinazione vanno da 0° vicino all'equatore (in realtà, vicino all'equatore *magnetico*), a 90° vicino ai poli.

* Vedi Parker E. N., *Campi magnetici nel cosmo*, «Le Scienze», 182:20 e Andrew P. Ingersoll, *Urano*, «Le Scienze», 223:116.

DOMANDE

1. Si considerino due barre di ferro dall'aspetto identico. Una sia un magnete e l'altra no. Come le si possono distinguere? Non è consentito sospenderle come l'ago di una bussola né usare qualunque altro genere di apparecchiatura.
2. Due barre di ferro si attirano sempre, indipendentemente da quali estremità vengano avvicinate. Si può concludere che una delle due deve essere non magnetizzata?
3. In cosa sono simili e in cosa sono differenti i due seguenti fenomeni? (*a*) Una bacchetta carica attira piccoli pezzi di materiale dielettrico. (*b*) Un magnete permanente può attirare un qualsiasi campione non magnetizzato di materiale ferromagnetico.
4. Come si può determinare la polarità di un magnete?
5. Si dimostri, classicamente, che una carica positiva che ruota su se stessa ha un momento magnetico di spin diretto nello stesso verso del momento angolare di spin.
6. Il neutrone, che è elettricamente neutro, ha un momento di dipolo magnetico. Questo fatto è spiegabile classicamente o basta da solo a sostenere che l'elettromagnetismo classico non è sufficiente?
7. Tutti i magneti permanenti devono avere necessariamente un polo nord e un polo sud identificabili? Si considerino geometrie diverse da quella del magnete a barra o a ferro di cavallo.
8. Si considerino le due seguenti situazioni: (*a*) un (ipotetico) monopolo magnetico viene fatto passare a velocità costante lungo l'asse attraverso una spira conduttrice; (*b*) come (*a*) ma con il monopolo sostituito da una piccola sbarra magnetica (un dipolo magnetico). Si confrontino qualitativamente le quantità di carica che attraversano una qualunque sezione della spira durante questi processi. Gli esperimenti per rivelare i monopoli magnetici sfruttano queste differenze.
9. Esaminando una certa barretta di ferro, si scopre che vi è un polo nord ad entrambe le estremità. Se si sparge sulla barretta della limatura di ferro, dove si attaccherà (nel caso più semplice)? Disegnare approssimativamente le linee di forza di **B** all'interno e all'esterno della barretta.
10. Si consideri la disposizione iniziale di **A** e **B** illustrata in figura 17, in cui **A** è fissato mentre **B** è libero di ruotare. Descrivere cosa accade se (*a*) **A** è un dipolo elettrico e **B** un dipolo magnetico; (*b*) sia **A** che **B** sono dipoli magnetici; (*c*) sia **A** che **B** sono dipoli elettrici. Si ripeta l'esercizio nel caso che **A** sia libero di ruotare e **B** sia fissato.

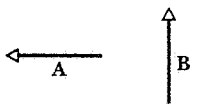


Figura 17 Domanda 10.

ISBN 88-408-0777-2

11. Siete un fabbricante di bussole. (*a*) Descrivere alcuni metodi per magnetizzare l'ago della bussola. (*b*) L'estremità dell'ago che punta verso nord normalmente viene dipinta di un colore caratteristico. Senza sospendere l'ago nel campo magnetico terrestre, come si può determinare qual è l'estremità da colorare? (*c*) L'estremità colorata è un polo nord o un polo sud magnetico?
12. Ci si aspetta che la magnetizzazione di saturazione per una sostanza paramagnetica sia molto diversa da quella di un materiale ferromagnetico saturo, a parità di dimensioni? Perché o perché no?
13. Spiegare il motivo per cui un materiale ferromagnetico diviene paramagnetico a profondità superiori a circa 20 km sotto il livello del suolo.
14. Si supponga di volere smagnetizzare un campione di materiale ferromagnetico, preventivamente magnetizzato ponendolo in un campo esterno. Per raggiungere lo scopo, la temperatura del campione deve essere innalzata fino alla temperatura di fusione?
15. La magnetizzazione indotta in una certa sfera diamagnetica da un dato campo esterno non varia al variare della temperatura, in netto contrasto con quanto avviene nel caso del paramagnetismo. Spiegare questo comportamento in termini della descrizione dell'origine del diamagnetismo studiata in questo capitolo.
16. Spiegare perché un magnete attira un oggetto di ferro non magnetizzato, ad esempio un chiodo.
17. C'è qualche forza o coppia risultante che agisca (*a*) su una barretta di ferro non magnetizzata o (*b*) su un magnete permanente a barra, immersi in un campo magnetico uniforme?
18. Si consideri un chiodo appoggiato su un piano senza attrito vicino ad un forte magnete. Quando il chiodo viene lasciato libero, esso viene attirato dal magnete. Qual è la fonte dell'energia cinetica che il chiodo ha acquistato subito prima di urtare il magnete?
19. Si dice che i superconduttori sono perfettamente diamagnetici. Spiegare il perché.
20. Spiegare perché una piccola sbarra magnetica posta verticalmente sopra una coppa di piombo superconduttore non ha bisogno di forze di contatto per essere sostenuta.
21. Si confrontino le curve di magnetizzazione per una sostanza paramagnetica (vedi fig. 8) e per una sostanza ferromagnetica (vedi fig. 9). Quale sarebbe l'andamento di questa curva per una sostanza diamagnetica?
22. Perché la limatura di ferro si allinea col campo magnetico? Dopo tutto, essa non è naturalmente magnetizzata.
23. Il campo magnetico della Terra può essere ben rappresentato dal campo magnetico di un dipolo posto al centro o vicino al centro della Terra. I poli magnetici della Terra si possono pensare come (*a*) i punti in cui l'asse di questo dipolo attraversa la superficie terrestre o (*b*) i punti della superficie terrestre in cui un ago per la misura dell'inclinazione sarebbe diretto verticalmente. Tali punti coincidono necessariamente?
24. Un «amico» prende in prestito la vostra bussola e dipinge tutto l'ago di rosso. Quando lo scoprite, vi siete persi in una caverna ed avete appresso due torce elettriche, qualche metro di filo e (naturalmente) questo libro. Come fate a scoprire quale estremità dell'ago della bussola indica il nord?
25. Come si può magnetizzare una barra di ferro se la Terra è l'unico magnete disponibile?
26. Come fareste a schermare un certo volume da campi magnetici esterni costanti? Se pensate che non sia possibile, spiegate il perché.
27. I raggi cosmici sono particelle cariche che colpiscono la nostra atmosfera provenendo da qualche sorgente esterna. Ai poli magnetici nord e sud si trovano più raggi cosmici di bassa energia di quanti se ne trovino all'equatore (magnetico). Perché?
28. Come si potrebbe misurare il momento di dipolo magnetico della Terra?
29. Dare tre giustificazioni del fatto che il flusso Φ_B del campo magnetico terrestre attraverso i confini dell'Alaska è maggiore del flusso attraverso i confini del Texas.
30. Le aurore vengono osservate con massima frequenza non ai poli magnetici nord e sud, ma a latitudini di circa 23° dai poli (nella baia di Hudson, per esempio, nell'emisfero geomagnetico settentrionale). Riuscite a immaginare qualche ragione, qualitativa, per cui l'attività delle aurore non debba essere massima ai poli?
31. Riuscite a immaginare qualche meccanismo grazie al quale una tempesta magnetica, cioè una grossa perturbazione del campo magnetico terrestre, possa interferire con le comunicazioni radio?

PROBLEMI

Paragrafo 37-1 La legge di Gauss per il magnetismo

1. Il flusso del campo magnetico attraverso cinque facce di un dado sia dato da $\Phi_B = \pm N$ Wb, dove N (= 1,...,5) è il numero di punti sulla faccia. Il flusso sia positivo (uscente) per N pari e negativo (entrante) per N dispari. Calcolare il flusso attraverso la sesta faccia del dado.
2. Si consideri una superficie gaussiana di forma cilindrica di raggio $r = 13$ cm ed altezza $h = 80$ cm. Attraverso una base vi è un flusso entrante del campo magnetico di 25 μWb. Sull'altra base vi è un campo magnetico uniforme di 1.6 mT, ortogonale alla superficie e diretto verso l'esterno. Calcolare il flusso attraverso la superficie laterale.
3. In figura 18 sono rappresentate quattro disposizioni di coppie di aghi magnetici, posti in una regione in cui non vi è al-

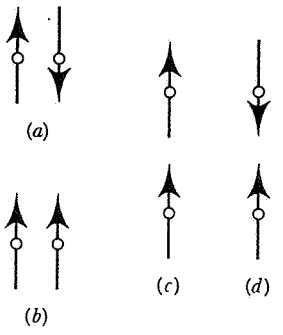


Figura 18 Problema 3.

cun campo magnetico esterno. Stabilire in ciascun caso se l'equilibrio è stabile o instabile. Per ogni coppia di aghi si consideri solo il momento torcente che agisce su un ago dovuto al campo magnetico generato dall'altro. Giustificare le risposte.

4. Si consideri una sbarra magnetica appesa ad un filo come in figura 19. Si produca, quindi, un campo magnetico uniforme **B** in direzione orizzontale. Disegnare l'orientazione finale del magnete e del filo.

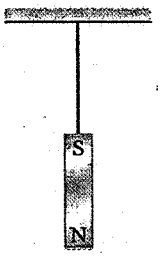


Figura 19 Problema 4.

5. Si consideri la situazione di figura 20, in cui due fili paralleli all'asse z e posti ad una distanza $4r$ l'uno dall'altro vengono attraversati da una corrente i in versi opposti. Si consideri, inoltre, un cilindro di raggio r e di altezza L che abbia come asse l'asse z, posto a metà tra i due fili. Calcolare, usando la legge di Gauss per il magnetismo, il flusso uscente attraverso la metà della superficie cilindrica che si trova nel semispazio delle y positive. (*Suggerimento*: si calcoli il flusso attraverso la porzione del piano xz che è interna al cilindro.)

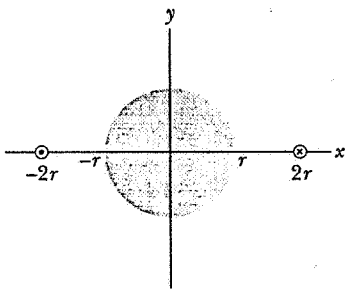


Figura 20 Problema 5.

Paragrafo 37-2 Magnetismo atomico e nucleare

6. Usando i valori riportati in tabella 1 per il momento angolare di spin s e per il momento magnetico μ_s, per l'elettrone libero, verificare numericamente l'equazione 9.
7. Nello stato ad energia più bassa dell'atomo di idrogeno, la distanza più probabile tra l'unico elettrone orbitante ed il protone centrale è di 5.29×10^{-11} m. Calcolare (*a*) il campo elettrico e (*b*) il campo magnetico generati dal protone a quella distanza, misurata lungo l'asse di spin del protone. Vedi tabella 1 per il momento magnetico del protone.
8. Si supponga di riuscire ad allineare tutti i dipoli dei nuclei dell'idrogeno (protoni) contenuti in 1.50 g di acqua. Calcolare il campo magnetico che si avrebbe a 5.33 m dal campione lungo l'asse di allineamento.
9. Si consideri una carica q distribuita uniformemente su un anello di raggio r. L'anello ruoti, attorno all'asse normale al suo piano di giacitura e passante per il suo centro, con velocità angolare ω. (*a*) Si dimostri che il momento magnetico generato dalla carica in moto rotatorio è dato da

$$\mu = \tfrac{1}{2} q\omega r^2.$$

(*b*) Detto L il momento angolare dell'anello, si dimostri che $\mu/L = q/2m$.

10. Si supponga che l'elettrone sia una piccola sfera di raggio R, e che le sue densità di massa e densità di carica siano uniformi. Tale elettrone abbia un momento angolare «di spin» L ed un momento magnetico μ. Si dimostri che $e/m = 2\mu/L$. Questa previsione è in accordo con gli esperimenti? (*Suggerimento*: si divida l'elettrone sferico in spire di corrente infinitesime e si determini il momento magnetico per integrazione. Questo modello dell'elettrone è troppo meccanicistico per essere nello spirito della fisica quantistica.)

Paragrafo 37-3 Magnetizzazione

11. Si consideri un magnete, di forma cilindrica, di lunghezza 4.8 cm e di diametro 1.1 cm. Esso sia magnetizzato uniformemente con una magnetizzazione di 5.3 kA/m. Calcolare il suo momento di dipolo magnetico.
12. Il momento di dipolo di un atomo di ferro in una barra di ferro è di 2.22 μ_B. Si assuma che tutti i momenti di dipolo degli atomi della barra, lunga 4.86 cm e la cui sezione ha un'area di 1.31 cm^2, siano allineati. (*a*) Calcolare il momento di dipolo della barra. (*b*) Che momento bisogna esercitare sulla barra per mantenerla normale ad un campo magnetico esterno di 1.53 T?
13. Si consideri un solenoide composto da 16 spire/cm percorso da una corrente di 1.3 A. (*a*) Di quanto aumenta il campo interno al solenoide quando esso viene riempito completamente con una barra di cromo? (*b*) Determinare la magnetizzazione della barra di cromo. (vedi tab. 2.)
14. Un elettrone di energia cinetica K_e si muove su un cammino circolare perpendicolare ad un campo magnetico uniforme, soggetto unicamente alla forza del campo. (*a*) Si dimostri che il momento di dipolo magnetico dovuto al suo moto orbitale ha modulo $\mu = K_e/B$ e che è rivolto in verso opposto a **B**. (*b*) Calcolare modulo e direzione del momento di dipolo magnetico di uno ione positivo di energia cinetica K_i nella stessa situazione. (*c*) Si consideri un gas ionizzato composto da 5.28×10^{21} elettroni/m^3 e dallo stesso numero di ioni/m^3. L'energia cinetica media per gli elettroni sia di 6.21×10^{-20} J e l'energia cinetica media per gli ioni sia di 7.58×10^{-21} J. Calcolare la magnetizzazione del gas in un campo magnetico di 1.18 T.

Paragrafo 37-4 Materiali magnetici

15. Si consideri un gas paramagnetico, i cui atomi hanno un momento di dipolo magnetico intrinseco di 1.2×10^{-23} J/T, che si trova in una regione in cui vi è un campo magnetico di 0.50 T. A che temperatura l'energia cinetica traslazionale media degli atomi del gas uguaglia l'energia richiesta per invertire un dipolo nel campo esterno?
16. Misure effettuate in miniere e fori di trivellazione indicano che la temperatura nella Terra aumenta all'aumentare della profondità in media di 30 °C/km. Assumendo una tempera-

ISBN 88-408-0777-2

tura in superficie di 20 °C, a che profondità cessa di essere ferromagnetico il ferro? (La temperatura di Curie del ferro varia molto poco al variare della pressione.)

17. Un campione del sale paramagnetico la cui curva di magnetizzazione è riportata in figura 8 viene mantenuto a temperatura ambiente (300 K). Che campo bisogna applicare affinché la magnetizzazione del campione sia (*a*) il 50% o (*b*) il 90% della magnetizzazione di saturazione? (*c*) Questi campi sono ottenibili in laboratorio?
18. Un campione del sale paramagnetico la cui curva di magnetizzazione è riportata in figura 8 si trova immerso in un campo magnetico esterno di 1.8 T. A che temperatura la magnetizzazione del campione è (*a*) il 50% o (*b*) il 90% della magnetizzazione di saturazione?
19. Si vuole vedere se il sale paramagnetico la cui curva di magnetizzazione è riportata in figura 8 obbedisce alla legge di Curie. Un campione di tale sale viene posto in un campo magnetico di 0.50 T che rimane costante per tutta la durata dell'esperimento. Si misura quindi la magnetizzazione M per temperature comprese tra 10 e 300 K. Si trova che la legge di Curie è soddisfatta in queste condizioni o no?
20. Una sostanza paramagnetica viene (debolmente) attratta dal polo di un magnete. In figura 21 è illustrato un modello di questo fenomeno. La «sostanza paramagnetica» è rappresentata da una spira di corrente L, posta sull'asse di una sbarra magnetica più vicina al polo nord che al polo sud. A causa del momento $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ esercitato sulla spira dal campo $\mathbf{B}$ della sbarra magnetica, il momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$ della spira si dispone nello stesso verso del campo $\mathbf{B}$. (*a*) Disegnare approssimativamente le linee di forza del campo magnetico $\mathbf{B}$ della sbarra magnetica. (*b*) Mostrare la direzione della corrente i nella spira. (*c*) Usando la formula $d\mathbf{F} = i\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ mostrare che la forza risultante che agisce su L è diretta verso il polo nord della sbarra magnetica.

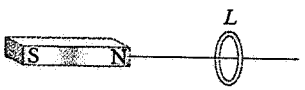


Figura 21 Problemi 20 e 21.

21. Una sostanza diamagnetica viene (debolmente) respinta dal polo di un magnete. In figura 21 è illustrato un modello di questo fenomeno. La «sostanza diamagnetica» è rappresentata da una spira di corrente L, posta sull'asse di una sbarra magnetica più vicina al polo nord che al polo sud del magnete. Poiché la sostanza è diamagnetica, il momento di dipolo magnetico μ della spira si dispone in verso opposto al campo $\mathbf{B}$. (*a*) Disegnare approssimativamente le linee di forza del campo magnetico $\mathbf{B}$ della sbarra magnetica. (*b*) Mostrare la direzione della corrente i nella spira. (*c*) Usando la formula $d\mathbf{F} = i\, d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ mostrare che la forza risultante che agisce su L è repulsiva.
22. La magnetizzazione di saturazione del nickel, che è un metallo ferromagnetico, è di 511 kA/m. Calcolare il momento magnetico di un singolo atomo. (I dati necessari si trovano nell'appendice D.)
23. L'accoppiamento responsabile del ferromagnetismo menzionato nel paragrafo 37-4 *non* è determinato dall'energia della mutua interazione magnetica tra due dipoli elementari. Per dimostrarlo, calcolare (*a*) il campo magnetico ad una distanza di 10 nm lungo l'asse del dipolo da un atomo il cui momento di dipolo magnetico è di 1.5×10^{-23} J/T (cobalto) e (*b*) l'energia necessaria per invertire un altro dipolo identico in tale campo. Confrontare col risultato dell'esempio 3. A quali conclusioni arrivate?
24. Si consideri un solido composto da N atomi per unità di volume, ciascun atomo abbia un momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$. Si supponga che la direzione dei dipoli possa essere solo parallela o antiparallela a un campo magnetico esterno $\mathbf{B}$ (come, ad esempio, nel caso in cui $\boldsymbol{\mu}$ sia il momento magnetico di spin di un singolo elettrone). Secondo la meccanica statistica, si può dimostrare che la probabilità che un atomo si trovi in uno stato di energia U è proporzionale a $e^{-U/kT}$ dove T è la temperatura e k è la costante di Boltzmann (distribuzione di Boltzmann; paragrafo 24-6). Poiché $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$, la frazione di atomi il cui dipolo è parallelo a $\mathbf{B}$ è proporzionale a $e^{\mu B/kT}$ e la frazione il cui dipolo è antiparallelo a $\mathbf{B}$ è proporzionale a $e^{-\mu B/kT}$. (*a*) Si mostri che la magnetizzazione di questo solido è $M = N\mu \tanh(\mu B/kT)$. Dove tanh indica la tangente iperbolica: $\tanh x = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (*b*) Si dimostri che (*a*) si riduce a $M = N\mu^2 B/kT$ per $\mu B \ll kT$. (*c*) Si dimostri che (*a*) si riduce a $M = N\mu$ per $\mu B \gg kT$. (*d*) Si dimostri che (*b*) e (*c*) sono qualitativamente in accordo con la figura 8.
25. Si consideri un atomo in cui un elettrone si muove su un'orbita circolare di raggio r con una velocità angolare ω_0. Perpendicolarmente al piano dell'orbita venga applicato un campo magnetico esterno. Come conseguenza della forza magnetica, l'elettrone si muova sulla medesima orbita di raggio r, ma con una velocità angolare $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$. (*a*) Si dimostri che quando viene applicato il campo esterno la variazione di accelerazione centripeta è di $2r\omega_0\delta\omega$. (*b*) Supponendo che la variazione di accelerazione centripeta sia dovuta unicamente alla forza magnetica, derivare l'equazione 19.

Paragrafo 37-5 Il magnetismo dei pianeti

26. Nell'esempio 5, si è trovato che la componente verticale del campo magnetico terrestre a Tucson, Arizona, è di 43 μT. Supponendo che questo sia il valore medio in tutta l'Arizona, che ha una superficie di 295 000 chilometri quadrati, calcolare il flusso attraverso tutto il resto della Terra (tutta la superficie escluso l'Arizona). Tale flusso è entrante o uscente?
27. Il momento di dipolo magnetico della Terra è di 8.0×10^{22} J/T. (*a*) Che corrente dovrebbe scorrere in un avvolgimento di una sola spira coincidente con l'equatore magnetico per generare tale momento di dipolo? (*b*) Si potrebbe usare un tale apparato per cancellare il campo magnetico terrestre a grande distanza dalla superficie? (*c*) E sulla superficie terrestre?
28. Il momento di dipolo magnetico della Terra è di 8.0×10^{22} J/T. (*a*) Se la fonte di questo magnetismo fosse una sfera di ferro magnetizzata posta al centro della Terra, che raggio dovrebbe avere? (*b*) Che frazione del volume della Terra occuperebbe? La densità del nucleo più interno della Terra è di 14 g/cm^3. Il momento di dipolo magnetico di un atomo di ferro è di 2.1×10^{-23} J/T.
29. Il campo magnetico della Terra può essere considerato approssimativamente il campo di un dipolo magnetico, con

componenti orizzontale e verticale, in un punto a distanza r dal centro della Terra, date da

$$B_h = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos L_m, \quad B_v = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \operatorname{sen} L_m,$$

dove L_m è la *latitudine magnetica* (la latitudine misurata dall'equatore magnetico verso il polo nord o polo sud magnetico). Il momento di dipolo magnetico è di 8.0×10^{22} A · m^2. (*a*) Si dimostri che l'intensità del campo magnetico ad una latitudine L_m è data da

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \operatorname{sen}^2 L_m}.$$

(*b*) Si dimostri che l'inclinazione ϕ_i del campo magnetico è legata alla latitudine magnetica L_m da $\tan\phi_i = 2 \tan L_m$.

30. Si usino i risultati del problema 29 per calcolare il valore del campo magnetico terrestre (intensità e inclinazione) (*a*) all'equatore magnetico, (*b*) in un punto a latitudine magnetica 60°, (*c*) al polo nord magnetico.

31. Determinare a che altezza sopra il livello del suolo il campo magnetico terrestre ha una intensità che è la metà di quella che ha al livello del suolo alla stessa latitudine magnetica. (Usare l'approssimazione di dipolo del problema 29.)

32. Usando l'approssimazione di dipolo per il campo magnetico terrestre (vedi problema 29), calcolare la massima intensità del campo magnetico terrestre al confine tra nucleo e mantello, che si trova circa 2900 km sotto la superficie della Terra.

33. Usare le proprietà del campo di dipolo esposto nel problema 29 per calcolare l'intensità e l'inclinazione del campo magnetico terrestre al polo nord geografico. (*Suggerimento*: l'angolo tra l'asse magnetico e l'asse rotazionale della Terra è di 11.5°.) Perché i valori calcolati, con ogni probabilità, non coincidono coi valori misurati?

Capitolo 38

L'INDUTTANZA

Un induttore *è un elemento circuitale che immagazzina energia nel campo magnetico che circonda i suoi fili percorsi da corrente, proprio come un condensatore immagazzina energia nel campo elettrico tra le sue armature cariche. In precedenza si è impiegato il condensatore ideale a piatti paralleli come una rappresentazione conveniente di un qualunque condensatore; in questo capitolo si impiegherà analogamente il solenoide ideale per rappresentare un induttore.*

Nel capitolo 31 si è dimostrato che un condensatore è caratterizzato dal valore della sua capacità, che si può calcolare dalla sua geometria e che poi descrive il comportamento del condensatore in un circuito elettrico. In questo capitolo si dimostrerà che un induttore è caratterizzato dalla sua induttanza, *che dipende dalla sua geometria e che descrive il suo comportamento in un circuito. Quando un circuito contiene sia un induttore che un condensatore, l'energia immagazzinata nel circuito può oscillare avanti e indietro tra di essi, proprio come in un oscillatore meccanico può oscillare tra energia cinetica ed energia potenziale. Tali circuiti, che si comportano come oscillatori elettromagnetici, verranno discussi alla fine di questo capitolo.*

38-1 L'INDUTTANZA

La capacità è definita dall'equazione 1 del capitolo 31,

$$V_C = \frac{1}{C} q. \qquad (1)$$

Questa equazione, che in definitiva è basata sulla legge di Coulomb, dice che la differenza di potenziale V_C tra le armature di un condensatore è proporzionale alla carica q immagazzinata nel condensatore; la costante di proporzionalità, C^{-1}, definisce la capacità. Le quantità che compaiono nell'equazione 1 vengono considerate tutte in valore assoluto; il segno della differenza di potenziale è tale che il piatto su cui si raccoglie la carica positiva abbia il potenziale più alto.

L'*induttanza* L di un componente di un circuito (ad esempio di un solenoide) è definita da una relazione simile,

$$\mathcal{E}_L = L\frac{di}{dt}, \qquad (2)$$

dove ancora una volta le quantità che vi compaiono sono valori assoluti. Questa equazione, che poi si vedrà essere basata sulla legge di Faraday, dice che una corrente variabile nel tempo che passa attraverso un induttore dà luogo ad una f.e.m. $\mathcal{E}_L$ tra i capi dell'induttore e che tale f.e.m. $\mathcal{E}_L$ è proporzionale alla velocità di variazione della corrente. La costante di proporzionalità L viene detta induttanza. Come la capacità C, l'induttanza L è una quantità sempre positiva.

L'equazione 2 mostra che l'unità di misura dell'induttanza nel SI è il volt-secondo/ampere. Questa combinazione di unità viene detta henry (abbreviazione H), sicché

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ volt-secondo/ampere}.$$

Questa unità di misura si chiama così in onore di Joseph Henry (1797-1878), un fisico americano contemporaneo di Faraday. Nel diagramma di un circuito elettrico, un induttore viene rappresentato dal simbolo —ᔓᔓᔓᔓ—, che ricorda la forma di un solenoide.

Per determinare la relazione tra il segno di $\mathcal{E}_L$ ed il segno di di/dt, si usa la legge di Lenz. In figura 1 è rappresentato un solenoide ideale in cui viene fatta scorrere una corrente i (per esempio con una batteria non mostrata in figura). Si *diminuisca* improvvisamen-

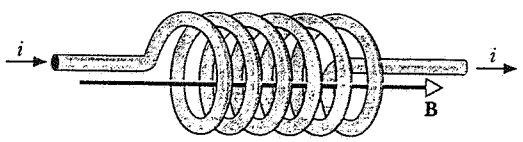


Figura 1 Un induttore arbitrario, rappresentato come un solenoide. La corrente i genera un campo magnetico B.

ISBN 88-408-0777-2

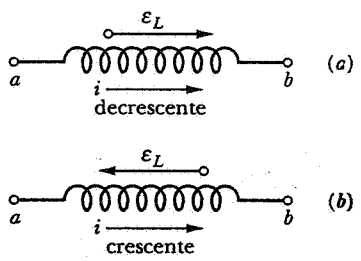


Figura 2 (*a*) Una corrente *decrescente* induce nell'induttore una f.e.m. che si oppone alla decrescita della corrente. (*b*) Una corrente *crescente* induce nell'indutore una f.e.m. che si oppone alla crescita.

te la f.e.m. nel circuito (la f.e.m. della batteria). La corrente i inizia immediatamente a *diminuire*. Questa diminuzione di corrente è la variazione a cui, secondo la legge di Lenz, $\mathcal{E}_L$ si deve opporre. Per opporsi alla diminuzione di corrente, la f.e.m. indotta deve far circolare una corrente addizionale nello *stesso* verso di i.

Se invece si *aumenta* improvvisamente la f.e.m. nel circuito (la f.e.m. della batteria), la corrente i inizia immediatamente ad *aumentare*. In questo caso, dalla legge di Lenz, si ricava che $\mathcal{E}_L$ si oppone all'aumento di corrente facendo circolare una corrente addizionale in verso *opposto* ad i.

In ogni caso, la f.e.m. indotta è tale da opporsi alla *variazione* di corrente. In figura 2 è riassunta la relazione tra il segno di/dt e il segno di $\mathcal{E}_L$. In figura 2*a*, V_b è più grande di V_a, sicché $V_b - V_a = |L\, di/dt|$. Poiché i decresce, di/dt è negativo e si può scrivere

$$V_b - V_a = -L\, di/dt. \tag{3}$$

In figura 2*b*, di/dt è positivo e V_a è più grande di V_b, sicchè l'equazione 3 è ancora valida. L'equazione 3 è particolarmente utile quando si usa la legge delle maglie per analizzare un circuito che contiene degli induttori.

38-2 CALCOLO DELL'INDUTTANZA

Per calcolare la capacità di un conduttore carico arbitrario (senza dielettrici) si è impiegata la legge di Coulomb, nella forma della legge di Gauss, per determinare il campo elettrico **E** in termini della carica q immagazzinata nel condensatore; scrivendo la differenza di potenziale come

$$\Delta V = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{4}$$

si può sostituire l'espressione di **E** e determinare la dipendenza di ΔV da q, infine dall'equazione 1 si ricava la capacità. Questa tecnica è stata illustrata negli esempi del paragrafo 31-2.

Per calcolare l'induttanza si segue un procedimento simile. Questa tecnica si basa sulla legge di Faraday. Si determina dapprima il campo magnetico **B** per la geometria dell'induttore in questione (che, per il momento, si suppone che non contenga materiali magnetici). Ciò permette di ottenere il flusso Φ_B del campo magnetico attraverso ogni spira dell'avvolgimento. Si supponga che il flusso sia uguale per tutte le N spire dell'avvolgimento. Il prodotto $N\Phi_B$ viene detto *flusso concatenato* con l'induttore. Si può determinare la f.e.m. dalla legge di Faraday

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \tag{5}$$

Le equazioni 2 e 5 mettono in relazione la f.e.m. in un induttore con la corrente (equazione 2) o con una proprietà che è proporzionale alla corrente (Φ_B nell'equazione 5). Eliminando le f.e.m. da queste due equazioni (e prendendo il valore assoluto di entrambi i membri), si ottiene

$$L\frac{di}{dt} = \frac{d(N\Phi_B)}{dt}.$$

Integrando rispetto al tempo, si ottiene

$$Li = N\Phi_B,$$

ovvero

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}. \tag{6}$$

L'equazione 6, che è basata sulla legge di Faraday, permette di determinare l'induttanza direttamente dal flusso concatenato. Si noti che, poiché Φ_B è proporzionale alla corrente i, il rapporto che compare nell'equazione 6 è indipendente da i e (come la capacità) dipende unicamente dalla geometria del dispositivo.

L'induttanza di un solenoide

Si impieghi ora l'equazione 6 per calcolare L nel caso di un tratto di lunghezza l di un lungo solenoide la cui sezione ha area A; si suppone che il tratto in esame si trovi vicino al centro del solenoide, in modo da poter trascurare gli effetti di bordo. Nel paragrafo 35-6, si è dimostrato che il campo magnetico B all'interno di un solenoide in cui scorre una corrente i, è dato da

$$B = \mu_0 ni, \tag{7}$$

dove n è il numero di spire per unità di lunghezza. Il flusso concatenato col tratto di lunghezza l è

$$N\Phi_B = (nl)(BA),$$

ISBN 88-408-0777-2

da cui, sostituendo l'espressione di B, si ottiene

$$N\Phi_B = \mu_0 n^2 l i A. \tag{8}$$

Dall'equazione 6 si ottiene direttamente l'induttanza

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 l i A}{i} = \mu_0 n^2 l A. \tag{9}$$

L'induttanza per unità di lunghezza del solenoide si scrive quindi

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A. \tag{10}$$

Questa espressione dipende solo da fattori geometrici: l'area della sezione e il numero di spire per unità di lunghezza. La proporzionalità a n^2 era prevedibile; se si raddoppia il numero di spire per unità di lunghezza, non solo viene raddoppiato il numero di spire N, ma viene raddoppiato anche il flusso Φ_B attraverso ogni spira, sicché il flusso concatenato aumenta di un fattore 4, come l'induttanza.

Le equazioni 9 e 10 valgono per un solenoide la cui lunghezza sia molto maggiore del raggio. Si è trascurato l'allargamento delle linee di forza del campo magnetico in prossimità delle estremità, proprio come si erano trascurati gli effetti di bordo nel caso del condensatore.

L'induttanza di un toroide

Calcoliamo ora l'induttanza di un toroide a sezione rettangolare, come quello illustrato in figura 3. Il campo magnetico B in un toroide è dato dall'equazione 23 del capitolo 35,

$$B = \frac{\mu_0 i N}{2\pi r}, \tag{11}$$

dove N è il numero totale di spire del toroide. Si noti che il campo magnetico non è uniforme, ma dipende dal raggio r.

Il flusso attraverso una sezione normale del toroide, è dato da

$$\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_a^b B(h\, dr) = \int_a^b \frac{\mu_0 i N}{2\pi r} h\, dr$$
$$= \frac{\mu_0 i N h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i N h}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

dove $h\, dr$ è l'area della strisciolina elementare tra le righe tratteggiate in figura 3. L'induttanza si ricava direttamente dall'equazione 6:

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \tag{12}$$

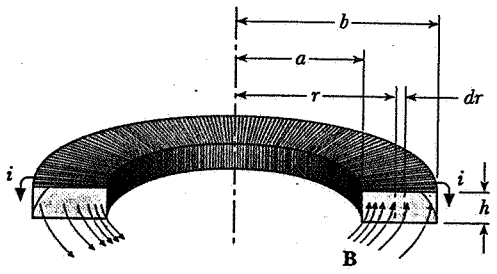


Figura 3 Un sezione trasversa di un toroide, che mostra la corrente negli avvolgimenti e il campo magnetico all'interno.

Ancora una volta, L dipende unicamente da fattori geometrici.

Induttori con materiali magnetici

Nel paragrafo 31-5 si è visto che la capacità C di un condensatore riempito di una sostanza dielettrica, è più grande di un fattore κ_e, la costante dielettrica relativa, rispetto alla capacità C_0 del condensatore vuoto:

$$C = \kappa_e C_o. \tag{13}$$

Si è potuto convertire le equazioni ricavate nel caso di un condensatore vuoto per tenere conto della presenza di un dielettrico semplicemente sostituendo alla costante dielettrica del vuoto il prodotto $\kappa_e \epsilon_0$.

Quando un campo magnetico $\mathbf{B}_0$ agisce su un materiale magnetico, il campo totale $\mathbf{B}$ (dato dalla somma del campo esterno $\mathbf{B}_0$ e del campo generato dai dipoli del materiale) si può scrivere, come si è visto nel paragrafo 37-3,

$$\mathbf{B} = \kappa_m \mathbf{B}_0 \tag{14}$$

Dove κ_m è la permeabilità magnetica relativa del materiale. Poiché nell'espressione del campo magnetico esterno $\mathbf{B}_0$ compare il fattore μ_0, si può tenere conto della presenza di un materiale magnetico sostituendo a μ_0 la quantità $\kappa_m \mu_0$, analogamente alla sostituzione corrispondente nel caso di condensatori contenenti dielettrici.

Nel caso di un induttore, sia $\mathbf{B}_0$ il campo che comparirebbe all'interno dell'induttore se non vi fosse un materiale magnetico. Sia $\mathbf{B}$ il campo che compare nell'induttore quando esso viene riempito con un materiale magnetico. Nelle espressioni dell'induttanza, si può tenere conto della presenza del materiale magnetico che riempie l'induttore sostituendo $\kappa_m \mu_0$ a μ_0, o, analogamente all'equazione 13

$$L = \kappa_m L_0. \tag{15}$$

dove L è l'induttanza quando vi è il materiale magnetico e L_0 è l'induttanza dell'induttore vuoto. L'induttanza di un solenoide riempito con un materiale ma-

gnetico di permeabilità relativa κ_m è data, quindi, da

$$L = \kappa_m \mu_0 n^2 l A, \tag{16}$$

che si ottiene sostituendo $\kappa_m \mu_0$ a μ_0 nell'equazione 9.

Poiché la permeabilità magnetica relativa dei materiali diamagnetici o paramagnetici non è sostanzialmente diversa da 1, l'induttanza di un induttore riempito con tali sostanze è praticamente uguale al valore che avrebbe se l'induttore fosse vuoto; non si ottengono variazioni sostanziali delle proprietà dell'induttore riempiendolo con un materiale paramagnetico o diamagnetico. Nel caso di un materiale ferromagnetico, invece, vi sono variazioni sostanziali. Benché la permeabilità magnetica relativa non sia definita in generale per un materiale ferromagnetico (dato che il campo totale non aumenta linearmente all'aumentare del campo esterno), in particolari circostanze B può essere diverse migliaia di volte più grande di B_0. In questo modo la permeabilità magnetica relativa «efficace» per un materiale ferromagnetico può avere valori compresi tra 10^3 e 10^4, e l'induttanza di un induttore riempito con un materiale ferromagnetico (cioè un induttore le cui spire sono avvolte intorno ad un nucleo di un materiale come il ferro) può essere 10^3 o 10^4 volte più grande dell'induttanza di un avvolgimento simile vuoto. Nuclei ferromagnetici permettono di ottenere grandi induttanze, proprio come i materiali dielettrici nei condensatori permettono di ottenere grandi capacità.

Esempio 1 Si consideri un tratto, di lunghezza $l = 12$ cm, di un solenoide a sezione circolare di diametro $d = 1.6$ cm percorso da una corrente $i = 3.80$ A. Il tratto contenga 75 spire. (*a*) Si calcoli l'induttanza del solenoide vuoto. (*b*) La corrente venga ridotta, con velocità costante, a 3.20 A in 15 s. Quanto vale la f.e.m. indotta nel solenoide e in che direzione agisce?

Soluzione (*a*) L'induttanza del solenoide si ricava usando l'equazione 9:

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 n^2 l A \\ &= (4\pi \times 10^{-7}\,\text{H/m})(75\ \text{spire}/0.12\ \text{m})^2(0.12\ \text{m})(\pi)(0.008\ \text{m})^2 \\ &= 1.2 \times 10^{-5}\ \text{H} = 12\ \mu\text{H}. \end{aligned}$$

Si noti che μ_0 è stato espresso in H/m. Un'induttanza si può sempre esprimere come il prodotto di μ_0 per una quantità che ha le dimensioni di una lunghezza. Una situazione analoga si ritrova per le capacità; vedi paragrafo 31-2.

(*b*) La velocità di variazione della corrente è

$$\frac{di}{dt} = \frac{3.20\ \text{A} - 3.80\ \text{A}}{15\ \text{s}} = -0.040\ \text{A/s}.$$

Il modulo della f.e.m. corrispondente è dato dall'equazione 2:

$$\mathcal{E}_L = |L\, di/dt| = (12\ \mu\text{H})(0.040\ \text{A/s}) = 0.48\ \mu\text{V}.$$

Poiché la corrente sta diminuendo, la f.e.m. indotta deve opporsi alla diminuzione e quindi deve agire nello stesso verso della corrente.

Esempio 2 Si riempia di ferro il nucleo del solenoide dell'esempio 1 e si faccia circolare in esso una corrente costante di 3.20 A. La magnetizzazione del ferro sia saturata in modo che $B = 1.4$ T. Quanto vale l'induttanza in questo caso?

Soluzione La permeabilità magnetica relativa «efficace» del nucleo in queste particolari condizioni è data da

$$\begin{aligned} \kappa_m &= \frac{B}{B_0} = \frac{B}{\mu_0 n i} \\ &= \frac{1.4\ \text{T}}{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A})(75\ \text{spire}/0.12\ \text{m})(3.20\ \text{A})} = 557. \end{aligned}$$

L'induttanza è quindi data dall'equazione 15

$$L = \kappa_m L_0 = (557)(12\ \mu\text{H}) = 6.7\ \text{mH}.$$

38-3 CIRCUITI *RL*

Nel paragrafo 33-7 si è visto che se si introduce improvvisamente una f.e.m. $\mathcal{E}$, ad esempio con una batteria, in un circuito costituito da una sola maglia contenente un resistore R ed un condensatore C, la carica nel condensatore non raggiunge immediatamente il valore finale di equilibrio, ma vi tende asintoticamente con andamento esponenziale, come descritto dall'equazione 31 del capitolo 33:

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \tag{17}$$

La velocità con cui si accumula la carica è determinata dalla *costante di tempo capacitiva* τ_C, definita da

$$\tau_C = RC. \tag{18}$$

Se nello stesso circuito la f.e.m. $\mathcal{E}$ della batteria viene improvvisamente rimossa quando nel condensatore si è accumulata una carica q_0, il condensatore non si scarica immediatamente, ma secondo una legge esponenziale, come descritto dall'equazione 36 del capitolo 33,

$$q = q_0 e^{-t/\tau_C}. \tag{19}$$

La stessa costante di tempo τ_C descrive l'aumento e la diminuzione della carica nel condensatore.

Una crescita (o decrescita) simile di corrente, avviene se si introduce (o si rimuove) improvvisamente una f.e.m. $\mathcal{E}$ in un circuito costituito da una sola maglia contenente un resistore R ed un induttore L. Quando il commutatore S di figura 4 chiude il circuito in a, la corrente attraverso il resistore inizia a crescere. Se non vi fosse l'induttore, la corrente raggiungerebbe rapidamente il valore di equilibrio $\mathcal{E}/R$. A causa dell'induttore

ISBN 88-408-0777-2

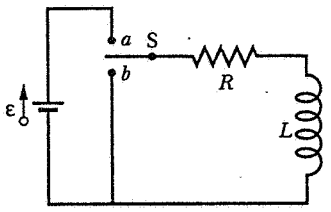


Figura 4 Un circuito *RL*.

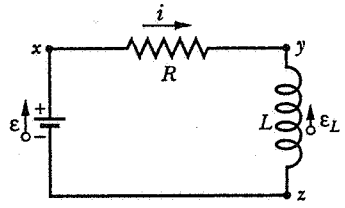


Figura 5 Il circuito *RL* di figura 4 quando il commutatore è chiuso in *a*.

re, tuttavia, nel circuito compare una f.e.m. indotta $\mathcal{E}_L$ che, per la legge di Lenz, si oppone alla *crescita* della corrente, cioè ha polarità opposta rispetto alla f.e.m. $\mathcal{E}$ della batteria. La corrente che attraversa il resistore dipende, dunque, da due f.e.m., una costante $\mathcal{E}$ dovuta alla batteria ed una variabile $\mathcal{E}_L$ di segno opposto dovuta all'induttanza. Finché questa seconda f.e.m. è presente, la corrente nel resistore è minore di $\mathcal{E}/R$.

Col passare del tempo, la corrente cresce sempre più lentamente e il modulo della f.e.m. indotta $\mathcal{E}_L$, che è proporzionale a di/dt, diminuisce. La corrente nel circuito tende esponenzialmente al valore $\mathcal{E}/R$, come si dimostrerà qui di seguito.

Passiamo ora ad una analisi quantitativa del circuito. Quando il commutatore S di figura 4 viene spostato su a, il circuito si riduce a quello di figura 5. Si applichi la legge delle maglie partendo dal punto x di figura 5 e percorrendo la maglia in senso orario. Per la direzione indicata della corrente, x ha un potenziale maggiore di y, il che significa che vi è una caduta di potenziale ai capi della resistenza $V_y - V_x = -iR$. Il punto y ha un potenziale più elevato del punto z poiché, per una corrente crescente, la f.e.m. indotta si oppone alla crescita della corrente disponendosi come mostrato. Così attraversando l'induttore da y a z si incontra una caduta di potenziale, data dall'equazione 3, $V_z - V_y = -L(di/dt)$. Infine si incontra un aumento di potenziale $+\mathcal{E}$ attraversando la batteria da z a x. La legge delle maglie dice allora che

$$-iR - L\frac{di}{dt} + \mathcal{E} = 0$$

ovvero

$$L\frac{di}{dt} + iR = \mathcal{E}. \tag{20}$$

Per risolvere l'equazione 20, bisogna trovare una funzione $i(t)$ tale che, quando essa e la sua derivata vengono sostituite nell'equazione 20, questa risulti soddisfatta.

Sebbene ci siano delle regole formali per risolvere le equazioni della forma dell'equazione 20, è possibile anche risolverla per integrazione diretta (vedi prob. 20). In questo caso è addirittura più semplice tentare di indovinare la soluzione, seguendo un ragionamento fisico e basandosi sulle esperienze precedenti. Si può sostituire nell'equazione 20 la soluzione proposta e vedere se l'equazione si riduce a una identità.

In questo caso si cerca una soluzione simile a quella che descrive il processo di carica di un condensatore in un circuito *RC* (vedi eq. 17). Per motivi fisici si richiede che la soluzione $i(t)$ soddisfi alle seguenti condizioni. (1) La corrente iniziale deve essere nulla; cioè $i(0) = 0$. La corrente cresce partendo da un valore nullo quando il circuito viene chiuso. (2) La corrente deve tendere a $\mathcal{E}/R$ al tendere di t all'infinito. Questo secondo requisito segue dal fatto che ci si aspetta che la variazione di corrente diminuisca gradualmente e quando di/dt si annulla, l'influenza dell'induttore sul circuito scompare. Si provi, quindi, come soluzione la funzione

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}). \tag{21}$$

Si noti che questa espressione soddisfa le condizioni $i(0) = 0$ e $i \to \mathcal{E}/R$ per $t \to \infty$. La costante di tempo τ_L si determina sostituendo $i(t)$ e la sua derivata nell'equazione 20. Derivando l'equazione 21, si ottiene

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}\frac{1}{\tau_L}e^{-t/\tau_L}. \tag{22}$$

Sostituendo e svolgendo i passaggi algebrici necessari, si trova che l'equazione 20 è soddisfatta se

$$\tau_L = \frac{L}{R}. \tag{23}$$

τ_L viene detta *costante di tempo induttiva*. Analogamente alla costante di tempo capacitiva $\tau_C = RC$, indica quanto rapidamente la corrente in un circuito *RL* si avvicina al valore stazionario.

La quantità $\tau_L = L/R$ ha le dimensioni di un tempo, infatti

$$[\tau_L] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{henry}}{\text{ohm}} = \frac{\text{volt} \cdot \text{secondo/ampere}}{\text{ohm}}$$
$$= \left(\frac{\text{volt}}{\text{ampere} \cdot \text{ohm}}\right) \text{secondo} = \text{secondo},$$

dove la quantità tra parentesi è uguale ad 1 perché 1 ohm = 1 volt/ampere (come in $R = V/i$).

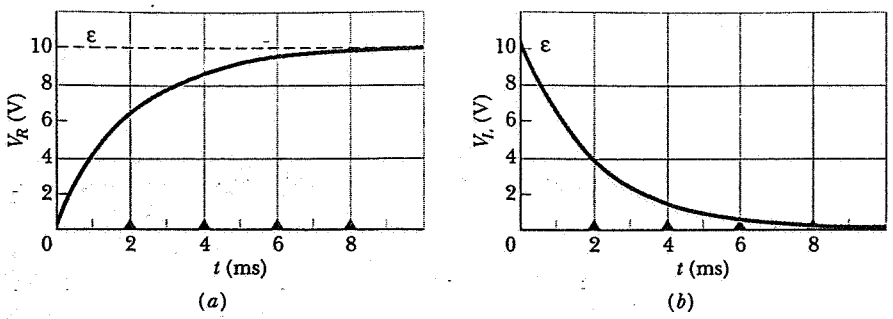


Figura 6 La variazione in funzione del tempo di (*a*) V_R, la differenza di potenziale ai capi del resistore nel circuito di figura 5, e (*b*) V_L, la differenza di potenziale ai capi dell'induttore nello stesso circuito. Le curve sono tracciate per $R = 2000\ \Omega$, $L = 4.0$ H e $\mathcal{E} = 10$ V. La costante di tempo induttiva τ_L è di 2 ms; intervalli successivi uguali a τ_L sono indicati dai triangoli lungo l'asse orizzontale.

Il significato fisico della costante di tempo τ_L segue dall'equazione 21. Se si pone in tale equazione $t = \tau_L$, essa si riduce a

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-1}) = (1 - 0.37)\frac{\mathcal{E}}{R} = 0.63\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

La costante di tempo τ_L rappresenta il tempo necessario affinché la corrente nel circuito raggiunga un valore $(1 - 1/e)$ volte il valore finale (circa il 63% del valore finale).

La soluzione completa della corrente in un circuito LR si può scrivere

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-tR/L}). \qquad (24)$$

La figura 6 mostra la variazione di potenziale $V_R\ [= |V_y - V_x| = i(t)R]$ ai capi del resistore e la caduta di potenziale $V_L\ [= |V_z - V_y| = L(di/dt)]$ ai capi dell'induttore ideale.

Se il commutatore S viene portato nella posizione b quando la corrente ha raggiunto un valore i_0, l'effetto è quello di rimuovere la batteria dal circuito. L'equazione che regola la conseguente decrescita della corrente nel circuito è quella che si ottiene ponendo $\mathcal{E} = 0$ nell'equazione 20, cioè

$$L\frac{di}{dt} + iR = 0. \qquad (25)$$

Per sostituzione diretta o per integrazione, si può mostrare che la soluzione di questa equazione è

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau_L}, \qquad (26)$$

dove i_0 è la corrente a $t = 0$ (che ora indica il momento in cui il commutatore viene portato in b). La diminuzione della corrente avviene con la stessa costante di tempo esponenziale $\tau_L = L/R$ che si ha nella crescita della corrente. Si noti la somiglianza con l'equazione 19 che regola il processo di scarica di un condensatore.

Sostituendo la batteria della figura 5 con un generatore che fornisca un'onda quadra della forma mostrata in figura 7*a*, si può ottenere lo stesso effetto che si avrebbe azionando periodicamente il commutatore S di figura 4. La forma d'onda oscilli periodicamente tra i valori $\mathcal{E}$ e 0 in un intervallo di tempo fissato, molto maggiore di τ_L.

Se si connettono i morsetti dell'oscilloscopio ai capi del resistore (i punti x e y in figura 5), la forma d'onda che si osserva è quella della corrente nel circuito, che è identica a V_R, come mostrato in figura 7*b*. La corrente cresce fino al valore massimo $\mathcal{E}/R$ quando la f.e.m. applicata è $\mathcal{E}$, e decresce esponenzialmente fino a zero (in accordo con l'equazione 26) quando la f.e.m. applicata è nulla.

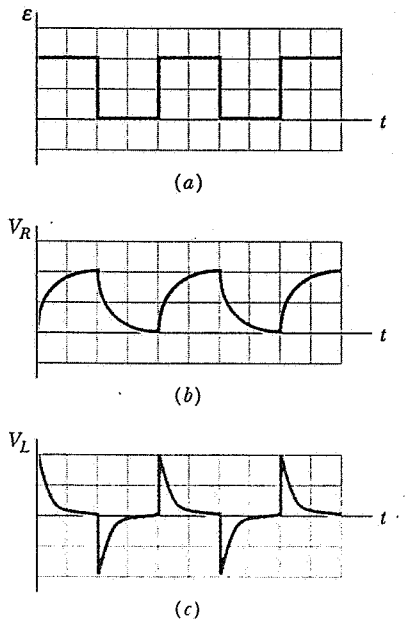


Figura 7 (*a*) Un generatore di f.e.m. variabile come un'onda quadra viene applicato al circuito di figura 5. (*b*) La differenza di potenziale ai capi del resistore. (*c*) La differenza di potenziale ai capi dell'induttore.

ISBN 88-408-0777-2

Se si connettono i morsetti dell'oscilloscopio ai capi dell'induttore (i punti y e z in figura 5), la forma d'onda che si osserva è quella della *derivata* della corrente, che ha lo stesso andamento di V_L, come mostrato in figura 7*c*. Secondo l'equazione 22 tale forma è

$$V_L = L\frac{di}{dt} = \mathcal{E}e^{-t/\tau_L} \qquad (27)$$

quando la f.e.m. applicata è $\mathcal{E}$. Quando la f.e.m. applicata è nulla, derivando l'equazione 26 si trova che

$$V_L = L\frac{di}{dt} = -\mathcal{E}e^{-t/\tau_L},$$

dato che in questo caso $\mathcal{E} = i_0R$. Si osserva che questo risultato è esattamente l'opposto dell'equazione 27. Ciò è in accordo con la serie alterna di esponenziali positivi e negativi mostrata in figura 7*c*.

Si noti che la somma delle curve rappresentate nelle figure 7*b* e 7*c* coincide con la curva rappresentata in figura 7*a*. Cioè $V_R + V_L = \mathcal{E}$, che deve essere vero per la legge delle maglie.

Esempio 3 Si consideri un solenoide che abbia un'induttanza di 53 mH e una resistenza di 0.37 Ω. Se esso viene collegato ad una batteria, quanto tempo ci vuole affinché la corrente raggiunga la metà del suo valore di equilibrio finale?

Soluzione Il valore di equilibrio della corrente, che viene raggiunto per $t \to \infty$ è, secondo l'equazione 24, $\mathcal{E}/R$. Se la corrente al tempo t_0 è la metà di questo valore, l'equazione diventa

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t_0/\tau_L}),$$

ovvero

$$e^{-t_0/\tau_L} = \frac{1}{2}.$$

calcolando il logaritmo (naturale) di entrambi i membri e ricavando t_0, si ottiene

$$t_0 = \tau_L \ln 2 = \frac{L}{R}\ln 2 = \frac{53 \times 10^{-3}\ \text{H}}{0.37\ \Omega}\ln 2 = 0.10\ \text{s}.$$

38-4 ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL CAMPO MAGNETICO

Quando si solleva una pietra, il lavoro fatto viene immagazzinato come energia potenziale del sistema Terra-pietra. Si può considerare il processo di separazione dei due oggetti come un modo per immagazzinare energia nel campo gravitazionale. Quando la pietra viene lasciata libera, l'energia può essere recuperata sotto forma di energia cinetica dato che la pietra e la Terra si avvicinano. In modo simile, il lavoro fatto per separare due cariche di segno opposto viene immagazzinato sotto forma di energia del campo elettrico delle cariche; questa energia può essere recuperata lasciando le cariche libere di riavvicinarsi. Si può considerare anche l'energia immagazzinata nel campo (gravitazionale o elettrico) che circonda un oggetto isolato, come la Terra o una carica isolata. L'energia immagazzinata in tale campo viene considerata come l'energia spesa per costituire l'oggetto a partire dai suoi elementi costituenti fondamentali, supposti inizialmente a riposo e a distanza infinita l'uno dall'altro.

L'energia può essere analogamente immagazzinata in un campo magnetico. Ad esempio, si considerino due lunghi fili rettilinei, rigidi e paralleli percorsi da corrente nello stesso verso. I due fili si attraggono ed il lavoro fatto per separarli viene immagazzinato nel campo magnetico che li circonda. Si può recuperare tale energia addizionale immagazzinata nel campo magnetico lasciando i fili liberi di tornare nelle loro posizioni originali.

Si può altresì considerare l'energia immagazzinata nel campo magnetico di un filo isolato, in modo analogo all'energia del campo elettrico di una carica isolata. Prima di considerare questo argomento in generale è utile considerare l'energia immagazzinata nel campo magnetico di un induttore, proprio come nel paragrafo 31-4 si è introdotta l'energia del campo elettrico considerando l'energia immagazzinata in un condensatore.

In figura 5 è rappresentata una sorgente di f.e.m. $\mathcal{E}$ collegata a un resistore R e a un induttore L. La legge delle maglie, applicata a questo circuito dà

$$\mathcal{E} = iR + L\frac{di}{dt},$$

come si è già visto nell'equazione 20. Si ricordi che la legge delle maglie è sostanzialmente un'espressione del principio di conservazione dell'energia per i circuiti costituiti da una sola maglia. Moltiplicando entrambi i membri di questa espressione per i, si ottiene

$$\mathcal{E}i = i^2R + Li\frac{di}{dt}, \qquad (28)$$

che ha la seguente interpretazione fisica in termini di lavoro e di energia:

1. Se nel tempo dt attraverso il generatore di f.e.m. $\mathcal{E}$ di figura 5 passa una carica dq, il generatore fa su di essa un lavoro $\mathcal{E}\,dq$. La velocità con cui viene fatto il lavoro è $(\mathcal{E}\,dq)/dt$ ossia $\mathcal{E}i$. Il primo membro dell'equa-

zione 28 è dunque la *potenza che il generatore di f.e.m. fornisce al circuito.*

2. Il secondo termine che compare nell'equazione 28, i^2R, è la *potenza dissipata nel resistore.* Tale energia appare come energia interna associata al moto atomico nel resistore.

3. L'energia fornita al circuito ma non dissipata nel resistore deve, per ipotesi, essere immagazzinata nel campo magnetico. Poiché l'equazione 28 descrive la conservazione dell'energia per un circuito LR, l'ultimo termine deve rappresentare la *potenza immagazzinata nel campo magnetico.*

Si indichi con U_B l'energia immagazzinata nel campo magnetico; la potenza immagazzinata è quindi dU_B/dt. Uguagliando la potenza immagazzinata all'ultimo termine dell'equazione 28, si ottiene

$$\frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt} \tag{29}$$

ovvero

$$dU_B = Li\,di. \tag{30}$$

Si supponga che inizialmente non circoli alcuna corrente nell'induttore ($i = 0$) e che non vi sia energia immagazzinata nel suo campo magnetico. Si incrementi la corrente gradualmente fino a raggiungere il valore finale i. L'energia U_B immagazzinata nel campo magnetico si può trovare integrando l'equazione 30, ottenendo

$$\int_0^{U_B} dU_B = \int_0^i Li\,di$$

ovvero

$$U_B = \tfrac{1}{2}\,Li^2, \tag{31}$$

che rappresenta l'energia totale immagazzinata in una induttanza L percorsa da una corrente i.

Se il commutatore di figura 4 viene portato dalla posizione a alla posizione b quando nel circuito circola una corrente i, l'energia immagazzinata nell'induttore viene dissipata nel resistore per effetto Joule. La corrente in questo caso è data dall'equazione 26.

Una situazione analoga si ha nel processo di carica e scarica di un condensatore. Quando il condensatore ha accumulato una carica q, l'energia immagazzinata nel campo elettrico è

$$U_E = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}.$$

Questa espressione è stata ricavata nel paragrafo 31-4 uguagliando l'energia immagazzinata al lavoro che bisogna compiere per generare il campo. Il condensatore si può scaricare attraverso un resistore, nel qual caso l'energia immagazzinata viene ancora dissipata per effetto Joule.

La necessità di dissipare l'energia immagazzinata in un induttore è il motivo per cui nel circuito di figura 4 è necessario un commutatore del tipo «prima fa, poi interrompe». In questo tipo di commutatore la connessione con b viene fatta prima che la connessione con a venga interrotta. Se *non* si impiegasse un commutatore di questo tipo, il circuito risulterebbe momentaneamente aperto quando il commutatore viene portato dalla posizione a alla posizione b e la corrente risulterebbe interrotta; l'energia immagazzinata nell'induttore si dissiperebbe improvvisamente con una scintilla tra i contatti del commutatore.

Esempio 4 Si consideri una bobina di 53 mH di induttanza e di 0.35 Ω di resistenza. (*a*) Se la bobina viene collegata ad una f.e.m. di 12 V, quanta energia viene immagazzinata nel campo magnetico quando la corrente raggiunge il suo massimo valore? (*b*) In termini di τ_L, quanto tempo ci vuole affinché l'energia immagazzinata raggiunga la metà del suo valore massimo?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 21 si ricava che la corrente massima è

$$i_m = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{12\text{ V}}{0.35\ \Omega} = 34.3\text{ A}.$$

Sostituendo tale corrente nell'equazione 31, si trova l'energia immagazzinata:

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li_m^2 = \tfrac{1}{2}(53\times10^{-3}\text{ H})(34.3\text{ A})^2 = 31\text{ J}.$$

(*b*) Sia i la corrente all'istante in cui l'energia immagazzinata è metà dell'energia immagazzinata massima. Allora

$$\tfrac{1}{2}Li^2 = (\tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2}Li_m^2$$

ovvero

$$i = i_m/\sqrt{2}.$$

Sostituendo per i l'espressione data dall'equazione 21 e per i_m il valore $\mathcal{E}/R$ (vedi sopra), si ottiene

$$\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}R}.$$

che si può scrivere

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - 1/\sqrt{2} = 0.293,$$

da cui si ricava

$$-\frac{t}{\tau_L} = \ln 0.293 = -1.23$$

ossia

$$t = 1.23\tau_L.$$

ISBN 88-408-0777-2

L'energia immagazzinata raggiunge metà del suo valore massimo dopo 1.23 costanti di tempo.

Esempio 5 Si consideri un induttore da 3.56 H collegato in serie ad un resistore da 12.8 Ω; a tale combinazione venga improvvisamente applicata una f.e.m. di 3.24 V. Calcolare, ad un tempo t = 0.278 s dopo la chiusura del circuito (che corrisponde ad una costante di tempo induttiva), (*a*) la potenza P fornita dalla batteria, (*b*) la potenza P_R dissipata per effetto Joule nel resistore e (*c*) la potenza P_B che viene immagazzinata nel campo magnetico.

Soluzione (*a*) La corrente è data dall'equazione 21. A $t = \tau_L$, si ottiene

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{3.24\text{ V}}{12.8\ \Omega}(1 - e^{-1}) = 0.1600\text{ A}.$$

La potenza fornita dalla batteria è data, allora, da

$$P = \mathcal{E}i = (3.24\text{ V})(0.1600\text{ A}) = 0.5184\text{ W}.$$

(*b*) La potenza P_R che viene dissipata nel resistore è data da

$$P_R = i^2R = (0.1600\text{ A})^2(12.8\ \Omega) = 0.3277\text{ W}.$$

(*c*) La potenza P_B ($= dU_B/dt$) che viene immagazzinata nel campo magnetico è data dall'equazione 29. Usando l'equazione 22 con $t = \tau_L$, si ottiene

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-t/\tau_L} = \frac{3.24\text{ V}}{3.56\text{ H}}e^{-1} = 0.3348\text{ A/s}.$$

Dall'equazione 29 si ottiene, allora, che la potenza desiderata è

$$P_B = \frac{dU_B}{dt} = Li\frac{di}{dt}$$
$$= (3.56\text{ H})(0.1600\text{ A})(0.3348\text{ A/s}) = 0.1907\text{ W}.$$

Si noti che, come richiesto dal principio di conservazione dell'energia,

$$P = P_R + P_B,$$

ovvero

$$P = 0.3277\text{ W} + 0.1907\text{ W} = 0.5184\text{ W}.$$

Densità di energia e campo magnetico

Ricaviamo ora una espressione per la *densità di energia* (energia per unità di volume) u_B in un campo magnetico. Si consideri un solenoide molto lungo la cui sezione abbia area A e che non contenga al suo interno alcun materiale. Un tratto di lunghezza l, preso lontano da entrambi gli estremi, racchiude un volume Al. L'energia magnetica immagazzinata in tale tratto del solenoide deve essere racchiusa tutta in tale volume, perché il campo magnetico all'esterno del solenoide è praticamente nullo. Inoltre, l'energia immagazzinata deve essere distribuita uniformemente nel volume del solenoide perché il campo magnetico è uniforme ovunque all'interno. Così si può scrivere la densità di energia come

$$u_B = \frac{U_B}{Al}$$

o, poiché

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2,$$

si ottiene

$$u_B = \frac{\frac{1}{2}Li^2}{Al}.$$

Per esprimere ciò in termini di campo magnetico, si può ricavare i dall'equazione 7 ($B = \mu_0 in$) e sostituirlo in questa equazione. Si può anche sostituire L usando la relazione $L = \mu_0 n^2 lA$ (vedi eq. 9). Infine si ottiene

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \qquad (32)$$

Questa equazione esprime la densità di energia immagazzinata in un qualunque punto (nel vuoto o in un materiale non magnetico) in cui vi sia un campo magnetico **B**. L'equazione è valida per tutte le configurazioni di campo magnetico, anche se è stata ricavata in un caso particolare, quello del solenoide. L'equazione 32 deve essere confrontata con l'equazione 28 del capitolo 31,

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \qquad (33)$$

che esprime la densità di energia (nel vuoto) in un qualunque punto in cui vi sia un campo elettrico. Si noti che u_B ed u_E sono entrambi proporzionali al quadrato del campo corrispondente, B o E.

Il solenoide gioca un ruolo per i campi magnetici simile a quello che gioca il condensatore a piatti paralleli per i campi elettrici. In entrambi i casi si ha un semplice dispositivo che può essere usato per generare un campo uniforme in una certa regione spaziale e per dedurre, in modo semplice, proprietà di questi campi.

Esempio 6 Si consideri un lungo cavo coassiale (vedi fig. 8) costituito da due conduttori cilindrici concentrici di raggi a e b, con $b \gg a$. Nel conduttore centrale scorra una corrente i e il conduttore esterno abbia la funzione di percorso di ritorno. (*a*) Calcolare l'energia immagazzinata nel campo magnetico in un tratto di lunghezza l di tale cavo. (*b*) Qual è l'induttanza di un tratto di lunghezza l di tale cavo?

Soluzione (*a*) Nello spazio tra i due conduttori, la legge di Ampère

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i.$$

porta a

$$B(2\pi r) = \mu_0 i$$

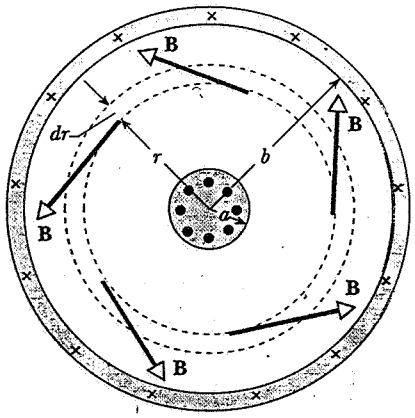


Figura 8 Esempio 6. Sezione trasversa di un cavo coassiale, attraverso i cui conduttori interno ed esterno scorrono correnti continue uguali ma in verso opposto. Nella regione compresa tra i due conduttori le linee di forza di **B** formano dei cerchi.

ovvero

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

La legge di Ampère mostra inoltre che il campo magnetico fuori dal conduttore esterno è nullo (perché?). Il conduttore esterno sia così sottile da poter trascurare l'energia magnetica contenuta dentro ad esso. Analogamente si supponga che il conduttore interno sia così piccolo che l'energia magnetica al suo interno sia trascurabile. Si suppone quindi che l'energia magnetica immagazzinata si trovi tutta nella regione compresa tra i due conduttori.

La densità di energia nei punti tra i due conduttori è data dall'equazione 32,

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Si consideri l'elemento di volume dV che consiste in una crosta cilindrica di raggi r e $r + dr$ e di lunghezza l (perpendicolare al piano di figura 8). L'energia dU_B contenuta in essa è

$$dU_B = u_B dV = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi r l)(dr) = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\frac{dr}{r}.$$

L'energia magnetica immagazzinata totale si determina per integrazione:

$$U_B = \int dU_B = \frac{\mu_0 i^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o i^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

(*b*) Si può determinare l'induttanza L dall'equazione 31 ($U_B = \frac{1}{2}Li^2$), da cui si ottiene

$$L = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Il lettore derivi questa espressione anche direttamente dalla definizione di induttanza, seguendo il procedimento illustrato nel paragrafo 38-2 (vedi prob. 15).

Esempio 7 Si confrontino l'energia necessaria a generare, in un cubo avente uno spigolo di 10 cm, (*a*) un campo elettrico uniforme di 1.0×10^5 V m e (*b*) un campo magnetico uniforme di 1.0 T. Entrambi questi campi sono abbastanza elevati, ma si possono ottenere facilmente in laboratorio.

Soluzione (*a*) Nel caso del campo elettrico si ha, indicando con V_0 è il volume del cubo,

$$\begin{aligned} U_E = u_E V_0 &= \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 V_0 \\ &= (0.5)(8.9\times10^{-12}\text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(10^5\text{ V/m})^2(0.1\text{ m})^3 \\ &= 4.5\times10^{-5}\text{ J}. \end{aligned}$$

(*b*) Nel caso del campo magnetico, dall'equazione 32 si ottiene

$$\begin{aligned} U_B = u_B V_0 = \frac{B^2}{2\mu_0}V_0 &= \frac{(1.0\text{ T})^2(0.1\text{ m})^3}{(2)(4\pi\times10^{-7}\text{T}\cdot\text{m/A})} \\ &= 400\text{ J}. \end{aligned}$$

In termini di campi normalmente disponibili in laboratorio, si può immagazzinare molta più energia in un campo magnetico che in un campo elettrico; in questo esempio il rapporto è dell'ordine di 10^7. Viceversa, è necessaria molta più energia per generare un campo magnetico di intensità ragionevole per usi di laboratorio di quanta ne occorra per generare un campo elettrico, anch'esso di intensità ragionevole.

38-5 CIRCUITI OSCILLANTI: TRATTAZIONE QUALITATIVA

Ci dedichiamo ora allo studio delle proprietà di circuiti che contengono sia un condensatore C che un induttore L. Un circuito del genere costituisce un *oscillatore elettromagnetico*, in cui la corrente varia sinusoidalmente nel tempo, nello stesso modo in cui varia nel tempo la posizione di un oscillatore meccanico. In effetti, come si vedrà, vi sono molte analogie tra gli oscillatori elettromagnetici e quelli meccanici. Queste analogie aiutano a capire gli oscillatori elettromagnetici basandosi sul precedente studio degli oscillatori meccanici (vedi cap. 15).

Per ora, si suppone che il circuito abbia resistenza nulla. Il circuito con resistenza *non nulla*, che si studierà nel paragrafo 38-7, è analogo all'oscillatore smorzato che si è discusso nel paragrafo 15-8. Si suppone anche che nel circuito non vi siano generatori di f.e.m.; i circuiti oscillanti con generatori di f.e.m., che si studieranno nel paragrafo 38-7, sono analoghi agli oscillatori meccanici forzati che sono stati discussi nel paragrafo 15-9.

Se non sono presenti generatori di f.e.m., l'energia presente nel circuito viene dall'energia inizialmente immagazzinata in uno o in entrambi i componenti. Si supponga che il condensatore C venga caricato (da qualche sorgente esterna che non ci riguarda) in modo da contenere una carica q_m, e che venga poi scollegato

 ISBN 88-408-0777-2

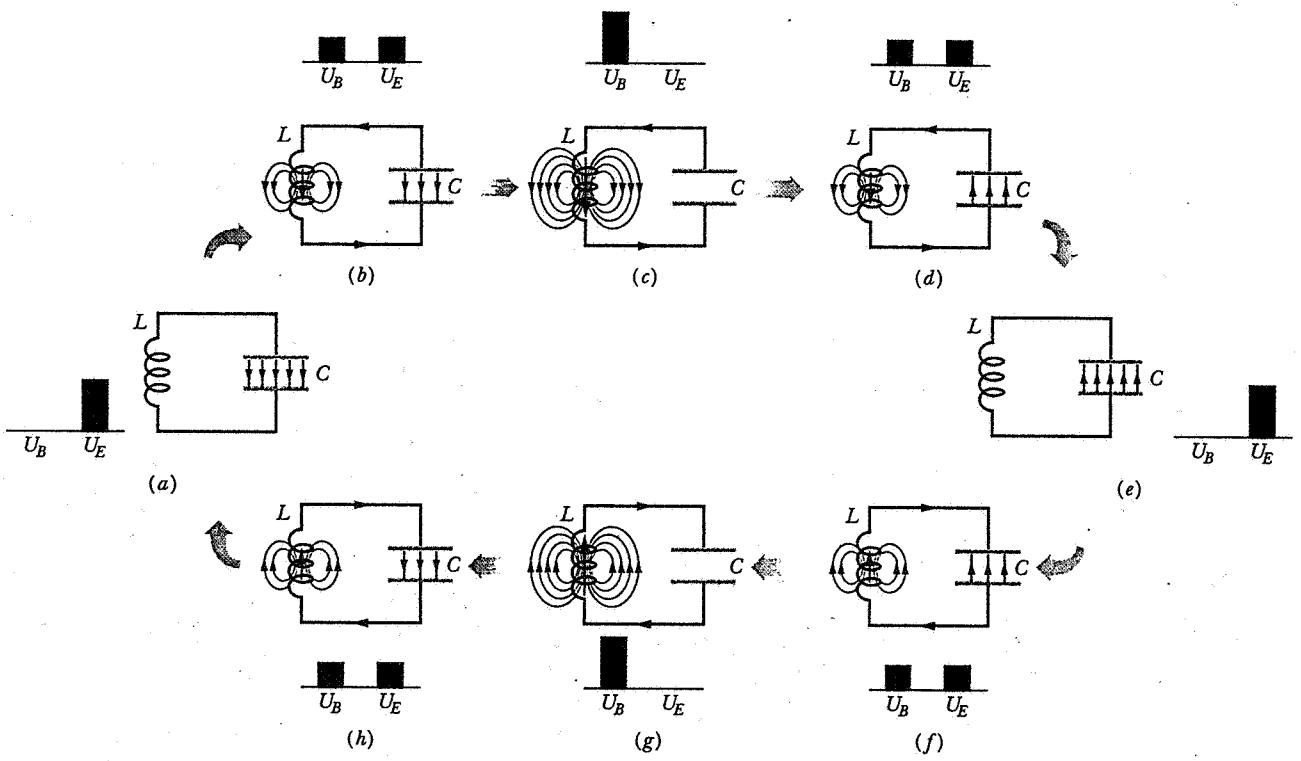


Figura 9 Otto stadi in un unico ciclo di oscillazione di un circuito *LC* privo di resistenza.
I grafici a barre mostrano l'energia magnetica ed elettrica immagazzinata. La freccia attraverso l'induttore indica la corrente.

dalla sorgente esterna e collegato all'induttore *L*. Il circuito *LC* è illustrato in figura 9*a*. Inizialmente, l'energia U_E immagazzinata nel condensatore è

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{C}, \tag{34}$$

mentre l'energia $U_B = \frac{1}{2} Li^2$ immagazzinata nell'induttore è inizialmente nulla, dato che la corrente è nulla.

Il condensatore ora inizia a scaricarsi attraverso l'induttore, con i portatori di carica positiva che si muovono in senso antiorario, come mostrato in figura 9*b*. Una corrente $i = dq/dt$ ora scorre attraverso l'induttore, aumentando l'energia in esso immagazzinata che inizialmente era nulla. Contemporaneamente, il processo di scarica del condensatore riduce l'energia in esso immagazzinata. Se il circuito ha resistenza nulla, non viene dissipata energia e la diminuzione dell'energia immagazzinata nel condensatore viene compensata esattamente dall'aumento dell'energia immagazzinata nell'induttore, di modo che l'energia totale rimane costante. In effetti, il campo elettrico diminuisce e il campo magnetico aumenta, dato che viene trasferita energia dall'uno all'altro.

All'istante corrispondente alla figura 9*c*, il condensatore è completamente scarico e l'energia in esso immagazzinata è nulla. La corrente nell'induttore ha raggiunto il suo valore massimo e tutta l'energia del circuito è immagazzinata nel campo magnetico dell'induttore. Si noti che, anche se $q = 0$ in questo istante, dq/dt è diverso da zero poiché la carica si sta muovendo.

La corrente nell'induttore continua a trasportare carica dal piatto superiore al piatto inferiore del condensatore, come in figura 9*d*; l'energia sta ora ripassando dall'induttore al condensatore a mano a mano che il suo campo elettrico si riforma. Ad un certo punto (vedi fig. 9*e*) tutta l'energia viene trasferita nuovamente al condensatore, che ora è completamente carico, ma in verso opposto a quello di figura 9*a*. Il processo prosegue con il condensatore che si scarica finché tutta l'energia non è tornata all'induttore, rendendo massimi il campo magnetico e l'energia in esso immagazzinata (vedi fig. 9*g*). Infine, la corrente nell'induttore carica ancora una volta il condensatore fino a che esso non è completamente carico e il circuito è tornato nelle condizioni iniziali (vedi fig. 9*a*). Il processo ricomincia e il ciclo si ripete all'infinito. In assenza di resistenza, che farebbe sì che l'energia venisse dissipata, la ca-

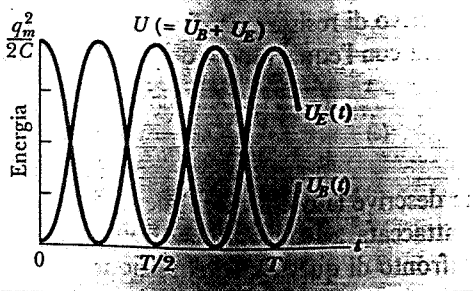


Figura 11 L'energia magnetica e l'energia elettrica immagazzinate in un circuito LC e la loro somma in funzione del tempo. $T\ (= 2\pi/\omega)$ è il periodo di oscillazione.

L'energia elettrica immagazzinata nel circuito LC, usando l'equazione 41, è

$$U_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{q_m^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi), \qquad (45)$$

e l'energia magnetica, usando l'equazione 42, è

$$U_B = \tfrac{1}{2}Li^2 = \tfrac{1}{2}L\omega^2 q_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi).$$

Sostituendo in quest'ultima equazione l'espressione 44 per ω, si ottiene

$$U_B = \frac{q_m^2}{2C}\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \qquad (46)$$

In figura 11 sono riportati gli andamenti di $U_E(t)$ e di $U_B(t)$ nel caso $\phi = 0$. Si noti che (1) il valore massimo di U_E ed il valore massimo di U_B sono uguali $(= q_m^2/2C)$; (2) la somma di U_E e di U_B è una costante $(= q_m^2/2C)$; (3) quando U_E raggiunge il suo massimo valore U_B è nulla e viceversa; e (4) U_B ed U_E raggiungono il loro valore massimo due volte durante ogni ciclo. Questa analisi convalida la trattazione qualitativa del paragrafo 38-5. Si confronti questa discussione con quella del paragrafo15-4 riguardo ai trasferimenti di energia nel caso di un oscillatore armonico meccanico semplice.

Esempio 9 (*a*) In un circuito oscillante LC, quanta carica, espressa in termini di carica massima, è presente nel condensatore quando l'energia è divisa in parti uguali tra campo magnetico e campo elettrico? (b) A che tempo t si realizza tale condizione, supponendo che inizialmente il condensatore sia completamente carico? Assumere $L = 12$ mH e $C = 1.7$ μF.

Soluzione (*a*) L'energia immagazzinata U_E e la massima energia immagazzinata U_m nel condensatore sono, rispettivamente,

$$U_E = \frac{q^2}{2C} \quad \text{e} \quad U_m = \frac{q_m^2}{2C}.$$

Sostituendo $U_E = \frac{1}{2}U_m$ si ricava

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{q_m^2}{2C}$$

ovvero

$$q = \frac{q_m}{\sqrt{2}}.$$

(*b*) Dato che, essendo $q = q_m$ per $t = 0$, ϕ deve essere nulla, si ha

$$q = q_m \cos \omega t = \frac{q_m}{\sqrt{2}},$$

che porta alla

$$\omega t = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

ovvero, usando $\omega = 1/\sqrt{LC}$

$$t = \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{4\sqrt{(12\times10^{-3}\ \text{H})(1.7\times10^{-6}\ \text{F})}}{4}$$
$$= 1.1\times10^{-4}\ \text{s}.$$

38-7 OSCILLAZIONI FORZATE E SMORZATE

In un circuito LC reale vi è sempre una resistenza R. Quando si tiene conto di questa resistenza, si trova che l'energia elettromagnetica totale U non è costante dato che essa viene dissipata come energia interna nel resistore. Come si vedrà, l'analogia con l'oscillatore massa-molla smorzato del paragrafo 15-8 è esatta. Come prima si ha

$$U = U_B + U_E = \tfrac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C}. \qquad (47)$$

U non è più costante, ma soddisfa la relazione

$$\frac{dU}{dt} = -i^2R, \qquad (48)$$

in cui il segno meno significa che l'energia immagazzinata U diminuisce al passare del tempo, venendo convertita in energia interna nel resistore con velocità i^2R. Derivando rispetto al tempo l'equazione 47 e combinando il risultato con l'equazione 48, si ottiene

$$Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = -i^2R.$$

Sostituendo dq/dt al posto di i e d^2q/dt^2 al posto di di/dt e dividendo per i, si ottiene

ISBN 88-408-0777-2

La corrispondenza tra i due sistemi suggerisce che per determinare la frequenza di oscillazione di un circuito LC (privo di resistenza), k dovrebbe essere sostituito da $1/C$ e m da L, ottenendo quindi

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{36}$$

Questa formula si può anche ricavare da una analisi rigorosa dei circuiti oscillanti, come si vedrà nel prossimo paragrafo.

38-6 CIRCUITI OSCILLANTI: TRATTAZIONE QUANTITATIVA

Ricaviamo un'espressione per la frequenza di oscillazione di un circuito LC (privo di resistenza) usando il principio di conservazione dell'energia. L'energia totale U presente in un qualunque istante in un circuito oscillante LC è data da

$$U = U_B + U_E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}, \tag{37}$$

che indica che in un qualunque istante arbitrario l'energia è immagazzinata in parte nel campo magnetico dell'induttore e in parte nel campo elettrico del condensatore. Se si suppone che la resistenza del circuito sia nulla, non viene dissipata energia e U rimane costante nel tempo, anche se i e q variano. In un linguaggio più formale, dU/dt deve essere nullo. Da ciò si ottiene

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right) = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt} = 0. \tag{38}$$

Indichiamo con q la carica su un certo piatto del condensatore (ad esempio, il piatto superiore del condensatore di figura 9), e indichiamo quindi con i la velocità con cui la carica varia su quel piatto (in modo che sia $i > 0$ quando la carica positiva si accumula su quel piatto). In questo caso

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2},$$

e sostituendo nell'equazione 38 si ottiene

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{39}$$

L'equazione 39 descrive le oscillazioni di un circuito LC (privo di resistenza). Per risolverla, si noti la somiglianza con l'equazione 4 del capitolo15,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{40}$$

che descrive le oscillazioni meccaniche di una particella attaccata ad una molla. Fondamentalmente, è dal confronto di queste due equazioni che nascono le corrispondenze delle relazioni 35.

La soluzione dell'equazione 40 ottenuta nel capitolo 15 era

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

dove x_m è l'ampiezza del moto e ϕ è una fase costante arbitraria. Poiché q corrisponde a x, si può scrivere la soluzione dell'equazione 39 nel seguente modo

$$q = q_m \cos(\omega t + \phi), \tag{41}$$

dove ω è la pulsazione ancora incognita delle oscillazioni elettromagnetiche.

Si può controllare se l'equazione 41 è veramente una soluzione dell'equazione 39 sostituendo lei e la sua derivata seconda in tale equazione. Per determinare la derivata seconda, si scrive

$$\frac{dq}{dt} = i = -\omega q_m \sin(\omega t + \phi) \tag{42}$$

e

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega^2 q_m \cos(\omega t + \phi). \tag{43}$$

Sostituendo q e d^2q/dt^2 nell'equazione 39 si ottiene

$$-L\omega^2 q_m \cos(\omega t + \phi) + \frac{1}{C}q_m \cos(\omega t + \phi) = 0.$$

Eliminando $q_m \cos(\omega t + \phi)$ e risolvendo rispetto a ω si ricava

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{44}$$

Così, se a ω si assegna il valore $1/\sqrt{LC}$, l'equazione 41 è una soluzione dell'equazione 39. Questa espressione di ω è in accordo con l'equazione 36 a cui si era arrivati sfruttando la corrispondenza tra oscillazioni meccaniche ed elettromagnetiche.

La costante di fase ϕ che compare nell'equazione 41 è determinata dalle condizioni a $t = 0$. Se le condizioni iniziali sono quelle rappresentate in figura 9*a*, allora si pone $\phi = 0$ affinché l'equazione 41 possa predire $q = q_m$ per $t = 0$. Che condizioni iniziali corrispondono a $\phi = 90°$? $180°$? $270°$? Quali degli stati rappresentati in figura 9 corrisponde a ciascuna di queste scelte di ϕ?

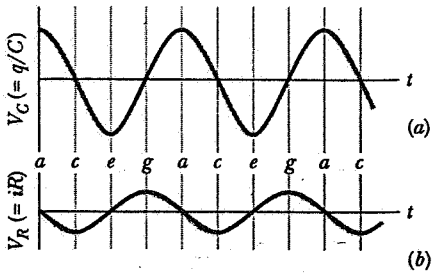


Figura 10 (*a*) La differenza di potenziale ai capi del condensatore del circuito di figura 9 in funzione del tempo. Questa quantità è proporzionale alla carica sul condensatore. (*b*) La differenza di potenziale ai capi di un resistore di bassa resistenza inserito nel circuito di figura 9. Questa quantità è proporzionale alla corrente nel circuito. Le lettere indicano i corrispondenti stadi nell'oscillazione di figura 9.

rica e la corrente raggiungono lo stesso loro valore massimo ad ogni ciclo.

Le oscillazioni del circuito LC avvengono ad una certa frequenza ν (misurata in Hz) corrispondente ad una pulsazione ω ($= 2\pi\nu$ e misurata in rad/s). Come si vedrà nel prossimo paragrafo, ω è determinata da L e da C. Scegliendo opportunamente L e C, si possono costruire circuiti oscillanti con frequenze che vanno da frequenze al di sotto dell'udibile (10 Hz) a frequenze più elevate delle microonde (10 GHz).

Per determinare la carica q in funzione del tempo, si può misurare la differenza di potenziale variabile $V_C(t)$ ai capi del condensatore C, che è legata alla carica q da

$$V_C = \frac{1}{C} q.$$

Si può determinare la corrente inserendo nel circuito un resistore R di resistenza così piccola che il suo effetto sul circuito sia trascurabile. La differenza di potenziale $V_R(t)$ ai capi di R è proporzionale alla corrente, secondo la

$$V_R = iR.$$

Se si osservassero sullo schermo di uno oscilloscopio $V_C(t)$ e $V_R(t)$, il risultato sarebbe simile a quello mostrato in figura 10.

Esempio 8 Un condensatore da 1.5 μF viene caricato a 57 V. Esso viene quindi scollegato dalla batteria e collegato ad un induttore da 12 mH, sicché iniziano delle oscillazioni LC. Qual è la massima corrente che circola nella bobina? Assumere che il circuito abbia resistenza nulla.

Soluzione Per il principio di conservazione dell'energia, la massima energia immagazzinata nel condensatore deve essere uguale alla massima energia immagazzinata nell'induttore. Usando le equazioni 31 e 34, si ottiene

$$\frac{q_m^2}{2C} = \tfrac{1}{2} L i_m^2,$$

dove i_m è la massima corrente che circola nell'induttore e q_m è la massima carica raccolta nel condensatore. Si noti che la corrente massima e la carica massima non si hanno nello stesso momento, ma sono sfasate di un quarto di ciclo; vedi figure 9 e 10. Ricavando i_m e sostituendo CV al posto di q_m, si trova

$$i_m = V\sqrt{\frac{C}{L}} = (57\text{ V})\sqrt{\frac{1.5 \times 10^{-6}\text{ F}}{12 \times 10^{-3}\text{ H}}} = 0.64\text{ A}.$$

Analogia col moto armonico semplice

La figura 6 del capitolo 8 mostra che in un sistema oscillante massa-molla, come in un circuito LC, appaiono due tipi di energia. Una è l'energia potenziale della molla compressa o estesa; l'altra è l'energia cinetica della massa in movimento. Queste sono date dalle formule familiari che compaiono nella prima colonna della tabella 1. La tabella suggerisce che un condensatore è in qualche modo come una molla, un induttore è come un oggetto massivo (il blocco attaccato alla molla) e certe quantità elettromagnetiche «corrispondono» a certe quantità meccaniche, e cioé

$$\begin{array}{ll} q \text{ corrisponde a } x, & i \text{ corrisponde a } v \\ 1/C \text{ corrisponde a } k, & L \text{ corrisponde a } m. \end{array} \qquad (35)$$

TABELLA 1 ENERGIA IN SISTEMI OSCILLANTI

Meccanico		*Elettromagnetico*	
Molla	$U_s = \frac{1}{2}kx^2$	Condensatore	$U_E = \frac{1}{2}C^{-1}q^2$
Massa	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Induttore	$U_B = \frac{1}{2}Li^2$
	$v = dx/dt$		$i = dq/dt$

Confrontando la figura 9, che mostra le oscillazioni di un circuito LC privo di resistenza, con la figura 6 del capitolo 8, che mostra le oscillazioni di un sistema massa-molla privo di attriti, si nota quanto sia vicina la corrispondenza. Si noti quanto corrispondono v e i nelle due figure; lo stesso vale per x e q. Si noti inoltre in entrambi i casi come si alterna l'energia tra le due forme, magnetica ed elettrica per il sistema LC e cinetica e potenziale per il sistema massa-molla.

Nel paragrafo 15-3 si è visto che la pulsazione naturale di un oscillatore armonico meccanico semplice è

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

ISBN 88-408-0777-2

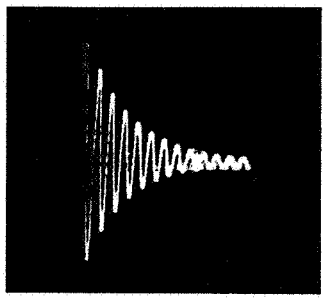


Figura 12 Fotografia della traccia di un oscilloscopio che mostra l'oscillazione di un circuito *LC*. L'oscillazione decresce in ampiezza perché l'energia viene dissipata nella resistenza del circuito.

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0, \qquad (49)$$

che descrive le oscillazioni *LC* smorzate. Se si pone $R = 0$, l'equazione 49 si riduce, come deve, all'equazione 39 che descrive le oscillazioni *LC* non smorzate.

La soluzione generale dell'equazione 49, anche se non lo si dimostrerà, si può scrivere nella forma

$$q = q_m e^{-Rt/2L}\cos(\omega' t+\phi) \qquad (50)$$

in cui

$$\omega' = \sqrt{\omega^2-(R/2L)^2}. \qquad (51)$$

Usando le analogie dell'equazione 35, si vede che l'equazione 50 è l'esatto equivalente dell'equazione 38 del capitolo 15, l'equazione che descrive lo spostamento in funzione del tempo per un moto armonico semplice smorzato. Confrontando l'equazione 51 con l'equazione 39 del capitolo 15, si vede che la resistenza *R* corrisponde alla costante di smorzamento *b* dell'oscillatore meccanico smorzato.

In figura 12 è riportata la corrente, in un circuito *LC* smorzato, in funzione del tempo. (Confrontare con la figura 19 del capitolo 15.) La corrente oscilla sinusoidalmente con frequenza ω' e l'ampiezza della corrente decresce esponenzialmente al passare del tempo. La frequenza ω' è minore in senso stretto della frequenza ω $(= 1/\sqrt{LC})$ delle oscillazioni non smorzate, ma nella maggior parte dei casi di interesse si può porre $\omega' = \omega$ commettendo un errore trascurabile.

Esempio 10 Si consideri un circuito con le seguenti caratteristiche elettriche, $L = 12$ mH, $C = 1.6$ μF e $R = 1.5$ Ω. (*a*) Dopo quanto tempo l'ampiezza delle oscillazioni di carica sarà diminuita fino a metà del suo valore iniziale? (*b*) A quanti periodi di oscillazione corrisponde?

Soluzione (*a*) Ciò accadrà quando il fattore di ampiezza $e^{-Rt/2L}$ dell'equazione 50 vale 1/2, ovverosia

$$e^{-Rt/2L} = \tfrac{1}{2}.$$

Prendendo il logaritmo naturale di entrambi i membri si ottiene

$$-Rt/2L = \ln\tfrac{1}{2} = -\ln 2,$$

o, ricavando *t*,

$$t = \frac{2L}{R}\ln 2 = \frac{(2)(12\times10^{-3}\text{ H})}{1.5\ \Omega}\ln 2 = 0.0111\text{ s}.$$

(*b*) Il numero di oscillazioni è dato dal rapporto tra il tempo trascorso e il periodo di oscillazione, che è legato alla pulsazione ω da $T = 2\pi/\omega$. La pulsazione è

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(12\times10^{-3}\text{ H})(1.6\times10^{-6}\text{ F})}} = 7220\text{ rad/s}.$$

Il periodo di oscillazione è quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7220\text{ rad/s}} = 8.70\times10^{-4}\text{ s}.$$

Il tempo trascorso, espresso in termini del periodo di oscillazione, è quindi

$$\frac{t}{T} = \frac{0.0111\text{ s}}{8.70\times10^{-4}\text{ s}} \approx 13.$$

L'ampiezza si riduce a metà del suo valore iniziale dopo 13 cicli di oscillazione. Lo smorzamento in questo esempio è minore di quello illustrato in figura 12, in cui l'ampiezza si dimezza in circa tre cicli.

In questo esempio, si è impiegata ω invece di ω'. Dall'equazione 51, si ricava $\omega - \omega' = 0.27$ rad/s, sicché si commette un errore trascurabile usando ω.

Oscillazioni forzate e risonanza

Si consideri un circuito *LC* smorzato contenente una resistenza *R*. Se lo smorzamento è piccolo, il circuito oscilla alla frequenza naturale $\omega = 1/\sqrt{LC}$, che viene detta frequenza naturale del sistema.

Si supponga ora di alimentare il circuito con una f.e.m. dipendente dal tempo data da

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \cos\omega'' t \qquad (52)$$

impiegando un generatore esterno. In questa equazione ω'', che può essere variato a piacere, sia la frequenza della sorgente esterna. Oscillazioni di questo tipo vengono dette oscillazioni *forzate*. Quando la f.e.m. descritta dall'equazione 52 viene applicata, nel circuito compaiono delle correnti di transiente dipendenti dal tempo. Ci si interessa, tuttavia, alla corrente sinusoidale che vi è nel circuito dopo che questo periodo iniziale è passato e le correnti di transiente sono scemate. Qualunque sia la frequenza naturale ω del circuito, *queste oscillazioni di carica, corrente o differenza di potenziale nel circuito devono avvenire alla frequenza ω'' dell'alimentatore esterno.*

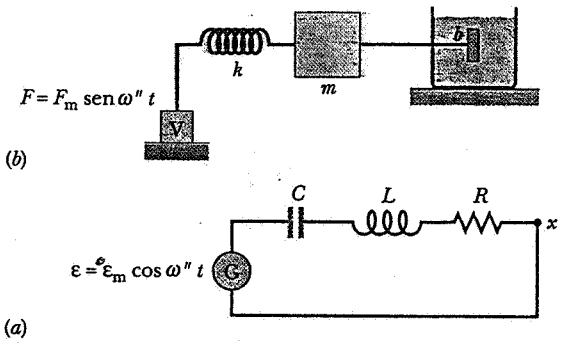


Figura 13 (*a*) Le oscillazioni elettromagnetiche di un circuito vengono eccitate ad una pulsazione ω''. (*b*) Le oscillazioni meccaniche di un sistema a molla vengono eccitate ad una pulsazione ω''. Gli elementi corrispondenti dei due sistemi sono disegnati in posizione corrispondente.

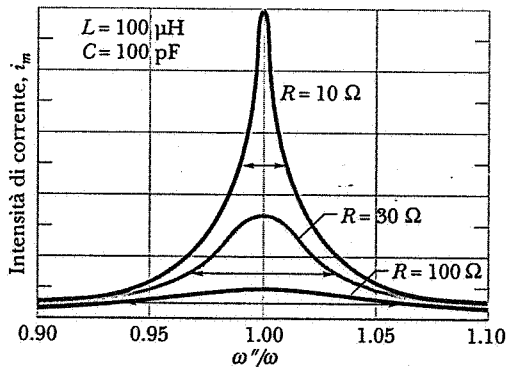


Figura 14 Curve di risonanza per il circuito oscillante forzato di figura 13*a*. Le tre curve corrispondono a differenti valori della resistenza del circuito. Le frecce orizzontali indicano la larghezza o la «nitidezza» di ciascuna risonanza.

In figura 13 è illustrato il confronto tra un sistema oscillante elettromagnetico e un sistema meccanico corrispondente. Un vibratore V, che impone una forza esterna alternata, corrisponde al generatore G, che impone una f.e.m. esterna alternata. Altre quantità hanno i medesimi «corrispettivi» di prima (vedi tab. 1): lo spostamento corrisponde alla carica e la velocità alla corrente. L'induttanza L, che si oppone alle variazioni di corrente, corrisponde alla massa (all'inerzia) m, che si oppone alle variazioni di velocità. La costante della molla k e l'inverso della capacità C^{-1} rappresentano la «rigidità» del sistema, determinando, rispettivamente, la risposta (spostamento) della molla alla forza e la risposta (carica) del condensatore alla f.e.m..

Nel capitolo 39, si ricaverà la soluzione per la corrente nel circuito illustrato in figura 13*a*, che si può scrivere nella forma

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega'' t - \phi) \qquad (53)$$

L'ampiezza i_m della corrente nell'equazione 53 è una misura della risposta del circuito di figura 13*a* alla f.e.m. che lo alimenta. È ragionevole supporre (ad esempio basandosi sull'esperienza fatta spingendo altalene) che i_m sia grande quando la frequenza di alimentazione ω'' è vicina alla frequenza naturale del sistema ω. In altre parole ci si aspetta che in un grafico in cui viene rappresentata i_m in funzione di ω'', vi sia un massimo per

$$\omega'' = \omega = 1/\sqrt{LC}, \qquad (54)$$

che viene detta condizione di risonanza.

In figura 14 sono riportati tre grafici di i_m in funzione di ω''/ω, corrispondenti ciascuno ad un valore differente della resistenza R. Si nota che ciascuna di queste curve presenta un massimo quando la condizione di risonanza, l'equazione 54, è soddisfatta. Si noti che al diminuire di R, il picco diviene più marcato, come mostrato dalle tre frecce orizzontali tracciate ad una altezza pari a metà di ciascun massimo.

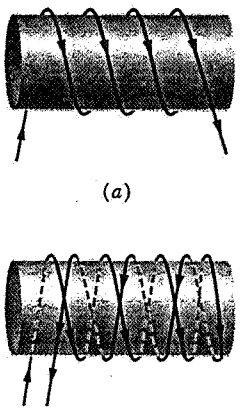
La figura 14 richiama l'esperienza comune della sintonizzazione di una radio. Girando la manopola della sintonizzazione, si varia la frequenza naturale ω di un circuito LC interno per renderla uguale alla frequenza di alimentazione ω'' del segnale trasmesso dall'antenna della stazione emittente; si cerca la risonanza. In un'area metropolitana, dove vi sono molti segnali le cui frequenze sono spesso molto vicine l'una all'altra, la nitidezza della sintonia diventa importante.

La figura 14 è simile alla figura 20 del capitolo 15, che mostra i picchi di risonanza delle oscillazioni forzate di un oscillatore meccanico come quello di figura 13b. Anche in questo caso, la risposta massima si ha quando $\omega'' = \omega$, e i picchi della risonanza diventano sempre più netti al diminuire del fattore di smorzamento (il coefficiente b). Si noti che le curve della figura 14 e della figura 20 del capitolo 15 non sono esattamente corrispondenti. La prima rappresenta l'andamento dell'ampiezza della corrente, mentre la seconda rappresenta l'andamento dell'ampiezza dello spostamento. La grandezza meccanica che corrisponde alla corrente non è l'ampiezza dello spostamento, bensì la velocità. Ciononostante, entrambi gli insiemi di curve illustrano il fenomeno della risonanza.

ISBN 88-408-0777-2

DOMANDE

1. Dimostrare che le dimensioni fisiche delle due espressioni di L, $N\phi_B/i$ (vedi eq. 6) e $\mathcal{E}_L/(di/dt)$ (vedi eq. 2), sono le stesse.
2. Nell'ipotesi che il flusso attraverso ogni spira di un avvolgimento sia lo stesso, l'induttanza dell'avvolgimento si può calcolare usando l'equazione $L = N\phi_B/i$ (vedi eq. 6). Come si può calcolare L nel caso di un avvolgimento per cui tale ipotesi non sia verificata?
3. Illustrare alcuni esempi di come il flusso concatenato con una bobina può variare in seguito alla compressione o stiramento della bobina.
4. Si desidera avvolgere una bobina in modo che essa presenti una resistenza ma abbia praticamente induttanza nulla. Come si potrebbe fare?
5. Un lungo cilindro viene avvolto da sinistra a destra con uno strato di filo, avvolgendo n spire per unità di lunghezza con una induttanza L_1, come in figura 15*a*. Se l'avvolgimento viene proseguito, nello stesso senso, ma tornando indietro con il filo da destra a sinistra, come mostrato in figura 15*b*, in modo da avvolgere un secondo strato di n spire per unità di lunghezza, qual è il nuovo valore dell'induttanza? Spiegare.



(*a*)

(*b*)

Figura 15 Domanda 5.

6. L'induttanza per unità di lunghezza per un solenoide reale vicino al suo centro è uguale, minore o maggiore dell'induttanza per unità di lunghezza in prossimità degli estremi? Giustificare la risposta.
7. Spiegare perché ci si aspetta che l'induttanza di un cavo coassiale aumenti se si aumenta il raggio del conduttore esterno lasciando invariato il raggio del conduttore interno.
8. Disponendo di uno spezzone di filo di rame di lunghezza l, come lo si deve disporre per ottenere la massima induttanza?
9. Spiegare come un lungo filo rettilineo può mostrare effetti di induzione. Come procedereste per cercarli?
10. In una bobina con una costante di tempo induttiva molto grande, viene fatta circolare una corrente stazionaria. Quando la corrente viene interrotta, azionando un interruttore, tra i coltelli di questo tende a formarsi un arco. Spiegare il fenomeno. (*Nota:* interrompere la corrente in circuiti molto induttivi, può essere distruttivo e molto pericoloso.)
11. Si supponga di collegare una bobina ideale (cioè essenzialmente priva di resistenza) ai capi di una batteria ideale (cioè ancora una volta essenzialmente priva di resistenza). Si potrebbe immaginare, data l'assenza di resistenza nel circuito, che la corrente salti improvvisamente ad un valore molto elevato. D'altra parte, si potrebbe pensare che, poiché la costante di tempo induttiva ($= L/R$) è molto grande, la corrente salga lentamente, sempre ammesso che salga. Cosa accade in realtà?
12. In un circuito RL come quello di figura 5, la f.e.m. indotta può essere maggiore della f.e.m. della batteria?
13. In un circuito RL come quello di figura 5, la corrente nel resistore è sempre uguale a quella nell'induttore?
14. Nel circuito di figura 4, la f.e.m. indotta è massima nell'istante in cui il commutatore viene chiuso in *a*. Come è possibile ciò, visto che nell'induttore in quell'istante non circola corrente?
15. Il tempo necessario affinché la corrente in un certo circuito RL raggiunga una certa frazione del suo valore di equilibrio dipende dal valore della f.e.m. costante applicata?
16. Se la corrente in un generatore di f.e.m. è nel verso della f.e.m., l'energia del generatore diminuisce; se la corrente è in verso opposto alla f.e.m. (come in una batteria sotto carica), l'energia del generatore aumenta. Queste affermazioni valgono anche per l'induttore delle figure 2*a* e 2*b*?
17. La f.e.m. in un induttore può essere nello stesso verso della f.e.m. del generatore, che fornisce l'energia magnetica all'induttore?
18. Il commutatore di figura 4, dopo essere stato «a lungo» in posizione *a*, viene portato in posizione *b*. Cosa accade all'energia immagazzinata nell'induttore?
19. Si consideri una bobina di induttanza (misurata) L e di resistenza (misurata) R. La sua costante di tempo induttiva è necessariamente data da $\tau_L = L/R$? Si tenga presente che questa equazione è stata ricavata in una situazione in cui gli elementi induttivo e resistivo sono fisicamente separati (vedi fig. 4). Discutere il risultato.
20. Nella figura 6*a* di questo capitolo e nella figura 14*b* del capitolo 33 sono riportati gli andamenti di $V_R(t)$ per, rispettivamente, un circuito RL e un circuito RC. Perché queste curve sono così diverse? Giustificare ciascuna di esse in termini dei processi fisici che avvengono nel relativo circuito.
21. Si considerino due solenoidi, A e B, aventi uguali diametro e lunghezza e costituiti da un solo strato di spire avvolte in modo tale che due spire adiacenti siano a contatto, potendo trascurare lo spessore dell'isolante. Il solenoide A contenga molte spire di filo sottile e il solenoide B contenga un minor numero di spire di un filo più spesso. (*a*) Quale dei due solenoidi ha induttanza maggiore? (*b*) Quale dei due solenoidi ha la costante di tempo maggiore? Giustificare le risposte.
22. È possibile asserire, utilizzando argomentazioni basate sulla manipolazione di sbarre magnetiche, che è possibile immagazzinare energia nel campo magnetico?
23. Illustrare tutte le analogie formali che vi vengono in mente tra un condensatore a piatti paralleli (per i campi elettrici) e un lungo solenoide (per i campi magnetici).
24. In ciascuna delle operazioni descritte qui di seguito viene spesa dell'energia. Una parte di questa energia può essere recuperata (può essere riconvertita) sotto forma di energia elettri-

ca che può essere impiegata per fare un lavoro utile ed una parte diviene inutilizzabile per fare una lavoro utile o viene sprecata in altri modi. In quale caso vi è la *minor* frazione di energia elettrica recuperabile? (*a*) Caricare un condensatore; (*b*) caricare un accumulatore; (*c*) far scorrere corrente in un resistore; (*d*) generare un campo magnetico; (*e*) muovere un conduttore in un campo magnetico.

25. La corrente in un solenoide viene invertita. Che variazioni provoca questo fatto nel campo magnetico **B** e nella densità di energia u_B in vari punti lungo l'asse del solenoide?
26. Nelle apparecchiature commerciali, come motori e generatori, che comportano trasformazioni di energia elettrica in energia meccanica o viceversa, vengono impiegati campi magnetici piuttosto che campi elettrostatici. Perché?
27. Perché il circuito *LC* di figura 9 non smette semplicemente di oscillare quando il condensatore è completamente scarico?
28. Come si può far sì che un circuito *LC* inizi ad oscillare partendo dalla condizione rappresentata in figura 9*c*? Disegnare uno schema di commutazione adatto a tale scopo.
29. La curva inferiore *b* di figura 10 è proporzionale alla derivata della curva superiore *a*. Spiegare il perché.
30. In un circuito oscillante *LC*, supposto privo di resistenza, cosa determina (*a*) la frequenza e (*b*) l'ampiezza delle oscillazioni?
31. Riferendosi alle figure 9*c* e 9*g*, spiegare come è possibile che vi sia corrente nell'induttore anche se non vi è carica nel condensatore.
32. In figura 9, che cambiamenti sono necessari se si desidera che le oscillazioni avvengano percorrendo la figura in senso antiorario?
33. Riferendosi alla figura 9, che costanti di fase ϕ bisogna scegliere di volta in volta se si vuole considerare ciascuna delle otto situazioni raffigurate come condizione iniziale?
34. Che difficoltà di costruzione si incontrerebbero se si tentasse di costruire un circuito *LC* come quello di figura 9 in modo che oscilli con frequenza (*a*) 0.01 Hz o (*b*) 10 GHz?
35. Due induttori L_1 e L_2 e due condensatori C_1 e C_2 possono essere collegati in serie secondo i due schemi illustrati nelle figure 16*a* e 16*b*. Le frequenze dei due circuiti oscillanti sono uguali? Si considerino i due casi (*a*) $C_1 = C_2$, $L_1 = L_2$ e (*b*) $C_1 \neq C_2$, $L_1 \neq L_2$.
36. Nell'analogia meccanica di un circuito oscillante *LC*, quale quantità meccanica corrisponde alla differenza di potenziale?
37. Confrontando un sistema oscillante elettromagnetico con un sistema oscillante meccanico, a quali quantità meccaniche corrispondono le seguenti quantità elettromagnetiche: capacità, resistenza, carica, energia immagazzinata nel campo elettrico, energia immagazzinata nel campo magnetico, induttanza e corrente?
38. Si considerino due molle collegate l'una all'altra e collegate ad un oggetto di massa *m*, in modo tale che il sistema sia libero di oscillare su un piano orizzontale privo di attrito come in figura 17. Disegnare schematicamente l'analogo elettromagnetico di questo sistema oscillante meccanico.

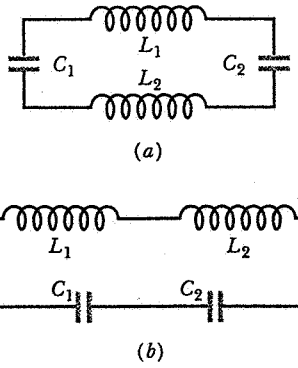


Figura 16 Domanda 35.

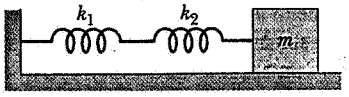


Figura 17 Domanda 38.

39. Spiegare perché non è possibile avere (*a*) un circuito *LC* reale privo di resistenza, (*b*) un induttore reale privo di capacità intrinseca, (*c*) un condensatore reale privo di induttanza intrinseca. Discutere la validità pratica del circuito *LC* di figura 9, in cui tutte le precedenti realtà sono trascurate.
40. Tutti i circuiti *LC* reali devono presentare una certa resistenza. Tuttavia, è possibile acquistare un oscillatore audio già montato la cui uscita mantiene un'ampiezza costante indefinitamente, senza diminuire come in figura 12. Come è possibile?
41. Se in figura 14 si disegnasse la curva di risonanza per $R = 0$, che andamento avrebbe?
42. Riuscite a trovare una qualsiasi ragione fisica per la quale si possa dire che R è «piccola» nelle equazioni 50 e 51? (*Suggerimento*: si consideri cosa succederebbe se lo smorzamento R fosse così grande che l'equazione non descrivesse nemmeno un ciclo completo di oscillazione prima che q si riduca essenzialmente a zero. È possibile che ciò accada? In caso affermativo, come credete che sarebbe l'andamento della figura 12?)
43. Che differenza c'è tra circuiti oscillanti liberi, smorzati e forzati?
44. Elencare il maggior numero possibile di sistemi oscillanti elettrici o meccanici caratterizzati da una frequenza di oscillazione naturale con la corrispondente formula per la frequenza di oscillazione, se riportata nel testo.
45. In un circuito oscillante ricevitore radio, è meglio avere un fattore Q elevato o basso? Spiegare. (Vedi prob. 71.)

ISBN 88-408-0777-2

PROBLEMI

Paragrafo 38-2 Calcolo dell'induttanza

1. L'induttanza di una certa bobina, composta da 400 spire avvolte fittamente, sia di 8.0 mH. Si calcoli il flusso del campo magnetico attraverso la bobina quando in essa scorre una corrente di 5.0 mA.
2. Si consideri una bobina di 10.3 cm di raggio e composta da 34 spire avvolte fittamente. In direzione perpendicolare alla bobina, vi sia un campo magnetico generato esternamente di 2.62 mT. (*a*) Se nella bobina non circola alcuna corrente, quanto vale il flusso concatenato? (*b*) Quando nella bobina circola una corrente di 3.77 A in un certo verso, si trova che il flusso del campo magnetico attraverso di essa si annulla. Determinare l'induttanza della bobina.
3. Si consideri un solenoide costituito da un unico strato di filo di rame isolato (diametro, 2.52 mm). Il solenoide abbia un diametro di 4.10 cm ed una lunghezza di 2.0 m. Quanto vale l'induttanza per metro nella regione centrale del solenoide? Si assuma che spire adiacenti siano a contatto e che lo spessore dell'isolante sia trascurabile.
4. In un certo istante la corrente e la f.e.m. indotta in un induttore siano come indicato in figura 18. (*a*) La corrente sta crescendo o decrescendo? (*b*) La f.e.m. sia di 17 V e la velocità di variazione della corrente di 25 kA/s; qual è il valore dell'induttanza?

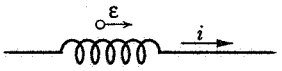


Figura 18 Problema 4.

5. L'induttanza di una bobina composta da N spire fittamente avvolte è tale che, quando la corrente varia alla velocità di 5.0 A/s, la f.e.m. indotta è di 3.0 mV. Una corrente stazionaria di 8.0 A genera un flusso del campo magnetico di 40 mWb attraverso ciascuna spira. (*a*) Calcolare l'induttanza della bobina. (*b*) Da quante spire è composta la bobina?
6. Si consideri un toroide a sezione quadrata di 5.20 cm di lato, di 15.3 cm di raggio interno, composto da 536 spire di filo e percorso da una corrente di 810 mA. Si calcoli il flusso del campo magnetico attraverso una sezione.
7. Si consideri un solenoide lungo 126 cm, formato da 1870 spire, e percorso da una corrente di 4.36 A. Il nucleo del solenoide sia riempito di ferro, la cui permeabilità magnetica relativa efficace sia di 968. Calcolare l'induttanza del solenoide, supponendo di poterlo trattare come se fosse ideale, assumendo che il diametro sia di 5.45 cm.
8. La corrente i che scorre in un induttore di 4.6 H vari nel tempo come illustrato in figura 19. Calcolare la f.e.m. indotta durante gli intervalli di tempo (*a*) da $t = 0$ a $t = 2$ ms, (*b*) da $t = 2$ ms a $t = 5$ ms, (*c*) da $t = 5$ ms a $t = 6$ ms. (Si trascuri il comportamento agli estremi degli intervalli.)
9. Un lungo e sottile solenoide può essere piegato a forma di anello in modo da formare un toroide. Si dimostri che se il solenoide è sufficientemente lungo e sottile, l'equazione che esprime l'induttanza di un toroide (vedi eq. 12) è equivalente a quella di un solenoide di lunghezza appropriata (vedi eq. 9).

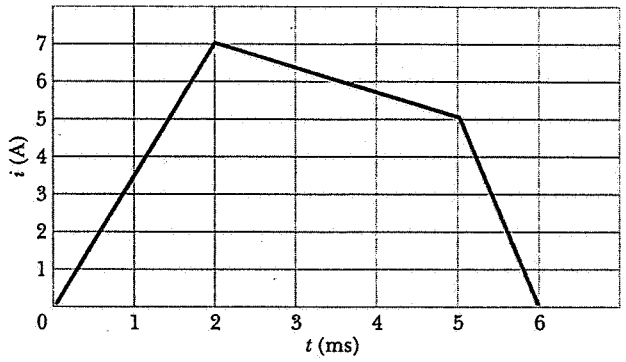


Figura 19 Problema 8.

10. Due induttori L_1 e L_2 siano collegati in serie e separati da una grande distanza. (*a*) Si dimostri che l'induttanza equivalente è data da

$$L_{eq} = L_1 + L_2.$$

(*b*) Perché la loro separazione deve essere grande affinché questa relazione valga?

11. Due induttori L_1 e L_2 siano collegati in parallelo e separati da una grande distanza. (*a*) Si dimostri che l'induttanza equivalente è data da

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

(*b*) Perché la loro separazione deve essere grande affinché questa relazione valga?

12. Una larga striscia di rame di larghezza W viene piegata in modo da farle assumere la forma di un sottile tubo di raggio R con due estensioni piane, come illustrato in figura 20. Una corrente i scorre lungo la striscia, distribuita in maniera uniforme sulla sua larghezza. In questo modo si realizza un «solenoide mono-spira». (*a*) Ricavare un'espressione dell'intensità del campo magnetico **B** all'interno della parte tubolare (lontano dagli estremi). (*Suggerimento*: si supponga che il campo all'esterno di questo solenoide mono-spira sia così piccolo da essere trascurabile.) (*b*) Determinare inoltre l'induttanza di questo solenoide mono-spira, trascurando le due estensioni piane.

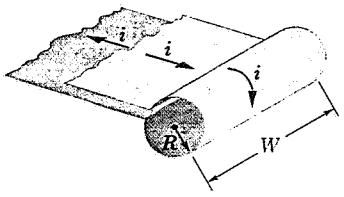


Figura 20 Problema 12.

13. Si considerino due fili paralleli, entrambi di raggio a e i cui centri sono separati da una distanza d, percorsi da correnti uguali in modulo ma opposte in verso. Si dimostri che, trascurando il flusso all'interno dei fili stessi, l'induttanza di un tratto di lunghezza l di una tale coppia di fili è data da

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Vedi, esempio 1, capitolo 35. (*Suggerimento*: si calcoli il flusso attraverso un rettangolo di cui i fili costituiscono due lati opposti.)

14. Si considerino due lunghi fili di rame paralleli (diametro = 2.60 mm) percorsi in versi opposti da una corrente di 11.3 A. (*a*) Se i centri dei fili distano 21.8 mm, calcolare il flusso per metro di filo che vi è nello spazio tra gli assi dei due fili. (*b*) Che frazione di questo flusso si trova all'interno dei fili, e quindi, qual è l'errore relativo che si commette trascurando tale flusso nel calcolo dell'induttanza di due fili paralleli? Vedi esempio 13. (*c*) Si ripeta il calcolo del punto (*a*) nel caso di correnti dirette nello stesso verso.
15. Determinare l'induttanza del cavo coassiale di figura 8 direttamente dall'equazione 6. (*Suggerimento*: si calcoli il flusso attraverso una superficie rettangolare, perpendicolare a **B**, di lunghezza l e di larghezza $b - a$.)

Paragrafo 38-3 Circuiti RL

16. La corrente in un certo circuito RL raggiunge un terzo del suo valore stazionario in 5.22 s. Calcolare la costante di tempo induttiva.
17. La corrente in un certo circuito RL passa da 1.16 A a 10.2 mA negli 1.50 s che seguono la rimozione della batteria dal circuito. Supponendo che L valga 9.44 H, determinare la resistenza R del circuito.
18. (*a*) Si consideri il circuito RL di figura 4. In termini della f.e.m. $\mathcal{E}$ della batteria, quanto vale la f.e.m. indotta $\mathcal{E}_L$ all'istante successivo alla chiusura del circuito in *a*? (*b*) Quanto vale $\mathcal{E}_L$ dopo due costanti di tempo? (*c*) Dopo quante costanti di tempo $\mathcal{E}_L$ vale metà della f.e.m. $\mathcal{E}$ della batteria?
19. Quando in una certa bobina di resistenza 745 mΩ scorre una corrente di 5.48 A, il flusso concatenato con essa è di 26.2 mWb. (*a*) Calcolare l'induttanza della bobina. (*b*) Se ai capi della bobina viene improvvisamente collegata una batteria da 6 V, quanto tempo ci vuole perché la corrente cresca da 0 a 2.53 A?
20. (*a*) Si mostri che l'equazione 20 si può scrivere

$$\frac{di}{i - \mathcal{E}/R} = -\frac{R}{L} dt.$$

(*b*) Integrare questa equazione per ottenere l'equazione 21.
21. Si supponga che la f.e.m. della batteria del circuito di figura 5 vari nel tempo in modo tale che la corrente sia data da $i(t) = 3.0 + 5.0t$, dove il tempo t è espresso in secondi e la corrente i in ampere. Si assuma $R = 4.0\ \Omega$, $L = 6.0$ H. Determinare la f.e.m. della batteria in funzione del tempo. (*Suggerimento*: si applichi la legge delle maglie)
22. All'istante $t = 0$ una batteria viene collegata ad un induttore e una resistenza collegati in serie. La tabella seguente riporta la differenza di potenziale misurata ai capi dell'induttore, in volt, in funzione del tempo, in ms, a partire dal quale la batteria è stata collegata. Calcolare (*a*) la f.e.m. della batteria e (*b*) la costante di tempo del circuito.

t (ms)	V_L (V)	t (ms)	V_L (V)
1.0	18.2	5.0	5.98
2.0	13.8	6.0	4.53
3.0	10.4	7.0	3.43
4.0	7.90	8.0	2.60

23. Ai capi di una bobina di induttanza $L = 50$ mH e di resistenza $R = 180\ \Omega$, viene improvvisamente applicata una differenza di potenziale di 45 V. Con che velocità cresce la corrente dopo 1.2 ms?
24. Si consideri un nucleo toroidale di legno, a sezione quadrata, di raggio interno di 10 cm e di raggio esterno di 12 cm. Attorno ad esso venga avvolto uno strato di filo (diametro, 0.96 mm; resistenza per unità di lunghezza, 21 mΩ/m). Calcolare (*a*) l'induttanza e (*b*) la costante di tempo induttiva. Si trascuri lo spessore dell'isolante.
25. In figura 21 siano $\mathcal{E} = 100$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ e $L = 2.0$ H. Determinare il valore di i_1 e di i_2 (*a*) Immediatamente dopo la chiusura del circuito; (*b*) molto tempo dopo; (*c*) immediatamente dopo l'apertura del circuito; (*d*) molto tempo dopo.

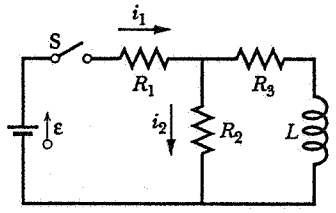


Figura 21 Problema 25.

26. Nel circuito illustrato in figura 22, siano $\mathcal{E} = 10$ V, $R_1 = 5.0\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$ e $L = 5.0$ H. Nei due casi (I) circuito appena chiuso dall'interruttore S e (II) circuito chiuso da lungo tempo, calcolare (*a*) la corrente i_1 che scorre attraverso R_1, (*b*) la corrente i_2 che scorre attraverso R_2, (*c*) la corrente i che scorre attraverso l'interruttore, (*d*) la differenza di potenziale ai capi di R_2, (*e*) la differenza di potenziale ai capi di L e (*f*) di_2/dt.

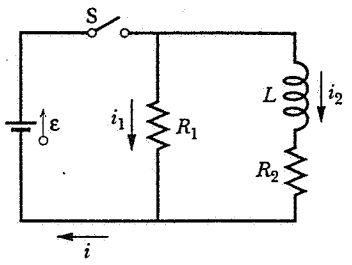


Figura 22 Problema 26.

27. Si dimostri che la costante di tempo induttiva τ_L si può anche definire come il tempo che sarebbe necessario affinché la corrente in un circuito RL raggiunga il suo valore di equilibrio *se continuasse a crescere con la velocità iniziale.*
28. Il componente che si trova nel ramo superiore del circuito di figura 23 è un fusibile ideale da 3.0 A. Esso presenta resistenza nulla finché la corrente che gli scorre attraverso rimane in-

ISBN 88-408-0777-2

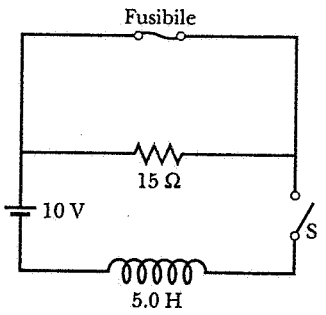


Figura 23 Problema 28.

feriore a 3.0 A. Se la corrente raggiunge i 3.0 A, esso «salta» e da quell'istante in poi esso presenta una resistenza infinita. All'istante $t = 0$, viene azionato l'interruttore S chiudendo il circuito. (*a*) In che istante salta il fusibile? (*b*) Tracciare il grafico dell'andamento della corrente attraverso l'induttore in funzione del tempo. Evidenziare il punto corrispondente alla rottura del fusibile.

Paragrafo 38-4 Energia immagazzinata nel campo magnetico

29. L'energia immagazzinata nel campo magnetico di un certo induttore sia di 25.3 mJ quando la corrente è di 62.0 mA. (*a*) Calcolare l'induttanza. (*b*) Che corrente è necessaria affinché l'energia magnetica sia quattro volte tanto?

30. Si consideri un induttore toroidale da 92 mH il cui volume interno sia di 0.022 m^3. Si calcoli la corrente che vi deve scorrere affinché la densità media di energia all'interno del toroide sia di 71 J/m^3.

31. Determinare la densità di energia magnetica al centro dell'orbita circolare di un elettrone in un atomo di idrogeno. (Vedi esempio 2, capitolo 35.)

32. Si consideri un solenoide lungo 85.3 cm e la cui sezione abbia un'area di 17.2 cm^2. Esso sia costituito da 950 spire attraverso cui scorre una corrente di 6.57 A. (*a*) Calcolare la densità di energia del campo magnetico all'interno del solenoide. (*b*) Determinare l'energia totale immagazzinata nel campo magnetico all'interno del solenoide. (Si trascurino gli effetti di bordo.)

33. Che intensità deve avere un campo elettrico uniforme per avere la medesima densità di energia di un campo magnetico da 0.50 T?

34. Il campo magnetico nello spazio interstellare nella nostra galassia ha una intensità di circa 100 pT. (*a*) Calcolare la corrispondente densità di energia, in eV/cm^3. (*b*) Quanta energia è immagazzinata in tale campo in un cubo di 10 anni luce di spigolo? (Per avere una idea delle scale in gioco, si noti che la stella più vicina, a parte il Sole, si trova a 4.3 anni luce di distanza e che il «raggio» della nostra galassia è di circa 80 000 anni luce.)

35. La bobina di un certo elettromagnete superconduttore usato per ricerche di risonanza magnetica nucleare ha una induttanza di 152 H e viene attraversata da una corrente di 32 A. La bobina è immersa in elio liquido, che ha un calore latente di evaporazione di 85 J/mole. (*a*) Calcolare l'energia immagazzinata nel campo magnetico della bobina. (*b*) Determinare la quantità di elio che viene fatta evaporare se il superconduttore diventa improvvisamente conduttore e quindi sviluppa improvvisamente una resistenza finita.

36. Si supponga che la costante di tempo induttiva del circuito di figura 5 sia di 37.5 ms e che la corrente nel circuito sia nulla all'istante $t = 0$. In che istante la potenza dissipata nel resistore è uguale alla potenza immagazzinata nell'induttore?

37. Una bobina viene collegata in serie ad una resistenza di 10.4 kΩ. Se all'insieme dei due viene collegata una batteria da 55.0 V, la corrente raggiunge il valore di 1.96 mA dopo 5.20 ms. (*a*) Determinare l'induttanza della bobina. (*b*) Quanta energia è immagazzinata nella bobina in quello stesso istante?

38. Per il circuito di figura 5, si assuma $\mathcal{E} = 12.2$ V, $R = 7.34\ \Omega$ e $L = 5.48$ H. La batteria venga collegata all'istante $t = 0$. (*a*) Quanta energia viene fornita dalla batteria durante i primi 2.00 s? (*a*) Quanta di questa energia viene immagazzinata nel campo magnetico dell'induttore? (*c*) Quanta ne è stata dissipata nel resistore?

39. (*a*) Determinare un'espressione per la densità di energia in funzione della distanza radiale r per un toroide di sezione rettangolare. (*b*) Integrando la densità di energia sul volume del toroide, calcolare l'energia totale immagazzinata nel campo del toroide. (*c*) Usando l'equazione 12, valutare l'energia immagazzinata nel toroide direttamente dall'induttanza e confrontarla con (*b*).

40. Si consideri un tratto di filo di rame percorso da una corrente di 10 A, distribuita in maniera uniforme. Calcolare (*a*) la densità di energia magnetica e (*b*) la densità di energia elettrica alla superficie del filo. Il diametro del filo sia di 2.5 mm e la sua resistenza per unità di lunghezza sia di 3.3 Ω/km.

41. Il campo magnetico sulla superficie della Terra ha una intensità di circa 60 μT. Supponendo che questo valore sia relativamente costante su distanze radiali piccole rispetto al raggio della Terra e trascurando le variazioni vicino ai poli magnetici, si calcoli l'energia immagazzinata nella crosta sferica compresa tra la superficie della Terra e 16 km al di sopra di essa.

42. Si dimostri che, dopo che il commutatore S di figura 4 viene portato dalla posizione a alla posizione b, tutta l'energia immagazzinata nell'induttore viene alla fine dissipata per effetto Joule nel resistore.

43. Attraverso un lungo filo scorre una corrente i distribuita uniformemente sulla sezione del filo. (*a*) Si dimostri che l'energia magnetica immagazzinata all'interno di un tratto di filo di lunghezza l è data da $\mu_0 i^2 l/16\pi$. (Perché non dipende dal diametro del filo?) (*b*) Si dimostri che l'induttanza di un tratto di filo di lunghezza l associata al flusso all'interno del filo è data da $\mu_0 l/8\pi$.

Paragrafo 38-5 Circuiti oscillanti: trattazione qualitativa.

44. Qual è la capacità di un circuito LC se la massima carica sul condensatore è di 1.63 μC e l'energia totale è di 142 μJ?

45. Un induttore da 1.48 mH in un circuito LC immagazzina una energia massima di 11.2 μJ. Qual è la corrente di picco?

46. In un circuito oscillante LC, $L = 1.13$ mH e $C = 3.88$ μF. La massima carica sul condensatore è di 2.94 μC. Determinare la corrente massima.

47. I circuiti oscillanti LC sono stati usati in circuiti collegati ad altoparlanti per creare alcuni suoni di «musica elettronica». Che induttanza deve essere impiegata con un condensatore da 6.7 μF per produrre una frequenza di 10 kHz, vicina al limite superiore dell'intervallo di frequenze udibili?

48. Disponete di un induttore da 10.0 mH e di due condensatori, di 5.00 μF e di 2.00 μF di capacità. Elencate le frequenze riso-

nanti che si possono ottenere collegando questi componenti in diverse combinazioni.

49. Si consideri il circuito illustrato in figura 24. con l'interruttore S_1 chiuso e gli altri due interruttori aperti, il circuito ha una costante di tempo τ_C. Con l'interruttore S_2 chiuso e gli altri due interruttori aperti, il circuito ha una costante di tempo τ_L. Con l'interruttore S_3 chiuso e gli altri due interruttori aperti, il circuito oscilla con un periodo T. Si dimostri che $T = 2\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}$.

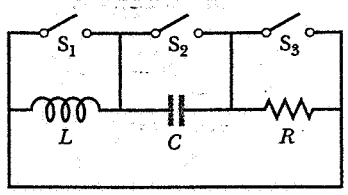


Figura 24 Problema 49.

50. Un corpo di 485 g di massa oscilla su una molla che, quando estesa di 2.10 mm dalla sua posizione di equilibrio, ha una forza di richiamo di 8.13 N. (*a*) Calcolare la frequenza angolare di oscillazione. (*b*) Qual è il periodo di oscillazione? (*c*) Qual è la capacità del circuito LC analogo se L viene preso di 5.20 H?

Paragrafo 38-6 Circuiti oscillanti: trattazione quantitativa.

51. In un certo circuito LC l'energia totale viene convertita da energia elettrica nel condensatore in energia magnetica nell'induttore in 1.52 ms. (*a*) Qual è il periodo di oscillazione? (*b*) Qual è la frequenza di oscillazione? (*c*) Quanto tempo dopo aver raggiunto un massimo, raggiungerà nuovamente un massimo l'energia magnetica?
52. In un circuito LC con $L = 52.2$ mH e $C = 4.21$ μF, la corrente è inizialmente massima. Quanto tempo è necessario affinché il condensatore si carichi completamente la prima volta?
53. Un circuito oscillante LC viene progettato per lavorare con una corrente di picco di 31 mA. L'induttanza di 42 mH sia fissata e la frequenza di oscillazione venga variata cambiando C. (*a*) Se il condensatore ha una tensione di picco massima di 50 V, il circuito può funzionare in sicurezza ad una frequenza di 1.0 MHz? (*b*) A quale massima frequenza può funzionare in sicurezza il circuito? (*c*) Qual è la minima capacità?
54. In un certo circuito oscillante LC, costituito da un condensatore da 1.13 nF e da una bobina da 3.17 mH, la differenza di potenziale massima che si raggiunge è di 2.87 V. Determinare (*a*) la massima carica sul condensatore, (*b*) la corrente di picco nel circuito, (*c*) la massima energia immagazzinata nel campo magnetico della bobina.
55. Si consideri un circuito LC costituito da un induttore da 3.0 mH e da un condensatore da 10 μF. Calcolare (*a*) la frequenza angolare e (*b*) il periodo di oscillazione. (*c*) All'istante $t = 0$, il condensatore sia carico a 200 μC e la corrente sia nulla. Tracciare approssimativamente in un grafico l'andamento della carica sul condensatore in funzione del tempo.
56. Nel circuito di figura 25 il commutatore è rimasto in posizione *a* per molto tempo. Esso viene ora spostato in posizione *b*. (*a*) Calcolare la frequenza della corrente oscillante che ne deriva. (*b*) Quale sarà l'ampiezza delle oscillazioni di corrente?

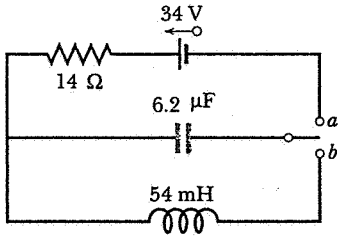


Figura 25 Problema 56.

57. (*a*) In un circuito oscillante LC, in termini della carica massima sul condensatore, che carica è presente quando l'energia immagazzinata nel campo elettrico è metà dell'energia immagazzinata nel campo magnetico? (*b*) Che frazione del periodo deve trascorrere dall'istante in cui il condensatore è completamente carico affinché la condizione di cui sopra si realizzi?
58. Un induttore viene collegato ai capi di un condensatore la cui capacità può essere variata girando una manopola. Si vuole fare in modo che la frequenza di oscillazione del circuito LC vari linearmente con l'angolo di rotazione della manopola, passando da 200 a 400 kHz mentre la manopola ruota di 180°. Assumendo $L = 1.0$ mH, si disegni il grafico di C in funzione dell'angolo di rotazione della manopola da 0° a 180°.
59. Un condensatore variabile nell'intervallo tra 10 e 365 pF viene impiegato insieme ad una bobina per costituire un circuito LC a frequenza variabile per sintonizzare l'ingresso di una radio. (*a*) Quanto vale il rapporto tra la massima e la minima frequenza sintonizzabili con tale condensatore? (*b*) Se il condensatore deve essere impiegato per sintonizzare frequenze tra 0.54 e 1.60 MHz, il rapporto calcolato in (*a*) è troppo grande. Aggiungendo un condensatore in parallelo al condensatore variabile tale intervallo può essere regolato. Che valore deve avere questo condensatore e che induttanza bisogna scegliere per sintonizzarsi nell'intervallo di frequenza desiderato?
60. Si consideri un circuito LC formato da una induttanza $L = 24.8$ mH e da una capacità $C = 7.73$ μF. All'istante $t = 0$, la corrente sia di 9.16 mA, la carica sul condensatore sia di 3.83 μC e il condensatore sia in fase di carica. (*a*) Qual è l'energia totale nel circuito? (*b*) Qual è la massima carica sul condensatore? (*c*) Qual è la corrente massima? (*d*) Se la carica sul condensatore è data da $q = q_m \cos(\omega t + \phi)$, qual è la costante di fase ϕ? (*e*) Si supponga che i dati siano gli stessi, tranne che il condensatore sia in fase di scarica all'istante $t = 0$. Quanto vale allora la costante di fase ϕ?
61. Si consideri un circuito oscillante LC con $L = 3.0$ mH e $C = 2.7$ μF. All'istante $t = 0$ la carica sul condensatore sia nulla e la corrente sia di 2.0 A. (*a*) Qual è la massima carica che si raccoglie sul condensatore? (*b*) In termini del periodo di oscillazione T, quanto tempo trascorre tra l'istante $t = 0$ e il momento in cui viene immagazzinata più velocemente energia nel condensatore? (*c*) Qual è la massima potenza istantanea immagazzinata nel condensatore?
62. La frequenza risonante di un circuito contenente una induttanza L_1 e una capacità C_1 in serie sia ω_0. Un secondo circuito, contenete una induttanza L_2 e una capacità C_2 in serie, ha la stessa frequenza di risonanza. In termini di ω_0, qual è la frequenza di risonanza di un circuito contenente tutti e quattro questi elementi in serie? Si trascuri la resistenza. (*Suggerimento*: si impieghino le formule per la capacità equivalente e per l'induttanza equivalente.)

ISBN 88-408-0777-2

63. Tre induttori identici L e due condensatori identici C sono collegati in modo da formare un circuito a due maglie come mostrato in figura 26*a*. (*a*) Si supponga che le correnti siano come indicato in figura 26*a*. Quanto vale la corrente che scorre attraverso l'induttore centrale? Si scrivano le equazioni delle maglie e si dimostri che esse sono soddisfatte purché la corrente oscilli con la frequenza angolare $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (*b*) Ora si supponga che le correnti siano come indicato in figura 26*b*. Quanto vale la corrente che scorre attraverso l'induttore centrale? Si scrivano le equazioni delle maglie e si dimostri che esse sono soddisfatte purché la corrente oscilli con la frequenza angolare $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. (*c*) Considerando il fatto che il circuito può oscillare a due frequenze differenti, si dimostri che non è possibile rimpiazzare tale circuito a due maglie con un circuito LC equivalente ad una sola maglia.

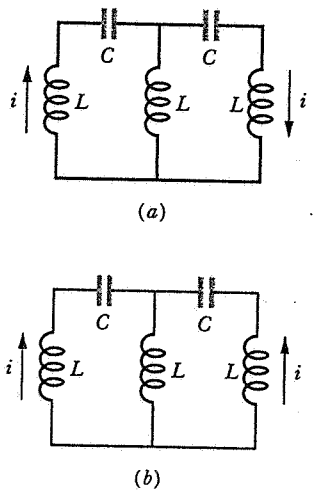


Figura 26 Problema 63.

64. In figura 27 il condensatore da 900 μF è inizialmente carico a 100 V e il condensatore da 100 μF è scarico. Si descriva in dettaglio come si può caricare a 300 V il condensatore da 100 μF adoperando gli interruttori S_1 e S_2.

Paragrafo 38-7 Oscillazioni forzate e smorzate

65. Si determini il tempo necessario affinché, in un circuito LC smorzato, la massima energia presente nel condensatore durante una oscillazione si riduca a metà del suo valore iniziale. Si assuma $q = q_m$ a $t = 0$.

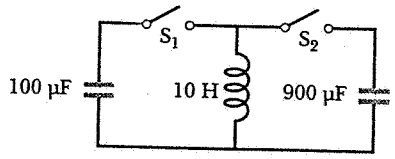


Figura 27 Problema 64.

66. Si consideri un circuito in cui sono collegati in serie un resistore da 7.22 Ω, un induttore da 12.3 H e un condensatore da 3.18 μF. Inizialmente sul condensatore vi sia una carica di 6.31 μC e la corrente sia nulla. Si calcoli la carica sul condensatore dopo N cicli completi, con $N = 5, 10, 100$.

67. Che resistenza R bisogna collegare ad un induttore $L = 220$ mH e ad un condensatore $C = 12$ μF in serie affinché la massima carica sul condensatore si riduca al 99% del suo valore iniziale dopo 50 cicli?

68. (*a*) Per sostituzione diretta dell'equazione 50 nell'equazione 49, si dimostri che $\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}$. (*b*) Qual è la variazione relativa della frequenza di oscillazione quando la resistenza passa da 0 a 100 Ω in un circuito con $L = 4.4$ H e $C = 7.3$ mF?

69. Si consideri un circuito in cui $L = 12.6$ mH e C = 1.15 μF. Che resistenza bisogna inserire nel circuito per ridurre la frequenza di risonanza (non smorzata) dello 0.01%?

70. Si supponga che in un circuito LC smorzato l'ampiezza delle oscillazioni della carica si riduca a metà del suo valore iniziale dopo n cicli. Si dimostri che la riduzione relativa della frequenza di risonanza, dovuta alla presenza del resistore, è data con buona approsimazione da

$$\frac{\omega - \omega'}{\omega} = \frac{0.0061}{n^2},$$

che è indipendente da L, C o R.

71. Si dimostri che in un circuito LC smorzato la frazione di energia persa per ciclo di oscillazione, $\Delta U/U$, è data con buona approssimazione da $2\pi R/\omega L$. La quantità $\omega L/R$ viene spesso detta Q del circuito (Q per «qualità»). Un circuito ad «alto Q» ha una bassa resistenza ed una piccola perdita relativa di energia per ciclo ($= 2\pi/Q$).

Capitolo 39

CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

I circuiti che hanno a che fare con correnti alternate *(normalmente abbreviato in AC) vengono impiegati nei sistemi di distribuzione di energia elettrica, nella radio, nella televisione e in altre apparecchiature per comunicazioni, ed in una vasta gamma di motori elettrici. L'aggettivo «alternata» significa che la corrente cambia verso, alternando periodicamente una direzione all'altra. Normalmente si lavora con correnti che variano sinusoidalmente nel tempo; tuttavia, come si è visto in precedenza nel caso del moto ondoso, forme d'onda complesse possono essere viste come sovrapposizione di onde sinusoidali (attraverso l'analisi di Fourier), e per analogia si può capire il comportamento di circuiti in cui le correnti hanno una dipendenza arbitraria dal tempo analizzando in precedenza il comportamento dei circuiti in cui le correnti hanno un andamento sinusoidale nel tempo. In questo capitolo si studia il comportamento di semplici circuiti contenenti resistori, induttori e condensatori quando vi è un generatore di f.e.m. che varia sinusoidalmente nel tempo.*

39-1 CORRENTI ALTERNATE

In precedenza si sono discusse le correnti prodotte quando alcune f.e.m. che variano nel tempo in vari modi vengono applicate a circuiti contenenti elementi di resistenza R, induttanza L e capacità C, singoli o combinati. Nel capitolo 33, si sono discusse le correnti stazionarie che risultano dalla applicazione di f.e.m. stazionarie a reti puramente resistive. Nel paragrafo 33-7, si è discussa la risposta del circuito RC in serie alla applicazione improvvisa di una f.e.m. e nel paragrafo 38-3 si è considerato analogamente il circuito RL in serie. Nei paragrafi 38-5 e 38-6 si sono discussi il comportamento di un circuito LC senza generatori di f.e.m. ed il comportamento di un circuito RLC in risposta ad una f.e.m. sinusoidale in o vicino alla risonanza.

Qui si studierà la corrente alternata che circola in un circuito RLC quando esso viene alimentato da una f.e.m. che varia nel tempo come

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \text{ sen } \omega t \qquad (1)$$

dove $\mathcal{E}_m$ è l'ampiezza della f.e.m. variabile. La frequenza angolare ω (in rad/s) è legata alla frequenza ν dalla relazione $\omega = 2\pi\nu$.

Uno dei modi possibili per produrre una f.e.m. alternata sinusoidale è indicato in figura 1. Quando la bobina ruota in un campo magnetico uniforme, viene indotta, in accordo con la legge di Faraday, una f.e.m. sinusoidale (vedi par. 36-4). Questo è un semplice esempio di *generatore* AC, una versione più complessa del quale si può trovare in un generatore di potenza commerciale. In un circuito, il simbolo usato per indicare un generatore di f.e.m. alternata, come quello di figura 1, è —(~)— .

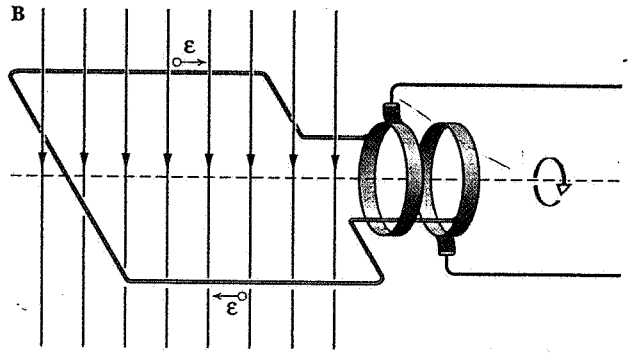


Figura 1 Il principio di base di un generatore di corrente alternata è una spira conduttrice fatta ruotare in un campo magnetico esterno. La f.e.m. alternata si manifesta tra i due anelli in contatto con le estremità della spira.

Lo scopo di questo capitolo è di capire il risultato dell'applicazione di una f.e.m. alternata, della forma dell'equazione 1, ad un circuito contenente elementi resistivi, induttivi e capacitivi. Vi sono molti modi in cui tali elementi possono essere collegati in un circuito; come esempio dell'analisi dei circuiti AC, in que-

ISBN 88-408-0777-2

 ISBN 88-408-0777-2

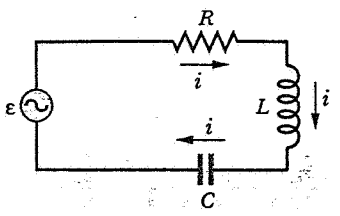


Figura 2 Un circuito ad una sola maglia, costituito da un resistore, un induttore ed un condensatore. Un generatore fornisce una f.e.m. alternata che stabilisce una corrente alternata.

sto capitolo si considera il circuito *RLC* in serie, illustrato in figura 2, in cui un resistore R, un induttore L e un condensatore C sono collegati in serie ai capi di un generatore di f.e.m. alternata della forma dell'equazione 1.

Per un breve intervallo di tempo dopo l'applicazione della f.e.m. al circuito, la corrente varia in modo irregolare nel tempo. Queste variazioni, dette *transienti*, scompaiono rapidamente, dopo di che si trova che *la corrente varia sinusoidalmente nel tempo con la stessa frequenza angolare del generatore di f.e.m.*. Si suppone nel seguito di esaminare il circuito dopo che esso ha raggiunto questa condizione, in cui la corrente si può scrivere

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi), \tag{2}$$

dove i_m è la ampiezza di corrente (la massima intensità della corrente) e ϕ è una costante di fase o angolo di fase che indica la relazione di fase tra $\mathcal{E}$ e i. (Si noti che si è assunta una costante di fase nulla nell'equazione 1 per la f.e.m.. Si noti inoltre che la costante di fase dell'equazione 2 è preceduta da un segno meno; questa scelta è abituale nel discutere la relazione di fase tra la corrente e la f.e.m..) La frequenza angolare ω nell'equazione 2 è la stessa che compare nell'equazione 1.

Supponiamo che $\mathcal{E}_m$, ω, R, L e C siano noti. Lo scopo di questo calcolo è di trovare i_m e ϕ in modo tale che l'equazione 2 caratterizzi completamente la corrente. Si usa un metodo generale per i circuiti *RLC* in serie; un procedimento simile si può usare per analizzare circuiti più complicati (contenenti elementi combinati in vario modo tra serie e parallelo). Tale metodo si può applicare anche a f.e.m. non sinusoidali, perché f.e.m. più complicate si possono scrivere in termini di f.e.m. sinusoidali usando la tecnica dell'analisi di Fourier (vedi par. 19-7), e la corrente risultante può a sua volta essere considerata come sovrapposizione di molti termini della forma dell'equazione 2. La comprensione del circuito *RLC* in serie alimentato da una f.e.m. sinusoidale è perciò essenziale per capire il comportamento in funzione del tempo di tutti i circuiti.

In questo capitolo non ci si occcupa specificatamente del fenomeno della risonanza, che è stato discusso nel paragrafo 38-6. La frequenza angolare ω è completamente arbitraria e non è necessariamente vicina alla frequenza angolare naturale di oscillazione del circuito. La derivazione generale dell'equazione 2 nei prossimi due paragrafi comprende la risonanza come caso particolare, ma rimane un risultato generale valido per ogni ω.

39-2 TRE ELEMENTI SEPARATI

Prima di analizzare il circuito di figura 2, è utile discutere la risposta ad una corrente alternata della forma dell'equazione 2 di ciascuno dei tre componenti separatamente. Si suppone di aver a che fare con elementi ideali; per esempio, l'induttore ha solo induttanza e nessuna resistenza né capacità.

Un elemento resistivo

In figura 3*a* è rappresentato un resistore in un tratto di un circuito attraverso cui viene fatta scorrere una corrente i (data dall'equazione 2) con mezzi non mostrati in figura. Definendo V_R ($= V_a - V_b$) la differenza di potenziale ai capi del resistore, si può scrivere

$$V_R = iR = i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \tag{3}$$

Confrontando le equazioni 2 e 3 si vede che le quantità dipendenti dal tempo V_R e i sono in fase: esse raggiungono il loro massimo valore nello stesso istante. Tale relazione di fase è illustrata in figura 3*b*.

In figura 3*c* è illustrato un altro modo di osservare la situazione. Esso viene detto *diagramma dei fasori**, in cui i fasori, rappresentati dalle frecce aperte, ruotano in senso antiorario con frequenza angolare ω attorno all'origine. I fasori hanno le seguenti proprietà. (1) La lunghezza di un fasore è proporzionale al *massimo* valore della quantità alternata associata: $(V_R)_m = i_m R$ dall'equazione 3, per la differenza di potenziale, e i_m dall'equazione 2, per la corrente. (2) La proiezione di un fasore sull'asse verticale dà (tramite la stessa costante di proporzionalità che lega la lunghezza del fasore al valore massimo della grandezza associata) il valore *istantaneo* della quantità alternata associata. Le frecce sull'asse verticale rappresentano le quantità dipendenti dal tempo V_R ed i come descritte rispettivamente dalle equazioni 2 e 3. Che V_R ed i siano in fase

* Detti anche vettori di fase. [N.d.T.]

ISBN 88-408-0777-2

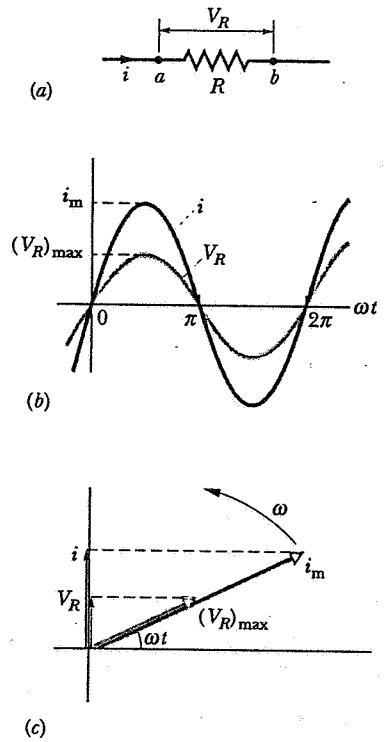


Figura 3 (*a*) Un resistore in un circuito a corrente alternata. (*b*) La corrente e la differenza di potenziale ai capi del resistore sono in fase. (*c*) Un diagramma dei fasori che rappresenta la corrente e la differenza di potenziale.

segue dal fatto che i loro fasori giacciono sulla stessa linea in figura 3*c*.

Il diagramma dei fasori è molto simile alla figura 14 del capitolo 15, in cui si è analizzata la connessione tra moto circolare uniforme e moto armonico semplice. Si rammenti che la proiezione su un qualsiasi asse della posizione di una particella in moto circolare uniforme dà uno spostamento che varia sinusoidalmente nel tempo, analogamente al moto armonico semplice. Qui al ruotare dei fasori, la loro proiezione sull'asse verticale rappresenta una corrente o una tensione che varia sinusoidalmente nel tempo. Seguite la rotazione dei fasori in figura 3*c* e convincetevi che questo diagramma dei fasori descrive completamente e correttamente le equazioni 2 e 3.

Un elemento induttivo

In figura 4*a* è rappresentato un tratto di un circuito contenente solo un elemento induttivo. La differenza di potenziale V_L ($= V_a - V_b$) ai capi dell'induttore è legata alla corrente dall'equazione 3 del capitolo 38:

$$V_L = L\frac{di}{dt} = Li_m\omega \cos(\omega t - \phi). \qquad (4)$$

dove si è usata l'equazione 2 per la corrente. L'identità trigonometrica $\cos\theta = \text{sen}(\theta + \pi/2)$ permette di scrivere l'equazione 4 nel seguente modo

$$V_L = Li_m\omega \text{ sen } (\omega t - \phi + \pi/2). \qquad (5)$$

Confrontando l'equazione 2 e l'equazione 5 si nota che le quantità dipendenti dal tempo V_L ed i non sono in fase; esse sono sfasate di un quarto di ciclo con V_L che precede i (o con i che segue V_L). Si dice normalmente che in un induttore la corrente *è sfasata in ritardo* di 90° sulla differenza di potenziale. Ciò è illustrato in figura 4*b*, che è una rappresentazione delle equazioni 2 e 5. Si noti che, al trascorrere del tempo, i raggiunge il suo massimo dopo che V_L ha raggiunto il suo, con un ritardo di un quarto di periodo.

Questa relazione di fase tra i e V_L è indicata nel diagramma dei fasori di figura 4*c*. Poiché i fasori ruotano in senso antiorario, è chiaro che il fasore i segue (cioè, è sfasato in ritardo su) il fasore V_L con un ritardo di un quarto di periodo. Analizzando i circuiti AC, è conveniente definire la *reattanza induttiva* X_L:

$$X_L = \omega L, \qquad (6)$$

in termini della quale si può riscrivere l'equazione 5 come

$$V_L = i_m X_L \text{ sen } (\omega t - \phi + \pi/2). \qquad (7)$$

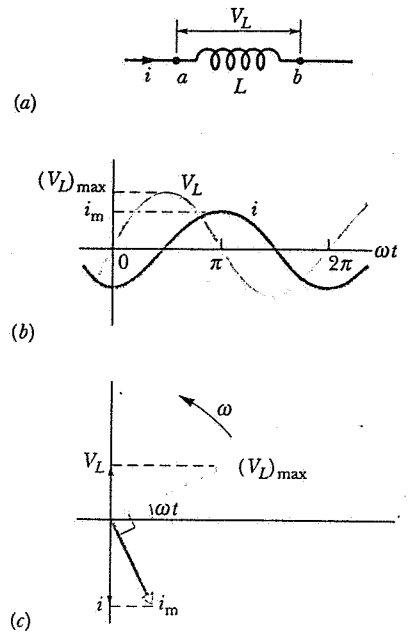


Figura 4 (*a*) Un induttore in un circuito a corrente alternata. (*b*) La corrente ritarda di 90° rispetto alla differenza di potenziale ai capi dell'induttore. (*c*) Un diagramma dei fasori che rappresenta la corrente e la differenza di potenziale.

Confrontando le equazioni 3 e 7, si nota che l'unità di misura di X_L nel SI deve essere la stessa di R, cioè l'ohm. Ciò si può vedere direttamente confrontando l'equazione 6 con l'espressione della costante di tempo induttiva, $\tau_L = L/R$. Anche se entrambe si misurano in ohm, una reattanza non è la stessa cosa di una resistenza.

Il valore massimo che V_L può assumere si ricava dall'equazione 7,

$$(V_L)_{max} = i_m X_L. \tag{8}$$

Un elemento capacitivo

In figura 5*a* è riportato un tratto di un circuito che contiene solo un elemento capacitivo. Anche in questo caso, una corrente i data dall'equazione 2 viene fatta scorrere con mezzi non illustrati in figura.* Sia q la carica sul piatto di sinistra del condensatore, di modo che una corrente positiva entrante in tale piatto provochi un aumento di q; cioè, $i = dq/dt$ implica $dq > 0$ per $i > 0$. La differenza di potenziale V_C $(= V_a - V_b)$ ai capi del condensatore è data da

$$V_C = \frac{q}{C} = \frac{\int i dt}{C}. \tag{9}$$

Integrando la corrente i data dall'equazione 2, si trova

$$\begin{aligned} V_C &= -\frac{i_m}{\omega C} \cos(\omega t - \phi) \\ &= \frac{i_m}{\omega C} \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2), \end{aligned} \tag{10}$$

dove è stata utilizzata l'identità trigonometrica $\cos\theta = -\operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$.

Confrontando le equazioni 2 e 10 si nota che i e V_C sono sfasate di 90°, con i che precede V_C. In figura 5*b* sono illustrate i e V_C, rappresentate in funzione del tempo; si noti che i raggiunge il suo massimo un quarto di ciclo o 90° prima di V_C. Equivalentemente si può dire che in un condensatore la corrente *è sfasata in anticipo* di 90° sulla differenza di potenziale.

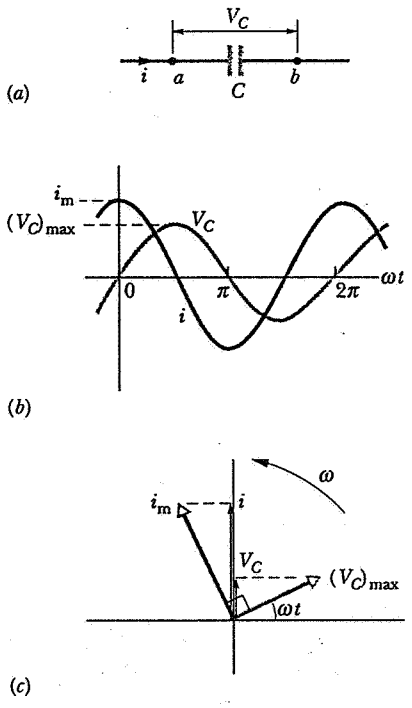


Figura 5 (*a*) Un condensatore in un circuito a corrente alternata. (*b*) La corrente anticipa di 90° la differenza di potenziale ai capi del condensatore. (*c*) Un diagramma dei fasori che rappresenta la corrente e la differenza di potenziale.

La relazione di fase è illustrata nel diagramma dei fasori di figura 5*c*. Poiché i fasori ruotano in senso antiorario, è chiaro che il fasore i anticipa il fasore V_C di un quarto di ciclo.

Analogamente a quanto già visto nel caso della reattanza induttiva, è conveniente definire la *reattanza capacitiva* X_C:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}, \tag{11}$$

in termini della quale si può riscrivere l'equazione 10 nel seguente modo

$$V_C = i_m X_C \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2) \tag{12}$$

Confrontando le equazioni 3 e 12, si nota che anche l'unità di misura di X_C deve essere l'ohm. A tale conclusione si può arrivare anche confrontando l'equazione 11 con l'espressione $\tau_C = RC$ per la costante di tempo capacitiva.

* Può essere inizialmente difficile pensare ad un condensatore come ad una parte di un circuito attraverso cui scorre una corrente; chiaramente la carica non attraversa il condensatore. Può essere di aiuto il considerare il flusso di carica nel seguente modo: la corrente i porta una carica q sul piatto di sinistra del condensatore, sicché una carica $-q$ deve raggiungere il piatto di destra del condensatore comunque sia fatto il circuito a destra del condensatore. Questo flusso di una carica $-q$ da destra a sinistra, è esattamente equivalente ad un flusso di una carica $+q$ da sinistra a destra, che è identico alla corrente sul lato sinistro del condensatore. In questo modo una corrente che entra da una parte in un condensatore può uscire dall'altra parte anche se non vi è un cammino conduttore tra le armature del condensatore!

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 1 RELAZIONI DI FASE E AMPIEZZA PER CORRENTI E DIFFERENZE DI POTENZIALE ALTERNATE

Elemento circuitale	*Simbolo*	*Impedenza*[A]	*Fase della corrente*	*Relazione di ampiezza*
Resistore	R	R	In fase con V_R	$(V_R)_{max} = i_m R$
Induttore	L	X_L	Ritarda di 90° rispetto a V_L	$(V_L)_{max} = i_m X_L$
Condensatore	C	X_C	Anticipa V_C di 90°	$(V_C)_{max} = i_m X_C$

Molti studenti ricordano le relazioni di fase aiutandosi con la frase: «ELI the ICE man». Dove L e C indicano induttanza e capacità; E indica la tensione e I la corrente. Così in un circuito induttivo (ELI) la corrente (I) è in ritardo rispetto alla tensione (E).

[A] *Impedenza* è un termine generale che comprende sia la resistenza che la reattanza.

Il massimo valore di V_C è, secondo l'equazione 12,

$$(V_C)_{max} = i_m X_C. \tag{13}$$

In tabella 1 sono riassunti i risultati ricavati per i tre singoli elementi circuitali.

Esempio 1 In figura 4*a* sia $L = 230$ mH, $\nu = 60$ Hz e $(V_L)_{max} = 36$ V. (*a*) Determinare la reattanza induttiva X_L. (*b*) Determinare l'ampiezza della corrente che circola nel circuito.

Soluzione (*a*) Dall'equazione 6

$$X_L = \omega L = 2\pi\nu L = (2\pi)(60 \text{ Hz})(230 \times 10^{-3} \text{ H}) = 87\ \Omega.$$

(*b*) Dall'equazione 8, si ottiene l'ampiezza di corrente

$$i_m = \frac{(V_L)_{max}}{X_L} = \frac{36 \text{ V}}{87\ \Omega} = 0.41\ A.$$

Si noti che, benché una reattanza non sia una resistenza, la reattanza induttiva ha per un induttore lo stesso ruolo che ha la resistenza per un resistore. Si noti inoltre che, se si raddoppiasse la frequenza, la reattanza induttiva raddoppierebbe e l'ampiezza di corrente si dimezzerebbe. Ciò si può capire dal punto di vista fisico: per ottenere il medesimo valore di V_L, si deve variare la corrente alla medesima velocità ($V_L = L\, di/dt$). Se la frequenza raddoppiasse, il tempo di variazione si dimezzerebbe sicché anche la massima corrente si dovrebbe dimezzare. Riassumendo: per gli induttori, tanto più alta è la frequenza tanto più grande è la reattanza.

Esempio 2 In figura 5*a* sia $C = 15\ \mu$F, $\nu = 60$ Hz e $(V_C)_{max} = 36$ V. (*a*) Determinare la reattanza capacitiva X_C. (*b*) Determinare l'ampiezza della corrente che circola nel circuito.

Soluzione (*a*) Dall'equazione 11, si ottiene

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{(2\pi)(60 \text{ Hz})(15 \times 10^{-6} \text{ F})} = 177\ \Omega.$$

(*b*) Dall'equazione 13, si ottiene l'ampiezza della corrente

$$i_m = \frac{(V_C)_{max}}{X_C} = \frac{36 \text{ V}}{177\ \Omega} = 0.20 \text{ A}.$$

Si noti che, se si raddoppiasse la frequenza, la reattanza capacitiva si dimezzerebbe e l'ampiezza di corrente raddoppierebbe. Ciò si può capire dal punto di vista fisico: per ottenere lo stesso valore di V_C, bisogna portare la medesima carica sul condensatore ($V_C = q/C$). Se la frequenza raddoppiasse, si avrebbe solo metà tempo per portare la medesima carica sul condensatore sicché la corrente massima dovrebbe raddoppiare. Riassumendo: per i condensatori, tanto più alta è la frequenza, tanto più bassa è la reattanza.

39-3 IL CIRCUITO *RLC* IN SERIE

Avendo terminato l'analisi degli elementi R, L e C separati, torniamo all'analisi del circuito di figura 2, in cui sono presenti tutti e tre gli elementi. La f.e.m. è data dall'equazione 1

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t,$$

e la corrente che circola nel circuito ha la forma dell'equazione 2

$$i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi).$$

Il nostro scopo è di determinare i_m e ϕ.

Si inizia applicando la legge delle maglie al circuito di figura 2, ottenendo $\mathcal{E} - V_R - V_L - V_C = 0$, ossia

$$\mathcal{E} = V_R + V_L + V_C. \tag{14}$$

L'equazione 14 si può risolvere ottenendo la ampiezza della corrente i_m e la fase ϕ impiegando molti modi diversi: con una analisi trigonometrica, con una analisi grafica usando i fasori e con l'analisi differenziale.

Analisi trigonometrica

Si sono già ottenute le relazioni tra la differenza di potenziale ai capi di ciascun elemento e la corrente che lo attraversa. Sostituendo quindi le equazioni 3, 7 e 12 nell'equazione 14, si ottiene

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t = &i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\\ &+ i_m X_L \operatorname{sen}(\omega t - \phi + \pi/2)\\ &+ i_m X_C \operatorname{sen}(\omega t - \phi - \pi/2),\end{aligned} \tag{15}$$

in cui si è sostituita l'espressione 1 per la f.e.m.. Usando alcune identità trigonometriche, l'equazione 15 si può scrivere

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t &= i_m R \operatorname{sen}(\omega t - \phi) + i_m X_L \cos(\omega t - \phi)\\ &\quad - i_m X_C \cos(\omega t - \phi)\\ &= i_m[R \operatorname{sen}(\omega t - \phi)\\ &\quad + (X_L - X_C)\cos(\omega t - \phi)].\end{aligned} \tag{16}$$

Impiegando altre relazioni trigonometriche (vedi prob. 18), l'equazione 16 si può ridurre a

$$\mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t = i_m\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\operatorname{sen}\omega t \tag{17}$$

purché si prenda

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \tag{18}$$

L'ampiezza della corrente si ricava direttamente dall'equazione 17:

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{19}$$

Questo completa l'analisi del circuito *RLC* in serie, perché si è raggiunto lo scopo che ci si era prefisso di esprimere l'ampiezza i_m della corrente e la fase ϕ in termini dei parametri del circuito ($\mathcal{E}_m$, ω, R, L e C). Si noti che la fase ϕ non dipende dall'ampiezza $\mathcal{E}_m$ della f.e.m. applicata; cambiando $\mathcal{E}_m$ cambia i_m ma non ϕ: cambia la *scala* del risultato ma non la sua *natura*.

La quantità che compare al denominatore nell'equazione 19 viene detta l'impedenza Z del circuito *RLC* in serie:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \tag{20}$$

così che l'equazione 19 si può scrivere

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}, \tag{21}$$

che ricorda la relazione $i = \mathcal{E}/R$ per le reti resistive ad una sola maglia con f.e.m. costanti. L'unità di misura dell'impedenza nel SI è evidentemente l'ohm.

L'equazione 19 dà l'ampiezza di corrente nell'equazione 53 del capitolo 38 e la figura 14 del capitolo 38 è una rappresentazione grafica dell'equazione 19. La corrente i_m assume il suo massimo valore quando l'impedenza Z assume il suo valore minimo R, il che accade quando $X_L = X_C$, ossia

$$\omega L = 1/\omega C,$$

sicché

$$\omega = 1/\sqrt{LC} \tag{22}$$

che è la condizione di *risonanza* data nell'equazione 54 del capitolo 38. Sebbene l'equazione 19 sia un risultato generale valido per ogni frequenza di alimentazione, comprende la risonanza come caso particolare.

Analisi grafica

È istruttivo usare il diagramma dei fasori per analizzare il circuito *RLC* in serie. In figura 6*a* è illustrato un

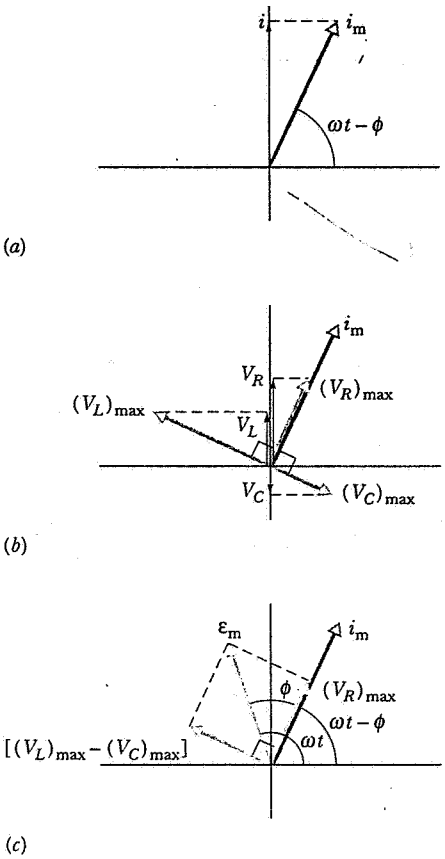


Figura 6 (*a*) Un diagramma dei fasori che rappresenta la corrente alternata nel circuito *RLC* di figura 2. (*b*) Fasori che rappresentano la differenza di potenziale ai capi del resistore, del condensatore e dell'induttore. Si notino le loro differenze di fase rispetto alla corrente. (*c*) È stato aggiunto un fasore che rappresenta la f.e.m. alternata.

ISBN 88-408-0777-2

fasore che rappresenta la corrente. Esso ha lunghezza i_m e la sua proiezione sull'asse verticale è $i_m \text{sen}(\omega t - \phi)$, che è la corrente dipendente dal tempo i. In figura 6*b* sono tracciati i fasori che rappresentano le singole cadute di tensione ai capi di R, L e C. Si notino i loro valori massimi e le loro proiezioni sull'asse verticale. Si noti in particolare che le fasi sono in accordo con le conclusioni del paragrafo 39-2: V_R è in fase con la corrente, V_L è sfasata di 90° in anticipo sulla corrente e V_C è sfasata di 90° in ritardo sulla corrente.

Secondo l'equazione 14, la somma *algebrica* delle proiezioni (istantanee) di V_R, V_L e V_C sull'asse verticale dà il valore (istantaneo) di $\mathcal{E}$. D'altra parte, asseriamo che la somma vettoriale delle ampiezze dei fasori $(V_R)_{max}$, $(V_L)_{max}$ e $(V_C)_{max}$ dà un fasore la cui ampiezza è la grandezza $\mathcal{E}_m$ dell'equazione 1. La proiezione di $\mathcal{E}_m$ sull'asse verticale è la f.e.m. dipendente dal tempo $\mathcal{E}$ dell'equazione 1; cioè è $V_R + V_L + V_C$ come dice l'equazione 14. Nelle operazioni vettoriali la somma (algebrica) delle proiezioni di un qualunque numero di vettori su una data retta è uguale alla proiezione su quella retta della somma (vettoriale) di quei vettori.

In figura 6*c*, si calcola dapprima la somma vettoriale di $(V_L)_{max}$ e di $(V_C)_{max}$, che è il fasore $(V_L)_{max} - (V_C)_{max}$. In seguito si sommano questo fasore e $(V_R)_{max}$. Poiché questi due fasori sono ortogonali, l'ampiezza della loro somma, che è l'ampiezza del fasore $\mathcal{E}_m$, è

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \sqrt{[(V_R)_{max}]^2 + [(V_L)_{max} - (V_C)_{max}]^2} \\ &= \sqrt{(i_m R)^2 + (i_m X_L - i_m X_C)^2} \\ &= i_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\end{aligned} \tag{23}$$

in cui si sono usate le equazioni 3, 8 e 13 per sostituire le ampiezza dei fasori. L'equazione 23 è identica all'equazione 19, che era stata ottenuta con una analisi trigonometrica.

Come illustrato in figura 6*c*, ϕ è l'angolo tra il fasore i_m e il fasore $\mathcal{E}_m$, e si vede dalla figura che

$$\begin{aligned}\tan\phi &= \frac{(V_L)_{max} - (V_C)_{max}}{(V_R)_{max}} \\ &= \frac{i_m(X_L - X_C)}{i_m R} \\ &= \frac{X_L - X_C}{R},\end{aligned} \tag{24}$$

che è identica all'equazione 18.

La figura 6*b* è stata disegnata assumendo arbitrariamente $X_L > X_C$; cioè, si è assunto che il circuito di figura 2 fosse più induttivo che capacitivo. A causa di questa assunzione, i_m è sfasata in ritardo su $\mathcal{E}_m$ (anche se non di un intero quarto di periodo come accadeva nel caso di un elemento puramente induttivo illustrato in figura 4). Lo sfasamento ϕ nell'equazione 23 (e quindi nell'equazione 22) è positivo ma minore di + 90°.

Se, d'altra parte, si avesse $X_C > X_L$, il circuito sarebbe più capacitivo che induttivo e i_m sarebbe sfasata in anticipo su $\mathcal{E}_m$ (anche se non di un intero quarto di periodo come accadeva nel caso di un elemento puramente capacitivo illustrato in figura 5). Coerentemente con questo passaggio da ritardo ad anticipo, lo sfasamento ϕ nell'equazione 23 (e quindi nell'equazione 2) diventerebbe automaticamente negativo.

Un altro modo di interpretare la condizione di risonanza impiega il diagramma dei fasori di figura 6. In risonanza $X_L = X_C$ e, secondo l'equazione 23, $\phi = 0$. In tal caso, i fasori $(V_L)_{max}$ e $(V_C)_{max}$ in figura 6 sono uguali ed opposti, sicché i_m è in fase con $\mathcal{E}_m$. Ancora una volta, si tenga presente che, sebbene le tecniche di calcolo illustrate siano valide per un *qualsiasi* circuito AC, i risultati sono validi *solo* per il circuito *RLC* in serie. Inoltre si rammenti che si sta esaminando il circuito solo nella situazione stazionaria, dopo che le variazioni di breve durata del transiente sono scomparse.

Esempio 3 In figura 2 sia $R = 160\ \Omega$, $C = 15\ \mu\text{F}$, $L = 230\ \text{mH}$, $\nu = 60\ \text{Hz}$ e $\mathcal{E}_m = 36\ \text{V}$. Determinare (*a*) la reattanza induttiva X_L, (*b*) la reattanza capacitiva X_C, (*c*) l'impedenza Z del circuito, (*d*) l'ampiezza della corrente i_m ed (*e*) lo sfasamento ϕ.

Soluzione (*a*) $X_L = 87\ \Omega$, come nell'esempio 1.

(*b*) $X_C = 177\ \Omega$, come nell'esempio 2. Si noti che $X_C > X_L$ sicché il circuito è più capacitivo che induttivo.

(*c*) Dall'equazione 20,

$$\begin{aligned}Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{(160\Omega)^2 + (87\ \Omega - 177\ \Omega)^2} = 184\ \Omega.\end{aligned}$$

(*d*) Dall'equazione 21,

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z} = \frac{36\ \text{V}}{184\ \Omega} = 0.196\ \text{A}.$$

(*e*) Dall'equazione 18 si ottiene

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{87\ \Omega - 177\ \Omega}{160\ \Omega} = -0.563.$$

Così si ha

$$\phi = \tan^{-1}(-0.563) = -29.4°$$

Uno sfasamento negativo è proprio di un carico capacitivo, come si può dedurre dalla tabella 1 e dalla figura 6.

Esempio 4 (*a*) Qual è la frequenza di risonanza in Hz del circuito dell'esempio 3? (*b*) Qual è l'ampiezza della corrente in risonanza?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 22,

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.23\ \text{H})(15 \times 10^{-6}\ \text{F})}} = 538\ \text{rad/s}.$$

Quindi

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 86\ \text{Hz}.$$

(*b*) In risonanza, $X_L = X_C$, e quindi $Z = R$. Dall'equazione 21,

$$i_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R} = \frac{36\ \text{V}}{160\ \Omega} = 0.23\ \text{A}.$$

La frequenza di 60 Hz dell'esempio 3 è abbastanza vicina alla frequenza di risonanza.

Analisi differenziale *(Facoltativo)*

Usando le equazioni $V_C = q/C$ e $V_L = L\,di/dt$, l'equazione 14 si può scrivere

$$\mathcal{E} = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}, \tag{25}$$

o, usando l'equazione $i = dq/dt$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t \tag{26}$$

Questa equazione ha la stessa forma di quella che descrive l'oscillatore meccanico forzato discusso nel paragrafo 15-9 (vedi equazione 41 del capitolo15). Usando le corrispondenze

$$x \to q, \quad m \to L, \quad b \to R, \quad \text{e} \quad k \to 1/C,$$

che sono state usate anche nei paragrafi 38-5 – 38-7, si può immediatamente adattare il risultato ottenuto all'equazione 42 del capitolo 15 per l'oscillatore meccanico forzato e smorzato al caso dell'oscillatore elettromagnetico forzato e smorzato (cioè resistivo):

$$q = -\frac{\mathcal{E}_m}{\omega Z}\cos(\omega t - \phi), \tag{27}$$

dove, come il lettore dovrebbe dimostrare, ωZ corrisponde al G definito dall'equazione 43 del capitolo 15. Derivando l'equazione 27 per determinare la corrente, si ottiene l'equazione 2, $i = i_m \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$, con $i_m = \mathcal{E}_m/Z$. Si dimostri inoltre che la fase ϕ che compare nell'equazione 44 del capitolo 15 si riduce all'equazione 18 qualora alle quantità meccaniche si sostituiscano le quantità elettromagnetiche corrispondenti.

La ricerca di analogie, come quella che si è appena fatta tra la risonanza meccanica e quella elettromagnetica, è una tecnica utile che non solo fornisce una visione profonda dei nuovi fenomeni, ma permette di risparmiare molto lavoro nella loro analisi, perché si possono adattare i risultati matematici ottenuti per un sistema all'analisi di un altro. Si riconoscono le caratteristiche comuni dei due sistemi: un elemento di eccitazione sinusoidale; un elemento inerziale, che si oppone alle variazioni dello stato di moto (m si oppone alle variazioni di v, L si oppone alle variazioni di i); un elemento dissipativo (b ed R, ciascuno appartenente a termini lineari nella derivata temporale delle coordinate); un elemento di richiamo (k e $1/C$, ciascuno appartenente a termini lineari nelle coordinate). Le caratteristiche comuni a entrambe le soluzioni sono: una oscillazione sinusoidale stabile alla frequenza di eccitazione dopo un periodo iniziale di transienti che scompaiono velocemente; una differenza di fase tra l'eccitazione e la coordinata oscillante che non dipende dall'ampiezza dell'eccitazione; infine una risonanza ad una particolare frequenza che dipende solo dagli elementi inerziali e dagli elementi di richiamo.

39-4 POTENZA NEI CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

Nei circuiti elettrici, l'energia viene fornita dal generatore di f.e.m., immagazzinata dagli elementi capacitivi e induttivi, e dissipata dagli elementi resistivi. Il principio di conservazione dell'energia richiede che, in un qualunque istante fissato, la potenza fornita dal generatore di f.e.m. sia uguale alla potenza che viene immagazzinata negli elementi capacitivi e induttivi più la potenza che viene dissipata negli elementi resistivi. (Si suppone che gli elementi capacitivi e induttivi siano ideali e non abbiano quindi resistenza interna.)

Si consideri un resistore come un elemento isolato (come in figura 3) in un circuito AC in cui la corrente è data dall'equazione 2. (Si esamini il circuito in stato stazionario, dopo che sia trascorso un intervallo di tempo sufficientemente lungo dal momento in cui il generatore di f.e.m. è stato collegato al circuito.) Proprio come in un circuito DC, la potenza dissipata (per effetto Joule) in un resistore in un circuito AC è data da

$$P = i^2R = i_m^2R\ \operatorname{sen}^2(\omega t - \phi). \tag{28}$$

L'energia dissipata nel resistore, varia nel tempo, e così anche l'energia immagazzinata negli elementi induttivi e capacitivi. Nella maggior parte dei casi in cui si ha a che fare con correnti alternate, il modo in cui la potenza varia nel tempo non è di alcun interesse; ciò che più importa è la potenza *media* dissipata durante un qualsiasi periodo fissato. L'energia *media* immagazzinata negli elementi induttivi o capacitivi rimane costante su un qualsiasi periodo; in conseguenza di ciò, l'energia viene trasferita dal generatore di f.e.m. agli elementi resistivi, dove viene dissipata.

Per esempio, la compagnia elettrica fornisce una sorgente di f.e.m. alternata a casa vostra che varia ad una frequenza $\nu = 60$ Hz* . Quello che vi viene fatto pagare è la potenza media che consumate; alla compagnia elettrica, non interessa il fatto che voi usiate un dispositivo puramente resistivo, in cui la potenza massima dissipata è in fase con il generatore di f.e.m., piuttosto che un dispositivo parzialmente capacitivo o

* In Italia la frequenza di rete è di 50 Hz. [N.d.T.]

ISBN 88-408-0777-2

induttivo come ad esempio un motore, in cui la corrente massima (e quindi la potenza massima) è sfasata rispetto al generatore di f.e.m.. Se la compagnia elettrica misurasse il vostro consumo in un tempo minore di 1/60 s, noterebbe variazioni nella potenza utilizzata, ma misurando su un tempo più lungo di 1/60 s solo la potenza media consumata diventa importante.

Si scrive la potenza media $\overline{P}$ prendendo il valor medio dell'equazione 28. Il valor medio di sen^2 su un qualunque numero intero di periodi è $\frac{1}{2}$, indipendentemente dallo sfasamento. La potenza media è quindi

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2} i_m^2 R, \tag{29}$$

che si può scrivere anche

$$\overline{P} = (i_m/\sqrt{2})^2 R. \tag{30}$$

la quantità $i_m/\sqrt{2}$ è uguale al valore *quadratico medio* (qm) della corrente:

$$i_{qm} = \frac{i_m}{\sqrt{2}}. \tag{31}$$

Questo è il risultato che si otterrebbe prendendo dapprima il quadrato della corrente, calcolando quindi il valor medio su un numero intero di periodi ed infine estraendo la radice quadrata. (Si è definita la velocità molecolare quadratica media nello stesso modo nel capitolo 24). È conveniente scrivere la potenza in termini di valori qm, perché i voltmetri e gli amperometri per grandezze alternate sono progettati per dare i valori qm. I normali 120 V delle prese di casa*, sono un valore qm; la tensione di picco è $\mathcal{E}_m = \sqrt{2}\mathcal{E}_{qm} = \sqrt{2}(120\text{ V}) = 170\text{V}$.

In termini di i_{qm}, l'equazione 31 si può scrivere

$$\overline{P} = i_{qm}^2 R. \tag{32}$$

L'equazione 32 è simile all'espressione $P = i^2R$, che descrive la potenza dissipata in un resistore in un circuito DC. Se si sostituiscono le correnti e le tensioni DC con i valori qm di correnti e tensioni AC, le espressioni per la dissipazione di potenza nei circuiti DC possono essere usate per ottenere la dissipazione di potenza media in un circuito AC.

Finora si è considerata l'energia dissipata in un elemento resistivo isolato in un circuito AC. Si consideri ora un circuito AC completo dal punto di vista della dissipazione di energia. A questo scopo si sceglie ancora una volta il circuito RLC in serie, come esempio. Il lavoro dL fatto da un generatore di f.e.m. $\mathcal{E}$ su una carica dq è dato da $dL = \mathcal{E}\, dq$. La potenza P $(= dL/dt)$ è allora $\mathcal{E}\, dq/dt = \mathcal{E}\, i$, ovvero, usando le equazioni 1 e 2,

$$P = \mathcal{E}i = \mathcal{E}_m i_m \text{sen}\omega t\ \text{sen}(\omega t - \phi). \tag{33}$$

Raramente si è interessati a questa potenza istantanea, che generalmente è una funzione del tempo rapidamente oscillante. Per determinare la potenza media, si impieghi una identità trigonometrica per sviluppare il fattore $\text{sen}(\omega t - \phi)$:

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{E}_m i_m \text{sen}\omega t\ (\text{sen}\omega t\ \cos\phi - \cos\omega t\ \text{sen}\phi) \\ &= \mathcal{E}_m i_m (\text{sen}^2\omega t\ \cos\phi - \text{sen}\omega t\ \cos\omega t\ \text{sen}\phi). \end{aligned} \tag{34}$$

Quando ora si calcola la media su un periodo completo, il termine in $\text{sen}^2\omega t$ dà come media 1/2, mentre il termine in $\text{sen}\omega t\ \cos\omega t$ dà media nulla, come il lettore dovrebbe dimostrare (vedi prob. 22). La potenza media è dunque

$$\overline{P} = \tfrac{1}{2}\mathcal{E}_m i_m \cos\phi. \tag{35}$$

Sostituendo sia ad $\mathcal{E}_m$ che a i_m i loro valori qm ($\mathcal{E}_{qm} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2}$ e $i_{qm} = i_m/\sqrt{2}$), si può scrivere l'equazione 35 come

$$\overline{P} = \mathcal{E}_{qm} i_{qm} \cos\phi. \tag{36}$$

La quantità $\cos\phi$ nell'equazione 36 viene detta *fattore di potenza* del circuito AC. Valutiamo il fattore di potenza per il circuito RLC in serie. Dall'equazione 18, $\tan\phi = (X_L - X_C)/R$, si può mostrare che

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z}. \tag{37}$$

Secondo l'equazione 36, la potenza fornita al circuito dal generatore di f.e.m. è massima quando $\cos\phi = 1$, il che accade quando il circuito è puramente resistivo e non contiene condensatori né induttori, oppure in risonanza quando $X_L = X_C$, di modo che $Z = R$. In tal caso la potenza media è

$$\overline{P} = \mathcal{E}_{qm} i_{qm} \qquad \text{(carico resistivo)} \tag{38}$$

Se il carico è fortemente induttivo, come spesso accade nel caso di motori, compressori e simili dispositivi, la potenza fornita al carico può essere massimizzata aumentando la reattanza capacitiva $(1/\omega C)^2$ del circuito. Le compagnie elettriche spesso mettono dei condensatori lungo il loro sistema di trasmissione a questo scopo.

* In Italia la tensione di rete è di 220 V. [N.d.T.]

Esempio 5 Si consideri ancora il circuito di figura 2, usando gli stessi parametri usati nell'esempio 3, e cioè, $R = 160\ \Omega$, $C = 15\ \mu\text{F}$, $L = 230\text{ mH}$, $\nu = 60\text{ Hz}$ e $\mathcal{E}_m = 36\text{ V}$. Determinare (*a*) la

f.e.m. qm, (*b*) la corrente qm, (*c*) il fattore di potenza e (*d*) la potenza media dissipata nel resistore.

Soluzione (*a*)

$$\mathcal{E}_{qm} = \mathcal{E}_m/\sqrt{2} = 36\ \text{V}/\sqrt{2} = 25.5\ \text{V}.$$

(*b*) Nell'esempio 3 si era trovato $i_m = 0.196$ A. Si ha perciò

$$i_{qm} = i_m/\sqrt{2} = (0.196\ \text{A})/\sqrt{2} = 0.139\ \text{A}.$$

(*c*) Nell'esempio 3 si era trovato che lo sfasamento ϕ era di $-29.4°$. Quindi

$$\text{fattore di potenza} = \cos(-29.4°) = 0.871.$$

(*d*) Dall'equazione 32 si ricava

$$\overline{P} = i_{qm}^2 R = (0.139\ \text{A})^2(160\ \Omega) = 3.1\ \text{W}.$$

In alternativa, l'equazione 36 dà

$$\overline{P} = \mathcal{E}_{qm} i_{qm} \cos\phi = (25.5\ \text{V})(0.139\ \text{A})(0.871) = 3.1\ \text{W},$$

in perfetto accordo. Cioè la potenza media dissipata nel resistore. è uguale alla potenza media fornita dal generatore di f.e.m.. In effetti l'energia viene trasferita dalla f.e.m. al carico resistivo, dove viene dissipata. Si noti che, per ottenere l'accordo di questi risultati al livello di due cifre significative, si sono impiegate tre cifre significative per le correnti e le tensioni. A parte errori numerici di arrotondamento, le equazioni 32 e 36 danno risultati identici.

39-5 IL TRASFORMATORE *(Facoltativo)*

Nei circuiti DC la dissipazione di potenza in un carico resistivo è data dall'equazione 21 del capitolo 32 ($P = iV$). Per una data necessità di potenza, si può scegliere tra una corrente i relativamente grande e una differenza di potenziale V relativamente piccola o viceversa, purché il loro prodotto rimanga costante. Nello stesso modo, per i circuiti AC puramente resistivi (per cui il fattore di potenza, il $\cos\phi$ dell'equazione 36, è uguale a 1), la potenza media dissipata è data dall'equazione 38 ($= i_{qm}\mathcal{E}_{qm}$) e si ha la stessa possibilità di scelta riguardo ai valori di i_{qm} e di $\mathcal{E}_{qm}$.

Nei sistemi di distribuzione di energia elettrica è auspicabile, sia per ragioni di sicurezza che per motivi di efficienza dell'apparato, avere tensioni relativamente basse sia all'estremità della linea dove viene generata l'energia (la centrale elettrica) che all'estremità della linea dove l'energia viene utilizzata (la casa o la fabbrica). Ad esempio, nessuno vuole che un tostapane elettrico o il trenino elettrico dei bambini funzionino con una tensione di, diciamo, 10 kV.

D'altra parte, nelle linee con cui l'energia elettrica viene portata dalla centrale al consumatore, sarebbe desiderabile la corrente *più bassa* possibile (e quindi la tensione *più alta* possibile) in modo da minimizzare la dissipazione di energia i^2R lungo la linea. Valori di $\mathcal{E}_{qm}$ dell'ordine di 350 kV sono tipici. In questo modo vi è un disaccordo fondamentale tra le necessità di una trasmissione efficiente da una parte e una generazione ed un uso sicuro dall'altra.

Per superare questo problema, c'è bisogno di un dispositivo che possa, come richiesto da considerazioni di progetto, abbassare (o alzare) la differenza di potenziale in un circuito, mantenendo costante il prodotto $i_{qm}\mathcal{E}_{qm}$. Un dispositivo di questo tipo è il trasformatore di corrente alternata. Dato che il suo funzionamento è basato sulla legge dell'induzione di Faraday, il trasformatore non ha un analogo di equivalente semplicità tra i circuiti in corrente continua, il che è il motivo per cui i sistemi di distribuzione di energia elettrica in corrente continua, fortemente auspicati da Edison, oggi sono stati sostituiti quasi completamente da sistemi in corrente alternata, propugnati da Tesla ed altri.*

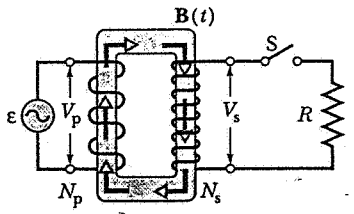


Figura 7 Un trasformatore ideale: sono illustrate le due bobine avvolte attorno ad un nucleo di ferro.

In figura 7 sono rappresentati due avvolgimenti avvolti intorno ad un nucleo di ferro. L'avvolgimento *primario*, di N_p spire, è collegato ad un generatore di corrente alternata la cui f.e.m. $\mathcal{E}$ è data da $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t$. L'avvolgimento secondario, di N_s spire, è un circuito aperto finché, come per ora si suppone, l'interruttore S è aperto. In questo modo nell'avvolgimento secondario non scorre alcuna corrente. Supponiamo inoltre di poter trascurare tutti gli elementi dissipativi, come la resistenza dell'avvolgimento primario e del secondario. In effetti, trasformatori ad alte prestazioni, ben progettati, possono avere perdite dell'ordine dell'1%, sicché l'assunzione precedente di trasformatore ideale non è irragionevole.

Per le condizioni precedenti l'avvolgimento primario è una induttanza pura, come in figura 4*a*. La corrente primaria (molto piccola), detta corrente di magnetizzazione $i_{mag}(t)$, è sfasata di 90° in ritardo sulla differenza di potenziale primaria; il fattore di potenza ($= \cos\phi$ nell'equazione 36) è nullo, sicché il generatore non fornisce alcuna potenza al trasformatore.

Tuttavia, la piccola corrente primaria alternata $i_{mag}(t)$ induce un flusso magnetico alternato $\Phi_B(t)$ nel nucleo di ferro e supponiamo che tutto questo flusso sia concatenato con le spire dell'avvolgimento secondario. (Cioè supponiamo che tutte le linee di forza del campo magnetico seguano dei percorsi chiusi all'interno del nucleo di ferro e che quindi nessuna esca nella zona circostante.) Dalla legge di induzione di Faraday si ricava che la f.e.m. per spira $\mathcal{E}_T$ (uguale a $-d\Phi_B/dt$) è uguale per l'avvolgimento primario e per il secondario, poiché il flusso primario e il flusso secondario sono uguali. In termini di quantità qm, si può scrivere

$$\left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{primario}} = \left(\frac{d\Phi_B}{dt}\right)_{\text{secondario}} \tag{39}$$

ossia

$$(\mathcal{E}_T)_{\text{qm, primario}} = (\mathcal{E}_T)_{\text{qm, secondario}} \tag{40}$$

In ogni avvolgimento, la f.e.m. per spira è uguale alla differenza di potenziale totale divisa per il numero di spire dell'avvolgimen-

* Si veda: John W. Coltman. *The transformer*. «Scientific American», gennaio 1988, pag. 86.

ISBN 88-408-0777-2

to; l'equazione 40 si può scrivere allora

$$\frac{V_p}{N_p} = \frac{V_s}{N_s}. \tag{41}$$

Dove V_p e V_s si riferiscono a quantità qm. Ricavando V_s, si ottiene

$$V_s = V_p(N_s/N_p). \tag{42}$$

Se $N_s > N_p$ (nel qual caso $V_s > V_p$), si parla di un *trasformatore in elevazione*; se $N_s < N_p$, si parla di *trasformatore in riduzione*.

In tutto ciò che si è detto sopra, si è supposto che l'avvolgimento secondario fosse aperto di modo che non vi fosse trasmissione di potenza attraverso il trasformatore. Tuttavia se ora, impiegando l'interruttore S di figura 7, si chiude il circuito secondario si ottiene una situazione più pratica in cui l'avvolgimento secondario è collegato ad un carico resistivo R. Nel caso più generale, il carico contiene anche elementi induttivi e capacitivi, ma per il momento limitiamoci a considerare il caso particolare di un carico puramente resistivo.

Quando si chiude il circuito avvengono molte cose. (1) Nel circuito secondario appare una corrente i_s con la corrispondente dissipazione di potenza $i_s^2R(= V_s^2/R)$ nel carico resistivo. (2) La corrente alternata secondaria induce il suo flusso magnetico nel nucleo di ferro e tale flusso induce (per la legge di Faraday e per la legge di Lenz) una f.e.m. nel circuito primario. (3) V_p, tuttavia, non può cambiare a causa di questa f.e.m. perché deve sempre essere uguale alla f.e.m. fornita dal generatore; chiudere il circuito secondario non può cambiare questo fatto. (4) Per assicurare che questo fatto si verifichi, nel circuito primario deve comparire una nuova corrente i_p di modulo e fase tali da cancellare esattamente la f.e.m. generata nel circuito primario da i_s.

Piuttosto che descrivere il suddetto processo, che è piuttosto complicato, nei dettagli, si può sfruttare una visione globale ispirata dal principio di conservazione dell'energia. Per un trasformatore ideale con un carico resistivo questo ci dice che

$$i_pV_p = i_sV_s. \tag{43}$$

Poiché l'equazione 42 vale sia che l'interruttore S sia chiuso, sia che esso sia aperto, si ha

$$i_s = i_p(N_p/N_s) \tag{44}$$

come regola di trasformazione delle correnti.

Infine, sapendo che $i_s = V_s/R$, si possono usare le equazioni 42 e 44 per ottenere

$$i_p = \frac{V_p}{(N_p/N_s)^2R}, \tag{45}$$

che dice che, dal punto di vista del circuito primario, la resistenza equivalente del carico non è R bensì

$$R_{eq} = (N_p/N_s)^2R. \tag{46}$$

L'equazione 46 suggerisce un ulteriore impiego del trasformatore. Si è visto che, per avere il massimo trasferimento di energia da un generatore di f.e.m. ad un carico resistivo, la resistenza del generatore e la resistenza del carico devono essere uguali. (Vedi problema 14 del capitolo 33.) La stessa relazione vale per i circuiti AC, tranne che deve essere *l'impedenza* (invece della resistenza) del generatore ad essere adattata a quella del carico. Capita spesso – come quando si vuole collegare una cassa acustica ad un amplificatore – che questa condizione sia ben lungi dall'essere realizzata, essendo l'amplificatore ad alta impedenza e la cassa a bassa impedenza. Si possono adattare le impedenze dei due dispositivi collegandoli attraverso un trasformatore con un rapporto di avvolgimenti adeguato. ■

Esempio 6 Un trasformatore situato nella regione di utilizzo della rete funziona con $V_p = 8.5$ kV al primario e fornisce energia elettrica a un certo numero di edifici circostanti con $V_s = 120$ V, entrambe le quantità intese come valori qm. La potenza consumata negli edifici in questione in un certo momento sia di 78 kW. Si supponga che il trasformatore sia ideale, che il carico sia resistivo e che il fattore di potenza sia unitario. (*a*) Qual è il rapporto del numero di spire N_p/N_s di questo trasformatore in riduzione? (*b*) Quali sono le correnti qm negli avvolgimenti primario e secondario del trasformatore? (*c*) Qual è il carico resistivo equivalente nel circuito secondario? (*d*) Qual è il carico resistivo equivalente nel circuito primario?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 42 si ottiene

$$\frac{N_p}{N_s} = \frac{V_p}{V_s} = \frac{8.5 \times 10^3 \text{ V}}{120 \text{ V}} = 70.8.$$

(*b*) Dall'equazione 38

$$i_p = \frac{\overline{P}}{V_p} = \frac{78 \times 10^3 \text{ W}}{8.5 \times 10^3 \text{ V}} = 9.18 \text{ A}$$

e

$$i_s = \frac{\overline{P}}{V_s} = \frac{78 \times 10^3 \text{ W}}{120 \text{ V}} = 650 \text{ A}.$$

(*c*) Nel circuito secondario

$$R_s = \frac{V_s}{i_s} = \frac{120 \text{ V}}{650 \text{ A}} = 0.186 \ \Omega.$$

(*d*) In questo caso si ha

$$R_p = \frac{V_p}{i_p} = \frac{8.5 \times 10^3 \text{ V}}{9.18 \text{ A}} = 930 \ \Omega.$$

Si può verificare questo usando l'equazione 46, che si scrive

$$R_p = (N_p/N_s)^2R_s = (70.8)^2(0.185 \ \Omega) = 930 \ \Omega.$$

DOMANDE

1. Nella relazione $\omega = 2\pi\nu$, usando il SI si misura ω in radianti al secondo e ν in hertz o cicli al secondo. Il radiante è una misura angolare. Che relazione c'è tra gli angoli e le correnti alternate?
2. Se l'uscita di un generatore AC come quello di figura 1 viene collegata ad un circuito *RLC* come quello di figura 2, chi fornisce l'energia dissipata nel resistore?
3. Perché i sistemi di distribuzione di energia sarebbero meno efficienti senza correnti alternate?
4. Nel circuito di figura 2, perché si può tranquillamente dire

che (*a*) la corrente alternata dell'equazione 2 ha la stessa frequenza angolare ω della f.e.m. alternata dell'equazione 1, e (*b*) lo sfasamento ϕ dell'equazione 2 non varia nel tempo? Cosa accadrebbe se una di queste affermazioni (vere) fosse falsa?

5. Che differenza c'è tra un fasore ed un vettore? È noto, ad esempio, che le f.e.m., le differenze di potenziale e le correnti non sono grandezze vettoriali. Come si possono giustificare quindi costruzioni come quella di figura 6?
6. Nel caso del circuito puramente resistivo di figura 3, il valore massimo i_m della corrente alternata varia con la frequenza angolare della f.e.m. applicata?
7. Qualcuna delle discussioni del paragrafo 39-3 non sarebbe più valida se i fasori ruotassero in senso orario anziché in senso antiorario come assunto?
8. Si supponga che in un circuito *RLC* in serie, la frequenza della tensione applicata venga variata in modo continuo da un valore molto basso ad un valore molto elevato. Come cambia la costante di fase?
9. È possibile che la *resistenza* di una apparecchiatura che funzioni in corrente alternata dipenda dalla frequenza?
10. Dall'analisi di un circuito *RLC* si può determinare il comportamento di un circuito *RL* (privo di condensatore) ponendo $C = \infty$, mentre per determinare il comportamento di un circuito *RC* (privo di induttore) si pone $L = 0$. Spiegare la differenza.
11. Durante la seconda Guerra Mondiale, in un grande laboratorio, un generatore di corrente alternata fu costruito a circa un miglio di distanza dal laboratorio a cui forniva energia. Un tecnico aumentò la frequenza del generatore per compensare quella che lui chiamò «una perdita di frequenza lungo la linea di trasmissione» che collegava il generatore all'edificio del laboratorio. Si commenti questa procedura.
12. Mentre la velocità delle pale di un ventilatore a rotazione aumenta partendo da zero, si possono osservare una serie di figure stazionarie quando le pale sono illuminate dalla luce di una sorgente a corrente alternata. Si ottiene un effetto più pronunciato usando un tubo fluorescente o una lampada a neon piuttosto che una lampada a filamento di tungsteno. Si spieghino queste osservazioni.
13. Ipotizziamo che in figura 2 si ponga $\omega \to 0$. L'equazione 19 tende ad un valore prevedibile? Qual è questo valore? Discutere i risultati.
14. Si spieghi con parole proprie cosa significa che una corrente alternata «è sfasata in anticipo» o «è sfasata in ritardo» su una f.e.m. alternata.
15. Se, come si è stabilito nel paragrafo 39-3, un circuito dato è «più induttivo che capacitivo,» cioè $XL > XC$, (*a*) si può concludere che, per una fissata frequenza angolare, *L* è relativamente «grande» e *C* è relativamente «piccolo,» oppure che sia *L* che *C* sono entrambi relativamente «grandi»? (*b*) Per valori fissati di *L* e di *C* si può asserire che ω è relativamente «grande» oppure che è relativamente «piccola»?
16. Come si può determinare, in un circuito *RLC*, se la frequenza del circuito è maggiore o minore della frequenza di risonanza?
17. Criticare questa affermazione: « Se $X_L > X_C$, si deve avere $L > 1/C$.»
18. Come, nel caso sia necessario, bisognerebbe modificare le leggi di Kirchoff (delle maglie e dei nodi) per circuiti in corrente continua per poterle applicare a circuiti in corrente alternata?
19. La legge delle maglie e quella dei nodi possono essere applicate a circuiti AC con molte maglie come ai circuiti DC a molte maglie?
20. Nell'esempio 5 quale sarebbe l'effetto su se venisse aumentato (*a*) *R*, (*b*) *C*, e (*c*) *L*? (*d*) Come cambierebbe in questi tre casi il ϕ dell'equazione 36?
21. Se nel circuito di figura 2 si ponesse $R = 0$ si potrebbe non avere dissipazione di potenza nel circuito. Sono presenti, in ogni caso, una f.e.m. alternata e una corrente alternata. Si discuta l'andamento del flusso di energia in queste condizioni.
22. Esiste una *potenza* qm di un circuito a corrente alternata?
23. Si ritiene che gli ingegneri di imprese commerciali erogatrici di potenza preferiscano avere un fattore di potenza basso, un fattore di potenza alto, oppure che non abbiano preferenze? Tra quali valori può variare il fattore di potenza? Cosa determina il fattore di potenza; esso è caratteristico del generatore, della linea di trasmissione, del circuito al quale è collegata la linea di trasmissione, o a qualche combinazione di questi?
24. La potenza istantanea fornita da una sorgente di corrente alternata può essere negativa? Il fattore di potenza può essere negativo? In caso positivo si spieghi il significato di questi valori negativi.
25. Si consideri un circuito *RLC* in serie in cui la f.e.m., per una particolare frequenza di funzionamento, è sfasata in anticipo sulla corrente. Si supponga di abbassare leggermente la frequenza. L'impedenza totale del circuito aumenterà, diminuirà, o rimarrà costante?
26. Nell'ipotesi di conoscere il fattore di potenza (= $\cos\phi$ nell'equazione 36) per un determinato circuito *RLC*, si può prevedere se la f.e.m. alternata applicata è sfasata in anticipo o in ritardo sulla corrente? Se sì, come? Se no, perché no?
27. Qual è l'intervallo di valori possibili per l'angolo di fase ϕ nell'equazione 2? E per il fattore di potenza nell'equazione 36?
28. Per quale motivo è utile usare la notazione qm per correnti e tensioni alternate?
29. Si vogliono ridurre le spese per l'energia elettrica. Si spera di avere un fattore di potenza grande, uno piccolo, oppure questo parametro non è rilevante? Nel caso che lo sia, si può fare qualcosa per intervenire su di esso? Discutere.
30. Nell'equazione 36, ϕ è l'angolo di fase tra $\mathcal{E}(t)$ e $i(t)$ oppure tra $\mathcal{E}_{qm}$ e i_{qm}? Spiegare.
31. Si supponga che il trasformatore per un campanello sia progettato per avere un ingresso al primario di 120 V qm e un'uscita al secondario di 6 V qm. Cosa succederebbe se le connessioni primaria e secondaria fossero accidentalmente scambiate durante l'istallazione? Per accorgersi dell'errore sarebbe necessario attendere che qualcuno suoni il campanello? Se ne discuta.
32. Vi è stato dato un trasformatore chiuso in una scatola di legno, i suoi terminali primari e secondari si trovano sulle due facce opposte della scatola. Come si può determinare il rapporto tra il numero di spire del primario e del secondario senza aprire la scatola?
33. Si consideri il circuito di figura 7, e il secondario sia un circuito aperto. Qual è la differenza di fase tra (*a*) la f.e.m. applicata e la corrente primaria, (*b*) la f.e.m. applicata e il campo magnetico nel nucleo del trasformatore, e (*c*) la corrente primaria e il campo magnetico nel nucleo del trasformatore?
34. Elencare alcune applicazioni di un trasformatore in elevazione. Elencarne alcune per un trasformatore in riduzione.
35. Cosa determina quale avvolgimento di un trasformatore è primario e quale secondario? Un trasformatore può avere un

ISBN 88-408-0777-2

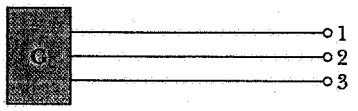
singolo avvolgimento primario e due secondari? Un trasformatore può avere un singolo avvolgimento secondario e due primari?

36. L' Europa usa correnti alternate da 240 V e 50 Hz, invece di quelle tipiche degli Stati Uniti da 120 V e 60 Hz. Un americano in vacanza in Europa, vorrebbe usare le proprie apparecchiature, quali la sveglia, il rasoio elettrico o l'asciugacapelli. Si può semplicemente, all'uopo, usare un trasformatore in elevazione 2:1? Spiegare perché questo passo, apparentemente semplice, può essere o non essere sufficiente.

PROBLEMI

Paragrafo 39-2 Tre elementi separati

1. L'equazione 1 descriva la f.e.m. efficace all'uscita di una comune presa della corrente elettrica AC a 60 Hz. A quale frequenza angolare ω corrisponde? Come riesce la compagnia erogatrice a stabilire questa frequenza?
2. Un induttore da 45.2 mH presenta una reattanza di 1.28 kΩ. (*a*) Determinare la frequenza. (*b*) Quale capacità deve avere un condensatore che presenti la stessa reattanza a tale frequenza? (*c*) Se venisse raddoppiata la frequenza quali valori avrebbero le reattanze dell'induttore e del condensatore?
3. (*a*) A quale frequenza angolare un induttore da 6.23 mH e un condensatore da 11.4 μF avrebbero la stessa reattanza? (*b*) Quale sarebbe il valore di tale reattanza? (*c*) Si dimostri che questa frequenza sarebbe uguale alla frequenza naturale delle oscillazioni *LC*.
4. L'uscita di un generatore AC sia descritta da $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \text{sen}\omega t$ con $\mathcal{E}_m = 25.0$ V e $\omega = 377$ rad/s. Essa sia collegata ad un induttore da 12.7 H. (*a*) Qual è il massimo valore della corrente? (*b*) Quando il valore della corrente è massimo qual è la f.e.m. del generatore? (*c*) Quando la f.e.m. del generatore è −13.8 V e sta aumentando in modulo qual è la corrente? (*d*) Nelle condizioni del punto (*c*) il generatore sta fornendo energia o sta prendendo energia dal resto del circuito?
5. Il generatore AC del problema 4 sia collegato ad un condensatore da 4.15 μF. (*a*) Qual è il massimo valore della corrente? (*b*) Quando il valore della corrente è massimo qual è la f.e.m. del generatore? (*c*) Quando la f.e.m. del generatore è −13.8 V e sta aumentando in modulo qual è la corrente? (*d*) Nelle condizioni del punto (*c*) il generatore sta fornendo energia o sta prendendo energia dal resto del circuito?
6. L'uscita di un generatore AC sia $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \text{sen}(\omega t - \pi/4)$ con $\mathcal{E}_m = 31.4$ V e $\omega = 350$ rad/s. La corrente sia data da $i(t) = i_m \text{sen}(\omega t - 3\pi/4)$ dove $i_m = 622$ mA. (*a*) A quale tempo, dopo $t = 0$, il generatore di f.e.m. raggiunge il suo massimo per la prima volta? (*b*) A quale tempo, dopo $t = 0$, la corrente raggiunge il suo massimo per la prima volta? (*c*) Il circuito contiene un solo altro elemento oltre al generatore. Si tratta di un condensatore, di induttore o di un resistore? Si giustifichi la risposta. (*d*) Qual è il valore di capacità, induttanza o resistenza dell'elemento del punto (*c*)?
7. Ripetere il problema precedente considerando $i(t) = i_m \text{sen}(\omega t + \pi/4)$.
8. Un generatore trifase G produce energia elettrica che viene trasmessa attraverso tre cavi, come mostrato in figura 8. I potenziali di questi cavi (riferiti ad un potenziale di riferimento comune) sono $V_1 = V_m \text{sen}\omega t$, $V_2 = V_m \text{sen}(\omega t - 120°)$ e $V_3 = V_m \text{sen}(\omega t - 240°)$. Alcuni apparecchi industriali (per esempio i motori) hanno tre terminali e sono stati progettati per essere collegati a questi tre cavi. Per usare dispositivi più convenzionali a due terminali (per esempio una lampadina elettrica) ci si può connettere a due qualsiasi dei tre cavi. Mostrare che la differenza di potenziale tra *due cavi qualsiasi* (*a*) oscilla sinusoidalmente con frequenza angolare ω e (*b*) ha ampiezza $V_m\sqrt{3}$.



Linea di trasmissione trifase

Figura 8 Problema 8.

Paragrafo 39-3 Il circuito RLC *in serie*

9. Disegnare (approssimativamente) le figure 6*b* e 6*c* per i casi $X_C > X_L$ e $X_C = X_L$.
10. (*a*) Ricalcolare tutte le quantità richieste nell'esempio 3 ponendo $C = 70$ μF. Tutti gli altri parametri dell'esempio rimangono invariati. (*b*) Disegnare in scala un diagramma delle fasi come quello di figura 6*c* per questa nuova situazione e confrontare i due diagrammi.
11. Si considerino le curve di risonanza della figura 14, capitolo 38. (*a*) Si dimostri che per frequenze maggiori di quella di risonanza nel circuito predomina la parte induttiva mentre per frequenze minori di quella di risonanza nel circuito predomina la parte capacitiva. (*b*) Come si comporta il circuito in condizioni di risonanza? (*c*) Disegnare un diagramma delle fasi come quello di figura 6*c* per situazioni di frequenza maggiore, minore e uguale a quella di risonanza.
12. Dimostrare matematicamente che la seguente costruzione geometrica fornisce correttamente sia l'impedenza Z che la costante di fase ϕ. Riferendosi alla figura 9, (1) tracciare un vettore nella direzione $+y$ di modulo X_C, (2) tracciare un vettore nella direzione $-y$ di modulo X_L, (3) tracciare un vettore di modulo R nella direzione $+x$. Il modulo del risultante di questi vettori è Z e l'angolo (misurato sotto l'asse $+x$) di questo risultante è ϕ.
13. In un circuito *RLC* l'ampiezza della differenza di potenziale ai capi di un induttore può essere maggiore dell'ampiezza del-

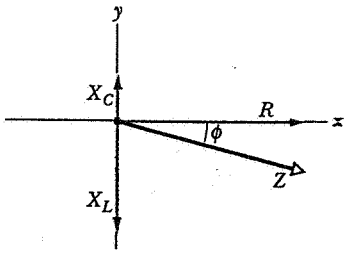


Figura 9 Problema 12.

la f.e.m. del generatore? Si consideri un circuito con $\mathcal{E}_m = 10$ V, $R = 9.6\ \Omega$, $L = 1.2$ H, e $C = 1.3\ \mu$F. Determinare la differenza di potenziale ai capi dell'induttore in condizioni di risonanza.

14. Si consideri una bobina di induttanza di 88.3 mH e resistenza incognita e un condensatore da 937 nF collegati in serie con un oscillatore di frequenza 941 Hz. Lo sfasamento ϕ tra la f.e.m. applicata e la corrente sia 75.0°. Si determini la resistenza della bobina.
15. Quando la f.e.m. del generatore dell'esempio 3 è massima, qual è la differenza di potenziale ai capi (*a*) del generatore, (*b*) del resistore, (*c*) del condensatore, e (*d*) dell'induttore? (*e*) Sommandole con gli opportuni segni si verifichi che la legge delle maglie viene soddisfatta.
16. Si supponga che una combinazione di resistore-induttore-condensatore, R_1, L_1, C_1 abbia la stessa frequenza di risonanza di una diversa combinazione , R_2, L_2, C_2. Si colleghino in serie le due combinazioni. Si dimostri che anche questo circuito ha la stessa frequenza di risonanza dei due singoli circuiti separati.
17. Si supponga che in un determinato circuito *RLC* la f.e.m. massima fornita dal generatore sia di 125 V e che la corrente massima sia di 3.20 A. Se la corrente è sfasata di 56.3° in anticipo sulla f.e.m. del generatore, (*a*) quanto vale l'impedenza e (*b*) quanto vale la resistenza del circuito? (*c*) Il circuito è prevalentemente induttivo o capacitivo?
18. Si usi l'equazione 18 per ottenere espressioni per $\text{sen}\phi$ e $\cos\phi$ in funzione di R, X_L, X_C. Si sostituiscano quindi queste espressioni nell'equazione 16 per ottenere l'equazione 17.
19. Si consideri un circuito *RLC* che operi a 60 Hz in cui la differenza di potenziale massima ai capi dell'induttore è doppia di quella ai capi del resistore mentre la differenza di potenziale massima attraverso il condensatore è uguale a quella attraverso il resistore. (*a*) Di quanto è sfasata in ritardo la corrente sul generatore di f.e.m.? (*b*) Se la f.e.m. massima del generatore fosse di 34.4 V quale dovrebbe essere la resistenza del circuito per ottenere un corrente massima di 320 mA?
20. Si consideri un circuito *RLC* con $R = 5.12\ \Omega$, $L = 988$ mH, $C = 19.3\ \mu$F e $\mathcal{E}_m = 31.3$ V. (*a*) A quale frequenza angolare ω la corrente avrà il suo valore massimo, come nella curva di risonanza della figura 14, capitolo 38? (*b*) Quanto vale questo massimo? (*c*) A quali due frequenze angolari ω_1 e ω_2 l'ampiezza della corrente sarà la metà del suo valore massimo? (*d*) Si determini l'ampiezza relativa $[= (\omega_1 - \omega_2)/\omega]$ della curva di risonanza.
21. (*a*) Si dimostri che l'ampiezza relativa della curva di risonanza della figura 14, capitolo 38 è data con buona approssimazione da

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\sqrt{3}R}{\omega L},$$

in cui ω è la frequenza di risonanza e $\Delta\omega$ è la larghezza del picco di risonanza a $i = 1/2\ i_m$. Si noti che (vedi problema 71, capitolo 38) questa espressione può essere scritta nella forma $\sqrt{3}/Q$ che mostra chiaramente che un circuito ad «alto Q» ha un picco di risonanza stretto, cioè un piccolo valore di $\Delta\omega/\omega$. (*b*) Si usi questo risultato per verificare la parte (*d*) del problema 20.

Paragrafo 39-4 Potenza nei circuiti in corrente alternata

22. Si dimostri che $\overline{\text{sen}^2\omega t} = \frac{1}{2}$ e $\overline{\text{sen}\omega t \cos\omega t} = 0$, dove le medie sono prese su uno o più cicli completi.
23. Un motore elettrico collegato ad una presa di corrente da 120 V a 60 Hz, compie lavoro meccanico alla velocità di 0.10 hp (1 hp = 746 W). Se esso assorbe una corrente quadratica media di 650 mA, qual è la resistenza, in termini di trasferimento di potenza? È la stessa resistenza presentata dalle sue bobine, misurata con un ohmmetro col motore staccato dalla presa di corrente?
24. Si dimostri che la potenza media fornita a un circuito *RLC* può essere descritta da

$$\overline{P} = \mathcal{E}_{qm}^2 R/Z^2.$$

Si dimostri inoltre che questa espressione fornisce risultati soddisfacenti per un circuito puramente resistivo, per un circuito *RLC* in risonanza, per un circuito puramente capacitivo e per un circuito puramente induttivo.

25. Si calcoli la potenza media dissipata nell'esempio 3 assumendo (*a*) che l'induttore sia rimosso dal circuito e (*b*) che sia rimosso il condensatore.
26. Un condizionatore d'aria collegato ad una linea di corrente AC da 120 V qm è equivalente a una resistenza di 12.2 Ω in serie con una reattanza induttiva di 2.30 Ω. (*a*) Calcolare l'impedenza del condizionatore d'aria. (*b*) Determinare la potenza media fornita all'apparecchio. (*c*) Qual è il valore della corrente qm?
27. Si supponga che un voltmetro AC ad alta impedenza venga collegato in successione ai capi dell'induttore, del condensatore e del resistore di un circuito in serie che abbia un generatore di corrente alternata da 100 V (qm) e che il voltmetro registri lo stesso valore in ognuno dei tre casi. A quanto ammonta tale valore?
28. Un agricoltore mette in servizio una pompa per l'acqua da 3.8 A qm. La linea di connessione con il trasformatore è lunga 1.2 km e è costituita da due fili di rame del diametro di 1.8 mm. La temperatura è di 5.4°C. Quanta potenza viene dissipata nella trasmissione lungo la linea?
29. Con riferimento alla figura 10 si dimostri che la potenza dissipata nel resistore R è massima quando $R = r$, dove r è la resistenza interna del generatore AC. Nel testo abbiamo sottinteso, fino a questo punto, che $r = 0$. Si confronti col caso di corrente continua.
30. Si consideri il circuito di una antenna FM mostrato in figura 11, con $L = 8.22\ \mu$H, $C = 0.270$ pF e $R = 74.7\ \Omega$. Il segnale radio induce nell'antenna una f.e.m. alternata con $\mathcal{E}_{qm} = 9.13\ \mu$V. Trovare (*a*) la frequenza dell'onda incidente sulla quale l'antenna è sintonizzata, (*b*) la corrente qm nell'antenna, e (*c*) la differenza di potenziale qm ai capi del condensatore.

ISBN 88-408-0777-2

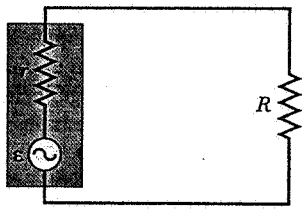


Figura 10 Problemi 29 e 43.

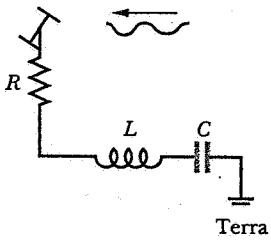


Figura 11 Problema 30.

31. La figura 12 mostra un generatore AC collegato a una «scatola nera» attraverso una coppia di terminali. La scatola contenga un circuito *RLC*, eventualmente con molte maglie di cui non si conoscono gli elementi e la loro combinazione. Misure fuori dalla scatola indicano che

$$\mathcal{E}(t) = (75\ \text{V})\ \text{sen}\omega t$$

e

$$i(t) = (1.2\ \text{A})\ \text{sen}(\omega t + 42°).$$

(*a*) Quanto vale il fattore di potenza? (*b*) La corrente è sfasata in anticipo o in ritardo sulla f.e.m.? (*c*) La natura del circuito nella scatola è maggiormente induttiva o capacitiva? (*d*) Il circuito nella scatola è in risonanza? (*e*) Nella scatola ci deve essere un condensatore? Un induttore? Un resistore? (*f*) Quale potenza media viene fornita alla scatola dal generatore? (*g*) Per quale motivo non è necessario conoscere la frequenza angolare ω per rispondere a queste domande?

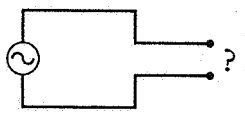


Figura 12 Problema 31.

32. Si consideri un circuito *RLC* come quello mostrato in figura 2, con $R = 5.0\ \Omega$, $L = 60$ mH, $\nu = 60$ Hz e $\mathcal{E}_m = 30$ V. Per quali valori della capacità la potenza media dissipata nel resistore sarà (*a*) massima e (*b*) minima? (*c*) Quali sono questi valori massimo e minimo? (*d*) Quali sono i corrispondenti sfasamenti? (*e*) Quali sono i fattori di potenza corrispondenti?

33. Nella figura 13, sia $R = 15.0\ \Omega$, $L = 25.3$ mH e $C = 4.72\ \mu F$. Si supponga che il generatore fornisca una tensione sinusoidale da 75.0 V (qm) con una frequenza $\nu = 550$ Hz. (*a*) Si calcoli l'ampiezza della corrente qm. (*b*) Si determinino le tensioni qm *Vab, Vbc, Vcd, Vbd, Vad.* (*c*) Quale potenza media è dissipata da ciascuno dei tre elementi del circuito?

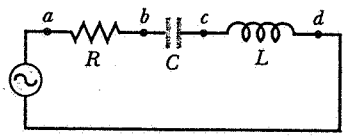


Figura 13 Problema 33.

34. In un circuito *RLC, sia* $R = 16.0\ \Omega$, $C = 31.2$ E6F, $L = 9.20$ mH e $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m\ \text{sen}\omega t$ con $\mathcal{E}_m = 45.0$ V e $\omega = 3000$ rad/s. Determinare all'istante $t = 0.442$ ms (*a*) la potenza fornita dal generatore, (*b*) la parte relativa al condensatore, (c) la parte relativa all'induttore, e (*d*) la potenza dissipata nel resistore. (*e*) Qual è il significato del segno negativo per ciascuna delle parti (*a*), (*b*), e (*c*)? (*f*) Si dimostri che la somma dei risultati dei punti (*b*),(*c*), e (*d*) è uguale al risultato del punto (*a*).

35. Si dimostri, per un circuito *RLC*, che integrando su un singolo ciclo di periodo *T* (*a*) l'energia immagazzinata nel condensatore non cambia; (*b*) l'energia immagazzinata nell'induttore non cambia; (*c*) il generatore fornisce energia $(\frac{1}{2}T)\mathcal{E}_m i_m \cos\phi$; e (d) il resistore dissipa energia $(\frac{1}{2}T)R^2 i_m$. (*e*) Si dimostri che i valori trovati nelle parti (*c*), e (*d*) sono uguali.

36. Un tipico oscuratore graduale usato per affievolire le luci del palcoscenico in teatro consiste in un induttore variabile *L* collegato in serie con la lampadina elettrica B come mostrato in figura 14. Il generatore fornisce una potenza di 120 V (qm) a 60.0 Hz; sulla lampadina compaia la scritta «120 V, 1000 W.» (*a*) Quale valore massimo di induttanza *L* è necessario per far variare di un fattore cinque la potenza nella lampadina? Si assuma che la resistenza nella lampada sia indipendente dalla temperatura. (*b*) Si potrebbe usare un resistore variabile invece di un induttore? In caso affermativo, quale resistenza massima sarebbe necessaria? Perché non si impiega questo metodo?

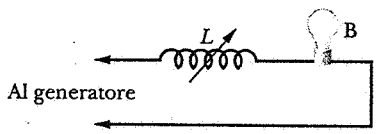


Figura 14 Problema 36.

37. Il generatore AC della figura 15 fornisce 170 V (di picco) a 60 Hz. Con l'interruttore aperto, come nel diagramma, la

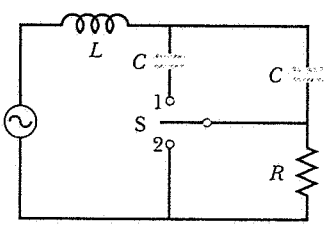


Figura 15 Problema 37.

corrente risultante è sfasata di 20° in anticipo sul generatore di f.e.m.. Con l'interruttore nella posizione 1 la corrente è sfasata di 10° in ritardo sul generatore di f.e.m.. Quando l'interruttore è nella posizione 2 la corrente massima è 2.82 A. Determinare i valori di R, L, e C.

Paragrafo 39-5 Il trasformatore

38. Un generatore fornisce 150 V all'avvolgimento primario, composto da 65 spire, di un trasformatore. Se l'avvolgimento secondario è composto da 780 spire, qual è la tensione ai capi del secondario?

39. Si consideri un trasformatore con 500 spire al primario e 10 spire al secondario. (*a*) Se V_p per l'avvolgimento primario è 120 V (qm), quanto vale V_s per quello secondario, supponendo aperto il circuito? (*b*) Se l'avvolgimento secondario fosse collegato con un carico resistivo di 15 Ω, quali sarebbero le correnti nell'avvolgimento primario e secondario?

40. La figura 16 mostra un «autotrasformatore». Esso consiste di un'unica bobina (con un nucleo di ferro) provvista di tre «prese». Tra le prese T_1 e T_2 ci sono 200 spire mentre tra la T_2 e la T_3 ci sono 800 spire. Qualsiasi coppia di prese può essere considerata come «terminale primario» e altresì qualsiasi coppia di prese può essere considerata come «terminale secondario». Elencare tutti i rapporti di trasformazione possibili.

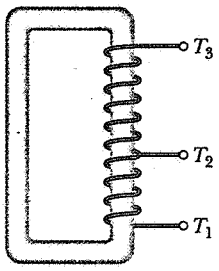


Figura 16 Problema 40.

41. Si mostri che in figura 7 $i_p(t)$ nel circuito primario rimane invariata se una resistenza R' [$= R(N_p/N_s)^2$] viene applicata direttamente ai capi del generatore, eliminando il trasformatore ed il circuito secondario. Cioè

$$i_p(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R'}$$

In questo senso ci si accorge che il trasformatore non solo «trasforma» differenze di potenziale e correnti, ma anche resistenze. Nel caso più generale, in cui il carico secondario della figura 7 contiene tanto elementi capacitivi ed induttivi quanto elementi resistivi, si dice che un trasformatore trasforma *impedenze*.

42. Un ingegnere elettronico progetta un trasformatore ideale per azionare una macchina a raggi x con una tensione di picco di 74 kV e una corrente qm di 270 mA. Il trasformatore viene alimentato da un generatore che fornisce 220 V qm. Si era però trascurata la resistenza dei fili che collegano il trasformatore all'alimentatore. Dopo l'istallazione si constatata che la resistenza dei fili dell'alimentatore è 0.62 Ω. Di quanto bisogna aumentare la tensione dell'alimentatore per mantenere gli stessi parametri operativi al trasformatore?

43. In figura 10, la scatola rettangolare sulla sinistra rappresenti l'uscita (ad alta impedenza) di un amplificatore audio, con r = 1000 Ω. Sia R = 10 Ω la resistenza di una bobina (a bassa impedenza) di un altoparlante. Si è già detto che un trasformatore può essere usato per «trasformare» resistenze, facendo in modo che esse si comportino elettricamente come se fossero più grandi o più piccole di quanto esse sono in realtà. Disegnare schematicamente la bobina primaria e quella secondaria del trasformatore che deve essere introdotto tra l'«amplificatore» e l'«altoparlante» in figura 10 per «adattare le impedenze». Quale deve essere il rapporto tra il loro numero di spire?

Progetti al calcolatore

44. Un resistore R è collegato in serie con un induttore L e una f.e.m. $\mathcal{E}$. La corrente i obbedisce alla $L\, di/dt = -Ri + \mathcal{E}$, un'equazione che ha la stessa forma matematica della seconda legge di Newton per il moto in una dimensione. In questo caso la corrente prende il posto della velocità, $-Ri + \mathcal{E}$ sostituisce la forza mentre L sostituisce la massa. Usare un programma per calcolatore analogo a quello descritto nel paragrafo 6-6 per determinare la corrente in funzione del tempo. La carica netta che attraversa qualsiasi punto del circuito sostituisce la coordinata nella seconda legge di Newton. Si può dimenticare nel programma la carica netta, oppure conservarla prendendo il suo valore iniziale eguale a 0. (*a*) Prendere $R = 100\ \Omega$, $L = 3.0 \times 10^{-2}$ H, ed $\mathcal{E} = 15\ \text{sen}(1.0 \times 10^4 t)$ con $\mathcal{E}$ in volt e t in secondi. La corrente sia nulla a $t = 0$. Si usi il programma per tracciare il grafico di $i(t)$ da $t = 0$ a $t = 2.5 \times 10^{-3}$ s. Si usi $\Delta t = 2.0 \times 10^{-6}$ s per l'intervallo d'integrazione. Si notino i transienti: in un primo momento la corrente non è sinusoidale ma alla fine lo diviene. Sulla parte di grafico in cui la corrente è quasi sinusoidale si segni quando la f.e.m. ha i suoi valori massimi. La corrente è sfasata in anticipo o in ritardo sulla f.e.m.? Di quale intervallo temporale? La differenza di fase in radianti è 2π volte questo intervallo di tempo diviso per il periodo. Se ne calcoli il valore. (*b*) Si ripeta l'esercizio per un'induttanza da 0.10 H. In che modo il cambiamento nell'induttanza influenza l'ampiezza della corrente? E come influenza l'intervallo di tempo tra un massimo della f.e.m. e il più vicino massimo della corrente?

45. Si considerino un resistore R, un induttore L e un condensatore C collegati in serie con una f.e.m. $\mathcal{E}$. La carica q sul condensatore obbedisca alla $L\, d^2q/dt^2 = \mathcal{E} - Ri - q/C$. Questa equazione è matematicamente identica alla seconda legge di Newton per il moto in una dimensione. In questo caso q sostituisce la coordinata, i ($= dq/dt$) prende il posto della velocità, L sostituisce la massa, mentre $\mathcal{E} - Ri - q/C$ sostituisce la forza. Usare un programma per calcolatore analogo a quello descritto nel capitolo 6 per determinare la carica e la corrente in funzione del tempo. (*a*) Prendere $R = 100\ \Omega$, $L = 3.0 \times 10^{-2}$ H, C = 3.0×10^{-6} F ed $\mathcal{E} = 15\ \text{sen}(1.0 \times 10^{-4} t)$ con $\mathcal{E}$ in volt e t in secondi. Considerare la corrente e la carica nulle a $t = 0$. Si usi il programma per tracciare il grafico di q e di i da $t = 0$ a $t = 2.5 \times 10^{-3}$ s. Si usi $\Delta t = 2 \times 10^{-6}$ s per l'intervallo d'integrazione. Notare che i transienti finiscono dopo qualche tempo e la corrente e la carica diventano sinusoidali. Sul grafico si misuri l'ampiezza della corrente, si usi poi la $\mathcal{E}_m = i_m Z$ per calcolare l'impedenza Z del circuito. Si confrontino i risultati con $Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$. La corrente è sfasata in anticipo o in ritardo sulla f.e.m.? Qual è l'intervallo di

ISBN 88-408-0777-2

tempo tra un massimo della f.e.m. e il più vicino massimo della corrente? (*b*) Si ripetano i calcoli e si risponda alle domande per una f.e.m. data da 15 sen$(2.0 \times 10^4 t)$. (*c*) Si ripetano i calcoli e si risponda alle domande per una f.e.m. data da 15 sen$\omega_0 t$, dove ω_0 è la frequenza naturale del circuito. Si estenda l'intervallo del grafico così da tracciare circa 3 cicli.

46. Si consideri il circuito descritto nel problema precedente e si usino i valori dati nella parte (*a*) del problema. (*a*) Si modifichi il programma per il calcolatore per calcolare e mostrare la potenza fornita dal generatore di f.e.m. ($\mathcal{E}i$), la velocità di dissipazione di energia nel resistore (i^2R), la velocità di immagazzinamento di energia nel campo elettrico del condensatore (iq/C), la velocità di immagazzinamento di energia nel campo magnetico dell'induttore ($Li\,di/dt = \mathcal{E}i - i^2R - iq/C$). Si usi il programma per tracciare il grafico di queste quantità in funzione del tempo da $t = 0$ a $t = 2.5 \times 10^{-3}$ s. (*b*) Si identifichino gli intervalli di tempo durante i quali il generatore di f.e.m. sta fornendo energia al circuito e gli intervalli durante i quali sta sottraendo energia al circuito. Determinare se, dopo che i transienti sono svaniti, il generatore di f.e.m. fornisce più energia di quanta ne sottrae, rimuove più energia di quanta ne fornisce, oppure fornisce e sottrae la stessa quantità di energia. (*c*) Si identifichino gli intervalli di tempo durante i quali l'energia viene trasferita dal circuito al campo magnetico dell'induttore e quelli durante i quali l'energia viene trasferita dal campo magnetico dell'induttore al circuito. Prima che i transienti svaniscano c'è un flusso netto di energia entrante o uscente nell'induttore? Cosa succede dopo che i transienti sono svaniti? (*d*) Si identifichino gli intervalli di tempo durante i quali l'energia viene trasferita dal circuito al campo elettrico del condensatore. Prima che i transienti svaniscano c'è un flusso netto di energia entrante o uscente nel condensatore? Cosa succede dopo che i transienti sono svaniti?

Capitolo 40

LE EQUAZIONI DI MAXWELL

In meccanica classica ed in termodinamica, si è cercato di determinare l'insieme di equazioni o di leggi più piccolo e compatto che ci permettesse di analizzare il comportamento dei sistemi fisici. In meccanica classica la base è costituita dalle tre leggi del moto di Newton. In termodinamica, i tre principi (numerati zero, uno e due) sono in grado di spiegare una grande quantità di fenomeni. Le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, che sono state trattate una ad una nei capitoli precedenti, sono note con il nome di equazioni di Maxwell, *in onore del fisico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879) che per primo le inquadrò in una teoria simmetrica e completa dell'elettromagnetismo. In questo capitolo si ricapitolano le equazioni di Maxwell e si mostra che motivi di simmetria portano ad aggiungere un termine importante che manca in una delle equazioni viste in precedenza. Nel prossimo capitolo si vedrà come queste equazioni, complete del termine mancante, siano fondamentali nella comprensione delle onde elettromagnetiche e di conseguenza come esse portino ad inquadrare nell'ambito dell'elettromagnetismo l'ottica, le trasmissioni televisive e radiofoniche, i forni a microonde ed i treni a levitazione magnetica.*

40-1 LE EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

In questo capitolo si cercherà di identificare un insieme di equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo. Per raggiungere questo obiettivo saranno necessari diversi passi. Dapprima, si mostrano in tabella 1 un insieme *di prova* di equazioni. Queste equazioni sono state ricavate nei 13 capitoli precedenti. Si tenga presente che ciascuna di queste equazioni esprime un diverso insieme di risultati sperimentali. Dopo aver studiato questa tabella si concluderà, impiegando argomentazioni basate sulla simmetria, che queste equazioni non sono ancora complete e che ci potrebbe essere (ed in effetti c'è) un termine mancante in una di esse. Questo termine mancante risulterà una correzione tutt'altro che insignificante: esso completa la descrizione dell'elettromagnetismo e fa rientrare l'ottica come parte integrante dell'elettromagnetismo. In particolare esso permette di predire che la velocità c della luce (e di tutte le onde elettromagnetiche) nel vuoto è legata a quantità puramente elettriche e magnetiche da

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \qquad (1)$$

Questa relazione, insieme ad altre predizioni delle equazioni dell'elettromagnetismo, è stata in seguito verificata sperimentalmente per la luce, le onde radio ed altre onde elettromagnetiche.

TABELLA 1 INSIEME DI PROVA[a] DI EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

Simbolo	*Nome*	*Equazione*	*Paragrafo di riferimento*
I	Legge di Gauss per l'elettricità	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$	29-3
II	Legge di Gauss per il magnetismo	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	37-1
III	Legge dell'induzione di Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$	36-2
IV	Legge di Ampère	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i$	35-5

[a] Il termine «di prova» suggerisce, come si vedrà in seguito, che l'equazione IV non sia ancora completa e richieda un termine addizionale: vedi tabella 2.

ISBN 88-408-0777-2

Si è visto come il principio di simmetria permei la fisica e come esso abbia spesso portato a nuove interpretazioni o a nuove scoperte. Ad esempio, se il corpo A attrae il corpo B con una forza di modulo F, ci si aspetta per simmetria che il corpo B attragga il corpo A con una forza di ugual modulo. Si trova che ciò che ci si aspetta è corretto. Per fare un altro esempio, la simmetria della teoria che descrive il normale elettrone carico negativamente suggerisce che l'elettrone dovrebbe avere una controparte carica positivamente; la scoperta, in seguito, del positrone dimostra che questa predizione è corretta.

Si esamini ora la tabella 1 dal punto di vista della simmetria. Si ignorerà qualsiasi mancanza di simmetria che abbia origine da ϵ_0 e da μ_0; queste costanti derivano dalla scelta del sistema di unità di misura e non hanno alcun ruolo nelle considerazioni di simmetria. (Vi sono, infatti, dei sistemi di unità di misura in cui $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.)

Tenendo presente tutto ciò, si vede che i primi membri delle equazioni che compaiono in tabella 1 sono, a due a due, completamente simmetrici. I primi membri delle equazioni I e II sono, rispettivamente, integrali di superficie di **E** e di **B** su superfici chiuse. I primi membri delle equazioni III e IV sono, rispettivamente, integrali di linea di **E** e di **B** su curve chiuse.

I secondi membri di tali equazioni, al contrario, *non* sono simmetrici. Vi sono due tipi di asimmetria:

1. La prima asimmetria, che non è quella di cui si occupa questo capitolo, riguarda il fatto che apparentemente non vi sono centri isolati di carica magnetica (i monopoli magnetici; vedi paragrafo 37-1) analoghi ai centri isolati di carica elettrica (gli elettroni, ad esempio). In questo modo si giustifica la carica q al secondo membro dell'equazione I e lo 0 al secondo membro dell'equazione II. Per lo stesso motivo al secondo membro dell'equazione IV compare il termine i ($= dq/dt$), che rappresenta la corrente di cariche elettriche, mentre non vi è un termine analogo che rappresenti una corrente di cariche magnetiche al secondo membro dell'equazione III. Il desiderio di simmetria in queste equazioni ha portato a predire l'esistenza dei monopoli magnetici. Nonostante che i monopoli siano stati a lungo cercati, non vi è ad oggi una conferma della loro esistenza. Più avanti in questo capitolo si discuterà come simmetrizzare le equazioni di Maxwell nel caso che l'esistenza dei monopoli venisse dimostrata.

2. La seconda asimmetria, che è più significativa per le discussioni di questo capitolo, è altrettanto importante. Al secondo membro dell'equazione III compare il termine $-d\Phi_B/dt$. Questa equazione, nota anche come legge dell'induzione di Faraday, può essere interpretata in modo non rigoroso dicendo:

se si varia un campo magnetico ($-d\Phi_B/dt$), *si produce un campo elettrico* ($\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$).

Si è appreso ciò nel paragrafo 36-1 in cui si è mostrato che se si spinge una sbarra magnetica attraverso una spira conduttrice chiusa si induce, effettivamente, un campo elettrico, e quindi una corrente, nella spira.

Per il principio di simmetria si è autorizzati a sospettare che debba valere la relazione analoga, cioè:

se si varia un campo elettrico ($-d\Phi_E/dt$), *si produce un campo magnetico* ($\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$).

Questa supposizione, che si discuterà più approfonditamente nel prossimo paragrafo, fornisce il termine mancante nell'equazione IV e risulta soddisfare gli esperimenti.

40-2 CAMPI MAGNETICI INDOTTI E CORRENTE DI SPOSTAMENTO

In questo paragrafo si discuterà in dettaglio l'evidenza sperimentale delle supposizioni fatte nel paragrafo precedente: precisamente, un campo elettrico variabile induce un campo magnetico. Sebbene si sia guidati principalmente da considerazioni di simmetria, si trova anche una evidenza sperimentale diretta.

In figura 1*a* è rappresentato un condensatore a piatti piani circolari paralleli. Una corrente i entra nel piatto di sinistra (su cui si suppone che sia depositata una carica positiva), mentre una uguale corrente i esce dal piatto di destra. Una spira amperiana circonda il filo in figura 1*a* e forma il contorno di una superficie attraversata dal filo. La corrente nel filo genera un campo magnetico; nel paragrafo 35-5 si è visto che il campo magnetico e la corrente sono legati dalla legge di Ampère,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i. \qquad (2)$$

Cioè l'integrale di linea del campo magnetico lungo la spira è proporzionale alla corrente totale che attraversa la superficie delimitata dalla spira.

In figura 1*b*, si è mantenuta la stessa spira ma si è deformata la superficie da essa delimitata in modo che essa racchiuda tutto il piatto di sinistra del condensatore. Poiché la spira (e neanche il campo magnetico)

ISBN 88-408-0777-2

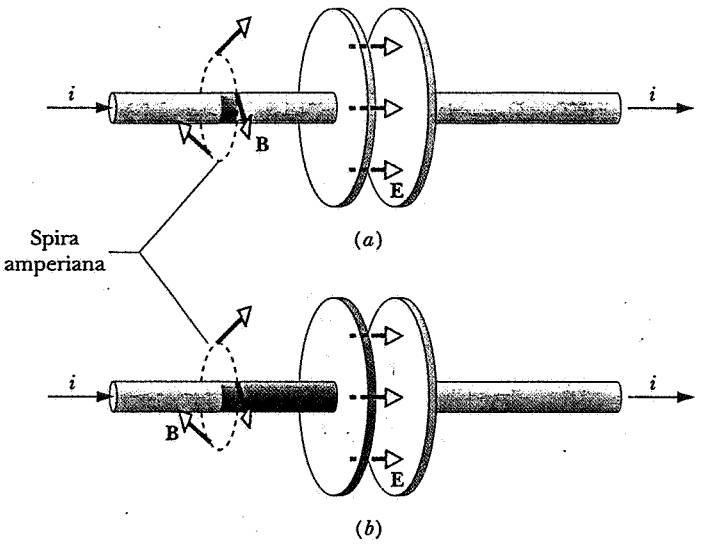


Figura 1 (*a*) Una spira amperiana delimita una superficie attraverso cui passa un filo percorso da corrente. (*b*) La stessa spira amperiana delimita una superficie che passa attraverso i piatti del condensatore. Attraverso la superficie non passa alcuna corrente di conduzione.

non è cambiata, il primo membro della legge di Ampère assume ancora il medesimo valore, ma il secondo membro dà un risultato molto diverso, zero per la precisione, perché nessun filo conduttore attraversa la superficie. Sembra che si abbia una violazione della legge di Ampère!

Per recuperare la legge di Ampère in modo che descriva correttamente la situazione di figura 1*b*, ci si basa sulla conclusione ottenuta nel paragrafo precedente con argomentazioni di simmetria: *un campo magnetico viene generato da un campo elettrico variabile*. Si consideri la situazione di figura 1 più in dettaglio. All'accumularsi della carica sul condensatore, il campo elettrico al suo interno varia con una certa velocità dE/dt. Le linee di forza del campo elettrico attraversano la superficie di figura 1*b*; si tiene conto del fatto che le linee di forza attraversano la superficie in termini del flusso del campo elettrico Φ_E ed un campo elettrico variabile deve dare un flusso del campo elettrico corrispondentemente variabile, $d\Phi_E/dt$.

Per descrivere quantitativamente questo nuovo effetto, si è guidati dalla analogia con la legge dell'induzione di Faraday,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \tag{3}$$

che dice che un campo magnetico variabile (secondo membro) produce un campo elettrico (primo membro). Per la controparte simmetrica si scrive*

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{4}$$

* Il sistema di unità di misura impiegato richiede che si inseriscano le costanti ϵ_0 e μ_0 nell'equazione 4. In certi altri sistemi di unità di misura esse non apparirebbero.

L'equazione 4 dice che un campo magnetico (il primo membro) può essere generato da un campo elettrico variabile (il secondo membro).

La situazione illustrata in figura 1*a* è descritta dalla legge di Ampère nella forma dell'equazione 2, mentre la situazione di figura 1*b* è descritta dall'equazione 4. Nel primo caso è la corrente che attraversa la superficie ad essere tenuta in conto nel calcolo del campo magnetico, mentre nel secondo caso è la variazione del flusso del campo elettrico attraverso la superficie che permette il calcolo del campo magnetico. In generale, bisogna tenere conto di *entrambi* i modi di generare il campo magnetico: (*a*) per mezzo di una corrente e (*b*) per mezzo di un campo elettrico variabile, sicché bisogna modificare la legge di Ampère nel seguente modo:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{5}$$

Questa importante generalizzazione della legge di Am-

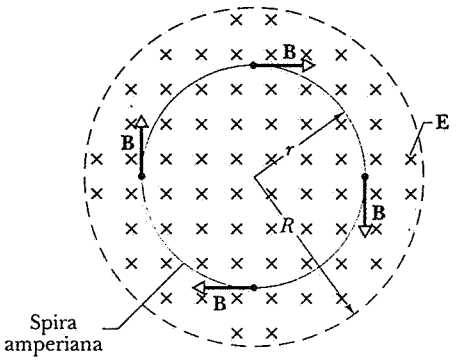


Figura 2 Il campo magnetico indotto **B**, mostrato in quattro punti, generato dal campo elettrico variabile **E** all'interno del condensatore di figura 1. Il campo elettrico sta aumentando in modulo. Confrontare con la figura 12 del capitolo 36.

père è dovuta a Maxwell. Come si è già sottolineato in precedenza, si tratta di un contributo fondamentale e vitale.

Nel capitolo 35 si era assunto che non fossero presenti campi elettrici variabili in modo che il termine $d\Phi_E/dt$ nell'equazione 5 fosse nullo. Nella discussione della figura 1*b* si era assunto che non vi fossero correnti di conduzione nella regione in cui era presente il campo elettrico. A causa di ciò il termine in i nell'equazione 5, in quel caso, era nullo. Si vede ora come ciascuna di queste due situazioni fosse un caso particolare. Se vi fossero dei fili sottili che collegano le due armature in figura 1*b* vi sarebbe un contributo da entrambi i termini dell'equazione 5.*

Un altro modo di interpretare l'equazione 5 è suggerito dalla figura 2, che mostra il campo elettrico nella regione tra le due armature del condensatore di figura 1. Si sceglie quindi come spira amperiana un cammino circolare in questa regione. Al secondo membro dell'equazione 5, il termine in i è nullo, ma il termine in $d\Phi_E/dt$ è diverso da zero. Infatti, se le linee di forza del campo elettrico sono come mostrato in figura, il flusso attraverso la superficie è positivo e cresce (il che corrisponde ad un campo elettrico crescente) man mano che la carica positiva si accumula sul piatto di sinistra del condensatore di figura 1. L'integrale di linea di **B** lungo la spira deve a sua volta essere positivo, e la direzione di **B** deve essere quella mostrata in figura 2.

La figura 2 suggerisce un bell'esempio della simmetria della natura. Un campo *magnetico* variabile induce un campo *elettrico* (legge di Faraday); si è visto ora che un campo *elettrico* variabile induce un campo *magnetico*. Si confrontino ora con attenzione la figura 2 e la figura 12 del capitolo 36, che illustra come un campo magnetico variabile generi un campo elettrico. In ciascun caso il flusso appropriato Φ_B o Φ_E è *crescente*. Tuttavia gli esperimenti hanno mostrato che le linee di forza di **E** in figura 12 del capitolo 36 sono dirette in senso *antiorario* mentre le linee di forza di B in figura 2 sono dirette in senso *orario*. Questa differenza richiede che il segno meno che compare al secondo membro dell'equazione 3 sia omesso nell'equazione 4.

Esempio 1 Un condensatore ad armature circolari parallele viene caricato come in figura 2. (*a*) Ricavare un'espressione per il campo magnetico indotto in funzione della coordinata radiale r nella regione compresa tra i piatti. Si consideri sia il caso $r \leq R$ che $r \geq R$. (*b*) Determinare B per $r = R$, $dE/dt = 10^{12}$ V/m · s e $R = 5.0$ cm.

Soluzione (*a*) Dall'equazione 4,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

per $r \leq R$, si può scrivere

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi r^2)] = \mu_0\epsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}.$$

Ricavando B si ottiene

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 r \frac{dE}{dt} \quad (r \leq R).$$

Per $r \geq R$, dall'equazione 4 si ricava

$$(B)(2\pi r) = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi R^2)] = \mu_0\epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt},$$

ovvero

$$B = \frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \quad (r \geq R).$$

(*b*) Per $r = R$ le due espressioni di B si riducono alla stessa espressione, cioè

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 R \frac{dE}{dt} \\ &= \tfrac{1}{2}(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}) \\ &\quad \times (5.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})(10^{12}\ \mathrm{V/m \cdot s}) \\ &= 2.8 \times 10^{-7}\ \mathrm{T} = 280\ \mathrm{nT}. \end{aligned}$$

Ciò mostra che i campi magnetici indotti in questo esempio sono così piccoli che sono difficili da misurare con apparecchiature semplici, in netto contrasto con i campi *elettrici* indotti (legge di Faraday), che possono essere rilevati facilmente. Questa differenza sperimentale è in parte dovuta al fatto che le f.e.m. indotte possono essere facilmente moltiplicate impiegando una bobina composta da molte spire. Non esiste una tecnica altrettanto semplice nel caso dei campi magnetici. In esperimenti in cui sono coinvolte oscillazioni a frequenze molto elevate, dE/dt può essere molto grande, producendo come risultato dei campi magnetici indotti sensibilmente più grandi.

La corrente di spostamento

L'equazione 5 mostra che il termine $\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ ha le dimensioni di una corrente. Anche se non vi è coinvolto un moto di cariche, vi sono dei vantaggi nel chiamare

---

* Vi è un terzo modo di generare un campo magnetico: l'uso di materiali magnetici. Per esempio, l'equazione 5 non tiene conto del campo totale in un solenoide avvolto attorno ad un nucleo di ferro. Dell'effetto del materiale magnetico si può tenere conto aggiungendo un terzo termine all'equazione 5, che si può scrivere

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i_M,$$

dove i_M è la corrente di magnetizzazione, che può essere considerata come la corrente addizionale che deve scorrere nel solenoide vuoto per produrre lo stesso campo magnetico che la corrente i produce quando il materiale magnetico è presente. Si supporrà che non siano presenti materiali magnetici in modo che questo termine non debba essere presente.

ISBN 88-408-0777-2

questo termine *corrente di spostamento*.* La corrente di spostamento i_d è definita da

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \qquad (6)$$

In questo modo si può dire che un campo magnetico è generato o da una corrente di conduzione i o da una corrente di spostamento i_d e si può riscrivere l'equazione 5 nel seguente modo

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(i + i_d). \qquad (7)$$

Il concetto di corrente di spostamento permette di mantenere il concetto che *la corrente è continua*, un principio stabilito nel caso delle correnti di conduzione continue nel paragrafo 32-1. In figura 1*b*, ad esempio, una corrente di conduzione i entra nell'armatura positiva del condensatore ed esce dall'armatura negativa. La corrente *di conduzione non* è continua attraverso la regione del condensatore perché non vi è trasporto di cariche attraverso tale regione. Tuttavia la corrente di spostamento i_d risulta essere esattamente uguale ad i, mantenendo così il concetto di continuità della corrente.

Calcoliamo ora la corrente di spostamento i_d nel condensatore di figura 1*b*. La carica q sulle armature è legata al campo elettrico E nel condensatore dall'equazione 3 del capitolo 31,

$$q = \epsilon_0 EA.$$

Derivando si ottiene

$$i = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d(EA)}{dt}.$$

La quantità EA è il flusso del campo elettrico Φ_E, sicché

$$i = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Confrontando questa espressione con l'equazione 6 si vede che

$$i = i_d.$$

Così la corrente di spostamento nel condensatore è uguale alla corrente di conduzione nei fili, il che dimostra che la corrente è continua.

Quando il condensatore è completamente carico, la corrente di conduzione diventa nulla (non scorre corrente nei fili). Il campo elettrico tra le armature diventa costante; così $d\Phi_E/dt = 0$, e quindi anche la corrente di spostamento diventa nulla.

La corrente di spostamento i_d, data dall'equazione 6, è espressa da un verso e da un modulo. Il verso della corrente di conduzione i è quello del vettore densità di corrente di conduzione $\mathbf{j}$. Analogamente, il verso della corrente di spostamento i_d è quello del vettore densità di corrente di spostamento $\mathbf{j}_d$, che, come si deduce dall'equazione 6, è proprio ϵ_0 $(d\mathbf{E}/dt)$. La regola della mano destra applicata a $\mathbf{j}_d$ fornisce il verso del campo magnetico associato, proprio come accade nel caso della densità di corrente di conduzione $\mathbf{j}$.

Esempio 2 Qual è la corrente di spostamento nella situazione dell'esempio 1?

Soluzione Dall'equazione 6, la definizione di corrente di spostamento, si ottiene

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}[(E)(\pi R^2)] = \epsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$
$$= (8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})(\pi)(5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m})^2(10^{12}\ \mathrm{V/m \cdot s})$$
$$= 0.070\ \mathrm{A} = 70\ \mathrm{mA}.$$

Questa è una corrente ragionevolmente grande, eppure si è stabilito nell'esempio 1 che essa produce un campo magnetico di soli 280 nT. Una corrente di 70 mA che scorresse in un filo sottile produrrebbe un campo magnetico alla superficie del filo facilmente rivelabile con l'ago di una bussola.

Questa differenza *non* è dovuta al fatto che una è una corrente di conduzione mentre l'altra è una corrente di spostamento. A parità di condizioni, entrambi i tipi di corrente sono ugualmente efficaci nella produzione di campi magnetici. La differenza è dovuta al fatto che la corrente di conduzione, in questo caso, è confinata in un filo sottile mentre la corrente di spostamento è distribuita su una superficie uguale alla superficie dei piatti del condensatore. In questo modo il condensatore si comporta come un «grosso filo» di raggio 5 cm, attraverso cui scorre una corrente (di spostamento) di 70 mA. Il suo massimo effetto magnetico, che si ha ai bordi del condensatore, è quindi molto minore di quello che si ha alla superficie di un filo sottile. (Vedi anche problema 12.)

40-3 LE EQUAZIONI DI MAXWELL

L'equazione 5 completa la presentazione delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, dette *equazioni di Maxwell*. Esse sono riassunte nella tabella 2, che sostituisce l'insieme «di prova» della tabella 1, con la differenza del termine «mancante» della corrente di spostamento che non compariva nell'equazione IV della tabella 1. In tabella 2 vengono elencati anche gli esperimenti cruciali che hanno portato a ciascuna delle

* Il termine «spostamento» fu introdotto per motivi storici. Esso non ha nulla a fare con l'uso precedente del termine spostamento per indicare la posizione di una particella.

TABELLA 2 EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO (EQUAZIONI DI MAXWELL)[a]

Numero	*Nome*	*Equazione*	*Descrive*	*Esperimento decisivo*	*Capitolo di riferimento*
I	Legge di Gauss per l'elettricità	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$	Carica e campo elettrico	(*a*) Cariche dello stesso segno si respingono e cariche di segno opposto si attraggono, in modo proporzionale all'inverso della loro distanza al quadrato. (*b*) Una carica su un conduttore isolato si dispone sulla superficie esterna.	29
II	Legge di Gauss per il magnetismo	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$	Il campo magnetico	Non è stato finora possibile verificare l'esistenza di un monopolo magnetico.	37
III	Legge dell'induzione di Faraday	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$	L'effetto elettrico di un campo magnetico variabile	Una sbarra magnetica spinta attraverso una spira chiusa, vi fa circolare una corrente.	36
IV	Legge di Ampère (generalizzata da Maxwell)	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$	L'effetto magnetico di una corrente o di un campo elettrico variabile	(*a*) Una corrente in un filo genera un campo magnetico in prossimità del filo. (*b*) La velocità della luce può essere calcolata da misure puramente elettromagnetiche.	35, 41

[a] Scritte nell'ipotesi che non vi siano materiali dielettrici o magnetici.

equazioni di Maxwell. Questo elenco di esperimenti rammenta che le equazioni di Maxwell non furono mere speculazioni teoriche, ma furono sviluppate per rendere conto di risultati sperimentali ottenuti in laboratorio.

Maxwell descrisse la sua teoria dell'elettromagnetismo in un voluminoso *Trattato sull'elettricità e sul magnetismo*, pubblicato nel 1873, solo sei anni prima della sua morte. Il *Trattato* non contiene le quattro equazioni nella forma in cui sono state presentate in questo libro. Fu il fisico inglese Oliver Heaviside (1850-1925), descritto come «un antico telegrafista disoccupato largamente autodidatta», che fece notare la simmetria tra **E** e **B** nelle equazioni e le espresse nella forma in cui sono note oggi.

Si considerino alcune caratteristiche di queste notevoli equazioni

1. *Simmetria.* L'inclusione del termine di corrente di spostamento nella equazione IV della tabella 2 rende certamente più simili le equazioni III e IV, aumentando di conseguenza il livello di simmetria dell'insieme di equazioni. Esse, tuttavia, non sono ancora completamente simmetriche. Un insieme completamente simmetrico si otterrebbe se fosse confermata l'esistenza di cariche magnetiche isolate (i monopoli). Se tali cariche magnetiche venissero scoperte, sarebbero possibili esperimenti su di esse. Per analogia con lo sviluppo visto in precedenza dell'elettromagnetismo, vengono subito in mente due esperimenti. Un esperimento, simile all'esperimento originale di Coulomb, sarebbe di misurare la forza tra i monopoli per determinare se essa obbedisca alla legge dell'inverso del quadrato. Se così fosse, l'equazione II si potrebbe scrivere $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \mu_0 q_m$. Questa forma della legge di Gauss per il magnetismo asserirebbe che il flusso del campo magnetico attraverso una qualunque superficie chiusa è proporzionale alla carica magnetica netta q_m racchiusa dalla superficie. In questo caso le equazioni I e II diverrebbero più simmetriche.

Il secondo esperimento, analogo a quello di Oersted, sarebbe di mostrare che una corrente di cariche magnetiche produce un campo elettrico. In tal caso si aggiungerebbe al secondo membro dell'equazione III un termine in $i_m = dq_m/dt$, la corrente di cariche magnetiche. Con questo termine addizionale le equazioni III e IV diverrebbero più simmetriche.

Ad oggi non vi è alcuna evidenza dell'esistenza dei monopoli magnetici, sicché gli esperimenti di cui sopra rimangono delle mere speculazioni e l'insieme di equazioni della tabella 2 è la miglior descrizione che si è in grado di dare delle proprietà dei campi elettrici e ma-

ISBN 88-408-0777-2

gnetici. Tuttavia, si noti con che facilità una scoperta fondamentale come il monopolo magnetico potrebbe essere incorporata nelle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo.

2. *Onde elettromagnetiche.* Le quattro equazioni della tabella 1 erano già note da lungo tempo all'epoca di Maxwell (egli nacque nell'anno in cui Faraday scoprì la legge dell'induzione). Prese insieme, esse non suggeriscono nuovi effetti oltre agli esperimenti originali che esse rappresentano. È solo con l'introduzione della corrente di spostamento che emerge una nuova fisica. Questa nuova fisica comprende la previsione dell'esistenza di onde elettromagnetiche, che furono scoperte sperimentalmente da Heinrich Hertz nel 1888, quindici anni dopo la pubblicazione del *Trattato* di Maxwell. Nel prossimo capitolo si vedrà come le onde elettromagnetiche, che possono trasportare energia e quantità di moto attraverso lo spazio vuoto per mezzo dei campi elettromagnetici, si possano dedurre dalle equazioni di Maxwell.

3. *Elettromagnetismo e relatività.* Si è già accennato nell'introduzione a questo capitolo al fatto che le equazioni di Maxwell sono per l'elettromagnetismo ciò che le equazioni di Newton sono per la meccanica. Vi è, però, una importante differenza. La teoria della relatività di Einstein venne presentata nel 1905, più di trent'anni dopo il lavoro di Maxwell e più di 200 dopo quello di Newton. La relatività rese necessarie variazioni fondamentali nelle leggi di Newton per moti con velocità prossime a quella della luce nel vuoto, mentre *non fu necessario alcun cambiamento nelle equazioni di Maxwell.* Le equazioni di Maxwell sono perfettamente coerenti con la teoria della relatività ristretta, ed infatti la teoria di Einstein nacque dai suoi ragionamenti sulle equazioni di Maxwell. Nel linguaggio dei fisici si dice che le equazioni di Maxwell sono invarianti per trasformazioni di Lorentz, mentre le equazioni di Newton non lo sono. (Per una discussione riguardo alle trasformazioni relativistiche dei campi **E** e **B**, vedi paragrafo 35-7.)

40-4 EQUAZIONI DI MAXWELL E CAVITÀ RISONANTI *(Facoltativo)*

Vi sono molte situazioni che riguardano i campi elettromagnetici che possono essere usate per verificare la validità delle equazioni di Maxwell. Rimandiamo al capitolo 41 qualsiasi discussione di verifiche che riguardino le onde elettromagnetiche. Qui si discuterà una cavità risonante, che può essere considerata come un oscillatore elettromagnetico a elementi distribuiti.

Per analogia, si consideri la cavità risonante *acustica* di figura 3. (Un tubo di un organo, chiuso ad entrambi gli estremi, è un esempio di un tale risonatore acustico.) In un oscillatore semplice, come ad esempio un blocco attaccato ad una molla o un circuito LC, si può «concentrare» l'energia immagazzinata in elementi separati: l'energia cinetica del blocco e l'energia potenziale della molla, o l'energia magnetica immagazzinata nell'induttore e l'energia elettrica immagazzinata nel condensatore. Nel risonatore acustico, questa divisione non è possibile. Ciascun elementino del gas all'interno del tubo ha sia energia potenziale che energia cinetica; un sistema di tale tipo viene detto a elementi *distribuiti.* La cavità risonante elettromagnetica, ha allo stesso modo elementi distribuiti.

Una caratteristica di un sistema distribuito è quella di avere un grande numero di modi risonanti (al contrario di un sistema ad elementi concentrati che ne ha pochi, spesso uno solo). In figura 3 è rappresentato il modo fondamentale della cavità acustica. In essa sono rappresentate una serie di «istantanee» delle variazioni della pressione e della velocità durante tutto un ciclo. Si noti che la pressione e la velocità variano in funzione del tempo e della posizione nel tubo. Vi è un ventre di pressione ad ogni estremità di un tubo chiuso. Dove la variazione di pressione è massima, la velocità è nulla (figure 3*a* e 3*e*), analogamente a quanto accade nel caso del sistema massa-molla quando si ha il massimo spostamento. Quando la pressione è uniforme, le velocità assumono il loro massimo valore (figure 3*c* e 3*g*).

Come mostrato dai grafici a barre che accompagnano ogni «istantanea» di figura 3, l'energia del risonatore oscilla tra l'energia cinetica del gas in movimento e l'energia potenziale associata alla compressione e rarefazione del gas. L'energia può essere tutta potenziale (figure 3*a* e 3*e*), tutta cinetica (figure 3*c* e 3*g*) o un misto delle due.

Per analogia con la cavità risonante acustica, si può considerare una cavità risonante elettromagnetica cilindrica. Invece di pressione e velocità, si descrive lo stato del risonatore per mezzo dei campi elettrici e magnetici al suo interno. Si immaginino le estremità della cavità come un condensatore a piatti paralleli. Per far iniziare le oscillazioni del campo, si collega un generatore di f.e.m. variabile sinusoidalmente nel tempo. Come accadeva nel caso di figura 2, il campo elettrico variabile genera un campo magnetico, sicché nella cavità vi sono campi elettrici e magnetici che dipendono dalla posizione e dal tempo.

Come il risonatore acustico, il risonatore elettromagnetico immagazzina energia in due forme; in questo caso esse sono l'energia associata al campo elettrico e quella associata al campo magnetico. Ogni elemento di volume della cavità contribuisce ad entrambi i tipi di energia, cosicché la cavità ha elementi distribuiti.

In figura 4 è rappresentata, analogamente alla figura 3, una serie di «istantanee» della cavità che illustra i campi elettrici e magnetici in vari istanti durante un periodo di oscillazione del modo fondamentale. Si noti l'oscillazione dell'energia tra le due forme, corrispondenti alle densità di energia elettrica e magnetica,

$$u_E = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad \text{e} \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Integrando sul volume della cavità, si può determinare l'energia totale in ciascuna delle due forme.

La figura 5 mostra una rappresentazione più dettagliata del campo elettrico e del campo magnetico in un certo momento dell'oscillazione, precisamente l'istante che corrisponde alla figura 4*d*. Si noti dalla figura 4*d* che il campo magnetico sta decrescendo mentre il campo elettrico sta crescendo. Si applichi la legge di

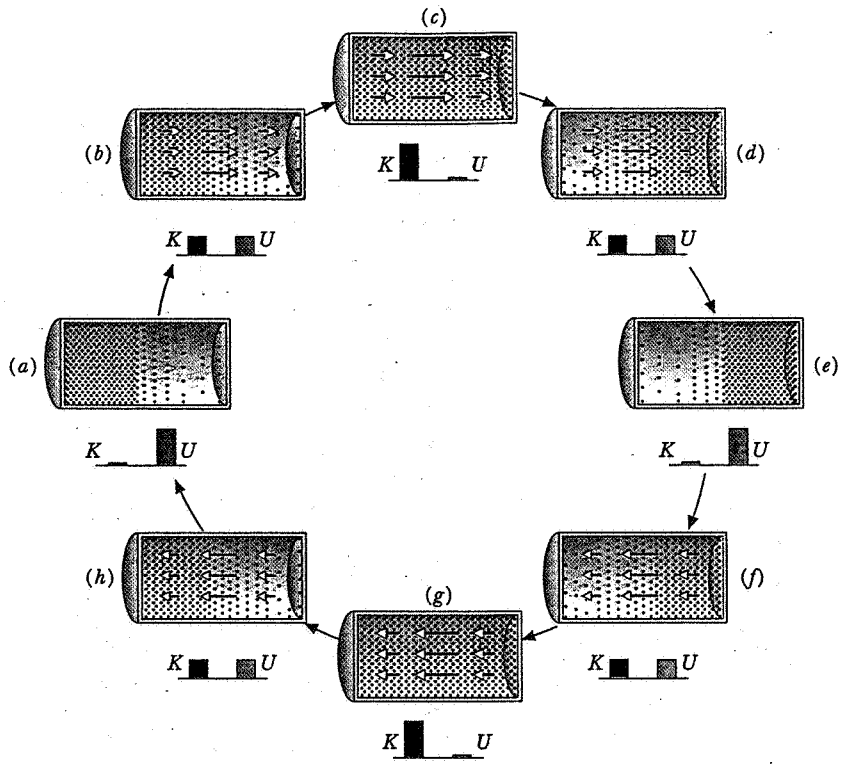


Figura 3 Otto stadi di un ciclo di oscillazione di una cavità risonante acustica cilindrica (come un tubo di organo chiuso). I grafici a barra sotto ogni figura mostrano l'energia cinetica K e l'energia potenziale U. Le frecce rappresentano le velocità degli elementi di volume del gas.

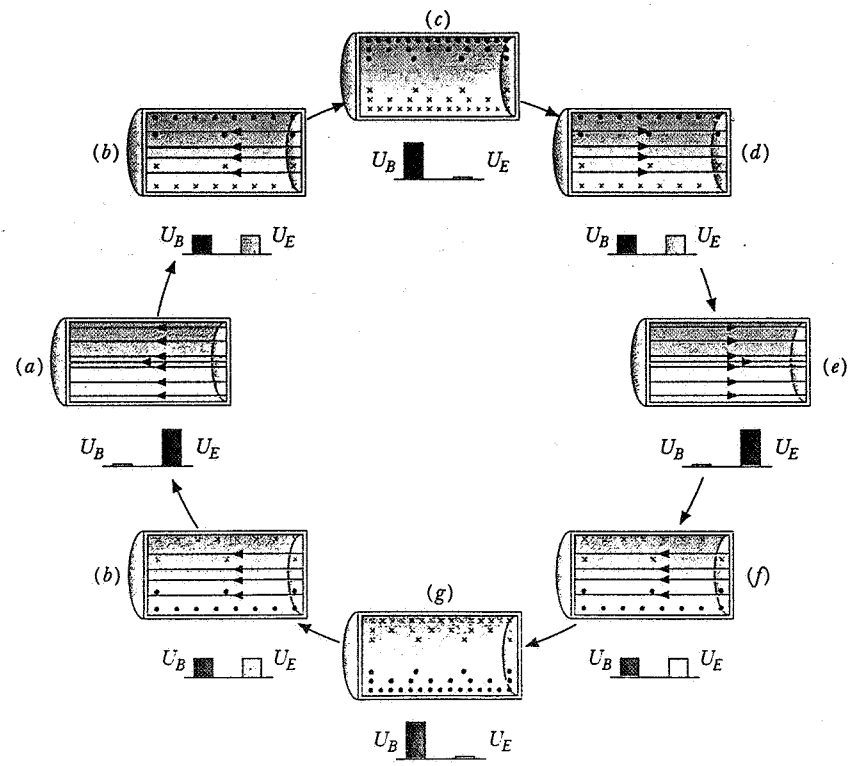


Figura 4 Otto stadi di un ciclo di oscillazione di una cavità risonante elettromagnetica cilindrica. I grafici a barra sotto ogni figura mostrano l'energia elettrica U_E e magnetica U_B immagazzinate. Le linee di forza di **B** sono cerchi concentrici con l'asse e le linee di forza di **E** sono parallele all'asse. Confrontare con la figura 3; entrambe le figure sono esempi di oscillazione che coinvolgono elementi distribuiti.

ISBN 88-408-0777-2

Faraday,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

al rettangolo tratteggiato di dimensioni h e $a - r$. Vi è un certo flusso magnetico Φ_B attraverso questa superficie rettangolare e tale flusso sta diminuendo al passare del tempo poiché **B** sta decrescendo.

Per una cavità fatta di materiale conduttore, si può assumere che **E** sia nullo nel tratto superiore del cammino di integrazione, che si trova nella parete della cavità. Inoltre, nei due tratti laterali **E** e $d\mathbf{s}$ sono ortogonali, sicché $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ su tale parte del cammino di integrazione. Il solo contributo non nullo all'integrale di linea lungo tale percorso di integrazione viene dal tratto inferiore, e quindi

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = hE(r),$$

in cui $E(r)$ è il valore di E ad una distanza r dall'asse della cavità. Utilizzando il risultato ottenuto per l'integrale di linea nella legge di Faraday, si ottiene

$$E(r) = -\frac{1}{h}\frac{d\Phi_B}{dt}. \tag{8}$$

L'equazione 8 mostra che $E(r)$ dipende dalla velocità con cui varia nel tempo Φ_B attraverso il cammino mostrato e che assume il suo valore massimo quando $d\Phi_B/dt$ è massimo. Ciò avviene quando **B** è nullo, cioè, quando **B** sta invertendo la sua direzione; si rammenti che la variazione di un seno o di un coseno è massima (il grafico ha la massima pendenza) nel punto in cui attraversa l'asse che separa valori positivi da valori negativi. L'andamento del campo elettrico nella cavità assume il suo valore *massimo* quando il campo magnetico è *nullo* ovunque, in accordo con le figure 4*a* e 4*e* e con il concetto dell'interscambio di energia tra campo elettrico e campo magnetico. Si può dimostrare, applicando la legge di Lenz, che il campo elettrico in figura 5 è diretto verso *destra*, come mostrato, se il campo magnetico sta *diminuendo*.

Si applichi la legge di Ampère nella forma

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

al cammino circolare tratteggiato di raggio r mostrato in figura. Attraverso la superficie delimitata da tale percorso non vi è alcun trasporto di carica, sicché la corrente di conduzione i è nulla. L'integrale di linea al primo membro è $(B)(2\pi r)$, e quindi l'equazione si riduce a

$$B(r) = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2\pi r}\frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{9}$$

L'equazione 9 mostra che il campo magnetico $B(r)$ è proporzionale alla velocità con cui varia nel tempo il flusso del campo elettrico Φ_E attraverso il cerchio. Il campo $B(r)$ assume il suo massimo valore quando $d\Phi_E/dt$ è massimo; ciò accade quando $\mathbf{E} = 0$, cioè, quando **E** sta invertendo la sua direzione. Così si vede che **B** è *massimo* quando **E** è *nullo* in tutti i punti della cavità. Ciò è in accordo con le figure 4*c* e 4*g* e con il concetto dell'interscambio di energia tra la forma elettrica e la forma magnetica. Un confronto con la figura 2, che come la figura 5 corrisponde ad un campo elettrico crescente, mostra che le linee di forza di **B** sono dirette in senso orario, se osservate lungo la direzione del campo elettrico.

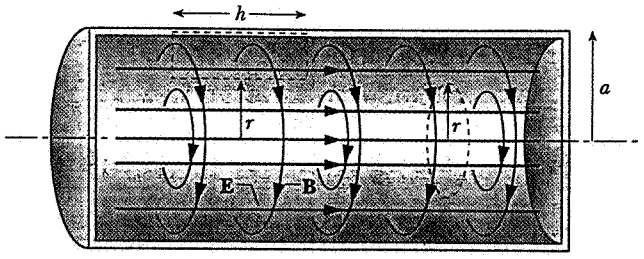


Figura 5 Una rappresentazione più dettagliata di una cavità risonante elettromagnetica cilindrica all'istante della figura 4*d*. Il rettangolo tratteggiato viene usato per applicare la legge di Faraday e il cerchio tratteggiato viene usato per la legge di Ampère.

Il confronto delle equazioni 8 e 9, suggerisce la completa interdipendenza di **E** e **B** nella cavità. Mentre varia nel tempo, il campo magnetico induce un campo elettrico come descritto dalla legge di Faraday. Il campo elettrico, che a sua volta dipende dal tempo, induce un campo magnetico come descritto dalla generalizzazione di Maxwell della legge di Ampère. Le oscillazioni, una volta iniziate, si sostengono reciprocamente e perdurerebbero all'infinito se non vi fossero perdite dovute alla produzione di energia interna nelle pareti della cavità o perdite di energia da aperture che potrebbero essere presenti nelle pareti. Nel capitolo 41 si vedrà che un simile interscambio tra **B** ed **E** non avviene solo nelle cavità ma anche nelle onde elettromagnetiche viaggianti, come le onde radio o la luce visibile.

In una cavità risonante acustica, come un tubo di organo, si fornisce una sorgente di energia (per esempio dirigendo un flusso d'aria contro una lamina), e si permette l'instaurarsi di un'onda stazionaria la cui frequenza è determinata dalla geometria della cavità, e si fa in modo che una parte dell'energia dell'onda possa uscire dal tubo per essere udita dall'ascoltatore. In una cavità elettromagnetica, la sequenza di eventi è simile. Le oscillazioni devono essere eccitate dall'esterno, ad esempio con una corrente.

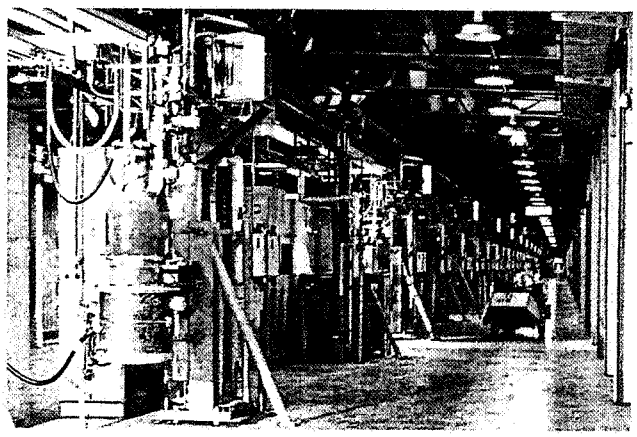


Figura 6 L'interno dell'acceleratore lineare di 2 miglia di Stanford. Il grande cilindro verticale è una delle diverse centinaia di cavità elettromagnetiche risonanti (klystron) che forniscono il campo elettrico necessario ad accelerare gli elettroni. Ciascun klystron produce una potenza di picco di 67 MW.

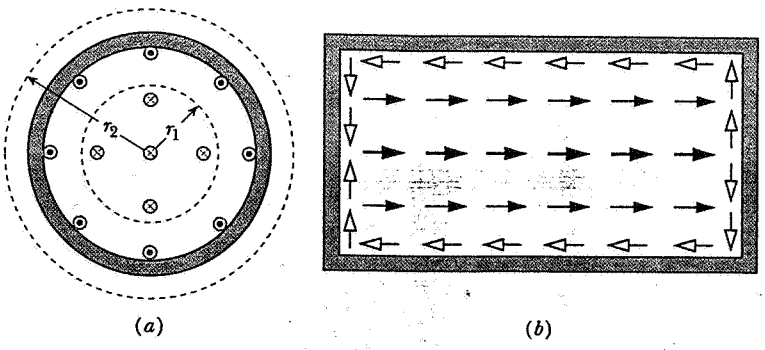


Figura 7 Esempio 3. Sezioni trasversali della cavità delle figure 4 e 5, che mostrano (*a*) la corrente di conduzione attraverso le pareti diretta verso l'alto e la corrente di spostamento diretta verso il basso nel volume della cavità, e (*b*) la corrente di spostamento (frecce piene) nel volume della cavità e la corrente di conduzione (frecce vuote) nelle pareti. Le frecce rappresentano la densità di corrente. Si noti che la corrente totale (conduzione + spostamento) è continua; cioè, è possibile formare linee di corrente chiuse.

Viene così a stabilirsi un'onda elettromagnetica stazionaria, la cui frequenza è determinata dalle dimensioni della cavità cilindrica. Si permette quindi ad una parte dell'onda di lasciare la cavità. Un uso comune di queste cavità è negli acceleratori che producono un fascio di particelle cariche di alta energia. La figura 6 mostra l'interno dell'acceleratore per elettroni lungo due miglia di Stanford, in cui una serie di centinaia di cavità risonanti (dette *klystron*) fornisce le onde elettromagnetiche per l'acceleratore. Gli elettroni viaggiano lungo il percorso rettilineo di due miglia, sottoposti ad una sequenza di campi elettrici acceleranti, che accelerano gli elettroni fino ad una energia di quasi 50 GeV. ■

Esempio 3 In figura 5 si analizzino le correnti (sia di conduzione che di spostamento) che vi sono all'interno della cavità (sia nelle sue pareti conduttrici che all'interno del suo volume). Si determini la relazione che collega queste correnti ed i campi elettrico e magnetico e si mostri inoltre che, considerando sia la corrente di conduzione che la corrente di spostamento, è ragionevole concludere che la corrente è continua lungo percorsi chiusi.

Soluzione La figura 7 mostra due viste della cavità, in un istante che corrisponde a quello di figura 5. Per semplicità non vengono illustrati i campi **E** e **B**; le frecce rappresentano le correnti. Poiché nelle figure 5 e 7 E sta crescendo, la carica positiva sulla faccia di sinistra deve essere crescente. Vi devono quindi essere delle correnti di conduzione nelle pareti dirette da destra a sinistra in figura 7*b*. Tali correnti sono rappresentate anche dai punti (che rappresentano le punte delle frecce) cerchiati vicino alle pareti della cavità in figura 7*a*.

Rammentando che $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ è una corrente di spostamento, si può scrivere l'equazione 9 nella seguente forma:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi r} i_d.$$

Questa equazione sottolinea il fatto che **B** nella cavità è associato ad una corrente di spostamento; confrontare con l'equazione 11 del capitolo 35, $B = \mu_0 i/2\pi r$. Applicando la legge della mano destra in figura 5 si nota che la corrente di spostamento i_d deve essere rivolta in verso entrante nel piano della figura 7*a* se deve essere associata alle linee di forza di **B** presenti, che sono dirette in senso orario.

La corrente di spostamento è rappresentata, in figura 7*b*, da frecce orientate verso destra ed in figura 7*a* da croci che rappresentano il fondo delle frecce che entrano nella pagina. La figura 7 mostra che la corrente è continua, diretta in su attraverso le pareti come corrente di conduzione e quindi in giù attraverso il volume della cavità come corrente di spostamento. Applicando la legge di Ampère, nella forma generalizzata da Maxwell,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0(i_d + i), \tag{10}$$

al percorso circolare di raggio r_1 in figura 7*a*, si vede che **B** lungo quel percorso è dovuto unicamente alla corrente di spostamento, dato che la corrente di conduzione i *attraverso quel cammino* è nulla.

Per il percorso di raggio r_2, la corrente netta racchiusa è nulla poiché la corrente di conduzione nelle pareti è esattamente uguale ed opposta alla corrente di spostamento nel volume della cavità. Poiché i è uguale in modulo, ma opposta in verso ad i_d segue dall'equazione 10 che B deve essere nullo in tutti i punti all'esterno della cavità, in accordo con le osservazioni sperimentali.

40-5 FORMA DIFFERENZIALE DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL*

Nella tabella 2 abbiamo scritto le equazioni di Maxwell come

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q, \tag{A-1}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \tag{A-2}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt \tag{A-3}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \, (i + \epsilon_0 \, d\Phi_E/dt). \tag{A-4}$$

Tali equazioni si dicono in forma integrale e sotto al segno di integrale appaiono i campi variabili **E** e **B**, solitamente grandezze incognite. Solo in alcuni casi simmetrici li possiamo portare fuori dal segno di integrale; nel caso più generale ciò non è possibile.

Qualcosa di simile accade nel calcolo della densità ϱ di un corpo, noti che siano la sua massa m e il suo vo-

* Appendice all'edizione italiana.

 ISBN 88-408-0777-2

lume V. In generale queste grandezze sono collegate dall'equazione integrale

$$m = \int \varrho \, dV,$$

e solo se ϱ è costante in tutto il volume è possibile portarla fuori dal segno di integrale e scrivere $\varrho = m/V$.

Spesso è conveniente riscrivere le equazioni di Maxwell sotto forma di uguaglianze valide per tutti i *punti* dello spazio, piuttosto che come integrali validi in varie *regioni* di spazio. In altre parole vogliamo trasformare le equazioni di Maxwell dalla forma integrale delle eq. A-1, A-4 in una *forma differenziale*. Potremo poi collegare **E** e **B** in un punto con la densità di carica e con la densità di corrente in quel punto.

L'operatore ∇

Per trasformare le equazioni di Maxwell in una forma differenziale dobbiamo approfondire la nostra conoscenza dei metodi vettoriali e, in particolare, acquistare una certa familiarità con l'operatore ∇.

Nel par. 30-9 si è visto come si possono ottenere le componenti del (vettore) campo elettrostatico **E** in un punto qualsiasi mediante derivazione parziale della funzione potenziale scalare $V(x, y, z)$.

Così

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

in modo tale che il campo elettrostatico

$$\mathbf{E} = \mathbf{i}E_x + \mathbf{j}E_y + \mathbf{k}E_z$$

si possa scrivere nella forma

$$\mathbf{E} = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right). \qquad \text{(A-5)}$$

Possiamo scrivere l'eq. A-5 in forma più sintetica come

$$\mathbf{E} = -\nabla V,$$

dove ∇ (nabla) è un operatore vettoriale definito come

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad \text{(A-6)}$$

Tale operatore è particolarmente utile nella trattazione dei campi scalari e vettoriali.

Dato un generico campo scalare ψ, possiamo costruire un campo vettoriale, chiamato gradiente di ψ e scritto grad ψ o $\nabla\psi$, semplicemente applicando a ψ l'operatore ∇.

Dato un campo vettoriale $\mathbf{U} = U_x\mathbf{i} + U_y\mathbf{j} + U_z\mathbf{k}$ possiamo applicargli l'operatore ∇ in due diversi modi. Un modo è quello di costruire il prodotto scalare di ∇ e di **U**, per ottenere il campo scalare chiamato *divergenza* di **U** e scritto div **U** o $\nabla \cdot \mathbf{U}$. L'altro modo è quello di costruire il prodotto vettore di ∇ e **U** per ottenere il campo vettoriale chiamato *rotore* di **U** e scritto rot **U** o $\nabla \times \mathbf{U}$. Queste operazioni possono essere sintetizzate come segue

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla\psi = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \text{(A-7)}$$

$$\text{div } \mathbf{U} \equiv \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}, \qquad \text{(A-8)}$$

$$\text{rot } \mathbf{U} \equiv \nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(A-9)}$$

Si noti che grad ψ e rot **U** sono vettori, mentre div **U** è uno scalare. Lo studente può acquistare una certa familiarità con queste operazioni eseguendo i seguenti esercizi: (1) dimostrare che rot (grad ψ) = 0 e (2) dimostrare che div (rot **U**) = 0.

Un altro operatore frequentemente usato è ∇^2 (nabla quadrato). Esso è definito semplicemente come $\nabla \cdot \nabla$ o, come lo studente può dimostrare dall'eq. A-6.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Applicando l'operatore ∇^2 a un campo scalare ψ si ottiene

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \qquad \text{(A-10)}$$

Per un campo vettoriale **U** l'operazione $\nabla^2\mathbf{U}$ è definita come

$$\nabla^2\mathbf{U} = \mathbf{i}\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \mathbf{j}\frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \mathbf{k}\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}. \qquad \text{(A-11)}$$

Come esercizio dimostrare che rot (rot **U**) = $-\nabla^2\mathbf{U}$+ grad (div **U**).

Equazioni di Maxwell in forma differenziale

In questo paragrafo mostreremo come si possono scrivere le prime due equazioni di Maxwell in forma differenziale (eq. A-1, 2). Applichiamo l'eq. A-1 a un elemento infinitesimo di volume a forma di parallelepipedo rettangolo contenente un punto P nel quale (e nelle vicinanze) esista un campo elettrico (fig. A-1*a*). Il

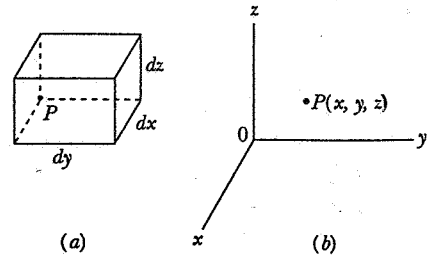


Figura A-1

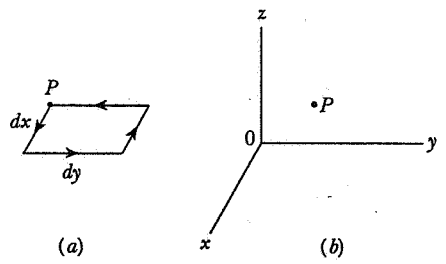


Figura A-2

punto P è situato in x, y, z nel sistema di riferimento della fig. A-1*b* e i lati del parallelepipedo hanno lunghezza dx, dy, dz.

Possiamo scrivere il vettore superficie della faccia posteriore del parallelepipedo come $d\mathbf{A} = -\,\mathbf{i}\,dy\,dz$. Il segno meno è dovuto al fatto che $d\mathbf{A}$ è scelto orientato come la normale *verso l'esterno*, che è descritta dal versore $-\mathbf{i}$. Per la faccia anteriore avremo: $d\mathbf{A} = +\,\mathbf{i}\,dy\,dz$.

Se il campo elettrico sulla faccia posteriore è $\mathbf{E}$, quello sulla faccia anteriore, che si trova a distanza dx da quella posteriore, sarà $\mathbf{E} + (\partial\mathbf{E}/\partial x)dx$, dove il secondo termine rappresenta la variazione di $\mathbf{E}$ associata alla variazione dx di x.

Il flusso attraverso tutta la superficie del parallelepipedo è $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$ e il contributo delle sole due facce a questo flusso è:

$$(\mathbf{E})(-\mathbf{i}\,dy\,dz) + \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}dx\right)(+\mathbf{i}\,dy\,dz) =$$

$$= dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x}\cdot\mathbf{i}\right) =$$

$$= dx\,dy\,dz\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{i}) = dx\,dy\,dz\frac{\partial E_x}{\partial x}.$$

Essendovi da parte delle altre quattro facce un analogo contributo, il flusso elettrico totale è

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right).$$

Dall'eq. A-8 possiamo scrivere

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = dx\,dy\,dz\ \mathrm{div}\,\mathbf{E}. \qquad \text{(A-12)}$$

Ora il secondo membro dell'eq. A-1, che dà la carica racchiusa nella superficie, può essere scritto in generale come $q = \int \varrho\,dV$ e, in particolare, per l'elemento infinitesimo di volume centrato in P, come

$$q = \varrho\,dx\,dy\,dz, \qquad \text{(A-13)}$$

dove ϱ è la densità volumica di carica in P. Sostituendo le eqq. A-12 e 13 nell'eq. A-1 ed eliminando il fattore comune $dx\,dy\,dz$ abbiamo alla fine

$$\epsilon_0\ \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \varrho, \qquad \text{(A-14)}$$

che rappresenta la prima equazione di Maxwell (eq. A-1) in forma differenziale.

Con la stessa tecnica possiamo esprimere la seconda equazione di Maxwell (eq. A-2) in forma differenziale come

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \qquad \text{(A-15)}$$

Cerchiamo ora di trasformare la terza e la quarta equazione di Maxwell (eqq. A-3,4) in forma differenziale, Partiamo applicando l'eq. A-4 a un elemento infinitesimo di superficie in forma rettangolare contenente un punto P in un campo magnetico, come indicato in fig. A-2*a*. Il punto P è situato in x, y, z nel sistema di riferimento della fig. A-2*b* e i lati del rettangolo parallelo al piano x-y hanno lunghezza dx e dy.

Seguendo il percorso indicato dalle frecce si ha

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B}\cdot(\cdot\,\mathbf{j}\,dy) + \qquad \text{(lato posteriore)}$$

$$+\,\mathbf{B}\cdot(\mathbf{i}\,dx) + \qquad \text{(lato sinistro)}$$

$$+\left(\mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}dx\right)\cdot(\mathbf{j}\,dy) + \qquad \text{(lato anteriore)}$$

$$+\left(\mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}dy\right)\cdot(-\mathbf{i}\,dx), \qquad \text{(lato destro)}$$

dove $\mathbf{B}$ il campo magnetico in P.

Raccogliendo i vari termini otteniamo

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = dx\,dy\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\cdot\mathbf{j} - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}\cdot\mathbf{i}\right)$$

$$= dx\,dy\left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{j}) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{i})\right)$$

$$= dx\,dy\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(A-16)}$$

Nel secondo membro dell'eq. A-4 i è la corrente concatenata dal percorso e $d\phi_E/dt$ è la variazione del flusso elettrico attraverso la superficie racchiusa. Quindi. se $\mathbf{J}$ rappresenta la densità di corrente e $d\mathbf{A}$ (= $\mathbf{k}\,dx$

ISBN 88-408-0777-2

dy) il vettore superficie, si può scrivere

$$i = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{k}\, dx\, dy) = dx\, dy\, J_z \qquad \text{(A-17)}$$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot (\mathbf{k}\, dx\, dy)$$

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{\partial E_z}{dt} dx\, dy. \qquad \text{(A-18)}$$

Sostituendo le eqq. A-16, 17 e 18 nell'eq. A-4 ed eliminando il fattore comune $dx\, dy$ otteniamo

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = J_z + \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \qquad \text{(A-19)}$$

Avremmo ottenuto risultati simili se avessimo scelto un rettangolo parallelo al piano y-z o al piano z-x. Ciascun rettangolo ci avrebbe fornito un diverso componente di una superficie infinitesima arbitrariamente orientata nel punto P. È chiaro che l'eq. A-19 è l'equazione corrispondente all'eq. A-4 secondo l'asse z. Se la moltiplichiamo per $\mathbf{k}$ e le sommiamo le due analoghe equazioni vettoriali corrispondenti all'asse x e all'asse y, che si possono ottenere mediante permutazione ciclica di x, y, z e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ si ottiene

$$\text{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t), \qquad \text{(A-20)}$$

che è la quarta equazione di Maxwell in forma differenziale.

Allo stesso modo, partendo dall'eq. A-3, possiamo dimostrare che

$$\text{rot}\, \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t, \qquad \text{(A-21)}$$

che è la forma differenziale della terza equazione di Maxwell. Abbiamo quindi ricavato quattro equazioni differenziali dalle quattro equazioni integrali (dalla A-1 alla A-4). Si può dimostrare che le equazioni integrali possono essere ricavate da quelle differenziali, cioè i due gruppi di equazioni sono *equivalenti*.(*)

In riassunto le quattro equazioni differenziali sono:

$$\epsilon_0\, \text{div}\, \mathbf{E} = \varrho, \qquad \text{(A-22)}$$

$$\text{div}\, \mathbf{B} = 0, \qquad \text{(A-23)}$$

$$\text{rot}\, \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t, \qquad \text{(A-24)}$$

$$\text{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0\, \partial \mathbf{E}/\partial t), \qquad \text{(A-25)}$$

esse sono quattro equazioni differenziali a derivate parziali accoppiate e sono valide in ogni punto di un campo elettromagnetico.

* Se i cammini d'integrazione (linee chiuse) *non* sono funzioni del tempo.

DOMANDE

1. Spiegare con parole proprie perché la legge dell'induzione di Faraday (vedi tab. 2) può essere interpretata dicendo «un campo magnetico variabile genera un campo elettrico».
2. Si consideri il flusso Φ_E di un campo elettrico, che decresce al trascorrere del tempo, attraverso un anello circolare piano. Il campo magnetico indotto (osservato nel verso di $\mathbf{E}$) è in senso orario o in senso antiorario?
3. Se (come in effetti è) esistono sistemi di unità di misura in cui ϵ_0 e μ_0 non compaiono, come può essere valida l'equazione 1?
4. Si confrontino la tabella 1 e la tabella 2. È sufficiente basarsi sul solo principio di simmetria o vi è la necessità di una verifica sperimentale per il termine «mancante» nell'equazione 4?
5. Perché è così semplice mostrare che «un campo magnetico variabile genera un campo elettrico», mentre è così difficile mostrare in modo semplice che «un campo elettrico variabile genera un campo magnetico»?
6. In figura 2 si consideri una circonferenza di raggio $r > R$. Come è possibile che vi sia un campo magnetico indotto nei punti di questa circonferenza, come mostrato nell'esempio 1? Dopo tutto, in tali punti non vi è campo elettrico e $dE/dt = 0$.
7. In figura 2, $\mathbf{E}$ è in direzione entrante nella pagina ed è crescente in modulo. Determinare la direzione di $\mathbf{B}$ se, invece, (*a*) $\mathbf{E}$ è entrante ma decrescente in modulo, (*b*) $\mathbf{E}$ è uscente e crescente in modulo, (*c*) $\mathbf{E}$ è uscente e decrescente in modulo, e (*d*) $\mathbf{E}$ è costante.
8. Nella figura 9*c* del capitolo 38, è necessaria una corrente di spostamento per mantenere la continuità della corrente attraverso il condensatore. Come ne può esistere una, visto che non vi è carica sul condensatore?
9. (*a*) In figura 2, qual è il verso della corrente di spostamento i_d? Nella stessa figura, stabilire una regola che metta in relazione le orientazioni (*b*) di $\mathbf{B}$ e di $\mathbf{E}$ e (*c*) di $\mathbf{B}$ e di $d\mathbf{E}/dt$.
10. Che vantaggi ci sono nel chiamare corrente di spostamento il termine $\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ nell'equazione IV della tabella 2?
11. Si può misurare una corrente di spostamento con un amperometro? Spiegare.
12. Perché i campi magnetici generati da correnti di conduzione che scorrono in fili sono così facili da rilevare mentre nel caso degli effetti magnetici della corrente di spostamento in un condensatore è così difficile?
13. In tabella 2 vi sono tre tipi di mancanze apparenti di simmetria nelle equazioni di Maxwell. (*a*) Le quantità ϵ_0 e/o μ_0 compaiono nelle equazioni I e IV ma non nella II e nella III. (*b*) Vi è un segno meno nell'equazione III che non compare nella IV. (*c*) Nelle equazioni II e III mancano i «termini di monopolo magnetico». Quale di queste è una vera mancanza di simmetria? Se i monopoli magnetici venissero scoperti, come bisognerebbe riscrivere queste equazioni per tenerne conto? (*Suggerimento*: Sia q_m l'intensità del monopolo magnetico, analoga alla carica fondamentale e; che unità di misura avrebbe q_m nel SI?)
14. Le equazioni di Maxwell nella forma mostrata in tabella 2 so-

no scritte nell'ipotesi che non siano considerati materiali dielettrici. Come dovrebbero essere riscritte se si volesse rimuovere tale restrizione?

15. Elencare tutti i sistemi oscillanti meccanici che riuscite (*a*) a elementi concentrati e (*b*) a elementi distribuiti.
16. Una bobina ha una induttanza misurata L. In un caso reale essa ha anche una capacità C, dato che spire adiacenti si comportano come le armature di un condensatore. Nella bobina si possono eccitare oscillazioni elettromagnetiche ad una certa frequenza anche senza collegarla ad un condensatore esterno. Questo è un caso di elementi distribuiti? Pensate che possano essere eccitate oscillazioni a più di una frequenza? Discutere.
17. È possibile che un dato elemento circuitale (ad esempio un condensatore) si comporti come un elemento «concentrato» in certe condizioni e come un elemento «distribuito» in altre condizioni?
18. I sistemi oscillanti (ad esempio quelli meccanici) sono o a elementi concentrati o a elementi distribuiti? Non esiste una via di mezzo? (*a*) Si consideri un sistema a elementi concentrati come un sistema ideale massa-molla. Come lo si potrebbe modificare fisicamente per renderlo più distribuito? (*b*) Si consideri un sistema distribuito, come una corda vibrante. Come lo si potrebbe modificare fisicamente per renderlo più concentrato?
19. Discutere il flusso periodico di energia, sempre che ve ne sia uno, da punto a punto in una cavità risonante acustica.
20. Una cavità risonante acustica piena d'aria ed una cavità risonante elettromagnetica delle stesse dimensioni hanno frequenze di risonanza il cui rapporto è dell'ordine di 10^6. In quale caso la frequenza di risonanza è più elevata e perché?
21. Le cavità elettromagnetiche sono spesso rivestite internamente da uno strato di argento. Perché?
22. In quali istanti durante un periodo è nulla (*a*) la corrente di conduzione e (*b*) la corrente di spostamento nella cavità di figura 4?
23. Discutere la variazione nel tempo, durante un periodo completo, delle cariche che appaiono nei vari punti delle pareti interne della cavità risonante elettromagnetica di figura 4.
24. Vi aspettate che la disposizione dei campi elettrico e magnetico di figura 5 sia l'unica disposizione possibile? Se vi sono altre disposizioni possibili, vi aspettate che abbiano frequenze maggiori o minori di quella illustrata in figura 5?
25. Con riferimento alla figura 7, in che senso le estremità della cavità possono essere considerate come le armature di un condensatore? In che senso la parete cilindrica può essere considerata come un induttore? (*Nota*: la figura 7 è evidentemente un caso di elementi distribuiti, ma vi deve essere una transizione graduale tra elementi concentrati ed elementi distribuiti.)
26. (*a*) In figura 6 è possibile applicare in modo utile la legge di Faraday al cerchio tratteggiato? (*b*) È possibile applicare la legge di Ampère in modo utile al rettangolo tratteggiato? Discutere.

PROBLEMI

Paragrafo 40-1 Le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo

1. Sostituendo i valori numerici di ϵ_0 e μ_0 usati nei capitoli precedenti, si verifichi il valore numerico della velocità della luce impiegando l'equazione 1 e si dimostri che tale equazione è dimensionalmente corretta.
2. (*a*) Si dimostri che $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 377\ \Omega$ (questa quantità viene detta «impedenza intrinseca del vuoto»). (*b*) Si dimostri che la frequenza angolare della normale corrente alternata a 60 Hz è di 377 rad/s. (*c*) Confrontare (*a*) e (*b*). Ritenete che questa coincidenza sia la ragione per cui è stata scelta originariamente la frequenza di 60 Hz per i generatori AC? Si rammenti che, in Europa, viene usata una frequenza di 50 Hz.

Paragrafo 40-2 Campi magnetici indotti e corrente di spostamento

3. Nella situazione dell'esempio 1, in che punti il valore del campo magnetico indotto è metà del suo valore massimo?
4. Si dimostri che la corrente di spostamento in un condensatore a piatti paralleli si può scrivere

$$i_d = C\frac{dV}{dt}.$$

5. Si disponga di un condensatore a piatti paralleli da 1.0 μF. Come è possibile stabilire una corrente (istantanea) di spostamento di 1.0 mA nella regione compresa tra i due piatti?
6. Nell'esempio 1, si dimostri che la densità di corrente di spostamento j_d, per $r < R$, è data da

$$j_d = \epsilon_0\frac{dE}{dt}.$$

7. Si consideri un condensatore a piatti paralleli, i cui piatti siano dei quadrati di 1.22 m di lato, come in figura 8. Vi sia una corrente entrante (ed uscente) di 1.84 A che carica il condensatore. (*a*) Qual è la corrente di spostamento attraverso la regione compresa tra i piatti? (*b*) Quanto vale dE/dt in tale regione? (*c*) Qual è la corrente di spostamento attraverso il quadrato tratteggiato tra i piatti? (*d*) Quanto vale $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$ lungo questo quadrato tratteggiato?

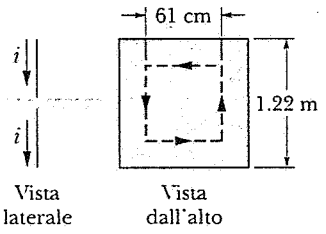


Figura 8 Problema 7.

ISBN 88-408-0777-2

8. In figura 9 sono rappresentati i piatti P_1 e P_2 di un condensatore a piatti paralleli circolari di raggio R. Essi sono collegati, come mostrato, a lunghi fili diritti attraverso cui scorre una corrente di conduzione costante i. Sono mostrati, inoltre, tre ipotetiche circonferenze di raggio r, due delle quali si trovano fuori dal condensatore mentre la terza si trova fra i piatti. Si dimostri che il campo magnetico lungo le tre circonferenze è dato da

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

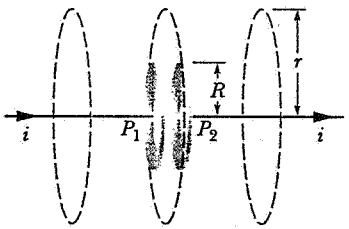


Figura 9 Problema 8.

9. Si consideri un campo elettrico uniforme che passi dall'intensità di 0.60 MV/m a zero in 15 μs seguendo la legge illustrata in figura 10. Calcolare la corrente di spostamento, attraverso una regione di 1.9 m^2 perpendicolare al campo, durante ciascuno degli intervalli di tempo (*a*), (*b*) e (*c*) illustrati nel grafico. (Si trascuri il comportamento agli estremi degli intervalli.)

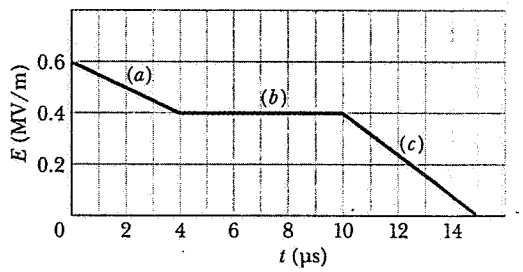


Figura 10 Problema 9.

10. Dimostrare che le espressioni per $B(r)$ ricavate nell'esempio 1 si possono scrivere

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d}{2\pi r} \quad (r \geq R),$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 i_d r}{2\pi R^2} \quad (r \leq R).$$

Si noti che queste espressioni hanno esattamente la stessa forma di quelle ricavate nel capitolo 35 tranne che in luogo della corrente di conduzione i vi compare la corrente di spostamento i_d.

11. Si consideri un condensatore a piatti circolari paralleli del diametro di 21.6 cm, come quello di figura 2, mentre viene caricato. La densità di corrente di spostamento attraverso la regione sia uniforme, diretta in verso entrante nella pagina ed abbia un valore di 1.87 mA/cm^2. (*a*) Calcolare il campo magnetico B ad una distanza di 53.0 mm dall'asse di simmetria della regione. (*b*) Calcolare dE/dt nella medesima regione.

12. Nel 1929 M. R. Van Cawenberghe riuscì per la prima volta, a misurare direttamente la corrente di spostamento i_d tra i piatti di un condensatore a piatti paralleli a cui era applicata una differenza di potenziale alternata, come suggerito dalla figura 2. Egli impiegò piatti circolari il cui raggio efficace era di 40.0 cm e la cui capacità era di 100 pF. La differenza di potenziale applicata aveva un valore di picco V_m di 174 kV ad una frequenza di 50.0 Hz. (*a*) Qual era il valore di picco della corrente di spostamento tra i piatti? (*b*) Perché la differenza di potenziale applicata era stata scelta così elevata? (La delicatezza di queste misure è tale che esse vennero eseguite in modo diretto più di 60 anni dopo che Maxwell aveva enunciato il concetto della corrente di spostamento! L'esperimento è descritto in *Journal de Physique*, n° 8, 1929.)

13. Si consideri un condensatore a piatti paralleli circolari i cui piatti abbiano un raggio R di 32.1 mm e distino 4.80 mm l'uno dall'altro. Ai piatti venga applicata una differenza di potenziale sinusoidale con un valore di picco di 162 V ed una frequenza di 60.0 Hz. Determinare il valore massimo del campo magnetico indotto ad $r = R$.

14. Il condensatore di figura 11, costituito da due piatti circolari di raggio $R = 18.2$ cm è collegato ad un generatore di f.e.m. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\omega t$, dove $\mathcal{E}_m = 225$ V ed $\omega = 128$ rad/s. Il valore massimo della corrente di spostamento è $i_d = 7.63$ μA. Si trascurino gli effetti di bordo del campo elettrico ai bordi dei piatti. (*a*) Qual è il valore di picco della corrente i? (*b*) Qual è il valore massimo di $d\Phi_E/dt$, dove Φ_E è il flusso del campo elettrico attraverso la regione tra i piatti? (*c*) Qual è la distanza d che separa i piatti? (*d*) Determinare il massimo valore del modulo di **B** tra i piatti ad una distanza $r = 11.0$ cm dal centro.

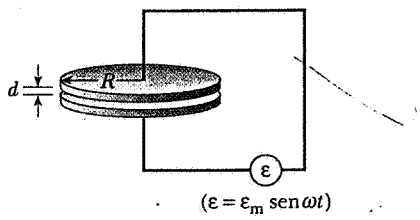


Figura 11 Problema 14.

Paragrafo 40-3 Le equazioni di Maxwell

15. Raccogliete in una tabella le espressioni delle quattro seguenti grandezze, considerando sia $r < R$ che $r > R$. Disponete i procedimenti seguiti per ricavare tali espressioni uno accanto all'altro e studiateli come una interessante applicazione delle equazioni di Maxwell a problemi aventi simmetria cilindrica. (*a*) $B(r)$ per una corrente i che scorre in un lungo filo di raggio R. (*b*) $E(r)$ per un lungo cilindro di raggio R uniformemente carico. (*c*) $B(r)$ per un condensatore a piatti circolari paralleli di raggio R nel caso in cui E vari nel tempo a velocità costante. (*d*) $E(r)$ in una regione cilindrica di raggio R in cui un campo magnetico uniforme vari nel tempo con velocità costante.

16. Si consideri una lunga barra cilindrica conduttrice di raggio R il cui asse coincide con l'asse x, come mostrato in figura 12. Nella posizione $x = b$, viene praticato un sottile taglio nella barra con una sega. Una corrente di conduzione i, crescente nel tempo secondo la legge $i = \alpha t$, percorre la barra verso destra; α sia una costante di proporzionalità (positiva). All'istante $t = 0$, non vi sia alcuna carica sulle facce del taglio in $x = b$. (*a*) Determinare il modulo della carica su queste facce in

funzione del tempo. (*b*) Usare l'equazione I della tabella 2 per determinare E nell'intercapedine in funzione del tempo. (*c*) Disegnare le linee di forza di $\mathbf{B}$ per $r < R$, dove r è la distanza dall'asse x. (*d*) Determinare $B(r)$ nell'intercapedine, per $r < R$, utilizzando l'equazione IV della tabella 2. (*e*) Confrontare la risposta precedente con $B(r)$ nella barra per $r < R$.

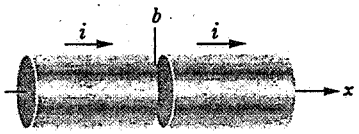


Figura 12 Problema 16.

17. Si considerino i due cammini chiusi adiacenti *abefa* e *bcdeb* che condividono il lato *be*, come mostrato in figura 13. (*a*) Si può applicare la legge $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -d\Phi_B/dt$ (l'equazione III della tabella 2) a ciascuno dei due percorsi separatamente. Si dimostri che, da questo soltanto, l'equazione III risulta *automaticamente* soddisfatta per il percorso composto *abcdefa*. (*b*) Si ripetano le medesime considerazioni usando l'equazione IV. (*c*) Tale relazione viene detta proprietà di «autoconsistenza»; perché è necessario che ciascuna delle equazioni di Maxwell sia autoconsistente?

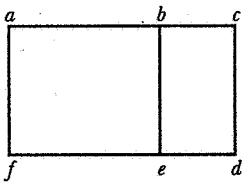


Figura 13 Problema 17.

18. Si considerino due parallelepipedi aventi una faccia in comune, come mostrato in figura 14. (*a*) Si può applicare la legge $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0$ (l'equazione I della tabella 2) a ciascuna di queste due superfici chiuse separatamente. Si dimostri che, da questo soltanto, l'equazione I risulta *automaticamente* soddisfatta per la superficie chiusa composta dalle due. (*b*) Si ripetano le medesime considerazioni usando l'equazione II. Vedere anche il problema 17.



Figura 14 Problema 18.

Paragrafo 40-4 Equazioni di Maxwell e cavità risonanti

19. Che dimensioni dovrebbe avere una cavità elettromagnetica cilindrica risonante (come quella descritta nel testo) affinché la frequenza di risonanza del suo modo fondamentale sia di 60 Hz, la frequenza della corrente elettrica alternata della presa di casa? (La frequenza angolare è data da $\omega = 2.41\ c/a$, dove a è il raggio della cavità espresso in metri.)

20. Una cavità elettromagnetica cilindrica del diametro di 4.8 cm e lunga 7.3 cm oscilla nel modo illustrato in figura 4. (*a*) Si assuma che il campo elettrico nei punti dell'asse della cavità sia $E_m = 13$ kV/m. La frequenza di oscillazione è di 2.4 GHz. Per tali punti dell'asse, qual è la massima velocità di variazione di E, $(dE/dt)_m$? (*b*) Si supponga che il valor medio di $(dE/dt)_m$, su tutti i punti della sezione trasversale della cavità, sia metà del valore determinato in precedenza per i punti sull'asse. In tale ipotesi, qual è il massimo valore di B sulla superficie cilindrica della cavità?

21. Da un punto di vista microscopico il principio di continuità della corrente si può scrivere

$$\oint (\mathbf{j} + \mathbf{j}_d) \cdot d\mathbf{A} = 0,$$

in cui $\mathbf{j}$ è la densità di corrente di conduzione e $\mathbf{j}_d$ è la densità di corrente di spostamento. L'integrale deve essere calcolato su una superficie qualsiasi purché chiusa. L'equazione dice essenzialmente che qualunque corrente entri nel volume racchiuso da questa superficie deve anche uscirne. (*a*) Applicare questa equazione alla superficie indicata dalla linea tratteggiata in figura 15 subito dopo la chiusura dell'interruttore S. (*b*) Applicare la stessa equazione a varie superfici nella cavità della figura 7, includendone alcune che attraversino le pareti della cavità.

22. Disegnare dei diagrammi come quelli riportati in figura 4 che illustrino un ciclo di oscillazione di una cavità elettromagnetica cilindrica risonante, che oscilli non nel modo fondamentale come quella di tale figura, bensì nel primo modo superiore.

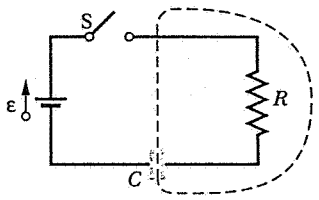


Figura 15 Problema 21.

Capitolo 41

ONDE ELETTROMAGNETICHE

Le equazioni di Maxwell, l'argomento del capitolo precedente, non riassumono solo le proprietà dei campi elettrici e magnetici in una forma compatta; tali equazioni portano anche a fenomeni completamente nuovi. Il risultato più importante della teoria di Maxwell, probabilmente, è la predizione dell'esistenza di onde elettromagnetiche e la comprensione del fatto che la luce poteva essere intesa come un tipo di onda elettromagnetica.

In questo capitolo, si dimostrerà come le equazioni delle onde elettromagnetiche siano una conseguenza delle equazioni di Maxwell, e si discuteranno le proprietà delle onde da esse risultanti. La descrizione che si darà delle onde elettromagnetiche impiega molti dei termini che sono stati impiegati in precedenza quando si sono studiate le onde meccaniche nei capitoli 19 e 20; si considereranno onde sinusoidali e le si descriveranno in termini familiari come ampiezza, frequenza, lunghezza d'onda e velocità di fase. In questo capitolo si considereranno le onde elettromagnetiche in termini generali, mentre nel prossimo capitolo verranno considerate più dettagliatamente le proprietà delle onde luminose. Questi due capitoli costituiscono un collegamento allo studio dell'ottica nei capitoli che seguono.

41-1 LO SPETTRO* ELETTROMAGNETICO

Ai tempi di Maxwell, la luce e le adiacenti radiazioni infrarossa ed ultravioletta erano i soli tipi di radiazione elettromagnetica noti. Oggi lo spettro elettromagnetico, mostrato in figura 1, comprende un grande intervallo di tipi diversi di radiazione originati da un grande numero di sorgenti differenti. Dalla teoria di Maxwell si conclude che, anche se queste radiazioni sono molto diverse per quanto riguarda le loro proprietà, il modo di produrle ed il modo in cui le si possono osservare, esse hanno molte caratteristiche in comune: tutte possono essere descritte in termini di campi elettrici e magnetici, e tutte si propagano attraverso il vuoto alla stessa velocità (la velocità della luce). In effetti, dal punto di vista fondamentale, esse differiscono *unicamente* per la lunghezza d'onda o la frequenza. I nomi assegnati alle varie regioni dello spettro in figura 1 hanno a che vedere solo con i differenti modi di generarle o di osservarle; tali nomi non dipendono da alcuna proprietà fondamentale dell'onda. A parte la differenza di lunghezza d'onda, non vi è alcun modo sperimentale di distinguere un'onda nella regione del visibile da una nella regione dell'infrarosso; le onde hanno identica forma ed identica descrizione matematica. Non vi è soluzione di continuità nello spettro né vi sono limiti ben precisi tra le varie categorie. (Certe regioni dello spettro sono delimitate dalla legge a scopo commerciale o per altri usi, ad esempio la trasmissione TV, AM e FM.)

Esaminiamo più in dettaglio alcuni di questi tipi di radiazione elettromagnetica.

1. *Luce.* La regione visibile dello spettro è quella che ci è più familiare, perché come specie abbiamo adottato dei sensori (gli occhi) che sono sensibili alla radiazione elettromagnetica più intensa emessa dal Sole, la sorgente extraterrestre più prossima. I limiti in lunghezza d'onda della regione del visibile sono da circa 400 nm (violetto) a circa 700 nm (rosso). La luce viene spesso emessa quando gli elettroni più esterni (o di va-

* La parola *spettro* deriva da una parola latina (*species*, che significa «forma» o «aspetto» [N.d.T.]). Altri termini familiari che hanno la stessa etimologia sono «spettacolo» e «specie». Newton introdusse il termine per descrivere l'immagine simile ad un arcobaleno che si ottiene quando un raggio di luce solare attraversa un prisma di vetro. Oggi si parla di *spettro elettromagnetico* per indicare molti diversi tipi di radiazione elettromagnetica, classificati a seconda della loro frequenza o della loro lunghezza d'onda ordinati dalla più piccola alla più grande.

ISBN 88-408-0777-2

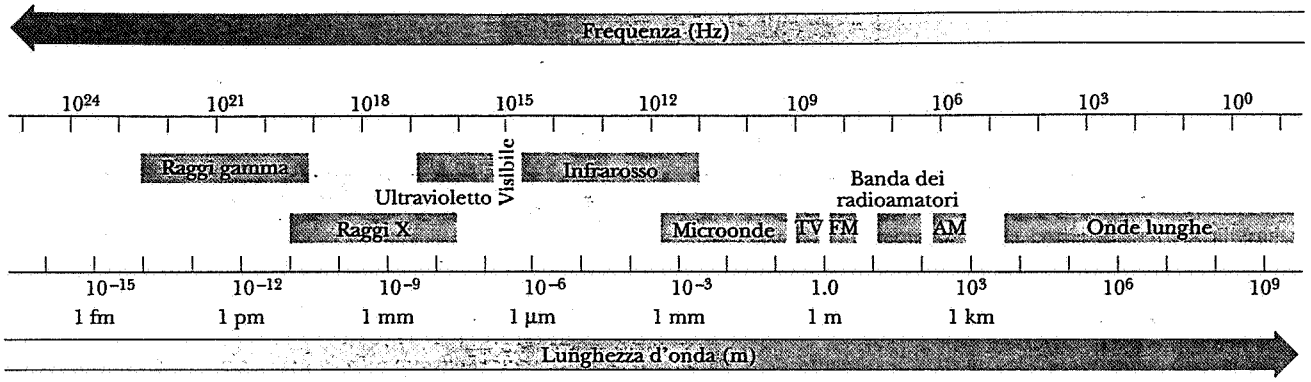


Figura 1 Lo spettro elettromagnetico. Si noti che sia le lunghezze d'onda che le frequenze sono in scala logaritmica.

lenza) negli atomi cambiano il loro stato di moto; per questa ragione, tali transizioni nello stato degli elettroni vengono dette *transizioni ottiche*. Il colore della luce dà informazioni riguardo agli atomi o riguardo all'oggetto da cui è stata emessa. Lo studio della luce emessa dal Sole e da stelle lontane fornisce informazione riguardo alla loro composizione.

2. *Infrarosso.* La radiazione infrarossa, che ha lunghezze d'onda maggiori del visibile (da 0.7 μm a circa 1 mm), viene normalmente emessa da atomi o molecole quando essi cambiano il loro moto rotazionale o vibrazionale. Spesso tale variazione avviene come variazione di energia interna dell'oggetto emettitore e viene osservata come variazione dell'energia interna dell'oggetto che rivela la radiazione. In questo caso la radiazione infrarossa è un importante mezzo di trasmissione del calore e viene a volte detta *calore radiante*. Il riscaldamento che si prova quando si pone una mano vicino ad una lampadina accesa è soprattutto il risultato della radiazione infrarossa emessa dalla lampadina ed assorbita dalla mano. Tutti gli oggetti emettono radiazione elettromagnetica (detta «radiazione termica»; vedi capitolo 49) a causa della loro temperatura. Il picco dell'intensità della radiazione temica irraggiata dagli oggetti la cui temperatura è nell'intervallo di temperature che si possono incontrare abitualmente (diciamo tra 3 K e 3000 K) si trova nella regione infrarossa dello spettro. L'aver tracciato una mappa della radiazione infrarossa proveniente dallo spazio ha fornito informazioni supplementari rispetto a quelle ottenute dalla radiazione visibile (fig. 2).

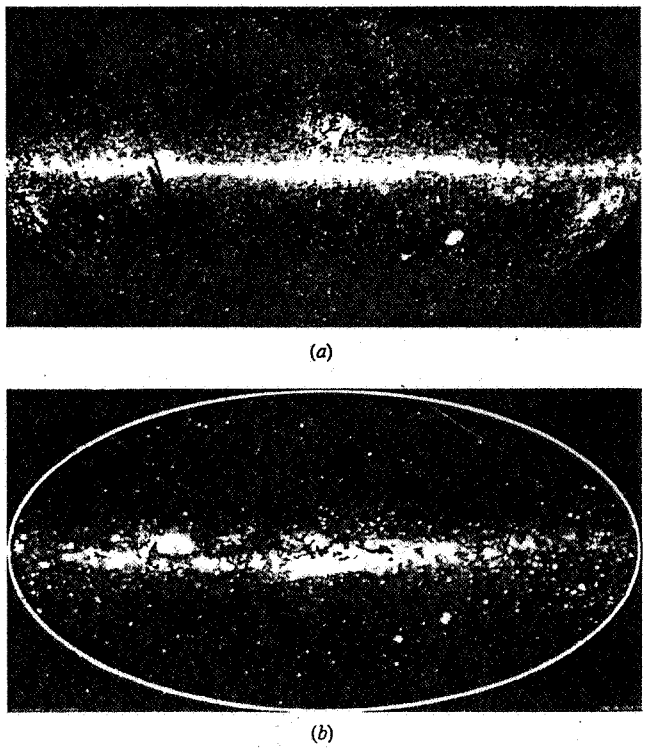


Figura 2 (*a*) Immagine agli infrarossi della nostra galassia, la Via Lattea, presa dal satellite IRAS. (*b*) Immagine della Via Lattea nel visibile. Parti dell'immagine visibile, in particolare quelle vicine al centro della galassia, sono oscurate da nubi di polvere, che non hanno effetto sull'immagine infrarossa. I due grossi corpi al di sotto della galassia ed a destra del centro sono la Grande e la Piccola Nube di Magellano, che sono galassie satelliti della Via Lattea.

3. *Microonde.* Le microonde possono essere considerate come onde radio corte. con lunghezze d'onda tipicamente nell'intervallo tra 1 mm e 1 m. Esse vengono generalmente prodotte da oscillatori elettromagnetici in circuiti elettrici. come nel caso dei forni a microonde. Le microonde vengono spesso utilizzate per trasmettere conversazioni telefoniche; la figura 3 è una immagine di una stazione a microonde che serve a ritrasmettere chiamate telefoniche. Le microonde ci rag-

ISBN 88-408-0777-2

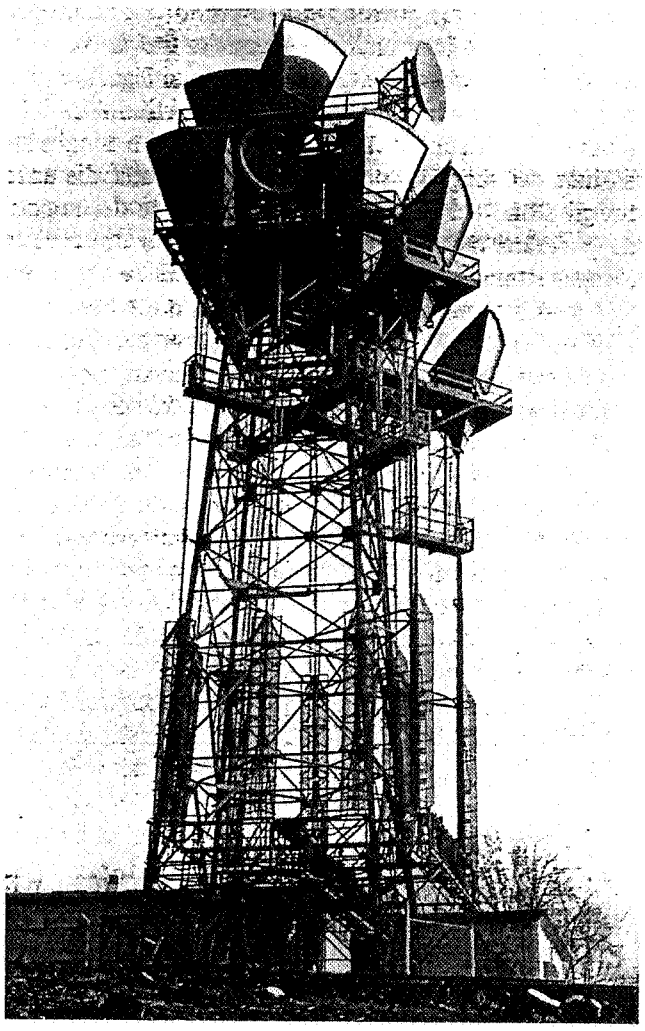


Figura 3 Una stazione di ripetizione di microonde, che riceve e ritrasmette segnali che portano comunicazioni telefoniche a grande distanza.

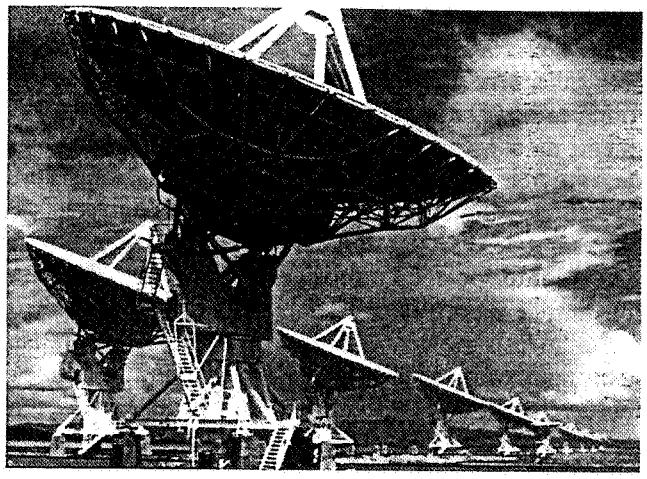


Figura 4 Una delle 27 antenne paraboliche di 25 m di diametro del radiotelescopio Very Large Array vicino a Socorro, New Mexico. Le 27 antenne sono disposte su una rotaia a forma di Y, ciascun braccio della quale è lungo 10 miglia. Questa disposizione è equivalente ad un'unica antenna di 20 miglia di diametro.



Figura 5 Una immagine radio della galassia Via Lattea. (Confrontare con la figura 2.) Questa immagine è stata presa ad una lunghezza d'onda di 73 cm. La maggior parte di questa radiazione viene generata da elettroni di alta energia che vengono deflessi da campi magnetici presenti nella galassia. Si noti l'intensa emissione fuori dal piano della galassia che non è presente in figura 2.

giungono anche da sorgenti extraterrestri. La componente più abbondante è la *radiazione cosmica di fondo*, che viene ritenuta una radiazione elettromagnetica associata al «Big Bang» che segnò la nascita dell'universo circa 10^{10} anni fa; con l'espandersi ed il raffreddarsi dell'universo, la lunghezza d'onda di questa radiazione si allungò fino a trovarsi ora nella regione delle microonde, con una lunghezza d'onda di picco di circa 1 mm. Gli atomi di idrogeno neutri, che popolano lo spazio interstellare nella nostra galassia, sono un'altra comune sorgente extraterrestre di microonde, emettendo radiazione con una lunghezza d'onda di circa 21 cm.

4. *Onde radio.* Le onde radio hanno lunghezze d'onda maggiori di 1 m. Esse vengono prodotte da sorgenti terrestri per mezzo di elettroni che oscillano nei fili di circuiti elettrici. Scegliendo accuratamente la geometria di questi circuiti, come in una antenna, si può controllare la distribuzione nello spazio della radiazione emessa (se l'antenna ha funzione di trasmettitore) o la sensibilità del rivelatore (se l'antenna ha funzione di ricevitore). Muovendosi verso l'esterno alla velocità della luce, il fronte d'onda in espansione dei segnali TV trasmessi sulla Terra circa dal 1950 ha ora raggiunto circa 400 stelle, portando informazioni riguardo alla nostra civiltà ai loro, eventuali, abitanti.

Le onde radio ci raggiungono anche da sorgenti ex-

traterrestri, come il Sole che è una delle principali sorgenti e che spesso interferisce con la ricezione radio o TV sulla Terra. Anche Giove è una sorgente attiva di onde radio. Dalle mappe delle emissioni radio provenienti da sorgenti extraterrestri che sono state tracciate, attività nota come *radio astronomia*, sono state spesso ricavate informazioni riguardo all'universo che non sarebbero state ottenibili con l'uso di telescopi ottici. Inoltre, poiché l'atmosfera terrestre non presenta un grande assorbimento alle lunghezze d'onda radio, la radio astronomia offre certi vantaggi rispetto alla astronomia ottica, infrarossa, o a microonde sulla superficie terrestre. La figura 4 rappresenta un esempio di radio telescopio e la figura 5 mostra un tipico risultato dell'osservazione della nostra galassia a lunghezze d'onda radio.

Una delle più sorprendenti scoperte della radio astronomia fu l'esistenza di sorgenti di onde radio impulsate, osservate per la prima volta nel 1968. Tali oggetti, noti come *pulsar*, emettono dei brevissimi impulsi di onde radio separati temporalmente da intervalli di lunghezza dell'ordine del secondo. Questo intervallo tra due impulsi successivi è molto stabile, presentando variazioni di meno di 10^{-9} s. Si ritiene che le pulsar abbiano origine da stelle di neutroni in rotazione, in cui gli elettroni intrappolati dal campo magnetico sono soggetti a forti accelerazioni centripete dovute alla rotazione. L'emissione radio altamente direzionale spazza la Terra come il fascio di luce di un faro al ruotare della stella. Sono state osservate pulsar su un grande intervallo dello spettro, comprese lunghezze d'onda nel visibile e nei raggi x.

5. *Ultravioletto.* Le radiazioni con lunghezze d'onda più piccole del visibile cominciano con l'ultravioletto (da 1 nm a 400 nm), che può essere prodotto nelle transizioni atomiche degli elettroni più esterni come pure nella radiazione di sorgenti termiche come il Sole. Poiché la nostra atmosfera presenta un forte assorbimento a lunghezze d'onda nell'ultravioletto, solo una piccola parte di questa radiazione proveniente dal Sole raggiunge il suolo. Tuttavia, la causa principale di questo assorbimento è l'ozono atmosferico, la cui quantità in questi ultimi anni è stata ridotta a causa delle reazioni chimiche con i fluorocarburi liberati dagli spray, dagli impianti di raffreddamento e da altre sorgenti. Una breve esposizione alla radiazione ultravioletta provoca normali scottature solari, ma una esposizione prolungata può avere effetti più seri, compreso il cancro della pelle. L'astronomia ultravioletta viene praticata utilizzando osservatori posti in orbita intorno alla Terra con dei satelliti.

6. *Raggi x.* I raggi x (lunghezze d'onda tipiche da 0.01 nm a 10 nm) possono essere prodotti a lunghezze d'onda discrete in transizioni atomiche tra gli elettroni più interni di un atomo (i più fortemente legati) e possono essere prodotti anche quando particelle cariche (come gli elettroni) vengono decelerate. Le lunghezze d'onda dei raggi x corrispondono circa alla distanza tra gli atomi dei solidi; perciò la diffusione dei raggi x da parte dei materiali è un modo utile per studiare la loro struttura. I raggi x possono attraversare facilmente i tessuti molli ma vengono fermati dalle ossa e da altri materiali solidi; per questa ragione essi vengono ampiamente utilizzati nella diagnosi medica.

L'astronomia con i raggi x, come l'astronomia ultravioletta, viene praticata con osservatori orbitali. La maggior parte delle stelle, come il Sole, non sono dei forti emettitori di raggi x; tuttavia, in certi sistemi costituiti da due stelle vicine che orbitano attorno al loro comune centro di massa (insieme detto sistema *binario*), materiale appartenente ad una delle due stelle può venir scaldato ed accelerato cadendo da una stella all'altra, emettendo raggi x nel processo. Benché non se ne abbia ancora una evidenza che lo confermi, si ritiene che il membro più massivo di certi sistemi binari emettitori di raggi x possa essere un buco nero.

7. *Raggi gamma.* I raggi gamma sono la radiazione elettromagnetica con le lunghezze d'onda più corte (inferiori a 10 pm). Essi sono la radiazione elettromagnetica più penetrante e una esposizione ad una intensa radiazione gamma può avere effetti dannosi sul corpo umano. Queste radiazioni possono essere emesse nelle transizioni di un nucleo atomico da uno stato ad un altro e possono essere emesse nel decadimento di certe particelle elementari; ad esempio, un pione neutro può decadere in due raggi gamma secondo lo schema:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma,$$

ed un elettrone ed un positrone (l'antiparticella dell'elettrone) possono annichilarsi reciprocamente dando origine a due raggi gamma:

$$e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma.$$

In generale, ciascuno di questi processi emette raggi gamma di un'unica lunghezza d'onda. Nella astronomia con raggi gamma, la rivelazione di tali radiazioni (e la misura della loro lunghezza d'onda) serve come prova di certi processi nucleari nell'universo.

Dalle descrizioni precedenti, si può vedere che vi sono sorgenti sia naturali che artificiali di tutti i tipi di radiazione elettromagnetica, e si può inoltre vedere che lo studio della radiazione elettromagnetica a tutte le lunghezze d'onda è stato impiegato in questi ultimi

ISBN 88-408-0777-2

anni per fornire una descrizione più accurata della struttura e dell'evoluzione dell'universo.

Descrivendo l'emissione di radiazione elettromagnetica come un fenomeno ondulatorio, ci si sta concentrando su un aspetto particolare. Si considera che gli atomi del sistema che emette radiazione si comportino in modo cooperativo; ad esempio, è necessaria la partecipazione degli elettroni di molti atomi per avere emissione di luce dal filamento caldo di una lampadina. In alternativa, si può studiare l'emissione di radiazione elettromagnetica dovuta ad un singolo atomo. In questo caso, si focalizza l'attenzione su un pacchetto di energia elettromagnetica (detto *quanto*), e in generale si osserva la radiazione non come una perturbazione variabile con continuità, bensì come un pacchetto concentrato di energia elettromagnetica. Alcuni esperimenti sembrano in disaccordo con l'interpretazione ondulatoria e possono essere spiegati solo in termini di particelle o quanti di energia elettromagnetica. In questo capitolo, si sottolineano gli aspetti ondulatori e si trascurano questi aspetti corpuscolari. Nel capitolo 49 di questo testo verranno presi in considerazione gli aspetti corpuscolari, che sono complementari all'aspetto ondulatorio per una comprensione completa della radiazione elettromagnetica.

41-2 GENERAZIONE DI UN'ONDA ELETTROMAGNETICA

Ad una carica elettrica a riposo è associato un certo andamento delle linee di forza del campo elettrico. Ad una carica in moto a velocità costante, oltre alle linee di forza del campo elettrico, è associato un certo andamento delle linee di forza del campo magnetico. Una volta che sia stata raggiunta una condizione stazionaria (cioè, dopo che la carica sia in moto e che i campi siano stabiliti nello spazio), vi è una densità di energia nello spazio associata ai campi elettrici e magnetici, ma la densità di energia rimane costante nel tempo. Nessun segnale, tranne l'evidenza della sua presenza, viene trasportato dalla carica in punti distanti; non vi è trasporto di energia né di quantità di moto, e non vi è radiazione elettromagnetica.

Se, d'altro canto, si facesse oscillare la carica avanti e indietro, si potrebbero inviare segnali ad un amico distante che avesse l'equipaggiamento necessario a rivelare variazioni dei campi elettrici e magnetici. Con un codice prestabilito, si potrebbero inviare informazioni facendo oscillare la carica ad una certa frequenza o in una certa direzione. In questo caso si starebbero facendo segnalazioni per mezzo di un'onda elettromagnetica.

Per produrre quest'onda, è necessario accelerare la carica. Cioè, *cariche a riposo e cariche in moto a velocità costante non irraggiano; cariche accelerate irraggiano*. Mettendola in un altro modo, il moto uniforme della carica corrisponde a una corrente che non varia nel tempo, mentre il moto accelerato della carica corrisponde a una corrente che varia nel tempo; così si può considerare la radiazione come prodotta da correnti che variano nel tempo.

In laboratorio, un modo semplice di generare un'onda elettromagnetica è di fare in modo che la corrente che scorre in un filo vari nel tempo. Si assume per semplicità una variazione sinusoidale in funzione del tempo. In figura 6 è mostrato un circuito che potrebbe essere utilizzato a questo scopo. Esso consiste di un circuito oscillante *RLC*, con un generatore esterno che rifornisca l'energia che viene dissipata nel circuito o portata via dalla radiazione. La corrente nel circuito varia sinusoidalmente con la pulsazione risonante ω, che è approssimativamente $1/\sqrt{LC}$ se le perdite resistive sono piccole (vedi par. 38-7). Il circuito oscillante è accoppiato attraverso un trasformatore ad una *linea di trasmissione*, che serve a portare la corrente ad una *antenna*. (I cavi coassiali, che portano i segnali TV in molte case, sono esempi comuni di linee di trasmissione.)

La geometria dell'antenna determina le proprietà geometriche dei campi elettrici e magnetici irraggiati. Si assume una *antenna dipolare*, che, come mostrato in figura 6, può essere considerata semplicemente come due conduttori rettilinei. Le cariche fluiscono avanti e indietro in questi due conduttori alla frequenza ω, spinti dall'oscillatore. Si può considerare l'antenna come un dipolo elettrico oscillante, in cui su un ramo si trova una carica istantanea q, mentre sull'altro ramo si trova una carica $-q$. La carica q varia sinusoidalmente nel tempo e cambia di segno ogni mezzo ciclo. Le cariche sono certamente accelerate, dato che si muovono avanti e indietro nell'antenna, e come risultato l'antenna è una sorgente di *radiazione di dipolo elettrico*. In ogni punto dello spazio vi sono campi elettrici e magnetici che variano sinusoidalmente nel tempo.*

In figura 7 è riportata una serie di «istantanee» che illustra schematicamente il processo di formazione del campo di radiazione. È mostrato solo il campo elettrico; il campo magnetico corrispondente può essere de-

* La maggior parte delle radiazioni che si incontrano usualmente, dalle onde radio alla luce ai raggi x e ai raggi gamma, sono di tipo dipolare. Le antenne radio e TV sono normalmente disegnate per trasmettere radiazione di dipolo. Atomi e nuclei isolati possono spesso essere considerati come dipoli oscillanti dal punto di vista della radiazione che emettono.

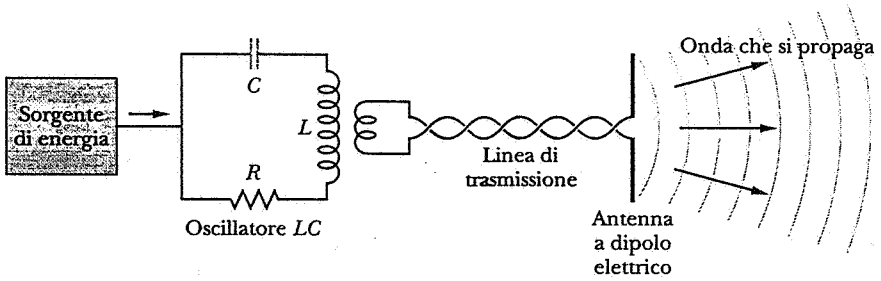


Figura 6 Un dispositivo per la generazione di onde elettromagnetiche, in questo caso onde radio corte.

dotto dalla corrente nei conduttori usando la regola della mano destra. La figura 8 dà una visione più completa dell'onda elettromagnetica che potrebbe essere generata dall'antenna. La figura rappresenta una sezione attraverso il piano xy; per ottenere una immagine più completa del campo si deve immaginare la figura di rotazione intorno all'asse y. Si supponga di osservare il campo ad una distanza dal dipolo grande rispetto alle sue dimensioni e rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione; il campo osservato sotto queste condizioni viene detto *campo di radiazione*. A distanze inferiori, si osserverebbe il più complicato *campo prossimo*, che non verrà qui discusso. Si noti che il campo «si stacca» dall'antenna e le sue linee di forza formano dei percorsi chiusi, al contrario di quanto accade nel caso del campo statico di un dipolo elettrico in cui le linee di forza partono sempre da una carica positiva e terminano su una carica negativa.

Un modo alternativo di vedere il campo di radiazione è dato in figura 9, che rappresenta un serie di «istantanee» del campo elettrico e del campo magnetico che passano dalla posizione di un osservatore che si trova nel punto P sull'asse x di figura 8. Si assuma che l'osservatore si trovi abbastanza lontano dal dipolo da poter considerare i fronti d'onda come piani. Come al solito, la densità delle linee di forza indichi l'intensità del campo. Si noti in particolare che (1) **E** e **B** sono in fase (entrambi raggiungono i loro massimi nello stesso istante e sono entrambi nulli nello stesso istante), e (2) **E** e **B** sono perpendicolari l'uno all'altro. Queste conclusioni seguono da una analisi delle onde elettromagnetiche che si propagano nello spazio libero basata sulle equazioni di Maxwell, che è riassunta nel paragrafo 41-3.

Una ulteriore caratteristica di questa radiazione, che verrà discussa più dettagliatamente nel capitolo 48, è che essa è *polarizzata linearmente*; cioè, il vettore **E** è rivolto ovunque nella stessa direzione, in questo caso quella dell'asse y. Ciò rimane vero in tutti i punti dell'asse x e ad ogni tempo. Questa direzione di polarizzazione è determinata dalla direzione dell'asse del dipolo. La luce emessa da un insieme disordinato di atomi, come il filamento di una normale lampadina, non è polarizzata; in effetti, i singoli dipoli atomici sono orientati nello spazio in modo casuale. In un laser, gli atomi sono stimolati ad emettere radiazione con gli assi dei loro dipoli allineati; la luce di un laser è perciò polarizzata.

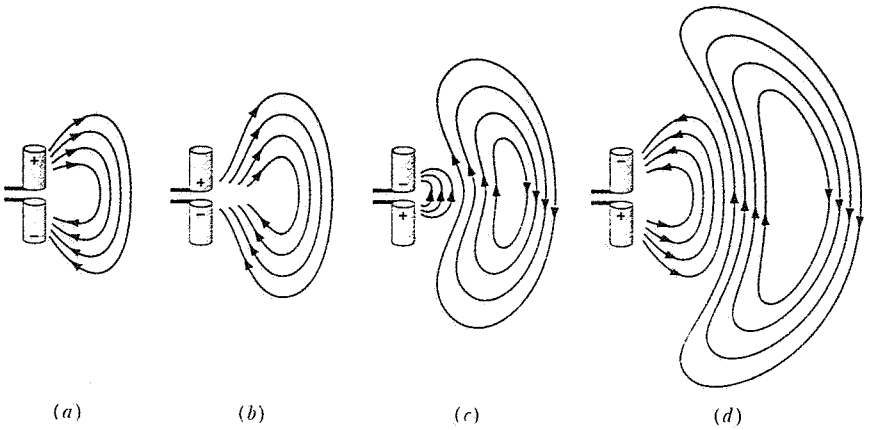


Figura 7 Stadi successivi nell'emissione di un'onda, come dall'antenna di figura 6. Sono mostrati solo gli andamenti del campo elettrico.

ISBN 88-408-0777-2

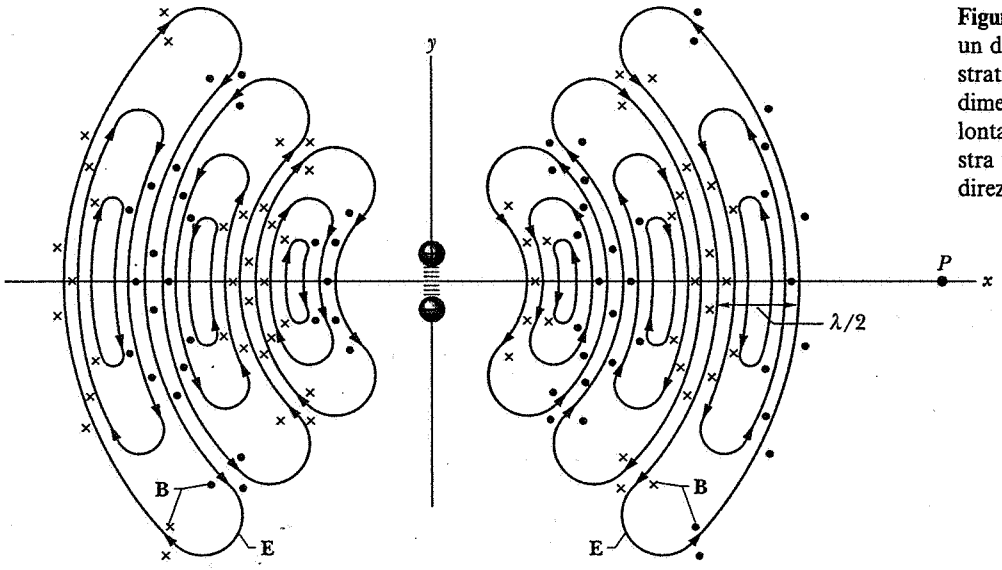


Figura 8 I campi **E** e **B** irraggiati da un dipolo elettrico. I campi sono illustrati a distanze grandi rispetto alle dimensioni del dipolo. Un osservatore lontano che si trovi nel punto *P* registra un'onda piana che si propaga in direzione *x*.

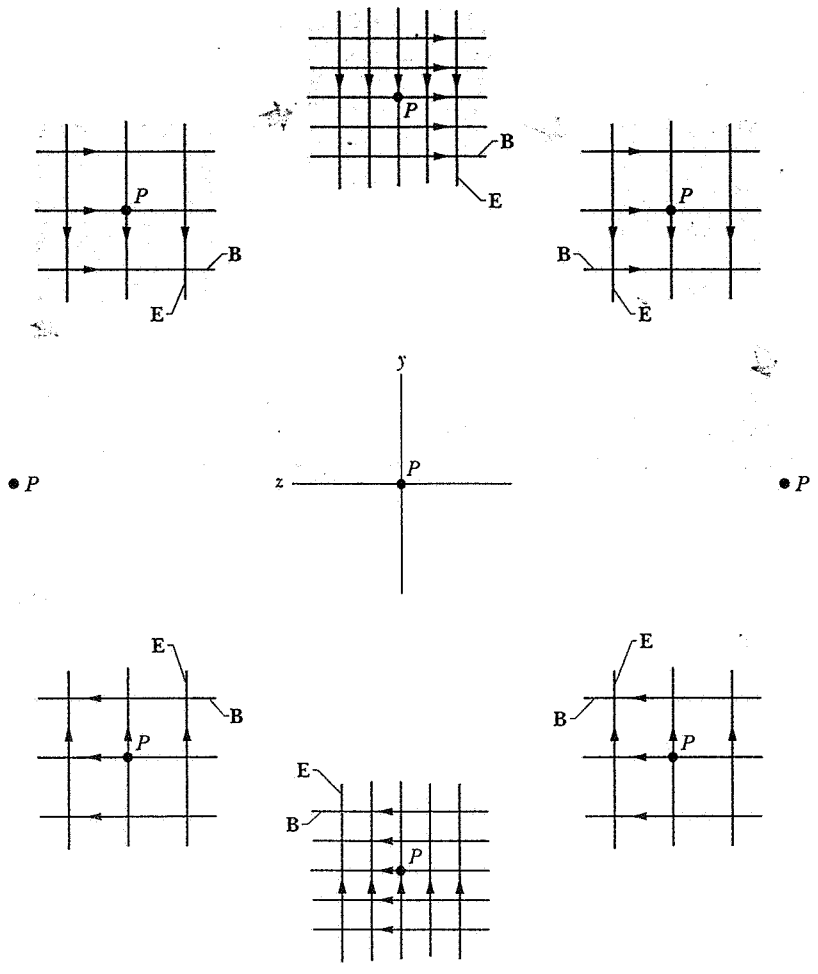


Figura 9 Otto «istantanee» cicliche dell'onda elettromagnetica piana irraggiata dal dipolo oscillante di figura 8 osservata nel punto *P*. Il verso di propagazione dell'onda (il verso delle *x* crescenti in figura 8) è uscente dal piano della pagina. Le linee di forza di **E** sono verticali e le linee di forza di **B** sono orizzontali.

41-3 ONDE ELETTROMAGNETICHE ED EQUAZIONI DI MAXWELL

La discussione precedente ci ha dato una visione qualitativa di un tipo di onda elettromagnetica progressiva. In questo paragrafo si considera la descrizione matematica dell'onda, che si dimostrerà essere in accordo con le equazioni di Maxwell. Nel perseguire questo scopo, si dimostrerà che la velocità di tali onde nello spazio vuoto è uguale alla velocità della luce, il che ci porta a concludere che la luce è lei stessa un'onda elettromagnetica.

Si supponga che l'osservatore in figura 8 si trovi ad una distanza così grande dal dipolo oscillante che i fronti d'onda che passano per P (mostrati in figura 9) siano piani. Le linee di forza di **E** sono parallele all'asse y e le linee di forza di **B** sono parallele all'asse z. I campi **E** e **B** si scrivono nella solita forma matematica di onda progressiva sinusoidale (vedi par. 19-3):

$$E(x,t) = E_m \operatorname{sen}(kx - \omega t), \qquad (1)$$

$$B(x,t) = B_m \operatorname{sen}(kx - \omega t). \qquad (2)$$

Dove ω è la pulsazione associata al dipolo oscillante ed il numero d'onda k ha il solito significato di $2\pi/\lambda$. Se l'onda si propaga con velocità di fase c, allora ω e k sono legati dalla relazione $c = \omega/k$. La figura 10 rappresenta l'oscillazione sinusoidale dei campi **E** e **B** in funzione di x in un particolare istante fissato.

Più avanti si vedrà che le ampiezze E_m e B_m non sono indipendenti l'una dall'altra. Si noti che scrivendo queste equazioni per i moduli di **E** e di **B** si è assunto che E e B fossero in fase; cioè, le costanti di fase dell'equazione 1 e dell'equazione 2 hanno lo stesso valore (che è stato preso nullo). Più avanti si dimostrerà che questa scelta è una conseguenza delle equazioni di Maxwell.

La figura 11 raffigura una «istantanea» tridimensionale di un'onda piana che si propaga lungo la direzione x. Essa rappresenta un modo differente di illustrare la stessa onda mostrata in figura 10. Si consideri l'onda quando passa attraverso l'elemento di volume parallelepipedo mostrato nel punto P in figura 11. In figura 12 sono state ridisegnate due sezioni dell'onda tridimensionale. In figura 12*a* è riportata una sezione parallela al piano xy; le linee di forza di **E** giacciono in questa sezione, mentre le linee di forza di **B** sono ad essa perpendicolari. In figura 12*b* è riportata una sezione parallela al piano xz; in questo caso le linee di forza di **B** giacciono in questa sezione mentre le linee di forza di **E** sono ad essa perpendicolari.

Quando l'onda passa sul rettangolo indicato in figura 12*a*, il flusso del campo magnetico attraverso il rettangolo cambia, il che deve dar luogo ad un campo elettrico indotto attorno al rettangolo, secondo la legge dell'induzione di Faraday. Tale campo elettrico in-

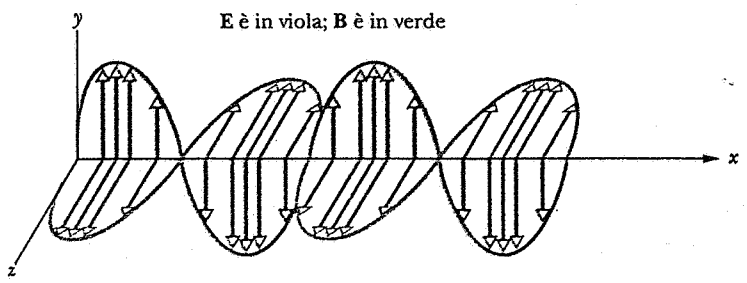


Figura 10 Un'onda piana, variabile sinusoidalmente e polarizzata linearmente che si propaga in direzione x. La figura rappresenta una fotografia in un particolare istante.

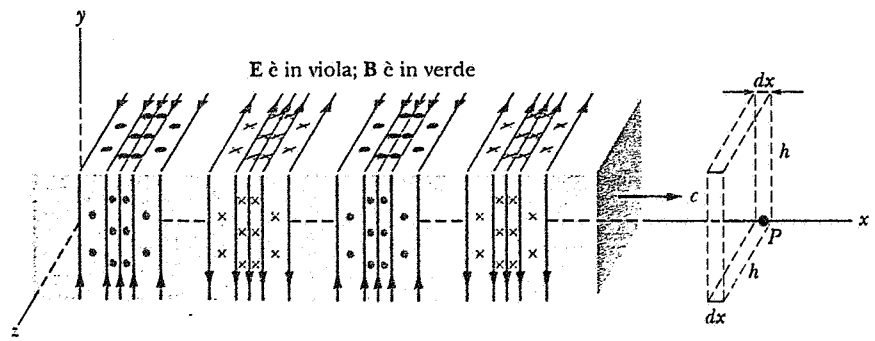


Figura 11 Un'altra rappresentazione dell'onda piana di figura 10. L'energia viene trasportata attraverso una immaginaria sottile scatola rettangolare situata in P. Si noti che in tutti i punti dell'onda, il vettore **E** × **B** è rivolto nel verso in cui si muove l'onda.

ISBN 88-408-0777-2

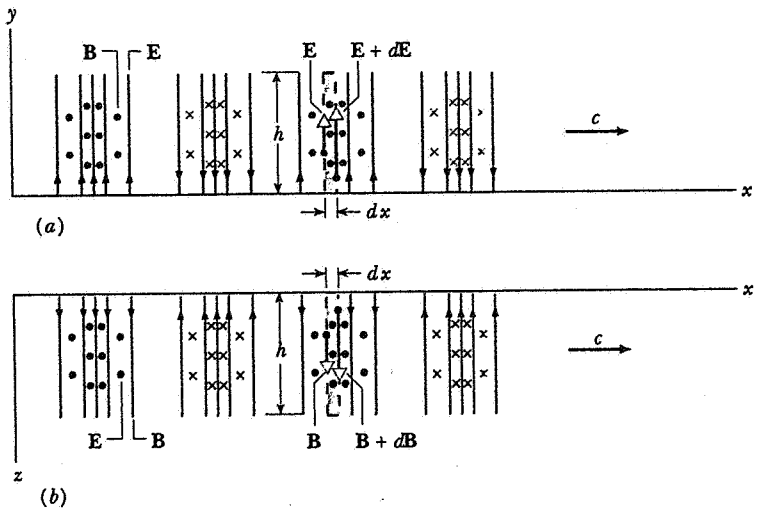


Figura 12 (*a*) L'onda di figura 11 vista nel piano *xy*. Al passare dell'onda, il flusso del campo magnetico attraverso il rettangolo ombreggiato varia, inducendo un campo elettrico. (*b*) L'onda di figura 11 vista nel piano *xz*. Al passare dell'onda, il flusso del campo elettrico attraverso il rettangolo ombreggiato varia, inducendo un campo magnetico.

dotto è semplicemente il campo elettrico associato all'onda che si sta propagando.

Per esaminare ciò più dettagliatamente, si applichi la legge di Lenz al processo di induzione. Il flusso Φ_B attraverso il rettangolo ombreggiato di figura 12*a* sta *decrescendo* al trascorrere del tempo, poiché l'onda si sta muovendo attraverso il rettangolo verso destra e nel rettangolo sta entrando una regione con campo magnetico meno intenso. Il campo indotto agisce in modo da opporsi a questo cambiamento, il che significa che se si immaginasse il contorno del rettangolo ombreggiato come una spira conduttrice, in essa apparirebbe una corrente indotta in senso *antiorario*. Tale corrente genererebbe un campo magnetico **B** che, all'interno del rettangolo, sarebbe rivolto in direzione uscente dalla pagina, opponendosi così alla decrescita di Φ_B. Non vi è evidentemente alcuna spira conduttrice, ma il campo elettrico indotto netto sarebbe in accordo con tale spiegazione, perché il campo maggiore $E + dE$ sul lato destro della spira darebbe luogo ad una corrente netta in senso antiorario. Così la configurazione del campo elettrico in figura 12*a* è in accordo con il concetto che esso è indotto dal campo magnetico variabile.

In maniera analoga, quando l'onda passa sul rettangolo ombreggiato in figura 12*b*, il flusso del campo elettrico attraverso il rettangolo cambia, generando di conseguenza un campo magnetico indotto. (Questo effetto dipende dal termine di corrente di spostamento nell'equazione 4 della tabella 2 del capitolo 40, e si può ora vedere la sua importanza nella forma modificata da Maxwell della legge di Ampère.) Il campo magnetico indotto è semplicemente il campo magnetico associato all'onda che si sta propagando. Si può vedere che le variazioni di **E** e di **B** sono intimamente connesse l'una all'altra: un campo elettrico **E** variabile genera un campo magnetico **B** variabile, che a sua volta genera un campo elettrico **E** variabile, e via di seguito. In questo modo i campi elettrico e magnetico dell'onda si sostengono a vicenda attraverso lo spazio vuoto, e non è necessario alcun mezzo affinché l'onda possa propagarsi.

Descrizione matematica

Per un'analisi più dettagliata, si applichi la legge dell'induzione di Faraday,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \tag{3}$$

procedendo in verso antiorario attorno al rettangolo ombreggiato di figura 12*a*. Non vi è alcun contributo all'integrale dai tratti superiore ed inferiore perché **E** e $d\mathbf{s}$ sono mutuamente ortogonali. L'integrale diviene quindi

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (E + dE)h - Eh = dE\, h.$$

Il flusso Φ_B attraverso il rettangolo è*

$$\Phi_B = (B)(dx\, h),$$

dove B è il modulo di **B** sulla striscia rettangolare e dx h è l'area della striscia. Derivando si ottiene

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = h\, dx \frac{dB}{dt}.$$

Dall'equazione 3 si ha quindi

$$dE\, h = -h\, dx \frac{dB}{dt},$$

* Si usa una regola della mano destra per stabilire il segno del flusso: se le dita della mano destra sono rivolte nel verso in cui si integra lungo il cammino, allora il pollice indica la direzione in cui il campo attraverso l'area racchiusa dà un flusso positivo.

ovvero

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{dB}{dt}. \tag{4}$$

In realtà, sia B che E sono funzione di x e t; vedi equazioni 1 e 2. Nella valutazione di dE/dx, si assume che t sia costante perché la figura 12*a* è una «fotografia istantanea». Inoltre nella valutazione di dB/dt si assume che x sia costante perché ciò che è richiesto è variazione di B per unità di tempo in un punto fissato, la striscia in figura 12*a*. In queste ipotesi le derivate sono *derivate parziali*,* ed in questo caso bisogna usare una notazione leggermente differente; vedi, ad esempio, i paragrafi 19-4 e 19-5. In questa notazione l'equazione 4 diventa (1)

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{5}$$

Il segno meno in questa formula è appropriato e necessario, perché, sebbene E cresca al crescere di x nella posizione del rettangolo ombreggiato di figura 12*a*, B decresce al trascorrere del tempo. Poiché $E(x,t)$ e $B(x,t)$ sono note (vedi equazioni 1 e 2), l'equazione 5 si riduce a

$$kE_m \cos(kx - \omega t) = \omega B_m \cos(kx - \omega t).$$

Se si fossero usate costanti di fase differenti nelle equazioni 1 e 2, i termini in coseno in questa equazione sarebbero stati sfasati ed i due membri non potrebbero essere uguali per ogni valore di x e t. L'equazione 5, che segue direttamente dall'applicazione delle equazioni di Maxwell, dimostra che E e B devono essere in fase.

Semplificando il termine coseno, si ottiene

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{\omega}{k} = c. \tag{6}$$

Il rapporto delle ampiezze delle componenti elettrica e magnetica dell'onda è la velocità c dell'onda. Dalle equazioni 1 e 2 si vede che il rapporto delle ampiezze è uguale al rapporto dei valori istantanei, ovvero

$$E = cB. \tag{7}$$

Questo importante risultato sarà utile nei paragrafi successivi.

Passiamo ora ad esaminare la figura 12*b*, in cui il flusso del campo elettrico Φ_E attraverso il rettangolo ombreggiato sta decrescendo nel tempo al passaggio dell'onda attraverso di esso. Secondo la forma modificata di Maxwell della legge di Ampère (con $i = 0$, dato che non vi è corrente di conduzione in un'onda elettromagnetica che si propaga),

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}, \tag{8}$$

questo flusso variabile induce un campo magnetico nei punti lungo il perimetro del rettangolo.

Confrontando i due rettangoli ombreggiati di figura 12 si nota che in ciascun caso il flusso in questione, Φ_B o Φ_E, sta *decrescendo* al trascorrere del tempo. Tuttavia, se si procede in senso antiorario attorno ai rettangoli ombreggiati superiore ed inferiore, si vede che è $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ è *positivo*, mentre $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$, come si vedrà tra breve, è *negativo*. Ciò è come dovrebbe essere. Confrontando la figura 12*b* del capitolo 36 con la figura 2 del capitolo 40, si nota che sebbene i flussi Φ_E e Φ_B in queste figure stanno variando nello stesso modo in funzione del tempo (stanno entrambi crescendo), le linee di forza dei campi indotti **E** e **B** sono rivolte in versi opposti.

L'integrale che compare nell'equazione 8, valutato procedendo in verso antiorario attorno al rettangolo ombreggiato di figura 12*b*, è dato da

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = -(B + dB)h + Bh = -h\, dB,$$

dove B è il modulo di **B** sul bordo sinistro della striscia e $B + dB$ è il suo modulo sul bordo destro.

Il flusso Φ_E attraverso il rettangolo di figura 12*b* è dato da

$$\Phi_E = (E)(h\, dx).$$

Derivando si ottiene

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = h\, dx \frac{dE}{dt}.$$

Sicché l'equazione 8 si può scrivere

$$-h\, dB = \mu_0\epsilon_0 \left(h\, dx \frac{dE}{dt}\right)$$

ossia, sostituendo le derivate parziali, (2)

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}. \tag{9}$$

Ancora, il segno meno in questa equazione è appropriato e necessario, perché, sebbene B aumenti all'aumentare di x nella regione del rettangolo ombreggiato di figura 12*b*, E sta decrescendo al trascorrere di t.

---

* Calcolando la derivata parziale rispetto a una certa variabile, ad esempio $\partial E/\partial x$, si trattano tutte le altre variabili (ad esempio y, z e t) come se fossero costanti.

(1) L'equazione (5) deriva direttamente dalla (A-24) dell'appendice al cap. 40 (Equazioni di Maxwell in forma differenziale). [N.d.T.]

(2) L'equazione (9) deriva invece direttamente dalla (A-25) dell'appendice al Cap. 40. [N.d.T.]

ISBN 88-408-0777-2

Combinando questa equazione con le equazioni 1 e 2, si trova

$$-kB_m \cos(kx - \omega t) = -\mu_0\epsilon_0\omega E_m \cos(kx - \omega t),$$

ovvero

$$\frac{E_m}{B_m} = \frac{k}{\mu_0\epsilon_0\omega} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0 c}. \qquad (10)$$

Eliminando E_m/B_m tra le equazioni 6 e 10 si ricava

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}. \qquad (11)$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(8.9 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2})}}$$
$$= 3.0 \times 10^8\ \mathrm{m/s},$$

che è la velocità della luce nello spazio libero! Questa comparsa della velocità della luce da considerazioni puramente elettromagnetiche è un risultato che corona la teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo. Maxwell fece questa predizione prima che le onde radio fossero conosciute e prima che si comprendesse che la luce era di natura elettromagnetica. La sua predizione portò al concetto dello spettro elettromagnetico ed alla scoperta delle onde radio da parte di Heinrich Hertz nel 1890. Essa permise di discutere dell'ottica come di una branca dell'elettromagnetismo e permise di ricavare le sue leggi fondamentali dalle equazioni di Maxwell.

Poiché μ_0 è per definizione esattamente uguale a $4\pi \times 10^{-7}$ H/m, e alla velocità della luce è stato attribuito il valore esatto di 299 792 458 m/s, l'equazione 11 permette di ottenere un valore preciso di ϵ_0:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0} = 8.85418782 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}.$$

Curiosamente, Maxwell stesso non vide la propagazione delle onde elettromagnetiche ed i fenomeni elettromagnetici in generale, in termini del tipo di quelli suggeriti da, diciamo, figura 11. Come tutti i fisici della sua epoca egli era fermamente convinto che lo spazio fosse permeato da una sostanza impercettibile detta *etere* e che i fenomeni elettromagnetici potessero essere spiegati in termini di vortici ruotanti in questo etere.

È un tributo al genio di Maxwell il fatto che, con un tale modello meccanico in mente, egli riuscì a dedurre le leggi dell'elettromagnetismo che portano il suo nome. Queste leggi, come si è già sottolineato, non solo non richiesero modifiche quando tre decadi dopo comparve sulla scena la teoria della relatività ristretta di Einstein, ma, anzi, furono da questa teoria fortemente confermate. Oggigiorno, come discusso nel capitolo 21, non si ritiene più necessario invocare il concetto dell'etere per spiegare la propagazione delle onde elettromagnetiche.

41-4 TRASPORTO DI ENERGIA E VETTORE DI POYNTING

Come ogni tipo di onda, un'onda elettromagnetica può trasportare energia da un punto ad un altro. La luce emessa da una lampadina ed il calore radiante emesso da un fuoco sono esempi comuni di energia che fluisce per mezzo di onde elettromagnetiche.

Il flusso di energia in un'onda elettromagnetica viene misurato comunemente in termini del flusso di energia per unità di tempo per unità di superficie (o equivalentemente, potenza elettromagnetica per unità di superficie). Si descrivono il modulo e la direzione del flusso di energia in termini di un vettore detto *vettore di Poynting** **S**, definito da

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \qquad (12)$$

I vettori **E** e **B** si riferiscono ai campi di un'onda in un certo punto dello spazio, ed **S** indica il vettore di Poynting in quel punto. Si noti che, secondo le solite regole per il prodotto vettoriale di due vettori, **S** deve essere perpendicolare al piano individuato da **E** e **B**, e il verso di **S** è determinato dalla regola della mano destra. Si controllino queste relazioni direzionali con l'onda piana mostrata nelle figure 10 e 11; si noti che anche se le direzioni di **E** e **B** possono cambiare, il loro prodotto vettoriale è sempre diretto nel verso positivo dell'asse x, che è la direzione di propagazione dell'onda.

Un'onda elettromagnetica può essere specificata in maniera univoca dando il suo campo elettrico **E** e la sua direzione di propagazione (che è equivalente a dare la direzione di **S**). Non è necessario dare **B**, perché il modulo di **B** si ricava dal modulo di **E** usando l'equazione 7, e l'orientazione di **B** si può ricavare dai vettori **E** e **S** utilizzando l'equazione 12.

Le dimensioni di B sono le stesse delle dimensioni di E/c. Usando questo risultato e le dimensioni di E e di μ_0, si può dimostrare che le dimensioni di **S** sono quelle di una potenza per unità di superficie. La sua unità di misura nel SI è watt/metro^2.

* Il vettore di Poynting ha questo nome in onore di John Henry Poynting (1852-1914), che per primo ne discusse le proprietà. Poynting era un fisico britannico noto per i suoi studi sull'elettromagnetismo e sulla gravitazione.

Per l'onda elettromagnetica piana di figura 10, l'equazione 12 si riduce a

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB, \tag{13}$$

che si può scrivere anche, utilizzando l'equazione 7,

$$S = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \quad \text{oppure} \quad S = \frac{c}{\mu_0} B^2, \tag{14}$$

dove S, E e B sono i valori istantanei nel punto di osservazione. Dimostriamo che questi risultati sono in accordo coi risultati ottenuti in precedenza per la densità di energia associata ai campi elettrici e magnetici nel caso particolare di un'onda piana. Si consideri l'energia elettromagnetica nel volume elementare di figura 11 quando l'onda lo attraversa. In un qualunque istante, l'energia elettromagnetica in esso contenuta è

$$dU = dU_E + dU_B = (u_E + u_B)(A\ dx), \tag{15}$$

dove $A\ dx$ è il volume della scatola e u_E e u_B sono, rispettivamente, le densità di energia elettrica e magnetica. Utilizzando l'equazione 28 del capitolo 31 per u_E e l'equazione 32 del capitolo 38 per u_B, si ottiene

$$dU = \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2\right) A\ dx. \tag{16}$$

L'equazione 7 ($E = cB$) può essere usata per eliminare *un* E nel primo termine ed *un* B nel secondo termine, il che porta a

$$dU = \left[\frac{1}{2}\epsilon_0 E(cB) + \frac{1}{2\mu_0} B\left(\frac{E}{c}\right)\right] A\ dx$$
$$= \frac{(\mu_0\epsilon_0 c^2 + 1)(EBA\ dx)}{2\mu_0 c}.$$

Dall'equazione 11, tuttavia, $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$, sicché

$$dU = \frac{EBA\ dx}{\mu_0 c}. \tag{17}$$

Questa energia dU passa attraverso il volumetto in un intervallo di tempo dt uguale a dx/c. Il modulo di S, espresso in termini di flusso di energia per unità di tempo per unità di superficie, è

$$S = \frac{dU}{dt\ A} = \frac{EBA\ dx}{(\mu_0 c)(dx/c)A} = \frac{1}{\mu_0} EB,$$

in accordo con l'equazione 13.

Questa espressione mette in relazione i moduli di E, B ed S in un particolare istante. Le frequenze di molte onde elettromagnetiche (le onde visibili, ad esempio) sono così grandi che E e B fluttuano troppo rapidamente per poter misurare direttamente la loro variazione temporale. In molti esperimenti, perciò, si è più interessati a conoscere la *media temporale* di S, presa su uno o più periodi dell'onda. La media temporale S è nota anche come *intensità* I dell'onda. Dall'equazione 14 e dall'equazione 1, si ottiene

$$I = \overline{S} = \frac{1}{\mu_0 c}\overline{E^2} = \frac{1}{\mu_0 c} E_m^2\ \overline{\text{sen}^2(kx - \omega t)}.$$

La media temporale del sen^2 su un qualsiasi numero intero di periodi è $\frac{1}{2}$, e quindi

$$I = \overline{S} = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2 = \frac{1}{2\mu_0} E_m B_m. \tag{18}$$

L'intensità può essere espressa in termini del valore quadratico medio dei campi, E_{qm} e B_{qm}. Ricordando che $E_m = \sqrt{2}\, E_{qm}$, si ottiene

$$I = \overline{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{qm}^2 = \frac{1}{\mu_0} E_{qm} B_{qm}. \tag{18}$$

Esempio 1 Un osservatore si trova a 1.8 m da una sorgente luminosa (di dimensioni molto minori di 1.8 m) che irraggia una potenza di 250 W. Calcolare i valori quadratici medi del campo elettrico e magnetico nella posizione dell'osservatore. Si assuma che la sorgente irraggi uniformemente in tutte le direzioni.

Soluzione L'intensità della luce ad una distanza r dalla sorgente è data da

$$I = \frac{P}{4\pi r^2},$$

dove $4\pi r^2$ è la superficie di una sfera di raggio r centrata sulla sorgente. L'intensità è altresì data dall'equazione 19, sicché

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{1}{\mu_0 c} E_{qm}^2.$$

Il campo elettrico quadratico medio è

$$E_{qm} = \sqrt{\frac{P\mu_0 c}{4\pi r^2}}$$
$$= \sqrt{\frac{(250\ \text{W})(4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{(4\pi)(1.8\ \text{m})^2}}$$
$$= 48\ \text{V/m}.$$

Il valore quadratico medio del campo magnetico segue dall'equazione 7 ed è

$$B_{qm} = \frac{E_{qm}}{c} = \frac{48\ \text{V/m}}{3.00 \times 10^8\ \text{m/s}}$$
$$= 1.6 \times 10^{-7}\ \text{T} = 0.16\ \mu\text{T}.$$

Si noti che E_{qm} (= 48 V/m) è un valore apprezzabile confrontato con i normali valori di laboratorio mentre B_{qm} (= 0.16 μT) è piuttosto piccolo. Ciò aiuta a spiegare perché la maggior parte degli strumenti usati per la rivelazione e la misura di onde elettromagnetiche si accoppiano alla componente elettrica dell'onda. È sbagliato, tuttavia, dire che la componente elettrica di un'onda

ISBN 88-408-0777-2

elettromagnetica è «più forte» della componente magnetica. Non si possono confrontare quantità che vengono misurate in unità di misura differenti. Come si è visto, la componente elettrica e quella magnetica sono da considerarsi perfettamente equivalenti per quanto riguarda la propagazione dell'onda. Le loro energie medie, che si *possono* confrontare, sono esattamente uguali.

41-5 QUANTITÀ DI MOTO E PRESSIONE DI RADIAZIONE *(Facoltativo)*

Oltre a trasportare energia, le onde elettromagnetiche possono anche trasportare quantità di moto. In altri termini, è possibile esercitare una pressione (una *pressione di radiazione**) su un oggetto illuminandolo. Tali forze devono essere piccole rispetto alle forze che si incontrano nella normale esperienza quotidiana perché normalmente non le si notano. Dopo tutto, non si cade all'indietro quando si apre la tapparella ad una finestra in una stanza buia e ci si lascia illuminare dal Sole. Gli effetti della pressione di radiazione, tuttavia, sono importanti nei cicli vitali delle stelle a causa delle temperature incredibilmente alte (2×10^7 K nel caso del Sole) che si attribuiscono ai nuclei stellari. Le prime misure di pressione di radiazione vennero eseguite nel 1901-1903 da Nichols e Hull negli Stati Uniti e da Lebedev in Russia, circa 30 anni dopo che l'esistenza di tali effetti era stata predetta teoricamente da Maxwell.

Si faccia incidere un fascio di luce parallelo su un oggetto per un tempo t, e si supponga che tale luce incidente venga *completamente assorbita* dall'oggetto. Il campo elettrico della luce fa sì che le cariche (gli elettroni) nel materiale si muovano in direzione perpendicolare alla direzione del fascio. La forza $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ su queste cariche in moto dovuta al campo *magnetico* della luce è rivolta nella direzione del fascio. L'assorbimento della luce corrispondentemente trasferisce quantità di moto nella direzione del fascio alle particelle dell'assorbitore. Se viene assorbita una energia U, la quantità di moto p fornita all'oggetto durante tale tempo t è data, secondo le previsioni di Maxwell, da

$$p = \frac{U}{c} \quad \text{(completamente assorbita)}, \tag{20}$$

dove c è la velocità della luce. La direzione di $\mathbf{p}$ è quella del fascio incidente. Più avanti in questo paragrafo si darà una dimostrazione rigorosa di questo risultato.

Se l'energia della luce U viene *completamente riflessa*, la quantità di moto trasferita sarà doppia rispetto al caso precedente, ovvero

$$p = \frac{2U}{c} \quad \text{(completamente riflessa)}. \tag{21}$$

Nello stesso modo, viene trasferita ad un oggetto una quantità di moto doppia nel caso che esso venga colpito da una palla da tennis perfettamente elastica rispetto a quando esso viene colpito da una palla perfettamente anelastica (diciamo un pezzo di stucco) di uguale massa e velocità. Se l'energia della luce U viene parzialmente riflessa e parzialmente assorbita, la quantità di moto trasferita è compresa tra U/c e $2U/c$.

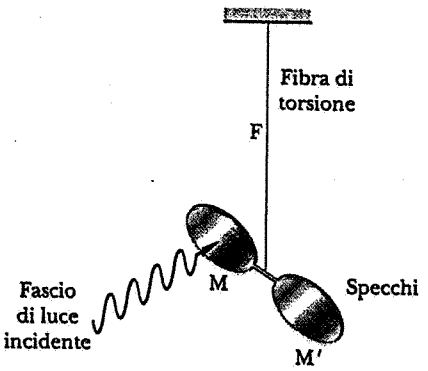


Figura 13 Il dispositivo di Nichols e Hull per misurare la pressione di radiazione. Molti dettagli di questo delicato esperimento sono stati trascurati nel disegno.

Nichols e Hull nel 1903 misurarono la pressione di radiazione e verificarono l'equazione 21 usando la tecnica della bilancia di torsione. Essi fecero in modo che la luce incidesse su uno specchio M come in figura 13; la pressione di radiazione provocò una rotazione dei bracci della bilancia di un angolo θ misurato, torcendo la fibra di torsione F. Nota la costante di torsione della fibra, gli sperimentatori poterono calcolare il valore numerico di questa pressione. Nichols e Hull misurarono l'intensità del loro fascio di luce facendolo incidere su un disco di metallo annerito, utilizzando il coefficiente di assorbimento noto e misurando l'aumento di temperatura del disco che ne risultava. In uno dei loro esperimenti essi misurarono una pressione di radiazione di 7.01×10^{-6} N/m^2; per il fascio di luce da loro impiegato, il valore previsto, usando l'equazione 21, era di 7.05×10^{-6} N/m^2, in perfetto accordo. Assumendo una superficie dello specchio di 1 cm^2, tale valore corrisponde ad una forza sullo specchio di soli 7×10^{-10} N, una forza notevolmente piccola.

Il successo dell'esperimento di Nichols e Hull dipese in gran parte dalla cura con cui essi cercarono di eliminare gli effetti spuri di deflessione determinati dalle variazioni nella distribuzione delle velocità delle molecole del gas attorno allo specchio. Queste variazioni erano causate dal piccolo aumento di temperatura dello specchio dovuto all'assorbimento di energia luminosa dal fascio incidente. Tale «effetto radiometrico» è quello che imprime la rotazione ai comuni radiometri giocattolo quando vengono posti in un fascio di luce solare. In un vuoto perfetto questi effetti non sarebbero presenti, ma nei vuoti più spinti ottenibili nel 1903 gli effetti radiometrici erano presenti e si dovette tenerli in conto in modo specifico nella progettazione dell'esperimento.

Esempio 2 Un fascio di luce di intensità $I(= \bar{S})$ di 12 W/cm^2 incide perpendicolarmente su uno specchio piano di 1.5 cm^2 di area. Che forza agisce sullo specchio?

Soluzione Dalla seconda legge di Newton, la forza media sullo specchio è data da

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

* Vedi Henry G.E., *Radiation Pressure*, «Scientific American», Giugno 1957, pag. 99; vedi inoltre Ashkin Arthur, *The Pressure of Laser Light*, «Scientific American», Febbraio 1972, pag. 63.

dove Δp è la quantità di moto trasferita allo specchio nel tempo Δt. Dall'equazione 21 si ottiene

$$\Delta p = \frac{2\,\Delta U}{c} = \frac{2\bar{S}A\,\Delta t}{c}.$$

Si ottiene quindi per la forza

$$F = \frac{2\bar{S}A}{c} = \frac{(2)(12 \times 10^4\ \mathrm{W/m^2})(1.5 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2})}{3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}$$
$$= 1.2 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}.$$

Questa è una forza molto piccola, circa uguale al peso di un granellino di sale da tavola molto piccolo. Si noti che la pressione esercitata dalla radiazione, che si può definire nel solito modo come forza per unità di superficie o F/A, è data da $2\bar{S}/c$.

Ricaviamo ora l'equazione 20 nel caso particolare di un'onda elettromagnetica piana che si propaga in direzione x e che incide su un grande foglio sottile di un materiale altamente resistivo come in figura 14. Una piccola parte dell'energia incidente viene assorbita all'interno del foglio, ma la maggior parte di essa viene trasmessa se il foglio è sufficientemente sottile. (Una parte dell'energia incidente viene anche riflessa, ma l'onda riflessa è di intensità talmente bassa da poter essere trascurata nella derivazione che segue.)

I vettori **E** e **B** dell'onda incidente variano nel tempo sulla lamina secondo la

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \operatorname{sen}\omega t \tag{22}$$

e la

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_m \operatorname{sen}\omega t, \tag{23}$$

dove il verso di **E** e **B** è alternativamente concorde e discorde rispettivamente con quello degli assi y e z.

Nel paragrafo 32-5 si è visto che l'effetto di una forza ($= -eE$) elettrica (costante) su un elettrone di conduzione in un metallo era quello di farlo muovere alla velocità (costante) di deriva v_d. L'elettrone si comporta come se si trovasse immerso in un fluido viscoso, di modo che la forza elettrica che agisce su di esso viene controbilanciata da una forza «viscosa», che può essere considerata proporzionale alla velocità dell'elettrone. Così, per un campo costante E, dopo che si è raggiunto l'equilibrio,

$$eE = bv_d, \tag{24}$$

dove b è un coefficiente di smorzamento resistivo. La velocità di equilibrio dell'elettrone, tralasciando il pedice d, è quindi

$$v = \frac{eE}{b}. \tag{25}$$

Se il campo elettrico applicato varia nel tempo e se la variazione è sufficientemente lenta, la velocità dell'elettrone può adeguarsi in continuazione al valore di E in modo che la sua velocità continua ad essere data essenzialmente dal suo valore di equilibrio (eq. 25) in ogni istante. Questo adeguamento viene raggiunto più velocemente in un mezzo di maggiore viscosità, proprio come una pietra che cade in aria raggiunge la velocità di equilibrio di caduta solo relativamente lentamente mentre una che cade in un olio viscoso la raggiunge piuttosto rapidamente. Si supporrà che il foglio di figura 14 sia così viscoso, cioè, che la sua resistività sia così elevata, che l'equazione 25 sia verificata anche per le rapide oscillazioni di E nel fascio di luce incidente.

Poiché l'elettrone oscilla parallelamente all'asse y, esso è soggetto ad una *seconda* forza dovuta alla componente *magnetica* dell'onda. Questa forza $\mathbf{F}_x$ ($= -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) è rivolta in direzione x, essendo perpendicolare al piano individuato da **v** e **B**, cioè, il piano yz. Il modulo istantaneo di $\mathbf{F}_x$ è dato da

$$F_x = evB = \frac{e^2EB}{b}. \tag{26}$$

$\mathbf{F}_x$ è diretta sempre nel verso delle x crescenti perché **v** e **B** invertono le loro direzioni simultaneamente; questa forza è, in effetti, il meccanismo attraverso il quale la pressione di radiazione agisce sul foglio di figura 14.

Dalla seconda legge di Newton, F_x è uguale alla velocità dp_e/dt con cui l'onda incidente trasferisce quantità di moto a ciascun elettrone del foglio, ovvero

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{e^2EB}{b}. \tag{27}$$

La quantità di moto viene fornita con questo ritmo ad ogni elettrone del foglio e quindi al foglio stesso. Bisogna ancora mettere in relazione la quantità di moto trasferita al foglio e l'assorbimento di energia all'interno del foglio.

La componente elettrica dell'onda incidente fa un lavoro su ciascun elettrone oscillante con una potenza istantanea data da

$$\frac{dU_e}{dt} = F_E v = (eE)\left(\frac{eE}{b}\right) = \frac{e^2E^2}{b}.$$

Si noti che la forza magnetica $\mathbf{F}_x$, essendo sempre ortogonale alla velocità **v**, non compie alcun lavoro sugli elettroni oscillanti. L'equazione 7 mostra che per un'onda piana nello spazio libero B ed E sono legati da

$$E = Bc.$$

Sostituendo quest'espressione per uno degli E nella formula precedente si ottiene

$$\frac{dU_e}{dt} = \frac{e^2EBc}{b}. \tag{28}$$

Questa equazione rappresenta la potenza assorbita per elettrone.

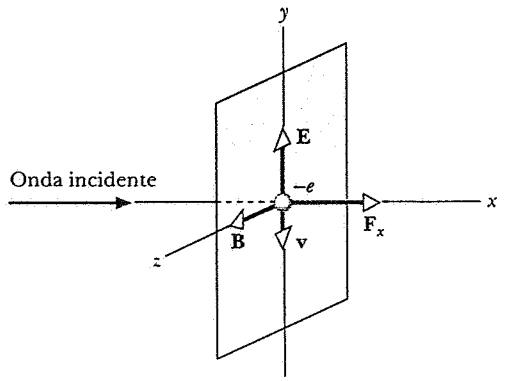


Figura 14 Un'onda incidente piana luminosa agisce su un elettrone in un sottile foglio resistivo. Sono mostrati i valori istantanei di **E**, **B**, della velocità **v** e della forza di radiazione $\mathbf{F}_x$.

ISBN 88-408-0777-2

Confrontando le equazioni 27 e 28 si ricava che

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dU_e}{dt}.$$

Integrando si ottiene

$$\int \frac{dp_e}{dt}\,dt = \frac{1}{c}\int \frac{dU_e}{dt}\,dt,$$

ovvero

$$p_e = \frac{U_e}{c}, \tag{29}$$

dove p_e è la quantità di moto fornita ad un singolo elettrone in un dato tempo t ed U_e è l'energia assorbita da quell'elettrone nello stesso intervallo di tempo. Moltiplicando entrambi i membri per il numero di elettroni liberi nel foglio si ottiene l'equazione 20.

Sebbene l'equazione 29 sia stata ricavata per un tipo particolare di assorbitore, nessuna caratteristica dell'assorbitore – per esempio, il coefficiente di smorzamento resistivo b – rimane nell'espressione finale. Ciò è quello che dovrebbe essere perché l'equazione 29 è una proprietà generale della radiazione assorbita da un materiale *qualsiasi*. ■

DOMANDE

1. Onde elettromagnetiche giungono fino a noi dalle più lontane profondità dello spazio. Dalle informazioni che esse ci portano, è possibile dire che aspetto abbia in questo momento l'universo? E in un qualsiasi momento fissato del passato?
2. Se ad un esame vi venisse chiesto che frazione dello spettro elettromagnetico si trova nell'intervallo del visibile, cosa rispondereste?
3. Elencare diversi aspetti in cui le onde radio differiscono dalle onde luminose visibili. Cosa hanno invece in comune?
4. Come si potrebbe caratterizzare la radiazione elettromagnetica con una frequenza di 10 kHz? e di 10^{20} Hz? e con una lunghezza d'onda di 500 nm? e di 10 km? e di 0.50 nm?
5. Cosa determina la lunghezza e l'orientazione ottimali della antenna a «orecchie di coniglio» su un set televisivo?
6. Come fa un forno a microonde a cuocere il cibo? In un forno di questo tipo è possibile far bollire dell'acqua in un sacchetto di plastica. Come è possibile ciò?
7. Parlando in modo non rigoroso si può dire che le componenti elettrica e magnetica di un'onda elettromagnetica propagantesi «si alimentano l'un l'altra.» Cosa significa?
8. «In un'onda elettromagnetica che si propaga vi sono correnti di spostamento e la componente magnetica dell'onda può essere associata a queste correnti.» È vera questa affermazione? Discutere dettagliatamente.
9. Un'onda elettromagnetica può venir deflessa da un campo magnetico? E da un campo elettrico?
10. Perché è necessaria la modificazione di Maxwell alla legge di Ampère (cioè il termine $\mu_0\epsilon_0\, d\Phi_E/dt$ della tabella 2 del capitolo 40) per comprendere la propagazione delle onde elettromagnetiche?
11. È concepibile che la teoria dell'elettromagnetismo possa un giorno riuscire a predire il valore di c (3×10^8 m/s) non in termini di μ_0 ed ϵ_0, ma direttamente e numericamente senza ricorrere ad alcuna misura?
12. Se si dovesse calcolare il vettore di Poynting in vari punti all'interno ed intorno ad un trasformatore, che andamento del campo ci si aspetterebbe di trovare? Si supponga che ai capi dell'avvolgimento primario sia applicata una differenza di potenziale alternata e che ai capi del secondario sia collegato un carico resistivo.
13. Citare due esperimenti storici, oltre alla misura della pressione di radiazione di Nichols e Hull, in cui venne usata una bilancia di torsione. Entrambi sono descritti in questo libro, uno nel volume 1 e l'altro nel volume 2.
14. Nel paragrafo 41-5 si è detto che la forza che agiva sullo specchio nell'esperimento della pressione di radiazione di Nichols e Hull (vedi fig. 13) era di circa 7×10^{-10} N. Si individui un oggetto il cui peso sulla superficie terrestre sia dello stesso ordine di grandezza.
15. È possibile che un oggetto assorba energia luminosa senza che ad esso venga trasferita della quantità di moto? Se sì, fornire un esempio. Se no, spiegare perché.
16. Quando si accende un lampeggiatore fotografico, esso è sottoposto a qualche forza dovuta all'emissione di luce?
17. Alle onde elettromagnetiche sono state associate energia e quantità di moto. Vi è anche un momento angolare?
18. Che relazione c'è, sempre che ve ne sia una, tra l'intensità I di un'onda elettromagnetica ed il modulo S del vettore di Poynting ad essa associato?
19. Quando ci si riposa al sole su una sedia a sdraio, perché ci si accorge dell'energia termica che si riceve ma non ci si accorge affatto della quantità di moto che si riceve dalla stessa sorgente? È vero che quando si viene colpiti da una palla da baseball scagliata con grande forza ci si accorge dell'energia che si riceve ma non della quantità di moto?
20. Quando un fascio di luce collimato colpisce un oggetto, la quantità di moto trasferita è data dalle equazioni 20 e 21. Queste equazioni continuano a valere anche se la sorgente luminosa è in rapido moto di avvicinamento o di allontanamento, magari con una velocità di $0.1c$, rispetto all'oggetto?
21. Si ritiene che la pressione di radiazione ponga un limite superiore (di circa 100 M_{Sole}) alla massa di una stella. Spiegare.

PROBLEMI

Paragrafo 41-1 Lo spettro elettromagnetico

1. Si dimostri che i riferimenti di frequenza e di lunghezza d'onda di figura 1 obbediscono alla relazione $\nu\lambda = c$.
2. Il Progetto Seafarer era un ambizioso programma che prevedeva di costruire un'enorme antenna, nascosta sottoterra in un sito di circa 4000 miglia quadrate di superficie. Il suo scopo era quello di trasmettere segnali ai sommergibili mentre essi si trovavano immersi a grande profondità. Se la lunghezza d'onda efficace fosse stata di 1.0×10^4 raggi terrestri, quale sarebbe stata (*a*) la frequenza e (*b*) il periodo della radiazione emessa? Normalmente, le radiazioni elettromagnetiche non penetrano molto in profondità nei conduttori come l'acqua di mare. Riuscite a immaginare qualche ragione per cui una tale ELF (*extremely low frequency*, frequenza estremamente bassa) dovrebbe penetrare con maggior efficacia? Si pensi al caso limite di frequenza nulla. (Perché non trasmettere segnali a frequenza nulla?)
3. (*a*) La lunghezza d'onda dei raggi x più energetici prodotti quando gli elettroni accelerati a 18 GeV dall'acceleratore lineare di Stanford vanno a sbattere contro un bersaglio solido è di 0.067 fm. Qual è la frequenza di questi raggi x? (*b*) Un'onda radio VLF (*very low frequency*, frequenza molto bassa) ha una frequenza di solo 30 Hz. Qual è la sua lunghezza d'onda?
4. La radiazione di un certo laser HeNe, sebbene centrata sui 632.8 nm, ha una «larghezza di riga» finita di 0.010 nm. Calcolare la larghezza di riga in unità di frequenza.

Paragrafo 41-2 Generazione di un'onda elettromagnetica

5. Che induttanza è necessario accoppiare ad un condensatore da 17 pF per costruire un circuito oscillante in grado di generare onde elettromagnetiche da 550 nm (cioè nel visibile)? Commentare la risposta.
6. In figura 15 è illustrato un circuito oscillante *LC* collegato tramite una linea di trasmissione ad una antenna del tipo di dipolo *magnetico*. Confrontare con la figura 6, che mostra una disposizione simile ma con una antenna di tipo dipolo *elettrico*. (*a*) Cosa c'è alla base dei nomi di questi due tipi di antenna? (*b*) Tracciare delle figure analoghe alle figure 8 e 9 per descrivere l'onda elettromagnetica che passa dalla posizione dell'osservatore che si trova nel punto P in figura 15.

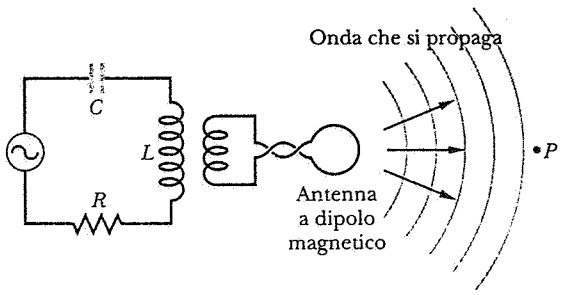


Figura 15 Problema 6.

Paragrafo 41-3 Onde elettromagnetiche ed equazioni di Maxwell

7. Si consideri un'onda piana il cui campo elettrico massimo sia di 321 μV/m. Si determini il suo campo magnetico massimo.
8. Si consideri un'onda piana il cui campo elettrico sia dato da $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = E_0 \operatorname{sen} k(x - ct)$, con $E_0 = 2.34 \times 10^{-4}$ V/m e $k = 9.72 \times 10^6$ m^{-1}. L'onda si propaga nel verso delle x crescenti. (*a*) Scrivere le espressioni delle componenti del campo magnetico dell'onda. (*b*) Determinare la lunghezza d'onda.
9. Partendo dalle equazioni 5 e 9 si dimostri che $E(x,t)$ e $B(x,t)$, le componenti elettrica e magnetica di un'onda elettromagnetica piana che si propaga, devono soddisfare le «equazioni delle onde»

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}.$$

10. (*a*) Dimostrare che le equazioni 1 e 2 soddisfano le equazioni delle onde mostrate nel problema 9. (*b*) Dimostrare che anche qualsiasi coppia di espressioni della forma

$$E = E_m f(kx \pm \omega t)$$

e

$$B = B_m f(kx \pm \omega t),$$

dove $f(kx \pm \omega t)$ denota una funzione arbitraria, soddisfa tali equazioni delle onde.

Paragrafo 41-4 Trasporto di energia e vettore di Poynting

11. I laser al neodimio oggi in funzione possono fornire 100 TW di potenza in impulsi di 1.0 ns ad una lunghezza d'onda di 0.26 μm. Quanta energia è contenuta in un singolo impulso?
12. Si dimostri, determinando l'orientamento del vettore di Poynting S, che l'orientamento dei campi elettrici e magnetici in tutti i punti nelle figure 8, 9, 10 e 11 sono in accordo in ogni istante con le direzioni di propagazione assunte.
13. La stella a noi più vicina, α-Centauri, dista 4.30 anni luce. È stato suggerito che i programmi televisivi del nostro pianeta abbiano raggiunto questa stella e siano stati visti dagli ipotetici abitanti di un ipotetico pianeta orbitante attorno a tale stella. Una stazione televisiva sulla Terra ha una potenza in uscita di 960 kW. Si determini l'intensità del suo segnale su α-Centauri.
14. Si consideri un'onda elettromagnetica piana che si propaga nel verso delle y decrescenti. In un certo punto e in un certo istante, il campo magnetico sia rivolto nel verso delle z crescenti ed abbia un modulo di 28 nT. Quali sono la direzione e il modulo del campo elettrico in quel punto ed in quell'istante?
15. L'intensità della radiazione solare diretta che non è stata assorbita dall'atmosfera un certo giorno d'estate è di 130 W/m^2. A che distanza da una stufetta elettrica da 1.0 kW bisogna stare per sentire la stessa intensità? Si supponga che la stufetta irraggi uniformemente in tutte le direzioni.
16. (*a*) Si dimostri che in un'onda elettromagnetica che si propa-

ISBN 88-408-0777-2

ga l'intensità media, cioè il trasporto medio di energia per unità di superficie, è dato da

$$\overline{S} = \frac{cB_m^2}{2\mu_0}.$$

(*b*) Qual è l'intensità media di un'onda elettromagnetica che si propaga se B_m, il valore massimo della sua componente magnetica, è di 1.0×10^{-4} T (= 1.0 gauss)?

17. Si supponga di camminare per 162 m verso un lampione e di trovare che l'intensità cresce fino a essere 1.50 volte l'intensità nella posizione di partenza. (*a*) A che distanza dal lampione ci si trovava inizialmente? (Il lampione irraggia uniformemente in tutte le direzioni.) (*b*) Si può determinare la potenza irraggiata dal lampione? Se no, spiegare il perché.
18. Si dimostri che, in qualunque punto di un'onda elettromagnetica come quella di figura 10, la densità di energia immagazzinata nel campo elettrico è uguale a quella immagazzinata nel campo magnetico.
19. Il campo elettrico massimo a 11.2 m di distanza da una sorgente luminosa puntiforme è di 1.96 V/m. Calcolare (*a*) il valore massimo del campo magnetico, (*b*) l'intensità e (*c*) la potenza irraggiata dalla sorgente.
20. La luce solare colpisce la Terra, appena fuori dalla sua atmosfera, con un'intensità di 1.38 kW/m^2. Calcolare (*a*) E_m e (*b*) B_m per la luce solare, supponendo che essa sia un'onda piana.
21. Si consideri un cubo di lato *a*, i cui spigoli siano paralleli agli assi *x*, *y* e *z* di un sistema di coordinate rettangolari. Parallelo all'asse *y* vi sia un campo elettrico uniforme **E** e parallelo all'asse *x* vi sia un campo magnetico uniforme **B**. Calcolare (*a*) Il flusso di energia per unità di tempo attraverso ogni faccia del cubo, utilizzando il punto di vista del vettore di Poynting e (*b*) la potenza istantanea immagazzinata nel cubo.
22. La radiazione emessa da un laser non è esattamente un fascio parallelo; piuttosto, il fascio si allarga a forma di cono con sezione circolare. L'angolo θ del cono (vedi fig. 16) viene detto *divergenza angolare totale del fascio*. Un laser ad argon da 3.85 kW, che irraggia a 514.5 nm, è puntato verso la Luna per un esperimento di misura di distanze; il fascio del laser ha una divergenza angolare totale di 0.880 μrad. Determinare l'intensità del fascio sulla superficie lunare.

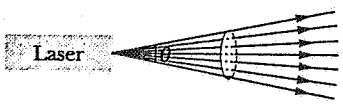


Figura 16 Problema 22.

23. Un laser a HeNe, che emette radiazione a 632.8 nm, irraggia una potenza di 3.10 mW ed il suo fascio ha una divergenza angolare totale (vedi prob. 22) di 172 μrad. (*a*) Determinare l'intensità del fascio a 38.2 m dal laser. (*b*) Quale sarebbe la potenza irraggiata da una sorgente isotropa che fornisca la medesima intensità alla stessa distanza?
24. Frank D. Drake, un ricercatore che prende parte attiva al programma SETI (*Search for Extra-Terrestrial Intelligence*, cioè ricerca di intelligenze extraterrestri), ha detto che il grande telescopio di Arecibo, Porto Rico, «può rivelare un segnale che deposita sull'intera superficie terrestre una potenza di un solo picowatt.» Vedi figura 17. (*a*) Qual è l'potenza che viene ricevuta dall'antenna di Arecibo nel caso di tale segnale? Il diametro dell'antenna è di 305 m. (*b*) Quale sarebbe la potenza irraggiata da una sorgente al centro della nostra galassia in grado di fornire un simile segnale? Il centro della galassia dista da noi 2.3×10^4 anni luce. Si supponga che la sorgente irraggi uniformemente in tutte le direzioni.



Figura 17 Problema 24.

25. Un aeroplano che si trova in volo a 11.3 km da un radiotrasmettitore riceve un segnale di 7.83 μW/m^2. Si calcoli (*a*) l'ampiezza del campo elettrico del segnale nel punto in cui si trova l'aeroplano; (*b*) l'ampiezza del campo magnetico del segnale nel punto in cui si trova l'aeroplano; (*c*) la potenza totale irraggiata dal trasmettitore, supponendo che esso irraggi uniformemente in tutte le direzioni.
26. Durante una prova, un sistema di sorveglianza radar della NATO, funzionante a 12 GHz con una potenza in uscita di 183 kW, cerca di rivelare un aeroplano «nemico» in avvicinamento ad una distanza di 88.2 km. L'aeroplano bersaglio è disegnato in modo da avere un'area efficace per la riflessione di onde radar di 0.222 m^2, un'area molto piccola. Si supponga che il segnale radar si diffonda in maniera isotropa nel semispazio anteriore sia quando viene trasmesso che quando viene riflesso e si trascuri l'assorbimento dell'atmosfera. Calcolare, per il segnale riflesso che si riceve nella postazione radar, (*a*) l'intensità, (*b*) il valore massimo del vettore campo elettrico e (*c*) il valore quadratico medio del campo magnetico.
27. L'intensità media della luce solare, che cade ad incidenza normale subito fuori dall'atmosfera della Terra, varia durante l'anno a causa della variazione della distanza Terra-Sole. Si dimostri che la variazione relativa annuale è data circa da $\Delta I/I = 4e$, dove *e* è l'eccentricità dell'orbita ellittica della Terra attorno al Sole.
28. Attraverso un filo di rame (diametro = 2.48 mm; resistenza 1.00 Ω ogni 300 m) scorre una corrente di 25.0 A. Calcolare (*a*) il campo elettrico, (*b*) il campo magnetico e (*c*) il modulo del vettore di Poynting per un punto sulla superficie del filo.
29. Si consideri la possibilità di onde elettromagnetiche stazionarie:

$$E = E_m(\text{sen}\omega t)(\text{sen}kx),$$
$$B = B_m(\cos\omega t)(\cos kx).$$

(*a*) Si dimostri che queste soddisfano le equazioni 5 e 9 se E_m

è opportunamente in relazione con B_m e se ω è opportunamente in relazione con k. Quali sono queste relazioni? (*b*) Si determini il vettore (istantaneo) di Poynting. (*c*) Si dimostri che il flusso medio di potenza attraverso una superficie qualsiasi è nullo. (*d*) Si descriva il flusso di energia in questa situazione.

30. Un cavo coassiale (raggio interno a, raggio esterno b) viene usato come linea di trasmissione tra una batteria $\mathcal{E}$ e un resistore R, come mostrato in figura 18. (*a*) Calcolare E e B per $a < r < b$. (*b*) Calcolare il vettore di Poynting S per $a < r < b$. (*c*) Integrando opportunamente il vettore di Poynting, si dimostri che la potenza totale che fluisce attraverso la sezione anulare $a < r < b$ è $\mathcal{E}^2/R$. È ciò ragionevole? (*d*) Si dimostri che il verso di S è sempre dalla batteria al resistore, indipendentemente da come è collegata la batteria.

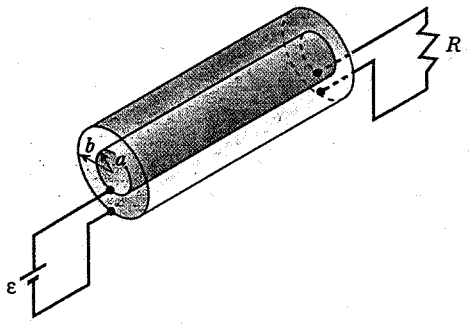


Figura 18 Problema 30.

31. La figura 19 rappresenta un condensatore a piatti paralleli sotto carica. (*a*) Si dimostri che il vettore di Poynting S è rivolto ovunque radialmente in verso entrante nel volume cilindrico. (*b*) Si dimostri che il ritmo con cui l'energia entra in questo volume, calcolata integrando il vettore di Poynting sulla superficie cilindrica di questo volume, è uguale al ritmo con cui aumenta l'energia elettrostatica immagazzinata; cioè

$$\int \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = Ad\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\right),$$

dove Ad è il volume del condensatore e $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ è la densità di energia per tutti i punti all'interno di tale volume. Questa analisi mostra che, secondo il punto di vista del vettore di Poynting, l'energia immagazzinata in un condensatore non entra dai fili, ma attraverso lo spazio attorno ai fili e ai piatti. (*Suggerimento*: per determinare S bisogna dapprima determinare **B**, che è il campo magnetico generato dalla corrente di spostamento durante il processo di carica; vedi figura 2 del capitolo 40. Si trascurino gli effetti di bordo sulle linee di forza di **E**.)

Paragrafo 41-5 Quantità di moto e pressione di radiazione

32. Supponete di stare sdraiati al sole per 2.5 h, esponendo una superficie di 1.3 m^2 a 90° rispetto ai raggi del Sole di 1.1 kW/m^2. Supponendo un assorbimento totale dei raggi, che quantità di moto viene trasferita al vostro corpo?
33. Si dimostri (*a*) che la forza F esercitata da un fascio laser di intensità I su un oggetto perfettamente riflettente di area A perpendicolare al fascio è data da $F = 2IA/c$ e (*b*) che la pressione è $P = 2I/c$.

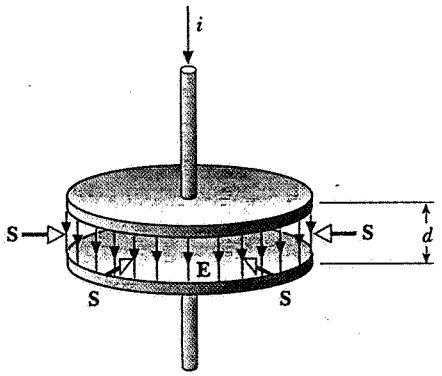


Figura 19 Problema 31.

34. Laser ad alta potenza vengono impiegati per comprimere i plasmi per mezzo della pressione di radiazione. Se la densità di elettroni è sufficientemente elevata la riflettività di un plasma è unitaria. Un laser che genera impulsi di radiazione di potenza di picco di 1.5 GW viene focalizzato su 1.3 mm^2 di plasma ad alta densità di elettroni. Determinare la pressione esercitata sul plasma.
35. (*a*) Si dimostri che l'intensità media della radiazione solare che cade perpendicolarmente su una superficie appena fuori dall'atmosfera terrestre è di 1.38 kW/m^2. (*b*) Che pressione di radiazione viene esercitata su questa superficie, supponendo un assorbimento completo? (*c*) Confrontare questa con la pressione atmosferica al livello del mare, che è di 101 kPa.
36. La radiazione solare che colpisce la Terra ha una intensità di 1.38 kW/m^2. (*a*) Supponendo che la Terra si comporti come un disco piatto perpendicolare ai raggi solari e che tutta l'energia incidente venga assorbita, calcolare la forza che agisce sulla Terra dovuta alla pressione di radiazione. (*b*) Confrontarla con la forza dovuta all'attrazione gravitazionale del Sole calcolando il rapporto F_{rad}/F_{grav}.
37. Calcolare la pressione di radiazione ad una distanza di 1.50 m da una lampadina da 500 W. Supporre che la superficie su cui viene esercitata la pressione sia disposta ortogonalmente alla congiungente con la lampadina, che sia perfettamente assorbente e che la lampadina irraggi uniformemente in tutte le direzioni.
38. Un'onda elettromagnetica piana, di 3.18 m di lunghezza d'onda, viaggia nello spazio libero in direzione $+x$ con il suo vettore campo elettrico **E**, di 288 V/m di ampiezza, parallelo all'asse y. (*a*) Qual è la frequenza dell'onda? (*b*) Quali sono la direzione e l'ampiezza del campo magnetico associato all'onda? (*c*) Se $E = E_m \sin(kx - \omega t)$, quanto valgono k e ω? (*d*) Determinare l'intensità dell'onda. (*e*) Se l'onda colpisce un foglio perfettamente assorbente di area 1.85 m^2, a che velocità viene trasferita quantità di moto al foglio e qual è la pressione di radiazione esercitata sul foglio?
39. Si dimostri che il vettore $c\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ha le dimensioni di quantità di moto/(superficie · tempo). mentre $(1/\mu_0)\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ha le dimensioni di energia/(superficie · tempo). (Il vettore $c\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ può essere usato per calcolare il flusso di quantità di moto esattamente nello stesso modo in cui $\mathbf{S} = (1/\mu_0)\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ viene impiegato per calcolare il flusso di energia.)
40. Una radiazione di intensità I incide normalmente su un oggetto che ne assorbe una frazione f e ne riflette il resto. Qual è la pressione di radiazione?

ISBN 88-408-0777-2

41. Si dimostri che, per un'onda piana ad incidenza normale su una superficie piana, la pressione di radiazione sulla superficie è uguale alla densità di energia nel fascio fuori dalla superficie. Questa relazione vale indipendentemente da che frazione dell'energia incidente viene riflessa.
42. Si dimostri che, per un flusso di proiettili che colpisce con incidenza normale una superficie piana, la «pressione» è il doppio della densità di energia cinetica nel flusso subito prima della superficie; si supponga che i proiettili vengano completamente assorbiti dalla superficie. Confrontare ciò con il comportamento della luce; vedi problema 41.
43. Una piccola navicella spaziale la cui massa, occupanti compresi, è di 1500 kg sta viaggiando alla deriva nello spazio esterno, dove il campo gravitazionale è trascurabile. Se un'astronauta accendesse un fascio laser da 10.0 kW, che velocità raggiungerebbe la navicella in un giorno a causa della forza di reazione associata alla quantità di moto portata via dal fascio?
44. Si consideri un laser a elio-neon del tipo che si trova spesso nei laboratori di fisica, capace di irraggiare 5.00 mW di potenza ad una lunghezza d'onda di 633 nm. Il fascio venga focalizzato da una lente in una zona circolare il cui diametro efficace si può considerare di 2.10 lunghezze d'onda. Calcolare (*a*) l'intensità del fascio focalizzato, (*b*) la pressione di radiazione esercitata su una piccola sfera, perfettamente assorbente, il cui diametro è uguale a quello della zona su cui è focalizzato il fascio, (*c*) la forza esercitata su tale sfera e (*d*) l'accelerazione che ad essa viene impartita. Si assuma una densità della sfera di 4.88 g/cm^3.
45. Si consideri un laser che irraggi una potenza di 4.6 W e il cui fascio abbia un diametro di 2.6 mm. Se il fascio viene puntato verticalmente verso l'alto, che altezza H deve avere un cilindro perfettamente riflettente affinchè esso possa «rimanere sospeso» sostenuto dalla pressione di radiazione esercitata dal fascio? Si assuma per il cilindro una densità di 1.2 g/cm^3. Vedi figura 20.
46. È stato proposto che un navicella potrebbe essere spinta nel sistema solare dalla pressione di radiazione, usando una grande vela fatta di lamina metallica. Quanto deve essere grande la vela se la forza della radiazione deve essere uguale in modulo alla forza gravitazionale esercitata dal Sole? Si assuma una massa della navicella di 1650 kg, che la vela sia perfettamente riflettente e che la vela sia disposta perpendicolarmente ai raggi del Sole. Vedi appendice C per i dati necessari.

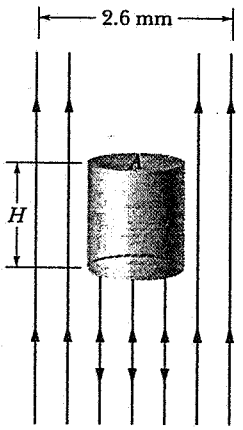


Figura 20 Problema 45.

47. Verificare il valore della forza della radiazione sulla navicella solare *Diana*, descritta nel problema 9 del capitolo 5.
48. Una particella nel sistema solare si trova sottoposta alla azione combinata della attrazione gravitazionale del Sole e della forza della radiazione dovuta ai raggi del Sole. Si supponga che la particella sia una sfera di densità 1.00 g/cm^3 e che la radiazione incidente venga assorbita. (*a*) Si dimostri che tutte le particelle il cui raggio è inferiore ad un certo raggio critico R_0 verranno espulse dal sistema solare. (*b*) Si calcoli R_0. Si noti che R_0 non dipende dalla distanza della particella dal Sole.

Capitolo 42

LA NATURA E LA PROPAGAZIONE DELLA LUCE

Non vi è nulla nella sua natura fondamentale che distingua la luce da una qualsiasi altra onda elettromagnetica. La descrizione delle onde elettromagnetiche data nel capitolo precedente si applica altrettanto bene alle onde luminose. Ciò che distingue la luce dalle altre onde elettromagnetiche è il fatto che noi abbiamo dei rivelatori (gli occhi) che sono sensibili solo alla radiazione elettromagnetica che si trova nel piccolo intervallo di lunghezze d'onda che va da circa 400 nm (violetto) a circa 700 nm (rosso).

In questo capitolo, si discuteranno alcune caratteristiche delle onde luminose, tra cui le sorgenti di radiazione visibile, la velocità di propagazione nel vuoto e nella materia e l'effetto Doppler per la luce che si ha quando la sorgente e l'osservatore si trovano in moto relativo. Nei capitoli seguenti ci si occuperà dell'ottica, che continua lo studio della propagazione della luce. Questo capitolo serve da collegamento tra le discussioni precedenti sulle onde elettromagnetiche in generale e le discussioni che seguiranno sull'ottica. Tuttavia, si tenga in mente che molto di ciò che si studierà in questo capitolo si applica altrettanto bene ad altri tipi di onde elettromagnetiche.

42-1 LA LUCE VISIBILE

Si può definire operativamente la luce visibile come quella radiazione elettromagnetica a cui l'occhio è sensibile. La sensibilità di osservatori individuali può variare, ma tipicamente l'uomo è in grado di vedere la radiazione nell'intervallo di lunghezze d'onda che va da 400 nm a 700 nm (che corrisponde all'intervallo di frequenze che va da 7×10^{14} a 4×10^{14} Hz. All'interno di questo intervallo, la sensibilità a differenti lunghezze d'onda non è affatto costante. La figura 1 riporta una rappresentazione della variazione della sensibilità di un osservatore standard a radiazioni di differente lunghezza d'onda ma di uguale intensità sulla regione visibile dello spettro. La massima sensibilità si ha nei dintorni di 555 nm, che corrisponde ad una luce di colore giallo-verde. I limiti della regione visibile non sono ben definiti perché la curva tende a zero asintoticamente sia per lunghezze d'onda lunghe che per lunghezze d'onda corte. I limiti che corrispondono a una sensibilita uguale ad un 1% di quella di picco sono 430 nm (violetto) e 690 nm (rosso). Si tenga presente che la figura 1 è corretta solo per un osservatore umano standard; gli occhi degli animali possono avere sensibilità differenti e apparecchiature elettroniche possono avere curve di sensibilità più larghe o più strette.* (Si confronti l'intervallo di lunghezze d'onda del visibile, con l'intervallo di lunghezze d'onda o di frequenze udibili mostrato in figura 4 del capitolo 20: nel primo caso il rapporto tra gli estremi superiore ed

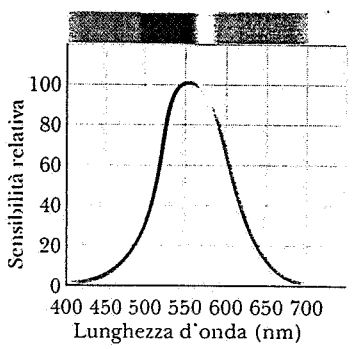


Figura 1 La sensibilità relativa dell'occhio umano in funzione della lunghezza d'onda.

* L'assegnazione di colori alle varie regioni dello spettro visibile è piuttosto arbitraria, perché il colore è fondamentalmente una catalogazione psicologica piuttosto che una qualità fisica. Proprio come non vi è alcuna differenza fisica fondamentale tra la luce e le altre onde elettromagnetiche, non vi è alcuna differenza fisica fondamentale tra la luce blu e la luce rossa. Per un approfondimento sulla percezione del colore, vedi Edwin H. Land, *The Retinex Theory of Color Vision*, «Scientific American», Dicembre 1977, pag. 108; e David H. Hubel, *Eye, Brain and Vision*, Scientific American Library Series, 1988, cap. 8.

ISBN 88-408-0777-2

inferiore dell'intervallo di sensibilità superiore all'1% è minore di 2, mentre nel secondo caso è superiore a 100.)

Le sorgenti di luce visibile dipendono in definitiva dal moto di elettroni. Gli elettroni appartenenti ad atomi possono venir portati dal loro stato ad energia minima a stati superiori in vari modi, ad esempio riscaldando la sostanza o facendola attraversare da una corrente. Quando infine gli elettroni ricadono sui loro stati fondamentali, gli atomi emettono radiazione che può essere nella regione visibile dello spettro. L'emissione di luce visibile è particolarmente probabile quando gli elettroni che compiono le transizioni sono quelli esterni (di valenza).

La sorgente di luce visibile più familiare è il Sole. La sua superficie emette radiazione in tutto l'intero spettro elettromagnetico, ma la sua radiazione più intensa si trova nella regione che abbiamo definito come visibile e il picco di intensità della luce solare si ha ad una lunghezza d'onda di 550 nm, che corrisponde precisamente al picco di sensibilità dell'osservatore standard (vedi fig. 1). Ciò suggerisce che, attraverso la selezione naturale, i nostri occhi si siano evoluti in modo tale da adattare la loro sensibilità allo spettro del Sole.

Tutti gli oggetti emettono una radiazione elettromagnetica, detta *radiazione termica*, a causa della loro temperatura. Gli oggetti come il Sole, la cui radiazione termica è visibile, vengono detti *incandescenti*. Altri comuni oggetti incandescenti sono i filamenti delle normali lampadine e i tizzoni di brage che risplendono in un fuoco di carbonella. L'incandescenza è normalmente associata a oggetti caldi; tipicamente, sono necessarie temperature superiori ai 1000 °C.

È possibile anche che venga emessa luce da un oggetto freddo; questo fenomeno viene detto *luminescenza*. Esempi comuni sono le normali lampade fluorescenti, i lampi, i quadranti luminescenti di orologi e sveglie e i ricevitori televisivi. Nel caso di una lampada fluorescente, una corrente che viene fatta passare attraverso il gas nel tubo provoca la salita a livelli energetici superiori degli elettroni; quando gli elettroni tornano ai loro stati di energia originali emettono il loro eccesso di energia sotto forma di radiazione ultravioletta. Questa radiazione viene assorbita dagli atomi del rivestimento interno del tubo di vetro, che infine emettono radiazione visibile. Nel caso dei quadranti luminescenti degli orologi, è la luce *incidente* che provoca l'eccitazione.

Gli oggetti luminescenti possono essere divisi in due categorie a seconda della durata dell'emissione di luce dopo che la sorgente di eccitazione sia stata rimossa. Oggetti in cui l'emissione di luce cessa immediatamente (entro 10^{-8} s) dopo che l'eccitazione sia stata interrotta vengono detti *fluorescenti*, ad esempio, la lampada fluorescente. Gli oggetti che continuano a brillare per più di 10^{-8} s dopo l'interruzione dell'eccitazione (come il quadrante del'orologio) vengono detti *fosforescenti* e il materiale che provoca questo effetto viene detto un *fosforo* (fig. 2).

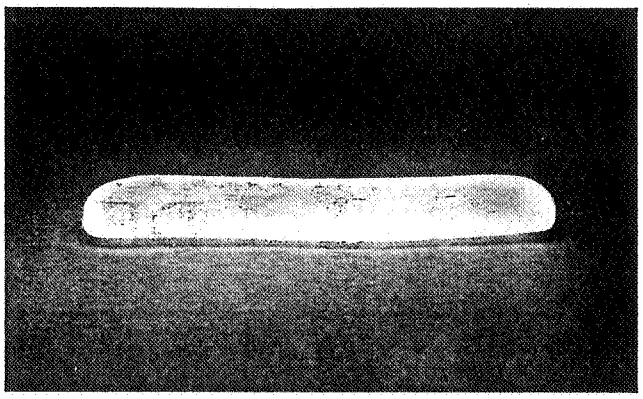


Figura 2 Un materiale fosforescente, un cristallo di borato di sodio, emette luce visibile quando assorbe radiazione ultravioletta.

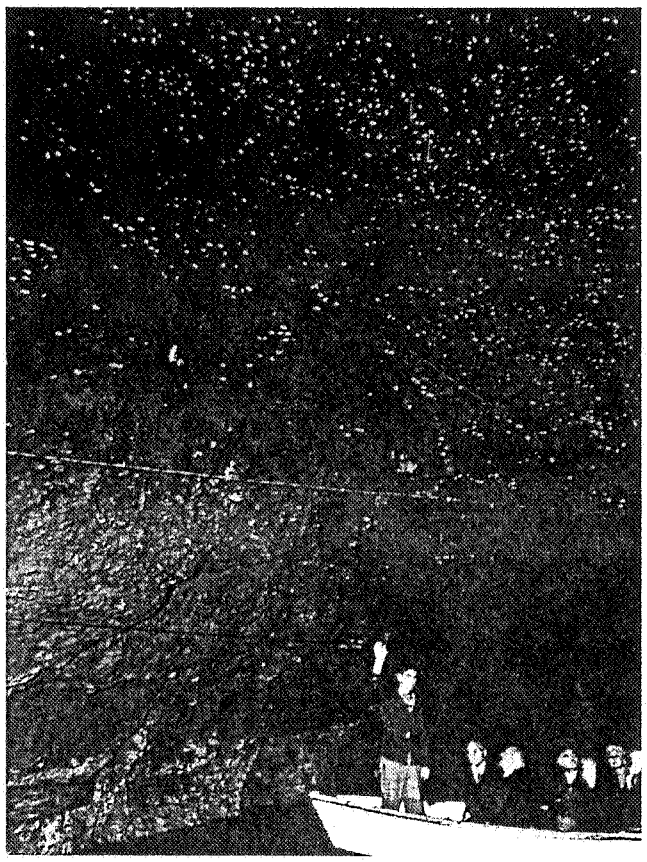


Figura 3 I punti luminosi sono lucciole in una caverna in Nuova Zelanda. La luce attira gli insetti, che vengono intrappolati e servono da cibo per le larve delle lucciole.

ISBN 88-408-0777-2

La luminescenza può avere un grande numero di cause. Quando l'energia che eccita gli atomi viene fornita da una reazione chimica, essa viene detta *chemiluminescenza*. Spesso l'effetto avviene in organismi viventi, come ad esempio nelle lucciole o in certi organismi marini, nel qual caso esso viene detto *bioluminescenza* (fig. 3). La luce può venire emessa quando certi cristalli, ad esempio lo zucchero, vengono spaccati; questo effetto, detto *triboluminescenza*, può venire osservato in una stanza buia rompendo tra i denti alcune particolari caramelle. Tra le altre cause di luminescenza vi sono la corrente elettrica (come nei lampi o nei diodi emettitori di luce - LED) e l'urto di particelle di grande energia (come nell'aurora boreale).

42-2 LA VELOCITÀ DELLA LUCE

Secondo la teoria di Maxwell, tutte le onde elettromagnetiche si propagano nel vuoto con la stessa velocità. Si chiama questa «velocità della luce», anche se essa vale per tutte le radiazioni elettromagnetiche, non solo per la luce. Questa velocità è una delle costanti fondamentali della natura. La conoscenza del suo valore preciso è importante per mettere in relazione la frequenza e la lunghezza d'onda delle onde elettromagnetiche (secondo la relazione $c = \lambda\nu$). All'inizio del ventesimo secolo, la precisione con cui venivano misurate le lunghezze d'onda era molto maggiore della precisione con cui era nota a quei tempi la velocità della luce, e di conseguenza la frequenza delle onde elettromagnetiche non poteva essere calcolata con grande precisione. (Per questo motivo le frequenze venivano generalmente espresse in unità di reciproco di lunghezza.) Al giorno d'oggi, le misure di frequenza (e quindi di intervalli di tempo) possono essere effettuate con una precisione maggiore delle misure di lunghezza; di conseguenza, il metro non è più un campione di misura fondamentale (vedi par. 1-4).

Fino al 17° secolo, si riteneva generalmente che la luce si propagasse istantaneamente; cioè si pensava che la velocità della luce fosse infinita. Galileo discusse questa questione nel suo famoso lavoro *Discorsi intorno a due nuove scienze*, pubblicato nel 1638. Egli presentò le sue argomentazioni sotto forma di dialogo tra diversi personaggi tra cui Simplicio (che rappresentava l'ignoranza scientifica) e Sagredo (che rappresentava la voce della ragione e probabilmente Galileo stesso):

SIMPLICIO: L'esperienza quotidiana ci mostra che la propagazione della luce è istantanea; infatti quando si guarda un pezzo di artiglieria sparare, a grande distanza, il lampo raggiunge i nostri occhi senza che trascorra alcun intervallo di tempo, mentre il suono raggiunge le nostre orecchie solo dopo un notevole intervallo di tempo.

SAGREDO: Bene, Simplicio, l'unica cosa che io riesco ad inferire da questa esperienza familiare è che il suono, nel raggiungere le nostre orecchie, viaggia più lentamente della luce; essa non mi dà alcuna informazione riguardo al fatto che l'arrivo della luce sia instantaneo piuttosto che esso richieda un intervallo di tempo finito, anche se molto breve.

Galileo quindi prosegue descrivendo un esperimento (che egli fece davvero) per misurare la velocità della luce. Egli ed un assistente si misero uno di fronte all'altro di notte, a circa un miglio di distanza, ciascuno con una lanterna che poteva essere coperta o scoperta a piacere. Galileo cominciò a scoprire la propria lanterna e l'assistente doveva scoprire la sua lanterna quando vedeva la luce di quella di Galileo. Galileo provò quindi a misurare l'intervallo di tempo tra l'istante in cui egli scopriva la sua lanterna e l'istante in cui la luce della lanterna dell'assistente lo raggiungeva. Anche se Galileo non riuscì a determinare un valore per la velocità della luce (dato che il tempo necessario alla luce per percorrere un miglio andata e ritorno è di circa 11 μs, molti ordini di grandezza inferiore al tempo di reazione umano), a lui viene attribuito il primo tentativo di misurare la velocità della luce.

Nel 1676, Ole Roemer, un astronomo danese che lavorava a Parigi, utilizzò alcune osservazioni astronomiche per dedurre che la velocità della luce è finita. La sua conclusione era basata su una discrepanza tra i tempi previsti e i tempi osservati dell'eclissi della luna più interna di Giove, Io (vedi prob. 6). Circa 50 anni più tardi James Bradley, un astronomo inglese, impie-

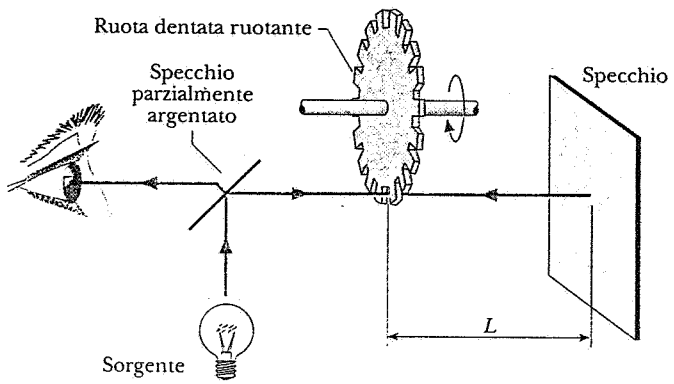


Figura 4 Una rappresentazione schematica dell'apparecchiatura di Fizeau per misurare la velocità della luce.

gò una tecnica differente basata sulla luce delle stelle ottenendo un valore di 3×10^8 m/s.

Il successivo miglioramento significativo della misura della velocità della luce non venne per più di un secolo. Nel 1849, il fisico francese Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) impiegò un dispositivo meccanico, illustrato in figura 4. In sostanza, un fascio di luce veniva fatto viaggiare lungo un percorso chiuso (di lunghezza $L = 8630$ m in ciascun verso), passando attraverso una ruota dentata sia all'andata che al ritorno. La ruota rotante taglia il fascio diretto verso lo specchio in brevi impulsi. Se durante il tempo che impiega l'impulso per percorrere il cammino fino allo specchio e ritorno, la ruota gira in modo che un dente blocchi il percorso della luce, l'osservatore non vede l'impulso. Quando ciò accade, il tempo $2L/c$ necessario al fascio di luce per percorrere il cammino di andata e ritorno tra la ruota e lo specchio deve essere uguale al tempo θ/ω che impiega la ruota per ruotare alla velocità angolare ω dell'angolo θ compreso tra il centro di un dente ed il centro di un buco. Cioè

$$\frac{2L}{c} = \frac{\theta}{\omega}$$

ossia

$$c = \frac{2L\omega}{\theta}. \qquad (1)$$

Fasci pulsati vengono impiegati in modo simile per misurare le velocità di neutroni e di altre particelle. (Una variante di questo metodo venne impiegata per misurare la distribuzione delle velocità di Maxwell; vedi figura 12 del capitolo 24.)

Il risultato di Fizeau usando questo metodo fu di 3.133×10^8 m/s. Altri sperimentatori, tra cui il fisico statunitense Albert A. Michelson, usarono simili tecniche meccaniche tra la fine del 19° e l'inizio del 20° secolo. Il lavoro di Michelson fu notevole per la sua cura e la sua precisione ed egli venne insignito del premio Nobel per la fisica nel 1907 per le sue ricerche che impiegavano tecniche ottiche per effettuare misure molto precise. Il risultato di queste ricerche fu di ridurre fino a circa 1000 m/s l'incertezza con cui era noto il valore di c.

Lo sviluppo di tecniche elettroniche, specialmente quelle applicate alle microonde, permise negli anni '50 di effettuare una nuova classe di misure. Tali misure portarono risultati in accordo con quelli di Michelson ed avevano incertezze dello stesso ordine.

Il risultato importante che aprì la strada a nuove misure della velocità della luce si ebbe negli anni '70 con l'applicazione dei laser. Misurando direttamente la frequenza e la lunghezza d'onda, la velocità della luce si potè ottenere dalla relazione $c = \lambda\nu$. Raffinamenti di questa tecnica hanno portato a valori di c con incertezze inferiori ad 1 m/s. In tabella 1 sono riassunte alcune delle misure di c che sono state discusse.* Si noti la riduzione nel limite dell'incertezza col trascorrere degli anni.

La precisione di misura delle frequenze (circa 1 parte su 10^{13}) è diventata molto migliore della precisione di misura delle lunghezze d'onda (circa 1 parte su 10^9). A causa di ciò, oggigiorno la velocità della luce viene posta per definizione

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s},$$

ed il secondo è definito in funzione di misure di frequenza, sicché il metro oggi è un campione di misura secondario, definito in termini del secondo e del valore di c.

La velocità della luce nella materia

Quando si parla di «velocità della luce», si intende generalmente la velocità *nel vuoto*. Nel capitolo 41 si è discussa la propagazione della radiazione elettromagnetica, che avviene attraverso l'accoppiamento tra i suoi campi elettrici e magnetici. Nel paragrafo 31-7 si è visto che, nei materiali dielettrici, il campo elettrico viene alterato di un fattore κ_e, la costante dielettrica relativa del materiale. Un modo conveniente di modificare le equazioni per i campi elettrici nel vuoto in modo da tenere conto della presenza di materiali dielettrici è, come mostrato nel paragrafo 31-5, di sostituire la costante dielettrica del vuoto ϵ_0 con la quantità $\kappa_e\epsilon_0$.

Si deve tenere conto anche dell'effetto delle proprietà *magnetiche* del mezzo sul campo magnetico dell'onda elettromagnetica che si propaga. Come si è discusso nel paragrafo 37-3, i materiali magnetici sono caratterizzati da una permeabilità magnetica relativa κ_m, e in analogia con il caso del campo elettrico si possono modificare le equazioni per il campo magnetico nella materia sostituendo la permeabilità magnetica del vuoto μ_0 con la quantità $\kappa_m\mu_0$.

Operando tali sostituzioni, si può quindi modificare l'equazione 11 del capitolo 41 per ottenere la velocità della luce nella materia:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\kappa_m\kappa_e}}\,\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\kappa_m\kappa_e}}. \qquad (2)$$

I materiali che trasmettono la luce sono generalmente non ferromagnetici e perciò tipicamente κ_m non differisce da 1 di più di 10^{-4} (vedi tabelle 2 e 3 del capitolo

* Per riferimenti ad alcune di queste misure vedi, Harry E. Bates, *Resource Letter RMSL-1: Recent Measurements of the Speed of Light and the Redefinition of the Meter*, «American Journal of Physics», August 1988, pag. 682.

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 1 VELOCITÀ DELLA RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA NEL VUOTO (ALCUNE MISURE SELEZIONATE)

Data	*Sperimentatore*	*Paese*	*Metodo*	*Velocità* (km/s)	*Incertezza* (km/s)
1600 (?)	Galileo	Italia	Lanterne e scuri	«Incredibilmente veloce»	
1676	Roemer	Francia	Lune di Giove	«Finita»	
1729	Bradley	Inghilterra	Aberrazione della luce stellare	304 000	
1849	Fizeau	Francia	Ruota dentata	313 300	
1862	Foucault	Francia	Specchio rotante	298 000	500
1880	Michelson	Stati Uniti	Specchio rotante	299 910	50
1906	Rosa and Dorsey	Stati Uniti	Teoria elettromagnetica	299 781	10
1923	Mercier	Francia	Onde stazionarie su fili	299 782	15
1926	Michelson	Stati Uniti	Specchio rotante	299 796	4
1950	Bergstrand	Svezia	Geodimetro	299 792.7	0.25
1950	Essen	Inghilterra	Cavità a microonde	299 792.5	3
1950	Bol and Hansen	Stati Uniti	Cavità a microonde	299 789.3	0.4
1951	Aslakson	Stati Uniti	Radar Shoran	299 794.2	1.9
1952	Rank et al.	Stati Uniti	Spettri molecolari	299 766	7
1952	Frrome	Inghilterra	Interferometro a mircoonde	299 792.6	0.7
1958	Froome	Inghilterra	Interferometro a mircoonde	299 792.50	0.10
1967	Grosse	Germania	Geodimetro	299 792.5	0.05
1973	Evenson et al.	Stati Uniti	Tecniche laser	299 792.4574	0.0012
1978	Woods et al.	Inghilterra	Tecniche laser	299 792.4588	0.0002
1987	Jennings et al.	Stati Uniti	Tecniche laser	299 792.4586	0.0003

37). È quindi la costante dielettrica relativa κ_e che determina la velocità della luce in un materiale. Tuttavia, le costanti dielettriche elencate nella tabella 1 del capitolo 31 non possono venir usate nell'equazione 2, perché i valori ivi riportati sono caratteristici di situazioni *statiche*. Si rammenti che la costante dielettrica è in realtà una misura della risposta dei dipoli (permanenti o indotti) ad un campo elettrico esterno. Se il campo esterno varia ad alta frequenza, i dipoli possono non avere il tempo di rispondere e quindi non si possono impiegare le costanti dielettriche statiche nel caso di un campo **E** rapidamente variabile. Alle frequenze caratteristiche delle onde luminose (10^{15} Hz), il campo oscilla troppo rapidamente perché i dipoli possano seguirlo completamente. Inoltre, κ_e nell'equazione 2 varia in funzione della frequenza, sicché la velocità della luce nella materia dipende dalla lunghezza d'onda o dalla frequenza della luce.

TABELLA 2 VELOCITÀ DELLA LUCE IN ALCUNI MATERIALI[a]

Materiale	*Velocità della luce* (10^8 m/s)
Vuoto	3.00
Aria	3.00
Acqua	2.26
Soluzione zuccherina (50%)	2.11
Vetro Crown	1.97
Diamante	1.24

[a] Per luce gialla (λ = 589 nm).

In tabella 2 sono riportati i valori della velocità della luce in vari materiali.

Esempio 1 La velocità della luce di colore giallo (λ = 589 nm) in acqua è di 2.26×10^8 m/s. Qual è la costante dielettrica efficace per l'acqua a questa frequenza?

Soluzione Si usi l'equazione 2 e si assuma, con sufficiente accuratezza per questo calcolo, $\kappa_m = 1$. Ricavando κ_e dall'equazione 2, si ottiene

$$\kappa_e = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \left(\frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.26 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2 = 1.76.$$

Questa è molto diversa dalla costante dielettrica statica per l'acqua, che aveva un valore di 80 a temperatura ambiente, il che suggerisce la difficoltà che hanno i momenti di dipolo delle molecole d'acqua a seguire le variazioni del campo elettrico a questa frequenza. In generale, le costanti dielettriche ad alta frequenza sono più piccole dei corrispondenti valori statici, il che significa che il campo elettrico indotto ad alta frequenza è più piccolo del campo elettrico indotto statico.

Propagazione della luce nella materia *(Facoltativo)*

Il meccanismo responsabile della propagazione della luce nella materia è la diffusione (in realtà, l'assorbimento della luce incidente da parte degli atomi o delle molecole del mezzo e la sua riemissione). Le fasi delle onde diffuse che si propagano in direzione ortogonale alla direzione della luce incidente provocano un'interferenza quasi completamente distruttiva in direzione trasversale. Le onde diffuse che si propagano in direzione parallela alla direzione dell'onda incidente, non sono in fase con la luce incidente: a causa dell'interferenza tra le due onde, la fase della loro combi-

nazione è diversa dalla fase dell'onda incidente. Tale variazione in fase, viene osservata come variazione di velocità.

Il campo elettrico della luce incidente fa oscillare gli elettroni di un atomo alla frequenza della luce incidente. È ragionevole aspettarsi che la fase dell'onda riemessa dipenda dalla frequenza delle oscillazioni atomiche e quindi dalla frequenza dell'onda originale. Quando l'onda incidente e l'onda diffusa interferiscono, la fase della loro combinazione dipende dalla loro differenza di fase e quindi dalla frequenza. A causa di ciò, la velocità della luce in un materiale dipende dalla frequenza o dalla lunghezza d'onda. Questo fenomeno, che viene detto *dispersione*, verrà discusso nel capitolo 43.

In un solido tipico, la distanza entro la quale la luce originale viene assorbita e riemessa è dell'ordine dei micron, ed in aria è dell'ordine dei millimetri. In realtà, la luce che vediamo dal Sole arriva ai nostri occhi non direttamente, ma dalle molecole d'aria che si trovano a pochi millimetri dai nostri occhi. ■

42-3 L'EFFETTO DOPPLER PER LA LUCE

Nel paragrafo 20-7 si è dimostrato che se una sorgente di *suono* si sta muovendo verso un osservatore a velocità u, la frequenza ν udita dall'osservatore è (vedi equazione 39 del capitolo 20, che è stata rielaborata e in cui è stata sostituita u al posto di v_S)

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 - u/v} \qquad \begin{matrix}\text{(onda sonora, osservatore fisso,} \\ \text{sorgente in avvicinamento)}\end{matrix} \qquad (3)$$

In questa equazione ν_0 è la frequenza udita quando la sorgente è a riposo e v è la velocità del suono. Questa variazione di frequenza dovuta al moto relativo viene detta *effetto Doppler*.

Se la sorgente è a riposo rispetto al mezzo trasmettente ma l'osservatore si sta muovendo verso la sorgente a velocità u, la frequenza osservata (vedi equazione 36 del capitolo 20, in cui è stata sostituita u al posto di v_O) è

$$\nu = \nu_0(1 + u/v) \qquad \begin{matrix}\text{(onda sonora, sorgente fissa,} \\ \text{osservatore in avvicinamento)}\end{matrix} \qquad (4)$$

Per uguali valori della velocità u di avvicinamento relativo tra la sorgente e l'osservatore, le frequenze previste dalle equazioni 3 e 4 sono diverse. Ciò non è sorprendente, perché una sorgente di suono che si muove in un mezzo in cui l'osservatore è a riposo è fisicamente differente da un osservatore in moto attraverso lo stesso mezzo in cui si trova a riposo la sorgente, come si vede confrontando le figure 12 e 13 del capitolo 20 e come si è dimostrato nell'esempio 5 del capitolo 20.

Si potrebbe essere tentati di applicare le equazioni 3 e 4 alla luce, sostituendo c, la velocità della luce, in luogo di v, la velocità del suono. Nel caso della luce, contrariamente al caso del suono, è stato dimostrato che è impossibile identificare un mezzo di trasmissione relativamente a cui si muovono sorgente ed osservatore. Ciò significa che «sorgente che si avvicina all'osservatore» e «osservatore che si avvicina alla sorgente» sono situazioni fisicamente identiche e devono presentare *esattamente la stessa* frequenza spostata per effetto Doppler. Applicate alla luce o l'equazione 3 o l'equazione 4 o entrambe devono essere sbagliate. Come si dimostrerà nel prossimo paragrafo, l'effetto Doppler previsto dalla teoria della relatività è

$$\begin{aligned}\nu &= \nu_0 \frac{1 + u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ &= \nu_0 \sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}} \qquad \begin{matrix}\text{(onda luminosa, sorgente e} \\ \text{osservatore che si avvicinano).}\end{matrix} \qquad (5) \\ &= \nu_0 \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 - u/c}\end{aligned}$$

L'equazione 5 vale solo nel caso particolare in cui la direzione di propagazione della luce coincide con la direzione del moto relativo di S e S'. Nel prossimo paragrafo, si ricaverà un risultato più generale valido per ogni direzione. Si possono modificare le equazioni 3, 4 e 5 se la sorgente e l'osservatore si stanno *allontanando* l'uno dall'altra sostituendo u con $-u$.

Le equazioni 3, 4 e 5 danno risultati simili se il rapporto u/c è piccolo, come si può vedere sviluppando in serie di potenze le equazioni, sostituendo c in luogo di v, si ottiene

$$\text{Eq. 3:} \quad \nu = \nu_0 \left[1 + \frac{u}{c} + \left(\frac{u}{c}\right)^2 + \ldots\right], \qquad (6)$$

$$\text{Eq. 4:} \quad \nu = \nu_0 \left(1 + \frac{u}{c}\right), \qquad (7)$$

$$\text{Eq. 5:} \quad \nu = \nu_0 \left[1 + \frac{u}{c} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 + \ldots\right]. \qquad (8)$$

Il rapporto u/c per la maggior parte delle sorgenti luminose, anche quelle di dimensioni atomiche, è piccolo. In tal caso i termini in u^2/c^2 (e i termini di ordine superiore) sono trascurabilmente piccoli e i termini del primo ordine in u/c danno una stima regionevole dello spostamento Doppler.

In quasi tutte le circostanze le differenze tra queste tre equazioni non sono importanti. Ciononostante, è di estremo interesse l'esecuzione di almeno un esperimento in modo sufficientemente preciso da poter controllare la validità dell'equazione 5 e quindi, in parte, della teoria della relatività.

L'esperimento classico venne eseguito nel 1938 da H.E. Ives e da G.R. Stilwell. Essi inviarono, a velocità u, un fascio di atomi di idrogeno, generati in una sca-

ISBN 88-408-0777-2

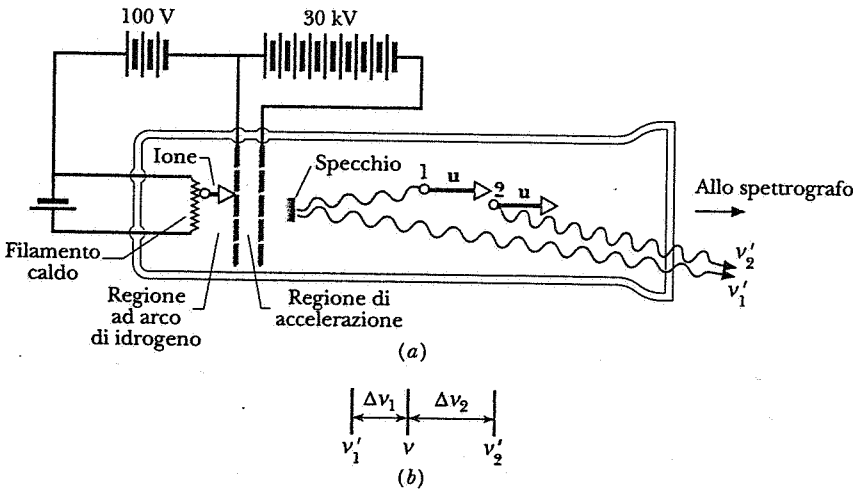


Figura 5 Apparecchiatura impiegata nell'esperimento di Ives-Stilwell.

rica nel gas, attraverso un tubo, come in figura 5. Essi potevano osservare la luce emessa da questi atomi in verso opposto ad **u** (atomo 1, ad esempio) usando uno specchio, ed anche quella emessa nello stesso verso di **u** (atomo 2, ad esempio). Con uno spettrografo di precisione, essi riuscirono a fotografare una certa riga spettrale caratteristica di questa luce, ottenendo, su una scala di frequenze, le linee indicate con ν_1' e ν_2' in figura 5*b*. È inoltre possibile fotografare, sulla stessa lastra fotografica, la riga corrispondente alla radiazione emessa da atomi *a riposo*; tale riga è indicata con ν in figura 5*b*. Una quantità fondamentale misurata in questo esperimento è $\Delta\nu/\nu$, definita da

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\nu_2 - \Delta\nu_1}{\nu}, \tag{9}$$

(vedi fig. 5*b*). Essa misura di quanto la frequenza emessa da atomi a riposo differisce dalla media delle frequenze ν_1' e ν_2'. La tabella 3 mostra che i valori misurati sono in accordo con la formula prevista dalla teoria della relatività (eq. 5) e non con la formula classica presa in prestito dalla teoria della propagazione del suono in un mezzo materiale (eq. 3).

Ives e Stilwell non presentarono i loro risultati sperimentali come evidenza in favore della teoria della relatività di Einstein, ma diedero ad essi una spiegazione teorica alternativa. Gli osservatori moderni, considerando non solamente il loro eccellente esperimento ma anche tutta la restante evidenza sperimentale accumulata, danno ora all'esperimento di Ives-Stilwell l'interpretazione sopra descritta, come verifica dell'effetto Doppler relativistico.

TABELLA 3 L'ESPERIMENTO DI IVES-STILWELL

Velocità u (10^6 m/s)	$\Delta\nu/\nu$, 10^{-5}		
	Classica	*Relativistica*	*Esperimento*
0.865	1.67	0.835	0.762
1.01	2.26	1.13	1.1
1.15	2.90	1.45	1.42
1.33	3.94	1.97	1.9

Esempio 2 Un lontano quasar si sta allontanando dalla Terra a velocità u. Un astronomo sta cercando una certa riga spettrale nella luce proveniente dal quasar. Questa riga, emessa dall'idrogeno atomico, viene osservata impiegando tubi a scarica ad idrogeno, sulla Terra, ad una lunghezza d'onda $\lambda_0 = 121.6$ nm. L'astronomo trova la riga spettrale dell'idrogeno emessa dal quasar ad una lunghezza d'onda $\lambda = 460.9$ nm. Supponendo che il quasar si stia allontanando dalla Terra in direzione radiale, qual è la sua velocità rispetto alla Terra?

Soluzione Impiegando l'equazione 5, riscritta in termini di lunghezza d'onda e sostituendo $-u$ in luogo di u dato che la sorgente e l'osservatore si stanno allontanando:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}\,\frac{1 - u/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

ovvero

$$\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1 + u/c}{1 - u/c}}. \tag{10}$$

Ricavando la velocità, si ottiene

$$\frac{u}{c} = \frac{(\lambda/\lambda_0)^2 - 1}{(\lambda/\lambda_0)^2 + 1}. \tag{11}$$

Con $\lambda/\lambda_0 = 460.9$ nm/121.6 nm = 3.79, si ottiene

$$\frac{u}{c} = \frac{(3.79)^2 - 1}{(3.79)^2 + 1} = 0.87.$$

Il quasar si sta allontanando dalla Terra all'87% della velocità della luce. Questo calcolo determina solo la componente radiale o lungo la congiungente, della velocità relativa.

L'effetto Doppler provoca un allungamento delle lunghezze d'onda della luce emessa da oggetti che si allontanano dalla Ter-

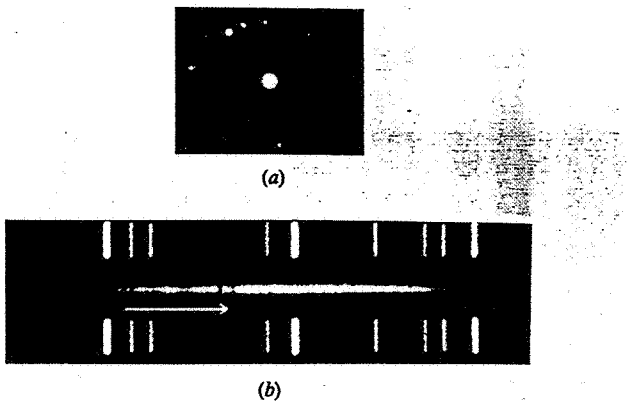


Figura 6 (*a*) Una galassia nella costellazione Corona Borealis. (*b*) La striscia centrale mostra lo spettro in lunghezza d'onda della luce emessa da tale galassia. Le due bande verticali scure mostrano le righe di assorbimento associate al calcio, che è presente nella galassia. Le linee spettrali sopra e sotto sono state registrate da una sorgente di laboratorio per fornire una calibrazione della lunghezza d'onda. La freccia orizzontale mostra di quanto sono spostate le linee del calcio dal punto in cui si sarebbero trovate se fossero state emesse da una sorgente in quiete nel sistema di laboratorio. Da questo spostamento Doppler, si ricava che la velocità di allontanamento della galassia è di circa 21 000 km/s.

ra, cioè uno spostamento verso l'estremo rosso (lunghezze d'onda maggiori) dello spettro visibile. A causa di ciò esso è noto come *spostamento verso il rosso* (*red-shift*). La figura 6 mostra un esempio di spettro spostato verso il rosso, da cui è possibile determinare la velocità della galassia rispetto alla Terra. È sperimentalmente provato, tramite molte osservazioni di questo tipo, che tutti gli oggetti lontani si stanno allontanando da noi, e che vi è una relazione diretta (lineare) tra la velocità dell'oggetto e la sua distanza dalla Terra: tanto più un oggetto è lontano tanto più velocemente si allontana. Questo comportamento lineare, dedotto da misure di spostamento verso il rosso, è l'evidenza principale dell'espansione dell'universo.

42-4 DERIVAZIONE DELL'EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO *(Facoltativo)*

In questo paragrafo, si usano i due postulati di Einstein, insieme con le equazioni delle trasformazioni di Lorentz, per ricavare l'equazione dell'effetto Doppler relativistico.

Nel capitolo 21, si è illustrato attraverso numerosi esempi il modo in cui le equazioni delle trasformazioni di Lorentz possono venire usate per mettere in relazione le misure fatte da un osservatore inerziale S con quelle di un altro osservatore S' che si muova a velocità costante rispetto ad S. Qui confronteremo i risultati dei due osservatori quando misurino la stessa onda luminosa. Come nel capitolo 21, assumeremo che il moto relativo tra S e S' avvenga lungo la direzione comune xx' con velocità u.

Si consideri il caso di un treno di onde elettromagnetiche piane che viaggi a velocità c' nel sistema di riferimento S'. La sorgente delle onde piane sia a riposo secondo S', che misura un numero d'onda k' ($= 2\pi/\lambda'$) ed una pulsazione ω' ($= 2\pi\nu'$); queste sono naturalmente legate dalla $c' = \omega'/k'$. Se l'onda si propagasse lungo la direzione x', la variazione in funzione della posizione e del tempo del campo elettrico dell'onda in S' sarebbe data da un'espressione sinusoidale della forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\mathrm{m}} \operatorname{sen}(k'x' - \omega't'),$$

e se l'onda si propagasse lungo la direzione y', il campo elettrico sarebbe della forma

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\mathrm{m}} \operatorname{sen}(k'y' - \omega't').$$

Per $\mathbf{B}'$ si otterrebbero espressioni simili.

Si consideri ora un caso più generale, in cui l'onda si propaga parallelamente al piano $x'y'$ in una direzione che forma un angolo θ' con l'asse x' (fig. 7). In questo caso si può dimostrare che la parte dei campi variabile sinusoidalmente è data da

$$\operatorname{sen}(k'x' \cos\theta' + k'y' \operatorname{sen}\theta' - \omega't').$$

Si noti che questa si riduce alle espressioni precedenti per un'onda che si propaghi in direzione x' ($\theta' = 0$) o in direzione y' ($\theta' = 90°$). È più conveniente esprimere la variazione sinusoidale come

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x' \cos\theta' + y' \operatorname{sen}\theta'}{\lambda'} - \nu't'\right), \qquad (12)$$

dove $c' = \lambda'\nu'$.

Si vuole ora osservare quest'onda nel sistema di riferimento del laboratorio S, rispetto a cui S' (e quindi anche la sorgente delle onde) si muove con velocità u in direzione x. Come è collegata l'onda osservata nel sistema di riferimento S all'onda osservata in S'?

Si cominci a considerare cosa dicono i postulati di Einstein riguardo alla forma dell'onda nel sistema di riferimento S. Il primo postulato richiede che, se l'onda soddisfa una equazione d'onda in S' (vedi, ad esempio, l'equazione 25 del capitolo 19), allora deve soddisfare un'equazione d'onda in S. Cioè, nel sistema di riferimento S, la variazione dell'onda deve essere della forma

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta}{\lambda} - \nu t\right), \qquad (13)$$

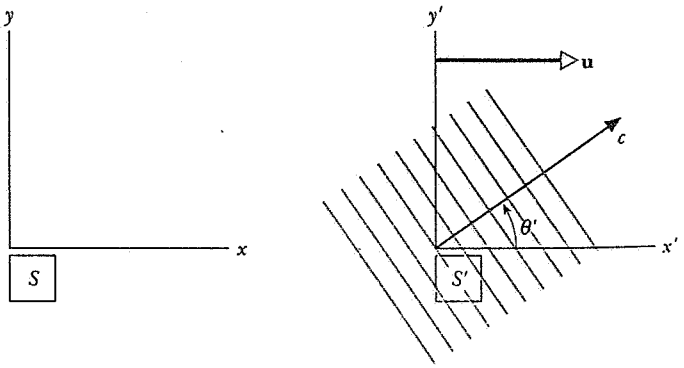


Figura 7 Una sorgente a riposo in S' emette dei fronti d'onda piani che si propagano in una direzione che forma un angolo θ' rispetto all'asse x'. Il sistema di riferimento S' (compresa la sorgente) si muove a velocità $\mathbf{u}$ rispetto ad S.

ISBN 88-408-0777-2

dove $c = \lambda\nu$. Il secondo postulato richiede che la velocità di fase in S sia uguale alla velocità di fase in S'; cioè $c = c'$.

Si proceda ora all'applicazione delle trasformazioni di Lorentz. Dalla tabella 2 del capitolo 21, si ottengono le equazioni delle trasformazioni di Lorentz per x', y' e t'. Si sostituiscano tali espressioni nell'equazione 12, ottenendo

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{\gamma(x-ut)\cos\theta' + y\operatorname{sen}\theta'}{\lambda'} - \nu'\gamma(t-ux/c^2)\right),$$

dove $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Dopo qualche manipolazione algebrica, questa diventa

$$\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{\gamma(\cos\theta' + u/c)}{\lambda'}x + \frac{\operatorname{sen}\theta'}{\lambda'}y - \gamma\nu'[1+(u/c)\cos\theta']t\right). \quad (14)$$

In accordo col primo postulato, l'equazione 14 è infatti della stessa forma dell'equazione 13, se i coefficienti di x, y e t nelle due espressioni sono uguali. Cioè,

$$\frac{\cos\theta}{\lambda} = \frac{\gamma(\cos\theta' + u/c)}{\lambda'}, \quad (15)$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\lambda} = \frac{\operatorname{sen}\theta'}{\lambda'}, \quad (16)$$

$$\nu = \gamma\nu'[1+(u/c)\cos\theta']. \quad (17)$$

Poiché si sta cercando il risultato della misura nel sistema di riferimento S, si elimina l'angolo incognito θ' dalle equazioni 15 e 17 e si ricava ν, ottenendo

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-u^2/c^2}}{1-(u/c)\cos\theta}. \quad (18)$$

Si è sostituita la frequenza ν' con la frequenza ν_0, per ricordare che essa è misurata in un sistema di riferimento in cui la sorgente è a riposo. Essa può quindi venire considerata una frequenza propria, analogamente al tempo proprio. Si tornerà su questo punto più avanti.

L'equazione 18 è l'espressione relativistica dell'effetto Doppler, scritta per il caso in cui la sorgente e l'osservatore si stanno *avvicinando* l'una all'altro* ; in tal caso, l'osservatore S misura una frequenza *più alta*. Si noti che l'equazione 18 si riduce all'equazione 5 se si pone $\theta = 0$. Nel caso in cui sorgente ed osservatore si stiano *allontanando*, si sostituisce $-u$ al posto di u, e quindi l'osservatore in S misura una frequenza *più bassa*.

Le equazioni 15-17 permettono inoltre di mettere in relazione le direzioni di propagazione θ e θ' osservate in due sistemi di riferimento diversi. Questo effetto relativistico viene detto *aberrazione*. (Vedi prob. 22.) Cioè, nel sistema di riferimento di S in figura 7, l'onda luminosa si propaga con una diversa lunghezza d'onda λ (spostamento Doppler) e in una direzione diversa θ (aberrazione).

Esempio 3 Un satellite della Terra orbita muovendosi da ovest ad est ad una altezza $h = 153$ km su un'orbita circolare sopra l'equatore (vedi fig. 8). Una imbarcazione si trova all'equatore sul meridiano a 0° di longitudine (appena al largo della costa occidentale dell'Africa). Il satellite emette onde radio ad una frequenza di 122.450 MHz. A che frequenza si dovrebbe sintonizzare il ricevitore della nave quando il satellite si trova (*a*) esattamente sopra l'imbarcazione, (*b*) a 10° di longitudine ad ovest dell'imbarcazione e (*c*) a 10° di longitudine ad est della nave?

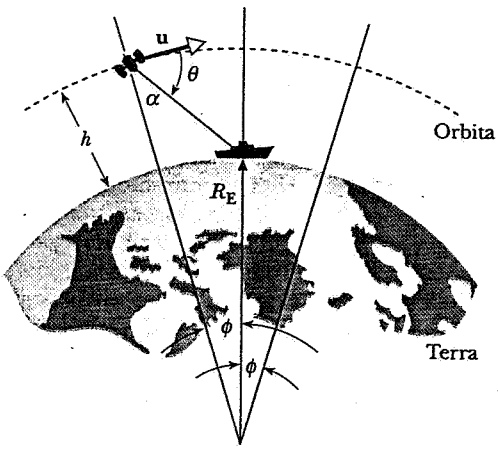


Figura 8 Esempio 3. Un satellite si trova su un'orbita circolare ad un'altezza h sopra la superficie terrestre. Una nave sulla superficie osserva i segnali inviati dal satellite.

Soluzione (*a*) Il sistema di riferimento S' sia solidale con il satellite nell'istante in cui esso si trova esattamente sopra all'imbarcazione; il sistema di riferimento S sia quello della nave al di sotto. La frequenza ν_0 osservata nel sistema di riferimento S' (il satellite) è di 122.450 MHz. La velocità relativa u tra i sistemi di riferimento è determinata dalla velocità orbitale del satellite ad una altezza h ovvero ad un raggio $R = R_E + h$, dove R_E è il raggio della Terra. L'accelerazione di gravità ad un raggio R è MG/R^2, che deve fornire l'accelerazione centripeta u^2/R necessaria per un'orbita circolare. Quindi

$$\frac{MG}{R^2} = \frac{u^2}{R}$$

ossia

$$u = \sqrt{\frac{MG}{R}} = \sqrt{\frac{MG}{R_E+h}}$$
$$= \sqrt{\frac{(5.98\times10^{24}\text{ kg})(6.67\times10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)}{6370\text{ km}+153\text{ km}}}$$
$$= 7.82\times10^3\text{ m/s} = 2.61\times10^{-5}c.$$

Quando il satellite si trova esattamente sopra, lo spostamento Doppler si ricava dall'equazione 18 con $\theta = 90°$:

$$\nu = \nu_0\sqrt{1-u^2/c^2}.$$

Con $u/c = 2.61\times10^{-5}$, si ottiene $u^2/c^2 = 6.8\times10^{-10}$. La quantità sotto radice differisce da 1 solo di poche parti su 10^{10}, sicché, alla precisione richiesta,

$$\nu \approx \nu_0 = 122.450\text{ MHz}.$$

(*b*) Quando il satellite non si trova esattamente sulla verticale, è necessario calcolare l'angolo θ compreso tra la velocità del satelli-

* Questo è vero per $t < 0$. in questo caso l'osservatore S può osservare l'onda ad angolo $\theta = 0$. [N.d.T.]

te e la congiungente con la nave (vedi fig. 8). Si può determinare l'angolo α ($= 2\pi - \theta$) applicando il teorema dei seni al triangolo formato dal satellite, dall'imbarcazione e dal centro della Terra:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{R_E} = \frac{\text{sen}\,(\pi - \alpha - \phi)}{R_E + h}.$$

Risolvendo, si trova

$$\tan\alpha = \frac{R_E \,\text{sen}\phi}{h + R_E(1 - \cos\phi)} = \frac{(6370\text{ km})(\text{sen }10°)}{153\text{ km} + (6370\text{ km})(1 - \cos 10°)} = 4.428,$$

ovvero

$$\alpha = \tan^{-1} 4.428 = 77.3°$$

e quindi

$$\theta = \pi/2 - \alpha = 90° - 77.3° = 12.7°.$$

Si può calcolare lo spostamento in frequenza Doppler usando l'equazione 18, trascurando il fattore di Lorenz γ, che si è dimostrato al punto (*a*) non essere significativamente diverso da 1. Lo spostamento Doppler così approssimato è

$$\nu \approx \frac{\nu_0}{1 - (u/c)\cos\theta} = \frac{122.450\text{ MHz}}{1 - (2.61 \times 10^{-5})(\cos 12.7°)} = 122.453\text{ MHz}.$$

(*c*) Dopo che il satellite è passato al di sopra e si è spostato ad est della stazione di puntamento, il suo moto diviene di allontanamento dall'osservatore e si può calcolare lo spostamento Doppler effettuando la sostituzione $u \to -u$. Il risultato è

$$\nu \approx \frac{\nu_0}{1 + (u/c)\cos\theta} = \frac{122.450\text{ MHz}}{1 + (2.61 \times 10^{-5})(\cos 12.7°)} = 122.447\text{ MHz}.$$

Si vede che la frequenza osservata sulla Terra varia da 122.453 MHz (satellite in avvicinamento) a 122.450 MHz (satellite sulla verticale) a 122.447 MHz (satellite in allontanamento). Una misura della frequenza spostata per effetto Doppler è quindi sufficiente a localizzare il satellite. ■

42-5 CONSEGUENZE DELL'EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO *(Facoltativo)*

Si sono già discusse due conseguenze molto importanti e comunemente osservate dell'effetto Doppler relativistico: lo spostamento verso il rosso dovuto al moto di oggetti distanti nell'universo (vedi esempio 2) e lo spostamento in frequenza che si può impiegare per localizzare i satelliti (vedi esempio 3). Si considereranno ora altre due conseguenze, l'effetto Doppler trasversale ed il paradosso dei gemelli.

Effetto Doppler trasversale

Una differenza importante tra la formula classica e relativistica per l'effetto Doppler si nota quando si considera il caso $\theta = 90°$, in cui il moto relativo della sorgente e dell'osservatore è ortogonale alla direzione di propagazione dei fronti d'onda. Seguendo l'analisi classica del capitolo 20, si troverebbe che in questo caso non vi è alcuno spostamento Doppler (classico). L'espressione relativistica (eq. 18), d'altra parte, prevede che l'osservatore misuri una frequenza di

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - u^2/c^2}. \qquad (19)$$

L'equazione 19 è nota come *effetto Doppler trasversale* ed è un'effetto puramente relativistico senza un corrispondente classico. Si noti che la frequenza osservata ν è sempre più bassa della frequenza ν_0 emessa dalla sorgente.

Se si sviluppa l'equazione 19 usando lo sviluppo in serie di Taylor, si ottiene

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \ldots\right). \qquad (20)$$

Confrontando l'equazione 20 con le equazioni 6-8, si vede che lo spostamento Doppler trasversale non contiene termini di primo grado in u/c. Sia l'effetto Doppler relativistico longitudinale che l'effetto Doppler classico contengono termini di questo tipo. L'assenza di tale termine nell'equazione 20 è in accordo con la mancata predizione di tale effetto da parte della teoria classica.

Una conferma particolarmente convincente dell'effetto Doppler trasversale si ebbe dagli esperimenti svolti nel 1963 da Walter Kundig. Una sorgente di raggi gamma venne posta al centro del rotore di una centrifuga. Sul bordo della centrifuga venne posto un foglio che assorbiva i raggi gamma della sorgente. L'assorbimento dipende dalla frequenza della radiazione che raggiunge il foglio, ed un rivelatore dietro al foglio misurava l'assorbimento al variare della velocità di rotazione. Quando la centrifuga è in funzione, il foglio sul bordo è in moto relativo rispetto alla sorgente che si trova nel centro e la radiazione che raggiunge il foglio è soggetta all'effetto Doppler trasversale. Anche se la velocità tangenziale dell'assorbitore era solo di poche centinaia di metri al secondo, corrispondenti ad un valore di u^2/c^2 di circa 10^{-12}, questo sensibile esperimento riuscì a dimostrare chiaramente l'effetto Doppler trasversale. In figura 9 è mostrato un riassunto dei

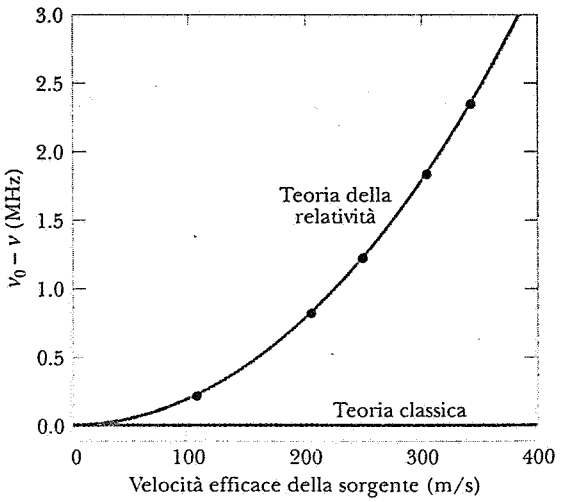


Figura 9 I risultati dell'esperimento di Kundig per l'effetto Doppler trasversale in accordo con la teoria della relatività ed in disaccordo con la teoria classica che non prevede tale effetto.

ISBN 88-408-0777-2

risultati di Kundig, che è in accordo con la formula relativistica ed in disaccordo con la formula classica, che non prevede l'effetto Doppler trasversale.

L'effetto Doppler trasversale può essere anche interpretato come un effetto della dilatazione del tempo. La sorgente di onde in S' può essere considerata come un orologio, che ticchetta ad una velocità determinata dal periodo $T_0 = 1/\nu_0$, un tempo proprio in S'. L'osservatore in S misura un periodo T più lungo (dilatato) e quindi una frequenza $\nu = 1/T$ minore. La conferma dell'effetto Doppler trasversale può perciò essere considerata come una ulteriore conferma della dilatazione relativistica del tempo.

Il paradosso dei gemelli rivisto

L'effetto Doppler permette una nuova analisi del paradosso dei gemelli, che è stato discusso nel paragrafo 21-7, in un modo che rivela senza ambiguità quale dei due gemelli è «veramente» in moto. Si supponga che Fred ed Ethel abbiano entrambi orologi identici che siano stati entrambi calibrati preventivamente per mantenere l'ora terrestre. Gli orologi possono essere usati, nei rispettivi sistemi di riferimento, per misurare lo scorrere del tempo nel loro sistema di riferimento espresso in unità di anni terrestri (ma naturalmente gli anni risultano di diversa durata se i sistemi di riferimento sono in moto relativo). Si supponga che Ethel nella sua navicella spaziale si allontani da Fred e dalla sua piattaforma spaziale ad una velocità relativa $u = 0.6c$ verso una stella la cui distanza dalla piattaforma (misurata da Fred) è di 12 anni luce. (Si supponga che la stella sia ferma rispetto a Fred.) Secondo Fred, il viaggio di andata di Ethel richiede un tempo di (12 anni luce)/$0.6c$ = 20 anni ed il viaggio di ritorno alla stessa velocità richiede lo stesso tempo. Fred perciò misura il passaggio di 40 anni col suo orologio, ed invecchia di 40 anni durante il viaggio di Ethel. Nel sistema di riferimento di Ethel, la distanza della stella è contratta di un fattore $\sqrt{1 - u^2/c^2} = 0.8$ e quindi la distanza contratta della stella è di (12 anni luce)(0.8) = 9.6 anni luce, secondo Ethel. Guardandosi il panorama dello spazio percorso alla velocità di $0.6c$, Ethel raggiunge la stella dopo che sono passati (9.6 anni luce)/$0.6c$ = 16 anni misurati col suo orologio, e ne misura altrettanti nel viaggio di ritorno. Ethel perciò invecchia di soli 32 anni nel viaggio di andata e ritorno.

Si supponga che Fred invii ad Ethel un impulso luminoso una volta all'anno (ad esempio il giorno del loro compleanno). La frequenza con cui viene inviato il segnale luminoso da Fred (come misurato da Fred) è di $\nu_0 = 1\ \text{y}^{-1}$, ma la frequenza misurata da Ethel, spostata per effetto Doppler, è data dall'equazione 5,

$$\nu = (1\ \text{y}^{-1})\sqrt{\frac{1-0.6}{1+0.6}} = 0.5\ \text{y}^{-1}$$

durante il viaggio di andata. Ethel riceve quindi, durante il viaggio di andata che per lei dura 16 anni, un totale di $(0.5\ \text{y}^{-1})(16\ \text{y}) = 8$ segnali. Durante il viaggio di ritorno la frequenza spostata per effetto Doppler diviene $2\ \text{y}^{-1}$, come si può facilmente ricavare sostituendo $-u$ in luogo di u nel calcolo precedente. Il numero di segnali che essa riceve durante il viaggio di ritorno è quindi $(2\ \text{y}^{-1})(16\ \text{y}) = 32$ segnali. In questo modo Ethel, che invecchia di soli 32 anni secondo il suo orologio durante l'intero viaggio, riceve 8 + 32 = 40 segnali da Fred, sapendo quindi che egli ha celebrato 40 compleanni durante il viaggio che Ethel misura di 32 anni. Ethel, la viaggiatrice, è la più giovane quando essi si riuniscono.

Nel problema 28, si richiede di svolgere una analisi di questo tipo nel caso che sia Ethel ad inviare i segnali. Si dovrebbe ritrovare naturalmente lo stesso risultato, con entrambi i gemelli d'accordo che Ethel è la più giovane. ■

DOMANDE

1. Come si potrebbe misurare una curva di sensibilità dell'occhio come quella di figura 1?
2. Perché i segnali di pericolo sono tracciati in rosso, se l'occhio è maggiormente sensibile al giallo-verde?
3. Si commenti la seguente definizione dei limiti dello spettro della luce visibile data da un fisiologo: «I limiti dello spettro visibile si hanno quando l'occhio non è meglio adattato di un qualsiasi altro organo del corpo a rivelarla.»
4. Con riferimento alla figura 1, (*a*) ritenete possibile che la lunghezza d'onda di massima sensibilità possa variare se si varia l'intensità della luce? (*b*) Che aspetto potrebbe avere la curva di figura 1 per un gruppo di persone daltoniche che non riescano, ad esempio, a distinguere il rosso dal verde?
5. Si supponga che gli occhi umani siano insensibili alla luce visibile ma siano molto sensibili alla radiazione infrarossa. Quali variazioni ambientali sarebbero necessarie se si dovesse (*a*) camminare lungo un corridoio e (*b*) guidare un'automobile? Esisterebbe il fenomeno del colore? Come dovrebbero essere modificati i semafori?
6. Quale caratteristica della luce corrisponde al volume sonoro?
7. Come può aver verificato sperimentalmente Galileo che i tempi di reazione erano una sorgente di errore tale da rendere i suoi risultati inutilizzabili nel suo tentativo di misurare la velocità della luce, descritto nel paragrafo 42-2?
8. Riuscite a immaginare qualche osservazione «quotidiana» (cioè senza apparecchiature sperimentali) che mostri che la velocità della luce non è infinita? Si pensi ai fulmini, a possibili discrepanze tra l'ora prevista e l'ora osservata dell'alba, alle comunicazioni radio tra la Terra e gli astronauti che si trovano in navicelle in orbita e via di seguito.
9. Si commenti la seguente affermazione: a causa della definizione del metro, non è più possibile misurare la velocità della luce.
10. Il fatto che molte stelle appaiano bianche è una dimostrazione che le onde elettromagnetiche di tutti i colori si propagano nel vuoto alla stessa velocità?
11. È stato suggerito che la velocità della luce possa cambiare leggermente al trascorrere del tempo. Vi è qualche indicazione di ciò in tabella 1?
12. Nel vuoto, la velocità della luce dipende da (*a*) la lunghezza d'onda, (*b*) la frequenza, (*c*) l'intensità, (*d*) la velocità della sorgente, o (*e*) la velocità dell'osservatore?
13. Gli atomi sono per la maggior parte vuoti. Tuttavia la velocità della luce che attraversa un solido trasparente costituito

da tali atomi è spesso considerevolmente inferiore alla velocità della luce nel vuoto. Come è possibile?

14. L'effetto Doppler è solamente un effetto della dilatazione del tempo e nulla più, o vi è qualcos'altro?
15. Un membro di un sistema stellare binario emette luce visibile. Si mostri in un semplice grafico come varia in funzione del tempo sulla Terra lo spostamento Doppler in frequenza.
16. È possibile che una galassia sia così lontana che la sua velocità di allontanamento sia c? In caso affermativo, come possiamo vedere tale galassia? Cioè, la sua luce ci raggiungerà mai?
17. I raggi gamma sono radiazione elettromagnetica emessa da nuclei radioattivi. Nel vuoto, essi si muovono con la stessa velocità della luce visibile? La loro velocità dipende dalla velocità del nucleo che li ha emessi?
18. Forse la più semplice osservazione astronomica che si può fare è la seguente: quando il Sole tramonta, il cielo diventa scuro. Ciò è vero e sembra ovvio, ma si può fornire la seguente argomentazione che non dovrebbe essere così. Si consideri la seguente affermazione: «Assumendo un universo infinito, uniformemente popolato da stelle più o meno come il nostro Sole, si può dire che una retta con origine in un'osservatore in una qualsiasi direzione interseca infine una stella. La *distanza* R della maggior parte di queste stelle sarà in realtà molto grande sicché le stelle illuminano l'osservatore solo molto debolmente, essendo l'illuminazione proporzionale a $1/R^2$. D'altra parte, il numero di stelle lontane che si trovano nella crosta sferica di raggi R e $R + dR$ aumenta come R^2 (supponendo dR costante). Siete capaci di dimostrare quest'ultima affermazione? Questi due effetti sembrano compensarsi l'un l'altro esattamente. Così il cielo notturno dovrebbe essere virtualmente infinitamente brillante, essendo l'osservatore illuminato da un'infinità di soli.» Riuscite a trovare un errore in questo ragionamento (generalmente chiamato *paradosso di Olber*)? Si pensi alla finitezza della velocità della luce, alle grandi dimensioni dell'universo, al fatto che esso è in espansione e all'associato spostamento verso il rosso, alla vita finita delle stelle eccetera. (Vedi: E. R. Harrison, *The Dark Sky Paradox*, «American Journal of Physics», February 1977, pag. 119, per un articolo di rivista storica ed una lucida spiegazione.)

PROBLEMI

Paragrafo 42-1 La luce visibile

1. (*a*) A quali lunghezze d'onda la sensibilità dell'occhio dell'osservatore standard è metà della sua sensibilità massima? (*b*) Quali sono la lunghezza d'onda, la frequenza e il periodo della luce a cui l'occhio è maggiormente sensibile?
2. Quante vibrazioni complete sono contenute in un treno d'onda di luce di lunghezza d'onda di 520 nm emesso da un atomo per un tempo di 430 ps?

Paragrafo 42-2 La velocità della luce

3. (*a*) Si supponga di esere in grado di stabilire una comunicazione radio con gli ipotetici abitanti di un ipotetico pianeta orbitante intorno alla stella a noi più vicina, α-Centauri, che si trova ad una distanza di 4.23 anni luce. Quanto tempo sarebbe necessario per ottenere una risposta ad un messaggio? (*b*) Ripetere per la Grande Nebulosa di Andromeda, uno dei nostri vicini extragalattici più prossimi, che si trova ad una distanza di 2.2×10^6 anni luce. Queste considerazioni cosa vi portano a concludere riguardo alla natura delle nostre possibili comunicazioni con popolazioni extragalattiche?
4. Quanto tempo impiega un segnale radio a percorrere 150 km da un trasmettitore ad un'antenna ricevente? (*b*) Si osserva una Luna piena per mezzo della luce solare riflessa. Quanto tempo prima di raggiugere i nostri occhi è partita la luce dal Sole? (*c*) Quanto tempo impiega la luce a percorrere, andata e ritorno, la distanza che vi è tra la Terra ed una navetta spaziale in orbita intorno a Saturno, cioè una distanza di 1.3×10^9 km? (*d*) La nebulosa del Granchio, che si trova a circa 6500 anni luce di distanza, si ritiene che sia nata dall'esplosione di una supernova registrata dagli astronomi cinesi nel 1054 A.D. Approssimativamente, in che anno è avvenuta l'esplosione?
5. L'incertezza sulla distanza della Luna, misurata per mezzo della riflessione di una luce laser da parte di riflettori posti sulla Luna dagli astronauti dell'*Apollo 11*, è di circa 2 cm. Tale incertezza è associata alla misura del tempo trascorso; a che incertezza corrisponde in termini di tempo?
6. Nel 1676, Ole Roemer dedusse che la velocità della luce era finita osservando il tempo dell'eclissi di uno dei satelliti di Giove, Io (vedi fig. 10). Basandosi sulle note proprietà orbitali di Io, era previsto che esso uscisse dall'ombra di Giove in un certo istante quando la Terra si trovava nella posizione x della sua orbita. Quando la Terra si trovava invece in posizione y, Io usciva dall'ombra di Giove circa 10 minuti in ritardo. Roemer concluse che tale discrepanza doveva imputar-

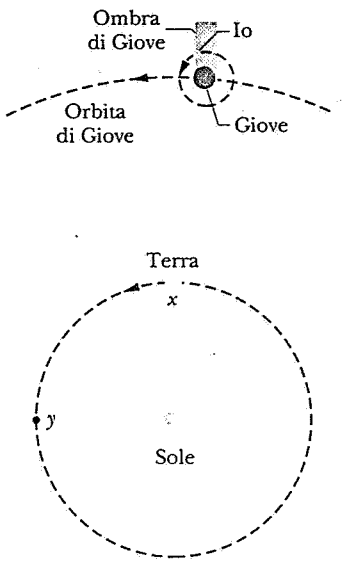


Figura 10 Problema 6.

ISBN 88-408-0777-2

si al tempo addizionale necessario alla luce per percorrere la distanza addizionale di un raggio dell'orbita terrestre. Che valore della velocità della luce si può calcolare da tale osservazione? (Queste osservazioni si possono anche spiegare in termini di effetto Doppler della luce. Vedi: V. M. Babovicic, D. M. Davidovic e B. A. Anicin, *The Doppler Interpretation of Roemer's Method*, «American Journal of Physics», June 1991, pag. 515.)

7. Si consideri una stella che si trovi sulla retta passante per il Sole perpendicolare al piano dell'orbita della Terra attorno al Sole. La distanza della stella sia molto maggiore del diametro dell'orbita della Terra. Si dimostri che, a causa della finitezza della velocità della luce, un telescopio attraverso cui si vede la stella deve essere inclinato di un angolo $\alpha = 20.5''$ rispetto alla perpendicolare, nella direzione in cui si muove la Terra; vedi figura 11. Tale fenomeno, detto *aberrazione*, è apprezzabile e venne spiegato per primo da James Bradley nel 1729. (Vedi problema 22 per una descrizione della aberrazione basata sulla relatività.)

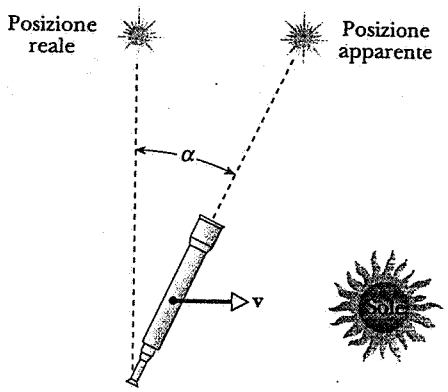


Figura 11 Problema 7.

Paragrafo 42-3 L'effetto Doppler per la luce

8. Si dimostri che, per velocità $u \ll c$, lo spostamento Doppler si può scrivere nella forma approssimata

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c},$$

dove $\Delta\lambda$ è la variazione di lunghezza d'onda.

9. Si dimostri che, per la riga dei 21.1 cm così tanto usata dai radioastronomi, uno spostamento Doppler in frequenza espresso in kHz può essere convertito in velocità radiale espressa in km/s, moltiplicandolo per 0.211, purché $u \ll c$.
10. Una navicella spaziale, allontanandosi dalla Terra ad una velocità di $0.892c$, comunica informazioni trasmettendo ad una frequenza (misurata nel sistema di riferimento della navicella) di 100 MHz. Su che frequenza devono essere sintonizzati i ricevitori sulla Terra per ricevere tali segnali?
11. Un missile spaziale si allontana dalla Terra ad una veloocità di $0.20c$. Una luce nel missile appare blu ai passeggeri dello stesso. Di che colore apparirebbe ad un osservatore sulla Terra? (*Vedi* fig. 1.)
12. Lo «spostamento verso il rosso» di una certa galassia lontana consiste nell'osservare ad una lunghezza d'onda di 462 nm la luce H_γ, che è noto avere quando osservata in laboratorio una lunghezza d'onda di 434 nm. (*a*) Qual è la velocità della galassia nella direzione da cui è osservata dalla Terra? (*b*) Si sta allontanando o avvicinando?
13. Nello spettro del quasar 3C9, alcune righe familiari dell'idrogeno compaiono così spostate verso il rosso che le loro lunghezze d'onda risultano tre volte maggiori di quanto esse non siano normalmente osservate quando emesse da atomi di idrogeno in quiete rispetto al laboratorio. (*a*) Si dimostri che la legge classica dell'effetto Doppler, che assume che la luce si comporti come il suono, dà una velocità di allontanamento maggiore di c. (*b*) Supponendo che il moto relativo di 3C9 rispetto alla Terra sia unicamente di allontanamento, determinare la velocità di allontanamento prevista dalla legge relativistica dell'effetto Doppler.
14. A che velocità bisognerebbe andare incontro ad una luce rossa per vederla verde? Si consideri una lunghezza d'onda di 620 nm per la luce rossa e una lunghezza d'onda di 540 nm per la luce verde.
15. Calcolare lo spostamento Doppler in lunghezza d'onda che ci si aspetta per una luce di 553 nm di lunghezza d'onda emessa dal bordo del disco solare all'equatore dovuto alla rotazione del Sole. Vedi appendice C per i dati necessari.
16. Le molecole di idrogeno a 700 K emettono luce di 457 THz di frequenza. (*a*) Determinare la variazione nella frequenza della luce dovuta al moto di una molecola che si muove verso l'osservatore con la velocità quadratica media. (*b*) Determinare lo spostamento che si avrebbe se tale luce venisse emessa da atomi di idrogeno anziché da molecole.
17. Nell'esperimento di Ives e Stilwell la velocità degli atomi di idrogeno in una particolare esecuzione dell'esperimento era di 8.65×10^5 m/s. Calcolare $\Delta\nu/\nu$ nell'ipotesi che (*a*) l'equazione 6 sia corretta e (*b*) l'equazione 8 sia corretta; confrontare i risultati ottenuti con quelli riportati in tabella 3 per tale velocità. Considerare solo i primi tre termini nelle equazioni 6 e 8.
18. Delle microonde, che si propagano alla velocità della luce, vengono riflesse da un aeroplano che si avvicina alla sorgente di radiazione. Si trova che quando le onde riflesse vengono fatte interferire con le onde della sorgente si ha un battimento di 990 Hz di frequenza. Se le microonde hanno una lunghezza d'onda di 12.0 cm, qual è la velocità di avvicinamento dell'aeroplano? (*Suggerimento*: vedi problema 65 del capitolo 20.)
19. *A*, sulla Terra, lancia segnali con un lampeggiatore ogni 6

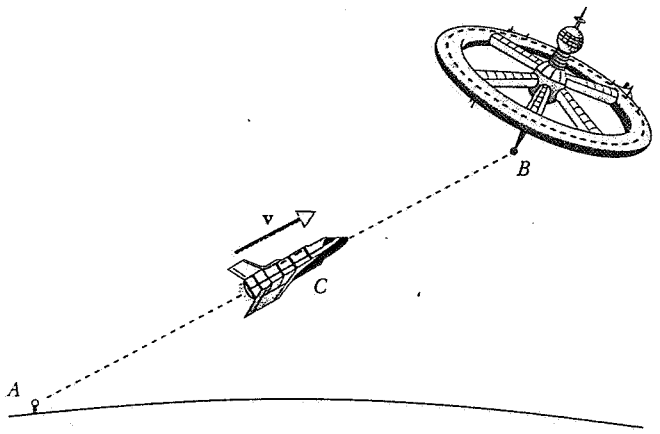


Figura 12 Problema 19.

min. B si trova su una stazione spaziale in quiete rispetto alla Terra. C si trova su un razzo in viaggio da A a B con velocità costante $0.60c$ rispetto ad A; vedi figura 12. (*a*) A che intervalli B riceve segnali da A? (*b*) A che intervalli C riceve segnali da A? (*c*) Se C aziona un lampeggiatore ogni volta che riceve un lampo da A, a che frequenza B riceve i lampi di C?

20. Si consideri un trasmettitore radar T a riposo in un sistema di riferimento S' in moto verso destra con velocità u rispetto al sistema di riferimento S (vedi fig. 13). Un temporizzatore meccanico (fondamentalmente un orologio) nel sistema di riferimento S', avente un periodo τ_0 (misurato in S') fa in modo che il trasmettitore T emetta impulsi radar, che viaggiano alla velocità della luce e vengono ricevuti dal ricevitore R solidale con S. (*a*) Qual è il periodo τ del temporizzatore secondo l'osservatore A, che si trova in quiete nel sistema di riferimento S? (*b*) Si dimostri che il ricevitore R osserva un intervallo tra gli impulsi inviati da T dato, non da τ o da τ_0, bensì da

$$\tau_R = \tau_0\sqrt{\frac{c+u}{c-u}}.$$

(*c*) Spiegare perché l'osservatore in R misura un periodo del trasmettitore diverso da quello osservato da A, che si trova nel medesimo sistema di riferimento. (*Suggerimento*: un orologio ed un impulso radar non sono la stessa cosa.)

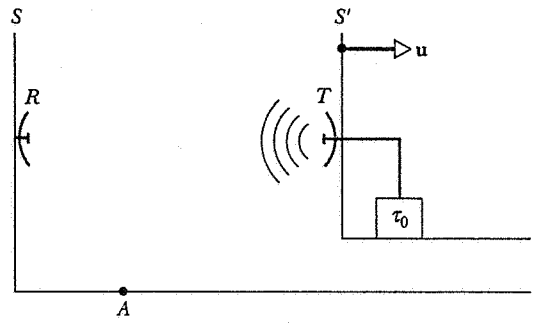


Figura 13 Problema 20.

Paragrafo 42-4 Derivazione dell'effetto Doppler relativistico

21. Un satellite, che trasmette su una frequenza di 40 MHz, passa esattamente sopra ad una stazione radioricevente terrestre ad una altezza di 400 km e ad una velocità di 2.8×10^4 km/h. Disegnare il grafico della variazione di frequenza, attribuibile all'effetto Doppler, in funzione del tempo, prendendo $t = 0$ all'istante in cui il satellite si trova sulla verticale della stazione. (*Suggerimento*: la velocità che compare nella formula dell'effetto Doppler non è la velocità reale del satellite, ma la sua componente nella direzione della stazione. Si trascurino la curvatura della Terra e dell'orbita del satellite.)

22. (*a*) Combinando le equazioni 15 e 16, si dimostri che la relazione tra θ e θ' si può scrivere

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta'\sqrt{1-u^2/c^2}}{\cos\theta' + u/c}.$$

Questo effetto relativistico viene detto aberrazione. Esso dà l'angolo di emissione secondo S quando l'angolo di emissione secondo S' è θ' (vedi fig. 7). Questa equazione si riduce ad un risultato prevedibile quando $u = 0$? (*b*) Senza svolgere ulteriori calcoli, si inverta questa espressione in modo da ottenere l'angolo θ' osservato in S' quando l'angolo di emissione misurato in S è θ.

23. Una sorgente luminosa, a riposo nel sistema di riferimento S', emette radiazione uniformemente in tutte le direzioni. (*a*) Si dimostri che la frazione di luce emessa in un cono di semiapertura θ' è data da

$$f = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\theta').$$

Calcolare f per $\theta' = 30°$. (*b*) La sorgente viene osservata da un sistema di riferimento S, essendo la velocità relativa dei due sistemi $0.80c$. Determinare il valore di θ (nel sistema di riferimento S) a cui corrisponde lo stesso valore di f, usando la formula dell'aberrazione; vedi problema 22. Ripetere il conto per $u/c = 0.90$ e per $u/c = 0.990$. Ciò vi spiega perché questo fenomeno di aberrazione viene spesso detto «effetto faro»?

24. Un nucleo radioattivo si muove con velocità uniforme di $0.050c$ nel sistema di riferimento del laboratorio. Esso decade emettendo un raggio gamma. Determinare la direzione di propagazione del raggio gamma nel sistema di riferimento del laboratorio. Si assuma che il raggio gamma venga emesso, nel sistema di riferimento in cui il nucleo è a riposo, (*a*) parallelamente alla direzione del moto del nucleo, (*b*) a 45° rispetto a questa direzione e (*c*) a 90° rispetto a questa direzione.

Paragrafo 42-5 Conseguenze dell'effetto Doppler relativistico

25. Determinare, se vi è, lo spostamento in lunghezza d'onda $\lambda - \lambda_0$ per la riga D_2 del sodio (589.00 nm) emessa da una sorgente in moto circolare con velocità costante di $0.122c$, misurato da un osservatore che si trovi al centro del cerchio.

26. Una sorgente luminosa si muove in direzione perpendicolare alla direzione di osservazione di un rivelatore. La velocità della sorgente è di $0.662c$. A che velocità si deve muovere una sorgente identica se la sua velocità forma un angolo di 75° con la direzione di osservazione affinché lo spostamento Doppler misurato dal rivelatore sia lo stesso?

27. Una sorgente di onde radio, frequenza a riposo 188 MHz, si muove ad una velocità di $0.717c$ perpendicolarmente alla direzione di osservazione di un rivelatore. A che angolo rispetto alla direzione di osservazione deve muoversi una seconda sorgente, frequenza a riposo 162 MHz, che si muove alla medesima velocità di $0.717c$, affinché il rivelatore misuri in entrambi i casi la medesima frequenza?

28. Si consideri nuovamente il paradosso dei gemelli. Si supponga ora che Ehtel invii un segnale a Fred una volta all'anno (secondo il suo orologio). (*a*) A che frequenza riceve Fred i segnali durante il viaggio di andata di Ethel? (*b*) Quanti segnali riceve Fred durante il viaggio di andata di Ethel? (Suggerimento: secondo l'orologio di Fred, quando arriva il segnale che Ethel è arrivata alla stella?) (*c*) A che frequenza riceve Fred i segnali durante il viaggio di ritorno di Ethel? (*d*) Qual è il numero totale di segnali di compleanno di Ethel ricevuti da Fred durante tutto il viaggio di Ethel?

Capitolo 43

RIFLESSIONE E RIFRAZIONE SU SUPERFICI PIANE

L'ottica è rivolta allo studio delle proprietà della luce e della sua propagazione attraverso i mezzi materiali. Le applicazioni tradizionali dell'ottica includono le lenti correttive per la vista e la formazione delle immagini nei telescopi e nei microscopi. Le applicazioni moderne comprendono l'immagazzinamento e il recupero di informazioni, come nei riproduttori di compact disc, *nei lettori di codici a barre in uso nelle casse dei supermercati, o nella trasmissione dei segnali attraverso cavi a fibre ottiche, che possono trasportare una maggior quantità di informazioni dei fili in rame, sono più leggeri e meno sensibili alle interferenze elettroniche.*

*In questo e nel prossimo capitolo considereremo casi nei quali la luce viaggia in linea retta e incontra ostacoli la cui dimensione è molto maggiore della lunghezza d'onda della luce. Questo è il dominio dell'*ottica geometrica, *che include lo studio delle proprietà degli specchi e delle lenti. Il passaggio della luce attraverso fessure molto sottili o attorno a barriere molto strette, le cui dimensioni siano confrontabili con la lunghezza d'onda della luce fa parte dell'*ottica fisica *o* ottica ondulatoria, *di cui tratteremo a partire dal capitolo 45.*

43-1 OTTICA GEOMETRICA E OTTICA ONDULATORIA

Nella nostra descrizione del moto ondulatorio nel capitolo 19 abbiamo usato il *raggio* come un modo conveniente di rappresentare il moto di un treno d'onde; il raggio è perpendicolare al fronte d'onda e indica la direzione in cui si muove l'onda. Il raggio è una comoda costruzione geometrica, che, come vedremo nel prossimo capitolo, sovente è utile nello studio del comportamento ottico di un sistema come una lente. Ciò non di meno il raggio non è una entità fisica: non possiamo isolarne uno.

Consideriamo un treno di onde piane di luce, di lunghezza d'onda λ, che incide su uno schermo ove sia presente una fenditura di larghezza a. Come suggerisce la figura 1*a*, se $\lambda \ll a$, le onde passano attraverso la fenditura e lo schermo proietta un'ombra netta. Man mano che restringiamo la fenditura, scopriamo che la luce si espande nella regione che in precedenza si trovava all'ombra dello schermo, come è mostrato nella figura 1*b*. Questo fenomeno, noto col nome di *diffrazione*, si manifesta quando la dimensione della fenditura (o di un ostacolo) posta sul cammino dell'onda è confrontabile con la lunghezza d'onda. Ci occuperemo dettagliatamente della diffrazione nel capitolo 46. Si noti (fig. 1*c*) che la diffrazione diventa tanto più pronunciata quanto minore è la larghezza della fenditura; di modo che il tentativo di isolare un singolo raggio diventa vano.

La diffrazione non è una proprietà esclusiva delle onde di luce. In effetti, quei fenomeni che noi studiamo con riferimento alla luce (riflessione, rifrazione, interferenza, diffrazione e polarizzazione) si manifestano pure in altri tipi di moti ondulatori, e anche per le onde meccaniche. Ad esempio, la figura 2 illustra come la diffrazione possa avvenire per le onde che si propagano su uno specchio d'acqua. Per fare un altro esempio, quando gridate davanti a una porta aperta, le onde acustiche vengono diffratte (la lunghezza d'onda è difatti confrontabile con la dimensione dell'apertura di una porta), e un'amica può udirvi anche se non vi vede (mentre le onde luminose hanno una lunghezza d'onda troppo piccola per essere diffratte percettibilmente nel passaggio attraverso la porta). Se a è la misura della minor dimensione trasversale della fenditura o dell'ostacolo, gli effetti della diffrazione possono essere trascurati se il rapporto a/λ, è abbastanza elevato. In questo caso la luce viaggia per percorsi rettilinei che possiamo rappresentare come raggi. Questa è la condizione che definisce l'ambito dell'*ottica geometrica.* Quando un raggio di luce incontra ostacoli come specchi, lenti o prismi, la cui dimensione è molto maggiore della lunghezza d'onda della luce, possiamo tranquillamente utilizzare le equazioni dell'ottica geometrica.

ISBN 88-408-0777-2

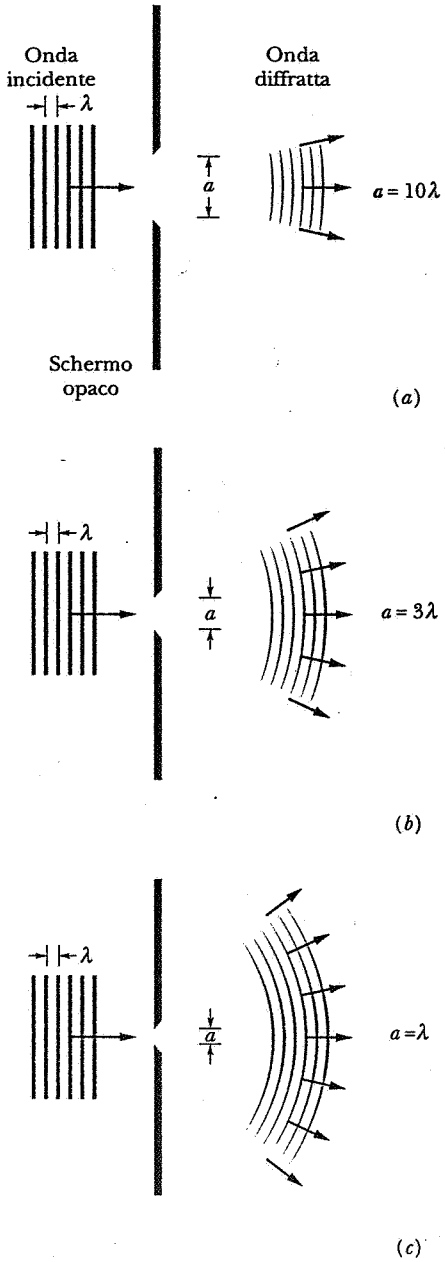


Figura 1 Il tentativo di isolare un raggio riducendo l'ampiezza della fenditura è destinato a fallire a causa della diffrazione, che diventa, fissata la lunghezza d'onda λ, via via più pronunciata man mano che si riduce la larghezza della fessura a

Se la condizione per rientrare nell'ottica geometrica non è soddisfatta, non possiamo descrivere il comportamento della luce per mezzo di raggi, ma dobbiamo necessariamente prendere in considerazione la sua natura ondulatoria. In questo caso ci troviamo nel dominio dell'*ottica ondulatoria*, che comprende l'ottica geometrica come un caso limite, così come la meccanica relativistica include la meccanica classica come suo caso limite. Cominceremo a trattare dell'ottica ondulatoria a partire dal capitolo 45.

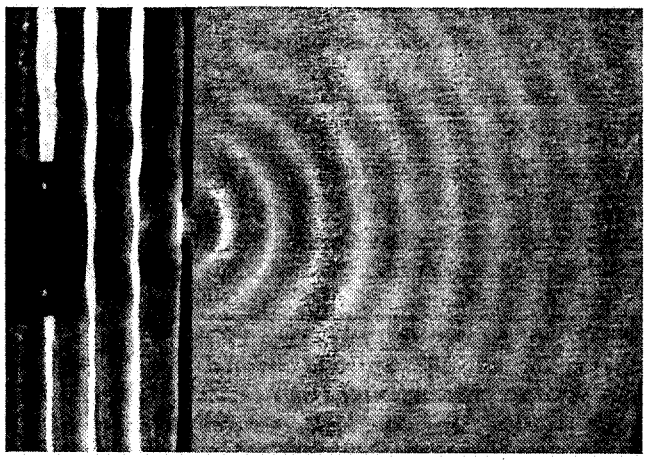


Figura 2 Entro un recipiente da laboratorio si vede la diffrazione prodotta quando le onde sulla superficie dell'acqua incontrano una stretta apertura. Si noti che la larghezza dell'apertura è all'incirca della stessa misura della lunghezza d'onda. Si confronti con la figura 1*c*.

43-2 RIFLESSIONE E RIFRAZIONE

Quando guardate attraverso il vetro di una finestra, vi rendete conto naturalmente che la luce proveniente dall'altra parte del vetro può giungere a voi e che un amico collocato al di là del vetro è in grado di vedervi. Se osservate attentamente tuttavia, vedete anche la vostra immagine riflessa nel vetro. Se doveste emettere lampi di luce contro il vetro, il vostro amico vedrebbe i raggi di luce, ma anche voi potreste vedere una parte della luce riflessa indietro verso di voi.

In generale questi due effetti possono aver luogo ogniqualvolta un raggio di luce passa da un mezzo (l'aria, per esempio) a un altro (il vetro). Parte del raggio può essere riflesso nel primo mezzo, e parte può essere trasmesso nel secondo. La figura 3 illustra questi due effetti. Si noti che il raggio di luce può venir deviato o *rifratto* quando penetra nel secondo mezzo (*).

L'ottica geometrica comprende lo studio della riflessione e della rifrazione. In questo paragrafo riassumiamo le leggi della riflessione e della rifrazione; più oltre in questo capitolo deriveremo le due leggi e daremo degli esempi delle loro applicazioni quando la superficie di separazione tra i due mezzi è piana. I casi in cui questa superficie sia curva, come gli specchi o le lenti sferici, verranno discussi nel prossimo capitolo.

Nella figura 3 i fasci di luce sono rappresentati come raggi. I raggi, che sono disegnati come linee rette perpendicolari ai fronti d'onda (piani), indicano la di-

* *Rifratto* viene dal latino *frangere*, spezzare, come nel termine «frattura». Se immergete una penna inclinata in una scodella d'acqua, la penna appare come *spezzata*.

ISBN 88-408-0777-2

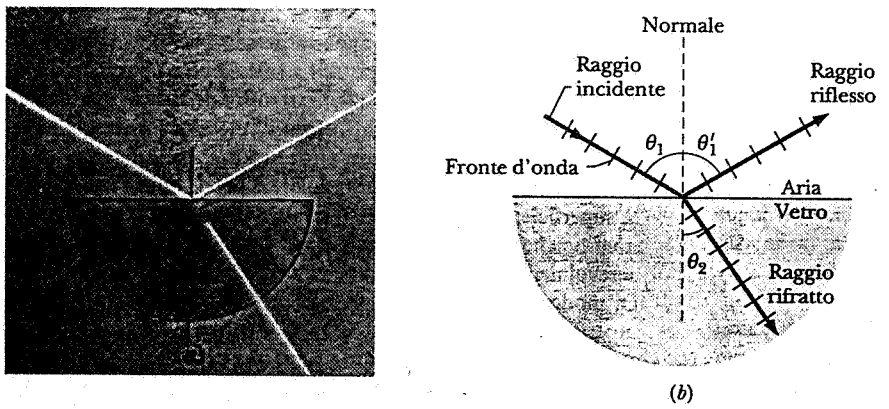


Figura 3 (*a*) Una fotografia che illustra la riflessione e la rifrazione di un'onda luminosa incidente su una superficie piana di vetro. (*b*) Una rappresentazione geometrica che fa uso dei raggi. Sono indicati gli angoli di incidenza θ_1, di riflessione θ_1', di rifrazione θ_2. Si noti che si considerano gli angoli tra il raggio interessato e la normale alla superficie di separazione.

rezione del moto dei fronti d'onda. Osservate i tre raggi disegnati nella figura 3: il raggio originario o *incidente*, il raggio *riflesso* e quello *rifratto*, che cambia direzione non appena penetra nel secondo mezzo.

Nel punto in cui il raggio incidente colpisce la superficie, tracciamo la normale (perpendicolare) alla superficie stessa, in modo da definire tre angoli misurati rispetto alla normale: l'*angolo di incidenza* θ_1, l'*angolo di riflessione* θ_1' e l'*angolo di rifrazione* θ_2. (I pedici relativi agli angoli indicano il mezzo attraverso il quale il raggio si sta muovendo. In questo caso il raggio incide provenendo dal mezzo 1, l'aria, e penetra nel mezzo 2, il vetro.) il piano formato dal raggio incidente e dalla normale è chiamato *piano di incidenza*; è il piano del foglio nella figura 3.

Dall'esperienza ricaviamo le seguenti leggi che governano la riflessione e la rifrazione:

Legge della Riflessione Il raggio riflesso giace nel piano di incidenza, e

$$\theta_1' = \theta_1. \tag{1}$$

Legge della Rifrazione Il raggio rifratto giace nel piano di incidenza, e

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2. \tag{2}$$

L'equazione 2 è detta legge di Snell. Qui n_1 e n_2 sono costanti adimensionali chiamate *indici di rifrazione* del mezzo 1 e del mezzo 2. L'indice di rifrazione n di un mezzo è il rapporto tra la velocità della luce c nel vuoto e la velocità della luce v in quel mezzo:

$$n = \frac{c}{v}. \tag{3}$$

Abbiamo parlato della velocità della luce in vari materiali nel paragrafo 42-2. È giusto dire che la rifrazione avviene perché la velocità della luce cambia nel passare da un mezzo all'altro. Svilupperemo meglio questo concetto nel paragrafo 43-5.

La tabella 1 presenta alcuni esempi di indice di rifrazione per vari materiali. Si noti che, per la maggior parte degli scopi, l'aria può essere considerata equivalente al vuoto per ciò che riguarda la rifrazione della luce. L'indice di rifrazione di un materiale in genere cambia col variare della lunghezza d'onda della luce (si veda la figura 4). Si può pertanto sfruttare il fenomeno di rifrazione per analizzare un fascio di luce, scomponendolo nelle lunghezze d'onda che lo costituiscono, come accade nell'arcobaleno.

TABELLA 1 ALCUNI INDICI DI RIFRAZIONE[a]

Mezzo	*Indice*	*Mezzo*	*Indice*
Vuoto (valore esatto)	1	Vetro comune *crown*	1.52
Aria (condizioni standard)	1.00029	Cloruro di sodio	1.54
Acqua (20 °C)	1.33	Polistirene	1.55
Acetone	1.36	Bisolfuro di carbonio	1.63
Etanolo	1.36	Vetro *flint* pesante	1.65
Soluzione zuccherina (30%)	1.38	Zaffiro	1.77
Quarzo fuso	1.46	Il più pesante vetro *flint*	1.89
Soluzione zuccherina (80%)	1.49	Diamante	2.42

[a] Alla lunghezza d'onda di 589 nm (luce gialla del sodio).

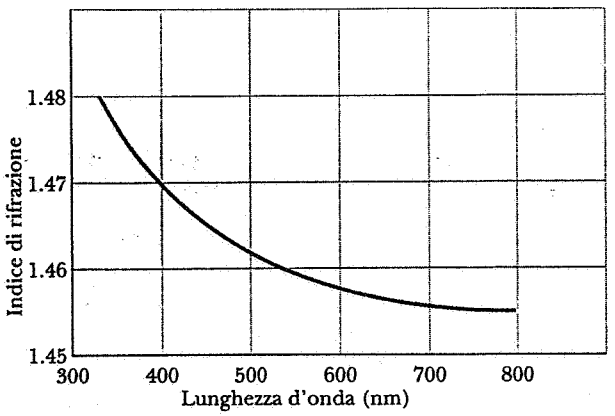


Figura 4 Indice di rifrazione del quarzo fuso in funzione della lunghezza d'onda.

Riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche *(Facoltativo)*

Le leggi della riflessione e della rifrazione valgono per tutte le regioni dello spettro elettromagnetico, non solo per la luce. Difatti le equazioni 1 e 2 possono essere ricavate dalle equazioni di Maxwell, che le rendono applicabili in linea generale a tutte le onde elettromagnetiche. Evidenze sperimentali per questa applicabilità generale sono la riflessione delle microonde o delle onde radio da parte della ionosfera e la rifrazione dei raggi X nei cristalli.

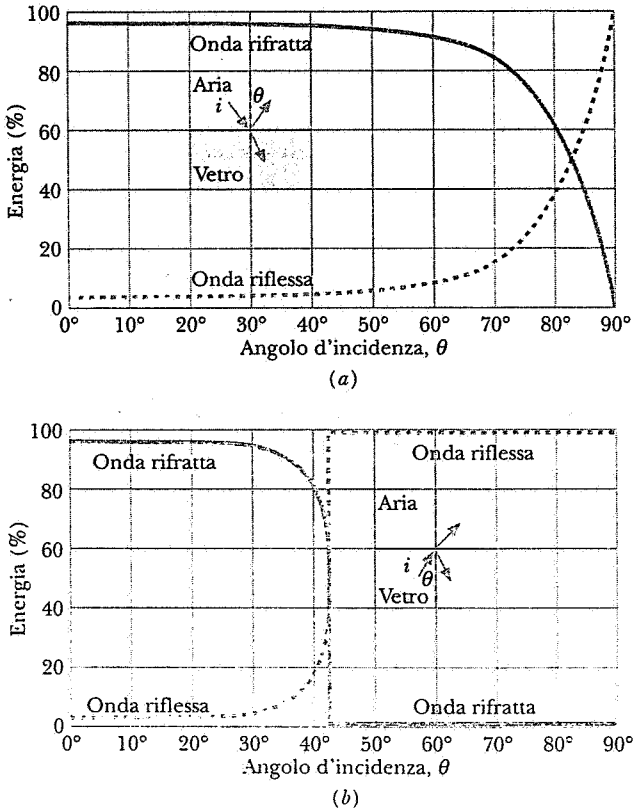


Figura 5 (*a*) Percentuali di energia riflessa e rifratta quando un'onda in aria incide sul vetro ($n = 1.50$). (*b*) Idem per un'onda che passa dal vetro all'aria, con gli effetti dovuti alla riflessione totale.

Comunemente pensiamo alle superfici lisce e ben lucidate come a dei «buoni» riflettori, ma anche altre superfici possono riflettere, ad esempio un foglio di carta. La riflessione da parte della carta (che è chiamata *riflessione diffusa*) diffonde la luce più o meno in tutte le direzioni. È soprattutto per riflessione diffusa che vediamo gli oggetti non luminosi attorno a noi. La differenza tra riflessione diffusa e riflessione speculare dipende dalla rugosità della superficie: un raggio riflesso si ottiene solamente se le dimensioni tipiche delle irregolarità superficiali del riflettore sono considerevolmente inferiori alla lunghezza d'onda della luce incidente. Di modo che la classificazione delle proprietà riflettenti di una superficie dipende dalla lunghezza d'onda della radiazione che la colpisce. Per esempio, il fondo di una casseruola di ferro può essere un buon riflettore per le microonde di lunghezza 0.5 cm, ma è un cattivo riflettore per la luce visibile.

Le equazioni di Maxwell ci permettono di calcolare in che modo l'energia incidente si suddivide tra il raggio riflesso e quello rifratto. La figura 5 illustra la previsione teorica per (*a*) un fascio di luce in aria incidente su un'interfaccia aria-vetro, e (*b*) un fascio di luce nel vetro incidente su un'interfaccia vetro-aria. La figura 5*a* mostra che per angoli di incidenza fino a circa 60°, meno del 10% dell'energia luminosa viene riflessa. A incidenze radenti (ovverosia per angoli di incidenza prossimi a 90°), la superficie diventa un riflettore eccellente. Un altro esempio di questo effetto è l'alto potere riflettente di una strada bagnata quando gli abbaglianti di un'automobile investono con luce radente l'asfalto.

La figura 5*b* mostra chiaramente che a un certo angolo critico (41.8° in questo caso), *tutta* la luce viene riflessa. Prenderemo in considerazione questo fenomeno, detto *riflessione totale*, nel paragrafo 43-6. ■

Esempio 1 La figura 6 mostra un raggio incidente i che investe uno specchio piano MM' con un angolo di incidenza θ. Lo specchio $M'M''$ è perpendicolare a MM'. Disegnare il percorso del raggio attraverso le sue successive riflessioni.

Soluzione Il raggio riflesso r forma un angolo θ con la normale nel punto b e investe lo specchio $M'M''$, con un angolo di incidenza θ' pari a $\pi/2 - \theta$. Il raggio nuovamente riflesso r' forma

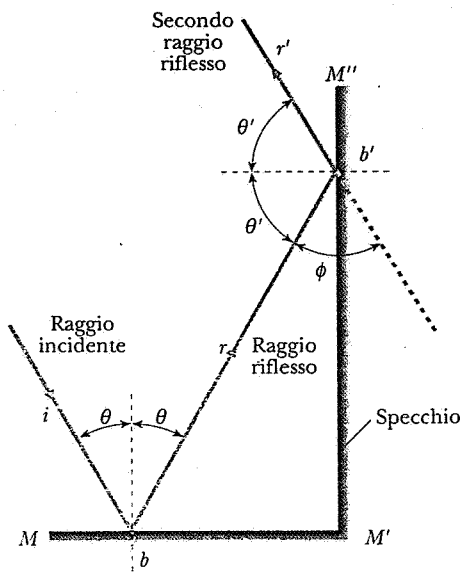


Figura 6 Esempio 1. Un riflettore *a spigolo* bidimensionale.

ISBN 88-408-0777-2

un angolo θ' con la normale allo specchio nel punto b'. I raggi i ed r' sono paralleli per ogni valore di θ. Per verificare ciò si osservi che

$$\phi = \pi - 2\theta' = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 2\theta,$$

e quindi le due linee, formando angoli alterni interni uguali (ϕ e 2θ) con una trasversale, sono parallele.

Ripetere il problema nel caso in cui l'angolo fra gli specchi sia 120° anziché 90°.

L'analogo tridimensionale della figura 6 è il *riflettore triedro*, detto anche *catottro triedro*, che consiste di tre specchi piani perpendicolari intersecantisi come le parti positive dei tre piani delle coordinate di un sistema xyz. Un riflettore triedro ha la proprietà di riflettere indietro nel verso opposto i raggi incidenti, qualsiasi sia la loro direzione di incidenza. I segnali stradali riflettenti utilizzano questo principio, cosicché la luce dei proiettori di un veicolo viene rinviata verso il veicolo stesso, indipendentemente dalla direzione da cui proviene o dall'angolo che il fascio di luce forma al di sopra della carreggiata. Riflettori triedri furono installati sulla Luna dagli astronauti della missione Apollo; misurando il tempo di ritorno di un raggio laser inviato dalla Terra è possibile determinare con precisione la distanza Terra-Luna.

Esempio 2 Un raggio incidente, in aria, investe la superficie piana di un blocco di quarzo, formando un angolo di 30° con la normale. Questo fascio è costituito da due lunghezze d'onda, 400 e 500 nm, per le quali l'indice di rifrazione del quarzo è rispettivamente 1.4702 e 1.4624. Qual è l'angolo fra i due raggi rifratti nel quarzo?

Soluzione Per un fascio di 400 nm, abbiamo, applicando l'equazione 2 e ponendo per l'aria $n_1 = 1$

$$\operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2,$$

ossia

$$\operatorname{sen} 30° = (1.4702) \operatorname{sen}\theta_2.$$

Da qui

$$\theta_2 = 19.88°.$$

Per il fascio di 500 nm, abbiamo

$$\operatorname{sen} 30° = (1.4624) \operatorname{sen}\theta_2,$$

ovvero

$$\theta_2 = 19.99°.$$

L'angolo $\Delta\theta$ fra i due fasci è 0.11°; la componente di lunghezza d'onda più corta, che ha l'angolo di rifrazione più piccolo, subisce la deviazione maggiore. La differenza tra gli angoli diminuisce man mano che si riduce l'angolo di incidenza e diventa 0.018° per $\theta_1 = 5°$. Negli strumenti ottici che fanno uso di lenti, la variazione dell'angolo di rifrazione con la lunghezza d'onda porta a una distorsione chiamata *aberrazione cromatica*. Limitandosi ad angoli di incidenza piccoli si riduce la distorsione dovuta all'aberrazione cromatica.

Esempio 3 Un raggio incidente investe, in aria, la faccia di un prisma di vetro, come nella figura 7. L'angolo θ è scelto in modo che il raggio uscente dal prisma formi anch'esso un angolo θ con la normale alla faccia da cui esce. Ricavare un'espressione per l'indice di rifrazione del materiale di cui è costituito il prisma, ponendo per l'aria $n = 1$.

Soluzione Si osservi che $b\hat{a}d + \alpha = \pi/2$ e che $b\hat{a}d + \phi/2 = \pi/2$. Quindi

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\phi. \tag{4}$$

L'angolo di deviazione ψ è la somma dei due angoli interni ad esso non adiacenti del triangolo *aed*, ossia

$$\psi = 2(\theta - \alpha).$$

Sostituendo ad α il valore $\frac{1}{2}\phi$ e risolvendo rispetto a θ si ottiene

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\psi + \phi). \tag{5}$$

Nel punto a, θ è l angolo di incidenza e α l'angolo di rifrazione. La legge della rifrazione (eq. 2) è

$$\operatorname{sen}\theta = n \operatorname{sen}\alpha,$$

nella quale n è l'indice di rifrazione del vetro.

Tenendo conto delle equazioni 4 e 5 , si perviene a

$$\operatorname{sen}\frac{\psi + \phi}{2} = n \operatorname{sen}\frac{\phi}{2},$$

ovverosia

$$n = \frac{\operatorname{sen}(\psi + \phi)/2}{\operatorname{sen}(\phi/2)}, \tag{6}$$

che è la relazione richiesta. Questa equazione vale soltanto se l'angolo θ è tale che il raggio luminoso attraversi il prisma in modo simmetrico. In questa situazione ψ è detto *angolo di deviazione minima*; se θ aumenta o diminuisce, ne risulta un angolo di deviazione maggiore.

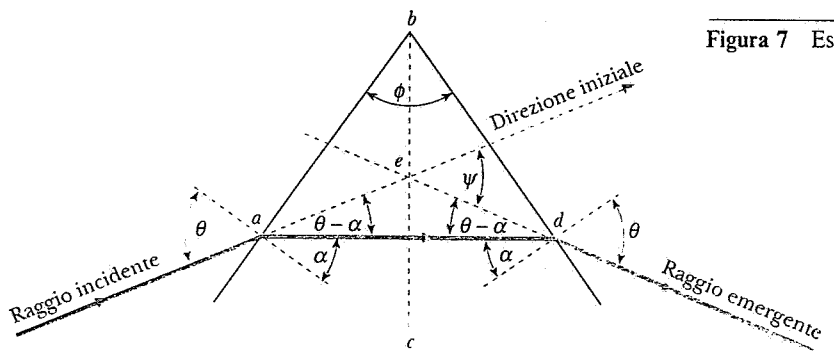


Figura 7 Esempio 3.

43-3 DERIVAZIONE DELLA LEGGE DI RIFLESSIONE

La legge della riflessione può essere ottenuta in vari modi. Qui ne presenteremo due.

Il principio di Huygens

Il fisico olandese Christian Huygens* ha sviluppato una semplice teoria della luce nel 1678. Questa teoria assume che la luce sia un'onda, senza pronunciarsi circa la natura di quest'onda. (In particolare si osservi che, considerato che la teoria di Maxwell sull'elettromagnetismo non sarebbe apparsa se non due secoli dopo, la teoria di Huygens non contiene suggerimenti sul carattere elettromagnetico della luce.) Huygens non sapeva se la luce fosse un'onda trasversale o longitudinale; non conosceva neppure la lunghezza d'onda della luce; e aveva solo vaghe informazioni sulla velocità della luce. Tuttavia la sua teoria fu, per diversi anni, una guida utile agli esperimenti, e resta tutt'oggi utile per scopi didattici e per alcune applicazioni, ma non dobbiamo aspettarci di ottenere la stessa dovizia di informazioni dettagliate che può dare la più completa teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell.

La teoria di Huygens è basata su una costruzione geometrica che permette di prevedere dove si troverà a ogni istante, nel seguito, un fronte d'onda del quale si conosce la posizione a un dato istante. Il principio di Huygens si può enunciare così:

> *Tutti i punti di un fronte d'onda possono essere considerati come sorgenti puntiformi di onde sferiche secondarie. Dopo un tempo t la nuova posizione del fronte d'onda sarà la superficie di inviluppo di queste onde secondarie.*

Illustriamo questo principio con un esempio banale. Dato un fronte d'onda (*ab* nella figura 8) di un'onda piana nel vuoto, dove sarà il fronte d'onda dopo un tempo t? Applichiamo il principio di Huygens servendoci di diversi punti su questo piano (si vedano i cerchietti di figura 8) come di centri di onde sferiche secondarie. In un tempo t il raggio di queste onde sferiche è ct, con c velocità della luce nel vuoto. Il piano

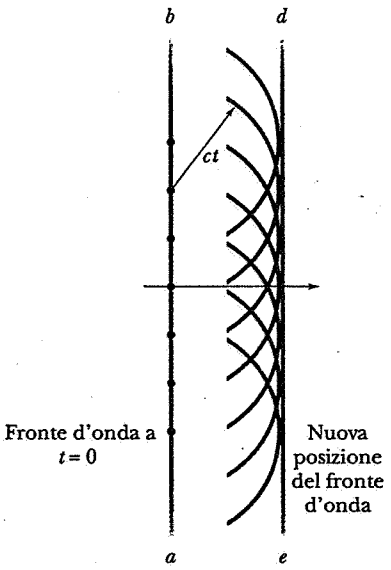


Figura 8 La propagazione di un'onda piana nello spazio vuoto è qui descritta mediante la costruzione di Huygens. Si noti che il raggio (freccia orizzontale) che rappresenta l'onda è perpendicolare ai fronti d'onda.

tangente a queste sfere al tempo t è rappresentato dal profilo *de* che, come prevedibile, è parallelo ad *ab* e posto a distanza ct da esso. Quindi i fronti d'onda piani si propagano come piani e con velocità c. Si noti che il metodo di Huygens riguarda una costruzione tridimensionale e che la figura 8 è l'intersezione di questa costruzione con il piano della pagina.

Potremmo aspettarci, contrariamente alle osservazioni, che le onde emesse dalle sorgenti della figura 8 debbano essere irradiate indietro oltre che in avanti. Si evita questa complicazione assumendo che l'*intensità* delle onde sferiche elementari non sia uniforme in tutte le direzioni, ma vari con continuità da un massimo in avanti a un minimo (zero) all'indietro, come è suggerito dall'aspetto degli archi nella figura 8, che si assottigliano allontanandosi dalla posizione anteriore. Il metodo di Huygens può essere applicato quantitativamente a tutti i fenomeni ondulatori (vedi probl. 24). Il metodo fu espresso in forma matematica precisa molto tempo più tardi da Gustav Kirchhoff (1824-1887), il quale dimostrò che l'intensità delle onde secondarie varia effettivamente con la direzione come poc'anzi descritto.

Ora mostreremo come la legge della riflessione discenda dal principio di Huygens. La figura 9*a* illustra tre fronti di un'onda piana che si propaga verso lo specchio piano MM'. Per convenienza essi sono stati tracciati alla distanza di una lunghezza d'onda l'uno dall'altro. Si osservi che l'angolo θ_1 tra i fronti d'onda e lo specchio è uguale all'angolo fra il raggio incidente e la normale allo specchio. In altre parole, θ_1 è l'*angolo di*

* Christian Huygens (1629-1695) fu scienziato di notevole valore e influenza. Oltre alla teoria ondulatoria della luce, i suoi successi comprendono un progetto di telescopio, che gli permise di dedurre la forma degli anelli di Saturno, lo sviluppo dell'orologio a pendolo e contributi alla teoria dei corpi rotanti (inclusa la prima formulazione dell'esistenza dell'accelerazione centripeta) e degli urti (incluso il principio di conservazione della quantità di moto).

ISBN 88-408-0777-2

incidenza. I tre fronti d'onda si ottengono l'uno dall'altro con la costruzione di Huygens come nella figura 8.

Nella figura 9*b* un'onda di Huygens con il centro nel punto *a* raggiunge il punto *b* sulla superficie dello specchio dopo un tempo λ/c. Dal punto *p* appartenente allo stesso fronte d'onda la luce non può propagarsi oltre lo specchio, ma vi si deve riflettere sotto forma di onda sferica elementare di Huygens. Puntando un compasso in *p* e tracciando un arco di raggio λ si ottiene un semicerchio al quale il fronte d'onda riflesso dev'essere tangente. Si osservi che l'angolo θ_1' tra il fronte d'onda e lo specchio è uguale all'angolo fra il raggio riflesso e la normale allo specchio. In altre parole, θ_1' è l'*angolo di riflessione*.

Consideriamo i triangoli rettangoli *abp* e *a'bp:* essi hanno il lato *bp* in comune e il lato *ab* ($= \lambda$) uguale al lato *a'p*. I due triangoli sono uguali, cosicché possiamo concludere che

$$\theta_1 = \theta_1',$$

come richiesto dalla legge della riflessione. Ricordando che la costruzione di Huygens è tridimensionale e che gli archi mostrati nella figura rappresentano sezioni di superficie sferica, ci si potrà facilmente convincere che il raggio riflesso sta nel piano formato dal raggio incidente e dalla normale allo specchio, cioè nel piano della figura 9. Anche questa condizione fa parte della legge della riflessione.

Nelle figure 9*c* e 9*d* si vede come il fenomeno proceda finché tutti e tre i fronti incidenti siano riflessi.

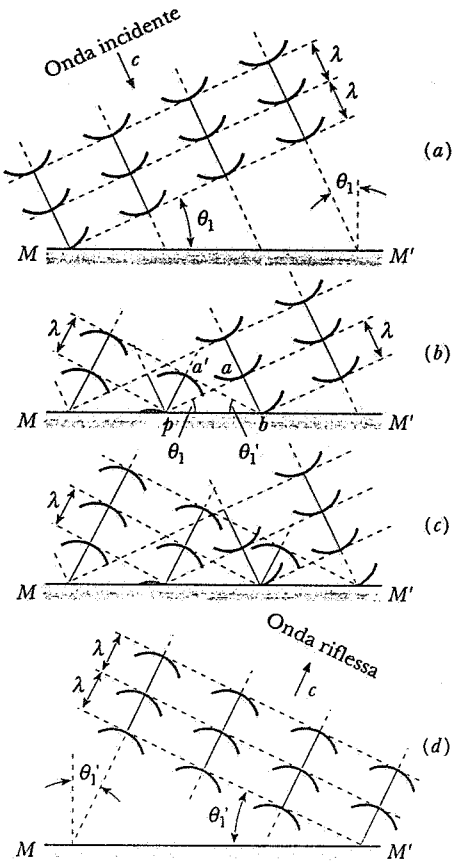


Figura 9 Riflessione di un'onda piana su uno specchio piano analizzata mediante la costruzione di Huygens.

Il principio di Fermat

Nel 1650 Pierre Fermat* scoprì un importante principio del quale diamo il seguente enunciato:

> *Un raggio di luce, propagandosi da un punto fisso a un altro, segue un percorso tale che il tempo impiegato a percorrerlo, confrontato con quello dei percorsi vicini, è un minimo o un massimo o è stazionario.*

La legge della riflessione può essere ricavata facilmente da questo principio. Nella figura 10 sono fissati due punti *A* e *B* e un raggio *APB* che li congiunge mediante una riflessione. (Supponiamo qui che il raggio *APB* giaccia sul piano della figura; si veda il problema 25.) Il percorso totale corrispondente a questo raggio è

$$L = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (D - x)^2},$$

dove x indica la posizione del punto *P* nel quale il raggio tocca lo specchio.

Per il principio di Fermat, *P* deve trovarsi in una posizione per cui il tempo di percorrenza della luce, ossia $t = L/c$, deve essere minimo (o massimo o stazionario). In ogni caso la condizione richiede che $dt/dx = 0$. Calcolando e annullando questa derivata si ottiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dx} = \frac{1}{2c}(a^2 + x^2)^{-1/2}(2x) + \\ + \frac{1}{2c}[b^2 + (D - x)^2]^{-1/2}(2)(D - x)(-1) = 0,$$

che può essere riscritta come

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{D - x}{\sqrt{b^2 + (D - x)^2}}.$$

* Pierre Fermat (1601-1665), matematico francese, è ricordato per i suoi studi di geometria analitica e i suoi numerosi contributi alla teoria dei numeri. Forse il suo risultato più sorprendente è il *teorema di Fermat*: la funzione $x^n + y^n = z^n$, ove x, y, z ed n sono interi positivi, non ha soluzioni per $n > 2$. Malgrado egli abbia affermato di aver trovato una dimostrazione di questo teorema (che però mancò di pubblicare o di rendere nota ad alcuno), essa ha tenuto in scacco i matematici per più di 300 anni**.

** È stata recentemente annunciata (Giugno 1993) una dimostrazione molto complessa del teorema, elaborata dal matematico A.J. Wiles dell'università di Princeton. [N.d.T.]

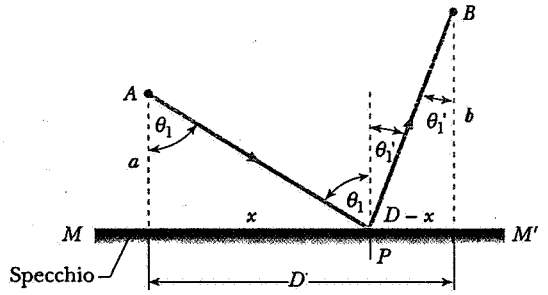


Figura 10 Riflessione di un'onda piana su uno specchio piano analizzata facendo uso del principio di Fermat. Il raggio proveniente da *A* giunge in *B* dopo una riflessione in *P*.

Nello sviluppo della derivata si osservi che abbiamo mantenuto fissi i due punti di partenza e di arrivo e abbiamo fatto variare la lunghezza del percorso facendo variare x.

Dalla figura 10 si vede che questa equazione può essere riscritta come

$$\text{sen}\theta_1 = \text{sen}\theta'_1,$$

ovvero

$$\theta_1 = \theta'_1,$$

che esprime la legge della riflessione.

43-4 FORMAZIONE DELLE IMMAGINI SU SPECCHI PIANI

Forse la nostra più familiare esperienza di ottica è guardare in uno specchio. Nella figura 11 è disegnata una sorgente puntiforme di luce *O*, chiamata *oggetto*, di fronte a uno specchio piano a distanza o da esso. La luce investe lo specchio come un'onda sferica rappresentata nella figura mediante raggi uscenti da *O**. Costruiamo i raggi riflessi nei punti in cui ogni raggio incidente colpisce lo specchio. Se si tracciano i prolungamenti dei raggi riflessi oltre lo specchio, essi si incontrano nel punto *I*, chiamato *immagine* di *O*, che si trova al di là dello specchio alla stessa distanza da esso del punto *O*, cosa che dimostreremo fra poco.

* Nella nostra discussione sulla riflessione in questo capitolo, abbiamo fatto l'ipotesi che l'onda incidente fosse *piana*; in quel caso i raggi incidenti sono tutti paralleli tra di loro. In questo caso abbiamo una sorgente *puntiforme* e i raggi che incidono sullo specchio *divergono* da tale sorgente puntiforme. Possiamo considerare la sorgente puntiforme come una sorgente di onde sferiche, cioè tale che i raggi da essa emessi siano tutti perpendicolari ai fronti d'onda di forma sferica.

Le immagini possono essere *reali* o *virtuali*. Nel caso dell'immagine reale la luce passa effettivamente attraverso il punto immagine; nel caso dell'immagine virtuale la luce si comporta come se provenisse dal punto immagine, sebbene in effetti essa non passi per tale punto; si veda la figura 11. Le immagini riflesse dagli specchi piani sono sempre virtuali. Dalla nostra esperienza quotidiana sappiamo quanto *sembrino* essere «reali» tali immagini virtuali e come sia ben definita la loro posizione nello spazio oltre lo specchio, anche se lo spazio può realmente essere riempito dai mattoni di un muro.

Nella figura 12 sono riportati due dei raggi della figura 11, uno colpisce lo specchio in v lungo la normale e l'altro in un punto qualsiasi a formando un ango-

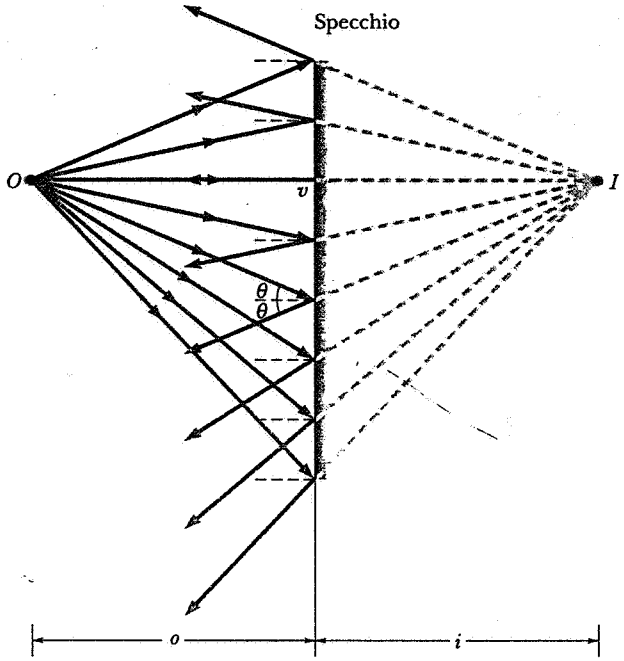


Figura 11 Un punto oggetto *O* forma un'immagine virtuale *I* mediante uno specchio piano. Il raggio *sembra* divergere da *I*, nel qual punto peraltro non vi è in realtà nessuna fonte di luce.

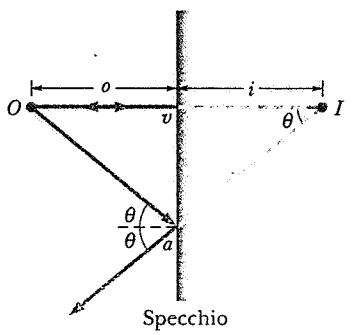


Figura 12 Due raggi tra quelli rappresentati nella figura 11. Il raggio *Oa* forma un angolo arbitrario θ con la normale alla superficie dello specchio.

ISBN 88-408-0777-2

lo di incidenza θ con la normale in quel punto. Con elementari considerazioni di geometria è facile vedere che gli angoli $a\hat{O}v$ e $a\hat{I}v$ sono uguali a θ. Così i triangoli rettangoli aOv e aIv sono uguali, di modo che

$$o = -i, \tag{7}$$

dove abbiamo introdotto il segno meno per indicare che I e O si trovano, rispetto allo specchio, da parti opposte. L'equazione 7 non contiene θ, la qualcosa significa che i prolungamenti di *tutti* i raggi che colpiscono lo specchio, passano per I come si è visto nella figura 11. Nel ricavare la (7) non abbiamo fatto nessun'altra ipotesi oltre a quelle di supporre piano lo specchio e di ritenere valide le leggi dell'ottica geometrica. Un oggetto puntiforme produce in uno specchio piano un'immagine puntiforme, con $o = -i$, indipendentemente dall'ampiezza dell'angolo θ nella figura 12.

Dato che la pupilla dell'occhio ha un diametro finito, soltanto i raggi che appartengono a un piccolo fascio possono entrare nell'occhio dopo essersi riflessi in uno specchio. Soltanto una piccola parte dello specchio, vicino al punto a, contribuisce a formare l'immagine quando l'occhio è nella posizione mostrata dalla figura 13; il resto dello specchio potrebbe essere coperto o eliminato. Se l'occhio si sposta in un'altra posizione, sarà un'altra parte dello specchio quella utile a formare l'immagine, ma la posizione virtuale I non cambierà, ferma restando la posizione dell'oggetto.

Se l'oggetto è una sorgente estesa, come ad esempio la testa di una persona, si formerà ugualmente un'immagine virtuale. Possiamo immaginare la sorgente estesa come una sequenza di sorgenti puntiformi, ciascuna della quali dia luogo a onde sferiche. Per l'equazione 7, ogni punto della sorgente ha un punto immagine che si trova oltre il piano dello specchio a ugual distanza da esso. Così l'immagine riproduce l'oggetto punto per punto. La maggior parte di noi verifica questo fatto ogni giorno guardando in uno specchio.

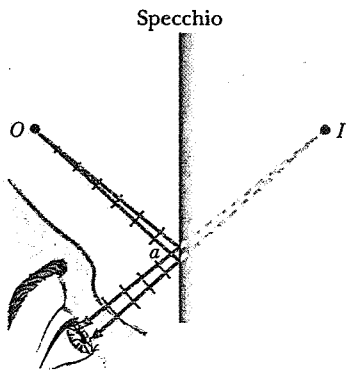


Figura 13 Un fascio di raggi proveniente da O colpisce l'occhio dopo una riflessione sullo specchio. Solo una piccola porzione dello specchio attorno ad a è effettivamente utile. Gli archetti rappresentano delle piccole porzioni di fronti d'onda sferici. La luce sembra provenire da I.

Rovesciamento d'immagine

Come si vede nella figura 14*a* l'immagine di una mano sinistra appare come una mano destra. Facciamo riferimento a questa caratteristica dicendo che la destra è l'immagine speculare della sinistra. Vale a dire che, se alzate la mano sinistra, la vostra immagine nello specchio alza la mano destra. Si sente spesso domandare: ma perché uno specchio scambia la destra con la sinistra e non scambia l'alto col basso?

La figura 14*b* illustra il modo in cui uno specchio rovescia l'immagine di un oggetto tridimensionale, rappresentato semplicemente come l'insieme di tre assi mutuamente perpendicolari. Si osservi che gli assi paralleli al piano dello specchio (assi x e y) sono identici alle loro immagini speculari. Solo l'asse z presenta il verso modificato dalla riflessione. Di conseguenza è più corretto dire che uno specchio scambia l'avanti

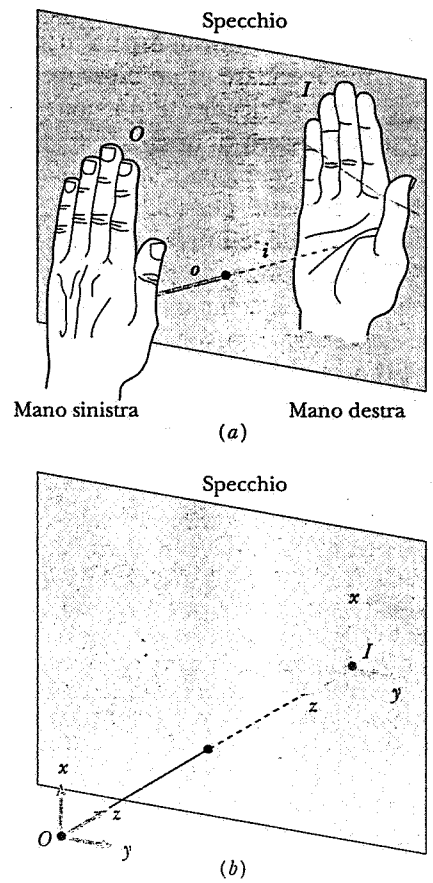


Figura 14 (*a*) L'oggetto O è una mano sinistra; la sua immagine I è una mano destra. (*b*) Lo studio di un oggetto a tre assi orientati mostra che lo specchio scambia il davanti col dietro piuttosto che la sinistra con la destra.

con l'indietro piuttosto che la destra con la sinistra. La trasformazione di una mano sinistra nella mano destra avviene, in un certo senso, scambiando tra di loro il fronte e il retro della mano.

Si noti anche che l'oggetto può essere considerato come rappresentativo di un sistema di coordinate convenzionale destrorso (x, y e z diretti rispettivamente come il pollice, l'indice e il medio della mano destra) mentre l'immagine è come un sistema di coordinate sinistrorso (x, y e z diretti rispettivamente come il pollice, l'indice e il medio della mano sinistra). Questa inversione si applica anche agli oggetti fisici; ad esempio, l'immagine di una vite con la filettatura destrorsa è quella di una vite con la filettatura sinistrorsa.

Se avessimo come dato di fatto che gli esseri umani sono tutti dotati di sole mani destre, potremmo distinguere con certezza tra le situazioni reali e le loro immagini speculari; la persona «reale» sarebbe quella che appare con la mano destra, mentre l'immagine apparirebbe con la sinistra. Tuttavia, essendo gli esseri umani dotati di destra e sinistra, non possiamo ricorrere a questo espediente per distinguere tra il mondo reale e il mondo degli specchi. La stessa distinzione è stata applicata alle leggi della fisica: se le leggi della fisica presentassero una perfetta simmetria destra-sinistra, allora l'immagine speculare di un esperimento sarebbe pure un esperimento fisicamente possibile. Se al contrario le leggi mancassero di questa simmetria, il risultato di determinati esperimenti in immagini speculari non sarebbe fisicamente possibile. Nel 1956 è stato scoperto che le cosiddette interazioni deboli, che sono all'origine di certi decadimenti radioattivi, mancano di questa simmetria, che è detta *parità* (si veda il paragrafo 3-6). Questa esperienza fornisce la prima base fondamentale per una distinzione tra il nostro mondo e quello della sua immagine speculare*.

Esempio 4 Trovare l'altezza minima h di uno specchio, che consente a una persona alta H, di vedersi interamente riflessa in esso.

Soluzione Nella figura 15 sono indicati il piede f, l'occhio e e il culmine della testa t. Per consentire all'occhio di vedere interamente l'immagine, un raggio di luce (tae) deve partire dalla testa, riflettersi sullo specchio in a e raggiungere l'occhio, mentre un altro raggio (fce) si origina dal piede, si riflette nello specchio in c e raggiunge l'occhio. La persona si vedrà riflessa interamente, includendo cioè le immagini virtuali dei punti t ed f, quando la lunghezza dello specchio è almeno pari ad ac.

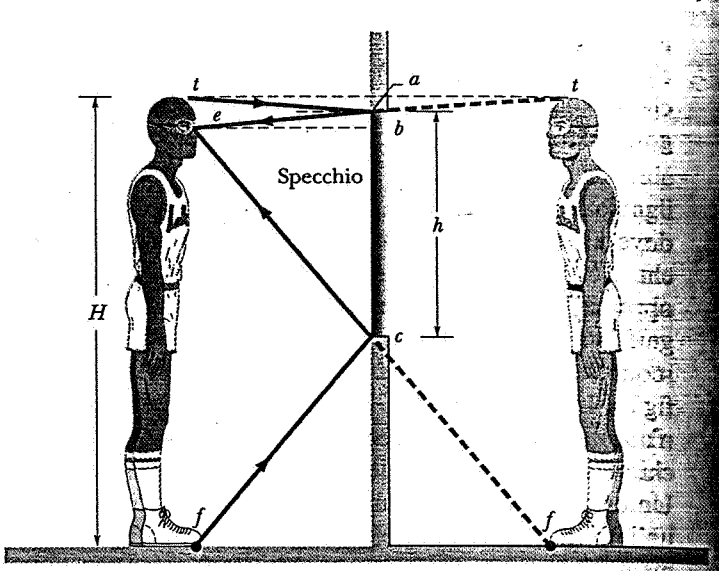


Figura 15 Esempio 4.

Dalla geometria di figura 15 si ricava

$$ab = \tfrac{1}{2}te \quad \text{e} \quad bc = \tfrac{1}{2}ef,$$

in cui il punto b è alla stessa altezza degli occhi. Cosicché

$$ac = ab + bc = \tfrac{1}{2}te + \tfrac{1}{2}ef = \tfrac{1}{2}tf.$$

Ponendo $h = ac$ e $H = tf$, otteniamo

$$h = \tfrac{1}{2}H.$$

La persona può vedere la sua immagine per intero se lo specchio è alto come almeno la metà di essa. Prolungamenti dello specchio al di sotto del punto c mostrano l'immagine del pavimento davanti ai suoi piedi, mentre quelli al di sopra del punto t mostrano ciò che sovrasta la sua testa. Si osservi che la distanza della persona dallo specchio non rientra nel calcolo, che rimane valido per qualsiasi distanza dell'oggetto dal piano dello specchio.

43-5 DERIVAZIONE DELLA LEGGE DI RIFRAZIONE

In analogia con il paragrafo 43-3 faremo qui uso del principio di Huygens e del principio di Fermat per ricavare la legge di rifrazione (eq. 2).

Principio di Huygens

Nella figura 16 sono riportati quattro stadi relativi alla rifrazione di tre fronti d'onda consecutivi di un'onda piana che investe la superficie di separazione fra aria (mezzo 1) e vetro (mezzo 2). Per convenienza tracciamo i fronti d'onda incidenti a distanza λ_1 l'uno dall'altro, essendo questa la lunghezza d'onda nel mezzo 1. Facciamo l'ipotesi che sia

$$v_2 < v_1. \tag{8}$$

* Per qualche divertente descrizione sulla simmetria e la distinzione tra gli oggetti e le loro immagini speculari, si veda Gardner M., *The Ambidextrous Universe*, Scribner's 1979 e Bunch B., *Reality's Mirror*, Wiley 1989.

ISBN 88-408-0777-2

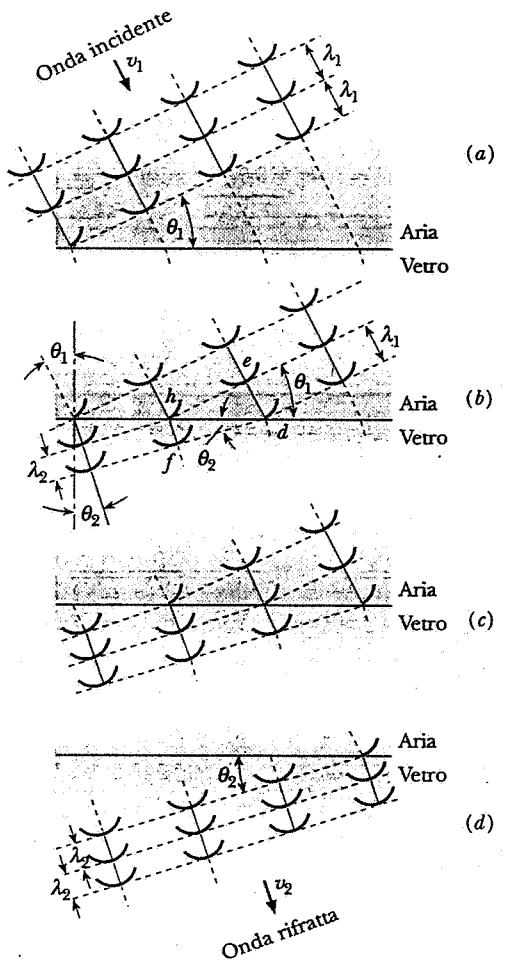


Figura 16 Rifrazione di un'onda piana in corrispondenza di un'interfaccia piana, analizzata mediante la costruzione di Huygens. Per semplicità, non è indicata l'onda riflessa. Si noti la variazione di lunghezza d'onda nell'onda rifratta.

essendo v_1 e v_2 le velocità della luce nell'aria e nel vetro rispettivamente. Tale supposizione relativa alla velocità è fondamentale per poter dedurre la legge della rifrazione. I fronti d'onda nella figura 16*a* sono collegati l'uno all'altro dalla costruzione di Huygens (fig. 8). Come nella figura 9, θ_1 è l'angolo di incidenza. Nella figura 16*b* si consideri il tempo ($= \lambda_1/v_1$) che l'onda di Huygens, partita da *e*, impiega a raggiungere *d*. La luce proveniente da *h*, che si propaga nel vetro a velocità ridotta (si ricordi l'ipotesi dell'equazione 8), percorrerà una distanza più breve pari a

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{v_2}{v_1} \tag{9}$$

nel medesimo lasso di tempo, visto che $v = \lambda\nu$ e $\nu_1 = \nu_2$. Il fronte d'onda rifratto deve essere tangente a un arco col centro in *h* e raggio uguale a λ_2. Inoltre dato che *d* appartiene al nuovo fronte d'onda, esso dovrà passare per *d*. Si osservi che l'angolo θ_2 fra il fronte d'onda rifratto e la superficie aria-vetro è uguale all'angolo fra il raggio rifratto e la normale a questa superficie; cioè θ_2 è l'*angolo di rifrazione*. Si osservi anche che la lunghezza d'onda nel vetro (λ_2) è minore della lunghezza d'onda nell'aria (λ_1).

Per i triangoli rettangoli *hde* e *hdf* possiamo scrivere

$$\text{sen}\theta_1 = \frac{\lambda_1}{hd} \quad \text{(per } hde\text{)}$$

e

$$\text{sen}\theta_2 = \frac{\lambda_2}{hd} \quad \text{(per } hdf\text{)}.$$

Dividendo membro a membro e facendo uso dell'equazione 9 si ottiene

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}. \tag{10}$$

Moltiplicando per un fattore comune *c*, possiamo riscrivere la (10) come

$$\frac{c}{v_1}\text{sen}\theta_1 = \frac{c}{v_2}\text{sen}\theta_2. \tag{11}$$

Coerentemente con l'equazione 3, $c/v_1 = n_1$ e $c/v_2 = n_2$, in modo tale che l'equazione 11 diventa

$$n_1 \text{ sen}\theta_1 = n_2 \text{ sen}\theta_2, \tag{12}$$

che esprime la legge della rifrazione.

Se al posto di uno dei due mezzi c'è il vuoto, l'equazione 9 si riduce a

$$\lambda_n = \lambda\frac{v}{c} = \frac{\lambda}{n}, \tag{13}$$

ove λ_n esprime la lunghezza d'onda della luce nel mezzo di indice *n* e λ è la lunghezza d'onda nel vuoto. Passando da un mezzo a un altro più denso, sia la velocità sia la lunghezza d'onda della luce si riducono di un medesimo fattore, mentre la frequenza rimane invariata.

L'applicazione del principio di Huygens alla rifrazione richiede che, se il raggio luminoso si avvicina alla normale nel passaggio dall'aria a un mezzo otticamente denso, la velocità della luce nel mezzo denso (per esempio vetro) sia minore di quella in aria (vedi equazione 8). Questa condizione vale per qualsiasi teoria ondulatoria della luce. Facendo uso della vecchia teoria corpuscolare di Newton, la rifrazione può essere spiegata soltanto ammettendo che la velocità della luce nel mezzo in cui essa si avvicina alla normale (il mezzo otticamente denso) sia maggiore della velocità in aria. Si pensava che il mezzo denso esercitasse forze attrattive sui «corpuscoli» della luce quando questi si avvicinavano alla superficie, accelerandoli e cambiandone la direzione di moto in modo che essi formassero con la normale un angolo minore.

Quindi un confronto sperimentale fra le velocità della luce in aria e in un mezzo otticamente più denso è determinante per scegliere tra la teoria ondulatoria e la teoria corpuscolare. Questa misura fu fatta per la prima volta da Foucault nel 1860; egli dimostrò in modo decisivo che la luce si propaga più lentamente in acqua che in aria, mettendo fuori gioco la teoria corpuscolare di Newton.

Principio di Fermat

Per dimostrare la legge della rifrazione partendo dal principio di Fermat, consideriamo nella figura 17 i punti A e B che si trovano in mezzi differenti, e il raggio APB che li collega. Il tempo di percorrenza t, necessario per andare da A a B, è dato da

$$t = \frac{L_1}{v_1} + \frac{L_2}{v_2},$$

che, facendo uso della relazione $n = c/v$ può essere scritto come

$$t = \frac{n_1 L_1 + n_2 L_2}{c} = \frac{L}{c}, \qquad (14)$$

ove L rappresenta il *cammino ottico*, definito come

$$L = n_1 L_1 + n_2 L_2. \qquad (15)$$

Per ogni fascio di luce che attraversa più mezzi successivi, il cammino ottico rappresenta la somma dei prodotti della lunghezza geometrica percorsa in ciascun mezzo per l'indice di rifrazione di quel mezzo. L'equazione 13 ($\lambda_n = \lambda/n$) dimostra che il cammino ottico equivale alla lunghezza che uno stesso numero d'onde percorrerebbe nel vuoto. Il cammino ottico non va confuso con la lunghezza del cammino geometrico, che è $L_1 + L_2$ per il raggio di figura 17.

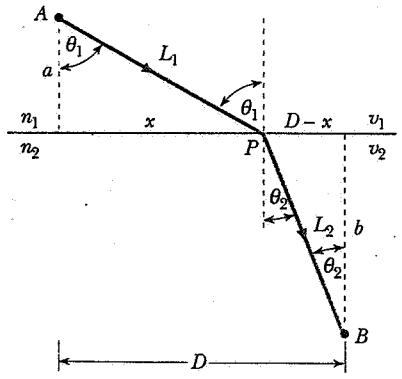


Figura 17 Rifrazione di un'onda piana in corrispondenza di un'interfaccia piana, analizzata facendo uso del principio di Fermat. Un raggio si propaga dal punto A al punto B subendo rifrazione nel punto P.

Per il principio di Fermat, il tempo t necessario alla luce per percorrere il tratto APB deve essere minimo (o massimo o costante) e ciò richiede che x sia scelto in modo che $dt/dx = 0$. La lunghezza del cammino ottico nella figura 17 è

$$L = n_1 L_1 + n_2 L_2 = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (D - x)^2}.$$

Sostituendo il risultato nell'equazione 14 e derivando, si ottiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dL}{dx} = \frac{n_1}{2c}(a^2 + x^2)^{-1/2}(2x) + \\ + \frac{n_2}{2c}[b^2 + (D - x)^2]^{-1/2}(2)(D - x)(-1) = 0,$$

che può essere scritta come

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{D - x}{\sqrt{b^2 + (D - x)^2}}.$$

Dalla figura 17 si vede che questa equazione equivale a

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2,$$

che è la legge della rifrazione.

Esempio 5 Una luce rossa di lunghezza d'onda pari a 632 nm propagantesi nel vuoto incide, formando un angolo θ_1 di 39° rispetto alla normale, sul vetrino di un microscopio di spessore $D = 0.78$ mm e indice di rifrazione $n = 1.52$ (fig. 18). Si trovi (*a*) la lunghezza d'onda nel vetro e (*b*) il cammino ottico del fascio nel tratto di vetro attraversato.

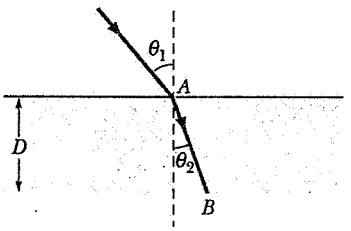


Figura 18 Esempio 5.

Soluzione (*a*) La lunghezza d'onda nel vetro può essere ricavata usando l'equazione 13, che dà

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{632 \text{ nm}}{1.52} = 416 \text{ nm}.$$

(*b*) Mediante l'equazione 12 possiamo trovare l'angolo di rifrazione

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{n} = \frac{\operatorname{sen} 39°}{1.52} = 0.414,$$

ossia

$$\theta_2 = 24.5°.$$

ISBN 88-408-0777-2

e la lunghezza effettiva percorsa nel vetro risulta

$$AB = \frac{D}{\cos\theta_2} = \frac{0.78 \text{ mm}}{\cos 24.5°} = 0.856 \text{ mm}.$$

Il cammino ottico è dunque

$$L = n(AB) = 1.52(0.856 \text{ mm}) = 1.30 \text{ mm}.$$

43-6 RIFLESSIONE TOTALE

La figura 19 illustra i raggi uscenti da una sorgente posta in un vetro e incidenti sulla superficie di separazione vetro-aria. Al crescere dell'angolo di incidenza θ si raggiunge una situazione (vedi raggio *e*) in cui il raggio rifratto è parallelo alla superficie, essendo 90° l'angolo di rifrazione. Se l'angolo di incidenza è maggiore di questo angolo limite θ_c, non esiste nessun raggio rifratto e ha origine il fenomeno chiamato *riflessione interna totale* o *riflessione totale*.

L'angolo limite si calcola ponendo $\theta_2 = 90°$ nella legge della rifrazione (vedi equazione 2)

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_c = n_2 \operatorname{sen} 90°,$$

ossia

$$\theta_c = \operatorname{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1}. \qquad (16)$$

Per il vetro rispetto all'aria θ_c = arcsen(1.00/1.50) = 41.8°. La figura 5 mostra come la frazione di energia dell'onda riflessa diventi il 100% quando l'angolo di incidenza superi 41.8°.

Il seno di un angolo non può essere superiore a 1, sicché deve essere $n_2 < n_1$. Questo ci dice che la riflessione totale non avviene quando la luce proviene dal mezzo a indice di rifrazione inferiore. Il termine *totale* indica esattamente questo; la riflessione avviene senza perdita di intensità. Nella riflessione su uno specchio ordinario si ha, al contrario, una perdita di intensità di circa il 4%.

La riflessione totale rende possibile la costruzione di dispositivi a fibra ottica, tramite i quali i medici possono procedere a un'ispezione visiva diretta all'interno di molti organi corporei; si veda la figura 20. In questi apparecchi un fascio di fibre trasmette l'immagine, che può essere proiettata all'esterno del corpo*. Le fibre ottiche sono usate pure per le comunicazioni telefoniche e per la trasmissione dei segnali sugli aeroplani, grazie al loro peso ridotto e alla loro insensibilità alle interferenze elettromagnetiche. Nella figura 21 si vede un raggio di luce emergere da una fibra ottica**.

Come è illustrato nella figura 22, la fibra è costituita da un'anima centrale che si differenzia gradatamente da uno strato di rivestimento esterno dotato di un minor indice di rifrazione. Solo i raggi che vengono riflessi internamente si possono propagare lungo la fibra. Per ridurre l'attenuazione del segnale man mano che percorre la fibra si sono prodotti materiali di purezza eccezionale. Se l'acqua marina fosse così traspa-

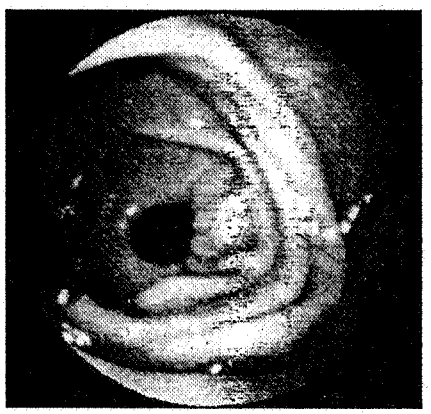


Figura 20 Immagine, vista attraverso una fibra ottica, del piloro, passaggio che mette in comunicazione lo stomaco col duodeno, tratto superiore dell'intestino tenue.

* Cfr. Katzir A., *Le applicazioni mediche delle fibre ottiche*, «Le Scienze» 1989, 251:78.

** Cfr. Boyle W.S., *Comunicazioni su onda luminosa*, «Le Scienze» 1977, 112:30.

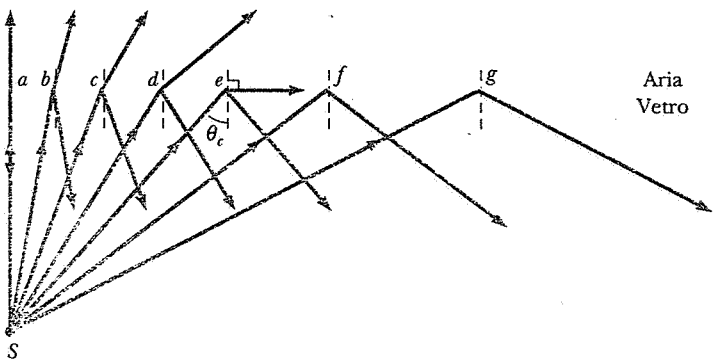


Figura 19 La riflessione totale della luce proveniente dalla sorgente *S* avviene per angoli d'incidenza maggiori dell'angolo limite θ_c. Il raggio incidente con angolo pari esattamente a θ_c prosegue lungo l'interfaccia di separazione tra i due mezzi.



Figura 21 Luce trasmessa attraverso una fibra ottica.

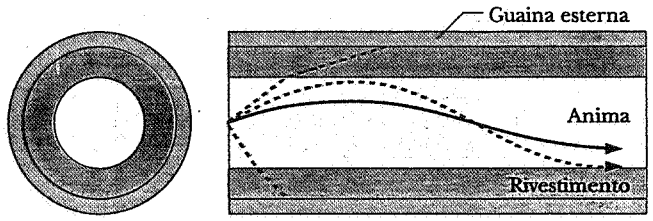


Figura 22 (*a*) Una fibra ottica vista in sezione trasversale. Il diametro della fibra corrisponde press'a poco a quello di un capello umano. (*b*) Vista di una sezione longitudinale, dove è illustrato il principio di propagazione che si basa sulla riflessione totale. Sono indicati l'anima centrale, il rivestimento (con indice di rifrazione più basso dell'anima) e la guaina protettiva.

rente come il vetro di cui sono fatte le fibre ottiche, sarebbe possibile vedere il fondo del mare riflesso dalla luce solare a profondità di molti kilometri.

Esempio 6 Nella figura 23*a* un raggio incide normalmente su una faccia di un prisma triangolare di vetro. Se esso subisce la riflessione totale, con angolo θ_1 di 45°, che cosa si può dire dell'indice di rifrazione n del vetro?

Soluzione L'angolo θ_1 deve essere maggiore o uguale all'angolo limite θ_c, essendo θ_c dato dall'equazione 16:

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \text{sen}^{-1}\frac{1}{n},$$

ovvero

$$n = \frac{1}{\text{sen}\theta_c},$$

nella quale si è posto uguale a 1 l'indice di rifrazione ($= n_2$) dell'aria. Dato che nel nostro caso si verifica una riflessione totale, θ_c dev'essere inferiore a 45°, di modo che

$$n > \frac{1}{\text{sen } 45°} = 1.41.$$

Si conclude che l'indice di rifrazione del vetro deve superare il valore di 1.41. Se n fosse minore di 1.41, il raggio della figura 23*a* verrebbe parzialmente rifratto in aria, anziché totalmente riflesso nel vetro.

Esempio 7 Che cosa accade se il prisma dell'esempio 6 (supponiamo che sia $n_1 = 1.50$) è immerso in acqua ($n_2 = 1.33$)? Vedi figura 23*b*.

Soluzione Il nuovo angolo limite dato dall'equazione 16 è

$$\theta_c = \text{sen}^{-1}\frac{n_2}{n_1} = \text{sen}^{-1}\frac{1.33}{1.50} = 62.5°.$$

Essendo l'angolo di incidenza (= 45°) minore dell'angolo limite, non avviene la riflessione interna totale.

Esiste un raggio r riflesso, con angolo di riflessione di 45°, come si vede nella figura 23*b*, e un raggio rifratto r', il cui angolo di rifrazione è dato da

$$n_1 \,\text{sen}\theta_1 = n_2 \,\text{sen}\theta_2$$

$$(1.50)(\text{sen } 45°) = (1.33)\,\text{sen}\theta_2,$$

che, risolta, dà $\theta_2 = 52.9°$. Mostrare che per $n_2 \to n_1$, $\theta_c \to 90°$.

Come può il raggio incidente i delle figure 23*a* e 23*b* stabilire se uscendo al di là del vetro troverà aria o acqua? O, in altre parole, come «sa» a priori se deve essere totalmente riflesso o parzialmente rifratto? L'onda propagantesi nel vetro genera campi elettrici e magnetici che vanno fortemente attenuandosi in funzione esponenziale della distanza penetrando per una profondità di poche lunghezze d'onda nel mezzo successivo. Questi campi non sono quelli associati all'onda elettromagnetica, ma si possono considerare come campi di «sondaggio» del mezzo presente oltre la superficie di separazione. Possiamo evidenziare questo fenomeno di penetrazione ponendo un secondo prisma di vetro vicino al primo, come nella figura 24. Nell'atto di sondare il secondo mezzo (l'aria), il campo si accorge della presenza del secondo prisma; e per quanto la legge di rifrazione impedisca alle onde di sussistere

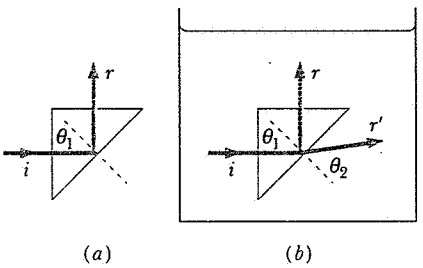


Figura 23 (*a*) Esempio 6. (*b*) Esempio 7.

ISBN 88-408-0777-2

nell'intercapedine d'aria fra i due prismi, non proibisce loro di propagarsi nel secondo prisma. Si osservi nella figura 24 che il fascio di luce è indicato nel secondo prisma, ma non nell'intercapedine d'aria. Questa situazione prende il nome di *riflessione interna totale impedita* ed è una proprietà generale delle onde. (Si può verificare ad esempio nelle microonde.) In meccanica quantistica le proprietà ondulatorie delle particelle materiali permettono un comportamento simile, chiamato *salto di barriera* o *effetto tunnel*: una particella può passare da una regione consentita a un'altra regione consentita penetrando attraverso una regione proibita. Tratteremo l'effetto tunnel nel capitolo 50.

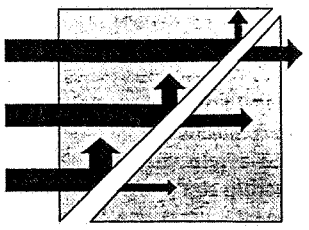


Figura 24 Riflessione totale impedita. Quanto più spessa è l'intercapedine d'aria, tanto minore risulta l'intensità della luce trasmessa nel secondo prisma (indicata dall'ampiezza delle frecce). Si osservi che l'onda luminosa non compare *all'interno* dell'intercapedine.

DOMANDE

1. Descrivete a che cosa assomiglierebbe l'ambiente a voi immediatamente circostante se tutti gli oggetti fossero assorbitori integrali. Stando seduti su una sedia in una stanza, potreste vedere qualcosa? Se un gatto entrasse nella stanza, potreste vederlo?
2. Sapreste ideare un semplice esperimento o osservazione, che vi consenta di dimostrare che la legge di riflessione è la stessa per tutte le lunghezze d'onda, purché prevalgano le condizioni dell'ottica geometrica?
3. Un lampione stradale osservato in riflessione su una massa d'acqua increspata appare molto allungato nella direzione di osservazione e non trasversalmente. Spiegare il perché.
4. Le trasmissioni radiofoniche in onde corte irradiate nel Nord America possono essere captate in Europa sebbene il percorso non sia rettilineo. Si spieghi il perché.
5. Il tempo di percorrenza dei segnali emessi dai satelliti per raggiungere le stazioni riceventi a terra varia con la frequenza dei segnali. Perché?
6. Di quanto differisce percentualmente la velocità di un fascio di luce azzurra dalla velocità di un fascio di luce rossa nel quarzo fuso?
7. Per determinare la lunghezza d'onda della luce si possono usare (*a*) fenomeni di riflessione o (*b*) di rifrazione?
8. Come si potrebbero determinare gli indici di rifrazione rispetto all'acqua dei mezzi riportati nella tabella 1, facendo uso dei valori che si trovano nella tavola stessa?
9. Vi aspettate che le onde sonore seguano le leggi della riflessione e della rifrazione osservate dalle onde luminose? Discutere la propagazione delle onde sferiche e cilindriche utilizzando il principio di Huygens. Si applica tale principio alle onde sonore in aria?
10. Se è vero che il principio di Huygens è in grado di spiegare le leggi della riflessione e della rifrazione, perché è necessario o opportuno considerare la luce come un'onda elettromagnetica, con tutta la complessità che ne deriva?
11. Spiegare perché un fascio di luce, entrando nell'acqua, si allarga.
12. Date una plausibile spiegazione al fatto che una strada appare più scura quando è bagnata piuttosto che quando è asciutta.
13. Le onde sonore vengono ampiamente riflesse quando, viaggiando in aria, incidono sull'acqua. Perché?
14. È corretto dire che non c'è interazione tra la luce visibile e un mezzo trasparente attraverso cui si propaga?
15. La rifrazione atmosferica come può influenzare l'istante apparente del tramonto?
16. Le stelle brillano, i pianeti no. Come mai?
17. Spiegare perché l'estremità più lontana di una vasca a profondità uniforme appare all'osservatore meno profonda dell'estremità vicina ad esso.
18. È una bella giornata di sole e volete formare un arcobaleno nel vostro giardino mediante una canna per innaffiare. Come vi disponete e come agite? E perché non potete passare sotto l'arcobaleno o raggiungerne un'estremità?
19. Usando uno o più prismi, è possibile ricombinare la luce bianca partendo da uno spettro colorato ottenuto mediante un singolo prisma? Se sì, si spieghi come.
20. Supponete di avere un cubo di vetro. Come potreste trovare la velocità della luce (emessa da una lampada a vapori di sodio) all'interno del cubo?
21. Descrivere e spiegare ciò che un pesce vede quando guarda in diverse direzioni sopra il suo «orizzonte».
22. Perché la misura della velocità della luce in acqua eseguita da Foucault fu decisiva per scegliere fra la teoria ondulatoria e corpuscolare della luce?
23. Perché un diamante «risplende» più di una imitazione in vetro della stessa forma?
24. La luce possiede (*a*) una lunghezza d'onda, (*b*) una frequenza e (*c*) una velocità. C'è qualcuna di tali grandezze che resta invariata quando la luce passa dal vuoto a una lastra di vetro?
25. È possibile che la lunghezza d'onda della luce cambi nel passaggio dall'aria al vetro e non cambi la frequenza? Giustificare la risposta.
26. Perché nella riflessione e nella rifrazione i raggi riflessi e rifratti giacciono nel piano definito dal raggio incidente e dalla normale alla superficie? Esiste qualche eccezione?
27. Qual è la causa dei miraggi? Hanno a che vedere col fatto che l'indice di rifrazione dell'aria non è costante, ma varia con la densità? Si veda Fraser A.B., Mach W.B., *I miraggi*, «Le Scienze» n. 93, 1976, 70.
28. Si può fotografare un'immagine virtuale ponendo la pellicola nella posizione dell'immagine? Sviluppare il concetto.

29. Di notte, in una stanza illuminata, soffiate un anello di fumo verso una finestra buia. Se guardate mettendo a fuoco l'anello man mano che esso si avvicina al vetro, vi sembrerà che esso lo attraversi diritto verso l'oscurità retrostante. Come si può spiegare questa illusione?
30. Guidando un'auto avrete visto veicoli come le ambulanze, che riportano la scritta con le lettere disegnate in modo che si leggano correttamente attraverso lo specchietto retrovisore. Scrivete il vostro nome in stampatello con lo stesso criterio.
31. Abbiamo visto che una riflessione su uno specchio piano scambia la destra con la sinistra. Quando guidiamo, ad esempio su un'autostrada, e guardiamo nello specchietto retrovisore, vediamo le scritte dei segnali stradali al contrario. Eppure, guardando attraverso lo stesso specchietto. ci riconosciamo a viaggiare sulla corsia di destra. Perché lo specchio rovescia le scritte e non le corsie? O forse le rovescia? Discutetene.
32. Tutti sappiamo che guardando in uno specchio la destra e la sinistra si scambiano. La mano destra appare come la sinistra. Se ci pettiniamo i capelli verso destra, ci sembrerà di essere pettinati verso sinistra. Sapreste ideare un sistema di specchi che consenta di vederci così come ci vedono gli altri? In caso affermativo fatene un disegno e dimostratelo tracciando alcuni raggi.
33. Ideate un sistema di specchi piani che vi permetta di vedere la vostra nuca. Tracciate i raggi che illustrano il processo.
34. Progettare un periscopio che sfrutti la riflessione totale. Quali sono i vantaggi rispetto a un sistema di specchi?
35. Quali caratteristiche deve avere un materiale per essere utilizzato nella costruzione di una *guida di luce* efficiente.
36. Uno spazzolino da denti ha un manico di plastica rossa su cui sono impiantate setole di nylon. Le setole appaiono rosse sulle punte ma non sui lati. Spiegarne il motivo.
37. Perché le fibre ottiche sono trasportatori di informazioni più efficaci, per esempio, delle microonde o dei cavi? Pensate alle frequenze in gioco.
38. Che cosa significa «cammino ottico»? Può il cammino ottico essere più corto di quello geometrico? E più lungo?
39. Una soluzione di solfato di rame vista in luce trasmessa appare blu. Ciò significa che una soluzione di solfato di rame assorbe selettivamente la luce blu? Discutere.

PROBLEMI

Paragrafo 43-2 Riflessione e rifrazione

1. Trovare i valori degli angoli (*a*) θ_1 e (*b*) θ_2 nella figura 25.

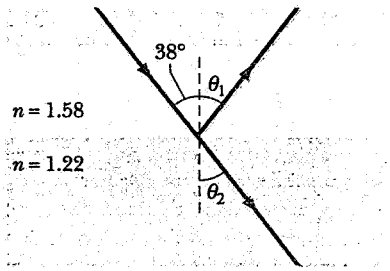


Figura 25 Problema 1.

2. Nel vuoto, un raggio di luce incide su di una lastra di vetro. Il raggio incidente forma un angolo di 32.5° con la normale alla superficie, mentre nel vetro l'angolo rifratto rispetto alla normale misura 21.0°. Si trovi l'indice di rifrazione del vetro.
3. La velocità della luce gialla del sodio misurata in un certo liquido è 1.92×10^8 m/s. Qual è l'indice di rifrazione del liquido rispetto all'aria, per la luce di tale frequenza?
4. Si trovi la velocità della luce di lunghezza d'onda 550 nm nel quarzo fuso.
5. Quando un elettrone attraversa un mezzo con velocità superiore a quella propria della luce in quel mezzo. esso irraggia onde elettromagnetiche (effetto Čerenkov). Qual è la velocità minima che un elettrone deve possedere in un liquido di indice di rifrazione 1.54 affinché possa prodursi effetto Čerenkov?
6. Un fascio di luce laser viaggia lungo l'asse di un tratto rettilineo di tubazione. lungo 1.61 km. Il tubo contiene normalmente aria in condizioni standard di temperatura e pressione, che può essere però anche evacuata. In quale dei due casi il tempo di percorrenza sarebbe maggiore, e di quanto?
7. Il recipiente metallico di sezione rettangolare rappresentato nella figura 26 è pieno fino al bordo di un liquido sconosciuto. Un osservatore situato sullo stesso piano della superficie superiore del liquido è in grado di vedere come limite inferiore il vertice indicato con *E*. Si calcoli l'indice di rifrazione del liquido.

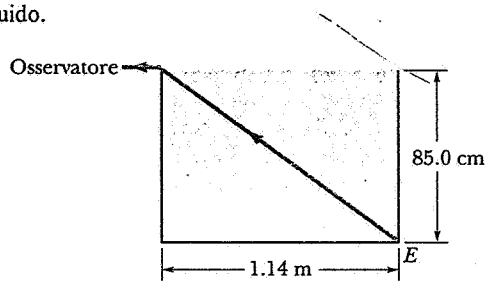


Figura 26 Problema 7.

8. Nella figura 27 sono raffigurate, viste dall'alto, onde del mare, che si dirigono con velocità di 4 m/s verso una spiaggia

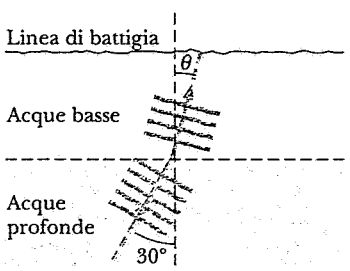


Figura 27 Problema 8.

ISBN 88-408-0777-2

inizialmente con un angolo di 30° rispetto alla direzione normale alla costa. Supponiamo che la profondità dell'acqua cambi improvvisamente e che la velocità dell'onda si riduca a 3 m/s. Quale sarebbe la nuova direzione θ rispetto alla normale in prossimità della spiaggia? (Si ipotizzi che il fenomeno segua la stessa legge di rifrazione della luce.) Si spieghi perché le onde tendono ad avvicinarsi alle spiagge perpendicolarmente sebbene al largo esse possano avere direzioni molto angolate.

9. Un fascio di luce attraversa un prisma equilatero seguendo il percorso di deviazione minima. Sapendo che la deviazione totale risulta di 37°, quanto vale l'indice di rifrazione del prisma? Si confronti con l'esempio 3.
10. Due specchi perpendicolari costituiscono le pareti di una vasca piena d'acqua come in figura 28. Un raggio luminoso incide dall'alto perpendicolarmente alla superficie dell'acqua. (*a*) Dimostrare che il raggio emergente è parallelo a quello incidente, supponendo che avvengano due riflessioni sulla superficie speculare. (*b*) Ripetere tale analisi nel caso di incidenza obliqua, mantenendo il raggio incidente nel piano della figura.

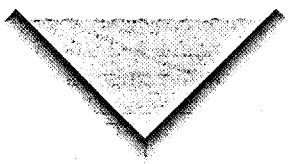


Figura 28 Problema 10.

11. Impiegando un goniometro si disegnino sulla figura 7 (esempio 3) altri raggi incidenti con angolo θ e si dimostri che l'angolo di deviazione ψ cresce comunque, sia che θ aumenti sia che diminuisca.
12. Come si vede nella figura 29, un raggio laser entra in un blocco di vetro nel punto A e ne emerge nel punto B. La lunghezza L del blocco è 54.7 cm e l'indice di rifrazione n vale 1.63. Sapendo che l'angolo di incidenza θ misura 24.0°, calcolare il tempo necessario alla luce per attraversare il blocco.

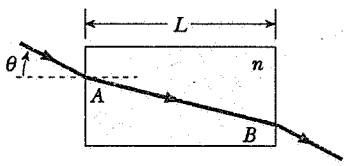


Figura 29 Problema 12.

13. Un sommozzatore immerso sotto la superficie di uno specchio d'acqua vede un salvagente galleggiante, in una direzione che si discosta di un angolo di 27° dalla verticale. Collimata col centro dell'anello del salvagente, intravede la sommità di una ciminiera, di altezza nota e pari a 98 m. Si richiede di sapere a che distanza si trovi dal salvagente la base della ciminiera, supposta sullo stesso piano dell'acqua.
14. Un palo verticale alto 2 m è piantato sul fondo di una piscina ed emerge dall'acqua per una lunghezza di 64 cm. Il sole incide formando un angolo sull'orizzonte di 55°. Quant'è lunga l'ombra del palo proiettata sul fondo orizzontale della piscina?
15. Dimostrare che un raggio di luce incidente su una lamina di vetro a facce piane parallele, di spessore t, emerge dalla faccia opposta parallelamente alla direzione iniziale, ma spostato trasversalmente come nella figura 30. (*a*) Si dimostri che per piccoli valori dell'angolo di incidenza θ, lo scostamento è dato da

$$x = t\theta\frac{n-1}{n},$$

ove n è l'indice di rifrazione e θ è misurato in radianti. (*b*) Si calcoli detto scostamento per un angolo di incidenza θ di 10° su di una lamina di vetro crown spessa 1 cm.

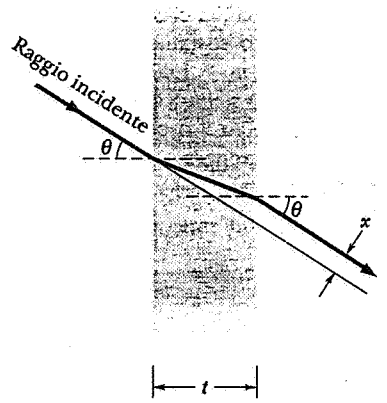


Figura 30 Problema 15.

16. Un prisma di vetro ($n = 1.60$) ha un angolo di apertura di 60°. (*a*) Qual è il minimo angolo di incidenza per cui un raggio può entrare da una faccia del prisma e uscire dall'altra? (*b*) Per quale angolo di incidenza il raggio attraversa il prisma in modo simmetrico? (Si veda l'esempio 3.)
17. Una moneta giace sul fondo di una vasca d'acqua, profonda d e con indice di rifrazione n, come illustra la figura 31. Si dimostri che i raggi di luce inclinati rispetto alla normale di un angolo piccolo sembrano provenire da un punto apparente distante $d_{app} = d/n$ dalla superficie dell'acqua. È questa la *profondità apparente* della vasca.

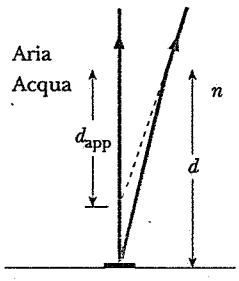


Figura 31 Problema 17.

18. La profondità apparente, per angoli di visuale che si discostano apprezzabilmente dalla normale, dipende dall'angolo di osservazione. Supponete che una moneta sia collocata sul fondo di una piscina piena d'acqua ($n = 1.33$) alla profondità

di 2.16 m. Calcolate la profondità apparente della moneta quando essa viene vista (*a*) da una direzione vicina a quella perpendicolare e (*b*) da una posizione tale che il raggio di luce proveniente dalla moneta formi un angolo di 35.0° con la normale dentro la piscina. Si veda anche il problema 17.

19. Uno strato di acqua ($n = 1.33$), spesso 20 mm, galleggia su uno strato di tetracloruro di carbonio ($n = 1.46$) alto 41 mm. A che profondità, sotto la superficie superiore dell'acqua, appare il fondo del recipiente per un angolo di osservazione vicino alla normale?

20. L'indice di rifrazione dell'atmosfera terrestre decresce in maniera monotòna da un valore di circa 1.00029 al suolo fino al valore 1.00000 corrispondente al vuoto negli strati limite dell'alta atmosfera. Questa variazione continua e progressiva può essere approssimata da un modello di atmosfera a tre o più strati piani e paralleli, in ciascuno dei quali l'indice di rifrazione sia considerato costante. Per esempio, nella figura 32 abbiamo $n_3 > n_2 > n_1 > 1.00000$. Si consideri il raggio di luce proveniente da una stella S che investe il limite superiore dell'atmosfera con angolo θ rispetto alla verticale. (*a*) Si dimostri che la direzione apparente della stella rispetto alla verticale θ_3, secondo la quale cioè viene vista da un osservatore sulla Terra, è data da

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{1}{n_3}\operatorname{sen}\theta.$$

(*Suggerimento*: Si applichi la legge di rifrazione alle coppie successive di strati di atmosfera, ignorando la curvatura terrestre.) (*b*) Si calcoli lo spostamento di posizione di una stella che dalla superficie terrestre viene osservata con angolo di 50° dalla verticale. (L'effetto molto piccolo dovuto alla rifrazione terrestre può risultare in qualche caso di importanza considerevole; ad esempio va tenuto presente quando si vogliano calcolare con molta precisione le coordinate che individuano la posizione di un osservatore sulla superficie terrestre, facendo uso di satelliti di riferimento.)

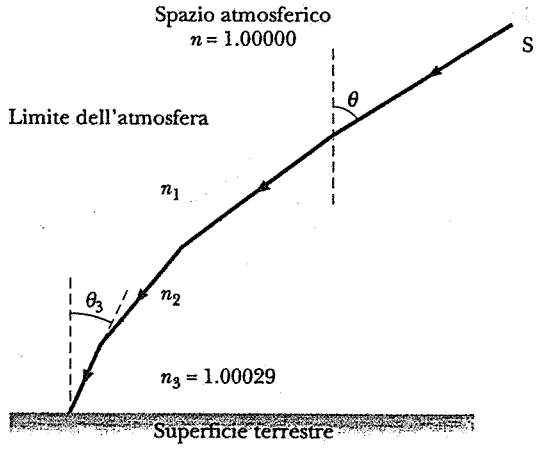


Figura 32 Problema 20.

21. Vi trovate all'estremità di una lunga pista d'aeroporto. Il gradiente termico verticale dell'aria determina una variazione dell'indice di rifrazione sopra la pista in funzione dell'altezza y secondo la formula $n = n_0(1 + ay)$, dove n_0 è l'indice di rifrazione al suolo e $a = 1.5 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^{-1}$. L'altezza dei vostri occhi h risulta 1.7 m sopra la pista. Qual è la distanza d oltre la quale non potete più vedere la pista? Si confrontino la figura 33 e il problema 20.

22. Un *riflettore triedro*, largamente impiegato in applicazioni di ottica, nel campo delle microonde, ecc., consiste di tre specchi piani intersecantisi come l'angolo triedro di un cubo. Ha la proprietà di rinviare un raggio incidente, dopo tre riflessioni, nella stessa direzione da cui è arrivato. Si dimostri questa asserzione.

23. Muoni (di massa 106 Mev/c^2) e pioni carichi (di massa 139 MeV/c^2), dotati entrambi di quantità di moto pari a 145 MeV/c, attraversano un mezzo trasparente. Si trovi l'intervallo di indice di rifrazione del mezzo entro il quale solo i muoni emettono radiazione Čerenkov. (Vedi probl. 5)

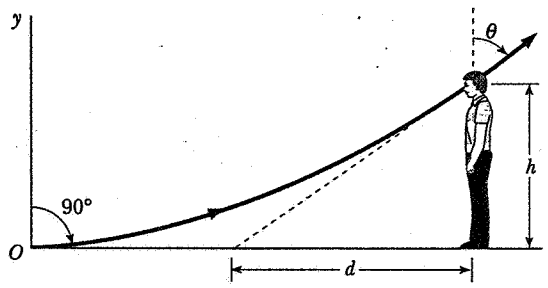


Figura 33 Problema 21.

Paragrafo 43-3 Derivazione della legge di riflessione

24. L'estremità di una bacchetta viene trascinata in acqua a una velocità v superiore alla velocità u delle onde in acqua. Applicando la costruzione di Huygens alle onde dimostrare che si produce un fronte d'onda conico il cui semiangolo α è dato da

$$\operatorname{sen}\alpha = u/v.$$

Questo fatto è ben noto nel caso di un'onda di prua di un bastimento o nel fenomeno dell'onda d'urto causata da un oggetto che si muove nell'aria con una velocità superiore a quella del suono, come nella figura 14 del capitolo 20.

25. Servendosi del principio di Fermat, si dimostri che il raggio incidente, quello riflesso e la normale giacciono tutti sullo stesso piano.

Paragrafo 43-4 Formazione delle immagini su specchi piani

26. Un oggetto di piccole dimensioni è posto davanti a uno specchio piano alla distanza di 10 cm. Se, disponendovi dietro l'oggetto a 30 cm dallo specchio, fissate la sua immagine, a che distanza dovete regolare il fuoco del vostro occhio?

27. In piedi di fronte a un grande specchio piano, state contemplando la vostra immagine. Se ora vi muovete verso lo specchio a velocità v, con quale velocità la vostra immagine si muove verso di voi? Calcolate la velocità (*a*) nel vostro sistema di riferimento e (*b*) nel sistema di riferimento della stanza rispetto alla quale lo specchio si trova a riposo.

ISBN 88-408-0777-2

28. La figura 34 mostra dall'alto Beatrice (B) che cammina diritta verso il centro di uno specchio verticale M. Ponendo nella figura $d = 3$ m, a che distanza dallo specchio si troverà Beatrice nel momento in cui la sua immagine apparirà alla vista di Simone (S)?

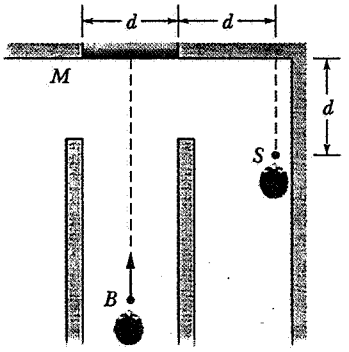


Figura 34 Problema 28.

29. Dimostrare che la rotazione di uno specchio di un angolo α provoca la rotazione dei raggi riflessi di un angolo 2α. Si osservi come questo risultato sia intuitivo per $\alpha = 45°$.
30. Lo specchio di figura 13 viene ruotato di 30° in senso antiorario facendo perno sulla sua estremità inferiore e lasciando il punto oggetto O al suo posto. Il punto immagine si sposta? Se sì, dove si trova ora? L'occhio può ancora vedere l'immagine senza muoversi? Fate uno schizzo che illustri la nuova situazione.
31. Un oggetto puntiforme O è collocato a un terzo della distanza tra due specchi piani e paralleli, come illustra la figura 35. Si traccino i raggi appropriati per mostrare quali siano i quattro punti immagine più vicini all'oggetto.

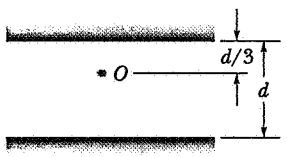


Figura 35 Problema 31.

32. Due specchi formano un angolo di 90° tra di loro. Posto un oggetto tra di loro al di fuori della linea bisettrice, qual è il massimo numero di immagini che possono essere viste da un occhio adeguatamente collocato?
33. Nella figura 36 è disegnata una lampadina sospesa all'altezza di 250 cm al di sopra dello specchio d'acqua di una piscina. La profondità dell'acqua è di 186 cm e il fondo è rivestito di un ampio specchio. Dove si trova l'immagine della lampadina quando viene osservata da una direzione prossima alla normale?
34. A 10 cm di distanza da uno specchio piano trovasi un punto oggetto, mentre l'occhio di un osservatore (con pupilla del diametro di 5.0 mm) è situato a 24 cm dallo specchio. Se l'oggetto e l'occhio si trovano sulla medesima retta perpendicolare allo specchio, quant'è l'area dello specchio interessata nella riflessione del punto?

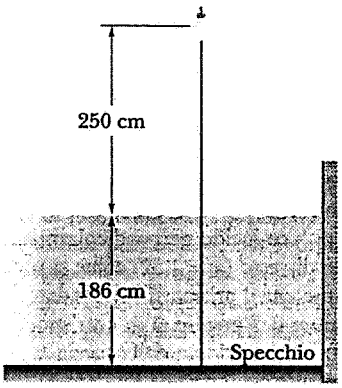


Figura 36 Problema 33.

35. Si collochi una sorgente puntiforme di luce S davanti a uno schermo A alla distanza d. Se si aggiunge ora anche uno specchio M dietro alla sorgente alla medesima distanza d, come nella figura 37, come varia l'intensità di luce al centro dello schermo? (*Suggerimento*: Si consideri come varia l'intensità di luce emessa da una sorgente puntiforme al crescere della distanza.)

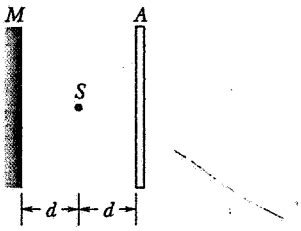


Figura 37 Problema 35.

36. Si risolva lo stesso problema 32 supponendo che l'angolo tra gli specchi sia di (*a*) 45°, (*b*) 60°, e (*c*) 120° e che l'oggetto sia in tutti e tre i casi situato sulla bisettrice dell'angolo.
37. Quante immagini di voi stessi potete vedere ponendovi in una stanza rivestita con uno specchio sul soffitto e altri due su due pareti adiacenti? Commentate.

Paragrafo 43-5 Derivazione della legge di rifrazione

38. Il sodio emette luce gialla che in aria ha lunghezza d'onda di 589 nm. (*a*) Qual è la sua frequenza? (*b*) In un vetro dotato di indice di rifrazione pari a 1.53 quale sarebbe la lunghezza d'onda? (*c*) Mediante i risultati di (*a*) e (*b*) si trovi la velocità di propagazione nel vetro.
39. Un raggio di luce, che nel vuoto possiede la lunghezza d'onda di 612 nm, attraversa una lamina spessa 1.57 μm di un materiale con indice di rifrazione 1.51. Si trovi (*a*) la lunghezza d'onda nel mezzo, (*b*) la lunghezza del cammino ottico, e (*c*) la differenza di fase, dopo aver attraversato la lamina, rispetto a un raggio che copra la medesima distanza nel vuoto.

Paragrafo 43-6 Riflessione totale

40. Dimostrare che le lunghezze dei cammini ottici per la riflessione e per la rifrazione delle figure 10 e 17 sono entrambe

dei minimi se confrontate con altri percorsi adiacenti che congiungano i medesimi punti. (*Suggerimento*: Prendere in considerazione la quantità d^2L/dx^2.)

41. Due materiali, A e B, hanno indici di rifrazione rispettivamente di 1.667 e 1.586. (*a*) Si calcoli l'angolo limite di riflessione totale all'interfaccia tra i due materiali. (*b*) In quale direzione deve muoversi un raggio incidente per poter subire riflessione totale?

42. Un raggio di luce incide perpendicolarmente sulla faccia *ab* di un prisma di vetro ($n = 1.52$) come si vede nella figura 38. (*a*) Nell'ipotesi che il prisma sia circondato da aria, trovare il massimo valore dell'angolo ϕ in corrispondenza del quale il raggio è totalmente riflesso dalla faccia *ac*. (*b*) Trovare l'angolo ϕ nel caso in cui il prisma sia immerso in acqua.



Figura 38 Problema 42.

43. Una goccia di liquido viene distribuita sul taglio di una lastra di vetro semicircolare come illustra la figura 39. (*a*) Discutere come è possibile determinare l'indice di rifrazione del liquido osservando la riflessione totale. Va determinato, essendo ignoto, pure l'indice di rifrazione del vetro. L'intervallo di indici di rifrazione che può essere misurato in questo modo è in qualche modo limitato? (*b*) In realtà qual è la praticità di questo metodo?

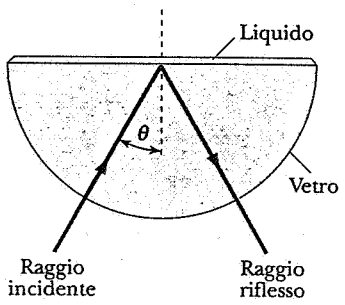


Figura 39 Problema 43.

44. Un pesce sta nuotando a 1.8 m sotto la superficie calma di un lago. Con che angolo sopra il piano orizzontale deve guardare per poter vedere una sorgente puntiforme di luce che galleggia sull'acqua distante 92 m da lui?

45. Una sorgente puntiforme si trova 82.0 cm al di sotto della superficie di una vasca piena d'acqua. Trovare il diametro del massimo cerchio sulla superficie, dal quale può emergere luce al di sopra dell'acqua.

46. Un raggio di luce investe un blocco quadrato di vetro, come nella figura 40. Quanto deve valere, come minimo, l'indice di rifrazione del vetro perché sulla faccia verticale si abbia la riflessione totale?

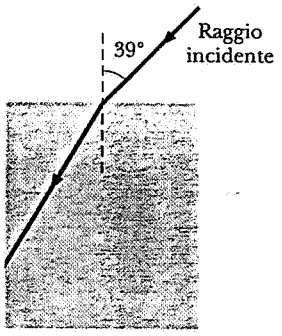


Figura 40 Problema 46.

47. Una sorgente luminosa puntiforme si trova alla profondità h sotto la superficie di un grande e profondo lago. (*a*) Dimostrare che la frazione f di energia luminosa che esce dall'acqua è indipendente da h ed è data da

$$f = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 1/n^2}),$$

dove n è l'indice di rifrazione dell'acqua. (*Nota*: si trascurino l'assorbimento nell'acqua e la riflessione alla superficie a eccezione di quella totale.) (*b*) Si applichi questa espressione a un caso pratico.

48. Un fibra ottica di tipo particolare è costituita da un anima di vetro a indice di rifrazione n_1 non variabile gradualmente, contornata da una guaina con indice di rifrazione $n_2 < n_1$. Si supponga che un raggio di luce penetri nella fibra provenendo dall'aria e formando un angolo θ con il suo asse, come nella figura 41. (*a*) Si dimostri che il massimo valore di θ che consente al raggio di propagarsi lungo la fibra è

$$\theta = \text{sen}^{-1}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}.$$

(*b*) Si pongano ora i valori 1.58 e 1.53 per gli indici di rifrazione del vetro e del rivestimento rispettivamente, e si calcoli il valore di quest'angolo.

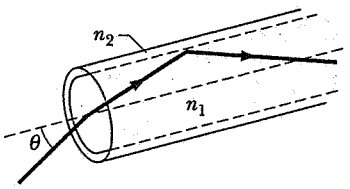


Figura 41 Problema 48.

49. In una fibra ottica (vedi probl. 48) raggi diversi percorrono cammini differenti lungo la fibra, dando luogo a tempi di percorrenza diversi. Ciò provoca una dilatazione nel tempo di un impulso istantaneo di luce man mano che esso procede lungo la fibra, finendo per influire sulla qualità dell'informazione trasmessa. Nella progettazione delle fibre è d'obbligo pertanto rendere minimo il ritardo nel tempo. Si consideri un raggio che percorre la distanza L lungo l'asse della fibra e un altro che subisce una riflessione con angolo limite sul suo cammino verso la medesima destinazione del primo raggio.

ISBN 88-408-0777-2

(*a*) Mostrare che la differenza di tempo Δt tra i due istanti di arrivo è data da

$$\Delta t = \frac{L}{c}\frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2),$$

dove n_1 è l'indice di rifrazione dell'anima ed n_2 quello della guaina. (*b*) Calcolare Δt per la fibra del problema 48, ponendo $L = 350$ km.

50. Un fascio di luce monocromatica, inizialmente in aria, colpisce un prisma retto P (vedasi fig. 42) e viene da esso rifratto in Q in modo tale da uscire in aria radente alla superficie del prisma. (*a*) Calcolare quale dovrebbe essere l'indice di rifrazione del prisma relativo all'aria per questa lunghezza d'onda, in funzione dell'angolo di incidenza θ_1, affinché si verifichi questa situazione. (*b*) Dare un limite numerico superiore per l'indice di rifrazione del prisma. Mostrare, disegnando i raggi, cosa succede se l'angolo di incidenza in P è (*c*) lievemente maggiore o (*d*) lievemente minore di θ_1.

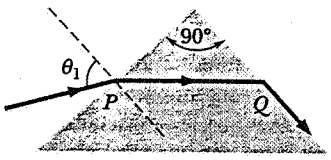


Figura 42 Problema 50.

51. Un'onda piana di luce bianca che si propaga nel quarzo fuso investe una superficie piana del quarzo, con un angolo di incidenza θ. È possibile che il raggio riflesso totalmente appaia (*a*) azzurrino o (*b*) rossastro? (*c*) Qual è il valore approssimativo di θ necessario per ottenere il fenomeno? (*Suggerimento*: La luce bianca apparirà azzurrina se vengono sottratte allo spettro le lunghezze d'onda verso il rosso).

52. Un cubo di vetro ha una piccola macchia nel suo centro. (*a*) Quale parte della faccia del cubo attraverso la quale lo si osserva deve essere coperta affinché la macchia non sia visibile da nessun punto di osservazione? (*b*) Quale frazione della superficie del cubo si deve quindi coprire? Si ponga il lato del cubo pari a 12.6 mm e l'indice di rifrazione pari a 1.52. (Si trascuri il comportamento dei raggi successivo alla riflessione totale.)

Capitolo 44

SPECCHI SFERICI E LENTI

La riflessione e la rifrazione su superfici piane, considerate nel capitolo precedente, sono di utilità limitata negli strumenti ottici. In breve, esse sono incapaci di modificare la luce divergente in luce convergente. Un fascio di raggi divergenti, come quelli emessi da una sorgente puntiforme, rimane infatti tale dopo una riflessione su uno specchio piano o dopo aver subito rifrazione alla superficie di separazione tra due mezzi.

Se lo specchio o la superficie rifrangente sono incurvati, i fronti d'onda piani possono essere modificati in fronti d'onda curvi, ciò che permette loro di convergere verso un punto o di apparire divergenti da un punto. Si può anche ridurre la luce divergente a luce convergente e focalizzarla così per formare un'immagine, come avviene in una macchina fotografica, in un telescopio o nell'occhio umano. Mediante una combinazione di specchi e lenti è possibile ricavare le immagini e determinarne le dimensioni in rapporto all'oggetto originale, sia attraverso metodi algebrici, sia per via grafica. Alcuni esempi, tra cui il microscopio e il telescopio, dimostrano come si possano utilizzare questi princìpi per ottenere apparecchi ottici, che amplificano il campo di osservazione dell'occhio umano fino a poter vedere oggetti estremamente piccoli o enormemente distanti.

44-1 SPECCHI SFERICI

Ci siamo occupati della formazione delle immagini su uno specchio piano nel paragrafo 43-4. È stato evidenziato come uno specchio piano formi un'immagine apparente che sta dietro lo specchio medesimo; o per meglio dire, quando osserviamo l'immagine, la luce sembra provenire da un punto dietro lo specchio. L'abbiamo chiamata immagine *virtuale*, e abbiamo stabilito che l'immagine ha la stessa dimensione dell'oggetto e che è situata a una distanza (negativa) i dietro lo specchio uguale in valore assoluto alla distanza o dell'oggetto dallo specchio, come è illustrato nella figura 1*a*.

Ora supponiamo di dare una leggera incurvatura allo specchio, anziché avere una superficie piana come considerato finora. E in particolare analizziamo il caso di una superficie speculare di forma sferica. Le figure 1*b* e 1*c* mostrano l'effetto in due differenti casi. Nel primo caso (fig. 1*b*) lo specchio è *concavo* rispetto alla posizione dell'oggetto. Si osservi che, rispetto al caso dello specchio piano, l'immagine appare (1) ingrandita (in confronto all'oggetto) e (2) situata più distante dietro allo specchio (ovvero i assume un valore maggiore in modulo). Specchi di questo tipo sono di uso familiare per radersi la barba o truccarsi il viso, quando cioè sia preferibile un ingrandimento dell'immagine a scapito di un campo ridotto di visuale. L'effetto mostrato nella figura 1*b* vale solo, come vedremo, quando l'oggetto si trova a una distanza limitata dallo specchio, inferiore a $r/2$.

Nel secondo caso (fig. 1*c*) lo specchio è *convesso* rispetto alla posizione dell'oggetto. Si osservi che ora l'immagine è (1) di dimensione più piccola e (2) più vicina allo specchio, sempre a confronto con il caso dello specchio piano. Esempi applicativi di questo tipo sono gli specchietti laterali delle automobili e gli specchi di sorveglianza nei grandi magazzini. Il loro campo visivo risulta più ampio che in uno specchio piano.

Immaginiamo che gli specchi sferici di figura 1 siano flessibili. Se dovessimo piegarli per renderli più simili a quello piano, in entrambi i casi la posizione e la dimensione dell'immagine si avvicinerebbero a quelle dello specchio piano. Possiamo pertanto considerare lo specchio piano come un caso particolare di specchio sferico in cui il raggio di curvatura diventa infinito. Le equazioni che descrivono il comportamento dello specchio sferico dovrebbero ridursi alle equazioni per lo specchio piano ($o = -i$) man mano che il raggio tende al valore infinito.

Equazione dello specchio

Alla fine di questo paragrafo ricaveremo l'equazione che lega la distanza dell'oggetto o con la distanza dell'immagine i per uno specchio sferico. Consideriamo il caso particolare in cui i raggi di luce provenienti dall'oggetto incidono con angoli piccoli rispetto all'asse dello specchio; tali raggi sono detti *parassiali*. Oppure, per ottenere lo stesso scopo, possiamo imporre che le dimensioni dello specchio siano ridotte rispetto al raggio di curvatura. Le nostre considerazioni verrebbero

ISBN 88-408-0777-2

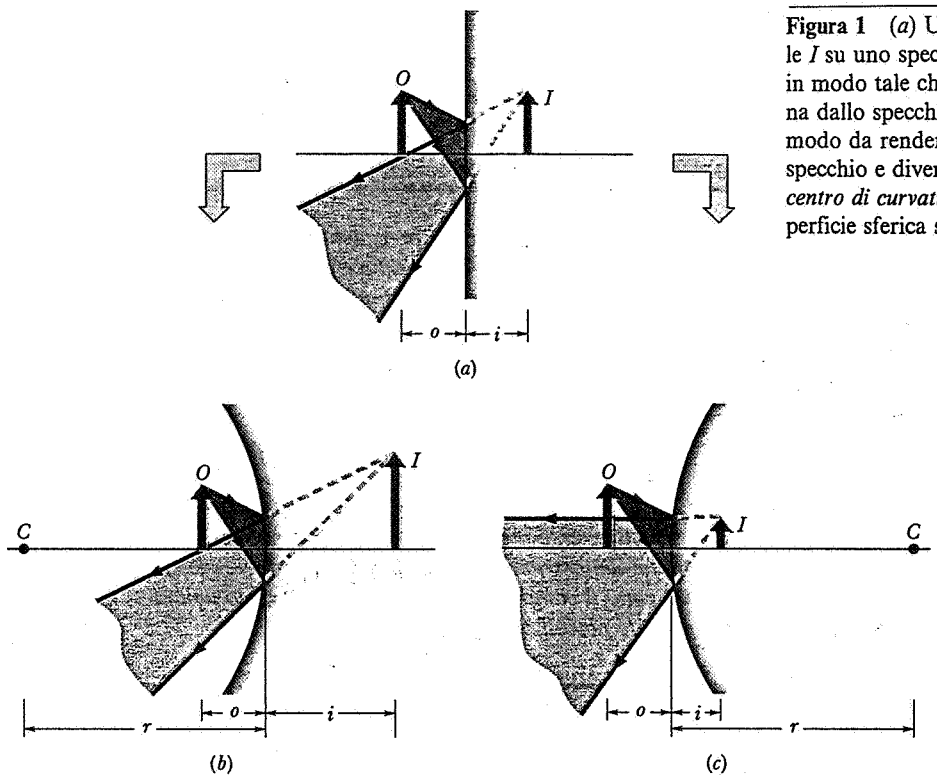


Figura 1 (*a*) Un oggetto *O* forma un'immagine virtuale *I* su uno specchio piano. (*b*) Se si incurva lo specchio in modo tale che diventi concavo, l'immagine si allontana dallo specchio e si ingrandisce. (*c*) Se lo si incurva in modo da renderlo convesso, l'immagine si avvicina allo specchio e diventa più piccola. Il punto *C* è chiamato *centro di curvatura* dello specchio; è il centro della superficie sferica su cui giace lo specchio.

meno se usassimo uno specchio che ha la forma di una semisfera e illuminato per intero.

L'equazione dello specchio mette in relazione le tre distanze indicate nella figura 1: o, i e il raggio di curvatura dello specchio r. Questo legame è dato dall'equazione dello specchio sferico,

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{2}{r}. \qquad (1)$$

È comodo definire la *lunghezza focale* f dello specchio come la esatta metà del raggio di curvatura, ossia

$$f=r/2. \qquad (2)$$

Utilizzando la lunghezza focale, l'equazione dello specchio diventa

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}. \qquad (3)$$

La figura 2 mostra fasci di luce paralleli incidenti su uno specchio. Si può ottenere luce parallela da una sorgente posta a grande distanza dallo specchio, in modo tale che i fronti d'onda siano praticamente piani. In laboratorio la luce parallela viene generata mediante altri specchi o lenti. La luce parallela viene messa a fuoco in un punto *F* chiamato *punto focale*. Questo punto si trova alla distanza f dallo specchio. Ponendo, nell'equazione 3, $o=\infty$, situazione che corrisponde a un oggetto posto a grandissima distanza dallo specchio, risulta $i=f$.

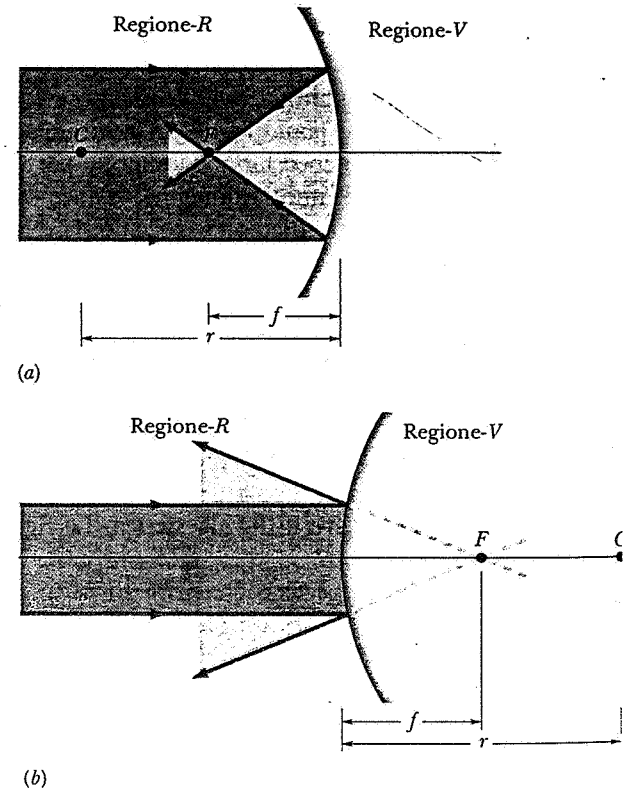


Figura 2 (*a*) In uno specchio concavo la luce parallela incidente viene focalizzata in un punto reale *F* situato nella regione R dello specchio. (*b*) In uno specchio convesso la luce parallela incidente sembra divergere da un fuoco virtuale *F* situato nella regione V dello specchio.

ISBN 88-408-0777-2

Le equazioni 1 o 3 sono utili nel definire la *posizione* dell'immagine; è pure desiderabile conoscerne la dimensione, confrontata con quella dell'oggetto. A questo scopo definiamo l'*ingrandimento (lineare) trasversale* o *ingrandimento geometrico* (talvolta semplicemente detto *ingrandimento*) m come

$$|m| = \frac{\text{dimensione trasversale dell'immagine*}}{\text{dimensione trasversale dell'oggetto}} \qquad (4)$$

Il segno di m è definito in modo che $m > 0$ se l'immagine è diritta rispetto all'oggetto, mentre $m < 0$ se l'immagine è invertita, ossia capovolta. Come mostreremo più avanti in questo stesso paragrafo, l'ingrandimento trasversale è dato da

$$m = -\frac{i}{o} \qquad (5)$$

Convenzioni sui segni

Dalla figura 2 si deducono le convenzioni sui segni che bisogna osservare nell'impiego delle equazioni 1 e 3. La regione di spazio dalla quale arriva sullo specchio la luce incidente è detta regione R, perché da questo lato si formano le *immagini reali*. Sono immagini reali quelle formate da raggi convergenti; possiamo anche dire che le immagini reali sono quelle visibili su uno schermo sistemato nella posizione dell'immagine. Nella regione R dello specchio, i, o, r ed f sono considerati positivi.

La regione oltre lo specchio è detta regione V, perché da questa parte si formano *immagini virtuali*. Sono immagini virtuali quelle formate da raggi divergenti, che non possono essere proiettate su uno schermo. Nella regione V, o, i, r ed f sono considerati negativi.

In accordo con queste convenzioni sui segni, la distanza dell'oggetto o nella figura 1*b* è positiva (perché l'oggetto è nella regione R dello specchio) e la distanza dell'immagine i è negativa (perché l'immagine è nella regione V). Il centro di curvatura C è nella regione R, di modo che il raggio di curvatura r è positivo. Nella figura 1*c*, o è positivo e i negativo, come nella figura 1*b*, ma r è negativo giacché C si trova nella regione V.

La figura 3 mostra le distanze dell'immagine per tre diverse posizioni dell'oggetto, che si avvicina progressivamente allo specchio. Nella figura 3*a* le distanze dell'oggetto e dell'immagine sono positive, dato che essi compaiono entrambi nella regione R dello specchio. Nella figura 3*b* l'oggetto si trova nel punto focale. Ponendo $o = f$, l'equazione 1 dà $i = \infty$, ciò che giustifica

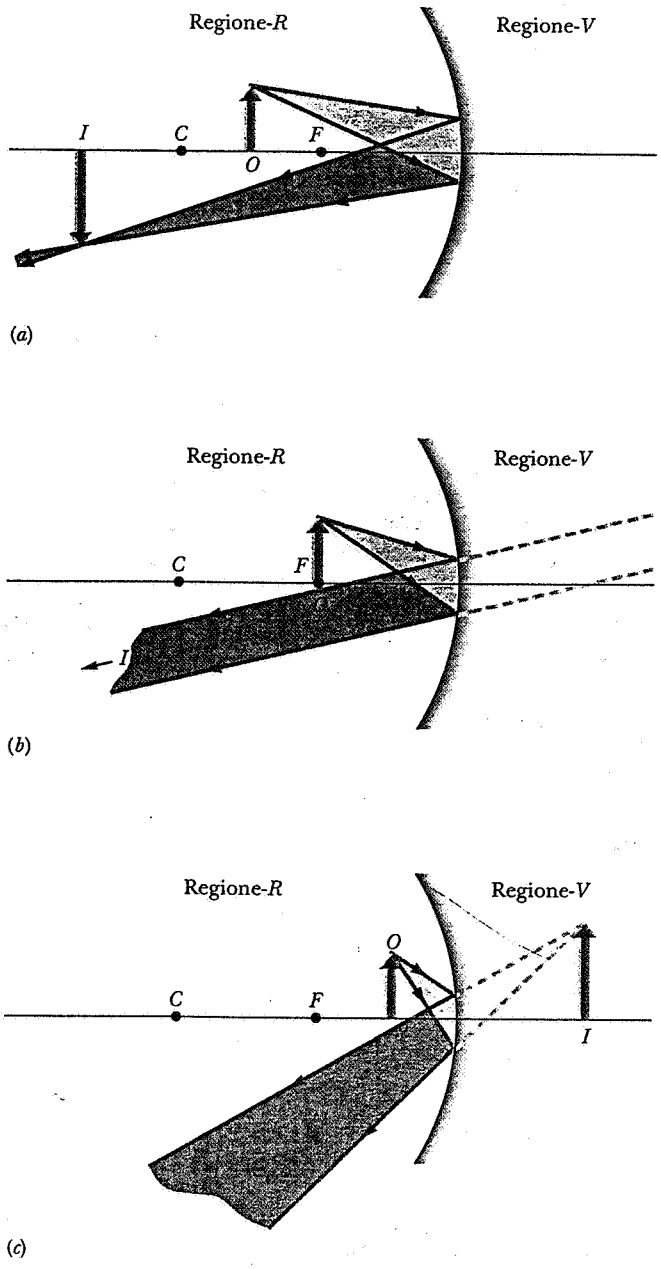


Figura 3 Un oggetto viene progressivamente avvicinato a uno specchio concavo da (*a*) un punto più lontano del fuoco a (*b*) un punto coincidente con il fuoco e a (*c*) un punto più vicino del fuoco. Durante il movimento l'immagine si sposta da (*a*) una posizione nella regione R a (*b*) una posizione infinitamente lontana fino a (*c*) riapparire nella regione V.

l'emergere di raggi paralleli dallo specchio. Nella figura 3*c* la distanza dell'oggetto rimane positiva ma è minore di f. In questo caso l'equazione 1 fornisce per i un valore negativo, ciò che significa l'esistenza di un'immagine virtuale nella regione V dello specchio, come si vede nel disegno.

Nella figura 3*a* l'ingrandimento trasversale m, determinato mediante l'equazione 5, risulta negativo, consi-

* Alcuni autori in luogo di *dimensione trasversale* usano il termine «altezza» [N.d.T.].

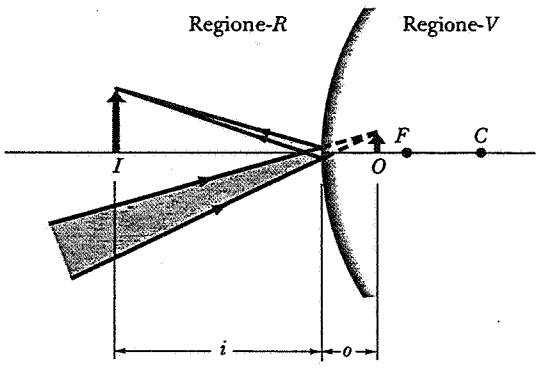


Figura 4 Una luce convergente (prodotta da specchi o lenti non illustrati) incide su uno specchio convesso. L'*oggetto virtuale* situato in *O* indica il punto in cui la luce verrebbe focalizzata se non ci fosse lo specchio. Naturalmente non vi è alcuna luce nella regione V dello specchio. Si forma un'immagine reale *I*. Questa disposizione produce un'immagine reale solo se la distanza dell'oggetto, in modulo, è inferiore alla lunghezza focale; una lente convessa in analoga disposizione invece forma *sempre* un'immagine reale.

derato che *o* e *i* sono entrambi positivi. L'immagine è pertanto invertita. (Ed è pure ingrandita poiché si dà il caso che *i* sia maggiore di *o*, nello specifico esempio illustrato.) Nella figura 3*c*, *o* e *i* hanno segni opposti, sicché *m* è positivo e l'immagine risulta di conseguenza diritta, come nel disegno.

Nella figura 4 viene suggerita una possibile configurazione in cui si considera l'oggetto nella regione V dello specchio, in modo che *o* risulti negativo. Sullo specchio incide luce convergente (prodotta con un altro dispositivo ottico, come una lente o uno specchio, non raffigurato). Se non fosse presente lo specchio, la luce convergerebbe a formare un'immagine nel punto segnato con *O*. Questo punto definisce la posizione di un *oggetto virtuale*, e la distanza tra questo punto e lo specchio è la distanza (negativa) dell'oggetto. La distanza dell'immagine è invece positiva. L'ingrandimento è pure positivo e quindi l'immagine disegnata è diritta. Sapreste prevedere cosa succederebbe se lo specchio di figura 4 fosse concavo anziché convesso? Come risulterebbe la distanza dell'immagine? E il suo rapporto con la distanza dell'oggetto, ovvero l'ingrandimento? L'immagine sarebbe diritta o invertita?

Tracciamento dei raggi

È buona norma controllare i risultati dei calcoli algebrici ottenuti dall'equazione dello specchio, facendo uso di un metodo grafico per trovare l'immagine. Questo metodo prende il nome di *tracciamento dei raggi*. Come ci è già stato suggerito nelle figure da 1 a 4, i fasci di raggi possono convergere verso un'immagine reale oppure divergere da un'immagine virtuale. Se è possibile prolungare questi raggi dopo la loro riflessio-

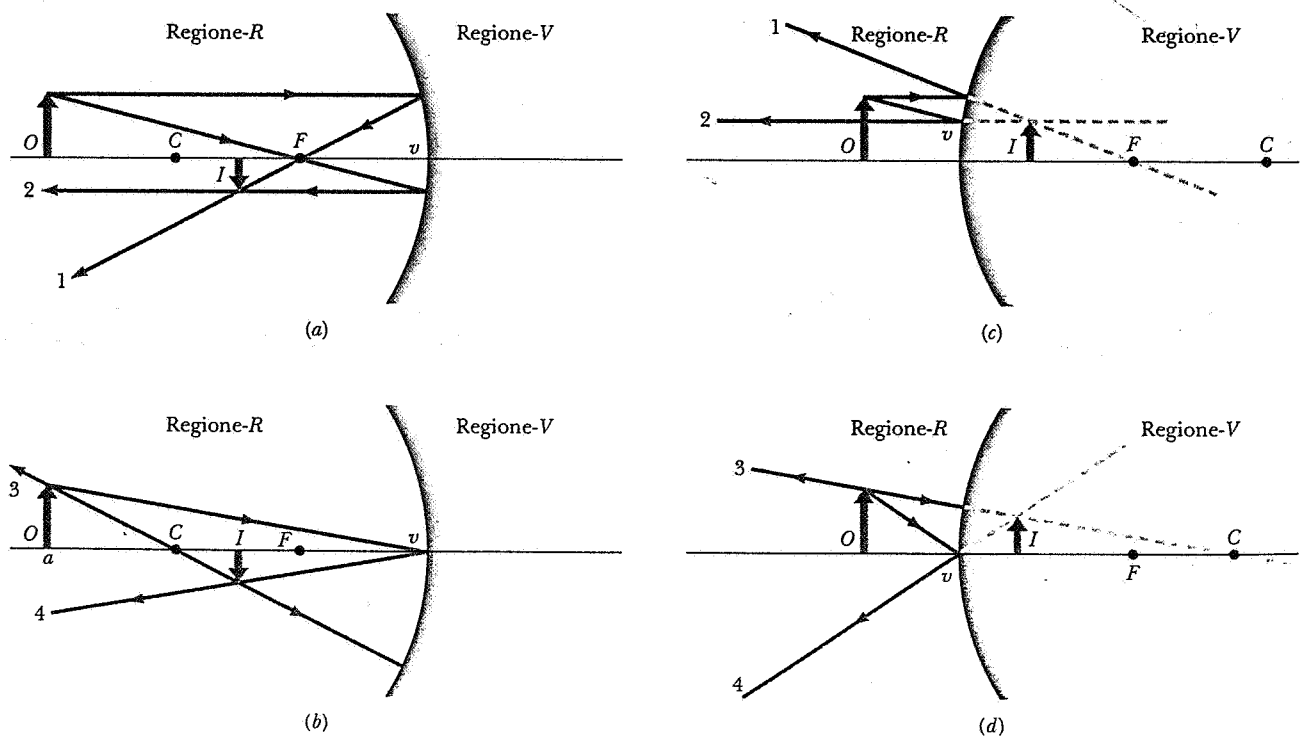


Figura 5 (*a*,*b*) Quattro raggi che si possono usare nelle costruzioni grafiche per localizzare l'immagine di un oggetto rispetto a uno specchio concavo. Si osservi che l'immagine è reale e capovolta. (*c*,*d*) In modo simile, quattro raggi tracciati per il caso di uno specchio convesso. L'immagine è virtuale e diritta.

ISBN 88-408-0777-2

ne sullo specchio, possiamo individuare la posizione dell'immagine.

Semplifichiamo il procedimento disegnando alcuni raggi fondamentali, la cui intersezione è utile a localizzare il punto immagine. Questi raggi, illustrati nella figura 5, sono scelti tra un numero infinito di possibili raggi per determinare più facilmente la posizione dell'immagine. Non è necessario che i raggi esistano nella realtà (parte dello specchio potrebbe essere coperta da un diaframma, ad esempio); in ogni modo essi possono essere utili per trovare l'immagine (che risulterebbe completa anche se alcuni raggi sono schermati). Questi raggi sono:

1. Un *raggio parallelo all'asse*, che dopo la riflessione passa attraverso il punto focale (nel caso di uno specchio convergente, fig. 5*a*) o che appare come proveniente dal punto focale (nel caso di uno specchio divergente, fig. 5*c*).

2. Un *raggio passante per il punto focale* (specchio convergente, fig. 5*a*) o che appare come tale (specchio divergente, fig. 5*c*), che viene riflesso parallelamente all'asse.

3. Un *raggio passante per il centro* di curvatura C, che viene riflesso lungo la stessa direzione di provenienza (fig. 5*b* e 5*d*).

4. Un *raggio diretto al vertice* dello specchio (il punto di intersezione dell'asse con la superficie speculare), che viene riflesso con angolo uguale a quello d'incidenza dalla parte opposta dell'asse (fig. 5*b* e 5*d*).

Per localizzare il punto immagine si può usare una qualsiasi coppia di questi quattro raggi, come si vede dalla figura 5.

Esempio 1 Nel caso illustrato nelle figure 5*a* e 5*b* si ipotizzi $f = 12$ cm e $o = 30$ cm. Si trovi la posizione dell'immagine e l'ingrandimento trasversale.

Soluzione Applicando l'equazione 1 otteniamo

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{12\text{ cm}} - \frac{1}{30\text{ cm}},$$

ovvero

$$i = 20\text{ cm}.$$

Il risultato è coerente con le figure 5*a* e 5*b*.

In base all'equazione 5, l'ingrandimento può essere calcolato come

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{20\text{ cm}}{30\text{ cm}} = -0.67.$$

L'immagine è grande 2 3 rispetto all'oggetto ed è capovolta, come si arguisce dal segno meno. Ciò che è in accordo con i disegni di figura 5*a* e 5*b*.

Esempio 2 Uno specchio convesso ha raggio di curvatura di 22 cm. Un oggetto è posto a 14 cm di distanza dallo specchio. Si trovi la posizione e la dimensione dell'immagine utilizzando (*a*) il metodo grafico e (*b*) quello algebrico.

Soluzione (*a*) La figura 6 mostra l'oggetto e lo specchio. Si traccino i raggi 1, 2 e 3 per definire la posizione dell'immagine. L'immagine è virtuale, diritta e posta nella regione V dello specchio. La distanza dell'immagine è circa la metà in valore assoluto di quella dell'oggetto, e la sua altezza è circa la metà dell'oggetto.

(*b*) Osservando la convenzione sui segni, il raggio è negativo dato che il centro di curvatura è situato nella regione V dello specchio. Dall'equazione 1 otteniamo

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}$$

ovvero

$$\frac{1}{+14\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{2}{-22\text{ cm}},$$

che dà

$$i = -6.2\text{ cm}.$$

Questo valore è coerente coi risultati della costruzione grafica.

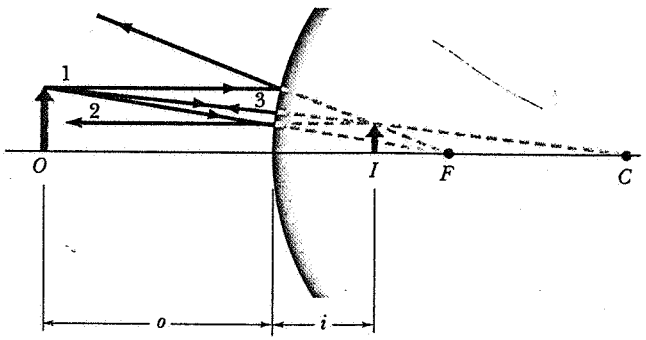


Figura 6 Esempio 2.

Possiamo calcolare l'ingrandimento trasversale tramite l'equazione 5:

$$m = -\frac{i}{o} = -\frac{-6.2\text{ cm}}{+14\text{ cm}} = +0.44,$$

valore prossimo a quello stimato col metodo grafico. Si osservi che $m > 0$ significa che l'immagine è diritta.

Derivazione dell'equazione dello specchio

Nella figura 7 è disegnato un punto oggetto O sull'asse di uno specchio sferico concavo avente raggio di curvatura r. Un raggio uscente da O, che forma un angolo arbitrario α con l'asse dello specchio, dopo una riflessione sulla superficie speculare in a, intercetta

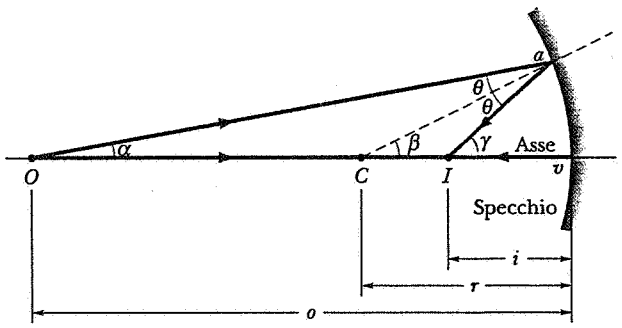


Figura 7 Un oggetto puntiforme O forma un'immagine reale puntiforme I dopo una riflessione su uno specchio concavo.

l'asse nel punto I. Il raggio che da O raggiunge lo specchio nel vertice v seguendo l'asse, viene riflesso e ripercorre all'indietro il medesimo cammino passando anche per I. Ne risulta che I è l'immagine di O, ed è un'immagine *reale* giacché la luce transita effettivamente per il punto I. Troviamo la posizione di I.

Ricordando che l'angolo esterno di un triangolo è pari alla somma dei due angoli interni opposti, applichiamo questo teorema ai triangoli OaC e OaI di figura 7; pertanto

$$\beta = \alpha + \theta$$

e

$$\gamma = \alpha + 2\theta.$$

Eliminando θ tra queste due equazioni, si ottiene

$$\alpha + \gamma = 2\beta. \tag{6}$$

Gli angoli α, β e γ, misurati in radianti, equivalgono a

$$\left.\begin{aligned} \alpha &\approx \frac{av}{vO} = \frac{av}{o}, \\ \beta &= \frac{av}{vC} = \frac{av}{r}, \\ \gamma &\approx \frac{av}{vI} = \frac{av}{i}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Si noti che solo l'equazione per β è rigorosamente esatta, poiché il centro di curvatura dell'arco av è in C e non in O o in I. Tuttavia le approssimazioni per gli angoli α e γ sono accettabili se questi angoli sono sufficientemente piccoli. *In tutta la trattazione che segue faremo l'ipotesi che i raggi uscenti dall'oggetto formino angoli α piccoli con l'asse dello specchio.* Abbiamo chiamato tali raggi parassiali poiché giacciono vicini all'asse. Una simile assunzione non si è resa necessaria per gli specchi piani. Sostituendo ora le equazioni 7 nella 6 e dividendo per av, si ottiene

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}, \tag{1}$$

che corrisponde a quanto volevamo dimostrare.

La figura 8 mostra un punto oggetto sull'asse di uno specchio convesso. I nomi degli angoli sono analoghi a quelli di figura 7. Possiamo condurre un'analisi simile a quella precedentemente svolta, che ci porta nuovamente a ottenere l'equazione 1, *purché* ci conformiamo alla convenzione sui segni che vuole i ed r di figura 8 negativi. Lasciamo questa analisi come esercizio (vedi probl. 6).

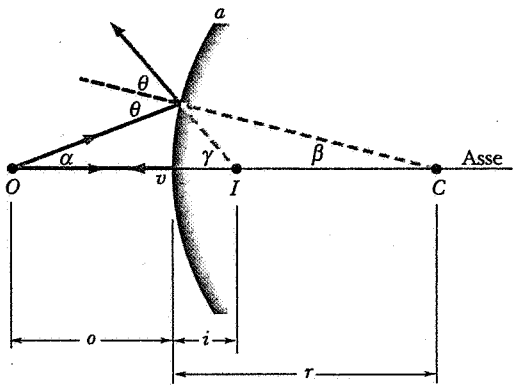


Figura 8 Un oggetto puntiforme O forma un'immagine virtuale puntiforme I dopo una riflessione su uno specchio convesso. Si confronti con la figura 7.

È importante osservare che nella 1 non appare α (o β, γ o θ), di modo che essa vale per tutti i raggi che colpiscono lo specchio, salvo la necessità che siano parassiali. In pratica si possono isolare raggi parassiali, aventi angolo α limitato quanto si desideri, ponendo un diaframma circolare davanti allo specchio con apertura centrata sul vertice v; i raggi con angolo α maggiore del valore prefissato vengono così eliminati.

Per ricavare l'equazione dell'ingrandimento trasversale (eq. 5) si consideri la figura 9, dove è disegnato un raggio (avb) che si origina dall'estremità dell'oggetto, si riflette sullo specchio nel punto v e passa attraverso la corrispondente estremità dell'immagine. La

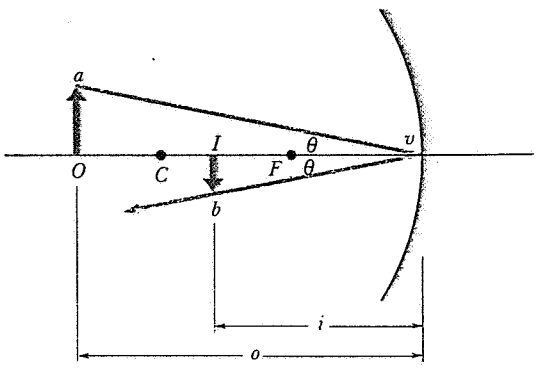


Figura 9 Un oggetto O forma un'immagine reale invertita I su uno specchio concavo.

ISBN 88-408-0777-2

legge della riflessione impone che questo raggio formi due angoli θ uguali con l'asse dello specchio. Per i due triangoli rettangoli simili aOv e bIv possiamo scrivere

$$\frac{Ib}{Oa} = \frac{vI}{vO}.$$

Il primo membro dell'equazione (trascurando momentaneamente la questione del segno) corrisponde all'*ingrandimento trasversale* come definito dall'equazione 4. Se vogliamo rappresentare un'immagine *invertita* con il segno *negativo* dell'ingrandimento, definiamo arbitrariamente m per questo caso come $-(Ib/Oa)$. Giacché $vI = i$ e $vO = o$, otteniamo immediatamente il risultato mostrato in precedenza, come nell'equazione 5,

$$m = -\frac{i}{o}. \tag{5}$$

Questa equazione fornisce il valore dell'ingrandimento per specchi piani e sferici in qualsiasi configurazione. Per uno specchio piano si ha $o = -i$ e l'ingrandimento risulta $+1$, ciò che richiede che l'immagine sia *diritta* e grande quanto l'oggetto, in accordo con l'esperienza.

Le immagini fornite dagli specchi sferici sono affette da numerose distorsioni, dovute all'impossibilità pratica di soddisfare del tutto le condizioni richieste per i raggi parassiali. In linea di massima una sorgente puntiforme non dà luogo a un'immagine puntiforme: si veda il problema 2. Oltre a ciò si generano aberrazioni perché l'ingrandimento varia leggermente con la distanza dall'asse dello specchio; l'equazione 5 è verificata con precisione infatti solo per raggi parassiali. Infine dobbiamo sempre tener presente che l'ottica geometrica è di per se stessa solamente un caso ideale dell'ottica fisica; difatti la diffrazione fa sentire i suoi effetti distorcendo o sfuocando l'immagine (vedi cap. 46).

44-2 SUPERFICI RIFRANGENTI SFERICHE

Nella figura 10*a* è mostrata una sorgente puntiforme O vicina a una superficie rifrangente sferica e convessa avente raggio di curvatura r. La superficie separa due mezzi aventi differenti indici di rifrazione, essendo n_1 quello del mezzo in cui si propaga la luce incidente sulla superficie ed n_2 quello dell'altro mezzo che contiene il raggio rifratto. Un tale schema potrebbe rap-

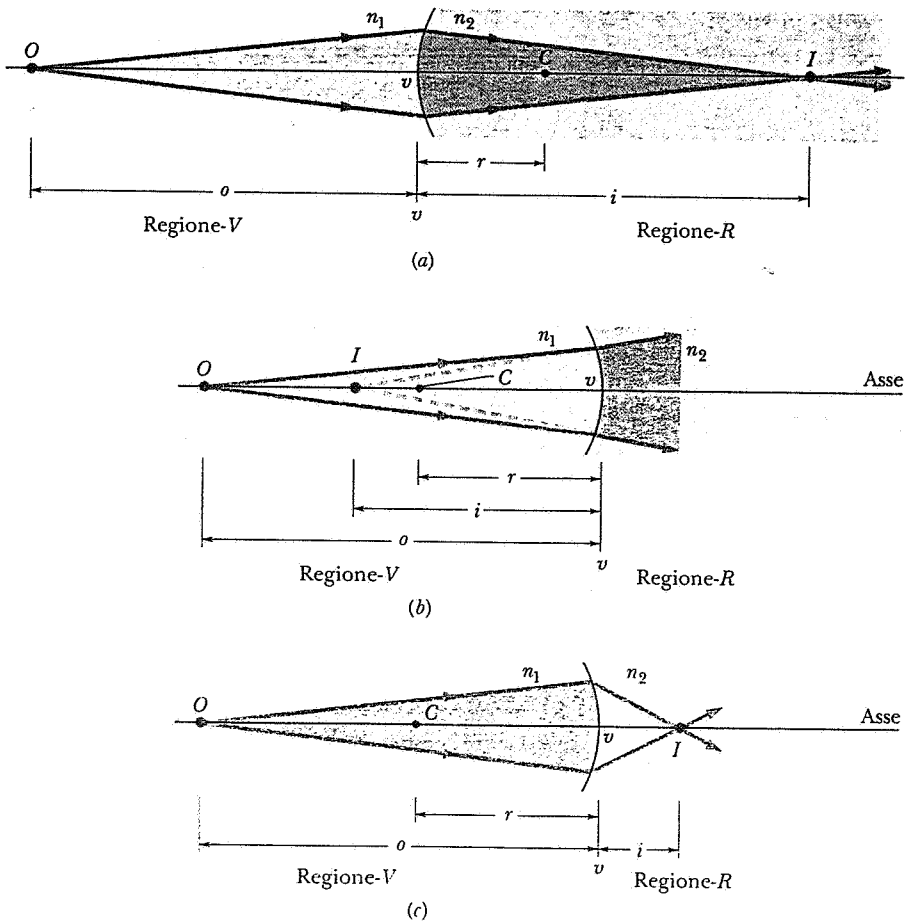


Figura 10 (*a*) La rifrazione sulla superficie sferica convessa di separazione tra due mezzi produce un'immagine reale di un oggetto puntiforme; in questo caso $n_2 > n_1$. (*b*) La rifrazione su una superficie sferica concava produce un'immagine virtuale se $n_2 > n_1$. (*c*) Come nel caso (*b*), ma con $n_2 < n_1$.

presentare la luce che incide su di una piccola porzione di una sfera di cristallo; si noti che all'interno del vetro (mezzo 2) si forma un'immagine reale. Per quanto non ci imbatteremo certo di frequente in immagini di questo tipo, la comprensione delle immagini prodotte da superfici rifrangenti sferiche è importante nella discussione delle lenti sottili del paragrafo 44-3.

Nella figura 10*b* è illustrata l'immagine virtuale prodotta da una superficie concava in cui $n_1 < n_2$: la luce nel secondo mezzo diverge come se provenisse da un'immagine posta nel punto *I*. La figura 10*c* mostra nuovamente una superficie concava rispetto al raggio incidente, salvo che ora $n_1 > n_2$ e l'immagine creata è reale.

Come dimostreremo fra poco, la distanza dell'immagine i è legata alla distanza dell'oggetto o, al raggio di curvatura r e ai due indici di rifrazione dalla relazione

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \qquad (8)$$

Questa sola equazione, con le appropriate convenzioni per i segni, è sufficiente a descrivere il comportamento dei raggi attraverso superfici sia concave sia convesse; l'unica restrizione richiesta è che i raggi siano parassiali, come per il caso degli specchi sferici.

Nella figura 11 sono riassunte le convenzioni sui segni da usare con l'equazione 8. Se la luce convergente che proviene dalla superficie di separazione deve formare un'immagine reale, essa deve trovarsi dalla parte opposta rispetto a quella da cui proviene la luce incidente. Questa parte prende il nome di regione R. Come si vede nella figura 10*b* invece le immagini virtuali sono prodotte sullo stesso lato da cui proviene la luce incidente, che pertanto si chiama regione V. Il raggio di curvatura è considerato positivo se il centro di curvatura *C* è situato nella regione R (come in fig. 10*a*) oppure negativo se *C* è situato nella regione V (come in fig. 10*b* e 10*c*). La distanza dell'oggetto è positiva per oggetti reali (nella regione V), e così pure la distanza dell'immagine è positiva per le immagini reali (nella regione R). La distanza dell'immagine i è positiva nelle figura 10*a* e 10*c*, mentre è negativa nella figura 10*b*.

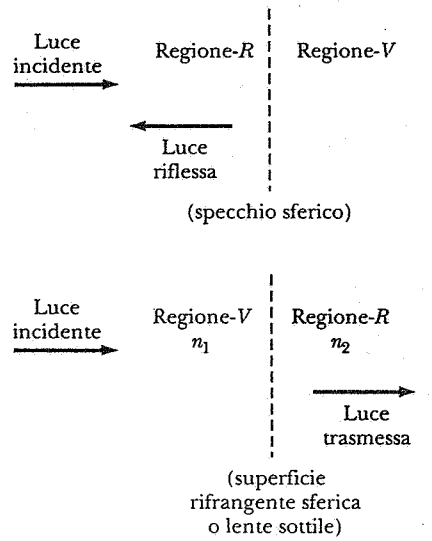


Figura 11 Per gli specchi le immagini reali si formano dalla stessa parte da cui proviene la luce. Per le superfici rifrangenti e le lenti, si formano dalla parte opposta.

Esempio 3 Si trovi la posizione dell'immagine per il sistema riprodotto nella figura 10*a*, ipotizzando che sia: $r = 11$ cm, $n_1 = 1.0$, $n_2 = 1.9$. L'oggetto è situato 19 cm a sinistra del vertice v.

Soluzione Dall'equazione 8

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r},$$

abbiamo

$$\frac{1.0}{+19\text{ cm}} + \frac{1.9}{i} = \frac{1.9 - 1.0}{+11\text{ cm}}.$$

Si osservi che r è positivo perché il centro di curvatura *C* della superficie di figura 10*a* giace nella regione R. Risolvendo l'equazione otteniamo

$$i = +65\text{ cm}.$$

Questo risultato è coerente con la figura 10*a* ed è conforme alla convenzione sui segni. Il raggio luminoso passa effettivamente dal punto immagine *I*, sicché l'immagine risulta reale, come ci indica il valore positivo trovato per i. Si ricordi che n_1 (= 1.0 nel nostro caso) si riferisce sempre al mezzo da cui proviene la luce.

Esempio 4 Con riferimento alla vasca sferica di raggio 15 cm rappresentata nella figura 12, si consideri un pesce che si trova sul piano equatoriale alla distanza di 10 cm dalla superficie esterna. Ponendo l'indice di rifrazione dell'acqua $n_1 = 1.33$, si determini la posizione del pesce per un osservatore esterno alla vasca. Si trascuri l'effetto di rifrazione del vetro di contenimento, supposto molto sottile.

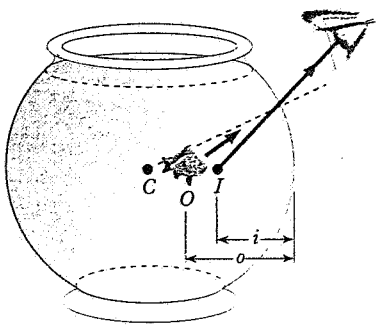


Figura 12 Esempio 4. Si noti che il raggio uscente da *O* si allontana dalla normale (indicata con una linea tratteggiata). in accordo con la legge di Snell.

ISBN 88-408-0777-2

Soluzione Tracciata la geometria di figura 12, per la convenzione sui segni o dev'essere positivo perché l'oggetto sta nella regione V rispetto alla superficie sferica, mentre r è negativo perché C è nella stessa regione V. Ponendo nell'equazione 8 $n_2 = 1.0$, otteniamo

$$\frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r} - \frac{n_1}{o} = \frac{1 - 1.33}{-15\text{ cm}} - \frac{1.33}{10\text{ cm}}.$$

Risolvendo si perviene a

$$i = -6.4\text{ cm}.$$

Vale a dire che il pesce sembra più vicino alla parete della vasca di quanto sia in realtà.

Derivazione dell'equazione per la superficie rifrangente (eq. 8)

Nella figura 13 si abbia un punto sorgente O prossimo a una superficie rifrangente sferica di raggio r. Un raggio uscente da O investe perpendicolarmente la superficie in v e prosegue non deviato nel mezzo 2 passando attraverso il centro di curvatura C. Questo raggio rappresenta un conveniente asse di riferimento utile al nostro scopo. Un secondo raggio forma invece con l'asse un angolo α arbitrario ma piccolo, colpisce la superficie di separazione in a e viene deviato in base alla legge

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2.$$

Quest'ultimo raggio rifratto interseca il primo nel punto I, che costituisce perciò l'immagine di O.

Similmente al procedimento usato per ricavare l'equazione dello specchio, usiamo il teorema dell'angolo esterno di un triangolo, applicandolo ai triangoli COa e ICa, ottenendo

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad \text{e} \quad \beta = \theta_2 + \gamma. \tag{9}$$

Anche qui, come già nel paragrafo 44-1, assumiamo che tutti i raggi siano parassiali, di modo che tutti gli angoli (β, γ, θ_1, θ_2) sono piccoli e il seno di ciascun angolo viene a coincidere con l'angolo stesso. Questo ci permette di scrivere la legge di rifrazione come

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2. \tag{10}$$

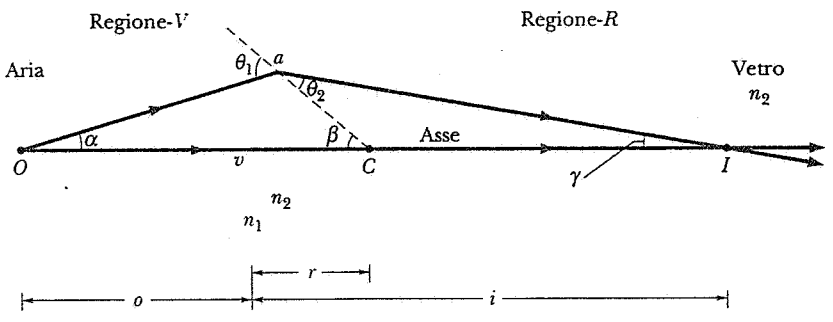


Figura 13 Un oggetto puntiforme O produce un'immagine reale puntiforme I dopo una rifrazione sulla superficie sferica convessa di separazione tra due mezzi.

Combinando le equazioni 9 e 10, si giunge a

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta. \tag{11}$$

Gli angoli α, β e γ di figura 13, espressi in radianti, valgono

$$\alpha \approx \frac{av}{o}, \quad \beta = \frac{av}{r} \quad \text{e} \quad \gamma \approx \frac{av}{i}. \tag{12}$$

Solo la seconda di queste eguaglianze è però esatta. Le altre due sono approssimate perché I e O *non* sono il centro dell'arco av. Tuttavia per raggi parassiali (α sufficientemente piccolo) le imprecisioni nell'equazione 12 possono essere ridotte quanto si voglia. Sostituendo le equazioni 12 nella 11 si perviene direttamente all'equazione 8.

44-3 LENTI SOTTILI

Esistono molti esempi comuni di rifrazione della luce attraverso una lente. Le lenti di cui sono dotati i nostri occhi focalizzano la luce sulla retina, mentre le lenti correttive degli occhiali o le lenti a contatto compensano i difetti della vista. Le lenti multiple di una macchina fotografica mettono a fuoco i raggi di luce sulla pellicola. Prenderemo in considerazione le proprietà di tali lenti in questo paragrafo.

Molto spesso si ha a che fare con sistemi formati da più superfici rifrangenti. È anche il caso di una lente a contatto, ove la luce passa dapprima dall'aria nel materiale plastico e poi da questo nell'occhio. Qui ci limiteremo a considerare il caso speciale della *lente sottile*; caso cioè in cui lo spessore della lente è piccolo se paragonato alla distanza dell'oggetto o, alla distanza dell'immagine i e ai raggi di curvatura r_1 e r_2 delle due superfici rifrangenti. Per una lente siffatta dimostreremo più avanti che le grandezze citate sono legate dalla relazione

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \tag{13}$$

in cui la lunghezza focale f della lente è data da

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (14)$$

Le equazioni 13 e 14 contengono approssimazioni che sono accettabili solo per lenti sottili e raggi parassiali. Si osserverà che l'equazione 13 è identica a quella analoga formulata per gli specchi sferici. La 14 è comunemente chiamata *equazione del costruttore di lenti*; mette in relazione la lunghezza focale della lente con l'indice di rifrazione n del suo materiale e con i raggi di curvatura delle due superfici.

Nell'equazione 14 si conviene che r_1 sia il raggio di curvatura della superficie su cui incide la luce, mentre r_2 è quello della superficie opposta. È sottinteso che l'equazione 14 va usata laddove la lente, dotata di indice di rifrazione n, è immersa in aria. Altrimenti, qualora sia collocata entro un mezzo di indice di rifrazione diverso da 1, l'equazione 14 mantiene la sua validità se in luogo di n poniamo nella formula $n_{\text{lente}}/n_{\text{mezzo}}$.

L'ingrandimento trasversale di una lente sottile è dato dalla medesima formula dello specchio sferico,

$$m = -\frac{i}{o}. \qquad (15)$$

Questo risultato sarà dimostrato più avanti in questo stesso paragrafo.

Convenzione sui segni

Le convenzioni sui segni per o, i, r_1 ed r_2 sono analoghe a quelle stabilite a suo tempo per gli specchi sferici e per le superfici rifrangenti, descritte nella figura 11. Queste convenzioni sono ora illustrate nella figura 14, in cui si definiscono, coma già di consueto, una regione R e una regione V.

1. I raggi di curvatura r_1 (riferito alla prima superficie investita dalla luce) ed r_2 (riferito alla seconda superficie) sono positivi se i corrispondenti centri di curvatura si trovano nella regione R. I raggi sono viceversa negativi se i corrispondenti centri di curvatura sono situati nella regione V. Nella figura 14*a* il centro di curvatura C_1 giace nella regione R e pertanto r_1 è positivo, mentre C_2 sta nella regione V e quindi r_2 è negativo. Dall'esame dell'equazione 13 deduciamo che, quando $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$, la lunghezza focale f è sempre positiva. Una lente di questo tipo prende il nome di lente *convergente*; una lente più spessa al centro che ai bordi, quando è immersa in un mezzo che presenti indice di rifrazione minore del suo proprio, è sempre una lente convergente.

Nella figura 14*b* C_1 si trova nella regione V, mentre C_2 è situato nella regione R. Di conseguenza r_1 è negativo ed r_2 positivo. In tal caso l'equazione 13 impone che f sia sempre negativo. Una lente siffatta è detta *divergente*; una lente più sottile al centro che ai bordi, quando è immersa in un mezzo che presenti indice di rifrazione minore del suo proprio, è sempre una lente divergente.

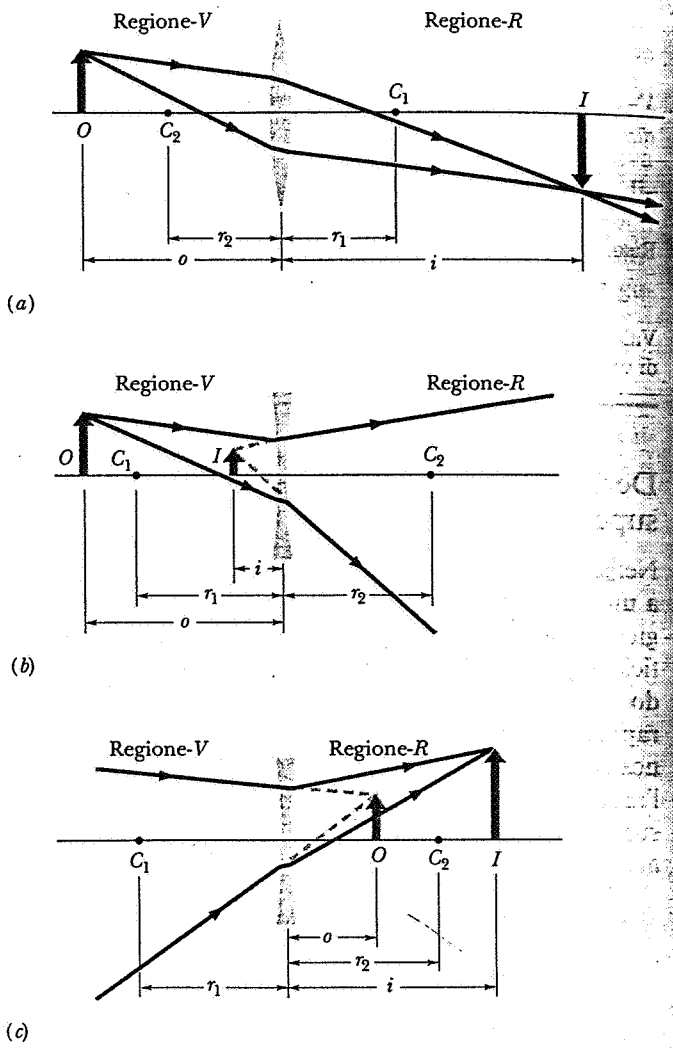


Figura 14 (*a*) Una lente convergente forma un'immagine reale e capovolta. Una lente siffatta presenta una lunghezza focale positiva ed è più spessa al centro che ai bordi. (*b*) Una lente divergente forma un'immagine virtuale diritta. Questa lente ha una lunghezza focale negativa ed è più sottile al centro che ai bordi. (*c*) Un fascio di luce convergente forma un oggetto virtuale in O. Questa lente divergente produce un'immagine reale e diritta nel punto I.

2. La distanza dell'oggetto o è positiva se l'oggetto è reale e giace nella regione V della lente, come nelle figure 14*a* e 14*b*. La luce proveniente da un oggetto reale è normalmente divergente prima di investire la lente. Si può anche avere, come in figura 14*c*, una luce convergente che colpisce una lente, ma in questo caso, se la lente non esistesse, la luce convergente formereb-

ISBN 88-408-0777-2

be un'immagine nel punto O situata nella regione R della lente; consideriamo quest'immagine come un oggetto virtuale e in questo caso assumiamo che o sia negativo.

3. La distanza dell'immagine i è positiva se l'immagine (reale) giace nella regione R della lente, come nella figura 14*a* e 14*c*, mentre i è negativo se l'immagine (virtuale) giace nella regione V della lente, come in figura 14*b*.

4. Secondo l'equazione 15 l'ingrandimento è negativo quando sia i sia o sono positivi, come nel caso illustrato nella figura 14*a*, corrispondente a un'immagine invertita. Nel caso di un'immagine diritta, come nelle figure 14*b* e 14*c*, l'ingrandimento è positivo perché o e i posseggono segno opposto. Nel caso illustrato nella figura 14*b* o è positivo e i è negativo, mentre nella figura 14*c* o è negativo e i è positivo.

Possiamo ottenere un'utile rappresentazione della convenzione sui segni, sia per gli specchi sferici sia per le lenti sottili, se scriviamo l'equazione per lo specchio (eq. 3) e l'equazione per la lente (eq. 13) nel seguente modo:

$$\left(\frac{o}{|f|}\right)^{-1} + \left(\frac{i}{|f|}\right)^{-1} = \pm 1, \qquad (16)$$

ottenuta dividendo le equazioni per $|f|$, valore assoluto della lunghezza focale f. A secondo membro dell'equazione 16 scegliamo il segno +1 per lenti convergenti e specchi concavi, mentre va attribuito il segno −1 in caso di lenti divergenti o specchi convessi. Si confronti il problema 21.

La figura 15 è una rappresentazione grafica dell'equazione 16. La figura 15*a* vale per lenti convergenti e specchi concavi, mentre la figura 15*b* vale per lenti divergenti e specchi convessi. Ciascun grafico presenta due rami di iperbole, uno che si riferisce a ingrandimenti positivi, l'altro che si riferisce a ingrandimenti negativi. Questi due grafici sintetizzano ordinatamente tutte le applicazioni possibili delle equazioni 3 e 5 (per specchi sferici) e delle equazioni 13 e 15 (per lenti sottili).

A differenza degli specchi sferici e delle superfici rifrangenti sferiche, la lente possiede *due* punti focali. In una lente sottile i due punti focali sono situati a ugual distanza f dalla lente su entrambi i suoi lati.

Quando la posizione di un punto oggetto viene a coincidere con il *primo punto focale* F_1, dall'altra parte della lente emergono raggi paralleli, come si vede nella figura 16. Nel caso di una lente divergente (fig. 16*b*), il punto oggetto è un oggetto virtuale. I raggi convergenti, che verrebbero focalizzati in F_1 se non ci fosse la lente, vengono deviati in raggi paralleli dalla lente divergente. Il secondo punto focale F_2 è il punto in cui la luce parallela viene focalizzata (o appare come se fosse focalizzata) dalla lente, come illustrato nella figura 17. Dal confronto tra le figure 16 e 17 si noti che nella lente convergente la collocazione del primo e del secondo punto focale è invertita rispetto a quanto accade per la lente divergente.

Tutti i raggi di figura 16 e 17 contengono le stesse lunghezze d'onda; o in altre parole le lunghezze dei *cammini ottici* sono uguali (si veda il paragrafo 43-5). Si noti come differenti lunghezze geometriche dei cammini dei raggi attraverso le lenti (dove la luce ha velocità minore che nell'aria) trasformino i fronti d'onda sferici in piani e viceversa.

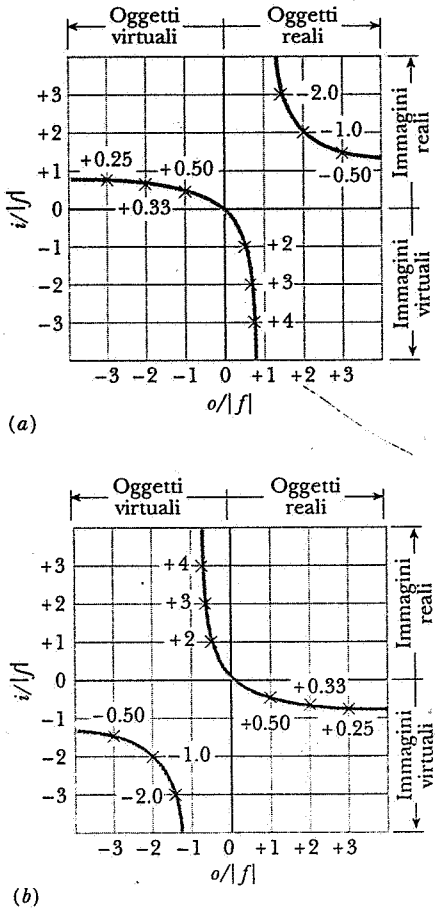


Figura 15 (*a*) Una rappresentazione di $i/|f|$ e $o/|f|$ per specchi concavi e lenti convergenti. Si noti che un oggetto virtuale non può formare un'immagine virtuale (quadrante in basso a sinistra). I numeri vicino ai punti segnati con una crocetta rappresentano i valori dell'ingrandimento (eq. 15); ove sono positivi indicano immagini diritte, e viceversa se negativi. (b) La stessa rappresentazione per specchi convessi e lenti divergenti. In questo caso non si può produrre un'immagine reale da un oggetto reale (quadrante in alto a destra). Si veda Bartlett A.A., *Image Formation in Lenses and Mirrors, a Complete Representation*, «The Physics Teacher» maggio 1976, 296.

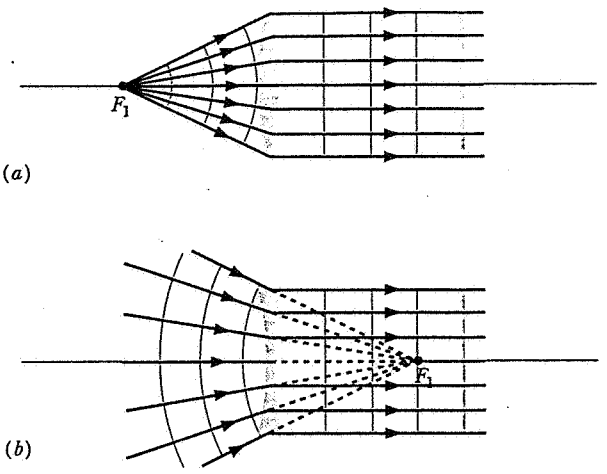


Figura 16 (*a*) Se nel punto focale F_1 di una lente convergente si pone un oggetto puntiforme, dalla lente emergono raggi paralleli. (*b*) Nel caso analogo di una lente divergente, un oggetto virtuale puntiforme dà luogo a raggi paralleli.

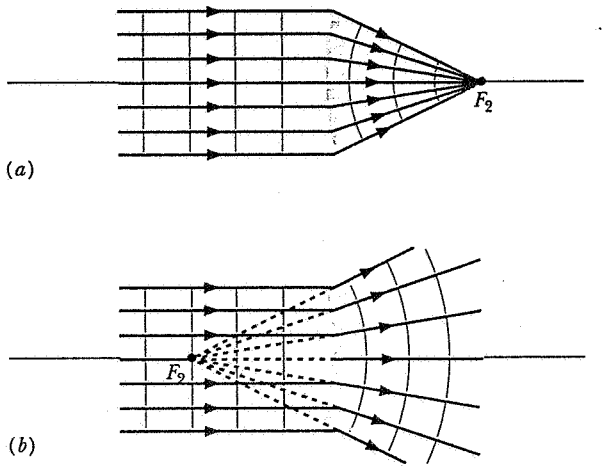


Figura 17 (*a*) Quando raggi paralleli incidono su una lente convergente, la luce è focalizzata nel secondo punto focale F_2. (*b*) Quando raggi paralleli incidono su una lente divergente, essi sembrano provenire dal secondo punto focale.

Tracciamento dei raggi

Come nel caso degli specchi sferici, è d'aiuto, al fine di individuare la posizione dell'immagine prodotta da una lente sottile, affidarsi a un metodo grafico che fa uso di pochi raggi fondamentali. Nella figura 18 sono illustrati tre di questi raggi utili allo scopo:

1. Un raggio che passa (o, quando estrapolato, sembra passare) attraverso il primo punto focale F_1 ed emerge dalla lente parallelo al suo asse (raggio 1 in fig. 18).

2. Un raggio parallelo all'asse della lente che passa (o, quando estrapolato, sembra passare) dal secondo punto focale F_2 (raggio 2 in fig. 18).

3. Un raggio passante per il centro della lente e che quindi l'attraversa senza esserne deviato (raggio 3 in fig. 18); in prossimità del centro infatti la lente si comporta come una lamina di vetro delimitata da due facce parallele, che non muta pertanto la direzione del raggio.

Si può usare una coppia qualsiasi di questi raggi per definire la posizione dell'immagine; il terzo rimane a disposizione come verifica. Nella figura 18 si noti che per tutti e tre i raggi si considera che la rifrazione avvenga in un unico piano coincidente col piano di simmetria della lente. Questa approssimazione è accettabile solo per lenti sottili.

Esempio 5 Le lenti di figura 14 hanno raggi di curvatura che misurano, in modulo, 42 cm e sono costruite in vetro con indice di rifrazione $n = 1.65$. Calcolare le loro lunghezze focali.

Soluzione Poiché C_1 giace nella regione R della lente di figura 14*a*, r_1 è positivo e quindi pari a + 42 cm. Viceversa C_2 giace nella regione V; di conseguenza r_2 assume valore −42 cm. Sostituendo questi valori nell'equazione 14, si ottiene

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.65-1)\left(\frac{1}{+42\text{ cm}} - \frac{1}{-42\text{ cm}}\right),$$

da cui

$$f = +32\text{ cm}.$$

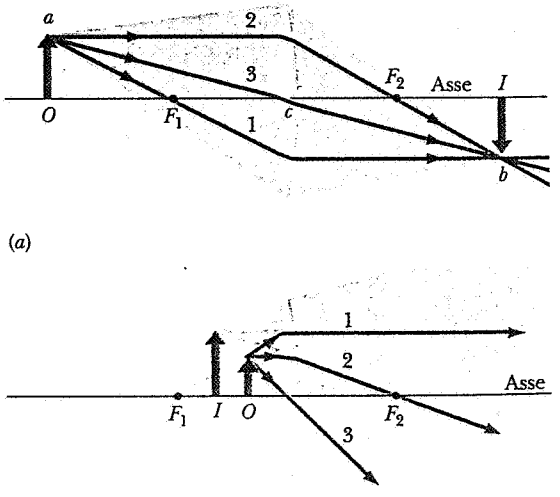


Figura 18 Tre raggi che possono essere utilizzati per localizzare l'immagine formata da una lente sottile.

ISBN 88-408-0777-2

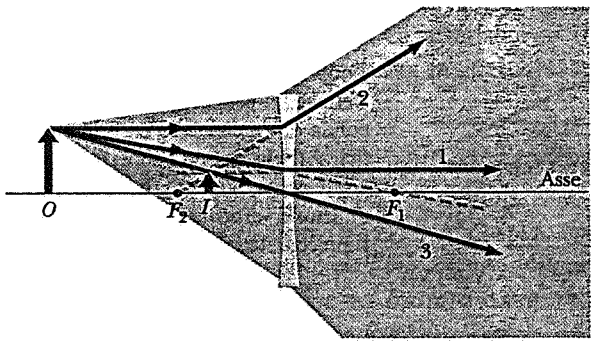


Figura 19 Esempio 6.

Una lunghezza focale con valore positivo significa, come già avevamo accennato, che una luce incidente parallela, dopo la rifrazione, converge a formare un'immagine reale nel punto focale.

Nelle figure 14*b* e 14*c*, C_1 giace nella regione V della lente, cosicché r_1 assume valore negativo e cioè −42 cm. Dato che, al contrario, r_2 è positivo e pari a + 42 cm, l'equazione 14 risulta

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = (1.65-1)\left(\frac{1}{-42\text{ cm}} - \frac{1}{+42\text{ cm}}\right),$$

che dà in definitiva

$$f = -32\text{ cm}.$$

Esempio 6 Di fronte a una lente divergente si trova un oggetto alla distanza di 38 cm. Sapendo che la lunghezza focale della lente è −24 cm, si trovi la posizione dell'immagine e l'ingrandimento trasversale usando il metodo (*a*) grafico e (*b*) algebrico.

Soluzione (*a*) Nella figura 19 è rappresentato il sistema di raggi. Il raggio 1 è diretto verso il punto focale F_1, ma, rifratto dalla lente, ne emerge parallelo all'asse. Il raggio 2, che incide sulla lente parallelamente all'asse, attraversata la lente, diverge come se provenisse dal punto focale F_2. Il raggio 3 passa per il centro delle lente e prosegue indeviato. Tutti e tre i raggi appaiono come provenienti dall'estremità dell'immagine *I*. Si osservi che basterebbero due di questi raggi per definire la posizione dell'immagine, ma è prudente tracciare anche il terzo per ridurre il rischio di sbagliarsi.

La costruzione grafica ci informa che l'immagine è virtuale, diritta, situata a una distanza dalla lente pari a circa 2/3 della distanza focale e che la sua altezza è circa 1/3 di quella dell'oggetto.

(*b*) Usando l'equazione 13, abbiamo

$$\frac{1}{+38\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{-24\text{ cm}},$$

vale a dire

$$i = -15\text{ cm},$$

coerente col risultato del metodo grafico. L'ingrandimento risulta

$$m = -\frac{1}{o} = -\frac{-15\text{ cm}}{+38\text{ cm}} = +0.39,$$

che è pure in accordo con la stima già effettuata graficamente.

Derivazione delle formule per le lenti sottili (eq. 13 e 14)

Ci proponiamo di considerare separatamente le due superfici rifrangenti della lente, utilizzando l'immagine prodotta dalla prima superficie come oggetto nei confronti della seconda.

Nella figura 20*a* è disegnata una «lente» spessa di vetro di lunghezza *L* le cui superfici curve hanno raggi r_1 ed r_2. Vicino alla superficie di sinistra si trova un oggetto puntiforme *O*. Un raggio uscente da *O* parallelo all'asse non viene deviato né all'entrata né all'uscita dalla lente.

Un secondo raggio uscente da *O*, che forma un angolo α qualsiasi con l'asse, è rifratto nei punti *a* e *b* rispettivamente sulla prima e sulla seconda superficie. Esso incontra l'asse nel punto *I*, che, essendo l'intersezione dei due raggi tracciati a partire da *O*, rappresenta l'immagine del punto *O*, prodotto dopo la rifrazione su due superfici.

Nella figura 20*b* è disegnata l'immagine virtuale *I'* del punto *O*, formata dalla rifrazione sulla prima superficie. Per trovare la posizione di *I'* facciamo uso dell'equazione 8 ponendo $n_1 = 1$ ed $n_2 = n$:

$$\frac{1}{o} + \frac{n}{i'} = \frac{n-1}{r_1},$$

e, ricordando che *i'* è negativo, otteniamo

$$\frac{1}{o} - \frac{n}{|i'|} = \frac{n-1}{r_1}. \qquad (17)$$

Nella figura 20*c* è considerata la seconda superficie. Un osservatore posto nel punto *b* crederebbe, a meno che non sia informato dell'esistenza della prima superficie, che la luce che investe quel punto abbia origine nel punto *I'* della figura 20*b* e che lo spazio alla sinistra della superficie sia occupato da vetro. Così l'immagine (virtuale) *I'* formata dalla prima superficie funge da oggetto reale *O'* per la seconda superficie. La distanza di questo oggetto dalla seconda superficie è

$$o' = |i'| + L. \qquad (18)$$

Nell'applicare l'equazione 8 alla seconda superficie poniamo $n_1 = n$ ed $n_2 = 1$ poiché l'oggetto si comporta come se si trovasse nel vetro. Utilizzando l'equazione 18, si può scrivere l'equazione 8 come

$$\frac{n}{|i'| + L} + \frac{1}{i} = \frac{1-n}{r_2}. \qquad (19)$$

Facciamo l'ipotesi che lo spessore *L* della «lente» di figura 20*a* sia sufficientemente piccolo da poter essere trascurato rispetto alle altre distanze che vi compaiono (cioè *o*, *i*, *o'*, *i'*, r_1 ed r_2). Nel seguito faremo sempre

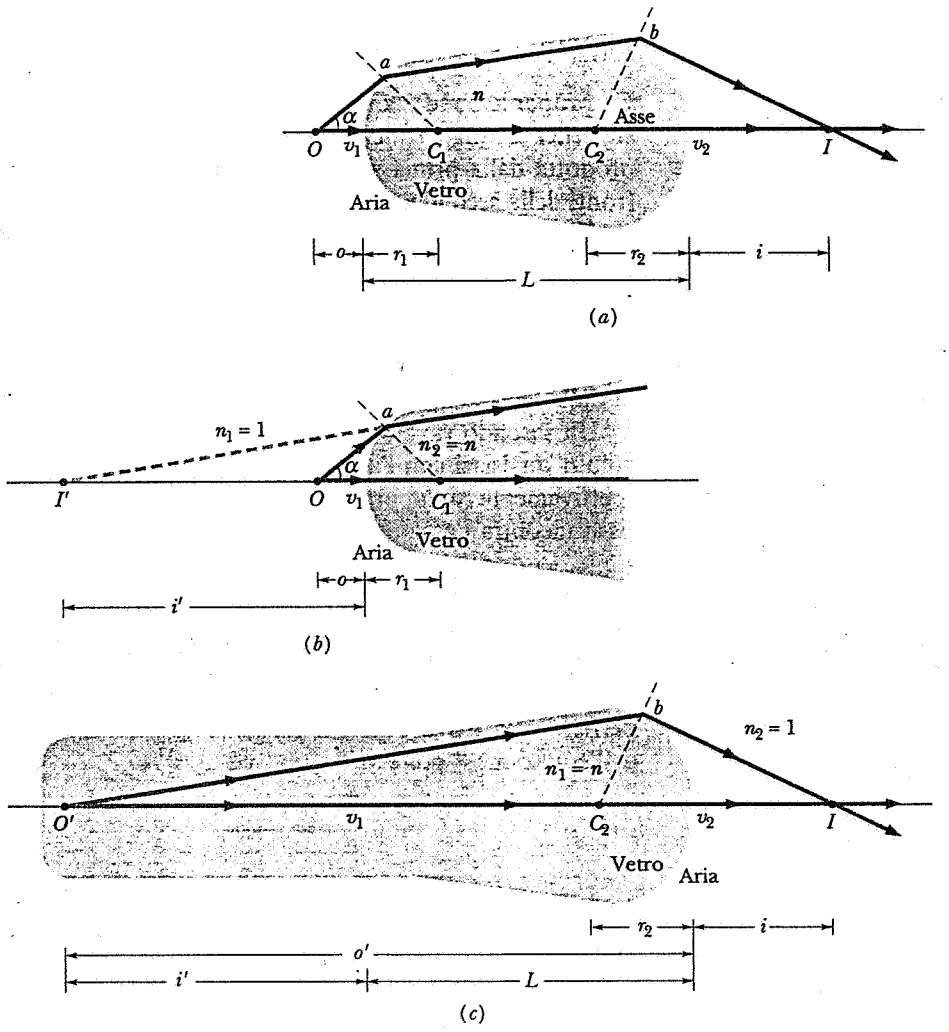


Figura 20 (*a*) Due raggi uscenti da *O* formano un'immagine reale nel punto *I* dopo una rifrazione su due superfici sferiche, la prima convergente e la seconda divergente. (*b*) La prima superficie e (*c*) la seconda superficie, illustrate separatamente. La scala nella direzione verticale è enormemente rimpicciolita per chiarezza.

uso di questa *approssimazione della lente sottile*. Ponendo $L = 0$ nell'equazione 19, si ottiene

$$\frac{n}{|i'|} + \frac{1}{i} = -\frac{n-1}{r_2}. \qquad (20)$$

Sommando le equazioni 17 e 20, si ha

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \qquad (21)$$

Infine, chiamando semplicemente $1/f$ il secondo membro della (21), si giunge a completare la dimostrazione.

Per ottenere l'equazione 15, che definisce l'ingrandimento trasversale, poniamo attenzione alla figura 18*a*. I triangoli rettangoli *acO* e *bcI* sono simili perché gli angoli $a\hat{c}O$ e $b\hat{c}I$ sono uguali. Si può quindi stabilire la proporzionalità tra i lati, come segue

$$\frac{bI}{aO} = \frac{cI}{cO}. \qquad (22)$$

Il secondo membro di questa espressione è proprio i/o, mentre il primo membro corrisponde a $-m$, volendo significare col segno meno che l'immagine è invertita. Con queste sostituzioni l'equazione 22 si riduce direttamente alla (15).

44-4 SISTEMI OTTICI COMPOSTI

Una lente o uno specchio isolati costituiscono di rado un dispositivo ottico utile. In apparecchi come i binocoli, i telescopi, i microscopi e le macchine fotografiche, le immagini vengono formate attraverso una serie di lenti o specchi. Tratteremo in questo paragrafo le immagini prodotte dalla combinazione di molteplici elementi ottici. L'analisi della formazione di immagini in siffatti sistemi ottici è semplice. Basta considerare gli elementi uno alla volta come se fossero isolati, prendendo l'*immagine* scaturita dal precedente come *oggetto* che fa da sorgente nei confronti del successivo. Si applicano quindi le formule per gli specchi sferici

ISBN 88-408-0777-2

(eq. 3 e 5) o per le lenti sottili (eq. 13 e 15), tenendo scrupolosamente conto dei segni caratteristici di ogni singolo caso. Si faccia attenzione in particolare a quanto segue:

Quando emerga luce divergente *dall'immagine formata da un elemento, tale immagine va trattata come un* oggetto reale *per l'elemento successivo. Quando emerga invece luce* convergente *dall'immagine formata da un elemento, tale immagine va trattata come un* oggetto virtuale *per l'elemento successivo.*

Esempio 7 Due lenti convergenti identiche, di lunghezza focale $f = f' = +15$ cm, sono separate da una distanza d di 6 cm, come mostrato nelle figura 21. Si disponga una sorgente luminosa alla distanza $o = 10$ cm dalla prima lente. Si trovi la posizione dell'immagine finale.

Soluzione Risolviamo dapprima il problema usando il metodo grafico, come è illustrato nella figura 21. I raggi 2 e 3 provenienti dall'oggetto O vengono rifratti dalla prima lente come indicato nel disegno; i loro prolungamenti all'indietro individuano la posizione dell'immagine (virtuale) I prodotta dalla prima lente. Questa immagine svolge poi la funzione di punto oggetto O' rispetto alla seconda lente, cosicché i raggi 2′ e 3′ vanno a intersecarsi nella posizione dell'immagine finale I', che è reale e invertita.

Applicando l'equazione 13 troviamo ora la posizione della prima immagine:

$$\frac{1}{+10\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{+15\text{ cm}},$$

ossia

$$i = -30\text{ cm}.$$

Ciò significa che l'immagine è virtuale e situata a 30 cm dalla lente nella regione V. Trattando adesso questa immagine come un oggetto O' nei confronti della seconda lente, la sua distanza o' da quest'ultima risulta $|i| + d = 30\text{ cm} + 6\text{ cm} = 36$ cm. Va notato che, malgrado I sia un'immagine *virtuale* per la prima lente, O' è un oggetto *reale* per la seconda lente, perché la luce, proveniente dall'oggetto, che incide su di essa è *divergente*.

Di nuovo, dall'equazione 13, abbiamo

$$\frac{1}{+36\text{ cm}} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{+15\text{ cm}},$$

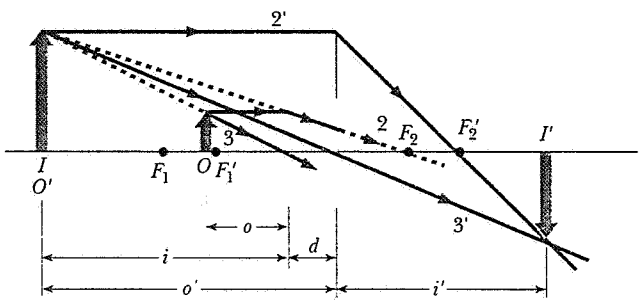


Figura 21 Esempio 7.

ovvero sia

$$i' = +26\text{ cm},$$

che corrisponde a un'immagine reale nella regione R della seconda lente, come indicato nella figura 21.

Esempio 8 Il sistema ottico di figura 22 consiste di due lenti, di lunghezza focale rispettivamente $f = +12$ cm ed $f' = -32$ cm, separati da una distanza $d = 22$ cm. Una sorgente luminosa è situata a 18 cm dalla prima lente. Si individui la posizione dell'immagine finale prodotta dal sistema.

Soluzione Nelle figura 22 viene illustrata la costruzione grafica ottenuta mediante il tracciamento dei raggi. I rappresenta l'immagine reale che verrebbe formata dalla prima lente a distanza i da essa. Dato che la luce che produce questa immagine è convergente sulla seconda lente, consideriamo I rispetto a quest'ultima come un oggetto virtuale O'.

Scrivendo l'equazione 13 per la prima lente, abbiamo

$$\frac{1}{+18\text{ cm}} + \frac{1}{i} = \frac{1}{+12\text{ cm}},$$

ossia

$$i = +36\text{ cm}.$$

L'immagine reale si formerebbe a 36 cm dalla prima lente, come si può valutare dal disegno. La distanza o' dell'oggetto virtuale O' dalla seconda lente è, in modulo, $i - d$, ovvero $36 - 22 = 14$ cm. Poiché O' è un oggetto virtuale, assumiamo che la sua distanza o' sia negativa. In questo caso l'equazione 13 ci dà

$$\frac{1}{-14\text{ cm}} + \frac{1}{i'} = \frac{1}{-32\text{ cm}},$$

ovvero

$$i' = +25\text{ cm}.$$

Si viene cioè a creare l'immagine reale I' nella regione R della seconda lente.

Esempio 9 L'oggetto di figura 22 ha un'altezza h di 2.4 cm. Trovare l'altezza dell'immagine.

Soluzione Dobbiamo calcolare l'ingrandimento trasversale per un sistema composto. Ancora una volta scomponiamo il sistema in due elementi separati, e otterremo l'ingrandimento trasversale totale m_t del sistema composto come il prodotto dei singoli in-

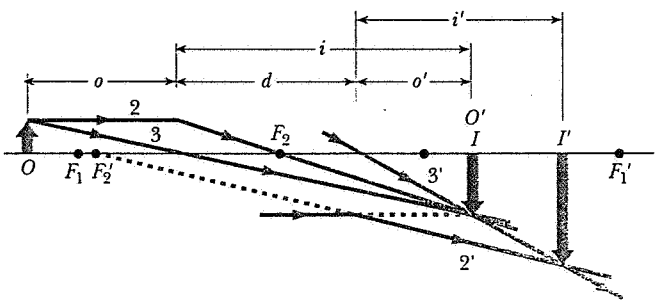


Figura 22 Esempio 8.

grandimenti trasversali m e m' applicati a ciascuna lente:

$$m_t = mm' = \left(-\frac{i}{o}\right)\left(-\frac{i'}{o'}\right) = \left(-\frac{+36\text{ cm}}{+18\text{ cm}}\right)\left(-\frac{+25\text{ cm}}{-14\text{ cm}}\right)$$
$$= -3.57,$$

utilizzando i valori per le distanze dell'oggetto e dell'immagine trovati nell'esempio 8. L'altezza h_f dell'immagine finale è data da

$$h_f = m_t h = (-3.57)(2.4\text{ cm}) = -8.6\text{ cm}.$$

Il segno meno ci conferma che l'immagine finale è invertita rispetto all'oggetto iniziale.

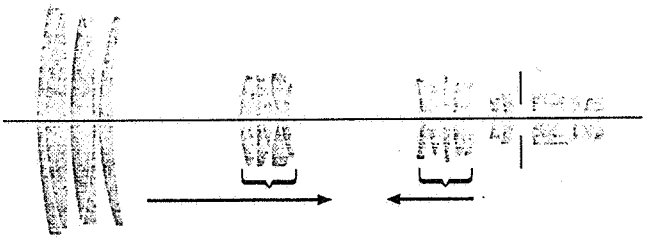


Figura 23 Lenti che compongono un obiettivo *zoom* di una telecamera. I sistemi di lenti nella parte centrale si muovono come indicato. Nessuna delle lenti si può considerare «sottile» e quindi l'approssimazione parassiale non è qui rispettata.

44-5 STRUMENTI OTTICI

L'occhio umano è un organo di notevole efficienza, ma il suo intervallo di sensibilità può essere esteso in molti modi da diversi strumenti ottici quali occhiali, lenti a contatto, lenti di ingrandimento, cineproiettori, macchine fotografiche (comprese le telecamere), microscopi, telescopi, ecc. In molti casi tali dispositivi estendono il nostro campo visivo al di là dell'intervallo visibile; ne sono esempi le macchine fotografiche a raggi infrarossi installate su satelliti e i microscopi a raggi X.

In quasi tutti i casi di raffinati strumenti ottici moderni, le equazioni degli specchi e delle lenti sottili valgono solo in forma approssimata. Nei microscopi comuni da laboratorio le lenti non possono essere considerate senz'altro «sottili». Nella maggior parte degli strumenti ottici le lenti sono composte, cioè formate da diversi elementi.

La figura 23 ad esempio riproduce i componenti di una tipica lente *zoom*, comunemente usata nelle telecamere per ottenere la regolazione della lunghezza focale su un intervallo fino a 20 : 1.

In questo paragrafo descriveremo alcuni dispositivi ottici progettati per ottenere un ingrandimento dell'immagine: apparecchi cioè che agiscono in modo che un oggetto *sembri* più grande di quanto esso appaia all'occhio nudo. L'ingrandimento trasversale non è parametro sufficiente a descrivere in modo completo la dimensione apparente di un'immagine prodotta da un sistema ottico. Esso potrebbe produrre un'immagine sì ingrandita ($|m| > 1$), ma anche allontanarla da noi molto di più di quanto sia l'oggetto, al punto che all'osservatore appare di fatto più piccola. Anche se l'ingrandimento trasversale è superiore all'unità, e quindi la dimensione dell'immagine maggiore di quella dell'oggetto, il risultato complessivo non sarebbe in questo caso quel che l'osservatore chiamerebbe un'immagine *ingrandita*.

La lente di ingrandimento

La figura 24 illustra la formazione dell'immagine da parte dell'occhio umano. La dimensione dell'immagine sulla retina è determinata dall'angolo θ sotteso dall'oggetto. Per oggetti piccoli posti a distanza relativamente elevata dall'occhio, si può approssimare l'angolo θ come

$$\theta \approx \frac{h}{d}, \qquad (23)$$

dove h rappresenta la dimensione dell'oggetto e d è la sua distanza dall'occhio.

Nella figura 24*b* l'osservatore guarda l'oggetto attraverso una lente, che forma un'immagine di dimensione trasversale h' alla distanza d' dall'occhio. La dimensio-

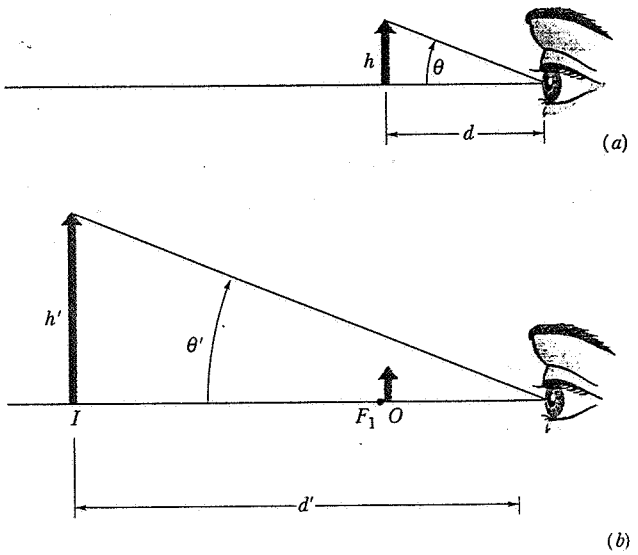


Figura 24 (*a*) Un oggetto di altezza h posto a distanza d dall'occhio sottende un angolo θ. (*b*) Quando l'oggetto è visto attraverso una lente usata come microscopio semplice, l'immagine I' di altezza h' appare a distanza d' e sottende un angolo θ'.

ISBN 88-408-0777-2

ne angolare apparente dell'immagine per l'osservatore è ancora data, sempre per angoli piccoli, da

$$\theta' \approx \frac{h'}{d'}. \tag{24}$$

L'immagine vista attraverso la lente *appare* all'osservatore effettivamente più grande dell'oggetto originale se essa sottende un angolo solido maggiore di quello che sottenderebbe l'oggetto senza l'ausilio della lente. Non è pertanto l'ingrandimento trasversale $m = h'/h$ a misurare la dimensione apparente dell'immagine, ma tale fine è soddisfatto dall'*ingrandimento angolare* m_θ, altrimenti detto *ingrandimento visuale*, definito come

$$m_\theta = \frac{\theta'}{\theta}. \tag{25}$$

Ed effettivamente m_θ rappresenta il rapporto tra le dimensioni delle due immagini, una con la lente e una senza, così come viste dalla retina.

L'occhio umano normale può mettere nitidamente a fuoco l'immagine di un oggetto sulla retina se l'oggetto si trova a qualsiasi distanza compresa tra l'infinito, per esempio le stelle, e un certo punto, chiamato *punto prossimo* P_p, che possiamo considerare posto a circa 25 cm dall'occhio. Se guardiamo un oggetto situato a distanza inferiore al punto prossimo, l'immagine impressa sulla retina risulta offuscata. La posizione del punto prossimo normalmente varia con l'età. Abbiamo tutti sentito parlare di persone che si vantano di non portare occhiali, ma che leggono il giornale a braccia tese; il loro punto prossimo si sta allontanando! Trovate il vostro punto prossimo avvicinando questa pagina ai vostri occhi, uno alla volta, fino a quando raggiungete una distanza alla quale l'immagine comincia a diventare indistinta.

Come termine di confronto per valutare le dimensioni angolari prendiamo l'angolo che un oggetto sottende se viene collocato nel punto prossimo. Cioè

$$\theta = \frac{h}{25\text{ cm}}. \tag{26}$$

Se collochiamo un oggetto prossimo al primo punto focale di una lente convergente, come in figura 24*b*, si forma un'immagine virtuale molto lontana dalla lente. L'ingrandimento trasversale m è pari in modulo a i/o, dove i è la distanza d' dell'immagine. La dimensione trasversale dell'immagine, prendendo di ogni quantità il valore assoluto, è

$$h' = mh = \frac{i}{o}h \tag{27}$$

e la dimensione angolare vale

$$\theta' = \frac{h'}{d'} = \frac{(i/o)h}{i} = \frac{h}{o} \approx \frac{h}{f}, \tag{28}$$

dove l'ultima uguaglianza approssimata è giustificata dal fatto che l'oggetto si trova molto vicino al punto focale. L'ingrandimento angolare risulta quindi

$$m_\theta = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{h/f}{h/25\text{ cm}},$$

ossia

$$m_\theta = \frac{25\text{ cm}}{f}. \tag{29}$$

L'equazione 29 fornisce l'ingrandimento angolare del *microscopio semplice*, quello cioè che fa uso di una sola lente. La comune *lente di ingrandimento*, usata dai collezionisti di francobolli e dagli investigatori alla Sherlock Holmes, non è altro che un microscopio semplice. Per ottenere ingrandimenti angolari elevati, sarebbe desiderabile ridurre f quanto più possibile. Nella pratica un ingrandimento angolare di circa 10 è il massimo che si può accettare prima che fenomeni di aberrazione intervengano a distorcere l'immagine. Strumenti di ingrandimento più complessi, come i microscopi composti di cui discuteremo fra poco, possono raggiungere ingrandimenti angolari notevolmente superiori.

Il microscopio composto

La figura 25 mostra una versione a lenti sottili di un microscopio composto, detto brevemente *microscopio*, usato per osservare piccoli oggetti posti molto vicini all'obiettivo dello strumento. L'oggetto O, di altezza h, è posto appena davanti al primo fuoco F_1 dell'obiettivo, la cui distanza focale è f_{ob}. L'obiettivo forma

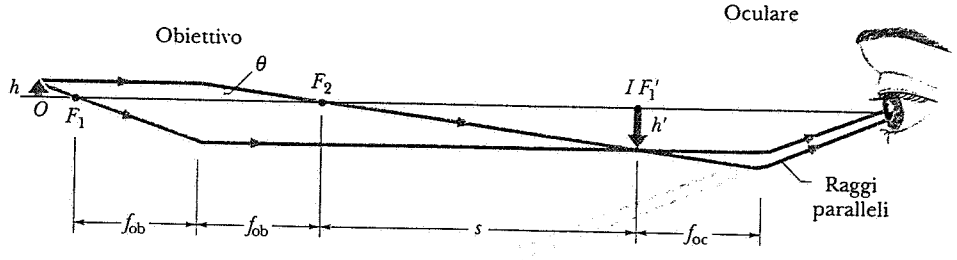


Figura 25 Una versione a lenti sottili di un microscopio composto (il disegno non è in scala).

un'immagine reale e capovolta I di altezza h', il cui ingrandimento trasversale è dato dall'equazione 15, ossia

$$m = -\frac{h'}{h} = -\frac{s \tan\theta}{f_{ob} \tan\theta} = -\frac{s}{f_{ob}}. \qquad (30)$$

Come di consueto il segno negativo indica un'immagine invertita.

La distanza s (chiamata *tiraggio* o *lunghezza meccanica del tubo*) è scelta in modo tale che l'immagine I cada nel primo fuoco F_1' dell'oculare, che si comporta quindi come una lente di ingrandimento, descritta poc'anzi. Nell'occhio entrano raggi paralleli e si forma un'immagine finale I' all'infinito. L'ingrandimento complessivo M è dato dal prodotto dell'ingrandimento trasversale m dell'obiettivo, espresso dall'equazione 30, per l'ingrandimento angolare m_θ dell'oculare, dato dall'equazione 29, ovvero

$$M = m m_\theta = -\frac{s}{f_{ob}} \frac{25\text{ cm}}{f_{oc}}. \qquad (31)$$

Il telescopio rifrattore

Come i microscopi, anche i telescopi esistono in varie forme. Il modello che descriviamo qui è il semplice *telescopio rifrattore,* detto anche *telescopio diottrico* e ancor più propriamente *cannocchiale,* formato da un obiettivo e da un oculare, rappresentati entrambi nella figura 26 con lenti sottili, pur essendo in realtà costituiti, come accade anche per i microscopi, da sistemi composti di lenti.

A prima vista può sembrare che le disposizioni delle lenti per i telescopi e per i microscopi siano simili. Invece, i telescopi sono progettati per osservare oggetti grandi e lontanissimi, quali galassie, stelle e pianeti, mentre i microscopi sono progettati esattamente con lo scopo opposto. Si noti inoltre che nella figura 26 il secondo fuoco dell'obiettivo F_2 coincide con il primo fuoco dell'oculare F_1', mentre nella figura 25 i due fuochi sono separati dal *tiraggio* di lunghezza s.

Nella figura 26 i raggi paralleli provenienti da un oggetto distante colpiscono l'obiettivo formando un angolo θ_{ob} con l'asse del telescopio e formando un'immagine reale e capovolta in corrispondenza del fuoco comune F_2, F_1'. Questa immagine funge da oggetto per l'oculare e si forma una immagine virtuale (sempre invertita) all'infinito. I raggi che definiscono l'immagine formano con l'asse del telescopio un angolo θ_{oc}.

L'ingrandimento angolare del telescopio m_θ è dato da θ_{oc}/θ_{ob}. Per raggi parassiali (raggi cioè prossimi all'asse) possiamo scrivere $\theta_{ob} = h'/f_{ob}$ e $\theta_{oc} = h'/f_{oc}$, e cioè

$$m_\theta = -\frac{f_{ob}}{f_{oc}}, \qquad (32)$$

ove il segno meno indica che l'immagine finale è invertita.

L'ingrandimento è solo uno dei fattori di progetto di un telescopio astronomico e si ottiene abbastanza facilmente. La luminosità dell'immagine viene invece determinata dal *potere di raccolta della luce,* parametro molto importante quando si osservano oggetti deboli quali galassie lontane, che si migliora aumentando il più possibile il diametro dell'obiettivo. È importante parametro inoltre il *campo visivo:* uno strumento progettato per osservazioni galattiche (campo visivo stretto) deve essere piuttosto diverso da uno progettato per l'osservazione di meteoriti (campo visivo largo). Il progettista di telescopi deve anche fari i conti con le aberrazioni delle lenti e degli specchi, che comprendono *l'aberrazione sferica* (lenti e specchi con superfici rigorosamente sferiche non formano immagini nitide) e *l'aberrazione cromatica* (per le lenti semplici l'indice di rifrazione e quindi la distanza focale variano con la lunghezza d'onda e si formano pertanto immagini evanescenti con colori innaturali). Gli effetti di diffrazione (par. 46-4) limitano la capacità di qualsiasi strumento ottico di distinguere tra due oggetti (stelle ad esempio), la cui separazione angolare è molto piccola.

Nella costruzione di telescopi rifrattori di grande diametro (atti a incrementare la luminosità), è giocoforza ispessire la lente, ciò che peggiora le distorsioni e le aberrazioni create dalla lente stessa. I rifrattori più grandi costruiti alla fine del 19° secolo hanno lenti del diametro di circa 1 m. I telescopi riflettori, nei quali l'obiettivo è costituito da uno specchio anziché una lente, non soffrono di questo problema, giacché la luce

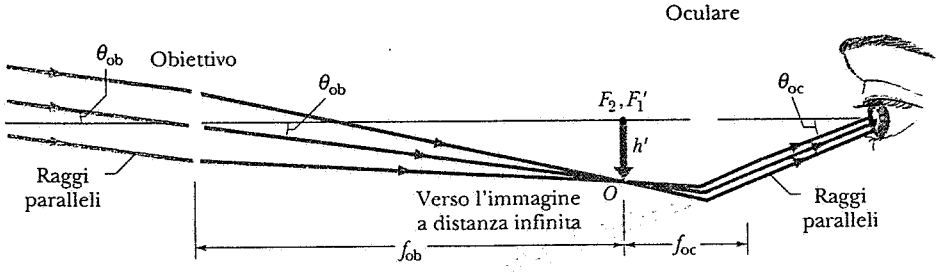


Figura 26 Una versione a lenti sottili di un telescopio rifrattore (il disegno non è in scala).

ISBN 88-408-0777-2

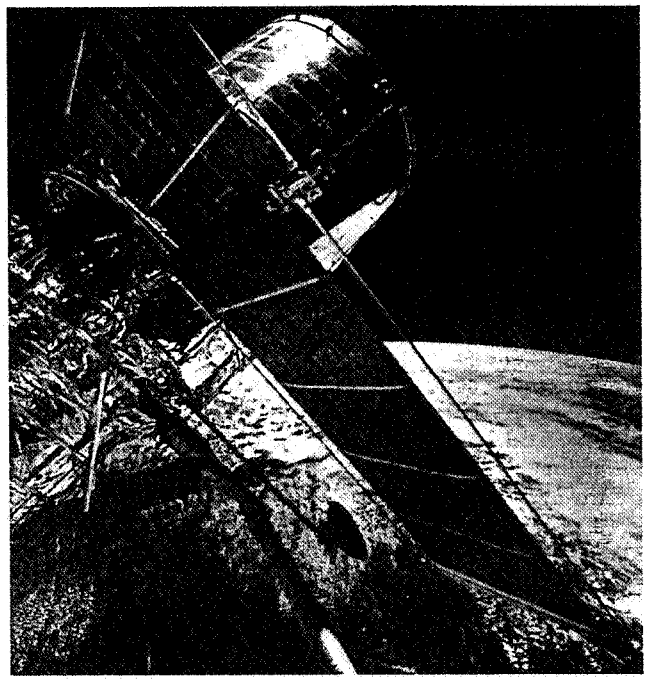


Figura 27 Il telescopio spaziale Hubble.

viene riflessa sulla superficie frontale dello specchio. I più grandi telescopi riflettori a specchio singolo hanno diametri attorno a 5-6 m, e quindi posseggono una luminosità 25-36 volte quella dei migliori rifrattori. Si possono realizzare telescopi riflettori ancora più grandi combinando più specchi separati disposti a formare un'unica immagine.

I telescopi ottici installati al suolo sono penalizzati anche dalla distorsione atmosferica nel rendere immagini nitide; la turbolenza naturale dell'atmosfera deforma i fronti d'onda (quasi) piani che raggiungono la Terra da corpi lontani. Si è ottenuto un rimedio a questo problema attraverso lo sviluppo di *ottiche adattabili*; mediante sensori in grado di rilevare la distorsione atmosferica, si può modificare la forma di uno specchio flessibile per compensare la distorsione e ottenere così immagini più nitide. Un altro metodo consiste nell'eliminare del tutto gli effetti atmosferici sistemando il telescopio al di fuori dell'atmosfera. La figura 27 mostra il telescopio spaziale Hubble, un telescopio riflettore lanciato in orbita terrestre da una navicella spaziale nel 1990.

DOMANDE

1. In molti autobus urbani al di sopra della porta è installato uno specchio convesso ben visibile dal guidatore. Perché non uno specchio piano o concavo?
2. I dentisti fanno uso di un piccolo specchio fissato a un lungo manico per esaminare i denti. Tale specchietto è concavo, convesso o piano, e perché?
3. In quali condizioni uno specchio sferico, che può essere concavo o convesso, formerà (*a*) un'immagine reale, (*b*) un'immagine capovolta e (*c*) un'immagine più piccola dell'oggetto?
4. Si può proiettare su uno schermo un'immagine virtuale?
5. State osservando un cane attraverso il vetro di una finestra. Dove si trova l'immagine del cane? È reale o virtuale? È diritta o capovolta? Quant'è l'ingrandimento? (*Suggerimento*: Si pensi alla lastra di vetro come a un caso limite di lente sottile il cui raggio di curvatura tenda all'infinito.)
6. In alcuni paesi gli specchietti laterali delle auto portano l'avvertenza: "Gli oggetti riflessi nello specchietto sono più vicini di quanto appaiano." A causa di quale caratteristica dello specchio si rende necessario questo avvertimento? Per giustificare questo inconveniente quale vantaggio si trae da uno specchietto siffatto? Le auto viste nello specchio sembrano muoversi più veloci o più lente rispetto a come apparirebbero in uno specchio piano?
7. Avrete visto alla televisione una corsa di ciclismo, in una inquadratura ripresa da una posizione lontana, un po' alta, lungo l'asse della strada. I ciclisti, per raggiungere un riferimento visibile come il traguardo, impiegano per percorrere la distanza che li separa dal traguardo molto più tempo di quanto si sarebbe portati a credere giudicando a occhio, dimostrando così che le distanze nella ripresa televisiva appaiono più corte della realtà. Come mai due immagini viste attraverso un teleobiettivo sembrano così ravvicinate tra di loro?
8. Una lente sottile non simmetrica forma un'immagine di un oggetto puntiforme posto sul suo asse. L'immagine si sposta se si capovolge la lente?
9. Perché la lente ha due punti focali e lo specchio uno solo?
10. In quali condizioni una lente sottile, che può essere convergente o divergente, formerà (*a*) un'immagine reale, (*b*) un'immagine capovolta e (*c*) un'immagine più piccola dell'oggetto?
11. Un sommozzatore vuole usare un sacchetto di plastica pieno d'aria come lente convergente per uso subacqueo. Disegnare un'opportuna sezione trasversale del sacchetto.
12. Riferendoci alla figura 17*a*, si può osservare che tutti i raggi che si originano sullo stesso fronte dell'onda incidente raggiungono il punto immagine percorrendo ugual cammino ottico. Discutere anche in relazione al principio di Fermat (cap. 43).
13. Quale significato si può dare alla funzione rappresentata nelle figure 15*a* e 15*b* nell'origine delle coordinate?
14. Perché l'aberrazione cromatica si manifesta nelle lenti semplici e non negli specchi?
15. Si considerino i vari tipi di aberrazione nelle lenti. È possibile in linea di principio realizzare una lente priva di ogni aberrazione (per esempio levigando la superficie) per focalizzare luce monocromatica?
16. Si abbiano uno specchio concavo e una lente convergente dotati della stessa lunghezza focale in aria. Se vengono immersi nell'acqua, hanno ancora la stessa lunghezza focale? Se no, quale dei due ha lunghezza focale maggiore?
17. In quali condizioni una lente sottile può avere un ingrandimento trasversale (*a*) di -1 e (*b*) di $+1$?
18. Come si confronta la lunghezza focale di una lente sottile di vetro per la luce azzurra con la sua lunghezza focale per la lu-

ce rossa, nel caso che la lente sia (*a*) divergente o (*b*) convergente?

19. La distanza focale di una lente dipende dal mezzo nel quale è immersa la lente? È possibile che una stessa lente si comporti come lente convergente in un mezzo e divergente in un altro?
20. Sono esatte le seguenti affermazioni per una lente che si trovi immersa in aria? (*a*) Una lente più spessa al centro che ai bordi è convergente per luce parallela. (*b*) Una lente più spessa ai bordi che al centro è divergente per luce parallela.
21. In quali condizioni l'ingrandimento trasversale ($m = -i/o$) per lenti e specchi sarebbe infinito? Ha un significato pratico tale condizione?
22. La distanza focale di uno specchio sferico dipende dalle caratteristiche del mezzo in cui è immerso? E di una lente sottile? Qual è la differenza, se esiste?
23. Perché l'ingrandimento di una lente è definito in termini di angoli anziché in termini di rapporto tra le dimensioni dell'immagine e dell'oggetto?
24. I comuni occhiali non ingrandiscono, mentre lo fa una lente di ingrandimento. Qual è allora la funzione degli occhiali?
25. Il *numero f*, detto anche *rapporto di apertura*, di un obiettivo di macchina fotografica (vedasi il Problema 39) è il rapporto tra la distanza focale e l'apertura (diametro efficace). Perché è utile conoscerlo in fotografia? Come si può modificare il numero *f* di una macchina fotografica? Come dipende il tempo di esposizione dal numero *f*?
26. Una lente di breve lunghezza focale permette di vedere dettagli più fini rispetto a una lente di maggior lunghezza focale. Spiegare.
27. Stimate la distanza massima a cui un occhio umano può leggere la testata di un giornale.
28. Ha qualche importanza che i seguenti strumenti producano immagini diritte o capovolte: (*a*) telescopio astronomico, (*b*) microscopio composto, (*c*) lente di ingrandimento, (*d*) macchina fotografica, compresa la telecamera, (*e*) proiettore, compreso un proiettore di diapositive? Cosa si può dire sulle immagini reali o virtuali?
29. L'occhio umano produce normalmente sulla retina un'immagine reale ma capovolta. (*a*) Perché allora non vediamo capovolti persone e alberi? (*b*) Non è così naturalmente, ma supponiamo di portare occhiali speciali per cui ciò accada davvero. In tal caso, se capovolgete questo libro potete leggere queste righe con la stessa facilità?
30. Quale dei seguenti elementi – una lente convergente, una lente divergente, uno specchio concavo, uno specchio convesso, uno specchio piano – viene usato: (*a*) Come lente d'ingrandimento? (*b*) Come riflettore di una lampada per proiettore di diapositive? (*c*) Come obiettivo per un telescopio riflettore? (*d*) In un caleidoscopio? (*e*) Come oculare in un binocolo da teatro? (*f*) Per ottenere un'ampia retrovisione dal posto di guida di un'automobile?
31. Che proprietà deve possedere una lente per avere un buon potere di ignizione (la capacità di incendiare rapidamente un pezzo di carta o dei ramoscelli esponendoli ai raggi del sole focalizzati)?
32. Piggy è un personaggio del racconto di William Golding *Lord of the Flies*. Egli si serve dei suoi occhiali per focalizzare i raggi del sole e accendere un fuoco. Più tardi dei ragazzi lo maltrattano e gli rompono gli occhiali. Piggy non riesce più a trovarli attorno a sé perché è miope. Trovare il punto debole di questo racconto. (*Boston Globe*, 17 Dic 1985, Lettere.)
33. Si spieghi la funzione dell'obiettivo in un microscopio. Perché si rende necessario un obiettivo? Perché non usare semplicemente una lente di ingrandimento molto potente?
34. Perché gli astronomi usano dei telescopi ottici? Dopotutto le stelle sono così lontane che appaiono comunque come dei punti di luce, senza che se ne riescano egualmente a distinguere i dettagli.
35. Un orologiaio usa occhiali divergenti per guidare, legge senza occhiali e inforca occhiali convergenti quando è all'opera per il suo mestiere. Questo orologiaio è miope o presbite? Spiegare (vedi problema 38).
36. Perché tutti i più grandi telescopi astronomici moderni sono riflettori piuttosto che rifrattori? Si pensi ai problemi di montaggio meccanico per le lenti e per gli specchi, alla difficoltà di modellare (cioè dare forma corretta) le varie superfici ottiche necessarie, al problema delle piccole imperfezioni nei blocchi di vetro grezzo utilizzati per ricavare le lenti e gli specchi, e via di seguito.
37. Si spieghi perché (*a*) si usa talvolta luce ultravioletta per illuminare gli oggetti al microscopio, (*b*) per fotografare una stella vista attraverso un telescopio si usano talvolta filtri azzurri, (*c*) per ottenere immagini più nitide nelle fotografie di un panorama si usano spesso pellicole all'infrarosso.

PROBLEMI

Paragrafo 44-1 Specchi sferici

1. Uno specchio concavo per radersi la barba ha un raggio di curvatura di 35 cm. È collocato in modo che l'immagine del viso abbia dimensione 2.7 volte maggiore della realtà. A che distanza si trova dal viso?
2. Si disegni la figura 28 su di un foglio di carta grande e si traccino con molta cura i raggi riflessi. Si forma un punto focale? Discutere.
3. Nella tabella della pagina seguente riempire le colonne che si riferiscono a uno specchio o sferico o piano e a un oggetto reale, controllando col metodo grafico i risultati. Le distanze sono in centimetri; se un numero non è preceduto né dal segno meno né dal segno più, trovare il segno corretto.

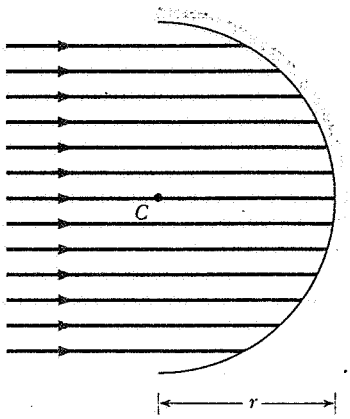


Figura 28 Problema 2.

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA PER IL PROBLEMA 3

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
Tipo	*Concavo*						*Convesso*	
f (cm)	20		+20			20		
r (cm)					−40		40	
i (cm)					−10		4.0	
o (cm)	+10	+10	+30	+60				+24
m		+1.0		−0.50		+0.10		0.50
Immagine reale?		No						
Immagine diritta?								No

4. (*a*) Un punto luminoso si muove a velocità v_o verso uno specchio sferico di raggio r, percorrendo il suo asse. Si dimostri che la velocità v_i alla quale si muove l'immagine di questo punto oggetto è data da

$$v_i = -\left(\frac{r}{2o - r}\right)^2 v_o.$$

(*b*) Si supponga che lo specchio sia concavo, con $r = 15$ cm e che $v_o = 5$ cm/s. Si trovi la velocità dell'immagine quando l'oggetto è ben lontano dal punto focale ($o = 75$ cm). (*c*) Quando è vicino al punto focale ($o = 7.7$ cm). (*d*) Quando è prossimo allo specchio ($o = 0.15$ cm).

5. Un piccolo oggetto di lunghezza L giace sull'asse di uno specchio sferico, a distanza o dallo specchio. (*a*) Dimostrare che la lunghezza L' dell'immagine è

$$L' = L\left(\frac{f}{o - f}\right)^2.$$

(*b*) Dimostrare che *l'ingrandimento longitudinale* m' ($= L'/L$) è uguale a m^2 dove m è l'ingrandimento trasversale.

6. Ripetere il procedimento che porta all'equazione 1 utilizzando la configurazione geometrica della figura 8 per lo specchio concavo e dimostrare che l'equazione 1 è valida solo nel caso che i ed r siano entrambi negativi.

Paragrafo 44-2 Superfici rifrangenti sferiche

7. La figura 29 mostra la sezione trasversale di un cilindro cavo di vetro di raggio interno r, raggio esterno R e indice di rifrazione n. (*a*) Si verifichi che il raggio ABC disegnato definisce il raggio apparente interno r^*, così come visto dall'esterno del cilindro. (*b*) Si dimostri che $r^* = rn$ e non dipende da R.

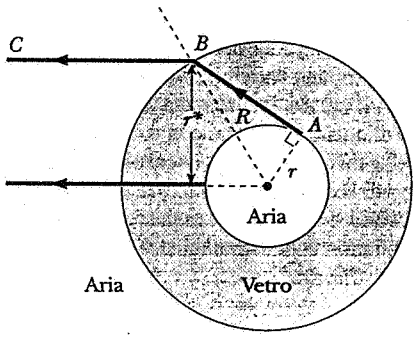


Figura 29 Problema 7.

8. Completare la tabella in basso, nella quale ciascuna colonna si riferisce a una superficie sferica che separa due mezzi con indici di rifrazione diversi. Le distanze sono misurate in centimetri e gli oggetti sono sempre reali. Illustrare ciascun caso con una figura costruendo graficamente i raggi opportuni, nell'ipotesi che l'oggetto sia puntiforme.

9. Un fascio di luce parallela emessa da un laser incide su una sfera solida trasparente di indice di rifrazione n, come si vede nella figura 30. (*a*) Dimostrare che il fascio non può essere focalizzato sul fondo della sfera, a meno che la larghezza del fascio non sia piccola rispetto al raggio della sfera. (*b*) Ammesso che la condizione descritta in (*a*) sia soddisfatta, quanto deve valere l'indice di rifrazione della sfera? (*c*) E che indice di rifrazione deve possedere la sfera affinché il fascio venga focalizzato al centro, sempre che ciò sia possibile?

10. Su una sfera solida di vetro incide normalmente uno stretto fascio di luce provenendo da sinistra. Sapendo che il raggio

TABELLA PER IL PROBLEMA 8

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
n_1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	1.5	1.5
n_2	1.5	1.5	1.5		1.0	1.0	1.0	
o (cm)	+10	+10		+20	+10		+70	+100
i (cm)		−13	+600	−20	−6.0	−7.5		+600
r (cm)	+30		+30	−20		−30	+30	−30
Immagine reale?								

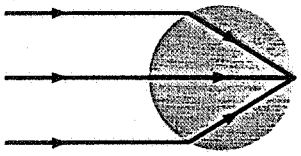


Figura 30 Problema 9.

della sfera è R e che il suo indice di rifrazione è $n < 2$, si trovi quanto dista l'immagine dall'estremità destra della sfera.

Paragrafo 44-3 Lenti sottili

11. Alla sinistra di una lente divergente sottile, avente lunghezza focale di -30 cm, è situato un oggetto distante 20 cm. Si trovi la posizione dell'immagine sia mediante calcolo algebrico sia tracciando i raggi su un disegno.

12. Si debba costruire una lente biconvessa con vetro di indice di rifrazione 1.5. Il raggio di curvatura di una superficie deve essere doppio di quello dell'altra, e la distanza focale deve essere 60 mm. Che misura debbono avere i raggi?

13. Si supponga di focalizzare su uno schermo un'immagine del sole adoperando una lente di lunghezza focale pari a 27 cm. Si calcoli il diametro dell'immagine. (Per i dati necessari sul Sole si consulti l'appendice C.)

14. Una lente è costruita con un vetro avente indice di rifrazione 1.5. Una faccia della lente è piana e l'altra è convessa con raggio di curvatura 20 cm. (*a*) Trovare la distanza focale della lente. (*b*) Se si mette un oggetto alla sinistra della lente a 40 cm di distanza, dove risulterà l'immagine?

15. Dimostrare che la distanza focale f di una lente sottile con indice di rifrazione n immersa in un mezzo dotato di indice di rifrazione n', è data da

$$\frac{1}{f} = \frac{n - n'}{n'}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

16. Un oggetto si trova in uno dei centri di curvatura di una lente biconcava, i cui raggi di curvatura sono uguali in modulo. (*a*) Trovare la posizione dell'immagine in funzione del raggio di curvatura r e dell'indice di rifrazione n del vetro. (*b*) Descrivere la natura dell'immagine. (*c*) Verificare graficamente il risultato.

17. Avete a disposizione dischi piatti di vetro ($n = 1.5$) e una molatrice che può essere impostata per molare con raggio di curvatura di 40 oppure 60 cm. Dovete preparare una serie di sei lenti come quelle disegnate nella figura 31. Quale risulterà la lunghezza focale di ciascuna lente? (*Nota*: quando potete scegliere tra due raggi di curvatura, prendete il minore.)

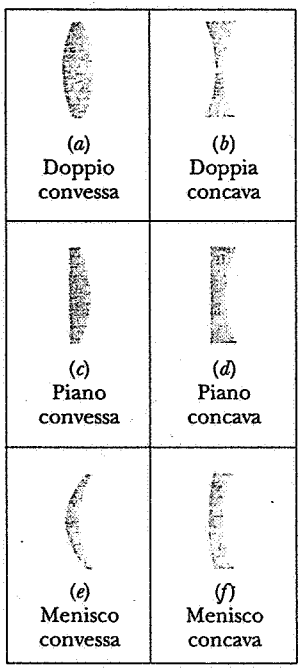


Figura 31 Problema 17.

18. Completare in tutte le parti possibili la tabella in basso, ciascuna colonna della quale si riferisce a una lente sottile. Segnare con un croce laddove il calcolo non è possibile. Le distanze sono in cm. Eccetto che nella riga n, i numeri che non sono preceduti da alcun segno richiedono che questo venga determinato. Illustrare ogni situazione con un disegno tracciando i raggi opportuni e supponendo che l'oggetto sia sempre reale.

TABELLA PER IL PROBLEMA 18

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
Tipo	*Convergente*								
f (cm)	10	+10	10	10					
r_1 (cm)					+30	−30	−30		
r_2 (cm)					−30	+30	−60		
i (cm)									
o (cm)	+20	+5.0	+5.0	+5.0	+10	+10	+10	+10	+10
n					1.5	1.5	1.5		
m			> 1	< 1				0.50	0.50
Immagine reale?									Sì
Immagine diritta?								Sì	

ISBN 88-408-0777-2

19. L'equazione

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

è chiamata la forma di *Gauss* della formula delle lenti sottili. Un'altra forma di questa equazione, quella di *Newton*, si ottiene considerando la distanza x dell'oggetto dal primo fuoco e la distanza x' dell'immagine dal secondo fuoco. Dimostrare che

$$xx' = f^2.$$

20. Riprodurre la figura 15 facendo uso dell'equazione 13. Come si può stabilire se (*a*) la lente è divergente o convergente? (*b*) l'immagine è reale o virtuale? (*c*) l'oggetto è reale o virtuale? (*d*) l'ingrandimento trasversale è maggiore o minore di 1?

21. Dimostrare l'esattezza dell'equazione 16.

22. Una freccia illuminata forma un'immagine di sé reale e capovolta alla distanza $d = 40.0$ cm misurata sull'asse ottico di una lente: si veda la figura 32. L'altezza di questa immagine è esattamente la metà di quella dell'oggetto. (*a*) Che tipo di lente va usata per produrre una tale immagine? (*b*) A che distanza dall'oggetto va collocata la lente? (*c*) Quant'è la lunghezza focale della lente?

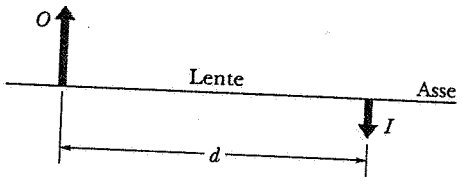


Figura 32 Problema 22.

23. Una diapositiva illuminata è montata a 44 cm di distanza da uno schermo. Se vogliamo che una lente di lunghezza focale di 11 cm metta a fuoco l'immagine sullo schermo, a che distanza dalla diapositiva essa va posta?

24. Dimostrare che la distanza tra un oggetto reale e la sua immagine reale prodotta da una lente sottile convergente è sempre maggiore o uguale a quattro volte la lunghezza focale della lente.

25. Un oggetto luminoso e uno schermo si trovano a distanza D l'uno dall'altro. (*a*) Dimostrare che una lente di distanza focale f forma sullo schermo un'immagine reale solo se posta in due posizioni distanti fra di loro

$$d = \sqrt{D(D-4f)}.$$

(*b*) Dimostrare che il rapporto delle dimensioni delle immagini formate in corrispondenza delle due posizioni della lente è

$$\left(\frac{D-d}{D+d}\right)^2.$$

Paragrafo 44-4 Sistemi ottici composti

26. Nella figura 33 sono illustrate due lenti convergenti di lunghezza focale f_1 e f_2, tra le quali intercorre una distanza pari a $f_1 + f_2$. Una siffatta disposizione viene chiamata *espansore del fascio* ed è spesso utilizzata per aumentare il diametro dei fasci di luce laser. (*a*) Se chiamiamo W_1 la larghezza del fascio incidente, si dimostri che la larghezza del fascio in uscita è $W_2 = (f_2/f_1)W_1$. (*b*) Si descriva come sia possibile ottenere un espansore del fascio anche combinando una lente convergente e una divergente. I raggi che incidono paralleli all'asse dovrebbero emergere ancora paralleli all'asse. (*c*) Si calcoli il rapporto tra l'intensità di un fascio emergente da un espansore del fascio e l'intensità originaria emessa dal laser.

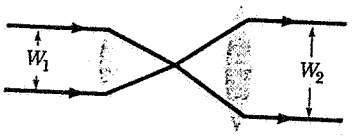


Figura 33 Problema 26.

27. Una lente convergente dotata di lunghezza focale di + 20 cm è collocata, distante 10 cm, alla sinistra di una lente divergente che presenta lunghezza focale di −15 cm. Se si pone un oggetto reale alla distanza di 40 cm a sinistra della prima lente, si descrivano la posizione e le caratteristiche dell'immagine prodotta.

28. Una sottile lastra piana di vetro semiriflettente è a distanza b da uno specchio convesso. Una sorgente di luce puntiforme S è posta davanti alla lastra (fig. 34) a distanza a in modo che la sua immagine nella lastra parzialmente riflettente coincida con l'immagine data dallo specchio. Se $b = 7.50$ cm e la distanza focale dello specchio è $f = -28.2$ cm, calcolare a e disegnare lo schema dei raggi.

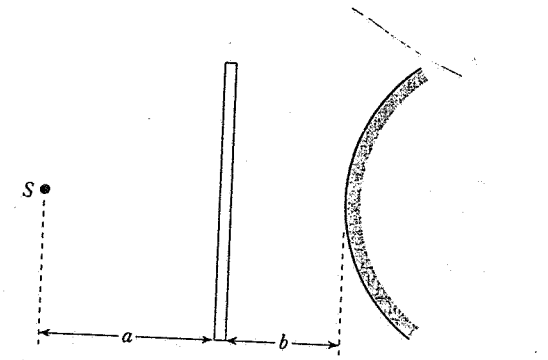


Figura 34 Problema 28.

29. (*a*) Dimostrare che una lente convergente sottile di distanza focale f seguita da una lente divergente sottile di distanza focale $-f$ fa convergere un fascio di raggi paralleli in un fuoco posto al di là della seconda lente purché la distanza L tra le lenti sia tale che $0 < L < f$. (*b*) È ancora valida questa proprietà se si scambiano di posto le due lenti? (*c*) Cosa succede per $L = 0$?

30. Di fronte a una lente convergente, a una distanza doppia della sua distanza focale f_1, si trova un oggetto disposto perpendicolarmente all'asse della lente. Dall'altra parte della lente, è posto uno specchio convergente di lunghezza focale f_2 a una distanza dalla lente pari a $2(f_1 + f_2)$: si veda la figura 35. (*a*) Trovare la posizione, la natura e l'ingrandimento dell'immagine finale, così come vista da un osservatore che guardi lo specchio attraverso la lente. (*b*) Tracciare i raggi opportuni per la costruzione grafica.

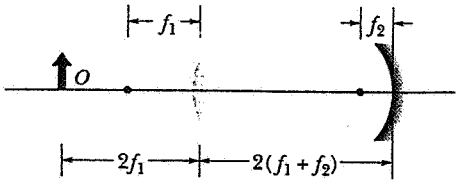


Figura 35 Problema 30.

31. Un oggetto è posto a 1.12 m davanti a una lente convergente di distanza focale 58.0 cm, la quale a sua volta si trova 1.97 m davanti a uno specchio piano. (*a*) A quale distanza dalla lente si trova l'immagine finale come appare a un occhio che guarda lo specchio attraverso la lente? (*b*) L'immagine finale è reale o virtuale? (*c*) L'immagine finale è diritta o capovolta? (*d*) Qual è l'ingrandimento trasversale?
32. Un oggetto si trova alla sinistra di una lente a 20.0 cm di distanza da essa. La distanza focale della lente è di + 10.0 cm. Una seconda lente di distanza focale uguale a + 12.5 cm è posta a destra della prima lente, a 30.0 cm di distanza da quest'ultima. (*a*) Usando come oggetto per la seconda lente l'immagine formata dalla prima, trovare la posizione e la dimensione relativa dell'immagine finale. (*b*) Verificare le conclusioni disegnando in scala il sistema di lenti ed eseguendo la costruzione grafica. (*c*) Descrivere l'immagine finale.
33. Due lenti sottili di distanze focali f_1 ed f_2 si trovano a contatto. Dimostrare che equivalgono a un'unica lente sottile di distanza focale

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}.$$

34. Il *potere diottrico* P di una lente, detto anche *convergenza*, è definito come $P = 1/f$, in cui f è la lunghezza focale della lente. L'unità di convergenza è la diottria, essendo 1 diottria = 1 m^{-1}. (a) In cosa consiste la ragionevolezza di questa definizione per descrivere la capacità di ingrandimento di una lente? (b) Si dimostri che la convergenza complessiva di due lenti in contatto è data da $P = P_1 + P_2$, dove P_1 e P_2 rappresentano le singole vergenze delle due lenti. (*Suggerimento*: Si esamini il problema 33.)

Paragrafo 44-5 Strumenti ottici

35. L'ingrandimento angolare di un cannocchiale in posizione normale è 36, e il diametro dell'obiettivo è di 72 mm. Che diametro minimo deve possedere l'oculare per poter raccogliere tutto il fascio che entra nell'obiettivo proveniente da una sorgente puntiforme lontana nella direzione dell'asse dello strumento?
36. Un microscopio del tipo illustrato in figura 25 ha una distanza focale di 4.2 cm per l'obiettivo e di 7.7 cm per l'oculare. La distanza tra le due lenti è di 25 cm. (*a*) Qual è la distanza s nella figura 25? (*b*) Per riprodurre le condizioni della figura 25 a quale distanza al di là di F_1 dovrebbe essere posto l'oggetto? (*c*) Quanto vale l'ingrandimento trasversale m dell'obiettivo? (*d*) Quant'è l'ingrandimento angolare m_θ dell'oculare? (*e*) Qual è l'ingrandimento complessivo M del microscopio?
37. La figura 36*a* illustra il funzionamento di un occhio umano normale. I raggi paralleli, entrando in un occhio rilassato che fissa l'infinito, formano sulla retina un'immagine reale e capovolta. L'occhio si comporta quindi come una lente convergente. La maggior parte dell'effetto rifrangente avviene sulla superficie esterna dell'occhio, la *cornea*. Si supponga che l'occhio abbia una distanza focale f di 2.50 cm. Nella figura 36*b* l'oggetto viene avvicinato a una distanza $o = 36.0$ cm dall'occhio. Per poter formare un'immagine sulla retina la distanza focale dell'occhio deve essere ridotta a f', cosa che si realizza per azione dei muscoli cigliari che modificano la forma del cristallino (la lente in figura) e quindi la distanza focale reale dell'occhio. (*a*) Trovare f' dai dati riportati. (*b*) I raggi di curvatura reali del cristallino devono aumentare o diminuire nel passaggio dalla situazione di figura 36*a* a quella di figura 36*b*? (Nel disegno la struttura dell'occhio è solo schematizzata e la figura 36*b* non è in scala.)
38. Un occhio *presbite* focalizza i raggi paralleli in modo che l'immagine si forma dietro la retina, come si vede nella figura 37*a*. Un occhio *miope* invece forma l'immagine davanti alla retina, come nella figura 37*b*. (*a*) Come progettereste le lenti

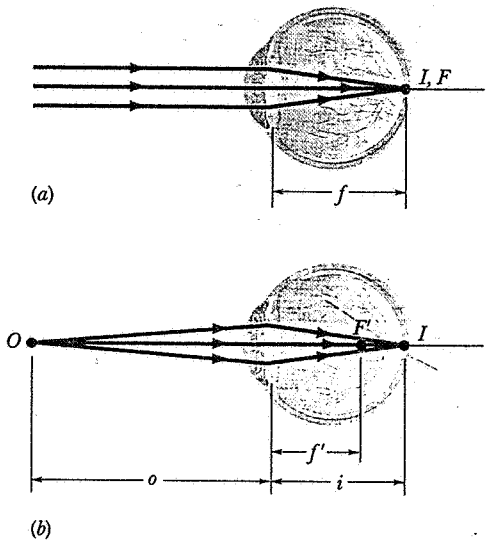


Figura 36 Problema 37.

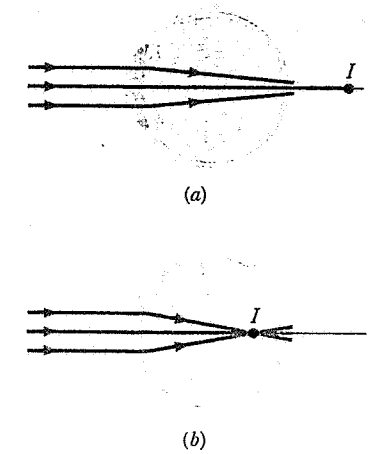


Figura 37 Problema 38.

ISBN 88-408-0777-2

correttive per i due tipi di difetti? Tracciate nei due casi un diagramma dei raggi. (*b*) Chi necessita di occhiali solo per leggere è miope o presbite? Che funzione hanno le lenti bifocali, in cui la parte superiore e quella inferiore hanno lunghezze focali diverse?

39. La figura 38 mostra uno schema di macchina fotografica messa a fuoco su un oggetto posto all'infinito. Sulla pellicola si forma un'immagine I reale e capovolta e la distanza dell'immagine i è uguale alla distanza focale (fissa) del sistema di lenti f (pari ad esempio a 5.0 cm). Nella figura 38*b* l'oggetto O è più vicino alla macchina, per esempio a una distanza o di 100 cm. Per mettere a fuoco un'immagine I sulla pellicola dobbiamo spostare la lente verso l'esterno della macchina (perché?). (*a*) Trovare la misura di i' della figura 38b. (*b*) Di quanto si deve spostare la lente? Si noti che la macchina fotografica differisce sotto questo aspetto dall'occhio umano (si veda il problema 37): mentre nella macchina f resta costante e la distanza dell'immagine i viene regolata spostando la lente, nell'occhio resta costante la distanza dell'immagine i e viene regolata la distanza focale f deformando la lente. Si confrontino con attenzione le figure 36 e 38.

40. La lunghezza focale di una piccola macchina fotografica è 50 mm e l'intervallo di messa a fuoco si estende da 1.2 m all'infinito. Si calcoli quant'è lo spostamento necessario della lente rispetto alla pellicola.

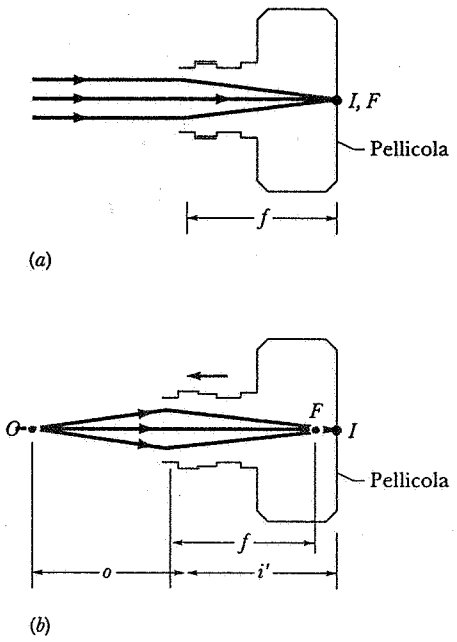


Figura 38 Problema 39.

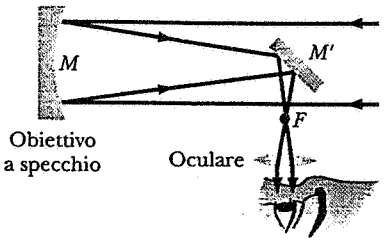


Figura 39 Problema 42.

41. In un microscopio composto si ha un oggetto posto a 12.0 mm di distanza dall'obiettivo. La distanza tra le lenti è di 285 mm e l'immagine intermedia è situata a 48.0 mm dall'oculare. Che ingrandimento si realizza?

42. Isacco Newton, convinto (erroneamente, come poi risultò) che l'aberrazione cromatica fosse una proprietà tipica dei telescopi rifrattori (o diottrici), inventò il telescopio riflettore illustrato a sommi capi nella figura 39. Egli presentò il suo secondo modello di questo telescopio, che ha un potere di ingrandimento pari a 38, alla Royal Society, che lo conserva tuttora. Nella figura 39 la luce incide quasi parallelamente all'asse del telescopio sullo specchio obiettivo M e, dopo una riflessione sullo specchietto M' (la figura non è in scala), forma un immagine reale e capovolta nel piano focale passante per F. Tale immagine viene poi osservata con un oculare. (*a*) Dimostrare che l'ingrandimento angolare m_θ è sempre dato dall'equazione 32, ossia

$$m_\theta = -f_{ob}/f_{oc}$$

dove f_{ob} è la distanza focale dello specchio obiettivo ed f_{oc} quella dell'oculare. (*b*) Lo specchio da 5 m del telescopio riflettore di Monte Palomar in California ha una distanza focale di 16.8 m. Valutare le dimensioni dell'immagine che si forma nel piano focale di questo specchio quando l'oggetto è una barra lunga 1 m distante 2.0 km. Si suppongano raggi incidenti paralleli. (*c*) Lo specchio di un altro telescopio astronomico riflettore ha un raggio di curvatura equivalente («equivalente» perché tali specchi sono sagomati in forma parabolica anziché sferica per eliminare i difetti di aberrazione sferica) di 10 m. Quale deve essere la distanza focale dell'oculare per poter dare un ingrandimento angolare di 200?

43. Un fotografo è appostato a 44.5 m di distanza da un binario ferroviario e vi punta l'obiettivo perpendicolarmente. Quando passa un treno alla velocità di 135 km/h viene scattata la fotografia. Sapendo che la macchina ha una lunghezza focale di 3.6 cm, si trovi il tempo massimo di esposizione affinché la sbavatura dell'immagine non ecceda 0.75 mm.

Capitolo 45

INTERFERENZA

Nei due capitoli precedenti abbiamo trattato l'ottica geometrica, cioè quell'ambito dell'ottica in cui la luce incontra ostacoli o aperture (lenti, ad esempio) di dimensioni molto maggiori della sua lunghezza d'onda. Potrebbe essere utile rivedere il paragrafo 43-1 in cui abbiamo delimitato il campo di validità dell'ottica geometrica.

In questo e nel prossimo capitolo esamineremo i fenomeni di interferenza *e di* diffrazione, *che si generano quando la luce incontra ostacoli o aperture di dimensioni confrontabili con la sua lunghezza d'onda. È questo invece il dominio dell'*ottica fisica, *altrimenti detta* ottica ondulatoria, *che differisce dall'ottica geometrica perché la prima comporta effetti che dipendono dalla natura ondulatoria della luce. E anzi sono proprio gli esperimenti di interferenza e diffrazione a provare che la luce si comporta (almeno in queste circostanze) come un'onda piuttosto che come un flusso di particelle (come credeva Newton).*

Sebbene noi ci limiteremo in questa trattazione a considerare solo onde luminose, anche tutti gli altri tipi di onde (come le onde acustiche e le onde del mare) sono soggetti ai fenomeni di interferenza e di diffrazione. Per esempio, nella collocazione di altoparlanti all'interno di una sala è necessario tener conto dell'interferenza e della diffrazione delle onde acustiche. I princìpi esposti per le onde luminose valgono allo stesso modo per gli altri tipi di onde.

45-1 INTERFERENZA DA DOPPIA FENDITURA

Quando due onde identiche provenienti da due diverse sorgenti si sovrappongono in un punto dello spazio, l'intensità dell'onda combinata in quel punto può risultare maggiore o minore dell'intensità di ogni singola onda. Questo effetto è chiamato *interferenza*. L'interferenza può essere *costruttiva*, quando l'intensità netta risultante è maggiore della singola intensità originaria, oppure *distruttiva*, quando l'intensità netta è minore delle singole intensità. Come vedremo più innanzi, dipende dalla fase relativa tra le due onde il fatto che risulti un'interferenza costruttiva oppure distruttiva.

Per quanto, in linea di principio, possano interferire quante si vogliano onde, consideriamo qui solo l'interferenza tra due. Assumiamo che entrambe le sorgenti emettano radiazione di una sola lunghezza d'onda. (Il caso di sorgenti che emettono molteplici lunghezze d'onda può essere trattato considerando separatamente le interferenze di ogni singola componente dello spettro.)

Assumiamo anche, per il momento, che la relazione tra le fasi delle due onde non cambi nel tempo. Tali onde si dicono *coerenti*. Quando interferiscono onde coerenti, l'intensità dell'onda combinata in qualsiasi punto dello spazio non varia nel tempo. La coerenza, condizione necessaria perché l'interferenza si manifesti, verrà esaminata nel prossimo paragrafo.

Non è possibile in generale rendere coerenti due diverse sorgenti di luce, perché l'emissione luminosa da parte degli atomi di una sorgente è indipendente da quella dell'altra sorgente. Le creste e i ventri delle onde provenienti dalle due sorgenti non mantengono una relazione definita tra le fasi e le onde sono pertanto dette incoerenti. Per condurre gli esperimenti di interferenza con onde luminose si divide normalmente il fascio proveniente da un'unica fonte in due componenti e si tratta ciascuna componente come se fosse emessa da una sorgente separata di luce. Se si esegue l'operazione correttamente, è possibile far interferire le due componenti. Considereremo più tardi alcuni dispositivi che permettono di ottenere questa separazione dell'onda luminosa; qui ci limitiamo alla tecnica consistente nel far passare un'onda luminosa attraverso due strette aperture, che chiamiamo fenditure. La larghezza delle fenditure dev'essere dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda della luce. Ci troviamo quindi decisa-

ISBN 88-408-0777-2

mente fuori dal campo di applicazione dell'ottica geometrica (si veda la figura 1 del capitolo 43).

La figura 1 di questo capitolo mostra una barriera vista dall'alto nella quale sono state tagliate due sottili fessure. Un treno di onde piane, come potrebbero essere emesse da un laser, incide sulle fenditure. Solo una frazione del fronte d'onda incidente può transitare da ciascuna delle fessure e così le due fenditure possono svolgere la funzione di due sorgenti di luce coerente. (Lo sparpagliamento della luce dopo il passaggio attraverso le fenditure, evidenziato nella figura 1, è detto *diffrazione* e sarà argomento del prossimo capitolo. Per il momento consideriamo le fenditure così sottili da poter ritenere ciascuna di esse come una sequenza di punti sorgente di luce che emettono onde sferiche secondarie di Huygens, come descritto nel paragrafo 43-3.) Si noti che le due onde possono sovrapporsi e interferire ovunque esse colpiscano lo schermo. Per semplificare la trattazione, stabiliamo che la distanza D tra le fenditure e lo schermo sia molto maggiore della separazione d tra le fenditure. (In alternativa potremmo inserire una lente tra le fenditure e lo schermo, per focalizzarvi la luce, come vedremo più avanti.)

Guardando lo schermo si vede una serie di bande alternate scure e luminose, dette *frange di interferenza*, corrispondenti rispettivamente ai minimi e ai massimi d'intensità di luce, come si vede nella figura 2. La figura 3 mostra un'immagine di massimi e minimi d'intensità di interferenza realizzati in onde d'acqua in apposito recipiente da laboratorio, detto ondametro. Si può interpretare l'interferenza delle onde luminose e delle onde materiali basandosi su analisi simili.

Per analizzare le figure d'interferenza, consideriamo le onde provenienti dalle due fenditure che si combinano in un punto arbitrario P sullo schermo C di figura 4. Il punto P è situato alle distanze r_1 ed r_2 dalle fenditure S_1 ed S_2 rispettivamente. Si tracci il segmento S_2b in modo che risultino uguali PS_2 e Pb. Se d, il passo tra le fenditure, è molto minore della distanza D che divide lo schermo dalle fenditure, (il rapporto d/D nella figura è deliberatamente esagerato per rendere più chiaro il disegno), S_2b è di conseguenza quasi perpendicolare sia a r_1 che a r_2. Ciò significa che l'angolo $S_1\widehat{S_2}b$ è quasi uguale all'angolo $P\widehat{a}O$; nella figura a entrambi gli angoli è attribuito il nome θ; allo stesso modo r_1 ed r_2 possono essere considerati pressoché paralleli.

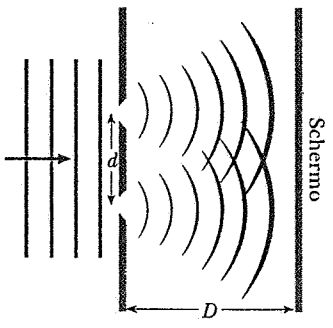


Figura 1 Un treno di onde luminose piane (provenienti per esempio da un laser) incide su una barriera in cui sono tagliate due sottili fenditure, separate da una distanza d. La larghezza delle fenditure è piccola rispetto alla lunghezza d'onda, in modo tale che le onde, nel passare attraverso, vengono sparpagliate (diffratte) e illuminano tutto lo schermo.



Figura 2 La figura d'interferenza, che consiste in strisce o *frange* chiare e scure, appare sullo schermo di figura 1.

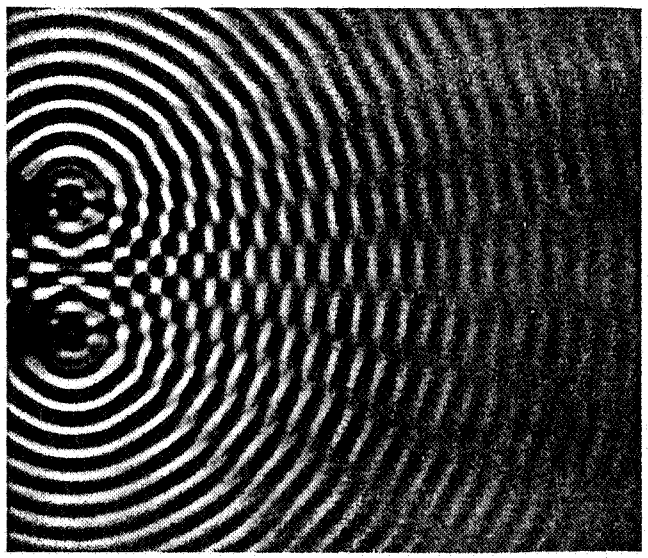


Figura 3 Una figura d'interferenza prodotta da onde sulla superficie d'acqua contenuta in un recipiente da laboratorio. Due punte vibranti creano due serie di increspature circolari, che si sovrappongono a formare un sistema di massimi e minimi d'onda. Il bordo destro di questa fotografia ha la stessa funzione dello schermo di figura 1. Si noti che, lungo questo «schermo» si ha uno schema alternato di massimi e minimi come quello di figura 2.

I due raggi che nelle figura 4 arrivano nel punto P, provenienti da S_1 e da S_2, sono in fase nell'attraversare le fenditure, essendo derivati dallo stesso fronte dell'onda piana incidente. Poiché i cammini ottici dei due raggi sono differenti, nel punto P i raggi risultano sfasati. La natura dell'interferenza in P è determinata dal numero di lunghezze d'onda contenute nel tratto S_1b, che è la differenza tra i cammini dei due raggi.

ISBN 88-408-0777-2

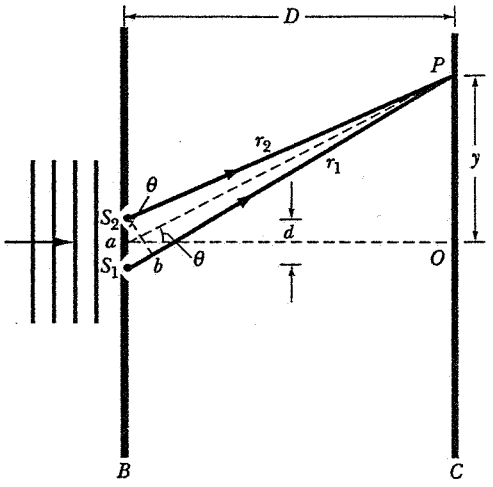


Figura 4 I raggi provenienti da S_1 ed S_2 si combinano nel punto P. Nella realtà $D \gg d$, essendo la figura distorta per chiarezza. Il punto a rappresenta il punto intermedio tra le fenditure.

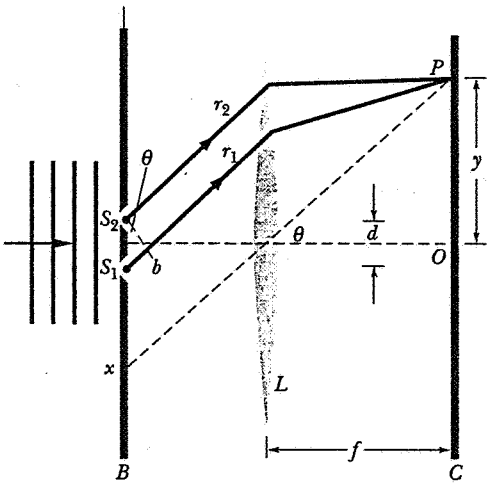


Figura 5 Per produrre le frange d'interferenza si può usare una lente. Si confronti questo schema con quello di figura 4. Nella realtà $f \gg d$, essendo il disegno ancora distorto per chiarezza.

Affinché in P si abbia un *massimo* di intensità, i due raggi devono giungere in fase e cioè S_1b $(= d \operatorname{sen}\theta)$ deve contenere un numero intero di lunghezze d'onda, ossia

$$S_1b = m\lambda \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

che può essere scritto come

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \text{(massimi)}. \quad (1)$$

Si osservi che a ogni massimo che si trovi al di sopra di O nella figura 4 corrisponde un massimo al di sotto di O, simmetrico al precedente; ciò che corrisponde a porre $m = -1, -2 \ldots$ nell'equazione 1. Esiste un massimo centrale per $m = 0$.

Affinché in P si abbia un minimo è necessario che i due raggi differiscano in fase di un multiplo dispari di π, ciò che equivale a far sì che S_1b $(= d \operatorname{sen}\theta)$ contenga un numero semintero di lunghezze d'onda, cioè

$$d \operatorname{sen}\theta = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \text{(minimi)}. \quad (2)$$

I valori negativi di m individuano i minimi nella metà inferiore dello schermo.

Per la trattazione matematica è più semplice avere a che fare con fronti d'onda piani che incidono e attraversano la doppia fenditura. Tuttavia i fronti piani non formano immagini sullo schermo a distanza D finita. Si usa più spesso quindi una lente, come in figura 5, per focalizzare sullo schermo i raggi paralleli emergenti dalla doppia fenditura. I raggi focalizzati in P sono paralleli, prima di investire la lente, alla retta Px tracciata da P verso il centro della lente. In queste condizioni i raggi r_1 ed r_2 sono rigorosamente paralleli anche se non viene soddisfatto il requisito per cui $D \gg d$.

Se si utilizza una lente tra schermo e doppia fenditura, potrebbe sembrare che fra i raggi si produca una differenza di fase oltre il piano rappresentato da S_2b, essendo chiaramente differenti le lunghezze dei percorsi fra questo piano e P. Nel paragrafo 44-3 abbiamo visto invece che i *cammini ottici* di raggi paralleli concentrati in un punto da una lente sono identici. Due raggi di uguale cammino ottico contengono lo stesso numero di lunghezze d'onda, cosicché il passaggio della luce attraverso la lente non provoca sfasamenti.

L'esperienza di Young

Un esperimento di interferenza del tipo sopradescritto fu per la prima volta condotto nel 1801 da Thomas Young*. L'esperienza di Young fornì la prima prova determinante sulla natura ondulatoria della luce. Dato che la distanza tra le frange d'interferenza, come si deduce dalle equazioni 1 e 2, dipende dalla lunghezza d'onda, l'esperimento di Young offrì la prima misura diretta della lunghezza d'onda della luce.

Non esistevano i laser ovviamente al tempo di Young, il quale creò una sorgente di luce coerente facendo passare la luce del sole attraverso una stretta apertura S_0, come illustrato nella figura 6. Le onde se-

* Thomas Young (1773-1829) studiò dapprima medicina. Il suo interesse per gli organi sensoriali e per la vista lo portò allo studio della fisica e in particolare della luce. Tra gli altri suoi risultati scientifici, vanno menzionati gli studi sulla tensione superficiale e l'elasticità, per cui gli venne reso onore attribuendo al modulo di elasticità il nome di modulo di Young. Si distinse anche per i suoi interessi nei geroglifici, dando un contributo alla decifrazione della stele di Rosetta, che fornì la prima interpretazione dell'antico linguaggio egizio.

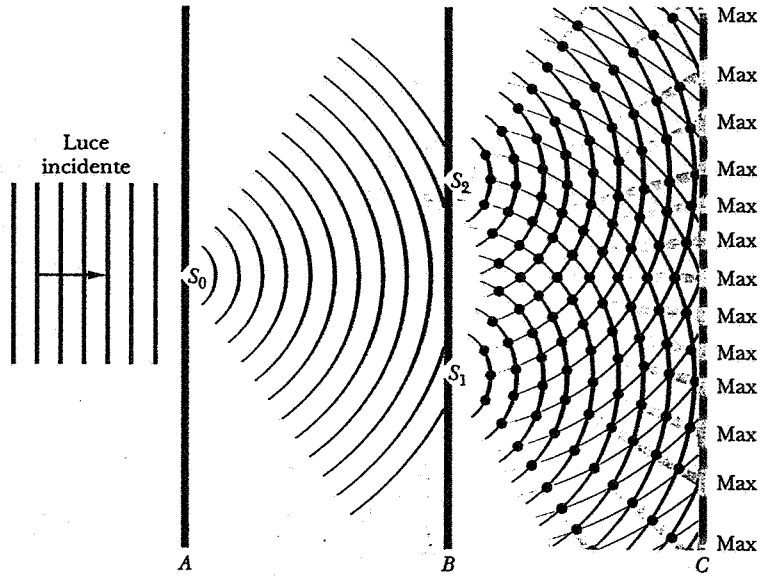


Figura 6 Nell'esperimento di Young sull'interferenza, la luce diffratta dal forellino S_0 incide sui forellini S_1 ed S_2 dello schermo B. La luce diffratta da questi ultimi si sovrappone sullo schermo C, producendo la figura d'interferenza.

condarie che si generano sparpagliandosi da S_0 danno luogo a fronti d'onda coerenti che vanno ad attraversare le due aperture. Young utilizzò negli esperimenti dei forellini, piuttosto che fessure, e di conseguenza le figure di interferenza erano più complicate di quelle di figura 2. Ciononostante le sue conclusioni sulla natura ondulatoria della luce erano ineccepibili. L'esperimento della doppia fenditura, anche quando oggi viene eseguito con il laser, viene sovente chiamato esperienza di Young.

Esempio 1 Il sistema di due fenditure della figura 4 è illuminato con luce di una lampada a vapori di mercurio fatta passare attraverso filtri, in modo da ottenere in pratica solo la luce della riga verde principale ($\lambda = 546$ nm). La distanza fra le fenditure è di 0.12 mm e lo schermo sul quale appaiono le figure di interferenza è a 55 cm. Qual è la posizione angolare del primo minimo? E del decimo massimo?

Soluzione Al primo minimo corrisponde, nell'equazione 2, $m = 0$ cioè

$$\text{sen}\theta = \frac{(m + \frac{1}{2})\lambda}{d} = \frac{(\frac{1}{2})(546 \times 10^{-9}\ \text{m})}{0.12 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 0.0023.$$

Questo valore di sen θ è talmente piccolo che coincide col valore di θ espresso in radianti; in gradi esso vale 0.13°.

Per trovare la posizione del massimo di ordine 10 (non contando il massimo centrale) dobbiamo porre $m = 10$ nell'equazione 1. Eseguendo il calcolo si trova una posizione angolare di 2.6°. Questo mostra che l'apertura angolare della prima decina di frange è sufficientemente piccola.

Esempio 2 Nell'esempio 1, qual è la distanza sullo schermo C fra due massimi consecutivi, m e $m + 1$?

Soluzione Se θ è sufficientemente piccolo, possiamo far uso dell'approssimazione

$$\text{sen}\theta \approx \tan\theta \approx \theta.$$

Dalla figura 4 si vede che

$$\tan\theta = \frac{y}{D}.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione 1 al posto di sen θ, si ottiene

$$y = m\frac{\lambda D}{d} \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \text{ (massimi)}$$

Le posizioni di due massimi consecutivi sono date da

$$y_m = m\frac{\lambda D}{d}$$

e da

$$y_{m+1} = (m + 1)\frac{\lambda D}{d}.$$

La loro distanza Δy si ottiene per sottrazione

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d}$$
$$= \frac{(546 \times 10^{-9}\ \text{m})(55 \times 10^{-2}\ \text{m})}{0.12 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.5\ \text{mm}.$$

Finché θ nella figura 4 è piccolo, la distanza fra le frange di interferenza è indipendente da m, cioè le frange sono egualmente spaziate. Si osservi che, se la luce incidente contiene più di una lunghezza d'onda, si avrà una sovrapposizione di figure di interferenza con differenti spaziature tra le frange, corrispondenti alle diverse lunghezze d'onda.

45-2 COERENZA

Nel ricavare l'equazione 1, abbiamo stabilito che appare un massimo sullo schermo di figura 4 ogniqual-

ISBN 88-408-0777-2

volta la *differenza di percorso* tra le onde, che raggiungono il punto P sullo schermo dalle due fenditure S_1 ed S_2, è uguale a un numero intero di lunghezze d'onda. Un'altra possibile descrizione fa uso della *differenza di fase* ϕ tra le due onde provenienti dalle fenditure S_1 ed S_2. In certi punti dello schermo, in cui le differenze di fase assumono valore $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$, le due onde sono in fase e si verifica un massimo d'intensità. In altri punti le differenze di fase valgono $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi, \ldots$, e le due onde risultano in opposizione di fase, dando luogo in questi punti a un minimo d'intensità. In altri punti ancora dello schermo la differenza di fase può assumere altri valori, che non possono essere espressi come multipli interi di π.

Al fine di produrre una figura di interferenza, *è necessario che le differenze di fase nei singoli punti dello schermo non cambino nel tempo*. Quando si verifica questa condizione, possiamo affermare che i raggi provenienti dalle fenditure S_1 ed S_2 sono senz'altro coerenti. La coerenza è una proprietà di cui possono godere tutti i tipi di onde. Per esempio si possono ottenere onde sonore coerenti pilotando due altoparlanti separati con il medesimo oscillatore a bassa frequenza, e analogamente è possibile irraggiare onde radio coerenti da due antenne collegate con il medesimo oscillatore elettromagnetico.

Supponiamo che le fenditure S_1 ed S_2 siano sostituite da due sorgenti di luce del tutto indipendenti, come due sottili filamenti incandescenti situati fianco a fianco. Sullo schermo C non si avranno frange di interferenza, bensì un'illuminazione relativamente uniforme. Possiamo interpretare questo fenomeno facendo l'ipotesi ragionevole che, per due sorgenti luminose indipendenti, la differenza di fase tra i due raggi che arrivano in P vari nel tempo a caso. A un certo istante possono sussistere le condizioni per un minimo e poco dopo (ad esempio 10^{-8} s) quelle per un massimo. L'occhio non riesce a seguire queste rapide variazioni e percepisce solo un'illuminazione uniforme. In ogni punto l'intensità è uguale alla somma delle intensità che ciascuna delle due sorgenti S_1 ed S_2 produrrebbe separatamente per quel punto. Si dice che i fasci emessi in queste condizioni da S_1 e da S_2 sono del tutto *incoerenti*.

Si osservi che, per ottenere l'intensità che risulta dalla sovrapposizione di fasci luminosi completamente coerenti, (*a*) le ampiezze si sommano vettorialmente tenendo conto della differenza di fase (costante) e quindi (*b*) si calcola il quadrato dell'ampiezza risultante per ottenere una quantità proporzionale all'intensità risultante. Per fasci di luce completamente incoerenti, d'altra parte, (*a*) si elevano al quadrato le singole ampiezze per ottenere quantità proporzionali alle intensità e (*b*) si sommano le singole intensità per ottenere l'intensità risultante. Questo modo di procedere è in accordo con l'osservazione sperimentale secondo cui, in ogni punto, l'intensità risultante prodotta da due sorgenti luminose completamente indipendenti è sempre maggiore dell'intensità prodotta in quel punto da una sola sorgente, mentre, se le sorgenti sono coerenti, l'intensità in alcuni punti può risultare minore di quella prodotta da una sola sorgente.

Resta da investigare in quali condizioni sperimentali si possono produrre fasci coerenti o incoerenti. Consideriamo un fascio parallelo di microonde emesso da un'antenna collegata con un cavo coassiale a un oscillatore costituito da una cavità risonante elettromagnetica. Le oscillazioni della cavità (par. 40-4) sono perfettamente periodiche nel tempo e producono nella posizione dell'antenna una variazione periodica di **E** e di **B**. L'onda irradiata, a grande distanza dall'antenna, è ben rappresentata dalla figura 10 del capitolo 41. Si osservi che (*a*) l'onda ha un'estensione temporale praticamente infinita includendo sia il futuro ($t > 0$) che il passato ($t < 0$); si veda la figura 7*a*. In ogni punto attraversato dall'onda, la perturbazione del campo (cioè la variazione di **E** o **B**) muta nel tempo in modo perfettamente periodico. (*b*) I fronti d'onda in punti lontani dall'antenna sono piani paralleli di estensione praticamente infinita, perpendicolari alla direzione di propagazione. In ogni istante la perturbazione lungo la direzione di propagazione varia con la distanza in maniera perfettamente periodica.

Due fasci che hanno origine da una sola onda, co-

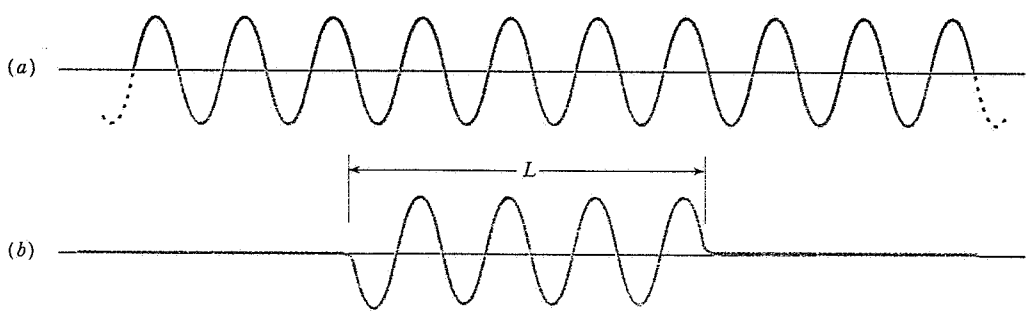


Figura 7 (*a*) Una sezione di un'onda infinita. (*b*) Un treno d'onda di lunghezza finita L.

me quella della figura 10 del capitolo 41, sono completamente coerenti. Un modo di produrre due fasci di questo tipo è quello di interporre uno schermo opaco con due fenditure sul cammino di un singolo fascio. Le onde uscenti dalle fenditure avranno sempre una differenza di fase costante in ogni punto della regione nella quale le due onde si incontrano, e produrranno frange di interferenza. Si possono facilmente produrre fasci coerenti di onde radio, così come si possono ottenere onde elastiche coerenti in solidi, liquidi e gas. Per esempio, nella figura 3, le due punte di un sistema vibrante coordinato generano due onde coerenti nell'acqua di un ondametro.

Se si considerano invece comuni sorgenti di luce visibile, come fili incandescenti o scariche elettriche in un gas, ci accorgiamo di una differenza fondamentale. In queste sorgenti l'emissione di luce avviene nei singoli atomi e i diversi atomi non agiscono in maniera coordinata (cioè *coerentemente*). L'emissione luminosa da un singolo atomo avviene tipicamente in un tempo dell'ordine di 10^{-8} s e la luce emessa è descritta meglio da un *treno d'onde* (fig. 7*b*) che da un'onda infinita (fig. 7*a*). Per tempi di emissione come questi, i treni d'onda hanno un'estensione spaziale di alcuni metri. Nelle sorgenti reali di luce, come i tubi fluorescenti in cui avvengono scariche in gas a bassa pressione, i treni d'onda tipici sono lunghi alcuni centimetri e questo costituisce il limite di distanza per cui la luce emessa da tali fonti rimane coerente.

Si possono produrre effetti di interferenza con le sorgenti di luce di uso comune ponendo davanti alla sorgente una fenditura strettissima (S_0 nella figura 6). Questo assicura che i treni d'onda che investono le fenditure S_1 ed S_2 praticate nello schermo B di questa figura hanno origine in una stessa regione, poco estesa, della sorgente. Se le lunghezze dei percorsi da tutti i punti entro la stretta regione S_0 e le due fenditure S_1 ed S_2 possono considerarsi sostanzialmente uguali, la luce che attraversa la doppia fenditura è in fase e si produce sullo schermo C una figura di interferenza stazionaria. Se la fenditura S_0 viene allargata abbastanza da consentire che due punti entro l'ampiezza della fenditura siano situati a due distanze da S_1 o da S_2 che differiscono di mezza lunghezza d'onda, la luce che attraversa la doppia fenditura proveniente dai due punti sorgente sarà fuori fase: questa luce produrrà sullo schermo dei massimi laddove comparivano prima dei minimi e viceversa si formeranno dei nuovi minimi nelle posizioni prima occupate dai massimi. L'effetto sullo schermo diventa una sovrapposizione incoerente di luce proveniente da più sorgenti efficaci, cancellando quindi la figura d'interferenza.

Se la fenditura S_0 è abbastanza piccola, si mantiene costante una data differenza di fase in ogni punto dello schermo C tra i due raggi passanti per le fenditure S_1 ed S_2. Questa luce può essere considerata coerente entro una distanza caratterizzata dalla lunghezza del treno d'onda.

Se si aumenta gradualmente la larghezza della fenditura S_0 nella figura 6, si verifica sperimentalmente che l'intensità dei massimi delle frange di interferenza diminuisce e l'intensità dei minimi delle frange non è più completamente nulla. In altre parole le frange diventano meno nitide. Se si aumenta di molto la larghezza di S_0, la riduzione dell'intensità dei massimi e l'aumento dell'intensità dei minimi sono tali che le frange scompaiono lasciando il posto a un'illuminazione uniforme. Diciamo che, attraverso questo processo, i due fasci provenienti da S_1 ed S_2 passano gradualmente da una condizione di completa coerenza a una di completa incoerenza. Quando non ci troviamo in nessuna di queste due situazioni limite, si dice che i fasci sono parzialmente coerenti.

La coerenza parziale può essere messa in evidenza in due fasci prodotti tramite uno specchio semiargentato che riflette parte del fascio incidente e trasmette il resto. Si può far sì che i due fasci così prodotti, per riflessione e per trasmissione, percorrano lunghezze diverse per poi ricombinarsi. Se la differenza di percorso è piccola rispetto alla lunghezza media dei treni d'onda, le frange di interferenza saranno ben definite con intensità luminosa nulla nei minimi. Se la differenza di percorso viene aumentata di proposito, la coerenza verrà progressivamente a mancare e le frange si faranno via via meno distinte, e infine, quando la differenza di percorso è maggiore della lunghezza media dei treni d'onda, le frange spariranno del tutto. Così è possibile in un dispositivo sperimentale passare con continuità dalla coerenza completa alla incoerenza completa, attraverso la coerenza parziale.

Fino al 1960 non era possibile avere una sorgente di luce visibile capace di emettere un'onda infinita come quella di figura 7*a*. In tutte le fonti di luce visibile a quel tempo disponibili, gli atomi non si comportano in modo coordinato e la luce non è coerente. Oggigiorno disponiamo di una sorgente di luce visibile essenzialmente coerente: l'ormai comune laser, il cui nome deriva dall'acronimo dell'appellativo inglese di «*L*ight *A*mplification through *S*timulated *E*mission of *R*adiation», cioè «amplificazione di luce ottenuta mediante emissione stimolata di radiazione». Facendo uso di un raggio laser è possibile produrre interferenza da una doppia fenditura secondo lo schema di figura 1 semplicemente illuminando la doppia fenditura con un laser. Non è più necessario l'uso di luce diffratta dalla fenditura di figura 6.

La coerenza del raggio laser ha consentito numerose applicazioni pratiche. In molte di queste applicazioni il

ISBN 88-408-0777-2

raggio laser viene diviso in due raggi utilizzando uno specchio semiargentato. I due raggi seguono diversi percorsi e sono poi condotti a ricombinarsi e di conseguenza a interferire. Dato che la lunghezza utile al mantenimento delle condizioni di coerenza per i laser può arrivare a decine o centinaia di kilometri, si possono ottenere figure d'interferenza anche per differenze di cammino tra i due fasci molto ampie. Un'applicazione di questa coerenza è l'olografia (par. 47-5), procedimento col quale si imprime su una pellicola fotografica la figura di interferenza prodotta dalla combinazione di due fasci, di cui uno proviene dalla riflessione su un oggetto e l'altro è quello diretto; la figura viene utilizzata per ricostruire un'immagine tridimensionale dell'oggetto. Variazioni del cammino percorso da uno dei due raggi possono facilmente essere rivelate anche su grandi distanze attraverso i cambiamenti nelle figure di interferenza; gli interferometri laser basati su questo principio vengono usati per seguire i movimenti delle placche geologiche sulla superficie terrestre. Altre applicazioni coinvolgono l'effetto di spostamento Doppler dovuto a un raggio riflesso da un oggetto in movimento; quando i due raggi si ricombinano, si produce una figura d'interferenza a battimenti. La figura 20 del capitolo 2 mostrava un'applicazione di questo effetto alla misura dell'accelerazione di un corpo in caduta libera. Altre applicazioni ancora, che fanno affidamento sulla coerenza dei raggi laser, includono le comunicazioni a lunga distanza tramite segnali ottici.

45-3 INTENSITÀ NELL'INTERFERENZA DA DOPPIA FENDITURA

Le equazioni 1 e 2 danno le posizioni dei massimi e dei minimi nelle figure d'interferenza. Esse non ci informano tuttavia su come varia l'intensità tra i massimi e i minimi. In questo paragrafo ricaveremo un'espressione per l'intensità I in ogni punto P individuato dall'angolo θ nella figura 4.

Facciamo l'ipotesi che le componenti del campo elettrico* delle due onde di figura 4 nel punto P siano funzione del tempo secondo le leggi

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen}\omega t \tag{3}$$

e

$$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \tag{4}$$

dove $\omega(= 2\pi\nu)$ è la pulsazione delle onde e ϕ è la loro differenza di fase. Si osservi che ϕ dipende dalla posizione del punto P che, a sua volta, per una data configurazione geometrica, è individuato dall'angolo θ di figura 4. Supponiamo che le fenditure siano così strette che la luce diffratta da ciascuna di esse illumini uniformemente la parte centrale dello schermo. Questo significa che, vicino al centro dello schermo, E_0 è indipendente dalla posizione di P, cioè dal valore di θ.

Se la separazione d tra le fenditure è molto minore della distanza D che le separa dallo schermo, i vettori **E** delle due onde che interferiscono sono pressoché paralleli e possiamo quindi sostituire la loro somma vettoriale con la somma scalare dei loro moduli,

$$E = E_1 + E_2, \tag{5}$$

che, come dimostreremo in questo paragrafo, si può scrivere come

$$E = E_\theta \operatorname{sen}(\omega t + \beta), \tag{6}$$

ove la fase β è data da

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi \tag{7}$$

e l'ampiezza è

$$E_\theta = 2E_0 \cos\beta. \tag{8}$$

L'ampiezza E_θ del moto ondulatorio risultante, che determina l'intensità delle frange d'interferenza, dipende da β, che a sua volta dipende dal valore di θ, vale a dire dalla posizione del punto P nella figura 4. Il valore massimo dell'ampiezza E_θ equivale a $2E_0$, pari cioè a due volte l'ampiezza E_0 delle onde interferenti, valore corrispondente alla situazione di piena sovrapposizione.

Abbiamo dimostrato nel paragrafo 41-4 che l'intensità I di un'onda elettromagnetica, è proporzionale al quadrato dell'ampiezza del suo campo elettrico E_m (si veda l'equazione 18 del capitolo 41):

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_m^2. \tag{9}$$

Il rapporto delle intensità di due onde luminose può quindi essere espresso come il rapporto dei quadrati delle ampiezze dei loro campi elettrici. Se I_θ è l'intensità dell'onda risultante in P e I_0 è l'intensità che un'onda produrrebbe da sola, allora

$$\frac{I_\theta}{I_0} = \left(\frac{E_\theta}{E_0}\right)^2. \tag{10}$$

Facendo uso delle equazioni 8 e 10, si ottiene

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 3. \tag{11}$$

* Per caratterizzare l'onda luminosa potremmo scegliere sia il campo elettrico **E** sia il campo magnetico **B**. Usiamo di norma **E** piuttosto che **B** perché gli effetti di **B** sull'occhio umano, così come su diversi rivelatori di luce, sono molto deboli.

Si osservi che l'intensità dell'onda risultante in ogni punto P varia da zero [ad esempio in un punto nel quale $\phi\ (= 2\beta) = \pi$] fino a quattro volte l'intensità I_0 di ognuna delle due onde [ad esempio in un punto nel quale $\phi\ (= 2\beta) = 0$]. Calcoliamo I_θ in funzione dell'angolo θ della figura 4.

La differenza di fase ϕ nell'equazione 4 dipende dalla differenza di cammino S_1b della figura 4. Se S_1b vale $\frac{1}{2}\lambda$, ϕ sarà pari a π; se S_1b vale λ, ϕ sarà pari a 2π, ecc. In generale quindi,

$$\frac{\text{differenza di fase}}{2\pi} = \frac{\text{differenza di cammino}}{\lambda}.$$

Ricordando che ϕ rappresenta la differenza di fase e che la differenza di cammino nella figura 4 può essere espressa come $d\ \text{sen}\theta$, possiamo riscrivere questa uguaglianza come

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(d\ \text{sen}\theta),$$

o anche, usando l'equazione 7,

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi = \frac{\pi d}{\lambda}\text{sen}\theta. \qquad (12)$$

L'intensità dell'onda risultante espressa in funzione di θ può quindi scriversi come

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2 \tfrac{1}{2}\phi, \qquad (13)$$

ovvero

$$I_\theta = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d\ \text{sen}\theta}{\lambda}\right). \qquad (14)$$

Dall'equazione 13 si deduce che i massimi d'intensità si manifestano quando $\cos^2 \frac{1}{2}\phi = 1$, ossia quando

$$\phi = 2m\pi \quad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Usando l'equazione 12 questa condizione può essere riscritta

$$d\ \text{sen}\theta = m\lambda \quad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \text{ (massimi)},$$

che è la stessa equazione 1. I minimi di intensità, in accordo con l'equazione 13, si verificano quando $\cos^2\frac{1}{2}\phi = 0$, ossia

$$\phi = (2m+1)\pi \quad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots,$$

che, usando l'equazione 12, possiamo scrivere come

$$d\ \text{sen}\theta = (m+\tfrac{1}{2})\lambda \quad m = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots \text{ (minimi)},$$

in accordo con l'equazione 2.

La figura 8 è un diagramma dell'intensità nel caso d'interferenza dovuta a doppia fenditura. La linea orizzontale a tratto pieno è I_0; essa descrive l'intensità (uniforme) sullo schermo se una delle fenditure viene chiusa. Se le due sorgenti fossero incoerenti, l'intensità sullo schermo sarebbe uniforme e varrebbe $2I_0$, come indica la linea tratteggiata di figura 8. Se le sorgenti sono coerenti, ci aspettiamo che l'energia sia semplicemente ridistribuita su tutto lo schermo, poiché, nel processo di interferenza, non c'è né creazione né distruzione di energia. Così l'intensità *media* nella figura di interferenza deve essere $2I_0$, come nel caso di sorgenti non coerenti. Questo risultato è immediato se nell'equazione 13 attribuiamo al coseno quadrato il valore $\frac{1}{2}$, valore medio del quadrato delle funzioni seno e coseno calcolato su uno o più semiperiodi.

Composizione di moti ondulatori

Ricaveremo ora le equazioni 6-8 per il campo elettrico combinato dell'onda luminosa nel fenomeno d'interferenza da doppia fenditura. Queste equazioni potrebbero essere ottenute algebricamente, usando il metodo già visto nel paragrafo 19-8. Tuttavia il procedimento algebrico diventerebbe oltremodo complicato quando volessimo sommare più di due componenti, come faremo nei prossimi capitoli. Useremo pertanto un metodo grafico, che si dimostra conveniente nelle situazioni più complesse. Questo metodo è basato sui *vettori di fase* ed è simile a quello già utilizzato nell'analisi dei circuiti elettrici a corrente alternata nel capitolo 39.

Un moto ondulatorio sinusoidale come quello del-

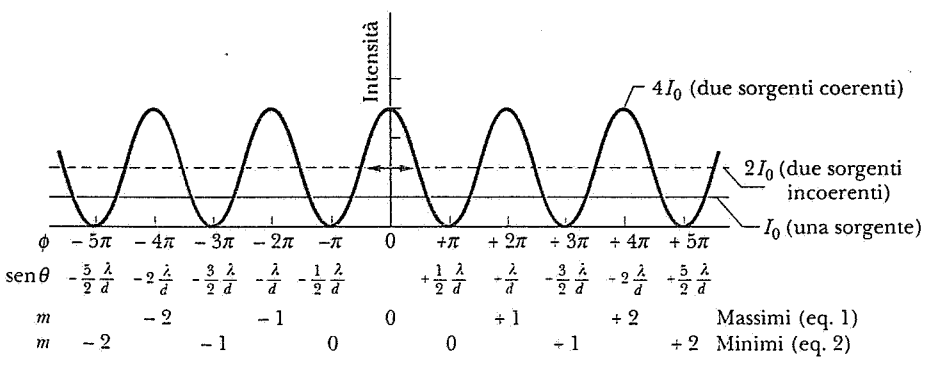


Figura 8 Andamento dell'intensità per un'interferenza da doppia fenditura, assumendo che le due onde interferenti illuminino questa regione dello schermo in modo uniforme; vale a dire che I_0 è considerato indipendente dalla posizione.

 ISBN 88-408-0777-2

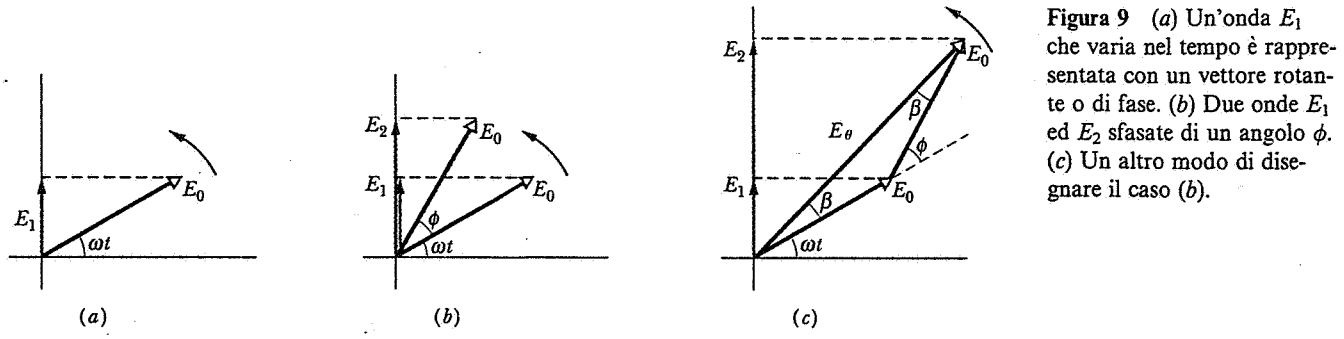


Figura 9 (*a*) Un'onda E_1 che varia nel tempo è rappresentata con un vettore rotante o di fase. (*b*) Due onde E_1 ed E_2 sfasate di un angolo ϕ. (*c*) Un altro modo di disegnare il caso (*b*).

l'equazione 3 può essere graficamente rappresentato mediante un vettore rotante detto *vettore di fase* o *fasore rotante*. Nella figura 9*a* un vettore di fase di modulo E_0 può ruotare attorno alla sua origine in senso antiorario con pulsazione ω. Il moto ondulatorio alternato E_1 (eq. 3) è rappresentato dalla proiezione di questo vettore di fase sull'asse verticale.

Un secondo moto ondulatorio E_2, definito dall'equazione 4, che ha la medesima ampiezza E_0 ma differenza di fase ϕ rispetto a E_1, può essere rappresentato anch'esso graficamente (fig. 9*b*) come la proiezione sull'asse verticale di un secondo vettore di fase, che abbia lo stesso modulo E_0 e che formi un angolo ϕ con il primo vettore di fase. La somma delle proiezioni dei due vettori di fase è $E = E_1 + E_2$. Ciò può essere evidenziato più chiaramente ridisegnando i due vettori di fase come nella figura 9*c*, facendo coincidere l'origine del secondo con l'estremo libero del primo, mantenendo lo stesso angolo che rappresenta la differenza di fase, e facendo ruotare l'insieme dei due vettori in senso antiorario attorno all'origine.

Nella figura 9*c*, E può anche essere visto come la proiezione sull'asse verticale del vettore di fase di ampiezza E_θ, dato dalla somma vettoriale dei due vettori di modulo E_0. Dalla figura si vede che la proiezione può essere scritta come

$$E = E_\theta \operatorname{sen}(\omega t + \beta),$$

in accordo con l'equazione 6. Si noti che la somma (algebrica) delle proiezioni dei due vettori di fase è uguale alla proiezione del vettore somma dei due vettori.

Nella maggioranza dei problemi di ottica si è interessati solo all'*ampiezza* E_θ del moto ondulatorio risultante e non alla sua variazione temporale. Questo è dovuto al fatto che l'occhio e altri strumenti di uso comune sono sensibili all'intensità risultante della luce (cioè al quadrato dell'ampiezza) e non possono rivelare le rapide variazioni temporali caratteristiche della luce visibile. Ad esempio la frequenza ν $(= \omega/2\pi)$ della luce del sodio ($\lambda = 589$ nm) è di 5.1×10^{14} Hz. Spesso, allora, non è necessario considerare la rotazione dei vettori di fase, ma si può limitare l'attenzione alla ricerca dell'ampiezza del vettore di fase risultante.

Nella figura 9*c* i tre vettori di fase formano un triangolo isoscele, i cui lati hanno lunghezze E_0, E_0, e E_θ. Pertanto l'angolo esterno ϕ è uguale alla somma dei due angoli interni opposti (β e β), di modo che

$$\beta = \tfrac{1}{2}\phi.$$

Dalla figura 9*c* risulta pure chiaro che la base del triangolo isoscele è

$$E_\theta = 2E_0 \cos\beta.$$

Questi risultati coincidono con le equazioni 7 e 8.

Più in generale, potremmo estendere questo procedimento al caso della somma di più moti ondulatori che variano sinusoidalmente. Questa è la procedura generale:

1. Costruire una serie di vettori di fase che rappresentano le funzioni da sommare. Disegnarli l'uno di seguito all'altro, conservando, fra ogni coppia di vettori adiacenti, lo sfasamento opportuno.

2. Costruire il vettore somma dell'insieme dei vettori, con il metodo della somma vettoriale. La sua lunghezza dà l'ampiezza risultante del campo elettrico. L'angolo che esso forma col primo vettore è la fase del vettore risultante rispetto al primo vettore di fase. La proiezione sull'asse verticale del vettore somma dà la variazione temporale del moto ondulatorio risultante.

Esempio 3 Trovare graficamente il vettore di fase risultante $E(t)$, somma dei seguenti moti ondulatori:

$$E_1 = E_0 \operatorname{sen}\omega t.$$
$$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 15°).$$
$$E_3 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t + 30°).$$
$$E_4 = E_0 \operatorname{sen}(\omega t - 45°).$$

Soluzione Nella figura 10 si vedono i quattro vettori di fase che rappresentano queste funzioni. L'angolo di fase o tra i successivi vettori è di 15°. L'ampiezza del vettore somma E_θ e lo sfasamen-

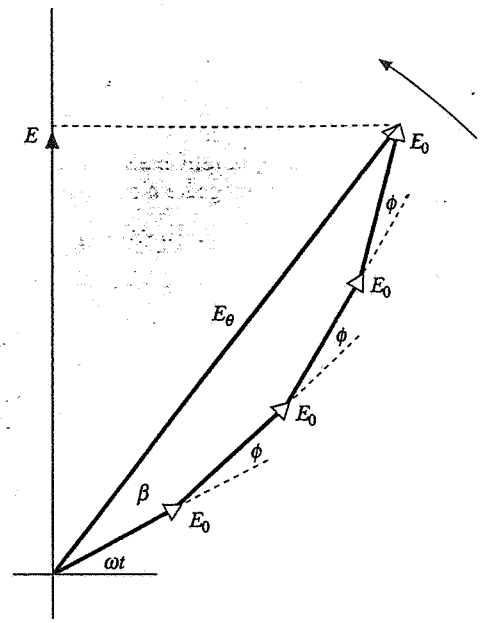


Figura 10 Esempio 3. Quattro onde vengono sommate con il metodo grafico facendo uso dei vettori di fase.

to β rispetto ad E_1, ottenuti graficamente mediante righello e compasso, sono: $E_\theta = 3.8\ E_0$ e $\beta = 22.5°$. In altre parole,

$$E(t) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 3.8E_0 \text{ sen}(\omega t + 22.5°).$$

Verificare questo risultato risolvendo il problema per via trigonometrica o con calcoli geometrici a partire dal diagramma delle fasi di figura 10.

45-4 INTERFERENZA DA PELLICOLE SOTTILI

I colori che vediamo quando la luce del sole incide su una bolla di sapone, su una chiazza d'olio o sulle ali di un colibrì, sono provocati dall'interferenza delle onde luminose riflesse su entrambe le superfici di una sottile pellicola trasparente. Lo spessore della pellicola è tipicamente dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda della luce. Pellicole sottili depositate su elementi ottici, come le lenti fotografiche, possono ridurre la riflessione e aumentare l'intensità della luce trasmessa. Rivestimenti sottili sui vetri da finestra possono incrementare la riflettività per la radiazione infrarossa, limitando questo effetto per la radiazione visibile. Con questo accorgimento è possibile ridurre il surriscaldamento degli edifici per effetto del sole.

A seconda dello spessore, una lamina sottile può essere perfettamente riflettente o perfettamente trasparente per la luce di una certa lunghezza d'onda, come è illustrato nella figura 11. Questi effetti derivano dal fenomeno di interferenza che può essere costruttivo o distruttivo.

Nella figura 12 si vede una lamina di spessore uniforme d illuminata da una sorgente puntiforme S di luce monocromatica a lunghezza d'onda λ. L'occhio occupa una posizione tale che un dato raggio incidente i, proveniente dalla sorgente, lo colpisce sotto forma di raggio riflesso r_1, dopo l'impatto sulla superficie fron-

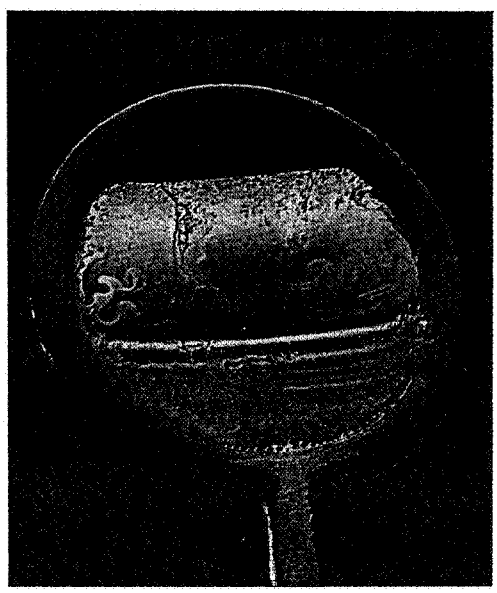


Figura 11 Una pellicola di acqua saponata tesa entro una spira realizzata con un filo metallico, vista in luce riflessa. La parte scura in alto non è data da una lacerazione della pellicola. Si presenta così perché la pellicola di liquido, drenando per gravità, diventa in quella zona così sottile da provocare interferenza distruttiva tra la luce riflessa dalla superficie anteriore della pellicola e quella riflessa dalla superficie posteriore.

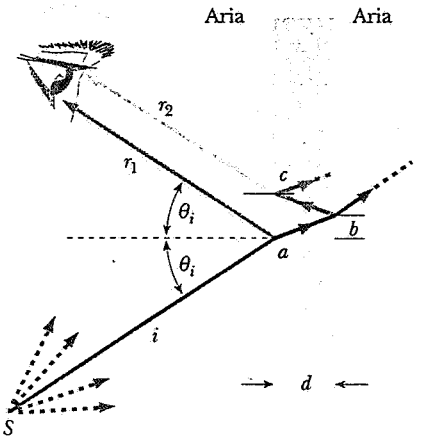


Figura 12 La luce proveniente dalla sorgente S viene osservata dopo una riflessione su una pellicola sottile. L'occhio è colpito dai raggi riflessi dalle superfici anteriore e posteriore della pellicola, e l'intensità della luce risultante dipende dalla differenza di fase nella combinazione tra le due onde. Si assume che il mezzo in cui è immersa la pellicola sia aria.

ISBN 88-408-0777-2

tale della lamina in *a*. Il raggio incidente in *a* penetra pure nella lamina come raggio rifratto e viene riflesso dalla superficie posteriore della lamina nel punto *b*; quest'ultimo emerge poi dalla superficie anteriore della lamina attraverso il punto *c* e raggiunge egualmente l'occhio come raggio r_2. La geometria di figura 12 impone che i raggi r_1 ed r_2 siano paralleli. Dato che sono stati generati dalla medesima sorgente puntiforme, essi sono pure coerenti e sono così in grado di interferire. Considerato che questi due raggi hanno viaggiato per cammini di differente lunghezza, hanno attraversato mezzi diversi e – come vedremo – hanno subito tipi differenti di riflessione in *a* e in *b*, sussiste una differenza di fase tra di loro. L'intensità percepita dall'occhio, sollecitato dai raggi paralleli provenienti dalla regione *ac* della lamina, è determinata da questa differenza di fase.

Per incidenza quasi normale ($\theta_i \approx 0$ in figura 12) la differenza di cammino geometrico dei due raggi uscenti da *S* sarà approssimativamente $2d$. Si potrebbe pensare che l'onda risultante riflessa dalla lamina in un intorno di *a* sia un massimo di interferenza, se la distanza $2d$ è un multiplo intero di lunghezze d'onda. Questa affermazione deve essere modificata per due motivi.

Anzitutto dobbiamo considerare che la lunghezza d'onda della luce all'interno della lamina è λ_n anziché λ, che è la lunghezza d'onda in aria, cioè dobbiamo considerare i *cammini ottici* anziché i *cammini geometrici*. Le lunghezze d'onda λ e λ_n sono legate dall'equazione 13 del capitolo 43,

$$\lambda_n = \lambda/n, \tag{15}$$

ove *n* è l'indice di rifrazione della lamina.

Per mettere in evidenza il secondo punto, facciamo l'ipotesi che la lamina sia così sottile che $2d$ sia di gran lunga minore di una lunghezza d'onda. La differenza di fase fra le due onde, in questo caso, sarebbe prossima a zero e ci aspetteremmo che la lamina appaia luminosa in riflessione. Invece essa appare scura, come è chiaramente messo in evidenza nella figura 11, dove l'azione della gravità produce una pellicola a forma di cuneo, estremamente sottile all'estremità in alto. Continuando lo scorrimento verso il basso, le dimensioni della zona scura aumentano. Si può spiegare questo e altri fenomeni simili ipotizzando che uno dei due raggi della figura 12 subisca un improvviso cambiamento di fase pari a π (= 180°) associato con la riflessione alla superficie aria-lamina. Come vedremo, è il raggio riflesso dalla superficie che subisce questo cambiamento di fase; l'altro raggio non subisce brusche variazioni di fase né all'atto della trasmissione attraverso la superficie superiore, né in quello della riflessione sulla superficie inferiore.

Abbiamo discusso nel paragrafo 19-9 i cambiamenti di fase che avvengono nella riflessione di onde trasversali in una corda. Per estendere questi concetti, consideriamo la corda composta della figura 13, che consiste di due parti con differenti masse lineiche (masse per unità di lunghezza, dette anche densità lineari), tirata con una certa tensione. Un impulso si muove verso destra nella figura 13*a* avvicinandosi alla giunzione. A questo punto l'impulso verrà in parte riflesso e in parte trasmesso oltre; quello riflesso risulterà *in fase* con l'impulso incidente. Nella figura 13*b* la situazione è invertita, trovandosi l'impulso incidente nella corda più leggera. In questo caso l'impulso riflesso è sfasato di π (= 180°) rispetto a quello incidente. In ogni caso l'impulso trasmesso è in fase con quello incidente.

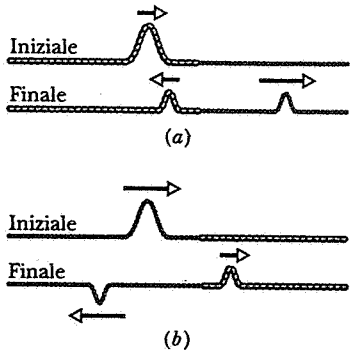


Figura 13 Cambiamenti di fase nella riflessione provocata dalla giunzione tra due corde di densità lineare diversa. La velocità dell'onda è maggiore nella corda più leggera. (*a*) L'impulso incidente si trova inizialmente nella corda più pesante. (*b*) L'impulso incidente proviene dalla corda più leggera.

La figura 13*a* suggerisce il confronto con un'onda luminosa che, nel vetro, si avvicina a una superficie oltre la quale c'è un mezzo otticamente meno denso (con indice di rifrazione minore) come l'aria. La figura 13*b* è paragonabile a un'onda luminosa che si avvicina al vetro provenendo dall'aria. Riassumendo, in ottica, quando la riflessione avviene su una superficie oltre la quale si trova un mezzo con indice di rifrazione *minore*, l'onda riflessa *non* subisce *variazione di fase;* quando il mezzo che si trova oltre la superficie ha un indice *maggiore,* si ha uno sfasamento di π.* L'onda trasmessa in nessun caso subisce sfasamenti.

Adesso possiamo tenere conto dei due fattori che determinano la natura dell'interferenza, cioè differenze

* Queste affermazioni, che possono essere rigorosamente dimostrate a partire dalle equazioni di Maxwell (vedi anche il paragr. 45-5), vanno modificate nel caso di luce che incide sulla superficie di separazione con un mezzo meno denso con angolo tale da provocare riflessione totale. Vanno pure riviste nel caso di riflessione su superfici metalliche.

nei cammini ottici e sfasamento nella riflessione. Nel caso dei due raggi della figura 12, si ha intensità *massima*, nell'ipotesi di incidenza normale se

$$2d = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_n \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Il termine $\frac{1}{2}\lambda_n$, introdotto nella formula, tiene conto dello sfasamento che si ha nella riflessione, dato che una variazione di fase di 180° equivale a mezza lunghezza d'onda. Sostituendo λ/n a λ_n si ottiene infine

$$2dn = (m + \tfrac{1}{2})\lambda \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \text{ (massimi)}. \quad (16)$$

Le condizioni che si devono verificare per avere minimi d'intensità sono

$$2dn = m\lambda \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \text{ (minimi)}. \quad (17)$$

Queste equazioni sono valide quando gli indici di rifrazione dei mezzi a contatto con le due facce della pellicola sono *entrambi* maggiori o minori dell'indice di rifrazione della pellicola. Solo in questo caso ci sarà uno sfasamento relativo di 180° dovuto alle riflessioni sulle due superfici. Una sottile lamina di acqua in aria e una pellicola di aria nello spazio fra due lastre di vetro sono esempi di casi ai quali si applicano le equazioni 16 e 17. L'esempio 5 permette di studiare un caso per il quale non valgono le suddette equazioni.

Se lo spessore della pellicola non è uniforme come avviene nella figura 11, dove la pellicola è cuneiforme, in certe parti di essa si ha interferenza costruttiva, in altre distruttiva. Appaiono bande di massima e minima intensità, che sono chiamate *frange di spessore costante*. La larghezza e il passo delle frange dipendono dalla variazione dello spessore d della lamina. Se, anziché con luce monocromatica, la pellicola è illuminata con luce bianca, la luce riflessa dalle varie parti di essa sarà modificata dalle diverse interferenze costruttive o distruttive che hanno luogo. Questo spiega la colorazione vivace delle bolle di sapone e delle chiazze d'olio.

Le frange del tipo descritto, cioè frange che appaiono localizzate e associate allo spessore variabile della pellicola, si possono formare soltanto se la pellicola è «sottile», cioè se d non è più grande di alcune lunghezze d'onda della luce. Per lamine molto spesse (cioè $d \approx 1$ cm) la differenza di cammino fra i due raggi della figura 12 è uguale a moltissime lunghezze d'onda e la differenza di fase in un dato punto cambia rapidamente anche per piccoli spostamenti da a. Per pellicole «sottili» invece la differenza di fase nel punto a è la stessa che si ha in punti sufficientemente vicini; si formano così sulla pellicola, come si vede nella figura 11, caratteristiche «chiazze luminose». Le frange di interferenza possono essere prodotte anche da lamine spesse ma, in tal caso, anziché essere localizzate sulla lamina, si formano all'infinito. (si veda il paragrafo 45-6).

Esempio 4 Una pellicola di acqua ($n = 1.33$) in aria, ha uno spessore di 320 nm. Quali colori appariranno in luce riflessa se essa è illuminata con luce bianca incidente normalmente?

Soluzione Risolvendo l'equazione 16 rispetto a λ, otteniamo

$$\lambda = \frac{2dn}{m + \frac{1}{2}} = \frac{(2)(320\text{ nm})(1.33)}{m + \frac{1}{2}} = \frac{851\text{ nm}}{m + \frac{1}{2}} \quad \text{(massimi)}.$$

Dall'equazione 17 si ricavano i minimi:

$$\lambda = \frac{851\text{ nm}}{m} \quad \text{(minimi)}.$$

I massimi e i minimi si verificano in corrispondenza delle seguenti lunghezze d'onda:

m	0 (max)	1 (min)	1 (max)	2 (min)	2 (max)
λ (nm)	1702	851	567	426	340

Soltanto il massimo corrispondente a $m = 1$ si trova nella regione del visibile (da 400 a 700 nm circa); la luce di lunghezza d'onda 569 nm ha un colore giallo-verde. Se si usa luce bianca per illuminare la lamina, la componente giallo-verde è messa in risalto quando si osserva in riflessione. Di che colore è la luce trasmessa attraverso la lamina?

Esempio 5 Spesso le lenti sono rivestite con un sottile strato di sostanze trasparenti come MgF_2 ($n = 1.38$) per ridurre la riflessione sulla superficie del vetro. Quanto deve essere spesso lo strato di rivestimento per produrre il minimo di riflessione al centro dello spettro visibile ($\lambda = 550$ nm)?

Soluzione Facciamo l'ipotesi che la luce colpisca la lente con incidenza quasi normale (nella figura 14, θ è esagerato per chiarezza di disegno) e cerchiamo le condizioni per cui r_1 ed r_2 interferiscono in modo distruttivo. Non possiamo utilizzare l'equazione 17 perché in questo caso *ciascun* raggio subisce uno sfasamento di 180°, dato che, sia alla superficie superiore che su quella inferiore dello strato di MgF_2, la riflessione avviene nel passaggio da un mezzo con indice di rifrazione minore a un mezzo con indice di rifrazione maggiore.

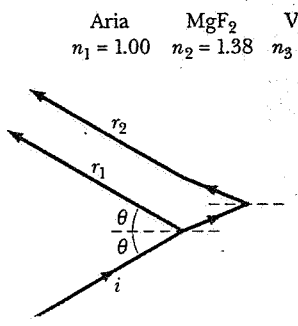


Figura 14 Esempio 5. Riflessioni indesiderate da una superficie di vetro possono essere soppresse (per una certa lunghezza d'onda) ricoprendo il vetro con una pellicola di spessore opportuno.

 ISBN 88-408-0777-2

Essendosi prodotto uno sfasamento *complessivo* nullo nelle due riflessioni, la differenza dei cammini ottici necessaria perché si abbia interferenza distruttiva è $(m + \frac{1}{2})\,\lambda_n$ (si confronti con l'equazione 16). La condizione che deve essere soddisfatta è quindi:

$$2dn = (m+\tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \text{(minimi)}.$$

Risolvendo rispetto a d e ponendo $m = 0$, si ottiene

$$d = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{2n} = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550\ \text{nm}}{(4)(1.38)} = 100\ \text{nm}.$$

Esempio 6 Nella figura 15 si vede una lente piano-convessa avente raggio di curvatura R, appoggiata su una lastra di vetro piana levigata e illuminata dall'alto con luce di lunghezza d'onda λ. Le frange circolari di interferenza (dette *anelli di Newton*) che appaiono associate con il sottile strato di spessore variabile che si trova tra la lente e il piano, sono visibili nella figura 16. Trovare i raggi dei cerchi su cui si hanno i massimi di interferenza.

Soluzione In questo caso lo sfasamento di 180° avviene nella parte *bassa* anziché in quella alta dello strato di aria perché solo questa riflessione viene prodotta passando in un mezzo con indice di rifrazione maggiore. Tuttavia la condizione per avere i massimi resta la stessa (eq. 16) ed è

$$2d = (m+\tfrac{1}{2})\lambda \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{18}$$

attribuendo il valore $n = 1$ per lo strato d'aria. Dalla geometria di figura 15 possiamo scrivere

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Avendo $r/R \ll 1$, possiamo sviluppare in serie binomiale l'espressione fra parentesi quadre, arrestandoci ai primi due termini e ottenendo

$$d = R - R\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \ldots\right] \approx \frac{r^2}{2R}.$$

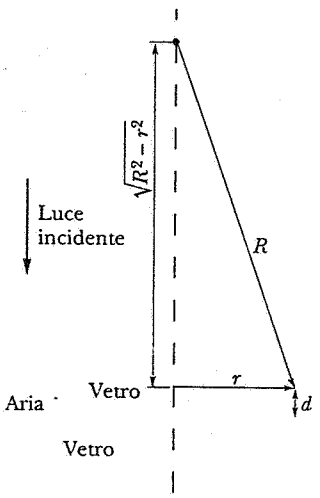


Figura 15 Esempio 6. Dispositivo per osservare gli anelli di Newton.

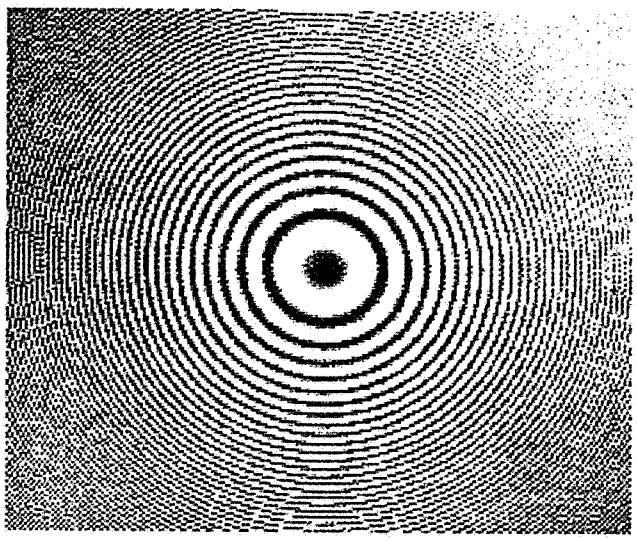


Figura 16 Frange d'interferenza circolari (anelli di Newton) ottenuti con il dispositivo di figura 15.

Combinando questo risultato con l'equazione 18, si giunge a

$$r = \sqrt{(m+\tfrac{1}{2})\lambda R} \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \text{(massimi)},$$

che dà i raggi degli anelli luminosi. Se si fa uso di luce bianca, ciascuna componente dello spettro produrrà un proprio insieme di frange circolari e tali insiemi appariranno sovrapposti.

Si noti che $r > 0$ per $m = 0$. Ciò significa che il primo cerchio luminoso ha raggio finito, e di conseguenza il centro dev'essere scuro, come si vede nella figura 16. Questa osservazione può essere considerata un'evidenza sperimentale del cambiamento di fase di 180° associato alla riflessione e utilizzato nell'equazione 18.

45-5 REVERSIBILITÀ OTTICA E CAMBIAMENTI DI FASE NELLA RIFLESSIONE *(Facoltativo)*

G.G. Stokes (1819 -1903) fece uso del principio della reversibilità ottica per studiare la riflessione della luce su una superficie di separazione tra due mezzi. Il principio stabilisce che, in assenza di assorbimento, se si inverte il verso di propagazione di un raggio di luce che ha subito riflessione o rifrazione, il cammino percorso a ritroso è lo stesso. Questo ci ricorda quanto avviene in meccanica, dove ogni sistema può evolversi in un verso come pure nel verso opposto se non avviene assorbimento di energia, come ad esempio per attrito.

Nella figura 17*a*, un'onda di ampiezza E si riflette e si rifrange sulla superficie che separa i mezzi 1 e 2, dove $n_2 > n_1$. L'ampiezza dell'onda riflessa è $r_{12}E$, in cui r_{12} è il *coefficiente di riflessione relativo all'ampiezza* e l'ampiezza dell'onda rifratta è $t_{12}E$, in cui t_{12} è il *coefficiente di trasmissione relativo all'ampiezza*.

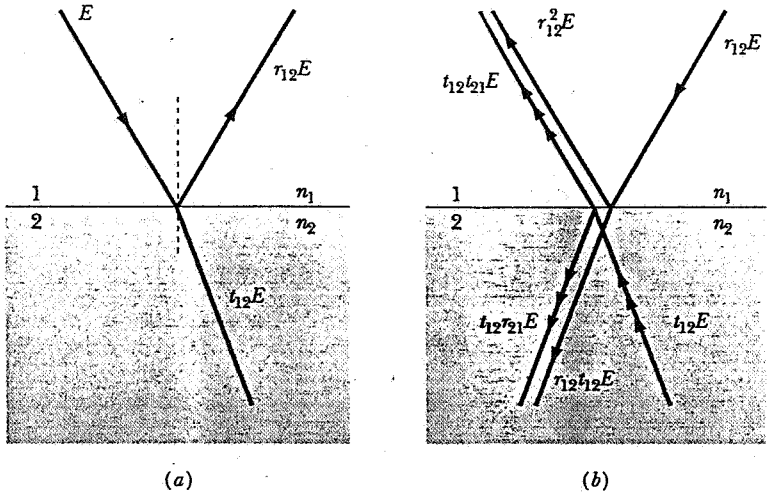


Figura 17 (*a*) Un raggio viene riflesso e rifratto in corrispondenza di un'interfaccia di separazione. (*b*) La situazione otticamente invertita: i due raggi in basso a sinistra devono annullarsi.

Il segno del coefficiente indica la fase relativa della componente riflessa o trasmessa. Limitiamoci a considerare la possibilità di sfasamenti di 0° o 180°. Se, per esempio, $r_{12} = +0.5$, si ha nella riflessione una riduzione di ampiezza della metà del valore iniziale senza sfasamento. Per $r_{12} = -0.5$ ha luogo invece uno sfasamento di 180° perché

$$E \operatorname{sen}(\omega t + 180°) = -E \operatorname{sen}\omega t.$$

Nella figura 17*b* i raggi indicati con $r_{12}E$ e $t_{12}E$ hanno i versi opposti al caso precedente. Il raggio $r_{12}E$ indicato, nelle figure, con una freccia soltanto, subisce riflessione e rifrazione dando origine a due raggi le cui ampiezze sono r_{12}^2 e $t_{12}r_{12}E$. Anche il raggio $t_{12}E$, indicato con tre frecce, è riflesso e rifratto producendo i raggi di ampiezza $t_{12}t_{21}E$ e $t_{12}r_{21}E$. Si osservi che si è usato r_{12} per descrivere un raggio nel mezzo 1 riflesso dal mezzo 2 ed r_{21} per descrivere un raggio nel mezzo 2 riflesso dal mezzo 1. Analogamente t_{12} si riferisce a un raggio che passa dal mezzo 1 al mezzo 2 e t_{21} a un raggio che passa dal mezzo 2 al mezzo 1.

Basandoci sul principio di reversibilità, i due raggi in alto a sinistra nella figura 17*b* devono essere equivalenti al raggio incidente nella figura 17*a* invertito; i due raggi in basso a sinistra nella figura 17*b* si devono annullare. La seconda condizione richiede che

$$r_{12}t_{12}E + t_{12}r_{21}E = 0,$$

ossia

$$r_{12} = -r_{21}.$$

Questo risultato ci dice che, se confrontiamo un'onda riflessa da un mezzo 1 con una riflessa dal mezzo 2, esse si comportano diversamente nel senso che l'una o l'altra va incontro a un cambiamento di fase di 180°.

L'esperienza mostra che è il raggio riflesso dal mezzo otticamente più denso a subire il cambiamento di fase di 180°. Lo si può dimostrare con l'apparato mostrato in figura 18*a*, cui si dà il nome di esperimento dello specchio di Lloyd. In un punto arbitrario P sullo schermo avviene un'interferenza causata dalla sovrapposizione dei raggi diretto e riflesso. Possiamo analizzare il fenomeno come un effetto di interferenza tra onde provenienti da due sorgenti, di cui una (S') è l'immagine virtuale di S nello specchio piano. Naturalmente sussiste un'importante differenza tra la disposizione di figura 18 e l'esperimento della doppia fenditura: la luce preveniente dalla sorgente virtuale S' ha subito riflessione sullo specchio e quindi è stata sottoposta a un cambiamento di fase di 180°. Come risultato di questo cambiamento di fase, l'estremità inferiore dello schermo (in O) mostra una frangia scura, anziché la frangia chiara che appare nel corrispondente punto (il centro dello schermo) nell'esperimento di Young. Detto in altri termini, la comparsa della frangia scura in O dimostra che uno dei due fasci interessati nel fenomeno di interferenza è stato sfasato di 180°. Dato che non vi è nulla che possa mutare la fase del raggio diretto SP, dev'essere il raggio riflesso ad aver subito il cambiamento di fase. Ciò dimostra che la riflessione da parte di un mezzo otticamente più denso provoca un cambiamento di fase di 180°. ■

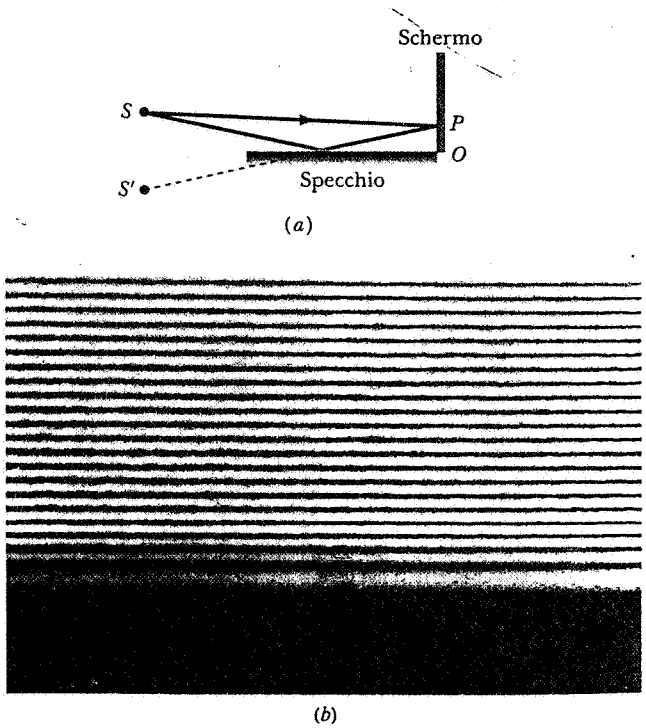


Figura 18 (*a*) Dispositivo sperimentale per lo specchio di Lloyd. Le frange che appaiono sullo schermo sono il risultato dell'interferenza tra i raggi diretto e riflesso. (*b*) Riproduzione delle frange osservate con l'esperimento dello specchio di Lloyd.

ISBN 88-408-0777-2

45-6 INTERFEROMETRO DI MICHELSON*

Un *interferometro* è uno strumento che può essere usato per misurare, con grande precisione, lunghezze o variazioni di lunghezza, per mezzo delle frange di interferenza. Descriviamo il tipo che fu costruito da A.A. Michelson (1852 -1931) nel 1881.

Consideriamo la luce che esce dal punto P di una sorgente estesa S (fig. 19) e colpisce lo specchio semiargentato M (talvolta chiamato *separatore del fascio*). Lo spessore di argento depositato sullo specchio è abbastanza sottile da permettere che metà della luce incidente venga trasmessa, mentre l'altra metà è riflessa; nella figura, per convenienza, abbiamo supposto che lo specchio abbia spessore trascurabile. In M la luce si divide in due onde, una trasmessa verso M_1 e l'altra riflessa verso M_2. Le onde riflesse dagli specchi M_1 ed M_2 si propagano in versi opposti rispetto a quelle incidenti, giungendo anche all'occhio E. Siccome le due onde sono coerenti, essendo originate dallo stesso punto della sorgente, interferiscono.

Se gli specchi M_1 ed M_2 sono esattamente perpendicolari l'uno all'altro, si osserva lo stesso effetto che si osserverebbe con luce proveniente da una sorgente estesa S incidente su uno strato di aria, compreso fra due vetri, di spessore uniforme uguale a $d_2 - d_1$. Le frange di interferenza che compaiono sono causate da piccole variazioni dell'angolo di incidenza della luce proveniente da punti diversi della sorgente estesa che colpisce la lamina equivalente di aria. Per lamine *spesse*, una piccolissima variazione nell'angolo di incidenza può portare a una differenza di cammino di una lunghezza d'onda.

Se si sposta avanti o indietro M_2, si cambia lo spessore della lamina equivalente di aria. Supponiamo che il centro dell'insieme di frange (circolari) sia luminoso e che M_2 venga spostato esattamente quanto necessario perché la prima frangia luminosa circolare si sposti al centro del sistema. Il cammino di andata e ritorno del fascio luminoso riflesso da M_2 è cambiato di una lunghezza d'onda. Questo significa (poiché la luce passa due volte attraverso la lamina equivalente di aria) che lo specchio è stato spostato di un tratto pari a $\frac{1}{2}\lambda$.

L'interferometro è usato per misurare variazioni di lunghezza, contando il numero di frange di interferenza che attraversano il campo visivo, quando M_2 si muove. In questo modo, se si conta un grande numero di frange, si possono fare misure molto precise di lunghezza.

Michelson misurò la lunghezza del metro campione, conservato a Parigi, in funzione della lunghezza d'onda della luce rossa emessa da una sorgente luminosa contenente cadmio. Egli dimostrò che il metro campione è equivalente a 1 553 163.5 lunghezze d'onda della luce rossa del cadmio. Per questo suo lavoro gli fu assegnato il premio Nobel nel 1907. Gli esperimenti di Michelson gettarono le basi per un eventuale abbandono (avvenuto poi nel 1961) del campione di metro come unità standard di lunghezza e per la ridefinizione del metro in termini di lunghezza d'onda della luce. Nel 1983, come abbiamo visto, venuta meno l'adeguatezza anche di questa lunghezza d'onda standard a soddisfare i requisiti di crescente precisione richiesti dalla scienza e dalla tecnologia, anch'essa è stata sostituita da una nuova unità basata su un valore definito della velocità della luce.

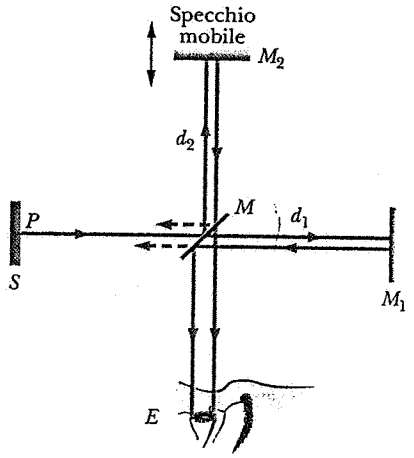


Figura 19 In questo interferometro di Michelson si vede il percorso del raggio originato nel punto P di una sorgente estesa S. Il raggio si divide in due parti nel punto M; i due raggi vengono riflessi dagli specchi M_1 ed M_2 e si ricombinano in M. Lo specchio M_2 è scorrevole per poter variare la differenza di cammino tra i due raggi.

* Si veda Shankland R.S., *Michelson: America's First Nobel Prize Winner in Science*, «The Physics Teacher», gennaio 1977, 19. Si veda pure Shankland R.S., *Michelson and his Interferometer*, «Physics Today», aprile 1974, 36.

Esempio 7 Una sorgente di luce gialla ($\lambda = 589.00$ nm) investe un interferometro di Michelson. Quante frange luminose si devono contare, se lo specchio viene spostato di 1.0000 cm?

Soluzione Ciascuna frangia corrisponde a uno spostamento dello specchio di mezza lunghezza d'onda. Il numero di frange equivale dunque al numero di semilunghezze d'onda contenute in 1.0000 cm, ovvero

$$\frac{1.0000 \times 10^{-2}\ \text{m}}{\frac{1}{2}(589.00 \times 10^{-9}\ \text{m})} = 33956 \text{ frange.}$$

45-7 INTERFEROMETRO DI MICHELSON E PROPAGAZIONE DELLA LUCE *(Facoltativo)*

Nel capitolo 21 è stata presentata l'ipotesi di Einstein, ora ben verificata, che la luce nel vuoto si propaghi sempre alla medesima velocità c, indipendentemente dalla velocità relativa della sorgente rispetto all'osservatore. Abbiamo evidenziato come questa ipotesi fosse in disaccordo con il modo di considerare la propagazione ondulatoria da parte dei fisici del diciannovesimo secolo. Fu difficile, per questi fisici, abituati ai problemi della meccanica classica di quel tempo, concepire che un'onda si potesse propagare senza un mezzo. Se si fosse potuto stabilire il mezzo di propagazione, la velocità della luce c sarebbe stata considerata come velocità *rispetto a questo mezzo*, così come la velocità del suono è sempre riferita a un mezzo, come ad esempio l'aria. Sebbene non fosse ovvio in quale mezzo si propagasse la luce, i fisici ne postularono uno, chiamato *etere*, e fecero l'ipotesi che le proprietà dell'etere fossero tali da non poterlo rivelare con mezzi ordinari come, ad esempio, pesandolo.

Nel 1881 (24 anni prima dell'ipotesi di Einstein) A.A. Michelson si assunse il compito di mettere in evidenza l'esistenza fisica dell'etere, ammesso che esistesse davvero, assoggettandolo a una verifica fisica diretta. In particolare Michelson, in seguito affiancato da E. W. Morley, cercò di misurare la velocità u con la quale la Terra si muove nell'etere. L'interferometro di Michelson fu lo strumento da essi usato per questo esperimento, oggi celebre, di Michelson-Morley.

L'interferometro che si muove insieme alla Terra con velocità **u** rispetto all'etere è equivalente a un interferometro fermo rispetto al quale l'etere si muove con velocità **-u**, come è illustrato nella figura 20. Si consideri un'onda luminosa che si muove lungo il percorso MM_1M e un'altra che si muove lungo il percorso MM_2M. L'analogo classico della prima onda è una persona che fa avanzare una barca a remi percorrendo una distanza d, prima nel verso della corrente e dopo in verso opposto, l'analogo della seconda onda è la stessa barca che percorre avanti e indietro una distanza d, muovendosi perpendicolarmente alla corrente.

Nell'ipotesi che esista l'etere la velocità della luce nel tratto MM_1 è $c + u$ e nel tratto di ritorno M_1M è $c - u$. Il tempo t_1 necessario per il percorso completo è

$$t_1 = \frac{d}{c+u} + \frac{d}{c-u} = d\frac{2c}{c^2-u^2} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{1-(u/c)^2}.$$

La velocità della luce, sempre *nell'ipotesi che esista l'etere*, lungo il tratto MM_2 vale $\sqrt{c^2-u^2}$ come è suggerito nella figura 20. La stessa velocità si ha pure nel tratto M_2M, sicché il tempo t_2 richiesto per compiere tutto il cammino è

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-(u/c)^2}}.$$

La differenza di tempo impiegato per percorrere i due cammini è

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2d}{c}\left\{\left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1} - \left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}.$$

Se $u/c \ll 1$, possiamo sviluppare in serie binomiale le quantità contenute all'interno delle parentesi quadrate, arrestandoci ai primi due termini. Si ottiene così

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\left\{\left[1+\left(\frac{u}{c}\right)^2+\ldots\right] - \left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2+\ldots\right]\right\} = \frac{2d}{c}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right\} = \frac{du^2}{c^3}. \qquad (19)$$

Ruotiamo ora tutto l'interferometro di 90°. Questa operazione scambia le condizioni sotto cui si percorrono i due cammini: il cammino MM_1M diventa perpendicolare a **u** ed MM_2M diventa parallelo. Anche il ritardo fra le due onde che arrivano all'occhio è invertito; questo provoca uno sfasamento fra le onde che si combinano e sposta le posizioni dei massimi di interferenza. L'esperimento consiste nel ricercare spostamenti delle frange di interferenza, quando si ruota l'intero dispositivo.

La *variazione* nella differenza di tempo è $2\Delta t$, che corrisponde a una differenza di fase di $\Delta\phi = \omega(2\Delta t)$, dove ω $(= 2\pi c/\lambda)$ è la pulsazione dell'onda luminosa. Il massimo numero di frange che si prevede debba spostarsi per una rotazione di 90° è data da

$$\Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\omega(2\Delta t)}{2\pi} = \frac{2c\Delta t}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2, \qquad (20)$$

dove si è utilizzata l'equazione 19 per Δt.

Michelson-Morley realizzarono un interferometro in cui risultava $d = 11$ m (ottenuto con riflessioni multiple tra gli specchi) e $\lambda = 5.9 \times 10^{-7}$ m. Se si fa l'ipotesi che u sia dell'ordine della velocità orbitale della terra, allora $u/c \approx 10^{-4}$. Il numero massimo di frange che si prevede debba muoversi quando l'interferometro ruota di 90° è

$$\Delta N = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{(2)(11\text{ m})}{5.9\times10^{-7}\text{ m}}(10^{-4})^2 = 0.4.$$

Sebbene fosse previsto uno spostamento di 0.4 frange, Michelson e Morley si misero in condizioni di poter rivelare uno spostamento di 0.01 frange. *Emerse tuttavia dall'esperimento che non vi era alcun percettibile spostamento di frange!*

L'analogia tra un'onda luminosa nell'etere e la barca che si muove nell'acqua, che nel 1881 sembrava tanto ovvia, è semplicemente sbagliata. Come pure è sbagliato il risultato che si ipotizzerebbe per le onde luminose basandosi su questa analogia. Quando si ripete l'analisi dell'esperimento tenendo conto dell'ipotesi di

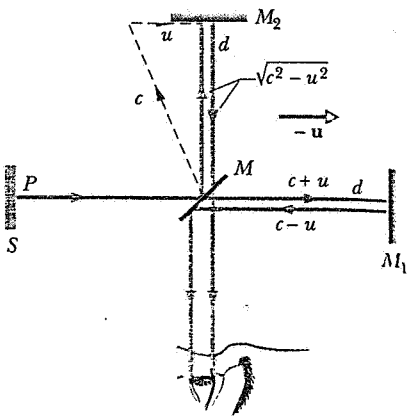


Figura 20 L'*etere* «scorre» attraverso l'interferometro di Michelson con velocità-**u**. Le velocità indicate sono calcolate in base all'ipotesi (poi risultata sbagliata) dell'esistenza dell'etere.

ISBN 88-408-0777-2

Einstein, il risultato negativo ottenuto nell'esperimento è previsto, dato che la velocità della luce è c per tutti i percorsi. Il moto della Terra attorno al Sole e la rotazione di 90° dell'interferometro non influenzano, in base all'ipotesi di Einstein, la velocità della luce nell 'interferometro.

Dovrebbe essere chiaro che, sebbene l'ipotesi di Einstein sia in accordo completo con l'esperienza di Michelson-Morley, questo esperimento, da solo, non può provare l'ipotesi di Einstein. Diceva Einstein che un numero comunque grande di esperimenti non avrebbe potuto dimostrare l'esattezza dell'ipotesi, ma che sarebbe stato sufficiente il disaccordo con un solo esperimento per dimostrare che l'ipotesi era sbagliata. La nostra attuale fiducia nell'ipotesi di Einstein è basata sul fatto che essa è coerente con un gran numero di esperimenti che sono stati progettati per verificarne la validità. E quel «singolo esperimento», che l'avrebbe inficiata, fino ad oggi non è mai stato trovato. ■

DOMANDE

1. L'esperienza di Young è un esperimento di interferenza, di diffrazione, oppure di interferenza e diffrazione?
2. Nell'esperienza delle due fenditure di Young, facendo uso di una sorgente di luce monocromatica da laboratorio, perché è necessario lo schermo A nella figura 6? Se la sorgente di luce fosse un raggio laser, lo schermo A sarebbe superfluo.. Perché?
3. Che cosa accade nella figura di interferenza se il dispositivo della figura 4 viene immerso in acqua?
4. L'interferenza avviene anche per le onde sonore? Si tenga presente che il suono è un onda longitudinale e che la luce è un'onda trasversale.
5. Non è possibile osservare effetti d'interferenza tra raggi di luce provenienti da due separate lampade al vapore di sodio, ma si possono evidenziare fenomeni d'interferenza tra onde acustiche provenienti da due altoparlanti pilotati da due oscillatori separati. Spiegare perché.
6. Se è possibile l'interferenza fra onde luminose di diversa frequenza, si debbono poter osservare battimenti di luce, così come si ottengono battimenti sonori con due sorgenti acustiche le cui frequenze differiscono di poco. Discutere come si potrebbe mettere in evidenza sperimentalmente questo fenomeno.
7. Perché sono preferibili fenditure parallele ai forellini usati da Young per dimostrare l'interferenza?
8. Nella riflessione e nella rifrazione ha importanza la coerenza?
9. Descrivere la distribuzione dell'intensità di luce sullo schermo C della figura 4 se si copre una fenditura con un filtro rosso e l'altra con un filtro azzurro e si utilizza luce incidente bianca.
10. Se si copre una delle fenditure nella figura 4, quali variazioni di intensità luminosa avvengono al centro dello schermo?
11. Noi ci troviamo costantemente immersi in un campo di onde elettromagnetiche, provenienti dal Sole, dai segnali radiotelevisivi, dalle stelle e da altri corpi celesti. Perché queste onde non interferiscono l'una con l'altra?
12. Nel calcolare il moto ondulatorio risultante dalla sovrapposizione di una coppia di treni d'onda, quando si devono sommare le intensità e quando le ampiezze?
13. Nell'esperimento della doppia fenditura di Young, si supponga che lo schermo A della figura 6 contenga *due* fenditure parallele molto strette, anziché una. (*a*) Dimostrare che, se si sceglie in modo opportuno la distanza fra le fenditure, le frange di interferenza spariscono. (*b*) In queste condizioni, chiamereste coerenti i fasci che escono dalle fenditure S_1 e S_2 dello schermo B? Essi non producono frange di interferenza. (*c*) Discutere che cosa accadrebbe alle frange d'interferenza nel caso di una sola fenditura nello schermo A, se la larghezza della fenditura venisse fatta crescere gradualmente.
14. Giustificate questa affermazione: la figura 7*a* rappresenta un'onda sinusoidale (o cosinusoidale), mentre la figura 7*b* no. Infatti non si può assegnare una sola frequenza alla curva della figura 7*b*. Perché? (*Suggerimento*: Si pensi all'analisi di Fourier.)
15. Quasi tutti conosciamo le antenne radar oscillanti o ruotanti che producono fasci di microonde oscillanti o ruotanti. Sarebbe anche possibile produrre un fascio oscillante di microonde *senza* alcun movimento meccanico dell'antenna trasmittente. Ciò si ottiene facendo variare periodicamente la fase della radiazione all'uscita da varie sezioni della (lunga) antenna trasmittente. Verificate che, per interferenza costruttiva di varie parti dell'antenna fissa, si potrebbe davvero costruire in tal modo un fascio oscillante di microonde.
16. Che cosa provoca le fluttuazioni nelle ricezioni radio quando passa un aeroplano?
17. È possibile ottenere luce coerente da due sorgenti luminose che emettono radiazione a diversa lunghezza d'onda?
18. Un'automobile dirige i propri fari contro un muro. Perché non si producono frange di interferenza laddove i due fasci si incrociano?
19. Si supponga che la pellicola di rivestimento nella figura 14 abbia un indice di rifrazione maggiore di quella del vetro. Conserverebbe la sua funzione antiriflettente? Se così fosse, che differenza farebbe il rivestimento?
20. Quali condizioni si devono verificare perché si abbia un massimo di intensità quando si osserva una lamina sottile, per *trasparenza*?
21. Perché, per poter mostrare effetti di interferenza, una lamina deve essere *sottile* (bolle di sapone, chiazza d'olio, ecc.)? O li mostrerebbe ugualmente? Cosa si intende per «sottile»? Discutere.
22. Perché le lenti rivestite (si veda l'esempio 5) appaiono violacee in luce riflessa?
23. Gli ordinari vetri da finestra o da vetrina riflettono la luce su entrambe le facce piane, interna ed esterna. Perché non notiamo nessun effetto di interferenza?
24. Se bagnate gli occhiali per pulirli, mentre l'acqua evapora, vi accorgete che, per un breve intervallo di tempo, gli occhiali non riflettono più. Spiegate perché.
25. Se avete una lente con rivestimento come nell'esempio 5, che sorte subisce l'energia che altrimenti verrebbe riflessa? Viene assorbita dallo strato antiriflettente?
26. Considerate i seguenti oggetti che, esposti alla luce solare, appaiono colorati (1) bolle di sapone, (2) petali di rose, (3) la superficie interna di una valva di ostrica (iridescenza), (4) sottili chiazze d'olio, (5) rivestimenti antiriflettenti sulle lenti di una macchina fotografica e (6) le piume della coda di un pavone. Tutti i fenomeni, fatta eccezione per uno, sono dovuti

all'interferenza, senza che intervengano pigmenti. Di quale si tratta? Perché anche gli altri sembrano «colorati»?

27. Una pellicola di sapone tesa entro una spira metallica sorretta in aria appare scura nella sua porzione più sottile quando viene osservata in luce riflessa. Invece una fine pellicola d'olio galleggiante sull'acqua appare luminosa nella sua parte più sottile quando viene osservata analogamente dall'alto. Si spieghi questo fenomeno.
28. Piccolissime variazioni dell'angolo d'incidenza non mutano sensibilmente le condizioni d'interferenza su lamine «sottili». Non è così se la lamina è «spessa». Perché?
29. Un *piano ottico* è una lastra di vetro che è stata rettificata fino a renderla piana entro una piccola frazione di lunghezza d'onda. Come si può usare per verificare la rettificazione di una seconda lastra di vetro?
30. Nell'esperimento degli anelli di Newton, il punto centrale, osservato in riflessione, appare scuro o luminoso? Spiegare.
31. A proposito di cambiamenti di fase nella riflessione all'interfaccia tra due mezzi trasparenti, pensate che siano possibili sfasamenti diversi da 0 o π? Siete convinti che gli sfasamenti possano essere calcolati con rigore facendo uso delle equazioni di Maxwell?
32. Siano note le caratteristiche direzionali in ricezione di una data antenna radar. Che cosa si può dire riguardo le sue caratteristiche direzionali in trasmissione?
33. Una persona che si trova in una stanza oscura, guardando attraverso una finestrella, può vedere una seconda persona che si trova all'aperto, illuminata dalla luce del sole. La seconda persona invece non riesce a vedere la prima. Questa osservazione nega la validità del principio di reversibilità ottica? Si faccia l'ipotesi che non vi siano assorbimenti di luce.
34. Perché nell'esperienza di Michelson-Morley, è necessario ruotare l'interferometro?
35. Come si può interpretare, in base alla teoria della relatività di Einstein, il risultato negativo dell'esperimento di Michelson-Morley?
36. Se la lunghezza del cammino verso lo specchio mobile dell'interferometro di Michelson (fig. 19) eccede notevolmente quella verso lo specchio fisso (per esempio di oltre un metro), le frange cominciano a scomparire. Si spieghi perché. I laser aumentano di molto la possibilità di aumentare tale differenza di cammino. Perché?
37. Come si potrebbe costruire un'interferometro di Michelson acustico per misurare la lunghezza d'onda del suono? Si discutano le differenze con l'interferometro ottico.

PROBLEMI

Paragrafo 45-1 Interferenza da doppia fenditura

1. Una sorgente monocromatica verde, di lunghezza d'onda pari a 554 nm, illumina due strette fenditure parallele, distanti tra loro 7.7 μm. Si calcoli la deviazione angolare della frangia chiara del terz'ordine, $m = 3$, (*a*) in radianti e (*b*) in gradi.
2. In un esperimento dimostrativo dell'interferenza luminosa prodotta da una doppia fenditura, la distanza inizialmente pari a d tra le due strette fenditure viene raddoppiata. Come si deve modificare la distanza D tra lo schermo e le fenditure, al fine di mantenere lo stesso passo tra le frange proiettate sullo schermo? (La lunghezza d'onda della luce resta inalterata.)
3. Si conduca l'esperienza di Young utilizzando luce verde-azzurra da 512 nm di lunghezza d'onda. La distanza tra le fenditure è di 1.2 mm e queste distano dallo schermo 5.4 m. Qual è la distanza tra le frange illuminate riprodotte sullo schermo?
4. Progettare un dispositivo a doppia fenditura per produrre frange di interferenza con la separazione angolare di 1.00°, usando luce di lunghezza d'onda pari a 592 nm.
5. Un dispositivo interferenziale, a due fenditure, illuminato con la luce del sodio ($\lambda = 589$ nm) produce frange di interferenza con una separazione angolare di 0.23°. Per quale lunghezza d'onda si otterrebbe una separazione più grande del 10%? Si consideri piccolo l'angolo θ.
6. Un dispositivo con due fenditure, illuminato con luce del sodio ($\lambda = 589$ nm) produce frange di interferenza separate di 0.20°. Quanto diventerebbe la separazione angolare delle frange immergendo in acqua ($n = 1.33$) tutto il dispositivo?
7. In un sistema a due fenditure la distanza tra le fenditure è 5.22 mm e le fenditure distano 1.36 m dallo schermo. Su questo appaiono due figure di interferenza, una dovuta a luce di 480 nm e l'altra di 612 nm. Qual è la distanza sullo schermo tra le frange di interferenza del 3° ordine per le due diverse figure?
8. In un esperimento d'interferenza condotto in un ondametro (fig. 3), le sorgenti che vibrano in modo coordinato distano tra loro 120 mm. La distanza tra i massimi misurata a 2.0 m di distanza risulta di 180 mm. Sapendo che la velocità di propagazione delle onde è di 25 cm/s, calcolare la frequenza di vibrazione.
9. Sapendo che due fenditure separate di 0.15 mm e distanti da uno schermo 50 cm producono una figura d'interferenza che presenta una distanza di 18 mm tra il primo e il decimo minimo, calcolare la lunghezza d'onda della luce usata.
10. Una fenditura di un dispositivo interferenziale a due fenditure è coperta con una sottile lamina di mica ($n = 1.58$). Il punto centrale dello schermo è occupato in questo caso da una frangia luminosa di ordine 7. Se $\lambda = 550$ nm, qual è lo spessore della mica?
11. Tracciate in uno schizzo la figura d'interferenza che vi attendete nell'uso di due forellini anziché due fenditure.
12. Due sorgenti puntiformi di onde radio coerenti, distanti tra di loro 2.0 m, irraggiano segnali in fase di lunghezza d'onda $\lambda = 0.5$ m. Quanti punti di massima intensità incontrerebbe un rivelatore, che ruoti attorno alle sorgenti con percorso circolare e sullo stesso piano orizzontale?
13. All'ingresso di una sala per conferenze un fascio coerente di luce monocromatica di un laser a elio-neon ($\lambda = 632.8$ nm) illumina una doppia fenditura. Al di là di questa, il fascio percorre una distanza di 20.0 m fino a uno specchio posto sulla parete di fondo della sala e ripercorre la stessa distanza fino a uno schermo. (*a*) Se si vuole che la distanza tra i massimi di

ISBN 88-408-0777-2

interferenza sia di 10.0 cm, quale dovrebbe essere la distanza tra le due fenditure? (*b*) Descrivete che cosa si vede se il conferenziere appoggia una pellicola di plastica su una delle due fenditure. Il cammino ottico attraverso la pellicola è più lungo di 2.5 lunghezze d'onda rispetto al cammino equivalente in aria.

14. Una fenditura di un sistema a due fenditure è coperta da una sottile lastra di vetro di indice di rifrazione 1.4 e l'altra da una analoga lastra di indice di rifrazione 1.7. Nel punto dello schermo in cui, prima di inserire le due lastre, cadeva il massimo centrale si trova ora quella che era prima la quinta frangia luminosa. Supponendo che sia $\lambda = 480$ nm e che le lastre abbiano lo stesso spessore t, calcolare quest'ultimo.

15. Le due sorgenti puntiformi S_1 ed S_2 della figura 21 emettono onde coerenti. Dimostrare che curve come quella disegnata, per i punti delle quali è costante la differenza di fase fra i raggi r_1 ed r_2, sono iperboli. (*Suggerimento*: Una differenza di fase costante implica che sia costante la differenza di lunghezza tra r_1 ed r_2.) Il sistema di navigazione marittima OMEGA si fonda su questo principio. S_1 ed S_2 sono trasmettitori in fase. L'apparecchiatura di bordo rileva la differenza di fase ricevuta su un oscilloscopio e stabilisce la posizione della nave su un'iperbole. Il segnale ricevuto da un terzo trasmettitore serve poi a localizzare il punto-nave sull'iperbole.

16. La luce del sodio ($\lambda = 589$ nm) investe un sistema di due fenditure poste alla distanza $d = 0.180$ mm. Una lente sottile ($f = 1.13$ m) si trova nelle vicinanze della fenditura, come nella figura 5. Qual è la separazione lineare delle frange sullo schermo posto nel piano focale della lente?

17. La luce del sodio ($\lambda = 589$ nm) investe un sistema di due fenditure poste alla distanza $d = 2.0$ mm. D, distanza tra schermo e fenditure, vale 40 mm. Qual è l'errore percentuale che si commette nel trovare la posizione della decima frangia luminosa, se si utilizza l'equazione 1?

Paragrafo 45-2 Coerenza

18. La *lunghezza di coerenza* di un treno d'onda è quella distanza per la quale la costante di fase rimane immutata. (*a*) Se un singolo atomo emette luce coerente per la durata di 1×10^{-8} s, quant'è la lunghezza di coerenza del treno d'onda? (b) Si supponga che questo treno d'onda venga separato in due parti da uno specchio semiriflettente e in seguito ricomposto, dopo che un raggio ha percorso 5 m e l'altro 10 m. Le onde producono frange d'interferenza osservabili dall'occhio umano?

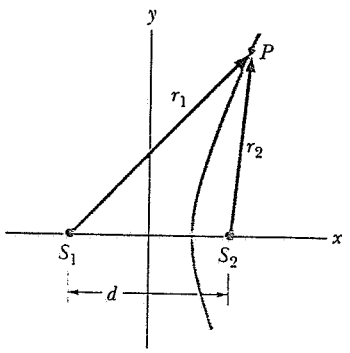


Figura 21 Problema 15.

Paragrafo 45-3 Intensità nell'interferenza da doppia fenditura

19. La sorgente A di un'emittente doppia di onde radio a media frequenza precede la sorgente B con una differenza di fase di 90°. Un rivelatore è posto a distanza r_A dalla prima, maggiore di 100 m rispetto alla distanza r_B che lo separa dalla seconda. Quant'è la differenza di fase al rivelatore, sapendo che le lunghezze d'onda sono di 400 m?

20. Si trovi la differenza di fase tra due onde provenienti da una doppia fenditura, in corrispondenza della frangia scura di ordine m.

21. Luce di lunghezza d'onda 600 nm incide normalmente su un sistema di due strette fenditure parallele distanti 0.60 mm. Rappresentare graficamente l'intensità della figura osservata su uno schermo lontano, in funzione dell'angolo θ, nell'intervallo $0 \leq \theta \leq 0.0040$ rad.

22. Calcolare, (*a*) col metodo vettoriale e (*b*) trigonometricamente, la somma delle seguenti quantità:

$$y_1 = 10 \operatorname{sen}\omega t,$$
$$y_2 = 8.0 \operatorname{sen}(\omega t + 30°).$$

23. Nella figura 22 S_1 ed S_2 sono sorgenti puntiformi di radiazione, eccitate dallo stesso oscillatore, coerenti e in fase tra loro. Situate a $d = 4.17$ m di distanza l'una dall'altra, emettono uguale potenza sotto forma di onde elettromagnetiche di lunghezza d'onda pari a 1.06 m. (*a*) Trovare le posizioni del primo (cioè del più vicino), del secondo e del terzo massimo del segnale ricevuto da un rivelatore D che si muove lungo l'asse Ox. (*b*) È nulla l'intensità del minimo più vicino? Giustificare la risposta.

24. Sommare, graficamente usando il metodo vettoriale (esempio 3), e algebricamente le seguenti quantità:

$$y_1 = 10 \operatorname{sen}\omega t,$$
$$y_2 = 14 \operatorname{sen}(\omega t + 26°),$$
$$y_3 = 4.7 \operatorname{sen}(\omega t - 41°).$$

25. Dimostrare che la semiampiezza $\Delta\theta$ delle frange di interferenza ottenute con un sistema di due fenditure è data da

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d},$$

se θ è sufficientemente piccolo da poter accettare l'approssimazione $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$. La semiampiezza è l'angolo sotteso dai due punti sullo schermo in cui le frange presentano intensità pari alla metà di quella al centro della frangia.

26. Una delle fenditure di un sistema a due fenditure è più larga dell'altra, in modo che, considerate a sé stanti, l'ampiezza della luce che raggiunge la parte centrale dello schermo, pro-

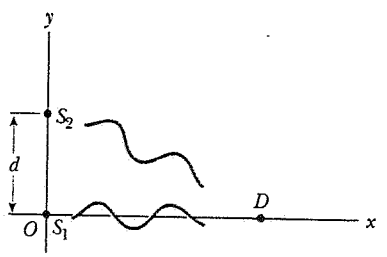


Figura 22 Problema 23.

veniente da una fenditura, è doppia di quella che proviene dall'altra fenditura. Ricavare un'espressione per l'intensità I in funzione di θ.

Paragrafo 45-4 Interferenza da pellicole sottili

27. Si vuole ricoprire una lastra piana di vetro ($n = 1.50$) con materiale trasparente ($n = 1.25$) in modo che non avvenga riflessione per una luce di lunghezza d'onda 620 nm (nel vuoto) incidente perpendicolarmente. Che spessore minimo deve avere il rivestimento?

28. La superficie di una lamina sottile posta in aria, con indice di rifrazione 1.5 e spessore 410 nm, è illuminata perpendicolarmente con luce bianca. Quali lunghezze d'onda dello spettro visibile saranno predominanti nel fascio riflesso?

29. Una petroliera fuori uso ha perduto in mare una gran quantità di kerosene ($n = 1.2$) formando un'enorme chiazza sulla superficie d'acqua ($n = 1.3$). (*a*) Se si guarda verticalmente stando a bordo di un aereo in una zona della macchia dove lo spessore è 460 nm, per quali lunghezze d'onda visibili si ha la massima riflessione? (*b*) Se un esploratore subacqueo si trova sotto la stessa zona della chiazza, per quali lunghezze d'onda visibili è massima l'intensità trasmessa?

30. In bigiotteria, gli strass (fatti di vetro con $n = 1.5$) sono spesso rivestiti con monossido di silicio ($n = 2.0$) per renderli più riflettenti. Che spessore deve avere il rivestimento per poter riflettere efficacemente la luce di 560 nm incidente normalmente?

31. Se la lunghezza d'onda della luce incidente vale $\lambda = 572$ nm, i raggi A e B di figura 23 sono sfasati di 1.50λ. Calcolare lo spessore d della pellicola.

32. Una luce di lunghezza d'onda 585 nm incide perpendicolarmente su una sottile lamina di sapone ($n = 1.33$) sospesa in aria. Sapendo che la lamina è spessa 0.00121 mm, determinare se appare chiara o scura quando viene osservata da una posizione prossima alla sorgente di luce.

33. Un'onda piana luminosa monocromatica investe perpendicolarmente una lamina sottile di olio di spessore uniforme che copre una lastra di vetro. La lunghezza d'onda della sorgente può essere variata in modo continuo. Nel fascio riflesso si osserva interferenza completamente distruttiva per le lunghezze d'onda di 485 e 679 nm, e non la si osserva invece per tutti i valori compresi in tale intervallo. Se l'indice di rifrazione dell'olio è 1.32 e quello del vetro 1.50, calcolare lo spessore della lamina d'olio.

34. La luce bianca riflessa, per una incidenza normale, da una bolla di sapone ha nello spettro visibile un solo massimo di interferenza a 600 nm e un solo minimo a 450 nm. Se $n = 1.33$, calcolare lo spessore della bolla, supposto uniforme.

35. Due lastre piane di vetro sono sovrapposte in modo tale che l'intercapedine d'aria in mezzo formi uno strato d'aria a spessore variabile come un cuneo. Una luce di lunghezza d'onda 480 nm investe perpendicolarmente la lastra superiore, poi viene riflessa alla superficie inferiore del primo vetro e alla superficie superiore del secondo, dando così luogo alla formazione di una serie di frange d'interferenza. Di quanto è maggiore lo spessore della lamina d'aria in corrispondenza della sedicesima frangia rispetto allo spessore corrispondente alla sesta frangia?

36. Una lastra di vetro con indice di rifrazione 1.40 va rivestita con una pellicola di materiale avente indice di rifrazione 1.55, in modo tale che diventi trasparente preferenzialmente alla luce verde (lunghezza d'onda di 525 nm). (*a*) Qual è lo spessore minimo del rivestimento che realizza lo scopo? (*b*) Perché le altre porzioni dello spettro non sono anch'esse preferenzialmente trasmesse? (*c*) La trasmissione di qualsiasi altro colore viene ridotta drasticamente?

37. Una sottile lamina di acetone (indice di rifrazione 1.25) è distesa su una spessa lastra di vetro (indice di rifrazione 1.50). Onde luminose piane di lunghezza d'onda variabile incidono perpendicolarmente alla lamina. Guardando le onde riflesse si osserva una completa interferenza distruttiva a 600 nm e una completa interferenza costruttiva a 700 nm. Calcolare lo spessore della lamina di acetone.

38. Una goccia d'olio ($n = 1.20$) galleggia sull'acqua ($n = 1.33$) e viene osservata dall'alto in luce riflessa (fig. 24). (*a*) Le parti esterne (più sottili) della goccia corrispondono a zone luminose o scure? (*b*) Qual è all'incirca lo spessore della lamina d'olio nella zona dove si osserva la terza regione blu a partire dall'esterno della goccia? (*c*) Perché i colori scompaiono gradualmente quando lo spessore della goccia d'olio aumenta?

39. Un'estesa sorgente di luce ($\lambda = 680$ nm) investe perpendicolarmente due lastre di vetro lunghe 120 mm, che sono in contatto a una estremità e sono invece separate all'altra estremità da un filo di diametro 0.048 mm (fig. 25). Quante frange compaiono sull'intera lunghezza di 120 mm?

40. Una lastra di vetro perfettamente piana ($n = 1.5$) è disposta sopra una lastra di materiale plastico pure perfettamente piana ($n = 1.2$), come è illustrato nella figura 26*a*. Esse sono in

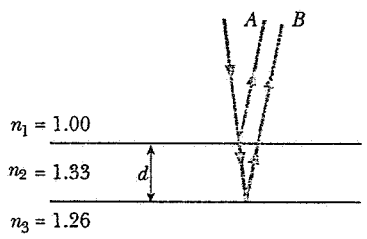


Figura 23 Problema 31.

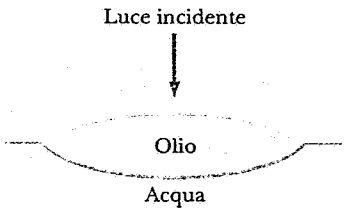


Figura 24 Problema 38.

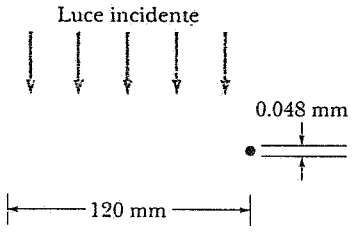


Figura 25 Problema 39.

ISBN 88-408-0777-2

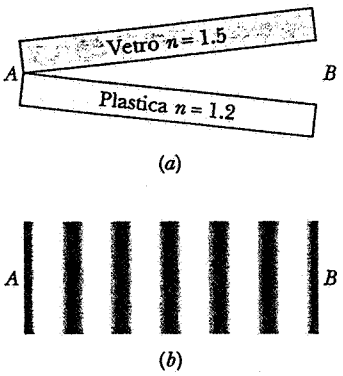


Figura 26 Problema 40.

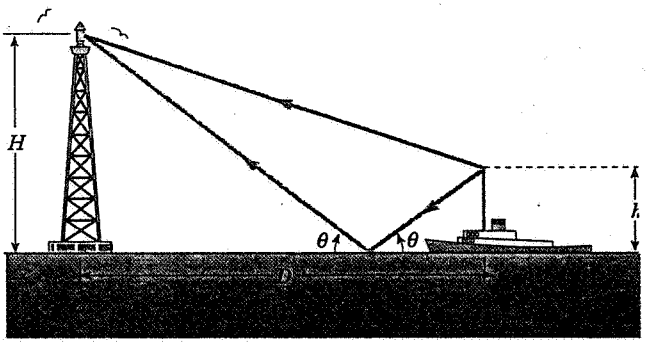


Figura 27 Problema 48.

contatto nel punto A. Una luce di lunghezza d'onda 600 nm incide normalmente dall'alto. Nel disegno di figura 26*b* è riprodotta la distribuzione delle frange scure in luce riflessa. (*a*) Quant'è lo spessore d'aria tra il vetro e la plastica nel punto B? (*b*) Adesso nella regione compresa tra le due lastre si infiltra dell'acqua ($n = 1.33$). Quante frange scure si vedono quando tutta l'aria viene sostituita dall'acqua? (Frange rettilinee e spaziate uniformemente costituiscono una prova accurata del grado di perfezione dei piani.)

41. Una luce di lunghezza d'onda pari a 630 nm incide normalmente su una lamina sottile a forma di cuneo avente indice di rifrazione di 1.50. Si osservano 10 frange luminose e 9 scure su tutta la lunghezza della lamina. Di quanto varia lo spessore della lamina su questa lunghezza?

42. In un cuneo di aria racchiusa tra due lastre piane di vetro in contatto a una estremità, si osservano 4001 linee scure in riflessione quando il sistema viene illuminato con luce monocromatica. Se si evacua l'aria tra le lastre, le linee osservate si riducono a 4000. Calcolate l'indice di rifrazione dell'aria a partire da questi dati.

43. In un esperimento sugli anelli di Newton, il raggio di curvatura R della lente è 5.0 m e il suo diametro 20 mm. (*a*) Quanti anelli si producono? (*b*) Quanti anelli si osserverebbero se tutto il dispositivo venisse immerso in acqua ($n = 1.33$)? Si supponga $\lambda = 589$ nm.

44. Il diametro dell'anello luminoso di ordine 10 in un dispositivo per gli anelli di Newton passa da 1.40 a 1.27 cm, introducendo un liquido tra la lente e la lastra. Trovare l'indice di rifrazione del liquido.

45. Si può usare un apparato ad anelli di Newton per determinare il raggio di curvatura di una lente. Misurando i raggi degli anelli luminosi di ordine n e di ordine $(n + 20)$, si trovano rispettivamente i valori di 0.162 cm e 0.368 cm, quando la luce possiede lunghezza d'onda di 546 nm. Si calcoli il raggio di curvatura della superficie inferiore della lente.

46. Nell'esperimento degli anelli di Newton, si dimostri (*a*) che la differenza tra i raggi di due anelli (massimi) adiacenti è data da

$$\Delta r = r_{m+1} - r_m \approx \tfrac{1}{2}\sqrt{\lambda R/m},$$

assumendo che $m \gg 1$, e che (*b*) l'*area* compresa tra due anelli (massimi) adiacenti vale

$$A = \pi\lambda R.$$

assumendo $m \gg 1$. Si noti che l'area è indipendente da m.

47. Nell'esempio 5 si supponga che la riflessione sia nulla per luce di lunghezza d'onda 550 nm che incide normalmente. Calcolare di quale fattore viene ridotta la riflessione grazie al rivestimento, alla lunghezza d'onda di (*a*) 450 nm e (*b*) 650 nm. (*Suggerimento*: Si calcoli ϕ nell'equazione 13.)

48. Una nave che si avvicina al porto sta trasmettendo alla lunghezza d'onda di 3.43 m dalla sua antenna situata ad altezza h di 23 m sopra il livello del mare. L'antenna della stazione ricevente è collocata a un'altezza H di 160 m sul livello del mare. Supponendo che la superficie calma del mare rifletta l'onda radio perfettamente secondo la legge di riflessione, si calcoli la distanza orizzontale D, alla quale si verifica il momentaneo oscuramento della trasmissione per la prima volta. Si confronti la figura 27.

Paragrafo 45-6 Interferometro di Michelson

49. Se si sposta di 0.233 mm lo specchio M_2 dell'interferometro di Michelson, si contano 792 frange, con l'ausilio di un fotometro. Qual è la lunghezza d'onda della luce?

50. Si introduce in un braccio di un interferometro di Michelson una lamina sottile il cui indice di rifrazione è 1.40 per luce di lunghezza d'onda uguale a 589 nm. Qual è lo spessore della lamina se si osserva uno spostamento di 7.0 frange?

51. Sul braccio di un interferometro di Michelson è montata come in figura 28 una camera a tenuta d'aria lunga 5.0 cm con

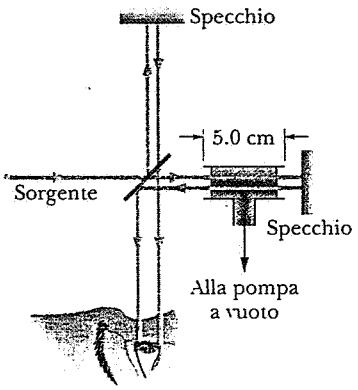


Figura 28 Problema 51.

finestre di vetro. La luce impiegata nell'esperimento ha una lunghezza d'onda di 500 nm. L'aria viene lentamente estratta dalla camera mediante una pompa a vuoto. Mentre la camera viene evacuata, l'osservatore vede passare davanti all'obiettivo 60 frange. Basandosi su questi dati, trovare l'indice di rifrazione dell'aria a pressione atmosferica.

52. Ricavare un'espressione dell'intensità misurata nell'interferometro dl Michelson (fig. 19) in funzione della posizione dello specchio mobile. Si misuri la posizione dello specchio dal punto in cui $d_1 = d_2$.

Capitolo 46

DIFFRAZIONE

La diffrazione è quell'effetto di deviazione e sparpagliamento che subiscono le onde quando incontrano un oggetto (una barriera o un'apertura) sul loro cammino. In questo capitolo si considera solamente la diffrazione delle onde luminose, ma la diffrazione è fenomeno comune a tutti i tipi di onde. Le onde acustiche, per fare un esempio, vengono diffratte dagli oggetti di dimensioni comuni, e, come risultato di questo effetto, noi siamo in grado di udire suoni provenienti da una fonte con cui non siamo in comunicazione direttamente in linea d'aria. Si verifica diffrazione quando la dimensione dell'oggetto è dello stesso ordine di misura della lunghezza d'onda dell'onda incidente; quando la lunghezza d'onda è molto più piccola dell'oggetto, la diffrazione non viene in genere osservata e l'oggetto proietta un'ombra netta.

Le figure di diffrazione sono costituite da bande chiare e scure alternate, simili alle figure di interferenza, già illustrate nel capitolo 45. Dallo studio di queste figure possiamo trarre informazioni sulle caratteristiche dell'oggetto che ha provocato la diffrazione. Per esempio la diffrazione dei raggi X è un metodo importante di studio delle proprietà dei solidi, e la diffrazione dei raggi γ è correntemente utilizzata per indagare la struttura dei nuclei. La diffrazione produce anche effetti indesiderati, come la diffusione della luce quando entra in un telescopio, che limita la sua capacità di risolvere, cioè separare, due stelle che appaiono l'una vicina all'altra. In questo e nel seguente capitolo si illustreranno questi vari effetti di diffrazione.

46-1 DIFFRAZIONE E TEORIA ONDULATORIA DELLA LUCE

Quando la luce passa attraverso una stretta fenditura (di larghezza confrontabile alla lunghezza d'onda della luce; si veda la figura 1 del capitolo 43), il fascio di luce non solo risplende anche ben lontano dai limiti dell'ombra geometrica, ma forma anche una serie di bande alternate chiare e scure, che assomigliano alle frange d'interferenza (fig. 1). Nel capitolo 45 è stato chiarito come la comparsa di frange d'interferenza fornisca prova evidente della natura ondulatoria della luce. Possiamo affermare che la comparsa di figure di diffrazione richiede ugualmente che la luce si comporti come un'onda.

Per quanto la diffrazione fosse già nota ai tempi di Huygens e Newton, nessuno di loro credette che ciò costituisse prova che la luce sia un'onda. Newton anzi era convinto che la luce fosse costituita da un flusso di particelle.

Un deciso sostenitore della teoria ondulatoria della luce fu l'ingegnere francese Jean Augustin Fresnel (1788-1827). Fresnel diede una spiegazione al fenomeno di diffrazione basandosi sulla teoria ondulatoria, che non era diffusamente accettata nemmeno dopo l'esperienza di Thomas Young con la doppia fenditura. Nel 1819 Fresnel sottomise un saggio sulla teoria della diffrazione a un concorso promosso dall'Accademia delle Scienze francese. Un membro dell'Accademia, Siméon Denis Poisson (un tenace oppositore della teoria ondulatoria della luce), ridicolizzò la teoria di Fresnel

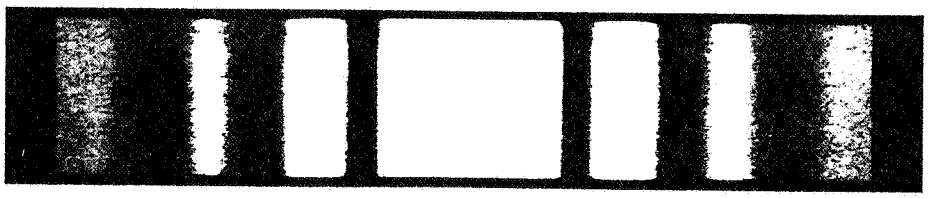


Figura 1 Figura di diffrazione prodotta da luce passante attraverso una fessura sottile.

ISBN 88-408-0777-2

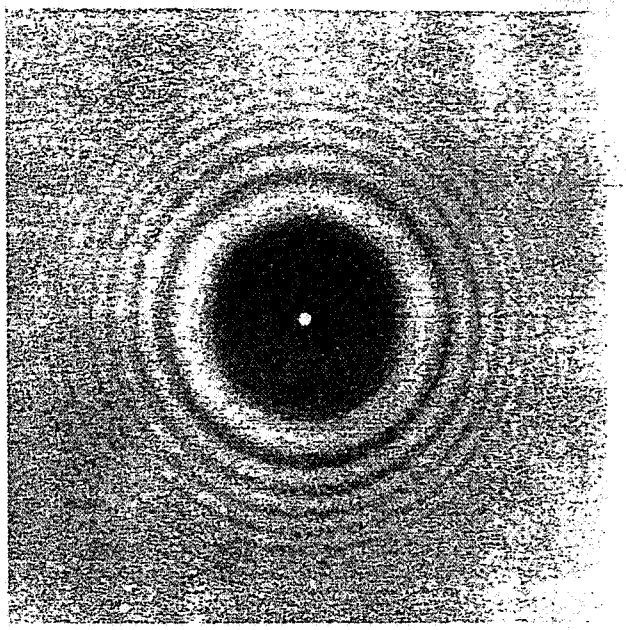


Figura 2 Figura di diffrazione prodotta da un disco. Si noti al centro della figura il punto chiaro di Poisson.

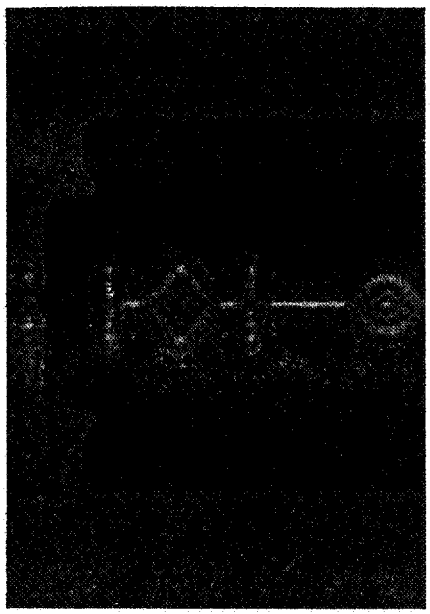


Figura 3 Figura di diffrazione prodotta da una lametta per rasoio, vista in luce monocromatica. Si notino le frange in prossimità dei bordi.

perché, come egli stesso dimostrò, la teoria della diffrazione di Fresnel avrebbe portato all'«assurda» previsione che l'ombra di un oggetto opaco avrebbe presentato al suo centro un punto luminoso. Nella figura 2 si vede la figura di diffrazione di un disco; il punto luminoso chiaramente distinguibile al centro (noto come macchia di Poisson) sostiene l'interpretazione di Fresnel.

La figura 3 mostra la figura di diffrazione formata da un oggetto comune illuminato con luce monocromatica. In effetti, non sono necessari apparecchi speciali per osservare fenomeni di diffrazione. Stringete due dita, in modo che si formi una stretta fessura tra di loro, e guardate una lampadina attraverso la fenditura. Le linee scure che vedete nella fenditura sono causate dalla diffrazione. Una altro esempio comune di diffrazione sono le «mosche volanti» che molte persone vedono nel loro campo visivo. Le mosche volanti sono punti traslucidi o catenelle che sembrano galleggiare e spostarsi. Si manifestano mettendo a fuoco gli occhi all'infinito mentre si fissa un pezzo di carta bianca fortemente illuminato. Le mosche volanti sono causate da piccoli grumi di sangue o altri minuscoli frammenti contenuti nel fluido della cornea; ciò che si vede sono gli effetti di diffrazione proiettati sulla retina.

La figura 4 schematizza un caso generale di diffrazione. Le superfici incurvate sulla sinistra rappresentano i fronti d'onda della luce incidente. La luce investe l'oggetto diffrangente *B*, che nella figura 4 è disegnato come una barriera opaca contenente un'apertura di forma qualsiasi. (In seguito considereremo aperture costituite da singole fenditure, che producono figure di diffrazione come quella di figura 1.) *C* nella figura 4 rappresenta uno schermo o una pellicola fotografica che riceve la luce passante attraverso il foro diffrangente o, in altri casi, passante attorno ai bordi di un ostacolo.

La distribuzione dell'intensità luminosa in *C* può essere calcolata suddividendo il fronte d'onda in superfici di area elementare $d\mathbf{A}$, ciascuna delle quali diventa una sorgente di un'onda secondaria di Huygens in

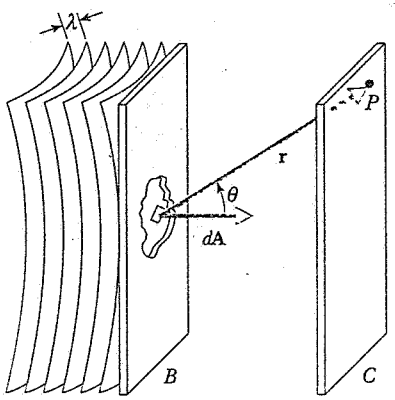


Figura 4 La diffrazione si manifesta quando fronti d'onda di luce coerente investono la barriera opaca *B*, che contiene un'apertura di forma arbitraria. La figura di diffrazione può essere osservata sullo schermo *C*.

ISBN 88-408-0777-2

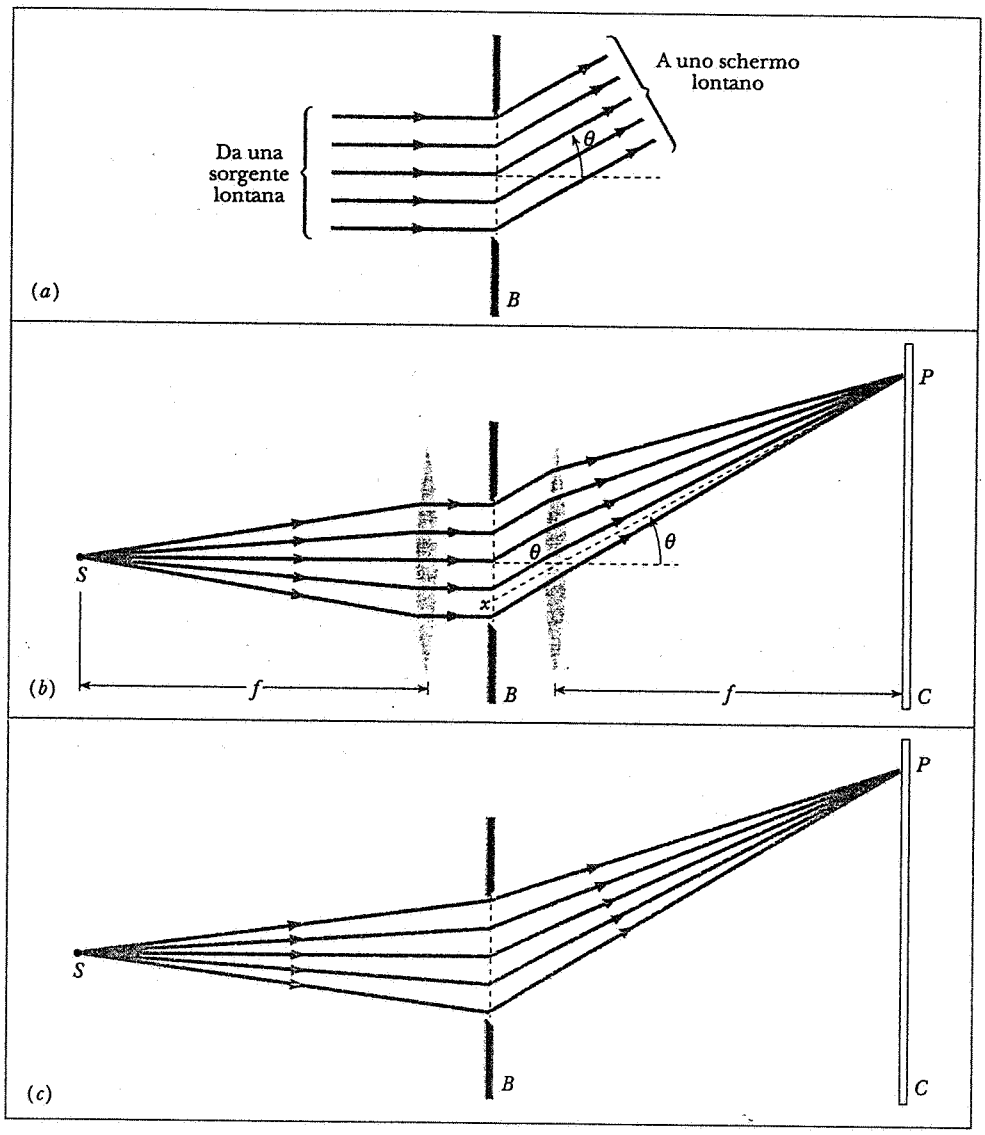


Figura 5 La luce proveniente da una sorgente *S* investe un'apertura operata nella barriera opaca *B*. La fenditura si estende per lungo tratto al di sopra e al di sotto del piano della figura; la lunghezza della fenditura è molto maggiore della sua larghezza *a*. L'intensità nel punto *P* dello schermo *C* dipende dalle fasi relative delle onde luminose ricevute dalla varie porzioni della fenditura. (*a*) Se la sorgente *S* e lo schermo *C* si trovano a grande distanza dalla fenditura, sia i raggi incidenti sulla barriera *B* sia quelli che raggiungono lo schermo *C* si possono considerare paralleli. (*b*) Invece che essere posti a grande distanza, la sorgente e lo schermo possono essere collocati ciascuno nel fuoco di una lente; anche in questo casi i raggi che raggiungono e lasciano la barriera sono paralleli. (*c*) Senza le lenti i raggi non sono paralleli.

espansione. L'intensità di luce in un punto *P* arbitrario si trova sommando le perturbazioni ondulatorie del campo elettrico (vale a dire dei vettori **E**) causati dalle onde secondarie che raggiungono *P* da tutte le superfici elementari.

Le onde che raggiungono *P* differiscono per ampiezza e fase perché (*a*) le sorgenti elementari sono a diverse distanze da *P*, (*b*) la luce è emessa dalle sorgenti con angoli diversi rispetto alla normale al fronte d'onda, e (*c*) alcune sorgenti sono coperte dallo schermo *B* e altre no. Il calcolo della diffrazione, semplice in linea di principio, può, in pratica, diventare difficile. Il calcolo deve essere ripetuto per tutti i punti dello schermo *C* in cui vogliamo calcolare l'intensità luminosa. Abbiamo seguito esattamente questo metodo nel calcolare l'intensità del dispositivo a due fenditure nel paragrafo 45-3. Il calcolo in quel caso è stato semplificato dall'aver trattato le fenditure come due sorgenti elementari.

La figura 5 mostra un'altra rappresentazione, eseguita mediante l'uso di raggi, del fenomeno schematizzato nella figura 4. La figura prodotta sullo schermo dipende dalla distanza di quest'ultimo dall'apertura sulla barriera *B*. Possiamo elencare in generale tre casi:

1. *Distanza molto piccola.* Quando *C* è molto vicino a *B*, le onde percorrono una piccola distanza dopo aver attraversato l'apertura e i raggi divergono quindi molto poco. Gli effetti di diffrazione sono trascurabili, e la figura sullo schermo corrisponde all'ombra proiettata dalla forma dell'apertura.

2. *Grande distanza.* La figura 5*a* rappresenta la situazione in cui lo schermo si trova così lontano dall'apertura che i raggi si possono considerare paralleli ossia, detto in altro modo, i fronti d'onda sono piani. (In

questo caso assumiamo che pure la sorgente sia lontana dall'apertura, di modo che i fronti d'onda incidenti siano anch'essi piani. Lo stesso effetto può essere ottenuto illuminando l'apertura con un fascio laser.) Un modo di ottenere in laboratorio questa configurazione, che è nota col nome di *diffrazione di Fraunhofer*, consiste nell'impiegare due lenti convergenti, come nella figura 5*b*. La prima lente converte in un'onda piana i raggi divergenti in arrivo dalla sorgente, e la seconda lente focalizza nel punto P le onde piane uscenti dall'apertura. Tutti i raggi incidenti in P, nel tratto dopo l'attraversamento dell'apertura, sono paralleli alla linea tratteggiata Px, condotta da P al centro della seconda lente.

3. *Distanza intermedia.* Nel caso illustrato nella figura 5*c*, lo schermo si può trovare a una distanza qualunque dall'apertura e i raggi che raggiungono e lasciano l'apertura non sono paralleli. Questa situazione in generale è chiamata *diffrazione di Fresnel.*

Per quanto la diffrazione di Fraunhofer rappresenti un caso limite della più generale diffrazione di Fresnel, essa costituisce un caso importante e più facile da trattare matematicamente. Nella descrizione del fenomeno d'interferenza prodotta da una doppia fenditura nel capitolo 45, avevamo implicitamente assunto le condizioni che definiscono la diffrazione di Fraunhofer. In questo libro ci limiteremo a trattare la diffrazione di Fraunhofer.

46-2 DIFFRAZIONE DA SINGOLA FENDITURA

La più semplice figura di diffrazione da analizzare è quella prodotta da una lunga fenditura sottile. In questo paragrafo definiremo la posizione dei minimi e dei massimi illustrati nella figura 1. Nel prossimo paragrafo calcoleremo la distribuzione d'intensità nella figura in funzione della posizione dello schermo.

La figura 6 mostra un'onda piana che investe, con incidenza normale, una stretta fenditura di larghezza a. Concentriamo la nostra attenzione sul punto centrale P_0. I raggi che, paralleli all'asse centrale orizzontale, dalla fenditura vengono focalizzati in P_0 sono certamente in fase sul piano della fenditura, e rimangono in fase fino al punto P_0, dove la focalizzazione avviene tramite una lente (si veda per esempio la figura 17*a* del capitolo 44). Dato che tutti i raggi arrivano in P_0 in fase, essi interferiscono costruttivamente e il punto centrale della figura di diffrazione, che appare sullo schermo C, ha intensità massima.

Consideriamo un altro punto sullo schermo. I raggi luminosi che raggiungono P_1 nella figura 7 escono dalla fenditura con un angolo θ. Il raggio xP_1 passa senza deviazioni attraverso il centro della lente e pertanto determina l'angolo θ. Il raggio r_1 proviene dall'estremità superiore della fenditura e il raggio r_2 dal suo centro. Se θ è scelto in modo che la distanza bb' nella figura sia uguale a mezza lunghezza d'onda, r_1 ed r_2 saranno in opposizione di fase e interferiranno distruttivamente in P_1. La stessa cosa si può dire per un raggio subito sotto a r_1 e per un altro subito sotto a r_2. Infatti ciascun raggio proveniente dalla metà superiore della fenditura sarà annullato da un raggio proveniente dalla metà inferiore, con origine nel punto distante $a/2$ dal primo raggio, dato che i due raggi sono in opposizione in P_1. Ogni raggio che giunge a P_1 dalla metà superiore della fenditura interferisce distruttivamente con uno proveniente dalla metà inferiore. Il punto P_1, primo minimo della figura di diffrazione, avrà intensità zero.

Giacché la distanza bb' è uguale a $(a/2)\,\text{sen}\,\theta$, la condizione che dà luogo al primo minimo si può scrivere

$$\frac{a}{2}\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2},$$

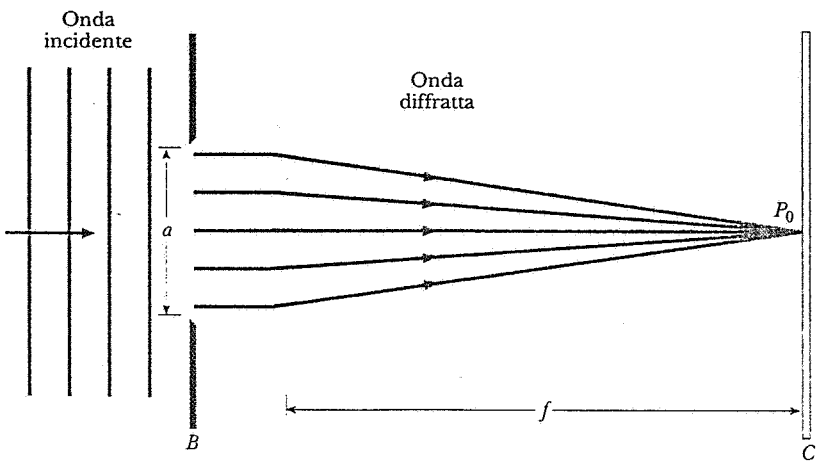


Figura 6 Formazione del massimo centrale nella figura di diffrazione.

ISBN 88-408-0777-2

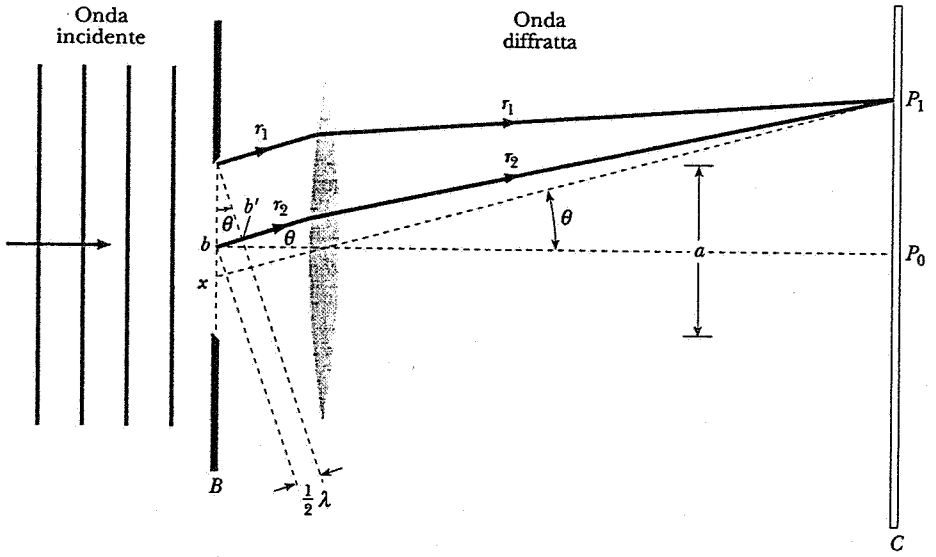


Figura 7 Formazione del primo minimo nella figura di diffrazione. L'angolo θ ha ampiezza tale che la distanza bb' sia pari a mezza lunghezza d'onda.

ovvero

$$a \operatorname{sen}\theta = \lambda \qquad (1)$$

L'equazione 1 indica che la larghezza del massimo centrale aumenta al restringersi della fenditura. Se la larghezza della fenditura è uguale a una lunghezza d'onda ($a = \lambda$), il primo minimo si ha per $\theta = 90°$ (sen $\theta = 1$ nell'eq. 1), Ciò implica che il massimo centrale occupa l'intero emisfero di fronte alla fenditura. Quando abbiamo discusso, nel paragrafo 45-1, l'esperimento di Young sull'interferenza di due fenditure, abbiamo fatto l'ipotesi che fosse verificata una condizione simile. Nella figura 8 la fenditura è divisa in quattro zone uguali, con un raggio uscente dalla parte superiore di ogni zona. Scegliamo θ in modo che la distanza bb' sia pari a mezza lunghezza d'onda. Nel punto P_2 i raggi r_1 ed r_2, come pure i raggi r_3 ed r_4, saranno sfasati di mezza lunghezza d'onda e si annulleranno. Consideriamo altri quattro raggi uscenti dalla fenditura a una certa distanza sotto i quattro raggi precedenti. I raggi sotto r_1 ed r_2 si annullano e la stessa cosa accade ai due raggi sotto r_3 ed r_4. Possiamo

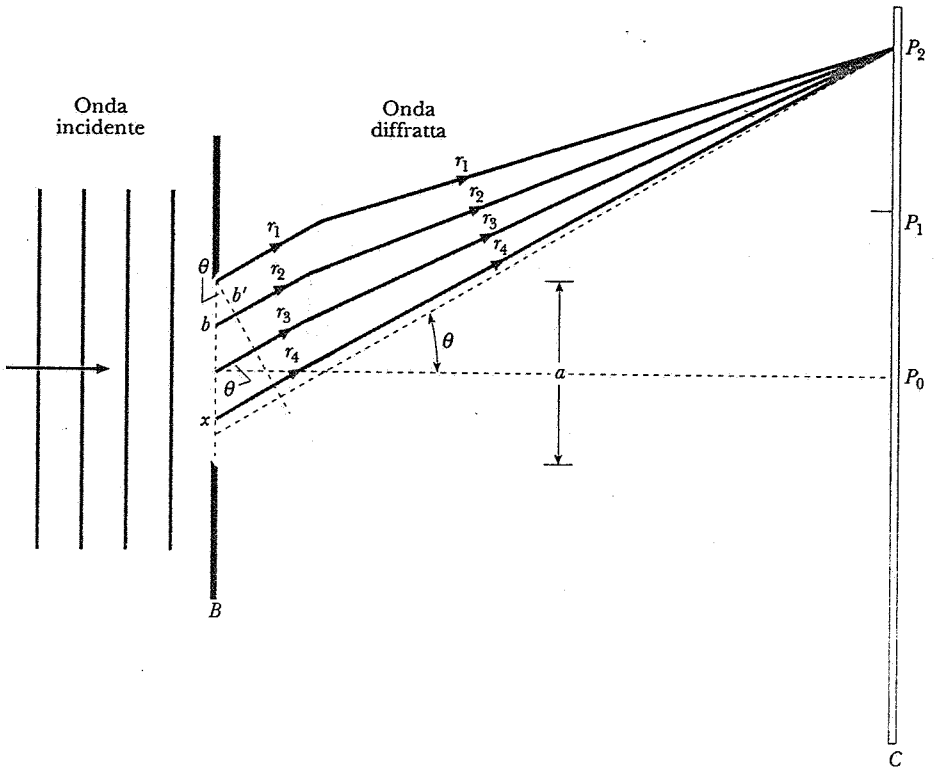


Figura 8 Formazione del secondo minimo nella figura di diffrazione. L'angolo θ ha ampiezza tale che la distanza bb' sia pari a mezza lunghezza d'onda.

procedere attraverso l'intera fenditura per concludere che nel punto P_2 non arriva luce. Abbiamo così localizzato un secondo punto in cui l'intensità è nulla.

La condizione descritta (fig. 8) richiede che

$$\frac{a}{4}\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2},$$

ossia

$$a\ \text{sen}\theta = 2\lambda. \qquad (2)$$

Per una data fenditura di apertura a e una data lunghezza d'onda λ, l'equazione 2 fornisce la posizione sullo schermo corrispondente al secondo minimo in funzione dell'angolo θ. Per estensione delle equazioni 1 e 2, si ottiene la formula generale che dà i minimi di diffrazione sullo schermo C:

$$a\ \text{sen}\theta = m\lambda \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \text{ (minimi)}. \qquad (3)$$

Esiste un massimo che si trova approssimativamente al centro della coppia di minimi consecutivi. Più avanti in questo capitolo ricaveremo una formula per l'intensità della luce diffratta, dalla quale si possono trovare con esattezza le posizioni dei massimi. Si noti che l'equazione 3 suggerisce l'esistenza di *due* minimi (e corrispondenti massimi) per ciascun valore di m, uno per il raggio di angolo θ giacente sopra l'asse centrale, l'altro al di sotto (corrispondente a $m < 0$). Si consideri quanto abbia semplificato l'analisi l'aver assunto i raggi paralleli (diffrazione di Fraunhofer).

Esempio 1 Una fenditura di larghezza a è illuminata con luce bianca. Per quale valore di a il primo minimo relativo alla luce rossa ($\lambda = 650$ nm) si ottiene in corrispondenza di un angolo $\theta = 15°$?

Soluzione Per il primo minimo poniamo $m = 1$ nell'equazione 3. Così, risolvendo rispetto ad a, abbiamo

$$a = \frac{m\lambda}{\text{sen}\theta} = \frac{(1)(650\text{ nm})}{\text{sen } 15°} = 2510\text{ nm} = 2.51\ \mu\text{m}.$$

Per poter deviare la luce incidente di un angolo notevole (±15°), la fenditura dev'essere davvero ben stretta, circa quattro volte la lunghezza d'onda (e ben più fine di un capello umano, che può avere, nel migliore dei casi, un diametro di 100 μm).

Esempio 2 Nell'esempio 1, qual è la lunghezza d'onda λ' della luce il cui primo massimo di diffrazione (escluso il massimo centrale) si ottiene per $\theta = 15°$, coincidendo così con il primo minimo della luce rossa?

Soluzione Questo massimo si trova circa a metà strada fra il primo e il secondo minimo. Si ha quindi un massimo a 15° quando il primo minimo è a 10° e il secondo a 20°. In questo caso, per il secondo minimo

$$a\ \text{sen}\theta = 2\lambda',$$

ossia

$$\lambda' = \tfrac{1}{2}(2510\text{ nm})(\text{sen } 20°) = 430\text{ nm}.$$

Il colore di questa luce è violetto. Il secondo massimo per la luce di lunghezza d'onda 430 nm coinciderà sempre con il primo minimo della luce di lunghezza d'onda 650 nm, qualunque sia la larghezza della fenditura. Se la fenditura è relativamente stretta, l'angolo θ per il quale avviene questa sovrapposizione, sarà relativamente grande.

46-3 INTENSITÀ NELLA DIFFRAZIONE DA SINGOLA FENDITURA

Nel paragrafo 46-2 abbiamo individuato le posizioni dei minimi nella figura di diffrazione da una fenditura singola. Vogliamo ora trovare un'espressione dell'intensità di tutta la figura di diffrazione in funzione dell'angolo di diffrazione θ. Questa espressione ci consentirà di trovare la posizione e l'intensità dei massimi.

La figura 9 mostra una fenditura di larghezza a divisa in N strisce parallele, ciascuna di larghezza Δx. Le strisce sono molto strette sicché ogni striscia agisce come una sorgente di onde elementari di Huygens; tutta la luce proveniente da una certa striscia giunge nel punto P con la stessa fase. Le onde emesse da strisce adiacenti, quando arrivano nel punto P, hanno una differenza di fase costante $\Delta\phi$ espressa da

$$\frac{\text{differenza di fase}}{2\pi} = \frac{\text{differenza di cammino}}{\lambda},$$

ossia

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\ \text{sen}\theta, \qquad (4)$$

dove $\Delta x\ \text{sen}\theta$ è, come mostra la figura, la differenza di cammino fra i raggi provenienti dai bordi superiori delle strisce adiacenti.

Se l'angolo θ non è troppo ampio, ciascuna striscia produce in P un'onda della stessa ampiezza ΔE_0. L'effetto complessivo nel punto P è dato dalla sovrapposizione di N vettori aventi la stessa ampiezza, ciascuno sfasato di un angolo $\Delta\phi$ rispetto a quello adiacente. Per determinare l'intensità nel punto P, dobbiamo calcolare il campo elettrico totale dovuto agli N vettori.

Nel paragrafo 45-3 abbiamo introdotto un metodo grafico per sommare le perturbazioni ondulatorie, che consente di calcolare l'intensità nell'interferenza da

 ISBN 88-408-0777-2

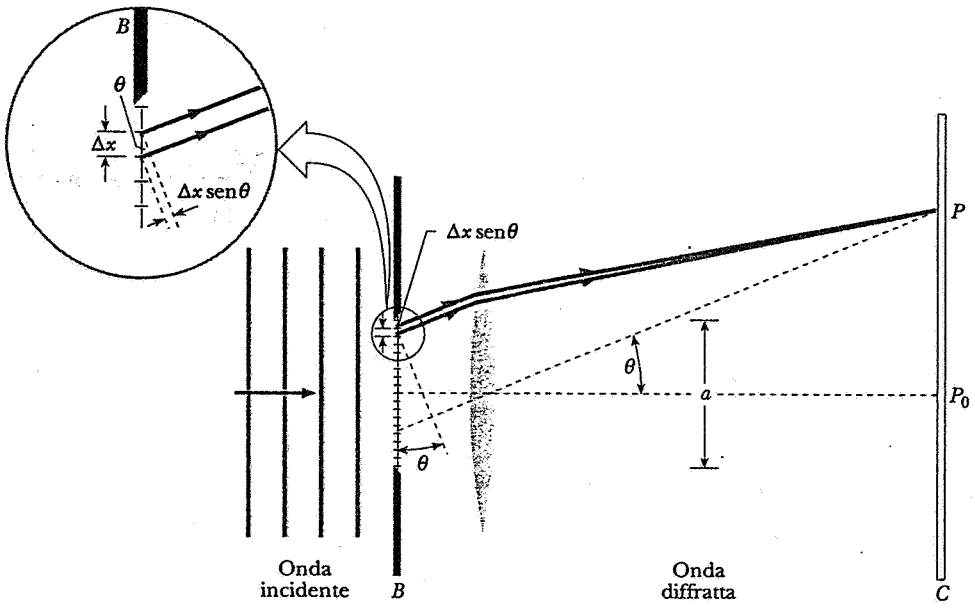
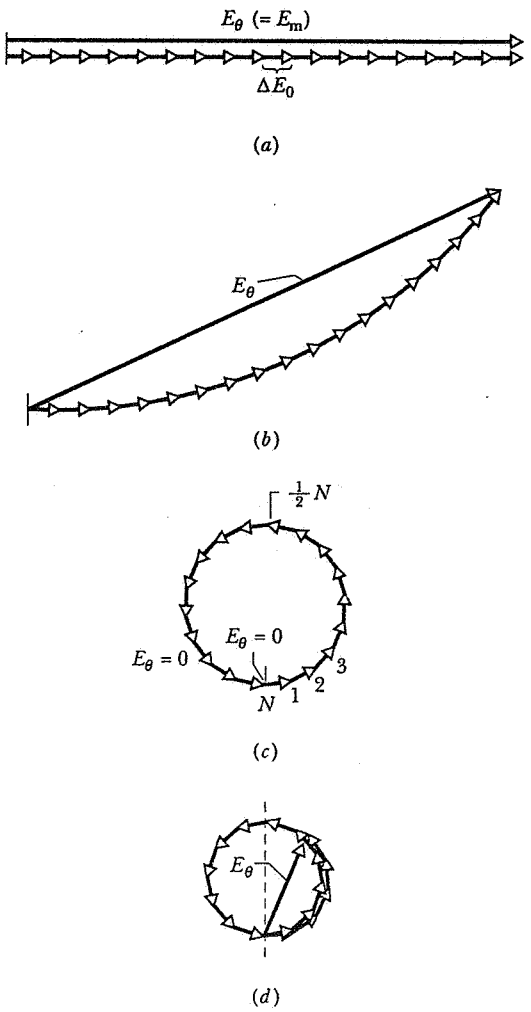


Figura 9 Una fenditura di ampiezza a è divisa in N sezioni di larghezza Δx. L'ingrandimento mostra più chiaramente la geometria in corrispondenza della seconda sezione. Passando al limite, la larghezza dx di ciascuna sezione diventa infinitesima e il numero di sezioni infinito. In questo caso e in quello della figura seguente si è stabilito $N = 18$ per poter illustrare il fenomeno.



doppia fenditura. Questo metodo è fondato sulla rappresentazione di ciascun moto ondulatorio mediante un vettore rotante, detto vettore di fase, che consente di valutare l'ampiezza del vettore di fase risultante sommando i vettori e tenendo conto delle fasi relative date dall'equazione 4. Il campo elettrico risultante E_θ varia con l'angolo θ perché la differenza di fase $\Delta\phi$ è funzione di θ.

Consideriamo alcuni esempi di somma di vettori di fase nella diffrazione da singola fenditura. Vediamo dapprima il campo elettrico risultante nel punto P_0 (il centro della figura di diffrazione sullo schermo). In questo caso $\theta = 0$ e l'equazione 4 dà $\Delta\phi = 0$ come differenza di fase tra strisce adiacenti. Seguendo il metodo del paragrafo 45-3, tracciamo ora N vettori, di lunghezza ΔE_0, disposti in modo che l'origine di ciascuno coincida con l'estremità del precedente e giacenti tutti parallelamente, visto che lo sfasamento tra di essi è nullo. Nella figura 10*a* è mostrato il vettore risultante di lunghezza E_θ. È questo evidentemente il massimo valore che può raggiungere la risultante degli N vettori; per questo lo chiamiamo E_m.

Se diamo a θ un valore diverso da zero, $\Delta\phi$ assumerà un valore definito diverso da zero. Tracciando an-

Figura 10 Vettori di fase nella diffrazione da singola fenditura; sono mostrate le situazioni (*a*) in corrispondenza del massimo centrale, (*b*) in una direzione leggermente discosta dal massimo centrale, (*c*) in corrispondenza del primo minimo, (*d*) al primo massimo oltre quello centrale. In questo caso si sono adottate le condizioni della figura 9 in cui $N = 18$.

che qui gli N vettori l'uno di seguito all'altro, ciascuno con un angolo di sfasamento rispetto al precedente pari a $\Delta\phi$, otteniamo il vettore risultante come disegnato nella figura 10*b*. Si noti che E_θ è minore di quanto fosse nella figura 10*a*.

Consideriamo ora il primo minimo della figura di diffrazione (punto P_1 della figura 7). In questo punto l'intensità è nulla, di modo che il vettore risultante E_θ deve essere 0. Ciò significa che gli N vettori di fase, congiunti a catena, devono formare una linea chiusa, come nella figura 10*c*.

Oltre al primo minimo, lo sfasamento $\Delta\phi$ diventa ancora maggiore, e la catena di vettori tende ad avvolgersi in spirale realizzando angoli superiori a 360°. In corrispondenza di un certo angolo (equivalente a un dato sfasamento, come in figura 10*d*), il vettore risultante E_θ assume la massima lunghezza, corrispondente al primo massimo oltre quello centrale. Si noti che l'intensità di questo massimo è molto minore dell'intensità del massimo centrale, rappresentato nella figura 10*a*. Quando poi, aumentando θ e quindi $\Delta\phi$, si ottiene di nuovo una spira che si chiude esattamente su se stessa, dando risultante nulla, ci si trova allora in corrispondenza del secondo minimo.

Nel cercare l'intensità della figura di diffrazione per il caso di singola fenditura, ci poniamo come scopo di valutare la differenza di fase secondo l'equazione 4 e di trovare il vettore risultante E_θ, come illustrato in figura 10*b*. Il quadrato di questo vettore risultante ci fornisce quindi la relativa intensità, come descritto nel paragrafo 45-3.

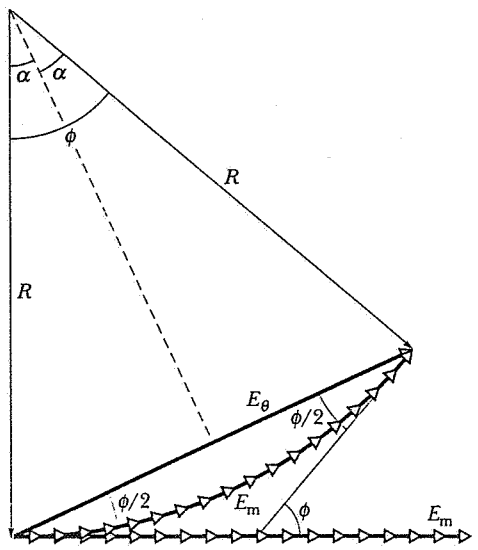


Figura 11 La costruzione usata per calcolare l'intensità in una diffrazione da singola fenditura. È qui analizzata la stessa situazione della figura 10*b*.

La luce che arriva in P provenendo da una determinata striscia è in fase solo se la striscia è infinitesima, e di conseguenza il numero di strisce è molto grande. La catena di vettori della figura 10*b* si approssima quindi a un arco di cerchio, simile al disegno di figura 11. La lunghezza dell'arco è E_m, mentre l'ampiezza cercata per il campo risultante è rappresentata dalla corda E_θ. L'angolo ϕ rappresenta la differenza di fase totale tra il raggio finale e quello iniziale della striscia; come si vede nella figura 11, ϕ è anche l'angolo tra i due raggi R.

Da questa figura, possiamo scrivere

$$E_\theta = 2R \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}.$$

In base alla figura 11, ϕ misura in radianti

$$\phi = \frac{E_m}{R}.$$

Combinando queste equazioni, si ottiene

$$E_\theta = \frac{E_m}{\phi/2}\operatorname{sen}\frac{\phi}{2},$$

ovvero

$$E_\theta = E_m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}, \tag{5}$$

nella quale

$$\alpha = \frac{\phi}{2}. \tag{6}$$

Dalla figura 9, ricordando che ϕ è la differenza di fase tra i raggi provenienti dall'estremità superiore e da quella inferiore della fenditura, e che la differenza di cammino tra questi raggi vale $a\,\operatorname{sen}\theta$, abbiamo

$$\frac{\text{differenza di fase}}{2\pi} = \frac{\text{differenza di cammino}}{\lambda},$$

ossia

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(a\,\operatorname{sen}\theta).$$

Introducendo l'equazione 6, si giunge a

$$\alpha = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta. \tag{7}$$

L'equazione 5, insieme con la definizione di α data dall'equazione 7, dà, per ogni angolo θ, l'ampiezza della perturbazione ondulatoria relativa alla figura di diffrazione di una fenditura. L'intensità I_θ è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, cioè

$$I_\theta = I_m\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2. \tag{8}$$

ISBN 88-408-0777-2

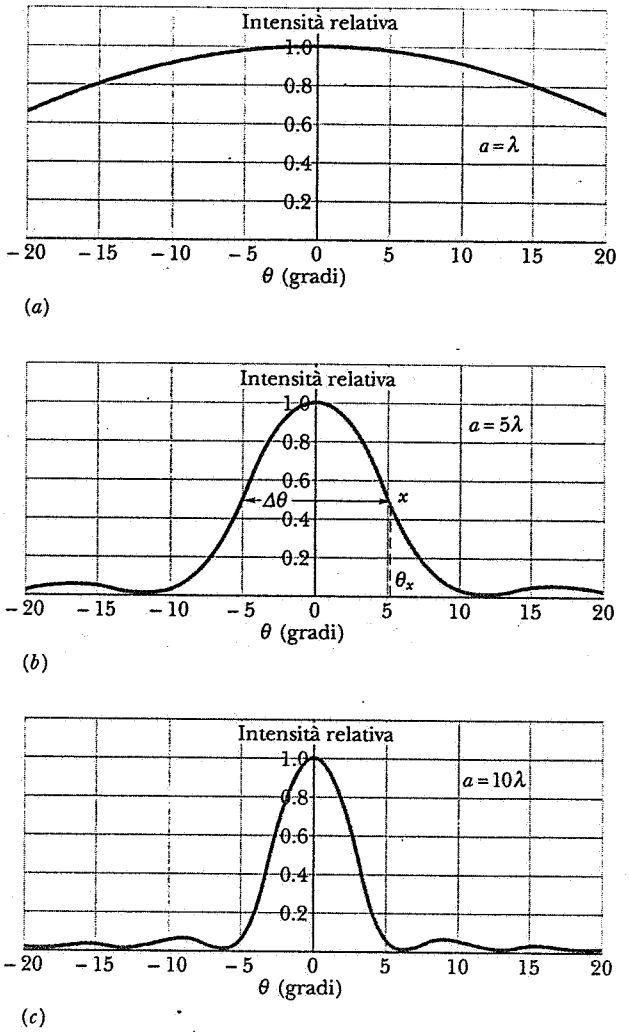


Figura 12 Distribuzione d'intensità in una diffrazione da singola fenditura per tre differenti valore del rapporto a/λ. Quanto più è larga la fenditura, tanto più è stretto il picco di diffrazione centrale. Come si vede in (*b*), $\Delta\theta$ fornisce una misura della larghezza del picco centrale.

L'equazione 8, combinata con la 7, dà, per ogni valore di θ, il risultato che cerchiamo, cioè l'intensità della figura di diffrazione da singola fenditura. La figura 12 mostra un grafico dell'intensità relativa I_θ/I_m per molteplici valori del rapporto a/λ. Si osservi che la figura diventa più stretta man mano che aumenta a/λ. (Si veda anche la figura 1 del capitolo 43.)

Nell'equazione si verificano i minimi quando

$$\alpha = m\pi \quad m = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots \tag{9}$$

Introducendo l'equazione 7, si giunge a

$$a\ \mathrm{sen}\theta = m\lambda \quad m = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots \text{ (minimi)},$$

che è il risultato ottenuto nel precedente paragrafo (eq. 3). In quel paragrafo, tuttavia, è stato ricavato *soltanto* questo risultato, senza ottenere informazioni quantitative sull'intensità della figura di diffrazione, nei punti in cui questa intensità è diversa da zero. Adesso, invece, (eq. 8) abbiamo una descrizione completa dell'andamento dell'intensità.

Esempio 3 Calcolare, approssimativamente, le intensità relative dei massimi secondari, nella diffrazione di Fraunhofer da una fenditura.

Soluzione I massimi secondari giacciono approssimativamente in posizione intermedia tra i minimi e sono grossolanamente dati (probl. 15) da

$$\alpha \approx (m+\tfrac{1}{2})\pi \quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

con risultati analoghi per $m < 0$. La sostituzione nell'equazione 8 porta a

$$I_\theta = I_m \left[\frac{\mathrm{sen}\ (m+\frac{1}{2})\pi}{(m+\frac{1}{2})\pi}\right]^2,$$

che si riduce a

$$\frac{I_\theta}{I_m} = \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2\pi^2}.$$

Risulta quindi $I_\theta/I_m = 0.045$ ($m = 1$), 0.016 ($m = 2$), 0.0083 ($m = 3$), e così via. L'intensità dei massimi successivi decresce molto rapidamente.

Esempio 4 Ricavare la larghezza $\Delta\theta$ del massimo centrale nella diffrazione di Fraunhofer da una fenditura (fig. 12*b*). La larghezza cercata è l'intervallo angolare che ha come estremi i due valori per cui l'intensità della figura di diffrazione è metà dell'intensità massima.

Soluzione Il punto x nella fig. 12*b* è scelto in modo che sia $I_\theta = \frac{1}{2} I_m$, ossia, per l'eq. 8,

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{\mathrm{sen}\alpha_x}{\alpha_x}\right)^2.$$

Questa equazione non può essere risolta analiticamente rispetto ad α_x. Usando una calcolatrice tascabile o un elaboratore elettronico, possiamo trovare una soluzione approssimata entro qualsivoglia intervallo di incertezza. Riscriviamo l'equazione in questo modo:

$$\alpha_x = \sqrt{2}\ \mathrm{sen}\alpha_x. \tag{10}$$

Per risolverla mediante una calcolatrice, procedete così. Ricordando che gli angoli sono dati in radianti, scegliete un primo valore arbitrario per α_x, ad esempio $\alpha_x = 1$. Introducete questo valore nel secondo membro della 10 e risolvete, ottenendo come risultato 1.19. L'equazione 10 richiederebbe che questo rappresenti il valore di α_x, che chiaramente non è, considerato che $1 \neq 1.19$. Prendete ora 1.19 come nuovo valore e, introducendolo ancora a secondo membro, risolvete una seconda volta la 10 e otterrete il nuovo valore di 1.31. Ancora non abbiamo un valore che soddisfi l'equazione ($1.19 \neq 1.31$), però ci siamo avvicinati rispetto al primo tentativo. Continuando in questo modo, usiamo il risulta-

to del calcolo precedente come nuovo valore da introdurre per calcolare il successivo, finché la differenza tra due successivi risultati diventa piccola quanto si vuole. (Si può impostare questo procedimento in un programma per calcolatore ed eseguire così automaticamente le ripetizioni del calcolo. E si può anche richiedere che le ripetizioni si arrestino quando la differenza tra due valori successivi diventa minore di una valore prefissato a piacere.) Questo metodo è chiamato tecnica *iterativa* per la soluzione di equazioni. Dopo 10 iterazioni, il risultato è

$$\alpha_x = 1.39156,$$

e le iterazioni successive modificano solo la quinta cifra decimale. Introducendo questo valore nell'equazione 8, si ottiene

$$\theta_x = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\alpha_x \lambda}{\pi a}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1.39}{5\pi}\right) = 5.1°.$$

La larghezza della curva risulta infine

$$\Delta\theta = 2\theta_x = 10.2°.$$

46-4 DIFFRAZIONE DA UN FORO CIRCOLARE

Una lente, nel focalizzare un'immagine, consente il passaggio solo alla luce che incide entro il suo perimetro circolare. Da questo punto di vista la lente si comporta come un'apertura circolare in uno schermo opaco. Una tale apertura produce figure di diffrazione analoghe a quelle della singola fenditura. Gli effetti di diffrazione costituiscono spesso un limite alla capacità dei telescopi e di altri strumenti ottici di rendere immagini nitide.

L'immagine prodotta da una lente può essere distorta da altri fenomeni, quali l'aberrazione cromatica e l'aberrazione sferica. Si possono ridurre significativamente e anche eliminare questi effetti dando forme opportune alle superfici delle lenti oppure introducendo elementi correttivi nel sistema ottico. Cionondimeno, non esiste progetto, per quanto raffinato, che sia in grado di eliminare gli effetti della diffrazione, fenomeno governato solo dalla dimensione dell'apertura (il diametro della lente) e dalla lunghezza d'onda della luce. Con la diffrazione la natura ci impone un limite fondamentale alla precisione degli strumenti.

Quando abbiamo analizzato il comportamento delle lenti abbiamo usato le regole dell'ottica geometrica e abbiamo assunto che non avvenissero fenomeni di diffrazione. Tuttavia l'ottica geometrica è di per se stessa un'approssimazione, è cioè un caso limite dell'ottica ondulatoria. Se avessimo seguito un metodo rigoroso ottico-ondulatorio per analizzare la formazione delle immagini in una lente, il fenomeno di diffrazione sarebbe scaturito in modo naturale.

La figura 13 è l'immagine di una sorgente di luce puntiforme e distante (una stella) formata su una pellicola fotografica posta nel piano focale della lente convergente di un telescopio. Essa non è esattamente puntiforme, come si intende studiando il problema (approssimativamente) con l'ottica geometrica, ma forma un disco circolare circondato da alcuni anelli secondari, progressivamente meno intensi. Il confronto con la figura 1 non può lasciar dubbi sul fatto che siamo in presenza di un fenomeno di diffrazione.

Analizzando matematicamente il problema, ciò che trascende lo scopo di questo libro, si trova che il primo minimo della figura di diffrazione di un'apertura circolare, nelle condizioni di Fraunhofer, è individuato da un angolo, rispetto all'asse centrale, dato da

$$\text{sen}\theta = 1.22\frac{\lambda}{d} \qquad (11)$$

dove d rappresenta il diametro dell'apertura. Confrontiamola con l'equazione 1,

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{a},$$

che dà la posizione del primo minimo per una fenditura stretta, di larghezza a. Il fattore 1.22, per cui differiscono le equazioni, è il risultato del calcolo numerico che consiste nell'integrare sulle sorgenti elementari di Huygens nelle quali si può suddividere l'apertura circolare.

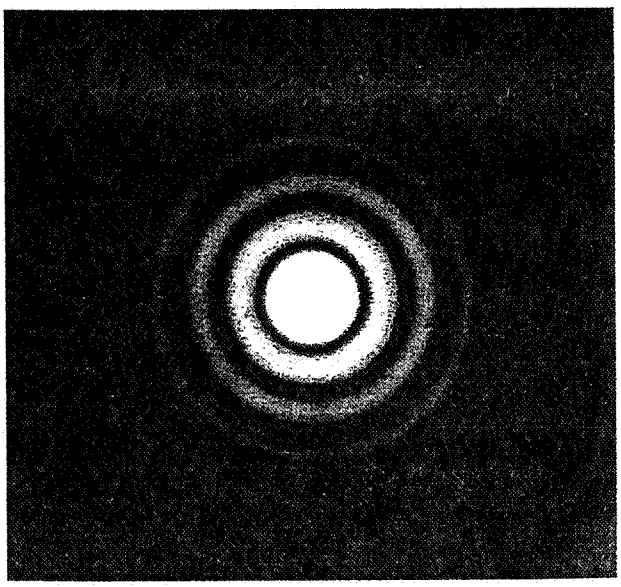


Figura 13 Figura di diffrazione prodotta da un'apertura circolare. Il massimo centrale è talvolta chiamato *disco di Airy*, dal nome di Sir George Airy, che analizzò per primo il caso della diffrazione da un foro circolare nel 1835. Si notino i massimi secondari ad anello.

ISBN 88-408-0777-2

Il fatto che le immagini delle lenti siano figure di diffrazione è importante quando vogliamo distinguere due oggetti puntiformi lontani la cui distanza angolare è piccola. Nella figura 14 sono riportate le immagini di diffrazione, nonché le loro distribuzioni d'intensità, per due oggetti puntiformi distanti (per esempio stelle) con piccola separazione angolare, e con intensità centrali circa uguali. Nella figura 14*a* gli oggetti non sono risolti, cioè non si possono distinguere da un singolo oggetto puntiforme. Nella figura 14*b* si distinguono a fatica, mentre nella figura 14*c* sono pienamente risolti.

Nella figura 14*b* la distanza angolare delle due sorgenti puntiformi è tale che il massimo di diffrazione di una coincide col primo minimo dell'altra. Questa situazione corrisponde al *criterio di Rayleigh* per risolvere le immagini. Per l'equazione 11, due oggetti che siano appena separabili in base al criterio di Rayleigh devono avere una distanza angolare θ_R data da

$$\theta_R = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1.22\lambda}{d}\right).$$

Considerato che gli angoli interessati sono piuttosto piccoli, si può sostituire sen θ_R con θ_R, di modo che

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d}, \qquad (12)$$

dove θ_R è espresso in radianti. Due oggetti possono essere risolti se la loro distanza angolare θ è maggiore di θ_R: in caso contrario non è possibile vederli separati. L'angolo θ_R è la minima distanza angolare alla quale è possibile la risoluzione, secondo il criterio di Rayleigh.

Quando vogliamo usare una lente per distinguere oggetti di limitata distanza angolare, sarebbe desiderabile avere il disco centrale della figura di diffrazione più piccolo possibile. Ciò si può ottenere (eq. 12) aumentando il diametro della lente o diminuendo la lunghezza d'onda. Una buona ragione per preferire telescopi di largo diametro è la possibilità che questi offrono di ottenere immagini più *nitide* in modo da poter esaminare gli oggetti celesti in maggior dettaglio. Le immagini sono anche più luminose, non solo perché l'immagine viene concentrata in un disco di diffrazione più piccolo, ma anche perché lenti più grandi raccolgono più luce. E così si possono vedere anche oggetti di luminosità più debole, come ad esempio galassie lontane.

Nei *microscopi*, per ridurre gli effetti di diffrazione, si utilizza spesso luce ultravioletta, che, per la sua piccola lunghezza d'onda, permette di esaminare maggiori dettagli di quanto non sarebbe possibile impiegando luce visibile con lo stesso microscopio. Vedremo nel capitolo 50 che in alcune circostanze fasci di elettroni si comportano come onde. Nel m*icroscopio elettronico* questi fasci possono avere una lunghezza d'onda efficace di 4×10^{-3} nm, 10^5 volte più piccola di quella della luce visibile. Questo fatto permette l'esame detta-

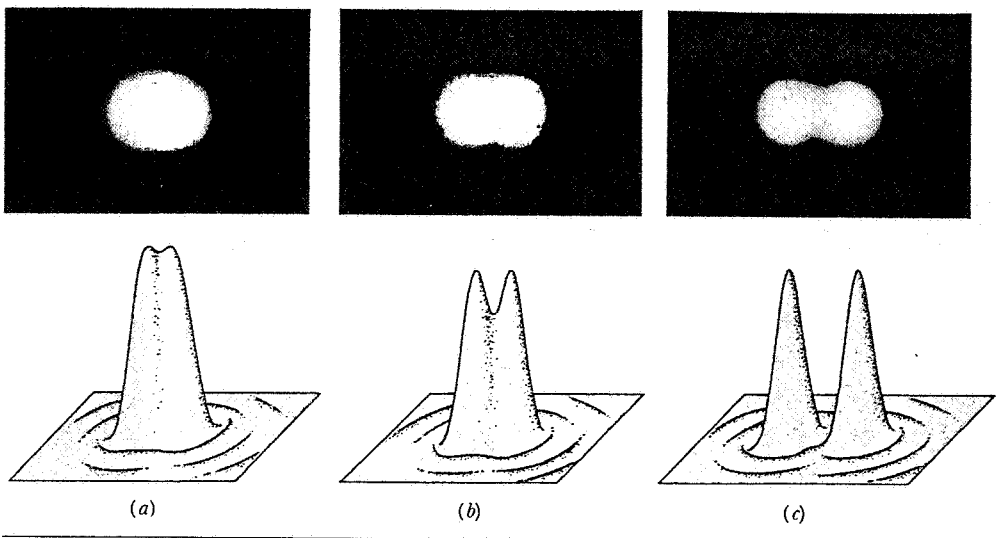


Figura 14 Immagini prodotte da sorgenti puntiformi lontane (stelle) per mezzo di lenti convergenti. Il diametro della lente, che costituisce un'apertura diffrangente, è di 10 cm, di modo che $a/\lambda = 200\,000$, se si considera la lunghezza d'onda di circa 500 nm. Nel caso (*a*) le stelle sono così vicine che le loro immagini possono essere distinte a fatica, a causa della sovrapposizione delle loro figura di diffrazione. Nel caso (*b*) le stelle sono un po' più distanti e la loro separazione risponde al criterio di Rayleigh sulla risoluzione delle immagini. Nel caso (*c*) le stelle sono ancor più separate e le loro immagini vengono risolte completamente. Sotto le immagini sono mostrati i profili delle intensità generati al calcolatore.

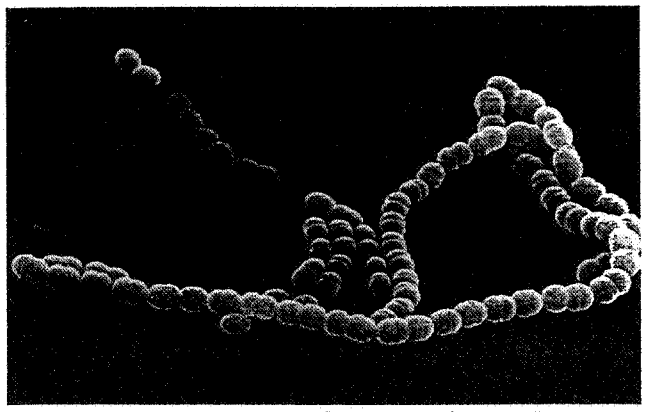


Figura 15 Immagine di una catena di streptococchi, batteri del diametro di 10^{-6} m, ottenuta con un microscopio elettronico. Si noti la nitidezza dell'immagine, che non si potrebbe realizzare utilizzando la radiazione visibile.

gliato di oggetti piccoli come i batteri o i virus. Se un oggetto così piccolo venisse esaminato con un microscopio ottico, la sua struttura sarebbe nascosta senza speranza dalla diffrazione.

Esempio 5 Una lente convergente di 32 mm di diametro ha una lunghezza focale f di 24 cm. (*a*) Qual è la distanza angolare che devono avere due oggetti puntiformi distanti, perché sia soddisfatto il criterio di Rayleigh? Si supponga che sia $\lambda = 550$ nm. (*b*) Quanto sono distanti nel piano focale della lente i massimi di diffrazione?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 12, abbiamo

$$\theta_R = 1.22\frac{\lambda}{d} = \frac{(1.22)(550 \times 10^{-9}\ \text{m})}{32 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= 2.10 \times 10^{-5}\ \text{rad} = 4.3 \text{ secondi di arco.}$$

(*b*) La distanza lineare è

$$\Delta x = f\theta_R = (0.24\ \text{m})(2.10 \times 10^{-5}\ \text{rad})$$
$$= 5.0\ \mu\text{m},$$

ovvero circa 9 volte la lunghezza d'onda della luce.

46-5 DOPPIA FENDITURA: COMBINAZIONE DI INTERFERENZA E DIFFRAZIONE

Nell'esperimento di Young delle due fenditure (par. 45-1) abbiamo fatto l'ipotesi che le fenditure siano arbitrariamente piccole (cioè $a \ll \lambda$). Questo implica che la parte centrale dello schermo sia uniformemente illuminata dalle onde diffratte da ciascuna fenditura. Queste onde interferendo producono frange di intensità uniforme.

Questa situazione ideale non si verifica con radiazione visibile perché non si può realizzare la condizione $a \ll \lambda$. Per queste fenditure relativamente larghe, l'intensità delle frange d'interferenza prodotte sullo schermo *non* è uniforme, ma varia a causa delle figure di diffrazione prodotte dalle due fenditure. L'effetto della diffrazione su una figura d'interferenza da doppia fenditura è illustrato nella figura 16, che mette a confronto il disegno dovuto all'interferenza da doppia fenditura con la figura di diffrazione prodotta da una singola fenditura di larghezza pari a una delle due precedenti. Si può vedere dalla figura 16*a* che la diffrazione produce proprio un inviluppo per l'intensità delle frange d'interferenza da doppia fenditura, che sono molto più ravvicinate.

Analizziamo ora la combinazione della figura d'interferenza con quella di diffrazione della figura 16*a*. La figura di interferenza per fenditure di larghezza infinitesima è data dall'equazione 11 del capitolo 45, che, con un piccolo cambiamento di simboli, diventa

$$I_{\theta,\text{int}} = I_{m,\text{int}} \cos^2\beta, \tag{13}$$

dove

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\text{sen}\theta \tag{14}$$

con d distanza tra i centri delle fenditure.

L'intensità dell'onda diffratta da ognuna delle fendi-

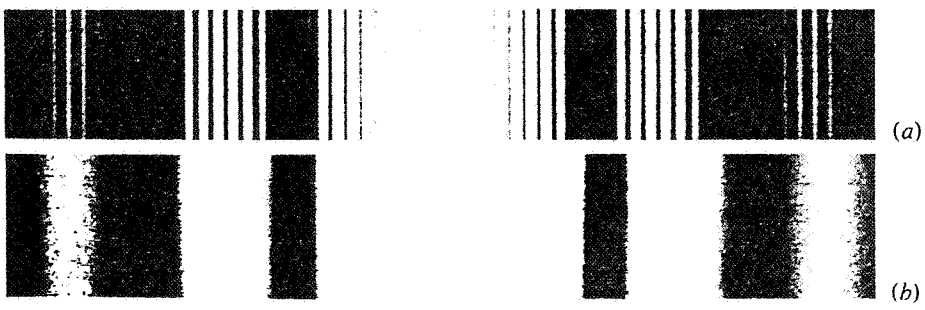


Figura 16 (*a*) Frange d'interferenza per un sistema a doppia fenditura in cui l'ampiezza delle fenditure non è trascurabile rispetto alla lunghezza d'onda. (*b*) Figura di diffrazione prodotta da una singola fenditura della medesima larghezza. Si osservi che la figura di diffrazione modula l'intensità delle frange d'interferenza, illustrate nella parte (*a*).

 ISBN 88-408-0777-2

ture si ottiene dall'equazione 8, cambiandone leggermente i simboli:

$$I_{\theta,\mathrm{dif}} = I_{\mathrm{m,dif}}\left(\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad (15)$$

ove

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\mathrm{sen}\theta. \qquad (16)$$

L'effetto risultante si trova considerando $I_{\mathrm{m,int}}$, nell'equazione 13, come una ampiezza variabile data in effetti da $I_{\theta,\mathrm{dif}}$ dell'equazione 15. Quest'assunzione per la figura risultante porta a

$$I_\theta = I_{\mathrm{m}}(\cos\beta)^2\left(\frac{\mathrm{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad (17)$$

nella quale abbiamo eliminato tutti gli indici che si riferivano separatamente all'interferenza e alla diffrazione. Più avanti in questo paragrafo ricaveremo questo risultato facendo uso dei vettori di fase.

Volendo descrivere a parole questo risultato, possiamo dire che in ogni punto dello schermo l'intensità della luce emessa da ciascuna fenditura, considerata da sola, è data dalla figura di diffrazione di quella fenditura (eq. 15). Le figure di diffrazione delle due fenditure, considerate indipendentemente, coincidono, perché nella diffrazione di Fraunhofer i raggi paralleli sono concentrati nello stesso punto. Le due onde diffratte interferiscono, dato che sono coerenti.

L'effetto dell'interferenza consiste nel ridistribuire l'energia a disposizione sopra lo schermo, producendo un insieme di frange. Nel paragrafo 45-1, quando abbiamo fatto l'ipotesi che sia $a \ll \lambda$, l'energia disponibile era praticamente la stessa in tutti i punti dello schermo in modo che tutte le frange di interferenza avessero praticamente la stessa intensità (si veda la figura 8 del capitolo 45). Se rinunciamo all'ipotesi $a \ll \lambda$, l'energia *non* è più distribuita uniformemente sullo schermo, ma è data dalla figura di diffrazione di una fenditura di larghezza a. In questo caso l'intensità delle frange di interferenza sarà determinata dall'intensità della figura di diffrazione nella posizione delle frange. L'equazione 17 è la formulazione matematica di questa proprietà. Ciò risulta particolarmente chiaro nella figura 17, che mostra (*a*) il «fattore d'interferenza» contenuto nell'equazione 17 (vale a dire, il fattore $\cos^2\beta$), (*b*) il «fattore di diffrazione» (sen $\alpha/\alpha)^2$, e (*c*) il loro prodotto.

La figura 18 è un diagramma dell'intensità relativa I_θ/I_{m} data dall'equazione 17 per $d = 50\lambda$, e per tre valori di a/λ. In essa è chiaramente mostrato che, per fenditure strette ($a = \lambda$), l'intensità delle frange è quasi uniforme e che, quando le fenditure si allargano, l'intensità delle frange è visibilmente modulata dal «fattore di diffrazione» dell'equazione 17, cioè dal fattore (sen $\alpha/\alpha)^2$; si confronti con la figura 12.

Se diminuiamo l'ampiezza della fenditura a, l'inviluppo del disegno delle frange diventa più largo e il picco centrale si appiattisce (si pongano a confronto le figure 18*b* e 18*c*). La distanza tra le frange non cambia , dato che dipende da d/λ. Se aumentiamo il passo delle fenditure d, le frange si avvicinano, ma l'inviluppo del disegno delle frange rimane immutato, poiché dipende da a/λ.

Aumentando la lunghezza d'onda della luce incidente, si allargano sia la figura d'interferenza sia quella di diffrazione: l'inviluppo di diffrazione si fa più ampio e la distanza tra le frange aumenta. Diminuendo la lunghezza d'onda, si ottiene l'effetto inverso. E ancora, la

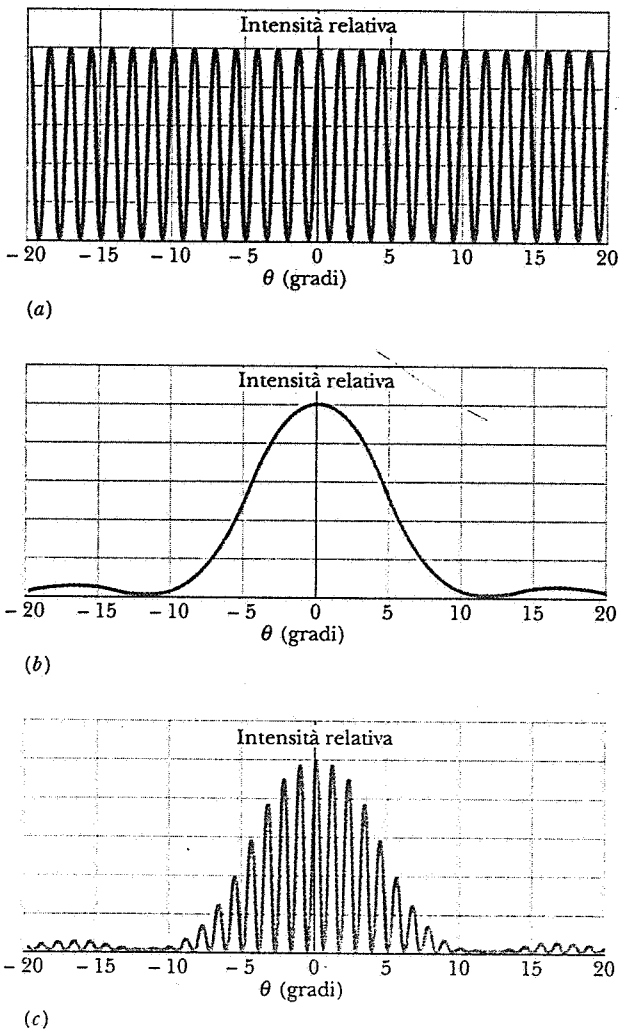


Figura 17 (*a*) Frange d'interferenza che verrebbero prodotte da due fenditure, la cui larghezza si può considerare infinitesima. (*b*) Figura di diffrazione per una fenditura di larghezza finita. (*c*) Figura delle frange d'interferenza formate da due fenditure della medesima larghezza del caso (*b*). Questa figura illustra la composizione delle curve mostrate in (*a*) e in (*b*).

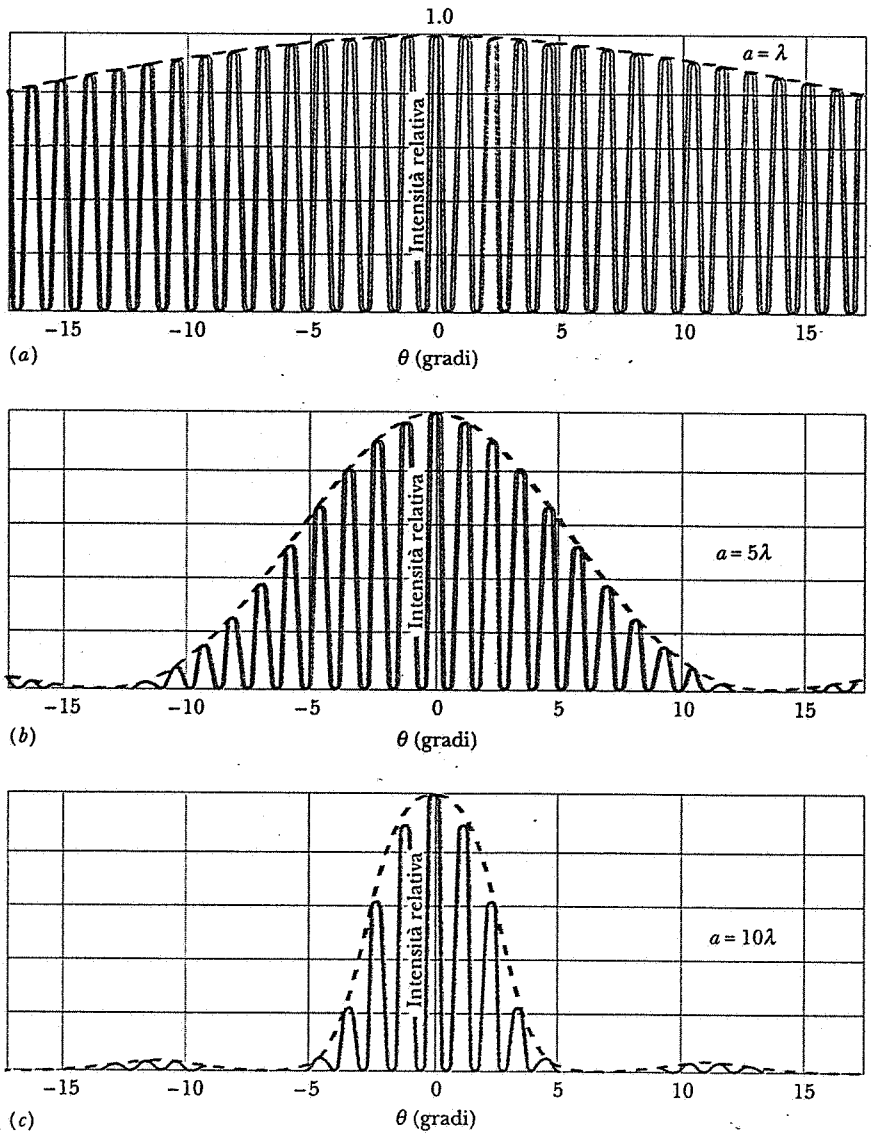


Figura 18 Frange d'interferenza prodotte da due fenditure distanti $d = 50\lambda$. Sono riportate le curve per tre differenti valori di a.

relazione tra l'inviluppo di diffrazione e le frange d'interferenza (per esempio, il numero di frange contenuto nel picco centrale) dipende dal rapporto d/a ed è indipendente da λ.

Nel problema delle due fenditure compaiono, intimamente legate, come è illustrato nella figura 17, l'interferenza e la diffrazione. Sia l'interferenza che la diffrazione sono effetti di sovrapposizione e si calcolano sommando in un dato punto le perturbazioni ondulatorie, tenendo opportunamente conto delle differenze di fase. Se le onde che si combinano provengono da un numero *finito* (e generalmente piccolo) di sorgenti elementari, coerenti, come nell'esperienza di Young, l'effetto è chiamato *interferenza*. Se invece le onde provengono dalla suddivisione di un'onda in sorgenti coerenti *infinitesime*, come nella trattazione che abbiamo fatto del problema di una fenditura singola, l'effetto è chiamato *diffrazione*. Questa distinzione tra interferenza e diffrazione è utile e conveniente, ma non deve far perdere di vista il fatto che ambedue questi fenomeni sono effetti di sovrapposizione e che spesso sono presenti simultaneamente, come nell'esperienza della doppia fenditura.

Esempio 6 Nell'esperimento con un sistema a due fenditure, la distanza D tra queste e lo schermo è di 52 cm, la lunghezza d'onda è pari a 480 nm, la distanza tra le fenditure d vale 0.12 mm e la larghezza delle fenditure a è di 0.025 mm. (*a*) Qual è la distanza tra le frange adiacenti? (*b*) Qual è la distanza tra il massimo centrale e il primo minimo dell'inviluppo di frange?

Soluzione (*a*) La distribuzione dell'intensità luminosa è data dall'equazione 17, nella quale la distanza tra le frange è determinata dal fattore di interferenza $\cos^2\beta$. Dall'esempio 2 del capitolo 45, abbiamo

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}.$$

 ISBN 88-408-0777-2

Sostituendo i valori si ottiene

$$\Delta y = \frac{(480 \times 10^{-9}\ \text{m})(52 \times 10^{-2}\ \text{m})}{0.12 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2.1\ \text{mm}.$$

(*b*) La posizione angolare del primo minimo discende dall'equazione 1, vale a dire

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{a} = \frac{480 \times 10^{-9}\ \text{m}}{25 \times 10^{-6}\ \text{m}} = 0.0192.$$

Questo valore è così piccolo che, senza introdurre grandi imprecisioni, possiamo porre sen $\theta \approx \tan\theta \approx \theta$, sicché

$$y = D\tan\theta \approx D\theta = (52 \times 10^{-2}\ \text{m})(0.0192) = 10\ \text{mm}.$$

Nel picco centrale dell'inviluppo ci sono circa 9 frange.

Esempio 7 Quali condizioni si devono verificare perché il massimo centrale dell'inviluppo della figura d'interferenza relativa a due fenditure contenga esattamente undici frange?

Soluzione La condizione sarà soddisfatta se il sesto minimo del fattore di interferenza ($\cos^2\beta$ nell'equazione 17) coincide col primo minimo del fattore di diffrazione [$(\text{sen}\,\alpha/\alpha)^2$ nell'equazione 17]. Il sesto minimo del fattore di interferenza si ha quando

$$\beta = (11/2)\pi$$

nell'equazione 17. Il primo minimo nel termine di diffrazione si verifica per

$$\alpha = \pi$$

nell'equazione 17. Dividendo (si vedano le equazioni 14 e 16), si ottiene

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{d}{a} = \frac{11}{2}.$$

Questa condizione dipende soltanto dal rapporto tra il passo delle fenditure d e la loro larghezza a, ed è indipendente dalla lunghezza d'onda. La figura ottenuta con onde lunghe sarà più larga di quella che si ottiene con onde corte, ma nel picco centrale dell'inviluppo saranno sempre contenute 11 frange.

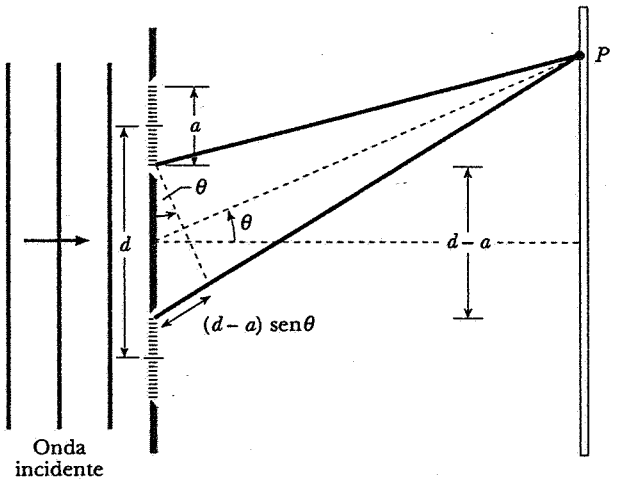


Figura 19 Ciascuna apertura di una doppia fenditura è divisa in N sezioni. Nelle condizioni limite le sezioni diventano infinitesime in larghezza e infinite in numero. Qui si è adottato $N = 18$ come nella figura 9.

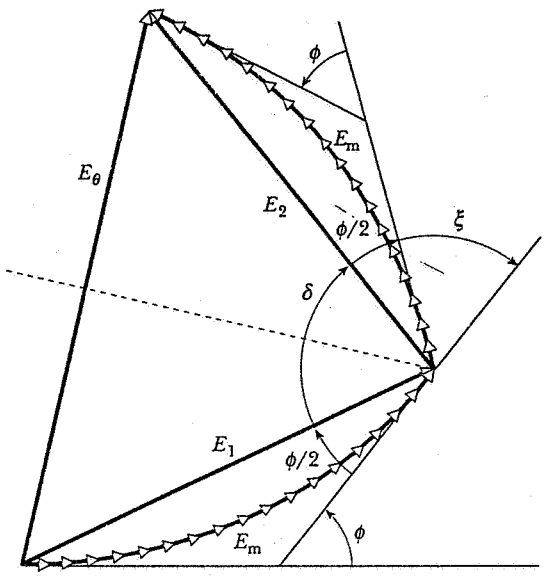


Figura 20 Diagramma dei vettori di fase usato per calcolare la risultante del campo elettrico in un'interferenza da doppia fenditura.

Derivazione dell'equazione 17 mediante i vettori di fase *(Facoltativo)*

Nella figura 19 è illustrato un disegno adatto all'analisi della doppia fenditura mediante i vettori di fase. Ciascuna delle due fenditure è divisa in N zone, come già si è fatto con la fenditura singola della figura 9. Il campo elettrico risultante nel punto P viene trovato sovrapponendo i vettori degli N campi elettrici generati nella fenditura superiore con gli N campi elettrici generati nella fenditura inferiore. Il metodo dei vettori di fase ci permette di sommare questi contributi al campo elettrico totale nel punto P. tenendo conto delle fasi relative.

La figura 20 mostra i primi N vettori di fase (relativi alla fenditura superiore di figura 19) e la loro risultante E_1, come nella figura 11. Tra ciascuno degli N vettori di fase sussiste una differenza di fase $\Delta\phi = o\ N$. Per sommare il secondo gruppo di vettori di fase N (relativi alla fenditura inferiore), dobbiamo trovare l'angolo di fase ξ tra l'ultimo vettore della fenditura superiore e il primo vettore di quella inferiore. Tracciamo dunque gli N vettori di fase relativi alla fenditura inferiore e calcoliamo il loro vettore risultante, E_2. La somma dei vettori E_1 ed E_2 dà il vettore risultante E_θ caratteristico della doppia fenditura.

Dall'esame della figura 20 si nota che E_θ costituisce la base di un triangolo isoscele, i cui lati uguali sono pari a E_1 ed E_2, dati dall'equazione 5. Dalla geometria di figura 20, si ha

$$E_\theta = 2E_1\ \text{sen}\frac{\delta}{2}. \qquad (18)$$

dove δ, l'angolo al vertice del triangolo, può essere calcolato dal-

la relazione

$$\frac{\phi}{2}+\delta+\frac{\phi}{2}+\xi=\pi, \tag{19}$$

che dà

$$\delta=\pi-(\xi+\phi). \tag{20}$$

Usando l'equazione 20 per calcolare sen$\delta/2$, troviamo

$$\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\xi+\phi}{2}\right)=\cos\frac{\xi+\phi}{2}. \tag{21}$$

Dall'espressione

$$\frac{\text{differenza di cammino}}{\lambda}=\frac{\text{differenza di fase}}{2\pi},$$

ponendo ξ come differenza di fase tra i due raggi (dall'estremità in basso della fenditura superiore e dall'estremità in alto della fenditura inferiore, come mostra la figura 19) e $(d-a)\operatorname{sen}\theta$ come differenza di cammino, si ottiene

$$\frac{\xi}{2}=\frac{\pi}{\lambda}(d-a)\operatorname{sen}\theta.$$

Combinando questa espressione con la (7), $\phi/2=(\pi a/\lambda)\operatorname{sen}\theta$, si giunge a

$$\frac{\xi+\phi}{2}=\frac{\pi}{\lambda}d\operatorname{sen}\theta,$$

che coincide con β, come definito dall'equazione 14. A questo punto, sostituendo nell'equazione 21, si trova

$$\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}=\cos\beta.$$

Trasferendo questo risultato nell'equazione 18 e utilizzando l'equazione 5 per il modulo di E_1 (o E_2), otteniamo

$$E_\theta=2E_m\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\cos\beta. \tag{22}$$

Elevando al quadrato l'equazione 22 si ottiene l'espressione per le intensità

$$I_\theta=I_m(cos\beta)^2\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2.$$

che è identica all'equazione 17. Si osservi che, come già era il caso dell'equazione 11, si ha $I_m=4I_0$. ■

DOMANDE

1. Si illustri la distinzione tra la diffrazione di Fresnel e quella di Fraunhofer. Si basano su princìpi fisici differenti? In caso affermativo, quali sono? Se si basano invece sullo stesso principio fondamentale, di quale si tratta?
2. In che cosa sono simili l'interferenza e la diffrazione? In che cosa differiscono?
3. Immaginate di avere una sottile fenditura davanti alla pupilla di un occhio e di guardare una sorgente di luce lontana avente la forma di lungo filamento incandescente. La figura di diffrazione che vedete è una figura di Fresnel o di Fraunhofer?
4. Gli effetti di diffrazione si manifestano anche per le immagini virtuali oltre che per quelle reali? Si spieghi.
5. Esistono effetti di diffrazione in immagini formate (*a*) da specchi piani e (*b*) da specchi sferici? Giustificare la risposta.
6. Commentare la seguente affermazione: "La diffrazione avviene in tutte le regioni dello spettro elettromagnetico". Si considerino, per esempio, il campo dei raggi X e la regione delle microonde e si elenchino prove che consentano di stabilire se è vera o falsa.
7. Abbiamo affermato (correttamente) che le equazioni di Maxwell predicono tutti i fenomeni dell'ottica classica. Tuttavia nel cap. 45 (Interferenza) e in questo capitolo (Diffrazione) non si fa granché menzione delle equazioni di Maxwell. C'è qualche incoerenza? Dove si sente la presenza delle equazioni di Maxwell? Discutere.
8. Se dovessimo ripetere l'analisi sulle proprietà delle lenti fatta nel capitolo 44 con i metodi dell'ottica geometrica, ma senza limitarci a raggi parassiali e a «lenti sottili», i fenomeni di diffrazione risulterebbero dall'analisi? Discutere l'argomento.
9. Perché nell'esperienza quotidiana la diffrazione delle onde sonore è più evidente di quella delle onde luminose?
10. Le onde acustiche possono subire diffrazione. All'incirca, che dimensione dovrebbe avere una fenditura singola per poter diffrangere un'onda sonora incidente di frequenza 1 kHz?
11. Perché le onde radio si diffrangono attorno agli edifici e le onde luminose no?
12. Una cassa acustica, del tipo utilizzato nei concerti rock, ha un'apertura rettangolare la cui larghezza è 1.0 m e la cui altezza è 0.3 m. Il diagramma dell'intensità sonora sarà più largo nel piano orizzontale o in quello verticale?
13. Una speciale antenna radar è costruita per dare una misura precisa dell'altezza di un aereo e una misura meno precisa della sua posizione in un piano orizzontale. Il rapporto tra altezza e larghezza del riflettore radar, deve essere minore, uguale o maggiore dell'unità?
14. Descrivere ciò che avviene di una figura di diffrazione di Fraunhofer, se l'intero dispositivo viene immerso in acqua.
15. Nella diffrazione di Fraunhofer di una fenditura, qual è l'effetto che si ottiene aumentando (*a*) la lunghezza d'onda e (*b*) la larghezza della fenditura?
16. Avrete probabilmente notato che in automobile la qualità della ricezione delle onde medie in modulazione di ampiezza peggiora quando si passa sotto un ponte. La stessa cosa non succede se l'autoradio è sintonizzata sulla banda delle onde ultracorte in modulazione di frequenza. La diffrazione ha forse qualcosa a che vedere con questi effetti?
17. Come apparirebbe la figura di diffrazione da una fenditura singola, se fosse $\lambda > a$?
18. Come sarebbe la figura di diffrazione prodotta sullo schermo da due fenditure, se le loro larghezze non fossero uguali? La posizione delle frange cambierebbe?
19. L'ombra proiettata da un lungo palo verticale colpito dal sole risulta netta vicino alla base, mentre presenta bordi meno definiti in cima. Perché?

ISBN 88-408-0777-2

20. La luce solare colpisce una fenditura larga 1 mm. Discutere qualitativamente la figura di diffrazione che ne risulta.
21. Nella figura 8 i raggi r_1 ed r_3 sono in fase come pure r_2 ed r_4. Perché nel punto P_2 non vi è un massimo di intensità anziché un minimo?
22. Quando parliamo di diffrazione da una sola fenditura intendiamo che la larghezza della fenditura sia molto minore della sua altezza. Supponiamo che l'altezza sia il doppio della larghezza. Descrivere qual è l'aspetto approssimativo della figura di diffrazione.
23. Nella figura 7 le lunghezze dei cammini ottici dalla fenditura al punto P_0 sono uguali. Perché?
24. Perché nella figura 10*d* E_0, che rappresenta il primo massimo al di là di quello centrale, non è verticale? (*Suggerimento*: Si considerino gli effetti dell'«avvolgimento» o dello «svolgimento» della catena di vettori in questa figura.)
25. Elencare almeno due ragioni per cui le prestazioni dei telescopi crescono aumentando il diametro delle lenti.
26. Gli effetti di diffrazione si manifestano anche nei telescopi riflettori, come il telescopio spaziale di Hubble, che impiegano specchi anziché lenti? Se è così, perché si fa lo sforzo di inviare simili telescopi nello spazio?
27. Abbiamo visto che la diffrazione costituisce un limite al potere risolvente dei telescopi ottici (fig. 14). Di questo effetto risentono anche i grandi radiotelescopi?
28. La diffrazione è di maggior disturbo in un telescopio che in una macchina fotografica. Spiegare perché.

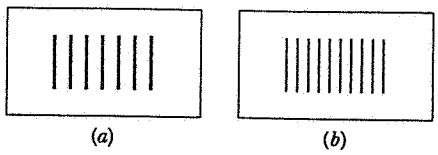


Figura 21 Domanda 29.

29. L'aspetto originario delle frange prodotte da una doppia fenditura, viste in luce monocromatica, riportato nella figura 21*a*, si è in qualche modo modificato come nella figura 21*b*. Elenchiamo una serie di possibili cause del cambiamento: (*a*) la lunghezza d'onda della luce è diminuita; (*b*) la lunghezza d'onda della luce è cresciuta; (*c*) sono aumentate le larghezze delle fenditure; (*d*) è la distanza tra le fenditure che è cresciuta; (*e*) la distanza tra le fenditure è diminuita; (*f*) la larghezza di entrambe le fenditure si è ridotta. Quale/i delle citate cause può spiegare la modificazione delle frange?
30. Abbiamo visto che nella figura di interferenza da doppia fenditura, come quella della figura 16*a*, l'intensità delle frange di interferenza è modulata dalla figura di diffrazione di una fenditura. Sarebbe possibile capovolgere questa affermazione e dire che l'intensità di una diffrazione da singola fenditura è modulata dalle frange d'interferenza? Discutere l'argomento.

PROBLEMI

Paragrafo 46-2 Diffrazione da singola fenditura

1. Una luce monocromatica incide su una fenditura larga 0.022 mm e produce il primo minimo di diffrazione nella direzione avente angolo di 1.8° rispetto al raggio incidente. Si trovi la sua lunghezza d'onda.
2. Si può dimostrare la natura ondulatoria dei raggi X provocandone la diffrazione attraverso una fenditura singola? Ipotizzando che la lunghezza d'onda della radiazione X sia di 0.10 nm, e stimando che la deviazione angolare minima rilevabile per il massimo centrale sia di 0.12 mrad, determinare la massima larghezza della fenditura che si renderebbe necessaria.
3. Su una stretta fenditura incide luce monocromatica con lunghezza d'onda di 441 nm. Su uno schermo posto a 2.16 m di distanza, l'intervallo misurato tra il massimo centrale e il secondo minimo risulta di 1.62 cm. (*a*) Si calcoli l'angolo di diffrazione θ del secondo minimo. (*b*) Si determini la larghezza della fenditura.
4. Luce con lunghezza d'onda di 633 nm investe una stretta fenditura. L'angolo compreso tra il primo minimo da un lato, rispetto al centro, e il primo minimo dall'altro lato è di 1.97°. Si calcoli la larghezza della fenditura.
5. Una fenditura singola è illuminata con luce composta di due lunghezze d'onda, λ_a e λ_b, scelte in modo che il primo minimo di diffrazione della componente λ_a coincida con il secondo minimo della componente λ_b. (*a*) Che relazione sussiste tra le due lunghezze d'onda? (*b*) Esistono altri minimi coincidenti nelle due figure?
6. Un'onda piana, con lunghezza d'onda 593 nm, investe una fenditura la cui larghezza è 420 μm. Una lente convergente sottile, dotata di lunghezza focale pari a 71.4 cm, si trova oltre la fenditura in modo da mettere a fuoco la luce su uno schermo. Qual è la distanza sullo schermo tra il centro della figura e il secondo minimo?
7. In una figura di diffrazione da singola fenditura la distanza tra il primo minimo a destra e il primo minimo a sinistra è di 5.20 mm. Lo schermo su cui è proiettata la figura dista 82.3 cm dalla fenditura e la lunghezza d'onda è pari a 546 nm. Si calcoli la larghezza della fenditura.
8. La distanza tra il primo e il quinto minimo di una figura di diffrazione da singola fenditura è di 0.350 mm e lo schermo dista dalla fenditura 41.3 cm, mentre la lunghezza d'onda della luce incidente è pari a 546 nm. (*a*) Calcolare l'angolo di diffrazione θ relativo al primo minimo. (*b*) Trovare la larghezza della fenditura.
9. Una fenditura ampia 1.16 mm è investita da luce con lunghezza d'onda di 589 nm. La figura di diffrazione è proiettata su uno schermo distante 2.94 m. Trovare l'intervallo tra i primi due minimi di diffrazione sullo stesso lato rispetto al massimo centrale.
10. Nella fabbricazione dei fili (e altri oggetti di piccola dimensione), si usa talvolta un laser per mantenere sotto controllo continuo lo spessore del prodotto. Il filo intercetta il fascio laser producendo una figura di diffrazione simile a quella formata da una fenditura singola di apertura pari al diametro del filo; si veda la figura 22. Si supponga che un laser a

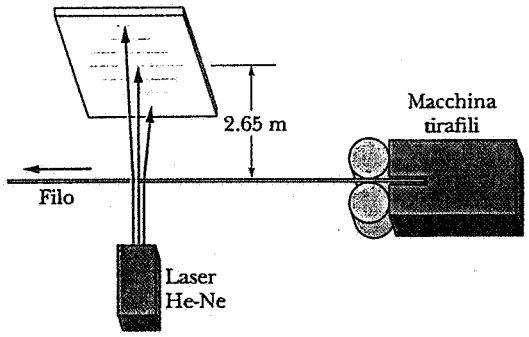


Figura 22 Problema 10.

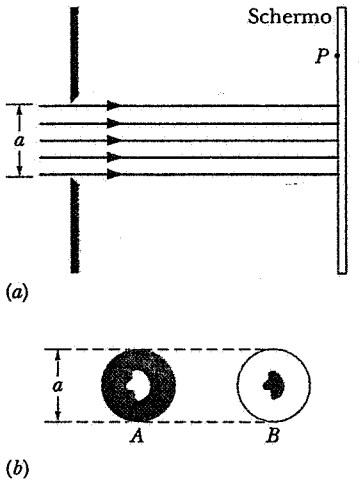


Figura 23 Problema 14.

He-Ne, con lunghezza d'onda di 632.8 nm, illumini il filo e proietti la figura di diffrazione su uno schermo posto a 2.65 m di distanza. Se il diametro richiesto per il filo è di 1.37 mm quale dovrebbe essere la distanza che si osserva tra i due minimi del decimo ordine, situati su ciascun lato rispetto al massimo centrale?

Paragrafo 46-3 Intensità nella diffrazione da singola fenditura

11. Una luce monocromatica di lunghezza d'onda 538 nm incide su una fenditura larga 25.2 μm. La distanza tra le fenditura e lo schermo vale 3.48 m. Si consideri un punto sullo schermo distante 1.13 cm dal massimo centrale. (*a*) Si calcoli θ. (*b*) Si determini a. (*c*) Si trovi il rapporto tra le intensità in questo punto e nel massimo centrale.

12. Se raddoppiate la larghezza di una fenditura singola, l'intensità del massimo centrale nella figura di diffrazione aumenta di quattro volte, anche se l'energia che transita dalla fenditura raddoppia soltanto. Si dia una spiegazione quantitativa.

13. Calcolare la larghezza del massimo centrale nella figura di diffrazione prodotta da una singola fenditura larga 10 volte la lunghezza d'onda. Si confronti il risultato con la figura 12*c*. Si veda anche l'esempio 4.

14. Un fascio monocromatico di luce parallela incide su un foro di «collimazione» di diametro $a \gg \lambda$. Il punto P si trova nella regione d'ombra su uno schermo lontano come mostrato nella figura 23*a*. Due ostacoli, indicati nella figura 23*b*, sono posti successivamente sopra il foro di collimazione. A è un disco opaco bucato, mentre B è il «negativo fotografico» di A. Utilizzando i princìpi di sovrapposizione, dimostrare che l'intensità in P è la stessa per i due ostacoli diffrangenti A e B (*Principio di Babinet*). A questo proposito si può dimostrare che la figura di diffrazione di un filo coincide con quello di una fenditura della stessa larghezza. Si veda Curry S.M., Schawlow A.L., *Measuring the Diameter of a Hair by Diffraction*, «American Journal of Physics», Mag 1974, 412.

15. (*a*) Dimostrare che i valori di α, per i quali si hanno i massimi di diffrazione di una fenditura, si possono trovare differenziando l'equazione 8 rispetto ad α e uguagliando a zero il risultato, ottenendo così la condizione

$$\tan\alpha = \alpha.$$

(*b*) Trovare i valori di α che soddisfano questa equazione tracciando i diagrammi della curva $y = \tan\alpha$ e della retta $y = \alpha$ e trovando la loro intersezione, oppure usando una calcolatrice tascabile per trovare un valore adeguato di α procedendo per tentativi. (*c*) Trovare i valori (non interi) di m che corrispondono ai massimi successivi nella figura di diffrazione da una fenditura. Si osservi che i massimi secondari non stanno esattamente a metà strada fra i minimi.

16. Si calcoli l'angolo che E_θ nella figura 10*d* forma con la verticale; si vedano la domanda 24 e il problema 15.

Paragrafo 46-4 Diffrazione da un foro circolare

17. I due fari di un'automobile che si sta avvicinando si trovano a 1.42 m l'uno dall'altro. Qual è (*a*) la separazione angolare e (*b*) la distanza massima, alle quali l'occhio può vederli separati? Si faccia l'ipotesi che questa distanza sia determinata soltanto da effetti di diffrazione dell'apertura circolare della pupilla e si esegua il calcolo per una lunghezza d'onda di 562 nm e per un diametro della pupilla di 5.00 mm.

18. Un astronauta in un satellite afferma di essere capace di distinguere appena a occhio nudo due sorgenti puntiformi poste sulla terra, 160 km sotto di lui. Qual è la loro distanza (*a*) angolare e (*b*) lineare, in condizioni ideali? Si supponga che sia $\lambda = 540$ nm e il diametro della pupilla 4.90 mm.

19. Trovare la distanza tra due punti sulla Luna che possono essere risolti dal telescopio di 5.08 m di diametro di Monte Palomar, nell'ipotesi che essa sia determinata da effetti di diffrazione. Si consideri una lunghezza d'onda di 565 nm.

20. La parete di una grande stanza è fatta con pannelli acustici nei quali sono praticati dei forellini, i cui centri distano 5.20 mm l'uno dall'altro. A che distanza una persona potrebbe distinguere chiaramente i piccoli fori, in condizioni ideali? Si assumano i valori 542 nm per la lunghezza d'onda e 4.60 mm per il diametro della pupilla.

21. Se Superman possedesse davvero una vista a raggi X con un diametro della pupilla di 4.3 mm e una lunghezza d'onda di 0.12 nm, a che altitudine massima potrebbe distinguere due individui, supposto che la dimensione minima dei dettagli sia di 4.8 cm?

22. Il radar di un incrociatore impiega un'antenna circolare del diametro di 2.33 m per emettere radiazione di 1.57 cm di lunghezza d'onda. A una distanza di 6.25 km, di quanto devono essere separati come minimo due motoscafi, affinché possano essere riconosciuti come due oggetti distinti dal sistema radar?

ISBN 88-408-0777-2

23. I dipinti di George Seurat consistono di tanti puntini vicinissimi ($\approx$ 2 mm di diametro) di colore puro, come si vede nella figura 24. L'illusione di una tinteggiatura uniforme è indotta nell'osservatore dalla diffrazione che la luce subisce entrando nella sua pupilla. Si calcoli la distanza minima dal quadro, alla quale l'osservatore deve disporsi per avere l'impressione che la colorazione sia uniforme. Si assumano i valori di 475 nm per la lunghezza d'onda della luce e di 4.4 mm per il diametro della pupilla.

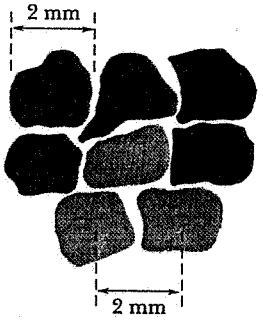


Figura 24 Problema 23.

24. Un satellite «spia», orbitante per esempio a 160 km dalla superficie terrestre, ha una lente con distanza focale di 3.6 m. Il suo potere risolutivo per gli oggetti a terra è di 30 cm, sufficiente cioè per misurare la dimensione di un aereo che prende il volo. Qual è il diametro efficace della lente, determinato solo con considerazioni sulla diffrazione? Si assuma $\lambda = 550$ nm. Oggigiorno sembra siano in funzione satelliti molto più efficienti.
25. (*a*) Un diaframma circolare, il cui diametro è 0.60 m, oscilla a una frequenza di 25 kHz in una sorgente sonora subacquea per la ricerca di sottomarini. Lontano dalla sorgente l'intensità sonora è distribuita secondo una figura di diffrazione corrispondente a un foro circolare di diametro uguale a quello del diaframma. Trovare l'angolo fra la normale al diaframma e la direzione del primo minimo, sapendo che la velocità del suono nell'acqua è 1450 m/s. (*b*) Ripetere il calcolo per una sorgente con una frequenza (udibile) di 1 kHz.
26. Nel Giugno 1985 un raggio laser, emesso dalla Optical Station dell'aeronautica sul monte Maui nelle Hawaii, veniva riflesso dalla navetta spaziale Discovery alla distanza di 354 km. Il diametro del massimo centrale del fascio nella posizione della navetta fu, a quanto stabilito, di 9.14 m e la lunghezza d'onda del fascio era di 500 nm. Quant'è il diametro efficace dell'apertura dell'apparecchio laser nella base del monte Maui? (*Suggerimento*: Il fascio laser si allarga per via della diffrazione; si supponga che l'apertura sia circolare.)
27. Un cosiddetto radar a onde millimetriche genera fasci più stretti di un radar convenzionale a microonde. Ciò lo rende meno vulnerabile ai missili antiradar. (*a*) Calcolare l'ampiezza angolare, dal primo minimo al primo massimo, del «lobo centrale» prodotto da un fascio radar da 220 GHz, emesso da un'antenna circolare di 55 cm di diametro. (La frequenza è appositamente scelta per penetrare attraverso una «finestra» di scarso assorbimento da parte dell'atmosfera.) (*b*) Si calcoli la stessa quantità per il radar marino descritto nel problema 22.
28. In un esperimento franco-sovietico per il sondaggio della superficie lunare, una radiazione pulsante, generata da un laser al rubino ($\lambda = 0.69$ μm), venne inviata alla Luna attraverso un telescopio riflettore dotato di specchio di raggio pari a 1.3 m. Una superficie riflettente sulla Luna faceva le funzioni di uno specchio circolare con raggio 10 cm, riflettendo la luce direttamente indietro verso il telescopio sulla Terra. Il raggio riflesso, una volta focalizzato dal telescopio, veniva rivelato da un fotometro. Che frazione dell'energia luminosa originale poteva essere raccolta dal rivelatore? Si supponga che in ciascuno dei due tratti del percorso tutta l'energia sia concentrata nel cerchio centrale di diffrazione.
29. Si può dimostrare che, tranne per $\theta = 0$, un ostacolo circolare produce la stessa figura di diffrazione di un foro circolare dello stesso diametro. Inoltre, se vi sono molti di tali ostacoli, come un insieme di gocce d'acqua distribuite casualmente, allora l'effetto di interferenza scompare lasciando solo la diffrazione associata al singolo ostacolo. (*a*) Spiegare perché attorno alla luna, nei giorni di foschia, si vede un alone. L'alone è di solito rossastro; spiegare perché. (*b*) Calcolare le dimensioni di una goccia d'acqua in aria se l'anello luminoso attorno alla luna assume un diametro 1.5 volte quello apparente della luna. Il diametro angolare della Luna nel cielo è di 0.5°. (*c*) A quale distanza dalla luna si potrebbe osservare un anello azzurrognolo? Talvolta gli anelli sono bianchi: perché? (*d*) La disposizione dei colori è invertita rispetto all'arcobaleno: perché?

Paragrafo 46-5 Doppia fenditura: combinazione di interferenza e diffrazione

30. (*a*) Ideare un sistema di due fenditure nel quale manchi la quarta frangia, non contando il massimo centrale. (*b*) Quali altre frange, se si dà il caso, mancano?
31. Due fenditure, larghe a e distanti d tra di loro, sono illuminate da un fascio coerente di luce di lunghezza d'onda λ. Qual è la separazione lineare tra le frange d'interferenza osservate su uno schermo posto a distanza D?
32. Supponiamo che, come nell'esempio 7, l'inviluppo del picco centrale contenga undici frange. Quante frange si trovano tra il primo e il secondo minimo dell'inviluppo?
33. (*a*) Nel caso che sia $d = 2a$ nella figura 25, quante frange di interferenza si trovano nell'inviluppo del picco centrale di diffrazione? (*b*) Se poniamo $d = a$, le due fenditure si fondono in un'unica fenditura di larghezza $2a$. Dimostrare che l'equazione 17 si riduce alla figura di diffrazione caratteristica di questa fenditura.

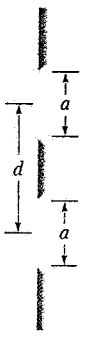


Figura 25 Problema 33.

34. (*a*) Quante frange complete appaiono tra i primi minimi dell'inviluppo di frange, posti ai lati del massimo centrale di una figura di diffrazione da doppia fenditura, se $\lambda = 557$ nm, $d = 0.150$ mm e $a = 0.030$ mm? (*b*) Qual è il rapporto tra l'intensità della terza frangia a fianco del centro e quella della frangia centrale?

35. Una luce di lunghezza d'onda pari a 440 nm passa attraverso una doppia fenditura, dando luogo a una figura di diffrazione, la cui intensità è mostrata nel grafico di figura 26 in funzione dell'angolo di deviazione θ. Si calcoli (*a*) la larghezza delle fenditura e (*b*) la distanza tra le fenditure. (*c*) Verificare inoltre la correttezza dei valori di intensità indicati, per le frange corrispondenti a $m = 1$ e $m = 2$.

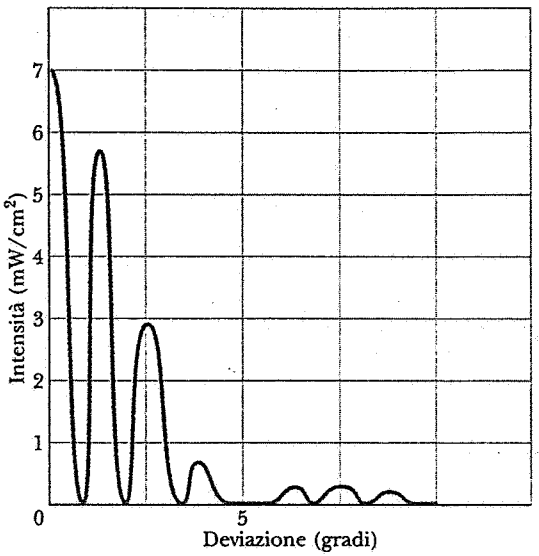


Figura 26 Problema 35.

36. Un sistema acustico a due fenditure (distanza delle fenditure *d*, larghezza *a*) è posto di fronte a due altoparlanti come in figura 27. Facendo uso di un circuito di ritardo regolabile, si può far variare la fase di uno dei due altoparlanti. Descrivere dettagliatamente cosa succede delle figure di interferenza a grande distanza, al variare della differenza di fase da 0 a 2π. Si prendano in considerazione effetti sia di interferenza che di diffrazione.

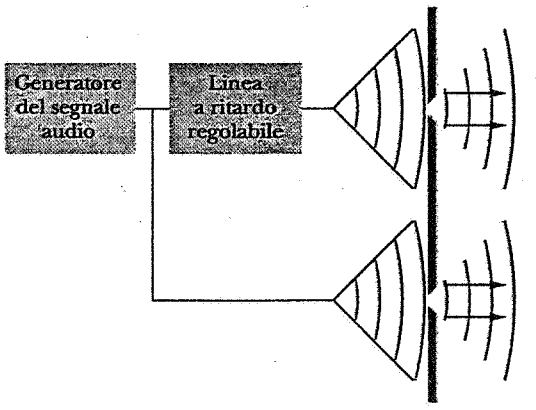


Figura 27 Problema 36.

Capitolo 47

RETICOLI E SPETTRI

Nel capitolo 45 abbiamo trattato le figura d'interferenza che si generano quando luce monocromatica incide su una doppia fenditura: un disegno di bande chiare e scure alternate, dette frange d'interferenza. Ciascuna delle fenditure viene considerata come una sorgente elementare di radiazione. In un primo momento abbiamo supposto che la larghezza delle fenditure sia molto minore della lunghezza d'onda della luce, in modo tale che la luce diffratta da ciascuna fenditura venga distribuita uniformemente su tutto lo schermo di osservazione. Più avanti, nel capitolo 46, abbiamo preso in considerazione anche la larghezza delle fenditure, evidenziando così il fattore di diffrazione, *che modula la figura d'interferenza.*

In questo capitolo estenderemo la trattazione ai casi in cui il numero dei centri elementari di irraggiamento è maggiore (e spesso di gran lunga maggiore) di due. Esamineremo una serie di fenditure multiple giacenti in un piano, e insiemi tridimensionali di atomi in un solido, per i quali i raggi X sostituiranno la radiazione visibile.

In entrambi i casi bisogna fare attenzione a distinguere tra gli effetti di diffrazione generati da un singolo centro di irraggiamento (una fenditura o un atomo) e gli effetti di interferenza prodotti dalle onde coerenti, diffratte dal complesso di sorgenti elementari di radiazione.

47-1 FENDITURE MULTIPLE

Un'estensione logica dell'esperimento di interferenza con due fenditure consiste nell'aumentare il numero delle fenditure, da due fino a un numero più grande N. La figura 1 mostra un esempio con 5 fenditure. Un sistema siffatto, comprendente di solito molte più fenditure (per esempio 10^4), si chiama *reticolo di diffrazione*. La distribuzione di intensità luminosa, che si ottiene quando il reticolo è investito da luce monocromatica, è costituita da un insieme di frange di interferenza, come nel caso delle due fenditure. Per una determinata lunghezza d'onda, l'intervallo lineare tra le frange dipende dalla distanza d tra i centri delle fenditure. Le intensità relative delle frange sono determinate dal fenomeno di diffrazione, che è funzione della larghezza delle fenditure a.

In questo capitolo analizziamo le figure d'interferenza per fenditure multiple. Ci limitiamo a considerare il fenomeno sotto le condizioni che determinano la diffrazione di Fraunhofer, secondo cui le distanze dalla sorgente di luce alle fenditure e da queste allo schermo si considerano infinite. Detto in altri termini, sia i raggi che incidono sia quelli che emergono dalle fenditure sono paralleli, e questi ultimi possono essere focalizzati da una lente per formare un'immagine sullo schermo.

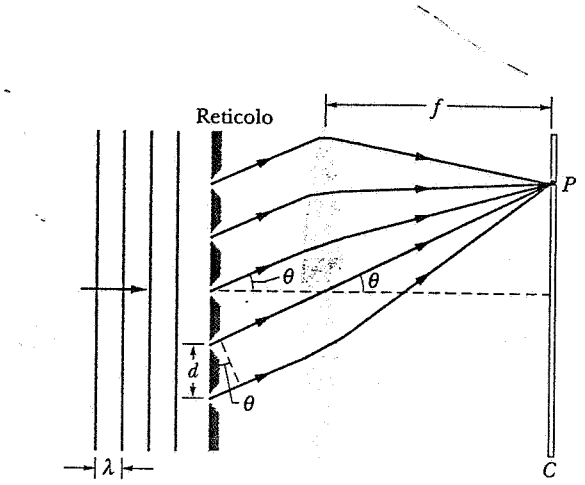


Figura 1 Un sorta di reticolo di diffrazione contenente cinque fenditure. Si intende che la larghezza a della fenditura è molto inferiore a λ, anche se questa condizione non è realizzabile in pratica. Inoltre la lunghezza focale f è in pratica molto maggiore di d; la figura distorce queste dimensioni per un'esigenza di chiarezza.

Nella figura 2 è mostrata una parte del massimo centrale dell'inviluppo di diffrazione, per $N = 2$ e $N = 5$.

ISBN 88-408-0777-2

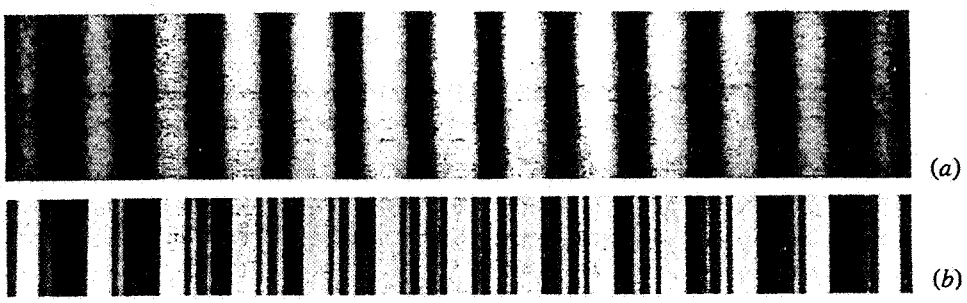


Figura 2 Figura di diffrazione per un reticolo avente (*a*) due fenditure e (*b*) cinque fenditure. Si noti che, nel caso del reticolo a cinque fenditure, le frange appaiono più nitide (strette) e compaiono dei massimi secondari di minor intensità entro i massimi principali chiari.

Si nota che, aumentando il numero di fenditure da 2 a 5, si producono due importanti cambiamenti: (*a*) le frange luminose diventano più strette, e (*b*) compaiono, tra le frange luminose, dei *massimi secondari* più sfumati (tre nella figura 2*b*). Il risultato di un calcolo teorico sulla distribuzione di intensità (trascurando gli effetti di inviluppo della diffrazione) è riportato nella figura 3, in cui si nota maggiormente che i picchi dei massimi principali sono più netti. Aumentando N, il numero dei massimi secondari cresce e la loro luminosità diminuisce, fino a che diventano trascurabili; contemporaneamente i massimi principali diventano sempre più stretti e nitidi man mano che N cresce. Nella trattazione che segue ignoreremo i massimi secondari e considereremo solo i massimi principali.

Si ha un massimo principale quando la differenza di cammino fra raggi provenienti da ciascuna coppia di fenditure adiacenti, data da $d \operatorname{sen}\theta$, eguaglia un numero intero di lunghezze d'onda, ossia

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (1)$$

dove m è chiamato *numero d'ordine*. Quest'equazione è identica all'equazione 1 del capitolo 45, che stabilisce la posizione dei massimi d'intensità per un sistema di due fenditure. Si osservi che, se la luce passante attraverso ogni coppia di fenditure *adiacenti* è in fase in un particolare punto dello schermo, la luce passante attraverso due fenditure qualsiasi, anche non adiacenti, dev'essere parimenti in fase nel medesimo punto. Per una data distanza d tra le fenditure, le posizioni dei massimi principali sono determinate dalla lunghezza d'onda, di modo che la misura di queste posizioni costituisce un metodo preciso per determinare la lunghezza d'onda. La posizione dei massimi principali è indipendente dal numero di fenditure N, che, come vedremo, influisce invece sulla loro larghezza e nitidezza. Il rapporto a/λ determina le *intensità* relative dei massimi principali entro l'inviluppo dato dalla diffrazione, ma non altera la loro posizione.

Larghezza dei massimi

Con una costruzione grafica, mediante vettori di fase, si può facilmente comprendere come, al crescere di N, i massimi principali divengano più netti. Nelle figure 4*a* e 4*b* sono illustrate le condizioni per cui si ottengono i massimi principali per un reticolo a due fenditure e per

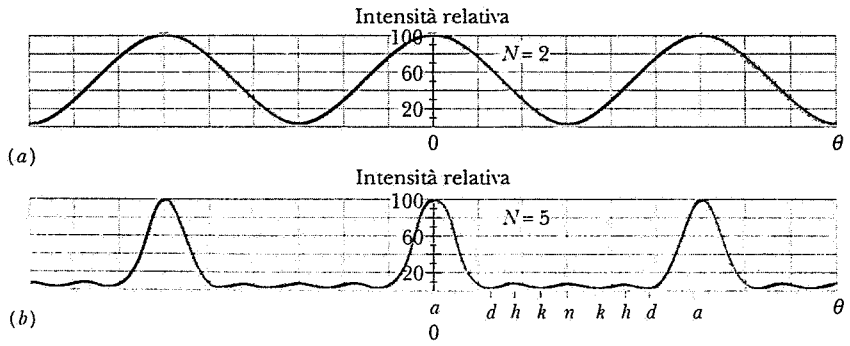


Figura 3 Curve d'intensità calcolate per un reticolo a (*a*) due fenditure e (*b*) cinque fenditure, con gli stessi valori di d e λ. Si noti il restringersi dei massimi principali e la comparsa di massimi secondari più deboli in (*b*); si confronti con la figura 2. Le lettere indicate in (*b*) fanno riferimento alla figura 6. Il calcolo non include gli effetti di diffrazione dovuti alla larghezza finita delle fenditure; è come dire che ci troviamo nella zona centrale della figura 2, dove i massimi principali hanno praticamente la stessa intensità.

ISBN 88-408-0777-2

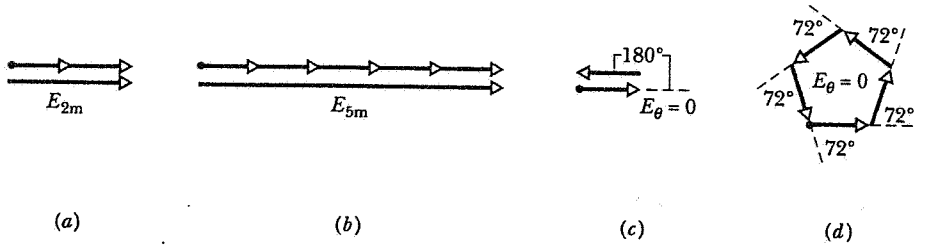


Figura 4 (*a,b*) Le condizioni, ottenute coi vettori di fase, al massimo centrale per reticoli a due e cinque fenditure, rispettivamente. (*c,d*) Le corrispondenti condizioni che si verificano ai minimi d'intensità nulla su entrambi i lati rispetto al massimo centrale.

un reticolo a 5 fenditure. I vettori rappresentano le ampiezze delle perturbazioni ondulatorie che arrivano sullo schermo, in corrispondenza del massimo principale, ove, nell'equazione 1, si ha $m = 0$ e quindi $\theta = 0$.

Consideriamo l'angolo $\delta\theta_0$, che corrisponde alla posizione di intensità zero che si trova da ciascuna delle due parti del massimo centrale, come si vede nella figura 5. Nelle figure 4*c* e 4*d* sono rappresentate le posizioni dei vettori di fase che corrispondono a questo punto. La differenza di fase tra onde provenienti da fenditure adiacenti, che è zero nella posizione del massimo centrale, deve crescere di una quantità $\Delta\phi$ tale che la linea spezzata dei vettori sia chiusa, in modo che l'intensità risultante sia zero. Se $N = 2$, $\Delta\phi = 2\pi/2$ $(= 180°)$, se $N = 5$, $\Delta\phi = 2\pi/5$ $(= 72°)$. In generale $\Delta\phi$ è dato da

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{N}. \tag{2}$$

Questo aumento della differenza di fase fra onde provenienti da fenditure adiacenti corrisponde a un aumento della differenza di cammino ΔL data da

$$\frac{\text{differenza di fase}}{2\pi} = \frac{\text{differenza di cammino}}{\lambda},$$

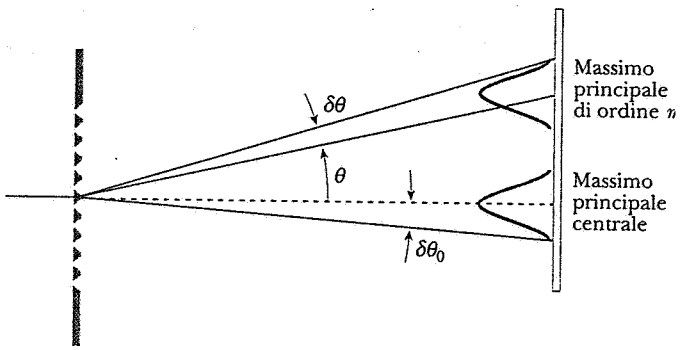


Figura 5 Nella posizione data dall'angolo θ giace un massimo principale e a una distanza angolare da quest'ultimo pari a $\delta\theta$ si incontra il minimo immediatamente successivo. L'angolo $\delta\theta$ può essere assunto come una misura della larghezza ovvero della nitidezza del massimo. La larghezza del massimo centrale è data dall'angolo $\delta\theta_0$.

ossia

$$\Delta L = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\Delta\phi = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right) = \frac{\lambda}{N}. \tag{3}$$

Come si vede dalla figura 1, la differenza di cammino ΔL in corrispondenza del primo minimo è data anche da d sen $(\delta\theta_0)$, cosicché possiamo scrivere

$$d\,\text{sen}(\delta\theta_0) = \frac{\lambda}{N},$$

ovvero

$$\text{sen}\delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{4}$$

Poiché nei reticoli reali $N \gg 1$, sen $(\delta\theta_0)$ sarà in generale molto piccolo (cioè le frange saranno nette) e potrà essere sostituito, in buona approssimazione, con $\delta\theta_0$ espresso in radianti, cioè

$$\delta\theta_0 = \frac{\lambda}{Nd}. \tag{5}$$

Quest'equazione mette in particolare evidenza che, se N aumenta, tenendo fissi λ e d, $\delta\theta_0$ diminuisce, la qual cosa significa che il massimo principale centrale diviene più netto.

Allo scopo di ricavare questo risultato per un qualunque massimo principale, consideriamo la geometria di figura 5, nella quale il massimo principale di ordine m si manifesta in corrispondenza dell'angolo θ. Uno spostamento angolare $\delta\theta$ divide questo massimo dal minimo vicino; consideriamo quest'angolo $\delta\theta$ come una misura dell'ampiezza angolare del massimo. Nel punto di massimo, la differenza di cammino tra i raggi provenienti da fenditure adiacenti è $m\lambda$ (eq. 1). In corrispondenza del minimo successivo, questa differenza diventa $m\lambda + \lambda/N$, in cui la maggior lunghezza del percorso λ/N deriva dall'equazione 3. Per esempio, si consideri il caso in cui $N = 10$. La maggior lunghezza del percorso tra raggi provenienti da fenditure adiacenti vale 0.1λ. La differenza di cammino tra i raggi provenienti dalla prima e dalla sesta fenditura è quindi $5(m\lambda + 0.1\lambda) = 5m\lambda + 0.5\lambda$; le lunghezze dei cammini diffe-

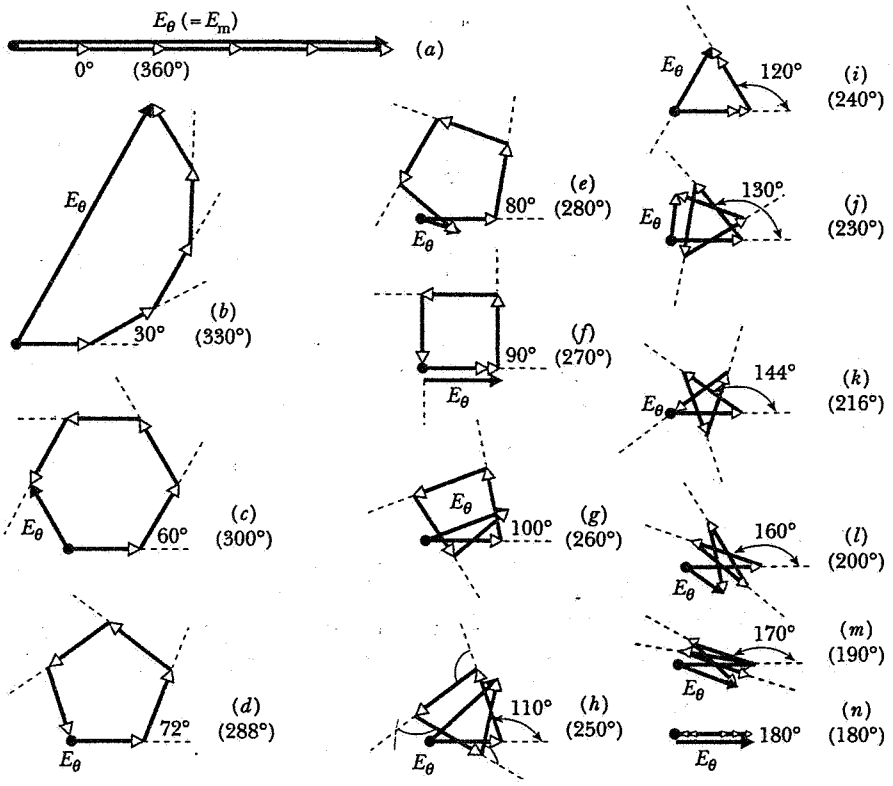


Figura 6 La figure in sequenza da (*a*) ad (*n*) e viceversa corrispondono alle condizioni che si incontrano via via passando dal massimo principale centrale al massimo principale successivo per ciò che concerne l'intensità prodotta da un reticolo a cinque fenditure. Sono indicate esplicitamente le differenze di fase tra le onde provenienti da fenditure adiacenti; quelle relative alla sequenza di ritorno da (*n*) ad (*a*) sono indicate tra parentesi. I massimi principali si verificano in (*a*), quelli secondari in prossimità di (*h*) e di (*n*), i minimi d'intensità nulla appaiono in (*d*) e (*k*). Si confronti con la figura 3*b*.

riscono per un numero semintero di lunghezze d'onda, sicché le onde interferiscono distruttivamente. La stessa cosa si può dire per la coppia di fenditure 2 e 7, per la coppia 3 e 8, e così via. Se la maggior lunghezza del percorso è λ/N, allora i raggi provenienti dalla metà inferiore del reticolo si accoppiano tutti con i raggi provenienti dalla metà superiore, dando luogo a interferenza complessivamente distruttiva.

In corrispondenza dell'angolo $\theta + \delta\theta$, la differenza di cammino tra i raggi provenienti da fenditure adiacenti sarà

$$d \operatorname{sen}(\theta + \delta\theta) = d[\operatorname{sen}\theta \cos(\delta\theta) + \cos\theta \operatorname{sen}(\delta\theta)]$$
$$\approx d \operatorname{sen}\theta + (d \cos\theta)\delta\theta,$$

dove assumiamo che $\delta\theta$ sia piccolo, ciò che ci permette di approssimare cos ($\delta\theta$) a 1 e sen($\delta\theta$) a $\delta\theta$. Ponendo questa differenza di cammino uguale a $m\lambda + \lambda/N$, il suo valore in corrispondenza del minimo, otteniamo

$$d \operatorname{sen}\theta + (d \cos\theta)\delta\theta = m\lambda + \frac{\lambda}{N},$$

ossia, utilizzando l'equazione 1,

$$(d \cos\theta)\delta\theta = \frac{\lambda}{N}.$$

Risolvendo rispetto a $\delta\theta$, si giunge a

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta}. \qquad (6)$$

Questa espressione dà l'ampiezza angolare* per il massimo principale, che si verifica in corrispondenza dell'angolo θ, relativo a un dato ordine m. Si noti che, per il massimo centrale ($\theta = 0$), l'equazione 6 si riduce alla 5. Dati N, d e λ, il massimo centrale è il più stretto di tutti ($\cos\theta = 1$); la larghezza del picco cresce

* Secondo la definizione data dall'equazione 6, si intende qui, per ampiezza angolare, l'intervallo compreso tra il picco e il primo minimo adiacente. La definizione più frequente dell'ampiezza di un picco è data dall'intervallo compreso tra i due punti in cui la funzione assume valore pari alla metà del massimo (si veda ad esempio la figura 12 del capitolo 46). Le due quantità così definite sono però approssimativamente uguali, e possiamo pertanto assumere l'equazione 6 come rappresentativa dell'ampiezza del picco.

ISBN 88-408-0777-2

man mano che ci si sposta verso angoli θ più grandi, e quindi verso frange di ordine m maggiore. L'equazione 6 indica che $\delta\theta$ diventa più piccolo (cioè i massimi diventano più netti), man mano che cresce il prodotto Nd. Questo prodotto (numero di fenditure per distanza tra fenditure) corrisponde alla larghezza totale del reticolo. Cosicché, con reticoli più larghi, le frange luminose diventano più nitide.

I massimi secondari *(Facoltativo)*

L'origine dei massimi secondari, che compaiono per $N > 2$, può essere compresa usando il metodo dei vettori di fase. Nella figura 6*a* sono disegnate le condizioni relative al massimo centrale per un reticolo a cinque fenditure. I vettori sono in fase. Allontanandoci dal massimo centrale, nella figura 1, θ cresce a partire da zero e lo sfasamento fra vettori adiacenti cresce da zero a $\Delta\phi = (2\pi/\lambda)(d \operatorname{sen}\theta)$. Nelle figure successive si vede come varia l'ampiezza E_θ dell'onda risultante al variare di $\Delta\phi$. Verificare graficamente che una stessa figura corrisponde sia a $\Delta\phi$ che a $2\pi - \Delta\phi$. Così partiamo da $\Delta\phi = 0°$, ci muoviamo fino a $\Delta\phi = 180°$, e quindi percorriamo a rovescio lo stesso cammino seguendo gli sfasamenti scritti fra parentesi, fino a raggiungere $\Delta\phi = 360°$. Il percorso di questa successione corrisponde a un movimento trasversale lungo la distribuzione di intensità luminosa, passando dal massimo principale centrale a uno adiacente. Dalla figura 6, che va confrontata con la figura 3*b*, si vede che per $N = 5$ esistono tre massimi secondari che corrispondono a $\Delta\phi = 110°$, 180° e 250°. Si faccia un'analisi dello stesso tipo per $N = 3$ e si dimostri che, in questo caso, esiste un solo massimo secondario. Nei reticoli reali, che contengono comunemente da 10 000 a 50 000 «fenditure», i massimi secondari sono così vicini ai massimi principali o hanno una intensità talmente piccola che non possono essere distinti sperimentalmente l'uno dall'altro. ■

Esempio 1 Un determinato reticolo possiede 10^4 fenditure spaziate da una distanza $d = 2.1\ \mu\text{m} = 2100$ nm. Viene illuminato con luce gialla del sodio ($\lambda = 589$ nm). Si trovi (*a*) la posizione angolare di tutti i massimi principali osservati e (*b*) l'ampiezza angolare del massimo di ordine maggiore.

Soluzione (*a*) Dall'equazione 1 abbiamo

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{m(589\text{ nm})}{2100\text{ nm}},$$

che dà

$$\theta = 16.3°\ (m = 1),\ 34.1°\ (m = 2),\quad \text{e}\quad 57.3°\ (m = 3).$$

con analoghi valori negativi di θ per $m < 0$. Per $m = 4$, $\operatorname{sen}\theta > 1$, cosicché $m = 3$ è il massimo ordine osservabile, ciò che significa che solo 7 massimi principali (uno centrale e tre per ciascun lato) sono visibili.

(*b*) Per il massimo di ordine $m = 3$, l'equazione 6 dà

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} = \frac{589\text{ nm}}{(10^4)(2100\text{ nm})(\cos 57.3°)} = 5.2 \times 10^{-5}\text{ rad} = 0.0030°.$$

Si tratta di un massimo principale oltremodo stretto.

Si noti che l'equazione 6, esprimendo un rapporto adimensionale, dà angoli in radianti. Ciò a causa dell'introduzione della quantità approssimata $\delta\theta$ in luogo di $\operatorname{sen}\delta\theta$, che è valida solo se i valori sono in radianti.

47-2 RETICOLI DI DIFFRAZIONE

Un tipico reticolo può contenere $N = 10\ 000$ fenditure, distribuite su una larghezza di qualche centimetro, ciò che equivale a un passo d fra le fenditure di pochi micrometri. Come abbiamo visto nell'esempio 1, quando la larghezza Nd è di qualche centimetro, i massimi sono molto stretti, il che consente di misurare la loro posizione con grande precisione. Per questo, i reticoli sono utilizzati per misurare le lunghezze d'onda e per studiare la struttura e l'intensità dei massimi principali.

Qualsiasi struttura periodica regolare può funzionare come un reticolo. Per esempio le incisioni su dischi ottici come i *compact disc*, producono una colorazione iridescente quando la luce viene riflessa dalla superficie del disco. I reticoli possono produrre l'immagine trasmettendo la luce, come schematizzato in figura 1, ma esistono anche reticoli in riflessione, che producono le immagini riflettendo la luce. Nei reticoli, come quello di figura 1, avviene un periodico cambiamento di *ampiezza* (senza variazione di fase) dell'onda, in funzione della posizione attraverso il reticolo. È possibile realizzare anche reticoli (sia del tipo in trasmissione che in riflessione), che presentano un periodico cambiamento di *fase* (con trascurabile variazione di ampiezza) dell'onda luminosa in funzione della posizione attraverso il reticolo.

I reticoli sono costruiti incidendo con tratti paralleli, a ugual distanza l'uno dall'altro, una lastra sottile di alluminio o oro depositato su un supporto di vetro, con un'affilata punta di diamante il cui moto è controllato automaticamente da una *macchina a dividere* di alta precisione. Dopo che la matrice è stata preparata in questo modo, si possono ottenere delle copie

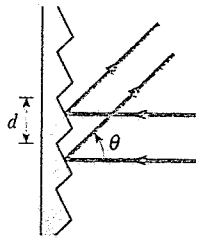


Figura 7 Sezione trasversale di un reticolo ottenuto con la tecnica del *blazing*, visto in luce riflessa. Tra i due raggi indicati sussiste una differenza di cammino pari a d sen θ.

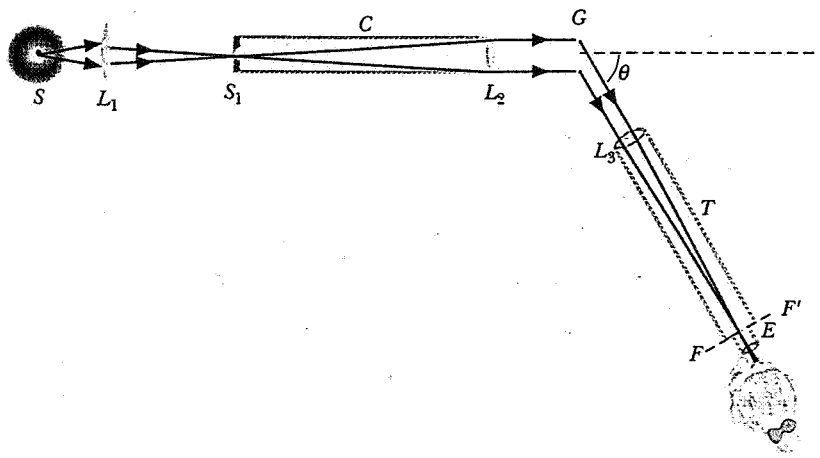


Figura 8 Schema di un semplice spettroscopio a reticolo usato per analizzare le lunghezze d'onda della luce emessa dalla sorgente *S*.

versando una soluzione di collodio (materiale plastico liquido), lasciandolo indurire e quindi staccandolo. Il collodio staccato, incollato su una lastrina piana di vetro o su altro supporto costituisce un buon reticolo.

La figura 7 mostra la sezione trasversale di un tipo comune di reticolo in riflessione a cambiamento di fase. (Se il reticolo fosse trasparente, funzionerebbe come un reticolo in trasmissione a cambiamento di fase, perché la luce, passando attraverso differenti spessori, subirebbe un sfasamento variabile.) Gli angoli delle incisioni sono scelti in modo da riflettere in una particolare direzione la luce di un certo ordine. In questo modo l'intensità di un particolare ordine può essere resa prevalente rispetto a quella degli altri. Questa tecnica di incisione dei reticoli prende il nome inglese di *blazing*. La maggior parte dei reticoli oggi in uso sono di questo tipo.

Nella figura 8 è rappresentato un semplice spettroscopio a reticolo, usato per osservare lo spettro di una sorgente di luce, che si suppone emettere molteplici lunghezze d'onda separate. La luce della sorgente *S* viene focalizzata, tramite la lente L_1, sulla fenditura S_1, collocata nel piano focale di una lente L_2. La luce parallela che emerge dal collimatore *C* incide sul reticolo *G*. I raggi paralleli, associati con un particolare massimo di interferenza e un dato angolo di deviazione θ, giungono alla lente L_3, che li focalizza sul piano *FF'*. L'immagine formata su questo piano viene esaminata mediante un dispositivo a lente d'ingrandimento (oculare). Si può vedere l'intero spettro ruotando il telescopio *T* e variando quindi l'angolo θ. Gli apparecchi impiegati nella ricerca scientifica o nell'industria sono più complicati del semplice dispositivo di figura 8. Essi sono sempre dotati di registratori fotografici o fotoelettrici, e vengono chiamati *spettrografi*. La figura 9 mostra esempi di spettri di luce visibile registrati da uno spettrografo. Ciascuna riga delle figure è in effetti un'immagine della fenditura S_1, corrispondente a una o più lunghezze d'onda separate, emesse dalla sorgente. Per questo motivo, una figura di questo tipo è chiamata *spettro a righe*; una «riga» dello spettro, indipendentemente dalla tecnica usata per registrare lo spettro, viene considerata come una componente di particolare lunghezza d'onda.

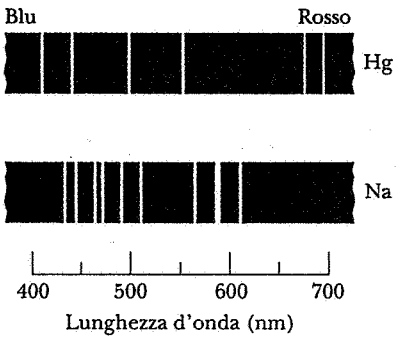


Figura 9 Esempi di spettri di radiazione visibile emessa da vapori di sodio (Na) e mercurio (Hg).

Con questi strumenti, normalmente si producono diverse immagini di spettri a righe, corrispondenti a $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ nell'equazione 1, e si possono anche separare lunghezze d'onda distribuite in modo continuo (si veda la figura 10), piuttosto che in righe spettrali nettamente separate. La luce proveniente da un oggetto incandescente, come il filamento di una lampada o il sole, danno uno spettro continuo. Lo spettro solare contiene pure delle nette righe spettrali, che appaiono come linee scure sovraimpresse sullo spettro continuo. Queste righe sono provocate dall'assorbimento di luce da parte di atomi degli elementi dell'atmosfera che circonda il Sole. L'elemento elio (dal greco *hélios*, sole) fu scoperto dall'analisi di queste righe.

Se, nella figura 8, al reticolo si sostituisce un prisma, si può eseguire ugualmente l'analisi spettrale della luce, separandola nelle lunghezze d'onda che la compongono. In uno *spettrografo a prisma* ognuna delle lunghezze d'onda contenute nel fascio incidente è

ISBN 88-408-0777-2

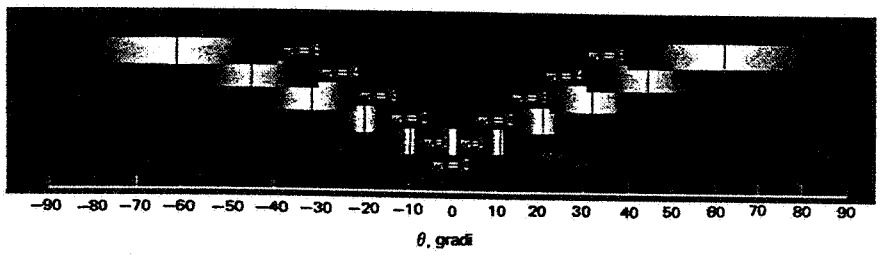


Figura 10 Lo spettro di luce bianca visto attraverso uno spettroscopio a reticolo come quello di figura 8. I diversi ordini, identificati dall'indice m, sono mostrati separatamente in sequenza verticale per maggiore chiarezza. Nella realtà essi non sarebbero così ben distinguibili. La linea centrale in ciascun ordine corrisponde alla lunghezza d'onda di 550 nm. I reticoli di diffrazione di uso comune oggigiorno sono costruiti in modo da concentrare l'intensità di luce su un particolare ordine e non mostrano quindi la figura ideale simmetrica qui illustrata.

deviata di un dato angolo θ, determinato dall'indice di rifrazione, relativo a quella lunghezza d'onda, del materiale di cui il prisma è costituito. Curve come quella riportata nella figura 4 del capitolo 43, che esprime l'indice di rifrazione del quarzo fuso in funzione della lunghezza d'onda, mostrano che più piccola è la lunghezza d'onda più grande è l'angolo di deviazione θ. Queste curve cambiano da sostanza a sostanza e vanno costruite sperimentalmente. Gli strumenti a prisma non sono adatti per misure *assolute* di lunghezza d'onda, perché l'indice di rifrazione del materiale di cui è costituito il prisma, relativo alla lunghezza d'onda incognita, in generale non è noto con sufficiente precisione. Sia gli strumenti a prisma che quelli a reticolo possono essere impiegati per fare accurate misure di lunghezza d'onda *per confronto*, usando un opportuno spettro di riferimento, come quello della figura 9, nel quale sono state fatte accurate determinazioni assolute delle lunghezze d'onda delle righe spettrali.

Esempio 2 Un reticolo di diffrazione ha 10^4 incisioni uniformemente distribuite su una lunghezza di 25.0 mm. È illuminato perpendicolarmente con la luce gialla, ottenuta da una lampada a vapori di sodio. Questa luce contiene due righe molto vicine (il ben noto *doppietto del sodio*) le cui lunghezze d'onda sono 589.00 e 589.59 nm. (*a*) A quale angolo si formerà il massimo del primo ordine per la prima di queste lunghezze d'onda? (*b*) Qual è la distanza angolare tra i massimi del primo ordine di queste due righe?

Soluzione (*a*) Il passo del reticolo d è 2500 nm. Il massimo del primo ordine corrisponde a $m = 1$ nell'equazione 1. Abbiamo così

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(589\text{ nm})}{2500\text{ nm}}\right) = 13.6°.$$

(*b*) Per trovare questa separazione angolare, il modo più sbrigativo consiste nel ripetere il calcolo della parte (*a*), ponendo $\lambda = 589.59$ nm, e quindi sottrarre fra loro gli angoli ottenuti. Una difficoltà, che può essere meglio compresa eseguendo il calcolo, è che esso deve essere eseguito con un gran numero di cifre significative, per ottenere un valore sensato della differenza fra gli angoli. Per ottenere *direttamente* una differenza tra i valori angolari, scriviamo l'equazione 1 risolta rispetto a $\text{sen}\theta$ e differenziamola, trattando θ e λ come variabili:

$$\text{sen}\theta = \frac{m\lambda}{d}$$

$$\cos\theta\, d\theta = \frac{m}{d}d\lambda.$$

Se le lunghezze d'onda sono molto vicine, come in questo caso, $d\lambda$ può essere sostituito da $\Delta\lambda$, differenza effettiva fra le lunghezze d'onda, e $d\theta$ diventa $\Delta\theta$, la quantità che cerchiamo. Si ottiene così

$$\Delta\theta = \frac{m\Delta\lambda}{d\cos\theta} = \frac{(1)(0.59\text{ nm})}{(2500\text{ nm})(\cos 13.6°)}$$
$$= 2.4 \times 10^{-4}\text{ rad} = 0.014°.$$

Si osservi che, sebbene le lunghezze d'onda siano note con cinque cifre significative, il calcolo, eseguito in questo modo, fa uso soltanto di due o tre cifre significative riducendo le complicazioni numeriche.

47-3 DISPERSIONE E POTERE RISOLUTIVO

La capacità di un reticolo di produrre spettri utili a misurare con precisione le lunghezze d'onda, è determinata da due proprietà intrinseche dei reticoli: (*a*) la separazione $\Delta\theta$ tra righe spettrali che differiscono in

lunghezza d'onda di una piccola quantità $\Delta\lambda$ e (*b*) la larghezza o nitidezza delle righe.

Nell'esempio 2 abbiamo calcolato la separazione angolare tra le due righe molto vicine del doppietto del sodio, per le quali vale $\Delta\lambda = 0.59$ nm. Abbiamo trovato in questo caso una separazione $\Delta\theta$ pari a 0.014°, per i massimi principali di primo ordine di queste righe. La separazione angolare $\Delta\theta$ per unità di intervallo di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ è chiamata dispersione D del reticolo, ovvero

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda}. \tag{7}$$

Per fare apparire quanto più possibile separate due righe molto vicine in lunghezza d'onda, è desiderabile avere reticoli con dispersione più grande possibile.

Per riconoscere quali proprietà dei reticoli determinano la dispersione, differenziamo l'equazione 1 ($d \operatorname{sen}\theta = m\lambda$), trattando θ e λ come variabili, ottenendo

$$d \cos\theta \, d\theta = m \, d\lambda,$$

ovvero, in termini di differenze finite, anziché di differenziali,

$$d \cos\theta \, \Delta\theta = m \, \Delta\lambda. \tag{8}$$

La dispersione D è data da $\Delta\theta/\Delta\lambda$, ossia

$$D = \frac{m}{d \cos\theta}. \tag{9}$$

La dispersione aumenta man mano che la distanza tra le fenditure diminuisce. Possiamo anche migliorare la dispersione lavorando a ordini superiori (m elevati), come illustra la figura 10. Si noti che la dispersione non dipende dal numero di incisioni.

Potere risolutivo

Se il reticolo produce linee di notevole larghezza, i massimi corrispondenti a righe spettrali di lunghezza d'onda molto prossima possono sovrapporsi creando difficoltà nel decidere se queste righe sono costituite da una o più componenti e nel misurare le lunghezze d'onda con gran precisione. Siamo quindi indotti a scegliere un reticolo che formi righe più strette possibile.

Possiamo avere una misura ragionevole della capacità di risolvere righe vicine di differente lunghezza d'onda, applicando il criterio di Rayleigh (par. 46-4); se il massimo di una riga cade sul primo minimo della riga vicina, dovremmo essere in grado di distinguere le righe. Nel paragrafo 47-1 abbiamo definito la larghezza di una riga spettrale proprio in questo modo, come la distanza angolare $\delta\theta$ tra il massimo e il minimo vicino. Il limite di risoluzione di un reticolo si verifica quando due righe nello spettro sono separate da un intervallo di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$ tale che la differenza $\delta\theta$ tra le loro posizioni angolari risponda all'equazione 6. Definiamo quindi il *potere risolutivo* R di un reticolo come

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}. \tag{10}$$

Se ci aspettiamo che le linee siano strette ($\delta\theta$ piccolo), allora il corrispondente intervallo di lunghezze d'onda $\Delta\lambda$ deve essere pure ristretto, e si richiede un elevato potere risolutivo. Dovremmo quindi scegliere un reticolo con il massimo valore di R.

Per conoscere quali proprietà fisiche determinano il potere risolutivo di un reticolo, risolviamo l'equazione 8, rispetto all'intervallo $\Delta\theta$ tra le righe vicine, e (usando il criterio di Rayleigh) eguagliamo questo risultato alla larghezza $\delta\theta$ della riga, dato dall'equazione 6 come intervallo tra il massimo e il primo minimo. Risulta quindi

$$\frac{m \, \Delta\lambda}{d \cos\theta} = \frac{\lambda}{Nd \cos\theta},$$

e, risolvendo rispetto a R ($= \lambda/\Delta\lambda$), si ottiene

$$R = Nm. \tag{11}$$

Il potere risolutivo, come la dispersione, cresce con l'aumentare del numero d'ordine. A differenza della dispersione, R dipende dal numero di fenditure N, ma è indipendente dalla loro distanza d. Per avere il massimo potere risolutivo, dobbiamo scegliere un reticolo con un gran numero di fenditure. Dato il passo d delle fenditure, il reticolo di elevata lunghezza totale realizza un alto potere risolutivo, cioè produce righe spettrali più nitide.

Dispersione e potere risolutivo indicano per un reticolo di diffrazione capacità diverse di produrre righe nettamente separate. Si considerino per esempio tre reticoli A, B, C, le cui caratteristiche sono elencate nella tabella 1. Si supponga che i reticoli siano illuminati con luce costituita da un doppietto di righe attorno ai 500 nm, separate da un intervallo $\Delta\lambda = 0.10$ nm. Abbiamo scelto le proprietà del reticolo A in modo che le due linee del doppietto nel massimo di primo ordine siano proprio al limite della risoluzione; sarebbe a dire che il massimo di una riga cade sul minimo dell'altra, come mostrato nella figura 11*a*. Il reticolo B presenta

TABELLA 1 PROPRIETÀ DI TRE RETICOLI[a]

Reticolo	N	d (nm)	θ	R	$D(10^{-4}$ rad nm)
A	5 000	10 000	2.9°	5 000	1.0
B	5 000	5 000	5.7°	5 000	2.0
C	10 000	10 000	2.9°	10 000	1.0

[a] Per $\lambda = 500$ nm e $m = 1$.

ISBN 88-408-0777-2

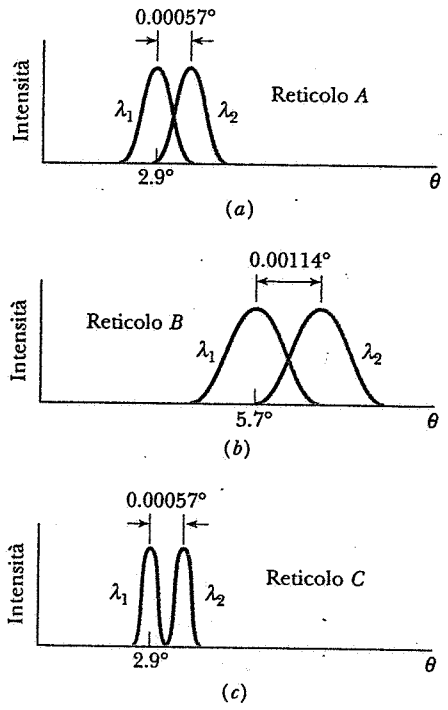


Figura 11 Distribuzione d'intensità di due righe a $\lambda = 500$ nm separate da $\Delta\lambda = 0.10$ nm, prodotta dai tre reticoli della tabella 1. Il reticolo *B* presenta la maggior dispersione, mentre il reticolo *C* ha il maggior potere risolutivo.

una dispersione doppia di *A*, ma lo stesso potere risolutivo, e produce lo spettro riportato nella figura 11*b*. In effetti tutti gli intervalli angolari sono aumentati di un fattore 2, comprese la larghezza angolare e la distanza angolare dei picchi. Se la misura col reticolo *A* è stata limitata dalla nostra abilità nel determinare piccoli intervalli angolari, adottare il reticolo *B* dovrebbe portarci vantaggio e migliorare la misura.

Il reticolo *C* ha un potere risolutivo doppio di quello di *A*, ma possiede la stessa dispersione. I picchi nella fig. 11*c* appaiono con la medesima separazione angolare della figura 11*a*, ma con minore larghezza. Il massimo di un picco ora è ben separato dal primo minimo dell'altro, e, con il reticolo *C*, le due righe si possono distinguere più chiaramente tra di loro.

Le larghezze totali dei tre reticoli, pari al prodotto *Nd*, sono 50 mm per il reticolo A, 25 mm per il reticolo B e 100 mm per il reticolo C. Dall'esame della figura 11 si riscontra che le larghezze dei picchi dipendono in modo inversamente proporzionale dalla larghezza totale del reticolo, come previsto dall'equazione 6.

Esempio 3 Un reticolo possiede 9600 linee uniformemente distanziate su una lunghezza *W* di 3.00 cm ed è investito dalla luce di una lampada a vapori di mercurio. (*a*) Qual è la dispersione attesa, in corrispondenza del terz'ordine, in vicinanza della riga verde intenso ($\lambda = 560$ nm)? (*b*) Qual è il potere risolutivo di questo reticolo al quinto ordine?

Soluzione (*a*) Il passo del reticolo è dato da

$$d = \frac{W}{N} = 3.00 \times 10^{-2} \text{ m} = 3125 \text{ nm}.$$

Dobbiamo trovare l'angolo θ, in corrispondenza del quale compare la riga in questione. Dall'equazione 1 abbiamo

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(3)(546 \text{ nm})}{3125 \text{ nm}}\right) = 31.6°.$$

Possiamo ora calcolare la dispersione mediante l'equazione 9:

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{3}{(3125 \text{ nm})(\cos 31.6°)}$$
$$= 1.13 \times 10^{-3} \text{ rad/nm}$$
$$= 0.0646°/\text{nm} = 3.87 \text{ minuti d'arco/nm}.$$

(*b*) Dall'equazione 11 discende

$$R = Nm = (9600)(5) = 4.80 \cdot 10^4.$$

Si conclude che, nell'intorno di $\lambda = 546$ nm e al quinto ordine, una differenza di lunghezze d'onda (eq. 10) pari a

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{546 \text{ nm}}{4.80 \times 10^4} = 0.011 \text{ nm}$$

può essere risolta.

Esempio 4 Un reticolo di diffrazione è costituito di 1.2×10^4 incisioni uniformemente distribuite su una lunghezza $W = 2.50$ cm. Vi incide normalmente la luce di una lampada a vapori di sodio. Questa luce contiene due righe strettamente vicine di lunghezza d'onda 589.00 e 589.59 nm. (*a*) A che angolo appare il massimo di primo ordine per la prima di queste lunghezze d'onda? (*b*) Qual è la separazione angolare tra queste due righe (nel primo ordine)? (*c*) Qual è la massima differenza di lunghezza d'onda tra due righe (al primo ordine) che questo reticolo è in grado di risolvere? (*d*) Quante incisioni deve avere come minimo un reticolo per poter risolvere il doppietto del sodio?

Soluzione (*a*) Il passo *d* del reticolo risulta

$$d = \frac{W}{N} = \frac{2.50 \times 10^{-2} \text{ m}}{1.20 \times 10^4} = 2083 \text{ nm}.$$

Il massimo di primo ordine corrisponde a $m = 1$ nell'equazione 1. Si ha pertanto

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(589.00 \text{ nm})}{2083 \text{ nm}}\right) = 16.4°.$$

(*b*) Qui entra in gioco la *dispersione* del reticolo. Dall'equazione 9, la dispersione si esprime come

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2083 \text{ nm})(\cos 16.4°)}$$
$$= 5.01 \times 10^{-4} \text{ rad/nm}.$$

Dall'equazione 7, l'equazione di definizione della dispersione, abbiamo

$$\Delta\theta = D\,\Delta\lambda$$
$$= (5.01 \times 10^{-4}\ \text{rad/nm})(589.59\ \text{nm} - 589.00\ \text{nm})$$
$$= 2.95 \times 10^{-4}\ \text{rad} = 0.0169° = 1.02\ \text{minuti d'arco.}$$

Qualunque sia il numero delle linee che costituiscono il reticolo, questo risultato rimane valido, finché non cambia il passo d del reticolo.

(*c*) Qui invece assume importanza il *potere risolutivo* del reticolo. L'equazione 11 ci dà il potere risolutivo come

$$R = Nm = (1.20 \times 10^4)(1) = 1.20 \times 10^4.$$

Dall'equazione 10, definizione del potere risolutivo, abbiamo

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{R} = \frac{589\ \text{nm}}{1.20 \times 10^4} = 0.049\ \text{nm}.$$

Questo reticolo può facilmente distinguere le due righe del sodio, che sono separate da un intervallo di lunghezza d'onda di 0.59 nm. Si noti che questo risultato dipende solo dal numero di incisioni nel reticolo e non dipende da d, la distanza tra due incisioni adiacenti.

(*d*) Dall'equazione 10, che è la definizione di R, il potere risolutivo del reticolo dev'essere

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{589\ \text{nm}}{0.59\ \text{nm}} = 998.$$

L'equazione 11 ci dà il numero di incisioni necessarie per raggiungere questo potere risolutivo (al primo ordine):

$$N = \frac{R}{m} = \frac{998}{1} = 998\ \text{incisioni.}$$

Dato che il reticolo considerato possiede un numero di incisioni circa 12 volte superiore, esso può agevolmente risolvere il doppietto del sodio, come avevamo già visto (c).

47-4 DIFFRAZIONE DEI RAGGI X

I raggi X sono radiazioni elettromagnetiche aventi lunghezza d'onda dell'ordine di 0.1 nm (contro 500 nm circa di una tipica lunghezza d'onda di radiazione visibile). La figura 12 illustra come i raggi X si generino quando gli elettroni emessi da un filamento incandescente F vengono accelerati da una differenza di potenziale V e colpiscono un bersaglio metallico.

Per una lunghezza d'onda così corta, un reticolo di diffrazione ottico standard, come quelli normalmente usati, non produrrebbe alcun effetto. Ad esempio, per $\lambda = 0.10$ nm e $d = 3000$ nm, l'equazione 1 prevede che il massimo di primo ordine debba manifestarsi per un angolo

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(0.10\ \text{nm})}{3 \times 10^3\ \text{nm}}\right) = 0.0019°.$$

Questo massimo è quindi troppo vicino al centro perché lo si possa utilizzare da un punto di vista pratico.

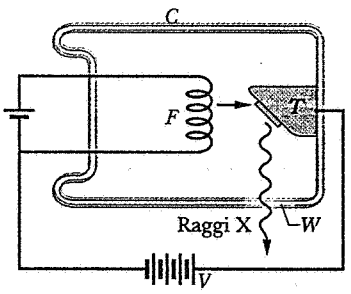


Figura 12 Si generano raggi X quando gli elettroni emessi da un filamento incandescente F, accelerati dalla differenza di potenziale V, colpiscono un bersaglio metallico T posto in un tubo a vuoto. La finestra W è trasparente ai raggi X.

Sarebbe desiderabile avere un reticolo con $d \approx \lambda$, ma poiché le lunghezze d'onda dei raggi X sono dell'ordine dei diametri atomici, reticoli di questo tipo non possono essere costruiti con mezzi meccanici.

Nel 1912 il fisico tedesco Max von Laue pensò che un solido cristallino, costituito da schiere ordinate di atomi, potesse formare un «reticolo di diffrazione» naturale tridimensionale, adatto per raggi X. Come è mostrato nella figura 13, se un fascio collimato di raggi X, con uno spettro di lunghezze d'onda continuo, colpisce un cristallo, come ad esempio cloruro di sodio, in certe ben definite direzioni vengono emessi fasci intensi che sono originati da un'interferenza costruttiva prodotta dai diversi centri diffrangenti dei quali il cristallo è formato. Se questi fasci colpiscono una lastra fotografica, formano un insieme di «macchie di Laue». La figura 14, che è un esempio reale di queste macchie, dimostra che l'ipotesi di Laue è effettivamente corretta. Da uno studio accurato delle posizioni e delle intensità delle macchie di Laue si può dedurre la struttura atomica del cristallo, così come si può dedurre la struttura di un reticolo ottico (cioè i dettagli del profilo delle sue fenditure) da uno studio

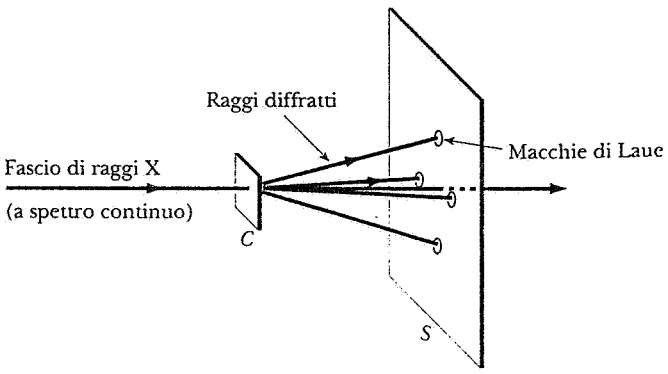


Figura 13 Un fascio di raggi X investe il cristallo C. In alcune direzioni compaiono raggi fortemente diffratti, che vanno a formare la figura di Laue su una pellicola fotografica S.

ISBN 88-408-0777-2

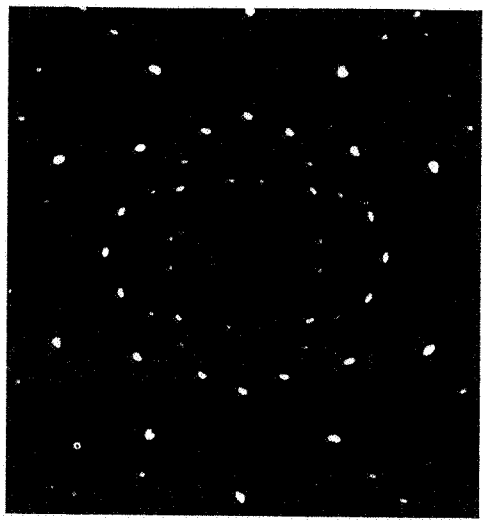


Figura 14 Una figura di diffrazione di Laue prodotta dai raggi X su un cristallo di cloruro di sodio.

della posizione e dell'intensità delle frange di interferenza. La tecnica di Laue è oggi sostituita da dispositivi sperimentali più moderni, tuttavia il principio su cui si basano resta il medesimo (domanda 25).

Nella figura 15 è illustrato come si distribuiscono gli atomi di sodio e di cloro (più esattamente gli ioni Na^+ e Cl^-) per formare il cristallo di cloruro di sodio. Questo modello che ha simmetria *cubica* è una delle tante forme che possono presentarsi nelle strutture atomiche dei solidi. Il modello rappresenta la *cella elementare* del cloruro di sodio, cioè la più piccola unità, a partire dalla quale si può costruire il cristallo ripetendo la cella nelle tre dimensioni. Si verifichi che nessun sottinsieme degli atomi della cella possiede questa proprietà. Lo spigolo a_0 del cubo, che costituisce la cella elementare del cloruro di sodio, ha lunghezza pari a 0.563 nm.

Ciascuna cella elementare di cloruro di sodio possiede quattro ioni sodio in associazione con quattro ioni cloro. Nella figura 15 lo ione sodio collocato al centro appartiene interamente alla cella disegnata. Tutti gli altri 12 ioni sodio sono ciascuno in compartecipazione con altre tre celle adiacenti, di modo che ciascuno di essi contribuisce per un quarto alla formazione dalla cella considerata. Il numero totale di ioni sodio della cella risulta quindi $1 + \frac{1}{4}(12) = 4$. Con analogo ragionamento, si può mostrare che, benché siano 14 gli ioni cloro visibili nella figura 15, solo quattro competono a una cella elementare.

La cella elementare è l'unità fondamentale ripetitiva del cristallo, corrispondente alla fenditura (e alla striscia opaca adiacente) del reticolo di diffrazione ottico della figura 1. Nella figura 16*a* è rappresentato un particolare piano in un cristallo di cloruro di sodio. Se si

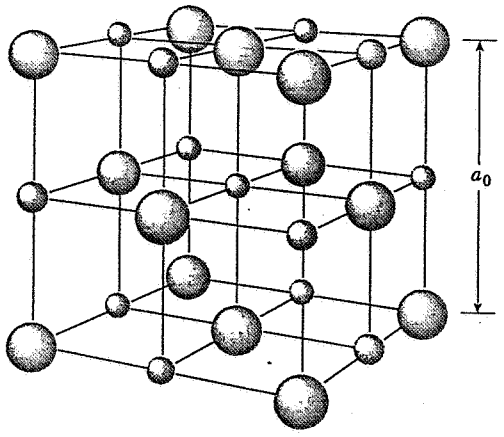


Figura 15 Un modello di cristallo di cloruro di sodio, in cui è mostrato come sono sistemati gli ioni sodio Na^+ (sfere più piccole) e quelli di cloro Cl^- (sfere più grandi) nella cella elementare, il cui lato a_0 ha lunghezza 0.563 nm.

rappresentano con un cubetto le celle elementari, intersecate da questo piano, si ottiene la figura 16*b*. Immaginate entrambe queste figure estese indefinitamente in tre dimensioni.

Trattiamo ogni cubetto della figura 16*b* come un

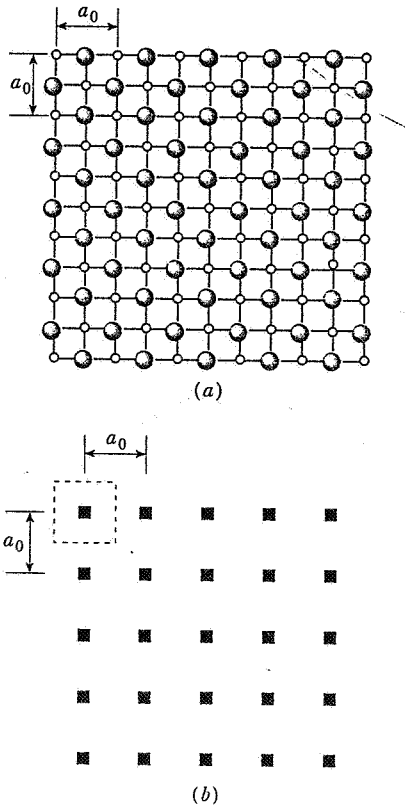


Figura 16 (*a*) Un piano cristallino in un cristallo di NaCl, dove sono indicati gli ioni Na e Cl. (*b*) Le corrispondenti celle elementari considerate nella medesima sezione. Ciascuna cella è rappresentata da un quadratino nero.

centro diffrangente corrispondente a un fenditura in un reticolo ottico. Le *direzioni* (ma non le intensità) di tutti i raggi X diffratti dal cristallo di cloruro di sodio (per una data lunghezza d'onda dei raggi X, e per un dato orientamento del fascio incidente) sono determinate dalle proprietà geometriche di questo reticolo tridimensionale di centri diffrangenti. Nello stesso modo le *direzioni* (ma non le intensità) di tutti i fasci diffratti da un particolare reticolo ottico (per una data lunghezza d'onda e un dato orientamento del fascio incidente) sono determinate soltanto dalle caratteristiche geometriche del reticolo, cioè dal suo passo *d*. Rappresentare le celle elementari con dei punti, come nella figura 16*b*, equivale a rappresentare con righe le fenditure in un reticolo di diffrazione, come si è fatto nel paragrafo 45-1, discutendo l'esperimento di Young.

In un reticolo di diffrazione ottico, le *intensità* delle frange dipendono dalle proprietà diffrangenti delle singole fenditure, determinate in particolare dalla larghezza *a*, come è mostrato, ad esempio, per le fenditure della figura 2. In pratica, nei reticoli ottici, queste proprietà dipendono dalla forma particolare delle incisioni del reticolo.

Esattamente nello stesso modo, le *intensità* dei fasci diffratti da un cristallo dipendono dalle proprietà diffrangenti delle celle elementari. I raggi X sono fondamentalmente diffratti dagli elettroni, essendo, nella maggioranza dei casi, trascurabile le diffrazione da parte dei nuclei. Così le proprietà di diffrazione di una cella elementare dipendono da come sono distribuiti gli elettroni nel volume della cella. Studiando le *direzioni* dei raggi X diffratti, possiamo conoscere le simmetrie fondamentali del cristallo, mentre da uno studio delle *intensità* si può sapere come sono distribuiti gli elettroni nella cella elementare. La figura 17 mostra un esempio di questa tecnica.

La legge di Bragg

La legge di Bragg permette di calcolare le condizioni in cui si possono ottenere raggi diffratti da un cristallo. Per ricavare questa legge ignoriamo la struttura della cella elementare, che è legata soltanto all'intensità dei fasci diffratti. Le linee inclinate tratteggiate nella figura 18*a* rappresentano l'intersezione col piano della figura di un insieme arbitrario di piani passanti attraverso i centri diffrangenti elementari. La distanza fra piani adiacenti è *d*. Si possono definire diverse altre famiglie di piani, con differenti *distanze interplanari*.

Nella figura 18*b*, è mostrata un'onda che incide su una delle famiglie di piani, essendo θ l'angolo che il raggio forma col piano*. Per un singolo piano, come su uno specchio, la «riflessione» speculare avviene per *ogni* valore di θ. Perché si abbia un'interferenza co-

* Nella diffrazione dei raggi X si è soliti indicare la direzione dell'onda specificando l'angolo tra il raggio e il piano di incidenza (*angolo radente*), anziché l'angolo tra il raggio e la normale.

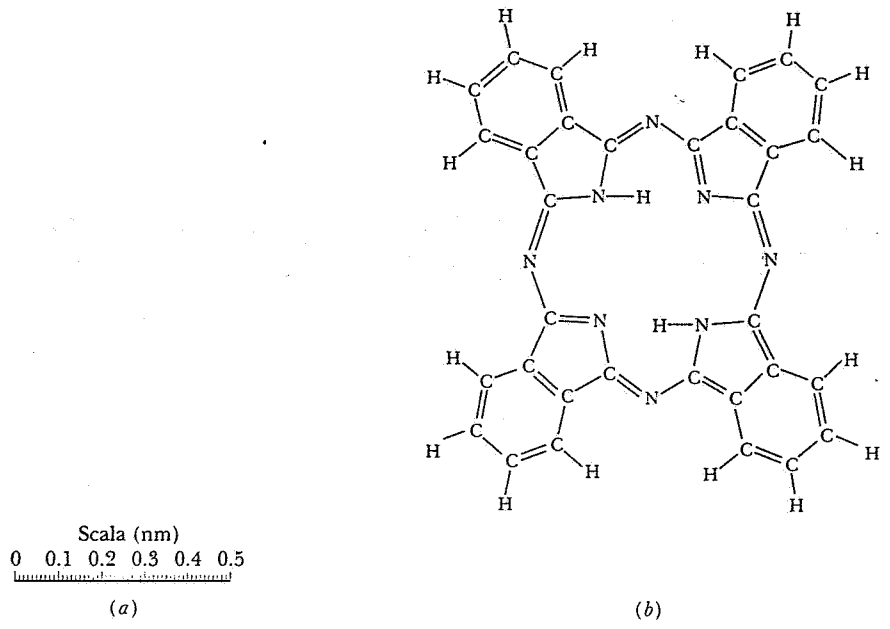


Figura 17 (*a*) Curve di isodensità elettronica per la ftalocianina ($C_{32}H_{18}N_8$) determinate mediante la distribuzione d'intensità dei raggi X diffratti. Le curve tratteggiate rappresentano la densità di un elettrone per 0.01 nm^2. (*b*) Formula di struttura della molecola. Si noti, confrontando con (*a*), che la massima densità elettronica si verifica in corrispondenza degli atomi N, che posseggono il maggior numero di elettroni (7). Si osservi anche che gli atomi H, dotati di un solo elettrone, non sono rilevanti.

ISBN 88-408-0777-2

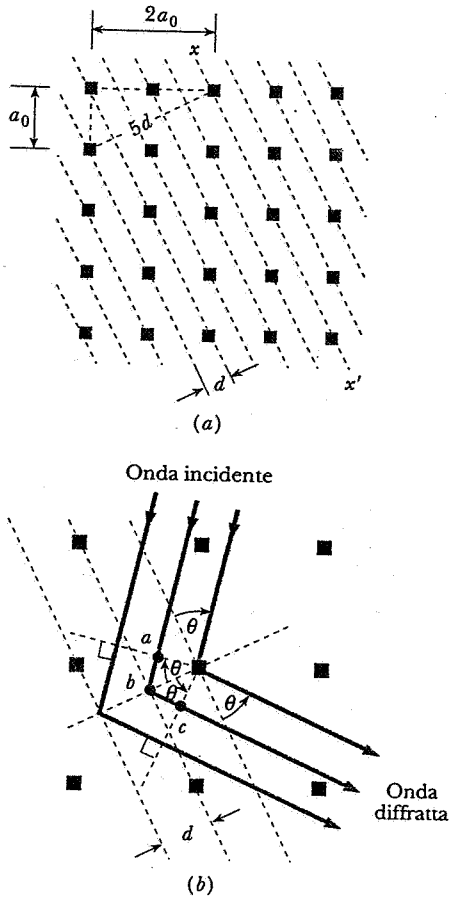


Figura 18 (*a*) Sezione del reticolo di NaCl della figura 16. Le linee tratteggiate rappresentano una serie arbitraria di piani paralleli che uniscono le celle elementari. *d* rappresenta la distanza interplanare. (*b*) Un fascio incidente investe la serie di piani e si osserva un fascio fortemente diffratto se viene soddisfatta la legge di Bragg.

struttiva nel fascio diffratto dall'intera famiglia dei piani nella direzione θ, i raggi provenienti da diversi piani devono rinforzarsi a vicenda. Ciò significa che la differenza di cammino dei raggi diffusi dai diversi piani (*abc* nella figura 18*b*) deve essere uguale a un numero intero di lunghezze d'onda, ossia

$$2d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \quad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad (12)$$

Questa relazione è detta *legge di Bragg* dal nome di W.L. Bragg, che la ricavò per primo. La grandezza *d* che compare in questa equazione (distanza interplanare) è la distanza perpendicolare fra i piani. Nel caso dei piani della figura 18*a* si può vedere che *d* è legato alle dimensioni a_0 della cella elementare dalla relazione

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}}. \qquad (13)$$

Se un fascio *monocromatico* di raggi X investe, a un angolo arbitrario θ, dei piani atomici, *non* si avrà un fascio diffratto perché, in generale, l'equazione 12 non sarà soddisfatta. Se invece lo spettro dei raggi X è *continuo*, si formeranno dei fasci diffratti ogni volta che nel fascio incidente vi sono lunghezze d'onda date da (eq. 12)

$$\lambda = \frac{2d \operatorname{sen}\theta}{m} \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

La diffrazione dei raggi X è un mezzo molto efficace per lo studio sia degli spettri X sia della struttura atomica nei cristalli. Per studiare lo spettro di una sorgente di raggi X, si sceglie una serie particolare di piani cristallini, la cui distanza interplanare *d* sia nota. La diffrazione provocata da questi piani devia i raggi di varia lunghezza d'onda ad angoli diversi. Per distinguere le lunghezze d'onda della radiazione, si usa un rivelatore in grado di distinguere la direzione angolare di provenienza. In alternativa, è possibile studiare la struttura del cristallo stesso usando un fascio di raggi X monocromatico per determinare non solo la distanza tra i piani del reticolo cristallino, ma anche la struttura della cella elementare. La molecola del DNA, così come molte altre strutture complesse, è stata analizzata col metodo della diffrazione dei raggi X.

Esempio 5 A quali angoli un fascio di raggi X con $\lambda = 0.110$ nm deve investire la famiglia di piani rappresentata nella figura 18*b*, per dare origine a un fascio diffratto? Si faccia l'ipotesi che la sostanza su cui incidono i raggi X sia cloruro di sodio ($a_0 = 0.563$ nm).

Soluzione La distanza *d* fra questi piani è data dalla equazione 13, ossia

$$d = \frac{a_0}{\sqrt{5}} = \frac{0.563 \text{ nm}}{\sqrt{5}} = 0.252 \text{ nm}.$$

L'equazione 12 dà

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{2d}\right) = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{(m)(0.110 \text{ nm})}{(2)(0.252 \text{ nm})}\right).$$

È possibile ottenere fasci diffratti per $\theta = 12.6°$ ($m = 1$), $\theta = 25.9°$ ($m = 2$), $\theta = 40.9°$ ($m = 3$) e $\theta = 60.9°$ ($m = 4$). Non si possono ottenere fasci di ordine più elevato perché sen θ dovrebbe diventare maggiore di uno. In realtà si trova che i fasci di ordine *m* dispari hanno intensità nulla, perché la cella elementare, nei cristalli cubici come NaCl, ha proprietà di diffrazione tali che l'intensità della luce diffusa in questi ordini è nulla. Pertanto i soli fasci realmente attesi sono quelli per cui $\theta = 25.9°$ ($m = 2$) e $\theta = 60.9°$ ($m = 4$).

47-5 OLOGRAFIA *(Facoltativo)*

La luce emessa da un oggetto contiene in sé l'informazione completa sulla dimensione e la forma dell'oggetto. Possiamo conside-

rare l'informazione come immagazzinata nei fronti d'onda luminosa provenienti dall'oggetto, in particolare nella variazione dell'intensità e della fase del campo elettromagnetico. Se potessimo registrare quest'informazione, potremmo riprodurre un'immagine completamente tridimensionale dell'oggetto. Le pellicole fotografiche invece non registrano che la variazione d'intensità; non sono sensibili alle variazioni di fase. Non è possibile quindi usare un negativo fotografico per ricostruire un'immagine tridimensionale.

Un'eccezione a questo limite è rappresentata dal caso della diffrazione dei raggi X da parte di un cristallo. Grazie alla distribuzione regolare degli atomi nel cristallo, possiamo facilmente dedurre le fasi relative delle onde diffratte, che impressionano la pellicola, in provenienza dai vari atomi. W.L. Bragg aveva intuito questa possibilità, illuminando un negativo fotografico prodotto da una diffrazione di raggi X, e ricostruendo così l'immagine del cristallo. In questo metodo della «doppia diffrazione», la diffrazione dei raggi provenienti da una figura di diffrazione fornisce un'immagine dell'oggetto originale. Per oggetti, i cui atomi non sono disposti in regolari sequenze periodiche, questo semplice metodo di ricostruzione dell'immagine non funziona.

Lo schema di un metodo per registrare l'intensità *e* la fase di un'onda emessa da un oggetto venne sviluppata nel 1948 da Dennis Gabor, che per questa scoperta fu insignito del premio Nobel per la fisica nel 1971. Questo genere di formazione dell'immagine è chiamato *olografia*, termine che deriva dal greco e che significa «disegno intero», e l'immagine prodotta è chiamata *ologramma*. Il procedimento è illustrato nella figura 19. Un'onda diffratta da un oggetto interferisce con un'onda di riferimento sulla pellicola fotografica. L'interferenza tra le due onde funge da mezzo di memorizzazione sulla pellicola della fase dell'onda proveniente dall'oggetto. Quando, per osservare l'immagine fotografica, viene utilizzata una luce identica al fascio di riferimento, si ricostruisce un'immagine virtuale tridimensionale dell'oggetto originale (fig. 20). L'ologramma produce anche una seconda immagine (reale), non raffigurata nel disegno.

Dato che la pellicola è uniformemente illuminata dalla luce diffratta dall'oggetto e dal fascio di riferimento, ciascuna porzione della pellicola contiene l'informazione necessaria a riprodurre l'immagine tridimensionale. L'ologramma di per se stesso non mostra che delle frange d'interferenza (fig. 21); in generale è necessario usare un fascio di luce coerente e monocromatica per ricostruire l'immagine. Per questo motivo, non avvenne uno sviluppo attivo dell'olografia fino ai primi anni '60, quando diventarono disponibili comunemente i fasci laser.

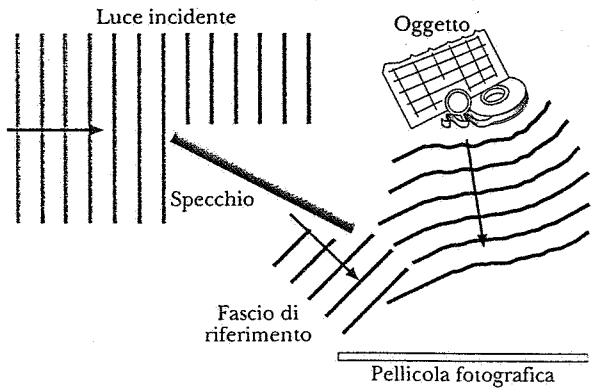


Figura 19 Apparato per produrre ologrammi. Una parte di un fascio originato da una sorgente di luce coerente, come un laser, illumina un oggetto. La luce diffratta dall'oggetto interferisce sulla pellicola con l'altra parte del fascio originale, che serve da riferimento.

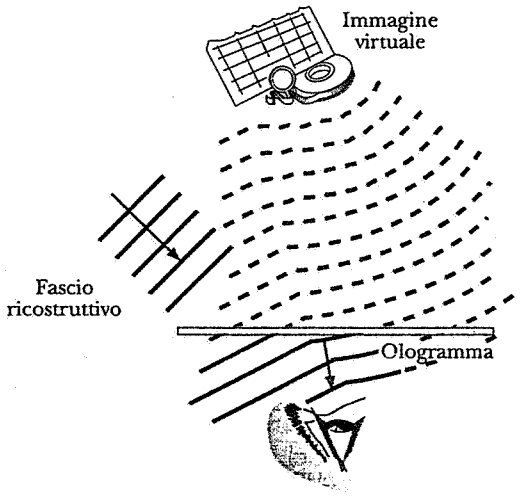


Figura 20 Per vedere un ologramma, lo si illumina con luce identica a quella del fascio di riferimento. Appare un'immagine virtuale a tre dimensioni nella posizione dell'oggetto originale.

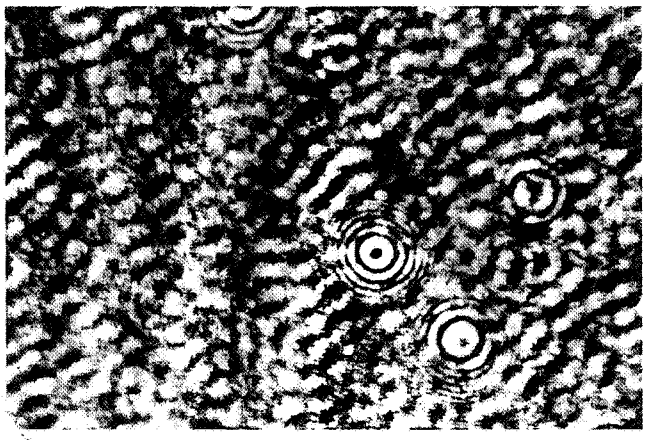


Figura 21 Un'immagine vista da vicino di un ologramma, che mostra le figure d'interferenza.

Alcuni ologrammi possono essere visti in luce bianca. Gli ologrammi in luce bianca fanno uso di un'emulsione fotografica spessa, nella quale la luce viene riflessa da strati successivi di grani nella pellicola. Nel raggio riflesso si stabilisce interferenza costruttiva per la lunghezza d'onda del raggio di riferimento originale, mentre si produce invece interferenza distruttiva per tutte le altre lunghezze d'onda. Usando fasci di riferimento di molteplici colori differenti, si può ottenere un'immagine a colori pieni*.

L'ologramma ricostruisce una vera immagine tridimensionale: per esempio, gli oggetti vicini appaiono effettivamente «davanti» agli oggetti più lontani, e, muovendo il punto di osservazione da un lato all'altro, si può cambiare la posizione spaziale relativa de-

* Cfr. Leith E.N., *Ologrammi in luce bianca*, «Le Scienze» 101:48.

ISBN 88-408-0777-2

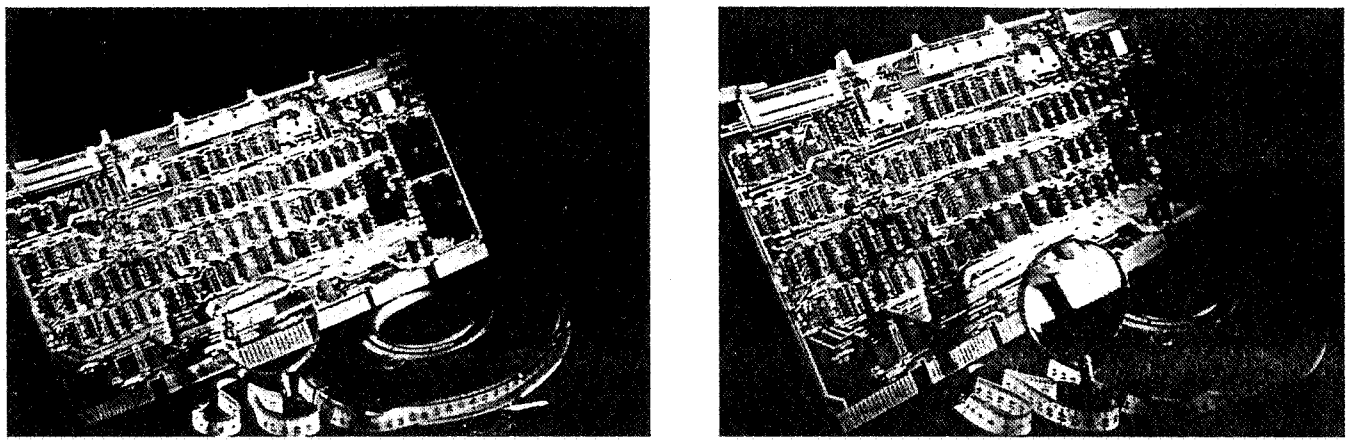


Figura 22 Uno stesso ologramma visto da due posizioni differenti. Si noti il movimento relativo degli oggetti riprodotti nelle immagini.

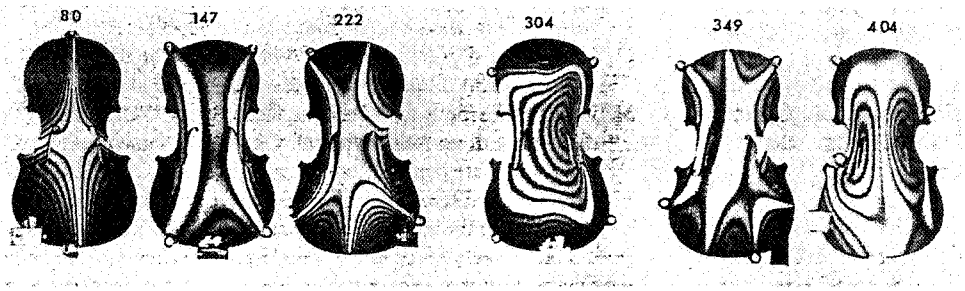


Figura 23 Figura d'interferenza olografica della tavola superiore di un violino vibrante a diverse frequenze. I valori di frequenza sono indicati sopra le figure.

gli oggetti. La figura 22 mostra lo stesso ologramma da due differenti punti di vista, mettendo in evidenza l'effetto di *parallasse* dovuto alle differenti direzioni di osservazione dell'ologramma.

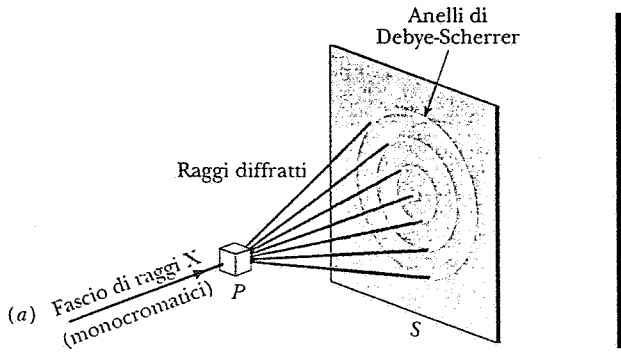
Gli ologrammi offrono molteplici impieghi nelle scienze di base e applicate. Per esempio, per produrre ologrammi è indispensabile che l'oggetto resti assolutamente fermo durante l'esposizione della pellicola; qualsiasi piccolissimo movimento cambierebbe la fase relativa tra i raggi diffratti e il fascio di riferimento, cambiando così la figura d'interferenza registrata sulla pellicola. Se si scatta un ologramma sovrapponendo sulla pellicola due esposizioni successive di un oggetto oscillante, come il fondo di una cassa di violino, i punti dell'oggetto che si spostano tra un'esposizione e l'altra di un numero intero di lunghezze d'onda daranno luogo a un'interferenza costruttiva, mentre la parti dell'oggetto che si spostano di un numero semintero di lunghezze d'onda ($\lambda/2$, $3\lambda/2$, ...) interferiranno distruttivamente. La figura 23 mostra un esempio di applicazione di questa tecnica, che prende il nome di *interferometria olografica*. ■

DOMANDE

1. Discutere l'affermazione: "Il reticolo di diffrazione si può anche chiamare reticolo di interferenza".
2. Come appare lo spettro di una sorgente, formato da un reticolo di diffrazione su uno schermo, quando sorgente, reticolo e schermo vengono immersi in acqua?
3. (*a*) Per quale banda di lunghezze d'onda potrebbe tornare utile come reticolo una palizzata? (*b*) Si potrebbe ricavare un reticolo di diffrazione disponendo parallelamente molti fili sottili a stretto contatto l'uno con l'altro?
4. Si può costruire un reticolo di diffrazione per il suono? In caso affermativo, che passo dovrebbe avere per funzionare a una lunghezza d'onda di 0.5 m?
5. Un reticolo di diffrazione è incrociato quando viene inciso in due direzioni perpendicolari. Si disegni la figura di intensità luminosa proiettata sullo schermo, quando un fascio di luce investe un siffatto reticolo. Questo reticolo può avere utilità pratica?
6. Si supponga che nel telescopio di uno spettrometro sia prati-

cato, nel piano focale della lente collimatrice, un forellino circolare anziché una fenditura. Cosa si vede quando il telescopio viene colpito da luce al sodio? Perché dunque parliamo di spettri a *righe*?

7. In uno spettrografo a reticolo molte righe con differenti lunghezze d'onda e formate in ordini differenti potrebbero apparire tutte a un certo angolo. Come si potrebbe distinguerne gli ordini?
8. Sia data la fotografia di uno spettro nella quale siano indicate le coordinate angolari e le lunghezze d'onda delle linee dello spettro. (*a*) Come si può stabilire se lo spettro è stato ottenuto con un prisma o con un reticolo? (*b*) Che informazioni sul prisma o sul reticolo si possono trarre dallo studio di tale spettro?
9. Un prisma di vetro può dar luogo a uno spettro. Si spieghi come. Quanti «ordini» di spettri produce un prisma?
10. Per il semplice spettroscopio della figura 8, dimostrare che (*a*) per un reticolo, θ aumenta con λ e (*b*) per un prisma, θ diminuisce al crescere di λ.
11. Secondo l'equazione 6, i massimi principali diventano tanto più larghi (cioè $\delta\theta$ cresce) quanto più l'ordine m è elevato (cioè quanto più grande è θ). Secondo l'equazione 11, il potere risolutivo diventa più elevato al crescere di m. Spiegare questo apparente paradosso.
12. Spiegate con parole vostre perché, se si aumenta il numero N delle fenditure in un reticolo di diffrazione, si assottigliano i massimi. Perché si ottiene lo stesso risultato diminuendo la lunghezza d'onda o aumentando la distanza d tra le fenditure?
13. Quali informazioni si possono ricavare su un reticolo di diffrazione analizzando attentamente lo spettro di una sorgente di luce monocromatica da esso formato? Si prenda, per esempio, $\lambda = 589$ nm.
14. I limiti dello spettro della radiazione visibile siano 430 e 680 nm. È possibile progettare un reticolo tale che, per incidenza normale della luce, lo spettro del secondo ordine sia in immediata sequenza a quello del primo ordine?
15. (*a*) Perché le incisioni di un reticolo di diffrazione sono molto vicine? (*b*) Perché sono in numero molto elevato?
16. Due fasci di lunghezza d'onda quasi uguale incidono su un reticolo di N fenditure e non vengono facilmente risolti. Però si possono risolvere se si aumenta il numero delle fenditure. Formule a parte, questo fatto si spiega (*a*) ammettendo che attraverso il reticolo ora passa una maggiore quantità di luce? (*b*) col fatto che ora i massimi principali diventano più intensi e quindi risolvibili? (*c*) col fatto che la figura di diffrazione è maggiormente allargata e quindi si risolvono le lunghezze d'onda? (*d*) per il maggior numero di ordini ora presenti? o (*e*) perché i massimi principali diventano più stretti e quindi meglio risolvibili?
17. La relazione $R = Nm$ indurrebbe a credere che il potere risolutivo di un reticolo si possa rendere grande a piacere pur di scegliere un ordine di diffrazione sufficientemente elevato. Discutere questa affermazione.
18. Dimostrare che per una data lunghezza d'onda e un dato angolo di diffrazione il potere risolutivo di un reticolo dipende solamente dalla sua lunghezza $W\ (= Nd)$.
19. Come si può misurare sperimentalmente (*a*) la dispersione D e (*b*) il potere risolutivo R per uno spettrografo a reticolo?
20. Data una famiglia di piani in un cristallo, può essere la lunghezza d'onda dei raggi X incidenti (*a*) troppo grande o (*b*) troppo piccola per generare un fascio diffratto?
21. Se un fascio parallelo di raggi X di lunghezza d'onda λ incide su un cristallo di una sostanza qualsiasi, orientato a caso, in generale non si producono fasci diffratti intensi. Tali fasci si verificano se (*a*) il fascio di raggi X è costituito da uno spettro continuo di lunghezze d'onda, oppure (*b*) il materiale non è un singolo cristallo ma una polvere divisa finemente. Spiegare il perché.
22. Un fascio di raggi X che penetra e fuoriesce da un cristallo è sottoposto a rifrazione? Si commenti la risposta.
23. Perché non si può usare come cella elementare del cloruro di sodio un cubo di spigolo $a_0/2$, con riferimento alla figura 15?
24. Per alcuni aspetti la riflessione «alla Bragg» *differisce* dalla diffrazione di un reticolo piano. Quali delle seguenti affermazioni sono vere per la riflessione alla Bragg ma non per la diffrazione di un reticolo? (*a*) Si possono sovrapporre due diverse lunghezze d'onda. (*b*) La radiazione di una data lunghezza d'onda può essere inviata in più di una direzione. (*c*) Le onde lunghe vengono deviate più di quelle corte. (*d*) Per il reticolo si ha a che fare con una sola distanza. (*e*) I massimi di diffrazione di una data lunghezza d'onda si hanno solo per particolari angoli di incidenza.
25. Nella figura 24*a* è indicata schematicamente la disposizione sperimentale di Debye-Scherrer, mentre nella figura 24*b* è riportata la corrispondente figura di diffrazione X. (*a*) Tenendo presente che il metodo di Laue fa uso di un esteso monocristallo e di un fascio di raggi X a spettro continuo, spiegare l'origine delle macchie che compaiono nella figura 14. (*Suggerimento*: Ogni macchia corrisponde alla direzione di diffusione da una famiglia di piani). (*b*) Tenendo presente che il metodo di Debye-Scherrer fa uso di un gran numero di microscopici monocristalli orientati a caso e di un fascio monocromatico di raggi X, spiegare l'origine degli anelli. (*Suggerimento*: Essendo orientati a caso i piccoli cristalli, è possibile ottenere qualsiasi angolo di incidenza.)



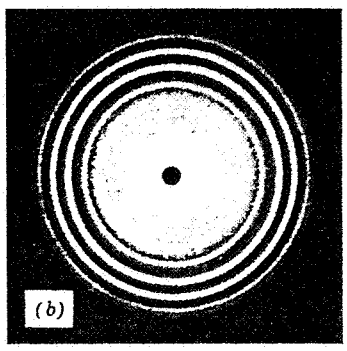


Figura 24 Domanda 25.

ISBN 88-408-0777-2

PROBLEMI

Paragrafo 47-1 Fenditure multiple

1. Un reticolo di diffrazione largo 21.5 mm possiede 6140 incisioni. (*a*) Calcolare la distanza d tra i centri di due incisioni adiacenti. (*b*) Se la radiazione incidente ha lunghezza d'onda di 589 nm, con che angoli si manifesteranno i fasci di massima intensità?
2. Un reticolo di diffrazione largo 2.86 cm produce una deviazione di 33.2° nel secondo ordine con una luce di lunghezza d'onda pari a 612 nm. Si trovi il numero di incisioni del reticolo.
3. Una luce proveniente da un tubo a scarica gassosa incide perpendicolarmente su un reticolo di diffrazione che presenta una distanza tra i centri delle fenditure di 1.73 μm. Appare una riga verde con massimi ben netti ad angoli θ di deviazione dalla normale, che, misurati, risultano ±17.6°, + 37.3°, −37.1°, + 65.2°, −65.0°. Si calcoli la lunghezza d'onda della riga verde che meglio si accorda con i dati rilevati.
4. Uno stretto fascio di luce monocromatica incide normalmente su un reticolo e produce dei massimi ben marcati in corrispondenza dei seguenti angoli di deviazione dalla normale: 6°40′, 13°30′, 20°20′, 35°40′. Non appaiono altri massimi nell'intervallo tra 0° e 35°40′. La distanza tra le incisioni del reticolo è di 5040 nm. Calcolare la lunghezza d'onda della luce incidente.
5. Un reticolo di diffrazione è investito normalmente da un fascio di lunghezza d'onda pari a 600 nm. Si producono due massimi principali adiacenti in corrispondenza dei valori $\text{sen}\theta = 0.20$ e $\text{sen}\,\theta = 0.30$. Il massimo di quart'ordine manca. (*a*) Quant'è il passo tra le fenditure? (*b*) Qual è la minima larghezza possibile per le fenditure? (*c*) Individuare gli ordini che effettivamente compaiono sullo schermo, in base ai valori ottenuti in (*a*) e (*b*).
6. Abbiasi un reticolo di diffrazione con fenditure larghe 310 nm e distanti 930 nm fra i loro centri. Viene illuminato perpendicolarmente con un'onda piana di lunghezza d'onda pari a 615 nm. (*a*) Quanti massimi di diffrazione si ottengono? (*b*) Nell'ipotesi che il reticolo sia fatto di 1120 fenditure, si trovi la larghezza delle righe spettrali osservate del prim'ordine.
7. Ricavare la seguente espressione della distribuzione di intensità per un «reticolo» a tre fenditure:

$$I = \tfrac{1}{9} I_m(1 + 4\cos\phi + 4\cos^2\phi),$$

dove

$$\phi = \frac{2\pi d\,\text{sen}\theta}{\lambda}.$$

Si faccia l'ipotesi che $a \ll \lambda$ e si segua il procedimento usato per ottenere la corrispondente formula per due fenditure (equazione 17 del capitolo 45).

8. (*a*) Facendo uso del risultato del problema 6, dimostrare, supponendo accettabile l'uguaglianza $\text{sen}\,\theta \approx \theta$, che la larghezza a metà altezza delle frange della figura di diffrazione prodotta da tre fenditure è data da

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{3.2d}.$$

(*b*) Si confronti questo risultato con l'espressione ricavata nel problema 25 del capitolo 45, per la figura di diffrazione prodotta da due fenditure. e si provi che questi risultati confermano la conclusione secondo la quale, per una distanza fissata fra le fenditure, i massimi di interferenza diventano più netti aumentando il numero delle fenditure.

9. (*a*) Facendo uso del risultato del Problema 7, dimostrare che un «reticolo» a tre fenditure ha solamente un massimo secondario. Trovarne (*b*) la posizione e (*c*) l'intensità relativa.
10. Sia d la distanza fra due fenditure adiacenti di un reticolo a tre fenditure. Se si copre la fenditura di mezzo, la larghezza a metà altezza dei massimi d'intensità aumenta o si riduce? Si veda il problema 8.
11. Un reticolo di diffrazione ha un gran numero N di fenditure, ciascuna di larghezza a. Sia I_{max} l'intensità di un massimo principale e I_k quella di un massimo secondario adiacente di ordine k. (*a*) Se $k \ll N$, dimostrare con il diagramma dei vettori di fase che è approssimativamente $I_k/I_{max} = 1/(k + \frac{1}{2})^2\pi^2$. (Si confronti questa formula con quella della fenditura singola). (*b*) Per i massimi secondari che si trovano all'incirca a metà tra due massimi principali adiacenti, dimostrare che è all'incirca $I_k/I_{max} = 1/N^2$. (*c*) Si consideri il massimo principale centrale e quei massimi secondari adiacenti per i quali $k \ll N$. Dimostrare che questo gruppo di figure di diffrazione rassomiglia qualitativamente a quello di una singola fenditura di larghezza Na.

Paragrafo 47-2 Reticoli di diffrazione

12. Un reticolo di diffrazione è dotato di 200 incisioni/mm; viene osservato un massimo principale in corrispondenza di $\theta = 28°$. (*a*) Quali sono le possibili lunghezze d'onda della luce, supposta nella banda del visibile? (*b*) A che colori corrispondono?
13. Abbiasi un reticolo con 315 incisioni/mm. Per quale lunghezza d'onda dello spettro visibile si osserva diffrazione del quinto ordine?
14. Dimostrare che in un reticolo formato da strisce alternativamente trasparenti e opache di uguale larghezza sono assenti tutti gli spettri di ordine pari (non così per $m = 0$).
15. Dato un reticolo con 400 linee/mm, quanti ordini completi dello spettro visibile (400-700 nm) si possono osservare?
16. Facendo l'ipotesi che la luce incida sul reticolo con un angolo ψ, come si vede nella figura 25, dimostrare che la condizione per avere un massimo di diffrazione è

$$d(\text{sen}\psi + \text{sen}\theta) = m\lambda \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

In questo capitolo è stato trattato solo il caso particolare $\psi = 0$ (confrontare l'equazione 1).

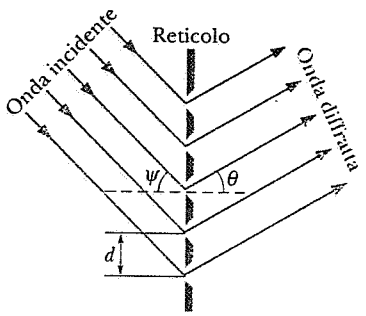


Figura 25 Problema 16.

17. Un reticolo a trasmissione con $d = 1.50$ μm è illuminato a vari angoli di incidenza con luce di lunghezza d'onda uguale a 600 nm. Disegnare in un grafico, in funzione dell'angolo di incidenza (da 0° a 90°), la deviazione angolare del fascio del primo ordine rispetto alla direzione incidente. Si veda il problema 16.
18. Supponendo che i limiti dello spettro visibile siano arbitrariamente scelti a 430 e 680 nm, progettare il passo di un reticolo che distribuisca lo spettro del primo ordine in un intervallo angolare di 20.0°.
19. Una luce bianca incide su un reticolo (400 nm $< \lambda <$ 700 nm). Dimostrare che gli spettri di secondo e terzo ordine si sovrappongono, indipendentemente dal valore del passo d.
20. Si ha un reticolo, dotato di 350 incisioni/mm, illuminato normalmente con luce bianca. Sullo schermo posto a 30 cm di distanza si produce uno spettro. Se si incide nello schermo un foro quadrato con il lato di 10 mm, parallelo alla linea del massimo centrale e distante da questo 50 mm, che intervallo di lunghezze d'onda passa attraverso il foro?

Paragrafo 47-3 Dispersione e potere risolutivo

21. Il *doppietto* nello spettro del sodio è una coppia di righe con lunghezze d'onda di 589.0 e 589.6 nm. Si calcoli il numero minimo di incisioni necessarie in un reticolo per poter risolvere il doppietto nello spettro di secondo ordine.
22. Un reticolo possiede 620 incisioni/mm ed è largo 5.05 mm. (*a*) Qual è il più piccolo intervallo di lunghezza d'onda che si può risolvere al terz'ordine con $\lambda = 481$ nm? (*b*) Quanti altri ordini superiori si possono vedere?
23. Una sorgente contenente una miscela di atomi di idrogeno e deuterio emette un doppietto nel rosso a lunghezza d'onda di 656.3 nm con separazione di 0.180 nm. Si trovi il numero minimo di incisioni necessario in un reticolo di diffrazione per risolvere queste righe al primo ordine.
24. (*a*) Quante incisioni deve avere un reticolo largo 4.15 cm per risolvere al secondo ordine le lunghezze d'onda di 415.496 nm e 415.487 nm? (*b*) A che angolo si trovano i massimi?
25. Con un certo reticolo il doppietto del sodio (problema 21) viene osservato al terzo ordine con angolo di 10.2° rispetto alla normale e in tale situazione è appena risolto. Si trovi (*a*) il passo del reticolo e (*b*) la larghezza totale del reticolo.
26. Dimostrare che la dispersione di un reticolo si può scrivere come

$$D = \frac{\tan\theta}{\lambda}.$$

27. Un reticolo ha 40000 incisioni distribuite su una lunghezza di 76 mm. (*a*) Qual è la dispersione D in °/nm attesa per la luce del sodio ($\lambda = 589$ nm) nei primi tre ordini? (*b*) Qual è il suo potere risolutivo in questi ordini?
28. Un fascio di luce composto da due lunghezze d'onda, 500 nm e 600 nm, incide normalmente su un reticolo di diffrazione. Si desidera che (1) il primo e il secondo massimo principale per ciascuna lunghezza d'onda si trovino a un angolo $\theta \leq 30°$, (2) la dispersione sia quanto più elevata possibile, e (3) il terzo ordine per 600 nm sia mancante. (*a*) Quale dev'essere il passo del reticolo? (*b*) Qual è la minima larghezza possibile per la singola fenditura? (*c*) Individuare tutti gli ordini che appaiono effettivamente sullo schermo per la lunghezza d'onda di 600 nm con i valori ottenuti in (*a*) e in (*b*).
29. Un reticolo di diffrazione possiede un potere risolutivo $R = \lambda/\Delta\lambda = Nm$. (*a*) Dimostrare che il corrispondente intervallo di frequenze pienamente risolvibile, $\Delta\nu$, è dato da $\Delta\nu = c/Nm\lambda$. (*b*) Dalla figura 1, dimostrare che i «tempi di percorrenza» dei due raggi estremi differiscono di una quantità $\Delta t = (Nd/c)\text{sen}\theta$. (*c*) Dimostrare che $(\Delta\nu)(\Delta t) = 1$, essendo tale relazione indipendente dai vari parametri del reticolo. Si assuma $N \gg 1$.

Paragrafo 47-4 Diffrazione dei raggi X

30. Un fascio di raggi X di lunghezza d'onda pari a 0.122 nm viene riflesso al secondo ordine dalla faccia di un cristallo di fluoruro di litio con un angolo di Bragg di 28.1°. Si calcoli la distanza tra due piani adiacenti del cristallo.
31. Un fascio di radiazione X avente lunghezza d'onda di 29.3 pm incide su un cristallo di calcite, il cui reticolo cristallino ha un passo di 0.313 nm. Si trovi qual è l'angolo più piccolo che il fascio forma col piano cristallino, per consentire una riflessione costruttiva dei raggi X.
32. Su un cristallo incidono raggi X monocromatici di elevata energia. Considerato che si verifica riflessione al prim'ordine per un angolo di Bragg pari a 3.40°, per quale angolo ci si attende una riflessione del secondo ordine?
33. Un fascio di raggi X, composto da due differenti lunghezze d'onda, viene diffuso da un cristallo dando origine allo spettro di intensità riportato nella figura 26. La distanza interplanare del reticolo cristallino vale 0.94 nm. Si determini la lunghezza d'onda delle due componenti del fascio.

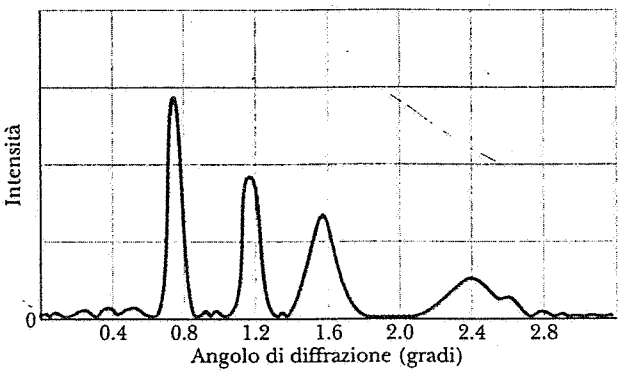


Figura 26 Problema 33.

34. Nel confronto fra le lunghezze d'onda di due radiazioni X monocromatiche, si osserva che la radiazione A produce un massimo di riflessione del primo ordine per un angolo di 23.2° rispetto alla superficie di un cristallo. La radiazione B, la cui lunghezza d'onda è nota e pari a 96.7 pm, dà origine a un massimo di riflessione del terzo ordine, quando forma un angolo di 58° con la stessa faccia dello stesso cristallo. (*a*) Calcolare la distanza interplanare. (*b*) Trovare la lunghezza d'onda della radiazione A.
35. Raggi X monocromatici incidono su una serie di piani di un cristallo di NaCl, la cui distanza tra i piani reticolari è 39.8 pm. Quando il fascio viene fatto ruotare di 60° rispetto alla normale, si osserva la riflessione del primo ordine di Bragg. Qual è la lunghezza d'onda dei raggi X?
36. Dimostrare che, nella disposizione di Bragg per la diffrazione dei raggi X monocromatici, non si ottengono massimi intensi se la lunghezza d'onda della radiazione X supera di oltre due

ISBN 88-408-0777-2

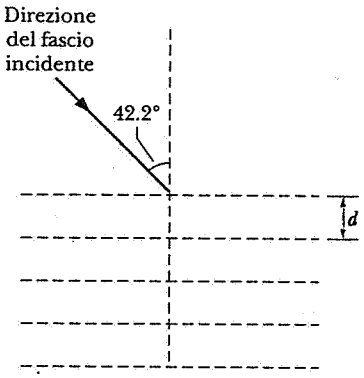


Figura 27 Problemi 38 e 40.

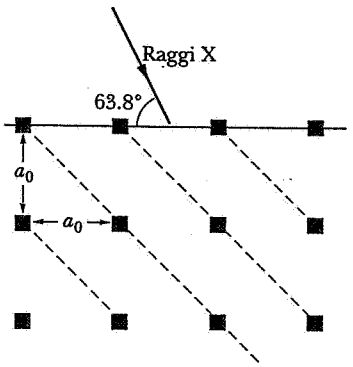


Figura 28 Problema 39.

volte la massima distanza interplanare del cristallo. Si veda la domanda 20.

37. Dimostrare che è impossibile determinare sia la lunghezza d'onda della radiazione che la distanza tra i piani di riflessione di Bragg in un cristallo, misurando gli angoli di riflessione di Bragg di diversi ordini.
38. Supponendo che il fascio di raggi X incidente della figura 27 non sia monocromatico, ma sia costituito da una distribuzione continua di lunghezze d'onda comprese fra 95 e 139 pm, ci si aspetta di osservare fasci diffratti, associati coi piani indicati? E, se è così, quali lunghezze d'onda vengono diffratte? Si assuma $d = 275$ pm.
39. Con riferimento alla figura 28, un determinato cristallo diffonde secondo Bragg al primo ordine con un angolo di incidenza di 63.8°. La lunghezza d'onda dei raggi X coinvolti è pari a 0.261 nm. Nell'ipotesi che la diffusione avvenga dai piani disegnati con tratteggio, si trovi la dimensione a_0 della cella elementare.
40. Raggi X monocromatici ($\lambda = 0.125$ nm) incidono su un cristallo di cloruro di sodio, formando un angolo di 42.2° rispetto alla linea di riferimento segnata nella figura 27. I piani indicati sono quelli della figura 18*a*, in cui $d = 0.252$ nm. Di quale angolo bisogna ruotare il cristallo per avere un fascio diffratto associato con i piani indicati? Si supponga che il cristallo venga ruotato attorno a un asse perpendicolare al piano della pagina.
41. Si consideri un reticolo cristallino infinito bidimensionale a maglie quadrate come in figura 16*b*. Una distanza interplanare è ovviamente a_0. (*a*) Calcolare le successive cinque distanze interplanari minori disegnando figure simili alla 18*a*. (*b*) Dimostrare che i risultati seguono la formula generale:

$$d = a_0/\sqrt{h^2 + k^2},$$

dove h e k sono entrambi numeri interi e primi tra loro.

42. Dimostrare che nell'esempio 5 il fascio relativo a $m = 1$, che può sussistere in base a considerazioni sull'interferenza, ha intensità nulla a causa della proprietà di diffrazione della cella elementare nella geometria data per i fasci e il cristallo. (*Suggerimento*: Dimostrare che la «riflessione» su un piano atomico passante per la parte superiore delle celle elementari e la «riflessione» su un piano passante per il centro delle celle, danno origine a contributi che si elidono a vicenda. Tutti i fasci di ordine dispari risultano di intensità nulla).

Capitolo 48

POLARIZZAZIONE

Nel capitolo 41 abbiamo visto come si propagano le onde elettromagnetiche: il vettore campo elettrico **E** *e il vettore campo magnetico* **B** *sono perpendicolari tra di loro ed entrambi normali alla direzione di avanzamento dell'onda. Brevemente, le onde elettromagnetiche sono onde* trasversali. *Tutto ciò può essere previsto a partire dalle equazioni di Maxwell.*

In molte delle esperienze che abbiamo descritto fino ad ora le onde luminose non rivelano la loro natura trasversale. Per esempio, la riflessione, la rifrazione, l'interferenza e la diffrazione sono fenomeni che avvengono anche per le onde longitudinali (come il suono) oltreché per le onde trasversali. Thomas Young, che abbiamo nominato anche nel descrivere l'esperienza della doppia fenditura, fornì nel 1817 i primi fondamenti sperimentali per credere che le onde luminose siano trasversali, basandosi sugli esperimenti condotti dai suoi contemporanei Arago e Fresnel riguardo il fenomeno che ora chiamiamo della birifrangenza *(par. 48-4).*

Nel presente capitolo tratteremo la polarizzazione *della luce e delle onde elettromagnetiche. La direzione di polarizzazione fa riferimento alla direzione del vettore* **E** *dell'onda. Analizzeremo diversi tipi di polarizzazione, tra i quali quella lineare e quella circolare, ed esamineremo le tecniche empiriche per produrre e rivelare luce polarizzata.*

48-1 POLARIZZAZIONE

Si consideri l'apparato sperimentale della figura 1. Un trasmettitore di microonde a sinistra è collegato con un'antenna a dipolo. Il moto oscillante su e giù delle cariche nell'antenna produce un'onda elettromagnetica il cui vettore **E**, a grande distanza dal dipolo, è parallelo al suo asse. Quando quest'onda investe l'antenna del ricevitore di microonde disegnato a destra, il vettore **E** dell'onda farà sì che gli elettroni oscillino avanti e indietro nell'antenna ricevente, producendo un segnale nel rivelatore. Se si ruota l'armatura trasmittente di 90° attorno alla direzione di propagazione, il segnale del ricevitore si riduce a zero. Con tale orientamento il vettore del campo elettrico si troverebbe perpendicolare rispetto all'asse dell'antenna ricevente e non sarebbe in grado di far muovere la carica lungo l'asse del dipo-

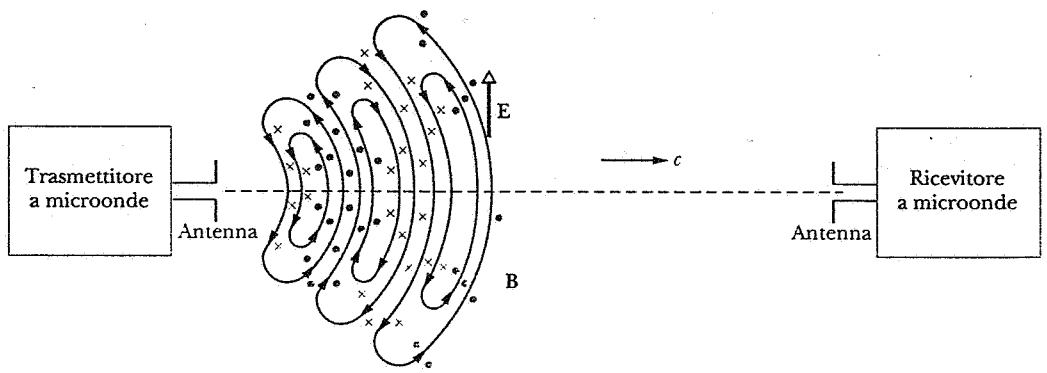


Figura 1 L'onda elettromagnetica generata dal trasmettitore è polarizzata nel piano della pagina, dato che il suo vettore **E** è parallelo all'asse dell'antenna trasmittente. L'antenna ricevente può ricevere quest'onda con la massima efficienza se quest'antenna giace anch'essa nello stesso piano ed è parallela a **E**. Se l'antenna ricevente venisse ruotata di 90° attorno alla direzione di propagazione, non riceverebbe alcun segnale.

ISBN 88-408-0777-2

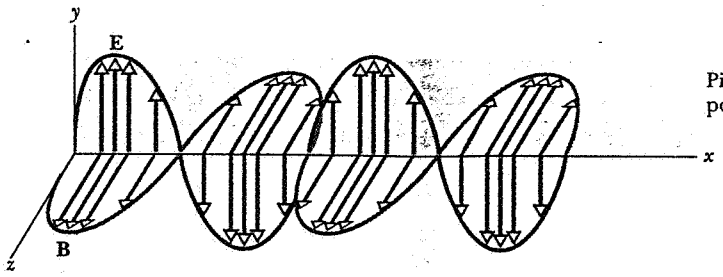


Figura 2 Una rappresentazione istantanea di un'onda elettromagnetica viaggiante, ove sono mostrati i vettori **E** e **B**. L'onda è polarizzata linearmente, in questo caso nella direzione *y*. Il *piano di polarizzazione* è definito come il piano che contiene il vettore **E** e la direzione di avanzamento; in questo caso il piano di polarizzazione coincide col piano *xy*.

lo e quindi non si rivelerebbe alcun segnale. Analogo risultato si otterrebbe ruotando l'antenna ricevente anziché quella trasmittente.

La figura 2 rappresenta un'onda elettromagnetica del tipo riprodotto nella figura 1. Come sempre, i vettori **E** e **B** sono tra loro perpendicolari, e sono entrambi pure perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda: è questa la rappresentazione fondamentale dell'onda trasversale. Una convenzione stabilisce che la *direzione di polarizzazione* di un onda coincide con la direzione del suo vettore **E** (l'asse *y* nella figura 2). Il piano individuato dal vettore **E** e dalla direzione di propagazione dell'onda (il piano *xy* nella figura 2) è detto *piano di polarizzazione* dell'onda. Si noti che, specificando due direzioni di un'onda elettromagnetica (la direzione di propagazione e la direzione di **E**), l'onda è pienamente definita, dato che la direzione di **B** rimane determinata dalle due direzioni date.*

L'onda disegnata nella figura 2 è detta *polarizzata linearmente*. Ciò significa che la direzione di **E** rimane fissa (nella direzione dell'asse *y* della figura 2), all'avanzare dell'onda.

Come abbiamo visto nell'esperimento illustrato dalla figura 1, le radiazioni elettromagnetiche nella regione delle microonde o delle radiotrasmissioni possono essere polarizzate linearmente orientando in una certa direzione l'asse dell'antenna trasmittente. Per esempio, le onde usate per trasmettere i segnali televisivi in Italia sono per la maggior parte polarizzate linearmente sul piano orizzontale. Per questa ragione le antenne montate sui tetti per la ricezione della televisione sono quasi sempre orizzontali; in alcune zone però i ripetitori trasmettono con piano di polarizzazione verticale, e in tal caso le antenne riceventi sono sistemate verticalmente.

Il moto degli elettroni nell'antenna a microonde della figura 1 è *coerente*; essi si muovono all'unisono per generare un'onda elettromagnetica polarizzata (fig. 3*a*). Nelle comuni sorgenti di luce, quali il sole o le lampadine, gli atomi si muovono indipendentemente gli uni dagli altri ed emettono onde il cui piano di polarizzazione è orientato in modo casuale attorno alla direzione di propagazione (fig. 3*b*). Quest'onda luminosa è trasversale ma *non* polarizzata; vale a dire che non esiste un piano preferenziale di vibrazione. La simmetria attorno alla direzione di propagazione nasconde la vera natura trasversale delle onde. I fasci laser d'altra parte sono coerenti e polarizzati. La figura 3*c* mostra un modo alternativo utile a rappresentare un'onda non polarizzata. I vettori **E** a direzione casuale sono rappresentati dalle componenti su due assi perpendicolari qualsiasi (qui *y* e *z*). Se l'onda non è polarizzata, le componenti hanno uguale ampiezza e la differenza di fase tra loro varia nel tempo in maniera casuale.

* Si ricordi il vettore di Poynting, $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0$, illustrato nel paragrafo 41-4, ove S assume la direzione di avanzamento dell'onda. Dati S ed E, restano determinati il modulo e la direzione di **B**.

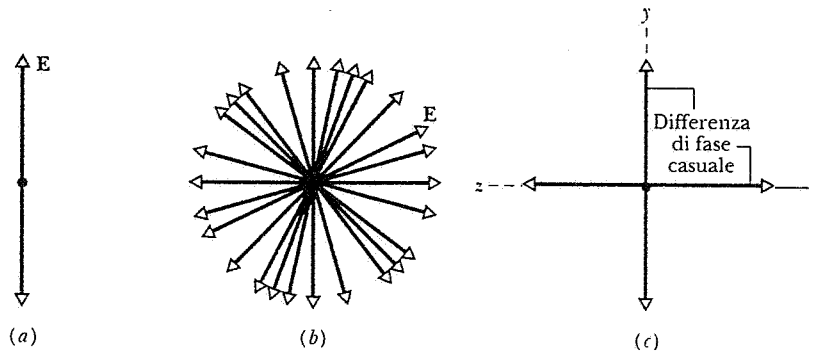


Figura 3 (*a*) Un'onda polarizzata linearmente come quella di figura 2, vista lungo la direzione di propagazione. L'onda procede nel verso uscente dalla pagina. È mostrata solo la direzione del vettore E. (*b*) Un'onda non polarizzata, che si può considerare come la sovrapposizione di più onde polarizzate. (*c*) Un modo equivalente di indicare l'onda non polarizzata, in cui si considerano due onde polarizzate linearmente con piani di polarizzazione perpendicolari tra di loro, aventi una differenza di fase variabile in modo casuale. L'orientamento degli assi *x* e *y* attorno alla direzione di propagazione è scelto in modo del tutto arbitrario.

ISBN 88-408-0777-2

48-2 LAMINE POLARIZZANTI

La figura 4 mostra luce non polarizzata incidente su una lamina di materiale polarizzante di uso commerciale chiamato *Polaroid.** Nella lamina esiste una direzione caratteristica polarizzante messa in evidenza dalle linee parallele. La lamina trasmette soltanto quelle componenti dei treni d'onde i cui vettori elettrici vibrano parallelamente a questa direzione e assorbe quelli che vibrano perpendicolarmente a essa. La luce uscente dalla lamina risulta polarizzata in un piano. Questa direzione polarizzante della lamina si forma durante il processo di fabbricazione incorporando certe molecole a catena lunga in una lamina flessibile di plastica e sottoponendola poi a trazione in modo che le molecole si allineino parallelamente le une alle altre. La radiazione il cui vettore **E** è parallelo alle lunghe molecole viene fortemente assorbita, mentre la radiazione il cui vettore **E** è perpendicolare a questa direzione attraversa agevolmente la lamina.

Nella figura 5 la lamina polarizzante o *polarizzatore* giace nel piano della pagina e la direzione di propagazione ha verso uscente dalla pagina. Il vettore **E** indica il piano di vibrazione di un treno d'onde scelto a caso incidente sulla lamina. Tale vettore può essere scomposto in due vettori componenti, $\mathbf{E}_z$ (di modulo $E \operatorname{sen}\theta$) ed $\mathbf{E}_y$ (di modulo $E \cos\theta$), uno perpendicolare alla direzione di polarizzazione e l'altro parallelo a essa. Solamente il secondo viene trasmesso; il primo viene assorbito nella lamina.

Quando una luce non polarizzata incide su una lamina polarizzante ideale, l'intensità della luce polarizzata trasmessa attraverso la lamina è pari alla metà dell'intensità incidente, qualunque sia l'orientamento della lamina. Possiamo illustrare ciò con la rappresentazione data nella figura 3*c* di un fascio incidente non polarizzato, in cui ciascuna componente possiede in media un'intensità pari alla metà della luce incidente. Dato che l'orientamento degli assi nella figura 3*c* è arbitrario, possiamo liberamente sceglierne uno parallelo alla direzione di trasmissione della lamina polarizzante su cui incide. Considerato che questa componente del fascio viene trasmessa per intero, mentre l'altra componente viene totalmente assorbita, ne discende che la lamina trasmette il 50% della luce incidente. Possiamo giungere alla medesima conclusione attraverso l'esame della figura 5, in cui un'onda polarizzata in una direzione arbitraria incide su un polarizzatore. La componente E_y ($= E\cos\theta$) viene trasmessa, di modo che l'intensità trasmessa è proporzionale a $E_y^2 = E^2\cos^2\theta$. Se la luce incidente non è polarizzata, si troverà che l'intensità totale trasmessa sarà pari al valor medio di questa espressione calcolato su tutti i possibili orientamenti del piano di polarizzazione della luce incidente, vale a dire su tutti i possibili valori di θ. Il valor medio di $\cos^2\theta$ è $\frac{1}{2}$, e concludiamo nuovamente che viene trasmessa la metà dell'intensità incidente. A causa della riflessione e del parziale assorbimento della luce lungo la direzione di polarizzazione, le lamine polarizzanti reali possono trasmettere, ad esempio, solo il 40% dell'intensità incidente. Nella nostra trattazione, assumeremo che i polarizzatori seguano un comportamento ideale.

Poniamo una seconda lamina polarizzatrice P_2 (chiamata di solito *analizzatore* quando viene usata in questo modo) come nella figura 6. Se si ruota P_2 intorno alla direzione di propagazione, vi sono due posizioni, a 180° l'una dall'altra, nelle quali la intensità luminosa trasmessa è nulla; queste sono le posizioni nelle quali le direzioni polarizzanti di P_1 e P_2 sono tra loro perpendicolari.

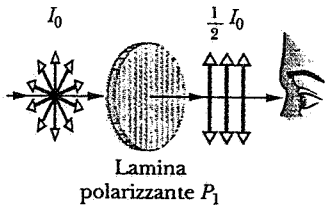


Figura 4 Un fascio luminoso non polarizzato viene polarizzato linearmente (e ridotto alla metà in intensità) passando attraverso un'unica lamina polarizzante. Le linee parallele, che non sono visibili nella realtà sulla lamina, suggeriscono la direzione di polarizzazione.

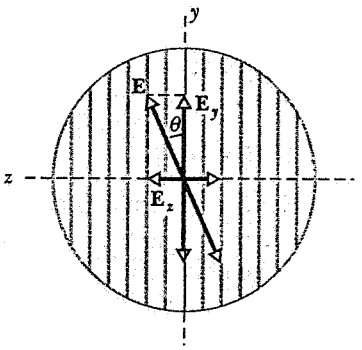


Figura 5 Un'altra rappresentazione dell'effetto prodotto da una lamina polarizzante. Un'onda polarizzata linearmente (ad esempio una di quelle indicate nella figura 3*b*), orientata in una direzione casuale θ, investe la lamina. La componente y del vettore **E** viene trasmessa e la componente z viene assorbita.

* Esistono altri modi di produrre luce polarizzata senza usare questo ben noto prodotto commerciale. Ne menzioneremo alcuni più avanti. Si veda anche Walker J., *The Amateur Scientist*, «Scientific American», dicembre 1977, per una descrizione dei metodi di produzione di lamine polarizzanti, lamine a quarto d'onda e a mezza onda e degli esperimenti realizzabili con esse.

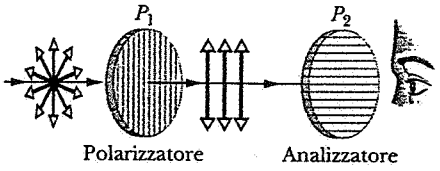


Figura 6 La luce non polarizzata non viene trasmessa attraverso due lamine polarizzanti che presentino le direzioni di polarizzazione perpendicolari tra di loro.

Se E_m è l'ampiezza della luce polarizzata che incide su P_2, l'ampiezza della luce uscente è $E_m \cos\theta$, ove θ è l'angolo fra le direzioni polarizzanti di P_1 e P_2. Ricordando che l'intensità del fascio di luce è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, deduciamo che l'intensità trasmessa I varia con θ secondo la relazione

$$I = I_m \cos^2\theta, \qquad (1)$$

in cui I_m è il valore massimo dell'intensità trasmessa, che si ha quando le direzioni polarizzanti di P_1 e P_2 sono parallele, cioè quando $\theta = 0°$ oppure 180°. La figura 7*a*, nella quale due lamine polarizzanti sovrapposte sono nella configurazione parallela ($\theta = 0°$ o 180° nell'eq. 1), mostra che la luce trasmessa attraverso la regione in cui le lamine sono sovrapposte raggiunge il suo valore massimo. Nella figura 7*b* una delle due lamine è stata ruotata di 90°, cosicché θ nell'equazione 1 ha il valore di 90° o 270°; la luce trasmessa attraverso la regione di sovrapposizione è ora minima. L'equazione 1, chiamata *legge di Malus*, fu scoperta sperimentalmente da Étienne Louis Malus (1775-1812) nel 1809, facendo uso di tecniche di polarizzazione diverse da quelle fin qui descritte (par. 48-3).

Dal punto di vista storico gli studi sulla polarizzazione furono condotti (da Young e Malus, per esempio) per indagare la natura della luce. Oggi noi capovolgiamo il procedimento e deduciamo qualcosa sulla natura di un oggetto dallo stato di polarizzazione della luce emessa o diffusa dall'oggetto stesso. Da studi sulla polarizzazione della luce riflessa dai grani di polvere cosmica presente nella nostra galassia è stato possibile dedurre che essi sono stati orientati dal debole campo magnetico galattico (circa 10^{-8} T) in modo che la loro dimensione più lunga sia parallela a questo campo. Studi di polarizzazione hanno suggerito che gli anelli di Saturno consistono di cristalli di ghiaccio. Forma e dimensioni dei virus possono essere determinati dalla polarizzazione di luce ultravioletta da essi diffusa. Utili informazioni circa la struttura degli atomi e dei nuclei si ottengono dagli studi sulla polarizzazione delle onde da essi emesse in tutte le bande dello spettro elettromagnetico. In questo modo abbiamo a disposizione una tecnica di ricerca proficua per strutture le cui dimensioni vanno da quelle di una galassia (10^{+22} m) a quella di un nucleo (10^{-14} m).

La luce polarizzata ha molte applicazioni pratiche anche nell'industria e in ingegneria. La figura 8 mostra un pezzo di plastica sottoposto a trazione e collocato in mezzo tra due lamine polarizzanti. Viene così evidenziato il disegno degli stiramenti subiti, permettendo agli ingegneri di modificare il progetto nell'intento di ridurre lo sforzo nei punti critici della struttura.*

* Alcuni esempi di impiego di siffatti modelli per studiare l'architettura classica si trovano in Dorn H. e Mark R., *L'architettura di Christopher Wren*, «Le Scienze», 157:104 e in Mark R. e Clark W.W., *Sperimentazione strutturale nell'architettura gotica*, «Le Scienze», 197:114.

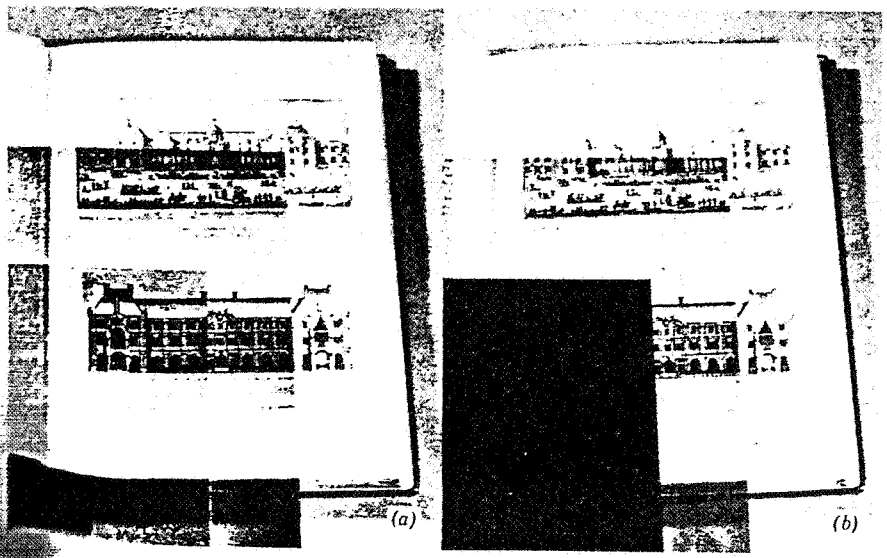


Figura 7 Due fogli di materiale polarizzante vengono sovrapposti sopra l'illustrazione di un libro. In (*a*) le direzioni di polarizzazione dei due fogli sono parallele, di modo che la luce può attraversarli; in (*b*) le direzioni di polarizzazione sono perpendicolari, in modo tale che non risultano più trasparenti alla luce. (L'illustrazione riproduce il palazzo del Lussemburgo a Parigi. Malus scoperse il fenomeno di polarizzazione per riflessione usando un cristallo di calcite per osservare la luce solare riflessa dalle finestre di questo palazzo.)

ISBN 88-408-0777-2

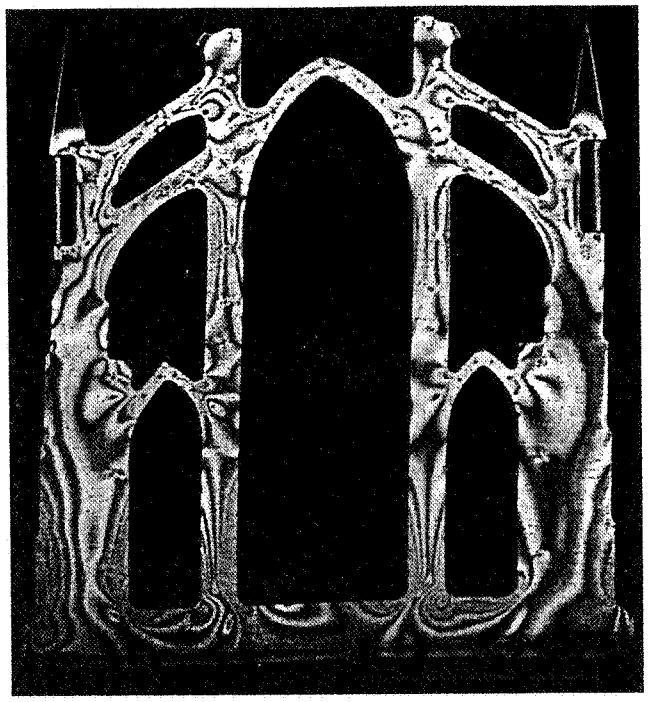


Figura 8 Un pezzo di plastica visto attraverso polarizzatori incrociati. Le figure chiare e scure indicano le regioni della struttura in cui avvengono tensioni interne.

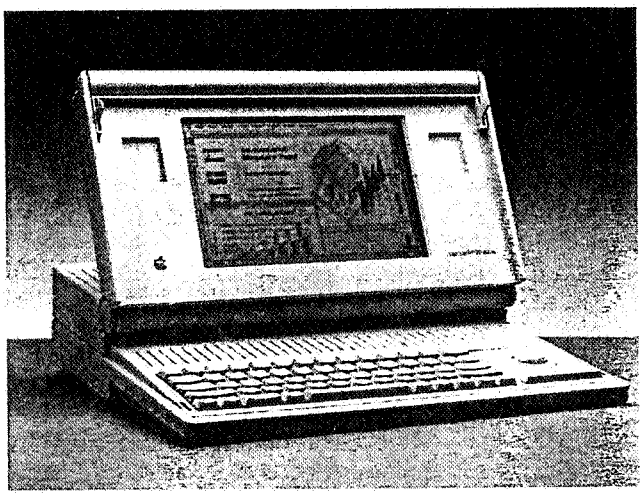


Figura 9 Un elaboratore portatile con lo schermo a cristalli liquidi.

La figura 9 mostra un ordinario visualizzatore a cristalli liquidi, che impiega luce polarizzata per formare lettere e numeri, negli orologi e sullo schermo delle calcolatrici. Il cristallo liquido è un materiale che ingloba molecole allungate per realizzare una lamina polarizzante; si può fare in modo che la molecola si disponga nel senso della lunghezza secondo la direzione di un campo elettrico opportunamente applicato. Il cristallo liquido è disposto in modo che trasmetta in condizioni normali la luce attraverso il polarizzatore e l'analizzatore. Quando il campo elettrico (da una batteria) viene applicato a una cèrta regione dello schermo a cristalli liquidi, le molecole si allineano in modo tale da non trasmettere più luce attraverso questa regione, formando così dei disegni scuri sul visualizzatore.

Esempio 1 Le direzioni di polarizzazione di due lamine polarizzanti sono parallele cosicché l'intensità I_m della luce trasmessa è massima. Di quale angolo bisogna ruotare l'una o l'altra delle lamine per ridurre a metà l'intensità?

Soluzione Dall'equazione 1, dato che $I = \frac{1}{2} I_m$, abbiamo

$$\tfrac{1}{2} I_m = I_m \cos^2\theta,$$

ovvero

$$\theta = \cos^{-1}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm 45°,\ \pm 135°.$$

Si ottiene lo stesso effetto qualunque sia la lamina ruotata e il verso di rotazione.

48-3 POLARIZZAZIONE PER RIFLESSIONE

Malus scoprì nel 1809 che la luce può essere polarizzata parzialmente o completamente per riflessione. Chiunque abbia osservato la riflessione del sole sull'acqua, portando un paio di occhiali da sole le cui lenti siano costituite da lamine polarizzanti, avrà probabilmente notato l'effetto. È sufficiente inclinare la testa da un lato all'altro, facendo così ruotare le lamine polarizzatrici, per osservare che l'intensità della luce solare riflessa passa attraverso un minimo.

La figura 10 mostra una fascio non polarizzato incidente su una superficie di vetro. I vettori **E** possono essere scomposti in due componenti, una perpendicolare al piano d'incidenza, che è il piano della figura 10, e l'altra giacente sullo stesso piano. In media, per la luce incidente completamente non polarizzata, queste due componenti hanno ampiezza uguale.

Per il vetro o altri materiali dielettrici si osserva sperimentalmente un angolo di incidenza particolare θ_p, detto *angolo di polarizzazione* o *angolo di Brewster*, per il quale il coefficiente di riflessione della componente polarizzata sul piano della figura 10 è zero. Ciò significa che il fascio riflesso dal vetro, per quanto di bassa intensità, è polarizzato in un piano e ha il piano di vibrazione perpendicolare a quello d'incidenza. Questa

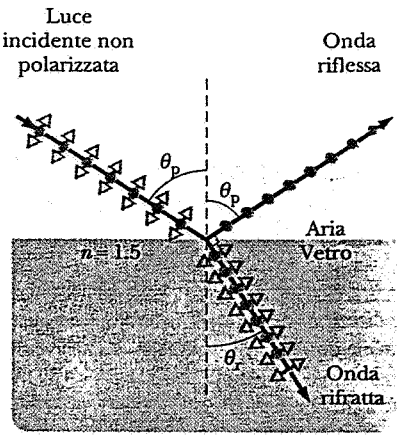


Figura 10 Per un particolare angolo d'incidenza θ_p, la luce riflessa è completamente polarizzata. La luce rifratta è parzialmente polarizzata. I punti indicano le componenti di polarizzazione perpendicolari al piano della pagina, e le doppie freccette indicano componenti di polarizzazione parallele ad esso.

polarizzazione del fascio riflesso può essere facilmente verificata analizzando il fascio con una lamina polarizzante.

Per un angolo di incidenza pari all'angolo di Brewster, la componente con polarizzazione parallela al piano d'incidenza è interamente rifratta, mentre la componente perpendicolare è in parte riflessa e in parte rifratta. Così il fascio trasmesso, che è di alta intensità, è solo parzialmente polarizzato. Se il raggio rifratto esce dal vetro passando in aria e di qui incide nuovamente su una seconda superficie di vetro (ancora con angolo θ_p), la componente perpendicolare verrà riflessa e il fascio rifratto sarà maggiormente polarizzato. Facendo uso di una serie di lastre di vetro, si ottengono riflessioni su superfici successive e si può così aumentare l'intensità del fascio emergente riflesso come si vede nella figura 11. Allo stesso modo le componenti rifratte vengono progressivamente eliminate dal fascio trasmesso, rendendolo più marcatamente polarizzato nel piano della figura 11.

A un angolo di incidenza pari a quello di polarizzazione, si trova sperimentalmente che i fasci riflesso e rifratto sono perpendicolari fra loro, ossia, riferendoci alla figura 10,

$$\theta_p + \theta_r = 90°.$$

Dalla legge di Snell si ha

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_p = n_2 \operatorname{sen}\theta_r.$$

Combinando queste equazioni si ottiene

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_p = n_2 \operatorname{sen}(90° - \theta_p) = n_2 \cos\theta_p,$$

oppure

$$\tan\theta_p = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (2)$$

dove il raggio incidente è nel mezzo 1 e quello rifratto è nel mezzo 2. Se il mezzo 1 è aria ($n_1 = 1$) si può scrivere

$$\tan\theta_p = n, \qquad (3)$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo su cui incide la luce. L'equazione 2 è nota come *legge di Brewster* dal nome di Sir David Brewster (1781-1868) che la dedusse empiricamente nel 1812. È possibile dimostrare rigorosamente questa legge mediante le equazioni di Maxwell (vedasi anche il problema 6).

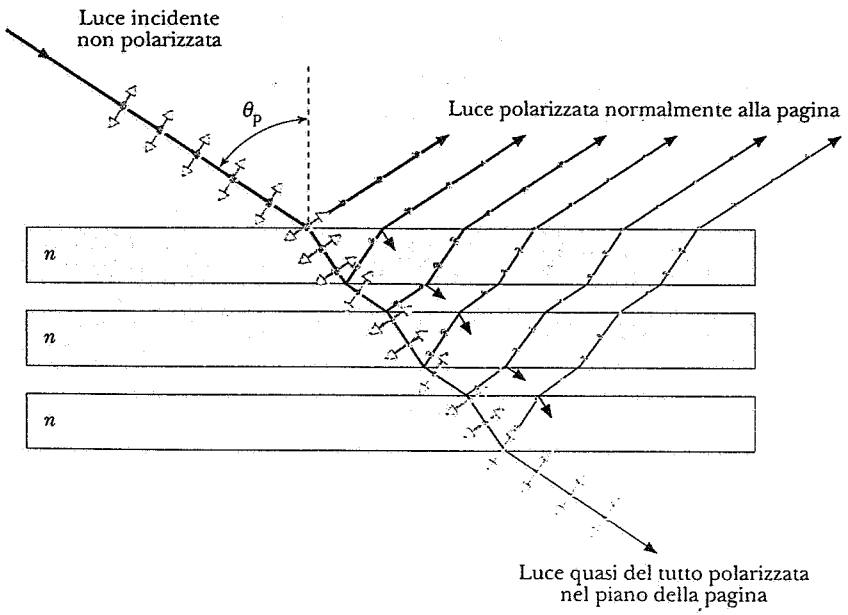


Figura 11 Polarizzazione della luce prodotta da una serie di lastre di vetro. Luce non polarizzata incide con un angolo θ_p. Tutte le onde riflesse sono polarizzate perpendicolarmente al piano della pagina. Dopo il passaggio di numerose lastre, l'onda trasmessa non contiene più un'apprezzabile componente polarizzata perpendicolarmente alla pagina.

ISBN 88-408-0777-2

Esempio 2 Desideriamo usare una lastra di vetro ($n = 1.50$) in aria come polarizzatore. Qual è l'angolo di polarizzazione? Qual è l'angolo di rifrazione?

Soluzione Dall'equazione 3 si ha

$$\theta_p = \tan^{-1} 1.50 = 56.3°.$$

L'angolo di rifrazione segue dalla legge di Snell:

$$\text{sen}\theta_p = n\ \text{sen}\theta_r,$$

ossia

$$\text{sen}\theta_r = \frac{\text{sen } 56.3°}{1.50} = 0.555 \quad \text{ovvero} \quad \theta_r = 33.7°.$$

48-4 BIRIFRANGENZA

Nei capitoli precedenti abbiamo fatto l'ipotesi che la velocità della luce, e quindi l'indice di rifrazione, sia indipendente dalla direzione di propagazione nel mezzo e dallo stato di polarizzazione della luce. I liquidi, i solidi amorfi come il vetro, e i solidi cristallini a simmetria cubica mostrano normalmente questo comportamento e si dicono *otticamente isotropi*. Molti altri solidi cristallini sono otticamente *anisotropi* (cioè non isotropi).* L'anisotropia ottica è responsabile del disegno degli sforzi illustrato nella figura 8, per quanto in quel caso il materiale non sia cristallino.

La figura 12, nella quale un cristallo di calcite ($CaCO_3$) ben levigato è appoggiato sopra alcune lettere stampate, mette in evidenza l'anisotropia ottica di questo materiale; *l'immagine appare doppia.* Inoltre le due immagini presentano piani di polarizzazione perpendicolari tra di loro, come è schematizzato nella figura 13, che mostra un fascio di luce non polarizzata incidente su un cristallo di calcite perpendicolarmente a una delle sue facce. Sulla superficie del cristallo il fascio si spezza in due. Questa «doppia deviazione» di un fascio trasmesso attraverso la calcite, mostrata nelle figure 12 e 13, è detta *birifrangenza* o anche *doppia rifrazione*. Il fenomeno fu studiato da Huygens, che lo descrisse nel suo *Trattato sulla luce* pubblicato nel 1678.

Se si analizzano i due fasci emergenti della figura 13 con una lamina polarizzatrice, si trova che sono polarizzati linearmente con i piani di vibrazione perpendicolari tra loro. La figura 12 mostra che ciascuno dei due polarizzatori incrociati trasmette solo una delle due immagini, ma non l'altra.

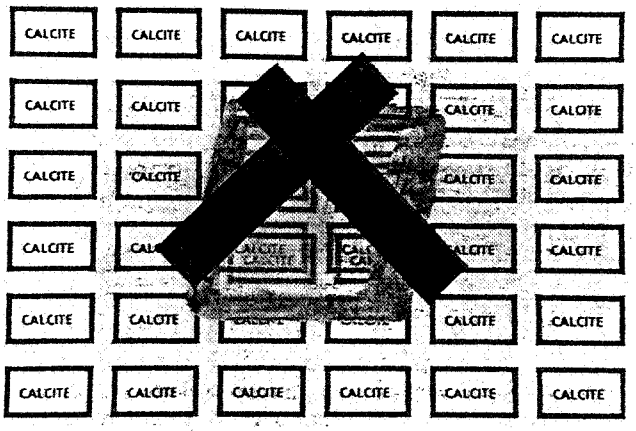


Figura 12 Una scritta osservata attraverso un cristallo birifrangente mostra due immagini, risultanti dai due diversi indici di rifrazione. Le doppie immagini sono visibili dove non sono presenti le strisce di pellicola polarizzante. L'asse di polarizzazione di ciascuna striscia è parallelo al suo lato maggiore. Si noti di conseguenza che le due immagini hanno polarizzazione perpendicolare.

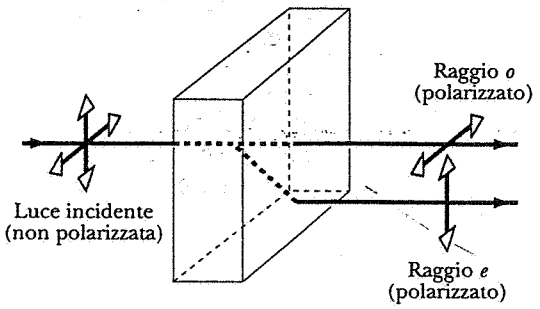


Figura 13 La luce non polarizzata che incide su un materiale birifrangente (come un cristallo di calcite) si divide in due componenti, il raggio *o* (che segue la legge di Snell) e il raggio *e* (che non la segue). I due raggi rifratti hanno, come mostrato, direzioni perpendicolari di polarizzazione.

Alcune sostanze birifrangenti mostrano forte assorbimento per una delle due componenti della polarizzazione, mentre l'altra viene trasmessa con scarso assorbimento. Queste sostanze vengono dette *dicroiche*. Le lamine polarizzanti sono esempi di materiali dicroici.

Se si eseguono esperimenti a diversi angoli di incidenza, si trova che uno dei fasci della figura 13 (definito *raggio ordinario*, o raggio *o*) obbedisce alla legge di Snell nella rifrazione sulla superficie del cristallo, proprio come un raggio che passa da un mezzo isotropo a un altro. Il secondo fascio (definito *raggio straordinario*, o raggio *e*), al contrario, non obbedisce a tale

* I solidi possono essere anisotropi nei riguardi di molti proprietà: meccaniche (la mica si sfalda facilmente solo lungo un piano), elettriche (un cubo di grafite cristallina non presenta la stessa resistenza elettrica tra tutte le coppie di facce opposte), magnetiche (un cubo di nickel cristallino si magnetizza più facilmente in certe direzioni che in altre), e così via.

TABELLA 1 INDICI PRINCIPALI DI RIFRAZIONE DI ALCUNI CRISTALLI BIRIFRANGENTI[a]

Cristallo	*Formula*	n_o	n_e	$n_e - n_o$
Ghiaccio	H_2O	1.309	1.313	+0.004
Quarzo	SiO_2	1.544	1.553	+0.009
Wurtzite	ZnS	2.356	2.378	+0.022
Calcite	$CaCO_3$	1.658	1.486	−0.172
Dolomite	$CaO \cdot MgO \cdot 2CO_2$	1.681	1.500	−0.181
Siderite	$FeO \cdot CO_2$	1.875	1.635	−0.240

[a] Per la luce del sodio, $\lambda = 589$ nm.

legge. Nella figura 13, per esempio, l'angolo di incidenza della luce è uguale a zero, ma l'angolo di rifrazione del raggio *e*, contrariamente a quanto prevede la legge di Snell, non è nullo. In generale il raggio *e* non giace neppure nel piano d'incidenza.

Questo diverso comportamento, rispetto alla legge di Snell, delle onde rappresentate dai raggi *o* ed *e* può essere spiegato nel modo seguente:

1. L'onda *o* si propaga nel cristallo alla stessa velocità v_o in tutte le direzioni. In altre parole, il cristallo ha per quest'onda un unico indice di rifrazione n_o, proprio come un solido isotropo.

2. L'onda *e* viaggia nel cristallo a una velocità che varia con la direzione, da v_o a un valore v_e. In altre parole l'indice di rifrazione, dato da c/v, varia con la direzione tra n_o ed n_e.

Le quantità n_o ed n_e sono dette *indici di rifrazione principali* del cristallo. Il problema 19 suggerisce la maniera di misurarli. La tabella 1 elenca questi indici per sei cristalli birifrangenti. Per tre di essi l'onda *e* è più lenta; per gli altri tre è più veloce dell'onda *o*. Alcuni cristalli birifrangenti (mica, topazio, ecc.) sono otticamente più complessi della calcite e richiedono *tre* indici di rifrazione principali per una descrizione completa delle loro proprietà ottiche. I cristalli a struttura cubica (come il NaCl; vedi figura 15 del capitolo 47) sono otticamente isotropi, e richiedono *un* solo indice di rifrazione.

Il comportamento delle due onde viaggianti a diverse velocità nella calcite è riassunto nella figura 14, che mostra due superfici d'onda che hanno origine da un'immaginaria sorgente luminosa puntiforme *S* inglobata nel cristallo. La direzione caratteristica all'interno del cristallo tale per cui $v_o = v_e$, è detta *asse ottico*. L'asse ottico è una proprietà intrinseca del cristallo e non dipende dalla polarizzazione o dalla direzione di propagazione della luce.

La superficie dell'onda *o* nella figura 14 è una sfera, perché il mezzo è isotropo per le onde *o*. La superficie delle onde *e* non può essere sferica, perché la velocità delle onde *e* varia con la direzione rispetto all'asse ottico. La superficie delle onde *e* è un ellissoide di rotazione attorno all'asse ottico. Le due superfici rappresentano la luce avente due differenti stati di polarizzazione. Se consideriamo per il momento solo i raggi che giacciono nel piano della figura 14, allora (*a*) il piano di polarizzazione per i raggi *o* è perpendicolare alla figura, come suggeriscono i punti, e (*b*) il piano di polarizzazione per i raggi *e* coincide con il piano della figura, come suggerito dal disegno a doppie frecce. Alla fine di questo paragrafo descriveremo più a fondo gli stati di polarizzazione.

Possiamo servirci del principio di Huygens per studiare la propagazione delle onde luminose nei cristalli birifrangenti. Il caso più generale può essere alquanto complicato, laddove un'onda *e* emerge in un piano differente da quello dell'onda *o*. Possiamo tuttavia orientare il cristallo in modo che le direzioni di propagazione per l'onda incidente, l'onda *o* e l'onda *e* giacciano tutte su uno stesso piano. E nella prossima trattazione assumeremo questa disposizione.

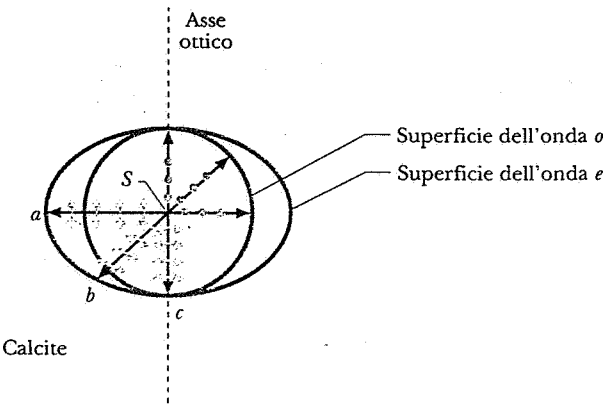


Figura 14 Le superfici d'onda di Huygens prodotte da una sorgente puntiforme *S* incastonata nella calcite. Mediante punti e doppie freccette sono indicati gli stati dei tre raggi *o* e dei tre raggi *e*, rispettivamente. Nel caso generale (per esempio il raggio *Sb*) la direzione di polarizzazione non è perpendicolare al raggio.

ISBN 88-408-0777-2

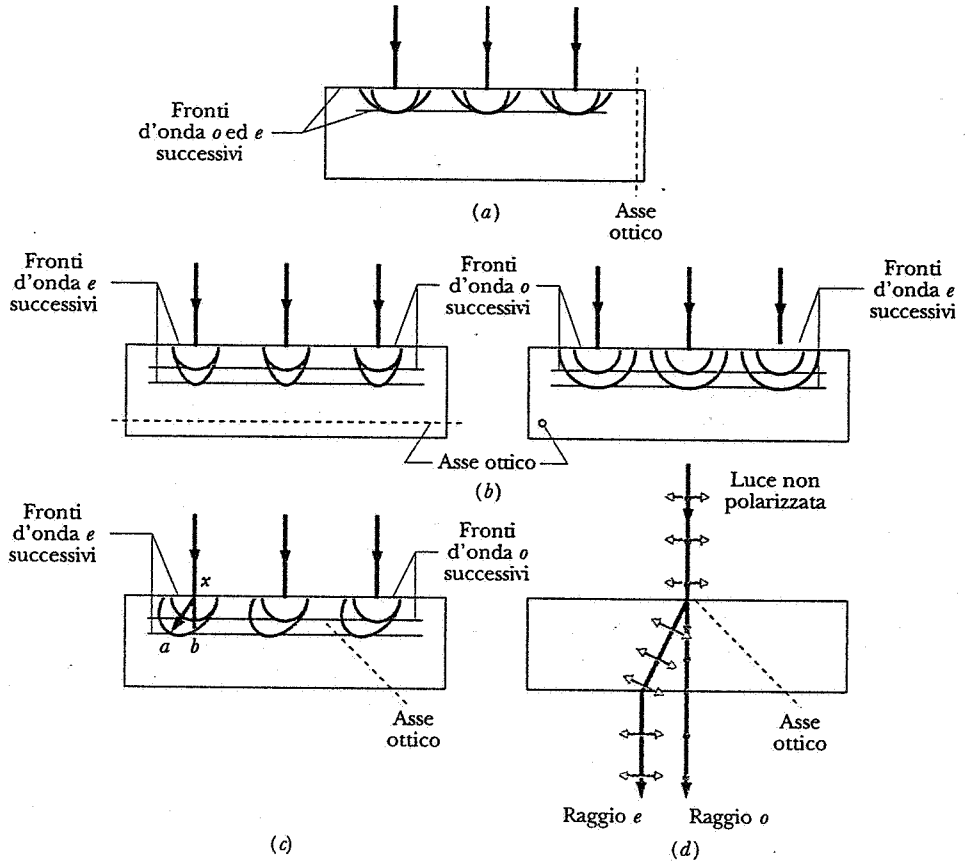


Figura 15 Luce non polarizzata incide normalmente su una lastra tagliata da un cristallo di calcite. Sono indicate le onde elementari di Huygens, con riferimento alla figura 14. (*a*) Non avviene doppia rifrazione e non si ha differenza di velocità. (*b*) Non avviene doppia rifrazione, ma si ha differenza di velocità. (*c*) Si verificano sia la doppia rifrazione sia la differenza di velocità. (*d*) Idem come in (*c*), con indicazione degli stati di polarizzazione e dei raggi emergenti.

La figura 15*a* mostra il caso particolare in cui la luce non polarizzata incide normalmente su una lastra di calcite tagliata da un cristallo in modo che l'asse ottico sia normale alla superficie. Consideriamo un fronte d'onda che, al tempo $t = 0$, coincide con la superficie del cristallo. Seguendo il criterio di Huygens, possiamo pensare che tutti i punti di questa superficie siano centri che irraggiano due sequenze di onde elementari di Huygens, come quelle della figura 14. Il piano di tangenza a queste onde elementari rappresenta la nuova posizione del fronte d'onda all'istante successivo t. Il fascio incidente della figura 15*a* si propaga attraverso il cristallo senza deviazione con velocità v_o. Il fascio emergente dalla lastra avrà il medesimo tipo di polarizzazione del fascio incidente. La lastra di calcite si comporta solo in questa particolare circostanza come un materiale isotropo e non si può fare distinzione alcuna tra onde *o* e onde *e*. Esse avanzano entrambe parallelamente all'asse ottico e hanno quindi la stessa velocità.

La figura 15*b* mostra due punti di vista di un altro caso particolare, e cioè il caso in cui la luce non polarizzata incide normalmente su una lastra tagliata in modo che l'asse ottico sia parallelo alla sua superficie. Anche in questo caso il fascio incidente si propaga senza alcuna deviazione. Tuttavia la direzione di propagazione è perpendicolare all'asse ottico e le onde che sono polarizzate normalmente all'asse hanno velocità differente rispetto a quelle polarizzate parallelamente ad esso. Le prime sono onde *o* e la loro velocità è v_o, mentre le seconde sono onde *e* dotate di velocità v_e. Sussiste una differenza di fase tra le onde *o* e le onde *e* quando esse fuoriescono dal fondo della lastra.

La figura 15*c* mostra luce non polarizzata che incide normalmente su una lastra di calcite, tagliata in modo che l'asse ottico formi un angolo arbitrario con la superficie del cristallo. Si generano due fasci separati spazialmente come nella figura 13, che viaggiano nel cristallo a velocità diverse, precisamente v_o per l'onda *o* e una velocità intermedia fra v_o e v_e per l'onda *e*. Si noti che il raggio *xa* rappresenta il cammino *ottico* più breve per il trasporto dell'energia luminosa dal punto *x* al fronte d'onda *e*. L'energia trasportata lungo qualsiasi altro percorso, in particolare lungo il raggio *xb*, è soggetta a un tempo di transito più lungo, in conseguenza del fatto che la velocità delle onde *e* varia con la direzione. La figura 15*d* rappresenta lo stesso caso della figura 15*c*, ma mostra i raggi emergenti dalla lastra, come nella figura 13, e mette in evidenza il fatto che i fasci emergenti sono polarizzati normalmente l'uno all'altro, cioè sono a *polarizzazione incrociata*.

Un'analogia meccanica *(Facoltativo)*

Cerchiamo ora di comprendere, analizzando la struttura atomica dei cristalli otticamente anisotropi, come possano esistere onde luminose polarizzate in piani perpendicolari con velocità differenti. La luce si propaga in un cristallo per l'azione del vettore oscillante **E** dell'onda sugli elettroni del cristallo. Questi elettroni, che subiscono forze elettrostatiche di richiamo se spostati dalle posizioni di equilibrio, sono posti in oscillazione periodica forzata attorno a queste posizioni e trasmettono la perturbazione ondulatoria traversale che costituisce l'onda luminosa. L'intensità delle forze di richiamo si può misurare con una costante elastica k, come nel caso dell'oscillatore armonico semplice discusso nel capitolo 15 (in cui $F = -kx$).

In materiali otticamente isotropi la costante elastica k è la medesima per tutte le direzioni di spostamento degli elettroni dalle loro posizioni di equilibrio. Nei cristalli birifrangenti, invece k varia con la direzione. Per spostamenti degli elettroni in un piano perpendicolare all'asse ottico, k ha il valore costante k_o, indipendentemente dall'orientamento dello spostamento nel piano. Per spostamenti paralleli all'asse ottico, k ha il valore più elevato (per la calcite) k_e. È bene notare con attenzione che la velocità di un'onda in un cristallo è determinata dalla direzione in cui vibrano i vettori **E** e *non* da quella di propagazione. Sono le vibrazioni del vettore trasversale **E** che fanno entrare in gioco le forze di richiamo, determinando così la velocità dell'onda. Si noti anche che quanto più intensa è la forza di richiamo, cioè quanto più grande è k, tanto più veloce è l'onda. Per esempio, nel caso di onde viaggianti lungo una corda tesa, la forza di richiamo per gli spostamenti trasversali è determinata dalla tensione F della corda. L'equazione 18 del capitolo 19 ($v = \sqrt{F/\mu}$) mostra che al crescere di F corrisponde un aumento della velocità dell'onda v.

Nella figura 16 una lunga «catena da neve» per pneumatici, sospesa per l'estremo superiore, e con un peso attaccato in fondo, fornisce un'analogia meccanica unidimensionale della birifrangenza. Si applica in modo specifico alle onde *o* ed *e* propagantesi perpendicolarmente all'asse ottico, come nella figura 15*b*. Se il sostegno è fatto oscillare come indicato nella figura 16*a*, un'onda trasversale si propaga lungo la catena a una certa velocità. Se il sostegno vien fatto oscillare invece longitudinalmente, come nella figura 16*b*, si propaga pure un'altra onda trasversale. La forza di richiamo nel caso della seconda onda è maggiore di quella della prima, dato che la catena è più rigida nel piano della figura 16*b* di quanto sia nel piano perpendicolare, ossia quello della figura 16*a*. Cosicché la seconda onda si propaga lungo la catena a velocità maggiore.

Nel linguaggio dell'ottica diremmo che la velocità di un'onda trasversale nelle catene dipende dall'orientamento del piano di vibrazione dell'onda. Se facciamo oscillare a caso la cima della catena, la perturbazione ondulatoria in un punto di essa può essere descritta come la somma di due onde polarizzate perpendicolarmente l'una rispetto all'altra e viaggianti a velocità diverse. Ciò corrisponde esattamente alla analoga situazione ottica della figura 15*b*.

Per onde che si propagano parallelamente all'asse ottico come nella figura 15*a*, o per onde in materiali otticamente isotropi, l'analogia meccanica appropriata è quella di un'unica catena sospesa per un estremo alla quale sia attaccato un peso. In questo caso si ha una sola velocità di propagazione indipendentemente dal modo in cui l'estremo superiore vien fatto oscillare. Per le onde che si propagano lungo una tale catena le forze di richiamo sono le stesse qualunque sia l'orientamento del piano di polarizzazione.

Queste considerazioni ci permettono di comprendere più chiaramente gli stati di polarizzazione della luce rappresentati dalla doppia superficie d'onda della figura 14. Per la superficie d'onda (sferica) *o*, le vibrazioni del vettore **E** debbono essere in ogni punto perpendicolari all'asse ottico. Se ciò accade, si ha sempre la stessa costante elastica k_o, e le onde *o* viaggiano con la stessa velocità in tutte le direzioni. Più in dettaglio, se nella figura 14 tracciamo un raggio da S alla superficie d'onda *o*, considerata in tre dimensioni (ossia una sfera), le vibrazioni del vettore **E** saranno sempre perpendicolari al piano definito da questo raggio e dall'asse ottico. Così queste vibrazioni saranno sempre ortogonali all'asse ottico.

Per la superficie d'onda (ellissoidale) *e*, le vibrazioni del vettore **E** hanno in generale una componente parallela all'asse ottico. Per raggi come *Sa* nella figura 14 e per i raggi *e* della figura 15*b*, le vibrazioni sono completamente parallele a questo asse. Così (nella calcite) si avrà una costante elastica k_e relativamente elevata e la velocità v_e dell'onda sarà relativamente alta. Per i raggi *e*, come *Sb* nella figura 14, la componente parallela delle vibrazioni del vettore **E** è inferiore al 100%, cosicché la velocità dell'onda corrispondente è inferiore a v_e. Per il raggio *Sc* della figura 14 la componente parallela è zero e la distinzione fra i raggi *o* ed *e* scompare. ■

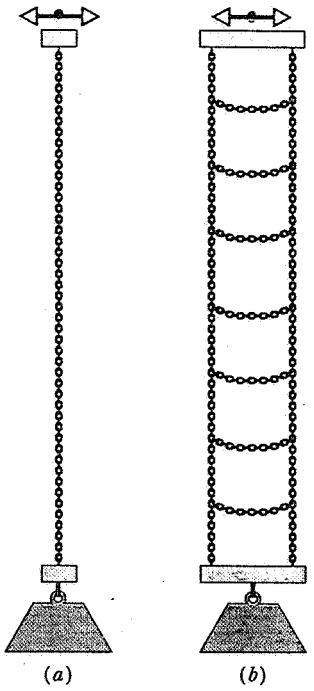


Figura 16 Un modello meccanico monodimensionale per la birifrangenza. (*a*) Vibrazione perpendicolare al piano della catena. (*b*) Vibrazione nel piano della catena.

48-5 POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

Consideriamo una luce polarizzata linearmente, di pulsazione ω ($= 2\pi\nu$), che incide normalmente su una lamina di calcite, tagliata in modo che l'asse ottico sia

ISBN 88-408-0777-2

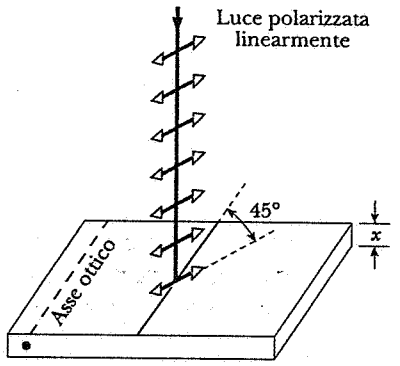


Figura 17 Una luce polarizzata linearmente incide su una lastra birifrangente tagliata in modo che l'asse ottico sia parallelo alla superficie. Il piano di polarizzazione forma un angolo di 45° con l'asse ottico.

parallelo alla faccia della lamina, come nella figura 17. Le due onde emergenti saranno polarizzate linearmente su piani perpendicoli tra di loro e, se il piano di vibrazione dell'onda incidente forma un angolo di 45° rispetto all'asse ottico, esse avranno ampiezze uguali. Poiché le onde si propagano all'interno del cristallo a velocità diverse, quando ne emergono esisterà fra esse una differenza di fase ϕ. Se si sceglie lo spessore del cristallo in modo che (per una data frequenza della luce) sia $\phi = 90°$, la lamina è detta *a quarto d'onda* e la luce emergente si dice *polarizzata circolarmente.*

Nel paragrafo 15-7 abbiamo visto che due onde polarizzate linearmente e oscillanti in piani perpendicolari fra loro, con uno sfasamento di 90°, si possono rappresentare come proiezioni su due assi perpendicolari di un vettore rotante con pulsazione ω attorno alla direzione di propagazione. Queste due descrizioni della luce polarizzata circolarmente sono del tutto equivalenti. La figura 18 chiarisce il nesso tra le due descrizioni.

Si immagini una luce polarizzata circolarmente, come quella di figura 18, che incide su una lamina polarizzante. Quando ne emerge si trova polarizzata linearmente. Calcoliamone l'intensità. La luce polarizzata circolarmente, quando entra nella lamina, può essere rappresentata da

$$E_y = E_m \operatorname{sen}\omega t \quad \text{e} \quad E_z = E_m \cos\omega t, \tag{4}$$

dove y e z rappresentano assi perpendicolari arbitrari per un'onda che si propaga nella direzione x. Queste equazioni rappresentano l'equivalenza tra un'onda polarizzata circolarmente e due onde, polarizzate linearmente, con uguale ampiezza e differenza di fase pari a 90°. L'intensità risultante I_{cp} dell'onda incidente polarizzata circolarmente è proporzionale a $E^2 = E_y^2 + E_z^2$, che è pari a E_m^2 quando le componenti del campo elettrico sono date dall'equazione 4. Quindi

$$I_{cp} \propto E_m^2. \tag{5}$$

Supponendo che la direzione di polarizzazione della lamina formi un angolo generico θ con l'asse y, come si vede nella figura 19, l'ampiezza istantanea dell'onda polarizzata linearmente trasmessa dalla lamina è

$$\begin{aligned} E &= E_z \operatorname{sen}\theta + E_y \cos\theta \\ &= E_m \cos\omega t \operatorname{sen}\theta + E_m \operatorname{sen}\omega t \cos\theta \\ &= E_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta). \end{aligned} \tag{6}$$

L'intensità dell'onda trasmessa dalla lamina è propor-

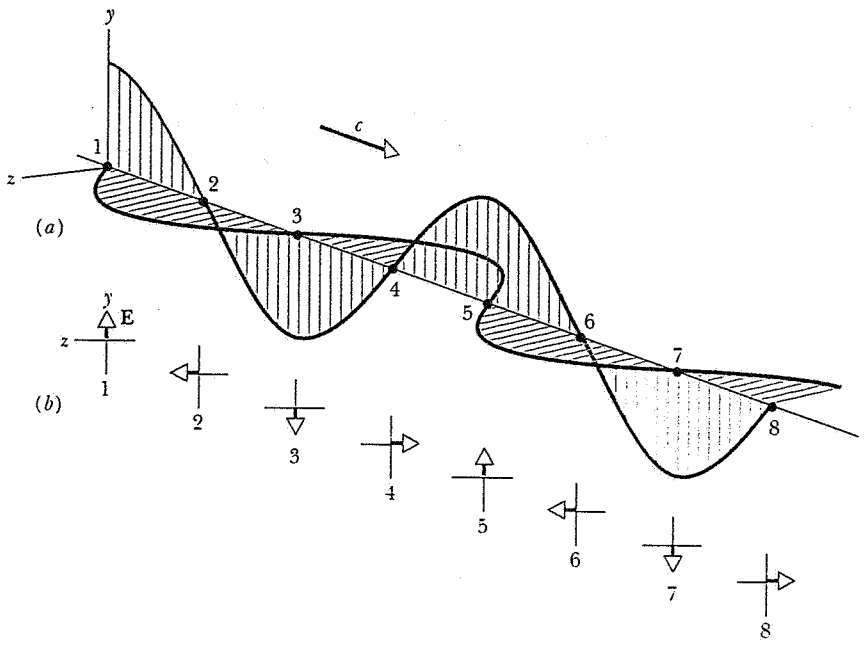


Figura 18 (*a*) Due onde di uguale ampiezza e polarizzate linearmente in direzioni perpendicolari si muovono nella direzione x. Sono indicati solo i vettori **E**. Le onde sono sfasate di 90°, di modo che il massimo dell'una coincide con l'annullamento dell'altra. (*b*) L'ampiezza risultante dell'onda così come vista dagli osservatori posti nelle posizioni numerate indicate lungo l'asse x. Si noti che, all'avanzare dell'onda, ciascun osservatore vede in un istante successivo ciò che aveva visto prima l'osservatore precedente. Per esempio, dopo un intervallo di tempo pari a un quarto di ciclo successivo al momento in cui è stata fissata questa immagine, le condizioni qui mostrate per l'osservatore 7 si verificheranno per l'osservatore 8. Il vettore **E** risultante sembra a ciascun osservatore ruotare in senso orario col passare del tempo.

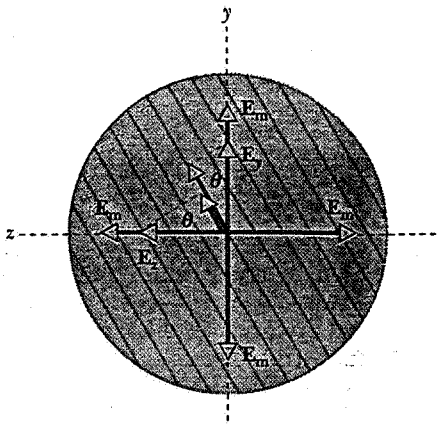


Figura 19 Una luce polarizzata circolarmente incide su una lamina polarizzante. E_y ed E_z sono valori istantanei delle due componenti, che hanno valore massimo E_m.

zionale a E^2, ovvero

$$I \propto E_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \theta). \tag{7}$$

L'occhio e gli altri strumenti di misura sono sensibili solo all'intensità media $\bar{I}$, che si trova sostituendo a $\operatorname{sen}^2(\omega t + \theta)$ il suo valore medio calcolato su uno o più cicli ($= \frac{1}{2}$), ossia

$$\bar{I} \propto \tfrac{1}{2} E_m^2. \tag{8}$$

Il confronto con l'equazione 5 dimostra che l'inserimento della lamina polarizzante dimezza l'intensità. L'orientamento della lamina non influisce sul fenomeno, dato che θ non appare nell'equazione. Ciò è naturale se si rappresenta la luce polarizzata circolarmente con un vettore rotante, dato che tutti gli orientamenti intorno alla direzione di propagazione sono equivalenti. Quando una luce non polarizzata incide su una lamina polarizzante, l'intensità della luce trasmessa viene ridotta ugualmente alla metà, indipendentemente dall'orientamento della lamina, sicché per distinguere tra luce non polarizzata e luce polarizzata circolarmente non si può far uso di una semplice lamina polarizzatrice. Per distinguere una luce polarizzata circolarmente da una luce non polarizzata si può usare una lamina a quarto d'onda. Si supponga che una luce polarizzata circolarmente incida su una lamina a quarto d'onda con asse ottico orientato in modo casuale. Le componenti della luce incidente parallela e perpendicolare alla direzione dell'asse ottico sono sfasate di 90°. Attraversando la lamina a quarto d'onda viene introdotto un'*ulteriore* sfasamento di 90°, che si può o sommare o sottrarre alla precedente differenza di fase, a seconda dell'orientamento dell'asse della lamina a quarto d'onda. Lo sfasamento complessivo che ne risulta è quindi 0° o 180°; vale a dire che le componenti del campo elettrico lungo due assi perpendicolari raggiungono il loro valore massimo nel medesimo istante. Il vettore campo elettrico totale E è la somma di questi due vettori e forma un angolo di 45° con le due componenti. La luce che emerge è quindi polarizzata linearmente in una direzione che forma un angolo di $\pm 45°$ con l'asse ottico, cosa che potremmo verificare collocando una lamina polarizzante sul percorso della luce e ruotando la lamina fino a raggiungere la condizione di estinzione.

L'esperimento si svolge in effetti in maniera inversa rispetto al caso illustrato nella figura 17, in cui una luce polarizzata linearmente, che incide su una lamina a quarto d'onda, ne emerge dotata di polarizzazione circolare. Qui emerge invece luce con polarizzazione lineare da una lamina su cui incide luce polarizzata circolarmente. È questo un esempio di ciò che in natura viene chiamato *simmetria per inversione del tempo*; se invertiamo il senso di tutti i moti che si manifestano in una certa situazione fisica, il risultato deve essere pure una situazione fisica ammissibile. Sebbene certe forze molto deboli, che agiscono tra particelle elementari, non seguano questo principio di simmetria, tutte le altre forza conosciute, comprese l'elettromagnetismo e la gravità, rispondono rigorosamente alla simmetria per inversione del tempo.

Esempio 3 Si necessita di una lamina a quarto d'onda di quarzo da usare con luce al sodio ($\lambda = 589$ nm). Quale deve essere il suo spessore minimo?

Soluzione Attraverso la lastra si propagano due onde con velocità corrispondenti ai due indici di rifrazione principali dati nella tabella 1 ($n_e = 1.553$ e $n_o = 1.541$). Detto x lo spessore del cristallo, il numero di lunghezze d'onda N_e della prima onda contenute nel cristallo è

$$N_e = \frac{x}{\lambda_e} = \frac{x n_e}{\lambda},$$

dove λ_e è la lunghezza d'onda dell'onda e nel cristallo e λ è la lunghezza d'onda in aria. Per l'altra onda il numero di lunghezze d'onda N_o è

$$N_o = \frac{x}{\lambda_o} = \frac{x n_o}{\lambda},$$

dove λ_o è la lunghezza d'onda dell'onda o nel cristallo. La differenza $N_e - N_o$ deve essere pari a $m \pm \frac{1}{4}$, ove $m = 0, 1, 2, \ldots$. Si avrà lo spessore minimo quando $m = 0$, nel qual caso

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{\lambda}(n_e - n_o).$$

Questa equazione dà come risultato

$$x = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} = \frac{589 \text{ nm}}{(4)(1.553 - 1.544)} = 0.016 \text{ mm}.$$

ISBN 88-408-0777-2

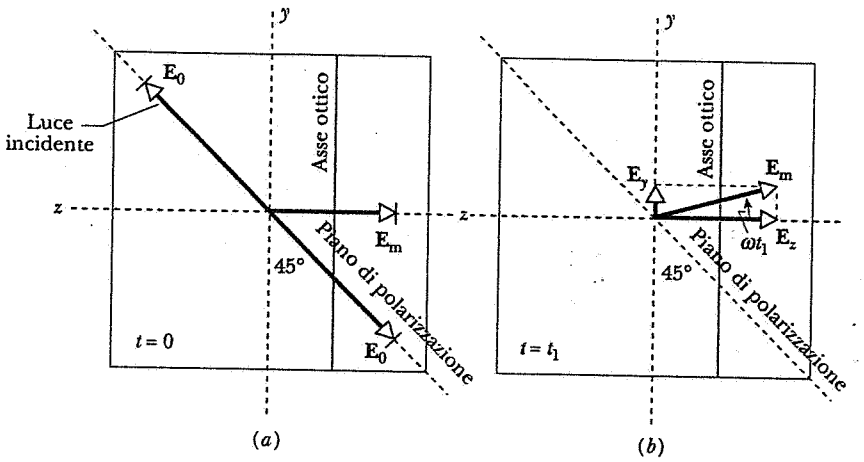


Figura 20 Esempio 4. Una luce polarizzata linearmente incide (provenendo dal retro della pagina) su una lamina a quarto d'onda. La luce incidente è polarizzata a 45° rispetto agli assi y e z. (*a*) All'istante particolare $t = 0$ il vettore **E** emergente è diretto in verso opposto alla direzione z. (*b*) Un istante più tardi t_1, il vettore è ruotato in una nuova posizione. In questo caso il vettore **E** ruota in senso antiorario, se osservato dall'alto lungo l'asse x.

Questa lamina è piuttosto sottile: la maggior parte delle lamine a quarto d'onda sono fatte di mica, sfaldando per tentativi la lamina fino allo spessore giusto.

Esempio 4 Un'onda luminosa di ampiezza E_0 polarizzata linearmente incide su una lamina a quarto d'onda di calcite. Il piano di vibrazione forma un angolo di 45° rispetto all'asse ottico della lamina, assunto come asse y; si veda la figura 20. La luce emergente è polarizzata circolarmente. In che verso ruoterà il vettore elettrico? Il verso di propagazione è uscente dal piano del foglio.

Soluzione La componente dell'onda le cui vibrazioni sono parallele all'asse ottico (onda *e*) si può rappresentare all'istante in cui emerge dalla lamina nel modo seguente:

$$E_y = (E_0 \cos 45°) \operatorname{sen}\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \operatorname{sen}\omega t = E_m \operatorname{sen}\omega t.$$

La componente dell'onda le cui vibrazioni sono perpendicolari all'asse ottico (onda *o*) si può rappresentare così

$$E_z = (E_0 \operatorname{sen} 45°) \operatorname{sen}(\omega t - 90°) = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 \cos\omega t$$
$$= -E_m \cos\omega t,$$

dove lo sfasamento di 90° rappresenta l'azione della lamina a quarto d'onda. Si osservi che E_z raggiunge il suo valore massimo un quarto di ciclo *dopo* E_y, poiché, nella calcite, l'onda di ampiezza E_z (onda *o*) si propaga *più lentamente* dell'onda di ampiezza E_y (onda *e*).

Per stabilire il verso di rotazione, troviamo la posizione dell'estremità del vettore elettrico rotante in due istanti di tempo, $t = 0$ (fig. 20*a*) e un istante successivo t_1 scelto in modo che ωt_1 sia un angolo piccolo. Per $t = 0$ le coordinate dell'estremità del vettore rotante (fig. 20*a*) sono

$$E_y = 0 \quad \text{e} \quad E_z = -E_m.$$

Nell'istante $t = t_1$, queste componenti diventano approssimativamente

$$E_y = E_m \operatorname{sen}\omega t_1 \approx E_m \omega t_1,$$
$$E_z = -E_m \cos\omega t_1 \approx -E_m.$$

La figura 20*b* illustra come il vettore rappresentante la luce emergente polarizzata circolarmente ruoti in senso antiorario; tale luce per convenzione si definisce luce *polarizzata circolarmente sinistra*, dato che si considera sempre il caso di un osservatore posto di fronte alla sorgente luminosa.

Si verifichi che, se il piano di vibrazione della luce incidente, nella figura 20, è ruotato di $\pm 90°$, la luce emergente sarà *polarizzata circolarmente destra*.

48-6 DIFFUSIONE DELLA LUCE*

Un'onda luminosa, quando incide su un solido trasparente, provoca una vibrazione periodica degli elettroni contenuti nel solido, in concordanza con la variazione temporale del vettore elettrico dell'onda incidente. L'onda che si propaga attraverso il mezzo è la risultante dell'onda incidente e delle radiazioni prodotte dall'oscillazione degli elettroni. L'intensità luminosa dell'onda risultante è massima nella direzione del fascio incidente, mentre diminuisce rapidamente nelle altre direzioni. La mancanza di diffusione laterale, che sarebbe praticamente completa in un cristallo «perfetto» di grandi dimensioni, si verifica in quanto le cariche oscillanti nel mezzo agiscono in cooperazione, ovvero coerentemente. Quando la luce passa attraverso un liquido o un gas, si osserva una diffusione laterale molto più pronunciata. In questo caso gli elettroni oscillanti, essendo separati da distanze relativamente grandi e non legati insieme in una struttura rigida, agiscono indipendentemente invece che in cooperazione. Così è meno probabile che si abbia il completo annullamento delle perturbazioni ondulatorie che non si

* Il termine *diffusione* può indurre in equivoco perché in fisica viene usato per due accezioni differenti. In quest'ambito ha il significato di «deviazione, dispersione, sparpagliamento», mentre in fisica molecolare e dei gas ha il significato di «espansione, spandimento». In inglese le due nozioni sono designate con vocaboli diversi: *scattering* e *diffusion*, rispettivamente [N.d.T.].

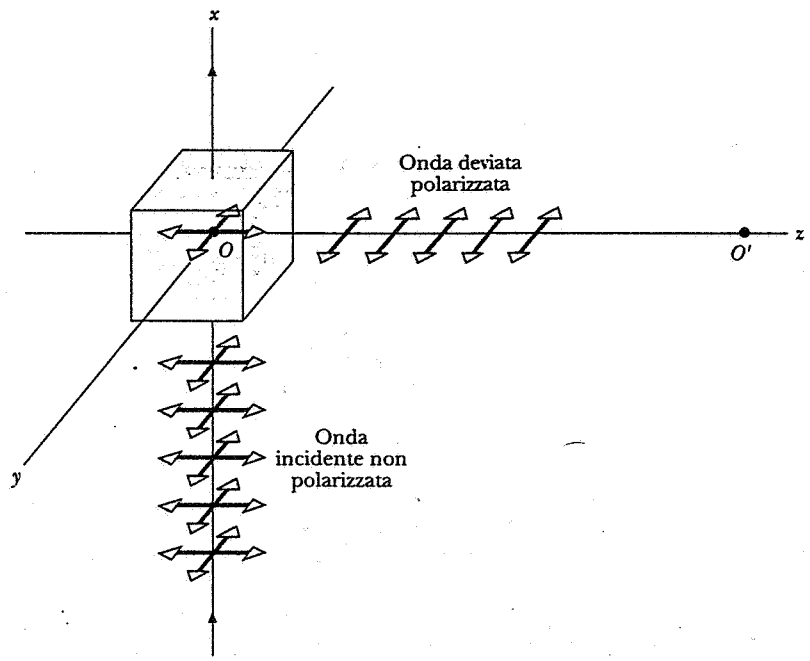


Figura 21 Un'onda incidente non polarizzata viene deviata da un atomo nel punto O. L'onda deviata verso O' nella direzione dell'asse z è polarizzata linearmente.

propagano nella direzione di avanzamento; la diffusione laterale è maggiore.

La luce diffusa lateralmente da un gas può essere totalmente o parzialmente polarizzata, anche se la luce incidente non è polarizzata. La figura 21 mostra un fascio non polarizzato che avanza verso l'alto nel piano della pagina e colpisce un atomo di gas in O. Gli elettroni in O oscillano in risposta alle componenti elettriche dell'onda incidente, con moto equivalente a quello di due dipoli oscillanti i cui assi sono diretti come y e z nel punto O. Essendo le onde elettromagnetiche trasversali, un dipolo oscillante non irraggia parallelamente al proprio asse, cosicché un osservatore in O' non riceverà alcuna radiazione dal dipolo posto in O, vibrante nella direzione z. La radiazione che lo raggiunge proviene interamente dal dipolo oscillante in O lungo la direzione y e sarà quindi linearmente polarizzata.

Man mano che l'osservatore O' si allontana dall'asse z, la radiazione risulta polarizzata sempre meno nettamente, poiché il dipolo oscillante in O lungo l'asse z comincia a far sentire il suo effetto, in queste direzioni non più nullo. In tutti i punti lungo l'asse x la radiazione trasmessa ($x > 0$) o diffusa all'indietro ($x < 0$) non è polarizzata, dato che entrambi i dipoli irraggiano ugualmente bene nella direzione x.

Un esempio comune è quello della diffusione della luce solare da parte delle molecole dell'atmosfera terrestre. Se l'atmosfera non esistesse, il cielo apparirebbe nero, eccetto che guardando direttamente verso il sole: cosa ben nota agli astronauti, che orbitano al di fuori dell'atmosfera. Si può verificare facilmente con un polarizzatore che la luce proveniente dal cielo sereno è polarizzata almeno parzialmente. Questa proprietà viene utilizzata nelle *bussole solari*, impiegate nelle esplorazioni polari. Con questo strumento si stabilisce la direzione osservando la natura della polarizzazione della luce solare diffusa. Come è ben noto in queste regioni non sono utilizzabili le bussole magnetiche. Si è osservato che le api,* nei voli fra l'alveare e le sorgenti di polline, si orientano per mezzo della polarizzazione della luce proveniente dal cielo; negli occhi delle api sono incorporati organi sensibili alla polarizzazione.

Rimane ancora da spiegare perché la luce diffusa proveniente dal cielo è prevalentemente blu e perché la luce ricevuta direttamente dal sole – particolarmente al tramonto, quando lo spessore di atmosfera da attraversare è maggiore – è rossa. La sezione d'urto di diffusione della luce da parte di un atomo o di una molecola dipende dalla lunghezza d'onda: la luce blu è diffusa maggiormente della rossa. Siccome la componente blu della luce solare viene in gran parte diffusa, la luce trasmessa direttamente ha il colore del normale spettro solare al quale sia stata sottratta in larga misura la componente blu; pertanto appare più rossiccia.

Ci si può rendere conto, tramite un'analogia meccanica, del fatto che la sezione d'urto di diffusione della luce blu sia più elevata di quella della luce rossa. Un elettrone è legato a un atomo o a una molecola da intense forze di richiamo. Esso ha una frequenza naturale definita, come avviene per una piccola massa appe-

* Si veda Wehner R., *L'orientamento degli insetti mediante luce polarizzata*, «Le Scienze», 99:78.

ISBN 88-408-0777-2

sa nel vuoto a un complesso di molle. La frequenza naturale degli elettroni negli atomi e nelle molecole si trova di solito in una regione corrispondente a quella della luce violetta o ultravioletta.

La luce che investe questi elettroni legati dà origine a oscillazioni forzate della stessa frequenza del fascio luminoso incidente. Nel caso di sistemi meccanici risonanti è possibile «eccitare» il sistema con più efficacia, se si imprime ad esso una forza oscillante esterna la cui frequenza sia vicina il più possibile alla frequenza di risonanza propria del sistema. Nel caso della luce, quella blu è più vicina alla frequenza risonante naturale dell'elettrone legato, di quanto sia invece quella rossa. Perciò ci aspettiamo che la luce blu sia più efficace nel determinare l'oscillazione dell'elettrone e pertanto essa sarà maggiormente diffusa.

Doppia diffusione *(Facoltativo)*

Si può dimostrare che le onde elettromagnetiche devono essere trasversali, attraverso esperimenti simili a quello illustrato nella figura 21. Ciò equivale a provare che il vettore **E** non ha componenti parallele alla direzione di propagazione. Si supponga che esista una tale componente lungo la direzione dell'onda incidente (direzione x nella figura 21). Gli elettroni in O oscillerebbero in tal caso in tutte e tre le direzioni e le onde diffuse che raggiungono O' mostrerebbero tutte e tre le direzioni di polarizzazione possibili (due trasversali e una longitudinale). La radiazione sarebbe quindi non polarizzata. Se l'onda incidente è invece solo trasversale, come nella figura 21, la radiazione che giunge in O' risulta polarizzata linearmente. La questione sulla natura trasversale delle onde elettromagnetiche si risolve quindi nel determinare se la radiazione che raggiunge O' è polarizzata o no.

C'è un altro modo per giungere a questa determinazione. Collochiamo un secondo diffusore in O'. Un dipolo esistente in O' oscillerà in risposta all'onda incidente (polarizzata) in una sola direzione (quella dell'asse y, che corrisponde alla direzione del vettore incidente **E**, come si vede nella figura 22). La radiazione diffusa da questo dipolo può propagarsi nella direzione $\pm x'$, ma (se è trasversale) non nella direzione y'. In tal modo un rivelatore D, che misuri l'*intensità* di radiazione, dovrebbe registrare un massimo nella direzione $\pm x'$ e un minimo di intensità nella direzione y'. Questo esperimento, illustrato nella figura 22, è chiamato della *doppia diffusione*. Si noti che, mediante una misura di *intensità* della radiazione diffusa dal secondo bersaglio, si determina lo stato di *polarizzazione* della radiazione diffusa dal primo bersaglio. Se la radiazione che giunge in O' non fosse polarizzata (e quindi non esclusivamente trasversale), il rivelatore D misurerebbe la stessa intensità in tutte le direzioni.

Si può stabilire la natura trasversale della radiazione elettromagnetica sia misurando la polarizzazione della radiazione diffusa dal primo bersaglio (come nella figura 21), sia misurando la distribuzione d'intensità di radiazione diffusa dal secondo bersaglio (come nella figura 22). Per alcuni tipi di radiazione, come la luce, la polarizzazione è un parametro relativamente facile da determinare e quindi il metodo della doppia diffusione non porta grande vantaggio. Per altri tipi di radiazione, come i raggi X o i raggi γ), la doppia diffusione è il metodo generalmente preferito. Dopo la scoperta dei raggi X nel 1898, si disputò invero se si trattasse di onde o di particelle. Charles Barkla nel 1906, tramite un esperi-

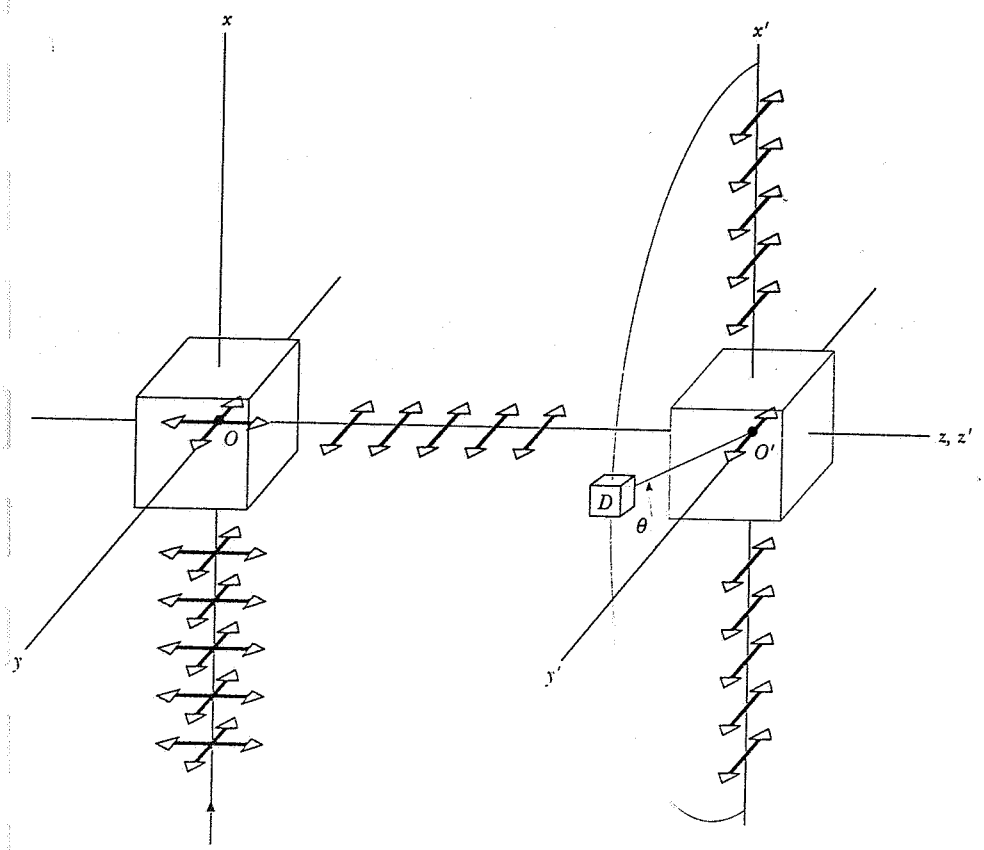


Figura 22 La radiazione polarizzata diffusa in O può essere deviata da un altro atomo in O'. Un rivelatore D misura l'intensità della radiazione diffusa da O' in varie posizioni θ del piano $x'y'$.

mento di doppia diffusione, stabilì che i raggi X, come la radiazione visibile, presentavano natura trasversale e contribuì a confermare che essi fanno parte dello spettro elettromagnetico. ■

48-7 LIMITI QUANTISTICI

In questo capitolo abbiamo descritto alcune proprietà delle onde elettromagnetiche, come la polarizzazione e la diffusione, basando la nostra descrizione sull'aspetto ondulatorio del fenomeno. Per un'analisi alternativa e complementare potremmo considerare l'aspetto quantistico, in cui le proprietà della radiazione non sono connesse ai campi, ma ai quanti, cioè quantità discrete di energia (fotoni).

Come esempio, riprendiamo la *quantità di moto* associata a un'onda di luce monocromatica. Nel paragrafo 41-5 si è visto che l'assorbimento da parte di un oggetto dell'energia U trasmessa da un'onda luminosa è accompagnato da una cessione all'oggetto di una quantità di moto P, ove P e U sono legati dalla relazione

$$P = \frac{U}{c}, \tag{9}$$

in cui c rappresenta la velocità della luce. In antitesi al punto di vista ondulatorio, possiamo considerare la luce come un flusso di fotoni, ciascuno dei quali trasporta un'energia E. Il fotone è una particella priva di massa, la cui energia, data dall'equazione 32 del capitolo 21, è $E = pc$, sicché la quantità di moto p associata a ciascuna particella (fotone) è data da

$$p = \frac{E}{c}. \tag{10}$$

Il confronto tra le equazioni 9 e 10 suggerisce il nesso tra la rappresentazione a onde e quella a particelle, ovverosia tra l'ambito della fisica classica (non quantistica) e quello della fisica quantistica. L'assorbimento di energia U ceduta da un'onda luminosa viene raggiunto con l'assorbimento di molti fotoni singoli, ciascuno di energia E, da parte degli atomi dell'oggetto. Analogamente, la quantità di moto P ceduta all'oggetto dall'onda luminosa può essere analizzata in termini delle singole quantità di moto p cedute ai singoli atomi dai fotoni del fascio luminoso.

In modo simile l'assorbimento di una luce polarizzata *circolarmente* può imprimere un momento *angolare* a un oggetto. L'elettromagnetismo classico fornisce la seguente relazione tra l'energia U e il momento angolare L:

$$L = \frac{U}{\omega}. \tag{11}$$

dove ω rappresenta la pulsazione dell'onda. Secondo la meccanica quantistica, l'energia E di un fotone si può scrivere (equazione 38 del capitolo 8, $\Delta E = h\nu$)

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi}\omega, \tag{12}$$

dove h è la costante di Planck. Nel paragrafo 13-6 abbiamo visto come $h/2\pi$ rappresenti l'unità quantistica fondamentale del momento angolare, cui attribuiamo ora il simbolo l. Di conseguenza l'equazione 12 si può scrivere

$$l = \frac{E}{\omega}. \tag{13}$$

In ambito quantistico, quando un atomo assorbe un fotone di energia E, il suo momento angolare subisce una variazione pari a l. Dal confronto tra le equazioni 11 e 13 scaturisce il legame tra la descrizione classica e quella quantistica. Il momento angolare totale L acquisito dall'oggetto può essere visto come la somma netta dei quanti, di momento angolare l, ricevuti dai singoli atomi.

La fisica classica, compresa la descrizione ondulatoria della radiazione elettromagnetica, funziona perfettamente nell'analisi di un'ampia classe di fenomeni, tra cui la diffrazione, la polarizzazione e la diffusione. Per spiegare questi effetti non è necessario introdurre la teoria quantistica, per quanto essa sia in grado di spiegarli egualmente bene nella maggior parte dei casi, come si è visto in questo paragrafo. Per esempio, l'esperienza della doppia diffusione dei raggi X, effettuata da Barkla e discussa nel paragrafo precedente, può essere interpretata anche con un approccio quantistico, se assegniamo a ciascun fotone un momento angolare intrinseco («spin») e imponiamo che i singoli fotoni abbiano i loro spin allineati parallelamente o antiparallelamente alla loro direzione di avanzamento. Ed è questo in effetti il comportamento previsto per i fotoni dalla teoria dei quanti.

Questa antitesi, tra la rappresentazione a onde e quella a particelle, dei fenomeni associati alle onde elettromagnetiche risale ai tempi di Newton, il quale cercò di spiegare la rifrazione descrivendo la luce come un flusso di particelle. Ma in definitiva, gli esperimenti di interferenza e diffrazione, presentati nei capitoli 45 e 46, hanno condotto i fisici a preferire l'interpretazione ondulatoria.

A partire dall'inizio del 20° secolo, i risultati di una nuova classe di esperimenti hanno stravolto il punto di vista tradizionale sulle onde elettromagnetiche. L'effetto fotoelettrico (in cui una superficie metallica, irradiata con luce, emette elettroni) e quello di diffusione ideato da Compton (in cui si trova che la lunghezza d'onda della radiazione diffusa come nella figura 21

ISBN 88-408-0777-2

differisce dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente) non possono essere spiegati con l'approccio ondulatorio. Sono sorte poi ulteriori difficoltà ad accettare la fisica classica, quando si è scoperto che particelle tradizionali come gli elettroni mostrano, in talune circostanze, un comportamento simile a quello ondulatorio. La teoria quantistica, sviluppata negli anni '20, offre una spiegazione alternativa per tutti questi casi in cui l'interpretazione classica è venuta meno e sottolinea le funzioni complementari che svolgono l'approccio ondulatorio e la rappresentazione a particelle. I capitoli successivi, dal 49 al 56, presentano un'introduzione alla teoria quantistica e ad alcune delle sue molte applicazioni, spaziando dalla teoria dei quark sulla struttura delle particelle elementari fino all'origine e all'evoluzione dell'universo.

DOMANDE

1. Si è detto che la luce delle sorgenti ordinarie non è polarizzata. Sapete citare qualche sorgente comune che emetta luce polarizzata?
2. La luce prodotta da un tubo a scarica in gas, usato in laboratorio, non è polarizzata. Come si concilia col fatto che gli atomi e le molecole irraggiano come dipoli elettrici, i quali invece sono sorgenti di radiazione polarizzata?
3. Le lamine polarizzanti contengono lunghe catene molecolari di idrocarburi che vengono allineate in serie parallele durante il processo produttivo. Si spieghi come una lamina polarizzante sia in grado di polarizzare la luce. (*Suggerimento*: Gli elettroni sono relativamente liberi di muoversi lungo queste catene.)
4. Come possiamo verificare tutti i giorni, le onde radio sono quasi sempre polarizzate mentre la radiazione visibile non lo è quasi mai. Come si spiega questa differenza?
5. Come si stabiliscono la lunghezza e l'orientamento desiderabili per l'antenna telescopica a V di un apparecchio televisivo portatile?
6. Perché le onde acustiche non sono polarizzate?
7. Si supponga che entrambe le fenditure della figura 4 nel capitolo 45 siano coperte con lamine polarizzanti e che le direzioni di polarizzazione delle due lamine siano perpendicolari tra di loro. Com'è la figura di distribuzione dell'intensità di luce sullo schermo? (La luce incidente non è polarizzata.)
8. Perché gli occhiali da sole fatti di materiali polarizzanti sono molto più vantaggiosi di quelli basati semplicemente su effetti di assorbimento? Che svantaggi possono presentare?
9. Luce non polarizzata incide su due lamine polarizzanti orientate in modo che non venga trasmessa luce. Se si interpone una terza lamina fra di esse, la luce può essere trasmessa? Se sì, si spieghi come.
10. L'esempio 1 dimostra che, quando l'angolo tra due direzioni di polarizzazione viene ruotato da 0° a 45°, l'intensità del fascio trasmesso si riduce a metà del valore iniziale. Che sorte subisce la rimanente porzione di energia?
11. Avete a disposizione numerose lamine polarizzanti. Dite come le usereste per ruotare il piano di polarizzazione di un'onda polarizzata linearmente di un qualsiasi angolo assegnato. Come potreste ottenere lo scopo con la minima perdita di energia?
12. I film in tre dimensioni erano popolari all'inizio degli anni '50. Gli spettatori portavano occhiali polarizzatori e davanti a ognuno dei *due* proiettori necessari veniva posta una lamina polarizzante. Spiegare come funzionava questa invenzione. Siete capaci di elencare qualche difficoltà che portò ben presto ad abbandonare tale sistema?
13. Una maglia di fili disposti parallelamente uno all'altro può polarizzare un fascio incidente non polarizzato di onde elettromagnetiche, che la attraversi. Spiegare i seguenti fatti: (*a*) il diametro dei fili e la loro distanza devono essere di molto inferiori alla lunghezza d'onda incidente per ottenere una polarizzazione efficace, (*b*) la componente trasmessa ha il campo elettrico che vibra in direzione perpendicolare ai fili.
14. La legge di Brewster (eq. 2) determina l'angolo di polarizzazione nel fenomeno di riflessione sulla superficie di un dielettrico, come il vetro; si veda la figura 10. Si può ragionevolmente interpretare che la componente parallela al piano di incidenza è nulla perché le cariche del dielettrico vengono fatte oscillare parallelamente al raggio riflesso da questa componente e non producono radiazione in questa direzione. Spiegare il fenomeno e commentarne la plausibilità.
15. Si spieghi come si può avere polarizzazione per riflessione, se la luce incidente proviene dal mezzo che ha l'indice di rifrazione più elevato (dal vetro all'aria, per esempio).
16. Trovare un metodo per identificare la direzione di polarizzazione di una lamina polarizzante, sui cui non appaiono segni di riferimento.
17. L'asse ottico di un cristallo birifrangente è semplicemente una retta o una retta orientata nello spazio? Ha un verso, come una freccia? Che cosa si può dire circa l'orientazione caratteristica di una lamina polarizzante?
18. Se il ghiaccio è birifrangente (tav. 1), perché guardando attraverso un cubo di ghiaccio non si vedono due immagini degli oggetti osservati?
19. È possibile produrre effetti di interferenza tra il fascio *o* e il fascio *e*, prodotti da un cristallo di calcite sul fascio incidente non polarizzato della figura 13, facendoli ricombinare? Dare una giustificazione alla risposta.
20. Scorrendo la tabella 1, vi aspettereste che una lamina a quarto d'onda ricavata dalla calcite sia più spessa di una ricavata dal quarzo?
21. L'onda *e* nei cristalli birifrangenti viaggia sempre a una velocità data da c/n_e?
22. Descrivere qualitativamente cosa accade nelle figure 15*a* e 15*b*, se il fascio incidente giunge sul cristallo con un angolo di incidenza diverso da zero. In entrambi i casi si faccia l'ipotesi che il fascio incidente rimanga nel piano della figura.
23. Trovare un modo per identificare la direzione dell'asse ottico in una lamina a quarto d'onda.
24. Descrivere che tipo di luce viene trasmessa da una lamina a quarto d'onda investita da luce polarizzata linearmente, quando il piano di vibrazione forma un angolo di (*a*) 0° o (*b*) 90° con l'asse della lamina. (*c*) Se si sceglie arbitrariamente

quest'angolo, la luce trasmessa si dice *polarizzata ellitticamente*; si descriva tale tipo di luce.

25. Sia dato un oggetto che può essere (*a*) un disco di vetro grigio, (*b*) una lamina polarizzante, (*c*) una lamina a quarto d'onda, ovvero (*d*) una lamina a mezz'onda (vedi problema 21). Come si può identificarlo?
26. Si può rappresentare un'onda luminosa polarizzata linearmente come somma di due fasci luminosi polarizzati circolarmente con versi di rotazione opposti? Che effetto ha sul fascio risultante la variazione della fase di una delle componenti circolari?
27. Si può polarizzare circolarmente un fascio di onde radar?
28. Come si può trasformare un fascio di luce polarizzata circolarmente destra in uno di luce polarizzata circolarmente sinistra?
29. Vi informano che un certo fascio di luce può essere non polarizzato, polarizzato linearmente, o polarizzato circolarmente. Come potreste decidere sperimentalmente quale di queste possibilità è quella esatta?
30. Un fascio parallelo di luce è assorbito da un oggetto posto sul suo cammino. In quali circostanze sarà trasferito all'oggetto (*a*) una quantità di moto o (*b*) un momento angolare?
31. Osservando il cielo sereno attraverso una lamina polarizzante, si osserva che l'intensità varia ruotando la lamina. Ciò non accade quando, attraverso la lamina, si osserva una nube. Sapreste dare una spiegazione di questo fatto?
32. Nel 1949 si scoprì che la luce proveniente da stelle lontane della nostra galassia è leggermente polarizzata linearmente e il piano preferenziale di vibrazione è parallelo al piano della nostra galassia. Ciò è dovuto probabilmente alla diffusione anisotropa della luce stellare da parte di granuli interstellari allungati e leggermente allineati (si veda il problema 31 del capitolo 24). Se i grani sono orientati con il loro asse maggiore parallelo alle linee del campo magnetico interstellare, come descritto nel paragrafo 48-2, e assorbono ed emettono onde elettromagnetiche come gli elettroni oscillanti di un'antenna radio, come deve essere orientato il campo magnetico rispetto al piano della galassia?
33. Si verifichi che l'equazione 11 è dimensionalmente corretta.
34. Per identificare un'onda, va meglio un esperimento di polarizzazione o di interferenza? Essi danno le stesse informazioni?

PROBLEMI

Paragrafo 48-1 Polarizzazione

1. Le equazioni del campo magnetico per un'onda elettromagnetica nel vuoto sono: $B_x = B \text{ sen } (ky + \omega t)$, e $B_y = B_z = 0$. (*a*) Qual è la direzione di propagazione? (*b*) Si scrivano le equazioni del campo elettrico. (*c*) L'onda è polarizzata? Se lo è, in che direzione?
2. Dimostrare che due onde di uguale ampiezza polarizzate linearmente, i cui piani di vibrazione sono perpendicolari tra di loro, non possono dare effetti di interferenza. (*Suggerimento*: Dimostrare che l'intensità dell'onda luminosa risultante, mediata su uno o più cicli di oscillazione, è la stessa indipendentemente dalla differenza di fase esistente tra le due onde.)

Paragrafo 48-2 Lamine polarizzanti

3. Un fascio di luce non polarizzata, avente intensità 12.2 mW/m^2 incide normalmente su una lamina polarizzante. (*a*) Trovare il valore massimo dell'ampiezza del campo elettrico del fascio trasmesso. (*b*) Calcolare la pressione di radiazione esercitata sulla lamina polarizzante.
4. Un fascio di luce non polarizzata incide su due lamine polarizzanti poste l'una sopra l'altra. Quale deve essere l'angolo fra le direzioni caratteristiche delle lamine perché l'intensità della luce trasmessa sia un terzo dell'intensità massima del fascio incidente? Si supponga che le lamine polarizzanti siano ideali, cioè che riducano l'intensità della luce non polarizzata esattamente del 50%.
5. Tre lastre polarizzanti si trovano accatastate. La prima e l'ultima sono incrociate tra di loro; l'asse di quella in mezzo forma un angolo di 45° con entrambe le altre due. Che frazione dell'intensità di un raggio incidente non polarizzato viene trasmessa dalla catasta?
6. Un fascio di luce polarizzata linearmente colpisce due lamine polarizzanti. La direzione caratteristica della prima lamina forma un angolo θ con la direzione del fascio incidente, mentre quella della seconda lamina forma con la stessa direzione un angolo di 90°. Trovare l'angolo θ per un'intensità del fascio trasmesso pari a 1/10 di quella del fascio incidente.
7. Un fascio di luce non polarizzata incide su un gruppo di quattro lamine polarizzanti sovrapposte e disposte in modo che la direzione caratteristica di ciascuna lamina sia ruotata di 30° in verso orario rispetto a quella della precedente. Quale frazione della intensità incidente viene trasmessa?
8. Abbiasi un fascio di luce, linearmente polarizzato nella direzione verticale, che incide normalmente su una lamina polarizzante, la cui direzione caratteristica forma un angolo di 58.8° con la verticale. Il fascio trasmesso raggiunge, sempre perpendicolarmente, una seconda lamina polarizzante, che presenta invece il piano di polarizzazione orizzontale. Sapendo che l'intensità del fascio originario è 43.3 W/m^2, si trovi l'intensità del fascio trasmesso dalla seconda lamina.
9. Si supponga che il fascio incidente del problema 8 non sia polarizzato. Quale diventa l'intensità del fascio trasmesso dalla seconda lamina?
10. Un fascio di luce è composto da una sovrapposizione di luce polarizzata rettilineamente e di luce non polarizzata. Quando viene inviato su una lente Polaroid si riscontra che l'intensità trasmessa può variare di un fattore 5 a seconda dell'orientamento della lente. Trovare le intensità relative di queste due componenti del fascio incidente.
11. Sulla spiaggia di una determinata località e in un dato giorno verso il tramonto, la componente orizzontale del vettore campo elettrico è 2.3 volte maggiore della componente verticale. Un bagnante sta in piedi vicino a riva e inforca a un certo punto occhiali Polaroid, che estinguono la componente orizzontale del campo elettrico. (*a*) Che frazione di energia luminosa ricevono i suoi occhi rispetto a quella ricevuta senza occhiali? (*b*) Il bagnante, sempre con gli occhiali, si sdraia adesso su un fianco, assumendo una posizione col capo perfettamente orizzontale. Che frazione di energia luminosa riceve ora, rispetto a quella ricevuta senza occhiali?

ISBN 88-408-0777-2

12. Si vuole ruotare di 90° il piano di polarizzazione di un fascio di luce polarizzata linearmente. (*a*) Come si può fare, usando solo lamine polarizzanti? (*b*) Quante lamine sono necessarie se si vuole che la perdita totale di intensità sia minore del 5.0%?

Paragrafo 48-3 Polarizzazione per riflessione

13. (*a*) A quale angolo di incidenza sarà completamente polarizzata la luce riflessa dall'acqua? (*b*) Questo angolo dipende dalla lunghezza d'onda della luce?
14. Un raggio di luce che si propaga in acqua, con indice di rifrazione 1.33, incide su una lastra di vetro il cui indice di rifrazione è pari a 1.53. A che angolo di incidenza viene polarizzata linearmente al completo la luce riflessa?
15. Calcolare l'intervallo in cui variano gli angoli di polarizzazione nel caso di luce bianca incidente su quarzo fuso. Si supponga che le lunghezze d'onda limite siano 400 nm e 700 nm e si usi la curva di dispersione della figura 4 nel capitolo 43.
16. Quando una luce rossa nel vuoto incide su una lastra di vetro con angolo pari all'angolo di Brewster, l'angolo di rifrazione risulta di 31.8°. Quanto valgono (*a*) l'indice di rifrazione del vetro e (*b*) l'angolo di Brewster?

Paragrafo 48-4 Birifrangenza

17. Luce polarizzata linearmente, di lunghezza d'onda pari a 525 nm, colpisce con incidenza normale un cristallo di wurtzite tagliato con le facce parallele all'asse ottico. Qual è il minimo spessore possibile del cristallo perché i raggi emergenti *o* ed *e* si combinino per formare luce polarizzata linearmente? Fare riferimento alla tabella 1.
18. Uno stretto fascio di luce non polarizzata incide su un cristallo di calcite, tagliato con l'asse ottico come si vede nella figura 23. (*a*) Per $t = 1.12$ cm e $\theta_i = 45°$, calcolare la distanza fra i due raggi emergenti x e y. (*b*) Qual è il raggio *o* e quale il raggio *e*? (*c*) Quali sono gli stati di polarizzazione dei raggi emergenti? (*d*) Descrivere che cosa accade se si interpone un polarizzatore sul cammino del fascio incidente e lo si ruota.

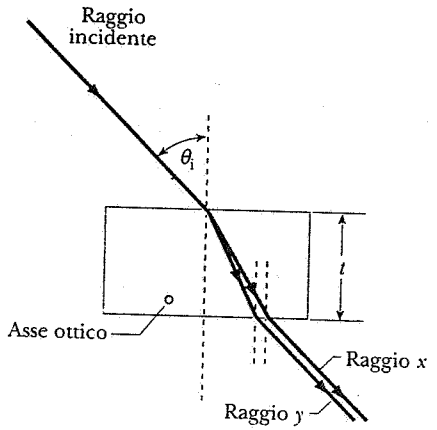


Figura 23 Problema 18.

(*Suggerimento*: Internamente al cristallo le vibrazioni del vettore **E** sono per un raggio sempre perpendicolari all'asse ottico e per l'altro sempre parallele. I due raggi sono descritti dagli indici di rifrazione n_o ed n_e: *in questo piano* ciascun raggio obbedisce alla legge di Snell.)

19. Un prisma di calcite è tagliato in modo che l'asse ottico sia parallelo allo spigolo come è mostrato nella figura 24. Descrivere come tale prisma potrebbe essere usato per misurare i due indici di rifrazione principali della calcite. (*Suggerimento*: Vedi il suggerimento al problema 18; vedi anche l'esempio 3 nel capitolo 43.)

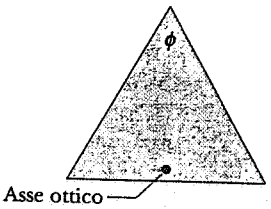


Figura 24 Problema 19.

Paragrafo 48-5 Polarizzazione circolare

20. Si trovi qual è il numero massimo di lamine a quarto d'onda, destinate a lavorare con luce di lunghezza d'onda pari a 488 nm, che potrebbe essere tagliato da un cristallo di dolomite spesso 0.250 mm. Si veda la tabella 1.
21. Quale dovrebbe essere l'effetto di una *lamina a mezz'onda* (cioè una lamina di spessore doppio di una lamina a quarto d'onda) su (*a*) luce polarizzata linearmente (supporre che il piano di vibrazione formi un angolo di 45° con l'asse ottico della lamina), (*b*) luce polarizzata circolarmente e (*c*) luce non polarizzata?
22. Un lamina polarizzante e una lamina a quarto d'onda sono incollati insieme in modo tale che si osservano i seguenti effetti: se l'insieme dei due pezzi è posto con la faccia *A* a contatto di una moneta luccicante, la faccia della moneta può essere vista quando viene illuminata con luce di opportuna lunghezza d'onda; quando il complesso è rovesciato con la faccia *A* dalla parte opposta della moneta, questa diventa invisibile. (*a*) Quale dei due pezzi è sulla faccia *A* e (*b*) qual è l'orientamento relativo delle due componenti?

Paragrafo 48-7 Limiti quantistici

23. Supponendo che un fascio parallelo di luce polarizzata circolarmente, di potenza pari a 106 W, sia assorbito da un oggetto, (*a*) qual è il valore della derivata temporale del momento angolare trasferito all'oggetto? (*b*) Se l'oggetto è un disco piatto di diametro pari a 5.20 mm e massa di 9.45 mg, libero di ruotare attorno al proprio asse, dopo quanto tempo raggiungerà la velocità di rotazione di 1.50 giri/s? Si faccia l'ipotesi che la lunghezza d'onda sia di 516 nm.

Capitolo 49

LUCE E FISICA DEI QUANTI

Fino ad ora abbiamo studiato le radiazioni – includendo non solo la luce, ma tutto lo spettro elettromagnetico – attraverso i fenomeni di riflessione, rifrazione, interferenza, diffrazione e polarizzazione, tutti effetti ben comprensibili quando si considera la radiazione come un'onda. L'evidenza sperimentale a favore di questo comportamento ondulatorio è schiacciante. Adesso ci muoviamo in una nuova direzione e consideriamo esperimenti che possono essere capiti solo facendo un'ipotesi molto diversa sulla radiazione elettromagnetica, cioè che essa si comporti come una corrente di particelle.

I concetti di onda e di particella sono così diversi che è difficile capire come la luce (e altre radiazioni) possano assumere entrambe queste vesti. In un'onda, per esempio, l'energia e la quantità di moto sono distribuite con continuità sul fronte d'onda, mentre nel flusso di particelle essi sono concentrati in blocchetti separati. Rimandiamo la discussione di questa doppia natura al capitolo 50. Per il momento non dobbiamo preoccuparci di questo problema ed esaminiamo invece gli inconfutabili risultati sperimentali che portano la radiazione ad assumere questa natura di particella. Introduciamo così il nostro studio della fisica quantistica, che ci conduce alla fine a capire la struttura fondamentale della materia.

49-1 RADIAZIONE TERMICA

Siamo in grado di vedere la maggior parte degli oggetti grazie alla luce che essi riflettono. A temperature abbastanza elevate, tuttavia, i corpi diventano di per se stessi luminosi, e possiamo vederli brillare al buio. I filamenti incandescenti di una lampadina e un falò (fig. 1) sono esempi comuni. Per quanto noi vediamo questi oggetti percependo la radiazione visibile che essi emettono, non abbiamo bisogno di sostare troppo a lungo vicino a un falò per convincerci che emette abbondantemente anche nella regione infrarossa dello spettro. È un fatto curioso che la fisica dei quanti, che domina la nostra visione moderna del mondo che ci circonda, si sviluppò dallo studio, in condizioni controllate di laboratorio, delle radiazioni emesse dagli oggetti caldi.

La radiazione emessa da un corpo in dipendenza della sua temperatura si chiama *radiazione termica*. Tutti i corpi non solo emettono questa radiazione, ma la assorbono pure dal loro ambiente. Se un corpo è più caldo dell'ambiente in cui si trova, emette più radiazione di quanta ne assorba e tende a raffreddarsi. Di norma raggiunge un equilibrio termico con il suo ambiente, una condizione in cui le quote di assorbimento e di emissione di radiazione sono uguali.

Lo spettro di radiazione termica emessa da un corpo solido caldo è continuo; i suoi dettagli dipendono decisamente dalla sua temperatura. Elevando progressivamente la temperatura di questo corpo, notiamo due cose: (*a*) quanto più è alta la temperatura, tanto più abbondante è la radiazione termica emessa; dapprima il corpo appare debolmente illuminato, poi brilla intensamente; e (*b*) quanto più alta è la temperatura, tanto più corta è la lunghezza d'onda di quella regione dello spettro in cui irraggia con maggiore intensità; il colore predominante del corpo incandescente si sposta dal rosso spento al giallo-arancio brillante, fino al tono bluastro del «calor bianco» . Dato che le caratteristiche dello spettro dipendono dalla temperatura, possiamo valutare la temperatura di un corpo caldo, come una verga d'acciaio incandescente o una stella, dalla radiazione che emette. L'occhio vede principalmente il colore corrispondente alla più intensa emissione nello spettro visibile.

La radiazione emessa da un corpo caldo non dipende solo dalla sua temperatura, ma anche dal materiale di cui è fatto, dalla sua forma e dalla natura della sua superficie. Per esempio, a 2000 K una superficie piana

ISBN 88-408-0777-2

e liscia di tungsteno emette radiazione con intensità di 23.5 W/cm^2; mentre per il molibdeno l'intensità corrispondente è di 19.2 W/cm^2. In entrambi i casi l'intensità aumenta leggermente se la superficie viene irruvidita. Altre differenze compaiono se misuriamo la distribuzione della radiazione emessa in termini di lunghezza d'onda. Queste caratteristiche rendono difficile capire la radiazione termica sviluppandola in concetti fisici semplici; questa situazione ricorda le analoghe difficoltà che sorgono quando si cerca di capire le proprietà dei gas reali in termini di un semplice modello atomico. Il «problema dei gas» è diventato affrontabile introducendo la nozione di gas ideale. Nello stesso spirito, il «problema della radiazione» può essere trattato con l'introduzione di un «corpo irraggiante ideale», per il quale lo spettro della radiazione termica emessa dipende solo dalla temperatura del corpo, e non dalla sostanza, dalla qualità della superficie o da altri fattori.

Possiamo creare un simile corpo irraggiante ideale ricavando una cavità all'interno di un corpo, le cui pareti siano tenute a temperatura uniforme. Basta praticare poi un piccolo foro nella parete, così che la radiazione dall'interno della cavità possa fuoriuscire nel laboratorio ed essere esaminata. Si osserva che questa radiazione termica, chiamata *radiazione di cavità*,* ha uno spettro molto semplice la cui natura è davvero determinata solo dalla temperatura delle pareti, e in nessun modo dal materiale, dalla forma o dimensione della cavità. La radiazione di corpo nero aiuta a capire la natura della radiazione termica, così come il gas ideale ci aiuta a capire la materia allo stato gassoso.

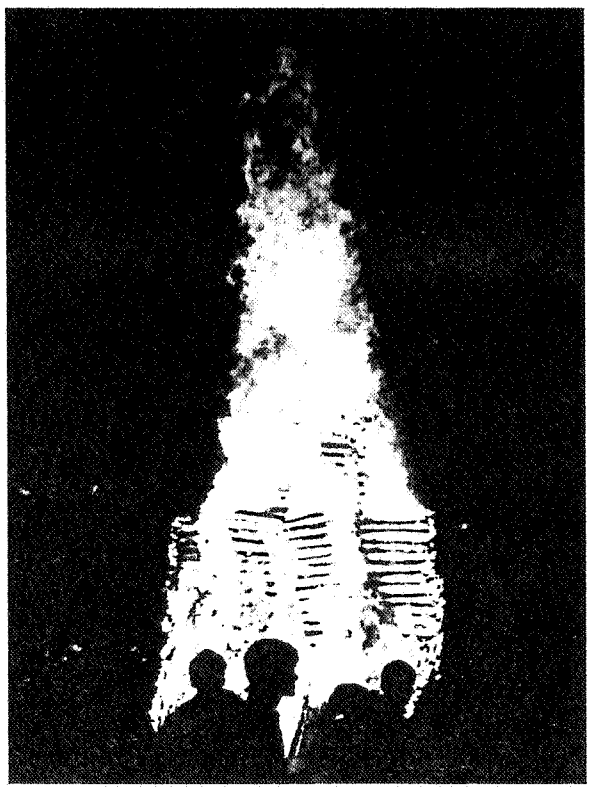


Figura 1 Studenti di fronte a un esempio di radiazione termica. Gli studi di questa radiazione, in condizioni controllate di laboratorio, hanno gettato le basi per lo sviluppo della moderna meccanica quantistica.

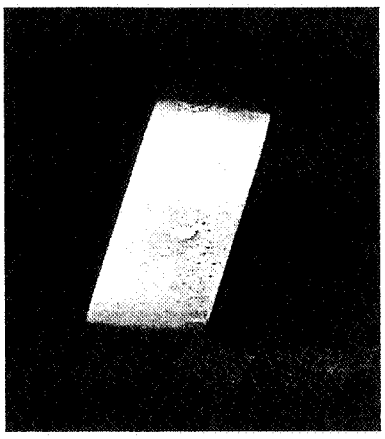


Figura 2 Un tubo di tungsteno incandescente con un forellino praticato nella sua parete. La radiazione che emerge dal foro è una radiazione di cavità.

La figura 2 mostra una cavità radiante costituita da un tubo cilindrico sottile di tungsteno di circa 1 mm di diametro. È scaldato al punto d'incandescenza da una corrente che lo percorre ed è stato praticato un forellino nella parete. È chiaro dalla figura che la radiazione che emerge dal buco è molto più intensa di quella emessa dalla parete esterna della cavità, anche se le temperature delle pareti esterna e interna sono più o meno uguali.

Esistono tre proprietà correlate per la radiazione di corpo nero, tutte ben verificate in laboratorio, che devono essere spiegate da qualsiasi teoria della radiazione di corpo nero.

1. *Legge di Stefan-Boltzmann.* La potenza totale irraggiata per unità di area dell'apertura della cavità, estesa a tutte le lunghezze d'onda, si chiama *intensità di irraggiamento* $I(T)$ ed è messa in relazione alla temperatura da

$$I(T) = \sigma T^4, \qquad (1)$$

* Conosciuta anche come *radiazione di corpo nero*, perché un corpo nero ideale (un corpo cioè che assorbe tutte le radiazioni che incidono su di esso) emetterebbe lo stesso tipo di radiazione. Assumiamo che le dimensioni della cavità siano molto più grandi della lunghezza d'onda della radiazione.

ISBN 88-408-0777-2

in cui σ ($= 5.670 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4) è una costante unversale, detta *costante di Stefan-Boltzmann*. Generalmente gli oggetti caldi irraggiano sempre con minor efficienza del corpo nero. Esprimiamo questo concetto generalizzando l'equazione 1:

$$I(T) = \epsilon\sigma T^4, \qquad (2)$$

in cui ϵ, una quantità adimensionale, è chiamata *emittanza* del materiale che costituisce la superficie. Per il corpo nero, $\epsilon = 1$, ma per la superficie di oggetti comuni, l'emittanza è sempre inferiore all'unità e quasi sempre una funzione della temperatura.

2. *L'irraggiamento spettrale.* L'*irraggiamento spettrale* $R(\lambda)$ mette in evidenza come l'intensità della radiazione di corpo nero cambi con la lunghezza d'onda per una data temperatura. È definito in modo che il prodotto $R(\lambda)$dλdia la potenza irraggiata, per unità di area, compresa nell'intervallo di lunghezze d'onda che si estende da λ a $\lambda + d\lambda$. $R(\lambda)$ è una funzione di distribuzione statistica dello stesso tipo di quella che abbiamo considerato nel Capitolo 24. Possiamo trovare l'intensità d'irraggiamento $I(T)$ a una data temperatura sommando (cioè integrando) l'irraggiamento spettrale sull'intervallo totale di lunghezze d'onda. Così

$$I(T) = \int_0^\infty R(\lambda)d\lambda \quad (T \text{ fissato}). \qquad (3)$$

La figura 3 mostra l'irraggiamento spettrale per la radiazione di corpo nero a quattro valori di temperatura.

L'equazione 3 esprime la possibilità di interpretare l'intensità d'irraggiamento $I(T)$ come l'area sottesa dalla curva dell'irraggiamento spettrale alla temperatura data. Vediamo dal grafico che, quando la temperatura aumenta, quest'area cresce, e così aumenta l'intensità d'irraggiamento, come previsto dall'equazione 1.

3. *Legge dello spostamento di Wien.* Si nota dall'esame della curva d'irraggiamento spettrale nella figura 3 che λ_{max}, la lunghezza d'onda alla quale l'irraggiamento spettrale è massimo, diminuisce al crescere della temperatura. Il fisico tedesco Wilhelm Wien (1864-1928) dedusse che λ_{max} è proporzionale a $1/T$ e che $\lambda_{max}T$ è una costante universale. Il suo valore misurato è

$$\lambda_{max}T = 2898\ \mu\text{m} \cdot \text{K}. \qquad (4)$$

Questa relazione è detta *legge dello spostamento di Wien*; Wien ricevette il premio Nobel per la fisica nel 1911 per la sua ricerca sulla radiazione termica.

Esempio 1 Quanto è calda una stella? Le «superfici» delle stelle non sono elementi di separazione ben definiti come la superficie della terra. La maggior parte della radiazione emessa da una stella è in equilibrio termico con i gas incandescenti che costituiscono i suoi strati esterni. Possiamo trattare quindi con buona approssimazione la luce di una stella come radiazione di corpo nero. Si indicano qui di seguito le lunghezze d'onda alle quali il valore d'irraggiamento spettrale di tre stelle è massimo:

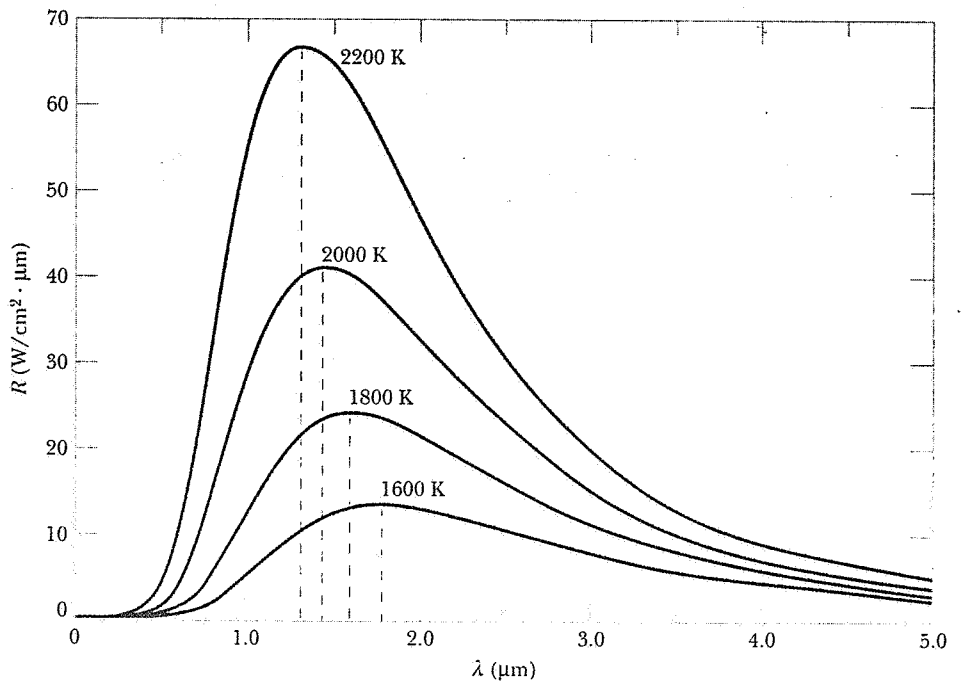


Figura 3 Curve di radianza spettrale per la radiazione di corpo nero a quattro diverse temperature. Si noti che, al crescere della temperatura, la lunghezza d'onda corrispondente al massimo della curva si sposta vero valori più bassi.

Stella	λ_{max}	*Colore apparente*
Sirio	240 nm	Bianco-azzurro
Sole	500 nm	Giallo
Betelgeuse	850 nm	Rossa

(*a*) Quali sono le temperature di superficie di queste stelle? (*b*) Quali sono le intensità d'irraggiamento di queste tre stelle? (*c*) Il raggio r del Sole è 7.0×10^8 m e quello di Betelgeuse è più di 500 volte maggiore, ossia 4.0×10^{11} m. Qual è la potenza totale irraggiata (cioè la *luminosità L*) di queste due stelle?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 4 troviamo, per Sirio,

$$T = \frac{2898\ \mu\text{m} \cdot \text{K}}{\lambda_{max}} = \left(\frac{2898\ \mu\text{m} \cdot \text{K}}{240\ \text{nm}}\right)\left(\frac{1000\ \text{nm}}{1\ \mu\text{m}}\right) = 12\,000\ \text{K}.$$

Le temperature per il Sole e Betelgeuse, ottenute con lo stesso procedimento, risultano 5800 K e 3400 K, rispettivamente. A 5800 K, la maggior parte della radiazione emessa dalla superficie del Sole cade entro la banda visibile dello spettro. Questa considerazione suggerisce il fatto che durante l'evoluzione sulla Terra, gli occhi si siano adattati a essere più sensibili a quelle lunghezze d'onda in cui il Sole irraggia più intensamente.

(*b*) Per Sirio otteniamo, secondo la legge di Stefan-Boltzmann (eq. 1),

$$I = \sigma T^4 = (5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot K^4)(12\,000\ \text{K})^4 = 1.2 \times 10^9\ \text{W/m}^2.$$

Le intensità d'irraggiamento del Sole e Betelgeuse risultano 6.4×10^7 W/m^2 e 7.7×10^6 W/m^2, rispettivamente.

(*c*) Calcoliamo la luminosità di una stella moltiplicando la sua intensità d'irraggiamento per l'area di superficie. Così, per il Sole, abbiamo

$$L = I(4\pi r^2) = (6.4 \times 10^7\ \text{W/m}^2)(4\pi)(7.0 \times 10^8\ m)^2 = 3.9 \times 10^{26}\ \text{W}.$$

Per Betelgeuse otteniamo una luminosità di 1.5×10^{31} W, circa 38 000 volte maggiore. La dimensione enorme di Betelgeuse, che è classificata come una *gigante rossa*, compensa ampiamente l'intensità d'irraggiamento relativamente bassa, dovuta alla sua minore temperatura di superficie.

I colori delle stelle non sono molto evidenti all'osservatore a occhio nudo, perché i coni della retina, che sono responsabili della percezione del colore, non rispondono efficacemente in luce fioca. Se non fosse così, vedremmo il cielo notturno tutto colorato.

49-2 LEGGE DELL'IRRAGGIAMENTO DI PLANCK

Esiste una formula semplice, dedotta da princìpi di base, che si accordi con le curve sperimentali della figura 3? Nel settembre del 1900 esistevano due proposte

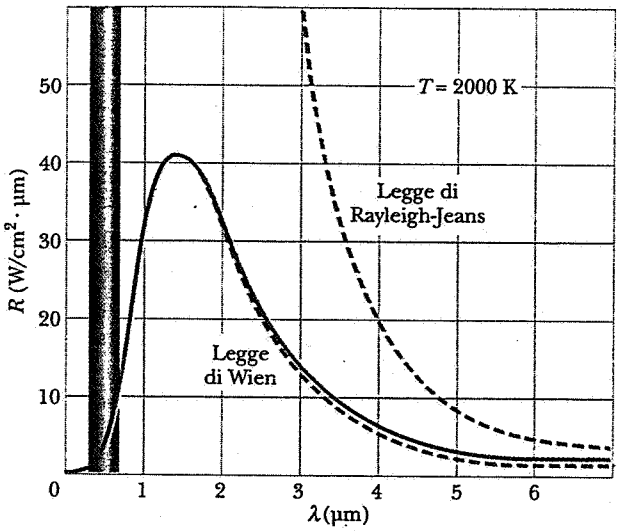


Figura 4 La curva a tratto continuo mostra la radianza spettrale per la radiazione proveniente da una cavità mantenuta a 2000 K. Le previsioni teoriche delle leggi classiche di Rayleigh-Jeans e di Wien sono disegnate con linee tratteggiate. La fascia verticale colorata rappresenta l'intervallo della radiazione visibile.

di formule, nessuna delle quali si adattava alla curva sull'intera gamma di lunghezze d'onda.

La prima, dovuta originalmente a Lord Rayleigh, ma derivata indipendentemente da Einstein e modificata da James Jeans, era stata sviluppata con procedimento rigoroso a partire dai fondamenti della teoria classica. Sfortunatamente, non riesce a riprodurre per intero le curve sperimentali, dato che non passa neppure attraverso il punto di massimo. Tuttavia la formula di Rayleigh-Jeans, come è chiamata, si armonizza pienamente con le curve nella regione delle lunghezze d'onda molto lunghe. La figura 4 mostra la curva d'irraggiamento spettrale per la radiazione di corpo nero a 2000 K, insieme alla previsione teorica di Rayleigh-Jeans. L'accordo di cui abbiamo parlato avviene per lunghezze d'onda molto maggiori di 50 μm, molto al di là della scala della figura. La formula di Rayleigh-Jeans, per insufficiente che sia, è il meglio che la fisica classica ha da proporre.

Anche Wilhelm Wien derivò un'espressione teorica per l'irraggiamento spettrale. La sua formula (vedi sempre la figura 4) è molto migliore. Si accorda alle curve sperimentali abbastanza bene per le lunghezze d'onda corte, passa attraverso un massimo, ma si discosta considerevolmente alle lunghezze d'onda lunghe, all'altra estremità della scala. Però la formula di Wien non era basata sulla teoria classica della radiazione, ma su una congettura – si disse in seguito che l'aveva azzeccata – che ipotizza un'analogia tra le curve d'irraggiamento spettrale e le curve di Maxwell, re-

ISBN 88-408-0777-2

lative alla distribuzione di velocità delle molecole di un gas ideale.

Così abbiamo due espressioni, una che si conforma ai dati sperimentali di maggior lunghezza d'onda e una per le lunghezze d'onda più corte. Max Planck*, cercando di conciliare queste due leggi sull'irraggiamento, fece un'ingegnosa interpolazione tra di esse, che risultò in accordo con *tutte* le lunghezze d'onda. La formula dell'irraggiamento di Planck, presentata alla Società di Fisica di Berlino il 19 ottobre 1900, è

$$R(\lambda) = \frac{a}{\lambda^5} \frac{1}{e^{b/\lambda T} - 1}, \qquad (5)$$

in cui a e b sono costanti empiriche, scelte per dare la migliore conformità dell'equazione 5 ai dati sperimentali. La figura 5 mostra quanto bene si accordi. Anche se rispondente ai risultati sperimentali, la formula di Planck era originalmente solo empirica e non costituiva una vera teoria.

Planck si mise al lavoro immediatamente per derivare la sua formula da semplici assunzioni teoriche e ci riuscì in due mesi. Durante questa elaborazione, la modificò leggermente, presentando le due costanti arbitrarie in una forma diversa. In questa nuova formulazione, la legge di Planck diventa

$$R(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}. \qquad (6)$$

I due parametri a e b nell'equazione 5 sono qui sostituiti da quantità che comportano l'introduzione di due costanti diverse, la *costante di Boltzmann* k (par. 23-1) e un nuova costante, che oggi si chiama costante di *Planck* h; c è la velocità della luce.

Nell'adattare l'equazione 6 ai dati sperimentali, Planck poté calcolare i valori per k e h. I suoi valori si discostavano per meno dell'1 per cento dai valori accettati oggi, che sono

$$k = 1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$$

e

$$h = 6.626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}.$$

* Max Planck (1858-1947) era un fisico teorico tedesco; la sua specializzazione in termodinamica lo portò allo studio delle radiazioni termiche e alla scoperta della quantizzazione dell'energia, per cui ricevette il premio Nobel per la fisica nel 1918. Sotto la sua guida, la fisica teorica fiorì in Germania negli anni '20; giovani fisici, formatisi alla scuola di Planck e dei suoi colleghi, produssero una completa formulazione matematica della teoria dei quanti. Nei suoi ultimi anni di vita, Planck trattò in abbondanza argomenti filosofici e religiosi.

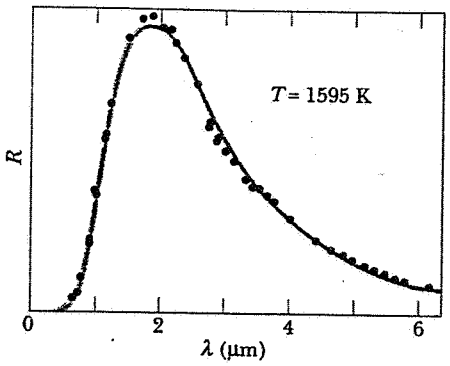


Figura 5 Legge dell'irraggiamento di Planck, costruita su dati sperimentali, tratti da un radiatore a cavità a 1595 K.

Esempio 2 La figura 4 illustra come la legge dell'irraggiamento di Planck (eq. 6) si avvicini alla legge classica di Rayleigh-Jeans nelle lunghezze d'onda maggiori. A quale espressione si riduce la legge di Planck, se $\lambda \to \infty$?

Soluzione Per convenienza algebrica, si può scrivere l'equazione 6 nella forma

$$R(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^x - 1},$$

in cui $x = hc/\lambda kT$. Quando $\lambda \to \infty$, vediamo che $x \to 0$. Ricordando che

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(vedi appendice H) possiamo introdurre l'approssimazione

$$e^x - 1 \approx x.$$

Così abbiamo

$$R(\lambda) \approx \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{x} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \left(\frac{\lambda kT}{hc}\right) = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4}.$$

Si noti che la costante di Planck h, elemento identificativo caratteristico della natura quantistica, si elide convenientemente quando ci avviciniamo al limite classico delle onde lunghe. Il risultato che abbiamo ottenuto è, infatti, precisamente l'espressione classica di Rayleigh-Jeans per l'irraggiamento spettrale.

49-3 QUANTIZZAZIONE DELL'ENERGIA

Torniamo ora alle ipotesi assunte da Planck nel formulare la sua legge di irraggiamento e al significato della costante h che vi appare. Queste assunzioni e le loro conseguenze non furono immediatamente chiare ai contemporanei di Planck, né d'altra parte lo erano (come lui confermò più tardi) a Planck stesso. Quanto

segue descrive la situazione 6 o 7 anni dopo l'enunciazione di Planck della sua teoria. Sembra accertato che la premessa di base della legge dell'irraggiamento di Planck, la quantizzazione dell'energia, non fosse stata capita negli anni precedenti.

Planck formulò la sua legge dell'irraggiamento analizzando l'interazione tra la radiazione nel volume della cavità e gli atomi che costituiscono le sue pareti. Suppose che gli atomi si comportino come minuscoli oscillatori, ciascuno con una frequenza caratteristica di oscillazione. Questi oscillatori irraggiano energia nella cavità e assorbono energia da essa. Dovrebbe essere possibile dedurre le caratteristiche della cavità radiante da quelle degli oscillatori che la generano.

Dal punto di vista classico l'energia di questi piccoli oscillatori è una variabile continua. Possiamo avanzare questa ipotesi con sicurezza per gli oscillatori di grande scala, come i pendoli o le masse appese alle molle. Tuttavia, per arrivare alla legge di irraggiamento di Planck, è necessario fare delle supposizioni radicalmente diverse; cioè ammettere esplicitamente che *gli oscillatori atomici possono emettere o assorbire non energia E di qualsiasi entità, ma solo scegliendo tra valori discreti di energia, definiti da*

$$E = nh\nu, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

in cui ν è la frequenza dell'oscillatore. Qui si introduce per la prima volta nella fisica la costante di Planck h. Si dice che l'energia di un oscillatore atomico è *quantizzata* e che il numero intero n è un *numero quantico*. L'equazione 7 ci dice che i livelli di energia di un oscillatore sono distanziati con regolarità, essendo $h\nu$ l'intervallo tra livelli contigui; si veda la figura 6.

L'ipotesi della quantizzazione dell'energia è davvero rivoluzionaria, e persino Planck fu a lungo riluttante prima di accettarla. Queste le sue parole: "I vani tentativi di far rientrare in qualche modo il quanto elementare di azione (cioè h) nella fisica classica sono durati diversi anni, e mi sono costati notevoli sforzi". Max von Laue, vincitore del premio Nobel nel 1914 e allievo di Planck, ha scritto: "Dopo il 1900 Planck cercò per molti anni di trovare un nesso tra la fisica tradizionale e quella quantistica, se non di integrarle. Il tentativo fallì, ma ha valore proprio perché costituì la prova più convincente che le due teorie non possono essere riunite".

Consideriamo la quantizzazione dell'energia nell'ambito di un oscillatore di grandi dimensioni, come un pendolo. La nostra esperienza suggerisce che il pendolo può oscillare con *qualunque* energia totale plausibile e non solo con certi valori discreti di energia. Dato che l'attrito provoca lo smorzamento dell'ampiezza della sua oscillazione, sembra che l'energia si dissipi con perfetta continuità e non in «salti» o «quanti».

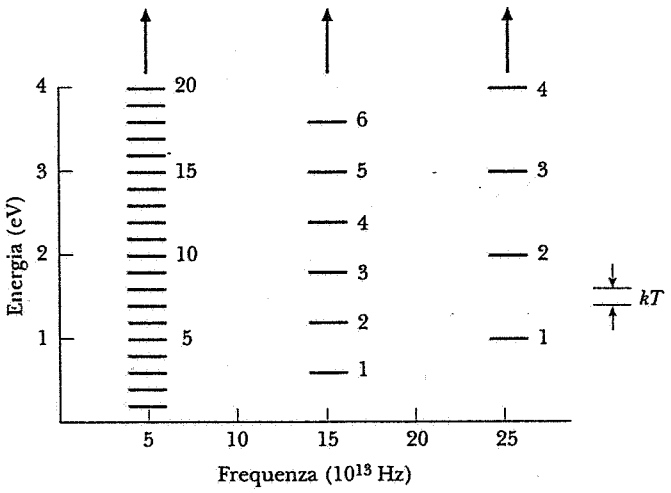


Figura 6 Livelli di energia per gli oscillatori atomici a tre diverse frequenze. Sono indicati i numeri quantici di alcuni livelli. Sulla destra è segnata una unità di energia di riferimento, pari a kT per un oscillatore classico a 2000 K.

Ciononostante, considerato che la costante di Planck è così piccola, non ci sono basi, in queste esperienze ordinarie, per rifiutare la quantizzazione dell'energia come una violazione del «buon senso». I «salti» magari sono lì, ma sono semplicemente troppo piccoli per essere distinguibili.

Non applicheremmo la teoria dei quanti a un pendolo per il semplice fatto che la teoria classica in questo caso funziona perfettamente. Oggigiorno consideriamo la teoria classica come un caso particolare della teoria quantistica, e le due teorie trovano un collegamento nel *principio di corrispondenza*, che afferma:

> *La teoria dei quanti deve concordare con la teoria classica entro i limiti in cui la teoria classica concorda con l'esperimento.*

Un altro modo di formulare il principio di corrispondenza è:

> *La teoria dei quanti deve venire a coincidere con la teoria classica quanto più grandi sono i numeri quantici.*

È in questo modo che il pendolo e l'atomo oscillante trovano un legame tra loro. Il limite classico è illustrato nel seguente esempio.

Esempio 3 Un corpo di massa pari a 300 g, legato a una molla la cui costante k vale 3.0 N/m, oscilla con un'ampiezza A di 10 cm. Considerando questo sistema come un oscillatore quantistico, si trovi (*a*) l'intervallo di energia tra i livelli quantici contigui, e (*b*) il numero quantico che descrive le oscillazioni.

ISBN 88-408-0777-2

Soluzione (*a*) La frequenza di oscillazione è data da

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3.0\ \text{N/m}}{0.3\ \text{kg}}} = 0.50\ \text{s}^{-1}.$$

L'energia meccanica totale E del sistema oscillante è

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(3.0\ \text{N/m})(0.10\ \text{m})^2 = 0.015\ \text{J}.$$

Dato che l'ampiezza delle oscillazioni si smorza a causa dell'attrito, la teoria dei quanti predice che l'energia verrà a ridursi per «salti», la cui entità è data da

$$\Delta E = h\nu = (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(0.50\ \text{s}^{-1}) = 3.3 \times 10^{-34}\ \text{J}.$$

Così

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3.3 \times 10^{-34}\ \text{J}}{0.015\ \text{J}} = 2.2 \times 10^{-32}.$$

Misure di energia di tale precisione sono semplicemente irrealizzabili. I salti quantici di questo oscillatore sono troppo piccoli per essere rilevati, e possiamo quindi trattare il problema tranquillamente con i metodi della fisica classica.

(*b*) Dalla formula di quantizzazione, equazione 7, otteniamo

$$n = \frac{E}{h\nu} = \frac{0.015\ \text{J}}{3.3 \times 10^{-34}\ \text{J}} = 4.6 \times 10^{31},$$

un numero enorme! Non è sorprendente quindi che non riusciamo a osservare alcuna quantizzazione di energia nel moto di un oscillatore; non possiamo certo misurare variazioni di un'unità su 4.6×10^{31}.

La quantizzazione dell'energia semplicemente non si manifesta in oscillatori di grandi dimensioni. Il valore così piccolo della costante h di Planck rende la discretizzazione dell'energia troppo fine per poterla identificare. Così come non siamo in grado di dire che l'aria è fatta di molecole semplicemente agitando una mano.

La costante di Planck si può considerare anche zero finché ci troviamo nell'ambito dei sistemi classici, e, infatti, un modo per ridurre le formule quantistiche alle condizioni limite delle corrispondenti formule classiche è di far tendere h a 0. In modo simile, riduciamo le formule relativistiche alle corrispondenti espressioni classiche imponendo che $c \to \infty$, ove c è la velocità della luce.

Resta viva la domanda: "Perché l'incremento della lunghezza d'onda implica che ci si avvicini all'ambito in cui è applicabile la fisica classica?" Si può rispondere che, quando la lunghezza d'onda aumenta, la frequenza diminuisce e così l'energia del quanto elementare ($= h\nu$) diventa più piccola. Per discernere tra una situazione classica e una quantistica, dobbiamo confrontare quest'energia elementare con kT, che dà una misura (classica) dell'energia media di traslazione di una particella alla temperatura T. Se $h\nu \ll kT$, la «discretizzazione» dell'energia degli oscillatori atomici (che è misurata da $h\nu$) non sarà osservabile e siamo allora nel dominio della fisica classica. Per riassumere, dunque, ci avviciniamo a una situazione classica quando $\nu \to 0$, vale a dire $\lambda \to \infty$, oppure quando $T \to \infty$; ciascuna di queste tre condizioni limite porta a una situazione in cui $h\nu \ll kT$.

49-4 CAPACITÀ TERMICHE DEI SOLIDI

Il principio di quantizzazione dell'energia fu a lungo osteggiato, un destino non inconsueto per un'idea rivoluzionaria. Non è difficile capire perché. I sistemi che ai primordi si ipotizzarono quantizzati erano «oscillatori» che Planck congetturò come componenti delle pareti della cavità. Infatti, oscillatori così semplici, a una dimensione e armonici, non esistono. Gli atomi che costituiscono le pareti sono molto più complessi.

La quantizzazione dell'energia cominciò a guadagnare credito solo dopo il 1907, quando Einstein dimostrò che le stesse idee, che funzionavano così bene per il problema del corpo nero, potevano essere applicate per risolvere un altro problema, quello delle capacità termiche dei solidi. Qui, come vedremo, i sistemi la cui energia viene quantizzata sono atomi reali e ben noti.

Se si trasferisce il calore Q a 1 mole di un solido e se l'aumento di temperatura che ne risulta è ΔT, la capacità termica molare è definita da

$$C_v = \frac{Q}{\Delta T} \quad \text{(a volume costante)} \qquad (8)$$

Abbiamo scelto di trasferire calore sotto le condizioni di volume costante, in modo che le distanze tra gli atomi rimangano immutate e ogni aumento di energia si traduca completamente in energia di oscillazione degli atomi nella loro posizione stabile. Abbiamo fissato poi la quantità della sostanza in 1 mole, così che un confronto tra un elemento e un altro può essere fatto sulla base dello stesso numero di atomi. Si veda il paragrafo 25-3 per maggiori dettagli sulle capacità termiche molari e sulla relazione tra C_v, quantità più facile da calcolare, e C_p, quantità più facile da misurare.

La tabella 1 mostra le capacità termiche molari di alcuni elementi solidi a temperatura ordinaria. Un'occhiata alla tabella rivela subito un'uniformità, detta regola di Dulong e Petit dal nome dei ricercatori che la sottolinearono per primi nel 1819. Essa afferma sem-

TABELLA 1 CAPACITÀ TERMICHE MOLARI DI ALCUNI SOLIDI[a]

Solidi	C_v (J/mole · K)
Alluminio	23
Argento	24
Berillio	11
Bismuto	25
Boro	13
Cadmio	25
Carbonio (diamante)	6
Oro	25
Piombo	25
Platino	25
Rame	24
Tungsteno	24

[a] Tutti i valori sono riferiti alla temperatura ambiente; tre valori «anomali» sono stati scritti a lato per evidenziarli.

plicemente che, con poche eccezioni, tutti i solidi hanno la stessa capacità termica molare, cioè circa 25 J/mole · K. Valori sensibilmente inferiori per alcuni elementi erano stati chiamati «anomali», a quei tempi.

La figura 7, che mostra la capacità termica molare del piombo, alluminio e carbonio in funzione della temperatura, chiarisce la questione. Si osserva che C_v per tutti e tre gli elementi si avvicina allo stesso valore limite a temperature alte. Che il carbonio sembri «anomalo» nella tabella 1 è dato semplicemente dal fatto che per questo elemento la temperatura ordinaria non è sufficientemente alta.

Che cosa prevede la fisica classica per la capacità termica molare di un solido? Gli atomi in un solido sono disposti in un reticolo tridimensionale. Ogni atomo, mantenuto nella sua posizione reticolare da forze elettromagnetiche, oscilla all'interno del suo spazio con un'ampiezza che aumenta con il crescere della temperatura. Ciascun atomo si comporta come un piccolo oscillatore con tre gradi indipendenti di libertà, corrispondenti ai tre assi indipendenti lungo i quali l'atomo ha libertà di movimento.

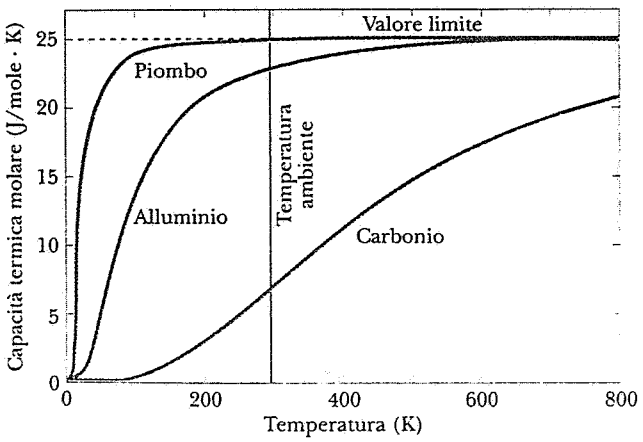


Figura 7 Capacità termiche molari in funzione della temperatura per tre solidi.

Il teorema classico di equiripartizione dell'energia associa a ogni grado di libertà un'energia di $\frac{1}{2}kT$. L'oscillatore tridimensionale ha sei gradi di libertà, due per ciascuna direzione (corrispondenti alle energie cinetica e potenziale per il moto di oscillazione in quella direzione). L'energia interna molare di un solido è quindi

$$E_{int} = 6(\tfrac{1}{2}kT)N_A = 3RT, \qquad (9)$$

in cui N_A è la costante di Avogadro e R è la costante universale dei gas.

Se il solido è mantenuto a un volume costante, possiamo sostituire Q nell'equazione 8 (il calore trasferito per mole) con ΔE_{int}, la variazione di energia interna per mole. Il che implica $C_v = \Delta E_{int}/\Delta T$, che diventa

$$C_v = \frac{dE_{int}}{dT} \qquad (10)$$

passando ai differenziali. Introducendo l'equazione 9 otteniamo infine

$$C_v = \frac{d}{dT}(3RT) = 3R. \qquad (11)$$

La teoria classica prevede che la capacità termica molare sia costante, uguale per tutte le sostanze, e indipendente dalla temperatura. Sostituendo il valore di R (= 8.31 J/mole · K) si ottiene C_v = 24.9 J/mole · K, che si accorda molto bene con il valore limite di C_v a temperature alte, come la figura 7 e la tabella 1 mettono in evidenza. Tuttavia, non si trova ragione, nell'ambito di questa teoria, che spieghi le modificazioni a temperature più basse, mostrate nella figura 7.

La teoria quantistica delle capacità termiche

Torniamo ora alla teoria dei quanti. Einstein suppose che le energie degli oscillatori atomici nei solidi fossero quantizzate secondo l'equazione 7, e assegnò a ogni oscillatore un'energia media per ogni direzione, non di kT come nel caso classico, ma di

$$E = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \qquad (12)$$

Questa espressione è identica a quella usata da Planck per l'energia media degli oscillatori nella cavità radiante. Nell'equazione 12, ν è la frequenza di oscillazione naturale dell'atomo, che Einstein considerò come un parametro.

Moltiplicando l'equazione 12 per la costante di Avogadro e per il fattore 3, in considerazione delle tre

ISBN 88-408-0777-2

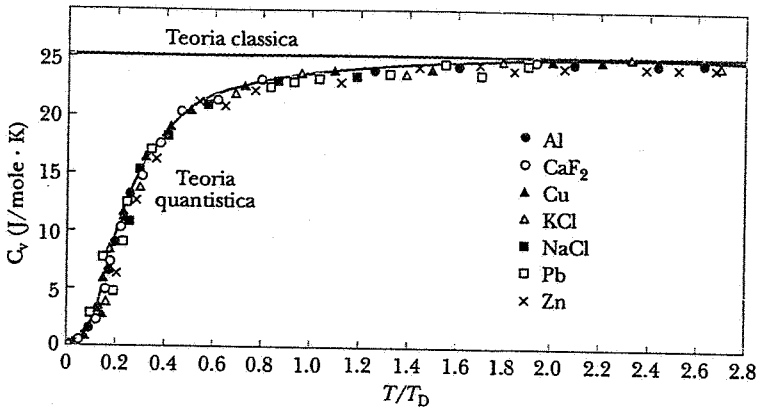


Figura 8 Per la capacità termica dei solidi la teoria quantistica è in eccellente accordo con i risultati sperimentali. La scala orizzontale rappresenta il rapporto adimensionale tra la temperatura T e la temperatura di Debye T_D caratteristica di ciascuna sostanza.

dimensioni, otteniamo l'energia interna per mole

$$E_{int} = \frac{3N_A h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \qquad (13)$$

Derivando, come nell'equazione 10, si giunge a

$$C_v = \frac{dE_{int}}{dT} = 3R(h\nu/kT)^2 \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2}, \qquad (14)$$

come fu ipotizzato da Einstein per le capacità termiche molari. C'è solo un parametro nell'equazione 14, la frequenza ν dell'oscillatore. Comunemente, questa frequenza è espressa in termini di una caratteristica *temperatura di Einstein* $T_E = h\nu/k$. Questa temperatura può essere scelta in modo che l'equazione di Einstein si adatti convenientemente ai dati, anche se ci sono piccole deviazioni alle temperature basse. Deviazioni che non erano ancora state evidenziate sperimentalmente quando Einstein propose la sua teoria.

La mancanza di corrispondenza alle temperature basse può essere imputata al fatto che Einstein, forse di proposito, fece una assunzione eccessivamente semplice, cioè che le oscillazioni di un particolare atomo non siano influenzate da quelle degli atomi vicini. Nel 1912 il fisico olandese Peter Debye raffinò la teoria di Einstein prendendo in considerazione l'interazione degli oscillatori atomici con gli atomi contigui. La figura 8 mostra, per un certo numero di solidi, l'eccellente accordo della teoria di Debye con i risultati sperimentali. La scala di temperatura nella figura è adimensionale, dato che T_D è una costante che assume differenti valori a seconda della sostanza. Quando queste caratteristiche *temperature di Debye*, come sono state chiamate, sono assegnate correttamente, possiamo constatare che tutti i punti sperimentali sono egregiamente rappresentati dalla stessa curva teorica. Questa corrispondenza è un gran trionfo per la teoria dei quanti!

Le figure 7 e 8 suggeriscono immediatamente la spiegazione per i valori «anomali» della tabella 1. Per queste sostanze. T_D è molto più alta della temperatura ambiente, così che la capacità termica non ha ancora raggiunto il suo valore limite.

Si può dimostrare (vedi problema 22) che, ad alte temperature, l'espressione di Einstein per la capacità termica (equazione 14) si riduce alla forma classica (equazione 11). Questo succede per la ragione che abbiamo già esposto alla fine dell'esempio 3. In un solido, la frequenza ν degli oscillatori atomici era considerata da Einstein come un valore singolo costante, caratteristico della sostanza. Quando $T \to \infty$ ci avviciniamo così alle condizioni in cui $h\nu \ll kT$. Questo, come abbiamo visto, significa che l'intervallo tra livelli prossimi di energia per gli oscillatori atomici ($= h\nu$) è molto minore dell'energia media di traslazione degli atomi (pari classicamente a kT). In queste condizioni, la quantizzazione dell'energia degli oscillatori atomici non emerge, e resta valida la descrizione classica.

Esempio 4 Facendo uso della temperatura di Einstein T_E, trovare la temperatura alla quale il calore specifico di una sostanza sia la metà del suo valore classico.

Soluzione Il valore classico è $3R$, quindi cerchiamo la temperatura a cui C_v, nella equazione 14, abbia il valore di $3R/2$, ossia

$$3R\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2 \frac{e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} = \frac{3R}{2}.$$

Ponendo $x = h\nu/kT = T_E/T$, possiamo scrivere

$$x^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1}{2}.$$

Non conoscendo un metodo analitico per risolvere questa equazione, si può cercare una soluzione numerica con una calcolatrice tascabile, per tentativi, o con un calcolatore costruendo una tabella di valori della funzione a sinistra nell'equazione e prendendo nota del valore di x quando la funzione assume valore $\frac{1}{2}$. Il risultato è

$$x = 2.98.$$

Dato che $x = T_E/T$, otteniamo $T/T_E = x^{-1} = 0.336$, ossia

$$T = 0.336 T_E.$$

49-5 L'EFFETTO FOTOELETTRICO

L'idea della quantizzazione dell'energia è nata osservando l'interazione tra materia e radiazione nelle pareti di una cavità radiante. Consideriamo adesso un altro esempio in cui materia e radiazione interagiscono, l'*effetto fotoelettrico*. In esso viene coinvolta la costante di Planck come elemento fondamentale e si estende l'idea di quantizzazione alla natura stessa della radiazione.

La figura 9 schematizza un tipico apparato usato per studiare l'effetto fotoelettrico. Una superficie di metallo (emettitore E) è investita da luce di frequenza ν e, se la frequenza è sufficientemente elevata, la luce provocherà l'emissione di elettroni dalla superficie. Se stabiliamo una differenza di potenziale appropriata V tra E e il collettore C, possiamo raccogliere questi *fotoelettroni*, come sono chiamati, e misurarli come una corrente fotoelettrica i.

La differenza di potenziale V che agisce tra l'emettitore e il collettore non è la stessa differenza V_{est} fornita dalla batteria esterna e indicata dal voltmetro rappresentato nella figura 9. Esiste anche una seconda fem – una batteria nascosta, si potrebbe dire – associata al fatto che l'emettitore e il collettore sono quasi sempre fatti di materiali diversi. Con alcuni accorgimenti, questa *differenza di potenziale di contatto* V_{dpc} rimane costante per tutto l'esperimento. La differenza di potenziale V associata al flusso di elettroni è la somma algebrica di queste due quantità, ovvero

$$V = V_{est} + V_{dpc}. \qquad (15)$$

Assumiamo da qui in poi che questa differenza di potenziale di contatto sia stata misurata e che se ne sia tenuto conto, ed esprimeremo tutti i nostri risultati in termini di V come è definita dalla equazione 15.

La figura 10 (curva *a*) riporta la corrente fotoelettrica in funzione della differenza di potenziale V. Si nota che, se V è positiva e grande abbastanza, la corrente fotoelettrica raggiunge un valore costante di saturazione, situazione in cui *tutti* i fotoelettroni emessi da E sono raccolti da C.

Se riduciamo la differenza di potenziale V a zero e poi la invertiamo, la corrente fotoelettrica non scende contemporaneamente a zero perché gli elettroni vengono espulsi dall'emettitore E con una velocità non nulla. Alcuni raggiungeranno il collettore anche se la differenza di potenziale è in opposizione al loro moto. Tuttavia, se insistiamo nell'aumentare in valore assoluto questa differenza di potenziale inversa, raggiungiamo un valore V_0, detto *potenziale di arresto*, a cui la corrente fotoelettrica davvero si annulla. Questa differenza di potenziale, moltiplicata per la carica elettronica e, ci dà il valore di energia cinetica K_{max} dei fotoelettroni emessi con la massima energia:

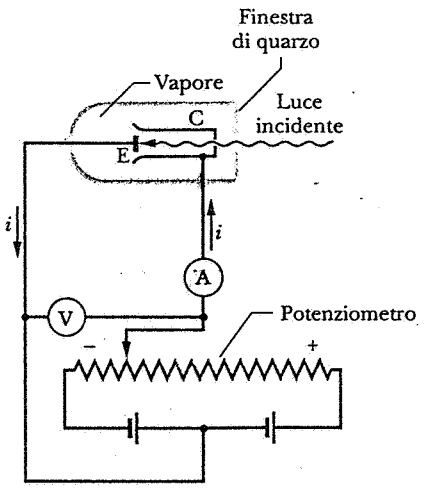


Figura 9 Apparato per lo studio dell'effetto fotoelettrico. Le frecce indicano la direzione della corrente nel circuito esterno, che è opposta alla direzione del moto degli elettroni. Il voltmetro V misura la tensione applicata esternamente V_{est}.

$$K_{max} = eV_0. \qquad (16)$$

Il potenziale di arresto V_0, e quindi anche K_{max}, sono indipendenti dall'intensità della luce incidente. La curva *b* nella figura 10, in cui l'intensità della luce è stata raddoppiata, evidenzia questo particolare. Anche se la corrente di saturazione è ugualmente raddoppiata, il potenziale di arresto rimane immutato.

La figura 11 è un diagramma del potenziale di arresto in funzione della frequenza della luce incidente. Estrapolando la retta, si nota che c'è una netta *fre-*

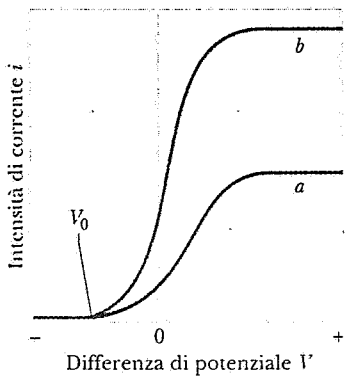


Figura 10 Un grafico (non in scala) che riproduce i dati misurati con l'apparecchio di figura 9. Per la curva *a* l'intensità della luce incidente è doppia rispetto alla curva *b*.

ISBN 88-408-0777-2

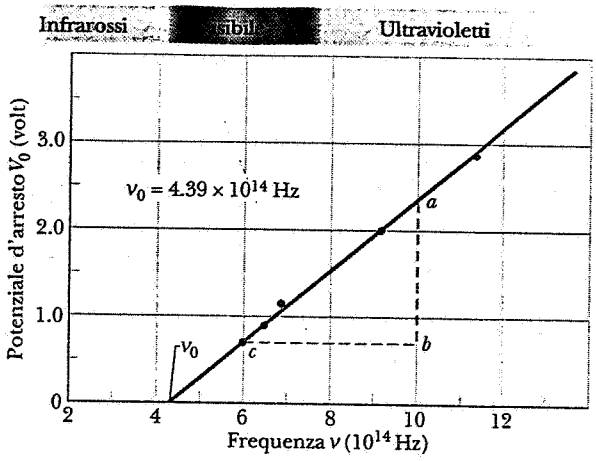


Figura 11 Il potenziale di arresto in funzione della frequenza, per una superficie di sodio. I dati provengono dalle misurazioni eseguite da Millikan nel 1916.

quenza di soglia ν_0, corrispondente a un potenziale di arresto nullo. Se la luce ha frequenza inferiore a questo valore, non viene emesso nessun fotoelettrone. L'effetto fotoelettrico cessa semplicemente di manifestarsi.

Tre sono le caratteristiche importanti dell'effetto fotoelettrico che non possono essere spiegate nell'ambito della teoria classica ondulatoria della luce. Come per il corpo nero e per la capacità termica, l'inadeguatezza della classica teoria ondulatoria in queste circostanze non è una questione di discrepanze numeriche trascurabili. L'inapplicabilità è assoluta e indiscutibile. Ecco i tre problemi:

1. *Il problema dell'intensità.* La teoria ondulatoria richiede che il vettore elettrico oscillante **E** dell'onda luminosa aumenti in ampiezza col crescere dell'intensità della luce. Dato che la forza applicata sull'elettrone è $e\mathbf{E}$, ciò implica che anche l'*energia cinetica* dei fotoelettroni debba aumentare quando la luce diventa più intensa. Ma la figura 10 indica che K_{max} $(= eV_0)$ è *indipendente dall'intensità della luce*; ciò è stato provato su un intervallo di valori d'intensità di 10^7.

2. *Il problema della frequenza.* Secondo la teoria ondulatoria, l'effetto fotoelettrico dovrebbe avvenire per qualsiasi frequenza della luce; ciò che la teoria richiede è che la luce sia intensa abbastanza da fornire l'energia necessaria per l'emissione di fotoelettroni. A dispetto di ciò, la figura 11 dimostra che esiste per ogni superficie un caratteristica frequenza di soglia ν_0. *Per frequenze inferiori a* ν_0, *l'effetto fotoelettrico non avviene, a nessun livello d'intensità della luce.*

3. *Il problema del ritardo.* Se l'energia acquisita da un fotoelettrone proviene direttamente dall'onda incidente sulla superficie metallica, «l'area efficace del bersaglio» per un elettrone del metallo è limitata e probabilmente non è molto più grande di un cerchio di diametro grossolanamente uguale a quello di un atomo. Nella teoria classica, l'energia luminosa è distribuita in modo uniforme sul fronte d'onda. Quindi, se la luce è abbastanza debole, ci dovrebbe essere un intervallo di tempo misurabile, che considereremo nell'esempio 5, tra il momento in cui la luce colpisce la superficie e quello dell'emissione di fotoelettroni. Durante questo intervallo gli elettroni assorbirebbero energia dalla luce, fino a che ne abbiano accumulata abbastanza per liberarsi. Ciononostante, *non è mai stato riscontrato alcun misurabile intervallo di tempo.*

Nel prossimo paragrafo vedremo come la teoria dei quanti risolve questi problemi e fornisce la corretta interpretazione dell'effetto fotoelettrico.

Esempio 5 Un foglio di potassio è posto a una distanza r (= 0.5 m) da una sorgente di luce, che emette una potenza P_0 di 1.0 W. Qual è il tempo necessario perché il foglio assorba dal fascio di luce abbastanza energia (= 1.8 eV) da emettere un elettrone? Assumiamo che il fotoelettrone estratto accumuli la sua energia attraverso un'area circolare, il cui raggio sia uguale al raggio di un atomo di potassio (1.3×10^{-10} m).

Soluzione Se la sorgente irraggia uniformemente in tutte le direzioni, l'intensità I della luce a un distanza r è data da

$$I = \frac{P_0}{4\pi r^2} = \frac{1.0 \text{ W}}{4\pi(0.5 \text{ m})^2} = 0.32 \text{ W/m}^2.$$

L'area del bersaglio A è $\pi\,(1.3 \times 10^{-10}\text{ m})^2$ ovvero 5.3×10^{-20} m^2, così che la potenza che investe il bersaglio è data da

$$P = IA = (0.32 \text{ W/m}^2)(5.3 \times 10^{-20} \text{ m}^2) = 1.7 \times 10^{-20} \text{ J/s}.$$

Nell'ipotesi che tutta questa energia venga assorbita, il tempo necessario per accumularne abbastanza per l'emissione di un elettrone è

$$t = \left(\frac{1.8 \text{ eV}}{1.7 \times 10^{-20} \text{ J/s}}\right)\left(\frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}}\right) = 17 \text{ s}.$$

La nostra scelta sul raggio dell'area bersaglio è stata alquanto arbitraria, ma qualsiasi sia l'area ragionevole che scegliamo, dovremmo sempre attenderci un «tempo di assorbimento» entro un intervallo di facile misurazione. Malgrado ciò, non è mai stato notato nessun intervallo di tempo in nessuna circostanza, considerato che i valori minimi registrabili per il ritardo nei primi esperimenti giungevano fino a 10^{-9} s.

49-6 LA TEORIA DEI FOTONI DI EINSTEIN

Nel 1905 Einstein avanzò un'ipotesi straordinaria sulla natura della luce; suppose che in certe circostanze essa si comporti come se la sua energia fosse concentrata in granuli localizzati, più tardi definiti *fotoni*. L'energia E di un singolo fotone è data da

$$E = h\nu, \tag{17}$$

dove ν è la frequenza della luce. Questa idea, che un raggio di luce si comporti come un flusso di particelle, è in netta contraddizione con l'idea che si comporti come un'onda. Nella teoria ondulatoria della luce, l'energia *non* è concentrata in granuli, ma distribuita uniformemente sul fronte d'onda.

Quando Planck, nel 1900, formulò la sua legge dell'irraggiamento e introdusse nella fisica la quantità h, si servì dell'equazione $E = h\nu$. Applicandola però agli oscillatori atomici che compongono le pareti della cavità, non alla radiazione al suo interno. Planck trattò la radiazione di corpo nero sulla base della teoria ondulatoria, ma Einstein più tardi riuscì a derivare la legge dell'irraggiamento di Planck sulla base del suo concetto di fotone. Il suo metodo era semplice e chiaro, evitando molte delle assunzioni particolari che Planck era stato costretto a fare nel suo sforzo innovativo.

Se applichiamo l'idea del fotone di Einstein all'effetto fotoelettrico possiamo scrivere

$$h\nu = \phi + K_{\max}, \tag{18}$$

in cui $h\nu$ rappresenta l'energia del fotone. L'equazione 18 dice che un *singolo* fotone cede l'energia $h\nu$ alla superficie, dove è assorbita da un singolo elettrone. Parte di questa energia (ϕ, detta *energia di estrazione* dalla superficie emittente) è impiegata nell'espulsione dell'elettrone dalla superficie. L'energia rimanente ($h\nu$-ϕ) si converte nell'energia cinetica dell'elettrone; se l'elettrone non perde energia in collisioni interne mentre si libera dalla struttura del metallo, conserverà questa energia cinetica dopo essersene distaccato. Così $K_{\max}$ rappresenta la massima energia cinetica che il fotoelettrone può avere una volta abbandonata la superficie.*

Si consideri come l'ipotesi del fotone di Einstein soddisfi le tre obiezioni sollevate contro l'interpretazione ondulatoria dell'effetto fotoelettrico. Per quanto concerne la prima obiezione (il problema dell'intensità), c'è un perfetto accordo tra la teoria del fotone e gli esperimenti. Se raddoppiamo l'intensità di luce, raddoppiamo il numero di fotoni e quindi la corrente fotoelettrica; non cambia l'energia elementare dei fotoni o la natura dei singoli processi fotoelettrici descritti dall'equazione 18.

La seconda obiezione (il problema della frequenza) è soddisfatta dall'equazione 18. Se $K_{\max}$ è nulla, si ha

$$h\nu_0 = \phi.$$

In questo caso il fotone possiede energia appena sufficiente a estrarre il fotoelettrone e non avanza energia per potergli conferire energia cinetica. Se ν viene ridotto a valori minori di ν_0, $h\nu$ sarà più piccolo di ϕ e i singoli fotoni, non importa quanto numerosi siano (non importa cioè quanto sia intensa l'illuminazione), non avranno abbastanza energia per estrarre i fotoelettroni.

La terza obiezione (il problema del ritardo) è conseguente alla teoria dei fotoni, perché l'energia necessaria è fornita in forma di blocchetto concentrato. Non è distribuita uniformemente sul fronte del fascio, come nella teoria ondulatoria.

Riscriviamo l'equazione di Einstein per l'effetto fotoelettrico (eq. 18), sostituendo a $K_{\max}$ l'espressione data dall'equazione 16. Otteniamo, dopo qualche passaggio

$$V_0 = (h/e)\nu - (\phi/e). \tag{19}$$

In questo modo la teoria di Einstein prevede un rapporto lineare tra V_0 e ν, in completo accordo coi risultati sperimentali; si veda la figura 11. Il coefficiente angolare della retta sperimentale in questa figura dovrebbe essere h/e, di modo che

$$\frac{h}{e} = \frac{ab}{bc} = \frac{2.30\ \text{V} - 0.68\ \text{V}}{10 \times 10^{14}\ \text{Hz} - 6.0 \times 10^{14}\ \text{Hz}} = 4.1 \times 10^{-15}\ \text{V} \cdot \text{s}.$$

Possiamo trovare h moltiplicando questo rapporto per la carica dell'elettrone e,

$$h = (4.1 \times 10^{-15}\ \text{V} \cdot \text{s})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 6.6 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}.$$

Da una più accurata analisi di questi e altri dati, incluse informazioni ottenute studiando gli emettitori di litio, Millikan trovò il valore $h = 6.57 \times 10^{-34}$ J · s, con un margine di errore di 0.5%. Questo accordo con il valore di h derivato dalla formula di irraggiamento di Planck è una conferma lampante della teoria del fotone di Einstein.

* L'energia di estrazione rappresenta l'energia necessaria per strappare gli elettroni più debolmente vincolati alla superficie. Elettroni più strettamente legati richiedono una maggior quantità di energia e (fissata l'energia del fotone) emergono con una energia cinetica minore di $K_{\max}$.

ISBN 88-408-0777-2

Quando Einstein propose la sua teoria dei fotoni di luce, i fenomeni di fotoelettricità non erano affatto ben stabiliti sperimentalmente nel modo in cui li abbiamo descritti noi. È difficile ottenere misurazioni fotoelettriche precise, e fu solo nel 1916 che Millikan ebbe successo nel sottoporre l'equazione di Einstein per l'effetto fotoelettrico a rigorosi esperimenti di verifica. Anche se l'equazione si mostrò in armonia con i suoi esperimenti in ogni dettaglio, Millikan rimase poco convinto che le particelle di luce di Einstein potessero essere reali. Scrisse dell'ipotesi di Einstein che era "audace, per non dire avventata", e arrivò perfino ad affermare che l'idea dei fotoni di Einstein "sembra allo stato attuale del tutto insostenibile".

Neppure Planck, l'ideatore stesso della costante h, accettò immediatamente i fotoni di Einstein. Raccomandando Einstein per l'ammissione alla Accademia Reale Prussiana delle Scienze nel 1913, scrisse: "che abbia a volte mancato l'obiettivo nelle sue speculazioni, come nel caso della sua teoria dei quanti di luce, non può davvero essere un argomento contro di lui". Non è raro che idee veramente innovative vengano accettate con tanta cautela, anche da scienziati della statura di Planck e Millikan. Incidentalmente, fu proprio per la sua teoria dei fotoni applicata all'effetto fotoelettrico che Einstein ricevette il premio Nobel per la fisica nel 1921.

Esempio 6 Trovare l'energia di estrazione del sodio, usando i dati rappresentati nella figura 11.

Soluzione Il valore a cui la funzione si annulla, nella figura 11, è la frequenza di soglia ν_0. Ponendo $V_0 = 0$ e $\nu = \nu_0$ nella equazione 19 otteniamo

$$\phi = h\nu_0 = (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(4.39 \times 10^{14}\ \text{Hz})$$
$$= 2.91 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.82\ \text{eV}.$$

Notiamo dall'equazione 19 che, per determinare la costante di Planck h, è sufficiente riferirsi alla sola pendenza della retta nella figura 11, e che, per determinare l'energia di estrazione ϕ, basta che sia noto il valore d'intersezione con l'asse delle frequenze. Si verifichi che nel primo caso non c'è necessità di prendere in considerazione la differenza di potenziale di contatto V_{dpc}, ma nel secondo è indispensabile.

Esempio 7 Qual è il flusso di fotoni che investe la superficie metallica nell'esempio 5? Si supponga una lunghezza d'onda di 589 nm (luce gialla del sodio).

Soluzione Ricordiamo la definizione dell'intensità luminosa (par. 41-4): energia trasferita per unità di tempo e per unità di area (area normale alla direzione di propagazione della luce). Qui consideriamo l'intensità fotonica (per luce monocromatica) come l'energia del fotone moltiplicata per il numero di fotoni, che investono, nell'unità di area e nell'unità di tempo, una superficie perpendicolare al loro moto. Le due interpretazioni dell'intensità sono equivalenti.

L'intensità luminosa che incide sul piano è, secondo l'esempio 5,

$$I = (0.32\ \text{J/m}^2 \cdot \text{s})(1\ \text{eV}/1.6 \times 10^{-19}\ \text{J})$$
$$= 2.0 \times 10^{18}\ \text{eV/m}^2 \cdot \text{s}.$$

Ciascun fotone ha un'energia data da

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{5.89 \times 10^{-7}\ \text{m}}$$
$$= (3.4 \times 10^{-19}\ \text{J})\left(\frac{1\ \text{eV}}{1.6 \times 10^{-19}\ \text{J}}\right) = 2.1\ \text{eV}.$$

Il flusso r con cui i fotoni colpiscono la superficie è allora dato dall'intensità divisa per l'energia del fotone, ossia

$$r = \frac{I}{E} = \frac{2.0 \times 10^{18}\ \text{eV/m}^2 \cdot \text{s}}{2.1\ \text{eV/fotone}} = 9.5 \times 10^{17}\ \text{fotoni/m}^2 \cdot \text{s}.$$

Perfino a questa modesta intensità di luce, il flusso di fotoni è enorme, circa 10^{12} fotoni che incidono ogni secondo su 1 mm^2.

49-7 EFFETTO COMPTON

La radiazione di corpo nero, che interessa normalmente una porzione notevole della banda infrarossa dello spettro, è stata il nostro primo esempio di interazione tra radiazione e materia. L'effetto fotoelettrico, il nostro secondo esempio, coinvolge maggiormente la radiazione visibile e ultravioletta. Consideriamo ora l'*effetto Compton*,* che si manifesta principalmente nella regione dello spettro elettromagnetico che attiene ai raggi X e γ.

L'effetto Compton, che riguarda la diffusione di radiazione da parte di atomi, è facilmente comprensibile se si pensa alla collisione tra fotoni ed elettroni, come agli urti tra le palle da biliardo. Nella spiegazione del fenomeno, dobbiamo tenere conto non solo dell'energia dei fotoni ma anche della loro quantità di moto, una grandezza che non abbiamo avuto bisogno di considerare fino ad ora. Abbiamo visto come l'analisi di Einstein delle capacità termiche dei solidi in termini quantistici agevolò alquanto l'accettazione del concetto di quantizzazione dell'energia. Allo stesso modo, l'analisi di Compton dell'effetto che ha preso il suo nome fu determinante nel convincere i fisici della realtà dei fotoni.

* Artur H. Compton (1892-1962) scoprì nel 1923 che le lunghezze d'onda dei raggi X cambiano dopo la diffusione da parte di elettroni. Nel 1927 ricevette il premio Nobel per la fisica grazie a questa scoperta. Anni dopo fu eletto a direttore del laboratorio dell'Università di Chicago, dove si costruì il primo reattore nucleare.

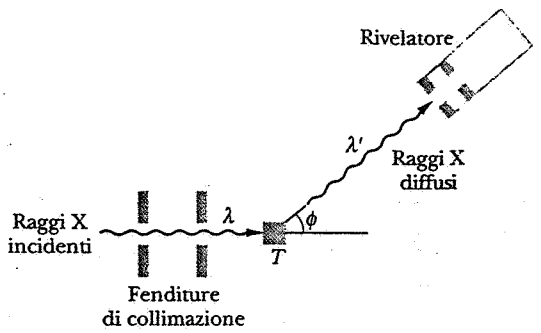


Figura 12 Dispositivo sperimentale per osservare l'effetto Compton. Il rivelatore si può muovere su diverse posizioni angolari ϕ.

Nell'esperienza di Compton, un fascio di raggi X, con lunghezza d'onda nettamente definita λ, colpisce un bersaglio di grafite T, come nella figura 12. Si misura l'intensità dei raggi X, emessi a vari angoli di diffusione ϕ, in funzione della loro lunghezza d'onda. La figura 13 illustra i risultati sperimentali delle misure. Si vede che, malgrado il raggio incidente consista essenzialmente di una singola lunghezza d'onda λ, i raggi diffusi presentano due picchi di intensità a due lunghezze d'onda diverse, uno di essi ha la stessa lunghezza d'onda del raggio incidente, ma l'altro (λ') possiede lunghezza d'onda superiore di una quantità $\Delta\lambda$. Questo *spostamento Compton* $\Delta\lambda$ cambia con l'angolo da cui si osserva la diffusione dei raggi X.

La presenza di una lunghezza d'onda diffusa λ' non può essere spiegata, se i raggi X incidenti sono considerati come un'onda elettromagnetica. In quest'ambito, l'onda incidente di frequenza ν induce un'oscillazione della stessa frequenza negli elettroni del bersaglio diffondente. Questi elettroni vibranti, come cariche che oscillano avanti e indietro nell'antenna di una radiotrasmittente, irraggiano onde elettromagnetiche che ancora una volta hanno la stessa frequenza ν. Così, secondo questa interpretazione, le onde propagate dovrebbero avere la stessa frequenza e la stessa lunghezza d'onda dell'onda incidente. Questa conclusione è in disaccordo con l'esperienza (figura 13), in cui si manifesta una variazione nella lunghezza d'onda.

Compton spiegò i suoi risultati sperimentali postulando che il fascio di raggi X si comporti non come un'onda, ma come un insieme di fotoni di energia E ($=h\nu$), e che questi fotoni siano soggetti a collisioni con gli elettroni liberi del bersaglio diffondente. Dal momento che il fotone incidente trasferisce parte della sua energia all'elettrone con cui collide, i fotoni diffusi devono avere una energia di valore inferiore E'. Devono quindi avere anche una frequenza inferiore ν' ($=E'/h$), che comporta una maggiore lunghezza d'onda λ' ($=c/\nu'$). Questo punto di vista spiega, per lo meno qualitativamente, lo spostamento di lunghezza d'onda $\Delta\lambda$. Si noti come questo modello a particelle della diffusione dei raggi X sia ben differente da quello basato sul punto di vista ondulatorio.

Analizzeremo ora quantitativamente una singola collisione fotone-elettrone. La figura 14 schematizza un urto tra un fotone e un elettrone. L'elettrone è considerato inizialmente a riposo e praticamente libero, cioè non legato agli atomi del diffusore. (Questa approssimazione è realistica per gli elettroni esterni, che sono meno strettamente vincolati e la cui energia di legame è molto inferiore a quella dei fotoni dei raggi X.) Applichiamo ora la legge di conservazione dell'energia a questa collisione. Dato che gli elettroni colpiti possono avere una velocità v che è confrontabile con quella della luce, dobbiamo usare l'espressione relativistica per l'energia cinetica dell'elettrone. Dall'equazio-

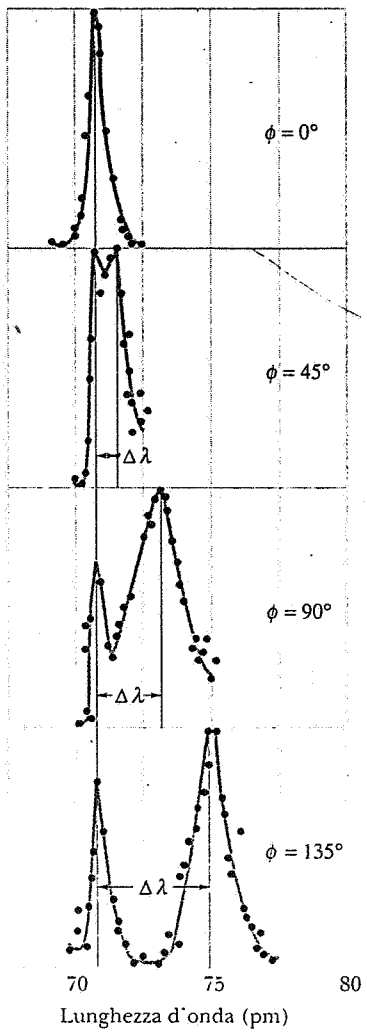


Figura 13 Risultati sperimentali di Compton per quattro diversi valori dell'angolo di diffusione ϕ.

ISBN 88-408-0777-2

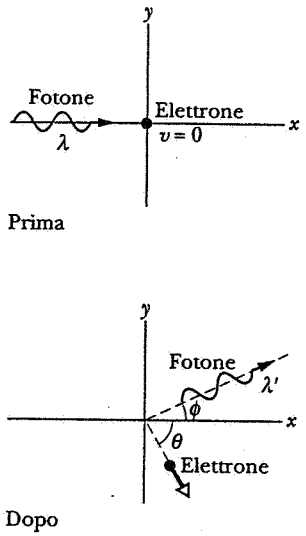


Figura 14 Un fotone di lunghezza d'onda λ colpisce un elettrone a riposo. Il fotone viene deviato con un angolo ϕ e la sua lunghezza d'onda aumenta diventando λ'. L'elettrone viene proiettato nella direzione determinata dall'angolo θ, con velocità v.

ne relativistica per la conservazione dell'energia (par. 21-9) possiamo scrivere

$$E_i = E_f$$

ovvero

$$h\nu + mc^2 = h\nu' + mc^2 + K, \qquad (20)$$

In cui mc^2 è l'energia a riposo dell'elettrone colpito e K è la sua energia cinetica (relativistica). Sostituendo c/λ in luogo di ν (e c/λ' al posto di ν') e usando l'equazione 25 del capitolo 7 per l'energia cinetica relativistica, otteniamo

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right). \qquad (21)$$

Ora applichiamo la legge di conservazione (vettoriale) della quantità di moto alla collisione della figura 14. Prima di tutto abbiamo bisogno di un'espressione per la quantità di moto di un fotone. Nel paragrafo 41-5 abbiamo visto che, se un oggetto assorbe completamente un'energia U da un fascio parallelo di luce incidente, secondo la teoria ondulatoria della luce, il fascio luminoso trasferisce contemporaneamente all'oggetto una quantità di moto U/c. Nel paragrafo 48-7, abbiamo mostrato che si può rappresentare il fenomeno come un flusso di fotoni di energia E, ciascuno dei quali cede una quantità di moto $p = E/c$ all'oggetto che l'assorbe. In questo caso,

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \qquad (22)$$

Per gli elettroni, l'espressione relativistica della quantità di moto è data dall'equazione 22 del capitolo 9,

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Possiamo quindi scrivere, per la conservazione della componente lungo l'asse x della quantità di moto,

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\cos\theta \qquad (23)$$

e per la componente lungo l'asse y

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\operatorname{sen}\phi - \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\operatorname{sen}\theta. \qquad (24)$$

Il nostro scopo è trovare $\Delta\lambda$ $(=\lambda' - \lambda)$, lo spostamento di lunghezza d'onda dei fotoni diffusi, così da poterlo confrontare con i risultati sperimentali della figura 13. L'esperimento di Compton non includeva osservazioni sull'elettrone di rinculo nel bersaglio di diffusione. Delle cinque variabili (λ, λ', v, ϕ e θ) che compaiono nelle tre equazioni (21, 23, e 24) due si possono eliminare. Scegliamo di eliminare v e θ, che riguardano solo gli elettroni, riducendo in questo modo le tre equazioni a una relazione semplice tra le variabili.

Procedendo con i necessari passaggi algebrici (vedi problema 64), arriviamo a questo semplice risultato per la variazione di lunghezza d'onda dei fotoni diffusi:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi). \qquad (25)$$

Lo spostamento Compton $\Delta\lambda$ dipende solo dall'angolo di diffusione θ e non dalla lunghezza d'onda iniziale λ. L'equazione 25 prevede, entro il margine di errore sperimentale, lo spostamento Compton osservato nella figura 13. Dall'equazione è possibile notare che $\Delta\lambda$ varia da zero (per $\phi = 0°$, che rappresenta una collisione di «sfioramento» nella figura 14; il fotone incidente è solo impercettibilmente deviato) a $2h/mc$ (per $\phi = 180°$, che rappresenta una collisione «frontale» ; il fotone incidente subisce un'inversione nel suo moto).

Ricordiamo che lo spostamento Compton $\Delta\lambda$ è solamente un effetto quantistico, non previsto dalla fisica classica. Come nella radiazione di corpo nero e nell'effetto fotoelettrico, la presenza della costante di Planck h nell'espressione per lo spostamento Compton (eq. 25) indica un fenomeno quantistico. L'equazione 25 evidenzia che $\Delta\lambda \to 0$ quando $h \to 0$. Far tendere la costante di Planck a zero è il metodo formale per controllare se le equazioni quantistiche possono prevedere che effetto risulterebbe applicando le leggi fisiche classiche non solo a oggetti di grandi dimensioni, ma anche ad atomi ed elettroni.

Resta da spiegare la presenza del picco nella figura 13, per il quale la lunghezza d'onda non cambia nel processo di diffusione. Questo picco è il risultato della collisione di fotoni su elettroni che, invece di essere quasi liberi sono strettamente vincolati al loro ione nel bersaglio di diffusione. Durante la collisione con i fotoni, gli elettroni vincolati si comportano come se fossero elettroni liberi molto pesanti, perché l'intero ione rincula nella collisione. Per questo la massa efficace M di un diffusore di carbonio è molto vicina alla massa di un nucleo di carbonio. Dato che tale nucleo contiene sei protoni e sei neutroni, calcoliamo approssimativamente $M = 12 \times 1840m = 22\,000m$. Se sostituiamo m con M nell'equazione 25, constatiamo che lo spostamento Compton, per collisioni con elettroni fortemente legati, è estremamente piccolo.

Esempio 8 Raggi X con $\lambda = 100$ pm sono diffusi da un bersaglio di carbonio. La radiazione diffusa è osservata da un angolo di 90° rispetto al raggio incidente. (*a*) Qual è il valore dello spostamento Compton $\Delta\lambda$? (*b*) Quanta energia cinetica è trasferita all'elettrone espulso?

Soluzione (*a*) Ponendo $\phi = 90°$ nell'equazione 25, lo spostamento Compton risulta

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi)$$
$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}(1 - \cos 90°)$$
$$= 2.43 \times 10^{-12}\ \text{m} = 2.43\ \text{pm}.$$

(*b*) Ponendo $\nu = c/\lambda$, possiamo scrivere l'equazione 20 in questa forma

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K.$$

Sostituendo $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ e risolvendo rispetto a K, otteniamo

$$K = \frac{hc\,\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})(2.43 \times 10^{-12}\ \text{m})}{(100 \times 10^{-12}\ \text{m})(100 \times 10^{-12}\ \text{m} + 2.43 \times 10^{-12}\ \text{m})}$$
$$= 4.72 \times 10^{-17}\text{J} = 295\ \text{eV}.$$

Si può mostrare che in questo caso l'energia iniziale E del fotone ($= h\nu = hc/\lambda$), è 12.4 keV, di modo che il fotone risulta aver perso il 2.4% della sua energia nella collisione. Un fotone di energia dieci volte maggiore (= 124 keV) perderebbe il 20% della sua energia nella stessa condizione. Questi dati sono coerenti con il fatto che $\Delta\lambda$ non dipende della lunghezza d'onda iniziale. Raggi X con maggior energia, avendo lunghezze d'onda minori, subiranno un incremento di lunghezza d'onda percentualmente più alta e quindi una più elevata perdita relativa di energia.

49-8 SPETTRI A RIGHE

I risultati sperimentali dell'effetto fotoelettrico e dell'effetto Compton forniscono un'evidenza indiscutibile dell'esistenza dei fotoni e della rappresentazione a particelle della radiazione elettromagnetica. Il concetto di fotone emerge storicamente dallo studio della radiazione termica, che presenta uno spettro continuo di energia. Ma la natura discreta (quantizzata) delle energie dei fotoni è in questo caso nascosta dalla vasta gamma di energie.

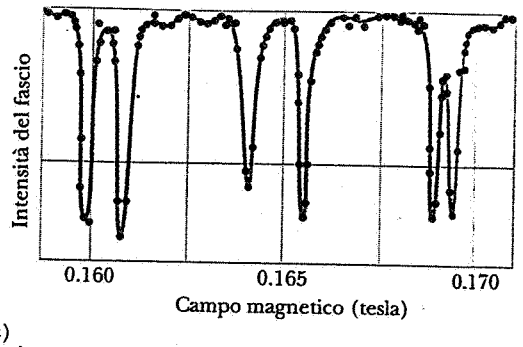
Nel caso di radiazione termica, si incontrano difficoltà perché gli atomi delle pareti della cavità si comportano in modo non coordinato e devono essere analizzati con criteri statistici. Se studiamo sistemi emittenti o assorbenti che sono isolati l'uno dall'altro, scopriamo che lo spettro di radiazione non è continuo ma *discreto*, dato che consiste di singole lunghezze d'onda separate da un intervallo in cui non si manifesta alcuna radiazione. Nel caso della luce, gli spettri sono spesso visualizzati e studiati per mezzo di spettroscopi (vedi figura 8 nel capitolo 47) a prisma o a reticolo di diffrazione, che evidenziano spettri come quelli rappresentati nella figura 9 dello stesso capitolo.

Questi spettri sono chiamati *spettri a righe*, e ciascuna componente è detta *riga spettrale*. Gli spettri a righe sono il risultato di emissione o assorbimento di radiazione da parte di sistemi isolati quali molecole, atomi, nuclei, o particelle subnucleari. Gli spettri a righe di atomi e molecole erano conosciuti ai tempi di Planck, ma furono interpretati in termini quantistici solo dopo che Planck e Einstein introdussero il concetto di fotone.

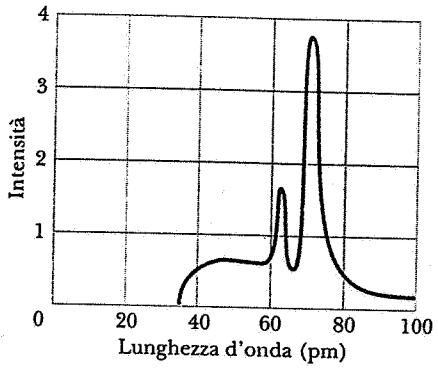
TABELLA 2 ALCUNI PARTICOLARI SPETTRI A RIGHE (Fig. 15)

Figura	*Elemento*	*Tipica lunghezza d'onda* (m)	*Regione dello spettro*	*Modalità*
15*a*	Molecola H_2	40	Radio	Assorbimento
15*b*	Molecola NH_3	1×10^{-2}	Microonde	Assorbimento
15*c*	Molecola HCl	2×10^{-6}	Infrarossi	Assorbimento
15*d*	Atomo Fe	3×10^{-7}	Ultravioletti	Emissione
15*e*	Atomo Mo	6×10^{-11}	Raggi X	Emissione
15*f*	Nucleo ^{198}Hg	3×10^{-12}	Raggi γ	Emissione
15*g*	Protone	4×10^{-15}	Raggi γ	Assorbimento

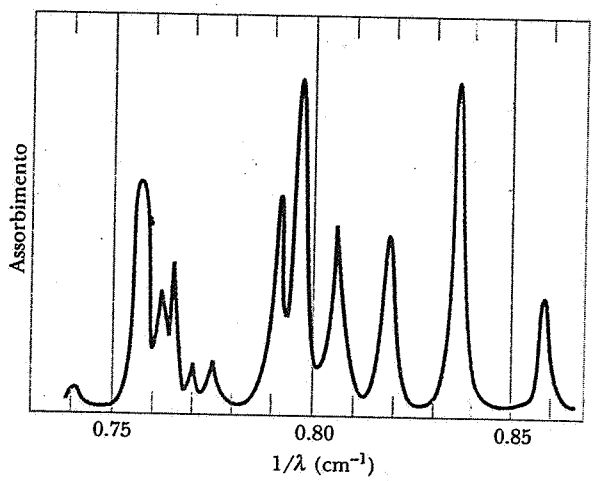
ISBN 88-408-0777-2



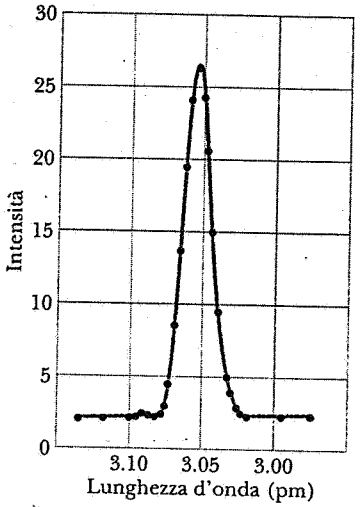
(*a*)



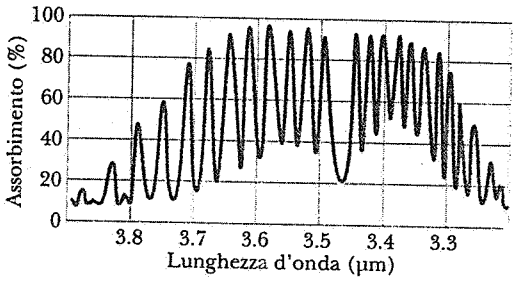
(*e*)



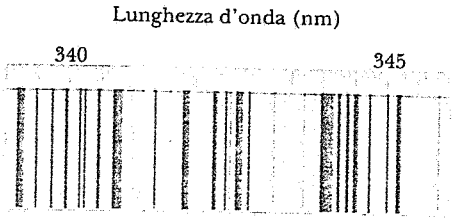
(*b*)



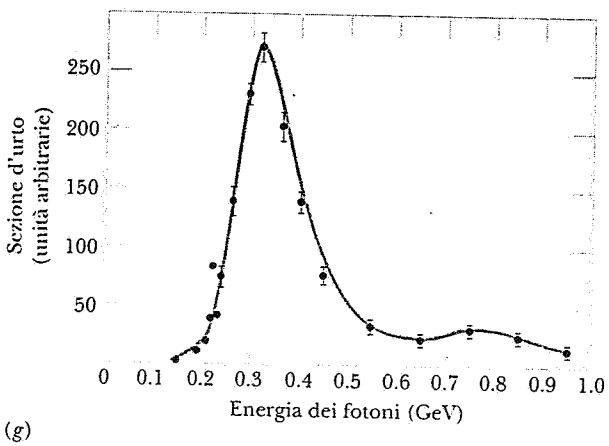
(*f*)



(*c*)



(*d*)



(*g*)

Figura 15 Esempi di righe spettrali. Per l'identificazione si faccia riferimento alla tabella 2.

L'analisi di una radiazione costituita da fotoni di una particolare energia indica decisamente che il sistema che emette o assorbe la radiazione ha stati di energia discreti, tali che la differenza di energia tra i vari livelli è uguale all'energia dei fotoni, come si vede nelle figure 18 e 19 del capitolo 8. Non dimentichiamo però che stiamo qui trascurando la piccola energia di «rinculo» necessaria per conservare la quantità di moto nel processo di assorbimento o emissione. È questa in effetti una conseguenza dell'interpretazione di Einstein dello spettro di radiazione del corpo nero: la quantizzazione della radiazione implica la quantizzazione delle sorgenti di radiazione. Dall'analisi degli spettri a righe possiamo ottenere informazioni sugli stati d'energia degli atomi o di altri sistemi che emettono radiazione. Nel prossimo capitolo discuteremo la *meccanica dei quanti*, un procedimento matematico per calcolare l'energia degli stati discreti, che si basa sull'assunzione di una forza particolare che agisce tra i componenti di un sistema (per esempio, la forza elettrostatica tra elettroni e il nucleo in un atomo). Le energie calcolate degli stati possono essere confrontate con quelle ricavate dagli esperimenti, per controllare l'attendibilità delle ipotesi sulla forza che agisce nel sistema.

La figura 15 mostra esempi di spettri a righe emessi da molecole, atomi, nuclei e particelle, che hanno contribuito alla comprensione della loro struttura interna. Questi spettri, le cui caratteristiche sono elencate nella tabella 2, sono indicativi della grande varietà di spettri a righe, e relative lunghezze d'onda, che possono essere prodotti in laboratorio. Nel capitolo 51 esamineremo lo spettro a righe dell'atomo d'idrogeno, che fornì gli elementi utili a formulare la teoria quantistica per la struttura atomica.

DOMANDE

1. «Cavità» formate da pezzi di carbone ardente sembrano più brillanti dei carboni stessi. La temperatura in questi interstizi è davvero più alta di quella della superficie esposta del carbone che brucia? Si commenti questa osservazione.
2. La relazione $I(T)=\sigma T^4$ (eq. 1) è esatta per le cavità reali e vale per tutte le temperature. Perché non si usa come riferimento per la definizione di temperatura a, diciamo, 100°C?
3. Tutti i solidi incandescenti obbediscono alla legge della quarta potenza della temperatura, come sembra indicare l'equazione 2?
4. Un foro nella parete di una cavità radiante è chiamato a volte *corpo nero*. Perché?
5. Se guardiamo dentro una cavità le cui pareti sono mantenute a temperatura costante, non si distingue nessun particolare. Spiegare la ragione.
6. È possibile individuare le stelle più calde del Sole semplicemente osservando il cielo notturno? E quelle meno calde? Qual è la caratteristica che cercate? La luminosità della stella è un criterio di distinzione?
7. Betelgeuse, la stella più visibile della costellazione di Orione, ha una temperatura di superficie che è molto minore di quella del Sole, eppure irraggia una maggior quantità di energia nello spazio. Come mai?
8. Una percentuale minima dell'energia fornita a una lampadina da 100 W appare sotto forma di luce visibile. Dove va a finire il resto dell'energia? Che cosa si potrebbe fare per aumentare questa percentuale? Perché non è stato ancora realizzato?
9. La temperatura della nostra pelle è di circa 300 K. In quale banda dello spettro elettromagnetico emettiamo radiazioni termiche con maggiore intensità?
10. Le curve di radiazione spettrale per corpi neri a temperature differenti non si intersecano; vedi figura 3. Supponiamo per un momento che lo facciano. Sapreste indicare perché ciò violerebbe la seconda legge della termodinamica?
11. Affermiamo che tutti gli oggetti irraggiano energia in forza della loro temperatura, eppure al buio non possiamo vederli tutti. Perché?
12. Nella fisica classica l'energia è quantizzata?
13. Dimostrare che la costante di Planck ha le dimensioni di un momento angolare. Significa che il momento angolare è necessariamente una grandezza quantizzata?
14. Quale ordine di grandezza dovrebbe avere h per far sì che gli effetti quantistici siano un fenomeno ordinario nella nostra vita quotidiana? (Vedi G. Gamow, *Mr. Tompkins in Wonderland*, Cambridge Press, Cambridge 1957, per una piacevole narrazione di un mondo in cui le costanti fisiche c, G e h diventano a dimensione umana.)
15. Quale ordine di grandezza dovrebbe avere la costante di Planck per rendere osservabile la quantizzazione dell'energia in un pendolo che oscilla, semplicemente guardandolo? (*Suggerimento*: Si veda l'esempio 3.)
16. Si spieghi in parole povere perché, se l'energia degli oscillatori atomici in un solido è quantizzata, la capacità termica a temperature basse si riduce.
17. La legge classica di equiripartizione dell'energia (par. 23-6) conduce alla legge d'irraggiamento di Rayleigh-Jeans, quando è applicata alla radiazione di corpo nero, e alla legge di Dulong-Petit quando è applicata alla capacità termica dei solidi. In entrambi i casi c'è una radicale contraddizione con gli esperimenti. Si descriva l'inapplicabilità della legge di equiripartizione in questi due casi e si spieghi perché la quantizzazione dell'energia porta, in ciascun fenomeno, a teorie che davvero sono confermate dagli esperimenti.
18. Per il problema della radiazione di corpo nero e per quello della capacità termica dei solidi, il disaccordo tra i risultati sperimentali e la previsione classica, per certi valori delle variabili, non è piccolo ma totale e indiscutibile. Si identifichi, per ciascuno dei fenomeni, la contraddizione specifica a cui questa affermazione si riferisce.

ISBN 88-408-0777-2

19. Si spieghi perché un tubo usato per esaminare l'emissione fotoelettrica è (*a*) messo sotto vuoto e (*b*) provvisto di una finestra di quarzo, invece che di vetro.
20. Si determini se è necessario l'uso della meccanica relativistica per verificare l'equazione dell'effetto fotoelettrico (eq. 18) con un margine di incertezza dell'1%. Notare che comunemente i potenziali d'arresto sono di pochi volt.
21. Perché, nella figura 10, la corrente fotoelettrica non sale verticalmente al suo valore massimo (saturazione), quando la differenza di potenziale applicata è appena al di sopra di V_0?
22. Perché, nell'effetto fotoelettrico, l'esistenza di una frequenza di soglia sostiene la teoria dei fotoni, e respinge la teoria ondulatoria?
23. Per quale ragione le misurazioni fotoelettriche sono così sensibili alla natura della superficie fotoelettrica?
24. Una piastra di metallo isolata emette fotoelettroni solo al principio quando è illuminata con raggi ultravioletti, ma cessa dopo un certo tempo. Perché?
25. Perché, anche nel caso di radiazione incidente monocromatica, i fotoelettroni sono emessi con una gamma di velocità diverse?
26. Abbiamo affermato che tutta l'energia di un fotone assorbito è ceduta a un elettrone emesso. Perché si può trascurare l'energia assorbita dal reticolo?
27. L'effetto Compton conferma la teoria dei fotoni di luce più di quanto la sostenga l'effetto fotoelettrico? Si spieghino le ragioni della risposta data.
28. Quali dei seguenti processi può dar luogo a un'emissione di elettroni? (*a*) bombardare un metallo con elettroni (*b*) mettere un metallo vicino a un intenso campo elettrico; (*c*) investire un metallo con luce; (*d*) riscaldare il metallo ad alta temperatura.
29. Una lastra di metallo è illuminata con luce di una data frequenza. Da quali di questi fattori dipende l'emissione o meno di fotoelettroni? (*a*) l'intensità dell'illuminazione; (*b*) la durata dell'esposizione alla luce; (*c*) il grado di conducibilità termica del metallo; (*d*) l'area della lastra; (*e*) il materiale di cui è composto.
30. La teoria di Einstein sull'effetto fotoelettrico, in cui la luce è considerata come una corrente di fotoni, nega la validità degli esperimenti sulla interferenza da doppia fenditura, in cui la luce è assunta come un'onda?
31. Si spieghi l'affermazione secondo cui i nostri occhi non potrebbero vedere la luce stellare a causa della sua debolezza, se la luce non fosse composta di particelle.
32. Come è possibile che l'energia di un fotone sia espressa da $E=h\nu$, quando la presenza stessa della frequenza ν nella formula implica che la luce sia un'onda?
33. Specificare la differenza tra la relazione di Planck $E=nh\nu$ (eq. 7) e quella di Einstein $E=h\nu$ (eq. 17).
34. Un fotone non possiede massa a riposo, dato che non può mai essere in uno stato di riposo per l'osservatore. Se l'energia è uguale a mc^2, come è possibile che un fotone abbia un'energia?
35. La quantità di moto p di un fotone è data da $p=h/\lambda$. Per quale ragione c, la velocità della luce, non compare in questa espressione?
36. Quando si descrive la propagazione della luce, si parla a volte di raggi, altre volte di onde, e in altre situazioni di fotoni discreti. In quale misura tutte queste definizioni sono compatibili l'una con l'altra? Ci sono casi in cui un punto di vista è decisamente superiore a un altro?
37. Dato che $E=h\nu$ per un fotone, lo spostamento Doppler nella frequenza emessa da una sorgente di luce che si allontana sembra indicare che ci sia una riduzione di energia per i fotoni emessi. È così in realtà? E se lo è, come si concilia con il principio di conservazione dell'energia? (Si veda *Questions Students Ask*, «The Physics Teacher», Dic 1983, 616.)
38. Il fotone A possiede il doppio di energia del fotone B. Qual è il rapporto tra la quantità di moto di A e quella di B?
39. In che cosa un fotone differisce da una particella materiale?
40. Qual è la direzione, rispetto al fascio di fotoni incidenti monocromatici, di un elettrone diffuso Compton, avente la massima energia cinetica?
41. Nella figura di diffusione Compton (fig. 14), per quale ragione ci si potrebbe aspettare che $\Delta\lambda$ sia indipendente dal materiale del diffusore?
42. Perché non si osserva l'effetto Compton con luce visibile?
43. La luce delle stelle lontane è diffusa secondo Compton molte volte dagli elettroni liberi nello spazio, prima di giungere a noi. Questo fenomeno sposta la frequenza verso il rosso. Come lo si può distinguere dallo spostamento verso il rosso dell'effetto Doppler, dovuto all'allontanarsi delle stelle?
44. Sia nell'effetto fotoelettrico che in quello Compton, c'è un fotone incidente e un elettrone espulso. Qual è la differenza tra i due effetti?
45. Si elenchino e discutano le supposizioni fatte da Planck riguardo la radiazione di corpo nero, quelle fatte da Einstein per l'effetto fotoelettrico, e quelle di Compton sull'effetto che ha preso il suo nome.
46. Si descrivano diversi metodi sperimentali che possono essere usati per determinare il valore della costante h di Planck.

PROBLEMI

Paragrafo 49-1 Radiazione termica

1. Nel 1983 il satellite astronomico a infrarossi IRAS (Infrared Astronomical Satellite) individuò una nube di particelle solide che circondano la stella Vega, che emette radiazione, alla massima intensità, con lunghezza d'onda di 32 μm. Qual è la temperatura di questa nube di particelle? Si assuma un'emittanza pari all'unità.
2. I fisici delle basse temperature non considererebbero particolarmente bassa una temperatura di 2.0 mK (0.0020 K). Qual è la lunghezza d'onda corrispondente al massimo dell'irraggiamento spettrale di corpo nero a questa temperatura? A quale porzione dello spettro elettromagnetico appartiene questa radiazione? Quali sono alcune delle difficoltà nel creare una cavità radiante a temperature così basse?
3. Si calcoli la lunghezza d'onda del massimo irraggiamento spettrale nei seguenti casi, e si identifichi la porzione dello spettro elettromagnetico a cui appartiene: (*a*) La radiazione cosmica di fondo, di 2.7 K, residuo della esplosione primordiale. (*b*) Il nostro corpo, assumendo una temperatura cutanea di 34°C. (*c*) Il filamento di tungsteno di una lampadina.

a 1800 K. (*d*) Il Sole, supponendo una temperatura di superficie di 5800 K. (*e*) Un'esplosione termonucleare, la cui temperatura si presuma di 10^7 K. (*f*) L'universo subito dopo il Big Bang, ipotizzando una temperatura di 10^{38} K. In tutti questi casi si considerino condizioni d'irraggiamento di corpo nero.

4. (*a*) La temperatura efficace della superficie del Sole è di 5800 K. A quale lunghezza d'onda si può supporre che il Sole irraggi con massima intensità? In quale banda dello spettro si trova? Allora perché il Sole sembra giallo? (*b*) A quale temperatura la radiazione di corpo nero è più visibile all'occhio umano? Si veda la figura 1 nel capitolo 42.
5. Le pareti di una cavità sono mantenute a 1900 K, e in essa è praticato un foro con diametro di 1.00 mm. Con che intensità l'energia fuoriesce dalla cavità attraverso questa apertura?
6. Si calcoli la potenza termica diffusa da un caminetto, supponendo un'emittanza di 0.90, un superficie effettiva irraggiante di 0.50 m^2, e una temperatura d'irraggiamento di 500°C. Si ottiene una risposta ragionevole?
7. (*a*) Si illustri come un corpo umano, con area di 1.80 m^2, emittanza $\epsilon = 1.0$ e temperatura superficiale di 34°, emetta radiazione con potenza di 910 W. (*b*) Come mai allora non brilliamo al buio?
8. Una cavità a temperatura assoluta T_1 irraggia con potenza di 12.0 mW. Quale sarà la potenza irraggiata dalla stessa cavità alla temperatura di $2T_1$?
9. Un corpo nero ha l'irraggiamento spettrale massimo a una lunghezza d'onda di 25.0 μm, nella banda infrarossa dello spettro. Si aumenta ora la temperatura del corpo così che la sua intensità raggiante $I(T)$ è raddoppiata. (*a*) Qual è la sua nuova temperatura? (*b*) A quale lunghezza d'onda si verifica adesso il massimo del suo irraggiamento spettrale?
10. Una lampadina da 100 W ha un filamento incandescente di tungsteno di un diametro di 0.42 mm e una lunghezza in estensione di 33 cm. Durante il suo funzionamento presenta un'emittanza efficace di 0.22. Si trovi la temperatura effettiva a cui opera.
11. Un forno con una temperatura interna di $T_0 = 215$°C è in una stanza a una temperatura $T_r = 26.2$°C. Una piccola apertura di area di $A = 5.20$ cm^2 è praticata su un lato del forno. Che potenza netta si trasferisce dal forno alla stanza? (*Suggerimento*: Si consideri sia il forno che la stanza come corpo nero con $\epsilon = 1$.)
12. Un *termografo* è uno strumento medico usato per misurare la radiazione emessa dalla pelle. Per esempio, la pelle normalmente irraggia a una temperatura di circa 34°C, ma la pelle sopra a un tumore irraggia a un temperatura leggermente più alta. (*a*) Si elabori un'espressione approssimata per il rapporto $\Delta I/I$ per l'intensità d'irraggiamento tra aree contigue di pelle che hanno temperature un po' diverse T e $T + \Delta T$. (*b*) Si valuti questa espressione per la differenza di temperatura di 1.3°. Si supponga che la pelle irraggi con emittanza costante.
13. Una lente convessa di 3.8 cm di diametro con lunghezza focale di 26 cm produce un'immagine del Sole su un sottile schermo nero della stessa dimensione dell'immagine. Si trovi la temperatura massima a cui può giungere lo schermo. La temperatura efficace del Sole è di 5800 K.
14. Il filamento di una certa lampadina da 100 W è costituito da un filo cilindrico di tungsteno di 0.280 mm di diametro e 1.80 cm di lunghezza. Si veda l'appendice D per i dati necessari sul tungsteno. Si supponga un'emittanza pari a 1 e si ignori l'assorbimento di energia del filamento dal suo ambiente. (*a*) Calcolare la temperatura operativa del filamento. (*b*) Quanto tempo è necessario perché il filamento si raffreddi di 500°C, dopo che la lampadina è stata spenta?
15. Si immagini un pianeta, con un raggio R, che gira intorno al Sole in un orbita circolare di raggio r. Si supponga che il pianeta non abbia atmosfera (e perciò non abbia un «effetto serra» sulla sua temperatura di superficie). (*a*) Dimostrare che la temperatura di superficie T del pianeta è data dal rapporto $T^4 = P_{Sole}/16\pi\sigma r^2$, in cui la potenza irraggiata dal Sole è P_{Sole}. (*b*) Valutare la temperatura della Terra.

Paragrafo 49-2 Legge dell'irraggiamento di Planck

16. Si dimostri che la lunghezza d'onda λ_{max}, a cui la legge dell'irraggiamento di Planck (eq. 6) ha il massimo valore, è data dalla equazione 4:

$$\lambda_{max} = (2898\ \mu m \cdot K)/T.$$

(*Suggerimento*: Si ponga $dR/d\lambda = 0$; si troverà un'equazione la cui soluzione numerica è 4.965.)

17. (*a*) Integrando la legge dell'irraggiamento di Planck (eq. 6) su tutte le lunghezze d'onda, dimostrare che la potenza irradiata per metro quadrato da una superficie di corpo nero è data da

$$I(T) = \left(\frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}\right)T^4 = \sigma T^4.$$

(*Suggerimento*: Sostituire le variabili, ponendo $x = hc/\lambda kT$. Si troverà l'integrale definito

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

che equivale a $\pi^4/15$.) (*b*) Verificare che il valore numerico della costante σ è $5.67 \cdot 10^{-8}$ $W/(m^2 \cdot K^4)$.

18. (*a*) Un radiatore ideale presenta a 400 nm un irraggiamento spettrale che è 3.50 volte il suo irraggiamento spettrale a 200 nm. Qual è la sua temperatura? (*b*) Quale sarebbe la sua temperatura se il suo irraggiamento spettrale a 200 nm fosse 3.50 volte l'irraggiamento spettrale che ha a 400 nm?

Paragrafo 49-4 Capacità termiche dei solidi

19. A quale temperatura, in termini di temperatura di Einstein T_E, l'energia interna molare di un solido raggiunge la metà del suo valore classico $3RT$?
20. (*a*) Dimostrare che l'energia molare interna E_{int} può essere scritta, secondo la teoria del calore specifico di Einstein, come

$$E_{int} = 3RT_E\left(\frac{1}{e^x - 1}\right),$$

in cui $x = T_E/T$, essendo T_E la *temperatura di Einstein* $h\nu/k$. (*b*) Si verifichi che E_{int} si avvicina al suo valore classico di $3RT$ quando $T \to \infty$.

21. Secondo la teoria di Einstein della capacità termica dei solidi, (*a*) qual è la capacità termica molare di un solido a volume costante alla temperatura di Einstein? Esprimere la risposta in termini di percentuale del suo valore classico $3R$. (*b*) Qual è l'energia molare interna alla temperatura di Einstein? Esprimere la risposta in termini di percentuale del suo valore classico $3RT$.
22. Dimostrare che, a temperature abbastanza elevate, l'espressione della capacità termica molare di un solido (eq. 14) di Einstein si riduce alla formula classica espressa nell'equazione 11.

ISBN 88-408-0777-2

23. Le temperature di Einstein del piombo, alluminio e berillio possono essere stabilite in 68 K, 290 K, e 690 K, rispettivamente. Trovare per ciascuno di questi elementi (*a*) la frequenza ν dei suoi oscillatori atomici, (*b*) l'intervallo ΔE tra livelli contigui di oscillatori atomici, e (*c*) la costante elastica efficace k.
24. La temperatura di Einstein dell'alluminio è circa 290 K. Secondo la teoria di Einstein della capacità termica molare, quali sono (*a*) la sua energia interna molare (vedi problema 20) a 150 K, e (*b*) la sua capacità termica molare a 150 K, in condizioni di volume costante?
25. Un blocco di alluminio di 12 g è riscaldato da 80 K a 180 K, in condizioni di volume costante. Quanto calore bisogna fornire secondo (*a*) la teoria classica della capacità termica molare, e (*b*) la teoria quantistica di Einstein della capacità termica molare? La temperatura di Einstein dell'alluminio si può assumere pari a 290 K.
26. Si supponga che 25 g di alluminio a 80 K vengano accuratamente mischiati con 12 g di alluminio a 200 K in un contenitore isolato. Qual è la temperatura finale del miscuglio? Assumere che valga la teoria di Einstein e che, a queste temperature piuttosto basse, la differenza tra la capacità termica a volume costante e quello a pressione costante si possa trascurare. Inoltre si assuma che non ci sia scambio di energia tra i due campioni di alluminio e il contenitore. La temperatura di Einstein dell'alluminio può essere considerata di 290 K.

Paragrafo 49-6 La teoria dei fotoni di Einstein

27. (*a*) Usando i «migliori» valori delle costanti fondamentali, come indicate nell'appendice B, dimostrare che l'energia E di un fotone è legata alla sua lunghezza d'onda λ da

$$E = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{\lambda}$$

Questo risultato può essere utile nella soluzione di molti problemi. (*b*) La luce arancione di una lampione stradale a vapori di sodio ha una lunghezza d'onda di 589 nm. Quanta energia possiede un singolo fotone di questa luce?
28. Si consideri la luce monocromatica che colpisce una pellicola fotografica. I fotoni incidenti lasceranno una traccia se hanno abbastanza energia da dissociare una molecola di AgBr nel film. L'energia minima necessaria è di circa 0.60 eV. Trovare la lunghezza d'onda di soglia oltre la quale la luce non impressiona la pellicola. In quale regione dello spettro si trova?
29. Un atomo assorbe un fotone con una lunghezza d'onda di 375 nm ed emette immediatamente un altro fotone di lunghezza d'onda pari a 580 nm. Quale è stata l'energia netta assorbita dall'atomo in questo processo?
30. (*a*) La riga spettrale di emissione dell'idrogeno, importante nella radioastronomia, ha una lunghezza d'onda di 21.11 cm. Qual è la corrispondente energia di un suo fotone? (*b*) Per un certo periodo di tempo si è usata la definizione del metro come 1 650 763.73 lunghezze d'onda della luce arancione emessa da una sorgente luminosa contenente atomi di ^{86}Kr. Qual è l'energia del fotone corrispondente a questa radiazione?
31. La maggior parte dei processi di ionizzazione dei gas richiede scambi di energia da 1.0×10^{-18} fino a 1.0×10^{-16} J. Quale porzione dello spettro elettromagnetico solare è maggiormente interessata nella formazione della ionosfera nell'atmosfera terrestre?
32. In condizioni ideali l'occhio umano normale registra una percezione visiva a 540 nm. se i fotoni incidenti sono assorbiti a un ritmo di almeno 100 s^{-1}. A quale potenza corrisponde?
33. Volendo scegliere una sostanza per una fotocellula che funzioni con luce visibile, quali di queste sarebbe appropriata? (tra parentesi l'energia di estrazione): tantalio (4.2 eV), tungsteno (4.5 eV), alluminio (4.2 eV), bario (2.5 eV), litio (2.3 eV), cesio (1.9 eV).
34. Satelliti e navicelle spaziali in orbita intorno alla terra possono caricarsi elettricamente in parte a causa della perdita di elettroni prodotta dall'effetto fotoelettrico della luce solare sulla superficie esterna del veicolo spaziale. Si supponga che un satellite sia ricoperto di platino, uno dei metalli con la più alta energia di estrazione: $\phi = 5.32$ eV. Trovare qual è la frequenza minima necessaria per estrarre un fotoelettrone dal platino. (I satelliti devono essere progettati in modo da minimizzare quest'effetto di carica.)
35. (*a*) L'energia necessaria per rimuovere un elettrone dal sodio metallico è di 2.28 eV. La luce rossa, con $\lambda = 678$ nm, produce l'effetto fotoelettrico nel sodio? (*b*) Qual è la lunghezza d'onda di soglia per ottenere corrente fotoelettrica dal sodio e a quale colore corrisponde?
36. Trovare la massima energia cinetica in eV dei fotoelettroni emessi da una sostanza la cui energia di estrazione è 2.33 eV, quando la frequenza della radiazione incidente è di 3.19×10^{15} Hz.
37. Una corrente di fotoni investe una superficie di sodio, che ha un'energia di estrazione di 2.28 eV, provocando un'emissione fotoelettrica. Quando si applica un potenziale di arresto di 4.92 V, la fotocorrente cessa. Trovare la lunghezza d'onda dei fotoni incidenti.
38. Luce di lunghezza d'onda pari a 200 nm colpisce una superficie di alluminio. Per rimuovere un elettrone dall'alluminio, è necessaria un'energia di 4.2 eV. Qual è l'energia cinetica dei (*a*) i fotoelettroni più veloci e (*b*) dei più lenti? (*c*) Trovare il potenziale d'arresto. (*d*) Calcolare la lunghezza d'onda di soglia per l'alluminio.
39. (*a*) Se l'energia d'estrazione di un certo metallo è 1.85 eV, qual è il potenziale d'arresto per una luce di lunghezza d'onda di 410 nm? (*b*) Qual è la velocità massima dei fotoelettroni emessi dalla superficie del metallo?
40. Il potenziale d'arresto per fotoelettroni emessi da una superficie illuminata da una luce di lunghezza d'onda pari a 491 nm è 710 mV. Cambiando la lunghezza d'onda della luce incidente, il potenziale d'arresto diventa 1.43 V. (*a*) Qual è la nuova lunghezza d'onda? (*b*) Qual è l'energia di estrazione della sostanza emettitrice?
41. I dati fotoelettrici ottenuti da Millikan per il litio sono:

Lunghezza d'onda (nm)	433.9	404.7	365.0	312.5	253.5
Potenziale d'arresto (V)	0.55	0.73	1.09	1.67	2.57

Si costruisca un grafico, simile a quello della figura 11 per il sodio, e si trovi (*a*) la costante di Planck e (*b*) l'energia di estrazione del litio.
42. Una superficie di litio, la cui energia d'estrazione è 2.49 eV, è irraggiata da una luce di frequenza 6.33×10^{14} Hz. L'emissione progressiva di elettroni conferisce al metallo un potenziale positivo. Quale valore deve assumere questo potenziale per arrivare a impedire una ulteriore perdita di elettroni?
43. Un satellite in orbita intorno alla Terra mantiene un pannello di celle solari perpendicolare alla direzione dei raggi del Sole. Assumendo che la radiazione solare sia monocromatica con una lunghezza d'onda di 550 nm e che investa la superficie con un'intensità di 1.38 kW m^2. quale deve essere l'area

del pannello affinché in un minuto vi incida una quantità di fotoni pari al numero di Avogadro?

44. Nel quadro della rappresentazione fotonica della radiazione, si dimostri che, se due fasci paralleli di luce di differente lunghezza d'onda devono avere la stessa intensità, i due flussi per unità di area dei fotoni che attraversano una sezione perpendicolare dei raggi, devono stare necessariamente nello stesso rapporto delle rispettive lunghezze d'onda.
45. Una lampada a luce ultravioletta, che emette alla lunghezza d'onda di 400 nm, e una lampada a luce infrarossa, che emette a 700 nm, irraggiano una potenza di 130 W ciascuna. (*a*) Quale delle due emette più fotoni? (*b*) Quanti fotoni in più dell'altra genera ogni secondo?
46. Per liberare un elettrone interno più strettamente legato da un atomo di molibdeno, è necessaria un'energia di 20 keV. Se, per ottenerne l'espulsione, si colpisce l'atomo con un fotone, (*a*) quale dovrebbe essere la lunghezza d'onda associata al fotone? (*b*) In quale regione dello spettro si trova il fotone? (*c*) Si può definire questo processo fotoelettrico? Si spieghi la risposta.
47. Raggi X di lunghezza d'onda pari a 71.0 pm estraggono fotoelettroni da un foglio d'oro, elettroni che provengono dai livelli più interni dell'atomo. Essi si muovono su una traiettoria circolare di raggio r in un campo magnetico uniforme **B**. I risultati sperimentali indicano che $rB = 188\ \mu T \cdot m$. Trovare (*a*) la massima energia cinetica dei fotoelettroni e (*b*) il lavoro compiuto nel rimuovere gli elettroni dagli atomi d'oro.
48. Una speciale lampadina emette luce monocromatica di una lunghezza d'onda pari a 630 nm, dissipa una potenza di 70.0 W e presenta un rendimento del 93.2% nella conversione dell'energia elettrica in energia luminosa. Quanti fotoni emetterà nella sua vita media prevista in 730 ore?
49. Assumiamo che una lampada da 100 W a vapori di sodio irraggi la sua energia uniformemente in tutte le direzioni sotto forma di fotoni con una lunghezza d'onda associata di 589 nm. (*a*) Con quale intensità la lampada emette fotoni? (*b*) A quale distanza dalla lampada si registrerà un flusso di 1.00 fotone/(cm^2 · s)? (*c*) A quale distanza dalla lampada si avrà una densità di 1.00 fotone/cm^3? (*d*) Calcolare il flusso di fotoni e la loro densità a 2.00 m dalla lampada.
50. Dimostrare, analizzando una collisione tra un fotone e un elettrone libero (applicare la meccanica relativistica), che è impossibile per un fotone cedere tutta la sua energia a un elettrone libero. In altre parole, non può esserci effetto fotoelettrico per elettroni completamente liberi; gli elettroni devono essere vincolati in un solido o in un atomo perché ciò avvenga.

Paragrafo 49-7 Effetto Compton

51. Un particolare fotone di raggi X ha una lunghezza d'onda di 41.6 pm. Calcolarne (*a*) l'energia, (*b*) la frequenza, e (*c*) la quantità di moto.
52. Trovare (*a*) la frequenza, (*b*) la lunghezza d'onda, e (*c*) la quantità di moto di un fotone la cui energia sia uguale all'energia a riposo dell'elettrone.
53. Di quanto rallenta un atomo di sodio nell'assorbire un fotone con lunghezza d'onda di 589 nm in una collisione frontale?
54. La quantità h/mc nell'equazione 25 è chiamata spesso lunghezza d'onda Compton, λ_C, della particella diffusa e quell'equazione è scritta

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\phi).$$

(*a*) Calcolare la lunghezza d'onda Compton di un elettrone e di un protone. (*b*) Qual è l'energia di un fotone che ha lunghezza d'onda uguale alla lunghezza d'onda Compton dell'elettrone? E del protone? (*c*) Dimostrare che in generale l'energia di un fotone la cui lunghezza d'onda è uguale alla lunghezza d'onda Compton di una particella è pari proprio all'energia a riposo di quella particella.

55. Fotoni di lunghezza d'onda di 2.17 pm incidono su elettroni liberi. (*a*) Trovare la lunghezza d'onda di un fotone che viene deviato di 35.0° dalla direzione di incidenza. (*b*) E quella che assume quando l'angolo di diffusione è di 115°.
56. Un fotone di raggi gamma, con energia di 511 keV, viene diffuso per processo Compton da un elettrone libero in un blocco di alluminio. (*a*) Qual è la lunghezza d'onda del fotone incidente? (*b*) Qual è la lunghezza d'onda del fotone diffuso? (*c*) E la sua energia? Si supponga un angolo di deviazione di 72.0°.
57. Dimostrare che $\Delta E/E$, la perdita relativa di energia di un fotone durante una collisione Compton, è data da

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{h\nu'}{mc^2}(1 - \cos\phi).$$

58. Quale aumento percentuale di lunghezza d'onda porta a una perdita del 75% dell'energia del fotone in una collisione Compton con un elettrone libero?
59. Trovare il massimo spostamento di lunghezza d'onda per una collisione Compton tra un fotone e un protone libero.
60. Un fotone di raggi X, con energia di 6.2 keV, colpisce un campione di carbonio, viene diffuso da una collisione di tipo Compton e la sua frequenza si sposta dello 0.010%. (*a*) A quale angolo è deviato il fotone? (*b*) Quanta energia cinetica si trasferisce all'elettrone?
61. Un fotone di raggi X con lunghezza d'onda $\lambda = 9.77$ pm è diffuso all'indietro da un elettrone ($\phi = 180°$). Determinare (*a*) lo spostamento in lunghezza d'onda del fotone, (*b*) la variazione della sua energia, e (*c*) l'energia cinetica finale dell'elettrone.
62. Calcolare la variazione relativa nell'energia del fotone per una collisione Compton con ϕ (fig. 14) uguale a 90° per la radiazione (*a*) nella regione delle microonde, con $\lambda = 3.00$ cm, (*b*) nella regione dello spettro visibile, con $\lambda = 500$ nm, (*c*) nella regione dei raggi X, con $\lambda = 0.10$ nm, e (*d*) dei raggi γ, con $\lambda = 1.30$ pm. Quali sono le conclusioni che si possono trarre circa l'importanza dell'effetto Compton in queste diverse regioni dello spettro elettromagnetico, giudicando esclusivamente in base al criterio della perdita di energia in un singolo evento di diffusione?
63. A quale angolo un fotone di 215 keV deve essere diffuso da un elettrone libero perché perda il 10.0% della sua energia?
64. Si proceda con i necessari passaggi algebrici per eliminare ν e θ dalle equazioni 21, 23 e 24 e ottenere la relazione dello spostamento Compton, equazione 25.
65. (*a*) Dimostrare che, quando un fotone di energia E è deviato da un elettrone libero, la massima energia cinetica di rinculo dell'elettrone è data da

$$K_{max} = \frac{E^2}{E - mc^2/2}.$$

(*b*) Trovare la massima energia cinetica degli elettroni diffusi per effetto Compton, rimossi da un foglio di rame sottile colpito da raggi X dotati di un'energia pari a 17.5 keV.

Capitolo 50

LA NATURA ONDULATORIA DELLA MATERIA

I fisici hanno sbagliato di rado quando hanno prestato fede al principio basilare della simmetria della natura. Per esempio, dopo aver scoperto che un campo magnetico variabile produce un campo elettrico, sembrava logico assumere che la variazione di un campo elettrico generasse un campo elettromagnetico. E l'ipotesi risultò esatta. Essendo conosciuto il fatto che un elettrone ha un'antiparticella (una particella della stessa massa, ma di carica opposta), si suppose quindi che anche il protone potesse avere un'antiparticella. Sulla base di questa assunzione, si costruì un acceleratore di protoni di energia adeguata (si veda l'esempio 9 del capitolo 21) e l'esistenza dell'antiprotone fu confermata.

Nel capitolo precedente, abbiamo discusso le proprietà corpuscolari della luce e di altre radiazioni, che sono tradizionalmente considerate come onde. Ispirandosi al principio di simmetria, è naturale porsi la seguente domanda: «La materia, che è tradizionalmente trattata come costituita di particelle, ha anche proprietà ondulatorie?». In questo capitolo si descrive come quest'ipotesi si sia rivelata realtà, e si discute la meccanica di tale comportamento ondulatorio, che è conosciuta come meccanica dei quanti. *Come vedremo nei prossimi capitoli, la meccanica quantistica fornisce gli strumenti per capire il comportamento fondamentale dei sistemi fisici, dai solidi ai quark.*

50-1 PARTICELLE CHE SI COMPORTANO COME ONDE

Prima di considerare l'analisi del comportamento ondulatorio delle particelle, vediamo di convincerci che esse davvero si comportano come tali. Come abbiamo visto, la radiazione elettromagnetica può essere trattata, nella maggior parte delle circostanze, come un'onda; il suo aspetto di particella può essere rivelato direttamente solo in pochi esperimenti particolari. Abbiamo anche ottenuto una gran quantità di risultati nel trattare la materia sulla premessa che sia composta di elementi singoli con proprietà esclusivamente corpuscolari. Per esempio, non è necessario considerare la natura ondulatoria della materia in una partita di biliardo o nella costruzione di un edificio. Tuttavia, c'è una quantità di esperimenti che può essere capita solo se consideriamo in termini di onde gli elementi che abitualmente consideriamo come particelle.

Nei capitoli 45 e 46. abbiamo discusso esperimenti di interferenza e diffrazione, e abbiamo affermato che l'apparire di modelli d'interferenza e di diffrazione è un chiaro indizio del comportamento ondulatorio. Quindi, se si cerca una prova diretta del comportamento ondulatorio delle particelle, gli esperimenti d'interferenza e di diffrazione sono il punto da cui è logico cominciare.

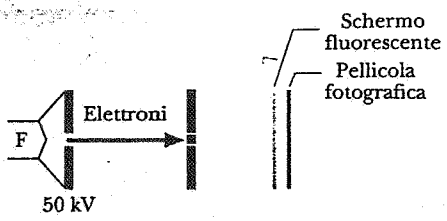
La figura 1*a* mostra un flusso di elettroni incidenti su una doppia fenditura. Gli elettroni sono accelerati fino a una data energia, applicando una differenza di potenziale V e, dopo essere passati attraverso la doppia fenditura, colpiscono uno schermo fluorescente (come quello dei televisori). La figura che ne risulta viene rivelata da una pellicola fotografica. La disposizione sperimentale della figura 1*a* somiglia molto a quella di Young per l'interferenza con le onde luminose.

I risultati di questo esperimento sono illustrati nella figura 1*b*. Non ci dovrebbe essere alcun dubbio che si è in presenza di una figura d'interferenza. Se gli elettroni non avessero un comportamento ondulatorio, ci si potrebbe aspettare di vedere sullo schermo regioni chiare solo di fronte ai due tagli. È chiaro invece che il risultato è ben più complesso e il comportamento ondulatorio degli elettroni ne è responsabile.

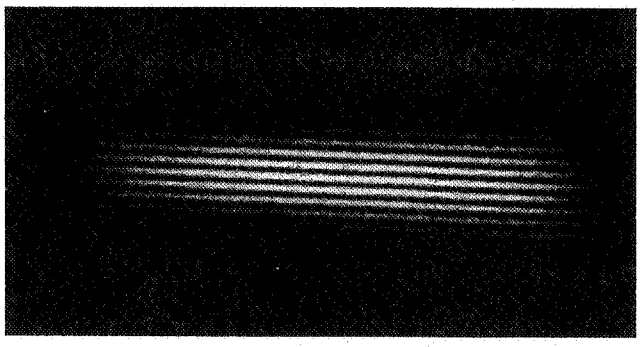
Possiamo sostituire la doppia fenditura con un'apertura circolare, che produce lo schema di diffrazione illustrato nella figura 2. Ancora una volta, avviene qualche fenomeno diverso dal semplice passaggio rettilineo di particelle attraverso l'apertura.

La figura 3 confronta i risultati di diffrazione prodotti da un bordo netto per un fascio di elettroni e

ISBN 88-408-0777-2



(*a*)



(*b*)

Figura 1 (*a*) Apparato per produrre interferenza da doppia fenditura per elettroni. Un filamento F produce un fascio di elettroni, che vengono accelerati da un potenziale di 50 kV. Gli elettroni che passano attraverso la singola fenditura di collimazione investono la doppia fenditura. Essi generano una figura visibile quando colpiscono lo schermo fluorescente, che si può anche fotografare. (*b*) Immagine della figura prodotta dagli elettroni, in cui si distinguono le frange d'interferenza.

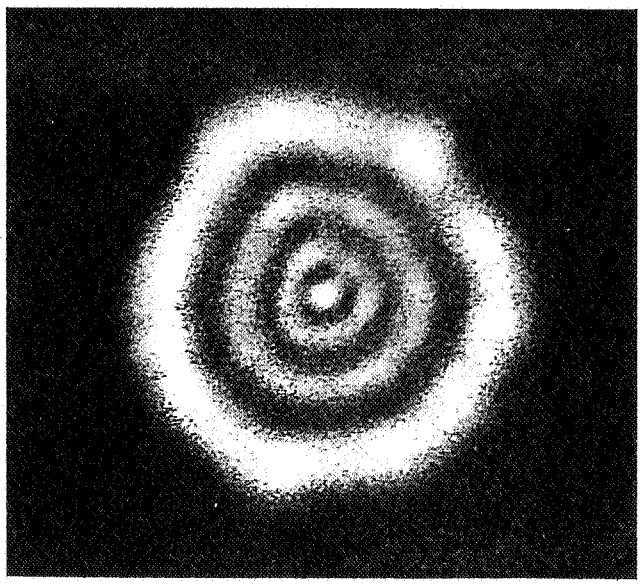
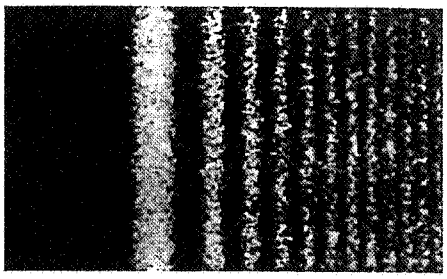
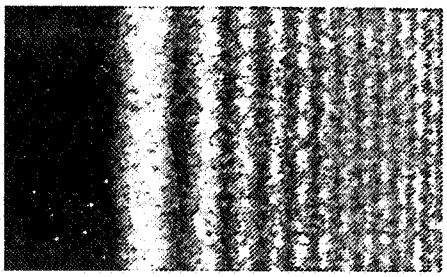


Figura 2 Una figura di diffrazione generata da elettroni con energia pari a 100 keV attraverso un'apertura circolare del diametro di 30 μm. La si confronti con la figura di diffrazione ottica (fig. 2, cap. 46).



(*a*)



(*b*)

Figura 3 Diffrazione generata da (*a*) luce e (*b*) elettroni passanti rasente a un bordo netto.

uno di luce. Il confronto è una prova convincente che gli elettroni si comportano come onde.

Esiste forse qualche caratteristica propria dei soli elettroni che causa questo comportamento? Proviamo l'esperimento con i neutroni, che differiscono dagli elettroni per diversi aspetti: i neutroni sono più pesanti (di un fattore circa 2000), sono privi di carica, e sono particelle composte (mentre gli elettroni sono sostanzialmente particelle «puntiformi»). Se anche i neutroni mostrano un comportamento ondulatorio, si può ipotizzare che questo comportamento non abbia niente a che vedere con proprietà particolari degli elettroni, ma che sia invece caratteristico delle particelle in generale.

Per mettere in evidenza l'interferenza prodotta dai neutroni, si dispone un filo fatto di un materiale che ha un'alta capacità di assorbimento dei neutroni (per esempio, boro) lungo una fessura leggermente più larga del diametro del filo e praticata in un materiale che li assorbe in maniera analoga. In pratica si crea così una doppia fenditura. Un rivelatore di neutroni esplora sistematicamente lo spazio alla ricerca del flusso di neutroni trasmesso e ne misura l'intensità in funzione della posizione. I risultati sono indicati nella figura 4. Ancora una volta, se i neutroni si comportassero come particelle tradizionali, dovremmo trovare due picchi di intensità di fronte alle fenditure. Invece si riscontra un evidente effetto dovuto all'interferenza.

La figura 5 mostra i risultati di un esperimento in cui un flusso di atomi di elio passa attraverso una doppia fenditura. Malgrado i risultati non siano altret-

ISBN 88-408-0777-2

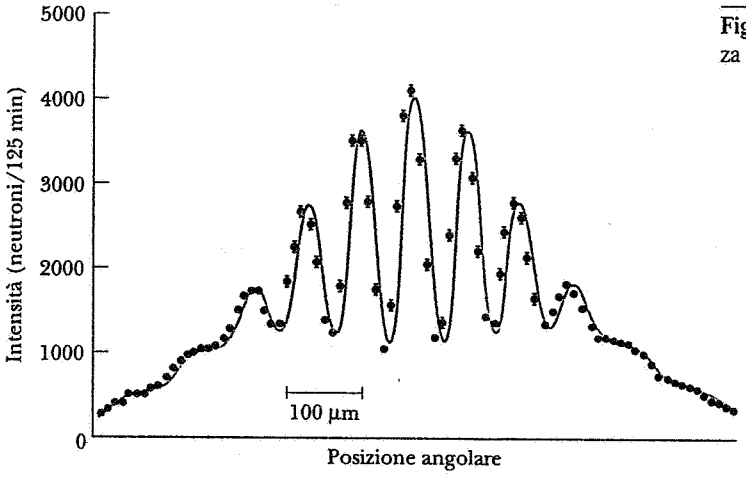


Figura 4 Distribuzione dell'intensità nella figura d'interferenza prodotta da neutroni attraverso una doppia fenditura.

tanto sensazionali come quelli con gli elettroni e neutroni, c'è anche qui un segno di figure di interferenza simili a quelle ottenute con la luce.

In questi esperimenti si usano dei tipi di particelle molto diversi e differenti tipi di fenditure e di rivelatori, eppure hanno tutti in comune un aspetto: le particelle sembrano soggette allo stesso tipo di interferenza. Esperimenti di questo genere forniscono evidenza diretta della natura ondulatoria delle particelle.

A questo punto, ci si può chiedere come le particelle creino una tale figura d'interferenza. La nostra analisi dell'esperienza di Young secondo il principio ondulatorio (nel capitolo 45) era basata su parti di un singolo fronte d'onda che passano attraverso ciascuna fenditura e che si ricompongono poi sullo schermo. È possibile che le parti di un elettrone o di un neutrone o di un atomo di elio passino attraverso ciascuna fenditura per poi ricongiungersi? Questa è una domanda difficile, ma una domanda cui è essenziale rispondere per capire il comportamento dei quanti. La risposta è positiva, e ne discuteremo più a fondo nel paragrafo conclusivo di questo capitolo.

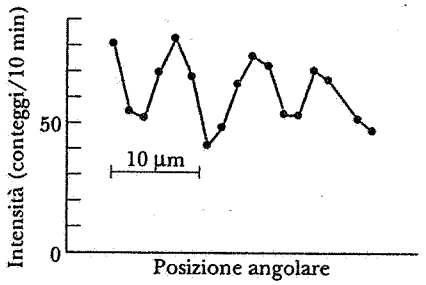


Figura 5 Distribuzione dell'intensità nella figura prodotta da atomi di elio passanti attraverso una doppia fenditura.

Dalla figura 5 possiamo valutare che la distanza tra i minimi (che è la stessa di quella tra i massimi) sia circa 8 μm, e così

$$\lambda = \frac{d\Delta y}{D} = \frac{(8 \times 10^{-6}\ \text{m})(8 \times 10^{-6}\ \text{m})}{0.64\ \text{m}} = 1.0 \times 10^{-10}\ \text{m}.$$

Esempio 1 I dati riportati nella figura 5 sono stati ottenuti con una distanza d tra le fenditure di 8 μm e il rivelatore posto a una distanza D =64 cm dalle fenditure. Misurando la distanza delle frange, si trovi la lunghezza d'onda degli atomi di elio.

Soluzione Nell'esempio 2 del capitolo 45, abbiamo trovato che la distanza tra due frange d'interferenza contigue è

$$\Delta y = \frac{\lambda D}{d}.$$

50-2 LUNGHEZZA D'ONDA DI DE BROGLIE

Gli esperimenti discussi nel paragrafo precedente sono stati compiuti nella storia recente, quando sono diventate disponibili le apparecchiature necessarie per produrre con precisione fessure sottilissime e fasci stabili. Ma l'ipotesi che le particelle abbiano una natura ondulatoria è stata proposta molto prima che si potessero ottenere questi risultati per provarla, essendo inizialmente basata su argomenti indiretti riferentisi in parte alla simmetria della natura.

Nel 1924 il fisico Louis De Broglie, membro di una distinta famiglia aristocratica francese, indagò sul fatto che la radiazione sembra presentare una dicotomia

onda-particella, mentre a quel tempo la materia era considerata esclusivamente formata da particelle. Ma la materia e la radiazione hanno un altro aspetto in comune: tutte e due sono forme di energia, ciascuna può essere trasformata nell'altra, e sono governate dalle simmetrie spazio-temporali della teoria della relatività. De Broglie cominciò a pensare che anche la materia dovesse avere una doppia natura e che particelle come gli elettroni dovessero avere proprietà ondulatorie.

L'equazione 22 del capitolo 49 fornisce il legame tra la proprietà ondulatoria della radiazione, la lunghezza d'onda, e la proprietà materiale della particella, la quantità di moto: $p = h/\lambda$, in cui h è la costante di Planck. De Broglie suggerì che sia lo stesso rapporto a legare la doppia proprietà della materia che si presenta come particella e come onda. In altre parole, associata con una particella libera, che si muove con una quantità di moto p, c'è un'onda sinusoidale con una lunghezza λ, data da

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (1)$$

La lunghezza d'onda di una particella calcolata secondo l'equazione 1 è detta *lunghezza d'onda di De Broglie*. Si noti che la costante di Planck costituisce l'anello di congiunzione tra la natura d'onda e quella di particella di entrambe le entità, materia e radiazione.

L'equazione 1 rende immediatamente conto del perché non è possibile osservare il comportamento ondulatorio negli oggetti che ci circondano. La costante di Planck è così piccola ($\approx 10^{-33}$ J · s) che la lunghezza d'onda degli oggetti comuni è di molti ordini di grandezza inferiore alla dimensione di un nucleo atomico! È impossibile rivelare la natura ondulatoria della materia costruendo una doppia fenditura di queste dimensioni. Nel mondo atomico o subatomico, tuttavia, la quantità di moto p può essere piccola a sufficienza da portare la lunghezza d'onda di De Broglie a valori per cui le proprietà ondulatorie possono essere osservate, come abbiamo illustrato nel paragrafo precedente.

La relazione di De Broglie ci fornisce il mezzo per calcolare la lunghezza d'onda relativa alla proprietà ondulatoria della materia. Non dà alcuna indicazione sull'ampiezza dell'onda, né suggerisce quale sia la variabile fisica che oscilla nell'avanzamento dell'onda. Considereremo la questione nel paragrafo 50-6.

Esempio 2 Si calcoli la lunghezza d'onda di De Broglie di (*a*) un virus di massa 1.0×10^{-15} kg, che si muove a una velocità di 2.0 mm/s, e (*b*) un elettrone la cui energia cinetica sia di 120 eV.

Soluzione Usando l'equazione 1, troviamo

$$(a)\quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{(1.0 \times 10^{-15}\ \text{kg})(2.0 \times 10^{-3}\ \text{m/s})} = 3.3 \times 10^{-16}\ \text{m},$$

$$(b)\quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{6.6 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(120\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}} = 1.1 \times 10^{-10}\ \text{m}.$$

Perfino per un oggetto tanto minuto come un virus che si muove lentamente, la lunghezza d'onda di De Broglie è troppo piccola per essere rilevata (inferiore a un nucleo atomico). Per oggetti più grandi, il comportamento ondulatorio è completamente inosservabile. Per l'elettrone della parte (*b*), però, la lunghezza d'onda di De Broglie ha circa la stessa dimensione di un atomo, e (come vedremo) l'uso di atomi come ostacoli diffrangenti per gli elettroni permette di verificare che la lunghezza d'onda di De Broglie davvero caratterizza il comportamento ondulatorio degli elettroni.

50-3 ESPERIMENTI SULL'IPOTESI DI DE BROGLIE

Se si vuole provare che si è in presenza di un'onda, un procedimento convincente è di misurarne la lunghezza. Nel 1801, per esempio, Thomas Young introdusse un argomento decisivo a sostegno dell'ipotesi della natura ondulatoria della luce visibile quando misurò la sua lunghezza d'onda, usando l'interferenza da doppia fenditura.

Per misurare una lunghezza d'onda usando il metodo della doppia fenditura (o qualsiasi mezzo simile), si necessita di due o più centri di diffrazione (fenditure) separati da una distanza che è dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda stessa. L'esempio 2*a* rende immediatamente chiaro che è inutile cercare di misurare la lunghezza d'onda di una particella pur piccola come un virus; sarebbe necessario avere due fessure separate da una distanza di 10^{-16} m. Per questa ragione la nostra esperienza quotidiana con oggetti di grandi dimensioni in movimento non dà indicazione della natura ondulatoria della materia. L'esempio 2*b*, però, lascia pensare che *sia forse* possibile misurare la lunghezza d'onda di un elettrone in movimento. Si descriveranno ora due metodi per realizzare una tale misurazione.

1. *L'esperimento di Davisson-Germer.* L'esempio 2*b* indica che dovrebbe essere possibile usare un cristallo come reticolo di diffrazione per misurare la lunghezza d'onda di De Broglie di elettroni aventi energia cineti-

ISBN 88-408-0777-2

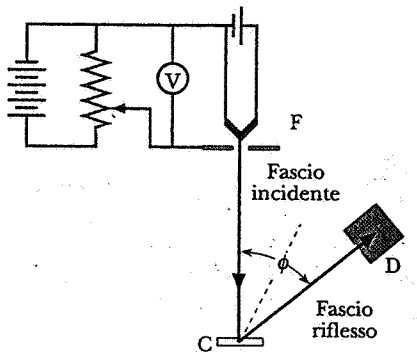


Figura 6 L'apparato usato nell'esperimento di Davisson-Germer. Gli elettroni vengono emessi dal filamento F e accelerati da una differenza di potenziale regolabile V. Dopo una riflessione sul cristallo C, vengono registrati dal rivelatore D, che può assumere qualsiasi posizione angolare ϕ.

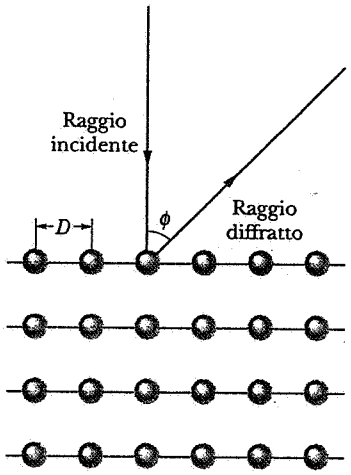


Figura 8 Il piano del cristallo agisce come un reticolo di diffrazione con passo D.

ca di poche centinaia di elettronvolt. La figura 6 schematizza l'apparecchio usato per questo scopo da C.J. Davisson e L.H. Germer che lavoravano nei laboratori oggi diventati della AT&T Bell Laboratories. Nel 1937 a Davisson fu attribuito assieme ad altri il premio Nobel per questa ricerca.

Nell'apparato di Davisson-Germer, gli elettroni sono accelerati, a partire da un filamento riscaldato F, tramite una differenza di potenziale V regolabile. Il fascio, costituito di elettroni la cui energia cinetica è eV, è diretto su un cristallo C, che nell'esperimento era di nichel. Il rivelatore D è posto a un angolo variabile ϕ e misura la corrente I che lo attraversa e dovuta agli elettroni riflessi da C per varie differenze di potenziale V. La figura 7 illustra i risultati di cinque prove. Si vede che c'è un intenso fascio diffratto per $\phi = 50°$ e $V = 54$ V. Se l'angolo o il potenziale di accelerazione sono alterati, l'intensità del fascio diffratto decresce.

La figura 8 è una rappresentazione semplificata del cristallo di nichel C della figura 6. Dato che un fascio di elettroni a bassa energia non penetra nel cristallo in profondità, è sufficiente considerare la diffrazione che avviene nel piano superficiale di atomi. La situazione è molto simile a quella della luce riflessa da un reticolo di diffrazione. In questo caso le «incisioni» del reticolo sono file parallele di atomi che giacciono sulla superficie del cristallo, e il passo del reticolo è dato dall'intervallo D, nella figura 8. I massimi principali per un tale reticolo devono soddisfare l'equazione 1 del capitolo 47,

$$m\lambda = D\text{sen}\phi \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{2}$$

Per il cristallo usato da Davisson e Germer era noto che $D = 215$ pm. Per $m = 1$, che corrisponde al picco di diffrazione di primo ordine, l'equazione 2 porta a

$$\lambda = D\text{sen}\phi = (215\text{ pm})(\text{sen } 50°) = 165\text{ pm}.$$

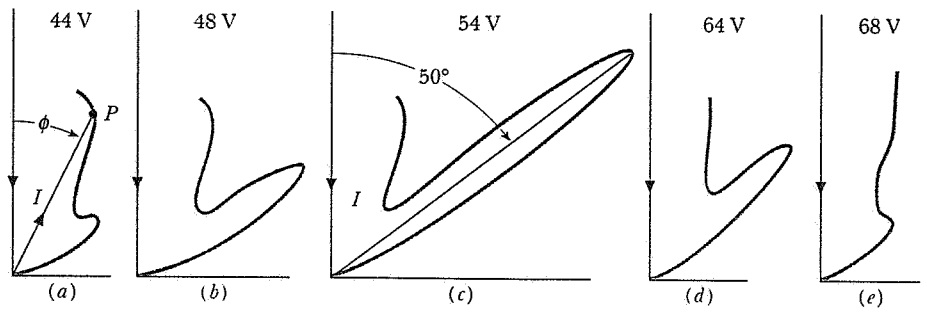


Figura 7 I risultati ottenuti da Davisson e Germer per cinque diversi potenziali acceleratori, visti in diagrammi polari che riportano la corrente I in funzione dell'angolo ϕ. Una figura di diffrazione pronunciata si osserva in (c) per un angolo $\phi = 50°$ e una tensione $V = 54$ V.

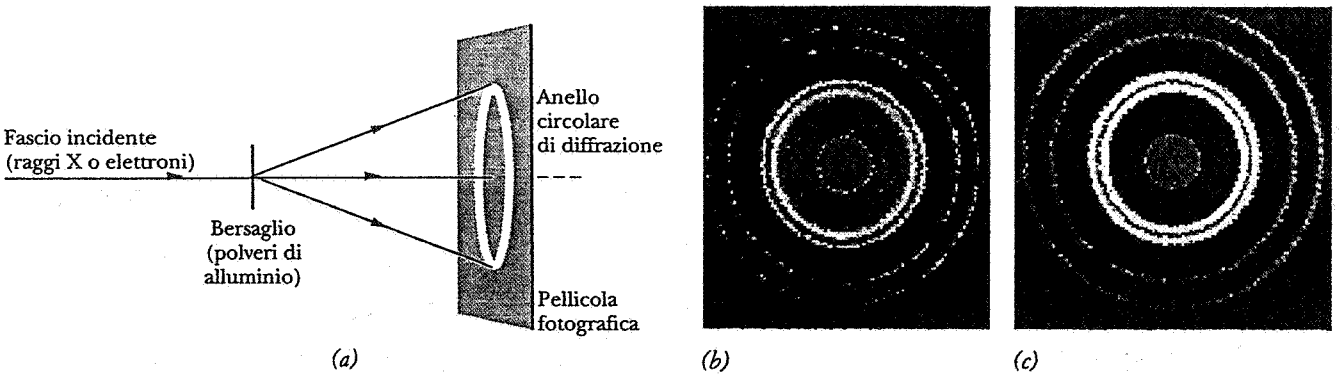


Figura 9 (*a*) Un dispositivo per generare una figura di diffrazione utilizzando un bersaglio monocristallino o a polveri di cristallo. (*b*) La figura di diffrazione X prodotta dal bersaglio a polveri di alluminio. (*c*) La figura di diffrazione prodotta da elettroni attraverso il medesimo bersaglio. L'energia degli elettroni è stata scelta in modo che la lunghezza d'onda di De Broglie sia uguale alla lunghezza d'onda dei raggi X usati in (*b*).

La lunghezza d'onda di De Broglie per un elettrone di 54 eV, calcolata come nell'esempio 2*b*, si aggira intorno a 167 pm, in accordo con il valore misurato. La previsione di De Broglie è confermata.

2. *L'esperimento di G.P. Thomson.* Nel 1927 George P. Thomson, lavorando indipendentemente all'università di Aberdeen in Scozia, confermò l'equazione di De Broglie con un metodo alquanto differente. Come si vede nell'illustrazione 9*a*, diresse un fascio di elettroni monoenergetico di 15 keV verso un bersaglio costituito da un foglio sottile di metallo. Il bersaglio non era specificamente un singolo cristallo come nell'esperimento di Davisson-Germer, ma era composto da un gran numero di piccoli cristallini, orientati a caso.

Se si dispone una pellicola fotografica dietro al bersaglio, come nella figura 9*a*, il punto centrale del fascio sarà circondato da cerchi di diffrazione. La figura 9*b* mostra la figura di diffrazione per i raggi X, incidenti su un bersaglio di alluminio. La figura 9*c* illustra la figura prodotta dall'alluminio quando un raggio di elettroni della stessa lunghezza d'onda sostituisce il fascio di raggi X. Una semplice occhiata a queste due diverse figure non lascia alcun dubbio che entrambe siano state originate nello stesso modo. La loro analisi numerica conferma l'ipotesi di De Broglie in ogni particolare.

Per i suoi esperimenti sulla diffrazione degli elettroni, Thomson condivise il premio Nobel con Davisson nel 1937. George P. Thomson era il figlio di J.J. Thomson, che vinse il premio Nobel nel 1906 per la sua scoperta dell'elettrone e per la misura del suo rapporto carica-massa. Si disse che Thomson, il padre, vinse il premio Nobel per aver dimostrato che l'elettrone è una particella, e Thomson, il figlio, per aver dimostrato che è un'onda.

Oggi la natura ondulatoria della materia è data per scontata, e gli studi sulla diffrazione di elettroni e neutroni sono un metodo di routine nell'analisi delle strutture atomiche dei solidi o liquidi. Le onde di materia servono come un prezioso complemento all'uso dei raggi X, come mezzi per l'analisi strutturale. Per esempio, gli elettroni sono meno penetranti dei raggi X e perciò molto più adatti per lo studio delle superfici. I raggi X interagiscono per lo più con gli elettroni di un bersaglio, e per questa ragione non è facile usarli per localizzare atomi leggeri che hanno pochi elettroni, in particolare l'idrogeno. I neutroni, d'altra parte, interagiscono principalmente con il nucleo dell'atomo e possono essere usati per colmare questa lacuna. La fi-

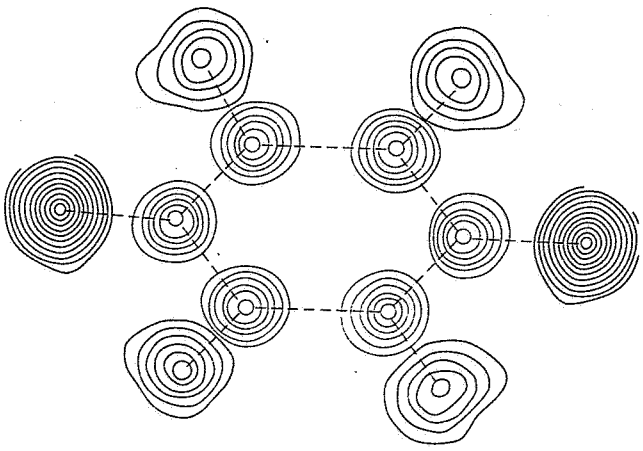


Figura 10 La struttura atomica del benzene solido dedotta dalla diffrazione dei neutroni. I cerchi azzurri individuano i siti dei sei atomi di carbonio che formano il familiare anello benzenico. I cerchi rossi mostrano la localizzazione degli atomi di idrogeno.

ISBN 88-408-0777-2

gura 10, per esempio, mostra la struttura del benzene solido come risulta dagli studi sulla diffrazione dei neutroni.

Esempio 3 Si immagini un fascio di atomi che emerge da un forno a temperatura T, con una distribuzione di Maxwell delle velocità (paragrafo 24-3). Basandosi su questa distribuzione, si può assumere (probl. 20) che la più probabile lunghezza d'onda di De Broglie per gli atomi del fascio sia

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{5mkT}}. \qquad (3)$$

I dati della figura 5 sono stati ottenuti per atomi di elio ($m = 4.0026$ u) che fuoriescono da un forno alla temperatura $T = 83$ K. Trovare la più probabile lunghezza d'onda di De Broglie per questi atomi e confrontarla con la lunghezza d'onda calcolata nell'esempio 1.

Soluzione Secondo l'equazione 3,

$$\lambda_p = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{5(4.0026\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(83\ \text{K})}}$$
$$= 1.07 \times 10^{-10}\ \text{m}.$$

Questo valore è in ottimo accordo con la valutazione ottenuta nell'esempio 1, confermando ancora una volta che la lunghezza d'onda di De Broglie descrive il comportamento ondulatorio delle particelle materiali.

Esempio 4 I reattori nucleari sono progettati spesso in modo tale che un fascio di neutroni a bassa energia emerga dal contenitore dopo essere passato attraverso un cilindro di grafite attraverso la parete di protezione (figura 11). Dopo ripetute collisioni con atomi di carbonio, i neutroni pervengono a un equilibrio termico con essi, a una temperatura ordinaria (293 K). Questi neutroni sono detti *neutroni termici*. (*a*) Si trovi la più probabile lunghezza d'onda di De Broglie in un fascio di neutroni termici. (*b*) Un flusso di tali atomi è incidente su un cristallo C in cui la distanza tra i piani di Bragg è $d = 0.304$ nm. Si osserva una intensa diffrazione alla Bragg del primo ordine per neutroni di lunghezza d'onda λ_p, quando l'angolo di diffusione θ è come indicato nella figura 11. Si trovi l'angolo θ.

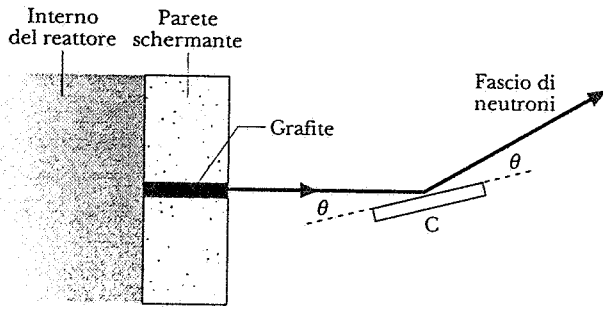


Figura 11 Esempio 4. Un dispositivo per osservare la diffrazione dei neutroni. I neutroni che emergono dalla colonnina di grafite, che funge da rallentatore, hanno una certa distribuzione in energia. Dopo una riflessione alla Bragg sul cristallo C, per un dato angolo θ, si ottiene un fascio monoenergetico.

Soluzione (*a*) Usando l'equazione 3, otteniamo

$$\lambda_p = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{5(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})}}$$
$$= 1.14 \times 10^{-10}\text{m} = 0.114\ \text{nm}$$

(*b*) La formula di Bragg per la diffrazione dei raggi X è data dall'equazione 12 del capitolo 47:

$$2d\,\text{sen}\theta = m\lambda \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

La stessa formula può essere applicata alla diffrazione di particelle, se si usa la lunghezza d'onda di De Broglie λ. Risolvendo rispetto all'angolo θ, arriviamo a

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda_p}{2d}\right) = \text{sen}^{-1}\left(\frac{(1)(0.114\ \text{nm})}{(2)(0.304\ \text{nm})}\right) = 10.8°.$$

Facendo diffrangere i neutroni in questo modo, si può ottenere un fascio monoenergetico. Che può essere a sua volta diffratto da altri materiali, permettendo di studiarne la struttura, come si è fatto per l'esperimento illustrato in figura 10.

50-4 ONDE, PACCHETTI D'ONDE, PARTICELLE

Come abbiamo visto, la prova che la materia assume un comportamento ondulatorio è convincente. Eppure non si può certo dimenticare che gli argomenti a favore del suo comportamento corpuscolare siano altrettanto convincenti. La differenza di base tra i due punti di vista è che la posizione di una particella può essere individuata sia nello spazio che nel tempo, ma un'onda non può essere localizzata in questo modo, essendo sparsa in entrambe queste dimensioni. Cominciamo allora a riconciliare queste due interpretazioni, considerando se è possibile raggruppare un insieme di onde in modo tale che si avvicini al concetto di particella. Ciò che determineremo dovrà essere applicabile a tutti i tipi di onda, siano esse onda d'acqua, sonore, elettromagnetiche, o di De Broglie. Consideriamo quindi nel seguito la localizzazione di un'onda nello spazio e nel tempo.

1. *Localizzazione di un'onda nello spazio.* La figura 12 è una «istantanea» di un'onda in un istante arbitrario, diciamo $t = 0$. L'onda si estende da $x = -\infty$ a $x = +\infty$ e ha una precisa lunghezza d'onda λ_0 con un corrispondente ben definito numero d'onda k_0 ($=2\pi/\lambda_0$), come è indicato nella figura 12*b*. Tuttavia, non esiste nulla in quest'onda che suggerisca la sua

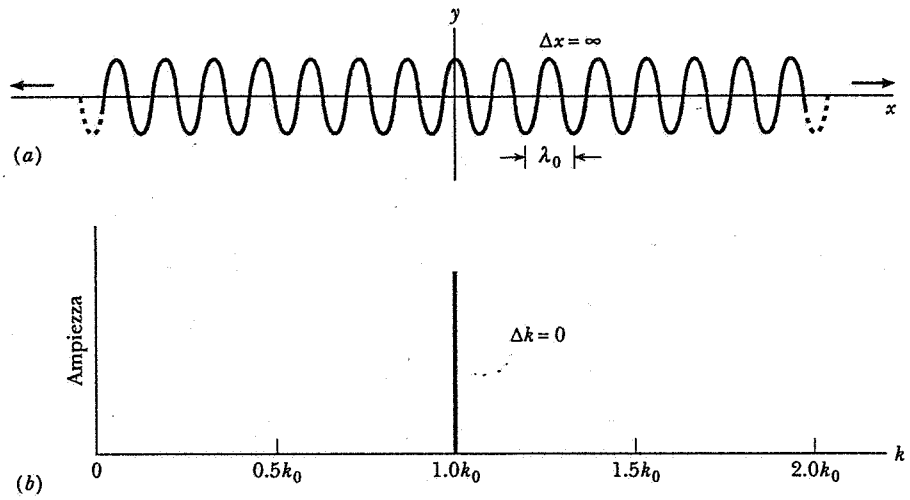


Figura 12 (*a*) Un'onda armonica vista all'istante $t = 0$. (*b*) La distribuzione dei numeri d'onda, vista in un grafico in cui è riportata l'ampiezza della componente armonica in funzione del suo numero d'onda. In questo caso, tutte le onde con $k \neq k_0$ hanno ampiezza nulla.

posizione nello spazio, come ci aspetteremmo invece se la trattassimo come una «particella». In altre parole, se l'onda nella figura 12*a* dovesse rappresentare una particella, l'incertezza Δx sulla sua posizione sarebbe infinita: potrebbe essere ovunque lungo il suo asse.

Si ricordi che è possibile (paragrafo 19-7) creare quasi qualunque forma d'onda si desideri, semplicemente aggiungendo onde sinusoidali con numero d'onda, ampiezza e fase appropriati. La figura 13*a* mostra un *pacchetto d'onde* che può essere ottenuto per sovrapposizione come descritto. Questo insieme di onde di lunghezza infinita si somma a creare un'onda sinusoidale su una particolare regione di ampiezza Δx e, per interferenza distruttiva, si annulla altrove. Adesso abbiamo una localizzazione nello spazio, misurata da Δx, la lunghezza del pacchetto. Ma ciò è avvenuto a scapito della «purezza» dell'onda originale, dato che questo gruppo non contiene più un'onda singola di numero d'onda k_0 ma un complesso di onde che hanno numero d'onda variabile attorno al valore centrale k_0; si veda la figura 13*b*.

Supponiamo che Δk nella figura 13*b* sia una misura grossolana della dispersione in numero d'onda delle onde che formano il pacchetto nella figura 13*a*. È ragionevole credere che quanto più netto e localizzato è il pacchetto (cioè quanto più simile a una particella),

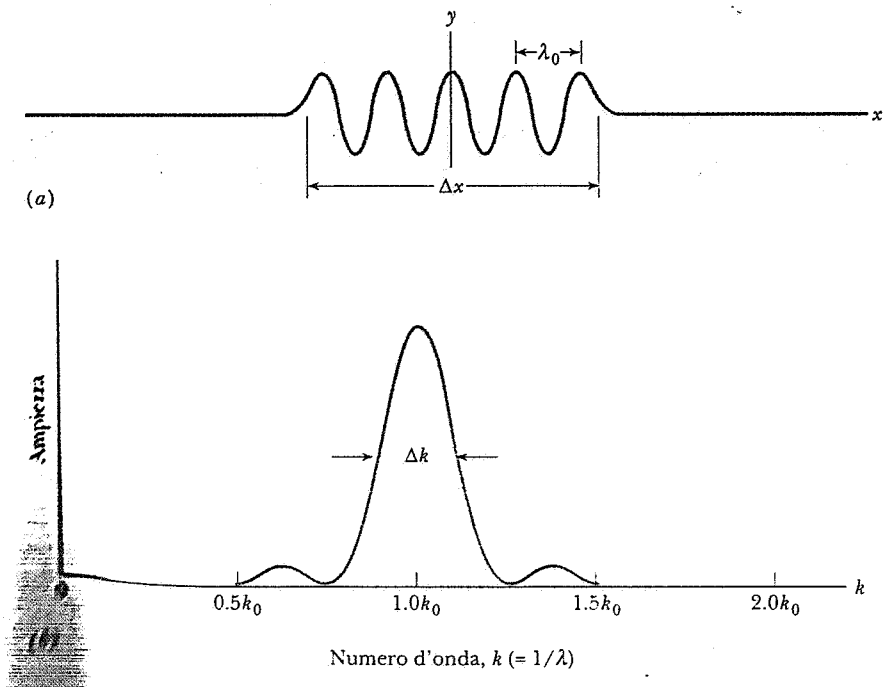


Figura 13 (*a*) Un pacchetto d'onda di lunghezza Δx, visto nell'istante $t = 0$. (*b*) Le ampiezze relative delle varie componenti armoniche, che si combinano a formare il pacchetto. Il picco centrale ha larghezza Δk.

ISBN 88-408-0777-2

tanto maggiore sia la varietà di numeri d'onda necessaria per costituirlo. Nella figura 12*a*, per esempio, il pacchetto non era per niente ben definito ($\Delta x \to \infty$), ma d'altra parte è stato necessario solo un unico numero d'onda per formarlo ($\Delta k = 0$). All'altro estremo, si potrebbe formare un pacchetto puntiforme ($\Delta x = 0$), ma si avrebbe bisogno di una gran dispersione di numeri d'onda ($\Delta k \to \infty$). In generale, quando Δx diminuisce, Δk aumenta, e viceversa. La relazione tra essi è molto semplice; infatti,

$$\Delta k \cdot \Delta x \sim 1. \tag{4}$$

Il simbolo $\sim$ nell'equazione 4 significa «dell'ordine di», dato che per il momento non abbiamo identificato Δx o Δk con molta precisione.*

2. *Localizzazione di un'onda nel tempo.* Una particella ha una localizzazione nel tempo esattamente come nello spazio. Se si sostituisse la variabile spaziale x nella figura 12*a* con la variabile temporale t (e la lunghezza d'onda λ_0 con il periodo T_0), la figura mostrerebbe allora l'onda che varia nel tempo nel passare attraverso un punto fisso, come per esempio $x = 0$. Come nel caso precedente, non c'è affatto indicazione di una localizzazione nel tempo di quest'onda, come invece ci si aspetterebbe per una particella. Una particella infatti passerebbe dal nostro punto di osservazione in un istante particolare, piuttosto che abbracciare un periodo di tempo infinito.

Si può costruire un pacchetto d'onde nel tempo come abbiamo fatto nello spazio. La figura 13*a* illustra il medesimo procedimento, se sostituiamo le variabili spaziali con le variabili temporali, sostituendo il numero d'onda k_0 con la pulsazione ω_0. In analogia con l'equazione 4, la durata Δt del nuovo pacchetto d'onde sta nella seguente relazione con $\Delta\omega$, l'ampiezza dello spettro di pulsazioni necessarie per costituirlo

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1. \tag{5}$$

Questa relazione presenta molte applicazioni pratiche. Per esempio, molte informazioni nella società odierna, incluse le comunicazioni telefoniche, il radar e la memorizzazione dei dati negli elaboratori, sono inviate da punto a punto in forma di impulsi oscillanti. Gli amplificatori elettronici, attraverso cui questi impulsi passano, dovrebbero essere egualmente sensibili su tutto lo spettro di frequenze per cui sono progettati. L'equazione 5 afferma che quanto più è corta la durata di un impulso, tanto maggiore deve essere l'ampiezza dell'intervallo di frequenze associate cui l'amplificatore deve rispondere, e viceversa.

* L'approssimazione data dall'equazione 4 costituisce circa il miglior risultato ottenibile nel costruire un pacchetto d'onde. Si può fare molto peggio ($\Delta K \cdot \Delta t \gg 1$), ma non è possibile fare un granché meglio ($\Delta k \cdot \Delta x$ non può mai essere $\ll 1$).

Esempio 5 Un trasmettitore radar emette impulsi della durata di 0.15 μs a una lunghezza d'onda di 1.2 cm. (*a*) A quale frequenza centrale si dovrebbe sintonizzare il ricevitore del radar? (*b*) Qual è la lunghezza del pacchetto d'onde? (*c*) Quale dovrebbe essere l'ampiezza della banda di frequenza del ricevitore? In altre parole, a quale intervallo di frequenze dovrebbe essere capace di rispondere?

Soluzione (*a*) La frequenza centrale $\nu_0 (= \omega_0/2\pi)$ è data da

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3.00 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.012 \text{ m}} = 2.5 \times 10^{10} \text{ Hz} = 25 \text{ GHz}.$$

(*b*) La lunghezza del pacchetto d'onda è

$$\Delta x = c\,\Delta t = (3.00 \times 10^8 \text{ m/s})(0.15 \times 10^{-6} \text{ s}) = 45 \text{ m}$$

(*c*) L'ampiezza della banda di frequenza del ricevitore è data approssimativamente dalla equazione 5, ovvero

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sim \frac{1}{2\pi\Delta t} = \frac{1}{2\pi(0.15 \times 10^{-6} \text{ s})}$$
$$= 1.1 \times 10^6 \text{ Hz} = 1.1 \text{ MHz}.$$

Se il ricevitore non potesse rispondere a tutte le frequenze in questa banda, non potrebbe riprodurre fedelmente la forma dell'impulso radar trasmesso.

50-5 RELAZIONI DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG

L'equazione 4 si applica a tutti i tipi di onde. Applichiamola quindi alle onde di De Broglie. Per la quantità Δk che appare in quella equazione, si scrive

$$\Delta k = \Delta\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \Delta\left(\frac{2\pi p_x}{h}\right) = \frac{2\pi}{h}\Delta p_x.$$

Qui si identifica λ con la lunghezza d'onda di De Broglie della particella e si sostituisce col suo valore h/p_x. Il pedice della quantità di moto evidenzia il fatto che si tratta di un movimento lungo l'asse x, solamente. Sostituendo questo risultato nell'equazione 4 si giunge a

$$\Delta k \cdot \Delta x = \frac{2\pi}{h}\Delta p_x \cdot \Delta x \sim 1$$

oppure

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim h/2\pi.$$

Tenendo conto del fatto che la quantità di moto è un vettore, si può generalizzare questa relazione:

$$\begin{aligned} \Delta p_x \cdot \Delta x &\sim h/2\pi, \\ \Delta p_y \cdot \Delta y &\sim h/2\pi, \\ \Delta p_z \cdot \Delta z &\sim h/2\pi. \end{aligned} \qquad (6)$$

Le equazioni 6 sono le relazioni d'indeterminazione di Heisenberg, elaborate da Heisenberg per la prima volta nel 1927. Si possono considerare come l'espressione matematica del *principio d'indeterminazione di Heisenberg*:

Non è possibile determinare simultaneamente la posizione e la quantità di moto di una particella con precisione illimitata.

Il nostro scopo nella meccanica quantistica è di rappresentare una particella per mezzo di un pacchetto d'onde che ha grande ampiezza dove la particella è probabilmente localizzata, e piccola ampiezza altrove. L'ampiezza Δx del pacchetto d'onde dà indicazioni sulla possibile posizione della particella. Però, come abbiamo visto, la costruzione di un tale pacchetto implica la sovrapposizione di onde con un certo intervallo Δk in numero d'onda, o equivalentemente, un intervallo di Δp_x in quantità di moto. Dunque, un altro modo di formulare il principio d'indeterminazione è: *una particella non può essere descritta da un pacchetto d'onde in cui sia la posizione che la quantità di moto siano determinate in un intervallo arbitrariamente piccolo*. Quando si diminuisce uno dei due, l'altro cresce, secondo l'equazione 6.

Benché una misura singola della quantità di moto di una particella possa fornire un valore quanto si voglia preciso, questo valore può manifestarsi dovunque entro l'intervallo Δp_x attorno al valore «vero» p_x. Infatti la meccanica quantistica afferma che non è possibile determinare il valore «vero» p_x se non entro un intervallo Δp_x. Se ripetiamo moltissime volte la misura per sistemi identici, i risultati si collocheranno intorno a p_x, con una distribuzione statistica caratterizzata dall'ampiezza Δp_x. In modo simile, le misure di posizione si raggrupperanno intorno a x con una distribuzione statistica caratterizzata dalla ampiezza Δx.

Questi limiti non hanno niente a che vedere con i problemi tecnici di misurazione. L'equazione 6, infatti, *assume* l'impiego di strumenti ideali. E nella pratica le espressioni date costituiscono un limite a cui ci si potrà solamente avvicinare. Per ricordarci di questo fatto, a volte questi rapporti sono scritti con il simbolo $\geq$, invece del simbolo $\sim$.

Quando si usa la parola «particella» per descrivere oggetti come gli elettroni, si suggerisce l'immagine di punti minuscoli che viaggiano lungo un percorso, aventi la loro posizione e velocità ben definita a ogni istante. Questo modo di pensare è una proiezione naturale di esperienze con oggetti comuni come palle o sassi, che si possono vedere e toccare. Ma si deve, tuttavia, accettare il fatto che questa rappresentazione non si può applicare sperimentalmente al di là dei limiti definiti dal principio d'indeterminazione. Il mondo dei quanti è al di fuori del mondo delle nostre esperienze dirette, ed è necessario essere preparati a immaginarlo in altre sembianze.

Nell'esempio 6 si vedrà che il principio d'indeterminazione non limita la precisione delle misure quando si tratta di grandi oggetti, come una palla. In questi casi le approssimazioni degli strumenti ordinari sovrastano i limiti fondamentali stabiliti da tale principio. Quando si tratta di elettroni e altre particelle elementari la situazione è però piuttosto diversa, come è illustrato nel seguente esempio.

Esempio 6 (*a*) Un elettrone libero possiede energia pari a 10 eV e si muove nella direzione x alla velocità di $1.88 \cdot 10^6$ m/s. Assumendo che si possa misurare questa velocità con una precisione dell'1%, con quale precisione si può simultaneamente misurare la sua posizione? (*b*) Una palla da golf ha una massa di 45 g e viaggia a una velocità di 40 m/s, che si può misurare con una precisione dell'1%. Quale limite è posto dal principio d'indeterminazione sulla possibilità di misurarne la posizione?

Soluzione (*a*) La quantità di moto dell'elettrone è

$$\begin{aligned} p_x = mv_x &= (9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1.88 \times 10^6\ \text{m/s}) \\ &= 1.71 \times 10^{-24}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}. \end{aligned}$$

L'incertezza Δp_x sulla quantità di moto è l'1% di questo valore, ossia 1.71×10^{-26} kg · m/s. L'incertezza nella posizione è dunque, dall'equazione 5,

$$\Delta x \sim \frac{h/2\pi}{\Delta p_x} = \frac{1.06 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{1.71 \times 10^{-26}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}} = 6.2\ \text{nm},$$

che equivale a circa 30 diametri atomici. Data la misura della quantità di moto dell'elettrone, non è certamente possibile determinare simultaneamente la sua posizione con una precisione maggiore di questa.

(*b*) Questo problema è esattamente come quello esaminato nella parte (*a*) eccetto che la palla da golf è molto più pesante e molto più lenta di un elettrone. Gli stessi calcoli si applicano a questo caso e si ottiene $\Delta x \sim 6 \times 10^{-33}$ m.

Si tratta di una distanza piccolissima, circa 10^{18} volte più piccola del diametro di un nucleo atomico. Per quanto concerne grandi oggetti, il principio d'indeterminazione non stabilisce limiti significativi alla precisione delle misure. Non si sarebbe mai scoperto questo principio studiando le palle da tennis che volano!

 ISBN 88-408-0777-2

Il principio di indeterminazione e la diffrazione da una singola fenditura

In questo paragrafo si vedrà come il principio d'indeterminazione funziona in un caso particolare. Si consideri un fascio di elettroni dotati di velocità v_0, che si muove verso l'alto nella figura 14. Il nostro intento è di misurare con assoluta precisione simultaneamente la posizione orizzontale x e la componente di velocità v_x per uno di questi elettroni. Come si vedrà, questo obiettivo, che viola il principio di indeterminazione, non può essere raggiunto.

Per misurare x si interpone sul percorso degli elettroni uno schermo contenente una fenditura di larghezza Δx. Se un elettrone passa attraverso la fessura, si può affermare che si conosce la sua posizione orizzontale con analoga precisione. Restringendo la fenditura si può migliorare la precisione della misura fino a che si desidera.

Fino a qui tutto va bene. Tuttavia succede un fenomeno di cui non si è ancora tenuto conto. Il fascio di elettroni, essendo come un'onda, si allarga per diffrazione nel passare attraverso la fenditura. Se si dispone come nella figura 14 uno schermo B idoneo a rivelare gli elettroni, si manifesta una tipica figura di diffrazione dovuta a singola fenditura. Gli elettroni che compongono la parte sinistra di questa figura devono essersi mossi in quella direzione (alcuni più velocemente di altri) quando sono emersi dalla fenditura. Quelli che appaiono sulla destra si sono invece diretti da tale parte. Anche se, come la simmetria della disposizione richiede, il valore *medio* di v_x degli elettroni che emergono è zero, i singoli elettroni possono presentare valori che non sono nulli.

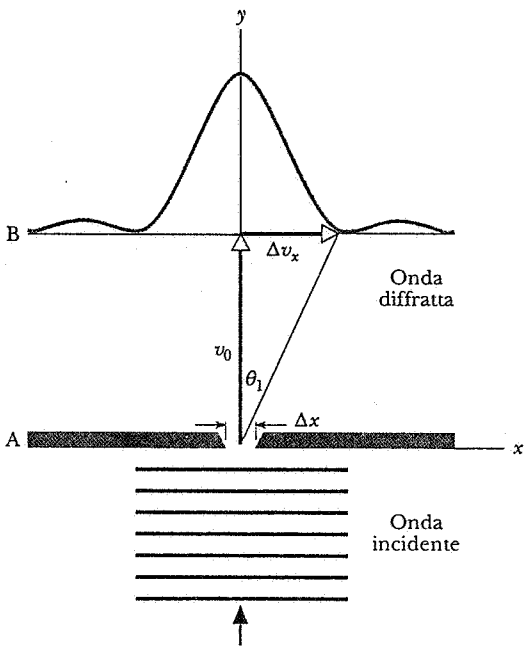


Figura 14 Un fascio di elettroni incidenti viene diffratto dalla fenditura dello schermo A. Se si restringe la fenditura, la figura di diffrazione si allarga.

C'è un particolare valore di v che fa sì che gli elettroni pervengano al primo minimo di diffrazione, identificato con l'angolo θ, nella figura 14. Si prenda questo valore di v_x, alquanto arbitrariamente, come una misura grossolana dell'incertezza sulla conoscenza di v_x, e si chiami Δv_x.

L'identificazione del primo minimo della figura di diffrazione è fornita dalla equazione 1 del capitolo 46 ($\text{sen}\theta_1 = \lambda/\Delta x$). Se assumiamo che θ_1 sia sufficientemente piccolo, possiamo sostituire $\text{sen}\theta_1$ con θ_1, ottenendo

$$\theta_1 \approx \lambda/\Delta x.$$

Per raggiungere il primo minimo deve anche verificarsi che

$$\theta_1 \approx \Delta v_x/v_0.$$

Combinando queste due espressioni si giunge a

$$\Delta v_x \cdot \Delta x \approx \lambda v_0.$$

Ora λ, la lunghezza d'onda di De Broglie dell'elettrone, è uguale a h/p ossia h/mv_0; introducendo questa sostituzione e rimaneggiando, troviamo

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h.$$

Risultato che è certamente compatibile con l'equazione 6; le differenze di minor rilievo (il fattore 2π) sono il risultato del modo arbitrario con cui si è definito Δx e Δp_x.

Si noti dunque come opera in questo caso il principio d'indeterminazione. Se si vuole fissare la posizione orizzontale dell'elettrone, si deve restringere la fenditura. Questo però amplia la figura di diffrazione, così che Δp_x aumenta. Dall'altro lato, se si vuole determinare la componente orizzontale della quantità di moto dell'elettrone, bisogna ridurre in qualche modo l'ampiezza angolare della figura di diffrazione. Il solo modo di ottenere quest'effetto è di allargare la fenditura, ma a sua volta, questo significa non conoscere più la posizione dell'elettrone con la precisione che si aveva precedentemente. Quando cerchiamo di migliorare la conoscenza di una variabile, riduciamo simultaneamente quella dell'altra. Il principio d'indeterminazione non è un'affermazione relativa agli elettroni, o altre particelle; è un'affermazione a riguardo dell'impossibilità di determinare simultaneamente certe proprietà di tali particelle.

La relazione d'indeterminazione energia-tempo

Fino ad ora si sono considerate solo le *lunghezze d'onda* delle onde di materia e nulla si è detto sulle loro *frequenze.*

In analogia con l'equazione di Einstein per i fotoni ($E=h\nu$), l'incertezza sulla frequenza di un'onda di materia è in relazione all'incertezza sull'energia E della particella corrispondente, cioè $\Delta\nu=\Delta E/h$. Ponendo $\Delta\omega=2\pi\Delta\nu$ e sostituendo nell'equazione 5, si ottiene

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h/2\pi, \qquad (7)$$

che è la relazione matematica del principio d'indeterminazione espressa con diversi parametri. In parole si può dire:

Non è possibile determinare con precisione illimitata sia l'energia che la coordinata temporale di una particella.

Tutte le misurazioni di energia contengono un'incertezza intrinseca, a meno che si abbia a disposizione un tempo infinito per la misura. In un atomo, per esempio, lo stato di minor energia (il cosiddetto stato fondamentale) ha un'energia ben determinata grazie al fatto che l'atomo di norma può sussistere in tale stato indefinitamente. Le energie di tutti gli stati superiori (gli stati di eccitazione) sono definite con minor precisione perché l'atomo prima o poi passa a uno stato di energia inferiore. In media, c'è solo un certo tempo Δt a disposizione per la misura di energia, che risulta quindi dotata di un grado di incertezza ΔE pari a $(h/2\pi)/\Delta t$.

Esempio 7 Nel 1974, un'importante nuova particella, avente massa oltre tre volte superiore a quella di un protone, è stata scoperta simultaneamente e indipendentemente da due gruppi di fisici, usando acceleratori ad alta energia nei Laboratori Nazionali di Brookhaven e all'Università di Stanford. L'energia a riposo media di questa particella fu misurata in 3097 MeV, con una indeterminazione di soli 0.063 MeV. Si prevedeva che una particella così pesante sarebbe decaduta con estrema rapidità in particelle di massa minore. Qual è il tempo medio tra la generazione e il decadimento di queste particelle di breve esistenza?

Soluzione La risposta segue dal principio d'indeterminazione, nella forma dell'equazione 7. Risolvendo rispetto a Δt, si ottiene

$$\Delta t \sim \frac{h/2\pi}{\Delta E} = \frac{1.06 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(0.063\ \text{MeV})(1.60 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}$$
$$= 1.1 \times 10^{-20}\text{s}.$$

In questo caso l'intervallo di tempo può esser identificato con il tempo di esistenza della particella. Secondo standard comuni sembra un tempo brevissimo, ma in realtà gli sperimentatori furono sorpresi di quanto lungo fosse o, ciò che è lo stesso, da quanto precisa fosse la definizione dell'energia a riposo. In teoria si era previsto un decadimento molto più rapido per una particella (detta ψ) di tale massa. Un osservatore notò che tale lentezza nel decadimento era come se Cleopatra, navigando lungo il Nilo sulla sua chiatta reale, avesse lanciato un sasso fuori bordo e che ancora oggi non avesse toccato l'acqua! La scoperta di questa nuova particella si dimostrò così significativa che i direttori dei due gruppi di ricerca, Burton Richter e Samuel Ting, ricevettero per essa il premio Nobel nel 1976.

Il principio d'indeterminazione è usato in questo modo per dedurre la durata degli stati eccitatati delle molecole, atomi e particelle fondamentali instabili di tutti i generi.

50-6 LA FUNZIONE D'ONDA

A questo punto si può considerare pacifico che una particella in moto può essere vista come un'onda, e si sa anche come misurarne la lunghezza d'onda. Resta una domanda: "Qual è la natura della grandezza le cui variazioni nel tempo e nello spazio costituiscono l'onda?" O, in parole povere: "Che cos'è che oscilla?"

Per un'onda che si propaga lungo una corda, si può rappresentare la perturbazione ondulatoria con lo spostamento trasversale y. Per le onde acustiche si usa la differenza di pressione Δp e per le onde elettromagnetiche il vettore campo elettrico **E**. Per onde che rappresentano particelle, si introduce la *funzione d'onda* Ψ. Il problema che ci interessa può essere quello di un protone che si muove lungo l'asse di un tubo sottovuoto in un acceleratore di particelle, o di un elettrone di conduzione che viaggia lungo un filo di rame, o ancora di un elettrone che ruota attorno al suo nucleo in un atomo d'idrogeno. Qualunque sia il caso, se si conosce la funzione d'onda $\Psi\ (x, y, z, t)$ per ogni punto nello spazio e per ogni istante nel tempo, si conosce tutto ciò che è possibile sapere sul comportamento della particella.

Prima di considerare l'aspetto fisico della funzione d'onda, esaminiamo un problema che concerne la radiazione piuttosto che la materia: un'onda elettromagnetica piana che viaggia attraverso lo spazio libero. Si può pensare una tale onda (seguendo Maxwell) come un sistema di campi elettrici e magnetici che variano nel tempo e nello spazio, o (seguendo Einstein) come un fascio di fotoni, ciascuno in moto alla velocità della luce. Nella prima immagine, l'energia per unità di area trasportata dall'onda (paragrafo 41-1) è proporzionale a E^2, ove E rappresenta l'ampiezza del vettore campo elettrico. Nella seconda immagine, questo

ISBN 88-408-0777-2

flusso di energia è proporzionale al numero medio di fotoni per unità di volume contenuto nel fascio, in cui ciascun fotone possiede un'energia $h\nu$. Si nota un legame tra la rappresentazione ondulatoria e quella corpuscolare della radiazione: la nozione, introdotta per la prima volta da Einstein, che il quadrato dell'intensità del campo elettrico è una misura diretta della densità media dei fotoni.

Max Born propose che la funzione d'onda Ψ per un fascio di particelle sia interpretata nello stesso modo, cioè che il suo quadrato sia una misura diretta della densità media delle particelle contenute nel fascio. In molti problemi, tuttavia, come la struttura dell'atomo d'idrogeno, c'è un solo elettrone presente. Che significato può avere allora parlare della «densità media di particelle»? Born propose che in questi casi si interpreti il quadrato della funzione d'onda in qualunque punto come la probabilità (per unità di volume) che la particella si trovi in quel punto*. Più precisamente, se dV è l'elemento di volume situato in un punto le cui coordinate sono x, y, z, allora la probabilità che la particella si trovi in quell'elemento di volume al tempo t è proporzionale a $\Psi^2 dV$. Forse in analogia con la ordinaria densità (la massa per unità di volume), il quadrato della funzione d'onda è detto *densità di probabilità*, ovvero una probabilità per unità di volume.

Si noti che la relazione tra la funzione d'onda e la particella associata è *statistica*, dato che implica solo la *probabilità* che la particella si trovi in un elemento di volume specificato. Anche nella fisica classica si ha a che fare con particelle su basi statistiche (capitolo 23 e 24), ma in quei casi i metodi statistici sono solo una semplificazione introdotta per trattare analiticamente un gran numero di particelle. Nella meccanica quantistica, invece, la natura statistica è intrinseca ed è imposta dal principio d'indeterminazione che, come si è visto, stabilisce limiti al significato che si dà al termine «particella».

La probabilità che una particella sia *in un qualsiasi luogo* deve essere uguale all'unità (corrispondente al 100% di probabilità di trovarla) cosicché

$$\int \Psi^2 dV = 1 \quad \text{(condizioni di normalizzazione)}, \quad (8)$$

estendendo l'integrale a tutto lo spazio. *Normalizzare* una funzione d'onda significa moltiplicarla per un fattore costante, scelto in modo che l'equazione 8 sia soddisfatta.

Rimane per ultima una domanda ovvia: "Dato un certo problema, come si fa a sapere qual è la funzione d'onda?" Le onde in mezzi elastici sono governate dalle leggi della meccanica di Newton. Le onde elettromagnetiche sono previste e descritte dalle equazioni di Maxwell. Da dove vengono le funzioni d'onda?

Nel 1926 Erwin Schrödinger, ispirato dall'idea di De Broglie, approfondì questa linea di pensiero: l'ottica geometrica si è sempre occupata di raggi e di luce che si muovono in direzione rettilinea; ma risultò poi essere un caso speciale di una più generale ottica ondulatoria. Anche la meccanica newtoniana implica «raggi» (traiettorie) e movimenti in linea retta (di particelle libere). Potrebbe rivelarsi un caso speciale di una più generale, ma ancora sconosciuta, meccanica ondulatoria?

Schrödinger dedusse una teoria davvero soddisfacente basandosi su questa analogia. La sua caratteristica focale è un'equazione differenziale, conosciuta adesso come *equazione di Schrödinger*, che governa le variazioni nello spazio e nel tempo della funzione d'onda Ψ per una gran varietà di circostanze. Le soluzioni ai problemi di meccanica classica si ottengono manipolando le leggi del moto di Newton; in elettromagnetismo si usano le equazioni di Maxwell; esattamente sulla stessa traccia, si ottengono soluzioni ai problemi atomici maneggiando l'equazione di Schrödinger.

Nel prossimo paragrafo si prenderà in considerazione un problema importante dal punto di vista della meccanica ondulatoria, quello di una particella intrappolata in una posizione da cui non può mai sfuggire. (O forse potrà?)

50-7 PARTICELLE INTRAPPOLATE E DENSITÀ DI PROBABILITÀ

Prima di analizzare la situazione per le onde di materia, è preferibile riconsiderare due esempi analoghi che coinvolgono le onde meccaniche ed elettromagnetiche.

Nei paragrafi 19-9 e 19-10, si sono studiate le onde stazionarie che si instaurano su una corda di lunghezza L, fissata a entrambe le estremità. I capi della corda, costretti a rimanere legati ai supporti, sono *nodi di vibrazione*, cioè punti in cui l'ampiezza è zero in ogni istante.

Per queste onde stazionarie è possibile solo un numero limitato di lunghezze d'onda. Come si è dimo-

* La funzione d'onda Ψ è generalmente rappresentata da un numero complesso; cioè implica l'introduzione del fattore $\sqrt{-1}$, che si rappresenta con il simbolo i. Per Ψ^2 (più propriamente scritto $|\Psi|^2$) intendiamo il quadrato del valore assoluto della funzione d'onda. Questa è sempre una quantità reale. Si dà una interpretazione fisica solo al quadrato della funzione d'onda, non alla funzione d'onda stessa.

strato nel paragrafo 19-10, queste lunghezze d'onda disponibili sono date da

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{9}$$

oppure, in termini di numero d'onda,

$$k_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{10}$$

In qualsiasi punto della corda, l'ampiezza delle vibrazioni è

$$y_n(x) = y_{\max} \operatorname{sen}(k_n x) = y_{\max} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{11}$$

In cui $y_{\max}$ è il massimo spostamento della corda. La figura 15 illustra esempi di modelli di vibrazione per queste onde stazionarie, che possono caratterizzare alcune delle vibrazioni, ai toni più bassi, delle corde di una chitarra o di un violino.

Nell'elettromagnetismo, una situazione molto simile avviene quando un'onda elettromagnetica piana oscilla avanti e indietro (in una dimensione) tra due superfici perfettamente riflettenti (per esempio, specchi), separate da una distanza L. La stessa situazione può essere osservata per le onde luminose in un laser. Proprio come nel caso meccanico, un'onda stazionaria si stabilisce nella cavità risonante. L'onda elettromagnetica stazionaria può essere considerata come la sovrapposizione di due onde simili che viaggiano in versi opposti. Agli estremi della cavità, dove la riflessione è prodotta da un materiale conduttore come l'argentatura di uno specchio, il campo elettrico scende a zero: caratteristica comune a tutti i conduttori ideali, sottoposti alle condizioni dell'elettrostatica. Stabilendo le condizioni per cui $E=0$ per $x=0$ e $x=L$, troviamo che solo certe lunghezze d'onda sono possibili per instaurare un'onda stazionaria. Queste sono date dall'equazione 9, e l'ampiezza delle oscillazioni del campo elettrico può essere scritta

$$E_n(x) = E_{\max} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{12}$$

La figura 16*a* mostra un grafico di $E_n(x)$ in funzione di x per i livelli più bassi di oscillazione ($n=1$ ed $n=2$). Si noti la somiglianza tra questa figura e la figura 15, che illustra l'onda stazionaria meccanica in una corda.

La figura 16*b* mostra un diagramma di $E_n^2(x)$, che è proporzionale alla densità di energia dell'onda, come si è visto nel paragrafo 41-4. Nella descrizione quantistica, si può considerare l'onda stazionaria come un insieme di fotoni, e la figura 16*b* come rappresentativa della densità di fotoni in funzione di x. Cioè, nello stato vibrazionale in cui $n=1$, si trova la maggiore densità di fotoni in corrispondenza di $x=L/2$, e la minore densità vicino alle pareti. Nel caso in cui $n=2$, la minima densità di fotoni si ha per $x=L/2$ e la massima per $x=L/4$ e $x=3L/4$.

Si supponga di ridurre l'intensità della luce nella cavità fino a che essa contenga un solo fotone. La figura 16*b* sarebbe ancora valida, ma cambiando leggermente la sua interpretazione, dato che non è più appropriato parlare di densità di fotoni. Si usa invece un concetto statistico analogo: *il quadrato dell'ampiezza del campo elettrico calcolato per un particolare valore della coordinata x dà la probabilità di trovare il fotone in quella posizione*. La figura 16*b* indica in quali posizioni la probabilità è massima e dove è invece nulla. Si noti che non si considera la posizione di fatto del fotone, ma la probabilità di trovarlo in un particolare posto.

Queste caratteristiche delle onde stazionarie meccaniche ed elettromagnetiche in una dimensione possono essere estese direttamente alle onde di materia. Si consideri una particella limitata a muoversi tra due pareti perfettamente riflettenti a una distanza L l'una dall'altra. La figura 17 mostra un dispositivo che si può usare per catturare un elettrone. Malgrado questo sia un apparecchio di grandi dimensioni, è possibile costruire

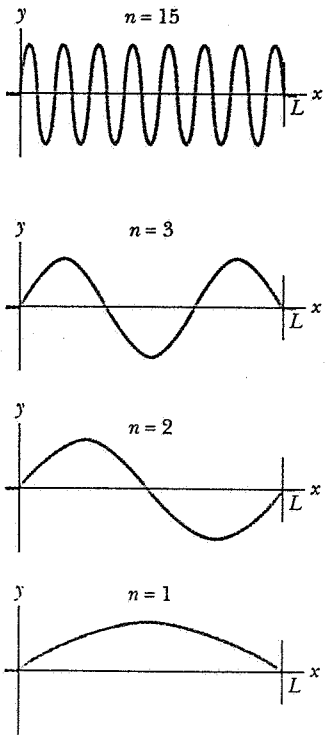


Figura 15 Quattro schemi di onde stazionarie per una corda tesa di lunghezza L. fissata rigidamente a ciascuna estremità. Gli schemi vengono determinati attraverso l'equazione 11.

ISBN 88-408-0777-2

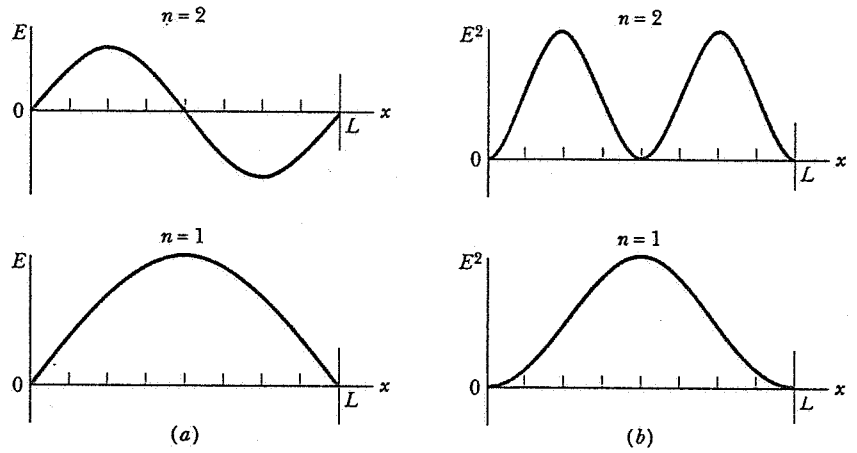


Figura 16 (*a*) il campo elettrico per due tipi di onde elettromagnetiche stazionarie in una cavità di lunghezza L. Questi schemi vengono determinati attraverso l'equazione 12. (*b*) La densità di fotoni nella cavità è legata al quadrato del campo.

strumenti microscopici che ottengono lo stesso risultato. Per esempio la struttura di una «buca quantistica» può essere costituita da pochi strati atomici di materiale semiconduttore circondato da materiale isolante; tali dispositivi sono utilizzati per le comunicazioni ottiche e le porte logiche.

Nell'apparecchiatura illustrata nella figura 17*a*, un elettrone si può muovere liberamente nella sezione centrale, in cui non ci sono forze che agiscono su di esso. Quando raggiunge una delle estremità, incontra una regione in cui il potenziale cambia rapidamente da 0 (che si può assumere sia quello nel centro) a $-V_0$, il potenziale associato a ciascuna delle batterie. Allo stesso modo, l'energia potenziale dell'elettrone è 0 nella sezione centrale e $U_0(= eV_0)$ nelle sezioni esterne (figura 17*b*). Se l'energia cinetica dell'elettrone nella porzione centrale è inferiore a U_0, secondo la concezione classica esso non ha abbastanza energia per sfuggire dalla buca e oscilla avanti e indietro tra le pareti.

Cerchiamo ora una descrizione del moto dell'elettrone nella buca di potenziale usando i principi della meccanica ondulatoria. Per quanto questo problema possa sembrare banale, ben lontano per esempio dalla complessità dell'analisi della struttura atomica, esso porta tuttavia a dimostrare importanti caratteristiche del comportamento meccanico-ondulatorio attraverso un procedimento che evita le complicazioni matematiche di altri sistemi più complessi.

Nel descrivere le onde stazionarie meccaniche ed elettromagnetiche, abbiamo fatto uso della funzione $y(x)$ ed $E_n(x)$, che sono indipendenti dal tempo, variabile necessaria per descrivere un'onda. Tuttavia, come si è visto prima, l'analisi era principalmente interessata alle variazioni di ampiezza in funzione della posizione, per cui non era necessario considerare la variabile temporale. Seguiremo lo stesso approccio per il caso di onde di materia. Invece di cercare la funzione generale dell'onda $\Psi(x, t)$, si prenderà in considerazione solo la dipendenza spaziale, cercando quindi l'espressione di Ψ in funzione di x, che scriviamo $\Psi(x)$.

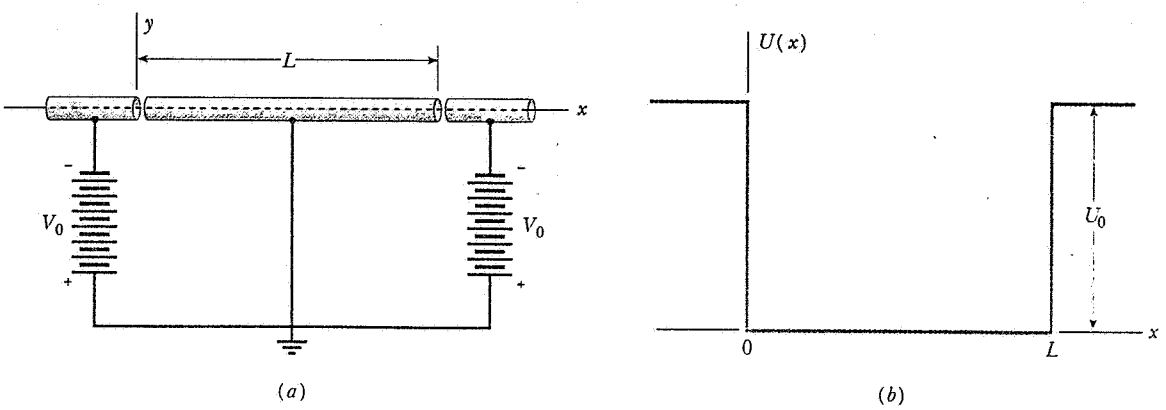


Figura 17 (*a*) Una disposizione utile a confinare un elettrone in una regione di lunghezza L lungo l'asse x. (*b*) Energia potenziale dell'elettrone. In un dispositivo reale l'energia potenziale non varia repentinamente da 0 a U_0; la curva dell'energia potenziale avrebbe gli angoli smussati e i lati non verticali.

Si comincia assumendo che le pareti riflettano perfettamente tutte le particelle; in altre parole si considera una buca infinitamente profonda, in modo che $U_0 \to \infty$. L'equazione di Schrödinger in questo caso si rivela identica alle equazioni che descrivono le onde meccaniche ed elettromagnetiche. La sua soluzione è

$$\Psi_n(x) = A \operatorname{sen}(k_n x) = A \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \quad (13)$$

in cui l'insieme di numeri d'onda o di lunghezze d'onda ammessi è dato dalle equazioni 9 e 10. La costante A deve essere determinata dalla condizione di normalizzazione (si veda l'esempio 10).

La funzione $\Psi_n(x)$ non ha interpretazione fisica. Ma il quadrato della funzione d'onda ha invece un significato fisico: fornisce la *densità di probabilità* $P_n(x)$:

$$P_n(x) = |\psi_n(x)|^2 = A^2 \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \quad (14)$$

Proprio come nel caso del campo elettrico riportato nella figura 16, il quadrato della funzione d'onda in una particolare posizione indica la probabilità di trovare l'elettrone in quel punto. Alcune di queste densità di probabilità sono tracciate nella figura 18.

L'energia della particella (che è interamente sotto forma cinetica dentro alla buca, dato che $U=0$) è costretta ad assumere solo certi valori; si dice che l'energia è *quantizzata*. Vediamo come avviene ciò. Le lunghezze d'onda di De Broglie permesse per la particella sono date dall'equazione 9, e quindi il modulo della sua quantità di moto può assumere i valori

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \quad (15)$$

Quindi l'energia cinetica è data da

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \quad (16)$$

in cui m è la massa della particella. Quando scriviamo l'energia in questo modo, l'indice n rappresenta quel che si dice un *numero quantico*. Le energie possibili sono riportate nella figura 19. L'elettrone può occupare solo quegli stati di moto corrispondenti a questi valori di energie; nessun'altra energia è permessa per la particella.

Una volta che si sono trovate le energie e le funzioni d'onda possibili, si è risolto il problema della particella intrappolata, usando i procedimenti della meccanica quantistica. La soluzione quantistica presenta molteplici peculiarità impreviste, che non fanno parte della soluzione classica per particelle in tale situazione. Consideriamone alcune.

1. *L'elettrone nella buca non può essere a riposo.* Lo stato di minima energia, detto *stato fondamentale*, corrisponde a $n=1$ nell'equazione 16 e nella figura 18. L'energia più bassa non è zero; non è possibile ridurre l'energia (cinetica) di una particella a zero. L'energia minima, data da

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}, \quad (17)$$

è chiamata l'*energia del punto zero* per una buca di profondità infinita. In altri sistemi quantistici, l'energia del punto zero può assumere forme diverse, ma il fenomeno esiste per tutti i sistemi quantistici. Anche alla temperatura dello zero assoluto, dove un atomo è al livello di energia più basso possibile, esso è sempre in moto e possiede quindi energia.

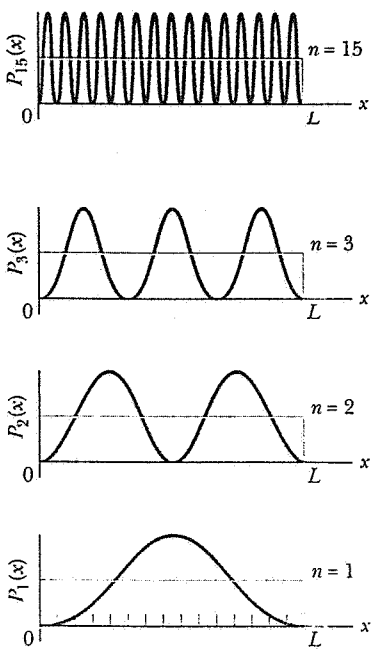


Figura 18 La densità di probabilità $P_n(x)$, calcolata mediante l'equazione 14, per quattro diversi valori del numero quantico n. Le linee orizzontali indicano le previsioni classiche per la densità di probabilità.

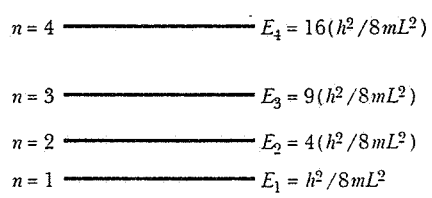


Figura 19 I livelli di energia permessi, calcolati con l'equazione 16, per un elettrone imprigionato in una buca unidimensionale.

ISBN 88-408-0777-2

In effetti, il moto corrispondente al punto zero è il risultato del confinamento di una particella in una porzione dello spazio. Vediamo come il principio d'indeterminazione facilita la comprensione di questo fenomeno. Se si confina una particella in una buca, si conosce la sua posizione con un'incertezza di approssimazione L. La corrispondente incertezza per la sua quantità di moto è, dall'equazione 6,

$$\Delta p_x \sim \frac{h}{2\pi L}.$$

Quanto più piccola è la regione in cui viene costretta la particella, tanto maggiore è l'incertezza sulla sua quantità di moto.

Se conosciamo l'energia cinetica della particella, sappiamo con precisione anche il valore assoluto della sua quantità di moto, ma non conosciamo la sua direzione. Un'incertezza sulla quantità di moto pari a Δp_x indica che la particella si sta muovendo forse verso destra con quantità di moto $p_x = \frac{1}{2}\Delta p_x = h/4\pi L$, o forse a sinistra con quantità di moto $p_x = -\frac{1}{2}\Delta p_x = -h/4\pi L$. Questa quantità è paragonabile alla quantità di moto relativa a questo stato, data dall'equazione 15, cioè $P_1 = h/2L$; la differenza di un fattore 2π deriva dal modo arbitrario in cui si sono definite le incertezze. Questa valutazione indica che il moto corrispondente al punto zero è coerente con il principio d'indeterminazione, e che il moto è il risultato del confinamento della particella in una porzione dello spazio.

2. *L'elettrone soggiorna più a lungo in certe parti della buca che in altre.* Per questo problema unidimensionale, un elemento di «volume» diventa un elemento lineare, cosicché il prodotto $P_n(x)dx$ rappresenta la probabilità che l'elettrone si trovi nell'intervallo tra x e $x+dx$. Uno sguardo alle curve di densità di probabilità della figura 18 mostra che, allo stato fondamentale ($n = 1$), l'elettrone si trova con maggiore probabilità vicino al centro della trappola che alle sue estremità. Ancora una volta abbiamo una previsione che è nettamente in contrasto con le previsioni della meccanica classica. Secondo la teoria classica tutte le posizioni tra le pareti della buca sono ugualmente probabili, come è suggerito dalle linee orizzontali nella figura 18. Per entrambe le curve, quella classica e quella quantistica, l'area sotto la curva dev'essere pari all'unità, come richiede la condizione di normalizzazione (equazione 8).

Per stati con un numero quantico più alto, e perciò di maggiore energia, la distribuzione della densità di probabilità dell'elettrone nell'intera estensione della buca diventa più uniforme, e la previsione quantistica si avvicina a quella classica. Quest'accordo tra la fisica classica e quantistica per i numeri quantici più grandi è detto *principio di corrispondenza* e sarà discusso nel paragrafo 50-9.

3. *L'elettrone può sfuggire dalla buca.* Finora abbiamo considerato una buca di profondità infinita. Se si abbandona questa condizione e si ipotizza una più realistica buca di profondità finita, viene alla luce una sorprendente peculiarità quantistica. Nella figura 20 si confrontano due buche della stessa larghezza (2×10^{-10} m, circa la dimensione di un grosso atomo), una delle quali infinitamente profonda e l'altra di profondità pari a solo 20 eV. Per trovare le energie possibili e le corrispondenti densità di probabilità per una buca *finita*, abbiamo bisogno dell'equazione di Schrödinger nella sua forma più completa. Qui riportiamo semplicemente il risultato, senza darne dimostrazione* e consideriamo solo lo stato fondamentale.

La figura 20 mostra che l'energia dello stato fondamentale per una buca finita (4.45 eV) è notevolmente inferiore all'energia dello stato fondamentale per una buca infinita (9.41 eV, calcolata con l'equazione 16). Si può intuire che dovrebbe essere così anche solo osservando le curve delle densità di probabilità della figura 20. Per la buca di profondità infinita, tra le rigide pareti della buca è contenuta esattamente la metà di una lunghezza d'onda di De Broglie . Per la buca finita, invece, la lunghezza d'onda di De Broglie è una misura troppo grande perché metà vi sia contenuta e si estende quindi al di là delle pareti. Se la lunghezza d'onda di De Broglie è *maggiore* per la buca finita, la quantità di moto ($= h/\lambda$) dev'essere *minore*, il che significa che anche l'energia deve essere minore, come si può notare. Così la minore energia per la buca finita è consistente con la forma della sua curva di densità di probabilità.

Il fatto che le code esponenziali della curva che esprime la probabilità (figura 20*b*) si estendano al di fuori delle pareti della buca significa che c'è una probabilità finita che l'elettrone si trovi *all'esterno* della buca! Questa curva è stata normalizzata (equazione 8) in modo che l'area sotto la curva sia pari all'unità. L'area sotto le due estremità esponenziali vale 0.074; ciò significa che, se si misurasse la posizione dell'elettrone intrappolato, lo si troverebbe all'esterno della buca il 7.4% delle volte.

Come è possibile che un elettrone, la cui energia è solo 4.45 eV, fuoriesca da una buca di profondità 20 eV? È chiaramente impossibile dal punto di vista classico. Sarebbe come rinchiudere un cioccolatino in una

* Si veda, per esempio, Eisberg R. e Resnick R., *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2ª ed., Wiley 1985, app. G e H

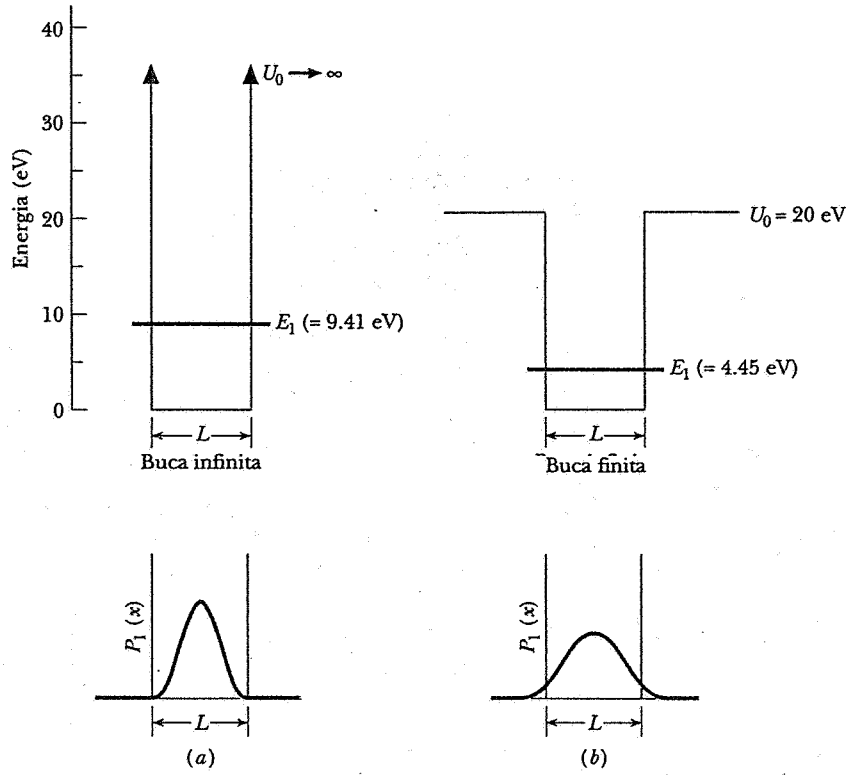


Figura 20 Una buca di potenziale di (*a*) profondità infinita e (*b*) profondità finita (20 eV) a confronto. Le buche hanno la stessa larghezza (0.2 nm). Sono confrontabili le energie E_1 e le densità di probabilità $P_1(x)$.

scatola per poi vederlo a volte, ma non sempre, materializzato al di fuori. È così improbabile che ciò avvenga per un cioccolatino che si può tranquillamente usare la parola «impossibile». Tuttavia, gli elettroni non sono cioccolatini, sono governati da leggi quantistiche e non da leggi classiche newtoniane. Come si può quindi spiegare questo comportamento dell'elettrone?

Ancora una volta il principio d'indeterminazione fornisce la risposta. Si ricordi che, nell'applicare il principio d'indeterminazione a un elettrone intrappolato in una buca di profondità infinita, si è assunto che $\Delta x \approx L$, la larghezza della buca, e $\Delta p_x \approx 2p_x$. Per la buca di profondità finita, la quantità di moto dell'elettrone, come si è poc'anzi constatato, è *inferiore* a quella per la buca infinita. Quindi, per la buca finita, *l'incertezza sulla posizione è maggiore dell'ampiezza della buca!* Non dovrebbe dunque sorprendere che l'elettrone possa trovarsi occasionalmente all'esterno della buca.

Esempio 8 Si consideri un elettrone confinato da forze elettriche in un buca di potenziale di profondità infinita, la cui larghezza L è 100 pm, più o meno un diametro atomico. Quali sono le energie dei suoi tre possibili stati di livello più basso e dello stato caratterizzato da $n = 15$?

Soluzione Dall'equazione 16, con $n = 1$, si ha

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\text{J} \cdot \text{s})^2}{(8)(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(100 \times 10^{-12}\text{ m})^2}$$
$$= 6.03 \times 10^{-18}\text{ J} = 37.7\text{ eV}$$

Le energie degli stati rimanenti ($n = 2$, $n = 3$, e $n = 15$) sono $2^2 \times 37.7$ eV, $3^2 \times 37.7$ eV e $15^2 \times 37.7$ eV, ovvero 151 eV, 339 eV e 8480 eV, rispettivamente.

Esempio 9 Si immagini un granello di polvere da un 1 μg che oscilla tra due pareti rigide distanti 0.1 mm fra di loro. Esso si muove così lentamente che impiega 100 s per attraversare questo spazio. Quale numero quantico descrive il suo movimento?

Soluzione L'energia della particella è

$$E(= K) = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1 \times 10^{-9}\text{ kg})(1 \times 10^{-6}\text{ m/s})^2$$
$$= 5 \times 10^{-22}\text{ J}$$

Risolvendo l'equazione 16 rispetto a n,

$$n = \frac{L}{h}\sqrt{8mE} = \frac{1 \times 10^{-4}\text{ m}}{6.63 \times 10^{-34}\text{ J} \cdot \text{s}}\sqrt{(8)(10^{-9}\text{ kg})(5 \times 10^{-22}\text{ J})}$$
$$\approx 3 \times 10^{14}.$$

È questo un numero enorme. Sperimentalmente è impossibile distinguere tra $n = 3 \times 10^{14}$ e $n = 3 \times 10^{14} + 1$, quindi la natura quantistica di questo moto non potrebbe mai rivelarsi. Se si confronta questo esempio con il precedente, si vede che, malgrado la sua massa e la sua energia cinetica siano davvero piccole per noi, il granello di polvere è ancora un oggetto macroscopico in paragone a un elettrone. La meccanica quantistica fornisce le risposte corrette, ma le complicazioni dei calcoli quantistici non sono in questo caso necessarie, dato che coincidono con le risposte della fisica classica.

Esempio 10 Si valuti la costante di normalizzazione A nell'equa-

ISBN 88-408-0777-2

zione 13, che dà la densità di probabilità per una particella rinchiusa in un buca infinitamente profonda di ampiezza L.

Soluzione Per questo problema unidimensionale, l'elemento «volume» è un elemento di lunghezza e l'equazione di normalizzazione (equazione 8) diventa

$$\int_0^L P_n(x)dx = 1,$$

in cui L è la larghezza del buca. Sostituendo $P_n(x)$ secondo l'equazione 14, si ha

$$A^2 \int_0^L \text{sen}^2 \frac{n\pi x}{L} dx = 1.$$

Si può trattare più facilmente l'integrale introducendo una nuova variabile θ, definita come

$$\theta = \frac{n\pi x}{L}.$$

Con questa sostituzione l'equazione diventa

$$\frac{A^2 L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \text{sen}^2\theta \, d\theta = \frac{A^2 L}{n\pi} \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\text{sen}2\theta \right) \Big|_0^{n\pi} = 1.$$

Risolvendo rispetto ad A si giunge infine a

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \qquad (18)$$

Si noti che la costante di normalizzazione A non coinvolge il numero quantico n e quindi è la stessa per tutti gli stati del sistema.

Esempio 11 Un elettrone è intrappolato in una buca infinitamente profonda di larghezza L. Se l'elettrone si trova nel suo stato fondamentale, che percentuale del suo tempo esso trascorre nella parte centrale di larghezza pari a un terzo della buca?

Soluzione Nell'esempio precedente si è dimostrato che la costante di normalizzazione A, che compare nell'equazione 13, vale $\sqrt{2/L}$, cosicché la densità di probabilità per lo stato fondamentale, che corrisponde a $n = 1$, è data dall'equazione 14:

$$P_1(x) = \frac{2}{L}\text{sen}^2 \frac{\pi x}{L}.$$

L'integrale di quest'espressione, esteso a tutta la larghezza della buca, è pari a 1, e la frazione che si cerca è data da

$$f = \int_{L/3}^{2L/3} P_1(x)dx = \frac{2}{L} \int_{L/3}^{2L/3} \text{sen}^2 \frac{\pi x}{L} dx.$$

Il calcolo di questo integrale, eseguito come nell'esempio precedente, porta a

$$f = 0.61.$$

Dunque l'elettrone nel suo stato fondamentale si trova per il 61% del tempo nel terzo centrale della trappola, e per il 19.5% del tempo in ciascuno degli altri due terzi (0.195 + 0.61 + 0.195 = 1). Se l'elettrone fosse soggetto alle leggi della fisica classica, starebbe esattamente un terzo del tempo in ciascuna delle tre porzioni della buca. La curva di densità di probabilità per lo stato fondamentale, illustrata nella figura 18, conferma graficamente i calcoli eseguiti in questo esempio.

50-8 EFFETTO TUNNEL

Nel paragrafo 50-7 si è visto che un elettrone intrappolato in una buca, da cui classicamente non potrebbe sfuggire, ha tuttavia una probabilità finita di trovarsi al di fuori della buca. Si è fatto notare che sarebbe come mettere un cioccolatino in una scatola chiusa e trovarlo all'esterno un certo numero di volte che si controlla. Cose del genere non succedono con oggetti macroscopici come i cioccolatini, ma avvengono con gli elettroni e altre particelle leggere.

Qui si discute il fenomeno quantistico correlato, cioè la penetrazione di una barriera classicamente impenetrabile. In questo caso è come se si scagliasse il cioccolatino contro una finestra chiusa, ed esso si materializzasse all'esterno, lasciando il vetro intatto. Naturalmente non ci si può aspettare un tale comportamento da un cioccolatino. Ma questo fenomeno succede *davvero* per gli elettroni, è chiamato *effetto tunnel*, e rappresenta un fenomeno di grande importanza pratica.

La figura 21*a* mostra una tale barriera di potenziale, di altezza U e spessore L. Un elettrone di energia totale E si avvicina alla barriera provenendo da sinistra. Classicamente, dato che $E < U$, l'elettrone sarebbe riflesso indietro dalla barriera, ritornando da dove è venuto. Nella meccanica ondulatoria, invece, c'è una possibilità finita che l'elettrone perfori la barriera e

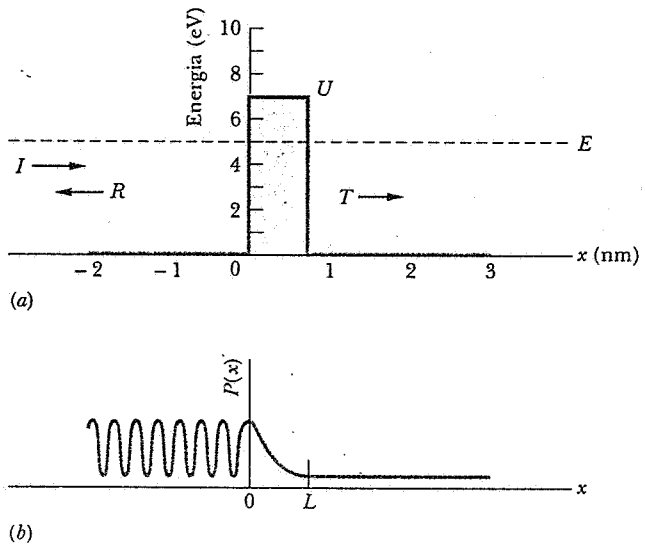


Figura 21 Una particella di energia totale E incide provenendo da sinistra sulla barriera di altezza U. I rappresenta il fascio incidente di particelle, R il fascio riflesso, T il fascio trasmesso attraverso la barriera. (*b*) La densità di probabilità per l'onda che descrive la particella. I fasci incidente e riflesso si combinano a formare onde stazionarie a sinistra della barriera.

continui il suo movimento verso destra.

Si può descrivere la situazione assegnando un coefficiente di riflessione R, e un coefficiente di trasmissione T, la somma dei quali è pari a 1. Così, se per esempio $T=0.05$, su 100 elettroni 5 in media passano la barriera e 95 sono respinti indietro.

La figura 21*b* mostra la densità di probabilità per questa configurazione. Alla sinistra della barriera, l'onda di materia riflessa ha un'ampiezza minore di quella dell'onda incidente. Malgrado ci sia un'interferenza, non esiste nessun punto in cui la cancellazione sia totale. All'interno della barriera, l'ampiezza dell'onda decade esponenzialmente, come succede all'esterno della buca di potenziale della figura 20*b*. All'estremità destra della barriera viaggia un'onda di materia di ampiezza ridotta, il che fornisce una densità di probabilità uniforme.

Dall'equazione di Schrödinger si può mostrare che il coefficiente di trasmissione T è dato da*

$$T \approx e^{-2kL}, \tag{19}$$

in cui

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U-E)}{h^2}}.$$

Questa formula è un'approssimazione valida solo per barriere che sono alte o spesse abbastanza da permettere un piccolo coefficiente di trasmissione T ($T \ll 1$). Ad ogni modo, l'equazione 19 rende sufficientemente chiaro l'aspetto principale del fenomeno tunnel-barriera.

Il valore del coefficiente di trasmissione è strettamente legato allo spessore della barriera L e al fattore k, che a sua volta dipende dalla massa m della particella e dall'altezza U della barriera. L'equazione 19 indica che il coefficiente di trasmissione diminuisce se si aumenta lo spessore L o l'altezza U della barriera. Che è quanto ci si aspetta dal principio di corrispondenza. Il coefficiente di trasmissione diminuisce anche quando la massa della particella aumenta, diventando piccolo, molto rapidamente, fino a essere impercettibile quando si passa dalla massa di un elettrone a quella di un cioccolatino. Ancora una volta questa conseguenza coincide con quanto prevede il principio di corrispondenza. L'esempio 12 illustra alcune previsioni numeriche per l'equazione 19.

Barriere e onde

La penetrazione di barriere da parte di onde di tutti i generi non è certo un fenomeno inusuale nella fisica classica. Soltanto quando l'onda assume una caratteristica materiale, e si tratta peraltro di una particella associata a essa, si manifesta un comportamento non classico.

Si consideri la figura 22*a*, che rappresenta un'onda elettromagnetica incidente (luce visibile) sulla superficie di separazione tra vetro e aria di un prisma, con un angolo di incidenza tale che si verifichi una riflessione totale. Quando si è discusso questo argomento nel paragrafo 43-6, abbiamo stabilito che non c'è penetrazione del raggio incidente nello spazio di aria al di là dell'interfaccia. La discussione però era basata sull'ottica geometrica, che come si sa è sempre un'approssimazione, dato che costituisce un caso limite della più generale ottica ondulatoria. In modo molto simile, la meccanica newtoniana, con le sue traiettorie rettilinee, è un caso limite della più generale meccanica ondulatoria.

Se si analizza il fenomeno della riflessione totale dal punto di vista dell'ottica ondulatoria, si scopre che *esiste* effettivamente una penetrazione dell'onda, per la distanza di poche lunghezze d'onda al di là dell'interfaccia. Parlando in parole povere, si potrebbe dire che tale modesta penetrazione è necessaria affinché l'onda «esplori» la situazione ambientale che sussiste oltre prima di «riconoscere» l'esistenza dell'interfaccia.

Nella figura 22*b*, si è posto un altro prisma di vetro parallelo all'interfaccia, separato da essa da solo po-

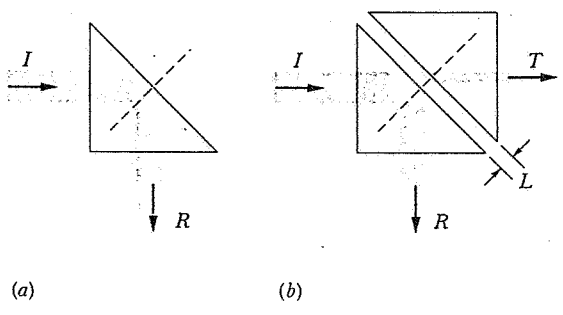


Figura 22 (*a*) Un fascio di luce incidente I subisce riflessione totale alla superficie di separazione vetro-aria. (*b*) Il fascio perfora la stretta intercapedine d'aria per effetto tunnel e ne risulta un fascio trasmesso T nel secondo vetro. Questa situazione è chiamata *riflessione totale impedita*. In questa figura la larghezza del fascio rappresenta la sua intensità.

* Si veda, per esempio, Eisberg R. e Resnick R., *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2ª ed., Wiley 1985, paragrafo 6-5

ISBN 88-408-0777-2

che lunghezze d'onda. L'onda incidente può, allora, «aprirsi un tunnel» attraverso questa stretta «barriera» e generare un'onda trasmessa *T*. L'energia dell'onda trasmessa viene sottratta all'onda riflessa *R*, che vede così ridursi la sua intensità. Il paragone con la penetrazione di una barriera da parte di un'onda di materia è diretto. Nel caso precedente si trattava di un'onda elettromagnetica (soggetta alle equazioni di Maxwell), e in questo caso di un'onda di materia (governata dall'equazione di Schrödinger).

Si può riprodurre facilmente il fenomeno illustrato nella figura 22*b* usando un bicchiere d'acqua. Guardate dall'alto la parete interna del bicchiere, con un angolo tale che la luce che colpisce l'occhio derivi da una riflessione totale della parete. La parete, quando si verifica questa condizione, appare come argentata. Poi premete un dito (bagnato) sulla parte esterna del bicchiere, fino a che vedete le prominenze delle impronte digitali. In quei punti la pelle aderisce al vetro impedendo il processo di riflessione totale, come nella figura 22*b*. In corrispondenza invece dei solchi dell'impronta, la pelle è già lontana abbastanza dalla superficie del bicchiere da permettere una riflessione totale in quei punti, lasciando visibile solo delle curve argentee.

Si può anche mostrare il fenomeno della figura 22*b* su grandi dimensioni, usando microonde incidenti su grandi prismi di paraffina. In questo caso la lunghezza d'onda può essere di alcuni centimetri, cosicché una distanza tra i prismi di dimensioni analoghe evidenzia bene l'effetto.

Effetto tunnel: qualche esempio

La penetrazione di barriere da parte di onde di materia è un fenomeno importante nel mondo naturale e ha molte applicazioni pratiche. Per fare un semplice esempio, si consideri un filo elettrico di rame scoperto che è stato tagliato, e le due estremità attorcigliate l'una all'altra. Esso conduce ancora elettricità, malgrado la porzione scoperta si sia ossidata in superficie, e l'ossido di rame sia un materiale isolante. Come fanno gli elettroni a passare attraverso questo strato (estremamente sottile) di ossido? Per effetto tunnel!

Per citare un esempio più lontano, si consideri il nucleo del Sole, in cui l'energia solare è generata da processi di fusione termonucleare. Questi processi implicano il fondersi insieme di nuclei leggeri per formarne altri più pesanti, con liberazione di energia. Si supponga che due protoni si avvicinino l'uno all'altro ad alta velocità. Devono giungere a un estrema vicinanza prima che l'intensa attrazione delle loro forze nucleari possa avere effetto e causare la loro fusione. Nel frattempo vengono rallentati dalla forza repulsiva di Coulomb, che tende ad allontanarli. Si potrebbe dire che essi sono separati da una barriera di Coulomb. La possibilità di fusione dipende in modo cruciale dalla capacità dei protoni di superare questa reciproca barriera. Senza l'effetto tunnel il reattore solare si spegnerebbe e il sole collasserebbe in sé stesso.

L'emissione di particelle alfa (con carica positiva) da parte dei nuclei radioattivi e la fissione spontanea dei nuclei pesanti in due grossi frammenti sono due esempi di processi naturali in cui l'effetto tunnel svolge una funzione determinante.

Tra le applicazioni pratiche si può citare il diodo tunnel, in cui il flusso di elettroni che, per effetto tunnel, penetra un certo dispositivo può essere rapidamente interrotto o ristabilito controllando l'altezza della barriera (variando la tensione esterna applicata, per esempio). Questa operazione può essere attuata con un tempo di risposta minimo (dell'ordine di 10^{-11}s o 10 ps), il che rende questo dispositivo adatto ad applicazioni in cui il tempo di risposta è cruciale. Nel 1973, il premio Nobel è stato condiviso da tre ricercatori dell'effetto tunnel: Leo Esaki (effetto tunnel nei semiconduttori), Ivan Giaver (effetto tunnel nei superconduttori), e Brian Josephson (giunzione di Josephson, un interruttore quantistico basato sull'effetto tunnel).

In un *microscopio a scansione a effetto tunnel*, una punta d'ago sottilissima esplora meccanicamente (seguendo un reticolato di punti come avviene in un televisore) la superficie del campione da analizzare, come nella figura 23. Gli elettroni del campione penetrano per effetto tunnel attraverso il sottile strato tra esso e l'ago e vengono registrati come una «corrente di tunnel». Di norma questa corrente varia molto in funzione della distanza tra l'ago e il campione incontrata durante la scansione.

Il microscopio è però dotato di un meccanismo automatico che muove l'ago su e giù durante la scansione, cosicché la corrente di tunnel, e quindi la distanza, rimangono costanti. La posizione verticale dell'ago, in funzione della sua posizione sul piano, può essere riportata su uno schermo producendo così un tracciato

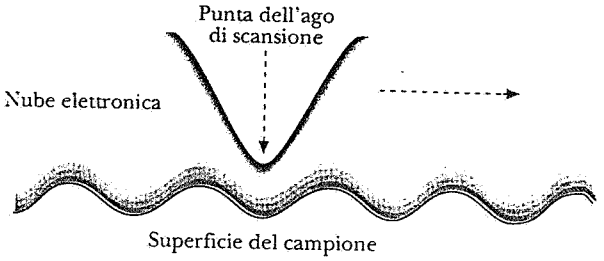


Figura 23 Un ago segue sfiorandola la superficie di un campione nel microscopio a scansione a effetto tunnel.

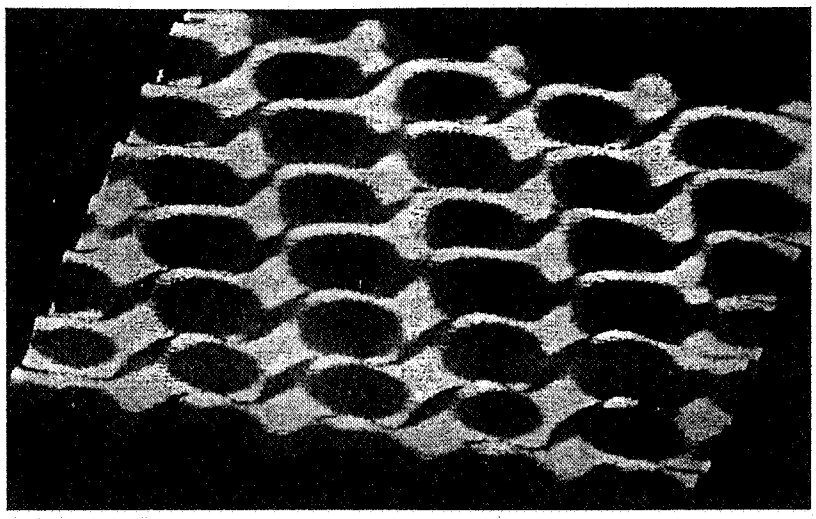


Figura 24 La disposizione regolare degli atomi di carbonio su un piano di grafite viene rivelata in questa immagine ottenuta con un microscopio a scansione a effetto tunnel.

tridimensionale della superficie. Nel 1986, Gerd Binnig e Heinrich Rohrer ricevettero il premio Nobel per lo sviluppo del microscopio a scansione a effetto tunnel*.

La figura 24 mostra il risultato di una scansione su una superficie di grafite. Le «protuberanze» indicano i singoli atomi di carbonio. Questo formidabile strumento è in grado di individuare particolari minuti come 1/100 di diametro atomico .

Esempio 12 Si consideri un elettrone la cui energia totale E sia di 5.0 eV, che si avvicina a una barriera di potenziale di altezza U pari a 6.0 eV, come nella figura 21*a*. Lo spessore della barriera L è di 0.70 nm. (*a*) Qual è la lunghezza d'onda di De Broglie di questo elettrone incidente? (*b*) Quale coefficiente di trasmissione si può dedurre dall'equazione 19? (*c*) Quale sarebbe il coefficiente di trasmissione, se lo spessore della barriera fosse ridotto a 0.30 nm? E se si aumentasse la sua altezza a 7.0 eV? E se la particella incidente fosse un protone?

Soluzione (*a*) Prima che l'elettrone raggiunga la barriera, la sua energia E è interamente di tipo cinetico. L'energia potenziale in quella regione è zero. Procedendo come nelle esempio 2*b*, troviamo $\lambda = 0.55$ nm. Risulta così che la barriera è spessa circa 1.3 volte la lunghezza d'onda di De Broglie (0.70/0.55).

(*b*) Abbiamo

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U-E)}{h^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\pi^2(9.11\times10^{-31}\text{ kg})(6.0\text{ eV} - 5.0\text{ eV})(1.60\times10^{-19}\text{ J/eV})}{(6.63\times10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s})^2}}$$

$$= 5.12\times10^{9}\text{ m}^{-1}$$

La quantità kL vale allora $(5.12\times10^{9}\text{ m}^{-1})(700\times10^{-12}\text{ m}) = 3.58$, e il coefficiente di trasmissione è

$$T = e^{-2kL} = e^{-2(3.58)} = 7.7\times10^{-4}.$$

Ogni 100.000 elettroni che colpiscono la barriera, solo 77 passeranno attraverso.

(*c*) Introducendo le dovute sostituzioni nel risultato della parte (*b*), si trova:

$L = 0.30$ nm: $T = 0.10$
$U = 7.0$ eV: $T = 5.9\times10^{-5}$
$m = 1836\,m_e$: $T = 10^{-130}$.

È più facile per gli elettroni penetrare una barriera più sottile, ma più difficile attraversarne una più alta. Per il pesante protone poi l'attraversamento risulta pressoché impossibile. (Si immagini quanto sarebbe piccolo T per un cioccolatino!)

50-9 IL PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA

In molti casi in questo capitolo e nel precedente, si è cercato di fare un paragone tra il comportamento classico e quello quantistico. Per citare un caso, nell'esempio 3 del capitolo 49, si è dimostrato che il comportamento quantistico di un oscillatore di dimensioni comuni è troppo fine per essere osservabile; è quindi giustificato utilizzare tecniche classiche (non quantistiche) e considerare l'energia dell'oscillatore come una variabile continua (non discreta). In questo capitolo, si è mostrato nell'esempio 2 che la lunghezza d'onda di De Broglie di un virus è talmente piccola che sfugge a qualsiasi possibilità di osservazione; nell'esempio 6*b* si è visto che il principio d'indeterminazione non dovreb-

* Si veda Binnig G. e Rohrer H., *Il microscopio a scansione a effetto tunnel*, «Le Scienze», 206:34.

ISBN 88-408-0777-2

be intervenire in una nostra partita a golf; e nell'esempio 9 che la quantizzazione dell'energia di un granello di polvere non può essere osservata.

Sembra quasi che si siano stabilite due categorie di regole per analizzare il comportamento meccanico: la meccanica dei quanti per particelle «piccole», e la meccanica classica per particelle «grosse». Chiaramente una palla è un oggetto grosso, ma anche un granello di polvere e un virus possono essere considerate «grandi». Questi esempi lasciano forse un po' di perplessità circa il limite di separazione tra particelle classiche e particelle quantistiche.

Niels Bohr rimase altrettanto confuso quando tentò (prima che l'audace ipotesi di De Broglie portasse allo sviluppo della teoria dei quanti) di figurarsi la struttura dell'atomo basato su un modello nucleare di elettroni in orbita intorno a un nucleo centrale. Il modello di Bohr era basato su livelli discreti di energia (e transizioni discrete quando gli elettroni saltano da un livello all'altro) per l'atomo, ma egli sapeva che l'atomo «classico» doveva essere caratterizzato da uno spettro continuo di radiazioni, emesso mentre l'elettrone precipita a spirale verso il suo nucleo. Come nel caso della meccanica quantistica, Bohr si trovò di fronte a un dilemma: una serie di regole che valeva per una certa scala di dimensioni e un altra che valeva per una scala diversa.

Bohr risolse la questione proponendo il principio di corrispondenza, che può essere espresso in termini generali come segue:

La teoria dei quanti deve essere in accordo con la teoria classica per valori elevati dei numeri quantici.

Questo principio evita il problema di dover trovare una linea precisa di divisione tra i due diversi sistemi. Le previsioni della meccanica quantistica devono diventare identiche a quelle della meccanica classica, man mano che il sistema quantistico trattato si ingrandisce verso dimensioni classiche. Per esempio, si consideri la densità di probabilità per una particella intrappolata in una buca (fig. 18). Il comportamento per $n = 1$ o $n = 2$ differisce notevolmente dal comportamento classico che prevede una densità di probabilità uniforme. Però, per $n = 15$, la densità di probabilità si avvicina molto di più a un valore costante. Come n aumenta, le oscillazioni di P divengono progressivamente più fitte, in modo tale che se si esamina la probabilità su di un intervallo di lunghezza Δx maggiore di L/n, non si riconoscono variazioni nello spostare l'intervallo di osservazione lungo la larghezza della buca. Per i numeri quantici superiori quindi si approssima la situazione classica di una densità di probabilità uniforme .

Il principio di corrispondenza afferma che non è necessario trovare una linea di demarcazione tra comportamenti classici e quantistici. Se si è in dubbio circa quale sistema di leggi applicare a un virus o a un granello di polvere, sappiamo ora di poter ricorrere tranquillamente alle leggi quantistiche, dato che il risultato ricalcherebbe quello ottenuto con leggi classiche, se si tratta di un ambito in cui si prevede un comportamento classico. Infatti, usando la densità di probabilità calcolata dall'equazione di Schrödinger e operando la media appropriata, si può dimostrare che la forza media su una particella soggetta alle leggi quantistiche è uguale alla massa moltiplicata per l'accelerazione media: $\bar{F} = m\bar{a}$. Nell'ambito di grandi numeri quantici, la fluttuazione attorno al valor medio diventa trascurabile, e $F = ma$ risulta una relazione esatta. Anche se l'equazione di Schrödinger sembra molto differente dalla seconda legge di Newton, i suoi risultati si riducono a quelli di quest'ultima nell'ambito di grandi sistemi. Questo giustifica l'uso della seconda legge di Newton, che è più facile da applicare, quando si ha a che fare con corpi di dimensioni più grandi, anche se essi sono composti di atomi singolarmente governati dall'equazione di Schrödinger.

50-10 ONDE E PARTICELLE

In molte delle situazioni precedentemente incontrate si è rimandata la risposta alla domanda su come un elettrone (o un fotone) possa agire come un'onda in certe circostanze, e come una particella in altre. Ora si discuterà questo argomento. Per prima cosa, richiameremo nella tabella 1 gli inequivocabili risultati sperimen-

TABELLA 1 ALCUNI ESPERIMENTI CHE MOSTRANO IL DUALISMO ONDA-PARTICELLA DELLA MATERIA E DELLA RADIAZIONE

	Materia	*Radiazione*
Natura ondulatoria	Esperimenti di diffrazione dell'elettrone di Davisson-Germer (paragrafo 50-3)	Esperienza di Young sull'interferenza da doppia fenditura (paragrafo 45-1)
Natura corpuscolare	Misura di J. J. Thomson del rapporto e/m per l'elettrone (paragrafo 34-2)	Effetto Compton (paragrafo 49-7)

tali che dimostrano come la materia e la radiazione davvero presentino entrambi questa doppia natura.

Le nostre immagini mentali di «onda» e «particella» sono derivate dalla nostra familiarità con oggetti su grande scala, come le onde del mare e le palle da tennis. In un certo senso, è da considerarsi una fortuita coincidenza che si possa estendere questi concetti al mondo atomico, e applicarli a entità come gli elettroni, che non si possono vedere o toccare. Ma si deve sottolineare subito che nel mondo dei quanti non è possibile nessuna concreta immagine mentale, che combini le caratteristiche di *entrambe* (onde e particelle). Così Paul Davies, fisico e scrittore scientifico, ha espresso questo limite: "È impossibile visualizzare un'onda-particella, quindi non ci provate nemmeno." Come ci si può avvicinare?

Niels Bohr, che non solo ebbe un ruolo fondamentale nello sviluppo della meccanica dei quanti, ma ne è stato anche il suo maggiore interprete e filosofo, ci ha indirizzati verso una soluzione con il suo *principio di complementarità*, che afferma:

> *Gli aspetti d'onda e di particella di un'entità quantistica sono entrambi necessari per una descrizione completa. Tuttavia, i due aspetti non possono essere rivelati simultaneamente in un singolo esperimento. L'aspetto che si rivela è quello determinato dalla natura dell'esperimento che si conduce.*

Si prenda in considerazione un fascio di luce, magari di un laser, che passa sopra un tavolo di laboratorio. Qual è la natura del raggio? È un'onda o un flusso di particelle?

Non si può rispondere senza interagire con il raggio, in qualche modo. Se si pone un reticolo di diffrazione sul suo percorso, si rivelerà come un'onda. Se si intercetta con un apparato fotoelettrico (paragrafo 49-5), sarà necessario considerare il raggio come una corrente di particelle (fotoni), se si vuole interpretare le misure in un modo soddisfacente. Per quanto ci si provi, non esiste un singolo esperimento che si possa condurre con questo fascio, che consenta un'interpretazione del raggio come onda e come particella *allo stesso tempo*.

Complementarità: studio di un caso

Vediamo come agisce il principio di complementarità quando si cerca di stabilire un esperimento che costringa la natura a rivelare nello stesso tempo tutti e due gli aspetti di onda e particella degli elettroni. Nella figura 25, un fascio di elettroni colpisce una doppia fenditura su uno schermo *A* e forma una figura di frange d'interferenza sullo schermo *B*. Questa è una prova convincente della natura ondulatoria del fascio incidente di elettroni.

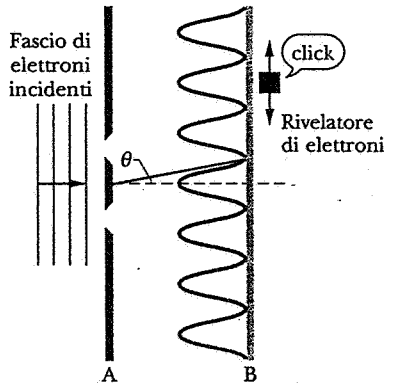


Figura 25 Un fascio di elettroni investe la doppia fenditura dello schermo A e produce frange d'interferenza sullo schermo B. Lo schermo B può essere sostituito da un rivelatore di elettroni, scorrevole lungo il piano occupato dallo schermo.

Si supponga ora di sostituire lo schermo *B* con un piccolo rivelatore di elettroni, progettato in modo da ticchettare, e registrarne così la presenza, per ogni elettrone che lo colpisce. Si verifica che davvero avviene un tale «ticchettio». Se si muove il rivelatore verticalmente, nella figura 25, e si registra la frequenza del ticchettio in funzione della posizione, si può tracciare il disegno di frange d'interferenza. Si possono vedere le frange (onde) e sentire il ticchettio (particelle). Si può questo considerare un successo nel dimostrare l'esistenza di onde e particelle insieme?

No, non si può. Il ticchettio mostra che l'elettrone è stato localizzato (come particella) dal rivelatore, ma non dice come sia arrivato lì. Il concetto di «particella» implica il concetto di «traiettoria» e l'immagine mentale di un punto che si muove in una certa direzione. Come minimo, sarebbe necessario sapere da quale delle due fenditure dello schermo A sia passato l'elettrone nella sua traiettoria verso il rivelatore che lo riceve. È possibile individuarlo?

In linea di principio è possibile, mettendo un rivelatore sottilissimo di fronte alle due fenditure, progettato in modo che segnali il passaggio di ogni elettrone. Si può provare a mettere in correlazione ogni «tic», ovvero il segnale di rivelazione, con il segnale di passaggio attraverso la fenditura, identificando così il percorso dell'elettrone considerato.

Ammesso di riuscire ad attrezzare l'apparecchiatura in questo modo, si scopre un fatto sorprendente: le frange d'interferenza scompaiono! Nel passaggio attraverso il rivelatore posto davanti alla fenditura, gli elettroni sono influenzati in modo tale che la figura di interferenza viene annullata. Malgrado si sia messa in luce la natura corpuscolare di un elettrone, l'evidenza

ISBN 88-408-0777-2

della sua natura ondulatoria è sparita.

Anche un esperimento ideale inverso giungerebbe alla medesima conclusione. Se si comincia con un esperimento che dimostra la natura corpuscolare degli elettroni e lo manipoliamo fino a riuscire a rivelarne l'aspetto ondulatorio, ci ritroviamo senza l'evidenza delle particelle. Lo stesso identico risultato otterremmo sostituendo nella figura 25 un fascio di luce al fascio di elettroni incidenti.

Soluzione di un dilemma quantistico

Nel paragrafo 50-1, ci siamo chiesti come è possibile che le particelle subiscano un'interferenza da doppia fenditura. Una particella, dopotutto, deve viaggiare secondo una traiettoria stabilita. Qual è l'origine dell'interferenza? Per cominciare a rispondere, si osservi ancora l'esperimento teorico della figura 25, in cui le frange d'interferenza sullo schermo *B* sono ordinatamente registrate, in un'alternanza di sovrapposizioni costruttive e distruttive generate dalle onde elementari che si irradiano da ciascuna delle due fenditure dello schermo *A*. Il nesso tra queste onde e le relative particelle è costituito dal fatto che in ogni punto il quadrato delle loro funzioni d'onda associate fornisce la probabilità (per unità di volume) che le particelle si trovino in quel punto. Così, sullo schermo *B*, gli elettroni si accumulano in quei punti in cui il valore della probabilità è maggiore, e si diradano dove le probabilità sono scarse. La figura 26, con una simulazione al calcolatore, mostra, per un fascio incidente debole, come le frange si formino via via con l'andar del tempo.

Queste considerazioni si applicano anche se il fascio incidente è intenzionalmente ridotto a una tal debolezza che, dai calcoli, ci dovrebbe essere, in media, nell'apparecchiatura solo un elettrone alla volta. Si potrebbe pensare che, dato che ogni singolo elettrone che si presenta nell'apparecchiatura deve passare da una fenditura o dall'altra, le frange d'interferenza dovrebbero sparire. Dopotutto, potrebbe continuare il ragionamento, un elettrone non può interferire con sé stesso e non è presente nessun altro elemento che possa farlo. Ma gli esperimenti dimostrano che le frange d'interferenza si formano *ancora*, crescendo lentamente mentre un elettrone dopo l'altro colpisce lo schermo *B*. Anche in queste condizioni le onde associate passano attraverso *entrambe* le fenditure, e quest'ultimo fatto è *ciò* che determina in quale punto è probabile che l'elettrone raggiunga lo schermo *B*.

Per avere un'idea più chiara della funzione che svolge l'onda associata nel moto di una particella, si consideri la figura 27, in cui una particella (come un elettrone) viene generata nel punto *I* e intercettata nel punto *F*. Come si sposta in questo percorso rettilineo?

La risposta quantistica prevede che l'onda esplori, come suggerisce la figura, tutti i percorsi possibili assegnando a ciascuno un'uguale probabilità. Tuttavia, solo lungo la linea retta di connessione dei due punti le onde si sommano costruttivamente, creando una maggiore probabilità che la particella sia localizzata in quei punti se viene cercata. Nei punti che non sono vicini alla linea retta, le onde si elidono a vicenda a causa dell'interferenza distruttiva, in maniera tanto più pronunciata quanto più massive sono le particelle. È

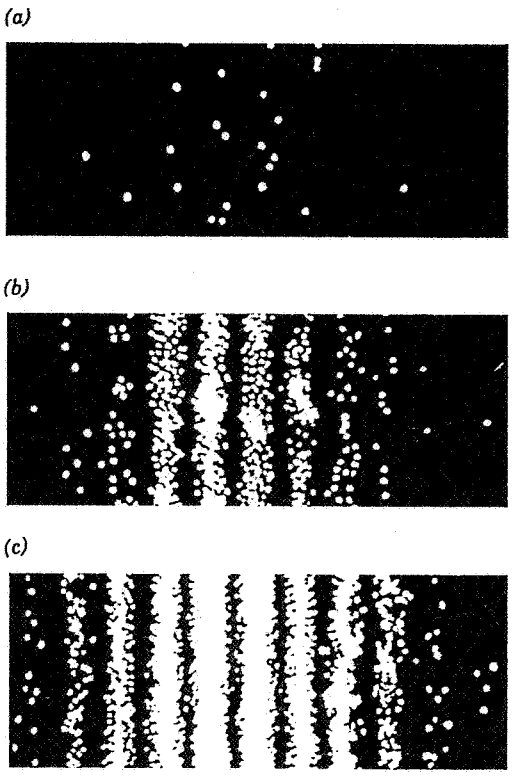


Figura 26 La costruzione di frange d'interferenza man mano che gli elettroni cadono sullo schermo B della figura 25. In (*a*) circa 30 elettroni hanno raggiunto lo schermo, in (*b*) sono circa 1000 e in (*c*) attorno a 10000. La densità di probabilità dell'onda che descrive l'elettrone determina dove gli elettroni finiranno sullo schermo.

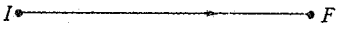


Figura 27 Un elettrone si muove da *I* a *F*. Le onde che descrivono il suo percorso interferiscono costruttivamente lungo la congiungente retta e distruttivamente lungo qualsiasi altro cammino. Le onde esplorano così ogni possibile percorso tra *I* ed *F*.

così che le traiettorie delle particelle nella meccanica newtoniana sono associate alle loro onde.

Non è difficile immaginare l'effetto provocato introducendo una doppia fenditura tra I e F nella figura 27. Nel processo di esplorazione dei percorsi possibili, solo le onde che passano per le fenditure continuano a sussistere. La particella sarà trovata più facilmente nelle regioni dello schermo ove è maggiore la densità di probabilità, e in questo modo si forma la figura d'interferenza.

DOMANDE

1. Come è possibile che la lunghezza d'onda di un elettrone sia data da $\lambda = h/p$? La presenza stessa di una quantità di moto p nella formula non implica che l'elettrone sia una particella?
2. In una ripetizione dell'esperimento di Thomson per misurare e/m per l'elettrone (paragrafo 34-2), un fascio di elettroni viene collimato mediante il passaggio attraverso una fenditura. Perché il carattere di fascio rettilineo degli elettroni emergenti non viene cancellato dalla diffrazione dell'onda associata agli elettroni attraverso la fenditura?
3. Per quale ragione la natura ondulatoria della materia non è maggiormente appariscente nelle nostre osservazioni quotidiane?
4. Considerando il comportamento ondulatorio degli elettroni, si dovrebbe poter costruire un «microscopio a elettroni» usando elettroni a onde corte per ottenere un'alta risoluzione. Ciò è stato in effetti realizzato. (*a*) Come si può mettere a fuoco il fascio di elettroni? (*b*) Che vantaggio può offrire un microscopio elettronico su un microscopio ordinario? (*c*) Perché non utilizzare un microscopio a protoni? O a neutroni?
5. Quanti esperimenti si possono ricordare che sostengano la teoria ondulatoria della luce? E la teoria corpuscolare della luce? La teoria ondulatoria della materia? La teoria corpuscolare della materia?
6. L'elettrone è una particella? È un onda? Si spieghi la risposta data, citando prove sperimentali convincenti.
7. Se le particelle elencate qui sotto avessero tutte la stessa energia, quale avrebbe la lunghezza d'onda più corta? Elettrone, particella α, neutrone, protone.
8. Per la quantità di moto di un fotone e di una particella che espressione comune si può usare?
9. Discutere l'analogia tra (*a*) ottica ondulatoria e ottica geometrica, (*b*) meccanica ondulatoria e meccanica classica.
10. Un fotone ha una lunghezza d'onda di de Broglie? Si spieghi.
11. Discutere similarità e differenze tra un'onda di materia e una elettromagnetica.
12. La lunghezza d'onda di de Broglie associata a una particella può essere più piccola della dimensione della particella? Più grande? C'è necessariamente una relazione tra queste quantità?
13. Se, nella formula di de Broglie $\lambda = h/mv$, si pone $m \to \infty$, si ottiene il risultato classico per particelle materiali?
14. Considerando elettroni e protoni come particelle, in che modo gli uni sono diversi dagli altri?
15. L'equazione 1 per la lunghezza d'onda di de Broglie, $\lambda = h/p$, è applicabile a particelle relativistiche? Si giustifichi la risposta.
16. Come fu possibile per Davisson e Germer essere sicuri che il picco «54 V» della figura 7 fosse un massimo di primo ordine di diffrazione, cioè che $m = 1$ nell'equazione 2?
17. Gli esperimenti di diffrazione degli elettroni danno informazioni differenti sui cristalli da quelli che si possono ottenere dagli esperimenti di diffrazione dei raggi X? Dagli esperimenti di diffrazione dei neutroni? Si enuncino esempi.
18. Perché gli atomi d'idrogeno sono chiaramente visibili nella figura 10, ma non nella figura 17 del capitolo 47?
19. Nella figura 9*b* (ottenuta con raggi X) i cerchi di diffrazione sono granulosi, ma nella figura 9*c* (ottenuta con elettroni) sono lisci. Spiegare perché.
20. Le onde elettromagnetiche penetrano nell'acqua del mare in una certa misura, se la loro frequenza è abbastanza bassa. Questa è la premessa di un piano per comunicare con sottomarini in profondità. Una difficoltà che si presenta è che quanto più bassa è la frequenza, tanto più lungo il tempo necessario per trasmettere un messaggio (in alfabeto Morse, per esempio). Si saprebbe spiegare perché?
21. Perché il principio d'indeterminazione di Heisenberg non viene comunemente osservato nella nostra vita di tutti i giorni?
22. (*a*) Si diano esempi di come il processo di misurazione disturba il sistema che si sta misurando. (*b*) Si può tener conto del disturbo a priori con calcoli appropriati?
23. Si misura la pressione in un pneumatico usando un manometro. Tuttavia il manometro durante la misura disperde un po' d'aria contenuta nel pneumatico, così che l'atto stesso di misurazione cambia la quantità che si cerca di misurare. È questo un esempio del principio d'indeterminazione di Heisenberg? Si spieghi.
24. "L'energia dello stato fondamentale di un sistema atomico può essere conosciuta con precisione, ma le energie dei suoi stati eccitati sono sempre soggette a qualche incertezza." Spiegare quest'affermazione sulla base del principio d'indeterminazione.
25. "Se un elettrone è localizzato nello spazio, la sua quantità di moto diventa incerta. Se è localizzato nel tempo, la sua energia diventa incerta." Spiegare questa affermazione.
26. La quantità $\psi(x)$, l'ampiezza dell'onda di materia, è detta *funzione d'onda*. Qual è il nesso che lega questa quantità e le particelle che formano l'onda di materia?
27. Nel paragrafo 50-7 si è risolto il problema di meccanica ondulatoria di una particella intrappolata in una buca infinitamente profonda, senza usare affatto l'equazione di Schrödinger. Come si è riusciti a farlo?
28. Un'onda stazionaria può essere vista come una sovrapposizione di due onde in movimento. Si applichi questo concetto al problema di una particella racchiusa tra due pareti rigide, dandone un'interpretazione con riferimento al moto della particella.
29. Le energie possibili per una particella racchiusa tra due pareti rigide sono date dall'equazione 16. Dapprima si verifichi

ISBN 88-408-0777-2

che man mano che n aumenta, i livelli di energia si separano ulteriormente. Come è possibile? Il principio di corrispondenza sembra indicare la necessità che, quando n cresce, essi si ravvicinino, approssimando pian piano la distribuzione continua.

30. Come è possibile che le previsioni della meccanica ondulatoria siano così precise, se la sola informazione che abbiamo circa la posizione degli elettroni negli atomi è di tipo statistico?
31. Nello stato in cui $n=1$ per una particella rinchiusa fra pareti rigide, qual è la probabilità che la particella sia trovata in un elemento di lunghezza infinitesima in prossimità della superficie di una delle pareti?
32. Quali sono le dimensioni della variabile $P_n(x)$ nella figura 18? Qual è il valore della densità di probabilità prevista classicamente, rappresentata dalle linee orizzontali? Quale il valore dell'area sottesa dalle curve? Che rapporto c'è tra l'area sottesa dalle curve e l'area sottesa dalla linea orizzontale? A tutte queste domande si può rispondere esaminando la figura.
33. Con riferimento alla figura 18, come vi immaginate che sia la curva di $P_n(x)$ per $n=100$? Ci si convince che queste curve si avvicinano alle previsioni classiche quando $n \to \infty$.
34. Si è visto che l'effetto tunnel si applica a onde di materia e a onde elettromagnetiche. Funziona anche per le onde del mare? E per le onde sonore?
35. Si commenti questa osservazione: "Una particella non può essere rivelata nel preciso momento in cui passa attraverso una barriera, quindi non ha senso affermare che un tale fenomeno davvero avviene."
36. Elencare esempi di fenomeni naturali e di dispositivi artificiali in cui avviene l'effetto tunnel.
37. Un protone e un deuterone, ciascuno con 3 MeV di energia, cercano di penetrare una barriera rettangolare di potenziale alta 10 MeV. Quale particella ha la maggiore probabilità di riuscirci? Spiegare in termini qualitativi.
38. Un laser proietta un raggio di luce sopra un tavolo da laboratorio. Se si interpone un reticolo di diffrazione sul percorso del raggio e se ne osserva lo spettro, si stabilisce che il raggio è un onda. Se invece si interpone una superficie metallica lucida e si osservano gli elettroni fotoemessi, si stabilisce che lo stesso raggio è un flusso di particelle (fotoni). Che cosa si può dire di questo raggio, se non si infrappone nulla sul suo cammino?
39. Si enunci e si discuta (*a*) il principio di corrispondenza, (*b*) il principio d'indeterminazione, (*c*) il principio di complementarità.
40. Nella figura 25, perché ci si aspetta che gli elettroni emergenti da ciascuna fenditura arrivino allo schermo in una quantità di posizioni diverse? Non dovrebbero arrivare tutti nello stesso punto? In quale modo la risposta trova un nesso col principio di complementarità?
41. Diversi gruppi di sperimentatori stanno cercando di individuare onde gravitazionali, magari originate dal nostro centro galattico. Essi misurano piccole deformazioni in oggetti pesanti attraverso i quali passano le onde ipotizzate. Cercano di misurare spostamenti dell'ordine di grandezza di 10^{-21} m. (Il raggio di un protone è circa 10^{-15} m, un milione di volte più grande!) Il principio d'indeterminazione pone qualche restrizione sulla precisione con cui queste misurazioni possono essere effettuate?
42. La figura 18 mostra che, per $n = 3$, la funzione di probabilità $P_n(x)$ per una particella rinchiusa tra pareti rigide è zero in due punti tra le pareti. Come è possibile che la particella possa passare attraverso queste due posizioni? (*Suggerimento*: Si considerino le implicazioni del principio d'indeterminazione)
43. Nell'esempio 8, l'energia dell'elettrone è determinata *con precisione* in base alle dimensioni della buca. Come si concilia questo con il fatto che l'incertezza sulla posizione dell'elettrone non può eccedere 100 pm e che, se obbedisce al principio d'indeterminazione, la quantità di moto dell'elettrone dev'essere di conseguenza incerta?

PROBLEMI

Paragrafo 50-2 Lunghezza d'onda di De Broglie

1. Una pallottola con massa di 41 g viaggia alla velocità di 900 m/s. (*a*) Quale lunghezza d'onda si può associare ad essa? (*b*) Perché la natura ondulatoria della pallottola non si rivela attraverso effetti di diffrazione?
2. Usando il rapporto classico tra quantità di moto ed energia cinetica, dimostrare che la lunghezza d'onda di de Broglie di un elettrone può essere scritta come:

(*a*) $$\lambda = \frac{1.226 \text{ nm}}{\sqrt{K}},$$

in cui K è l'energia cinetica espressa in elettronvolt, oppure:

(*b*) $$\lambda = \sqrt{\frac{1.50}{V}}.$$

in cui λ è espressa in nm, e V è il potenziale accelerante in volt. (Si usino i migliori valori disponibili per le costanti necessarie, come indicate nell'appendice B).

3. Calcolare la lunghezza d'onda di un (*a*) elettrone, (*b*) fotone, (*c*) neutrone, aventi ciascuno energia di 1.00 keV.
4. La lunghezza d'onda della riga gialla caratteristica emessa dal sodio è 589 nm. A quale energia cinetica un elettrone avrebbe la stessa lunghezza d'onda di de Broglie?
5. Se la lunghezza d'onda di de Broglie di un protone è 0.113 pm, (*a*) qual è la velocità del protone, e (*b*) quale potenziale elettrico è necessario per accelerare il protone dallo stato di riposo a questa velocità?
6. Alcuni ioni di sodio con carica $+e$ vengono accelerati da una differenza di potenziale di 325 V. (*a*) Qual è la quantità di moto acquisita dagli ioni? (*b*) Si calcoli la loro lunghezza d'onda di de Broglie.
7. L'esistenza del nucleo atomico fu scoperta nel 1911 da Ernest Rutherford, che interpretò correttamente alcuni esperimenti in cui un fascio di particelle alfa veniva diffuso da uno strato

di atomi pesanti come l'oro. (*a*) Ammesso che le particelle alfa avessero un'energia cinetica di 7.5 MeV, qual era la loro lunghezza d'onda di de Broglie? (*b*) Si sarebbe dovuto tener conto della natura ondulatoria delle particelle alfa incidenti nell'interpretare questi esperimenti? La minima distanza dai nuclei, raggiunta dalle particelle alfa in quest'esperimento, era di circa 30 fm. (La natura ondulatoria della materia non fu postulata che dieci anni dopo l'attuazione di questo fondamentale esperimento).

8. Il massimo potere di risoluzione di un microscopio è limitato solamente dalla lunghezza d'onda della radiazione usata; in breve, il più minuto dettaglio che possa essere messo in evidenza è uguale a circa una lunghezza d'onda della radiazione incidente. Si supponga che lo scopo sia di «guardare» dentro a un atomo. Assumendo che l'atomo abbia un diametro di 100 pm, questo significa che si vuole distinguere dettagli distanti circa 10 pm. (*a*) Se si usa un microscopio elettronico, qual'è la minima energia necessaria per gli elettroni? (*b*) Se si usa un microscopio ordinario, di quale energia minima dei fotoni si necessita? (*c*) Quale microscopio sembra più idoneo allo scopo? Perché?
9. L'acceleratore di elettroni da 32 GeV installato a Stanford fornisce un fascio di elettroni di breve lunghezza d'onda, adatta al sondaggio di sottili dettagli della struttura nucleare con esperimenti di diffusione. Qual è questa lunghezza d'onda, e in quale rapporto sta con la dimensione di un nucleo medio? (A questi livelli di energia è sufficiente usare la relazione relativistica limite tra la quantità di moto e l'energia: cioè $p = E/c$. Si tratta dello stesso rapporto usato per la luce ed è giustificato quando l'energia cinetica di una particella è molto più grande della sua energia a riposo, come in questo caso. Il raggio di un nucleo di massa media è circa 5.0 fm.)
10. Si consideri un pallone pieno di gas elio (monoatomico) alla temperatura di 18 °C e alla pressione atmosferica. Calcolare (*a*) la lunghezza d'onda media di de Broglie per gli atomi di elio e (*b*) la distanza media tra gli atomi. In queste condizioni, si possono trattare gli atomi come particelle?
11. Una particella non relativistica si muove tre volte più rapidamente di un elettrone. Il rapporto tra le loro lunghezze d'onda di De Broglie, (della particella e dell'elettrone), è di 1.813×10^{-4}. Si identifichi la particella mediante il calcolo della sua massa. Consultare l'appendice B.
12. (*a*) Un fotone nel vuoto ha un'energia di 1.5 eV, e un elettrone nella stessa condizione ha un'energia cinetica dello stesso valore. Quali sono le loro lunghezze d'onda? (*b*) E se l'energia è di 1.5 GeV?
13. Nei comuni televisori a colori, gli elettroni sono accelerati da una differenza di potenziale di 25.0 kV. Si trovi la loro lunghezza d'onda di de Broglie (*a*) usando l'espressione classica per la quantità di moto, (*b*) tenendo conto dell'effetto relativistico.
14. Quale potenziale di accelerazione sarebbe necessario per gli elettroni in un microscopio elettronico, per ottenere lo stesso potere massimo di risoluzione che si avrebbe con un microscopio che faccia uso di raggi gamma aventi energia di 136 keV? (*Suggerimento*: Vedere il problema 8).

Paragrafo 50-3 Esperimenti sull'ipotesi di De Broglie

15. Uno spettrometro a cristallo per neutroni utilizza piani intervallati alla distanza $d = 3.2$ pm, in un cristallo di berillio. Quale dev'essere l'angolo di Bragg θ, se si vuole che vengano riflessi solo neutroni di energia $K = 4.2$ eV? Si considerino solo riflessioni di primo ordine.
16. Un fascio di neutroni termici provenienti da un reattore nucleare incide su un cristallo di fluoruro di calcio, formando un angolo θ rispetto alla superficie del cristallo. I piani atomici paralleli alla superficie del cristallo presentano una distanza interplanare di 54.64 pm. La lunghezza d'onda di de Broglie dei neutroni incidenti è di 11.00 pm. Per quali valori di θ si manifesteranno i primi tre ordini di fasci di neutroni riflessi alla Bragg? (*Suggerimento*: i neutroni, che non hanno carica propria e perciò non sono soggetti a forze elettriche, non sono rifratti nel passare attraverso una superficie di cristallo. Così si può considerare la diffrazione dei neutroni in modo del tutto analogo a quella dei raggi X.)
17. Nell'esperimento di Davisson e Germer, (*a*) a quale angolo vengono diffratti i fasci di secondo e terzo ordine, corrispondenti agli intensi massimi della figura 7, sempreché essi compaiano? (*b*) A quale angolo si avrebbe un raggio diffratto di primo ordine se il potenziale di accelerazione venisse aumentato da 54 a 60 V?
18. Un cristallo di cloruro di potassio (KCl) è tagliato in modo tale che gli strati di piani atomici paralleli alla sua superficie abbiano una distanza di 314 pm tra file contigue di atomi. Un fascio di elettroni aventi energia di 380 eV incide perpendicolarmente alla superficie del cristallo. Si calcolino gli angoli ϕ a cui il rivelatore va posizionato per registrare i massimi di diffrazione di tutti gli ordini presenti.
19. Un fascio di neutroni a bassa energia emerge da un reattore e viene diffratto da un cristallo. Le energie cinetiche dei neutroni sono contenute in un intervallo di ampiezza ΔK centrate su un'energia cinetica K. Dimostrare che gli angoli per un dato ordine di diffrazione sono compresi in un intervallo $\Delta\theta$, che, se espresso in gradi, è dato da

$$\Delta\theta = \left(\frac{90}{\pi}\right)(\tan\theta)\frac{\Delta K}{K},$$

in cui θ è l'angolo di diffrazione per un neutrone con energia cinetica K.

20. Un fascio di atomi emerge da un forno a temperatura T. La distribuzione delle velocità degli atomi nel fascio è proporzionale a $v^3 e^{-mv^2/2kT}$ (paragrafo 24-3). (*a*) Dimostrare che la distribuzione delle lunghezze d'onda di de Broglie degli atomi è proporzionale a $\lambda^{-5}\, e^{-h^2/2mkT\lambda^2}$, e (*b*) che la lunghezza d'onda di de Broglie più probabile è

$$\lambda_p = \frac{h}{\sqrt{5mkT}}.$$

Paragrafo 50-4 Onde, pacchetti d'onde, particelle

21. Usando un dispositivo a interruzione rotante, si recepisce il suono di un comune diapason da 540 Hz per un tempo di 0.23 s. Quale dispersione di frequenza è approssimativamente associata a questo impulso acustico?
22. I segnali provenienti da una stazione televisiva contengono impulsi della durata complessiva $\Delta t \approx 10$ ns. Si possono trasmettere programmi televisivi su una frequenza della banda a onde medie, che va da 500 a 1600 kHz?

Paragrafo 50-5 Relazioni di indeterminazione di Heisenberg

23. Un nucleo in uno stato eccitato ritorna al suo stato fondamentale, emettendo nel processo un raggio gamma. Se la vita

ISBN 88-408-0777-2

media per un certo stato eccitato di energia 1.32 MeV è di 8.7 ps, trovare l'incertezza sul valore dell'energia del corrispondente fotone gamma emesso.

24. Un atomo in uno stato eccitato ha una vita media di 12 ns, in un altro stato ha vita media di 23 ns. Qual è l'incertezza sull'energia di un fotone emesso quando un elettrone subisce la transizione tra questi due stati?
25. Un microscopio che impiega fotoni viene usato per localizzare un elettrone in un atomo entro una distanza di 12 pm. Qual è l'incertezza minima sulla quantità di moto dell'elettrone così localizzato?
26. Si immagini di giocare a palla in un universo in cui la costante di Planck sia 0.60 J · s. Quale sarebbe l'incertezza nella posizione di una palla da 0.50 kg, che si muove con una velocità di 20 m/s con una indeterminazione di 1.2 m/s? Perché sarebbe davvero difficile da afferrare?
27. Si trovi l'intervallo d'incertezza nel localizzare una particella, in termini di lunghezza d'onda di de Broglie λ, tale che l'indeterminazione nella sua velocità sia pari alla sua velocità.

Paragrafo 50-7 Particelle intrappolate e densità di probabilità

28. Quale dev'essere l'ampiezza di una buca di profondità infinita affinché un elettrone intrappolato e caratterizzato dallo stato $n=3$ abbia un'energia di 4.70 eV?
29. (*a*) Calcolare la minor energia possibile per un elettrone rinchiuso in un buca infinitamente profonda di ampiezza uguale al diametro di un nucleo atomico (circa 1.4×10^{-14} m). (*b*) La si calcoli adesso per un neutrone. (*c*) Si confrontino questi risultati con l'energia di legame (diversi MeV) tra protoni e neutroni dentro al nucleo. Date queste premesse, vi aspettereste di trovare elettroni dentro ai nuclei?
30. L'energia allo stato fondamentale per un elettrone in una buca infinita è di 2.6 eV. Quale sarebbe l'energia allo stato fondamentale se si raddoppiasse l'ampiezza della buca?
31. Un elettrone, intrappolato in una buca infinita di ampiezza pari a 253 pm, si trova allo stato fondamentale ($n = 1$). Quanta energia deve assorbire per saltare al terzo stato eccitato ($n = 4$)?
32. (*a*) Si calcoli il rapporto tra due livelli di energia adiacenti di una particella intrappolata in una buca unidimensionale di profondità infinita. (*b*) Discutere il risultato facendo riferimento al principio di corrispondenza.
33. (*a*) Calcolare la differenza in energia tra i due più bassi livelli energetici per un contenitore di lato pari a 20 cm, all'interno del quale sono rinchiusi atomi di argon. (*b*) Trovare il rapporto con l'energia termica degli atomi di argon a 300 K. (*c*) A quale temperatura l'energia termica è uguale alla differenza tra questi due livelli di energia? Per semplicità si assuma che gli atomi di argon siano intrappolati in un buca unidimensionale di larghezza pari a 20 cm. La massa molare dell'argon è 39.9 g/mol.
34. Si consideri un elettrone di conduzione in un cristallo cubico di un materiale conduttore. L'elettrone è libero di muoversi ovunque nel volume del cristallo, ma non può fuoriuscirne. È come intrappolato in una buca infinita tridimensionale. L'elettrone si può muovere in tre direzioni, di modo che la sua energia è data da (si confronti con l'equazione 16)

$$E = \frac{h^2}{8mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2),$$

in cui n_1, n_2, n_3 assumono ciascuno il valore di 1, 2, ... Calcolare le energie dei cinque stati di energia più bassa per un elettrone di conduzione che si muove in un cristallo cubico di lato $L = 250$ nm.

35. Si consideri un elettrone intrappolato in una buca infinita la cui ampiezza è di 98.5 pm. Se si trova nello stato caratterizzato da $n = 15$, quali sono (*a*) la sua energia, (*b*) l'incertezza nella determinazione della sua quantità di moto, e (*c*) l'incertezza sulla sua posizione?
36. Si ripeta l'esempio 11, ma questa volta assumendo che l'elettrone sia nello stato $n = 2$.
37. Dove si trovano i punti di probabilità (*a*) massima, (*b*) minima, per una particella intrappolata in una buca infinitamente profonda di larghezza L, se la particella è nello stato n?
38. Una particella è rinchiusa tra pareti rigide separate da una distanza L. (*a*) Dimostrare che la probabilità P di essere localizzata entro una distanza $L/3$ da una delle pareti è data da

$$P = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\text{sen}(2\pi n/3)}{2\pi n/3}\right).$$

Valutare la probabilità per (*b*) $n = 1$, (*c*) $n = 2$, (*d*) $n = 3$, ed (*e*) sulla base delle assunzioni della fisica classica.

39. Una particella è confinata tra pareti rigide situate a $x = 0$ e $x = L$. Per lo stato di energia caratterizzato da $n = 4$, (*a*) tracciare la curva di densità di probabilità per la posizione della particella. Si calcoli la probabilità approssimata di trovare la particella in una regione $\Delta x = 0.0003L$, quando (*b*) Δx si trova a $x = L/8$, e (*c*) a $x = 3L/16$. Si verifichi se i risultati sembrano ragionevoli riferendosi al proprio tracciato. (*Suggerimento*: non è necessario integrare).

Paragrafo 50-8 Effetto tunnel

40. Nell'esempio 12, si supponga di avere la possibilità di variare lo spessore L della barriera. A quale spessore si dovrebbe fissarla affinché sia perforata da 1 elettrone su 100 che colpiscono la barriera?
41. (*a*) Un protone e (*b*) un deuterone (che ha la stessa carica di un protone, ma massa doppia) incidono su una barriera di spessore pari a 10 fm e altezza di 10 MeV. Ciascuna particella ha un'energia cinetica di 3.0 MeV. Trovare il loro coefficiente di trasmissione.
42. Si consideri una barriera come quella di figura 21, ma di altezza U pari a 6.00 eV, e di spessore L pari a 700 pm. Calcolare l'energia di un elettrone incidente tale che la sua probabilità di penetrazione sia 1 su 1000.
43. Si supponga che un fascio incidente di protoni con energia 5.0 eV colpisca una barriera di altezza 6.0 eV e spessore 0.70 nm, e con un flusso equivalente a una corrente di 1.0 kA. Quanto tempo ci vorrebbe, in media, perché un protone sia trasmesso?
44. Si prenda la configurazione descritta per l'effetto tunnel nell'esempio 12. Quale incremento relativo nel coefficiente di trasmissione si determina per un aumento dell'1% (*a*) nell'altezza della barriera, (*b*) nello spessore della barriera, e (*c*) nell'energia incidente dell'elettrone?

Capitolo 51

LA STRUTTURA DELL'ATOMO D'IDROGENO

Sin da quando si è accertato che la materia è costituita di atomi, questa è sempre stata la domanda principale: "A che cosa assomiglia un atomo?" Lo scopo che ci prefiggiamo in questo capitolo è rispondere a questa domanda dal punto di vista della meccanica ondulatoria. È essenziale capire la forma degli atomi, se si vuole indagare come gli atomi si uniscono a formare le molecole e i solidi. Sia la chimica sia la fisica dello stato solido dipendono dalla conoscenza della struttura atomica, acquisita attraverso la meccanica ondulatoria.

Inizieremo in questo capitolo dall'atomo d'idrogeno, che è al tempo stesso l'atomo più semplice e quello più abbondante nell'universo. Il comprendere come i princìpi della meccanica ondulatoria si applicano alla struttura dell'idrogeno ci consente di formulare considerazioni analoghe, utili a spiegare la struttura di atomi più complessi, argomento del prossimo capitolo.

Grazie alla sua semplicità, l'idrogeno offre il vantaggio di poter calcolare le sue proprietà in modo esatto, senza approssimazioni. Ciò ha permesso il confronto tra le previsioni teoriche e i risultati sperimentali per una quantità di teorie fisiche, dalla meccanica quantistica negli anni '20 all'elettrodinamica quantistica negli anni '40 e '50.

51-1 LA TEORIA DI BOHR

La maggior parte delle nostre conoscenze sugli atomi, le molecole e i nuclei provengono dallo studio delle radiazioni da loro emesse e assorbite, come gli spettri a righe illustrati nella figura 15 del capitolo 49. Questo è anche il caso dell'atomo di idrogeno, uno spettro del quale, nella regione del visibile, è riportato nella figura 1. Questo spettro, che si potrebbe ottenere con uno spettrografo a prisma o a reticolo, come nella figura 8 del capitolo 47, è stato analizzato con grande precisione sin dalla fine del 1800, e la sua interpretazione rappresentava un vero rompicapo per gli scienziati dell'epoca. Il primo approccio nello studio di questo spettro consistette nel ricercare una formula empirica che si accordasse con i dati disponibili. Passarono altri 30 anni prima che si potesse sviluppare una teoria in grado di spiegare questa formula.

Lo spettro riprodotto nella figura suggerisce l'esistenza di andamenti regolari. La distanza tra due righe successive diminuisce man mano che ci si sposta verso lunghezze d'onda minori, mentre queste lunghezze d'onda tendono a un limite, detto *limite della serie*. Nel 1885 Johann Balmer, uno svizzero insegnante alle superiori, ricavò una formula empirica per le lunghezze d'onda delle righe emesse dall'atomo d'idrogeno. La formula di Balmer per le lunghezze d'onda λ, espresse in nanometri, è

$$\lambda = 364.6\frac{n^2}{n^2-4}, \quad n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots \qquad (1)$$

La serie di righe dell'idrogeno nella regione del visibile è chiamata *serie di Balmer*.

Nel 1890 J.J. Rydberg modificò la formula di Balmer in questo modo:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots, \qquad (2)$$

ove R, detta costante di Rydberg, assume il valore di $1.097 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$. Considerato che 4 può essere scritto come 2^2, Rydberg riscrisse poi l'espressione in termini più generali come

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad n = m+1,\ m+2, m+3.\ldots. \qquad (3)$$

dove $m = 2$ nella serie di Balmer. Nasceva evidente l'interrogativo se dovessero esistere altre serie di righe, corrispondenti a diversi prefissati valori di m. I ricercatori scoprirono presto una serie nell'infrarosso per $m = 3$ e un'altra nell'ultravioletto per $m = 1$. Tutte queste serie

ISBN 88-408-0777-2

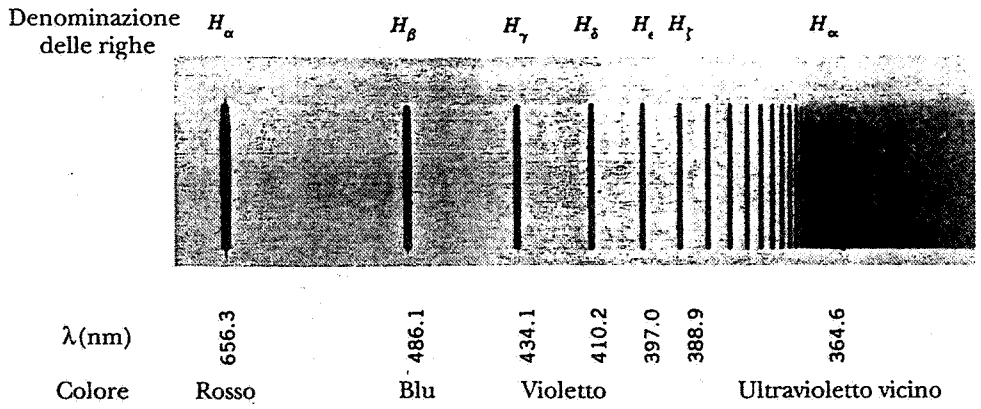


Figura 1 Una fotografia delle righe spettrali della serie di Balmer nell'idrogeno.

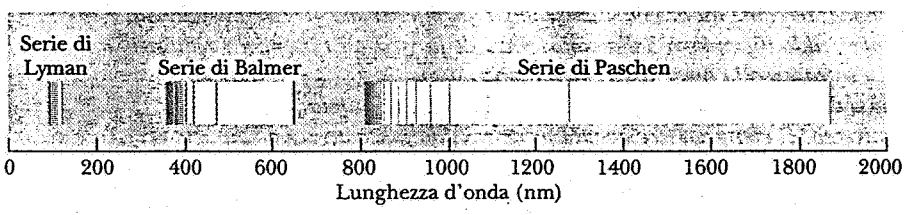


Figura 2 Le serie di Lyman, Balmer e Paschen per l'atomo d'idrogeno. Il limite della serie si trova alla lunghezza d'onda più corta (a sinistra) di ciascuna serie.

si accordano con l'equazione 3, detta *formula di Balmer -Rydberg*, in cui, fissato il valore di m, le lunghezze d'onda risultano assegnando a n valori a cominciare da $m + 1$ e terminando al limite della serie quando $n \to \infty$. La figura 2 mostra la serie per $m = 1$ (chiamata serie di Lyman), $m = 2$ (serie di Balmer) ed $m = 3$ (serie di Paschen). Nella tabella 1 sono riportate le lunghezze d'onda relative ad alcune di queste righe.

La chiave per penetrare il significato di questa formula empirica fo trovata dal fisico danese Niels Bohr nel 1913. Completato l'intero ciclo di studi universitari, Bohr si recò in Inghilterra, dove si trovò a lavorare con J.J. Thomson dapprima e con Ernest Rutherford poi (si veda la discussione sui modelli atomici di Thomson e Rutherford al paragrafo 29-7). Bohr riconobbe subito l'importanza del modello atomico a nucleo di Rutherford per comprendere la struttura dell'atomo. Fu indotto a proporre un modello, nel quale gli elettroni ruotano attorno al nucleo, similmente ai pianeti attorno al Sole (fig. 3). Nonostante ciò era cosciente che un simile modello avrebbe violato una legge prevista dalla fisica classica: una carica in moto dotata di accelerazione (anche centripeta, come in questo caso) deve emettere radiazione elettromagnetica con uno spettro che è continuo, dato che perderebbe progressivamente energia e finirebbe per cadere sul nucleo. Ovviamente questo non succede; e quindi, se la struttura planetaria dell'atomo di Bohr è corretta, la

TABELLA 1 LO SPETTRO DELL'IDROGENO (ALCUNE RIGHE)

Nome della serie	*Numero quantico*		*Lunghezza d'onda* (nm)
	m (Stato inferiore)	*n (Stato superiore)*	
Lyman	1	2	121.6
	1	3	102.6
	1	4	97.0
	1	∞ (Limite della serie)	91.2
Balmer	2	3	656.3
	2	4	486.1
	2	5	434.1
	2	∞ (Limite della serie)	364.6
Paschen	3	4	1875.1
	3	5	1281.8
	3	6	1093.8
	3	∞ (Limite della serie)	822.0

ISBN 88-408-0777-2

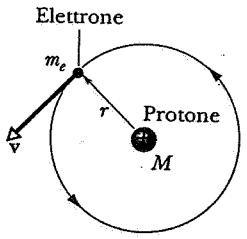


Figura 3 Nel modello di Bohr per l'atomo d'idrogeno, l'elettrone si muove in un'orbita circolare attorno al protone centrale

fisica classica di Newton e Maxwell va rivista! (Non si dimentichi che l'attività di Bohr si svolge 10 anni prima che De Broglie suggerisse l'audace ipotesi delle onde di materia.)

Intuendo che la fisica classica era giunta a un punto morto proprio sul problema dell'atomo d'idrogeno, Bohr avanzò due arditi postulati. Entrambi risultarono poi delle proprietà fondamentali per delineare nei suoi pieni contorni il nostro moderno punto di vista. In più, entrambi risultarono di applicazione più generale, adattandosi bene, oltre che all'atomo d'idrogeno, anche ai sistemi atomici, molecolari, nucleari di tutti i tipi. Vediamo uno alla volta i due postulati.

1. *Postulato degli stati stazionari.* Bohr assunse che l'atomo d'idrogeno possa sussistere per lungo tempo, *senza irraggiare*, in uno qualsiasi di numerosi *stati stazionari* di energia ben determinata. Questa assunzione contraddice sì la teoria classica, ma Bohr sostenne questo atteggiamento: "Poniamolo come ipotesi e ragioniamo su ciò che ne consegue." Si osservi che questa assunzione non specifica assolutamente nulla sulle caratteristiche di questi stati. Non vi è alcun accenno, per esempio, alle orbite.

2. *Postulato della frequenza.* Bohr ipotizzò che l'atomo d'idrogeno possa emettere o assorbire radiazione *solamente* quando l'atomo passa da uno stato all'altro dei suoi stati stazionari. L'energia del fotone emesso (o assorbito) è uguale alla differenza di energia tra i due stati. Così se un atomo passa dal suo stato iniziale di energia E_n allo stato finale di energia E_m (inferiore), l'energia del fotone emesso è data da

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m \text{ (postulato della frequenza di Bohr).} \tag{4}$$

Questo postulato esprime un legame tra due nuove idee (l'ipotesi del fotone e la quantizzazione dell'energia) e un vecchio principio ben più familiare (la conservazione dell'energia).

Bohr a questo punto tentò di interpretare la formula empirica di Balmer - Rydberg sulla base dei suoi postulati. Cominciamo col rimaneggiare la formula (eq. 3), esprimendola in una forma più simile al postulato della frequenza di Bohr (eq. 4). Moltiplichiamo entrambi i membri della (3) per hc e sostituiamo ν_{nm} a c/λ, ottenendo

$$h\nu_{nm} = \left(-\frac{hcR}{n^2}\right) - \left(-\frac{hcR}{m^2}\right).$$

Il confronto con l'equazione 4 ci suggerisce l'uguaglianza

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5}$$

che esprime l'energia degli stati stazionari nell'atomo d'idrogeno. L'energia è negativa perché l'atomo è in uno stato legato; sarebbe a dire che le forze esterne devono compiere lavoro su di esso per ottenere una separazione. (L'energia potenziale, che è nulla quando l'elettrone si trova a distanza infinita dal protone, è negativa e superiore in valore assoluto all'energia cinetica.) Allo stesso modo, il sistema Terra - Sole è in uno stato vincolato; è necessario compiere lavoro da parte delle forze esterne per separare *questo* sistema, agendo contro le forze gravitazionali che lo tengono assieme.

La figura 4 mostra un diagramma dei livelli di energia nell'atomo d'idrogeno, ove le energie sono state calcolate mediante l'equazione 5. Ciascun livello è individuato dal proprio *numero quantico n*. I segmenti dotati di freccia verso il basso, che collegano due di-

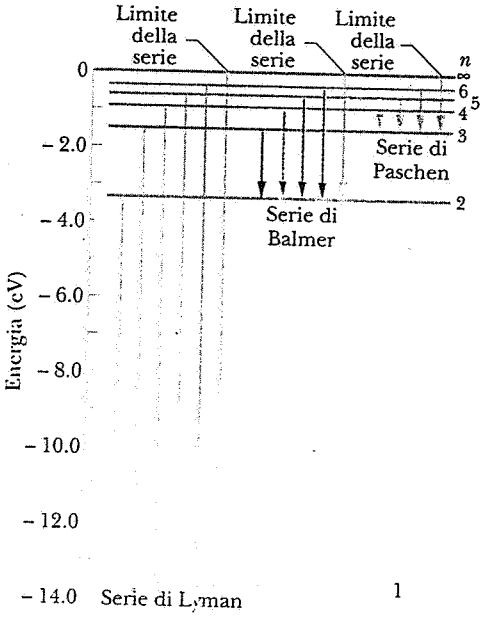


Figura 4 Livelli di energia e transizioni nello spettro dell'atomo d'idrogeno. Si confronti con le righe spettrali rappresentate nella figura 2.

versi livelli, rappresentano l'emissione di un fotone, in accordo col postulato della frequenza di Bohr (eq. 4). La tabella 1 mostra le lunghezze d'onda di alcuni dei salti illustrati in questa figura.

L'equazione 5 non è l'ultimo passo del cammino percorso da Bohr. Il valore della costante di Rydberg, fino a questo stadio, poteva essere ricavato solo per via sperimentale. Ciò che ci manca è un modo di esprimere questa costante in termini di altre costanti fisiche già note. Ed è precisamente questo, come vedremo, ciò che fece in seguito Bohr.

Esempio 1 Calcolare l'energia di legame dell'atomo d'idrogeno, vale a dire l'energia che bisogna fornire all'atomo per rimuovere l'elettrone dal suo più basso stato energetico.

Soluzione L'energia posseduta dall'atomo dopo la rimozione dell'elettrone, calcolabile facendo tendere n all'infinito nell'equazione 5, è zero. L'energia di legame E_b coincide quindi numericamente con l'energia dell'atomo quando esso si trova nello stato di energia minima, calcolabile ponendo $n = 1$ nell'equazione 5. In tal modo

$$E_b = -E_1 = -\left(-\frac{hcR}{1^2}\right)$$
$$= (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})(1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})$$
$$= 2.18 \times 10^{-18}\ \text{J} = 13.6\ \text{eV}.$$

Questo valore calcolato si accorda con l'energia di legame osservata sperimentalmente per l'atomo d'idrogeno.

Esempio 2 (*a*) Qual è la lunghezza d'onda del fotone di più bassa energia nello spettro di Balmer? (*b*) Qual è la lunghezza d'onda limite della serie di Balmer?

Soluzione (*a*) La serie di Balmer (fig. 4) è identificata ponendo $m = 2$ nell'equazione 3. Dalla relazione $E = h\nu$, si deduce che il fotone avente energia minima presenta la frequenza più bassa e quindi la maggior lunghezza d'onda. Ciò significa che dobbiamo attribuire a n il valore 3 (il minimo valore possibile) nell'equazione 3; valori maggiori di n darebbero lunghezze d'onda inferiori. Con queste sostituzioni abbiamo

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$
$$= (1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1.524 \times 10^6\ \text{m}^{-1},$$

ossia

$$\lambda = 6.563 \times 10^{-7}\ \text{m} = 656.3\ \text{nm}.$$

(*b*) Poniamo ancora $m = 2$ nell'equazione 3. Per trovare il limite della serie (fig. 4), facciamo tendere n all'infinito. L'equazione 3 diventa

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-7}\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{2^2} - 0\right) = 2.743 \times 10^6\ \text{m}^{-1}.$$

ovvero

$$\lambda = 3.646 \times 10^{-7}\ \text{m} = 364.6\ \text{nm}.$$

Si noti che questi risultati numerici compaiono entrambi nella tabella 1.

Derivazione della teoria di Bohr

Finora tutte le nostre considerazioni sono state basate su termini empirici, cioè su valori misurati, piuttosto che ottenuti analiticamente. Ci prefiggiamo lo scopo di ricavare un'espressione che ci fornisca il valore della costante di Rydberg, oppure, ciò che è lo stesso, i livelli di energia (eq. 5). Nel nostro intento seguiremo i calcoli effettuati da Bohr introducendo il principio di corrispondenza (par. 50-9): la teoria classica (che vale per orbite macroscopiche) e la teoria quantistica devono concordare quando si sovrappongono nella regione dei numeri quantici di valore elevato (n grandi).

Cominciamo con l'analizzare le proprietà di un atomo, come quello di figura 3, facendo uso di princìpi classici. Confronteremo poi i risultati con quelli che si ottengono dall'approccio quantistico, per valori di n tendenti al limite infinito.

Applichiamo la seconda legge di Newton ($F = m_e a$) al moto di un elettrone che ruota su un'orbita classica, come illustrato nella figura 3. Per tener conto di casi più generali, attribuiamo alla carica centrale l'espressione Ze, piuttosto che e, in cui Z rappresenta il numero atomico, che, per l'idrogeno, assume valore 1. Stabiliamo inoltre che sia $M \gg m_e$, ove M è la massa del nucleo e m_e è la massa dell'elettrone orbitante.

Introducendo nella seconda legge di Newton la forza di attrazione coulombiana, si ha

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(Ze)(e)}{r^2} = m_e\frac{v^2}{r}, \tag{6}$$

in cui v rappresenta la velocità orbitale dell'elettrone. Risolvendo rispetto a v si ottiene

$$v(r) = \sqrt{\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}, \tag{7}$$

che fornisce la velocità di rotazione, una volta conosciuto il raggio.

Partendo da questo risultato possiamo scrivere un'espressione per la frequenza di rivoluzione dell'elettrone orbitante:

$$\nu(r) = \frac{v}{2\pi r} = \sqrt{\frac{Ze^2}{16\pi^3\epsilon_0 m_e r^3}}. \tag{8}$$

ISBN 88-408-0777-2

L'energia cinetica è pertanto

$$K(r) = \tfrac{1}{2} m_e v^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \qquad (9)$$

L'energia potenziale è invece data da

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \qquad (10)$$

di modo che l'energia meccanica totale $E(r)$ risulta

$$E(r) = K(r) + U(r) = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \qquad (11)$$

E, per finire, il momento angolare segue direttamente dalla (7):

$$L(r) = m_e v r = \sqrt{\frac{Ze^2 m_e r}{4\pi\epsilon_0}}. \qquad (12)$$

In questo modo, se conoscessimo il raggio dell'orbita, avremmo automaticamente anche la velocità tangenziale di rivoluzione, la frequenza di rivoluzione, l'energia cinetica, quella potenziale, l'energia meccanica totale e il valore assoluto del momento angolare. Si arguisce subito, dalla stretta interconnessione tra queste grandezze, che se una di esse dovesse risultare quantizzata, lo devono essere anche tutte le altre. Naturalmente in nessuna di queste espressioni puramente classiche vi è traccia di quantizzazione.

Proseguiamo eliminando il raggio r dalla combinazione delle equazioni 8 e 11, per ottenere una relazione tra la frequenza e l'energia:

$$\nu_{mc} = \left(-\frac{32\epsilon_0^2 E^3}{Z^2 m_e e^4}\right)^{1/2}, \qquad (13)$$

in cui abbiamo aggiunto il pedice mc per significare che questa espressione è derivata da leggi di meccanica classica.

Sostituendo a E la sua espressione data dall'equazione 5, otteniamo una relazione per la frequenza ricavata dalla meccanica classica, che vale dunque per numeri quantici elevati:

$$\nu_{mc} = \left(\frac{32\epsilon_0^2 h^3 c^3 R^3}{Z^2 m_e e^4}\right)^{1/2} \frac{1}{n^3}. \qquad (14)$$

In fisica classica questa frequenza di rivoluzione corrisponde alla frequenza della radiazione emessa.

Passiamo ora al punto di vista quantistico. In termini quantistici (usando cioè l'equazione 4, il secondo postulato quantistico) la frequenza ν_{mq}, corrispondente alla frequenza classica testé calcolata, è la frequenza minima emessa, associata cioè alla transizione dallo stato caratterizzato dal numero quantico n allo stato immediatamente inferiore, il cui numero quantico è $n-1$. Ponendo, nell'equazione 3, $m = n-1$, si ha

$$\nu_{mq} = \frac{c}{\lambda} = cR\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) = cR\frac{(2n-1)}{(n-1)^2 n^2}. \qquad (15)$$

Questa espressione dovrebbe coincidere con l'espressione classica, quando il numero quantico tende all'infinito. Quando $n \gg 1$, l'equazione 15 può essere scritta come

$$\nu_{mq} \approx \frac{2cR}{n^3} \quad \text{per } n \gg 1, \qquad (16)$$

che è la relazione cercata.

Giunti a questo punto siamo pronti ad applicare il principio di corrispondenza. Il principio impone che, per valori del numero quantico tendenti all'infinito, la frequenza ν_{mq}, calcolata con l'equazione 16 (espressione quantistica), venga a coincidere con la frequenza ν_{mc}, calcolata mediante la 14 (espressione classica). Nella tabella 2 si riporta una serie di valori che illustra il principio.

TABELLA 2 IL PRINCIPIO DI CORRISPONDENZA E L'ATOMO D'IDROGENO

Numero quantico n	*Frequenza di rivoluzione orbitale* ν_{mc} (Hz)	*Frequenza della transizione allo stato immediatamente inferiore* ν_{mq} (Hz)	*Differenza* (%)
2	8.22×10^{14}	24.7×10^{14}	67
5	5.26×10^{13}	7.40×10^{13}	29
10	6.58×10^{12}	7.72×10^{12}	15
50	5.26×10^{10}	5.43×10^{10}	3.1
100	6.580×10^{9}	6.680×10^{9}	1.5
1 000	6.5797×10^{6}	6.5896×10^{6}	0.15
10 000	6.5797×10^{3}	6.5807×10^{3}	0.015
25 000	4.2110×10^{2}	4.2113×10^{2}	0.007
100 000	6.5798	6.5799	0.0007

Eguagliando la (14) alla (16) e risolvendo rispetto alla costante di Rydberg R, si trova

$$R = \frac{m_e Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}, \qquad (17)$$

che rappresenta un valore per la costante di Rydberg *previsto per via teorica*, facendo uso di altre costanti fondamentali: la carica e e la massa m_e dell'elettrone, la velocità c della luce e la costante di Planck h. Bohr, usando i valori disponibili a quel tempo per queste costanti, ottenne un buon accordo con il valore sperimentale di R; oggi questa concordanza si mantiene entro gli strettissimi limiti dell'errore sperimentale.

Possiamo ora considerare R come una costante determinata teoricamente e, sostituendo l'equazione 17 nell'equazione 5, ottenere così

$$E_n = -\frac{m_e Z^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}, \qquad (18)$$

un'espressione squisitamente quantistica per le energie degli stati stazionari dell'atomo d'idrogeno. Questa relazione costituisce il trionfo di Bohr. Il suo operato descritto fino adesso, che contiene il postulato degli stati stazionari, quello della frequenza, il principio di corrispondenza e l'equazione 18, cioè l'espressione per l'energia degli stati dell'idrogeno, rimane valido sulla base della moderna meccanica quantistica.

Eliminando l'energia E dalle espressioni classica (eq. 11) e quantistica (eq. 18), possiamo trovare i raggi delle orbite quantizzate di Bohr. Esse sono date da

$$r_n = \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{Ze^2 \pi m_e}\right) n^2 = a_0 n^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (19)$$

La quantità a_0, detta raggio di Bohr, ha il valore

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{Ze^2 \pi m_e} = 5.292 \times 10^{-11} \text{ m} = 52.92 \text{ pm}.$$

In termini formali, a_0 è il raggio dell'orbita di Bohr corrispondente a $n = 1$, che definisce lo stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno nel modello planetario semiclassico di Bohr per l'atomo a un solo elettrone, in cui abbiamo visualizzato l'elettrone che si muove su un'orbita circolare. Oggigiorno, anche se un'orbita come descritta non è credibile, abbiamo tuttavia un'idea abbastanza precisa delle dimensioni degli atomi: sono tutti approssimativamente dello stesso ordine di grandezza del raggio di Bohr! È sorprendente il fatto che, quantunque Bohr non abbia introdotto nella sua teoria nessuna particolare assunzione sulla dimensione degli atomi, questa sia comunque scaturita in un numero che approssimativamente ha dato un'idea corretta della dimensione atomica. Il raggio di Bohr è oggi opportunamente usato come unità per misurare le lunghezze su scala atomica.

Il fatto che l'energia (eq. 18) e il raggio (eq. 19) dell'atomo semiclassico di Bohr siano quantizzati implica che le altre proprietà meccaniche nel suo modello planetario siano pure quantizzate. La quantizzazione del momento angolare dell'elettrone orbitante si rivela particolarmente semplice. Essa si esprime (si veda il problema 23) con

$$L_n = n\left(\frac{h}{2\pi}\right) = n\hbar, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (20)$$

nella quale si è scritto $\hbar$ (si dice «acca tagliato») per una comoda abbreviazione del rapporto $h/2\pi$.

Nel 1924, 11 anni dopo che Bohr aveva presentato la sua teoria, De Broglie fornì un'interpretazione fisica soddisfacente della regola di Bohr per la quantizzazione del momento angolare. Se rappresentiamo l'elettrone rotante come un'onda di De Broglie, allora gli stati stazionari sono quelli per i quali l'onda di De Broglie dell'elettrone si ricongiunge con se stessa, dopo ogni rivoluzione, con la medesima fase; altrimenti l'onda si autodistruggerebbe per interferenza distruttiva. Detto in altre parole, la lunghezza d'onda di De Broglie dev'essere contenuta un numero intero di volte lungo la circonferenza orbitale, vale a dire

$$n\lambda = 2\pi r, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

come suggerisce la figura 5. Sostituendo in questa espressione h/p per la lunghezza d'onda di De Broglie, si giunge direttamente all'equazione 20.

Anche la figura 5, come d'altronde lo stesso modello di Bohr, non è del tutto coerente con la moderna teoria quantistica. Sebbene la quantizzazione del momento angolare giochi una parte essenziale, essa differisce leggermente dall'espressione data nella (20). Per lo stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno, ad esempio, questa equazione prevederebbe $L = \hbar$; la teoria quantistica moderna prevede invece $L = 0$, in accordo con l'esperienza. Fu tuttavia merito di Bohr l'aver intravisto l'importanza cruciale della quantizzazione del

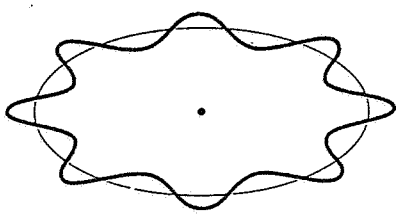


Figura 5 Un'orbita di Bohr, in cui l'elettrone è rappresentato come un'onda di De Broglie.

ISBN 88-408-0777-2

momento angolare e aver proposto invero l'equazione 20 come un'ipotesi alternativa di base sulla quale costruire la sua teoria; si veda il problema 27.

51-2 L'ATOMO D'IDROGENO E L'EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER

La teoria di Bohr fu un sorprendente successo per l'analisi della radiazione emessa dall'idrogeno, ma è una teoria molto incompleta. Per esempio non fornisce alcuno strumento per calcolare quale, tra le molte possibili righe di emissione, ha la maggiore probabilità di essere irraggiata, e nemmeno ci dà informazioni per capire come l'atomo d'idrogeno formi legami molecolari con altri atomi. Per giungere a un'analisi completa, dobbiamo introdurre i metodi della meccanica ondulatoria. Come abbiamo visto nel capitolo 50, una trattazione appropriata dell'elettrone, in tutte le sue situazioni dinamiche, deve tener conto della sua natura ondulatoria. Nel caso di un elettrone confinato in una regione in cui non agisce nessuna forza su di esso (par. 50-7), si è verificato che il suo comportamento ondulatorio è simile a quello di un'onda stazionaria classica su una corda. Nel caso di un elettrone soggetto a una forza, e specie a una forza variabile con la posizione, il comportamento ondulatorio è più complicato, come avverrebbe in una corda classica, se la sua tensione variasse a seconda della posizione sulla lunghezza della corda.

Per analizzare il comportamento ondulatorio dell'elettrone abbiamo bisogno di un procedimento matematico, nell'ambito del quale possiamo descrivere l'interazione tra l'elettrone e il suo ambiente e poi risolvere per il suo moto. Si tratta del procedimento già seguito, naturalmente, in fisica classica attraverso le leggi di Newton, in cui le interazioni sono descritte come delle forze.

Il procedimento della meccanica ondulatoria per studiare il comportamento degli elettroni (e di altre particelle) è basato su un'equazione proposta nel 1926 dal fisico austriaco Erwin Schrödinger (1887-1961), solo due anni dopo che De Broglie aveva avanzato l'ipotesi sulle onde di materia. L'equazione di Schrödinger, che non presentiamo in dettaglio, svolge per la meccanica ondulatoria la stessa funzione che la seconda legge di Newton svolge per la meccanica classica. Si inizia con lo specificare l'interazione tra la particella e il suo ambiente, operazione che è opportuno fare in termini di energia potenziale piuttosto che di forza. (Ovvio che le due descrizioni sono equivalenti, stante la relazione, in forma unidimensionale, $F = -dU/dx$; possiamo sempre ricavare la forza dall'energia potenziale o viceversa.) Si svolge poi il procedimento matematico indicato dall'equazione di Schrödinger, e il risultato contiene la funzione d'onda che descrive la particella, i livelli quantizzati di energia che alla particella è consentito occupare, e un insieme di *numeri quantici* che specificano gli stati permessi nel moto della particella. La figura 6 schematizza simbolicamente questo procedimento. La scatola rappresentata potrebbe in effetti simboleggiare un calcolatore, dato che la maggior parte dei problemi di meccanica quantistica di interesse pratico vengono risolti ordinariamente utilizzando un metodo numerico tramite il calcolatore.

Le funzioni d'onda, corrispondenti agli stati di moto permessi, includono tutte le informazioni ottenibili sul comportamento di una particella. Usando queste funzioni d'onda possiamo calcolare qualunque grandezza caratteristica della particella. Nel caso dell'atomo d'idrogeno possiamo usare le funzioni d'onda risultanti dall'equazione di Schrödinger per calcolare il raggio medio dell'atomo, la probabilità di trovare l'elettrone in una data posizione, la probabilità per l'elettrone di compiere una transizione da un qualsiasi stato di partenza a un qualsiasi stato finale (emettendo o assorbendo un fotone durante il processo), il momento magnetico dell'atomo, e così via. Combinando due funzioni d'onda è persino possibile studiare il legame che si instaura tra due atomi, a formare la *molecola* d'idrogeno H_2.

L'energia potenziale, che serve come punto di partenza, deriva dall'espressione della forza coulombiana di attrazione tra protone ed elettrone:

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}. \qquad (21)$$

La figura 7 riporta un diagramma di questa familiare funzione dell'energia potenziale su una scala adeguata

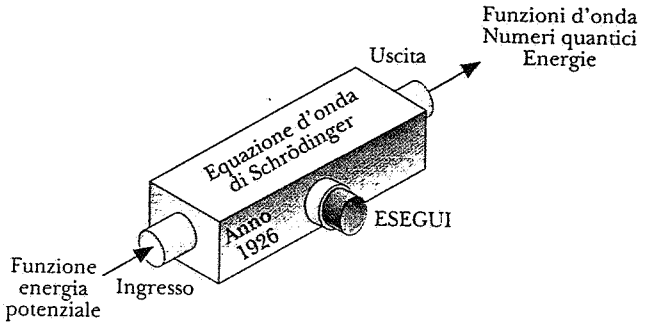


Figura 6 Uno schema che rappresenta l'equazione d'onda di Schrödinger come una «macchina». in cui si introduce la funzione energia potenziale come dato d'ingresso e che fornisce all'uscita le funzioni d'onda, i numeri quantici e i livelli di energia, che caratterizzano il comportamento quantistico del sistema.

alle dimensioni di un atomo d'idrogeno. La distanza tra elettrone e protone è espressa in termini del raggio di Bohr a_0, definito nell'equazione 19. Non discuteremo il procedimento matematico per trovare le funzioni d'onda;* alcuni esempi sono dati nei paragrafi 51-7 e 51-8. I livelli energetici che scaturiscono da questi procedimenti sono

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (22)$$

che sono esattamente identici a quelli ricavati dal modello di Bohr (eq. 18). Questo accordo non ci deve sorprendere, giacché abbiamo visto che la teoria di Bohr era sfociata in una perfetta coincidenza con le lunghezze d'onda osservate nelle righe spettrali dell'idrogeno.

Mediante le funzioni d'onda di Schrödinger possiamo calcolare la distanza più probabile tra elettrone e protone, che risulta essere $n^2 a_0$. Ciò significa che, nello stato di minor energia, la distanza dal protone a cui l'elettrone si trova con maggiore probabilità è quella individuata dal raggio di Bohr. È qui che il modello di Bohr (che vede l'elettrone muoversi su un'orbita fissa a una determinata distanza dal nucleo) fornisce un'interpretazione incompleta. Come vedremo nel paragrafo 51-7, l'elettrone si può trovare in qualunque posto tra $r = 0$ e $r = \infty$, ma $r = a_0$ rappresenta la sua posizione più probabile.

L'atomo d'idrogeno è un sistema tridimensionale e l'equazione di Schrödinger deve pertanto essere risolta in tre dimensioni. A causa dell'espressione dell'energia potenziale, è conveniente risolvere il problema in coordinate sferiche, assumendo come coordinate il raggio r e due angoli, θ e ϕ, per stabilire la direzione. Nel risolvere l'equazione di Schrödinger par un tale sistema, si trova che sono necessari tre numeri quantici per descrivere gli stati dell'elettrone. Questi numeri quantici sono definiti ed elencati nella tabella 3. Più oltre, in questo stesso capitolo, discuteremo di questi tre numeri quantici, oltreché di un quarto numero, basato sul moto autorotatorio dell'elettrone, detto *spin* (un effetto relativistico non previsto dall'equazione di Schrödinger, che non è relativistica).

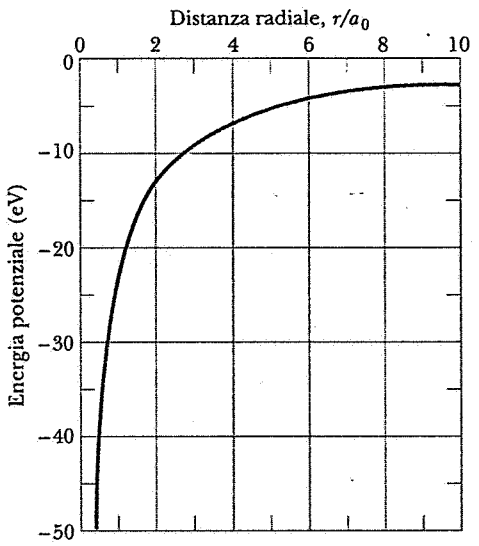


Figura 7 La funzione energia potenziale $U(r)$ per l'atomo d'idrogeno. La distanza radiale tra l'elettrone e il protone è espressa in unità pari al raggio di Bohr a_0.

La teoria di Bohr è di qualche utilità limitatamente alla comprensione della struttura dell'atomo d'idrogeno e degli ioni dotati di un solo elettrone (He^+, Li^{++}, ecc.), ma non è di aiuto nell'analizzare i dettagli al di là delle lunghezze d'onda nelle righe spettrali. Fornisce solo elementi molto limitati nella comprensione degli atomi più complessi dell'idrogeno, che possono essere invece studiati dettagliatamente tramite l'equazione di Schrödinger e il principio di esclusione, che verrà trattato nel prossimo capitolo. Oggigiorno consideriamo la teoria di Bohr come un passo importante e ingegnoso verso la comprensione dell'atomo, e dovremmo tener presente che due princìpi sviluppati da Bohr per rendere coerente la sua teoria (il principio di corrispondenza e l'esistenza degli stati stazionari) sono parte essenziale della teoria quantistica completa.

* Per una trattazione completa si veda Eisberg R. e Resnick R., *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2° ed., Wiley, 1985, cap. 7.

TABELLA 3 I NUMERI QUANTICI DELL'ATOMO D'IDROGENO[a]

Simbolo	*Nome*	*Associato a*	*Valori ammessi*
n	Numero quantico principale	Energia, raggio medio	1, 2, 3, ...
l	Numero quantico azimutale[b]	Modulo del momento angolare	0, 1, 2, ..., $n-1$
m_l	Numero quantico magnetico	Direzione del momento angolare	0, ± 1, ± 2, ..., $\pm l$

[a] Più tardi verrà introdotto un aurto numero quantico, associato allo spin.
[b] Detto anche numero quantico *orbitale*. [N.d.T.]

ISBN 88-408-0777-2

51-3 MOMENTO ANGOLARE

L'energia di uno stato è una quantità scalare e, per l'atomo d'idrogeno, è individuata da un solo numero quantico n. Il momento angolare di una stato è invece un vettore e si può vedere dalla tabella 3 che richiede, per essere descritto, la specificazione di due numeri quantici, l e m_l. Il momento angolare è *doppiamente* quantizzato, sia nel modulo sia nella orientazione. Esaminiamoli uno alla volta.

Il modulo del momento angolare L

Abbiamo visto che nella soluzione dell'equazione di Schrödinger il momento angolare è quantizzato. I suoi valori consentiti sono dati da

$$L = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar \qquad (23)$$

in cui l rappresenta il numero quantico azimutale. Anche qui per comodità abbiamo introdotto il simbolo $\hbar$ in luogo del rapporto $h/2\pi$. I valori che l può assumere nell'equazione 23 dipendono dal valore del numero quantico principale n e sono dati da

$$l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \qquad (24)$$

Per esempio, l'atomo d'idrogeno nel suo stato fondamentale, in cui $n = 1$, deve avere $l = 0$ e quindi anche $L = 0$; l'equazione 24 rivela che non può assumere altro valore. Per fare un altro esempio, nello stato in cui $n = 2$ può sussistere sia $l = 0$ sia $l = 1$. Questi due stati dell'atomo d'idrogeno condividono lo stesso numero principale n e hanno la stessa energia, per quanto essi rappresentino due stati di moto molto differenti.

L'orientazione del momento angolare L

Scegliamo una direzione orientata qualsiasi nello spazio, cui diamo arbitrariamente il nome di asse z; determiniamo l'orientazione di **L** rispetto all'asse z.

Risulta che il vettore momento angolare **L** non può assumere un'orientazione qualunque rispetto all'asse z, ma solo quelle che danno luogo a una componente lungo l'asse z data da

$$L_z = m_l \hbar, \qquad (25)$$

in cui m_l, il *numero quantico magnetico*, può assumere soltanto i valori

$$m_l = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm l. \qquad (26)$$

Questa restrizione sull'orientazione di **L** è chiamata *quantizzazione spaziale.*

Dalle equazioni 23 - 26 discende che, per lo stato dell'atomo d'idrogeno in cui $l = 2$, il modulo di **L** vale $\sqrt{2(2+1)}\,\hbar$ ossia $2.45\hbar$. L_z, la componente di **L** lungo l'asse z, può avere i valori $0, \pm 1\hbar, \pm 2\hbar$, cinque possibili valori in tutto. *Il vettore momento angolare non può assumere nessun altro orientamento rispetto all'asse z.* Si osservi che il valore massimo di L_z ($2\hbar$ in questo caso) è inferiore al valore assoluto di **L** ($2.45\ \hbar$). E questo deve risultare in ogni caso: data la scelta arbitraria di z, il vettore momento angolare **L** in generale non si troverà mai allineato con l'asse z.

La figura 8 mostra i valori permessi di L_z per $l = 1,2$ e 10. In quest'ultimo caso incominciamo ad avvicinarci alla situazione classica, in cui la quantizzazione spaziale svanisce gradatamente e *qualunque* orientamento del vettore momento angolare è permesso. L'esempio 3 illustra in maggior dettaglio come il principio di corrispondenza agisca in questa circostanza.

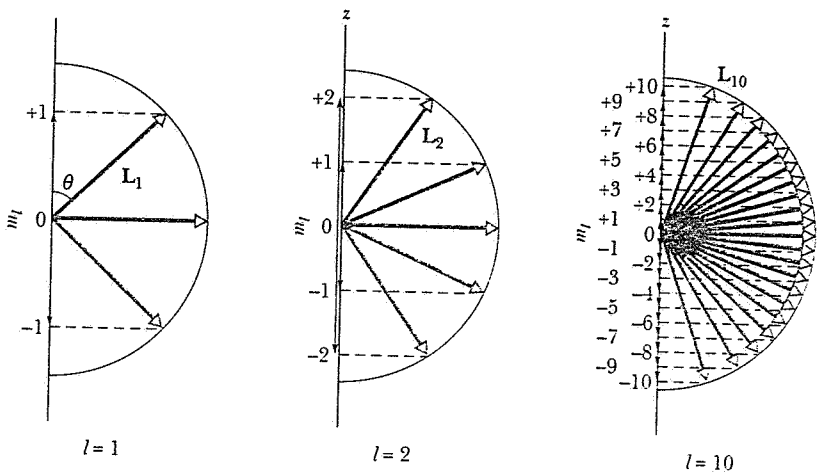


Figura 8 I valori consentiti di L_z per $l = 1$, 2 e 10. I numeri sull'asse z indicano i valori di m_l. Le figure sono disegnate in scale diverse.

La quantizzazione di L_z implica che l'angolo θ tra **L** e l'asse z (fig. 8) sia quantizzato e i suoi valori siano vincolati dalla condizione

$$\theta = \cos^{-1}\frac{L_z}{L} = \cos^{-1}\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}, \qquad (27)$$

dove, per esprimere L ed L_z, si sono utilizzate le equazioni 23 e 25 rispettivamente. Il valore minimo di θ si realizza quando m_l assume il valore massimo, che è l. Per $l = 2$, per esempio, si può facilmente mostrare che il valore minimo è

$$\theta_{\min} = \cos^{-1}[2/\sqrt{2(2+1)}] = \cos^{-1}\,0.817 = 35.3°.$$

Per atomi d'idrogeno i cui stati siano caratterizzati da $l = 2$, non è semplicemente possibile che il vettore momento angolare (orbitale) **L** formi un angolo più piccolo con l'asse z.

Una volta scelto un asse e determinata la componente di **L** lungo quell'asse, le componenti di **L** lungo gli altri assi restano del tutto ignote. Sarebbe a dire che possiamo avere conoscenza esatta di una sola determinata componente di **L** (che assumiamo arbitrariamente essere la componente z).

La figura 9 illustra un modello classico del vettore, che aiuta a visualizzare la quantizzazione spaziale di **L**. È disegnato il moto di precessione attorno all'asse z, come farebbe una trottola roteante o un giroscopio, il cui asse di rotazione descrive un cono attorno all'asse verticale del campo gravitazionale terrestre. La componente L_z rimane costante al procedere del moto, ma le componenti x e y di **L** non presentano valori definiti.

Il principio di indeterminazione di Heisenberg ci aiuta a capire la quantizzazione spaziale del vettore momento angolare. Nella sua forma angolare (si confronti l'equazione 6 del capitolo 50) il principio si può esprimere così:

$$\Delta L_z \cdot \Delta\phi \sim h/2\pi \text{ (per la componente } z) \qquad (28)$$

in cui ϕ rappresenta l'angolo di rotazione attorno all'asse z nella figura 9. L'equazione 25 informa che L_z è noto con esattezza una volta che sia specificato il numero quantico m_l. Ne consegue che ΔL_z, l'incertezza su L_z, dev'essere nullo. L'equazione 28 richiede di conseguenza che $\Delta\phi \to \infty$, che significa totale mancanza d'informazione sulla posizione angolare rispetto all'asse z del moto di precessione del vettore momento angolare **L**. Ci sono noti quindi il valore assoluto di **L** e la sua proiezione L_z sull'asse z; *nient'altro*.

Si ricordi che la scelta iniziale per la direzione dell'asse z è stata completamente arbitraria. Non esiste una caratteristica speciale che faccia emergere questa particolare direzione nello spazio e inoltre avremmo potuto altrettanto liberamente scegliere di chiamarla asse x o y. Ciò che è significativo è che, qualsiasi sia la direzione scelta nello spazio, si osserva comunque una quantizzazione rispetto a quella direzione. È solo per una convenzione che d'abitudine la nostra scelta, per manifestare il fenomeno di quantizzazione rispetto all'asse, si posa sull'asse z.

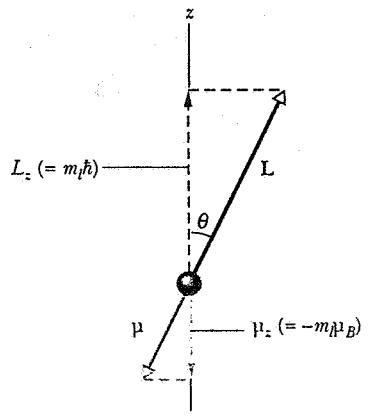


Figura 9 Rappresentazione vettoriale della quantizzazione spaziale del momento angolare **L** e del momento di dipolo magnetico **μ**.

Esempio 3 Trovare il valore minimo dell'angolo θ della figura 9 per $l = 1, 10^2, 10^3, 10^4$ e 10^9.

Soluzione Il valore minimo di θ si realizza quando nell'equazione 27 è $m_l = l$. Sostituendo e risistemando si ottiene

$$\theta_{\min} = \cos^{-1}\frac{l}{\sqrt{l(l+1)}} = \cos^{-1}\left[1+\frac{1}{l}\right]^{-1/2}.$$

Se lasciamo tendere l all'infinito, si osserva che $\theta \to \cos^{-1} = 0$. Ciò che ci aspettiamo esattamente dal principio di corrispondenza.

Sostituendo a l in questa equazione i valori dati, si ottengono corrispondentemente i seguenti risultati:

l	$\theta_{\min}$
1	45.0°
10^2	5.7°
10^3	1.8°
10^4	0.57°
10^9	0.0018°

Per un oggetto macroscopico, quale una trottola o un disco musicale, l risulterebbe enormemente più grande di 10^9 e $\theta_{\min}$ sarebbe così vicino a zero che il suo valore trascenderebbe ogni possibilità di misurazione reale. In questo modo, man mano che il momento angolare di un oggetto rotante si fa via via più elevato, la quantizzazione spaziale tipica della meccanica ondulatoria confluisce gradatamente nella distribuzione continua tipica della meccanica

ISBN 88-408-0777-2

classica. Ancora una volta si verifica quanto bene si applichi il principio di corrispondenza.

Nota sul calcolo: se usate la formula sopradescritta per calcolare θ_{min} quando $l = 10^9$, le operazioni aritmetiche eccederanno probabilmente la capacità di calcolo della vostra calcolatrice. Grazie al fatto che $(1/l) \ll 1$, potete trasformare la formula in un'espressione approssimata. Dovrete usare sia lo sviluppo binomiale sia lo sviluppo in serie di $\cos\theta$; vedere l'appendice H.

Esempio 4 (*a*) Dato $n = 4$, qual è il massimo valore ammesso per l? (*b*) Qual è il modulo del momento angolare corrispondente? (*c*) Quanti diversi valori della componente sull'asse z può avere questo vettore momento angolare? (*d*) Qual è la componente di maggior valore assoluto? (*e*) Qual è il minor angolo che il vettore momento angolare può formare con l'asse z?

Soluzione (*a*) Dall'equazione 24 si ricava che il massimo valore ammesso di l è pari a $n - 1$, ovvero $l = 3$.

(*b*) Dall'equazione 23 abbiamo

$$L = \sqrt{l(l+1)}(h/2\pi) = \sqrt{3(3+1)}(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})/(2\pi)$$
$$= 3.66 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

Nella pratica i momenti angolari atomici raramente sono indicati in unità SI. Risulterebbe molto più familiare indicare il valore assoluto di questo momento angolare semplicemente come $\sqrt{12}\,\hbar$ o anche $3.46\,\hbar$. Vedere la risposta (*d*).

(*c*) Il numero di valori possibili della componente sull'asse z del vettore momento angolare è uguale al numero dei valori ammessi del numero quantico magnetico m_l. Dall'equazione 26 questo numero risulta $2l + 1$, ovvero $2 \times 3 + 1 = 7$.

(*d*) La componente di modulo maggiore si trova con l'equazione 25, nella quale si attribuisce al numero quantico magnetico m_l il massimo valore possibile. Per quest'ultimo l'equazione 26 impone il valore l, di modo che si ha

$$L_z = l(h/2\pi) = (3)(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})/(2\pi)$$
$$= 3.17 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}.$$

Dal confronto col risultato della risposta (*b*), si noti che questo valore è inferiore al modulo del vettore momento angolare, come dev'essere. Come abbiamo già segnalato nella risposta (*b*), sarebbe più immediato indicare questo massimo valore della componente del momento angolare semplicemente come $3\hbar$. Quando parliamo del momento angolare, quasi sempre ci riferiamo in effetti al valore massimo della sua proiezione sull'asse di riferimento. Il valore assoluto del momento angolare raramente entra nei calcoli quantistici e non viene quasi mai dato.

(*e*) L'angolo più piccolo che il vettore momento angolare può formare con l'asse z è dato dall'equazione 27, in cui si ponga $m_l = l$. Abbiamo dunque

$$\theta = \cos^{-1}[l/\sqrt{l(l+1)}] = \cos^{-1}[3/\sqrt{3(3=1)}]$$
$$= \cos^{-1} 0.866 = 30°.$$

Il vettore momento angolare non può formare angoli con l'asse z più piccoli di questo.

Momento angolare e magnetismo

Il modello di Bohr suggerisce anche che l'elettrone orbitante, che è una sorta di minuscolo circuito di corrente elettrica, dovrebbe presentare un momento magnetico dipolare ad esso concatenato. Sia il momento angolare $\mathbf{L}$ sia il momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$ sono vettori e hanno l'asse in comune. Dato però che l'elettrone ha carica negativa, i due vettori hanno verso opposto lungo quest'asse. Nel paragrafo 37-2 abbiamo visto che i due vettori sono legati da

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m_e}\mathbf{L}, \tag{29}$$

in cui il segno meno evidenzia gli opposti versi di $\mathbf{L}$ e $\boldsymbol{\mu}$. Quantunque l'equazione 29 sia stata ricavata con un procedimento semiclassico, essa rimane valida nella meccanica ondulatoria.

Si consideri uno stato in cui la componente z del momento angolare valga $h/2\pi$. Sostituendo a $\mathbf{L}$ questo valore, l'equazione 29 diventa

$$\mu_z = \frac{eh}{4\pi m_e}.$$

Questa quantità è chiamata *magnetone di Bohr* μ_B e ha il valore

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$$
$$= 9.274 \times 10^{-24}\ \text{J/T} = 5.788 \times 10^{-5}\ \text{eV/T}. \tag{30}$$

Il magnetone di Bohr è una comoda unità con cui misurare i momenti magnetici atomici, proprio come abbiamo assunto il raggio di Bohr a_0 come unità conveniente nella misura delle distanze atomiche.

La teoria di Bohr prevede che il momento di dipolo magnetico dell'atomo d'idrogeno nel suo stato fondamentale sia pari a 1 magnetone di Bohr. La teoria non è corretta riguardo a questo punto; l'esperienza mostra infatti che, come previsto dalla meccanica ondulatoria, sia il momento angolare (orbitale) sia il momento di dipolo magnetico (orbitale) dell'atomo d'idrogeno nel suo stato fondamentale siano nulli. Questo insuccesso della teoria di Bohr non ci impedisce tuttavia di utilizzare il magnetone di Bohr come un'adeguata unità di misura.

Se il momento angolare è quantizzato, dev'essere pure quantizzato il momento di dipolo magnetico, e con le stesse caratteristiche. Combinando l'equazione 29 (solo la componente z) con la 25, possiamo scrivere

$$\mu_z = \frac{e}{-2m_e}L_z = -\frac{e}{2m_e}(m_l\hbar) = -m_l\frac{eh}{4\pi m_e}.$$

Confrontando con l'equazione 30 si riconosce che la

componente z del momento di dipolo magnetico è data da

$$\mu_z = -m_l \mu_B, \tag{31}$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr. Come si vede dalla figura 9, il modello vettoriale classico rende conto della quantizzazione spaziale di $\boldsymbol{\mu}$ oltre che di $\mathbf{L}$. Entrambi i vettori sono animati da moto di precessione attorno all'asse z ed entrambi vengono identificati attraverso la loro componente sull'asse z.

Il momento di dipolo magnetico dell'atomo, proprio come l'ago di una bussola, può reagire a un campo magnetico esterno. Ciò offre all'atomo un conveniente «appiglio» grazie al quale siamo in grado di esplorare il suo comportamento intimo, sondandolo dall'esterno. Siccome il momento di dipolo magnetico è accoppiato rigidamente al momento angolare, la conoscenza del primo ci permette automaticamente di conoscere anche il secondo.

Non è difficile rendersi conto che gli atomi possono essere i mediatori dei fenomeni di magnetismo. Una barra di ferro ordinario non presenta alcuna proprietà magnetica esteriore, dato che i suoi magneti atomici elementari sono orientati in maniera casuale e i loro effetti si elidono in tutti i punti esterni. Quando però questi magneti atomici elementari vengono allineati, come succede in una barra calamitata, il loro effetto magnetico si combina rafforzandosi e si manifesta all'esterno in modo evidente.

Quando i momenti di dipolo magnetico di un insieme di atomi sono allineati, i loro momenti angolari, che sono rigidamente accoppiati, devono essere parimenti allineati. Nel 1915 Einstein, lavorando con W.J. De Haas (genero del celebre fisico olandese H.A. Lorentz), eseguì un esperimento per indagare questo fenomeno. Se una barretta di ferro viene magnetizzata d'improvviso, ad esempio avviando una corrente in un solenoide come nella figura 10, i momenti angolari dei suoi atomi vengono repentinamente allineati. Poiché il momento angolare deve necessariamente conservarsi, l'intera barretta inizia a ruotare in senso inverso. L'*effetto Einstein - De Haas*, come viene chiamato, è ovviamente piccolo e quindi difficili sono le misurazioni. Si tenga presenta che nel 1915, quando fu eseguito questo esperimento, la meccanica ondulatoria doveva ancora essere sviluppata, la teoria di Bohr aveva solo 2 anni, e lo spin intrinseco dell'elettrone non era stato ancora scoperto.

Risultò più tardi che l'effetto Einstein - De Haas (così come, a questo proposito, il ferromagnetismo di una calamita) è dovuto in larga misura al momento angolare intrinseco degli elettroni rotanti su se stessi (spin), piuttosto che al loro momento angolare di rivoluzione. Ciò non toglie tuttavia che questo esperimento dimostri, con un effetto macroscopico, che gli atomi siano responsabili sia del magnetismo che del momento angolare.

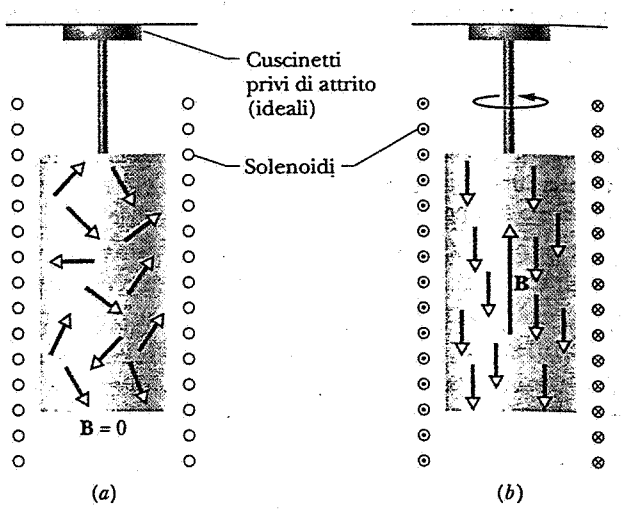


Figura 10 Effetto Einstein-De Haas. (*a*) I vettori dei momenti angolari atomici in un cilindro di ferro sono orientati casualmente. (*b*) Quando si applica un campo magnetico in direzione assiale, i momenti angolari atomici si allineano come illustrato, e tutto il cilindro comincia a ruotare nel senso opposto.

Esempio 5 Un cilindro di ferro non magnetizzato, di raggio R pari a 5 mm, è sospeso su cuscinetti idealmente privi di attrito, in modo che possa ruotare liberamente sul suo asse (fig. 10). Viene applicato di colpo un campo magnetico parallelo al suo asse costringendo i momenti di dipolo magnetico dei suoi atomi ad allinearsi parallelamente al campo. I vettori del momento angolare atomico, che sono accoppiati in verso opposto ai vettori del momento di dipolo magnetico, diventano pure allineati e quindi il cilindro prende a ruotare in senso inverso. Si calcoli T, il periodo di rotazione del cilindro. Si supponga che ciascun atomo di ferro abbia un momento angolare pari a $h/2\pi$. La massa molare M del ferro è 55.8 g/mol (= 0.0558 kg/mol).

Soluzione Il momento angolare del cilindro rotante, L_{cil}, deve eguagliare in modulo (anche se il verso è opposto) il momento angolare risultante degli atomi allineati, L_{atomi}. Se N è il numero degli atomi contenuti nel cilindro, N_A il numero di Avogadro e m la massa del cilindro, possiamo scrivere

$$L_{atomi} = N(h/2\pi) = (N_A m/M)(h/2\pi).$$

Per il cilindro rotante si ha

$$L_{cil} = I\omega = (\tfrac{1}{2} mR^2)(2\pi/T).$$

in cui I rappresenta il momento d'inerzia del cilindro sul suo asse di rotazione e ω è la velocità angolare.

Eguagliando queste due espressioni e risolvendo rispetto a T, si

ISBN 88-408-0777-2

ottiene

$$T = \frac{2\pi^2 R^2 M}{N_A h} = \frac{(2\pi^2)(5 \times 10^{-3}\ \text{m})^2(0.0558\ \text{kg/mole})}{(6.02 \times 10^{23}\ \text{mole}^{-1})(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})}$$
$$= 6.90 \times 10^4\ \text{s} = 19.2\ \text{h}.$$

Un cilindro che gira davvero un po' lento! Nella realtà, Einstein e De Haas appesero il loro cilindro a una fibra di torsione e nel loro esperimento usarono tecniche più raffinate per trattare questo effetto.

51-4 L'ESPERIMENTO DI STERN E GERLACH

La quantizzazione spaziale, vale a dire la nozione per cui un vettore momento angolare atomico **L** oppure un vettore momento di dipolo magnetico atomico $\boldsymbol{\mu}$ possono assumere solo certi valori discreti per la loro proiezione su un asse predeterminato, è un concetto non facile da acquisire per una mente formata in base a concezioni classiche. Cionondimeno venne prevista teoricamente (da Wolfgang Pauli) e verificata sperimentalmente (nel 1922 da Otto Stern e Walther Gerlach) diversi anni prima che si sviluppasse la meccanica ondulatoria.

La figura 11 riproduce l'apparecchiatura usata da Stern e Gerlach. In un forno scaldato elettricamente si vaporizza dell'argento; gli atomi di argento escono da un foro praticato su una parete del forno, grazie anche alla bassa pressione mantenuta all'esterno del forno stesso. Gli atomi (che sono elettricamente neutri, ma dotati di un momento di dipolo magnetico) vengono collimati in un fascio stretto facendoli passare attraverso una fenditura posta sul loro cammino. Il fascio collimato transita poi tra i due poli di un elettromagnete, e infine gli atomi vanno a depositarsi su una lastra di vetro che funge da rivelatore. Generalmente negli esperimenti di laboratorio è desiderabile che il campo magnetico sia uniforme; in questo caso invece le espansioni polari sono sagomate in modo che il campo sia il più *disuniforme* possibile. Il fascio di atomi passa molto vicino allo spigolo del polo superiore realizzato a forma di V appuntita, laddove la disuniformità del campo magnetico è più elevata.

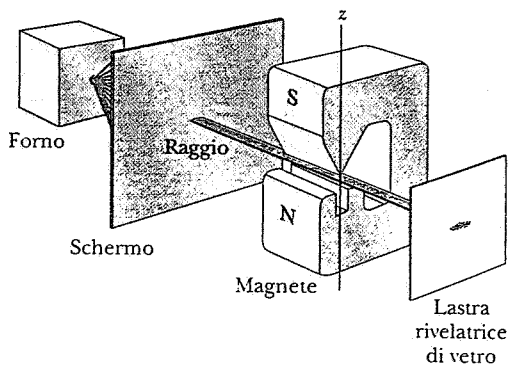


Figura 11 L'apparato di Stern e Gerlach.

Un dipolo in un campo disuniforme

La figura 12*a* mostra un dipolo dotato di momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$, che forma un angolo θ con la direzione di un campo magnetico uniforme. Possiamo immaginare il dipolo come una minuscola sbarretta magnetica, in cui il vettore momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$ sia diretto (per convenzione) lungo il suo asse dal polo sud verso il polo nord. E possiamo immaginare che le forze siano applicate alle estremità, come illustra la figura. Vediamo che, in un campo uniforme, la forza netta risultante dalla combinazione delle due forze applicate è, in modulo, nulla: infatti le due forze applicate ai poli, una verso l'alto, l'altra verso il basso, sono uguali in valore assoluto e pertanto si elidono, indipendentemente dall'orientamento del dipolo.

Le figure 12*b* e 12*c* mostrano la situazione nel caso di un campo disuniforme. Qui le due forze opposte *non* hanno lo stesso valore assoluto perché i due poli sono situati in due punti dove il campo assume valori diversi. In questo caso la forza netta risultante non è nulla, e sia il suo modulo sia la sua direzione dipendono dall'orientamento del dipolo, ovverosia dal valore dell'angolo θ. Nella figura 12*b* questa forza netta risultante è diretta verso l'alto, mentre nella figura 12*c* è diretta verso il basso. In questo modo gli atomi di argento, passando attraverso l'elettromagnete, vengono deviati verso l'alto o verso il basso e in misura variabile a seconda dell'orientamento del loro vettore momento di dipolo magnetico rispetto alla direzione del campo.

Calcoliamo ora la forza di deflessione. L'energia potenziale magnetica di un dipolo in un campo magnetico **B** è data dall'equazione 38 del capitolo 34,

$$U(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -(\mu \cos\theta)B.$$

Seguiamo ora con la nostra immaginazione gli atomi di argento mentre attraversano il campo magnetico della figura 11 parallelamente allo spigolo netto del polo dell'elettromagnete. Per considerazioni di simmetria (si vedano anche le figure 12*b* e 12*c*), il campo magnetico nella posizione centrale ha componenti x e y nulle. Pertanto $B = B_z$. Siccome $\mu \cos\theta = \mu_z$, possiamo scrivere l'energia potenziale come

$$U(\theta) = -\mu_z B_z. \qquad (32)$$

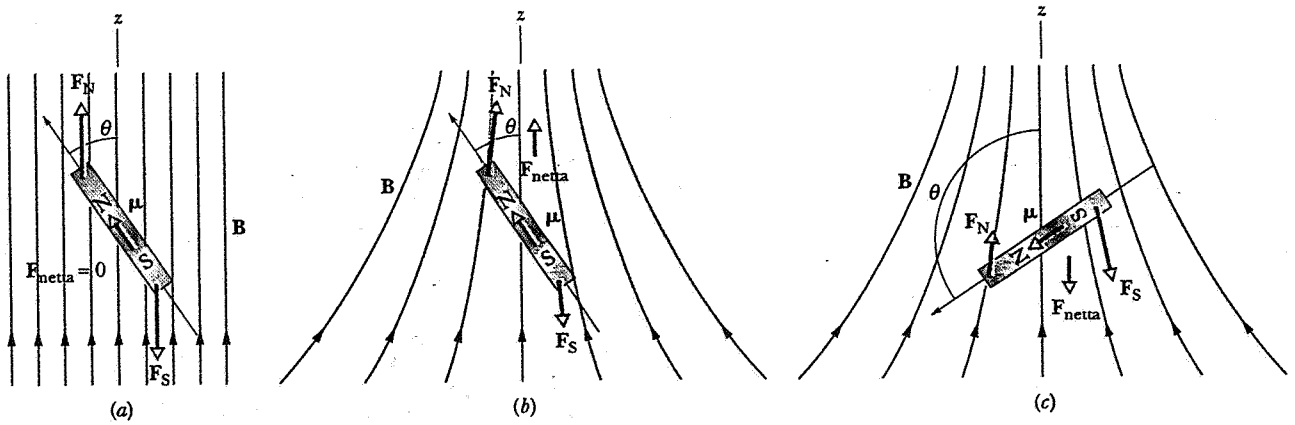


Figura 12 Un dipolo magnetico, rappresentato come una minuscola barretta magnetica bipolare, in (*a*) un campo uniforme e (*b*,*c*) un campo disuniforme. La forza netta agente sulla barretta magnetica è zero in (*a*), diretta verso l'alto in (*b*) e diretta verso il basso in (*c*).

La forza netta che agisce sull'atomo è $-(dU/dz)$, ovvero, dall'equazione 32,

$$F_z = \mu_z \frac{dB_z}{dz}. \qquad (33)$$

Si noti che la forza deviante è funzione della *derivata* del campo magnetico e non dipende dall'intensità del campo. Nelle figure 12*b* e 12*c*, B_z aumenta al crescere di z e quindi la derivata è positiva. Di conseguenza il segno della forza deviante F_z nell'equazione 33 dipende dal segno di μ_z. Se μ_z è positivo (come nella figura 12*b*), la traiettoria dell'atomo piega verso l'alto; se è negativo (come nella figura 12*c*), la deflessione avviene verso il basso.

Rimane un punto un po' oscuro. Se ogni singolo atomo del fascio si comporta come una minuscola sbarretta magnetica, perché non si allineano semplicemente tutti col campo magnetico? Perché dovrebbero orientarsi in direzioni, sia pur parzialmente, opposte? La risposta è che gli atomi non posseggono solo un momento di dipolo magnetico, ma anche un momento angolare. Il risultato è che essi seguono un moto di precessione attorno alla direzione del campo (fig. 9), piuttosto che allinearsi con esso. Allo stesso modo una trottola che non sta roteando, se viene inclinata rispetto alla direzione di gravità, semplicemente cade per terra. Abbiamo visto però nel paragrafo 13-5 che, se la trottola gira, descrive un cono di precessione attorno a questa direzione. È il momento angolare a produrre questo effetto!

I risultati sperimentali

Quando l'elettromagnete della figura 11 è disattivato (o funziona a bassissima potenza) non si riscontrano deflessioni degli atomi e il fascio produce una riga stretta sulla lastra rivelatrice.

Quando invece l'elettromagnete è attivato a piena potenza, entrano in gioco delle intense forze devianti. A questo punto sono due le possibili conseguenze, a seconda che esista o meno la quantizzazione spaziale. (Non si dimentichi che lo scopo dell'esperimento è di decidere tra queste due possibilità.) Se la quantizzazione spaziale non esiste, i vettori momento del dipolo magnetico atomico hanno una distribuzione continua di valori, alcuni positivi altri negativi; il fascio dovrebbe semplicemente allargarsi distribuendosi su una riga più ampia.

Nell'altro caso, se la quantizzazione spaziale *esiste* realmente, solo alcuni valori discreti di μ_z sono ammessi. Questo significa che esisterà solamente una serie di valori discreti per la forza deviante F_z nell'equazione 33, e il fascio si dividerà in un certo numero di righe separate.

La figura 13 mostra gli effetti prodotti. Il fascio non si allarga ma si separa nettamente in due sottofasci distinti. La quantizzazione spaziale viene confermata! Stern e Gerlach conclusero il rapporto pubblicato del loro lavoro con queste parole: "Interpretiamo questi risultati come una verifica sperimentale diretta della quantizzazione spaziale in un campo magnetico." E i fisici di tutto il mondo sono d'accordo.

Esempio 6 In un esperimento del tipo Stern e Gerlach, il gradiente del campo magnetico dB_z/dz nella posizione del fascio è 1.4 T/mm e la lunghezza h del cammino percorso dal fascio attraverso l'elettromagnete è 3.5 cm. La temperatura del forno, ove avviene l'evaporazione dell'argento, è regolata in modo tale che la velocità v più probabile degli atomi contenuti nel fascio sia di 750 m s. Si trovi la separazione d tra i due sottofasci deflessi quando emergono dall'elettromagnete; si confronti la figura 13*b*. La massa m dell'atomo di argento è pari a 1.8×10^{-25} kg e il suo momento magnetico μ_z vale 1 magnetone di Bohr ($= 9.28 \times 10^{-24}$ J T).

ISBN 88-408-0777-2

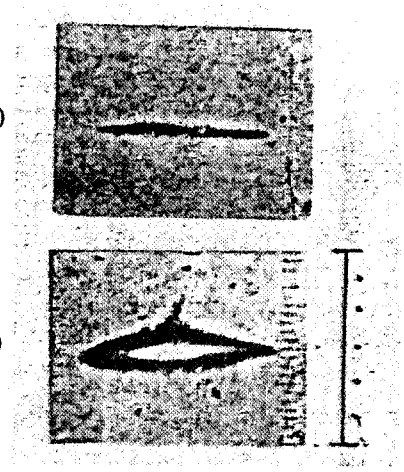


Figura 13 I risultati dell'esperimento di Stern e Gerlach, in cui si vede l'argento depositato sulla lastra di vetro rivelatrice di figura 11. Il campo magnetico è assente in (*a*) e presente in (*b*). Il fascio è stato separato dal campo magnetico in due sottofasci. La scala verticale riportata a destra in (*b*) rappresenta 1 mm.

Soluzione L'accelerazione di un atomo di argento nel passaggio attraverso l'elettromagnete è data (eq. 33) da

$$a = \frac{F_z}{m} = \frac{\mu_z(dB_z/dz)}{m}.$$

La deflessione verticale Δz di entrambi i sottofasci quando escono dal magnete è

$$\Delta z = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_z(dB_z/dz)}{m}\left(\frac{h}{v}\right)^2.$$

La separazione d tra i due fasci corrisponde a $2\Delta z$, ossia

$$d = \frac{\mu_z(dB_z/dz)h^2}{mv^2}$$
$$= \frac{(9.28 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1.4 \times 10^{3}\ \text{T/m})(3.5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{(1.8 \times 10^{-25}\ \text{kg})(750\ \text{m/s})^2}$$
$$= 1.6 \times 10^{-4}\ \text{m} = 0.16\ \text{mm}.$$

Questo risultato è dello stesso ordine di grandezza della separazione riscontrata nella figura 13*b*; si faccia attenzione alla scala della figura.

51-5 LO SPIN DELL'ELETTRONE

L'esperimento di Stern e Gerlach dimostra chiaramente che il vettore momento magnetico di un atomo può avere solo un numero finito di direzioni discrete nello spazio, invece di un numero infinito quale sarebbe consentito dalla fisica classica. Tuttavia l'esperimento rivela una curiosa caratteristica. La figura 13 mostra il fascio degli atomi d'argento che si divide in due componenti, corrispondenti ai due diversi orientamenti del vettore momento magnetico dell'atomo (o, ciò che è lo stesso, del vettore momento angolare, essendo i due vettori legati dall'equazione 29). Anche solo uno sguardo alla figura 8 o alla tabella 3 rivela che esiste sempre un numero *dispari* di orientamenti del vettore **L**. Detto in altra maniera, il numero di orientamenti possibili di **L** è $2l + 1$, e affinché questo sia uguale a 2, bisognerebbe che fosse $l = \frac{1}{2}$; ciò contraddirebbe tuttavia la regola che vuole l come un numero intero.

La soluzione a questo dilemma fu proposta nel 1924 da Wolfgang Pauli, fisico austriaco di nascita e svizzero di adozione (fig. 14). Egli suggerì che vi sia un altro numero quantico che descrive lo stato di un elettrone in un atomo, e che questo numero possa assumere valore $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. Negli anni seguenti due studenti universitari olandesi, Samuel Goudsmit e George Uhlenbeck, proposero la nozione di *spin dell'elettrone* come interpretazione fisica del numero quantico suggerito da Pauli.

Lo spin è spesso chiamato *momento angolare intrinseco*, ed è sovente utile (anche se non rigorosamente corretto) visualizzare lo spin come il momento angolare di una particella rotante su se stessa. Vi sono molte analogie tra lo spin e il momento angolare di rivoluzione. Il numero quantico di spin s è analogo al numero quantico azimutale (detto infatti anche *orbitale*) l; tuttavia, a differenza di l, il valore di s non cambia con lo stato di moto dell'elettrone. Tutti gli elettroni, indipendentemente dal loro moto, hanno $s = \frac{1}{2}$. E difatti è abitudine considerare s come una proprietà fondamentale di una particella, come lo sono la massa o la carica elettrica.

Lo spin dell'elettrone può essere rappresentato da un vettore **S**, di modulo (eq. 23)

$$S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar. \tag{34}$$

La componente di questo vettore nella direzione z si può scrivere (eq. 25)

$$S_z = m_s\,\hbar. \tag{35}$$

Come le componenti di **L**, anche le componenti possibili di **S** differiscono di un'unità di $\hbar$. Ne consegue che i valori ammessi di m_s sono

$$m_s = \pm\tfrac{1}{2}. \tag{36}$$

Associato al momento angolare di spin c'è anche un momento magnetico, che è dato da (eq. 29)

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S}. \tag{37}$$

Si noti che le equazioni 37 e 29 differiscono per un fattore 2. Questo fatto suggerisce che il momento angola-

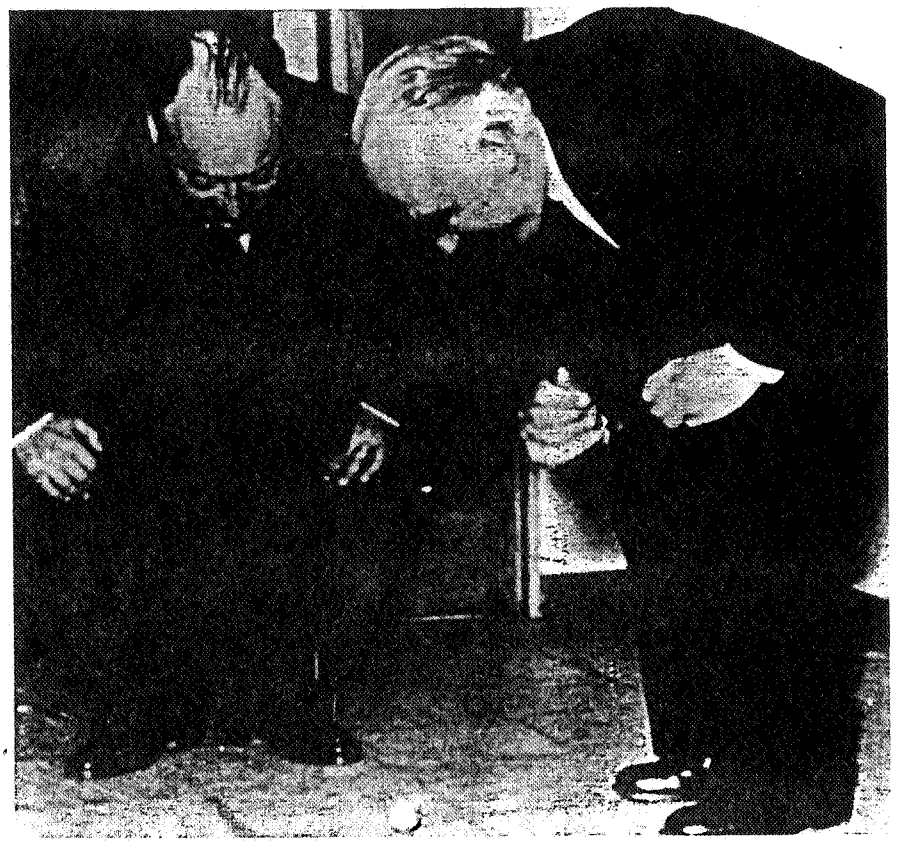


Figura 14 Wolfgang Pauli (a sinistra) e Niels Bohr che osservano una *tippy top*, una trottolina che ruota per un po' su un'estremità e poi si capovolge. Bohr e Pauli sono in attesa dell'inversione.

re di spin nel produrre gli effetti magnetici sia due volte più influente del momento angolare orbitale. Per ulteriori dettagli sui momenti magnetici orbitale e di spin, si veda il paragrafo 37-2.

I numeri quantici l, per il momento angolare orbitale, e m_l, per la sua proiezione magnetica, emergono in modo naturale dalla soluzione dell'equazione di Schrödinger per l'atomo d'idrogeno. Il momento angolare di spin e la sua proiezione magnetica appaiono come introdotti arbitrariamente senza giustificazione teorica. Il fisico matematico inglese Paul A.M. Dirac sviluppò un'equazione d'onda relativistica simile a quella non relativistica di Schrödinger, e mostrò che dalla soluzione di questa equazione per l'atomo d'idrogeno scaturiva lo spin dell'elettrone come quarto numero quantico. Per ottenere una soluzione completa dell'atomo d'idrogeno dobbiamo sostituire, nella figura 6, alla macchina da calcolo di Schrödinger un'analoga macchina di Dirac! Ciò costituisce un altro grande trionfo per la teoria della relatività, senza la quale non avremmo una base teorica per capire la parte fondamentale della struttura atomica.

Siamo ora in grado di spiegare perché nell'esperimento di Stern e Gerlach appaiono due fasci. Si dà il caso che l'elettrone dell'atomo di argento occupi uno stato in cui $l = 0$, in modo che il momento angolare totale dell'elettrone è dato solamente dallo spin. Il vettore di spin ha solo due possibili orientamenti rispetto al campo magnetico, da cui le due componenti del fascio.

Ciascuna particella fondamentale possiede il proprio spin e il proprio momento magnetico caratteristici. Il protone e il neutrone, come l'elettrone, hanno spin $\frac{1}{2}$. I loro momenti magnetici sono stati presentati nel paragrafo 37-2. Considereremo altre conseguenze osservabili dell'esistenza dello spin dell'elettrone nel paragrafo 51-8.

Abbiamo già dimostrato come le conseguenze dello spin del protone e del neutrone abbiano trovato applicazioni pratiche di gran valore nel fenomeno di *risonanza magnetica nucleare* (si vedano il paragrafo 13-6 e l'esempio 1 nel capitolo 37). Quando un protone viene a trovarsi in un campo magnetico B, si verifica una variazione di energia pari a $2\mu_s B$ nel momento in cui lo spin cambia direzione, o meglio «si inverte». Questa inversione dello spin può essere provocata da un'onda elettromagnetica, che investe il protone, caratterizzata da una frequenza opportunamente scelta in modo che $h\nu = 2\mu_s B$. Il campo B è costituito da un campo esterno B_{ext} (per esempio prodotto da un elettromagnete) e da un campo interno B_{int} (dovuto alle caratteristiche chimiche della posizione in cui il protone si trova). Ad esempio, in una molecola di etanolo, che può essere

 ISBN 88-408-0777-2

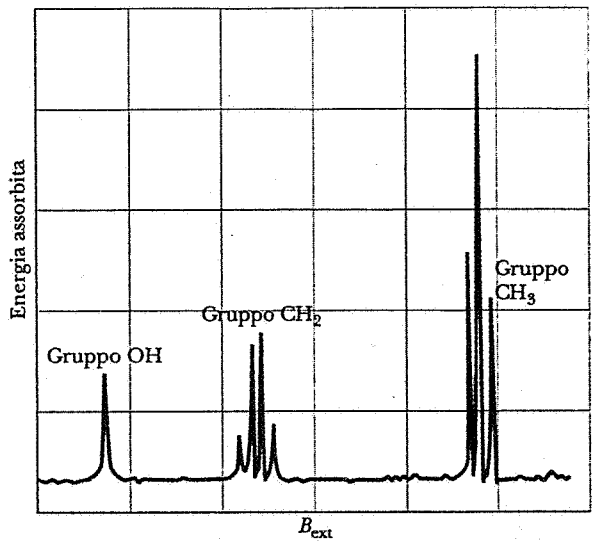


Figura 15 Uno spettro di risonanza magnetica nucleare dell'etanolo. Tutte le righe sono dovute all'assorbimento della radiazione incidente quando lo spin del protone si inverte. Le serie di righe corrispondono a diversi raggruppamenti dell'idrogeno nella molecola. L'intera scala orizzontale si estende per meno di 10^{-4} T.

indicata come CH_3—CH_2—OH, ciascun nucleo d'idrogeno è sottoposto a un campo interno differente, dovuto alla diversa collocazione nella molecola. Mantenendo fisso il campo B_{ext} e variando la frequenza ν, si possono trovare diversi valori di frequenza, per i quali avviene l'inversione dello spin, ciascuno corrispondente al particolare ambiente in cui si trova nell'etanolo il nucleo d'idrogeno. Allo stesso modo si può, come illustrato nella figura 15, mantenere fissa ν e far variare B_{ext}. In un modo o nell'altro otteniamo comunque una risposta caratteristica, come una firma, che individua l'etanolo. La risonanza magnetica nucleare dimostra così tutta la sua importanza come strumento analitico in chimica organica. Altre applicazioni comprendono la misura di B_{int} in vari contesti molecolari o di stato solido e la misura dei momenti di dipolo magnetico nucleare.

51-6 I POSSIBILI STATI DELL'ATOMO D'IDROGENO

Abbiamo ora descritto i quattro numeri quantici che definiscono gli stati stazionari dell'atomo d'idrogeno, e abbiamo anche indicato come ciascuno di essi possa essere fisicamente interpretato. Sebbene non l'abbiamo dimostrato, è vero che essi derivano dall'equazione d'onda di Schrödinger con l'importante contributo dell'equazione di Dirac, per quanto riguarda lo spin dell'elettrone. Nel risolvere l'equazione d'onda di Schrödinger, i numeri quantici, così come le altre informazioni, saltano fuori in modo naturale.

Il nostro prossimo obiettivo è vedere se possiamo organizzare gli stati dell'atomo d'idrogeno in qualche schema ordinato. Si consideri dapprima il numero quantico principale n. Tutti gli stati con lo stesso valore di n posseggono la medesima energia, e siamo soliti dire che l'insieme di questi stati forma uno *strato* o *guscio*. L'equazione 24 stabilisce che il numero dei differenti valori di l, che possono sussistere dato un certo valore di n, è esattamente uguale a n. Così, per $n = 3$, possiamo avere 3 valori di l: 0, 1, 2.

Gli strati si possono ulteriormente suddividere. Entro un certo strato, tutti gli stati aventi lo stesso valore di l presentano il medesimo momento angolare e si dice che formano un *sottostrato*. Per esempio, lo strato definito da $n = 3$ contiene tre sottostrati, ciascuno dotato della stessa energia ma differente momento angolare.

Entro un sottostrato gli elettroni possono avere diversi stati di moto per via dei differenti modi in cui si può orientare il vettore momento angolare. Dato un valore di l, l'equazione 26 stabilisce che esistono $2l + 1$ valori di m_l. Nel nostro esempio quindi, il sottostrato con $l = 2$ contiene 5 ($= 2 \times 2 + 1$) stati, mentre i sottostrati designati da $l = 1$ e da $l = 0$ contengono rispettivamente 3 e 1 stati possibili. Il totale è dunque 9 ($= 5 + 3 + 1$) stati possibili nello strato caratterizzato da $n = 3$.

La tabella 4 riassume questa suddivisione degli stati dell'atomo d'idrogeno in strati e sottostrati.

TABELLA 4 GLI STATI DELL'ATOMO D'IDROGENO[a]

n	1	2		3		
l	0	0	1	0	1	2
m_l	0	0	0, ± 1	0	0, ± 1	0, ± 1, ± 2
m_s	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$
Numero di stati nei sottostrati	2	2	6	2	6	10
Numero di stati negli strati	2	8		18		

[a] Estesa solo fino a $n = 3$.

Non c'è forse qualcosa di familiare nel numero di stati contenuti (2, 8, 18) in ciascuno dei tre gusci, come elencato nell'ultima riga della tabella 4? Corrispondono al numero di caselle nelle righe orizzontali (periodi) della tavola periodica degli elementi! Dal confronto con l'appendice E, si nota che il periodo 1 contiene 2 elementi, i periodi 2 e 3 contengono 8 elementi, e i periodi 4 e 5 ne contengono 18 ciascuno. Nel capitolo 52 vedremo in dettaglio come l'ordine degli elementi nella tavola periodica nasca dai princìpi della meccanica ondulatoria.

Esempio 7 Un certo strato ha per numero quantico principale il valore 4. (*a*) Quanti sottostrati contiene questo strato? (*b*) Qual è il numero degli stati possibili in ciascuno di questi sottostrati? (*c*) Qual è il numero totale di stati possibili nell'intero guscio?

Soluzione (*a*) Se $n = 4$, dall'equazione 24 sappiamo che i valori di l ammessi sono 0, 1, 2, 3, un totale di quattro valori, in accordo con la regola che vuole tanti numeri quantici azimutali quanto è il valore del numero quantico principale. Ciascun valore di n individua uno strato e, entro questo strato, ciascun valore di l determina un sottostrato. È come dire che abbiamo quattro sottostrati nello strato caratterizzato da $n = 4$.

(*b*) Il numero di stati in un sottostrato è dato da $2(2l + 1)$, dove il fattore 2 deriva dai due valori ammessi per il numero quantico magnetico di spin. Quindi avremo i seguenti stati possibili nei vari sottostrati dello strato $n = 4$.

l	$2(2l + 1)$
0	2
1	6
2	10
3	14

(*c*) Il numero di stati possibili nello strato $n = 4$ si trova sommando quelli contenuti in ciascun sottostrato. Dalla tavola qui sopra, abbiamo $2 + 6 + 10 + 14 = 32$. Si noti che 32 è il numero di elementi che compongono la sesta riga orizzontale della tavola periodica. Si veda l'appendice E.

Sapreste dimostrare che, più in generale, il numero degli stati possibili, in un certo strato caratterizzato dal numero quantico principale n, è dato da $2n^2$? In questo caso funziona, dato che $2 \times 4^2 = 32$, come risulta dal conteggio esplicito.

51-7 LO STATO FONDAMENTALE DELL'IDROGENO

In questo paragrafo, senza addentrarci in approfondimenti matematici, presenteremo i risultati che l'equazione di Schrödinger fornisce quando viene applicata allo studio dello stato fondamentale dell'idrogeno. Il procedimento richiede che l'equazione di Schrödinger sia risolta in coordinate sferiche quando l'elettrone e il protone interagiscono attraverso la forza coulombiana, data dall'energia potenziale

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{38}$$

Se introduciamo questa funzione energia potenziale nell'equazione di Schrödinger ed eseguiamo i necessari calcoli matematici, possiamo ricavare un'espressione per le energie degli stati stazionari ammessi dell'atomo e per le funzioni d'onda che descrivono questi stati.

L'espressione per l'energia degli stati stazionari risulta esattamente identica all'equazione 18, derivata dalla teoria di Bohr. Focalizziamo qui l'attenzione sullo stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno, quello stato cioè in cui l'energia è minima.

Dall'equazione di Schrödinger scaturisce anche la funzione d'onda dello stato fondamentale, che risulta dipendere dalla sola variabile r. Essa è data da

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \tag{39}$$

in cui a_0 rappresenta il raggio di Bohr.

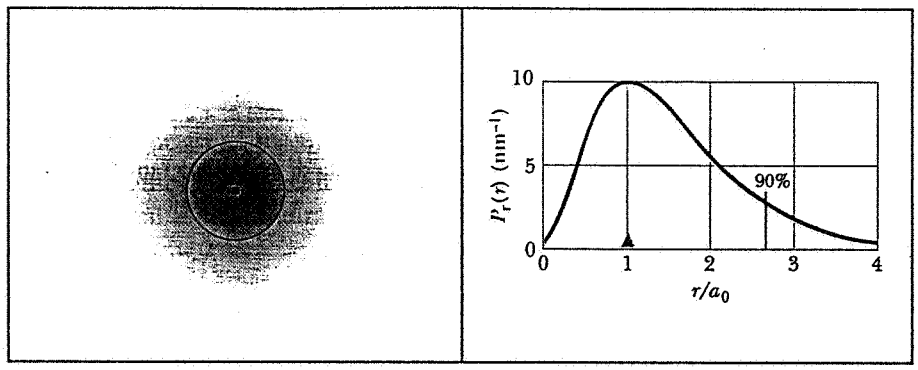
Questa funzione d'onda possiede una simmetria sferica, col che intendiamo dire che dipende solamente dal modulo del vettore **r** (che definisce il punto in cui la funzione è calcolata), e non dalla sua direzione. Ciò forse non stupisce. La funzione energia potenziale (eq. 38) ha pure una simmetria sferica, cosicché l'atomo non ha direzioni preferenziali precostituite. Come una palla da biliardo, l'atomo nel suo stato fondamentale ha lo stesso aspetto da qualsiasi direzione sia visto. Il quadrato della funzione d'onda, che abbiamo chiamato *densità di probabilità*, ha questa proprietà: $\psi^2(r)dV$ rappresenta la probabilità di trovare l'elettrone nel volume infinitesimo dV, situato nel punto definito dal vettore posizione **r**. Dall'equazione 39 si ottiene

$$\psi^2(r) = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}. \tag{40}$$

La figura 16*a* è una rappresentazione «a punti» dell'equazione 40, dove la densità dei punti suggerisce analogia con la densità di probabilità relativa alla posizione dell'elettrone. Per evidenziare la scala, è disegnato un cerchio di raggio pari a 1 raggio di Bohr.

Un'altra quantità utile per individuare il sito dell'elettrone è la densità radiale di probabilità $P_r(r)$. È definita in modo che $P_r(r)dr$ dia la probabilità che ha l'elettrone di trovarsi, indipendentemente dalla direzione. in un guscio sferico compreso tra le sfere di raggio r ed $r + dr$. Il volume di questo guscio è $(4\pi r^2)(dr)$. di modo che possiamo scrivere

ISBN 88-408-0777-2



(*a*) (*b*)

Figura 16 (*a*) Un «diagramma a punti» che rappresenta la densità di probabilità per lo stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno, dato dall'equazione 40. Il cerchio disegnato ha raggio pari ad a_0. (*b*) Densità di probabilità radiale, data dall'equazione 41. Il triangolino verde segna il raggio di probabilità massima, pari ad a_0. La linea indicata con «90%» segna il raggio di una sfera contenente il 90% di densità di probabilità.

$$P_r(r)dr = \psi^2(r)dV = \psi^2(r)(4\pi r^2)(dr),$$

che, combinata con la (40), conduce a

$$P_r(r) = \psi^2(r)(4\pi r^2) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}. \qquad (41)$$

La figura 16*b* riproduce un grafico dell'equazione 41. Si nota che (vedi esempio 8) il valore massimo di $P_r(r)$ si verifica in corrispondenza del valore $r = a_0$. In meccanica ondulatoria non si può dire che l'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno si muove su un'orbita di raggio pari a 1 raggio di Bohr. Diciamo piuttosto che l'elettrone ha più probabilità di trovarsi in un sottile guscio a tale distanza dal nucleo centrale che in un guscio di uguale spessore a qualsiasi altra distanza, minore o maggiore. Nella figura è pure indicato il cosiddetto raggio al 90% di probabilità: delimita una sfera all'interno della quale l'elettrone ha il 90% di probabilità di trovarsi. La probabilità che si trovi al di fuori di questa sfera è ovviamente del 10%.

Se ne deduce che la risposta alla domanda "Quant'è grande un atomo d'idrogeno?" non è così semplice. Si potrebbe dire che è 1 raggio di Bohr, ma (si veda il problema 56) il 68% delle volte che lo misurassimo troveremmo che l'elettrone eccede questa dimensione. Sarebbe più ragionevole dare come risposta il raggio al 90% di probabilità, che risulta circa 2.7 volte il raggio di Bohr. La natura intrinsecamente indistinta dell'atomo quantizzato semplicemente ci impedisce di rispondere alla domanda in modo più preciso.

Non abbiamo detto nulla finora sulla funzione dello spin dell'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno. Come ci ricorda la tabella 4, lo strato caratterizzato da $n = 1$ contiene due stati possibili, corrispondenti ai due valori ammessi ($= \pm\frac{1}{2}$) per il numero quantico di spin m_s. Questi due stati però hanno esattamente la medesima energia e, per un atomo isolato, non c'è possibilità di distinguerli sperimentalmente. L'atomo nel suo stato fondamentale può trovarsi sia nello stato in cui $m_s = +\frac{1}{2}$ sia nello stato in cui $m_s = -\frac{1}{2}$. L'energia dell'atomo e la curva di densità di probabilità della figura 16 sono le stesse per entrambi gli stati.

Se volessimo *realmente* distinguere tra questi due stati con orientamento di spin differente, dovremmo collocare l'atomo in un campo magnetico esterno. Questa operazione non solo fornisce un asse naturale di riferimento rispetto al quale può orientarsi il vettore momento angolare di spin dell'elettrone (e quindi anche il vettore momento di dipolo magnetico), ma separa anche i due stati differenziandone l'energia. E questo difatti è proprio ciò che Stern e Gerlach hanno realizzato nel loro esperimento.

Esempio 8 Si verifichi che il massimo della curva che esprime la densità radiale di probabilità riprodotta nella figura 16*b* cade nel punto di ascissa $r = a_0$, ove a_0 è il raggio di Bohr.

Soluzione Derivando $P_r(r)$ nell'equazione 41 rispetto a r, si ottiene

$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{4}{a_0^3}(2r)e^{-2r/a_0} + \frac{4}{a_0^3}r^2\left(-\frac{2}{a_0}\right)e^{-2r/a_0}$$
$$= \frac{8r}{a_0^3}e^{-2r/a_0}\left(1 - \frac{r}{a_0}\right).$$

Nel punto di massimo della curva dev'essere $dP_r/dr = 0$ e, come si riscontra dell'esame dell'equazione, ciò accade effettivamente per $r = a_0$. Si noti che la medesima condizione è verificata anche per $r = 0$ e per $r \to \infty$. Queste due situazioni sono del tutto coerenti con la figura 16*b*, ove individuano dei punti di minimo anziché di massimo.

51-8 GLI STATI ECCITATI DELL'IDROGENO

Lo stato di energia immediatamente superiore allo stato fondamentale è detto primo stato eccitato. La sua energia (−3.40 eV) si trova ponendo $n = 2$ nell'equazione 18. Come si vede dalla tabella 4, lo strato $n = 2$

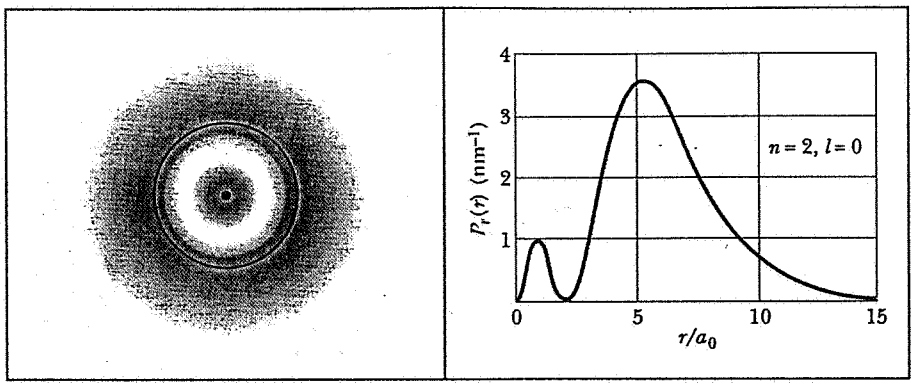


Figura 17 (*a*) Un «diagramma a punti» che rappresenta la densità di probabilità dell'atomo d'idrogeno per lo stato eccitato avente $n = 2$ ed $l = 0$. Il cerchio disegnato ha raggio pari a $4a_0$. (*b*) Densità di probabilità radiale.

contiene due sottostrati, corrispondenti a $l = 0$ ed $l = 1$. Esaminiamoli uno alla volta.

Sottostrato caratterizzato da $n = 2$ ed $l = 0$

La funzione d'onda per questo stato è

$$\psi_{2,0,0}(r) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi a_0^3}}(2 - r/a_0)e^{-r/2a_0}, \qquad (42)$$

in cui il pedice 2,0,0 indica la sequenza di numeri quantici: $n = 2$, $l = 0$, $m_l = 0$. Questo stato, come quello fondamentale, ha simmetria sferica, poiché è funzione solo di r e non coinvolge angoli come variabili.

La densità di probabilità $\psi^2(r)$ e la densità radiale di probabilità $P_r(r)$ sono date da

$$\psi^2(r) = \frac{1}{32\pi a_0^3}(2 - r/a_0)^2 e^{-r/a_0} \qquad (43)$$

e

$$P_r(r) = \psi^2(r)(4\pi r^2) = \frac{1}{8a_0}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}. \qquad (44)$$

La figura 17*a* è una rappresentazione «a punti» dell'equazione 43, che esprime la densità di probabilità. La figura 17*b* è un grafico dell'equazione 44, che rappresenta la densità radiale di probabilità. Si osservi che quest'ultima curva presenta due massimi e si annulla per $r = 2a_0$, come si può riconoscere da un esame dell'equazione 44.

Le osservazioni riguardo lo spin fatte al termine del paragrafo 51-7 valgono qui in egual misura. Anche questo stato realizza una totale simmetria sferica. Il momento angolare vale $\frac{1}{2}$, in unità $\hbar$, dovuto interamente, come nel caso dello stato fondamentale, allo spin dell'elettrone.

Sottostrato caratterizzato da $n = 2$ ed $l = 1$

Gli stati compresi in questo sottostrato *posseggono* un momento angolare orbitale, le cui proiezioni sull'asse z sono date da $m_l\hbar$, dove m_l può assumere i valori 0 e ± 1. Le funzioni d'onda per questi tre stati non hanno simmetria sferica, dato che sono funzione non solo di r, ma anche dell'angolo polare θ, definito nella figura 18*a*.

La figura 18*a* riporta una rappresentazione a punti delle tre densità di probabilità, $\psi^2_{2,1,-1}(r,\theta)$, $\psi^2_{2,1,0}(r,\theta)$, $\psi^2_{2,1,+1}(r,\theta)$. I pedici designano la sequenza dei numeri

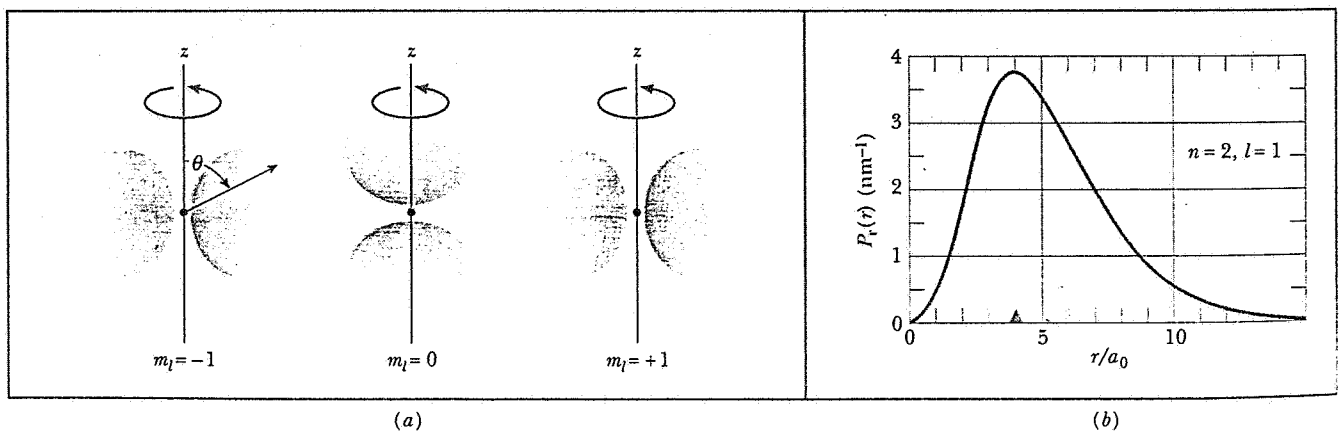


Figura 18 (*a*) Un «diagramma a punti» che rappresenta la densità di probabilità dell'atomo d'idrogeno per lo stato eccitato con $n = 2$ ed $l = 1$. Per avere una completa immagine tridimensionale, si ruoti idealmente ciascun diagramma attorno all'asse z. (*b*) Densità di probabilità radiale. Il triangolino verde segna il raggio corrispondente al massimo di probabilità, pari a $4a_0$.

ISBN 88-408-0777-2

quantici n, l, m_l. I tre disegni hanno simmetria rotazionale attorno all'asse z, e il primo, caratterizzato da $m_l = -1$, risulta uguale al terzo, caratterizzato da $m_l = +1$.

Si potrebbe a buon diritto rimanere piuttosto perplessi di fronte alla mancanza di una simmetria sferica, quale risulta dalla figura 18*a*. Dopotutto la funzione energia potenziale che abbiamo introdotto nell'equazione di Schrödinger dipende solo da r. Ma è proprio vero che l'elettrone nello stato identificato da $n = 2$, $l = 1$ e $m_l = 0$ ha tendenza a rimanere accostato all'asse z, evitando il piano equatoriale? Com'è scelta la direzione di quest'asse?

Riusciamo a superare lo sconcerto quando ci rendiamo conto che i tre stati in questione hanno la stessa energia e, in assenza di un campo magnetico esterno, non c'è modo di isolarli sperimentalmente. Se supponiamo che, in media, l'atomo passi un terzo del suo tempo in ciascuno dei tre stati di figura 18*a*, possiamo calcolare una *densità di probabilità media ponderata* per il sottostrato nel suo insieme. Il risultato è

$$\psi^2_{2,1}(r) = \tfrac{1}{3}\psi^2_{2,1,-1}(r,\theta) + \tfrac{1}{3}\psi^2_{2,1,0}(r,\theta) + \tfrac{1}{3}\psi^2_{2,1,+1}(r,\theta) = \frac{1}{96\pi a_0^5} r^2 e^{-r/a_0}. \qquad (45)$$

Il pedice della densità di probabilità riporta i valori di n (= 2) e l (= 1). Si noti che la variabile angolare θ è scomparsa dal risultato finale! La densità di probabilità per il sottostrato nel suo insieme dipende solo da r e mantiene la simmetria sferica che ci aspettavamo che avesse. Ciò significa che, se sovrapponiamo le tre rappresentazioni punteggiate a simmetria cilindrica di figura 18*a*, la rappresentazione a punti che ne risulta (immaginata in tre dimensioni) avrà simmetria sferica.

Cerchiamo ora la densità radiale di probabilità per questo sottostrato, procedendo come già abbiamo fatto nel paragrafo 51-7 per lo stato fondamentale; esplicitamente,

$$P_r(r) = \psi^2_{2,1}(r)(4\pi r^2) = \frac{1}{24a_0^5} r^4 e^{-r/a_0}. \qquad (46)$$

La figura 18*b* mostra un diagramma di questa densità radiale di probabilità. Si noti che il massimo della distribuzione si realizza in corrispondenza di $r = 4a_0$, che è proprio il raggio della seconda orbita di Bohr.

51-9 PARTICOLARITÀ SULLA STRUTTURA ATOMICA *(Facoltativo)*

In questo capitolo abbiamo finora delineato gli aspetti fondamentali della teoria quantistica applicata alla struttura dell'atomo d'idrogeno, che ci permettono di capire alcune caratteristiche della sua natura, come la serie di Balmer e altre serie di emissione radiativa. Vogliamo qui accennare brevemente ad alcuni altri dettagli della struttura atomica, che siamo egualmente in grado di recepire.

Struttura fine

Quando si analizzano le righe spettrali con elevatissima risoluzione, si scopre che, al posto di una linea singola, appaiono due righe molto vicine (doppietti). Questa è chiamata *struttura fine* dello spettro. L'effetto è normalmente molto piccolo. Nel caso di transizione tra il primo stato eccitato e lo stato fondamentale dell'idrogeno ($E = 10.2$ eV), la differenza di energia tra le due componenti dovute alla struttura fine vale 4.5×10^{-5} eV. La separazione di struttura fine aumenta rapidamente però con il numero atomico; nel sodio è responsabile della separazione tra le righe D del giallo, che differiscono in lunghezza d'onda di circa 0.6 nm su 590 nm, pari a circa 1 parte su mille.

La separazione di struttura fine viene normalmente analizzata mediante il momento angolare totale dell'elettrone, ottenuto dalla somma dei contributi di rivoluzione e di spin. Nello stato eccitato $l = 1$ i valori possibili del numero quantico associato al momento angolare totale, secondo le regole per l'addizione del momento angolare in meccanica quantistica, sono

$$j = l \pm s = 1 \pm \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} \quad \text{oppure} \quad \tfrac{1}{2}.$$

Grossolanamente parlando, si può dire che queste due possibilità corrispondono rispettivamente alle situazioni in cui i vettori L ed S sono paralleli o antiparalleli. Questi due differenti orientamenti presentano energie leggermente diverse, che danno una differenza di energia nell'atomo tra gli stati corrispondenti a queste combinazioni. Si può immaginare la combinazione parallela come un insieme di due minuscole sbarrette magnetiche allineate fianco a fianco e parallele tra di loro, con i loro poli omologhi che tendono a respingersi reciprocamente; nella configurazione antiparallela, i due magnetini sono allineati sì, ma con verso opposto, di modo che vengono a trovarsi vicini i poli N e S, dando luogo a reciproca attrazione. Quest'ultima disposizione riduce l'energia dell'atomo, perché corrisponde a uno stato di maggior vincolo.

Il momento angolare totale ha proprietà simili ai momenti angolari orbitale e di spin. Precisamente, esistono $2j + 1$ diversi orientamenti per il vettore J, corrispondenti ai possibili diversi valori della sua componente J_z proiettata sull'asse z; possiamo scrivere $J_z = m_j\hbar$, ove m_j può variare da $-j$ a $+j$ con incrementi interi. Vale a dire che, per $j = \frac{3}{2}$, abbiamo $m_j = +\frac{3}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$, mentre per $j = \frac{1}{2}$, si ha $m_j = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

La figura 19 illustra uno schema della separazione di struttura fine nel sodio. Si noti che, non tenendo conto della separazione di struttura fine, lo stato eccitato $l = 1$ comprende sei sottostati (tre corrispondenti a $m_l = +1, 0, -1$. ciascuno dei quali può avere $m_s = +\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$). Se invece si tiene conto della struttura fine, i sottostati sono sempre sei, ma quattro associati con $j = \frac{3}{2}$ e due con $j = \frac{1}{2}$. Lo stato fondamentale, con $l = 0$, può avere solo $j = \frac{1}{2}$.

Effetto Zeeman

Michael Faraday intuì che la luce prodotta da una sorgente potesse cambiare se la sorgente viene sottoposta a un forte campo magnetico. Faraday non ebbe successo nel condurre questo esperimento, perché gli apparecchi a quel tempo disponibili non avevano risoluzione sufficiente per mettere in luce questo effetto, piuttosto piccolo. Circa 30 anni più tardi, nel 1896, il fisico olan-

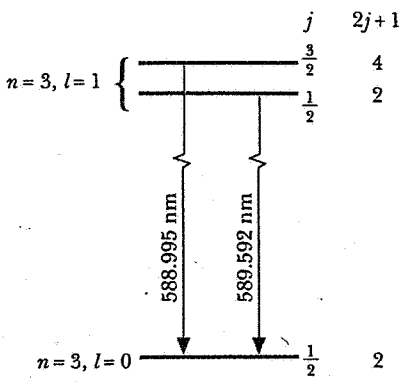


Figura 19 La separazione dei livelli energetici che si riscontra nell'esame della struttura fine nel sodio, il quale emette luce con il ben noto doppietto. Il disegno non è in scala; la separazione effettiva tra i due livelli superiori è circa un millesimo della differenza di energia tra il livello inferiore e quelli superiori. A destra è indicato il numero delle diverse orientazioni per il vettore **J** (cioè il numero di differenti valori m_j in ciascun livello).

dese Pieter Zeeman ripeté l'esperimento con un apparato più sensibile e osservò che le righe spettrali si allargavano di una quantità misurabile in presenza di un forte campo magnetico. Con campi ancor più elevati e una migliore risoluzione è possibile vedere che le righe si dividono in componenti, la cui separazione cresce in proporzione all'intensità del campo. Per questo suo lavoro, Zeeman ricevette in compartecipazione il premio Nobel per la fisica nel 1922. La figura 20 mostra un esempio dell'effetto Zeeman. In un campo magnetico intenso la separazione delle righe nell'effetto Zeeman può risultare di circa 1 parte su 10^4 in energia o in lunghezza d'onda delle righe.

Per capire l'origine dell'effetto Zeeman consideriamo lo schema dei livelli di energia per il sodio mostrato nella figura 21, che riproduce solo gli stati eccitati con $j = \frac{3}{2}$ e lo stato fondamentale con $j = \frac{1}{2}$. Quando viene attivato il campo magnetico, i quattro possibili orientamenti del vettore **J** dello stato eccitato (corrispondenti ai quattro differenti valori di m_j) danno luogo a energie diverse, che si possono calcolare a partire dal momento magnetico dello stato in questione. Analogamente lo stato fondamentale $j = \frac{1}{2}$ si divide in due sottostati. Quando il campo è assente vi è una sola possibilità di transizione tra lo stato eccitato e lo stato fondamentale; se il campo è invece presente, è possibile la transizione da uno qualsiasi del sottostati dello stato eccitato a un qualunque sottostato dello stato fondamentale, dando luogo complessivamente a otto possibili transizioni. Due di queste transizioni sono proibite dalle regole della meccanica quantistica, le altre si traducono in sei componenti separate.

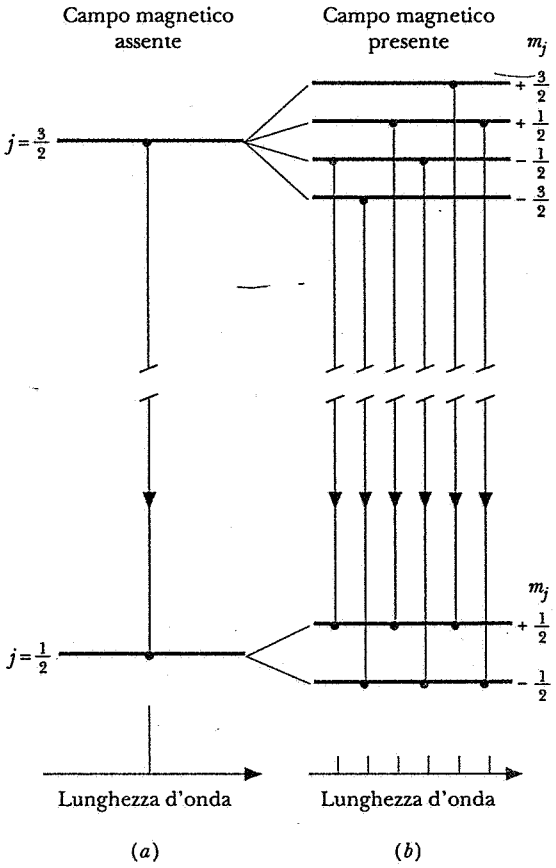


Figura 21 Un diagramma dei livelli di energia che illustra la separazione Zeeman di una delle due righe del doppietto a struttura fine del sodio. Quando si applica il campo magnetico, la riga spettrale del doppietto in (*a*) si separa nelle sei componenti molto vicine mostrate in (*b*).

Con la meccanica quantistica si può calcolare il numero di componenti e la loro separazione osservati nell'effetto Zeeman. La figura 20 mostra che le diverse righe di un certo spettro possono generare figure di separazione differenti. La possibilità di calcolare queste caratteristiche dell'effetto Zeeman, nonché l'accordo sperimentale sui valori di intensità relativa delle componenti e persino sulla loro polarizzazione, costituiscono una trionfante conferma della meccanica ondulatoria.

Massa ridotta

Nelle nostre considerazioni analitiche sui livelli di energia dell'idrogeno avevamo assunto che l'elettrone ruotasse attorno a un nucleo fermo. Nella realtà l'elettrone e il protone ruotano insieme attorno al centro di massa del sistema. Un modo conveniente per

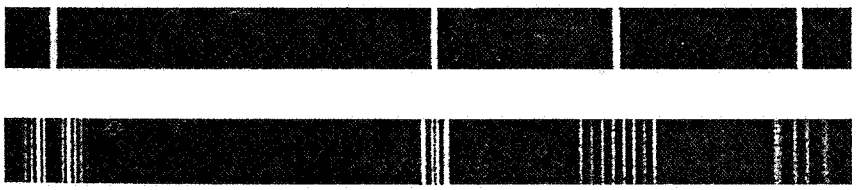


Figura 20 Effetto Zeeman nel rodio. Lo spettro in basso mostra la separazione delle righe spettrali quando è presente il campo magnetico.

ISBN 88-408-0777-2

tener conto di questo particolare, consiste nell'assegnare all'elettrone un valore di massa efficace minore, chiamato *massa ridotta* (par. 15-10), definito come

$$m = \frac{m_e M}{M + m_e} = \frac{m_e}{1 + m_e/M}, \qquad (47)$$

dove M rappresenta la massa del nucleo. Come conseguenza, in tutte le espressioni in cui compare la massa dell'elettrone, dovremmo sostituirne il valore con quello della massa ridotta.

Nel caso dell'idrogeno, l'equazione 47 dà

$$m = \frac{m_e}{1 + \frac{1}{1836.15}} = \frac{m_e}{1.000545},$$

e il valore corrispondente dell'energia dello stato fondamentale si modifica da -13.6057 eV (che si avrebbe con nucleo di massa infinita) a -13.5983 eV. E tutte le linee spettrali si modificano conseguentemente. Per esempio, la prima riga della serie di Lyman dovrebbe avere un'energia di 10.2043 eV se il nucleo avesse massa infinita, mentre nella realtà l'energia misurata per l'idrogeno è di 10.1972 eV. Queste differenze, dell'ordine di 1 parte su mille, possono essere agevolmente osservate con gli spettroscopi.

Ogni 6000 atomi circa di idrogeno vi è un atomo di deuterio, l'isotopo che contiene nel nucleo un protone e un neutrone, rendendolo pesante circa il doppio dell'isotopo ordinario. La maggior parte delle proprietà chimiche e fisiche del deuterio sono identiche a quelle dell'isotopo comune dell'idrogeno, salvo quelle proprietà che dipendono specificatamente dalla massa. Come si è visto, l'energia delle righe spettrali dipende sia pur debolmente dalla massa del nucleo. Per un atomo di deuterio la massa ridotta dell'elettrone vale

$$m = \frac{m_e}{1 + \frac{1}{3670.48}} = \frac{me}{1.000272},$$

e la corrispondente energia dello stato fondamentale è 13.6020 eV. La prima riga della seria di Lyman dovrebbe possedere un'energia di 10.2015 eV. Se esaminiamo le righe spettrali di un campione di idrogeno, troviamo che ciascuna riga consiste di un doppietto, separato da un intervallo dello 0.027% in energia (o lunghezza d'onda) e con intensità che stanno tra di loro in rapporto di circa 6000 a 1. Incrementando la concentrazione di deuterio (ad esempio per distillazione), il rapporto di intensità può venire ridotto. Il deuterio venne scoperto nel 1923, mediante questo procedimento, da H.C. Urey, che ricevette nel 1934, per tale merito, il premio Nobel per la chimica. ■

DOMANDE

1. Commentare l'analogia tra il legame Keplero - Newton nello sviluppo della seconda legge di Newton sulla gravitazione e il legame Balmer - Bohr nello sviluppo della teoria di Bohr sulla struttura atomica.
2. Perché nello spettro dell'idrogeno fu la serie di Balmer a essere rivelata e studiata per prima, piuttosto che la serie di Lyman o di Paschen?
3. Dovessero esserci delle altre serie da scoprire nello spettro dell'atomo d'idrogeno, in quale regione di lunghezze d'onda si troverebbero più facilmente?
4. Nella teoria di Bohr sulle orbite dell'atomo d'idrogeno, qual è la conseguenza del fatto che l'energia potenziale è negativa e più grande in modulo dell'energia cinetica?
5. Può un atomo d'idrogeno assorbire un fotone di energia eccedente la propria energia di legame (13.6 eV)?
6. Un atomo d'idrogeno isolato, quando emette un fotone, rincula per conservare la quantità di moto. Si spieghi perché l'energia del fotone emesso è leggermente inferiore alla differenza di energia tra i livelli energetici coinvolti nel processo.
7. Perché alcune righe dello spettro dell'idrogeno sono più brillanti di altre?
8. I radioastronomi registrano righe nello spettro dell'idrogeno emesse da atomi d'idrogeno che si trovano in stati caratterizzati da $n = 350$, o qualcosa di simile. Perché in laboratorio non si riesce a ottenere e studiare atomi d'idrogeno con così alti numeri quantici?
9. Servendosi di tubi a scarica nei laboratori si osserva un numero relativamente piccolo di righe di Balmer, mentre se ne rileva un numero ben più elevato negli spettri stellari. Si spieghi questo fatto, facendo riferimento alla modesta densità, all'alta temperatura e ai grandi volumi di gas contenuti nelle atmosfere stellari.
10. Secondo la meccanica classica, un elettrone che si muove su un'orbita dovrebbe poterlo fare con un momento angolare qualsiasi. Secondo la teoria di Bohr dell'atomo d'idrogeno invece, il momento angolare è quantizzato secondo la legge $L = nh/2\pi$. Trovare un punto d'incontro tra queste due affermazioni facendo uso del principio di corrispondenza.
11. Perché il modello delle orbite di Bohr viola il principio d'indeterminazione?
12. Si consideri un atomo idrogenoide nel quale si ha un positrone (un elettrone a carica positiva) orbitante attorno a un antiprotone (caricato negativamente). In che modo, se è il caso, lo spettro di emissione di questo «atomo di antimateria» differisce da quello di un normale atomo d'idrogeno?
13. Se la teoria di Bohr e la meccanica ondulatoria di Schrödinger predicono lo stesso risultato per le energie dei vari stati dell'atomo d'idrogeno, perché mai abbiamo bisogno della meccanica ondulatoria, con le sue enormi complicazioni?
14. Si pongano a confronto la teoria di Bohr e la meccanica ondulatoria. Per quali aspetti esse concordano? In che cosa invece differiscono?
15. Come si potrebbe evidenziare in laboratorio che l'atomo è dotato di un momento angolare? E che possiede un momento di dipolo magnetico?
16. Perché non si osserva la quantizzazione spaziale in una trottola che gira?
17. Il momento angolare dell'elettrone nell'atomo d'idrogeno è quantizzato. Perché non è quantizzata anche la quantità di moto? (*Suggerimento*: Si considerino le implicazioni del principio di indeterminazione.)
18. Il momento angolare è un vettore e ci si potrebbe quindi aspettare che richieda per essere descritto tre numeri quantici, relativi alle tre direzioni spaziali del vettore. Invece, per un atomo, sono sufficienti due numeri quantici per caratterizzare il momento angolare. Si spieghi come mai.

19. Si giustifichi questa affermazione: "Nell'effetto Einstein - De Haas si deve conservare il momento angolare della barra di ferro nella sua totalità, quando viene magnetizzata d'improvviso."
20. Siete in grado di confermare che, nell'esperimento di Einstein-De Haas (vedi esempio 5), il periodo di rotazione previsto per il cilindro dipende solo dal raggio del cilindro e non, per esempio, dalla sua lunghezza? Che ipotesi sono state assunte nel ricavare l'espressione del periodo di rotazione?
21. Si verifichi che le direzioni delle frecce nella figura 10*b*, rappresentanti la corrente nel solenoide, il campo magnetico, i momenti angolari atomici e il verso di rotazione del cilindro, sono coerenti tra di loro.
22. L'effetto Einstein - De Haas costituisce una prova che il momento angolare è quantizzato?
23. Un fascio di luce polarizzata circolarmente, visto come un flusso di fotoni con spin allineati, può esercitare un momento di torsione su uno schermo che lo assorbe? Si metta in luce l'analogia con l'esperienza di Einstein - De Haas.
24. In un esperimento di Stern e Gerlach si usa un fascio di atomi neutri di argento. Qual è l'origine della forza e della coppia di forze che agiscono sull'atomo? In che modo l'atomo ne subisce l'influenza?
25. In un esperimento di Stern e Gerlach, che cosa determina il numero di sottofasci in cui si divide il fascio di atomi neutri?
26. Se in un esperimento di Stern e Gerlach un fascio di ioni viene suddiviso in cinque fasci componenti, che numero quantico possiede ciascuno ione per il momento angolare?
27. In un apparato per l'esperimento di Stern e Gerlach, è possibile realizzare una configurazione del campo magnetico in cui il campo stesso sia nullo lungo la direzione del fascio, ma non sia nullo il gradiente? In caso affermativo sapreste progettare un elettromagnete che produca un campo così configurato?
28. Gli atomi d'argento nell'esperimento di Stern e Gerlach dell'esempio 6 non sono carichi. Si supponga che un atomo d'argento dell'apparato perda improvvisamente un elettrone, trasformandosi in uno ione d'argento. Quali sarebbero la natura e l'intensità relativa delle forze che agirebbero su di esso (*a*) prima e (*b*) dopo l'evento?
29. Come arriviamo alla conclusione che il numero quantico magnetico di spin m_s può assumere solo i valori $\pm{}^1/_2$? Che genere di esperimenti avvalora questa conclusione?
30. Perché il momento magnetico di spin dell'elettrone è diretto in verso opposto al suo momento angolare di spin?
31. Si discuta quanto può essere valida l'analogia della Terra che ruota attorno al Sole accanto al moto di rivoluzione dell'elettrone attorno al protone di un atomo d'idrogeno.
32. Un atomo, che sia dotato di un momento angolare nullo, presenta una simmetria sferica quando si tratti di interazioni con altri atomi. Lo si potrebbe chiamare «atomo a palla di biliardo». Si giustifichi quest'appellativo.
33. "Se il momento angolare degli elettroni negli atomi non fosse quantizzato, la tavola periodica degli elementi non sussisterebbe nella sua forma." Si commenti questa affermazione.
34. Come cambierebbero le proprietà dell'elio se l'elettrone non fosse dotato di spin, se cioè i numeri quantici attivi fossero soltanto n, l ed m_l?
35. Possiamo affermare che l'insieme dei numeri quantici necessari per una descrizione completa del moto dell'elettrone nell'atomo d'idrogeno equivale al numero di gradi di libertà posseduti dall'elettrone. Quant'è questo numero? Come lo si può giustificare?
36. Si definiscano e si distinguano i termini funzione d'onda, densità di probabilità e densità radiale di probabilità.
37. Che dimensioni e che unità di misura SI hanno la funzione d'onda, la densità di probabilità e la densità radiale di probabilità? Sono le dimensioni che vi aspettavate?
38. In un atomo d'idrogeno nello stato caratterizzato da $l = 1$, i vettori del momento angolare di spin e del momento angolare di rivoluzione possono essere sia paralleli che antiparalleli. In quale disposizione lo stato corrispondente possiede maggior energia e perché?
39. Come si può spiegare che, nello stato in cui l'atomo d'idrogeno è caratterizzato da $n=2$ ed $l=0$, la densità di probabilità presenta un massimo in corrispondenza di $r=0$, mentre la densità radiale di probabilità è nulla in quel punto? Si veda la figura 17.
40. La figura 18*a* illustra le tre densità di probabilità per l'atomo d'idrogeno caratterizzato da $n=2$ ed $l=1$. Che cosa stabilisce la direzione nello spazio da noi scelta per l'asse z?
41. Si considerino le tre rappresentazioni a punti della funzione densità di probabilità nella figura 18*a*, ciascuna delle quali è una figura di rivoluzione attorno all'asse z. Trovate che esista qualche nesso tra queste figure e il modello vettoriale semiclassico dell'atomo per il caso in cui $l=1$ (fig. 9)?
42. Si usi il principio d'indeterminazione di Heisenberg per dimostrare che la densità di probabilità nello stato in cui $l=2$ ha simmetria cilindrica attorno all'asse z.
43. Si spieghi come mai l'interazione tra il moto di spin e quello di rivoluzione dell'elettrone di valenza nel sodio porti alla separazione delle righe spettrali, producendo il noto doppietto del sodio (fig. 19).

PROBLEMI

Paragrafo 51-1 La teoria di Bohr

1. (*a*) Per sostituzione diretta dei valori numerici delle costanti fondamentali, si verifichi che l'energia dello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno vale -13.6 eV; si veda l'equazione 18. (*b*) Analogamente, dall'equazione 17 si dimostri che il valore della costante di Rydberg è 0.01097 nm^{-1}. (*c*) Si controlli anche il valore numerico di a_0, calcolandolo direttamente dall'espressione data nell'equazione 19.
2. Si risponda alle domande dell'esempio 2, facendo riferimento però alla serie di Lyman.
3. Usando la formula di Balmer - Rydberg, equazione 3, calcolare le cinque maggiori lunghezze d'onda della serie di Balmer.
4. Quali sono (*a*) la lunghezza d'onda, (*b*) la quantità di moto e (*c*) l'energia del fotone emesso quando l'atomo di idrogeno subisce una transizione dallo stato $n = 3$ allo stato $n = 1$?
5. Mostrare su un diagramma dei livelli energetici dell'idrogeno i numeri quantici corrispondenti a una transizione in cui la lunghezza d'onda del fotone emesso sia di 121.6 nm.
6. (*a*) Se il momento angolare della Terra, dovuto al suo moto di rivoluzione intorno al Sole, fosse quantizzato secondo la

ISBN 88-408-0777-2

relazione di Bohr $L = nh/2\pi$, quale sarebbe il numero quantico? (*b*) Nel caso che esista, potrebbe tale quantizzazione essere messa in evidenza?

7. Si calcoli l'energia di legame dell'atomo d'idrogeno nel suo primo stato eccitato.
8. Trovare il valore del numero quantico per un atomo d'idrogeno avente il raggio orbitale pari a 847 pm.
9. Un atomo di idrogeno emette luce di lunghezza d'onda pari a 1281.8 nm. (*a*) Quale transizione dell'atomo d'idrogeno è responsabile di tale radiazione? (*b*) A quale serie appartiene tale radiazione? (*Suggerimento*: Si veda la figura 2.)
10. Un atomo d'idrogeno viene eccitato da uno stato $n = 1$ a un altro con $n = 4$. (*a*) Calcolare l'energia che deve venire assorbita dall'atomo. (*b*) Calcolare e riportare in un diagramma dei livelli energetici le diverse energie dei fotoni che possono essere emessi se l'atomo ritorna alla fine al suo stato con $n = 1$.
11. La vita media di un elettrone in uno stato dell'idrogeno caratterizzato da $n = 2$ è di circa 10 ns. Quant'è l'incertezza sul valore di energia di questo stato $n = 2$? La si confronti con l'energia dello stato.
12. Una molecola di un gas biatomico è formata da due atomi di massa m posti a distanza fissa d e ruotanti attorno a un asse, come illustrato nella figura 22. Assumendo che il momento angolare sia quantizzato come nell'atomo di Bohr, determinare (*a*) le possibili velocità angolari e (*b*) le possibili energie rotazionali quantizzate. (*c*) Calcolare, in base a questo modello, l'energia in eV dello stato fondamentale di una molecola di O_2, per la quale $d = 121$ pm e $m = 16.0$ u.

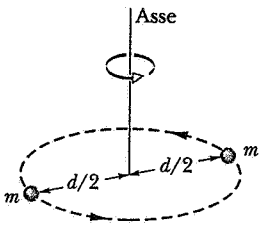


Figura 22 Problema 12.

13. Se un elettrone ruota in un'orbita con frequenza ν_0, l'elettromagnetismo classico prevede che esso irraggi energia, non solo a tale frequenza, ma anche a $2\nu_0$, $3\nu_0$, $4\nu_0$, ecc. Mostrare che ciò è anche previsto dalla teoria di Bohr dell'atomo d'idrogeno nel caso limite di numeri quantici elevati.
14. Nella tabella 2 mostrare che la quantità nell'ultima colonna è data da

$$\frac{100(\nu - \nu_0)}{\nu} \approx \frac{150}{n}$$

per numeri quantici elevati.

15. Un neutrone di energia cinetica pari a 6.0 eV entra in collisione con un atomo d'idrogeno a riposo nel suo stato fondamentale. Mostrare che la collisione deve essere elastica (cioè si deve conservare l'energia cinetica). (*Suggerimento*: Mostrare che non può essere elevato a uno stato di eccitazione superiore in seguito alla collisione.)
16. (*a*) Calcolare, secondo il modello di Bohr, la velocità dell'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno. (*b*) Calcolare la corrispondente lunghezza d'onda di De Broglie. (*c*) Confrontando le risposte (*a*) e (*b*), si trovi una relazione tra la lunghezza d'onda λ di De Broglie e il raggio a_0 dell'orbita di Bohr nello stato fondamentale.
17. Secondo il principio di corrispondenza, quando $n \to \infty$ ci aspettiamo nell'atomo di Bohr risultati classici. Di conseguenza la lunghezza d'onda di De Broglie associata all'elettrone (un risultato quantistico) dovrebbe diventare più piccola rispetto al raggio dell'orbita di Bohr man mano che n cresce. E in effetti ci aspettiamo che $\lambda/r \to 0$ quando $n \to \infty$. Si dimostri che questa previsione è esatta.
18. Un atomo di idrogeno, avente un'*energia di legame* (cioè l'energia richiesta per estrarre un elettrone) di 0.85 eV, compie una transizione a uno stato caratterizzato da una *energia di eccitazione* (cioè la differenza di energia tra lo stato considerato e lo stato fondamentale) di 10.2 eV. (*a*) Trovare l'energia del fotone emesso. (*b*) Riportare questa transizione in un diagramma dei livelli energetici dell'idrogeno, indicando i numeri quantici corrispondenti.
19. In base al diagramma dei livelli energetici dell'idrogeno, si giustifichi l'osservazione secondo cui la frequenza della seconda riga della serie di Lyman è la somma delle frequenze della prima riga della serie di Lyman e della prima riga della serie di Balmer. Questo è un esempio del *principio di combinazione di Ritz*, scoperto empiricamente. Si usi il diagramma per trovare qualche altra combinazione valida.
20. Calcolare la velocità di rinculo dell'atomo d'idrogeno, considerato inizialmente a riposo, se in esso l'elettrone opera una transizione direttamente da $n = 4$ allo stato fondamentale. (*Suggerimento*: Si applichi il principio di conservazione della quantità di moto.)
21. (*a*) Quanta energia ci vuole per rimuovere l'elettrone da uno ione He^+ nel suo stato fondamentale? (*b*) E per allontanarlo da uno ione Li^{2+} nello stato con $n = 3$? (*Suggerimento*: Vedere l'equazione 18.)
22. Nello spettro dello He^+ emesso dalle stelle si trova la cosiddetta serie di Pickering. Viene irraggiata quando l'elettrone dello He^+ salta da un livello superiore al livello caratterizzato da $n = 4$. (*a*) Dimostrare che le lunghezze d'onda delle righe di questa serie sono date da

$$\lambda = \frac{1}{R}\,\frac{4n^2}{n^2 - 16},$$

in cui $n = 5, 6, 7, \ldots$. (*b*) Calcolare la lunghezza d'onda della prima riga della serie e il limite della serie. (*c*) In che regioni dello spettro cade questa serie?

23. Si dimostri che nel modello semiclassico di Bohr per gli atomi tipo idrogeno (cioè con un solo elettrone) (*a*) le velocità orbitali dell'elettrone sono quantizzate secondo l'espressione $v_n = (Ze^2/2\epsilon_0 h)(1/n)$ e (*b*) i momenti angolari di rivoluzione sono quantizzati come $L_n = (h/2\pi)n$.
24. Nello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno, secondo la teoria di Bohr, quanto valgono (*a*) il numero quantico fondamentale, (*b*) il raggio dell'orbita, (*c*) il momento angolare, (*d*) la quantità di moto, (*e*) la velocità angolare, (*f*) la velocità, (*g*) la forza agente sull'elettrone, (*h*) l'accelerazione dell'elettrone, (*i*) l'energia cinetica, (*j*) l'energia potenziale e (*k*) l'energia totale?
25. Come dipendono dal numero quantico n le grandezze elencate da (*b*) a (*k*) nel problema 24?
26. Si supponga di voler verificare la possibilità che gli elettroni si muovano attorno agli atomi su orbite «guardandoli» con

fotoni di lunghezza d'onda sufficientemente corta, poniamo 10.0 pm. (*a*) Che energia dovrebbero avere questi fotoni? (*b*) Quanta energia trasferirebbe un fotone a un elettrone libero in un impatto frontale del tipo Compton? (*c*) Cosa vi suggerisce questa risposta sulla possibilità di confermare il moto orbitale dell'elettrone semplicemente «guardando» l'elettrone in due o più punti del suo cammino? Si assuma che la velocità dell'elettrone sia $0.10c$.

27. Bohr propose che, in alternativa al principio di corrispondenza, l'espressione di quantizzazione per il momento angolare (eq. 20) venisse assunta come un postulato di base. Partendo da questa premessa e facendo uso di soli risultati classici, si ricavi l'espressione di Bohr per i livelli di energia degli stati stazionari nell'atomo d'idrogeno (eq. 18).
28. (*a*) Calcolare gli intervalli di lunghezza d'onda su cui si estendono le serie di Balmer, di Lyman e di Paschen. (L'intervallo compreso cioè tra la maggior lunghezza d'onda e il limite della serie.) (*b*) Trovare i corrispondenti intervalli di frequenza.

Paragrafo 51-3 Momento angolare

29. Si verifichi che $\mu_B = 9.274 \times 10^{-24}$ J/T $= 5.788 \times 10^{-5}$ eV/T, come riportato nell'equazione 30.
30. Se un elettrone di un atomo d'idrogeno si trova nello stato caratterizzato da $l = 5$, qual è il minor angolo possibile tra L e L_Z?
31. Per un atomo d'idrogeno nel suo stato caratterizzato da $l = 3$, calcolare i valori permessi per (*a*) L_z, (*b*) μ_z, e (*c*) θ. Trovare inoltre i moduli di (*d*) L e (*e*) $\boldsymbol{\mu}$. Laddove è il caso, si esprimano le risposte in termini di $\hbar$ e di μ_B.
32. Si dimostri che i momenti magnetici degli elettroni nelle varie orbite di Bohr sono dati, secondo la teoria di Bohr, da

$$\mu = n\mu_B$$

in cui μ_B rappresenta il magnetone di Bohr e n = 1, 2, 3, . . . (*b*) Che concordanza c'è tra questi e i valori effettivi?

33. (*a*) Riprendendo il problema 12 sulla molecola biatomica e applicando il momento angolare quantizzato come nelle equazioni 23 e 24, si dimostri che i livelli di energia possono essere espressi come

$$E_l = \frac{h^2 l(l+1)}{4\pi^2 m d^2}, \qquad l = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

(*b*) Calcolare le energie dei tre livelli più bassi per la molecola di O_2, in cui i due atomi giacciono a una distanza l'uno dall'altro di 121 pm. La massa dell'ossigeno è 16.0 u. Si confronti il risultato col problema 12.

34. Mostrare che l'equazione 28 è una versione plausibile del principio di indeterminazione $\Delta p \cdot \Delta x = h/2\pi$. (*Suggerimento*: Si moltiplichi e si divida per r; si sostituisca mv a p e mvr a L.)

Paragrafo 51-4 L'esperimento di Stern e Gerlach

35. Delle tre componenti di L, una, L_z, è quantizzata, secondo l'equazione 25. Tenendo conto contemporaneamente delle restrizioni previste dalle equazioni 23 e 24, dimostrare che, riguardo le altre due componenti di L, non si può dedurre altro che

$$\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \sqrt{l(l+1) - m_l^2}\ \hbar.$$

Si noti che ciascuna delle due componenti non è, se presa separatamente, quantizzata. Si mostri anche che

$$\sqrt{l}\,\hbar \le \sqrt{L_x^2 + L_y^2} \le \sqrt{l(l+1)}\,\hbar.$$

Si confrontino questi risultati con la figura 9.

36. Si supponga che un atomo d'idrogeno (nel suo stato fondamentale) percorra 82 cm in una direzione perpendicolare a un campo magnetico dotato di un gradiente pari a 16 mT/m. (*a*) Qual è la forza che si esercita sull'atomo dovuta al momento magnetico dell'elettrone, che assumiamo pari a 1 magnetone di Bohr? (*b*) Trovare il suo spostamento verticale se la velocità è di 970 m/s.
37. Calcolare l'accelerazione dell'atomo d'argento mentre passa attraverso il magnete deflettente nell'esperimento di Stern e Gerlach dell'esempio 6.
38. Si assuma che il campo magnetico **B**, nell'esperienza di Stern e Gerlach che abbiamo descritto per gli atomi d'argento neutri, valga in modulo 520 mT. (*a*) Qual è la differenza di energia tra gli orientamenti degli atomi d'argento nei due sottofasci? (*b*) Che frequenza avrebbe una radiazione capace di indurre una transizione tra questi due stati? (*c*) Qual è la relativa lunghezza d'onda e a che banda dello spettro elettromagnetico appartiene? Il momento magnetico di un atomo d'argento vale 1 magnetone di Bohr.

Paragrafo 51-6 I possibili stati dell'atomo d'idrogeno

39. Scrivere i numeri quantici per tutti gli stati dell'atomo d'idrogeno che appartengono al sottostrato caratterizzato da $n = 4$ ed $l = 3$.
40. Di un certo stato dell'atomo d'idrogeno si sa che ha per numero quantico l il valore 3. Quali sono i possibili valori per i numeri quantici n, m_l, m_s?
41. Un determinato stato dell'atomo d'idrogeno possiede un valore massimo di $+4$ per m_l. Che cosa si può dire per tutti gli altri numeri quantici?
42. Quanti stati dell'atomo d'idrogeno possono sussistere quando n è pari a 5? Come sono distribuiti tra i vari sottostrati?
43. Quanto valgono i numeri quantici n, l, m_l, m_s per i due elettroni dell'atomo di elio nel suo stato fondamentale?
44. Calcolare i valori dei due possibili angoli tra il vettore momento angolare di spin dell'elettrone e il campo magnetico nell'esempio 6. Si tenga presente che il momento angolare *orbitale* dell'elettrone di valenza è zero.
45. Stabilite se sono vere o false le seguenti affermazioni sui numeri quantici n, l ed m_l. (*a*) Uno di questi sottostrati non può esistere: $n = 2$, $l = 1$; $n = 4$, $l = 3$; $n = 3$, $l = 2$; $n = 1$, $l = 1$. (*b*) Il numero di valori di m_l ammessi dipende solo da l e non da n. (*c*) Lo strato $n = 4$ contiene quattro sottostrati. (*d*) Il valore più piccolo di n, che può sussistere per una dato l, è $l+1$. (*e*) Tutti gli stati caratterizzati da $l = 0$ hanno anche $m_l = 0$, indipendentemente dal valore di n. (*f*) Ciascuno strato contiene n sottostrati.
46. Qual è la lunghezza d'onda di un fotone che induce una transizione dello spin di un elettrone dall'orientamento parallelo a quello antiparallelo in un campo magnetico di intensità 190 mT? Si assuma che sia $l = 0$.
47. Il protone, come l'elettrone, ha spin $^1/_2$. Nell'atomo d'idrogeno al suo stato fondamentale, con $n = 1$ ed $l = 0$, sussistono due livelli di energia, a seconda che gli spin dell'elettrone e del protone abbiano lo stesso verso o verso opposto. Lo stato in cui gli spin posseggono versi opposti presenta una maggiore energia. Se un atomo si trova in questo stato e uno degli spin si «inverte», la piccola differenza di energia viene espulsa sot-

ISBN 88-408-0777-2

to forma di fotone della lunghezza d'onda di 21 cm. Questo processo spontaneo di inversione è molto lento. essendo circa 10^7 anni la vita media per lo stato di maggior energia. Tuttavia i radioastronomi osservano questa radiazione di 21 cm proveniente dallo spazio interstellare, dove la densità dell'idrogeno è così ridotta che un atomo ha il tempo di effettuare questa transizione prima che venga disturbato da una collisione con altri atomi. Si calcoli il campo magnetico efficace (dovuto al momento di dipolo magnetico del protone) che sente l'elettrone nell'emettere questa radiazione da 21 cm.

48. Dimostrare che il numero degli stati possibili in qualsiasi strato è $2n^2$.

Paragrafo 51-7 Lo stato fondamentale dell'idrogeno

49. Nello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno, valutare il quadrato della funzione d'onda, $\psi^2(r)$, e la densità radiale di probabilità $P_r(r)$ per le posizioni (*a*) $r = 0$ e (*b*) $r = a_0$. Spiegare il significato di queste quantità.
50. Nella figura 16*b* verificare i valori riportati sul grafico per (*a*) $r = 0$, (*b*) $r = a_0$, (*c*) $r = 2a_0$.
51. Trovare il rapporto tra la probabilità di incontrare un elettrone nell'atomo d'idrogeno in un guscio sottile a distanza di 1 raggio di Bohr e quella di incontrarlo in un ugual guscio posto a distanza doppia.
52. Un volumetto sferico di raggio $0.05a_0$ si trova a distanza a_0 dal nucleo di un atomo d'idrogeno nel suo stato fondamentale. Calcolare la probabilità che l'elettrone si trovi dentro a questa sferetta, assumendo che in essa ψ sia costante.
53. In un atomo d'idrogeno allo stato fondamentale calcolare la probabilità di trovare l'elettrone nel guscio compreso tra due sfere di raggio $1.00a_0$ e $1.01a_0$.
54. Negli atomi esiste una probabilità finita, per quanto piccolissima, che in un certo istante un elettrone orbitale venga a trovarsi davvero dentro al nucleo. E in effetti alcuni nuclei instabili approfittano di questa occasionale posizione dell'elettrone per dar luogo a quella forma di decadimento radioattivo detta *cattura elettronica*. Assumendo che il protone in sé costituisca una sfera di 1.1×10^{-15} m di raggio, e che la funzione d'onda dell'elettrone dell'atomo d'idrogeno valga fino al centro del protone, si usi la funzione d'onda dello stato fondamentale per calcolare la probabilità che l'elettrone dell'atomo d'idrogeno si trovi nel suo nucleo. (*Suggerimento*: Quando $x \ll 1$, $e^{-x} \approx 1$).
55. Si ripeta il problema 54 per un elettrone che si trova nello stato caratterizzato da $n = 2$ ed $l = 0$; vale a dire, si calcoli la probabilità che un tale elettrone si trovi dentro al protone, di raggio 1.1 fm, che costituisce il nucleo dell'atomo d'idrogeno.
56. (*a*) Dimostrare che, nello stato fondamentale dell'atomo d'idrogeno, la probabilità P che l'elettrone giaccia entro una sfera di raggio r è data da

$$P = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2),$$

in cui $x = r/a_0$. (*b*) Valutare la probabilità che, nello stato fondamentale, l'elettrone giaccia entro una sfera di raggio a_0.

57. Si usi il risultato del problema 56 per valutare la probabilità che l'elettrone di un atomo d'idrogeno nel suo stato fondamentale si trovi nel guscio compreso tra due sfere di raggio $r = a_0$ ed $r = 2a_0$.
58. In un atomo d'idrogeno allo stato fondamentale si calcoli il raggio della sfera per il quale la probabilità che l'elettrone si trovi all'interno eguaglia la probabilità che si trovi all'esterno. (*Suggerimento*: Si veda il problema 56.)

Paragrafo 51-8 Gli stati eccitati dell'idrogeno

59. Per lo stato caratterizzato da $n = 2$ ed $l = 0$, (*a*) localizzare i due punti di massimo per la curva di densità radiale di probabilità di figura 17*b*, e (*b*) calcolare i valori della funzione in tali punti; si confronti con la figura 17*b*.
60. Usando l'equazione 46 dimostrare che, per l'atomo d'idrogeno nello stato in cui $n = 2$ ed $l = 1$, si ha

$$\int_0^\infty P_r(r)dr = 1.$$

Qual è l'interpretazione fisica di questo risultato?

61. Per un atomo d'idrogeno nello stato caratterizzato da $n = 2$ ed $l = 0$, calcolare la probabilità di trovare l'elettrone tra le due sfere di raggio $r = 5.00a_0$ ed $r = 5.01a_0$.
62. Per un atomo d'idrogeno nello stato caratterizzato da $n = 2$ ed $l = 0$, qual è la probabilità di trovare l'elettrone in una qualsiasi posizione entro il minore dei due punti di massimo della sua funzione densità radiale di probabilità? Si veda la figura 17*b*.

Paragrafo 51-9 Particolarità sulla struttura atomica

63. Il potassio ($Z = 19$), come il sodio ($Z = 11$), è un metallo alcalino; il suo elettrone di valenza si muove attorno al sistema completo di 18 elettroni che caratterizza l'argo. Come nel sodio, esiste un doppietto del potassio, le cui lunghezze d'onda sono 764.5 nm e 769.9 nm. I numeri quantici dei livelli che producono queste righe sono esattamente gli stessi del sodio (fig. 19), tranne che $n = 4$. Si calcoli (*a*) la separazione di energia tra i due stati più elevati e (*b*) la differenza di energia tra lo stato più eccitato e quello fondamentale.
64. Le lunghezze d'onda delle righe del doppietto del sodio (fig. 19) sono 588.995 nm e 589.592 nm. (*a*) Qual è la differenza in energia tra i due livelli più alti della figura? (*b*) Questa differenza di energia nasce perché il momento di dipolo magnetico dell'elettrone può essere orientato sia in modo parallelo sia in modo antiparallelo rispetto al campo magnetico associato al moto orbitale dell'elettrone. Si impieghi il risultato appena trovato per calcolare l'intensità di questo campo magnetico interno. Il momento di dipolo magnetico di spin dell'elettrone ha il valore assoluto di 1 magnetone di Bohr.
65. Applicare il modello di Bohr all'«atomo muonico», consistente in un nucleo di carica Ze e in un muone negativo (una particella elementare dotata di carica $q = -e$ e di massa $m = 207m_e$, dove m_e rappresenta la massa dell'elettrone) che gli ruota intorno. Calcolare (*a*) la distanza nucleo - muone nella prima orbita di Bohr, (*b*) l'energia di ionizzazione, e (*c*) la lunghezza d'onda del fotone di massima energia che può essere emesso. Si assuma che il muone ruoti attorno a un nucleo d'idrogeno (Z = 1). Si veda Hughes V.W., *The Muonium Atom*, «Scientific American», Apr 1966, 93.
66. Applicare il modello di Bohr all'«atomo positronico», consistente in un elettrone negativo e in uno positivo, il *positrone*, che ruotano attorno al centro di massa del sistema, posto a ugual distanza da entrambi. (*a*) Che relazione esiste tra lo spettro emesso da questo sistema e lo spettro dell'idrogeno? (*b*) Qual è il raggio dell'orbita allo stato fondamentale? (*Suggerimento*: Calcolare la massa ridotta dell'atomo.) Si veda Burhop E.H.S., *Exotic Atoms*. «Contemporary Physics», Lug 1970, 335.

Capitolo 52

FISICA ATOMICA

Nei tre capitoli precedenti abbiamo trattato le basi della meccanica ondulatoria e abbiamo utilizzato i suoi princìpi per indagare la struttura dell'atomo d'idrogeno. In questo capitolo amplieremo questo argomento analizzando la struttura degli atomi più complessi dell'idrogeno.
Cominceremo col considerare l'emissione dei raggi X da parte degli atomi, fenomeno che storicamente è valso a fornire il primo strumento determinante per la misura del numero di elettroni contenuti in un atomo. Passeremo poi alle regole per costruire lo schema degli atomi dotati di più di un elettrone, constatando come tali regole e le strutture che ne nascono determinano la posizione degli elementi nel noto sistema periodico. Faremo tesoro delle informazioni tratte sulla struttura atomica per esaminare il funzionamento del laser a elio - neon, e concluderemo con una breve panoramica sul modo di estendere le conoscenze della struttura atomica e delle funzioni d'onda all'analisi strutturale delle molecole.

52-1 LO SPETTRO DEI RAGGI X

Abbiamo avuto a che fare finora con il comportamento di singoli elettroni all'interno degli atomi, sia con l'unico elettrone dell'idrogeno, sia con il solo elettrone di valenza del sodio. Spostiamo ora la nostra attenzione al comportamento degli elettroni più profondamente inseriti nella struttura atomica. Ci muoviamo da un intervallo di energie di legame relativamente piccole (5 eV, il lavoro richiesto, ad esempio, per allontanare l'elettrone di valenza dall'atomo di sodio) verso energie più alte (70 keV, l'energia necessaria per rimuovere gli elettroni più interni dall'atomo di tungsteno). Le corrispondenti radiazioni, per quanto facciano tutte parte ovviamente dello spettro elettromagnetico, differiscono di molto in lunghezza d'onda: abbiamo per il doppietto del sodio, per esempio, 6×10^{-7} m, mentre una delle righe caratteristiche del tungsteno arriva a 2×10^{-11} m, realizzando così un rapporto di circa 30000; nel secondo caso ci troviamo nel dominio dei raggi X, di cui parleremo adesso.

È nota l'utilità di questo tipo di radiazione nella diagnostica e nella terapia medica, così come nelle applicazioni industriali, quali l'esame delle giunzioni di saldatura nelle condutture metalliche. Nel paragrafo 47-4 abbiamo anche fatto cenno ai raggi X come strumento per indagare la struttura atomica dei materiali cristallini. E anche la struttura di sostanze complesse come l'insulina o il DNA è stata analizzata con metodi analoghi. In astronomia, i satelliti muniti di sensori a raggi X ci hanno trasmesso una visione completamente nuova dell'universo attraverso le immagini delle radiazioni X emesse da stelle e galassie.

Abbiamo visto nel paragrafo 47-4 che si generano raggi X quando elettroni dotati di energia cinetica investono un bersaglio solido e ne vengono frenati. La figura 1 mostra lo spettro di lunghezze d'onda dei raggi X prodotti quando un fascio di elettroni con energia di 35 keV colpisce una lamina di molibdeno.

Lo spettro continuo dei raggi X

Prendiamo in considerazione dapprima la parte continua dello spettro di figura 1, senza badare, per l'intanto, ai due incisivi picchi che ne emergono. Si consideri

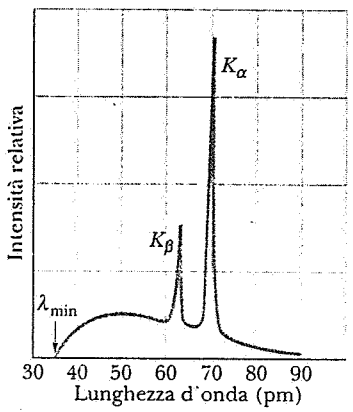


Figura 1 Lo spettro dei raggi X prodotti quando elettroni dotati di energia pari a 35 keV investono un bersaglio di molibdeno.

ISBN 88-408-0777-2

un elettrone, dotato di energia cinetica K, che viene deviato dal nucleo di uno degli atomi che costituiscono il bersaglio di molibdeno, come illustrato nella figura 2. In una collisione simile viene trasferita quantità di moto all'atomo da parte dell'elettrone, che perde quindi energia. (Dato che l'atomo è molto più massiccio, la quantità di moto ceduta dall'elettrone si traduce in un'energia cinetica, per l'atomo, trascurabile.) L'energia persa dall'elettrone si manifesta sotto forma di un fotone X di energia $h\nu$, che viene irraggiato dal luogo d'impatto. Questo processo viene chiamato *radiazione di frenamento*, talvolta indicata col corrispondente termine tedesco di *bremsstrahlung*, ed è responsabile dello spettro continuo dei raggi X.

Si supponga che un fascio di elettroni venga accelerato da una differenza di potenziale V e incida su un bersaglio spesso. Attraverso il processo di frenamento entro la struttura del bersaglio, gli elettroni possono perdere una qualunque quantità di energia da 0 fino alla loro energia massima, pari a Ve. I fotoni di frenamento presentano di conseguenza uno spettro continuo di energia da 0 fino a Ve.

Una caratteristica importante dello spettro continuo riportato nella figura 1 è il valore di soglia che si verifica in modo netto alla lunghezza d'onda λ_{min}, al di sotto della quale viene a mancare del tutto l'emissione radiativa. Questo valore minimo di lunghezza d'onda corrisponde a quell'evento di collisione in cui un elettrone incidente (dotato inizialmente della massima energia cinetica Ve) perde *interamente* la sua energia in un singolo impatto, irraggiandola sotto forma di un solo fotone. Di modo che

$$eV = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}},$$

ossia

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV}. \qquad (1)$$

Dall'equazione 1 si trae che, quando $h \to 0$, anche $\lambda_{min} \to 0$, come prevede la teoria classica. L'esistenza di una lunghezza d'onda di soglia è un effetto quantistico.

Si noti che, cambiando materiale, per esempio rame al posto di molibdeno, la forma generale e l'intensità dello spettro continuo possono mutare, ma la lunghezza d'onda di soglia resta la stessa. Questa lunghezza d'onda dipende solo dall'energia cinetica degli elettroni che bombardano il bersaglio e non ha nulla a che fare con la sostanza di cui quest'ultimo è costituito.

Lo spettro caratteristico dei raggi X

Rivolgiamo ora la nostra attenzione ai due picchi di figura 1, indicati con K_α e K_β. Questi picchi sono caratteristici del materiale di cui è costituito il bersaglio e, insieme con altri picchi che compaiono a lunghezze d'onda maggiori, formano lo *spettro X caratteristico* dell'elemento in questione.

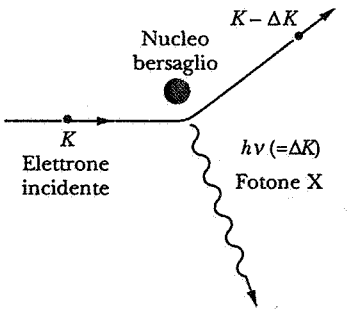


Figura 2 Un elettrone che passa vicino al nucleo di un atomo bersaglio viene accelerato e irraggia un fotone, perdendo una parte della sua energia cinetica nel processo.

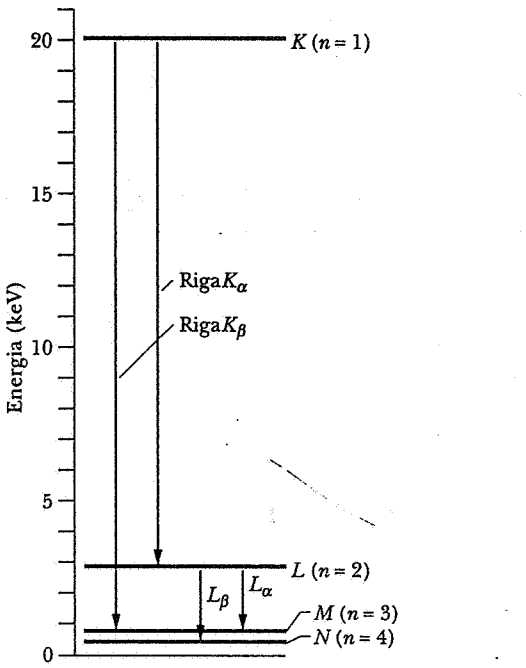


Figura 3 Diagramma dei livelli atomici di energia per il molibdeno, in cui sono indicate le transizioni che generano i raggi X caratteristici dell'elemento. (Tutti i livelli, eccetto il livello K, contengono un certo numero di componenti molto vicine, che non si possono distinguere nella figura.)

Vediamo come si creano questi fotoni X caratteristici. (1) Un elettrone incidente dotato di energia cinetica colpisce un atomo nel bersaglio ed espelle un suo elettrone che risiede negli strati più profondi dell'atomo. Se l'elettrone espulso si trovava nello strato caratterizzato da $n = 1$ (chiamato per ragioni storiche strato K), rimane un posto libero, una «lacuna» come si suol dire, nello strato K. (2) Uno degli elettroni più esterni si sposta per colmare questa lacuna e durante il processo l'atomo emette un fotone X caratteristico. Se l'elettro-

ISBN 88-408-0777-2

ne di rimpiazzo proviene dallo strato L ($n = 2$), genera la riga K_α; se invece proviene dallo strato immediatamente più esterno (chiamato M), dà luogo alla riga K_β, e così via. Naturalmente queste transizioni lasciano a loro volta una lacuna nello strato L o M, che verrà colmata da un elettrone ancora più esterno, che così facendo provocherà l'emissione di un'altra riga caratteristica dello spettro.

La figura 3 mostra un diagramma dei livelli di energia atomica nella regione dei raggi X, relativi al molibdeno, l'elemento considerato nella figura 1. La linea di base ($E = 0$) rappresenta l'energia dell'atomo neutro di molibdeno nel suo stato fondamentale. Il livello indicato con K ($E = 20$ keV) si riferisce a quell'energia dell'atomo di molibdeno per il quale una lacuna è localizzata nello strato K. In modo simile, la linea L ($E = 2.7$ keV) è il livello di energia relativo a una lacuna nello strato L, e via dicendo. Si noti che, nel rappresentare i livelli di energia per l'atomo d'idrogeno (vedi fig. 4 del cap. 51), abbiamo scelto un livello di base diverso. Piuttosto che all'atomo nel suo stato fondamentale, in quel caso il livello con $E = 0$ corrispondeva all'atomo da cui l'elettrone era stato allontanato a distanza infinita. Nella pratica, non importa quale configurazione atomica scegliamo per rappresentare il livello di base a energia convenzionalmente nulla: ciò che è fisicamente significativo sono le differenze di energia tra i vari livelli, che sono sempre le stesse indipendentemente dalla scelta del livello $E = 0$.

Le transizioni K_α e K_β della figura 3 spiegano l'origine dei due picchi presenti nella figura 1. La riga K_α ad esempio si genera quando un elettrone dello strato L del molibdeno, saltando *verso l'alto* nel diagramma dei livelli di energia, va a riempire una lacuna nello strato K. Corrisponde ad affermare che una lacuna, muovendosi *verso il basso* nel diagramma, passa dallo strato K allo strato L. Questo perché è più facile tenere sott'occhio la localizzazione di una sola lacuna piuttosto che di 41 elettroni, quanti sono disponibili nello ione di molibdeno per colmarla. Abbiamo quindi tracciato le frecce nella figura 3 secondo il punto di vista del trasferimento di lacune.

Esempio 1 Calcolare la lunghezza d'onda λ_{min} per lo spettro continuo dei raggi X emessi quando un fascio di elettroni, dotati di energia cinetica pari a 35 keV, colpisce un bersaglio di molibdeno come nella figura 1.

Soluzione Dall'equazione 1 otteniamo

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eV} = \frac{(4.14 \times 10^{-15}\text{eV} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})}{35.0 \times 10^3\ \text{eV}}$$
$$= 3.54 \times 10^{-11}\text{m} = 35.4\ \text{pm}.$$

Questo risultato è in accordo con il valore sperimentale indicato dalla freccetta nella figura 1. Si osservi che l'equazione 1 non contiene riferimenti al materiale del bersaglio; se ne deduce che, dato un certo potenziale di accelerazione, la lunghezza d'onda di soglia resta determinata per qualsiasi bersaglio, indipendentemente dalla sostanza di cui è costituito.

52-2 RAGGI X E CLASSIFICAZIONE PROGRESSIVA DEGLI ELEMENTI

In questo paragrafo illustreremo come i raggi X abbiano contribuito alle nostre conoscenze sulla struttura degli atomi che li emettono e li assorbono. Ci soffermeremo sull'opera svolta dal fisico britannico H.G.J. Moseley,* il quale sviluppò il concetto di numero atomico attraverso lo studio dei raggi X, e diede un significato fisico, basato sulla struttura atomica, all'ordinamento degli elementi nella tavola periodica.

Nella sua elaborazione del concetto di numero atomico, Moseley generò spettri X caratteristici utilizzando quanti più elementi poté - ne provò 38 - come bersagli da sottoporre al bombardamento elettronico in un tubo speciale a raggi X sotto vuoto, da lui stesso progettato. Misurò, per una gran quantità di elementi, le lunghezze d'onda dello spettro caratteristico, utilizzando il metodo della diffrazione da un cristallo, descritto al paragrafo 47-4. Andò alla ricerca, con facile successo, di regolarità aritmetiche nel passare da un elemento all'altro nella tavola periodica. In particolare notò che, riportando su grafico la radice quadrata della frequenza ($\sqrt{\nu} = \sqrt{c/\lambda}$) della riga K_α in funzione della posizione occupata dall'elemento nella tavola periodica, si otteneva una retta. La figura 4 mostra una parte dei dati ottenuti. Vedremo fra poco la logica che consiglia di disporre i dati su diagramma in questo modo e perché ci si debba aspettare una funzione lineare. Questa fu la conclusione che Moseley trasse

* Henry G.J. Moseley affiancò Ernest Rutherford nel laboratorio dell'Università di Manchester nel 1910. Attraverso una brillante serie di esperimenti, Moseley dimostrò che le frequenze X caratteristiche crescevano con regolarità col numero atomico dell'elemento, e fu anche in grado di individuare nelle sequenze alcuni termini mancanti, indizio dell'esistenza di elementi a quel tempo sconosciuti. La sua promettente carriera di ricercatore fu stroncata dalla prima guerra mondiale, quando egli trovò la morte ancora ventisettenne durante la spedizione dei Dardanelli.

 ISBN 88-408-0777-2

dall'esame dell'insieme dei dati nella sua globalità:

Abbiamo qui la prova che esiste nell'atomo un'entità fondamentale, che cresce per gradini regolari passando da un elemento al successivo. Questa entità non può che essere la carica del nucleo atomico centrale.

Il risultato raggiunto da Moseley può essere pienamente apprezzato se poniamo mente allo stato delle conoscenze contemporanee in fatto di struttura atomica (1913). Il modello nucleare dell'atomo era stato presentato da Rutherford solo due anni prima. Ben poco si sapeva sull'ordine di grandezza della carica nucleare e anche sulla disposizione degli elettroni nell'atomo; Bohr pubblicò il primo suo documento sulla struttura atomica proprio in quell'anno. I posti degli elementi nella tavola periodica erano a quel tempo assegnati per lo più in base alla *massa* atomica, quantunque in diversi casi era stato necessario invertire l'ordine di qualche elemento per soddisfare l'evidenza sperimentale delle caratteristiche chimiche. La tavola presentava molte caselle vuote, e per contro era stata via via annunciata la scoperta di un numero sorprendentemente grande di nuovi elementi; gli elementi delle terre rare, per una serie di problemi causati dalle loro proprietà chimiche simili, non avevano ancora trovato nessuna appropriata collocazione.

Grazie al lavoro svolto da Moseley lo spettro caratteristico dei raggi X divenne la caratteristica identificativa universalmente accettata di un elemento. Attraverso questi studi diventò possibile mettere, per così dire, in fila gli elementi, assegnando loro numeri consecutivi e senza la minima necessità di ricorrere alle loro proprietà chimiche.

Non è difficile rendersi conto di come lo spettro X caratteristico metta in evidenza queste regolarità passando da un elemento all'altro, al contrario di quanto faccia lo spettro luminoso. La chiave per identificare un elemento è la carica del suo nucleo, la quale determina il numero di elettroni atomici e in definitiva le proprietà chimiche e fisiche. L'oro per esempio si presenta così come lo conosciamo perché i suoi atomi posseggono una carica nucleare di $+ 79e$. Se la sua carica fosse anche solo di un'unità superiore, non sarebbe oro ma mercurio; se fosse di un'unità in meno, sarebbe platino. Gli elettroni dello strato K, che svolgono una funzione determinante nello stabilire lo spettro X caratteristico, risiedono molto vicino al nucleo e si comportano come sensibili sonde della sua carica. Lo spettro luminoso invece è associato alle transizioni degli elettroni di valenza o comunque più esterni; l'influenza del nucleo su di loro è schermata da tutti i rimanenti elettroni atomici più interni, ciò che rende gli elettroni di valenza poco sensibili alla carica nucleare.

La teoria di Bohr e il diagramma di Moseley

La teoria di Bohr funziona bene per l'atomo d'idrogeno ma è carente per gli atomi aventi più di un elettrone (anche perché non include l'interazione repulsiva tra gli elettroni). Ciò nonostante costituisce un'eccellente base di prima approssimazione per i calcoli relativi al diagramma di Moseley, riportato in figura 4.

Si consideri un elettrone dello strato L di un atomo, in procinto di muoversi per andare a occupare una lacuna nello strato K, e di emettere quindi un fotone K_α nella regione dei raggi X. Applicando la legge di Gauss (eq. 17 del cap. 29), si trova che il campo elettrico nel sito L in cui si trova inizialmente l'elettrone è determinato dalla carica racchiusa in una sfera immaginaria di raggio pari alle coordinate radiali dell'elettrone L. Nella sfera è compresa una carica $+ Ze$ del nucleo e una carica $-e$ dell'unico altro elettrone, che giace nello strato K. Si dice che l'elettrone K «scherma» la carica del nucleo. Ora, un po' per via di questa schermatura e un po' per i riassestamenti che avvengono nell'intera nube elettronica, il numero atomico effettivo da considerare nella transizione risulta essere $Z - b$, ove $b \approx 1$.

La formula di Bohr, che dà la frequenza della radiazione corrispondente a una transizione in un atomo

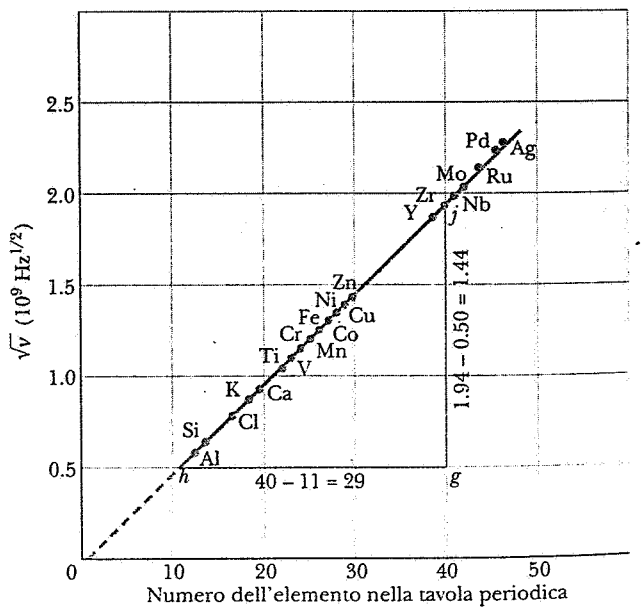


Figura 4 Un diagramma di Moseley delle righe K_α caratteristiche degli spettri X di 21 elementi. La frequenza è dedotta dalle lunghezze d'onda misurate.

ISBN 88-408-0777-2

idrogenoide tra due livelli atomici che differiscono in energia di una quantità ΔE, è

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{m_e e^4 Z^2}{8\epsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (2)$$

ove si è fatto uso, per i livelli di energia, dell'equazione 18 al capitolo 51. Per la transizione K_α della figura 3 possiamo sostituire $(Z - b)$ a Z, il valore 1 a m, e 2 a n. Così facendo si ha

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)(Z-b)^2.$$

Estraendo la radica quadrata di entrambi i membri, si ottiene

$$\sqrt{\nu} = \left(\frac{3m_e e^4}{32\epsilon_0^2 h^3}\right)^{1/2}(Z-b), \qquad (3)$$

che si può scrivere nella forma

$$\sqrt{\nu} = aZ - ab, \qquad (4)$$

dove a rappresenta la costante che appare nella (3) e $b \approx 1$.

L'equazione 4 rappresenta una linea retta, in pieno accordo con i dati sperimentali riportati nella figura 4. Se tuttavia questa funzione viene estesa a numeri atomici più alti, non risulta più perfettamente lineare, ma si incurva leggermente verso l'alto. Ciononostante l'accordo numerico con la teoria di Bohr è sorprendente, come è illustrato nell'esempio 2.

Esempio 2 Calcolare il valore della costante a che compare nell'equazione 4 e confrontarla con la pendenza della retta che risulta dal diagramma di figura 4.

Soluzione Dalle equazioni 3 e 4, si ottiene

$$a = \left(\frac{3m_e e^4}{32\epsilon_0^2 h^3}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\,(9.11\times10^{-31}\ \text{kg})^{1/2}(1.60\times10^{-19}\ \text{C})^2}{4\sqrt{2}\,(8.85\times10^{-12}\ \text{F/m})(6.63\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^{3/2}}$$
$$= 4.95\times10^7\ \text{Hz}^{1/2}.$$

Riferendoci al triangolo hgj della figura 4, una misura accurata dei valori riportati sul grafico dà

$$a = \frac{gj}{hg} = \frac{(1.94-0.50)\times10^9\ \text{Hz}^{1/2}}{(40-11)} = 4.96\times10^7\ \text{Hz}^{1/2},$$

che coincide con il valore previsto dalla teoria di Bohr entro i limiti di errore della misurazione sul grafico. Si noti anche che l'intercetta nella figura 4 cade in prossimità del valore 1, come ci aspettiamo dopo i nostri ragionamenti sull'effetto di schermo.

L'accordo con le previsioni della teoria di Bohr non è più così soddisfacente per le altre righe dello spettro X, corrispondenti a transizioni di elettroni più lontani dal nucleo; in questo caso bisogna fare riferimento ai calcoli basati sulla meccanica ondulatoria.

Esempio 3 Si bombarda con un fascio di elettroni un bersaglio di cobalto e si misurano le lunghezze d'onda dello spettro X caratteristico. A causa di impurità contenute nel bersaglio di cobalto, costituite da un elemento ignoto, appare anche uno spettro caratteristico più debole. Le lunghezze d'onda delle righe K_α sono 178.9 pm per il cobalto e 143.5 pm per l'impurità. Qual è l'elemento spurio?

Soluzione Applichiamo l'equazione 4 sia per il cobalto sia per l'elemento spurio. Ponendo c/λ al posto di ν e assumendo $b = 1$, otteniamo

$$\sqrt{\frac{c}{\lambda_{Co}}} = aZ_{Co} - a \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{c}{\lambda_x}} = aZ_x - a.$$

ove si è designato con il pedice x l'elemento spurio. Dividendo membro a membro si giunge a

$$\sqrt{\frac{\lambda_{Co}}{\lambda_x}} = \frac{Z_x - 1}{Z_{Co} - 1}.$$

Sostituendo i valori, si ha

$$\sqrt{\frac{178.9\ \text{pm}}{143.5\ \text{pm}}} = \frac{Z_x - 1}{27 - 1}.$$

Risolvendo l'equazione rispetto all'incognita, si trova $Z_x = 30.0$; con un'occhiata alla tavola periodica si riconosce che si tratta dello zinco.

52-3 LA COSTRUZIONE DEGLI ATOMI

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che, misurando le lunghezze d'onda dello spettro X caratteristico di un elemento, possiamo assegnare un *numero atomico* Z a ciascun elemento, formandone così un'unica sequenza continua basata su un criterio logico.

Adesso andiamo oltre, cercando di vedere come i princìpi delle meccanica ondulatoria ci portano a suddividere questa sequenza in un certo numero di segmenti, corrispondenti ai periodi che nella tavola periodica degli elementi leggiamo su scala orizzontale.

Il tentativo porta a un successo pressoché completo. Si riesce a rendere ragione di ogni dettaglio della tavola (vedi appendice E), compreso: (*a*) i numeri degli elementi nei sette periodi orizzontali di cui è composta la tavola, (*b*) la similarità delle proprietà chimiche degli elementi che si trovano nelle varie colonne verticali (i metalli alcalini e i gas nobili, per esempio), (*c*) l'esistenza della serie di elementi detti terre rare, ovvero lantani-

di, tutti assiepati in una sola casella della tavola. In breve, la meccanica ondulatoria, accompagnata da certe linee guida che definiremo in questo paragrafo, è in grado di rendere conto di ogni particolarità di questa tavola, e quindi in definitiva di tutta la chimica.

Immaginiamo di costruire - un po' come nel gioco del *Lego* - il modello di atomo per ciascuno degli oltre 100 elementi che compongono la tavola periodica. Il nostro materiale da costruzione è costituito da una serie di nuclei, ciascuno caratterizzato da una carica $+Ze$, con Z numero intero che va da 1 a 100. Abbiamo bisogno anche di una buona scorta di elettroni. Il nostro progetto prevede di aggiungere a ciascun nucleo un numero Z di elettroni in modo da produrre atomi neutri nel loro stato fondamentale.

Otterremo successo solo se osserveremo le seguenti regole di costruzione degli atomi.

1. *Principio dei numeri quantici.* L'elettrone in un atomo d'idrogeno può trovarsi, per citare una possibilità a caso, nello stato descritto dai numeri quantici $n = 2$, $l = 1$, $m_l = +1$, $m_s = -\frac{1}{2}$. Risulta che vi possa essere in *ogni* atomo un particolare elettrone totalmente identificato dal medesimo insieme di numeri quantici. Questo non significa che questi elettroni nei diversi atomi si comporteranno tutti allo stesso modo per ciò che riguarda il loro moto, perché così non è. Detto in altre parole, sebbene questi elettroni abbiano in comune gli stessi numeri quantici, essi si muoveranno in potenziali ben differenti e saranno quindi caratterizzati da funzioni d'onda diverse. Esplicitamente, il principio dei numeri quantici afferma:

Si possono usare i numeri quantici dell'atomo d'idrogeno per descrivere gli stati dell'elettrone e per assegnare elettroni ai vari strati e sottostrati in tutti gli atomi, senza riguardo al numero di elettroni da essi contenuto. E inoltre i vincoli descritti al paragrafo 51-6 per i numeri quantici dell'atomo d'idrogeno restano validi.

2. *Principio di esclusione di Pauli.* Questo fondamentale principio fu avanzato dal fisico austriaco Wolfgang Pauli nel 1925. Genericamente parlando, esso stabilisce che non vi possono essere due elettroni caratterizzati nello stesso istante dallo stesso stato di moto. Più specificatamente, il principio afferma:

In un atomo con più elettroni non può mai sussistere più di un elettrone per ogni stato quantico. Vale a dire che in un atomo due elettroni non possono avere la stessa serie di numeri quantici.

Se non esistesse questo principio, si potrebbe dare il caso che tutti gli elettroni di un atomo si accatastino nello strato K, e la chimica sarebbe di conseguenza completamente diversa da come la conosciamo. Voi non sareste qui a leggere questa frase e noi non saremmo qui a recitarla. Il principio di esclusione di Pauli non è un'affermazione banale!

3. *Il principio della minima energia.* Nel riempire i sottostrati con elettroni, man mano che procediamo nella costruzione degli atomi, nasce una domanda: "In che ordine li riempiamo?" La risposta è: "Quando si è occupato un sottostrato, si aggiunge l'elettrone successivo in quel sottostrato libero che conferisce all'atomo la minor energia." Se facessimo altrimenti, ci discosteremmo dal nostro iniziale proposito di costruire i modelli di atomi nel loro stato fondamentale.

Si può identificare il sottostrato di minor energia con l'ausilio della seguente regola, che dapprima enunciamo e poi cercheremo di spiegare:

Per un dato numero quantico principale n in un atomo a più elettroni, l'ordine di crescita dell'energia dei sottostrati corrisponde all'ordine di crescita del numero quantico l.

La tabella 1 aiuta a chiarire questa regola. Consideriamo dapprima un atomo d'idrogeno, il cui unico elettrone si trova nello stato caratterizzato da $n = 4$. I valori ammessi per l sono quattro, e precisamente, 0, 1,

TABELLA 1 LIVELLI DI ENERGIA PER ELETTRONI CON $n = 4$, IN TRE DIVERSI ATOMI

	Energia (eV)		
Numero quantico azimutale l	*Idrogeno*[a] $Z = 1$	«*Piombo*»[b] $Z = 82$	*Piombo*[c] $Z = 82$
0	−0.85	−5720	−890
1	−0.85	−5720	−710
2	−0.85	−5720	−420
3	−0.85	−5720	−140

[a] Atomo neutro d'idrogeno: vedere equazione 5.
[b] Atomo monoelettronico ipotetico con $Z = 82$: vedere equazione 5.
[c] Atomo neutro reale di piombo ($Z = 82$): valori sperimentali.

ISBN 88-408-0777-2

2 e 3. Per gli atomi che posseggono davvero un solo elettrone, come l'idrogeno, l'energia non dipende affatto da l, ma solo da n, ed è data dall'equazione 18 del capitolo 51:

$$E = \frac{-m_e e^4}{8\epsilon_0 h^2} \frac{Z^2}{n^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots \qquad (5)$$

Rammentiamo che questa relazione è prevista non solo dalla teoria di Bohr ma anche dalla meccanica ondulatoria. Ponendo in questa equazione $Z = 1$ e $n = 4$, si ottiene per l'idrogeno $E = -0.85$ eV, come è riportato nella tabella 1.

Consideriamo ora un nucleo di piombo ($Z = 82$), attorno al quale circoli solo un elettrone, di nuovo nello stato $n = 4$. L'equazione 5 si applica anche a questo atomo monoelettronico (anche se questa configurazione è ovviamente poco probabile). Per $Z = 82$ e $n = 4$, come si vede dalla tabella, E assume il valore di -5720 eV, anche qui indipendente da l. L'elettrone si muove nel campo creato da un nucleo dotato di carica $+ 82e$; e quindi viene trattenuto molto vicino al nucleo: il raggio equivalente della sua orbita di Bohr (eq. 19 del cap. 51) è 82 volte più piccolo di quello dell'idrogeno.

Infine costruiamo un atomo neutro normale di piombo distribuendovi all'interno i rimanenti 81 elettroni. L'elettrone più esterno, cioè quello di valenza, del piombo è caratterizzato da $n = 6$, di modo che un elettrone con $n = 4$ deve trovarsi in qualche sito in mezzo alla nube elettronica che avvolge il nucleo.

L'equazione 5 non vale più per un atomo plurielettronico come questo, ma è possibile conoscere le energie dei quattro sottostrati, caratterizzati dal numero quantico $n = 4$, attraverso le misure sperimentali ai raggi X. Questi valori approssimati sono riportati nell'ultima colonna della tabella 1. Si vede subito che corrispondono a un'energia molto più elevata (come dire che l'energia di legame è più debole) del nostro ipotetico «atomo» di piombo a un solo elettrone e che l'energia varia con l proprio come prevede la regola della minima energia.

Questa maggior debolezza di legame degli elettroni nel piombo quando sono in presenza dell'intera nube elettronica deriva dall'effetto di schermatura elettrica che una gran parte della nube esercita tra il nucleo e gli elettroni in questione. Un tipico elettrone con $n = 4$ non «vede» più interamente la carica del nucleo, ma piuttosto una carica ridotta per quella parte di nube elettronica che giace tra il nucleo e il raggio efficace dell'elettrone considerato.

Per quanto riguarda la variazione di energia in funzione di l, chiediamoci come dovrebbe apparire un'orbita caratterizzata da $l = 0$ sottoposta ai vincoli della meccanica di Bohr. Per poter essere davvero privo di momento angolare, l'elettrone dovrebbe oscillare avanti e indietro su un segmento rettilineo passando direttamente attraverso il nucleo. Chiaramente ciò non avviene. La corrispondente affermazione della meccanica ondulatoria vuole che un elettrone con $l = 0$ passi vicino al nucleo una porzione del suo tempo maggiore di quella che passerebbe un elettrone con numero quantico l più elevato. Questi elettroni quindi «vedrebbero» in media una carica nucleare efficace più alta e quindi si troverebbero maggiormente legati; il loro livello di energia dovrebbe essere minore, proprio come prevedono il principio di minima energia e la tabella 1. È interessante confrontare le figure 17 e 18 del capitolo 51, che illustrano gli stati dell'idrogeno caratterizzati rispettivamente da $n = 2$, $l = 0$ e da $n = 2$, $l = 1$. Nello stato $l = 0$ si nota davvero una marcata tendenza dell'elettrone ad addensarsi vivino al nucleo (si noti il massimo secondario più vicino), esattamente come suggerisce il nostro ragionamento qualitativo.

52-4 LA TAVOLA PERIODICA

Nella figura 5 è illustrato il procedimento costruttivo della tavola periodica, in cui si fa uso delle tre regole per l'accrescimento atomico descritte nel paragrafo precedente. In questa figura l'energia aumenta spostandosi verso l'alto. Gli stati caratterizzati dallo stesso valore di l sono disposti per chiarezza su una medesima colonna, con valori crescenti di l verso sinistra.

Prima di addentrarci nell'esame di questa tavola, è bene introdurre una nuova nomenclatura per il numero quantico del momento angolare l. Per ragioni storiche* i diversi valori di l sono spesso indicati con lettere, secondo il seguente schema:

l	0	1	2	3	4	5
Simboli	s	p	d	f	g	h

In questa notazione uno stato caratterizzato da $n = 1$ ed $l = 0$ è detto stato «1s» e lo stato con $n = 4$ ed $l = 3$ è chiamato «4f», e così via. Questi stati sono anche detti *sottostrati*.

La dipendenza dell'energia dal numero quantico l è la caratteristica dominante nella figura 5. Si ponga attenzione per esempio alla sequenza degli stati 4s, 4p,

* Le lettere s, p, d, f stanno per i rispettivi termini inglesi *sharp*, cioè netto, *principal*, *diffuse*, e *fundamental*; queste erano tempo fa le designazioni date in spettroscopia alle righe spettrali. Oltre la f, gli stati sono indicati in ordine alfabetico.

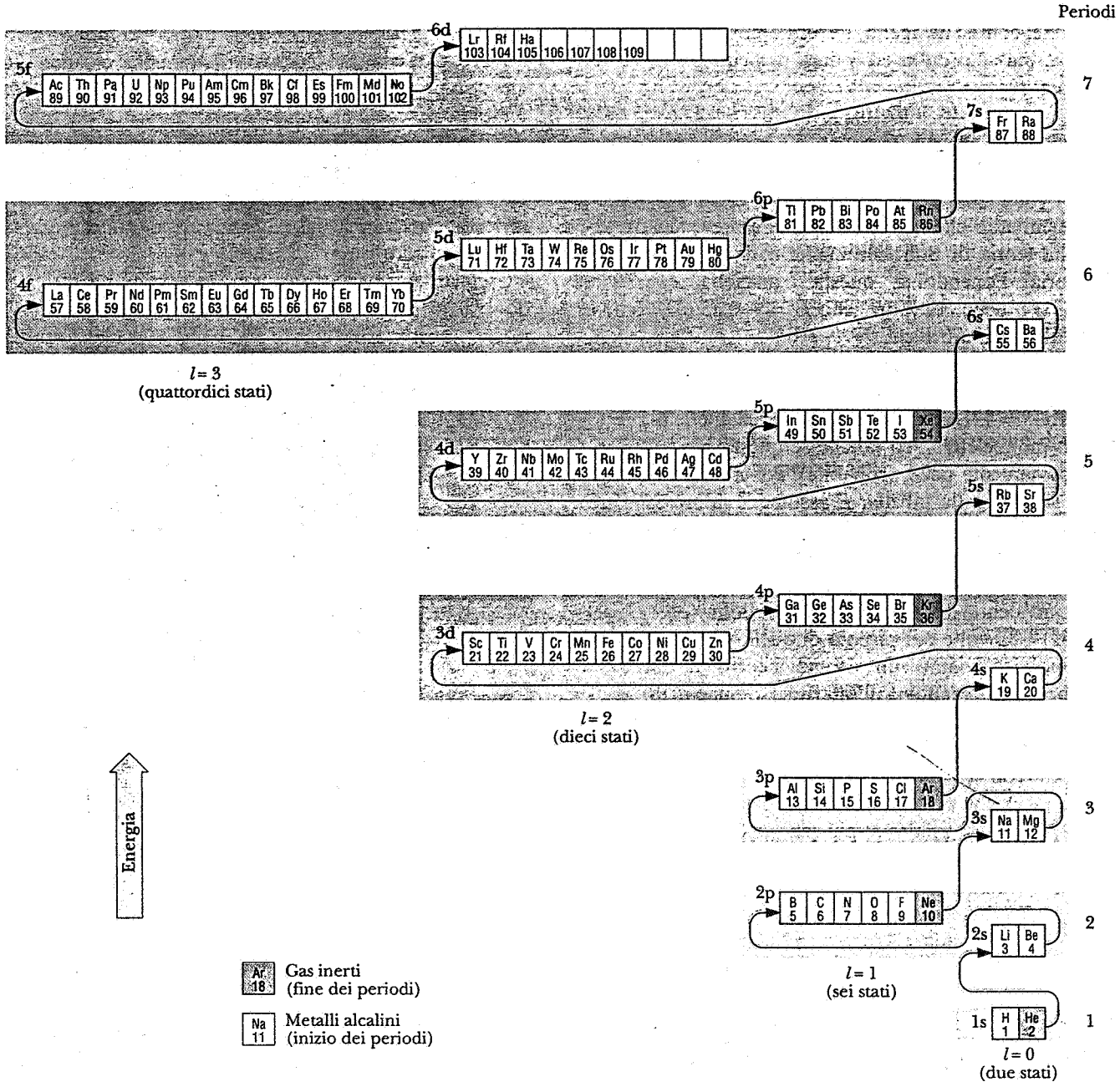


Figura 5 Partendo dall'idrogeno in basso, la linea rossa mostra la sequenza di riempimento dei sette periodi orizzontali della tavola di Mendeleev. Ciascun periodo comincia con un metallo alcalino e finisce con un gas inerte.

4d e 4f. Essi giacciono nella tavola in ordine di energia crescente, come vuole la regola dell'energia minima. Di fatto gli stati 4f sono a un livello di energia così alto che superano gli stati 5s e 5p, nonostante questi ultimi abbiano un valore di n maggiore.

Il termine *strato* o *guscio* è qui usato per indicare un gruppo di stati, aventi tutti energia simile, che assume un particolare stabilità quando questi stati sono tutti occupati. Quando abbiamo parlato dell'atomo d'idrogeno (per il quale l'energia dipende solo dal numero quantico principale n), abbiamo identificato gli strati assegnandogli il valore di questo numero quantico. Vediamo ora che negli atomi a più elettroni il numero quantico principale a sé stante non è più un buon indicatore. Come si vede dalla figura 5, la fascia grigia che abbiamo contrassegnato con il numero 6, corrispondente al sesto periodo orizzontale della tavola di Mendeleev (appendice E), contiene effettivamente gli stati 6s e 6p, caratterizzati da $n = 6$; però contiene anche tutti gli stati 4f e 5d. Inoltre gli stati 6d non rientrano in questa fascia, ma in quella superiore. Siamo ora indotti a designare queste fasce con il termine di *strati*, che di-

ISBN 88-408-0777-2

venta in questo caso coincidente col termine di *periodi*.

Partendo nella figura 5 dall'idrogeno e seguendo il percorso della linea rossa, viene evidenziato come sono costruiti i sette periodi orizzontali del sistema periodico, ciascuno dei quali comincia con un metallo alcalino e termina con un gas inerte. Si noti ancora il lungo sesto periodo, che inizia col metallo alcalino Cesio ($Z = 55$) e finisce col gas nobile Radon ($Z = 86$). L'ordine in cui vengono riempiti i sottostrati, come indica la linea di congiunzione, è 6s, 4f, 5d e 6p. Il sesto periodo contiene una fila di 15 elementi (Z che va da 57 a 71 compresi), elencata separatamente in basso nella tavola periodica degli elementi (vedi appendice E). Questi elementi sono chiamati *terre rare* o *lantanidi* (dal nome del primo elemento della sequenza, il lantanio). Le loro proprietà chimiche sono tutte così simili che vengono raggruppati in una sola casella della tavola. Questa comunanza è giustificata dal fatto che, mentre nella profondità della nube elettronica vengono riempiti gli stati 4f, rimane sempre presente uno schermo esterno costituito da uno o due elettroni 6s. Sono questi elettroni più esterni che determinano le proprietà chimiche dell'atomo. Una sequenza analoga compare anche nel settimo periodo (gli *attinidi*).

Il numero massimo di elettroni permessi in un sottostrato è pari a $2(2l + 1)$. È questa una conseguenza del principio di Pauli; per ogni valore di l si hanno $2l + 1$ differenti valori per m_l, e per ognuno di questi si hanno due valori per m_s. Sono quindi $2(2l + 1)$ i possibili diversi stati per gli elettroni in un sottostrato, e, per il principio di esclusione, ciascun elettrone nell'atomo deve occupare uno stato differente. Se si conta il numero degli elementi contenuti in ciascun sottostrato di figura 5, si riconosce che sono $2(2l + 1)$; più in dettaglio, ce ne sono 2 nel sottostrato s ($l = 0$), 6 nel sottostrato p ($l = 1$), 10 nel sottostrato d ($l = 2$) e 14 nel sottostrato f ($l = 3$).

Configurazioni elettroniche

Possiamo designare lo stato di minor energia di un atomo descrivendo la sua *configurazione elettronica*, cioè specificando il numero di elettroni esistenti in ciascuno stato occupato. Per esempio, il litio ($Z = 3$) ha per configurazione elettronica (fig. 5) la formula $1s^2 2s^1$, dove gli apici indicano il numero di elettroni contenuti nel relativo stato. Consideriamo queste tre configurazioni:

F ($Z = 9$):	$1s^2 2s^2 2p^5$
Ne ($Z = 10$):	$1s^2 2s^2 2p^6$
Na ($Z = 11$):	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

Il neon ha lo stato 2p completo, una configurazione particolarmente stabile. È necessaria un'energia considerevole per spezzare questa configurazione e quindi il neon non cede facilmente i suoi elettroni. Esiste anche un divario di energia molto ampio tra il neon e l'elemento successivo, il sodio; il che significa che il neon è riluttante pure a ricevere elettroni. Il neon fa quindi parte della famiglia dei *gas nobili*, detti, oltre che *gas rari*, anche *gas inerti* per il motivo sopradescritto; nella maggior parte dei casi non forma composti con altri elementi. Gli elementi della colonna di cui fa parte il neon, nella figura 5 e nell'appendice E, sono tutti gas inerti. Questa proprietà consegue all'aver riempito tutto uno strato e non solo un certo sottostrato. Per esempio, gli elementi Zn, Cd e Hg, che hanno lo stato d completo, si combinano facilmente.

Al fluoro invece manca un elettrone per completare lo strato 2p e, giacché lo strato completo rappresenta una situazione di stabilità, il fluoro forma facilmente composti con altri elementi da cui accetta volentieri un elettrone. Gli elementi della stessa colonna del fluoro (fig. 5 o app. E) si comportano analogamente e appartengono tutti alla classe degli *alogeni*. Passando a un altro caso, il sodio ha un solo elettrone nello strato 3s. Questo elettrone è legato debolmente, e il sodio può quindi cederlo con facilità nel formare composti chimici con altri atomi (come nel NaCl ad esempio). Tutti gli elementi dotati di un solo elettrone s hanno proprietà simili e sono detti *alcalini*.

Energia di ionizzazione

L'energia necessaria per rimuovere da un atomo il suo elettrone più esterno è detta *energia di ionizzazione*. La figura 6 riporta i valori dell'energia di ionizzazione per i vari elementi. È da osservare il comportamento regolare, coerente con le configurazioni elettroniche. Per ciascuno strato, l'energia di ionizzazione aumenta gradualmente e raggiunge un massimo per un gas inerte; poi crolla bruscamente con l'elemento alcalino successivo. L'elemento sodio per esempio ha un'energia di ionizzazione di 5.14 eV. Ma per rimuovere un *secondo* elettrone dall'atomo di sodio bisogna spendere un'energia di un ordine di grandezza superiore (47.3 eV); rimosso un elettrone, lo ione Na presenta una configurazione elettronica simile all'elemento inerte Neon, cioè uno strato completo, in cui gli elettroni sono vincolati più saldamente.

Esistono qua e là delle piccole irregolarità nell'ordine di riempimento degli stati. Per esempio dalla figura 5 ci aspetteremmo che il rame ($Z = 29$) abbia la configurazione più esterna $4s^2 3d^9$. Tuttavia, è energeticamente più favorevole la configurazione in cui uno degli elettroni s va a completare lo stato 3d; ne risulta la configurazione esterna $4s^1 3d^{10}$. L'elettrone 4s rimasto solo è responsabile dell'eccellente conducibilità elettrica del rame. Un'irregolarità simile accade per l'argento ($Z = 47$) e per l'oro ($Z = 79$).

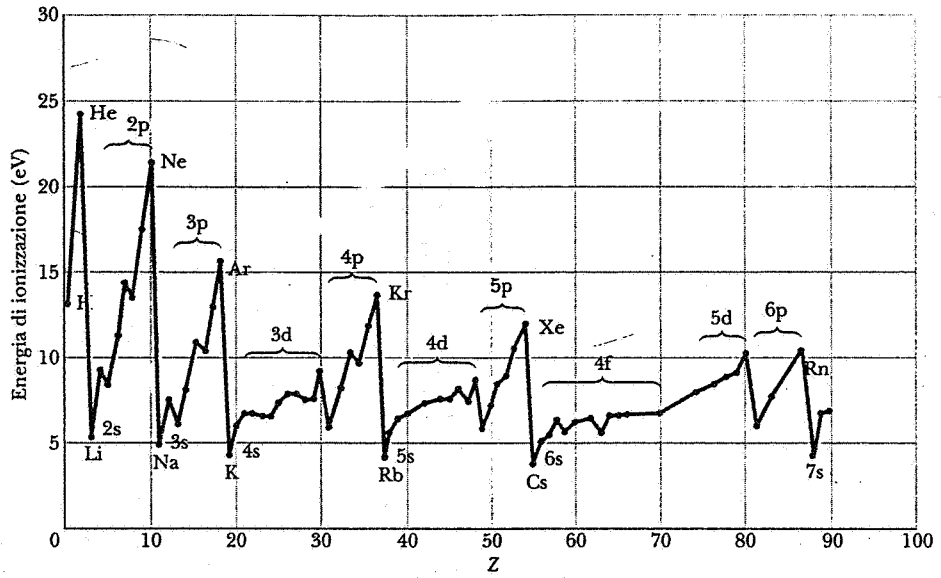


Figura 6 Le energie di ionizzazione degli elementi sono messe in relazione con i loro numeri atomici. Sono evidenziati gli strati coi loro nomi.

Stati eccitati e transizioni ottiche

Fin qui abbiamo discusso solo della configurazione atomica di minima energia, altrimenti detta stato fondamentale. Se forniamo energia all'atomo, come quando lo immettiamo in un tubo a scarica elettrica o lo investiamo con una radiazione, possiamo indurre gli elettroni a passare negli stati superiori. Se l'energia ceduta è sufficiente, è possibile rimuovere definitivamente un elettrone, ionizzando così l'atomo. Se viene estratto un elettrone tra quelli più interni, la successiva transizione di rimpiazzo dei livelli dà luogo a un'emissione di raggi X caratteristica, come abbiamo visto nel paragrafo 52-1.

Le differenze di energia, tra lo stato di minima energia dell'elettrone più esterno e lo stato superiore successivo a cui può essere eccitato, sono tipicamente dell'ordine di qualche eV. Quando l'elettrone ricade al suo livello di energia minima, l'atomo emette radiazione nella banda energetica degli eV, vale a dire radiazione visibile. Per questa ragione questo tipo di transizione di stato dell'elettrone è detto *transizione ottica*. Facendo uso delle funzioni d'onda corrispondenti ai vari stati, è possibile calcolare con quale probabilità relativa possono avvenire le diverse transizioni. Operando in questo modo si trova che le transizioni che comportano per l la variazione di un'unità sono molto favorite rispetto alle transizioni che modificano l di qualsiasi altra quantità. Questa osservazione è detta *regola di selezione*. Per tutte le transizioni atomiche che danno luogo a interazioni elettromagnetiche (ottiche, X, ecc.), la regola di selezione impone

$$\Delta l = \pm 1. \qquad (6)$$

Le regole di selezione spesso non sono tassative. Si possono anche osservare transizioni atomiche corrispondenti ad altre variazioni di l; esse sono semplicemente molto meno probabili.

La figura 7 mostra alcuni stati eccitati del sodio e alcune transizioni possibili (tra cui alcune cadono fuori dalla banda ottica dello spettro). La maggior parte degli stati sono in effetti dei doppietti molto vicini, che generano due righe spettrali di energia quasi identica, come il noto doppietto del sodio, che corrisponde (fig. 7) alla ricaduta dell'elettrone dal primo stato eccitato (3p) allo stato fondamentale.

52-5 LASER E LUCE LASER

Alla fine degli anni '40 e nei primi anni '60 la fisica quantistica fornì due enormi contributi alla tecnologia, il transistor e il laser. Il primo stimolò la crescita dell'*elettronica*, che, a livello quantistico, tratta dell'interazione tra gli elettroni e la materia di base. Il laser ha aperto un nuovo settore, talvolta chiamato *fotonica*, che tratta dell'interazione (di nuovo a livello quantistico) tra fotoni e materia di base.

Per sottolineare l'importanza dei laser diamo un'occhiata ad alcune delle caratteristiche della luce laser (fig. 8). Faremo per ognuna il confronto con la luce emessa da una lampadina a filamento di tungsteno (spettro continuo) o con un tubo a scarica in gas neon (spettro a righe) e vedremo che l'appellativo dato alla luce laser di «luce fantastica» ha un significato che va al di là di una bizzarra stravaganza.

ISBN 88-408-0777-2

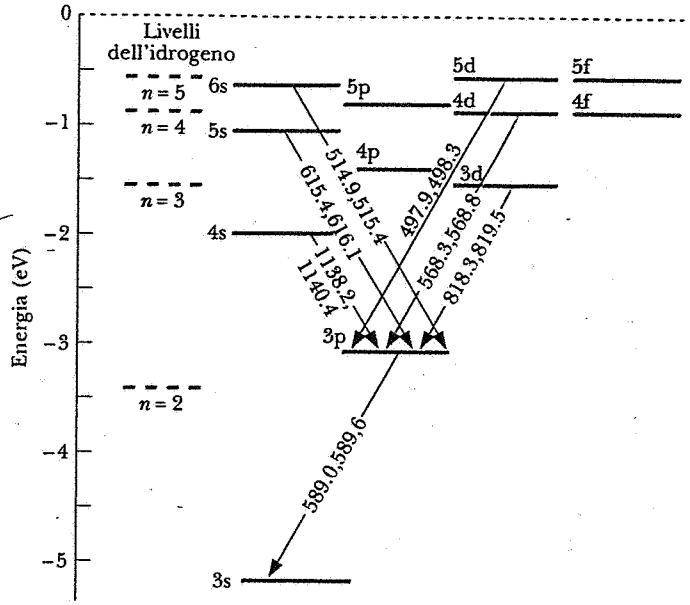


Figura 7 Gli stati eccitati del sodio. Per alcune transizioni sono date le lunghezze d'onda delle radiazioni emesse, in nm. Si noti come opera la regola di selezione $\Delta l = \pm 1$.

1. *La luce laser è estremamente monocromatica.* La luce del tungsteno, dispersa su uno spettro continuo, non ci dà termini per un confronto. La luce ricavata da righe selezionate in un tubo a scarica invece può avere lunghezze d'onda nella regione del visibile precise fino a 1 parte per milione. La netta definizione di una luce laser può raggiungere un risultato 1000 volte migliore, circa 1 parte per miliardo.

2. *La luce laser è notevolmente coerente.* I treni d'onda dei raggi laser possono essere lunghi parecchie centinaia di chilometri. Si possono produrre frange d'interferenza combinando due fasci che hanno seguito cammini la cui differenza di lunghezza può raggiungere i valori sopraindicati. La corrispondente lunghezza dei treni d'onda valida ai fini della coerenza per una luce a filamento di tungsteno o a scarica in gas è di norma molto meno di 1 metro.

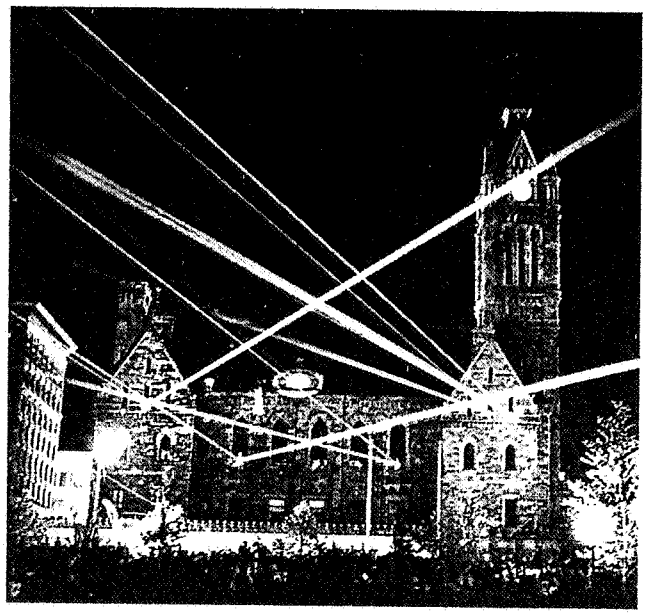


Figura 8 Raggi laser illuminano il cielo.

3. *La luce laser è fortemente direzionale.* Un fascio laser si discosta dallo stretto parallelismo solo per via degli effetti di diffrazione determinati (vedi paragrafo 46-4) in base alla lunghezza d'onda e al diametro del foro di uscita. La luce di altre sorgenti può essere collimata in un fascio approssimativamente parallelo solo grazie all'ausilio di uno specchio o di una lente, ma la divergenza effettiva del fascio resta in ogni modo molto maggiore di quella della luce laser. Per esempio la luce focalizzata proveniente da un filamento di tungsteno forma un fascio il cui angolo di divergenza è determinato dall'estensione spaziale del filamento.

4. *La luce laser può essere focalizzata in modo molto netto.* Questa proprietà discende dal parallelismo del fascio laser. Come per la luce stellare, la dimensione dell'immagine focale per un fascio laser è limitata solo dagli effetti di diffrazione e non dalla dimensione della sorgente. Si possono ottenere facilmente intensità di luce laser focalizzata dell'ordine di 10^{15} W/cm^2. Una fiamma ossiacetilenica, per confronto, ha un'intensità di soli 10^3 W/cm^2.

I laser più piccoli, usati per comunicazioni telefoniche su fibre ottiche, hanno, come mezzo attivo, un cristallo semiconduttore di arseniuro di gallio delle dimensioni di una capocchia di spillo. I laser più grandi, im-

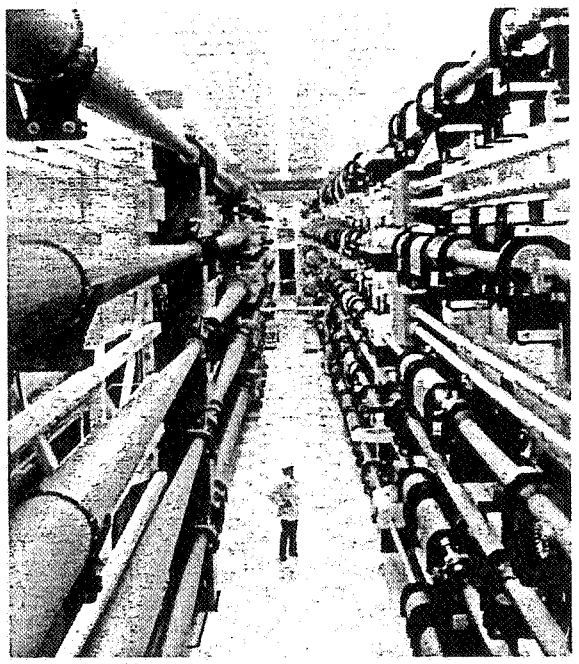


Figura 9 La sala laser al laboratorio nazionale Lawrence Livermore. Questi laser, della potenza di circa 10^{14} W, vengono usati per la ricerca sulla fusione termonucleare controllata (vedi paragrafo 55-10).

piegati nella ricerca sulla fusione nucleare (fig. 9), occupano un intero edificio. Essi possono generare impulsi laser della durata di 10^{-10} s, in cui il livello di potenza durante l'impulso raggiunge i 10^{14} W. Corrisponde a circa 100 volte la potenzialità complessiva di tutte le centrali elettriche del mondo.

Tra i tanti altri impieghi del laser citiamo quello terapeutico nella saldatura localizzata delle retine distaccate, la perforazione microscopica dei diamanti per trarne fili sottilissimi, il taglio dei vestiti (50 strati alla volta senza bordi sfrangiati) nell'industria dell'abbigliamento, la topografia di precisione, raffinate misurazioni di lunghezza per interferometria, precise misure di flusso in liquidi mediante l'effetto Doppler e la produzione di ologrammi (vedere il paragrafo 47-5).

La figura 10 mostra un altro esempio di tecnologia al laser e precisamente l'apparecchiatura al National Institute of Standards and Technology impiegata per misurare le coordinate x, y, z di un punto, con tecniche interferometriche al laser, con un errore di $\pm 2 \times 10^{-8}$ m ($\pm$ 20 nm). Si usa per misurare le dimensioni di strumenti tridimensionali speciali, a loro volta utilizzati nell'industria per la verifica della precisione lineare di complesse parti meccaniche. Nella figura si notano alcuni fasci laser, resi visibili dalla diffusione della luce da parte dell'aria.

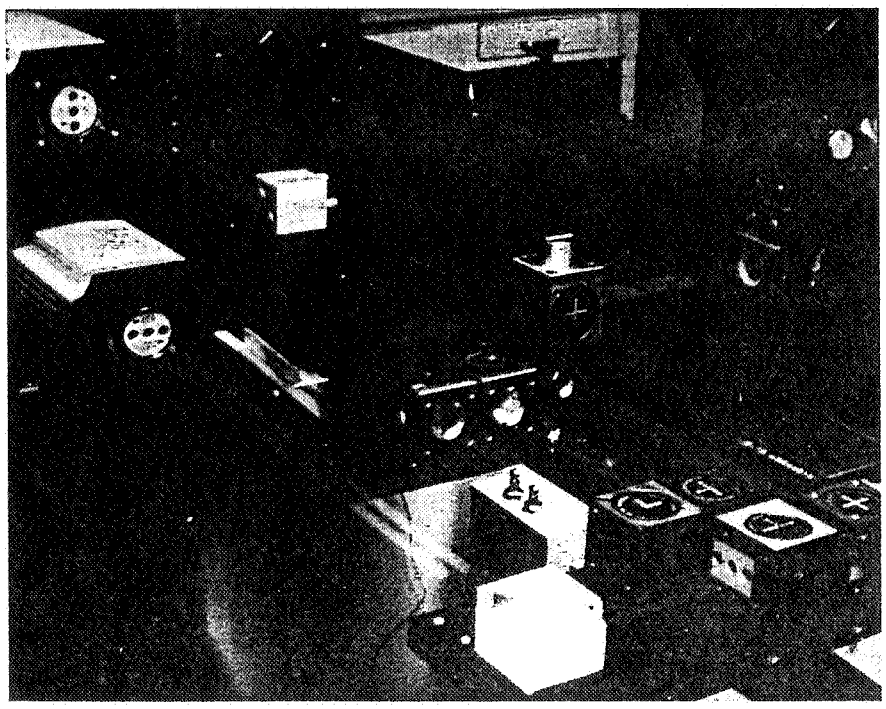


Figura 10 Un interferometro di Michelson che fa uso di laser al National Institute of Standards and Technology, usato per misurare le coordinate x, y e z di un punto nello spazio con estrema precisione.

ISBN 88-408-0777-2

52-6 EINSTEIN E IL LASER

Nel 1917 Einstein introdusse in fisica un nuovo concetto, quello di *emissione stimolata*, che definiremo e discuteremo fra breve. Anche se il primo laser funzionante non apparve che nel 1960, i fondamenti per la sua invenzione erano già stati gettati da Einstein con la sua opera. E l'importanza del concetto di emissione stimolata viene ricordata implicitamente nel nome «laser», che è l'acronimo dei termini inglesi che lo definiscono: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation, cioè amplificazione di luce per emissione stimolata di radiazione.

Su cosa stava lavorando Einstein nel momento in cui gli si figurò il concetto di emissione stimolata? Su nient'altro che il problema del corpo nero, che, attraverso l'elaborazione di Planck e altri, stabilì la nuova scienza della meccanica quantistica. Nel 1917 Einstein riuscì a derivare la legge della radiazione di Planck muovendo da assunzioni straordinariamente semplici e seguendo un procedimento che chiarì la funzione della quantizzazione dell'energia e il concetto di fotone.*

È interessante sapere che Einstein stava pensando profondamente allo stesso fondamentale problema del corpo nero nel 1905, quando avanzò per la prima volta l'idea del fotone e si rese conto che tramite questa idea si poteva spiegare l'effetto fotoelettrico. Sono due esempi questi di come le speculazioni teoriche su argomenti che al primo momento non sembrano avere rilevanza per gli sviluppi tecnologici, possono poi sfociare in applicazioni pratiche di importanza capitale. La prossima volta che aprirete la porta di un ascensore comandata da cellule fotoelettriche o ascolterete musica riprodotta da un *compact disc*, ricordatevi di Einstein.

Diamo ora uno sguardo a questi tre processi che comportano interazione tra materia e radiazione. Due di questi, l'assorbimento e l'emissione spontanea, ci sono familiari da tempo; il terzo processo è l'emissione stimolata.

1. *Assorbimento.* La figura 11*a* schematizza un sistema atomico con due possibili livelli d'energia, E_1 ed E_2, di cui quello occupato è il più basso. Esso è in presenza di un radiazione a spettro continuo. Immaginiamo che un fotone di questo campo radiativo, raggiungendo l'atomo considerato, interagisca con esso e supponiamo che la frequenza ν associata al fotone sia tale che

$$h\nu = E_2 - E_1. \tag{7}$$

Il risultato è che il fotone svanisce e il sistema atomico si ritrova nello stato di energia superiore. Questo processo è chiamato *assorbimento*.

2. *Emissione spontanea.* Nella figura 11*b* il sistema atomico occupa lo stato a energia superiore e non è immerso in un campo radiante. Dopo un tempo medio τ, questo sistema atomico (isolato) si trasferisce di sua spontanea volontà al livello inferiore, emettendo nel contempo un fotone di energia $h\nu$ ($= E_2 - E_1$). Questo processo è detto *emissione spontanea*, per significare che nessuna influenza esterna governa l'emissione.

Normalmente il tempo medio τ prima dell'emissione spontanea da parte di un atomo eccitato è dell'ordine di 10^{-8} s. Però ci sono anche stati per i quali τ è molto più lungo, ad esempio 10^{-3} s. Questi stati sono chiamati *metastabili* e rivestono una funzione particolare nel laser. (Hanno vite medie così lunghe perché possono emettere radiazione solo attraverso processi che fuoriescono dalla regola di selezione espressa dall'equazione 6.)

* Si veda Resnick R. e Halliday D., *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2ª ed., Wiley 1985, appendice E.

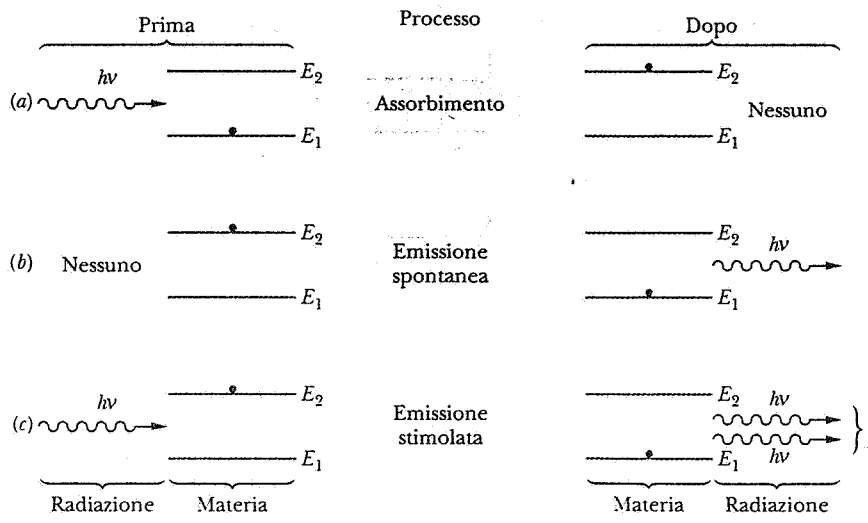


Figura 11 Interazione tra materia e radiazione nel processo di (*a*) assorbimento, (*b*) emissione spontanea e (*c*) emissione stimolata.

La luce proveniente da una lampada a filamento incandescente è generata per emissione spontanea. I fotoni così prodotti sono del tutto indipendenti l'uno dall'altro e, in particolare, essi presentano direzioni e fasi completamente diverse. Detto in altro modo, la luce emessa ha un basso grado di coerenza.

3. *Emissione stimolata.* Nella figura 11*c* il sistema atomico si trova ancora al livello superiore, ma in questo caso è presente anche una radiazione di frequenza data dall'equazione 7. Come nel caso dell'assorbimento, un fotone di energia $h\nu$ interagisce col sistema. Il risultato è che il sistema viene «trascinato giù» al livello inferiore e finiscono per esserci *due* fotoni, laddove prima ne esisteva uno solo. *Emissione stimolata* è il nome di questo processo.

Il fotone emesso rappresentato nella figura 11*c* è del tutto identico al fotone che ha «provocato» o «stimolato» l'emissione. Possiede energia, direzione, fase e stato di polarizzazione identici. Per di più, ciascuno di questi due fotoni può causare un altro evento di emissione stimolata, dando luogo a quattro fotoni in tutto, i quali a loro volta possono comportarsi da stimolatori, e così di seguito. Ci rendiamo conto di come uno solo di questi eventi possa innescare una reazione a catena di processi simili. È questo l'effetto di «amplificazione» cui allude il termine laser. Tutti i fotoni hanno identica energia, direzione, fase e stato di polarizzazione. Questo è il modo in cui la luce laser acquista le sue caratteristiche.

La figura 11 si riferisce all'interazione della radiazione con un solo atomo. Nei casi ordinari abbiamo a che fare tuttavia con una moltitudine di atomi. Per un sistema a due livelli come quello di figura 11, quanti sono in un certo istante gli atomi che si trovano al livello E_1 e quanti quelli che occupano il livello E_2? In qualsiasi sistema che si trovi in equilibrio termico, il numero di oggetti che occupano lo stato di energia E è determinato dal fattore esponenziale $e^{-E/kT}$ nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann (vedere le equazioni 27 e 32 del capitolo 24). Il rapporto tra il numero di atomi aventi l'energia superiore e quelli con l'energia inferiore è dato da

$$\frac{n_{E_2}}{n_{E_1}} = e^{-\frac{E_2-E_1}{kT}}. \qquad (8)$$

La figura 12*a* suggerisce l'idea di questa configurazione. La quantità kT rappresenta l'energia media di un atomo alla temperatura T, da cui si arguisce che quanto più alta è la temperatura, tanto maggiore è il numero di atomi che, su una media a lungo termine, viene «pompato» dall'agitazione termica al livello superiore E_2. Dato che $E_2 > E_1$, il rapporto dato dalla (8) è sempre inferiore all'unità, come dire che nel livello di energia superiore ci saranno comunque sempre meno atomi che in quello inferiore. E questa è la situazione che ci aspettiamo se la popolazione nei due livelli è controllata solo dall'agitazione termica.

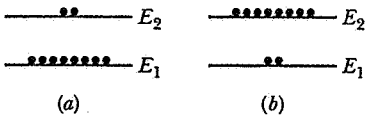


Figura 12 (*a*) La distribuzione normale in equilibrio termico dei sistemi atomici che occupano uno di due possibili stati. (*b*) Una distribuzione di popolazione invertita, che si può ottenere con accorgimenti speciali.

Se esponiamo a radiazione un sistema come quello di figura 12*a*, il processo predominante, per un motivo puramente numerico, sarà quello dell'assorbimento. Ma se la popolazione nei due livelli fosse invertita, come nella figura 12*b*, il processo predominante in presenza di radiazione diventerebbe l'emissione stimolata. Un'*inversione di popolazione*, come nella figura 12*b*, non è una configurazione ottenibile con processi termici; ci vuole un abile stratagemma per provocarla.

52-7 COME FUNZIONA UN LASER

La figura 13 mostra schematicamente come si può ottenere l'inversione di popolazione affinché l'attività laser possa aver luogo. Gli atomi vengono «pompati» dallo stato fondamentale E_1 allo stato eccitato E_3, per esempio mediante assorbimento di energia luminosa proveniente da un'intensa sorgente a spettro continuo che circonda l'emettitore laser.

Gli atomi decadono rapidamente dallo stato E_3 allo stato di energia E_2, che, per poter dar luogo all'effetto laser, dev'essere metastabile; la sua vita media, prima

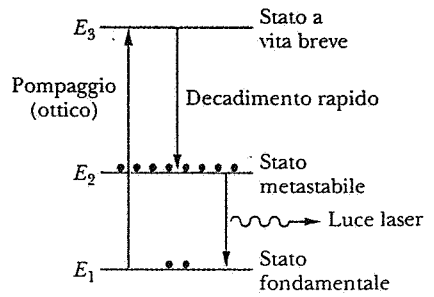


Figura 13 Schema base a tre livelli che descrive il funzionamento del laser. Lo stato metastabile E_2 ha una popolazione superiore a quella dello stato fondamentale E_1.

ISBN 88-408-0777-2

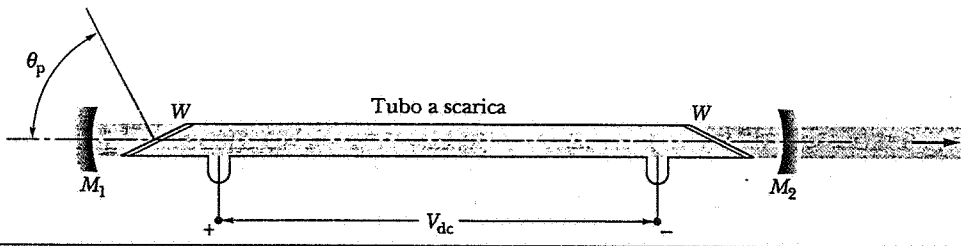


Figura 14 Elementi principali di un laser a gas He-Ne.

di decadere per emissione spontanea, deve quindi essere relativamente elevata. Se le condizioni sono favorevoli, lo stato E_2 può diventare più popolato dello stato E_1, procurando così la richiesta inversione di popolazione. A questo punto un occasionale fotone avente l'energia giusta può scatenare una valanga di eventi di emissioni stimolate che si traduce in un fascio di luce laser. Una quantità di laser, che fanno uso di solidi cristallini (come il rubino) come sostanza emittente, operano con questo processo a tre stadi.

La figura 14 riproduce gli elementi che compongono un tipo di laser frequentemente usato nei laboratori dagli studenti. Il tubo di vetro a scarica è riempito con una miscela nelle proporzioni dell'80% e del 20% di gas rari elio e neon rispettivamente; l'elio costituisce il mezzo di «pompaggio» e il neon rappresenta il mezzo di emissione laser. La figura 15 dà una versione semplificata dei livelli energetici delle due sostanze. Si osservi che, nello schema di emissione laser, sono coinvolti 4 livelli, E_0, E_1, E_2, E_3, invece dei tre livelli riportati nella figura 13.

Il pompaggio è realizzato mediante una scarica elettrica indotta nella miscela di gas elio-neon. Alcuni elettroni e ioni durante la scarica occasionalmente collidono con gli atomi di elio, elevandoli al livello E_3 della figura 15. Questo stato è metastabile e l'emissione spontanea dovuta alla transizione allo stato fondamentale (E_0) è piuttosto rara. Il livello E_3 dell'elio (20.61 eV) è per combinazione prossimo al livello E_2 del neon (20.66 eV), di modo che, durante le collisioni tra atomi di elio e di neon, l'energia di eccitazione si può facilmente trasferire al neon. In questo modo il livello E_2 della figura 15 può diventare più popolato del livello E_1 nella stessa figura. L'inversione di popolazione si mantiene perché (*a*) la metastabilità del livello E_3 assicura un pronto ricambio di atomi di neon al livello E_2 e (*b*) il livello E_1 decade rapidamente (attraverso stati intermedi non indicati) allo stato fondamentale del neon E_0. L'emissione stimolata dal livello E_2 al livello E_1 predomina e si genera una luce laser rossa di lunghezza d'onda 632.8 nm.

La maggior parte dei fotoni di emissione stimolata

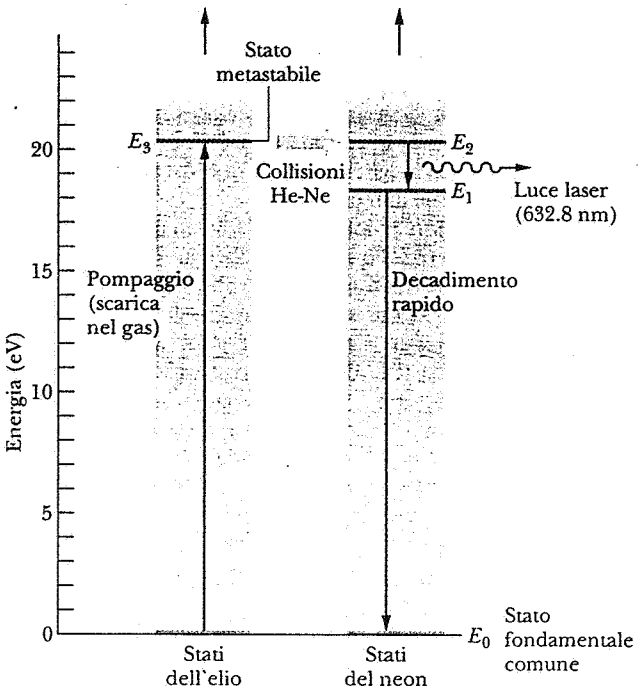


Figura 15 I livelli atomici coinvolti nel funzionamento di un laser a gas He-Ne.

prodotti nel tubo a scarica di figura 14 non sono paralleli all'asse del tubo e vengono subito bloccati alle pareti. I fotoni di emissione stimolata che *sono* paralleli all'asse del tubo, invece, possono oscillare molte volte avanti e indietro entro il tubo per successive riflessioni tra gli specchi M_1 ed M_2. Questi fotoni possono a loro volta provocare altre emissioni stimolate. Ne risulta una reazione a catena che cresce rapidamente in questa direzione e realizza l'intrinseco parallelismo del fascio laser.

Piuttosto che pensare in termini di fotoni che rimbalzano avanti e indietro tra gli specchi, è forse più utile pensare all'intero apparecchio di figura 14 come a una cavità risonante ottica, che, a guisa di una canna d'organo per onde sonore, si può accordare per renderla nettamente risonante a una (o più) lunghezze d'onda.

Gli specchi M_1 ed M_2 sono concavi, con i loro punti focali pressoché coincidenti al centro del tubo. Lo specchio M_1 è rivestito con una pellicola dielettrica il cui spessore è accuratamente controllato in modo da rendere lo specchio quasi totalmente riflettente per la lunghezza d'onda della luce laser; si veda il paragrafo 45-4. Lo specchio M_2 d'altro canto è rivestito in modo tale da lasciar passare una piccola frazione della luce laser, che a ogni riflessione può così sfuggire e formare il fascio utile.

Le finestre W nella figura 14, che racchiudono le estremità del tubo a scarica, sono inclinate in modo che le loro normali formino un angolo θ_p, l'angolo di Brewster, con l'asse del tubo, dove

$$\tan\theta_p = n, \tag{9}$$

in cui n rappresenta l'indice di rifrazione del vetro alla lunghezza d'onda della luce laser. Nel paragrafo 48-3 abbiamo visto che finestre siffatte trasmettono la luce senza perdita per riflessione, purché la luce sia polarizzata con il suo piano di polarizzazione nel piano della figura 14. Se le finestre fossero perpendicolari all'asse del tubo, la perdita nel fascio dovuta alla riflessione (circa il 4% su ciascuna superficie di ciascuno specchio) renderebbe impossibile il funzionamento del laser.

Esempio 4 Un laser a tre livelli, del tipo illustrato nella figura 13, emette luce laser alla lunghezza d'onda di 550 nm, circa al centro della banda visibile. (*a*) Se il meccanismo di pompaggio ottico non operasse, quale sarebbe il rapporto di popolazione tra il livello superiore (energia E_2) e quello inferiore (energia E_1)? Si assuma $T = 300$ K. (*b*) A quale temperatura, nelle condizioni previste al punto (*a*), il rapporto di popolazione sarebbe $\frac{1}{2}$?

Soluzione (*a*) Dalla condizione di Bohr sulla frequenza, la differenza di energia tra i due livelli è data da

$$E_2 - E_1 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(550 \times 10^{-9}\ \text{m})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 2.26\ \text{eV}.$$

L'energia media dovuta all'agitazione termica è pari a

$$kT = (8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 0.0259\ \text{eV}.$$

L'equazione 8 ci dà il rapporto richiesto:

$$\frac{n_{E_2}}{n_{E_1}} = e^{-(E_2-E_1)/kT}$$
$$= e^{-(2.26\ \text{eV})/(0.0259\ \text{eV})} = e^{-87.3} = 1.3 \times 10^{-38}.$$

È questo un numero estremamente piccolo, anche se non è irragionevole. Infatti un atomo dotato di energia dovuta ad agitazione termica pari in media a 0.0259 eV non sarà in grado molto spesso di trasferire 2.26 eV (87 volte tanto) in una collisione con un altro atomo.

(*b*) Ponendo uguale a $\frac{1}{2}$ il rapporto dato dall'equazione 8, passando al logaritmo di entrambi i membri e risolvendo rispetto a T, si ottiene

$$T = \frac{E_2 - E_1}{k(\ln 2)} = \frac{2.26\ \text{eV}}{(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(0.693)}$$
$$= 37\,800\ \text{K}.$$

Ben più caldo della superficie solare! Risulta ora chiaro che, se dobbiamo invertire la popolazione di questi due livelli, dovremo ricorrere a speciali accorgimenti, senza i quali non si può ottenere nemmeno l'emissione laser.

Esempio 5 Un laser impulsivo a rubino ha come suo elemento attivo un cristallo sintetico di rubino a forma di cilindro del diametro di 1 cm e lungo 6 cm. Il rubino è fondamentalmente un ossido di alluminio, Al_2O_3, in cui uno ione di alluminio su 3500 (in questo caso) viene sostituito da uno ione cromo Cr^{3+}. E sono in effetti le proprietà di assorbimento ottico di questa impurità di cromo le responsabili del caratteristico color rosso rubino. Queste stesse impurità sono pure responsabili dell'effetto di emissione laser, che avviene con lunghezza d'onda di 694.4 nm attraverso il meccanismo a tre livelli di figura 13.

Si supponga che *tutti* gli ioni Cr^{3+} si trovino in uno stato metastabile corrispondente allo stato E_2 della figura 13 e che *nessuno* di essi si trovi allo stato fondamentale E_1. Quanta energia si rende disponibile per essere emessa in un singolo impulso di luce laser se *tutti* questi ioni ritornano allo stato fondamentale in un'unica reazione a catena di emissione stimolata? La risposta costituirà un limite massimo, giacché le condizioni ipotizzate non potranno realizzarsi in pratica. La densità ρ dell'Al_2O_3 vale 3700 kg/m^3, e la sua massa molare M è pari a 0.102 kg/mol.

Soluzione Il numero di ioni Al^{3+} è dato da

$$N_{Al} = \frac{2N_A m}{M} = \frac{2N_A \rho V}{M},$$

dove m è la massa del cilindro di rubino e il fattore 2 deriva dalla presenza di due ioni di alluminio in ciascuna molecola di Al_2O_3.

ISBN 88-408-0777-2

Il volume è

$$V = (\pi/4)(1.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2(6.0 \times 10^{-2}\ \text{m}) = 4.7 \times 10^{-6}\ \text{m}^3.$$

Di modo che

$$N_{\text{Al}} = \frac{(2)(6.0 \times 10^{23}\ \text{mole}^{-1})(3.7 \times 10^{3}\ \text{kg/m}^3)(4.7 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)}{0.102\ \text{kg/mole}}$$
$$= 2.1 \times 10^{23}.$$

Il numero di ioni Cr^{3+} risulta quindi

$$N_{\text{Cr}} = \frac{N_{\text{Al}}}{3500} = 6.0 \times 10^{19}.$$

L'energia del fotone connesso all'emissione stimolata vale

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4.1 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(3.0 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{694 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 1.8\ \text{eV},$$

e l'energia totale disponibile per ogni impulso laser è

$$U = N_{\text{Cr}}E = (6.0 \times 10^{19})(1.8\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}) = 17\ \text{J}.$$

Questi notevoli impulsi energetici sono stati effettivamente raggiunti, anche se attraverso arrangiamenti dell'apparecchiatura laser più complicati di quelli descritti qui.

In questo esempio abbiamo postulato una circostanza ideale, e cioè l'inversione totale della popolazione, in cui lo stato fondamentale resta virtualmente vuoto. L'inversione di popolazione effettiva che si realizza in laser al rubino reale sarebbe molto inferiore a quella totale. Per questa e altre ragioni, l'impulso di energia che si ottiene in pratica è molto minore del limite massimo da noi calcolato.

52-8 STRUTTURA MOLECOLARE

Capire come è fatta la struttura degli atomi è il primo passo nel procedimento che porta verso l'eventuale comprensione dell'intima struttura degli oggetti macroscopici. Il passo successivo consiste nello studio di come gli atomi si legano fra loro per formare le molecole.

La forza responsabile del legame che tiene insieme gli atomi di una molecola è la stessa forza elettrostatica che lega gli elettroni agli atomi. Però di norma gli atomi sono nel loro insieme elettricamente neutri e pertanto non esercitano forze elettrostatiche l'un con l'altro. Per costituire i vincoli molecolari tra gli atomi deve pertanto avvenire un certo riadattamento della struttura elettronica negli atomi.

Si consideri ad esempio una molecola d'idrogeno, H_2 (fig. 16*a*). La distanza che separa questi due protoni in una molecola di H_2 è sperimentalmente stabilita in 0.074 nm, valore confrontabile con il raggio dell'orbita elettronica più interna per l'*atomo* d'idrogeno, pari a 0.0529 nm. L'elettrone singolo dell'atomo d'idrogeno sembra così acquistare un partner utile a riempire il primo strato s, e quindi ciascun elettrone di un atomo H si può considerare come accoppiato con l'altro elettrone nello stesso strato. (Naturalmente gli elettroni sono identici e, in accordo con le regole quantistiche sull'indistinguibilità delle particelle, non possiamo più parlare di due elettroni, ciascuno appartenente al proprio atomo con identità separate. Diremo invece che nel campo elettrostatico combinato dei due protoni si muove una coppia di elettroni, rappresentati da una funzione d'onda a due elettroni.)

Possiamo anche pensare a questo legame come a una compartecipazione di elettroni. Gli elettroni non «appartengono» a nessuno dei due protoni. Infatti ciascun protone attrae entrambi gli elettroni e questa forza d'attrazione è sufficiente a sovrastare la forza coulombiana repulsiva tra i protoni. (Un fenomeno analogo, che coinvolge un tipo ben differente di particella condivisa, è responsabile del legame tra due protoni nel nucleo di un atomo.)

Questo tipo di legame molecolare, basato su una paritetica compartecipazione di elettroni è detto legame *covalente*. Le molecole che contengono due atomi dello stesso elemento realizzano esempi comuni di legami covalenti. Una misura dell'intensità di questo legame è

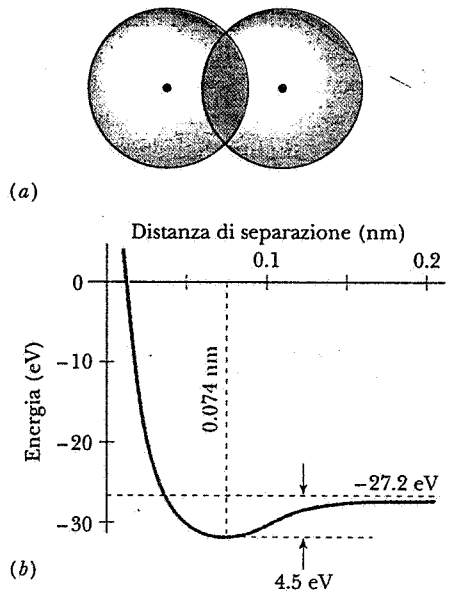


Figura 16 (*a*) La sovrapposizione degli elettroni s dell'idrogeno nella formazione della molecola di H_2. (*b*) L'energia totale dei due elettroni nello stato legato della molecola d'idrogeno, in funzione della distanza di separazione tra i due atomi. Quando gli atomi vengono allontanati a grande distanza, la somma delle loro energie è −27.2 eV (il doppio dell'energia di un singolo elettrone nell'atomo d'idrogeno, −13.6 eV). L'energia minima del complesso molecolare è di −31.7 eV, che si verifica quando la distanza è di 0.074 nm.

data dall'*energia di dissociazione*, l'energia necessaria per spezzare la molecola dividendola in due atomi neutri. Per l'H_2 l'energia di dissociazione è 4.5 eV, come si legge nella figura 16*b*. È possibile avere un legame covalente anche negli atomi in cui gli elettroni più esterni si trovano nello strato p, come nel caso dell'O_2 o dell'N_2. In quest'ultimo caso la condivisione dei tre elettroni 2p di ciascun atomo dà una somma totale di sei elettroni 2p, una configurazione che (in un atomo separato) corrisponderebbe a uno strato completo; la molecola di N_2 è pertanto molto stabile e l'energia necessaria per dissociare la molecola è 9.8 eV. Nell'O_2 invece vengono a sommarsi otto elettroni 2p, che è una configurazione meno stabile, tanto è vero che l'energia di dissociazione di O_2 è solo 5.1 eV. In termini pratici questa differenza rende O_2 più reattivo di N_2. Le molecole di O_2 possono essere scisse con reazioni chimiche relativamente modeste, come per esempio l'ossidazione dei metalli esposti all'aria. La molecola di F_2 (dieci elettroni 2p) è ancora meno stabile di O_2; la sua energia di dissociazione è di soli 1.6 eV, meno dell'energia di un fotone di radiazione visibile, e, come risultato, F_2 può dissociarsi per semplice esposizione alla luce.

I legami molecolari covalenti possono stabilirsi anche tra atomi dissimili, e persino nei casi in cui gli elettroni in compartecipazione provengono da differenti strati atomici. I legami tra gli elettroni s e p sono comuni, per esempio nell'H_2O (l'elettrone s «apparterrebbe» ad H e quello p all'O, come illustra la figura 17*a*) e negli idrocarburi (H «cede» elettroni s e C elettroni p). Possiamo pensare che gli elettroni p abbiano funzioni d'onda le cui superfici di maggior probabilità formano dei lobi con gli assi orientati come le coordinate (si veda per esempio la figura 18 del capitolo 51). Un elettrone s può attaccarsi a uno qualsiasi di questi lobi. Nell'H_2O ad esempio i due elettroni s da ciascuno dei due atomi H si attaccano a due elettroni p diversi. Ci si potrebbe quindi attendere che l'angolo compreso tra le due direzioni di legame nell'H_2O sia di 90°; le misure di quest'angolo danno come risultato 104°, dimostrando che si instaura un effetto repulsivo tra i due atomi H, che finisce per allargare quest'angolo. L'ammoniaca (NH_3) è un altro esempio di questo tipo di struttura, illustrato nella figura 17*b*.

Nel carbonio coesistono gli elettroni 2s e 2p, conferendogli una valenza effettiva di 4. Questi quattro elettroni possono formare una quantità di legami covalenti con altri atomi, peculiarità che è responsabile della vasta casistica di composti organici, dalle molecole semplici come il metano fino alle strutture più complicate delle macromolecole, che costituiscono i fondamenti materiali degli esseri viventi.

All'estremità opposta del legame covalente abbiamo quei legami in cui gli elettroni non vengono condivisi,

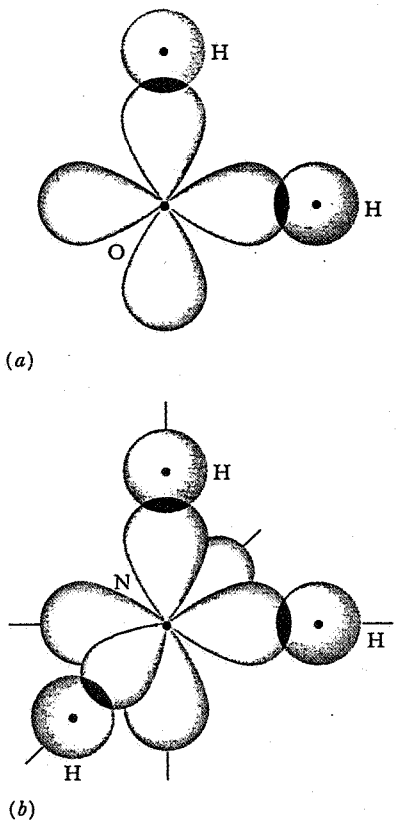


Figura 17 (*a*) Sovrapposizione degli elettroni s dell'idrogeno con gli elettroni p dell'ossigeno in una molecola di H_2O. (*b*) Sovrapposizione degli elettroni s dell'idrogeno con gli elettroni p dell'azoto in una molecola di NH_3.

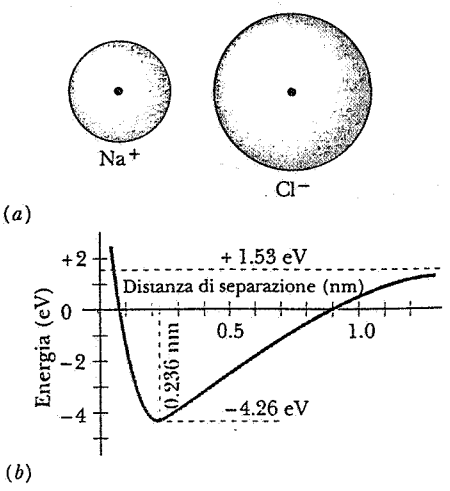


Figura 18 (*a*) Legame ionico nel NaCl. Si osservi che non esiste un'apprezzabile sovrapposizione nella distribuzione degli elettroni. (*b*) Energia di legame nel NaCl. L'energia zero corrisponde a quella degli *atomi* separati da una grande distanza. La linea tratteggiata rappresenta l'energia degli *ioni* Na^+ e Cl^- allontanati all'infinito.

ISBN 88-408-0777-2

ma appartengono decisamente o a un atomo o all'altro. In una molecola (non un cristallo solido) di NaCl il Cl manca di un elettrone per completare lo strato p, mentre lo Na ha un singolo elettrone di valenza nello strato s. Nel momento in cui due atomi neutri Na e Cl vengono avvicinati, diventa energeticamente più favorevole per l'elettrone di valenza dello Na trasferirsi al Cl, andando a riempirne lo strato p. Come risultato, restiamo con due ioni Na^+ e Cl^-, che quindi esercitano reciprocamente una forza elettrostatica e si legano assieme in una molecola di NaCl (fig. 18*a*). Gli atomi trovano però impedimento ad avvicinarsi troppo l'uno all'altro, per via del principio di Pauli, che non permette ai due strati p di sovrapporsi. La distanza a cui si arrestano in un equilibrio stabile è circa 0.236 nm e l'energia di legame (l'energia necessaria cioè per ridividere la molecola in due atomi neutri separati) è di 4.26 eV, come si legge nella figura 18*b*. I legami e le molecole che si legano in questo modo, fondandosi cioè sul legame tra ioni, sono detti *ionici*.

I legami molecolari trovano caratteri analoghi nei legami tra gli atomi che si uniscono a formare i solidi. Esistono solidi ionici (come i cristalli di NaCl), che possiamo considerare come costruiti su una sequenza di ioni positivi e negativi. Esistono anche solidi covalenti, come il diamante, la cui struttura dipende dalla sovrapposizione delle funzioni d'onda degli elettroni. Altri tipi comprendono i solidi molecolari (come il ghiaccio), in cui le molecole conservano la loro struttura elettronica e sono legate da forze molto più deboli dovute a interazioni tra i dipoli elettrici, e i solidi metallici, in cui ciascun atomo contribuisce, con uno o più elettroni propri, a formare un «mare» di elettroni, che vengono messi a disposizione dell'intera struttura solida, come in una sorta di compartecipazione collettiva. Nel prossimo capitolo prenderemo in considerazione alcuni solidi, le cui proprietà possono essere spiegate sulla base di questa configurazione strutturale.

DOMANDE

1. Qual è l'origine della lunghezza d'onda di soglia λ_{min} nella figura 1? Perché costituisce un elemento importante per dimostrare la natura quantistica dei raggi X?
2. Perché nella figura 2 il fotone emesso è stato disegnato in quella direzione? Poteva essere disegnato in qualsiasi altra direzione? Si discuta.
3. Cosa sono i raggi X caratteristici di un elemento? Come si possono utilizzare per determinare il numero atomico dell'elemento?
4. Si confronti la figura 1 con la 3. Come si può essere sicuri che i due picchi della figura 1 corrispondono davvero numericamente alle due transizioni indicate con lo stesso simbolo nella figura 3?
5. Si può fare in modo che l'atomo d'idrogeno emetta raggi X? Se sì, descrivere come; se no, spiegare perché.
6. In che cosa il diagramma dei livelli di energia dei raggi X della figura 3 differisce dal diagramma dei livelli di energia per l'idrogeno riportato nella figura 4 del capitolo 51? Sotto che aspetto i due diagrammi sono simili?
7. Quando viene esteso ai numeri atomici elevati, il grafico di Moseley della figura 4 non è più rettilineo, ma si incurva verso l'alto. Questa caratteristica influisce sulla possibilità di assegnare i numeri atomici agli elementi attraverso questo grafico?
8. Come può la teoria di Bohr, che non si adatta bene neppure all'atomo di elio ($Z = 2$), fornire una buona interpretazione degli spettri X caratteristici degli elementi, almeno per quella parte che si origina negli strati profondi dell'atomo?
9. Perché lo spettro X caratteristico cambia in modo sistematico da un elemento all'altro, mentre non è così per lo spettro di emissione nel visibile?
10. Perché ci aspettiamo che le lunghezze d'onda delle radiazioni generate in seguito a transizioni negli strati più interni dell'atomo siano più corte di quelle che hanno luogo in occasione di transizioni negli strati più esterni?
11. Dato lo spettro X caratteristico di un certo elemento, costituito da un certo numero di righe, come si può procedere al loro riconoscimento e come vengono chiamate?
12. Da quali numeri quantici dipende l'energia di un elettrone (*a*) nell'atomo d'idrogeno e (*b*) nell'atomo di vanadio?
13. Il sistema periodico degli elementi era originariamente basato sulla massa atomica, piuttosto che sul numero atomico, dato che quest'ultimo concetto non era ancora stato sviluppato. Come facevano le prime tavole periodiche a essere sostanzialmente corrette, come poi si sono dimostrate? In altre parole, come mai la massa atomica di un elemento è grossolanamente proporzionale al suo numero atomico?
14. Come la struttura del sistema periodico fa emergere la necessità di un quarto numero quantico, corrispondente allo spin dell'elettrone?
15. Se esistessero solo tre numeri quantici (cioè se non ci fosse lo spin), quanto sarebbero diverse le proprietà chimiche dell'elio?
16. Si spieghi come mai il raggio efficace di un atomo di elio è inferiore a quello di un atomo d'idrogeno.
17. Perché c'è bisogno di più energia per strappare un elettrone

all'atomo di neon ($Z = 10$) di quanta sia necessaria per rimuoverlo da un atomo di sodio ($Z = 11$)?

18. Cosa si può arguire dalla figura 5 riguardo i motivi per cui i gas rari sono chimicamente così stabili?
19. Ha qualche significato assegnare numeri quantici a un posto vuoto in un sottostrato, cha ha tutti gli altri posti già occupati?
20. Perché la serie degli elementi detti lantanidi (app. E) ha proprietà chimiche tanto simili? Come si può giustificare l'averli collocati tutti in una sola casella della tavola di Mendeleev? Come si spiega che, malgrado le loro caratteristiche chimiche simili, possano essere messi in ordine così facilmente misurando i loro spettri X caratteristici?
21. Spiegate con parole vostre come agisce il principio di minima energia nella costruzione della serie degli elementi, ed enunciate un argomento fisico che lo sostenga.
22. La figura 5 mostra che lo stato 2s ha energia minore dello stato 2p. Sapreste spiegare il perché, basando il vostro ragionamento sulle densità radiali di probabilità dei due stati (si vedano le figure 17 e 18 del capitolo 51)?
23. Se, per formare un atomo, cominciamo a collocare elettroni attorno a un nucleo spoglio, man mano che procediamo le energie dei livelli non ancora occupati cambiano. Perché? La loro energia aumenta o diminuisce man mano che si aggiungono elettroni?
24. Perché la luce laser focalizzata è intrinsecamente migliore della luce focalizzata proveniente da un filamento incandescente anche minuscolo, per delicati interventi chirurgici quali la saldatura localizzata di una retina distaccata?
25. La luce laser genera un fascio pressoché parallelo. L'intensità di un fascio laser decresce col quadrato della distanza dalla sorgente?
26. In che cosa sono simili la luce laser e quella stellare? In che cosa differiscono?
27. Arthur Schawlow, uno dei pionieri nelle applicazioni del laser, inventò un sistema per cancellare i caratteri della macchine da scrivere, basato su un fascio laser focalizzato sul carattere da eliminare. Riuscite a immaginare il principio di funzionamento?
28. In che cosa differiscono l'emissione spontanea e quella stimolata?
29. Esistono l'emissione spontanea e quella stimolata. Perché, con un ragionamento di simmetria, non esistono pure l'assorbimento spontaneo e quello stimolato? Si faccia riferimento alla figura 11.
30. Perché è necessaria un'inversione di popolazione tra due livelli atomici per realizzare l'effetto laser?
31. Cos'è uno stato metastabile? Che parte svolge nel funzionamento del laser?
32. Commentare quest'affermazione: "A parità di altre condizioni, uno schema laser a quattro livelli, come quello di figura 15, è preferibile allo schema a tre livelli, come quello riprodotto in figura 13, perché, nello schema a tre livelli, metà della popolazione di atomi al livello E_1 dev'essere portato al livello E_2 ancor prima che cominci a essere operante l'inversione."
33. Commentare questa affermazione: "Nel laser di figura 14 viene trasmessa attraverso la finestra di destra solo la luce il cui piano di polarizzazione giace sul piano della figura. E quindi si perde metà dell'energia potenzialmente disponibile." (*Suggerimento*: È vera la seconda parte dell'affermazione? Cosa succede ai fotoni il cui piano di polarizzazione è perpendicolare al piano di figura 14? Questi fotoni partecipano efficacemente al processo di amplificazione dell'emissione stimolata?)
34. Un fascio di luce emerge da un'apertura operata in una «scatola nera», e attraversa il banco del laboratorio. Come si potrebbe sperimentalmente trovare l'estensione lineare per cui questo fascio rimane coerente attraverso una sua sezione normale? Come si potrebbe decidere (senza aprire la scatola) se la sorgente nascosta è un laser o no?
35. Perché è difficile costruire un laser a raggi X?

PROBLEMI

Paragrafo 52-1 Lo spettro dei raggi X

1. Dimostrare che la lunghezza d'onda di soglia λ_{min} nello spettro X continuo soggiace alla relazione

$$\lambda_{min} = \frac{1240 \text{ pm} \cdot \text{V}}{V},$$

ove V rappresenta la differenza di potenziale applicata.

2. Determinare la costante di Planck sapendo che la lunghezza d'onda minima prodotta da elettroni di energia 40.0 keV vale 31.1 pm.
3. Qual è la minima differenza di potenziale da applicare a un tubo a raggi X , utile a produrre raggi di lunghezza d'onda pari a 0.126 nm?
4. Lo spettro X riprodotto nella figura 1 si realizza quando un fascio di elettroni aventi energia di 35.0 keV investe un bersaglio di molibdeno. Se al medesimo fascio viene sottoposto un bersaglio di argento ($Z = 47$) anziché di molibdeno, quali valori di (*a*) λ_{min}, (*b*) λ_{K_β}, (*c*) λ_{K_α} ne risultano? I livelli atomici K, L ed M per l'argento (fig. 3) hanno energia di 25.51, 3.56 e 0.53 keV rispettivamente.
5. Un bersaglio di molibdeno, bombardato con elettroni, genera gli spettri X continuo e caratteristico come in figura 1. In questa figura l'energia degli elettroni incidenti è di 35.0 keV. Se la differenza di potenziale applicata al tubo X viene portata a 50.0 kV, quali valori di (*a*) λ_{min}, (*b*) λ_{K_α}, (*c*) λ_{K_β} ne risultano?
6. La lunghezza d'onda della riga K_α per il ferro è 193 pm. (*a*) Si trovi la differenza di energia tra i due stati dell'atomo di ferro che dà luogo a questa transizione. (*b*) Si trovi la corrispondente differenza di energia per l'atomo d'idrogeno. (*c*) Perché questa differenza è così più elevata per il ferro che per l'idrogeno? (*Suggerimento*: Nell'atomo d'idrogeno lo strato K corrisponde a $n = 1$ e lo strato L a $n = 2$.)
7. Dalla figura 1 ricavare approssimativamente la differenza di energia $E_L - E_M$ per i livelli atomici del molibdeno. Si confronti con il risultato che emerge dalla figura 3.

ISBN 88-408-0777-2

8. Trovare la minima differenza di potenziale da applicare a un tubo a raggi X per produrre raggi con lunghezza d'onda uguale alla lunghezza d'onda Compton dell'elettrone. (Vedere problema 54 del capitolo 49.)
9. In un tubo cui è applicata una differenza di potenziale di 50.0 kV si producono raggi X. Se un elettrone nel bersaglio colliде tre volte prima di arrestarsi e perde nei due primi impatti metà dell'energia posseduta prima di ciascuno di essi, calcolare la lunghezza d'onda dei fotoni risultanti nelle tre collisioni. Si trascuri il rinculo dei pesanti atomi che costituiscono il bersaglio.
10. In un tubo a raggi X un bersaglio di tungsteno ($Z = 74$) viene bombardato da elettroni. (*a*) Qual è il valore minimo del potenziale d'accelerazione che permette la produzione delle righe caratteristiche K_β e K_α del tungsteno? (*b*) Per un tale potenziale d'accelerazione, qual è il valore di λ_{min}? (*c*) Calcolare λ_{K_β} e λ_{K_α}. I livelli atomici K, L ed M per il tungsteno (fig. 3) hanno energia di 69.5, 11.3 e 2.3 keV rispettivamente.
11. Un bersaglio di molibdeno ($Z = 42$) è investito da elettroni di energia pari a 35.0 keV, e ne risulta uno spettro come quello di figura 1. In questo diagramma $\lambda_{K_\beta} = 63$ pm e $\lambda_{K_\alpha} = 71$ pm. (*a*) Quali sono le energie dei corrispondenti fotoni? (*b*) Si desidera filtrare questa radiazione con un materiale che assorba molto più la riga K_β della riga K_α. Quali sostanze si possono usare? Queste sono le energie di ionizzazione per il molibdeno e per gli elementi a lui prossimi:

Z	40	41	42	43	44
Elemento	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru
E_k(KeV)	18.00	18.99	20.00	21.04	22.12

(*Suggerimento*: Una sostanza assorbe selettivamente una riga tra due presenti in una radiazione X, se i fotoni della prima hanno energia sufficiente per espellere dagli atomi un elettrone K, mentre i fotoni della seconda riga no.)

12. Le energie di legame degli elettroni dello strato K e dello strato L nel rame sono rispettivamente 8.979 keV e 0.951 keV. Se un fascio di raggi X, costituito dalla riga K_α del rame, investe un cristallo di cloruro di sodio, dà luogo a una riflessione del primo ordine a un angolo di Bragg pari a 15.9°, riflessione dovuta ai piani alternati degli atomi di sodio. Qual è la distanza tra questi piani?
13. Un elettrone inizialmente dotato di energia pari a 20.0 keV viene portato a riposo tramite due successivi eventi di frenamento, trasferendo così la sua energia cinetica ai due fotoni. La lunghezza d'onda del secondo fotone è di 130 pm maggiore della lunghezza d'onda del primo fotone emesso. (*a*) Trovare l'energia dell'elettrone dopo il suo primo rallentamento. (*b*) Calcolare le lunghezze d'onda e le energie dei due fotoni.
14. In un tubo a raggi X un elettrone inizialmente dotato di una velocità di 2.73×10^8 m/s viene frenato passando vicino a un nucleo. Viene emesso un solo fotone di energia pari a 43.8 keV. Si trovi la velocità finale dell'elettrone. (È necessario tener conto dell'effetto relativistico; si ignori l'energia ceduta al nucleo.)
15. Dimostrare che un elettrone in movimento non può emettere spontaneamente un fotone X nello spazio vuoto. È necessaria la presenza di un altro corpo (atomo o nucleo). Perché? (*Suggerimento*: Si tenga presente le conservazione dell'energia totale e della quantità di moto.)

Paragrafo 52-2 Raggi X e classificazione progressiva degli elementi

16. Usando la teoria di Bohr, calcolare il rapporto tra le lunghezze d'onda delle righe K_α del niobio (Nb) e del gallio (Ga). I dati necessari si trovano nella tavola periodica all'appendice E.
17. Qui di seguito elenchiamo le lunghezze d'onda delle righe K_α per alcuni elementi.

Ti	275 pm	Co	179 pm
V	250	Ni	166
Cr	229	Cu	154
Mn	210	Zn	143
Fe	193	Ga	134

Si costruisca un grafico di Moseley (fig. 4) e si verifichi che la pendenza della retta è conforme al valore calcolato nell'esempio 2.

Paragrafo 52-4 La tavola periodica

18. Se un nucleo di uranio ($Z = 92$) avesse un solo elettrone, quale sarebbe il raggio della sua orbita nello stato fondamentale, secondo la teoria di Bohr?
19. Due degli elettroni del litio ($Z = 3$) hanno per i loro numeri quantici n, l, m_l, m_s, i valori 1,0,0, $\pm\frac{1}{2}$. (*a*) Che numeri quantici può avere il terzo elettrone, se l'atomo si trova allo stato fondamentale? (*b*) E se l'atomo dovesse trovarsi nel suo primo stato eccitato?
20. Analizzando la figura 5, quale pensate che debba essere il numero atomico del gas nobile successivo al radon ($Z = 86$)?
21. Se l'elettrone non avesse spin e se il principio di esclusione di Pauli valesse comunque, come ne sarebbe influenzata la tavola periodica? In particolare, quali degli attuali elementi sarebbero gas rari?
22. Si supponga l'esistenza di due elettroni in uno stesso sistema, entrambi dotati di $n = 2$ ed $l = 1$. (*a*) Se non si applicasse il principio di esclusione, quante combinazioni di stati si potrebbero formulare? (*b*) Quanti stati sono resi impossibili dal principio di esclusione? Quali sono?
23. Nei metalli alcalini un elettrone rimane fuori da un guscio completo. (*a*) Usando la teoria di Bohr, calcolare la carica efficace del nucleo (in unità di carica dell'elettrone) così come visto dall'elettrone di valenza del sodio (energia di ionizzazione = 5.14 eV) e del potassio (energia di ionizzazione = 4.34 eV). (*b*) Per ciascuno dei due elementi, che frazione della carica nucleare effettiva Z ne risulta? I numeri quantici necessari si trovano nella figura 5.

Paragrafo 52-7 Come funziona un laser

24. Un laser a rubino emette luce di lunghezza d'onda pari a 694.4 nm. Quando l'impulso emesso dura 12 ps, l'energia rilasciata in un impulso è di 150 mJ. (*a*) Quant'è la lunghezza dell'impulso? (*b*) Ogni impulso di quanti fotoni è composto?
25. Si sono ormai costruiti laser piccolissimi e laser grandissimi. Il volume attivo di un laser basato sul semiconduttore GaAlAs ha un volume di soli 200 μm^3 (più piccolo di un granello di sabbia fine), eppure può fornire una potenza continua di 5 mW alla lunghezza d'onda di 0.80 μm. Si calcoli il numero di fotoni prodotti ogni secondo.
26. Si abbia un laser He-Ne che emette luce alla lunghezza d'onda di 632.8 nm con la potenza di uscita di 2.3 mW. Quanti fotoni al minuto vengono emessi da questo laser?

27. È senz'altro possibile sviluppare delle tecniche che permettono di modulare la frequenza o l'ampiezza di un fascio laser, in modo che possa servire come vettore per i segnali televisivi, esattamente come fanno ora i fasci di microonde. Si supponga anche che siano disponibili sistemi laser a frequenza «regolabile» con precisione su tutto lo spettro visibile, cioè nell'intervallo tra 400 nm e 700 nm. Se un canale televisivo occupa una frequenza con larghezza di banda pari a 10 MHz, quanti canali potrebbe soddisfare questa tecnologia laser? Si discuta sulla superiorità intrinseca della luce rispetto alle microonde nel trasporto delle informazioni.
28. Un ipotetico atomo presenta i livelli di energia uniformemente intervallati di 1.2 eV. Calcolare il rapporto tra il numero di atomi che si trovano al 13° stato eccitato rispetto a quelli che occupano l'11° stato eccitato alla temperatura di 2000 K.
29. Un certo atomo ipotetico possiede due soli livelli atomici separati in energia da un intervallo di 3.2 eV. Nell'atmosfera di una stella si trovano 6.1×10^{13} di tali atomi nello stato eccitato in ogni cm^3, mentre nello stato fondamentale ve ne sono 2.5×10^{15} per cm^3. Si calcoli la temperatura dell'atmosfera stellare.
30. Un'inversione di popolazione tra due livelli è sovente descritta assegnando al sistema una temperatura assoluta negativa. Si mostri che una tale temperatura negativa corrisponderebbe veramente a un'inversione. Quale temperatura negativa descrive il sistema dell'esempio 4, se la popolazione del livello superiore eccede quella del livello inferiore del 10.0%?
31. Un atomo ha due livelli di energia con una lunghezza d'onda di transizione pari a 582 nm. Alla temperatura di 300 K, 4.0×10^{20} atomi si trovano nel livello inferiore. (*a*) Quanti atomi occupano il livello superiore in condizioni di equilibrio termico? (*b*) Si supponga invece che vengano pompati al livello superiore 7.0×10^{20} atomi, mentre al livello inferiore rimangono sempre 4.0×10^{20}. Quanta energia si potrebbe liberare in un singolo impulso laser?
32. Gli specchi del laser di figura 14 realizzano una cavità risonante in cui si stabiliscono onde stazionarie di luce laser. Nell'intorno della lunghezza d'onda di 533 nm, quale differenza di lunghezza d'onda esiste tra due successivi stati di oscillazione possibili? Gli specchi distano tra di loro 8.3 cm.
33. Un raggio laser di elevata potenza ($\lambda = 600$ nm), con un diametro del fascio di 11.8 cm viene puntato sulla Luna, distante 3.82×10^5 km. L'allargamento del fascio è conseguenza solo degli effetti di diffrazione. L'ampiezza angolare θ del disco centrale di diffrazione (eq. 11 del cap. 46) è data da

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1.22\lambda}{d},$$

in cui d rappresenta il diametro di apertura del fascio. Trovare il diametro del disco centrale di diffrazione sulla superficie lunare.
34. Il fascio di un laser all'argon ($\lambda = 515$ nm) ha il diametro d che misura 3.00 mm e una potenza di uscita di 5.21 W. Il fascio è concentrato su uno schermo per mezzo di una lente di lunghezza focale $f = 3.50$ cm. Si forma una figura di diffrazione come quella riprodotta nella figura 13 del capitolo 46. (*a*) Dimostrare che il raggio del disco centrale è dato da

$$R = \frac{1.22 f\lambda}{d}.$$

Si può dimostrare che il disco centrale contiene l'84% della potenza incidente. Calcolare (*b*) il raggio R del disco centrale e l'intensità media (*c*) nel fascio incidente e (*d*) nel disco centrale.
35. È stata indagata la possibilità di difesa contro i missili balistici per mezzo di laser. Un fascio laser dell'intensità di 120 MW/m^2 sarebbe probabilmente in grado di incenerire e distruggere un missile corazzato nel giro di 1 s. (*a*) Se il laser ha una potenza d'uscita di 5.30 MW, una lunghezza d'onda di 2.95 μm e un diametro del fascio di 3.72 m (un laser di enorme potenza), potrebbe distruggere un missile distante 3000 km? (*b*) Potendo cambiare la lunghezza d'onda, quale sarebbe il valore minimo utile allo scopo? (*c*) In caso contrario, quale sarebbe il raggio di azione distruttiva del laser nelle condizioni previste in (*a*)? Si faccia uso dell'equazione per il disco centrale data nel problema 34 e si assuma la lunghezza focale pari alla distanza del bersaglio.
36. Il mezzo attivo di un certo laser al rubino ($\lambda = 694$ nm) è un cristallo sintetico di rubino del diametro di 1.0 cm e lungo 6.0 cm. Il cristallo è argentato a un'estremità e parzialmente argentato dall'altra per consentire la formazione di un fascio esterno. (*a*) Si consideri il cristallo come una cavità risonante ottica in analogia a una canna d'organo chiusa e si calcoli il numero di nodi delle onde stazionarie che si instaurano lungo l'asse del cristallo. (*b*) Di che quantità $\Delta\nu$ dovrebbe spostarsi la frequenza del fascio per incrementare questo numero di un'unità? Dimostrare che $\Delta\nu$ è esattamente l'inverso del tempo necessario alla luce per coprire un percorso di andata e ritorno lungo l'asse del cristallo. (*c*) Qual è il corrispondente spostamento relativo di frequenza $\Delta\nu/\nu$? L'indice di rifrazione appropriato è 1.75.

Capitolo 53

CONDUZIONE ELETTRICA NEI SOLIDI

Si è visto nel capitolo precedente come la teoria quantistica si applichi bene ai singoli atomi isolati. Ci renderemo conto ora che questa potente teoria si adatta ugualmente bene agli insiemi di atomi legati in forma di solidi.

Ciascun solido possiede una gran quantità di caratteristiche suscettibili di essere esaminate. Per esempio, è duro o morbido? Può essere schiacciato fino a ridurlo in un foglio sottile, o può essere stirato in un filo sottile? È trasparente? Che genere di onde lo attraversano e a quale velocità? Conduce bene il calore? Quali sono le sue proprietà magnetiche? Che struttura cristallina possiede? E via di seguito. In ognuno di questi casi è interessante poter usare la teoria quantistica per analizzare le proprietà sperimentali.

In questo capitolo ci limiteremo a focalizzare una particolare proprietà dei solidi: la conduzione elettrica. Classificheremo i solidi in conduttori, isolanti, semiconduttori e superconduttori; illustreremo anche come la teoria quantistica fornisca la chiave per capire come mai alcune sostanze si comportano in un modo e altre sostanze in un altro.

53-1 ELETTRONI DI CONDUZIONE NEI METALLI

Un atomo isolato di rame possiede 29 elettroni. In un pezzo di rame solido, 28 di essi vengono mantenuti ben vincolati nei loro siti reticolari da forze elettromagnetiche e non sono liberi di muoversi attraverso il volume del solido. Il rimanente elettrone *è* invece pienamente libero di spostarsi e, se applichiamo una differenza di potenziale ai capi di un filo di rame, sono questi *elettroni di conduzione* (uno per atomo) che danno luogo alla corrente che si stabilisce nel filo.

Nel paragrafo 32-5 abbiamo affrontato questo fenomeno dal punto di vista della fisica classica, paragonando gli elettroni di conduzione in un cubo di metallo agli atomi di un gas confinato in recipiente cubico. Usando questo modello classico, abbiamo ricavato un'espressione per la resistività ρ del metallo, cioè (eq. 8 cap. 32)

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau}, \qquad (1)$$

in cui m rappresenta la massa ed e la carica dell'elettrone, n è il numero di elettroni di conduzione nell'unità di volume e τ è il tempo medio che intercorre tra una collisione e l'altra degli elettroni col reticolo.

Abbiamo dimostrato nel paragrafo 32-5 che τ è essenzialmente costante e indipendente da eventuali campi elettrici applicati dall'esterno che agiscono entro il cubo. In questo modo la resistività ρ è indipendente dalle differenze di potenziale applicate, che è un altro modo di affermare che i metalli obbediscono alla legge di Ohm.

Per quanto questo modo di ricavare la legge di Ohm costituisca un bel risultato per la fisica classica, non è semplice proseguire oltre su questa strada. Inoltre esiste un problema, la capacità termica dei metalli, sul quale la fisica classica ha da presentare una sua teoria, che sfortunatamente porta a previsioni in disaccordo con l'esperienza. E volendo andare al di là del genere di fenomeni già affrontati in tema di conduzione elettrica, sarebbe arduo ideare delle spiegazioni per il comportamento di dispositivi più complessi come il transistor, sulla base del semplice modello degli elettroni che si muovono come le molecole di un gas. Faremmo meglio a questo punto a fissare la nostra attenzione su ciò che la meccanica ondulatoria ha da offrire in proposito.

Il primo passo nel risolvere qualsiasi problema di meccanica ondulatoria consiste nello specificare l'energia potenziale della particella, che nel nostro caso supponiamo costituita da un singolo elettrone di conduzione, in funzione della sua posizione. Come ci suggerisce la figura 6 del capitolo 51, questo dato ci serve per introdurlo nell'equazione di Schrödinger. Si parte con la più semplice tra le ipotesi ragionevoli, e precisamente supponendo che l'energia potenziale sia nulla in

ISBN 88-408-0777-2

tutti i punti interni al nostro campione cubico di metallo, mentre tende a un valore infinito in tutti i punti esterni. Stiamo ancora trattando il caso come se fosse un gas fatto di elettroni, ma ora si suppone che il sistema sia governato da regole quantistiche, piuttosto che classiche.

Questa energia potenziale richiama alla memoria il problema dell'elettrone intrappolato in una buca di profondità infinita, che abbiamo risolto nel paragrafo 50-7. Si faccia attenzione però a due differenze: il problema attuale è tridimensionale, e inoltre coinvolge una buca di dimensioni macroscopiche invece che atomiche.

Rappresentiamo un elettrone di conduzione isolato, intrappolato nel suo cubo di metallo, mediante un'onda di materia (stazionaria) $\psi(\mathbf{r})$, in cui $\mathbf{r}$ è il vettore posizione, e imponiamo che la densità di probabilità $\psi^2(\mathbf{r})$ sia nulla sia sulla superficie del cubo sia in tutti i punti esterni. In questo modo esprimiamo con sicurezza la reale impossibilità per l'elettrone a fuoriuscire dal cubo metallico. Dalla figura 18 del capitolo 50 riconosciamo lo stesso tipo di procedimento già usato per un caso unidimensionale.

Se imponiamo queste condizioni al contorno per la funzione d'onda, l'equazione di Schrödinger stabilisce che l'energia totale E dell'elettrone è quantizzata, proprio come lo era per un elettrone intrappolato nella buca unidimensionale. Sussiste però un'importante differenza. Dato che il cubo di metallo è molto grande, se considerato su scala di dimensioni atomiche, il numero di onde materiali stazionarie, che possono stabilirsi entro il volume del cubo, in grado di soddisfare le condizioni al contorno poste, è enorme, e quindi gli innumerevoli livelli di energia permessi per l'elettrone giacciono strettamente vicini uno all'altro. L'esempio 1 dimostra che, per un cubo di 1 cm di lato, esistono circa 10^{20} stati discreti compresi nell'intervallo tra $E = 5.00$ eV ed $E = 5.01$ eV! Da confrontare per esempio con la limitata serie di livelli ben separati, mostrati nella figura 4 del capitolo 51 per l'atomo d'idrogeno.

È probabile che non riusciremo a maneggiare questa gran quantità di stati tutti insieme; dovremo ricorrere a metodi statistici. Invece di domandare: "Qual è l'energia di questo stato?" dovremo chiedere: "Quanti stati possiedono energia compresa tra E ed $E + dE$?"

Abbiamo già incontrato situazioni di questo tipo. Per esempio nel paragrafo 24-3, nel descrivere la velocità delle molecole in un gas ideale, concludevamo che l'unico modo di procedere era domandarsi: "Quante molecole presentano velocità comprese tra v e $v + dv$?"

Nel caso degli elettroni di conduzione, il numero di stati (per unità di volume del solido) che posseggono energia compresa tra E ed $E + dE$ si può scrivere come $n(E)dE$, dove $n(E)$ è una funzione chiamata *densità di stati*. Per il nostro «gas» (quantistico) di elettroni liberi, si può dimostrare che*

$$n(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}. \qquad (2)$$

In questo momento stiamo semplicemente contando gli stati che sono a disposizione di un singolo elettrone di conduzione. Si noti che nell'equazione 2 non compare alcuna proprietà intrinseca del materiale che costituisce il nostro campione. Riempire lo spazio di un cubo con un insieme di figure di onde stazionarie diventa un problema di pura geometria. Nel paragrafo che segue vedremo come comportarci in quest'opera di riempimento.

Qualcuno potrebbe domandarsi: "Ma, visto che i livelli di energia permessi sono così numerosi e strettamente vicini, perché non lasciamo perdere con l'idea di voler quantizzare gli stati, e assumiamo invece una distribuzione continua di energia?" Vedremo nel prossimo paragrafo che la risposta si basa sul fatto che il principio di esclusione di Pauli si applica agli elettroni in qualsiasi posizione essi si trovino, sia quando orbitano attorno a un atomo, sia quando agiscono da elettroni di conduzione nei metalli. Se è vero che gli stati possibili nel nostro problema sono un'enormità, è anche vero che sono innumerevoli gli elettroni di conduzione che possono occuparli, e il principio di Pauli consente di collocarne solo uno per ogni stato. Come conseguenza, anche se non siamo facilmente in grado di rivelare direttamente la presenza di livelli discreti di energia negli elettroni di conduzione, la loro natura quantizzata rimane una proprietà assolutamente fondamentale, con importanti implicazioni.

Esempio 1 Un cubo di rame ha il lato di 1 cm. Quanti sono gli stati disponibili per i suoi elettroni di conduzione nell'intervallo di energia compreso tra 5.00 e 5.01 eV? Si assuma che gli elettroni di conduzione si comportino come un gas di elettroni liberi (quantistici).

Soluzione Quest'intervallo di energia è così ridotto da poter affermare tranquillamente che la risposta è data da $n(E)\Delta E$, in cui il numero è inteso per unità di volume ed E e ΔE assumono i valori dati dal problema. Dall'equazione 2 abbiamo

---

* Si veda Eisberg R. e Resnick R., *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2° ed., Wiley 1985, paragrafo 11-11.

ISBN 88-408-0777-2

$$n(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$
$$= \frac{(8\sqrt{2}\pi)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})^{3/2}}{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})^3} [(5\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\text{J/eV})]^{1/2}$$
$$= 9.48 \times 10^{46}\ \text{m}^{-3}\ \text{J}^{-1} = 1.52 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\text{eV}^{-1}.$$

Si noti la necessità di convertire i valori di energia in joule prima di introdurli nell'equazione 2, anche se il risultato finale è richiesto in elettronvolt.

Il numero totale N di stati che nel cubo giacciono nell'intervallo fra $E = 5.00$ eV ed $E = 5.01$ eV è dato, chiamando a la lunghezza del lato, da

$$N = n(E)\Delta E\, a^3$$
$$= (1.52 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1})(0.01\ \text{eV})(1 \times 10^{-2}\ \text{m})^3$$
$$= 1.52 \times 10^{20}.$$

Vale a dire che nell'intervallo tra 5.00 e 5.01 eV esistono ben 1.52×10^{20} stati energetici separati. La differenza di energia media ΔE_{adj} tra un livello e il livello adiacente, nell'intervallo considerato, discende immediatamente da

$$\Delta E_{\text{adj}} = \frac{\Delta E}{N} = \frac{0.01\ \text{eV}}{1.52 \times 10^{20}} \approx 7 \times 10^{-23}\ \text{eV}.$$

Concludiamo che, anche in una banda energetica così ristretta, gli stati possibili sono innumerevoli e pertanto essi giacciono strettamente vicini uno all'altro.

Questa conclusione non dipende assolutamente dalla sostanza di cui è costituito il campione. E nemmeno è importante che il campione sia cubico; qualsiasi altra forma che racchiuda un ugual volume avrebbe dato gli stessi risultati. Ciò che invece *abbiamo* assunto come vero è che gli elettroni di conduzione si comportino come un gas di elettroni liberi (quantistici). Sarebbe come dire che la loro energia potenziale è costante (e assunta uguale a zero) in tutti i punti entro il campione. Nei metalli reali questa assunzione non è mai strettamente vera. Ciò nonostante la conclusione in sostanza resta valida: in un metallo è disponibile per gli elettroni di conduzione un gran numero di stati e questi ultimi hanno valori di energia molto vicini fra loro.

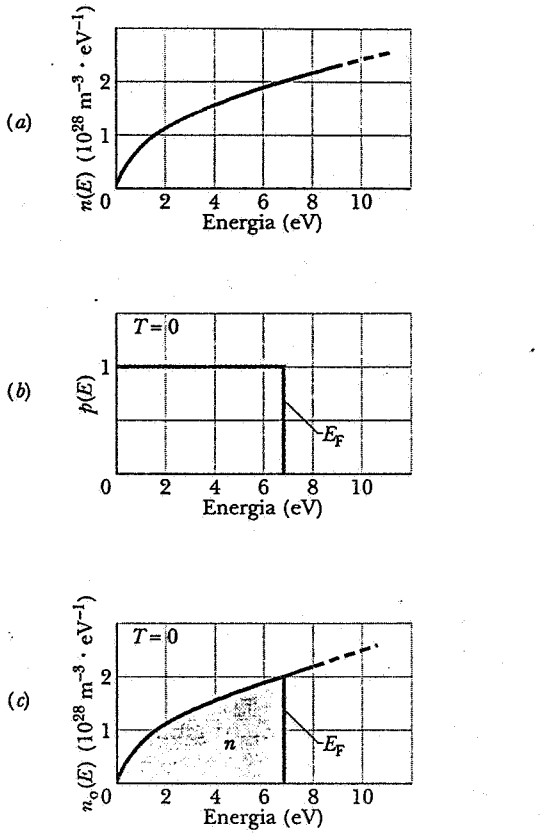


Figura 1 (*a*) Curva che descrive gli stati $n(E)$ in funzione dell'energia E. (*b*) La funzione probabilità $p(E)$ a $T = 0$. (*c*) Densità degli stati occupati $n_o(E)$, uguale al prodotto di $n(E)$ per $p(E)$. Tutti gli stati al di sotto di E_F sono occupati e tutti quelli al di sopra di E_F sono liberi.

53-2 RIEMPIMENTO DEGLI STATI PERMESSI

Ora che abbiamo visto quanti stati ci sono, siamo pronti per riempirli con gli elettroni. Abbiamo già incontrato un caso analogo nel paragrafo 52-3 quando ci siamo occupati della costruzione della tavola periodica degli elementi. In quel caso ci siamo resi conto dell'importanza capitale del principio di esclusione di Pauli, che impone di introdurre un solo elettrone per ciascuno stato. Questo principio è altrettanto valido e importante nel presente caso.

La figura 1*a* mostra la densità degli stati data dall'equazione 2. Questa funzione dà il numero degli stati permessi per ogni intervallo di energia. Però non tutti questi stati sono occupati. Possiamo riempire gli stati permessi in un metallo esattamente come abbiamo proceduto nel riempire gli stati di un atomo: aggiungiamo gli elettroni uno alla volta in ciascuno stato a partire dallo stato di minima energia fino a soddisfare le necessità di elettroni che il metallo richiede.

Consideriamo dapprima la situazione che si presenta allo zero assoluto. È questo lo stato di minor energia per il nostro campione, e possiamo realizzarlo collocando gli elettroni di conduzione negli stati liberi di energia più bassa. Questo procedimento è suggerito dalla figura 1*b*, che riporta la *funzione di probabilità* $p(E)$. Questa funzione fornisce la probabilità che uno stato corrispondente a una data energia sia occupato. A $T = 0$, tutti gli stati al di sotto di una certa energia risultano completamente occupati ($p = 1$) e gli stati aventi energia maggiore sono tutti liberi ($p = 0$). Lo stato occupato di livello più alto è chiamato *livello di Fermi* e la corrispondente energia, indicata con E_F nel-

la figura 1*b*, è detta *energia di Fermi*. Per esempio, l'energia di Fermi per il rame vale 7.06 eV.

Se moltiplichiamo la densità $n(E)$ degli stati *permessi* per la probabilità $p(E)$ che essi siano occupati, il risultato è la *densità degli stati occupati* $n_o(E)$, ossia

$$n_o(E) = n(E)p(E). \tag{3}$$

Questa quantità è riportata nel grafico di figura 1*c*.

L'area colorata nella figura 1*c* rappresenta il numero totale di stati occupati (per unità di volume). Calcolando quest'area e uguagliandola alla densità n degli elettroni di conduzione nel metallo, si ottiene un metodo per trovare l'energia di Fermi. Integrando tra $E = 0$ ed $E = E_F$ per trovare l'area, otteniamo

$$n = \int_0^{E_F} n_o(E)dE. \tag{4}$$

Sostituendo, e risolvendo l'integrale, si ha

$$n = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\int_0^{E_F} E^{1/2}\,dE = \left(\frac{8\sqrt{2}\pi m^{3/2}}{h^3}\right)\left(\tfrac{2}{3}E_F^{3/2}\right).$$

Risolvendo rispetto a E_F, si giunge a

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}. \tag{5}$$

Uno sguardo alla figura 1*c* dovrebbe bastare a smentire la comune ed errata convinzione che allo zero assoluto ogni moto venga a cessare. Bisogna invece osservare che, proprio grazie al principio di esclusione di Pauli, gli elettroni sono accatastati nell'intervallo di energia che va da zero all'energia di Fermi. L'energia *media* pertanto, nelle condizioni date nella figura 1*c*, risulta essere attorno a 4.2 eV. Per confronto, si tenga presente che l'energia cinetica traslazionale di una molecola in un gas ideale a temperatura ambiente è di soli 0.025 eV. Gli elettroni di conduzione in un metallo sono dotati dunque, alla temperatura dello zero assoluto, di un'energia ragguardevole!

È chiaro che le molecole di un gas a temperatura ordinaria si comportano in modo alquanto differente dagli elettroni di conduzione in un metallo. Con una definizione formale, diciamo che le molecole in un gas obbediscono alla statistica (classica) di Maxwell-Boltzmann, mentre gli elettroni di conduzione in un metallo seguono la statistica (quantistica) di Fermi-Dirac. Il termine «statistica» si riferisce qui alle regole formali per contare le particelle. Nella statistica di Maxwell-Boltzmann, per esempio, si assume che due particelle identiche siano fisicamente distinguibili tra di loro, quando nella statistica di Fermi-Dirac non lo sono affatto. E ancora, nella statistica di Maxwell-Boltzmann il principio di esclusione di Pauli non svolge nessuna funzione, mentre nella statistica di Fermi-Dirac costituisce un cardine fondamentale. Si veda il paragrafo 24-6 per una discussione su queste distribuzioni statistiche.

All'elevarsi della temperatura cosa succede nella distribuzione degli elettroni riportata nella figura 1? La distribuzione subisce una modificazione modesta, ma questo piccolo cambiamento ha importanti conseguenze. Nella figura 2 è riportato l'andamento delle tre curve per una temperatura $T = 1000$ K, una temperatura alla quale un metallo in una stanza buia brillerebbe vistosamente.

Le caratteristiche delle curve di figura 2 sorprendono per quanto poco esse differiscano da quelle di figura 1, relative allo zero assoluto. A $T = 0$, la funzione di probabilità $p(E)$ si mantiene strettamente pari a 1 per valori dell'energia inferiori a E_F, mentre è categoricamente nulla per valori superiori. Come si vede invece dalla figura 2*b*, a 1000 K esiste una piccola pro-

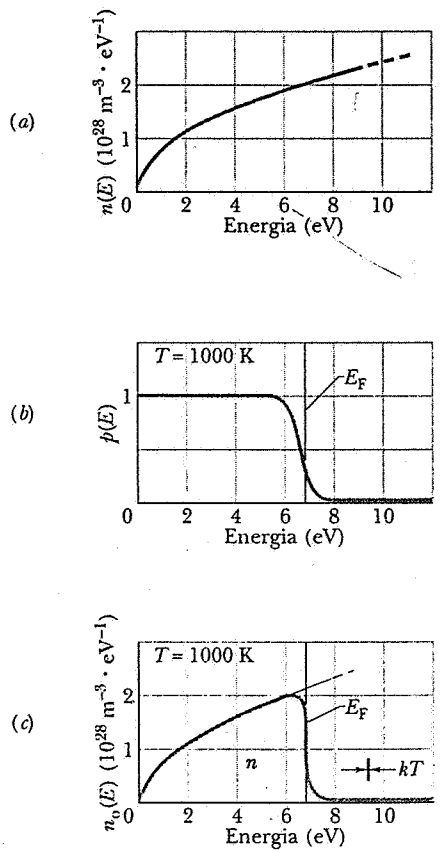


Figura 2 Come nella figura 1, ma per $T = 1000$ K. Si noti di quanto poco differiscano le curve da quelle di figura 1. (Questi grafici sono in verità ideali, in quanto si assume che gli elettroni si muovano in una regione di potenziale uniforme. Diagrammi basati su misure effettive della densità degli stati nei metalli reali hanno forme non così semplici.)

ISBN 88-408-0777-2

babilità di avere alcuni stati liberi di energia inferiore a E_F e viceversa alcuni stati occupati nella regione di energia superiore a E_F. La densità $n_o(E)$ degli stati occupati, data ancora dall'equazione 3 come prodotto di $p(E)$ per $n(E)$, è riportata nella figura 2*c*. Dato che viene occupato qualche stato di energia superiore a E_F, l'energia media è leggermente maggiore di quella che si ha allo zero assoluto, ma la differenza non è cospicua. Questa osservazione è pure in sorprendente contrasto con il comportamento di un gas ideale, per il quale l'energia cinetica media delle molecole è proporzionale alla temperatura.

Nel confronto tra le condizioni che sussistono alla temperatura $T = 0$ K e quelle che si verificano a $T = 1000$ K, si vede che tutti i cambiamenti avvengono nell'ambito di elettroni di conduzione dotati di energia prossima a quella di Fermi. Il moto della maggior parte degli elettroni rimane immutato al variare della temperatura, poiché la loro energia non può essere variata.

Vediamo le ragioni di questo comportamento. Nella figura 2*c* è riportata in scala l'entità di kT, una misura dell'energia disponibile per agitazione termica; il suo valore a 1000 K è di soli 0.086 eV. Nessun elettrone può sperare di vedere la sua energia accresciuta per agitazione termica di una quantità molte volte superiore a kT, energia che in questo contesto è d'altronde piuttosto modesta. Per l'esistenza del principio di esclusione, solo gli elettroni aventi energia prossima a quella di Fermi sono vicini abbastanza a stati liberi perché l'agitazione termica possa fornire loro quel poco di eccesso sufficiente a operare la transizione. Un elettrone con un'energia, diciamo, di 2 eV non può né acquistare né perdere energia dato che tutti gli stati energeticamente vicini a lui risultano occupati: in parole povere, non ha alcun posto libero in cui andare. In analogia con le onde del mare agitate dal vento, l'agitazione termica degli elettroni non provoca che un'increspatura sulla superficie del «mare di Fermi», mentre la grande massa sottomarina resta indisturbata.

La funzione di probabilità $p(E)$ riportata in grafico nelle figure 1*b* e 2*b* è detta *funzione di probabilità di Fermi-Dirac* e si può mostrare che assume la seguente espressione

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}, \qquad (6)$$

in cui E_F rappresenta l'energia di Fermi, che si può ora definire come l'energia a cui corrisponde la probabilità $p = \frac{1}{2}$.

Si noti che l'equazione 6, per $T = 0$ genera la forma rettangolare di figura 1*b*. Man mano che $T \to 0$ infatti, l'esponente $(E - E_F)/kT$, che compare nell'equazione 6, tende a $-\infty$ se $E < E_F$, o a $+\infty$ se $E > E_F$. Nel primo caso ne consegue che $p(E) = 1$ e nel secondo caso che $p(E) = 0$, come previsto. L'equazione 6 indica pure che la quantità importante non è E, ma piuttosto $E - E_F$, la differenza di energia tra E e l'energia di Fermi. Si può inoltre osservare che, a causa della forma esponenziale contenuta nel termine a denominatore nell'equazione 6, $p(E)$ è molto sensibile a piccole variazioni di $E - E_F$. Ciò avvalora la nostra osservazione secondo cui gli elettroni aventi energia prossima all'energia di Fermi sono i soli a svolgere una parte attiva nel processo. Come vedremo, la prima domanda che ci si deve porre quando si tratta di elettroni in un solido, sia esso un conduttore, semiconduttore o isolante, è probabilmente questa: "Nella scala delle energie, dove si trova il livello di Fermi?"

Esempio 2 Calcolare l'energia di Fermi per il rame, sapendo che il numero di elettroni di conduzione per unità di volume (vedi esempio 2, capitolo 32) è 8.49×10^{28} m^{-3}.

Soluzione Dall'equazione 5 abbiamo

$$E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{2/3}$$
$$= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{(8)(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}\left[\frac{(3)(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})}{\pi}\right]^{2/3}$$
$$= 1.13 \times 10^{-18}\ \text{J} = 7.06\ \text{eV}.$$

Esempio 3 Qual è la probabilità di occupazione di uno stato, la cui energia è di (*a*) 0.1 eV sopra il livello di Fermi, (*b*) 0.1 eV sotto il livello di Fermi, e (*c*) pari all'energia di Fermi? Si assuma una temperatura di 800 K.

Soluzione (*a*) L'esponente (adimensionale), che compare nell'equazione 6, vale

$$\frac{E - E_F}{kT} = \frac{0.1\ \text{eV}}{(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(800\ \text{K})} = 1.45.$$

Introducendo l'esponente nell'equazione 6 si ottiene

$$p(E_{(a)}) = \frac{1}{e^{1.45} + 1} = 0.19.$$

La probabilità di occupazione per questo stato è del 19%.

(*b*) Per un'energia di 0.1 eV *sotto* il livello di Fermi, l'esponente dell'equazione 6 assume lo stesso precedente valore assoluto, ma è negativo. Pertanto, dall'equazione 6,

$$p(E_{(b)}) = \frac{1}{e^{-1.45} + 1} = 0.81.$$

La probabilità di occupazione in questo stato è dell'81%.

(*c*) Quando $E = E_F$, l'esponente dell'equazione 6 si annulla e la probabilità di occupazione diventa

$$p(E_F) = \frac{1}{e^0 - 1} = \frac{1}{1 + 1} = 0.50.$$

Si noti che quest'ultimo risultato non dipende dalla temperatura. E si osservi anche che tutti i risultati dipendono piuttosto dalla differenza di energia tra lo stato considerato e il livello di Fermi che dall'energia di Fermi in sé.

Esempio 4 (*a*) Per il rame alla temperatura di 1000 K, si trovi l'energia corrispondente a una probabilità $p(E)$ del 90% che un certo stato degli elettroni di conduzione sia occupato. (Si supponga che gli elettroni di conduzione nel rame si comportino come un gas di elettroni liberi, con energia di Fermi pari a 7.06 eV.) (*b*) A questa energia, qual è il valore della funzione $n(E)$ che descrive la distribuzione in energia degli stati permessi? (*c*) E per la stessa energia, qual è invece il valore della funzione $n_o(E)$ che descrive la distribuzione in energia degli stati occupati?

Soluzione (*a*) Sostituendo nell'equazione 6 si ottiene

$$p(E) = \frac{1}{e^{\Delta E/kT} + 1} = 0.9,$$

in cui $\Delta E = E - E_F$. Risolvendo si ha $\Delta E/kT = -2.20$, sicché

$$\Delta E = -2.20kT = -(2.20)(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(1000\ \text{K})$$
$$= -0.19\ \text{eV}.$$

Per il rame, dato che $E_F = 7.06$ eV, si ottiene

$$E = E_F + \Delta E = 7.06\ \text{eV} - 0.19\ \text{eV} = 6.87\ \text{eV}.$$

(*b*) Eseguendo i calcoli come già fatto nell'esempio 1, per $E = 6.87$ eV, si ottiene $n(E) = 1.78 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1}$.

(*c*) Dall'equazione 3, sempre per $E = 6.87$ eV, abbiamo

$$n_o(E) = n(E)p(E) = (1.78 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1})(0.90)$$
$$= 1.60 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}\ \text{eV}^{-1}.$$

53-3 CONDUZIONE ELETTRICA NEI METALLI

La figura 3 rappresenta la distribuzione di Fermi delle *velocità* in un metallo. La *velocità di Fermi*, v_F, è la velocità di un elettrone dotato di energia cinetica pari all'energia di Fermi E_F. Quando non viene applicato nessun campo elettrico, gli elettroni hanno velocità comprese tra 0 e approssimativamente v_F, corrispondenti a energie che vanno da 0 ad approssimativamente E_F. La figura 3 rappresenta una tipica *componente* della velocità piuttosto che il suo valore assoluto. Viene cioè evidenziato che esiste un numero uguale di elettroni che si muovono in versi opposti, di modo che l'intensità di corrente netta sia nulla in assenza di campo elettrico.

Quando si applica un campo elettrico, gli elettroni vengono accelerati dalle forze del campo e acquistano un modesto incremento di velocità nella direzione del campo, ma in verso opposto. (Siccome gli elettroni hanno carica negativa, la forza esercitata su un elettrone è $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, che è diretta appunto in verso opposto a $\mathbf{E}$.) La curva che descrive la distribuzione delle velocità in presenza di un campo elettrico riceve quindi un leggero spostamento a destra nella figura 3, lasciandone invariato l'andamento. Ciononostante, la maggior parte degli elettroni continua a sussistere in coppie con velocità opposte, senza perciò dare contributo alla conduzione elettrica.

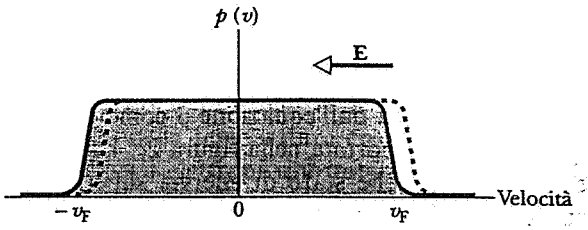


Figura 3 Distribuzione di Fermi delle velocità. In assenza di campo elettrico (linea a tratto continuo), gli stati aventi velocità fino a v_F sono completi. Quando si applica un campo elettrico E nella direzione indicata, la curva di distribuzione viene traslata verso destra (linea tratteggiata), giacché gli elettroni sono accelerati dal campo.

Gli elettroni che contribuiscono alla conduzione sono quelli di un piccolo gruppo, dotato di velocità prossime a v_F. Il campo elettrico fa sì che alcuni stati, con velocità di poco inferiore a v_F e diretta come $\mathbf{E}$, diventino liberi e viceversa diventino occupati degli stati dotati di velocità appena superiore a v_F e diretta in verso opposto a $\mathbf{E}$. Si può vedere dalla figura 3 come la velocità di deriva (la velocità media di tutti gli elettroni nella direzione opposta a quella del campo) sia di gran lunga inferiore a v_F, dato che nell'operare la media molti contributi di velocità di segno opposto si annullano a vicenda. La velocità di deriva è determinata principalmente da quei pochi elettroni che si trasferiscono dagli stati con velocità inferiore a v_F a stati con velocità superiore a v_F, sotto l'azione del campo elettrico.

La resistenza che il metallo oppone al fluire di questi elettroni è determinata dalle collisioni che gli elettroni effettuano contro gli atomi ionizzati del reticolo. Nell'esempio 5 vedremo che, per il rame a temperatura ambiente, la velocità di Fermi, che rappresenta la velocità media degli elettroni di conduzione tra una collisione e l'altra, è di 1.6×10^6 m/s, una ragguardevole frazione della velocità della luce. L'intervallo di tempo medio tra due collisioni è di 2.5×10^{-14} s e il libero cammino medio risulta di 41 nm, una lunghezza pari a circa 150 volte la minima distanza tra due atomi nel reticolo. Si potrebbe rimanere sorpresi di quan-

ISBN 88-408-0777-2

to lungo sia il percorso medio che un elettrone riesce a coprire in un reticolo di rame a temperatura ordinaria, senza urtare nessuno ione del reticolo stesso. E a temperatura più bassa, a cui corrisponde una resistività minore, riesce ad andare anche ben più lontano. Ed è in effetti una previsione forse inattesa della meccanica ondulatoria che un reticolo perfettamente periodico alla temperatura dello zero assoluto diventi totalmente «trasparente» agli elettroni di conduzione: essi non subiscono mai nessuna collisione!

Naturalmente i reticoli perfettamente periodici non esistono. Siti vacanti nel reticolo, così come atomi di impurità, sono pur sempre presenti, per quanti sforzi si facciano per eliminarli. Inoltre, a temperature superiori allo zero assoluto, il reticolo vibra e queste vibrazioni guastano la periodicità del reticolo. Alle temperature ordinarie le «collisioni» di cui abbiamo parlato sono costituite in larga misura da interazioni tra gli elettroni di conduzione e le vibrazioni del reticolo.

Esempio 5 L'energia di Fermi per il rame sia di 7.06 eV. (*a*) Qual è la velocità di un elettrone di conduzione dotato di questa energia cinetica? (*b*) La resistività del rame a temperatura ambiente è di $1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$. Qual è l'intervallo di tempo medio tra una collisione e l'altra? (*c*) Quant'è il libero cammino medio λ che discende dai precedenti risultati?

Soluzione (*a*) In tutto questo paragrafo abbiamo assunto che gli elettroni di conduzione si muovano in una regione in cui la loro energia potenziale è nulla. Per cui la loro energia totale E è tutta sotto forma di energia cinetica, e possiamo quindi scrivere, ponendo $E = E_F$,

$$E_F = \tfrac{1}{2} m v_F^2,$$

in cui v_F è la velocità di Fermi. Risolvendo rispetto a v_F, si ottiene

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m}\right)^{1/2} = \left[\frac{(2)(7.06\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}\right]^{1/2}$$
$$= 1.6 \times 10^6\ \text{m/s}.$$

Non bisogna confondere questa velocità con la *velocità di deriva* degli elettroni di conduzione, che è dell'ordine di 10^{-4} m/s ed è pertanto minore di un fattore di circa 10^{10}. Come è stato spiegato nel paragrafo 32-5, la velocità di deriva è la velocità media con cui gli elettroni effettivamente avanzano lungo un conduttore quando viene applicato un campo elettrico; la velocità di Fermi invece è la loro velocità media tra due collisioni successive.

(*b*) Risolvendo l'equazione 1 rispetto a τ, si ottiene

$$\tau = \frac{m}{ne^2\rho}$$
$$= \frac{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}{(8.49 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1.7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m})}$$
$$= 2.5 \times 10^{-14}\ \text{s}.$$

(*c*) Per trovare il libero cammino medio, eseguiamo

$$\lambda = v_F \tau = (1.6 \times 10^6\ \text{m/s})(2.5 \times 10^{-14}\ \text{s})$$
$$= 4.1 \times 10^{-8}\ \text{m} = 41\ \text{nm}.$$

Nel reticolo di rame i centri di ioni vicini si trovano alla distanza di 0.26 nm. Se ne deduce che un tipico elettrone di conduzione nel reticolo di rame a temperatura ordinaria può percorrere una distanza elevata prima di incorrere in un urto.

53-4 BANDE E INTERVALLI

La figura 4*a* illustra l'andamento dell'energia potenziale che abbiamo fin qui assunto nel descrivere il moto di un elettrone di conduzione in un metallo. L'energia potenziale è nulla entro il metallo e sale all'infinito in corrispondenza della sua superficie. Questo modello tuttavia lascia aperti alcuni problemi. Per esempio esso prevede che, a causa della barriera di potenziale infinita, nessun elettrone possa mai sfuggire dal metallo abbandonando la sua superficie. Sappiamo che ciò non è vero, perché gli elettroni possono «evaporare» dal metallo quando si eleva la sua temperatura, come nei filamenti incandescenti sotto vuoto (emissione termoionica). Possono essere espulsi anche investendo la superficie metallica con un fascio luminoso di frequenza adeguata (effetto fotoelettrico).

La figura 4*b* esprime un modo di superare agevolmente questa difficoltà, riducendo l'energia potenziale in superficie a un valore finito. Abbiamo fatto un'analoga correzione realistica (fig. 20 del cap. 50) per il caso dell'elettrone intrappolato in una buca di potenziale monodimensionale di dimensioni atomiche. La quantità ϕ, indicata nella figura 4*b*, è il *lavoro di estrazione* del metallo, definito come la quantità minima di energia che dev'essere somministrata all'elettrone per poterlo allontanare dal campione.

La figura 4*b* è stata disegnata in modo da rendere la scala delle energie compatibile con quella usata per l'atomo d'idrogeno. Esplicitamente, abbiamo stabilito che la configurazione in cui è $E = 0$ rappresenti un elettrone a riposo a distanza infinita dal campione in esame. Questa scelta è possibile perché l'energia potenziale contiene sempre una costante additiva arbitraria, e nel nostro caso siamo più interessati alla variazione dell'energia totale E piuttosto che al valore di E in sé. Su questa nuova scala delle energie, l'energia totale degli elettroni intrappolati nel metallo è negativa, come nel caso dell'atomo d'idrogeno.

L'inadeguatezza di gran lunga più importante che rimane nel modello illustrato nella figura 4*b* deriva

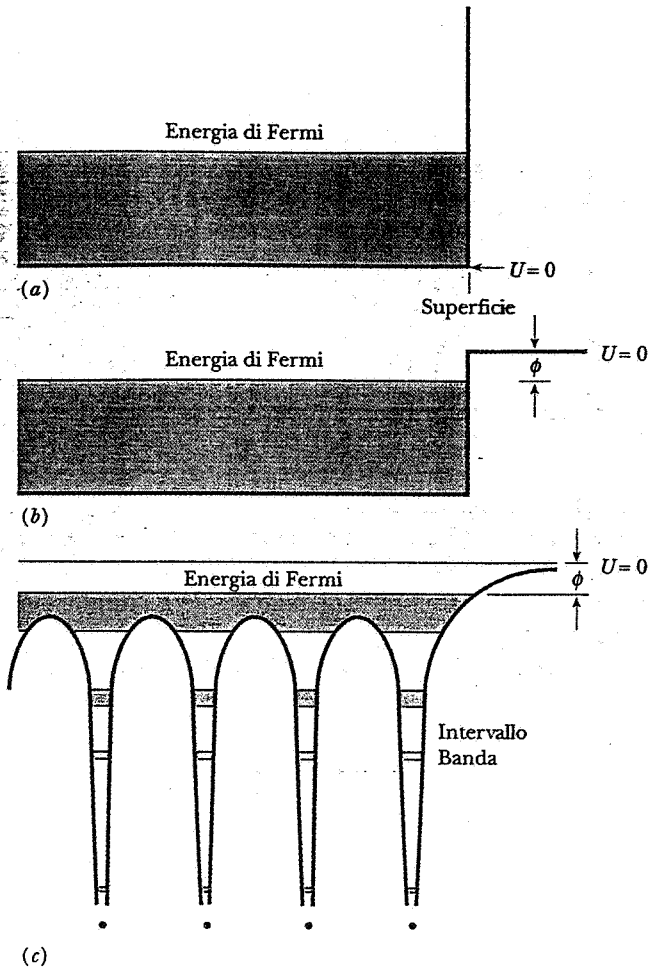


Figura 4 (*a*) Andamento dell'energia potenziale assunto idealmente per un metallo nel modello a gas di elettroni liberi. (*b*) Un andamento più realistico, che ipotizza un salto finito di energia potenziale, in corrispondenza della superficie del campione. (*c*) Un andamento ancora più realistico, che tiene conto della sequenza di ioni nel reticolo cristallino (raffigurati come punti in basso). Le regioni colorate sono le bande di energia permessa per gli elettroni. Ad essi è invece impedito assumere valori di energia compresa negli intervalli tra le bande.

dall'assumere che l'energia potenziale di un elettrone di conduzione è costante in tutto il volume del metallo. Si ignora cioè che gli elettroni di conduzione circolano entro un reticolo costituito da una schiera di ioni carichi positivamente. È abbastanza sorprendente in effetti che siamo riusciti a indagare soddisfacentemente il fenomeno di resistività dei metalli senza tener minimamente conto delle variazioni di energia potenziale indotte dagli ioni che formano il reticolo. Non siamo stati in grado però di rispondere a domande del tipo: "Perché il rame è un conduttore e il diamante non lo è?" Prendendo in considerazione la natura periodica del reticolo, potremo rispondere a questa domanda e proseguire perfino ben oltre.

La figura 4*c* mostra l'andamento dell'energia potenziale per un sistema in cui si tiene conto della presenza degli ioni nel reticolo. Introducendo questa funzione energia potenziale (o almeno una sua forma approssimata) nell'equazione di Schrödinger, emerge un nuovo interessante fenomeno. Come si vede dalla figura 4*c*, *gli stati permessi sono ora confinati in alcune bande, separate da intervalli di energia entro i quali non può esistere alcuno stato.* Si osservi che gli elettroni situati subito al di sotto del livello di Fermi possono muoversi liberamente spaziando in tutto il volume del reticolo, ma agli elettroni con energia minore, gli *elettroni interni*, questa facoltà è negata. Vediamo come spiegare in termini fisici l'esistenza di queste bande permesse e di questi intervalli proibiti.

La minima distanza tra due ioni vicini in un reticolo di rame è 0.26 nm. Immaginiamo ora invece due atomi di rame a una distanza molto maggiore, diciamo 50 nm, tale che essi si possano definire «isolati»; si veda la figura 5*a*. In ciascun atomo i 29 elettroni sono sistemati nei livelli mostrati nella figura 5*b*.

Avviciniamo ora i due atomi, in modo che l'elettrone più esterno in ciascuno dei due atomi possa essere influenzato, anche se debolmente, dalle forze esercitate su di esso dall'atomo vicino. Nel linguaggio della meccanica ondulatoria, diciamo che le loro funzioni d'onda cominciano a sovrapporsi. Possiamo affermare, senza ora provarlo, che le due funzioni d'onda sovrapponentisi possono essere combinate in due modi diversi, dando luogo a due stati aventi energia (leggermente) differente, come si vede nella seconda colonna di figura 6. Poiché la sovrapposizione è più pronunciata per gli elettroni esterni, la separazione nei due livelli energetici è per essi maggiore che per gli elettroni più interni.

Per estensione, se raggruppiamo N atomi di rame in un reticolo, ciascun livello dell'atomo prima isolato si separa in N livelli nel solido cristallino. Così facendo quello che era il livello 1s per l'atomo isolato diventa la banda 1s nel solido, e così via. La figura 6 illustra il procedimento con un disegno.

In questa descrizione gli intervalli proibiti ricevono una spiegazione immediata, grazie all'analogia ormai familiare con la struttura a livelli dell'atomo isolato. Potremmo davvero affermare che Niels Bohr, persin prima dell'avvento della meccanica quantistica, «inventò» gli intervalli proibiti di energia quando stabilì: "Assumiamo che gli atomi possano sussistere, senza irraggiare, in una serie discreta di stati stazionari a energia definita, e che *gli stati di energia intermedia siano proibiti.*"

ISBN 88-408-0777-2

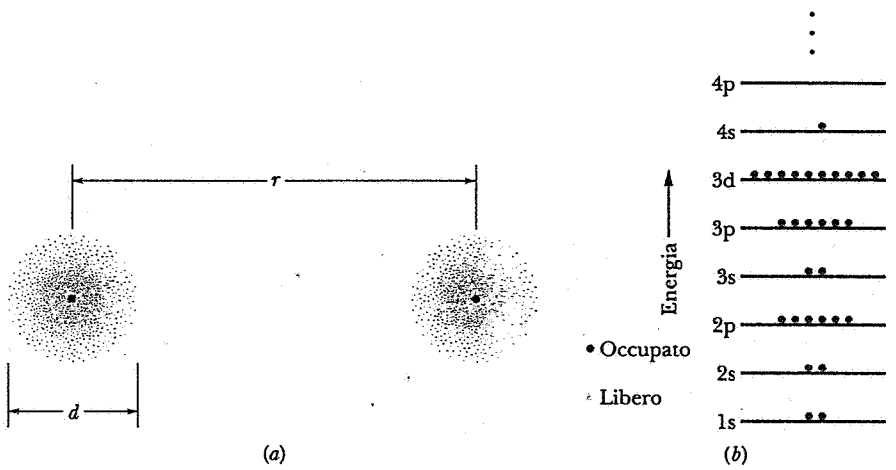


Figura 5 (*a*) Due atomi neutri di rame di diametro *d*, separati da una distanza *r*, con $r \gg d$. (*b*) Gli atomi sono sistemi indipendenti e ciascuno nel proprio stato fondamentale ha la stessa assegnazione di numeri quantici per i propri elettroni, indicata in figura. La scala delle energie è puramente simbolica.

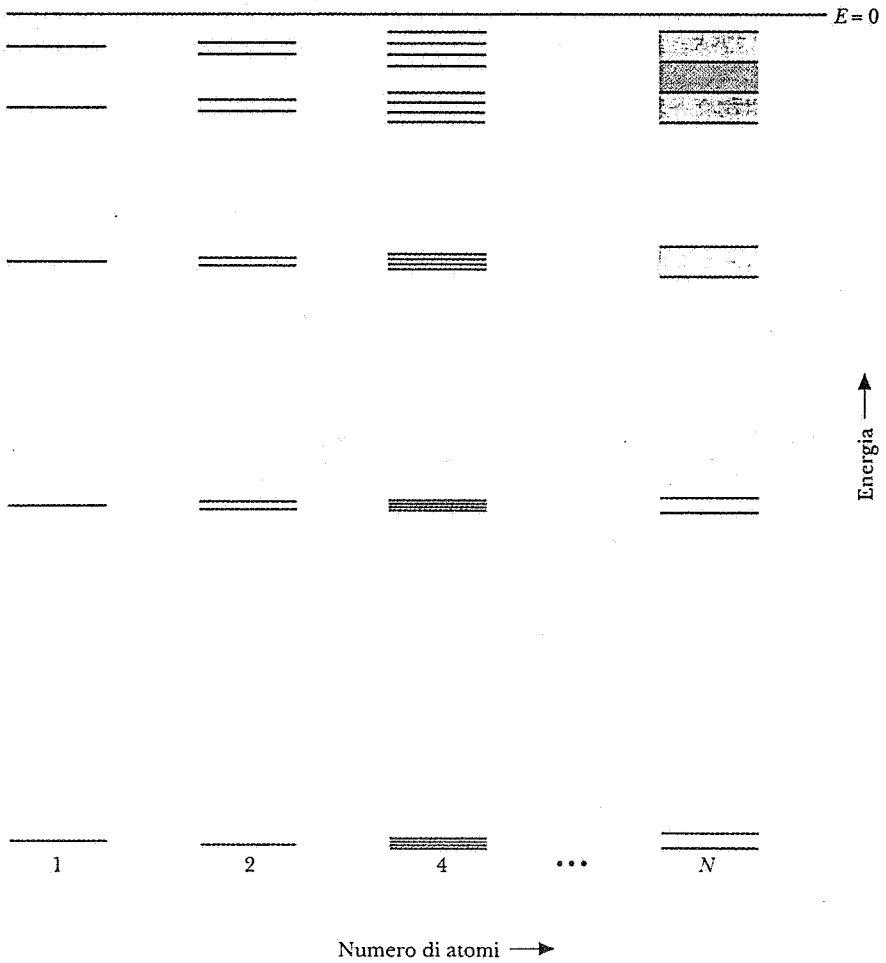


Figura 6 Man mano che gli atomi vengono affiancati per formare un reticolo, i livelli degli atomi precedentemente isolati si espandono, formando a un certo punto delle bande di livelli strettamente vicini. Nel caso illustrato le bande di energia più alta finiscono col sovrapporsi.

53-5 CONDUTTORI, ISOLANTI E SEMICONDUTTORI

La figura 7*a* rappresenta la struttura a bande di un conduttore, come il rame. La sua caratteristica peculiare consiste nell'avere la banda di energia più alta, tra quelle che contengono qualche elettrone, occupata solo parzialmente. Sussistono in questa banda degli stati liberi al di sopra del livello di Fermi, di modo che, se si applica un campo elettrico E, ogni elettrone di questa banda ha la possibilità di incrementare la sua quantità di moto nella direzione $-E$, contribuendo così a creare la corrente. Le bande di energia inferiore sono totalmente occupate e non possono partecipare ai processi di conduzione, dato che i loro vettori velocità si annullano a coppie.

La figura 7*b* rappresenta un isolante. La sua caratteristica peculiare consiste nell'avere la banda di energia più alta, tra quelle che contengono qualche elettrone, completamente occupata, e nell'avere l'intervallo proibito immediatamente sovrastante, segnato con E_g in figura, di entità considerevole. Per «considerevole» intendiamo un'energia tale che $E_g \gg kT$, in modo che la probabilità per un elettrone di poter saltare, per agitazione termica, nella banda vuota superiore sia trascurabile. Se si applica un campo elettrico a un isolante, nessun elettrone ha modo di reagire e non si genera quindi corrente.

Il carbonio, nella sua forma cristallina del diamante, è un eccellente isolante; il suo intervallo proibito è infatti di 5.5 eV, circa 200 volte il valore di kT a temperatura ambiente.

La figura 7*c* rappresenta un semiconduttore. Differisce da un isolante in quanto il suo intervallo proibito E_g corrisponde a una differenza di energia sufficientemente piccola da permettere agli elettroni di attraversarla per eccitazione termica, almeno in un numero di casi apprezzabile, a temperature ordinarie. Ciò permette di trovare alcuni elettroni nella banda (quasi vuota) chiamata *di conduzione*, i quali lasciano un corrispondente numero di posti vacanti, dette *lacune*, o anche *buche* o *cavità*, nella banda *di valenza* (pressoché piena). In una banda quasi piena torna più comodo analizzare i contributi alla conduzione elettrica considerando il moto delle lacune, che si comportano in modo analogo a particelle cariche *positivamente*.

Il silicio rappresenta il nostro tipico semiconduttore di riferimento. Ha la stessa struttura cristallina del diamante, ma il suo intervallo di energia proibito è considerevolmente inferiore: $E_g = 1.1$ eV. Alla temperatura dello zero assoluto, condizione in cui è assente l'agitazione termica, tutti i semiconduttori sono isolanti. A una qualsiasi temperatura superiore, la probabilità che un elettrone possa saltare l'intervallo proibito dipende in maniera determinante dall'ampiezza di quest'intervallo. Cosicché la distinzione tra un isolante e un semiconduttore è in un certo qual modo arbitraria. Ciò non ci impedisce tuttavia di chiamare isolante il diamante ($E_g = 5.5$ eV) e semiconduttore il silicio ($E_g = 1.1$ eV).

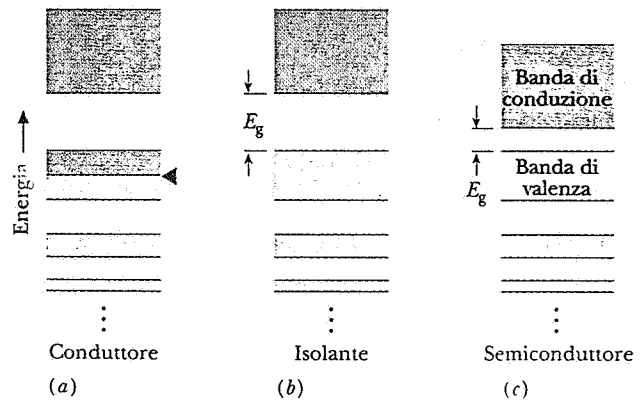


Figura 7 Una rappresentazione idealizzata delle bande energetiche per (*a*) un conduttore, (*b*) un isolante e (*c*) un semiconduttore. Le bande complete sono colorate di giallo, mentre le bande vuote sono in grigio. Il triangolino rosa indica il livello di Fermi per il conduttore.

Esempio 6 Qual è la probabilità che, a temperatura ambiente, venga occupato uno stato al limite inferiore della banda di conduzione, per il diamante e per il silicio? Supponiamo che l'energia di Fermi abbia il valore intermedio nell'intervallo tra la banda di valenza e la banda di conduzione.

Soluzione Per uno stato al limite inferiore della banda di conduzione, la differenza di energia $E - E_F$ è pari a $0.5E_g$, se il livello di Fermi si trova a metà intervallo. A temperatura ambiente (300 K), $kT = 0.026$ eV. Abbiamo di conseguenza $E - E_F \gg kT$ e pertanto possiamo approssimare la funzione di probabilità di Fermi-Dirac (eq. 6) come segue:

$$p(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \approx e^{-(E-E_F)/kT} = e^{-E_g/2kT}.$$

Per il diamante $E_g = 5.5$ eV e quindi

$$p(E) = e^{-(5.5\text{ eV})/2(0.026\text{ eV})} = 1.2 \times 10^{-46}.$$

Per il silicio $E_g = 1.1$ eV e dunque

$$p(E) = e^{-(1.1\text{ eV})/2(0.026\text{ eV})} = 6.5 \times 10^{-10}.$$

In un centimetro cubo di materiale, contenente press'a poco 10^{23} atomi, la probabilità di trovare anche un solo elettrone nella banda di conduzione del diamante è trascurabile, mentre dovrebbero esserci nella banda di conduzione del silicio all'incirca 10^{13} elettroni (ed un ugual numero di lacune nella banda di valenza), disponibili per la conduzione elettrica. Questo calcolo dimostra l'e-

ISBN 88-408-0777-2

norme differenza nella conducibilità che risulta da una modesta variazione nella differenza di energia che compete all'intervallo proibito e illustra chiaramente la diversità di comportamento tra isolanti e semiconduttori. In un centimetro cubo di materiale conduttore, infine, dovrebbero esserci circa 10^{23} elettroni disponibili per la conduzione elettrica.

Semiconduttori

Nell'esempio precedente abbiamo confrontato le proprietà di un semiconduttore con quelle di un isolante. La tabella 1 mette a confronto alcune caratteristiche di un tipico semiconduttore (silicio) e di un tipico conduttore (rame). Approfondiamo ora queste proprietà in maggior dettaglio.

1. *Densità dei portatori di carica, n.* Il rame dispone di molti più portatori di carica del silicio, con un rapporto di circa 10^{13}. Per il rame i portatori di carica sono gli elettroni di conduzione, circa 1 per atomo. La figura 7*c* mostra che, alla temperatura dello zero assoluto, il silicio non ha neanche un portatore di carica. A temperatura ordinaria, cui si riferisce la tabella 1, i portatori di carica si manifestano solo perché, all'equilibrio termico, l'agitazione termica fa sì che un certo numero (molto piccolo) di elettroni salti nella banda di conduzione, lasciando un numero equivalente di posti liberi (lacune) nella banda di valenza.

Le lacune presenti nella banda di valenza di un semiconduttore contribuiscono anch'esse efficacemente al trasporto della carica, giacché esse permettono una certa libertà di movimento degli elettroni all'interno della banda. Se si applica un campo elettrico a un semiconduttore, gli elettroni della banda di valenza, carichi negativamente, si spostano nella direzione $-E$. Di conseguenza le lacune si spostano nella direzione del campo e si comportano come se fossero particelle dotate di carica $+e$, e come tali noi le considereremo. La conduzione realizzata attraverso il movimento delle lacune è un'importante caratteristica dei semiconduttori.

2. *Resistività, ρ.* A temperatura ordinaria la resistività del silicio è notevolmente superiore a quella del rame, di un fattore di circa 10^{11}. Per entrambi gli elementi la resistività risulta determinata dall'equazione 1. Come si evince da questa equazione, la resistività aumenta col decrescere di n, la densità dei portatori di carica. La notevole differenza di resistività tra il silicio e il rame può essere messa in relazione alla considerevole differenza nella densità dei portatori di carica n. (L'intervallo di tempo medio τ tra due collisioni è pure diverso nel rame e nel silicio, ma il suo effetto sulla resistività è mascherato dall'enorme differenza nella densità dei portatori di carica.)

Come termine di confronto, citiamo il valore di resistività di un buon isolante (quarzo fuso o diamante, ad esempio), che può arrivare a $10^{20}\ \Omega \cdot m$, circa 10^{28} volte quello del rame a temperatura ambiente. Poche grandezze fisiche presentano in natura un così ampio campo di valori misurabili, come la resistività elettrica.

3. *Coefficiente termico di resistività, α.* Questa quantità rappresenta (eq. 16, cap. 32) la variazione relativa della resistività ρ per unità di salto termico, ovvero

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}.$$

La resistività del rame e degli altri metalli *aumenta* col crescere della temperatura ($d\rho/dT > 0$). Questo accade perché, man mano che la temperatura si alza, le collisioni diventano via via più frequenti, riducendo quindi τ nell'equazione 1. Per i metalli la densità dei portatori di carica n, che pure compare nell'equazione 1, è indipendente dalla temperatura.

Al contrario la resistività del silicio (e degli altri semiconduttori) *diminuisce* all'aumentare della temperatura ($d\rho/dT < 0$). Ciò avviene perché nell'equazione 1 la densità dei portatori di carica n cresce rapidamente con la temperatura. La diminuzione di τ or ora segnalata per i metalli si manifesta anche nei semiconduttori, ma i suoi effetti sulla resistività vengono sovrastati dal rapidissimo incremento della densità dei portatori di carica. In laboratorio è possibile, nel confronto con un tipico metallo, distinguere un semiconduttore dall'alto valore di resistività ρ e dall'elevato, e soprattutto negativo, valore del coefficiente termico di resistività α.

TABELLA 1 ALCUNE PROPRIETÀ ELETTRICHE DEL RAME E DEL SILICIO[a]

	Rame	*Silicio*
Tipo di materiale	Conduttore	Semiconduttore
Densità dei portatori di carica[b] n (m^{-3})	9×10^{28}	1×10^{16}
Resistività ρ (Ω·m)	2×10^{-8}	3×10^{3}
Coefficiente termico di resistività α (K^{-1})	$+4 \times 10^{-3}$	-70×10^{-3}

[a] Tutti i valori sono riferiti alla temperatura ambiente.
[b] Include, per il silicio, sia gli elettroni sia le lacune.

53-6 SEMICONDUTTORI DROGATI

Le proprietà di un semiconduttore possono essere modificate in modo sostanziale, introducendo deliberatamente alcune impurità nel reticolo, cioè sostituendo al-

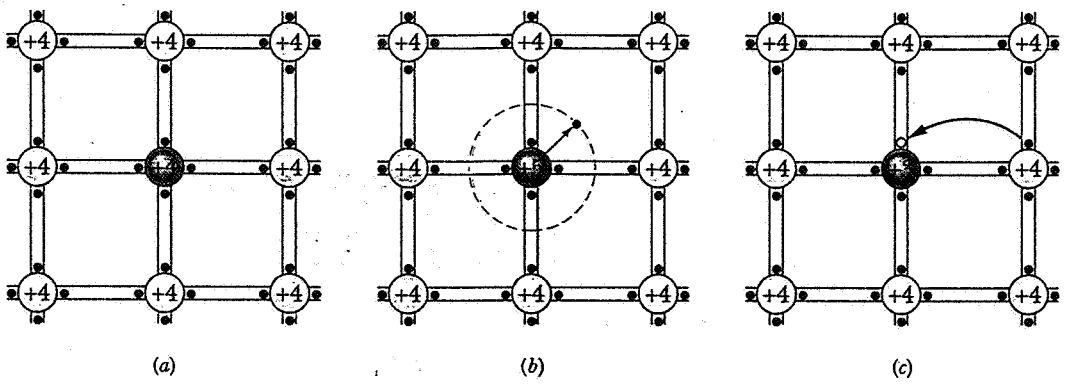


Figura 8 (*a*) Rappresentazione bidimensionale del reticolo di silicio. Ciascuno ione di silicio (con carica pari a + 4*e*) è legato con ciascuno dei suoi quattro ioni più vicini mediante un legame covalente a due elettroni. I punti individuano questi elettroni di valenza. (*b*) Un atomo di fosforo (valenza 5) sostituisce un atomo di silicio, assumendo la funzione di atomo donatore. (*c*) Un atomo di alluminio (valenza 3) sostituisce un atomo di silicio, assumendo la funzione di atomo accettore.

cuni degli atomi del semiconduttore con atomi di altri elementi opportuni. Questa tecnica è chiamata *drogaggio*. Descriveremo ora il semiconduttore *estrinseco* che risulta da questo processo, in contrapposizione alle proprietà della pura sostanza semiconduttrice *intrinseca*, cioè non drogata. Praticamente tutti i dispositivi a semiconduttore oggi in uso sono basati su materiali estrinseci.

La figura 8*a* è una rappresentazione bidimensionale di un reticolo di silicio puro. Ciascun atomo di silicio ha 4 elettroni di valenza e forma un legame covalente, che coinvolge cioè due elettroni per ciascuno dei suoi 4 atomi più vicini; gli elettroni che partecipano al legame vanno a costituire la banda di valenza della sostanza.

Nella figura 8*b* un atomo di silicio è stato sostituito con un atomo di fosforo, che ha 5 elettroni di valenza. Quattro di questi si legano con gli atomi di silicio vicini, mentre il restante elettrone rimane disponibile anche se legato al suo atomo di fosforo, come si vede nella figura 8*b*. L'eccitazione per agitazione termica e il conseguente salto nella banda di conduzione risulta molto più facile per quest'ultimo elettrone piuttosto che per gli elettroni impegnati nei legami covalenti.

L'atomo spurio di fosforo è detto atomo *donatore*, perché volentieri «dona» un elettrone alla banda di conduzione. Si può dire che l'elettrone eccedente nella figura 8*b* giace, in termini di energia, su un livello di «donazione» (fig. 9*a*), che si trova separato dal limite inferiore della banda di conduzione di un intervallo di energia E_d, in modo che di norma $E_d \ll E_g$. Aggiungendo atomi donatori si può incrementare enormemente la densità degli elettroni nella banda di conduzione.

I semiconduttori drogati con atomi donatori sono chiamati semiconduttori di tipo n, dove «n» sta per «negativo», perché i portatori di carica negativi (elettroni) superano in numero di gran lunga i portatori di carica positivi (lacune). Nei semiconduttori di tipo n, gli elettroni nella banda di conduzione sono detti *portatori maggioritari*, mentre le lacune nella banda di valenza sono dette *portatori minoritari*.

La figura 8*c* mostra un reticolo di silicio in cui uno degli atomi è stato rimpiazzato con un atomo di alluminio, che presenta 3 elettroni di valenza. In questo caso «manca» un elettrone ed è molto facile per l'atomo di alluminio «impadronirsi» di un elettrone di va-

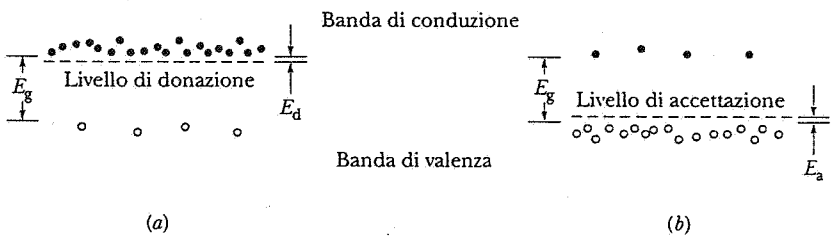


Figura 9 (*a*) Un semiconduttore di tipo n, in cui è evidenziato un livello di donazione partendo dal quale gli elettroni eccedenti contribuiscono, come portatori maggioritari, ad arricchire la banda di conduzione. Si vede anche un piccolo numero di lacune (portatori minoritari) nella banda di valenza. (*b*) Un semiconduttore di tipo p, in cui è evidenziato un livello di accettori, che contribuiscono ad arricchire il numero di lacune (portatori maggioritari) nella banda di valenza. È mostrato anche un piccolo numero di elettroni (portatori minoritari) nella banda di conduzione.

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 2 DUE TIPICI SEMICONDUTTORI ESTRINSECI

	Tipo n	*Tipo* p
Materiale di base	Silicio	Silicio
Elemento drogante	Fosforo	Alluminio
Tipo di drogante	Donatore	Accettore
Valenza del drogante	5	3
Differenza di energia dell'intervallo (E_d, E_a)	0.045 eV	0.057 eV
Portatori maggioritari	Elettroni	Lacune
Portatori minoritari	Lacune	Elettroni
Carica dello ione drogante	$+e$	$-e$

lenza appartenente a un atomo di silicio vicino, creando così una lacuna nella banda di valenza.

L'atomo di alluminio è detto atomo *accettore*, perché volentieri «accetta» un elettrone dalla banda di valenza. L'elettrone così ricevuto va a collocarsi, nella scala delle energie, su un livello di accettazione, come è mostrato nella figura 9*b*. Questo livello è separato dal limite superiore della banda di valenza da un intervallo di energia E_a, per il quale è normalmente $E_a \ll E_g$. L'aggiunta di atomi accettori può incrementare notevolmente il numero delle lacune nella banda di valenza.

I semiconduttori drogati con atomi accettori vengono chiamato semiconduttori di tipo p, ove «p» sta per «positivo», perché i portatori di carica positiva (lacune) sopravanzano largamente in numero i portatori negativi (elettroni). Nei semiconduttori di tipo p i portatori maggioritari sono le lacune della banda di valenza, mentre i portatori minoritari sono gli elettroni nella banda di conduzione.

La tabella 2 riassume le proprietà di un tipico semiconduttore n e di un tipico semiconduttore p. Si noti in particolare che gli atomi ionizzati donatori e accettori, per quanto dotati di carica, non sono portatori di carica, perché a temperature ordinarie essi rimangono imprigionati nei loro siti reticolari.

Esempio 7 La densità degli elettroni di conduzione nel silicio puro a temperatura ambiente è di 10^{16} m^{-3}. Si supponga di voler incrementare, drogando il reticolo con fosforo, questo numero di un fattore 10^6. Che frazione di atomi di silicio deve essere sostituita con atomi di fosforo? (Si assuma che, a temperatura ambiente, l'agitazione termica sia sufficiente a provocare la cessione da parte di tutti gli atomi di fosforo del loro elettrone eccedente alla banda di conduzione.)

Soluzione La densità n_P degli atomi di fosforo dev'essere circa $(10^6)(10^{16}\ \text{m}^{-3})$ ossia $10^{22}\ \text{m}^{-3}$. La densità degli atomi di silicio in un reticolo di silicio puro si può trovare con la formula

$$n_{Si} = \frac{N_A d}{M},$$

in cui N_A è la costante di Avogadro, d è la densità del silicio (2330 kg/m^3) e M è la massa molare del silicio (28.1 g/mol). Introducendo questi valori, si ha

$$n_{Si} = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{mole}^{-1})(2330\ \text{kg/m}^3)}{0.0281\ \text{kg/mole}} = 5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}.$$

Il rapporto tra queste due densità rappresenta il numero cercato. Quindi

$$\frac{n_{Si}}{n_P} = \frac{5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}}{10^{22}\ \text{m}^{-3}} = 5 \times 10^6.$$

Si conclude che, se si sostituisce con un atomo di fosforo *un atomo di silicio ogni 5 milioni*, il numero di elettroni presenti nella banda di conduzione aumenta di un milione di volte.

Come può una mescolanza così povera di atomi di fosforo provocare un effetto così rilevante? Per il silicio puro a temperatura ambiente, in partenza gli elettroni di conduzione non erano molti! La densità degli elettroni di conduzione prima del drogaggio era 10^{16} m^{-3}, mentre è diventata 10^{22} m^{-3} in seguito all'introduzione dell'impurità di fosforo. Per il rame invece la densità degli elettroni di conduzione (tab. 1) è circa 10^{29} m^{-3}; sicché, anche *dopo* il drogaggio, la densità degli elettroni di conduzione nel silicio rimane di gran lunga inferiore a quella di un tipico conduttore come il rame.

Esempio 8 Si supponga che l'elettrone eccedente dell'atomo donatore di fosforo si muova su un'orbita di Bohr attorno allo ione fosforo, come nella figura 8*b*. Calcolare (*a*) l'energia di legame e (*b*) il raggio dell'orbita di questo elettrone.

Soluzione (*a*) L'espressione teorica di Bohr che esprime l'energia di legame E_b per lo stato caratterizzato da $n = 1$ (eq. 18, cap. 51) è

$$E_b = -E_1 = \frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2 h^2}. \tag{7}$$

Qui poniamo $Z = 1$ perché l'elettrone orbitante «sente» una carica netta centrale $+e$.

Nello sviluppo della teoria di Bohr, ci eravamo riferiti a un atomo idrogenoide e a un elettrone orbitante nel vuoto. In questo caso però l'elettrone si muove entro un reticolo di silicio. Un effetto di questa condizione consiste nel ridurre la forza elettrostatica di un fattore κ_e, la costante dielettrica del silicio. Per quantificare questa riduzione della forza dobbiamo sostituire ϵ_0 nella legge di Coulomb con $\kappa_e\epsilon_0$. Così facendo nell'equazione 7, si ottiene

$$E_b = \frac{1}{\kappa_e^2}\left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\right),$$

in cui l'espressione tra parentesi vale 13.6 eV. pari all'energia di legame dell'atomo d'idrogeno. Per il silicio si ha $k_e = 12$, cosicché

$$E_b = \frac{13.6\ \text{eV}}{(12)^2} = 0.094\ \text{eV}.$$

Questo risultato riproduce grossolanamente (entro un ordine di grandezza) il valore di 0.045 eV. citato nella tabella 2.

(*b*) Il raggio dell'orbita consegue dall'equazione 19 del capitolo 51. Procedendo alle medesime sostituzioni già introdotte nella parte (*a*), si giunge a

$$r = \kappa_e \left(\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} \right). \qquad (8)$$

L'espressione fra parentesi corrisponde al raggio di Bohr (52.9 pm). Di modo che

$$r = (12)(52.9 \text{ pm}) = 630 \text{ pm}.$$

Questa lunghezza è simile alla distanza atomica nel reticolo di silicio (540 pm).

Dovremmo anche sostituire la massa dell'elettrone m nelle equazioni 7 e 8 con una massa efficace m_{eff}, per tenere almeno parzialmente conto della natura periodica del potenziale nel reticolo di silicio. Così facendo ridurremmo il valore stimato per l'energia di legame e aumenteremmo quello per il raggio dell'orbita, avvicinandoci in entrambi i casi ai valori sperimentali.

53-7. LA GIUNZIONE p-n

Nei prossimi paragrafi descriveremo alcuni dispositivi a semiconduttori di comune impiego, come il diodo raddrizzatore, i diodi emettitori di luce e i transistor. Sono innumerevoli i dispositivi di questo tipo che avremmo potuto scegliere di descrivere. La tecnologia di oggigiorno permette infatti di «confezionare» su misura dispositivi a semiconduttore complessi per soddisfare specifiche esigenze.

Fondamentalmente, tutti i dispositivi a semiconduttore comportano l'esistenza di una o più *giunzioni* p-n. Immaginiamo un piano ipotetico che seziona una barra di sostanza semiconduttrice cristallina pura, come il silicio. Da un lato di questo piano la barra viene drogata con atomi donatori (realizzando così una regione di semiconduttore n), e sul lato opposto la barra viene drogata con atomi accettori (semiconduttore p). Questa combinazione costituisce una giunzione p-n.*

La figura 10*a* rappresenta una giunzione p-n nel momento immaginario della sua creazione. Nel materiale di tipo n c'è abbondanza di elettroni, mentre nella parte p c'è abbondanza di lacune.

Gli elettroni vicini al piano di giunzione tenderanno ad attraversarlo diffondendosi nella regione p, più o meno per la stessa ragione per cui le molecole di un gas diffondono nel vuoto oltre una membrana permeabile di contenimento. Questi elettroni che si diffondono nella banda di conduzione, spostandosi da destra a sinistra nella figura 10*a*, si combinano prontamente

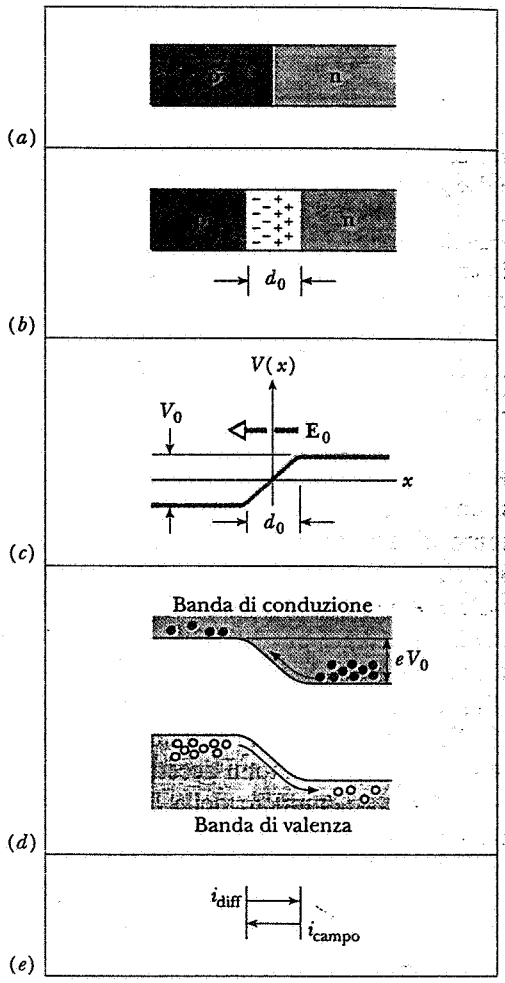


Figura 10 (*a*) Una giunzione p-n nel momento immaginario della sua creazione. (*b*) La diffusione dei portatori maggioritari attraverso il piano di giunzione provoca la comparsa di una carica spaziale, costituita dagli ioni donatori e accettori, vincolati nel reticolo. (*c*) La carica spaziale stabilisce una differenza di potenziale V_0 e un corrispondente campo elettrico $\mathbf{E}_0$, a cavallo del piano di giunzione. (*d*) Le bande energetiche degli elettroni in prossimità della giunzione. Le frecce indicano la diffusione dei portatori maggioritari. (*e*) All'equilibrio la diffusione dei portatori maggioritari di carica attraverso la superficie di giunzione viene esattamente bilanciata dallo spostamento dei portatori minoritari in senso contrario.

* Nella pratica comune, per realizzare una giunzione p-n, si parte da una materiale uniformemente drogato, per esempio di tipo p, ottenuto aggiungendo atomi accettori al silicio fuso da cui viene estratto il cristallo di silicio solido p. In una camera speciale ad alta temperatura si diffondono poi nel campione solido degli atomi donatori andando a sovracompensare gli atomi accettori fino a una certa profondità (controllabile) entro la superficie del solido, ottenendo così una regione n. La giunzione che abbiamo descritto noi è una configurazione ideale, in cui assumiamo che le regioni di tipo p e di tipo n siano separate da un piano perfettamente definito; nella realtà queste regioni si compenetrano parzialmente l'una nell'altra dando luogo a una fascia di giunzione in cui le proprietà variano gradualmente.

ISBN 88-408-0777-2

con le lacune della banda di valenza al di là del piano di giunzione. Analogamente le lacune della regione p, diffondendo attraverso il piano di giunzione nella parte di destra, finiscono per combinarsi con gli elettroni della regione n.

Per ciascun evento di diffusione-combinazione, la porzione di semiconduttore a destra del piano di giunzione acquista una carica positiva, e la porzione a sinistra acquista una carica negativa. Queste cariche* generano una differenza di potenziale V_0 che si instaura a cavallo della giunzione, come è illustrato nella figura 10*c*. In concomitanza con la differenza di potenziale, secondo la relazione $E = -dV/dx$, compare un campo elettrico interno E_0 attraverso il piano di giunzione, diretto come indicato in figura 10*c*. Questo campo esercita una forza sugli elettroni, che si oppone al loro moto di diffusione. E, in altre parole, un elettrone per poter diffondere da destra a sinistra, o una lacuna da sinistra a destra, deve avere energia sufficiente per superare la barriera di potenziale rappresentata dalla figura 10*c*. Questo fenomeno è illustrato nella figura 10*d*, dove sono disegnate le bande di energia degli elettroni. Per diffondere dalla regione n alla regione p, un elettrone deve affrontare la «salita» di altezza eV_0. Una lacuna deve superare un analogo ostacolo di segno opposto per poter diffondere da sinistra a destra. La diffusione sia degli elettroni che delle lacune dà luogo a una corrente il cui verso, nella convenzione comune, va da sinistra a destra nella figura 10, ed è chiamata *corrente di diffusione* i_{diff}.

Non è chiaramente possibile che in una barra di silicio isolata vi sia una corrente che continua a scorrere indefinitamente lungo di essa. Deve intervenire qualcosa ad arrestare o a compensare questa corrente. Per capire di cosa si tratti, rivolgiamo la nostra attenzione ai portatori minoritari.

Come si vede dalla figura 9 e dalla tabella 2, per quanto in un semiconduttore di tipo n gli elettroni siano in maggioranza nel trasportare la carica, esistono pur tuttavia anche alcune lacune, i portatori minoritari. Analogamente nel tipo p, sebbene le lacune siano portatori di carica maggioritari, esistono comunque alcuni elettroni. Nella figura 10*d* sono illustrati i portatori maggioritari.

* Le cariche fisse vicine al piano di giunzione, e da esso separate, sono quelle degli ioni donatori e accettori, che, lo ricordiamo, non si possono muovere. In condizioni normali le cariche di questi ioni sono compensate dalle cariche (opposte) dei portatori di carica mobili. Se però i portatori di carica migrano attraverso il piano di giunzione, gli ioni del reticolo rimangono completamente scompensati.

Se da un lato il campo elettrico di figura 10*c* costituisce un ostacolo al moto dei portatori maggioritari, essendo per essi una barriera da superare, questo stesso campo agisce concordemente nei confronti dei portatori minoritari, siano essi elettroni o lacune. Quando, per agitazione termica, un elettrone vicino alla superficie di giunzione salta dalla banda di valenza a quella di conduzione in un semiconduttore p, esso migra prontamente da destra a sinistra attraverso il piano di giunzione, spinto dal campo elettrico E_0. In modo simile una lacuna, formatasi nella regione n, migra anch'essa dall'altra parte della giunzione. La regione di carica spaziale indicata nella figura 10*b* è costantemente mantenuta vuota di portatori di carica a causa di questo processo, e perciò viene chiamata *zona di svuotamento* o *di giunzione*. La corrente i_{cam} formata dal moto delle cariche minoritarie, detta corrente di *campo* o corrente di *migrazione*, fluisce in verso opposto alla corrente di diffusione e, in condizioni di equilibrio, la compensa esattamente, come è illustrato nella figura 10*e*.

Così, a regime stazionario, una giunzione p-n, ancorché completamente isolata, sviluppa una differenza di potenziale di contatto V_0 tra le sue estremità. Una corrente di diffusione i_{diff}, che corre attraverso la superficie di giunzione nella direzione da p a n, viene bilanciata da una corrente di campo i_{cam}, che si muove in senso opposto. Un campo elettrico E_0 agisce nella zona di svuotamento, la cui larghezza è d_0.

Esempio 9 Una giunzione p-n di silicio ha una uguale concentrazione n_0 di atomi donatori e accettori. La sua zona di giunzione, di larghezza d, si estende simmetricamente a cavallo della superficie di contatto, come illustrato nella figura 11*a*. (*a*) Ricavare un'espressione per E_{max}, l'intensità massima del campo elettrico nella zona di giunzione. (*b*) Ricavare un'espressione per V_0, la differenza di potenziale che si stabilisce alle estremità della zona di giunzione (fig. 10c). (*c*) Si supponga che n_0 valga $3 \cdot 10^{22}$ m^{-3} e che il valore misurato di V_0 sia 0.6 V. Si calcoli la larghezza della zona di giunzione. (*d*) Introducendo questo valore di d, si calcoli E_{max}.

Soluzione (*a*) Nelle regioni n e p al di fuori della zona di giunzione si può assumere che il campo elettrico sia nullo. Il campo è diretto da destra a sinistra nella zona di giunzione e, per simmetria, assumerà il suo massimo valore al centro di questa zona; si veda la figura 11*b*.

Applichiamo la legge di Gauss al volume chiuso (superficie gaussiana) a forma di parallelepipedo, disegnato nella figura 11*a*. Possiamo scrivere

$$\epsilon_0 \oint \kappa_e \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q,$$

in cui κ_e (= 12) rappresenta la costante dielettrica del silicio e q, che può essere espressa come $n_0 eA(d/2)$, è la carica libera conte-

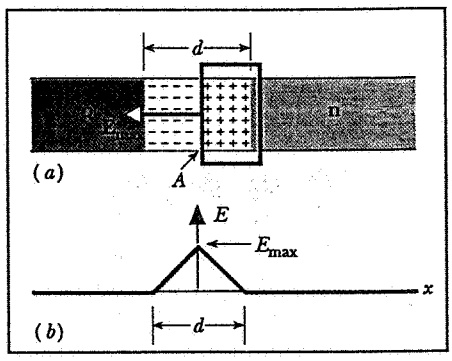


Figura 11 Esempio 9. (*a*) Zona di svuotamento di una giunzione p-n. Il rettangolo rappresenta una sezione retta di un volume gaussiano a parallelepipedo con la faccia di area A. (*b*) Andamento del campo elettrico nella zona di giunzione.

nuta entro il volume. L'integrale va esteso a tutta la superficie che racchiude il volume.

L'unico contributo all'integrale deriva dal campo situato sulla faccia del parallelepipedo che coincide con la superficie di giunzione, di modo che l'integrale risulta $\kappa_e E_{max} A$. Introducendo questa sostituzione e risolvendo rispetto a E_{max}, si ottiene

$$E_{max} = \frac{n_0 e d}{2\kappa_e \epsilon_0}, \tag{9}$$

la relazione che cerchiamo.

(*b*) Come si vede dalla figura 11*b*, il valore del campo elettrico scende linearmente dal suo valore centrale E_{max} a zero su entrambi i lati della zona di giunzione. Il suo valore *medio*, calcolato su tutta la zona, è pertanto $\frac{1}{2} E_{max}$. La differenza di potenziale V_0 è pari al lavoro per unità di carica richiesto per trasportare una carica unitaria q_0 da un'estremità della zona di giunzione all'altra. Pertanto, se è F la forza che mediamente agisce sulla carica unitaria, si ha

$$V_0 = \frac{L}{q_0} = \frac{Fd}{q_0} = \frac{(\frac{1}{2} E_{max} q_0) d}{q_0} = \frac{1}{2} d E_{max}.$$

Sostituendo l'espressione di E_{max} data dalla 9, si ottiene

$$V_0 = \frac{n_0 e d^2}{4\kappa_e \epsilon_0}. \tag{10}$$

(*c*) Risolvendo l'equazione 10 rispetto a d e introducendo i valori dati, troviamo

$$d = \left(\frac{4\kappa_e \epsilon_0 V_0}{e n_0}\right)^{1/2}$$
$$= \left[\frac{(4)(12)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(0.60\ \text{V})}{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3 \times 10^{22}\ \text{m}^{-3})}\right]^{1/2}$$
$$= 2.3 \times 10^{-7}\ \text{m} = 230\ \text{nm}.$$

(*d*) Sostituendo nell'equazione 9, possiamo scrivere

$$E_{max} = \frac{n_0 e d}{2\kappa_e \epsilon_0}$$
$$= \frac{(3 \times 10^{22}\ \text{m}^{-3})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2.3 \times 10^{-7}\ \text{m})}{(2)(12)(8.85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})}$$
$$= 5.2 \times 10^{6}\ \text{V/m}.$$

Quali assunzioni sono state fatte in questo problema, che potrebbero portare a valori ben diversi per le quantità calcolate in condizioni pratiche di laboratorio?

Il diodo raddrizzatore

Quantunque la giunzione p-n possa essere utilizzata in molti modi diversi, essa agisce fondamentalmente come un raddrizzatore. Sarebbe a dire che, se la colleghiamo ai poli di una batteria, la corrente nel circuito sarà molto minore (pochi picoampere) per uno dei due sensi di collegamento della batteria rispetto alla corrente che si stabilisce invertendo la polarità. La figura 12 mostra come, per un tipico diodo a giunzione p-n di silicio, la corrente che fluisce in caso di *polarizzazione inversa* ($V < 0$) sia trascurabile rispetto a quella che si stabilisce se la polarizzazione della connessione è diretta ($V > 0$).

La figura 13 illustra una delle tante possibili applicazioni del diodo raddrizzatore. Una tensione alternata sinusoidale applicata all'ingresso viene trasformata in uscita in una tensione pulsata a mezz'onda, dato che il diodo raddrizzatore si comporta sostanzialmente come se fosse in corto circuito per una polarità della tensione d'ingresso, mentre agisce essenzialmente come un circuito aperto quando la polarità si inverte. Un diodo raddrizzatore ideale in effetti presenta solo due modi di operare: come un interruttore chiuso (resistenza zero) o come un interruttore aperto (resistenza infinita).

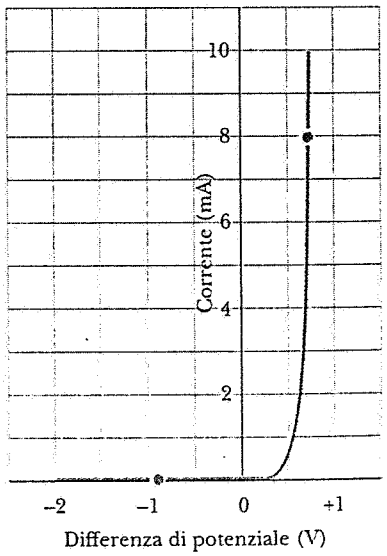


Figura 12 Curva caratteristica tensione-corrente per una tipica giunzione p-n, da cui si vede che il dispositivo conduce agevolmente nel verso diretto, ma si comporta sostanzialmente come un isolante nel senso inverso. I punti segnati riguardano il problema 43.

ISBN 88-408-0777-2

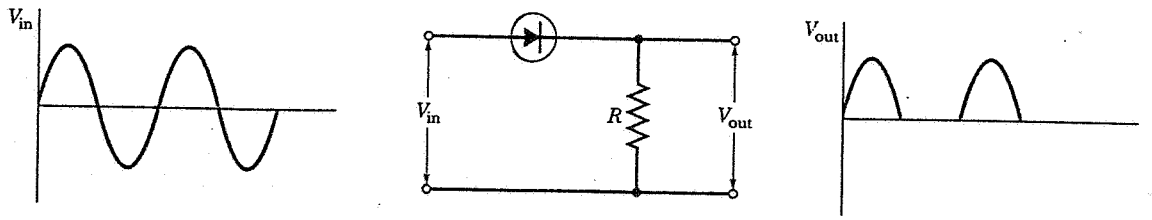


Figura 13 Un diodo a giunzione p-n usato come raddrizzatore. Il diodo conduce bene nel senso diretto (semionde positive) ma non altrettanto nel verso opposto (semionde negative).

Nella figura 13 è utilizzato il simbolo convenzionale per il diodo raddrizzatore. La freccia è disegnata dalla parte in cui l'elettrodo è collegato col semiconduttore p e la direzione della freccia indica il verso della corrente diretta. In altre parole, il diodo conduce quando al suo terminale situato dalla parte della freccia è applicato, rispetto all'altro terminale, un potenziale positivo (sufficiente).

La figura 14 mostra in dettaglio le due connessioni. Nella figura 14*a* (disposizione con polarità inversa) la differenza di potenziale generata dalla batteria va a sommarsi semplicemente alla differenza di potenziale di contatto, aumentando così l'altezza della barriera che i portatori maggioritari di carica devono superare. Ben pochi tra essi riescono a farlo e, come risultato, la corrente di diffusione diminuisce drasticamente.

La corrente di campo però non è sensibile alla barriera ed è quindi indipendente dal valore e dalla direzione del potenziale esterno. Il bilancio tra le correnti, che sussisteva in assenza di campo elettrico esterno applicato (fig. 10*e*), viene così sovvertito e, come spiega la figura 14*a*, si instaura nel circuito una corrente sia pur molto debole.

Come altra conseguenza della polarizzazione inversa, la zona di svuotamento si allarga, come si vede dal confronto tra le figure 10*b* e 14*a*. Questo effetto è ra-

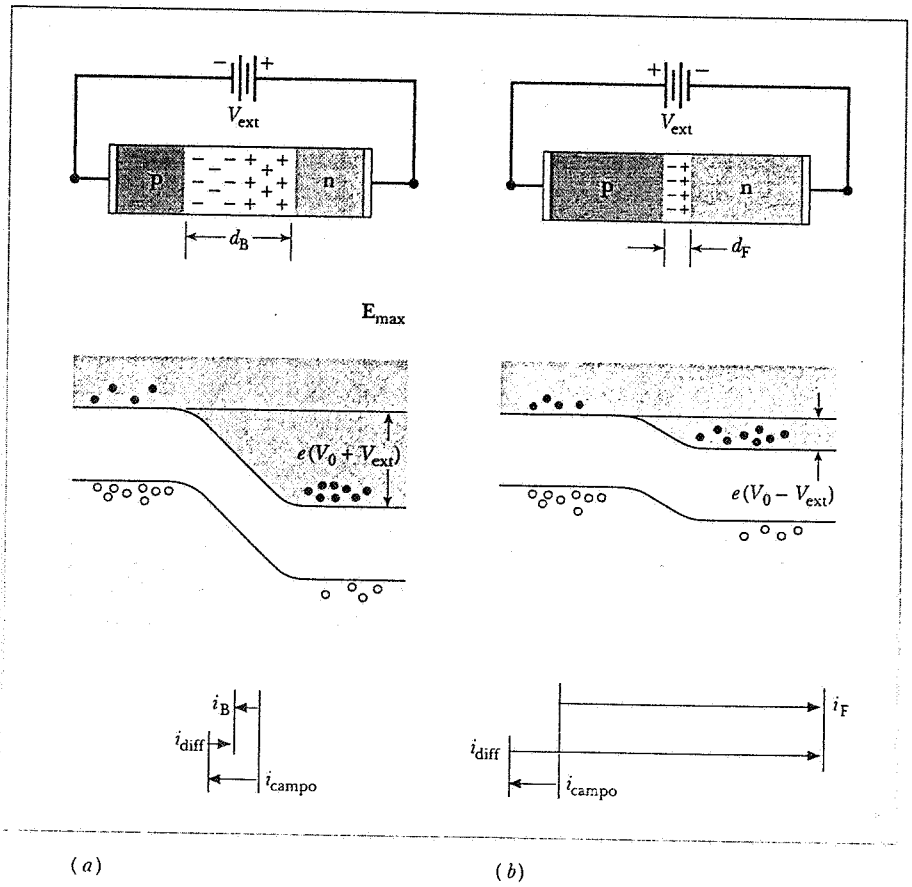


Figura 14 (*a*) Giunzione p-n polarizzata inversamente, in cui si nota l'ampia zona di giunzione, le bande di energia e la corrispondente modesta corrente inversa i_B. (*b*) Polarizzazione diretta, in cui si nota la ristretta zona di giunzione, le bande di energia e l'intensa corrente diretta i_F. Si osservi che la corrente di campo è la stessa in entrambi i casi.

gionevole perché il polo positivo della batteria, collegato all'estremità n del diodo, tende ad attirare elettroni fuori dalla zona di giunzione facendoli rientrare nel semiconduttore n, e analogamente tende a respingere indietro le lacune nella zona p. Dato che la zona di giunzione è poverissima di portatori di carica, essa presenta un'alta resistività, di modo che un suo allargamento si traduce in un incremento di resistenza, coerente con il basso valore di corrente che scorre in un diodo polarizzato inversamente.

La figura 14*b* mostra la connessione con polarizzazione diretta, ove il polo positivo della batteria è collegato all'estremità p della giunzione p-n. In questo caso la differenza di potenziale applicata *si sottrae* a quella di contatto, la corrente di diffusione *cresce* sensibilmente, e fluisce quindi nel circuito una corrente relativamente *elevata* nel senso diretto. La zona di giunzione si *restringe*, e la sua diminuita resistenza è in accordo con l'alta intensità di corrente.

53-8 OPTOELETTRONICA

Ci sono certamente familiari i numeri colorati che luccicano sui registratori di cassa, sulle pompe di benzina e sulle apparecchiature elettroniche. In quasi tutti i casi questa luce viene emessa da un insieme di giunzioni p-n, funzionanti come *diodi emettitori di luce* (LED, dalle iniziali del corrispondente termine inglese).

Nella figura 15*a* è disegnato il comune visualizzatore a sette segmenti, mediante le combinazioni dei quali si formano le cifre. Nella figura 15*b* si vede che ciascun elemento del visualizzatore costituisce l'estremità di una lente piatta di plastica, sul cui lato opposto è collocato un piccolo LED, per lo più delle dimensioni di un 1 mm^2. La figura 15*c* mostra un tipico circuito in cui il LED è polarizzato direttamente.

Come può una giunzione p-n emettere luce? Quando un elettrone al limite inferiore della banda di conduzione in un semiconduttore cade in una lacuna situata al limite superiore della banda di valenza, viene rilasciata un'energia E_g, corrispondente al salto di energia dell'intervallo proibito. Che sorte subisce questa energia? Ci sono almeno due possibilità. Può essere trasformata in energia interna di vibrazione del reticolo, ed è questo che, con grande probabilità, si verifica in un semiconduttore a base di silicio.

In alcuni materiali semiconduttori però, l'energia rilasciata può anche convertirsi in una radiazione elettromagnetica, la cui lunghezza d'onda è data da

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{E_g/h} = \frac{hc}{E_g}. \qquad (11)$$

I diodi commerciali emettitori di luce sono progettati per irraggiare nella regione del visibile e sono comunemente basati su un materiale semiconduttore composto di gallio, arsenico e fosforo. Controllando il rapporto tra fosforo e arsenico, si può variare l'ampiezza dell'intervallo proibito e di conseguenza la lunghezza d'onda della luce emessa.

Se viene emessa luce quando un elettrone cade dalla banda di conduzione alla banda di valenza, verrà parimenti *assorbita* luce, di uguale lunghezza d'onda, quando l'elettrone si muove in verso opposto, salendo dalla banda di valenza a quella di conduzione. Per evitare quindi che tutti i fotoni emessi vengano riassorbiti, è necessario avere nel materiale elettroni e lacune presenti in forte eccesso rispetto al numero che verrebbe generato dall'agitazione termica nella sostanza intrinseca. Ed è questa proprio la situazione che risulta quando i portatori maggioritari di carica, siano essi elettroni o lacune, vengono sospinti attraverso il piano centrale di giunzione dall'azione di un campo elettrico applicato esternamente. Questa è la ragione per cui un semiconduttore intrinseco semplice non funziona come diodo emettitore di luce. È necessario avere una giunzione p-n! E, per assicurare una gran quantità di portatori maggioritari, e quindi di fotoni emessi, deve essere abbondantemente drogato e fortemente polarizzato nel verso diretto.

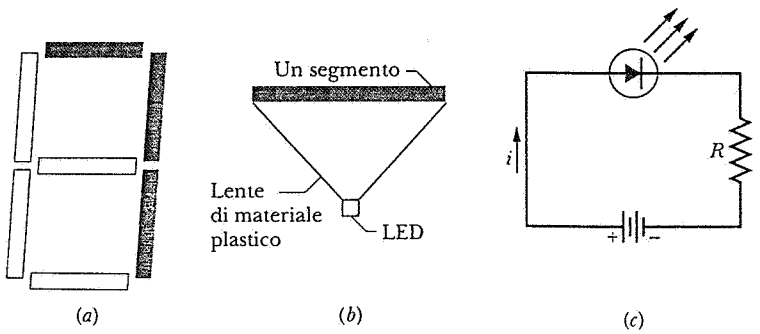


Figura 15 (*a*) Un familiare visualizzatore di numeri a sette segmenti, in cui è attivata la combinazione che rappresenta il «7». (*b*) Un segmento del visualizzatore. (*c*) Un LED collegato a una sorgente esterna.

ISBN 88-408-0777-2

Esempio 10 Un LED è costruito con una giunzione p-n realizzata su un certo materiale semiconduttore la cui energia dell'intervallo proibito vale 1.9 eV. Qual è la lunghezza d'onda della luce emessa?

Soluzione Dall'equazione 11 abbiamo

$$\lambda = \frac{hc}{E_g} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(3.00 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{(1.9\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}$$
$$= 6.53 \times 10^{-7}\ \text{m} = 653\ \text{nm}.$$

È questa una luce rossa.

Il diodo-laser

La «caduta» di un elettrone dalla banda di conduzione per colmare una lacuna nella banda di valenza, con emissione di un fotone, richiama alla mente l'analoga caduta di un elettrone nella transizione tra due stati atomici, che abbiamo analizzato nel capitolo 52. Esiste infatti un'importante applicazione basata su questa analogia: pompando elettroni nella banda di conduzione e lacune nella banda di valenza, è possibile realizzare un'inversione di popolazione, simile a quella descritta nella discussione sul laser al paragrafo 52-6. In questo modo si può costruire un *diodo-laser*, in cui il mezzo in cui avviene l'emissione stimolata non è un gas, ma un solido semiconduttore. I diodi-laser sono normalmente impiegati nei riproduttori di *compact disc* e nei sistemi di lettura ottica dei dati.

La figura 16 presenta uno schema dei livelli di energia in un diodo-laser. Il mezzo in cui avviene l'emissione è racchiuso a metà tra gli strati di semiconduttore p e di semiconduttore n, i quali presentano un intervallo di energia proibita leggermente superiore a quello del mezzo attivo. Gli elettroni vengono trasportati nella regione n da un campo elettrico esterno. Alcuni di questi elettroni in eccesso migrano nella regione attiva, dove il potenziale di barriera impedisce loro di raggiungere la zona p. Analogamente le lacune sono trascinate nella regione p, migrano nello strato del mezzo attivo e qui rimangono imprigionate. L'eccesso di elettroni (e lacune), che si genera nella regione attiva, induce l'effetto laser.

La costruzione materiale del dispositivo è schematizzata nella figura 17, e nella figura 18 è riportata un'immagine fotografica che riproduce un diodo-laser. La sostanza attiva è un sottile strato (0.2 μm) di semiconduttore come il GaAs (arseniuro di gallio) e le re-

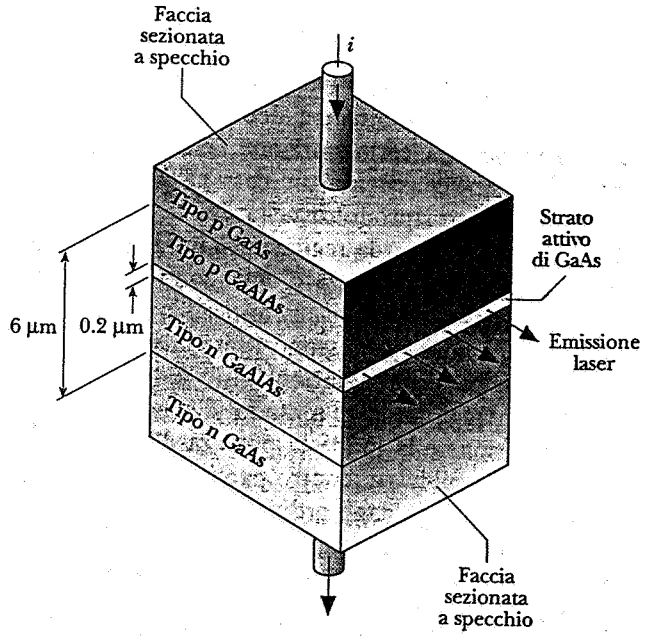


Figura 17 Schema costruttivo di un diodo-laser. L'attività laser avviene nel sottile strato di GaAs.

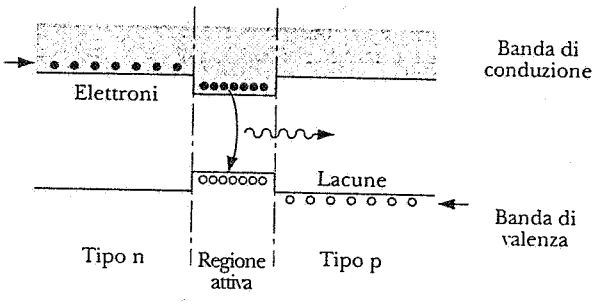


Figura 16 Le bande di energia in un diodo-laser. La regione attiva presenta un intervallo proibito ridotto rispetto a quello dei materiali semiconduttori p ed n vicini, su entrambi i lati. Quando gli elettroni della banda di conduzione nella regione attiva cadono per combinarsi con le lacune della banda di valenza, viene emessa luce.

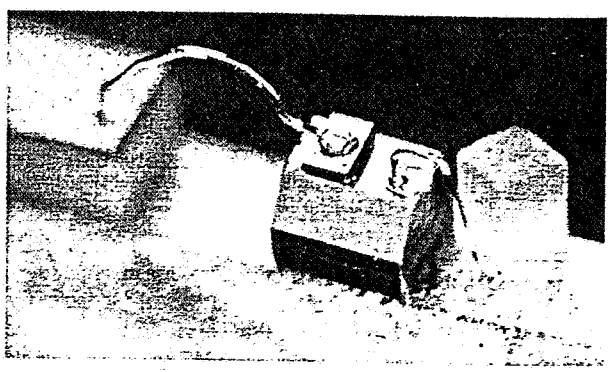


Figura 18 Le dimensioni di un diodo-laser a confronto con un granello di sale da tavola sulla destra.

gioni p ed n su ciascun lato possono essere strati di GaAlAs (arseniuro di gallio e alluminio) spessi pochi micrometri. Le due estremità del dispositivo sono realizzate in modo da ottenere delle superfici speculari che riflettano una certa porzione dell'onda luminosa per consentire l'emissione stimolata nella regione attiva. Il dispositivo riprodotto nella figura 18 emette radiazione a 840 nm (nella regione dell'infrarosso). I diodi-laser di questa lunghezza d'onda sono comunemente impiegati in telecomunicazioni per l'invio di segnali lungo fibre ottiche. Si possono usare altre sostanze in modo simile per dare radiazione visibile.

Tra i vantaggi dei laser a diodo vi sono la loro piccola dimensione e la modesta potenza d'ingresso (dell'ordine di 10 milliwatt, contro parecchi watt di potenza elettrica richiesta dagli ordinari laser He-Ne). Come tutti i dispositivi a semiconduttore, il diodo-laser può essere alimentato con batterie. Si raggiungono rendimenti attorno al 20% (cioè il 20% dell'energia elettrica fornita al dispositivo viene convertita in energia del fascio laser), quando nei laser He-Ne non supera di solito lo 0.1%. Il segnale luminoso può venir facilmente modulato controllando la corrente di alimentazione, e si ottiene così un dispositivo ottico che risponde molto prontamente ai rapidi tempi di variazione caratteristici (< 100 ps) dei circuiti elettronici*.

53-9 IL TRANSISTOR

I diodi a giunzione che abbiamo considerato finora sono dispositivi a due elettrodi. Consideriamo ora un dispositivo con tre (o anche più) elettrodi, chiamato *transistor*.** Il transistor per lo più opera in questo modo: la corrente, che si stabilisce tra due degli elettrodi, viene regolata dalla corrente o tensione applicata al terzo.

Una varietà comune di transistor è il *transistor a giunzione*, che consiste di tre strati di semiconduttore drogato, come n-p-n o p-n-p. La figura 19*a* mostra una tipica configurazione di un transistor n-p-n. Le tre sezioni prendono il nome di *emettitore*, *base* e *collettore*. Sono evidenziate le bande di conduzione e di valenza, e sono indicati solo i portatori maggioritari. Le giunzioni emettitore-base e base-collettore si comportano per lo più come giunzioni p-n ordinarie.

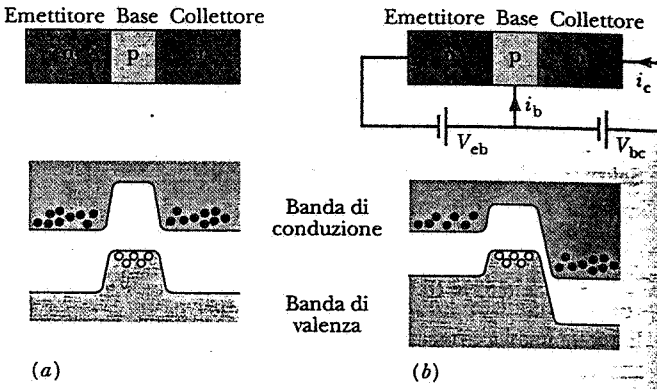


Figura 19 (*a*) Un transistor a giunzione n-p-n. In basso sono mostrate le bande di energia e i portatori maggioritari di carica nelle tre regioni. (*b*) La giunzione base-emettitore è polarizzata direttamente, mentre la giunzione base-collettore è polarizzata inversamente. Gli elettroni che si spostano dall'emettitore alla base, o si ricombinano con le lacune o (con molto maggior probabilità) proseguono verso il collettore.

Nelle condizioni operative normali, schematizzate nella figura 19*b*, la giunzione emettitore-base è polarizzata nel verso diretto, mentre la giunzione base collettore è polarizzata inversamente, ciò che modifica le bande di energia come in figura. Gli elettroni fluiscono dall'emettitore, abbondantemente drogato di tipo n, nella base. Giacché la base è molto stretta, molti di questi elettroni raggiungono il collettore, mentre alcuni si ricombinano con le lacune nella regione di tipo p. Per reintegrare le lacune nella base, un numero corrispondente di elettroni deve lasciare la banda di valenza della base abbandonando il transistor attraverso il circuito esterno, dando luogo alla debole corrente di base i_b. Una piccola variazione della corrente di base i_b si ripercuote in un'ampia variazione della corrente di collettore i_c. In questa configurazione il transistor si comporta come un amplificatore di corrente, e il guadagno di corrente i_c/i_b può assumere tipici valori di 100 e oltre.

Un secondo tipo di transistor è quello che si chiama *transistor a effetto di campo* (FET, dalle iniziali del corrispondente nome inglese, *field effect transistor*). La figura 20 ne illustra lo schema geometrico. Gli elettroni fluiscono attraverso la regione n dalla *sorgente* (*source* in inglese) allo *scarico* o *pozzo* (*drain* in inglese), quando è applicata una differenza di potenziale esterna V_{ds} tra lo scarico e la sorgente. Le regioni p sono fortemente drogate e l'ampiezza delle zone di svuotamento, che si formano alle due giunzioni p-n, determinano la larghezza del canale di passaggio nella regione n. La tensione esterna V_g applicata alla regio-

* Si veda Garmire E., «Applicazioni del laser» in Halliday D., Resnick R., Walker J., *Fondamenti di fisica*, 3° ed., Casa Editrice Ambrosiana, Intermezzo 13, in corso di pubblicazione.

** Il transistor è stato inventato nel 1947 in quelli che oggi sono i laboratori della AT&T Bell, da John Bardeen, Walter Brattain e William Shockley, che per questo merito condivisero il premio Nobel per la fisica nel 1956.

ISBN 88-408-0777-2

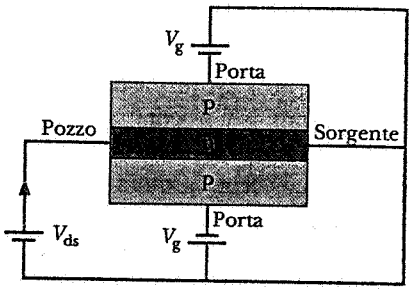


Figura 20 Lo schema base di un transistor a effetto di campo. Gli elettroni percorrono lo stretto canale n dalla sorgente allo scarico. L'ampiezza del canale può essere controllata modificando la tensione V_g applicata alla porta.

ne p, detta *porta* (*gate* in inglese) cambia la larghezza della zona di svuotamento e di conseguenza anche l'ampiezza del canale n. Ciò modifica in definitiva la corrente attraverso il dispositivo, dato che la possibilità, per il flusso di corrente, di transitare attraverso il canale n dipende dall'ampiezza di quest'ultimo. Una piccola variazione nella tensione di porta provoca una modifica nell'ampiezza del canale e di conseguenza una sensibile variazione nella corrente che lo attraversa; il dispositivo può così operare come amplificatore.

Se la tensione di porta viene adeguatamente elevata, è possibile ridurre a zero la larghezza del canale n, e il FET interrompe la corrente. In questo caso il transistor si comporta come un interruttore: può trovarsi nello stato di conduzione, oppure nello stato di totale interdizione. L'interruttore può essere aperto o chiuso molto rapidamente dal segnale applicato alla porta; si possono ottenere normalmente tempi di commutazione inferiori a 1 ns.

Una varietà di transistor a effetto di campo ampiamente utilizzata nei circuiti digitali è il FET a Metallo-Ossido-Semiconduttore, brevemente detto MOSFET che si ottiene depositando e incidendo strati successivi su un supporto drogato di tipo p. Nella figura 21 si vede una sezione trasversale di un MOSFET. Le regioni n e il canale n sono ottenuti incidendone lo schema nel substrato p e diffondendovi atomi donatori che penetrano a distanze controllate entro il substrato. Uno strato di ossido (SiO_2) viene depositato sopra, prima che l'operazione si concluda rivestendolo, assieme alle regioni n, di uno strato metallico per formare gli elettrodi.

53-10 SUPERCONDUTTORI

La resistività di un tipico conduttore metallico decresce al diminuire della temperatura. Essa tuttavia non si riduce a zero nemmeno quando T tende allo zero assoluto. Come abbiamo visto nel capitolo 32, la resistività di un conduttore trova origine nelle collisioni subite dagli elettroni di conduzione nel loro movimento entro il reticolo cristallino. Le impurità e i difetti reticolari aumentano le possibilità che gli elettroni collidano, e queste collisioni con gli atomi che si trovano spostati, per il moto vibratorio, dai loro siti reticolari contribuiscono a opporre resistenza.

In alcuni materiali chiamati *superconduttori* (vedere il paragrafo 32-8), la resistenza diminuisce gradatamente con l'abbassarsi della temperatura, come previsto; però, raggiunta una certa *temperatura di transizione* T_c, detta anche *temperatura critica*,* la resistività cade improvvisamente a zero (fig. 22). Al di sotto di T_c gli elettroni si muovono attraverso il materiale senza impedimento alcuno. La tabella 3 elenca una scelta di materiali superconduttori indicandone la temperatura di transizione.

TABELLA 3 PROPRIETÀ DI ALCUNI SUPERCONDUTTORI

Sostanza	T_c (K)	*Energia di accoppiamento* (meV)
Cd	0.56	0.27
Al	1.19	0.34
Sn	3.75	1.15
Hg	4.16	1.65
Pb	7.22	2.73
Nb	9.46	3.05
Nb_3Sn	18.1	
$YBa_2Cu_3O_7$	90	
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	125	

* Da non confondersi con l'omonimo termine usato in termodinamica [N.d.T.]

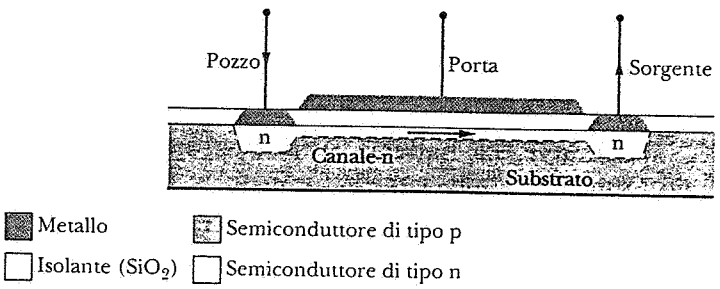


Figura 21 Schema di un MOSFET.

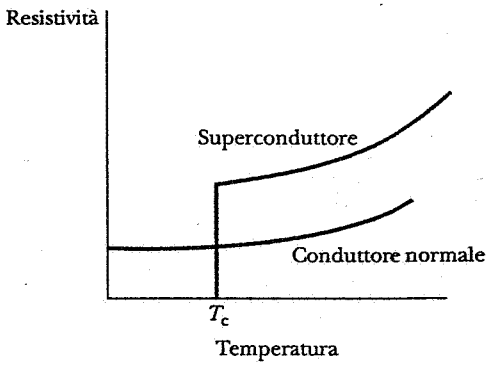


Figura 22 Confronto fra la dipendenza della resistività dalla temperatura per un conduttore normale e per un superconduttore. La resistività di un conduttore normale decresce gradualmente allo scendere della temperatura, mentre nei materiali superconduttori la resistività crolla improvvisamente a zero alla temperatura di transizione T_c.

È stato osservato il fenomeno della superconduttività in 27 elementi chimici e in numerosi composti, ma non si è riscontrata nei migliori conduttori metallici (Cu, Ag, Au). Se ne conclude che un superconduttore non è semplicemente un ottimo conduttore che diventa ancora migliore, ma siamo indotti a credere che il meccanismo che innesca la superconduttività differisca dalle modalità cui soggiace la conduzione nei metalli ordinari. Come vedremo la superconduttività consegue a un *forte* accoppiamento tra gli elettroni di conduzione e il reticolo. La conduzione normale nei migliori conduttori avviene in condizioni di *debole* accoppiamento tra gli elettroni di valenza e il reticolo.

Si consideri un elettrone che si muove entro il reticolo. Quando si avvicina, esso attira verso sé lo ione positivo cui sta andando incontro e modifica la densità di carica nelle sue vicinanze. Nella sua scia lascia una densità di carica positiva impercettibilmente più alta di quanto sarebbe altrimenti nello stesso punto. Questa carica positiva attrae altri elettroni, i quali interagiscono l'un l'altro attraverso l'intermediazione del reticolo, un po' come due barche su un lago che interagiscono attraverso le scie che esse formano. Il risultato finale è una leggera attrazione vicendevole tra gli elettroni.

La teoria di Bardeen-Cooper-Schrieffer* della superconduttività, detta comunemente teoria BCS, dimostra che il sistema di elettroni ha l'energia più bassa possibile, se gli elettroni sono legati in coppie, dette *coppie di Cooper*. Quando non esiste corrente nel superconduttore, i due elettroni di una coppia di Cooper hanno quantità di moto di ugual valore assoluto e direzione, ma verso opposto, cosicché la quantità di moto totale e quindi anche la corrente elettrica svaniscono entrambe. Quando si genera una corrente, entrambi gli elettroni di una coppia acquistano lo stesso incremento di quantità di moto, che si traduce in un moto del centro di massa della coppia. Tutte le coppie di Cooper acquisiscono la medesima quantità di moto.

La superconduttività è un fenomeno cooperativo. Una volta formate alcune coppie di Cooper, la riduzione di energia che si ottiene nella formazione della coppia successiva è maggiore che nel caso di assenza di coppie precedenti. Quando la temperatura scende al di sotto di T_c e vengono a crearsi alcune coppie, una piccola ulteriore riduzione della temperatura provoca la formazione di molte più coppie. Il cambiamento dallo stato normale allo stato di superconduzione è abbastanza repentino. I moti cooperativi delle coppie di Cooper obbligano anche ciascuna coppia ad avere la stessa quantità di moto.

Le coppie di Cooper presentano un'energia di legame Δ, chiamata *energia di accoppiamento*, tipicamente compresa nell'intervallo tra 10^{-4} eV e 10^{-3} eV, come si legge nella tabella 3. Si noti che a temperature di transizione tra 1 K e 10 K (tipiche di molti dei superconduttori elencati nella tabella 3) corrispondono energie kT_c nello stesso intervallo da 10^{-4} eV a 10^{-3} eV. La temperatura di transizione di un superconduttore è direttamente legata all'energia di accoppiamento. Al di sopra di T_c, le coppie si spezzano e il materiale assume la normale resistenza elettrica.

L'energia di legame di una coppia di Cooper introduce un *intervallo proibito di accoppiamento* 2Δ nella densità degli stati $n(E)$ vicino al livello di Fermi. (La figura 1*a* dà un esempio della densità degli stati per un conduttore normale.) Per gli elettroni che in un superconduttore si trovano vicini al livello di Fermi è energeticamente favorevole legarsi assieme in coppie di Cooper. Come risultato la densità degli stati scende a zero entro un intervallo di $\pm\Delta$ a cavallo di E_F, con un corrispondente incremento di $n(E)$ subito sotto e sopra il livello di Fermi. La figura 23 mostra la densità risultante degli stati e l'intervallo proibito di accoppiamento 2Δ. Sopra T_c la densità degli stati di un superconduttore potrebbe essere come quella che appare nella figura 1*a*. La frattura comincia ad aprirsi quando il superconduttore viene raffreddato al di sotto di T_c: l'ampiezza di questa frattura aumenta man mano che la temperatura scende, e raggiunge il suo massimo quando T tende a 0 K.

* Questa teoria sulla superconduttività è stata sviluppata nel 1957 da John Bardeen, Leon N. Cooper e J. Robert Schrieffer, che furono insigniti, per il loro lavoro, del premio Nobel per la fisica nel 1972 . Bardeen aveva già ricevuto un premio Nobel assieme ad altri nel 1956, per le sue ricerche sui semiconduttori e l'invenzione del transistor.

ISBN 88-408-0777-2

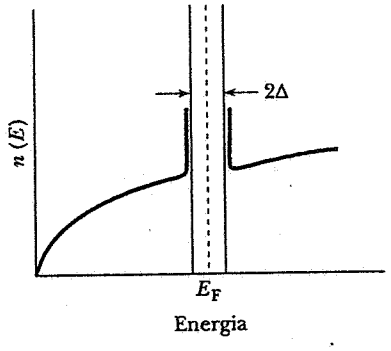


Figura 23 Densità degli stati in un superconduttore al di sotto della temperatura di transizione. Si nota un intervallo di ampiezza 2Δ entro il quale la densità degli stati è nulla. In questo disegno la larghezza è esagerata; tipicamente l'energia di Fermi E_F è di pochi elettronvolt, mentre l'intervallo di accoppiamento è compreso tra 10^{-4} e 10^{-3} eV.

La probabilità di occupazione degli stati elettronici in un superconduttore può essere calcolata moltiplicando la densità degli stati, riportata nella figura 23, per la funzione di distribuzione di Fermi-Dirac, come si è visto nella figura 2*b*. Ciò porta a una elevata probabilità di occupazione per gli stati del superconduttore subito al di sotto dell'intervallo proibito. Sopra quest'intervallo, esiste una modesta densità di stati normali (disaccoppiati) per $T > 0$ K.

A partire dal 1986, è stata scoperta una nuova classe di superconduttori,* con valori di T_c inaspettatamente elevati. Le ultime due sostanze elencate nella tabella 3 sono esempi di questi composti, materiali ceramici che, a differenza dei più familiari tipi di ceramica, sono conduttori a temperatura ambiente. Considerato che fino a quel momento le temperature più alte a cui si era osservato il fenomeno di superconduttività erano attorno a 20 K, questi materiali rappresentano un salto di qualità formidabile nello sviluppo tecnologico. In particolare essi permettono di raggiungere la superconduttività a temperature facilmente mantenibili con l'azoto liquido (77 K), piuttosto che a temperature che richiedono per il raffreddamento l'uso dell'elio liquido (4 K), assai più caro e meno comodo da utilizzare. Questo salto di un fattore 6 nei valori della temperatura di transizione mantiene viva la speranza che, con un ulteriore innalzamento a una temperatura men che tripla, divenga possibile ottenere la superconduttività a temperatura ambiente.

Questi superconduttori ad alta temperatura di transizione sono ossidi di rame in combinazione con vari altri elementi. La teoria di funzionamento di questi materiali non è ancora stata sviluppata; non è nemmeno chiaro se venga coinvolto un meccanismo analogo a quello della teoria BCS. Si ha l'impressione che questa superconduttività sia connessa con le proprietà dell'ossido di rame; sebbene il rame elementare non sia superconduttore, le combinazioni dei suoi ossidi lo sono. La struttura cristallina di questi composti dispone il rame e l'ossigeno in piani ancorati tra gli altri elementi, ed è probabile che questi piani offrano un cammino preferenziale agli elettroni portatori della corrente superconduttiva.

* Si veda Cava R.J., *Oltre il superconduttore 1-2-3*, «Le Scienze», 266:24.

DOMANDE

1. Pensate che alcune delle proprietà dei solidi elencate nell'introduzione al capitolo siano legate tra di loro? Quali?
2. Gli elettroni di conduzione in una sfera metallica occupano stati di energia quantizzati. L'intervallo di energia medio tra stati adiacenti dipende da (*a*) il materiale di cui è costituita la sfera, (*b*) il raggio della sfera, (*c*) l'energia dello stato, o (*d*) la temperatura della sfera?
3. Che parte svolge il principio di esclusione di Pauli nello spiegare la conduzione elettrica nei metalli?
4. In che senso differiscono il modello classico e il modello meccanico quantistico nella conduttività elettrica di un metallo?
5. Se confrontiamo gli elettroni di conduzione di un metallo con gli atomi di un gas ideale, restiamo sorpresi nell'osservare (fig. 1*c*) quanta energia cinetica sia immagazzinata nel sistema di elettroni di conduzione allo zero assoluto. Sarebbe forse più logico confrontare gli elettroni di conduzione, non con gli atomi di un gas, ma con gli elettroni più interni di un atomo pesante? Dopotutto anche in questo caso si ha una gran quantità di energia cinetica accumulata e la cosa non ci sorprende. Se ne discuta.
6. Quali caratteristiche della figura 2 sono proprie del rame, per il quale è stata disegnata? Quali invece sono indipendenti dal tipo di metallo?
7. Perché le curve di figura 1*c* e 2*c* differiscono così poco tra di loro?
8. Si illustri accuratamente la distinzione tra la funzione densità degli stati $n(E)$, la funzione densità degli stati occupati $n_o(E)$, e la funzione di probabilità di Fermi-Dirac $p(E)$, tutte funzioni che compaiono nell'equazione 3.
9. L'energia di Fermi per un dato metallo dipende dal volume del campione? Se confrontiamo ad esempio un campione di volume 1 cm^3 con un altro di volume doppio, il secondo possiede un numero esattamente doppio di elettroni di conduzione e, per il secondo, sembrerebbe di dover ricorrere a energie maggiori per poter riempire i livelli disponibili. È così?
10. Nel paragrafo 25-4 abbiamo dimostrato che la capacità ter-

mica (molare) di un gas monoatomico ideale vale $\frac{3}{2}R$. Se gli elettroni di conduzione in un metallo si comportano come questo gas, ci aspetteremmo che essi diano un contributo di entità simile alla capacità termica misurata del metallo. Tuttavia la capacità termica può essere spiegata assai soddisfacentemente dall'energia assorbita in vibrazioni dagli atomi ionizzati che costituiscono il reticolo. Non sembra che gli elettroni assorbano molta energia al crescere della temperatura del campione osservato. In che modo la figura 2 suggerisce una spiegazione a questo dilemma di epoca prequantistica?

11. Esponete un argomento fisico che renda conto qualitativamente dell'esistenza nei solidi di bande energetiche permesse e proibite.
12. L'esistenza dell'intervallo di energia proibita in un isolante è più difficile da accettare di quanto sia l'esistenza di energie proibite per l'elettrone, ad esempio, nell'atomo d'idrogeno?
13. Nell'ambito della teoria delle bande, quali sono i requisiti *essenziali* per poter classificare un solido come (*a*) un metallo, (*b*) un isolante e (*c*) un semiconduttore?
14. Quali informazioni in più ci può dare sui solidi la teoria delle bande, che invece non ci dà il modello classico (paragrafo 32-5)?
15. Si illustri la differenza tra la velocità di deriva e la velocità di Fermi degli elettroni di conduzione in un metallo.
16. Come si spiega che in un solido le bande permesse diventano più ampie man mano che si procede dagli elettroni atomici più interni verso i più esterni?
17. I semiconduttori puri (non drogati) obbediscono alla legge di Ohm?
18. A temperatura ambiente un determinato campo elettrico applicato esternamente genera una velocità di deriva per gli elettroni di conduzione del silicio circa 40 volte maggiore di quella degli elettroni di conduzione del rame. Perché allora il silicio non è un conduttore elettrico migliore del rame?
19. Si considerino queste due affermazioni: (*a*) A temperatura sufficientemente bassa il silicio cessa di essere un semiconduttore e diventa piuttosto un buon isolante. (*b*) A temperatura sufficientemente alta il silicio perde le sue caratteristiche di semiconduttore e si comporta più verosimilmente come un buon conduttore. Si analizzi fino a che punto ciascuna affermazione può considerarsi vera o falsa.
20. La conduttività elettrica di un semiconduttore intrinseco (non drogato) dipende dalla temperatura? Dipende dall'energia dell'intervallo proibito E_g tra le bande vuota e piena?
21. Come si spiega il fatto che la resistività dei metalli aumenta con la temperatura mentre quella dei semiconduttori diminuisce?
22. Le energie degli intervalli proibiti del silicio e del germanio sono rispettivamente 1.1 eV e 0.67 eV. Quale delle due sostanze vi aspettate che abbia la maggior densità di portatori di carica a temperatura ambiente?
23. Si commenti questa affermazione: "La distinzione tra un metallo e un semiconduttore è netta e ben definita, mentre quella tra un semiconduttore e un isolante non lo è."
24. L'effetto Hall è di gran lunga più evidente nei semiconduttori che nei metalli. Perché? Che uso si può fare di questa proprietà?
25. Una lamina di materiale di tipo n trasporta una carica *netta* negativa?
26. Supponiamo che un semiconduttore contenga un ugual numero di donatori e di accettori. Si compensano a vicenda nei loro effetti elettrici? Se è così, quale ne è il meccanismo? Altrimenti, perché no?
27. Perché un semiconduttore n è così più ricco di elettroni che di lacune? E perché un semiconduttore p ha invece molte più lacune che elettroni? Spiegate con parole vostre.
28. Quali altri elementi oltre il fosforo sono buoni candidati per essere utilizzati come donatori da introdurre nel silicio? E quali elementi oltre l'alluminio possono egregiamente svolgere le stesse funzioni dell'alluminio se introdotti come accettori nel silicio? Si consulti la tavola di Mendeleev (app. E).
29. È possibile distinguere i portatori maggioritari e quelli minoritari in un semiconduttore intrinseco come il silicio o il germanio? In caso affermativo, quale criterio si può usare? In caso contrario, perché no?
30. Nell'operazione di drogaggio p o n di un semiconduttore, perché bisogna fare attenzione a evitare contaminazioni del campione con impurità indesiderate, anche di concentrazione minima?
31. Ci si aspetta che il drogaggio cambi molto la resistività del silicio?
32. Quando scorre una corrente attraverso un semiconduttore p, le lacune positive si muovono verso il polo negativo della batteria e si combinano con gli elettroni nell'elettrodo metallico connesso all'estremità del cristallo. Perché il cristallo non si carica negativamente?
33. Perché spesso si preferisce il silicio al germanio nella fabbricazione dei dispositivi a semiconduttore?
34. Il germanio e il silicio sono due sostanze semiconduttrici simili, la cui principale differenza consiste nell'energia dell'intervallo proibito: 0.67 eV per il primo e 1.1 eV per il secondo. Se dovessimo costruire una giunzione p-n (fig. 10) in cui la corrente inversa sia mantenuta più bassa possibile, quale sostanza sceglieremmo e perché?
35. Si è visto che in una giunzione p-n (fig. 10) gli elettroni e le lacune possono diffondersi, in versi opposti, attraverso la zona di giunzione. Quale sorte attende ciascuna di queste entità una volta che esse sono penetrate nel materiale dal lato opposto della giunzione? Come succede che gli elettroni e le lacune positive non si ricombinino *tutti*, perdendo così la possibilità di condurre?
36. Si considerino due possibili tecniche per realizzare una giunzione p-n (fig. 10). (*a*) Preparare separatamente un campione di tipo n e un altro di tipo p e poi unirli assieme, assicurandosi che le loro superfici di contatto siano ben piane e lucidate. (*b*) Preparare un solo campione di tipo n e diffondere su una sua faccia una quantità eccedente di accettori, ad alta temperatura. Quale metodo è preferibile e perché?
37. La giunzione p-n mostrata nella figura 11*a* ha un uguale concentrazione di droganti su entrambi i lati del suo piano di giunzione. Supponiamo ora invece che la concentrazione di donatori sia significativamente maggiore di quella degli accettori. La zona di svuotamento risulterebbe collocata simmetricamente rispetto alla superficie di giunzione? In caso negativo, il piano centrale si sposterebbe verso la regione n o la regione p? Se ne spieghino i motivi.
38. Perché non si può misurare la differenza di potenziale di contatto generata da una giunzione p-n semplicemente collegando un voltmetro ai suoi capi?
39. Perché la zona di giunzione delle figura 10*b* rimane limitata a una regione attorno al piano di giunzione? Perché non si espande in tutto il volume del solido?
40. Cosa significa dire che una giunzione p-n è polarizzata nel verso diretto?
41. (*a*) Si descriva il moto dei portatori maggioritari di carica (sia

ISBN 88-408-0777-2

elettroni che lacune) in una giunzione polarizzata nel verso diretto. (*b*) Si descriva il moto dei portatori minoritari di carica nella stessa giunzione.

42. Spiegare con parole proprie come si può diminuire lo spessore della zona di svuotamento in una giunzione p-n (*a*) aumentando la tensione di polarizzazione diretta e (*b*) aumentando la concentrazione di drogaggio.
43. Se aumentiamo la temperatura di una giunzione p-n polarizzata inversamente, come si modifica l'intensità di corrente (fig. 14*a*)? L'effetto è maggiore per il silicio o per il germanio? (L'energia intrinseca dell'intervallo proibito del silicio è maggiore di quella del germanio.)
44. Il diodo raddrizzatore, le cui caratteristiche sono riportate nella figura 12, segue la legge di Ohm? Che criterio usate per decidere?
45. Abbiamo visto che un semplice semiconduttore intrinseco (non drogato) non può essere usato come diodo emettitore di luce. Perché no? Potrebbe servire allo scopo un semiconduttore fortemente drogato di tipo n o di tipo p?
46. Si spieghi in parole povere come funziona il dispositivo MOSFET della figura 21.
47. Pensate che ci sia una correlazione tra la temperatura di transizione di un superconduttore (tab. 3) e la sua conduttività elettrica (inverso della resistività) a temperatura ambiente?

PROBLEMI

Paragrafo 53-1 Elettroni di conduzione nei metalli

1. (*a*) Dimostrare che l'equazione 2 può essere scritta come

$$n(E) = CE^{1/2},$$

in cui la costante C vale $6.81 \times 10^{27}\ \mathrm{m^{-3} \cdot eV^{-3/2}}$. (*b*) Usare questa relazione per verificare il calcolo dell'esempio 1, dove per $E = 5.00$ eV, $n(E) = 1.52 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3} \cdot eV^{-1}}$.
2. Calcolare la densità $n(E)$ degli stati degli elettroni di conduzione in un metallo in cui $E = 8.00$ eV e dimostrare che il risultato è coerente con la curva di figura 1*c*.
3. L'oro è un metallo monovalente con massa molare di 197 g/mole e densità di 19.3 g/cm^3 (vedere appendice D). Si calcoli la densità dei portatori di carica.
4. A quale pressione un gas ideale avrebbe una densità di molecole uguale alla densità degli elettroni di conduzione nel rame ($= 8.49 \times 10^{28}\ \mathrm{m^{-3}}$)? Si assuma la temperatura di 297 K.
5. La densità e la massa molare del sodio sono rispettivamente 971 kg/m^3 e 23.0 g/mole; il raggio dello ione Na^+ è di 98 pm. (*a*) Che porzione del volume di sodio metallico è disponibile per gli elettroni di conduzione? (*b*) Si ripeta il calcolo per il rame. La sua densità, massa molare e raggio ionico sono rispettivamente: 8960 kg/m^3, 63.5 g/mole, 96 pm. (*c*) Per quale di questi due metalli pensate che gli elettroni di conduzione si comportino in modo più simile a un gas di elettroni liberi?

Paragrafo 53-2 Riempimento degli stati permessi

6. Calcolare la probabilità che lo stato caratterizzato da un'energia di 0.0730 eV sopra il livello di Fermi sia occupato alla temperatura di (*a*) $T = 0$ K e (*b*) $T = 320$ K.
7. L'energia di Fermi dell'argento è 5.5 eV. (*a*) A $T = 0$ °C quali sono le probabilità di trovare occupati gli stati corrispondenti alle seguenti energie: 4.4 eV, 5.4 eV, 5.5 eV, 5.6 eV, 6.4 eV? (*b*) A quale temperatura la probabilità che lo stato di energia 5.6 eV sia occupato vale 0.16?
8. Si dimostri che la somma delle probabilità di due stati, le cui energie si discostano dall'energia di Fermi di un uguale quantità (sopra e sotto), è pari a uno.
9. La densità dell'oro è 19.3 g/cm^3. Ciascun atomo fornisce un elettrone di conduzione. Calcolare l'energia di Fermi per l'oro. La massa molare si trova nell'appendice D.
10. La figura 2c mostra la densità degli stati occupati $n_o(E)$ degli elettroni di conduzione nel rame a 1000 K. Calcolare $n_o(E)$ per il rame alle energie di 4.00, 6.75, 7.00, 7.25 e 9.00 eV. L'energia di Fermi del rame è 7.06 eV.
11. Nel paragrafo 50-7 abbiamo esaminato la situazione di un elettrone imprigionato in una buca infinitamente profonda. Si supponga che 100 elettroni siano situati in una buca di larghezza 120 pm, due per ogni livello, con spin opposti. Calcolare l'energia di Fermi del sistema. (*Nota*: l'energia di Fermi è l'energia del più alto livello occupato alla temperatura dello zero assoluto.)
12. Gli elettroni di conduzione in un metallo si comportano come un gas ideale, se la temperatura è sufficientemente alta. In particolare la temperatura dev'essere tale che $kT \gg E_F$, ove E_F rappresenta l'energia di Fermi. Per soddisfare questo requisito, quali temperature richiede il rame ($E_F = 7.06$ eV)? Si confronti il risultato con il punto di ebollizione del rame (vedere appendice D). Si esamini la figura 2*c* in relazione a questo fatto e si noti che vale la relazione $kT \gg E_F$ per le condizioni cui si riferisce la figura. Questo non è che il requisito inverso rispetto a quello appena citato.
13. Si dimostri che l'equazione 5 si può scrivere come

$$E_F = An^{2/3},$$

dove la costante A ha il valore $3.65 \times 10^{-19}\ \mathrm{m^2 \cdot eV}$.
14. L'energia di Fermi del rame è 7.06 eV. (*a*) Per il rame a 1050 K trovare l'energia per cui la probabilità di occupazione è 0.910. Per questa energia valutare (*b*) la densità degli stati e (*c*) la densità degli stati occupati.
15. Dimostrare che la funzione che esprime la densità degli stati, data dall'equazione 2, può essere scritta nel seguente modo:

$$n(E) = \tfrac{3}{2} n E_F^{-3/2} E^{1/2}.$$

Si spieghi come $n(E)$ sia indipendente dalla sostanza, quando nell'equazione appare esplicitamente l'energia di Fermi (pari a 7.06 eV per il rame, 9.44 eV per lo zinco, ecc.).
16. Dimostrare che, se $E \gg E_F$, la distribuzione in energia degli stati occupati $n_o(E)$ può essere scritta come

$$n_o(E) \approx CE^{1/2} e^{-E/kT},$$

in cui C è una costante. Si confronti il risultato con quello calcolato per la distribuzione di Maxwell-Boltzmann nel paragrafo 24-4. Cosa si può concludere?

17. Dimostrare che la probabilità p_h che esista una lacuna in uno stato di energia E è data da

$$p_h = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}.$$

(*Suggerimento*: l'esistenza di una lacuna significa che lo stato non è occupato; si verifichi che questa condizione implica che $p_h = 1 - p$.)

18. L'energia di Fermi dell'alluminio è 11.66 eV; la sua densità è 2.70 g/cm^3 e la sua massa molare è 27.0 g/mol (app. D). Da questi dati ricavare il numero degli elettroni liberi per ogni atomo.

19 Le stelle bianche nane rappresentano l'ultimo stadio nell'evoluzione di una stella come il Sole. Esse diventano così dense e calde che possiamo analizzare la loro struttura come un solido in cui tutti gli Z elettroni di ogni atomo sono liberi. Per una nana bianca con massa uguale a quella del Sole e raggio uguale a quello della Terra, calcolare l'energia di Fermi degli elettroni. Si assuma che la struttura atomica sia rappresentata da atomi di ferro e che $T = 0$ K.

20. Una stella di neutroni può essere analizzata con tecniche simili a quelle impiegate per i metalli ordinari. In questo caso i neutroni (invece degli elettroni) seguono la funzione di probabilità data dall'equazione 6. Si consideri una stella di neutroni di massa doppia rispetto a quella del Sole e di raggio pari a 10.0 km. Calcolare l'energia di Fermi dei neutroni.

21. Stimare il numero N degli elettroni di conduzione in un metallo aventi energia maggiore dell'energia di Fermi, usando il seguente procedimento. A rigore, N è dato da

$$N = \int_{E_F}^{\infty} n(E)p(E)dE.$$

Studiando la figura 2*c*, convincetevi che, entro un buon grado di approssimazione, questa espressione può essere scritta come

$$N = \int_{E_F}^{E_F+4kT} n(E_F)(\tfrac{1}{4})dE.$$

Sostituendo la funzione densità degli stati, valutata in corrispondenza dell'energia di Fermi, si dimostri che, per la frazione f degli elettroni di conduzione eccitati a energie superiori all'energia di Fermi, si trova

$$f = \frac{N}{n} = \frac{3kT/2}{E_F}.$$

Perché non calcolare direttamente il primo integrale sopra riportato, senza ricorrere a un'approssimazione?

22. Si faccia uso del risultato del problema 21 per calcolare la frazione di elettroni eccitati nel rame alle temperature di (*a*) 0 K, (*b*) 300 K, (*c*) 1000 K.

23. A quale temperatura la frazione di elettroni eccitati nel litio risulta pari a 0.0130? L'energia di Fermi del litio è 4.71 eV. Si veda il problema 21.

24. L'argento fonde a 962 °C. Al punto di fusione, quale frazione degli elettroni di conduzione si trova in stati con energia superiore all'energia di Fermi, pari a 5.5 eV? Si veda il problema 21.

25. Si dimostri che, alla temperatura dello zero assoluto, l'energia media $\overline{E}$ degli elettroni di conduzione in un metallo è pari a $\frac{3}{5}E_F$, dove E_F è l'energia di Fermi. (*Suggerimento*: si noti che, per definizione, il valor medio è $\overline{E} = (\frac{1}{n})\int En_c(E)dE$.)

26. (*a*) Mediante il risultato del problema 25, stimare quanta energia verrebbe rilasciata da una moneta di rame di massa pari a 3.1 g, se potessimo d'improvviso sopprimere il principio di esclusione di Pauli. (*b*) Per quanto tempo questa quantità di energia manterrebbe accesa una lampadina da 100 W? Si osservi che non si conosce alcun metodo per sopprimere il principio di Pauli!

Paragrafo 53-3 Conduzione elettrica nei metalli

27. L'argento è un metallo monovalente. Calcolare (*a*) il numero di elettroni di conduzione per metro cubo, (*b*) l'energia di Fermi, (*c*) la velocità di Fermi e (*d*) la lunghezza d'onda di De Broglie corrispondente a questa velocità. I dati necessari si trovano nell'appendice D.

28. Lo zinco è un metallo bivalente. Calcolare (*a*) il numero di elettroni di conduzione per metro cubo, (*b*) l'energia di Fermi, (*c*) la velocità di Fermi e (*d*) la lunghezza d'onda di De Broglie corrispondente a questa velocità. I dati necessari si trovano nell'appendice D.

29. Per l'argento calcolare (*a*) il libero cammino medio degli elettroni di conduzione e (*b*) il rapporto tra questa quantità e la distanza tra i siti atomici reticolari più vicini. L'argento ha un'energia di Fermi pari a 5.51 eV e una resistività di $1.62 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Si veda il problema 27.

Paragrafo 53-5 Conduttori, isolanti e semiconduttori

30. Ripetere il calcolo dell'esempio 6 per una temperatura di (*a*) 1000 K e (*b*) 4.0 K.

31. La funzione di distribuzione di Fermi-Dirac può essere applicata ai semiconduttori come ai metalli. Nei semiconduttori, E rappresenta l'energia al di sopra del limite superiore della banda di valenza. Il livello di Fermi per un semiconduttore intrinseco si trova circa a metà strada tra il limite superiore della banda di valenza e il limite inferiore della banda di conduzione. Nel germanio queste bande sono separate da un intervallo di 0.67 eV. Calcolare la probabilità che (*a*) uno stato al limite inferiore della banda di conduzione sia occupato e (*b*) uno stato al limite superiore della banda di valenza sia libero, alla temperatura di 290 K.

32. L'intervallo tra le due bande nel germanio puro è di 0.67 eV. Si assuma che il livello di Fermi sia a metà di quest'intervallo. (*a*) Calcolare la probabilità che uno stato al limite inferiore della banda di conduzione sia occupato alla temperatura di 16 °C. (*b*) A quale temperatura la probabilità di occupazione di questo stato triplicherà rispetto alla probabilità a 16 °C?

33. In un modello semplificato di un semiconduttore intrinseco (non drogato) la distribuzione effettiva in energia degli stati è sostituita da una distribuzione in cui ci sono N_v stati nella banda di valenza tutti con la stessa energia E_v e N_c stati nella banda di conduzione con la stessa energia E_c. Il numero di elettroni nella banda di conduzione eguaglia il numero di lacune nella banda di valenza. (*a*) Dimostrare che quest'ultima condizione implica che

$$\frac{N_c}{e^{(E_c-E_F)/kT} + 1} = \frac{N_v}{e^{(E_v-E_F)/kT} + 1}.$$

(*Suggerimento*: si veda il problema 17.) (*b*) Se il livello di Fermi si trova tra le due bande, ed è lontano da entrambe in con-

ISBN 88-408-0777-2

fronto all'energia kT, allora gli esponenziali dominano nei denominatori. In queste condizioni, dimostrare che

$$E_F = \tfrac{1}{2}(E_c + E_v) + \tfrac{1}{2}kT \ln(N_v/N_c),$$

e che pertanto, se $N_v \approx N_c$, il livello di Fermi è circa al centro dell'intervallo.

Paragrafo 53-6 Semiconduttori drogati

34. Dire se si tratta di un semiconduttore di tipo n o di tipo p: (*a*) Sb nel Si; (*b*) In nel Ge; (*c*) Al nel Ge; (*d*) As nel Si.

35. Il silicio puro a 300 K ha una densità elettronica nella banda di conduzione di 1.5×10^{16} m^{-3} e un'uguale densità di lacune nella banda di valenza. Si supponga che uno su 10^7 atomi di silicio venga sostituito con un atomo di fosforo. (*a*) Quale incremento nella densità dei portatori di carica produce l'introduzione del fosforo? Si assuma che tutti gli elettroni dei donatori siano nella banda di conduzione. (I dati necessari sul silicio si trovano nell'appendice D.) (*b*) Trovare il rapporto tra la densità dei portatori di carica nel silicio drogato rispetto a quella del silicio puro.

36. Che massa di fosforo è necessaria per drogare un campione di silicio da 1 g al grado descritto nell'esempio 7?

37. Un cristallo di silicio è drogato con fosforo alla concentrazione di 10^{22} atomi di fosforo al metro cubo. In media, a che distanza tra di loro si trovano questi atomi? Si veda l'esempio 7.

38. Un campione di germanio purissimo ha un atomo di impurità ogni 1.3×10^9 atomi di germanio. Calcolare la distanza media tra gli atomi spuri.

39. Nella figura 24 sono rappresentate due bande di energia di un solido ipotetico. Le bande sono riempite fino a un livello E_x, che può essere sia nella banda 1 che nella banda 2. Può esistere un livello dovuto alle impurità di energia E_i. Indicare se il tipo di solido è un conduttore, un isolante , un semiconduttore intrinseco o un semiconduttore estrinseco; il tipo di impurità, che può essere donatore, accettore o nessuno; e il tipo di semiconduttore estrinseco, n oppure p. Completare la tabella.

			Tipo		
E_x (eV)	E_i (eV)	E_b (eV)	*Solido*	*Impurità*	*Semiconduttore estrinseco*
3.00	–	9.00			
3.00	4.06	4.10			
3.00	–	4.10			
1.49	–	9.00			
4.40	–	4.10			
3.00	3.04	4.10			

40. Il drogaggio modifica l'energia di Fermi di un semiconduttore. Si consideri il silicio, che presenta un intervallo di energia di 1.1 eV tra la banda di valenza e la banda di conduzione. A 290 K il livello di Fermi nella sostanza pura si trova circa a metà di questo intervallo. Si supponga che venga drogato con atomi donatori, ciascuno dei quali presenta un livello di donazione 0.15 eV al di sotto del limite inferiore della banda di conduzione e si supponga anche che il drogaggio elevi l'energia di Fermi a un livello corrispondente a 0.084 eV sotto il medesimo limite inferiore. (*a*) Calcolare, per entrambi i semiconduttori puro e drogato, la probabilità che uno stato al limite inferiore della banda di conduzione sia occupato. (*b*) Calcolare anche la probabilità che sia occupato uno stato al livello di donazione nella sostanza drogata. Vedere la figura 25.

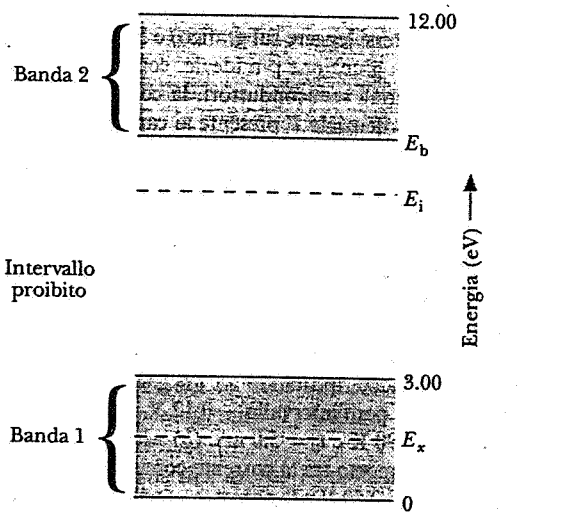


Figura 24 Problema 39.

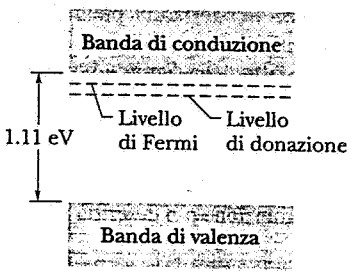


Figura 25 Problema 40.

41. Un campione di silicio viene drogato con atomi che hanno il livello di donazione 0.11 eV sotto il limite inferiore della banda di conduzione. (*a*) Se ciascuno degli stati a questo livello è occupato con probabilità di 4.8×10^{-5} alla temperatura di 290 K, dove si trova il livello di Fermi rispetto al limite superiore della banda di valenza? (*b*) Qual è quindi la probabilità di occupazione di uno stato al limite inferiore della banda di conduzione? L'intervallo di energia proibita nel silicio è di 1.1 eV.

Paragrafo 53-7 La giunzione p-n

42. Quando un fotone entra nella zona di svuotamento di una giunzione p-n, si possono creare coppie elettrone-lacuna se gli elettroni assorbono almeno in parte l'energia dei fotoni e vengono eccitati dalla banda di valenza a quella di conduzione. Siffatte giunzioni sono quindi spesso utilizzate come rivelatori di fotoni, specialmente per raggi X e raggi γ emessi dai nuclei. Quando un fotone gamma con energia di 662 keV viene assorbito interamente da un semiconduttore che presenti un intervallo proibito di energia pari a 1.1 eV, in media quante coppie elettrone-lacuna si generano?

43. Calcolare e confrontare le resistenze del diodo raddrizzatore nei due punti mostrati sulla curva caratteristica di figura 12.

L'intensità di corrente nel punto a sinistra in basso (troppo piccola per potersi leggere sul grafico) è 50 pA.

44. Per un diodo a giunzione p-n ideale, con una divisione netta tra i due materiali semiconduttori, la corrente i è legata alla differenza di potenziale V presente ai capi del diodo dalla relazione

$$i = i_0(e^{eV/kT} - 1),$$

dove i_0, che dipende dal materiale, ma non dalla corrente né dalla differenza di potenziale, è chiamata *corrente di saturazione inversa*. V è positivo se la giunzione è polarizzata nel verso diretto e negativo se è polarizzata inversamente. (*a*) Verificare che questa espressione prevede il comportamento atteso di un diodo, riportando su un grafico la variabile i in funzione di V, per l'intervallo $-0.12\ \text{V} < V < +0.12\ \text{V}$. Si assuma $T = 290$ K e $i_0 = 5.0$ nA. (*b*) Alla stessa temperatura calcolare il rapporto tra la corrente corrispondente a una tensione diretta di 0.50 V e la corrente corrispondente a una tensione inversa di -0.50 V.

45. Una goccia di piombo (energia di estrazione = 3.4 eV) è in intimo contatto con una superficie di rame (energia di estrazione = 4.5 eV). Si trovi la differenza di potenziale di contatto che si stabilisce all'interfaccia piombo-rame. Come la si potrebbe misurare? Si disegni un diagramma di energia, che mostri (come si è fatto nella figura 4*b*) i relativi livelli di Fermi sia prima che dopo il contatto tra i metalli. Potrebbe una giunzione di questo tipo servire come raddrizzatore?

46. (*a*) A ogni giunzione p-n è associata una determinata capacità elettrica. Si spieghi perché. (*b*) Si ricavi un'espressione per la capacità della giunzione p-n descritta all'esempio 9.

Paragrafo 53-8 Optoelettronica

47. (*a*) Calcolare la lunghezza d'onda massima che produce la fotoconduzione nel diamante, che ha un intervallo proibito con energia di 5.5 eV. (*b*) A che regione dello spettro elettromagnetico appartiene questa radiazione?

48. In un certo cristallo la banda più alta fra quelle degli stati occupati è completa. Il cristallo è trasparente alla luce di lunghezza d'onda superiore a 295 nm, ma opaco per le lunghezze d'onda minori. Calcolare l'ampiezza in elettronvolt dell'intervallo tra la banda occupata più alta e la banda successiva (vuota).

49. Il cristallo di KCl ha un intervallo proibito di 7.6 eV sopra la banda occupata più alta, che risulta completa. Questo cristallo è opaco o trasparente alla lunghezza d'onda di 140 nm?

50. (*a*) Si disegni, per ciascuna delle 10 cifre, lo schema con cui queste vengono generate mediante la combinazione dei sette segmenti del visualizzatore mostrato nella figura 15*a*. (*b*) Se compaiono cifre in una lunga sequenza casuale, calcolare quante volte, in termini percentuali, viene utilizzato ciascuno dei sette segmenti.

51. Nel paragrafo 53-8 si è presentato il principio operativo di un diodo emettitore di luce, in cui viene emessa luce quando un potenziale esterno sospinge i portatori di carica attraverso il piano centrale di una giunzione p-n. Il dispositivo inverso, un *fotodiodo*, è ugualmente realizzabile. In questo caso si illumina una giunzione p-n e si genera una corrente attraverso la superficie di giunzione. Si descriva come può funzionare un dispositivo di questo genere. Sarebbe meglio collegarlo con polarizzazione diretta o inversa?

Capitolo 54

FISICA NUCLEARE

Nel profondo dell'atomo giace il nucleo, che occupa soltanto una porzione pari a 10^{-15} del volume dell'atomo, ma è sede della quasi totalità della sua massa e della forza che lo tiene insieme. Comprendere la struttura del nucleo e le sottostrutture dei suoi componenti sarà il prossimo argomento che affronteremo nello studio della fisica.

Il nostro compito è facilitato dalle molte somiglianze fra le caratteristiche dell'atomo e quelle del nucleo. Entrambi i sistemi sono governati dalle leggi della meccanica quantistica. E, come gli atomi, anche i nuclei presentano degli stati eccitati che possono decadere allo stato fondamentale per emissione di fotoni (raggi gamma). In certe circostanze, come vedremo, i nuclei possono presentare strutture a guscio molto simili a quelle degli atomi. Vedremo anche che vi sono differenze fra lo studio degli atomi e lo studio dei nuclei, ciò che ci impedisce di acquisire una conoscenza dei nuclei altrettanto completa quanto quella degli atomi.

In questo capitolo studieremo la struttura dei nuclei e dei loro elementi costitutivi. Dopo l'esame di alcune tecniche per lo studio delle loro proprietà, passeremo alla descrizione delle basi teoriche per arrivare a capire la struttura del nucleo.

54-1 ALLA SCOPERTA DEL NUCLEO

Nei primi anni del 20° secolo non si sapeva molto sulla struttura degli atomi, salvo il fatto che contenevano elettroni. Questa particella era stata scoperta (da J.J. Thomson) soltanto nel 1897, e al momento la sua massa era ancora ignota. Non era quindi nemmeno possibile dire il numero esatto degli elettroni che un certo atomo poteva contenere. Gli atomi sono essenzialmente neutri, e dovevano quindi contenere qualche carica positiva, ma allora nessuno poteva ancora immaginare quale forma potesse assumere questa carica positiva di compensazione. Tutto da scoprire era anche il modo in cui gli elettroni circolavano dentro l'atomo e come si dividesse la massa totale fra elettroni e carica positiva.

Nel 1911 Ernest Rutherford, interpretando alcuni esperimenti condotti nel suo laboratorio, fu portato a supporre che la carica positiva dell'atomo fosse fortemente concentrata proprio al centro dell'atomo e che, inoltre, fosse responsabile della maggior parte della massa dell'atomo. Aveva scoperto il nucleo dell'atomo!

Fino a che non fu stabilito questo concetto fondamentale, qualsiasi tentativo di comprendere i movimenti degli elettroni all'interno dell'atomo era destinato all'insuccesso. Ma già due anni dopo la scoperta di Rutherford, fu possibile per Niels Bohr, partendo dal concetto dell'atomo dotato di nucleo, sviluppare la teoria semiclassica della struttura atomica che abbiamo descritto al capitolo 51. Questo lavoro pionieristico di Rutherford e Bohr fu il punto di partenza per la comprensione della struttura dell'atomo.

Come fu che Rutherford giunse a formulare quell'ipotesi? Non fu una gratuita elucubrazione, ma si fondò saldamente sui risultati di un esperimento da lui proposto che fu eseguito dai suoi collaboratori, Hans Geiger (oggi famoso per il contatore Geiger) e Ernest Marsden, uno studente ventenne non ancora laureato.

L'idea di Rutherford fu di sondare le forze che agiscono all'interno dell'atomo proiettando particelle alfa (α) ad alta energia contro un bersaglio costituito da una sottile lamina, e misurando l'entità della deviazione che subivano attraversando la lamina. Le particelle alfa, che hanno massa circa 7300 volte maggiore di quella dell'elettrone, hanno carica $+2e$ e sono emesse spontaneamente (con energia di qualche MeV) da molti materiali radioattivi. Noi ora sappiamo che quegli utilissimi proiettili sono i nuclei degli atomi dell'elio naturale. La figura 1 mostra l'attrezzatura sperimentale di Geiger e Marsden. L'esperimento consisteva nel rilevare il numero delle particelle α deviate sotto diver-

ISBN 88-408-0777-2

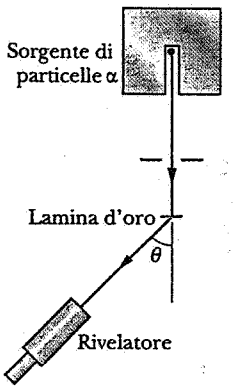


Figura 1 Apparato sperimentale usato nel laboratorio di Rutherford per studiare la diffusione di particelle α da parte di fogli metallici sottili. Il rivelatore può ruotare in diverse posizioni angolari θ.

si angoli di diffusione θ. (Si veda il paragrafo 29-7.)

La figura 2 mostra i loro risultati (è da tener presente che la scala delle ordinate è logaritmica). Vediamo che la maggior parte delle particelle α sono diffuse sotto angoli piuttosto piccoli, ma, e fu questa la grande sorpresa, una frazione piccolissima subisce enormi deviazioni, per angoli molto grandi, prossimi a 180°. Nelle parole di Rutherford: "Fu davvero l'evento più incredibile che mi fosse capitato in tutta la vita. Era del tutto inverosimile: come se, sparando una granata da 380 mm contro un foglio di carta velina, la vedeste rimbalzare indietro pronta a colpirvi."

Perché mai Rutherford fu tanto sorpreso? Al tempo

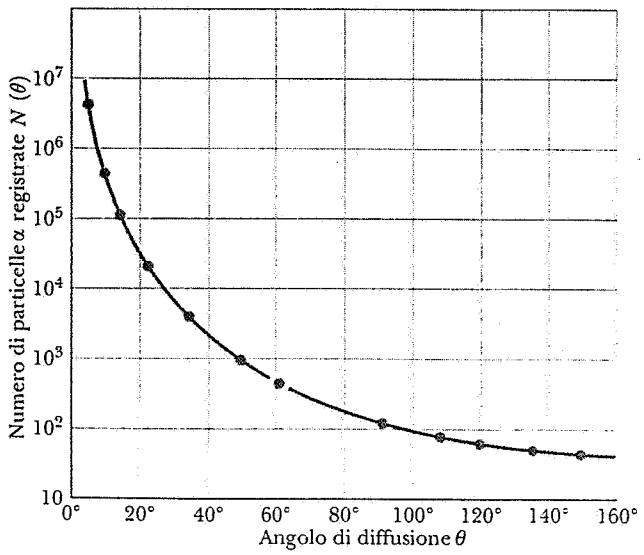


Figura 2 I punti rappresentano i risultati della diffusione di particelle α negli esperimenti di Geiger e Marsden, e la curva è calcolata in base alla teoria di Rutherford dell'atomo nucleare. L'asse delle ordinate è a scala logaritmica.

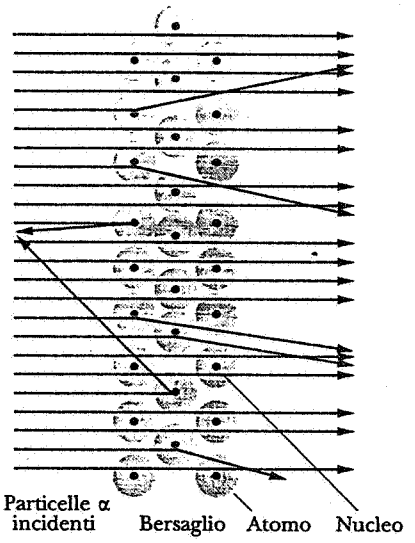


Figura 3 L'angolo di deviazione subìto da una particella α dipende da quanto la sua traiettoria incidente passi vicino al nucleo di un atomo. Elevati angoli di deviazione sono il risultato di incontri molto ravvicinati.

di quegli esperimenti, molti fisici credevano al modello di atomo proposto da J.J. Thomson. Secondo quel modello, si pensava che la carica positiva dell'atomo si estendesse a tutto il volume dell'atomo; e che anche gli elettroni fossero distribuiti entro quel volume, all'incirca come i semi in un'anguria, e che oscillassero intorno alle loro posizioni di equilibrio all'interno di una specie di sfera di carica elettrica.

La massima forza deviante che possa agire su una particella α al passaggio attraverso una simile sfera di carica positiva risulterebbe certamente troppo piccola per deviare nemmeno di un grado la particella α. E neanche gli elettroni presenti nell'atomo potrebbero esercitare il benché minimo effetto su una particella dotata di una massa e una carica tanto più grandi. Anzi, sarebbero essi stessi fortemente deviati, come uno sciame di moscerini è disperso da un sasso che gli venga scagliato in mezzo. Nel modello di atomo di Thomson non esisteva alcun meccanismo che potesse giustificare il rimbalzo all'indietro di una particella α.

Rutherford comprese che a causare una così imponente deviazione doveva essere una forza molto grande, che poteva soltanto esistere se una carica positiva molto compatta era collocata al centro dell'atomo, piuttosto che sparsa per tutto il suo volume. Secondo questo nuovo modello, la particella α, una volta entrata nell'atomo, poteva arrivare molto vicino al centro della carica positiva senza riuscire a penetrarvi, e venire respinta da una grande forza contraria al suo moto, così da essere quasi forzata a un'inversione di marcia. Si veda l'esempio 1.

La figura 3 mostra i percorsi che possono essere se-

ISBN 88-408-0777-2

guiti da tipiche particelle α al passaggio fra gli atomi del bersaglio sottile. Come si può vedere, per la maggior parte esse sono deviate molto poco o niente del tutto, ma alcune, che si trovano casualmente a entrare nel bersaglio su una «rotta» che le porterebbe a passare molto vicino al nucleo di un atomo, sono invece deviate di angoli molto grandi. Da un'analisi dei dati raccolti, Rutherford arrivò alla conclusione che le dimensioni del nucleo debbono essere inferiori al diametro dell'atomo nel rapporto di circa 10^{-4}. L'atomo è quasi tutto vuoto! Non capita spesso che l'intuizione di uno scienziato molto dotato, basandosi su qualche semplice calcolo,* arrivi a risultati di tanta importanza.

Esempio 1 Una particella α da 5.30 MeV è per caso diretta a centrare il nucleo di un atomo di oro (Z = 79). Quanto sarà distante dal nucleo nel momento in cui, dopo un arresto momentaneo, comincerà a invertire la rotta? Data la sua massa relativamente molto grande, potete trascurare il rinculo del nucleo di oro.

Soluzione Inizialmente l'energia meccanica totale delle due particelle interagenti è esattamente uguale a $K_\alpha = 5.30$ MeV, energia cinetica iniziale della particella α. All'atto in cui la particella α si arresta, l'energia totale diventa uguale all'energia potenziale elettrostatica del sistema delle due particelle. Per il principio di conservazione dell'energia, i valori delle due energie debbono essere uguali:

$$K_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{d},$$

ove q (= $2e$) è la carica della particella α, Q (= $79e$) quella del nucleo di oro, e d la distanza fra i centri delle due particelle.

Sostituendo i valori delle cariche e risolvendo per d troviamo:

$$d = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 K_\alpha}$$

$$= (8.99 \times 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})\frac{(2)(79)(1.60 \times 10^{-19}\ C)^2}{(5.30\ \mathrm{MeV})(1.60 \times 10^{-13}\ \mathrm{J/MeV})}$$

$$= 4.29 \times 10^{-14}\ \mathrm{m} = 42.9\ \mathrm{fm}.$$

Questa distanza è molto piccola rispetto alle dimensioni dell'atomo, ma non per quelle del nucleo. Come vedremo nel prossimo paragrafo, questa distanza è notevolmente maggiore della somma dei raggi del nucleo di oro e della particella α, che deve così invertire la marcia senza avere neanche «sfiorato» il nucleo di oro.

Se la carica positiva associata all'atomo di oro fosse stata distribuita uniformemente per tutto il volume dell'atomo, la massima forza rallentante agente sulla particella α si sarebbe verificata al momento in cui la particella α avesse sfiorato la superficie dell'atomo. Questa forza (vedi l'esempio 2) sarebbe risultata troppo debole per esercitare il benché minimo effetto sul moto della particella α, che sarebbe entrata come un proiettile in un atomo così «spugnoso».

* Per un'analisi di questo esperimento di diffusione si veda Krane K.S., *Modern Physics*, Wiley 1983, Cap. 6.

54-2 ALCUNE PROPRIETÀ DEL NUCLEO

Il nucleo, anche se minuscolo, ha una struttura altrettanto complessa quanto quella dell'atomo. I nuclei sono costituiti da protoni e neutroni. Queste particelle, a differenza dell'elettrone, non sono particelle veramente elementari, essendo a loro volta composte da altre particelle, i *quark*. Tuttavia la fisica nucleare, che costituisce l'argomento di questo capitolo, è interessata principalmente a ricerche sul nucleo, che non implicano la necessità di indagare sulla struttura interna di protoni e neutroni. Lo studio della natura fondamentale di queste particelle è di competenza della fisica delle particelle, argomento trattato al capitolo 56.

Sistematica dei nuclei

I nuclei sono fatti di protoni e neutroni. Il numero dei protoni contenuti nel nucleo si chiama *numero atomico* ed è contraddistinto dalla lettera Z. Il numero dei neutroni, o *numero neutronico*, è indicato con N. A parte la differenza di carica elettrica ($q = +e$ per il protone, $q = 0$ per il neutrone), protone e neutrone sono particelle molto simili fra loro: hanno infatti masse quasi uguali, e sono soggetti a identiche forze interne al nucleo. Per questa ragione, protone e neutrone sono classificati insieme nella famiglia dei *nucleoni*. Il numero totale di nucleoni contenuti in un nucleo, indicato con A (= $N + Z$), è chiamato *numero di massa*.

Specificando i valori di Z e di A (e di conseguenza anche di N), identifichiamo in modo univoco una particolare specie di nuclei, ossia un *nuclide*. Il numero totale dei nucleoni, A, è usato come apice posto a sinistra del simbolo di un elemento per individuare il nuclide. Così ad esempio ^{81}Br possiede 81 nucleoni. Il simbolo «Br» ci fa capire che si sta parlando di bromo, elemento chimico avente $Z = 35$. I restanti 46 nucleoni sono neutroni, cosicché, per questo nuclide, si ha $Z = 35$, $N = 46$ e $A = 81$. Due nuclidi con lo stesso valore di Z, ma con N e A differenti, come ^{81}Br e ^{82}Br, sono chiamati *isotopi*.

La figura 4 mostra una tavola dei nuclidi noti, rappresentati dai valori di Z ed N che a ciascuno di essi competono. I punti più scuri corrispondono a nuclidi stabili, mentre l'ombreggiatura chiara indica i nuclidi radioattivi noti, chiamati *radionuclidi*. La tabella 1 illustra alcune proprietà di pochi nuclidi scelti.

Nella figura 4 si può notare che esiste una zona abbastanza ben definita di stabilità. I nuclei instabili trovano posto in due fasce che fiancheggiano la zona di stabilità.

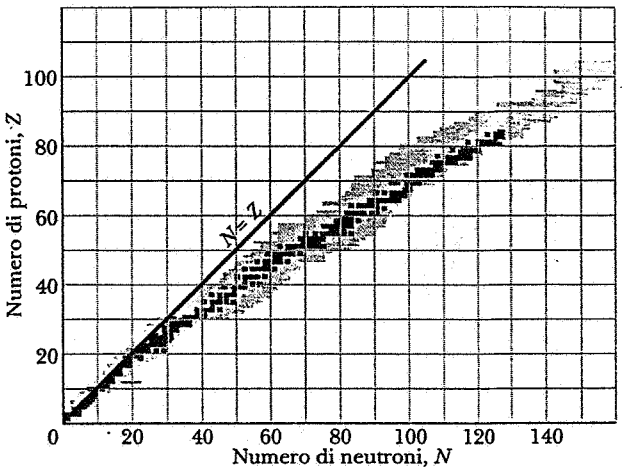


Figura 4 Diagramma dei nuclidi noti. La colorazione scura indica i nuclidi stabili, mentre quella chiara corrisponde ai nuclidi radioattivi. Si noti che i nuclidi stabili leggeri hanno sostanzialmente ugual numero di protoni e neutroni, mentre per i nuclidi pesanti, $N > Z$.

La forza nucleare

La forza che controlla la struttura elettronica e le proprietà dell'atomo è la ormai familiare forza di Coulomb. Per tenere stretto insieme il nucleo, tuttavia, deve esistere un'intensa forza di attrazione, di un tipo assolutamente nuovo, che agisce fra i neutroni e i protoni. Questa forza deve essere tanto intensa da riuscire a vincere la forza repulsiva di Coulomb che agisce fra i protoni (di carica positiva), e da costringere sia i neutroni sia i protoni nel microscopico volume del nucleo. Le prove sperimentali indicano che questa *forza forte*, così semplicemente chiamata, ha gli stessi effetti fra qualsiasi paio di costituenti nucleari si applichi, siano essi neutroni o protoni.

La «forza forte» ha un raggio d'azione cortissimo, dell'ordine di 10^{-15} m. Ciò significa che la forza di attrazione reciproca fra due nucleoni crolla a zero quando la distanza che li separa supera un certo valore critico. E significa anche che, salvo che nei nuclei più piccoli, ogni singolo nucleone non può interagire per effetto di questa forza con tutti gli altri nucleoni dello stesso nucleo, ma soltanto con qualcuno dei suoi vicini più prossimi. Al contrario, la forza di Coulomb non è una forza di corto raggio d'azione. Un qualsiasi protone in un nucleo respinge per effetto coulombiano tutti gli altri protoni, per quanto lontani si trovino (esempio 12).

La figura 4 mostra ancora che i nuclei stabili più leggeri si trovano allineati nelle vicinanze della retta $Z = N$. I nuclei stabili più pesanti giacciono invece in una fascia ben al disotto di quella retta, trovandosi tipicamente ad avere più neutroni che protoni. La tendenza a un eccesso di neutroni rispetto ai protoni al crescere del numero di massa è un effetto della repulsione elettrostatica. E poiché, come abbiamo notato, ogni nucleone interagisce «forte» soltanto con un numero limitato di suoi vicini, la quantità di energia accumulata nei legami forti fra nucleoni cresce proporzionalmente con A: ma l'energia globale accumulata per forza coulombiana fra i protoni cresce più rapidamente, perché ogni protone interagisce con tutti gli altri presenti nel nucleo. In definitiva, l'energia di Coulomb diventa sempre più importante al crescere del numero di massa.

Esaminiamo un nucleo con 238 nucleoni. Se giacesse sulla retta $Z = N$, dovrebbe avere $Z = N = 119$. Ma un nucleo così costituito, se mai si riuscisse a metterlo insieme, si sfascerebbe subito per effetto della repulsione di Coulomb. Consegue una relativa stabilità solo sostituendo a 27 protoni altrettanti neutroni, così da attenuare fortemente l'effetto coulombiano. Troviamo così il nuclide ^{238}U, con $Z = 92$ e $N = 146$, un eccesso di 54 neutroni.

Ma anche in ^{238}U sono evidenti gli effetti della repulsione di Coulomb: infatti esso (*a*) è un nuclide ra-

TABELLA 1 PROPRIETÀ DI ALCUNI NUCLEI

Nuclide	*Z*	*N*	*A*	*Stabilità*[a]	*Massa atomica* (u)	*Raggio* (fm)	*Energia di legame per nucleone* (MeV)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Momento Magnetico* (μ_N)
^{7}Li	3	4	7	92.5%	7.016003	2.30	5.61	$\frac{3}{2}$	+ 3.26
^{14}N	7	7	14	99.6%	14.003074	2.89	7.48	1	+ 0.403
^{31}P	15	16	31	100%	30.973762	3.77	8.48	$\frac{1}{2}$	+ 1.13
^{88}Rb	37	51	88	18 m	87.911326	5.34	8.68	2	+ 0.508
^{120}Sn	50	70	120	32.4%	119.902199	5.92	8.50	0	0
^{157}Gd	64	93	157	15.7%	156.923956	6.47	8.20	$\frac{3}{2}$	− 0.340
^{197}Au	79	118	197	100%	196.966543	6.98	7.92	$\frac{3}{2}$	+ 0.146
^{239}Pu	94	145	239	24 100 y	239.052158	7.45	7.56	$\frac{1}{2}$	+ 0.203

[a] Per i nuclei stabili si indica l'abbondanza, per i radionuclidi, il tempo di dimezzamento.

ISBN 88-406-0777-2

dioattivo, e (*b*) può facilmente spaccarsi (fissione) in due frammenti. Entrambi questi processi riducono l'energia coulombiana in misura maggiore di quanto non la riducano l'energia dei legami «forti».

Dimensioni nucleari

Abbiamo usato il raggio di Bohr a_0 ($= 5.29 \times 10^{-11}$ m) come una comoda unità per la misura delle dimensioni degli atomi. I nuclei sono più piccoli di un fattore dell'ordine di 10^4, e così troviamo che un'unità di misura comoda per distanze su questa scala è il *femtometro* ($= 10^{-15}$ m). Questa unità di misura di lunghezza è talvolta chiamata anche *fermi*, usando sempre lo stesso simbolo:

$$1 \text{ fermi} = 1 \text{ femtometro} = 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}.$$

Possiamo ottenere molte informazioni sulle dimensioni e sulla struttura del nucleo conducendo esperimenti di diffusione, secondo lo schema indicato nella figura 1, con l'impiego di un fascio di elettroni incidenti ad alta energia. Questa deve essere abbastanza grande (> 200 MeV) da ridurre la lunghezza d'onda di de Broglie del fascio di elettroni fino al punto da consentirgli di agire da sonda sensibile per la struttura interna del nucleo. In tal modo questi esperimenti, rilevando la figura di diffrazione delle particelle diffuse, ne deducono la forma dell'oggetto che provoca la diffusione (ossia del nucleo).

Dalla grande varietà di prove di diffusione si è dedotto che la densità del nucleo deve avere l'andamento, in funzione della distanza dal centro del nucleo, che appare nella figura 5. Vediamo che il nucleo non presenta una superficie nettamente definita. Ha però un raggio medio R caratteristico. La densità $\rho(r)$ ha valore costante all'interno del nucleo, e cade a zero in maniera sfumata e non netta. Da questi esperimenti risulta che il raggio medio R aumenta al crescere di A secondo la legge approssimata:

$$R = R_0 A^{1/3}, \tag{1}$$

dove A è il numero di massa ed R_0 una costante che vale circa 1.2 fm. Per il ^{63}Cu, ad esempio,

$$R = (1.2 \text{ fm})(63)^{1/3} = 4.3 \text{ fm}.$$

Per fare un confronto, il raggio medio di uno ione rame in un reticolo di rame solido vale 1.8 raggi di Bohr, circa 2×10^4 volte più grande.

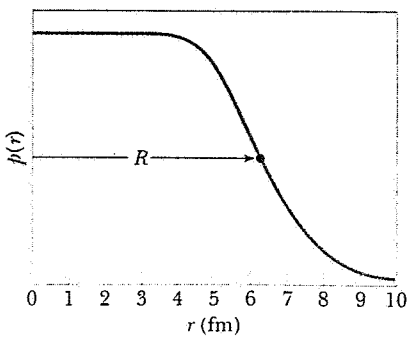


Figura 5 Variazione della densità del nucleo di ^{197}Au in funzione della distanza dal centro.

Masse nucleari ed energie di legame

Le masse dei nuclei possono essere misurate con grande precisione usando moderni spettrometri di massa e tecniche di reazione nucleare. Ricordiamo che l'unità di misura di queste masse è l'*unità unificata di massa atomica* (abbreviazione u), scelta in modo che la massa *atomica* (*non* la massa nucleare) di ^{12}C valga esattamente 12 u. Il rapporto tra questa unità e l'unità di massa del SI è

$$1 \text{ u} = 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Si noti che il numero di massa (simbolo A) che identifica un nuclide è così chiamato perché è uguale al valore della massa atomica del nuclide, arrotondato all'intero più vicino. Così ad esempio il numero di massa del nuclide ^{137}Cs è 137: infatti il nuclide contiene 55 protoni e 82 neutroni, che costituiscono 137 nucleoni, e la sua massa atomica è 136.907073 u, che si arrotonda numericamente a 137.

Nella fisica nucleare, a differenza della fisica atomica, le variazioni di energia durante un evento sono così frequenti che la ben nota relazione di Einstein fra massa ed energia $E = \Delta mc^2$ è un indispensabile strumento di lavoro da tenere sempre a portata di mano. Dovendo molto spesso ricorrere alla conversione di unità di massa in unità di energia, è utile richiamarne l'espressione numerica:

$$E = \Delta mc^2 = \frac{(1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg})(2.9979 \times 10^8 \text{ m/s})^2}{1.6022 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}}$$
$$= 931.5 \text{ MeV}.$$

Ciò significa che a c^2 possiamo sostituire il valore 931.5 MeV/u, e trovare così rapidamente l'energia equivalente (in MeV) di una massa o di una differenza di massa (in u), e viceversa.

Consideriamo ad esempio il deuterone, il nucleo dell'atomo d'idrogeno pesante. Un deuterone consiste di un protone e un neutrone legati dalla forza forte. L'energia E_B che dobbiamo apportare al deuterone per separarlo, dividendolo nei suoi due nucleoni, è chia-

mata *energia di legame* del nucleo. In realtà, l'energia di legame è l'energia interna totale del nucleo, comprendente la forza forte fra i due nucleoni, la forza di Coulomb, e l'energia cinetica di ciascuno dei due nucleoni rispetto al centro di massa del nucleo. Per la conservazione dell'energia durante la divisione del nucleo, possiamo scrivere:

$$m_d c^2 + E_B = m_n c^2 + m_p c^2. \qquad (2)$$

Se sommiamo $m_e c^2$, l'energia equivalente alla massa di un elettrone, ai due membri dell'equazione troviamo:

$$(m_d + m_e)c^2 + E_B = m_n c^2 + (m_p + m_e)c^2,$$

ossia

$$m(^2\mathrm{H})c^2 + E_B = m_n c^2 + m(^1\mathrm{H})c^2. \qquad (3)$$

Nella 3, $m(^2\mathrm{H})$ e $m(^1\mathrm{H})$ indicano, rispettivamente, le masse dell'atomo neutro dell'idrogeno *pesante* e dell'atomo neutro dell'idrogeno *comune*. Sono masse atomiche, non nucleari. Ricavando E_B dalla (3) troviamo:

$$E_B = [m_n + m(^1\mathrm{H}) - m(^2\mathrm{H})]c^2 = \Delta m c^2, \qquad (4)$$

ove Δm è la differenza di massa. Per calcoli di questo tipo si usano in generale le masse atomiche a preferenza di quelle nucleari, perché sono quelle indicate nelle tabelle di uso comune. Come accade in questo esempio, le masse degli elettroni molto spesso si elidono opportunamente.*

Per il calcolo relativo al deuterone, i valori che intervengono per le masse sono:

$$m_n = 1.008665 \text{ u}, \qquad m(^1\mathrm{H}) = 1.007825 \text{ u},$$
$$m(^2\mathrm{H}) = 2.014102 \text{ u}.$$

Sostituendo nella 4 alle masse i rispettivi valori e a c^2 il suo equivalente in energia, ricaviamo il valore di E_B:

$$E_B = (1.008665 \text{ u} + 1.007825 \text{ u} - 2.014102 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u})$$
$$= (0.002388 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 2.224 \text{ MeV}.$$

Si confronti questa energia con l'energia di legame dell'idrogeno nel suo stato fondamentale, che è 13.6 eV, circa 5 ordini di grandezza più piccola.

Se dividiamo l'energia di legame di un nucleo per il suo numero di massa, troviamo l'energia di legame media per nucleone, parametro caratteristico riportato nella tabella 1. Il grafico della figura 6 mostra l'andamento di questo parametro in funzione del numero di massa. Il fatto che questa *curva dell'energia di legame* «scenda» ai due estremi, per i numeri di massa minimi e massimi, ha conseguenze pratiche di enorme importanza.**

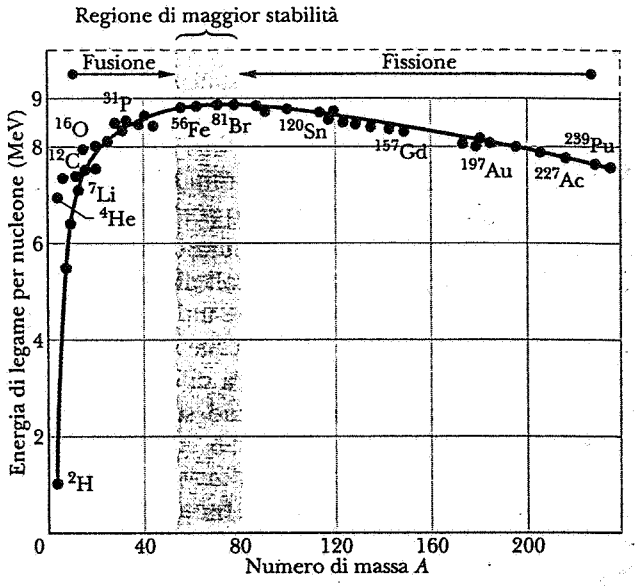


Figura 6 Energia di legame per nucleone riferita al numero di massa. Sulla curva è localizzata la posizione dei nuclidi più significativi, fra i quali alcuni di quelli descritti nella tabella 1. La regione di massima stabilità corrisponde alla fascia dei numeri di massa compresi fra 50 e 80.

L'andamento discendente della curva dell'energia di legame nella regione dei numeri di massa più elevati ci dice che i nucleoni, quando sono impaccati in due nuclei di massa media, sono legati più intimamente che nel caso di un singolo nucleo di massa più elevata. In altre parole, la *fissione nucleare* che spacca un singolo nucleo di grande massa in due frammenti minori può liberare energia.

La caduta della curva dell'energia di legame ai bassi numeri di massa suggerisce d'altra parte che si può liberare energia qualora due nuclei di piccolo numero di massa si combinino a formare un singolo nucleo di numero di massa intermedio. Un simile processo, che è l'inverso della fissione, è chiamato *fusione nucleare*. Esso si svolge nel nostro Sole e in altre stelle ed è il meccanismo col quale il Sole genera l'energia che irraggia su di noi.

* Si veda però il problema 51, che illustra un'eccezione.

** *The Curve of Binding Energy* è stato persino adottato come titolo di un libro (di John McPhee), sulle possibilità di un terrorismo nucleare.

ISBN 88-408-0777-2

Spin e magnetismo nucleare

I nuclei, al pari degli atomi, possiedono un momento angolare intrinseco la cui massima componente lungo un asse z qualsiasi è dato da $J\hbar$. Questo J è un numero quantico, che può essere intero o uguale alla metà di un numero intero, chiamato *spin nucleare*; i valori per alcuni nuclei particolari sono indicati nella tabella 1.

E, sempre come per gli atomi, a un momento angolare nucleare può essere associato un momento magnetico nucleare. Ricordiamo che, nel magnetismo atomico, il *magnetone di Bohr* μ_B, così definito:

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T},$$

è adottato come unità di misura molto conveniente. In fisica nucleare, invece, l'unità più adeguata all'uso è il magnetone nucleare μ_N, definito in modo analogo a quello di Bohr, salvo che la massa dell'elettrone m_e è sostituita da quella del protone m_p. Ossia

$$\mu_N = \frac{eh}{4\pi m_p} = 3.15 \times 10^{-8} \text{ eV/T}.$$

Dato che il momento magnetico dell'elettrone libero vale (quasi esattamente) un magnetone di Bohr, ci sarebbe da aspettarsi che il momento magnetico del protone libero valga (quasi esattamente) un magnetone nucleare. Non è però proprio così, dato che il suo valore misurato è $+ 2.7929\ \mu_N$. Per capire il meccanismo dei momenti magnetici del protone e del neutrone, si deve considerare la loro struttura interna. E i momenti magnetici dei nuclei pesanti possono a loro volta essere analizzati studiando i momenti magnetici dei protoni e neutroni che li costituiscono.

Esempio 2 Qual è la densità approssimata della *materia nucleare* di cui son fatti tutti i nuclei?

Soluzione Sappiamo che questa densità è molto grande, poiché virtualmente tutta la massa dell'atomo risiede nel suo minuscolo nucleo. Il volume del nucleo, assimilabile a una sfera di raggio R di densità uniforme, vale, secondo l'equazione 1,

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi(R_0^3 A).$$

La densità ρ_n della materia nucleare, espressa in nucleoni per unità di volume, è

$$\rho_n = \frac{A}{V} = \frac{A}{(4\pi/3)R_0^3 A} = \frac{1}{(4\pi/3)(1.2 \text{ fm})^3} = 0.14 \text{ nucleoni/fm}^3.$$

La massa di un nucleone è 1.7×10^{-27} kg. La densità *di massa* ρ_m della materia nucleare risulta:

$$\rho_m = (0.14 \text{ nucleoni/fm}^3)(1.7 \times 10^{-27} \text{ kg/nucleone}) \times (1 \text{ fm}/10^{-15} \text{ m})^3 = 2.4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3,$$

ossia 2.4×10^{14} volte la densità dell'acqua! A differenza degli elettroni orbitali, i nuclidi hanno una densità praticamente indipendente dal numero dei loro nucleoni. In un certo senso, sono impaccati come biglie in un sacchetto.

Esempio 3 Immaginate che un tipico nucleo di massa media, come ^{120}Sn, sia stato scomposto nei protoni e neutroni che lo componevano. Trovate (*a*) l'energia totale richiesta e (*b*) l'energia per ogni nucleone. La massa atomica dello ^{120}Sn è 119.902199 u. Si veda la tabella 1.

Soluzione (*a*) Lo ^{120}Sn contiene 50 protoni e $120 - 50 = 70$ neutroni. La massa atomica complessiva di queste particelle libere risulta:

$$M = Zm_p + Nm_n = 50(1.007825 \text{ u}) + 70(1.008665 \text{ u}) = 120.997800 \text{ u}.$$

L'eccesso di massa rispetto a quella dello ^{120}Sn vale:

$$\Delta m = 120.997800 \text{ u} - 119.902199 \text{ u} = 1.095601 \text{ u}.$$

Trasformando questa differenza di massa in energia a riposo, troviamo per l'energia di legame complessiva:

$$E_B = \Delta mc^2 = (1.0956 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 1020.6 \text{ MeV}.$$

(*b*) L'energia di legame E per nucleone vale:

$$E + \frac{E_B}{A} = \frac{1020.6 \text{ MeV}}{120} = 8.50 \text{ MeV/nucleone}.$$

Questo risultato concorda con il valore che si ricava dalla curva della figura 6.

54-3 IL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Come risulta dalla figura 4, la maggior parte dei nuclidi che sono stati individuati sono radioattivi. Ciò significa che essi possono emettere spontaneamente una particella, trasformandosi in tal modo in un altro nuclide. In questo capitolo esaminiamo le due situazioni più comuni, l'emissione di una particella α (decadimento alfa) e l'emissione di un elettrone (decadimento beta).

Qualunque sia la natura del decadimento, la sua caratteristica più saliente è che avviene statisticamente. Consideriamo, ad esempio, un campione di 1 mg di

uranio metallico. Contiene 2.5×10^{18} atomi dell'isotopo ^{238}U, un emettitore alfa di vita molto lunga. I nuclei di questi atomi sono sopravvissuti, senza decadimenti, da quando sono stati creati (prima della formazione del nostro sistema solare) nel corso dell'esplosione di una supernova.

Durante ogni secondo circa 12 dei nuclei di questo nostro campione subiranno un decadimento, con emissione di una particella α. Non siamo però assolutamente in grado di prevedere se un determinato nucleo nel campione sarà compreso fra quelli che decadranno nel prossimo secondo. Ogni singolo nucleo di ^{238}U ha esattamente le stesse probabilità di qualunque altro di decadere durante qualsiasi secondo del periodo di osservazione, vale a dire $12/(2.5 \times 10^{18})$, ossia una probabilità su 10^{17}.

In generale, se un campione contiene N nuclei radioattivi, possiamo affermare il carattere statistico del processo di decadimento scrivendo che il rapporto della frequenza dei decadimenti R $(= -dN/dt)$ rispetto al numero dei nuclei presenti è uguale a una costante:

$$\frac{-dN/dt}{N} = \lambda, \tag{5}$$

ove λ, la *costante di disintegrazione*, ha un valore caratteristico differente per ogni nuclide radioattivo. Possiamo riscrivere l'equazione 5 così:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\, dt,$$

che si integra immediatamente in

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \tag{6}$$

Qui N_0 è il numero dei nuclei radioattivi nel campione al tempo $t = 0$. Vediamo dunque che la diminuzione di N in funzione del tempo segue una semplice legge esponenziale.

Siamo spesso più interessati a conoscere l'*attività*, ossia la frequenza di decadimento R $(= -dN/dt)$ del campione, che non il numero N dei nuclei radioattivi in esso contenuti. Differenziando l'equazione 6 si ottiene:

$$R = R_0 e^{-\lambda t}, \tag{7}$$

ove R_0 $(= \lambda N_0)$ rappresenta la frequenza di decadimento al tempo $t = 0$. Si noti inoltre che, in qualsiasi istante t, $R = \lambda N$. Avevamo stabilito all'inizio che il rapporto R/N è costante; non dobbiamo quindi meravigliarci di veder confermato che entrambi diminuiscono nel tempo secondo la stessa legge esponenziale.

Notevole interesse presenta il tempo $t_{1/2}$, chiamato *tempo di dimezzamento* o *emivita* o anche *semiperiodo*, al termine del quale sia R sia N sono ridotti a metà del loro valore iniziale. Ponendo $R = \frac{1}{2}R_0$ nell'equazione 7 si ha:

$$\tfrac{1}{2}R_0 = R_0 e^{-\lambda t_{1/2}},$$

che diventa facilmente:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \tag{8}$$

che esprime la relazione fra il tempo di dimezzamento e la costante di disintegrazione.

I due esempi che seguono mostrano come si possa misurare λ per un processo di decadimento con tempo di dimezzamento relativamente breve e anche con tempo di dimezzamento relativamente lungo.

Esempio 4 Nei decadimenti a vita breve è possibile misurare direttamente la diminuzione nel tempo della frequenza di decadimento R. La tabella seguente fornisce alcuni dati per un campione di ^{128}I, un radionuclide normalmente usato in medicina come tracciante per misurare il grado di assorbimento dello iodio da parte della tiroide. Ricavate da questi dati (*a*) la costante di disintegrazione λ e (*b*) il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$.

Tempo (min)	R (eventi/s)	*Tempo* (min)	R (eventi/s)
4	392.2	132	10.9
36	161.4	164	4.56
68	65.5	196	1.86
100	26.8	218	1.00

Soluzione (*a*) Se uguagliamo i logaritmi dei due membri dell'equazione 7, troviamo

$$\ln R = \ln R_0 - \lambda t. \tag{9}$$

Se quindi tracciamo la funzione $\ln R(t)$ (ossia $R(t)$ con le ordinate in scala logaritmica, come nella figura 7), otteniamo una linea retta, la cui pendenza è uguale a $-\lambda$. Scrivendo che la pendenza della retta è uguale a $-\lambda$, otteniamo il valore di λ:

$$-\lambda = -\frac{(6.06 - 0)}{(220\ \text{min} - 0)},$$

ossia

$$\lambda = 0.0275\ \text{min}^{-1}.$$

(*b*) L'equazione 8 dà per $t_{1/2}$ il valore

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{0.0275\ \text{min}^{-1}} = 25.2\ \text{min}.$$

Esempio 5 Un campione di 1.00 g di KCl puro, prelevato dal magazzino dei prodotti chimici, risulta radioattivo, con una frequenza di decadimento R di 1600 disintegrazioni al secondo. Il

ISBN 88-408-0777-2

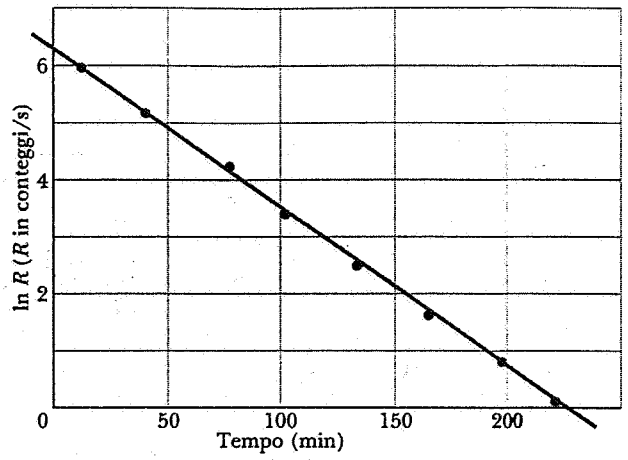


Figura 7 Esempio 4. Il grafico dei valori, in scala logaritmica, che descrive la frequenza degli eventi di un decadimento in funzione del tempo ha un andamento nettamente rettilineo, che conferma la natura esponenziale del processo. Dalla pendenza della retta si può ricavare la costante di decadimento λ.

decadimento è imputabile all'elemento potassio e in particolare al suo isotopo ^{40}K, che costituisce lo 1.18% del potassio naturale. Qual è il tempo di dimezzamento relativo a questo decadimento?

Soluzione Nel caso di decadimenti a vita lunga non è possibile stare ad aspettare abbastanza a lungo per arrivare a osservare una apprezzabile diminuzione della velocità di decadimento R. Dobbiamo trovare λ misurando sia N sia la sua derivata $-dN/dt$ nell'equazione 5. La massa molecolare di KCl è 74.9 g/mole, cosicché il numero di atomi di potassio nel campione è

$$N_K = \frac{(6.02 \times 10^{23}\ \text{mole}^{-1})(1.00\ \text{g})}{74.9\ \text{g/mole}} = 8.04 \times 10^{21}.$$

Il numero degli atomi di ^{40}K è 1.18% di N_K, ossia

$$N_{40} = (0.0118)(8.04 \times 10^{21}) = 9.49 \times 10^{19}.$$

Dall'equazione 5 ricaviamo

$$\lambda = \frac{-dN/dt}{N} = \frac{R}{N_{40}} = \frac{1600\ \text{s}^{-1}}{9.49 \times 10^{19}} = 1.69 \times 10^{-17}\ \text{s}^{-1},$$

e, dall'equazione 8, il tempo di dimezzamento

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \left(\frac{0.693}{1.69 \times 10^{-17}\ \text{s}^{-1}}\right)\left(\frac{1\ \text{y}}{3.16 \times 10^{7}\ \text{s}}\right)$$
$$= 1.30 \times 10^{9}\ \text{y}.$$

Questo tempo è dell'ordine di grandezza dell'età dell'universo. Non dobbiamo dunque stupirci se non possiamo sperare di misurare il tempo di dimezzamento del potassio stando ad aspettare di assistere al rallentamento del suo decadimento! (Attenzione, anche il potassio nel nostro corpo ha la sua normale frazione dell'isotopo ^{40}K: siamo tutti leggermente radioattivi!)

54-4 IL DECADIMENTO ALFA

Il radionuclide ^{238}U, un tipico emettitore di particelle alfa, decade spontaneamente secondo lo schema di reazione:

$$^{238}\text{U} \rightarrow ^{234}\text{Th} + ^{4}\text{He}, \qquad (10)$$

con tempo di dimezzamento di 4.47×10^9 y. Nell'esempio 6 si dimostra che ciascuno di questi eventi di decadimento libera un'energia di 4.27 MeV, sotto forma di energia cinetica spartita fra la particella α (^{4}He) emessa e il residuo nucleo ^{234}Th rinculante.

A questo punto ci chiediamo: "Se in ciascun evento di decadimento di questo tipo si libera energia, perché mai i nuclei di ^{238}U non decaddero immediatamente al momento in cui furono creati?" Il processo di creazione si ritiene abbia avuto luogo al tempo della violenta esplosione delle stelle ancestrali (le supernove), anteriore alla formazione del nostro sistema solare. Perché dunque questi nuclei hanno aspettato tanto a lungo a liberarsi della loro energia esuberante mediante l'emissione di una particella α? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo studiare in tutti i suoi dettagli il meccanismo del decadimento alfa.

Sceglieremo un modello nel quale immaginiamo che la particella α esista preformata all'interno del nucleo prima di sfuggirne. La figura 8 mostra, a titolo indicativo, l'andamento della curva $U(r)$ dell'energia poten-

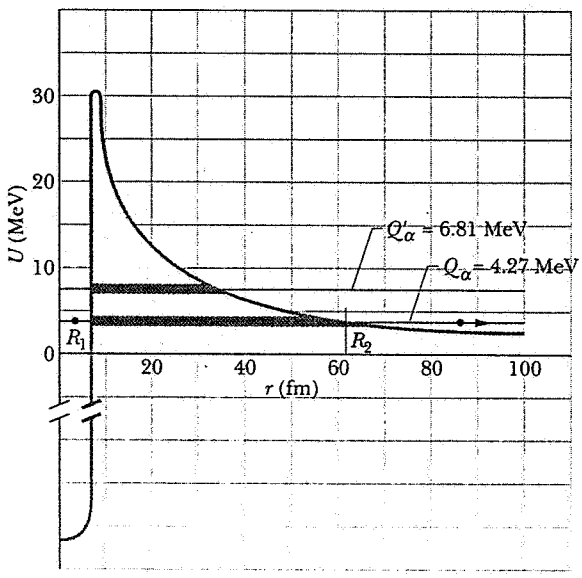


Figura 8 Andamento dell'energia potenziale per l'emissione di una particella α da un nucleo di ^{238}U. L'area colorata rappresenta la barriera di potenziale che impedisce il processo di decadimento. Le linee orizzontali corrispondono alle energie di decadimento dello ^{238}U (4.27 MeV) e ^{228}U (6.81 MeV).

ziale della particella α e del nucleo residuo ^{234}Th in funzione della distanza r che li separa. Si tratta della combinazione di una buca di potenziale, associata con la potente forza (di attrazione) nucleare che agisce all'interno del nucleo ($r < R_1$), con un potenziale di Coulomb associato con la forza elettrostatica (repulsiva) che verrà ad agire fra le due particelle dopo il decadimento ($r > R_1$).

La linea orizzontale per $Q_\alpha = 4.27$ MeV rappresenta l'energia di disintegrazione per questo processo, calcolata nell'esempio 6. Notiamo che questa retta interseca la curva dell'energia potenziale in due punti, R_1 ed R_2. Ora comprendiamo per quale ragione la particella α non poteva essere immediatamente emessa dal nucleo di ^{238}U! Esso è infatti circondato da una imponente barriera di potenziale, l'area colorata nella figura 8. Si può visualizzare questa barriera come un guscio sferico di raggio interno R_1 e di raggio esterno R_2, il cui volume è interdetto alla particella α secondo le leggi della fisica classica. Se infatti una particella α si trovasse in quella regione dello spazio, la sua energia potenziale U sarebbe maggiore della sua energia totale E, ciò che significa, in termini di fisica classica, che la sua energia cinetica K ($= E - U$) sarebbe negativa, situazione impossibile.

E allora, dobbiamo capovolgere il senso della nostra domanda: "*Come potrà mai* un nucleo di ^{238}U *riuscire a emettere* una particella α?" La particella α sembra proprio destinata a rimanere in permanenza intrappolata da quella barriera all'interno del nucleo.

La risposta è che, come abbiamo imparato al paragrafo 50-8, nella meccanica ondulatoria c'è sempre un margine di probabilità (definito dall'equazione 19 di quel capitolo) che una particella possa penetrare, per effetto tunnel, attraverso una barriera che appare insormontabile in termini di fisica classica. E proprio la spiegazione del decadimento alfa in base all'effetto tunnel fu una delle primissime applicazioni della neonata teoria dei quanti.

Per il decadimento a lungo termine del nuclide ^{238}U la barriera non è in realtà tanto «infiltrabile». Possiamo dimostrare come la particella α, che, all'interno del nucleo, si presume vaghi nei dintorni della barriera, debba urtarvi contro qualcosa come 10^{38} volte prima di riuscire a sfondarla. Ciò corrisponde a 10^{20} volte al secondo per 10^9 y! Noi, naturalmente, stiamo a osservare dal di fuori, registrando soltanto le particelle α che *riescono* a evadere.

Possiamo verificare questa spiegazione del decadimento alfa per effetto tunnel osservando altri emettitori alfa che presentano una barriera di caratteristiche differenti. Andremo all'estremo opposto, a considerare il decadimento alfa di un altro nuclide dell'uranio, ^{228}U, con energia di disintegrazione $Q'_\alpha = 6.81$ MeV, come indicato alla figura 8. La barriera in questo caso è al tempo stesso più sottile (confrontare le lunghezze delle linee orizzontali, sempre nella figura 8) e più bassa (confrontare l'altezza delle due barriere sopra le due linee); se le nostre informazioni sull'effetto tunnel sono veritiere, dobbiamo aspettarci che il decadimento alfa avvenga più facilmente per lo ^{228}U che non per lo ^{238}U. Ed è proprio così. Come appare alla tavola 2, il tempo di dimezzamento dello ^{228}U è soltanto di 550 s!

TABELLA 2 IL DECADIMENTO ALFA DI ^{238}U E ^{228}U

Nuclide	Q_α	$t_{1/2}$
^{238}U	4.27 MeV	4.5×10^9 y
^{228}U	6.81 MeV	550 s

Ricordiamo dal paragrafo 50-8 che il coefficiente di trasmissione di una barriera, per effetto della natura esponenziale della già citata equazione 19, è molto sensibile a cambiamenti anche piccoli delle dimensioni della barriera. Vediamo infatti che aumentando soltanto di 1.6 volte l'energia di disintegrazione Q_α si registra una riduzione del tempo di dimezzamento (cioè dell'efficacia protettiva della barriera contro l'effetto tunnel) di 3×10^{14} volte.

Esempio 6 (*a*) Trovare l'energia liberata durante il decadimento alfa del nuclide ^{238}U. Dimostrare che questo nuclide non può emettere spontaneamente un protone. Le masse atomiche che intervengono sono:

^{238}U 238.050785 u ^{4}He 4.002603 u

^{234}Th 234.043593 u ^{1}H 1.007825 u

^{237}Pa 237.051143 u

Soluzione (*a*) Nel processo di decadimento alfa dell'equazione 10 la massa atomica totale dei prodotti di decadimento (= 238.046196 u) è minore della massa atomica dello ^{238}U di una quantità $\Delta m = 0.004589$ u, la cui energia equivalente è:

$$Q_\alpha = \Delta m\, c^2 = (0.004589 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 4.27 \text{ MeV}.$$

Questa *energia di disintegrazione* è disponibile per la spartizione, sotto forma di energia cinetica, fra la particella α (^{4}He) emessa e il residuo nucleo ^{234}Th rinculante.

(*b*) Se ^{238}U dovesse emettere un protone, il processo di decadimento sarebbe:

$$^{238}\text{U} \rightarrow {}^{237}\text{Pa} + {}^{1}\text{H}.$$

In questo caso la massa dei prodotti di decadimento *supera* quella del nuclide ^{238}U di $\Delta m = 0.008183$ u, e l'energia equivalente ri-

ISBN 88-408-0777-2

sulta $Q_p = -7.622$ MeV. Il segno negativo significa che, per scindere ^{238}U in ^{237}Pa più un protone, occorre un *apporto* di energia. Ecco perché ^{238}U è stabile rispetto all'emissione spontanea di protoni.

54-5 IL DECADIMENTO BETA

Un nucleo che decade spontaneamente emettendo un elettrone (sia positivo che negativo) subisce il cosiddetto decadimento beta.* Eccone due esempi:

$$^{32}P \rightarrow ^{32}S + e^- + \bar{\nu} \quad (t_{1/2} = 14.3 \text{ d}) \qquad (11)$$

e

$$^{64}Cu \rightarrow ^{64}Ni + e^+ + \nu \quad (t_{1/2} = 12.7 \text{ h}). \qquad (12)$$

I simboli ν e $\bar{\nu}$ rappresentano il *neutrino* e la sua antiparticella, l'*antineutrino*, particelle neutre emesse dal nucleo insieme a un positrone (elettrone positivo) o a un elettrone durante il processo di decadimento. I neutrini interagiscono soltanto molto debolmente con la materia, e sono perciò tanto difficili da rivelare che per molti anni la loro presenza passò inosservata. La natura fondamentale e l'importanza di queste evanescenti particelle sono illustrate al capitolo 56.

Può apparire strano che i nuclei possano emettere elettroni (e neutrini), visto che abbiamo affermato che sono formati soltanto da protoni e neutroni. Ma, come abbiamo già visto, gli atomi emettono fotoni, e non si può certo affermare che essi «contengano» fotoni: diciamo infatti che i fotoni «sono creati» durante il processo di emissione.

Così accade anche per gli elettroni e i neutrini emessi dai nuclei nel decadimento beta. Sono tutti creati durante il processo di emissione, quando, all'interno del nucleo, un neutrone si trasforma in un protone, o viceversa, secondo i due processi fondamentali di decadimento beta:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad \text{(decadimento } \beta^-) \qquad (13)$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu \quad \text{(decadimento } \beta^+) \qquad (14)$$

In qualsiasi processo di decadimento, la quantità di energia liberata è unicamente determinata dalla differenza fra l'energia a riposo del nucleo primitivo e quella complessiva del nucleo finale e dei prodotti di decadimento (come nel caso dell'esempio 6). In uno specifico tipo di processo di decadimento alfa, come sarebbe quello di ^{238}U, ogni particella α emessa possiede la stessa energia cinetica. Nel decadimento beta, invece, l'energia cinetica dell'elettrone emesso non è univocamente determinata. Gli elettroni emessi presentano infatti uno spettro continuo di valori dell'energia, da zero fino a un massimo K_{max}, come illustrato nella figura 9 per il decadimento beta del ^{64}Cu (eq. 12).

Per parecchi anni, prima che fosse identificato il neutrino, curve come quella della figura 9 costituivano un enigmatica sfida. Suggerivano l'idea che una parte dell'energia «andasse perduta» nel corso del processo di decadimento, e molti fisici di alta reputazione, come Niels Bohr, furono indotti a sospettare che, per certi tipi di decadimento, le leggi della conservazione dell'energia potessero essere valide soltanto statisticamente.

La soluzione dell'enigma è l'emissione del neutrino, o dell'antineutrino, che si prende una parte dell'energia di decadimento. Se andassimo a misurare le energie delle due particelle (elettrone e antineutrino, oppure positrone e neutrino) in un processo di decadimento di un certo tipo, e ne facessimo la somma, troveremmo sempre lo stesso identico valore, uguale a quello dell'energia di decadimento. L'energia si conserva proprio anche in ogni singolo processo di decadimento.

L'esistenza di una particella «invisibile» come soluzione del problema della perdita di energia fu proposta da Pauli nel 1931, e nel 1934 il neutrino entrò «ufficialmente» a far parte di una formale teoria del decadimento beta formulata da Fermi. Dovettero tuttavia passare ancora vent'anni prima che si riuscisse a «vedere» i neutrini in un'esperienza di laboratorio. La difficoltà della misurazione dei neutrini dipende dalla loro evanescente interazione con la materia – il loro cammino libero attraverso la materia solida è dell'ordine di parecchie migliaia di anni luce –. Oggi la fisica del neutrino è una componente importante della fisica del nucleo e delle particelle, e coloro che se ne occupano studiano non soltanto i neutrini da sorgenti radioattive di laboratorio, ma anche quelli emessi in grande

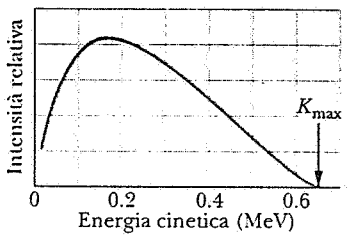


Figura 9 Distribuzione dell'energia cinetica dei positroni emessi nel decadimento beta del ^{64}Cu. La massima energia cinetica vale 0.653 MeV.

* Si definisce decadimento beta anche la cattura di un elettrone, caso in cui un nucleo decade assorbendo uno dei suoi elettroni orbitali. Questo tipo di processo non rientra fra quelli considerati in questo capitolo.

 ISBN 88-408-0777-2

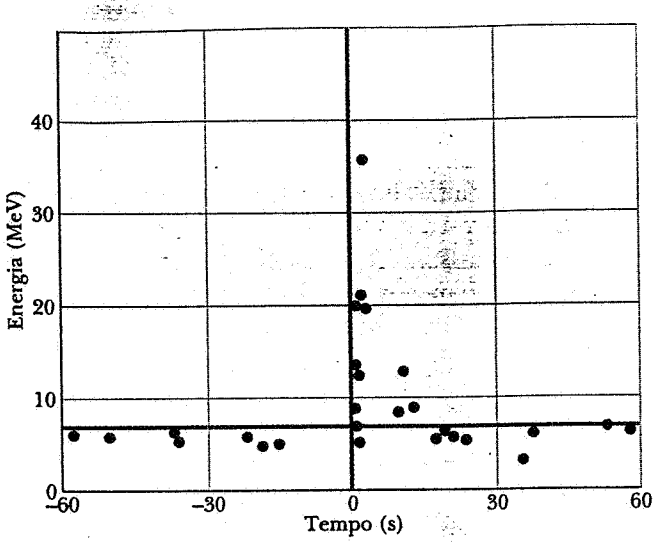


Figura 10 Registrazione di un'esplosione di neutrini proveniente dalla supernova SN 1987A.

quantità dal Sole, e quelli che furono creati durante la formazione dell'universo (che sono ovunque presenti in numero di circa 100 per cm^3). La figura 10 mostra le tracce lasciate da una pioggia di neutrini rivelati sulla Terra e provenienti dalla supernova *1987* situata nella Grande Nebulosa di Magellano (fig. 17, cap. 8). E poiché lo strumento rivelatore si trovava in Giappone, mentre la supernova è nell'emisfero celeste meridionale, i neutrini, per farsi riconoscere, hanno dovuto viaggiare attraverso tutta la Terra!

Il nostro studio dei decadimenti alfa e beta ci porta a considerare da un nuovo punto di vista la mappa dei nuclidi della figura 4. Proviamo a costruire una superficie tridimensionale assegnando a ogni punto della mappa di coordinate N e Z un'altezza, perpendicolare rispetto al piano della mappa stessa, proporzionale all'eccesso di massa del nuclide corrispondente al punto (N, Z). Questa superficie costituisce una rappresentazione grafica della stabilità dei nuclidi. Come si vede, limitatamente ai nuclidi leggeri, nella figura 11, la superficie descrive una «valle dei nuclidi», lungo il cui fondo corre la zona di stabilità della figura 4. I nuclidi più pesanti, collocati sul retro, che non compaiono nella figura, decadono nella valle principalmente per decadimenti alfa a catena e per fissione spontanea. Quelli sul versante della valle più ricco in protoni vi decadono beta per emissione di elettroni positivi, quelli sul versante più ricco in neutroni per emissione di elettroni negativi.

Esempio 7 Calcolare l'energia di disintegrazione Q nel decadimento beta del ^{32}P, come descritto dall'equazione 11. Le masse atomiche occorrenti sono 31.93907 u per ^{32}P e 31.972071 u per ^{32}S.

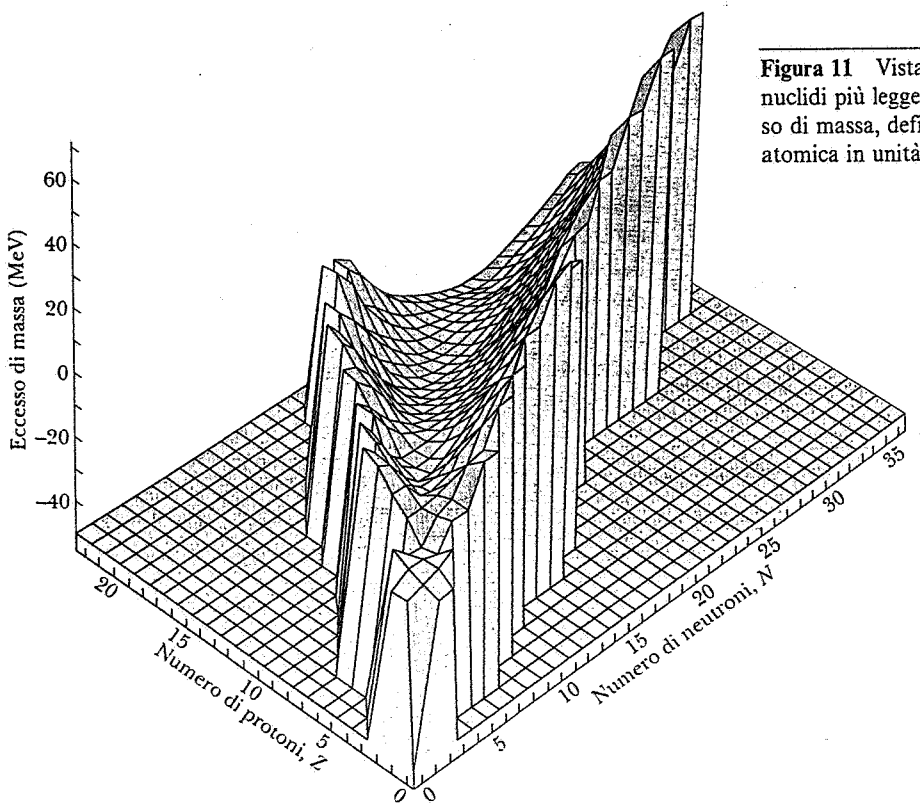


Figura 11 Vista parziale della valle dei nuclidi, limitata ai nuclidi più leggeri. Le altezze sono proporzionali all'eccesso di massa, definito come $(m - A)c^2$, ove m è la massa atomica in unità u.

ISBN 88-408-0777-2

Soluzione La presenza dell'elettrone emesso ci deve rendere molto attenti a distinguere fra massa atomica e massa nucleare. Chiamiamo m' le masse nucleari di ^{32}P e ^{32}S, e m le loro masse atomiche. L'energia di disintegrazione è $Q = \Delta mc^2$, essendo

$$\Delta m = m'(^{32}P) - [m'(^{32}S) + m_e],$$

ove m_e è la massa dell'elettrone, e si trascura la massa del neutrino.

Se sommiamo e sottraiamo 15 m_e al secondo membro, troviamo

$$\Delta m = [m'(^{32}P) + 15m_e] - [m'(^{32}S) + 16m_e].$$

Le quantità fra parentesi quadre sono le masse atomiche. Ricaviamo così:

$$\Delta m = m(^{32}P) - m(^{32}S).$$

Sottraendo in questo modo le masse atomiche, si tiene automaticamente conto della massa dell'elettrone emesso.*

L'energia di disintegrazione per il decadimento del ^{32}P è dunque:

$$Q = \Delta m\, c^2 = (31.973907 \text{ u} - 31.972071 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u})$$
$$= 1.71 \text{ MeV}.$$

Questo corrisponde al valore misurato di K_{max}, la massima energia degli elettroni emessi. In questo modo, sebbene vengano rilasciati 1.71 MeV ogni volta che un nucleo ^{32}P decade, praticamente in tutti gli eventi l'energia asportata dell'elettrone è inferiore. Il neutrino si prende il resto e se lo porta via fuori dal laboratorio senza farsi notare. (Una quota trascurabile, dell'ordine di 1 eV, va al nucleo di ^{32}S, al fine di conservare la quantità di moto nel decadimento.)

54-6 LA MISURA DELLE RADIAZIONI IONIZZANTI**

Quando alcune radiazioni, come i raggi X, i raggi gamma, le particelle beta o le particelle alfa, incontrano un atomo, può accadere che l'atomo emetta un elettrone e diventi ionizzato. Poiché la ionizzazione può danneggiare singole celle di tessuti viventi, gli effetti delle radiazioni ionizzanti sono diventati un argomento di pubblico interesse. Tali radiazioni provengono in natura dai raggi cosmici, e provengono anche da elementi radioattivi della crosta terrestre. Alla ionizzazione contribuiscono anche radiazioni prodotte artificialmente, come i raggi X per scopi diagnostici e terapeutici, e le radiazioni emesse da radionuclidi impiegati nell'industria e in medicina. I problemi poi dell'eliminazione delle scorie radioattive e della valutazione delle probabilità di incidenti nucleari sono all'ordine del giorno nelle discussioni ai più alti livelli politici internazionali.

Non è nostro obiettivo esaminare qui le diverse sorgenti di radiazioni ionizzanti, ma semplicemente descrivere le unità di misura per mezzo delle quali si definiscono le proprietà e gli effetti di queste radiazioni. Queste unità di misura sono quattro, e sono spesso usate in modo impreciso o scorretto nelle informazioni diffuse presso il pubblico.*

1. *Il becquerel (abbreviazione* Bq*).* Misura l'*attività*, ossia la velocità di decadimento, di una sorgente radioattiva. È definito come

1 becquerel = 1 disintegrazione al secondo.

Questa definizione ignora totalmente la natura dei decadimenti. Non è inoltre adatta a descrivere gli effetti ionizzanti dei raggi X provenienti, diciamo, da un apparecchio radiologico medico. Le radiazioni debbono provenire da un radionuclide.

Un esempio di uso corretto di questa unità è l'affermazione: "Un milligrammo di ^{239}Pu ha un'attività di 2.29 MBq." Il fatto che il ^{239}Pu sia un emettitore alfa non ha qui rilevanza.**

2. *Il coulomb al kilogrammo* (C/kg). Misura l'*esposizione*, definita come la capacità di un fascio di raggi X o di raggi gamma di produrre ioni in una particolare sostanza. In particolare, un C/kg è definito come l'esposizione che potrebbe generare una quantità di ioni la cui carica totale sia di 1 coulomb per kilogrammo di aria, essendo l'aria secca e in normali condizioni di temperatura e pressione. Potremmo ad esempio dire: "In 0.1 s, il fascio di raggi X di questo apparecchio radiografico per dentisti procura un'esposizione di 10 μC/kg." Ciò non ci dice se gli ioni siano effettivamente prodotti e se vi sia o meno un paziente sulla poltrona.***

3. *Il gray (simbolo* Gy*).* Misura la *dose* effettivamente assorbita da un oggetto specifico, in termini dell'e-

* Non è così per il decadimento da positrone o per la cattura di elettroni: vedi i problemi 51 e 52. Si noti ancora che in questo esempio trascuriamo la (piccola) differenza fra le energie di legame degli elettroni atomici prima e dopo il decadimento beta.

** Vedi Bushong S.C., *Radiation Exposure in Our Daily Lives*, «The Physics Teacher», marzo 1977, p. 135.

* Sono ancora talvolta in uso unità di misura non conformi al SI, di cui citiamo in nota, per ciascuna delle quattro grandezze, il nome e il rapporto di conversione. [N.d.T.]

** La unità precedentemente usata era il curie (Ci).
1 Ci = 3.7×10^{10} Bq. [N.d.T.]

*** La unità precedentemente usata era il röntgen (R).
1 R = 2.58×10^{-4} C/kg. [N.d.T.]

nergia a esso trasferita. Si dirà che un oggetto, che può essere una persona (l'intero corpo) oppure una parte specifica del corpo (le mani, ad esempio), ha ricevuto una dose assorbita di 1 Gy quando gli è stato ceduto 1 J per ogni kilogrammo tramite radiazioni ionizzanti. Una tipica affermazione che usa correttamente questa unità è: "Una dose di raggi gamma di 3 Gy per l'intero corpo causerebbe la morte del 50% della popolazione colpita". Per vostra tranquillità, sappiate che l'attuale esposizione media complessiva a radiazioni sia da sorgenti naturali che artificiali è intorno a 2 mGy per anno.*

4. *Il sievert* (*simbolo* Sv). Misura la *dose equivalente*. Tiene conto del fatto che, anche se differenti tipi di radiazioni (diciamo, raggi gamma e neutroni) possono far assorbire la stessa energia per unità di massa del corpo, non hanno gli stessi effetti biologici. La dose equivalente (in Sv) si trova moltiplicando la dose assorbita (in Gy) per un *fattore di qualità* QF, che si trova in tabelle di riferimento facilmente reperibili. Per raggi X ed elettroni, QF = 1. Per neutroni lenti, QF = 5, e così via. Strumenti di controllo individuale personalizzati, quali targhette con pellicole sensibili alle radiazioni, sono tarati in modo da registrare le dosi equivalenti in sievert.

Un esempio di uso corretto del sievert è: "Il Consiglio Nazionale per la protezione contro le radiazioni raccomanda che nessuna persona esposta (non per motivi professionali) a radiazioni riceva una dose equivalente maggiore di 5 mSv in un periodo della durata di un anno." Ciò comprende radiazioni di tutti i tipi, con l'applicazione degli appropriati fattori di qualità.**

Esempio 8 Una dose di 3 Gy è mortale per il 50% della popolazione che la riceve. Se la stessa quantità di energia fosse assorbita direttamente sotto forma di calore, che aumento di temperatura potrebbe provocare? Poniamo che c, il calore specifico del corpo umano, sia uguale a quello dell'acqua, ossia 4180 J/kg · K.

Soluzione Una dose assorbita di 3 Gy corrisponde a un'energia assorbita per unità di massa di

$$3 \text{ Gy} = 3 \text{ J/kg}.$$

L'aumento di temperatura provocato da un simile apporto di energia si ricava da:

$$\Delta T = \frac{Q/m}{c} = \frac{3 \text{ J/kg}}{4180 \text{ J/kg} \cdot \text{K}} = 7.2 \times 10^{-4} \text{ K}.$$

Da questo piccolissimo aumento di temperatura comprendiamo che il danno fatto dalle radiazioni ionizzanti non ha niente a che fare con l'effetto termico. Gli effetti dannosi derivano dal fatto che le radiazioni riescono a rompere alcuni legami molecolari, interferendo così con le normali funzioni del tessuto nel quale sono state assorbite.

* La unità precedentemente usata era il rad (rad). 1 rad = 0.01 Gy. [N.d.T.]

** La unità precedentemente usata era il rem (rem). 1 rem = 0.01 Sv. [N.d.T.]

54-7 LA RADIOATTIVITÀ NATURALE

Tutti gli elementi oltre l'idrogeno e l'elio sono stati formati da reazioni nucleari all'interno delle stelle o nell'esplosione di supernove. Questi processi hanno creato sia nuclidi stabili, sia radionuclidi. Il sistema solare è costituito da nuclidi che si formarono circa 4.5×10^9 anni fa. (Vedremo più avanti in questo paragrafo come si è giunti a questa constatazione). La maggior parte dei radionuclidi formati in quell'occasione hanno un tempo di dimezzamento molto minore di un miliardo di anni, e sono quindi ormai da lungo tempo decaduti a nuclei stabili per emissioni alfa o beta. Alcuni dei radionuclidi primitivi hanno un tempo di dimezzamento che non è tanto breve relativamente all'età del nostro sistema solare. La loro attività di decadimento continua a svolgersi e può essere osservata e misurata: essa contribuisce alla radioattività naturale di fondo dell'ambiente che ci circonda.

Alcune di queste specie radioattive fanno parte di catene di decadimento che partono da atomi pesanti, quali ^{232}Th ($t_{1/2} = 1.4 \times 10^{10}$ y) o ^{238}U ($t_{1/2} = 4.5 \times 10^9$ y). Questi nuclidi decadono attraverso sequenze di decadimenti alfa e beta, che raggiungono a un certo punto prodotti finali stabili (rispettivamente, ^{208}Pb e ^{206}Pb). I nuclei intermedi in queste catene hanno tempo di dimezzamento molto più breve; il ritmo al quale il nucleo originale scompare ed è rimpiazzato da quello finale stabile è determinato dal membro più «longevo» della catena di decadimento. Questi processi di decadimento stanno verosimilmente continuando a svolgersi dal tempo della formazione del nostro sistema solare, e pertanto (come vedremo più avanti) la misura delle quantità relative dei nuclidi primitivi e dei prodotti stabili finali presenti in un campione di un certo materiale può consentire di valutarne l'età. Si pensa che questi decadimenti contribuiscano al riscaldamento dell'interno dei pianeti.

Normalmente i prodotti di questi decadimenti rimangono al loro posto nelle rocce o nei minerali che contengono il nuclide che li ha generati. Ma il radon,

ISBN 88-408-0777-2

che è uno dei prodotti intermedi delle catene di decadimento, è un gas. I decadimenti naturali che avvengono vicino alla superficie della Terra (e nei materiali da costruzione, come il calcestruzzo) liberano nell'atmosfera il gas radon radioattivo. I rischi derivanti dal respirare questo gas radioattivo sono attualmente oggetto di ricerca molto attiva. Il radon può anche essere liberato da fratture delle rocce sotto la superficie terrestre: il contenuto di radon nell'atmosfera è correntemente rilevato allo scopo di prevedere i terremoti. Oltre agli elementi più pesanti, altri nuclidi radioattivi di lunga vita sono presenti nelle sostanze naturali. Alcuni di essi sono elencati nella tabella 3.

TABELLA 3 ALCUNI ISOTOPI RADIOATTIVI NATURALI

Isotopo	$t_{1/2}$ (y)
^{40}K	1.28×10^{9}
^{87}Rb	4.8×10^{10}
^{113}Cd	9×10^{15}
^{115}In	4.4×10^{14}
^{138}La	1.3×10^{11}
^{176}Lu	3.6×10^{10}
^{187}Re	5×10^{10}

Altri nuclidi radioattivi sono continuamente prodotti da processi naturali nell'atmosfera terrestre, basati principalmente su reazioni delle molecole dell'aria con i raggi cosmici, che sono una radiazione costituita da protoni ad alta energia provenienti dallo spazio. Tra questi radionuclidi è da segnalare il ^{14}C ($t_{1/2} = 5730$ y), che ha importanti applicazioni nella datazione radioattiva di materiali organici.

Datazione radioattiva

Supponiamo di avere un radionuclide I che decada a un prodotto finale F con un tempo di dimezzamento noto $t_{1/2}$. In un certo istante $t = 0$ partiamo con N_0 nuclei del nuclide iniziale e nessuno dei prodotti finali. In un istante successivo t troviamo N_I nuclei residui del nuclide originale, mentre ne sono comparsi N_F ($= N_0 - N_I$) del nuclide prodotto. I nuclei iniziali decadono secondo la legge esponenziale:

$$N_I = N_0 e^{-\lambda t},$$

da cui

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_I} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N_I}$$

e sostituendo $N_I + N_F$ a N_0:

$$t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \left(1 + \frac{N_F}{N_I}\right). \qquad (15)$$

Di qui si vede come dalla misurazione del rapporto fra la quantità residua di un radionuclide primitivo e quella del suo prodotto finale di decadimento si possa dedurre l'età del campione in esame.

Questo calcolo si basa sulla presunzione che nessuno dei nuclidi del prodotto finale fosse presente all'istante $t = 0$. Ciò può non essere sempre vero, ma esistono tecniche di datazione radioattiva che possono operare una correzione che tenga conto della presenza di nuclidi del prodotto anche all'inizio del decadimento.

Questo metodo può essere applicato alla determinazione del tempo trascorso dalla formazione del sistema solare: sono stati misurati ad esempio i rapporti fra ^{238}U e ^{206}Pb, ^{87}Rb e ^{87}Sr, ^{40}K e ^{40}Ar. E anche rocce terrestri, rocce lunari e meteoriti analizzati con questi metodi sembra abbiano la stessa età, intorno a 4.5×10^{9} anni, comunemente accettata come età del sistema solare.

L'isotopo radioattivo ^{14}C è presente nell'atmosfera, dove circa 1 atomo di carbonio su 10^{12} è ^{14}C radioattivo. Ogni grammo di carbonio ha un'attività di circa 12 decadimenti per minuto per effetto della presenza dell'isotopo ^{14}C. Gli organismi viventi assorbono questa attività per inspirazione di CO_2 o per ingestione di vegetali che l'hanno assorbita.

Quando l'organismo muore, smette di assorbire ^{14}C, e quello che è presente nel suo corpo al momento della morte comincia a decadere. Misurando il ritmo di decadimento del ^{14}C possiamo determinare l'età del campione. Se per esempio il campione in esame compie 6 decadimenti al minuto per grammo di carbonio contenuto, vediamo che l'attività originaria si è ridotta alla metà, e il campione deve avere un'età uguale al tempo di dimezzamento, ossia 5730 anni. Questo metodo di *datazione al radiocarbonio*, sviluppato nel 1947 da Willard Libby che per questo lavoro nel 1960 fu insignito del premio Nobel per la chimica, è utile per la datazione di campioni di materiale organico che abbiano un'età non superiore a circa 10 volte il tempo di dimezzamento del ^{14}C. Dopo questo tempo l'attività del campione diminuisce di un fattore di 2^{-10}, ossia circa 10^{-3}, e il ritmo di decadimento diventa troppo piccolo perché si possa misurarlo con sufficiente precisione. Il limite massimo di età che può essere praticamente valutato con questo metodo è pertanto intorno ai 50 000 anni.

Recentemente è stata sviluppata una nuova tecnica, che prevede di usare un acceleratore come spettrometro di massa per determinare il rapporto $^{14}C/^{12}C$ con alta precisione.

In questo modo l'utilizzo del metodo del radiocarbonio può essere applicato su campioni fino a 100 000 anni di età.

Esempio 9 In un campione di roccia si trova un rapporto $^{206}Pb/^{238}U = 0.65$. Qual è l'età della roccia?

Soluzione Dall'equazione 15, introducendo 4.5×10^9 y per il tempo di dimezzamento dello ^{238}U, troviamo

$$t = \frac{4.5 \times 10^9 \text{ y}}{0.693} \ln(1 + 0.65) = 3.3 \times 10^9 \text{ y}.$$

Questa roccia è alquanto più giovane rispetto all'età massima di 4.5×10^9 anni attribuita alle rocce del sistema solare. Questo fa pensare che la roccia non si sia solidificata fino a 3.3×10^9 anni fa, e che quindi il ^{206}Pb che si era formato in precedenza sia stato evaporato dalla roccia fusa. Soltanto dopo la solidificazione della roccia il ^{206}Pb poté cominciare ad accumularsi.

54-8 LE REAZIONI NUCLEARI

Una reazione nucleare può essere così rappresentata:

$$X + a \rightarrow Y + b \qquad (16)$$

oppure, in forma più compatta:

$$X(a,b)Y. \qquad (17)$$

Di solito la particella a è il *nucleo proiettile* e la particella X il *nucleo bersaglio*, che spesso si trova in stato di quiete nel laboratorio. Se il proiettile è una particella carica, la sua energia può essere portata al livello richiesto da un acceleratore di Van de Graaf (paragrafo 30-11) o da un ciclotrone (paragrafo 34-3). Il proiettile può anche essere un neutrone da un reattore nucleare. È anche usuale chiamare la particella prodotta Y (più pesante) *nucleo residuo*, e la b (più leggera) *nucleo emergente*.

L'energia di reazione Q è così definita:

$$Q = (m_x + m_a)c^2 - (m_Y + m_b)c^2. \qquad (18)$$

Per la legge della conservazione dell'energia, possiamo così riscrivere l'equazione 18:

$$Q = (K_Y + K_b) - (K_X + K_a), \qquad (19)$$

ove K rappresenta l'energia cinetica.

Le equazioni 18 e 19 sono valide soltanto se i nuclidi prodotti Y e b si trovano nel loro stato fondamentale. Come vedremo più avanti in questo stesso paragrafo, se ciò non avviene, l'energia della reazione risulta diminuita della quantità corrispondente all'energia di eccitazione.

Una reazione tipica è

$$^{19}F(p,\alpha)^{16}O,$$

per la quale è $Q = 8.13$ MeV. Le equazioni 18 e 19 ci informano che, per questa reazione, il sistema perde energia a riposo e guadagna energia cinetica, in misura di 8.13 MeV per ogni evento. Le reazioni, come questa, che hanno $Q > 0$ sono chiamate *esotermiche*. Le reazioni che hanno invece $Q < 0$ sono chiamate *en-*

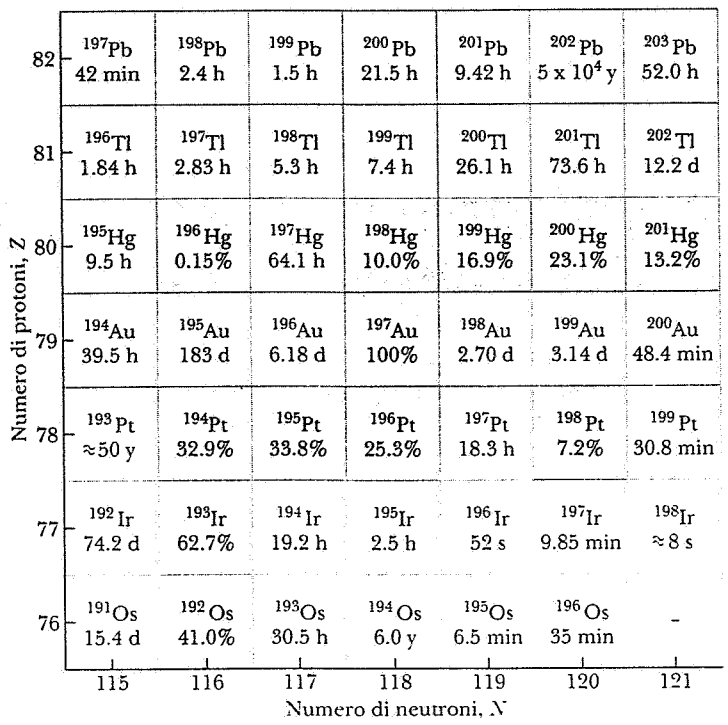


Figura 12 Una parte ingrandita del diagramma dei nuclidi di figura 4.

ISBN 88-408-0777-2

			α, n	α, γ
	p, n	p, γ d, n	d, γ α, d	α, p
	γ, n p, d		n, γ d, p	
p, α	γ, d d, α	n, d γ, d	n, p	
γ, α	n, α			

Figura 13 Sovrapponendo questa griglia trasparente alla mappa della figura 12, in modo che il quadratino centrale colorato sia collocato su quello di un nuclide bersaglio, si identificano i nuclei residui prodotti dalle reazioni indicate nei quadratini adiacenti.

dotermiche; le reazioni di questo tipo non «si svolgono» spontaneamente, ma occorrerà che un certo minimo di energia cinetica (l'«energia di soglia») sia immessa nel sistema dal proiettile.

Se a e b sono particelle identiche, ciò che richiede che anche X e Y siano identici, consideriamo la reazione come una *diffusione*. Se l'energia cinetica del sistema è identica prima e dopo l'evento di diffusione (ciò che significa che $Q = 0$, e che tutti i nuclidi rimangono nel loro stato fondamentale), si ha la *diffusione elastica*. Se l'energia cinetica varia nel corso dell'evento, ossia $Q \neq 0$, la diffusione è *anelastica*, nel qual caso Y o b possono venire a trovarsi in uno stato eccitato.

Possiamo facilmente ricostruire il percorso delle reazioni nucleari su una mappa dei nuclidi simile a quella della figura 4. La figura 12 mostra una zona ingrandita di una mappa di questo tipo, centrata arbitrariamente sul nuclide ^{197}Au. I nuclei stabili sono colorati, e recano l'indicazione delle rispettive abbondanze. I quadratini non colorati rappresentano radionuclidi, con l'indicazione del rispettivo tempo di dimezzamento.

La figura 13 dà il modello di un foglio trasparente sovrapponibile a una carta dei nuclidi come quella della figura 12. Se il quadratino centrale colorato della figura 13 viene sovrapposto a un particolare bersaglio della figura 12, attraverso il foglio trasparente è possibile individuare i nuclidi residui prodotti dalle diverse reazioni su di esso indicate.

Così, se scegliamo ^{197}Au come bersaglio, una reazione (p,α) produrrà il nuclide stabile ^{194}Pt, mentre sia la (n,γ) che la (d,p) produrranno il radionuclide ^{198}Au, con tempo di dimezzamento di 2.70 d.

I nuclei, al pari degli atomi, hanno stati stazionari con energie ben definite, e si può identificarli studiando le reazioni alle quali partecipano. Si consideri, per esempio, la reazione

$$^{27}\mathrm{Al(d,p)}^{28}\mathrm{Al}, \quad Q = 5.49 \text{ MeV},$$

nella quale un sottile foglio di alluminio è bombardato con deuteroni da 2.10 MeV. In laboratorio i protoni emergenti si presentano, accompagnati da raggi γ, con parecchi ben definiti livelli discreti di energia. La figura 14 mostra la distribuzione dell'energia dei protoni emergenti.

Noi sappiamo che, in ogni evento di reazione, un'energia equivalente alla somma dell'energia cinetica del neutrone incidente (= 2.10 MeV) e dell'energia di reazione Q = 5.49 MeV è disponibile per essere spartita fra il nucleo residuo ^{28}Al e il protone emergente p. Come sarà divisa fra queste due particelle questa energia totale, che vale 2.10 MeV + 5.49 MeV = 7.59 MeV?

Tutto dipende dalle condizioni nelle quali sarà prodotto il nucleo residuo ^{28}Al, se nel suo stato fondamentale o in uno stato eccitato. Nel primo caso il protone emergente avrà la massima energia possibile, corrispondente al picco sull'estrema destra nello spettro del protone nella figura 14. Se invece il nucleo residuo si forma in uno stato eccitato, quel nucleo tratterrà una frazione maggiore dell'energia disponibile e ci sarà meno energia a disposizione per il protone emergente. Il nucleo residuo non rimarrà nello stato eccitato a lungo, ma si libererà della sua energia in eccesso, per esempio emettendo un raggio gamma.

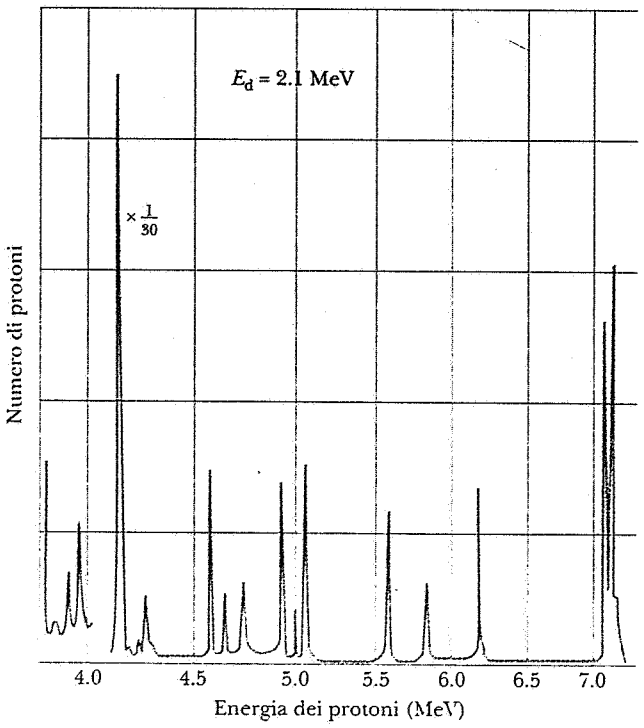


Figura 14 Distribuzione dell'energia fra i protoni emergenti dalla reazione ^{27}Al(d,p)^{28}Al. Il deuterone incidente ha un'energia di 2.10 MeV. Si misurano le energie dei protoni che emergono dal bersaglio ad angolo retto rispetto al raggio incidente.

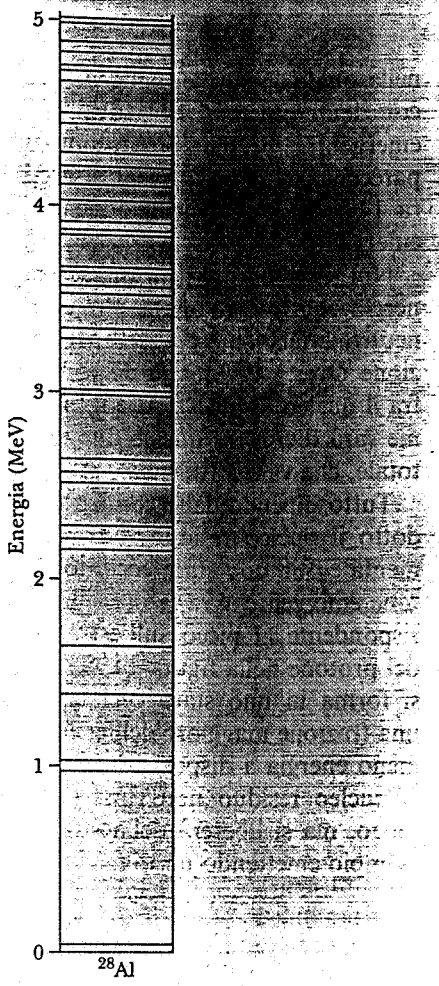


Figura 15 Livelli di energia dello ^{28}Al, dedotti da misurazioni analoghe a quelle della figura 14.

Ciascun picco dei protoni nello spettro di figura 14 corrisponde a uno stato stazionario del nucleo residuo ^{28}Al. La figura 15 mostra i livelli di energia che si possono individuare analizzando il suo spettro. Si noti la corrispondenza fra i picchi della figura 14 e i livelli di energia della figura 15. Abbiamo visto che la nostra interpretazione del modo in cui sono costruiti gli atomi è fondata sulle energie misurate per gli stati dell'atomo di idrogeno. Allo stesso modo, possiamo capire come siano costruiti i nuclei studiando le energie e le altre proprietà dei loro stati stazionari.

Esempio 10 Nella reazione

$$^1\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H}.$$

dei protoni (^{1}H) con energia cinetica 5.70 MeV vanno a colpire dei nuclidi ^{3}H a riposo. (*a*) Qual è il valore di Q per questa reazione? (*b*) Trovate l'energia cinetica dei deuteroni emessi lungo la direzione del protone incidente.

Soluzione (*a*) Dall'equazione 18 ricaviamo

$$\begin{aligned} Q &= [m(^1\mathrm{H}) + m(^3\mathrm{H}) - m(^2\mathrm{H}) - m(^2\mathrm{H})]c^2 \\ &= (1.007825\ \mathrm{u} + 3.016049\ \mathrm{u} - 2.014102\ \mathrm{u} \\ &\quad - 2.014102\ \mathrm{u})(931.5\ \mathrm{MeV/u}) \\ &= -4.03\ \mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

Questa reazione è endotermica: secondo l'equazione 19, i prodotti finali hanno masse maggiori e quindi energia cinetica globale minore.

(*b*) Usando l'equazione 19, con $K = 0$ per lo ^{3}H iniziale, abbiamo:

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 = Q + K_p &= -4.03\ \mathrm{MeV} + 5.70\ \mathrm{MeV} \\ &= 1.67\ \mathrm{MeV}. \end{aligned} \tag{20}$$

Qui i suffissi 1 e 2 si riferiscono ai due nuclei ^{2}H prodotti. La conservazione delle quantità di moto lungo la direzione dei protoni incidenti implica:

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 = p_p &= \sqrt{2m(^1\mathrm{H})K_p} = \sqrt{2(938\ \mathrm{MeV}/c^2)(5.70\ \mathrm{MeV})} \\ &= 103.4\ \mathrm{MeV}/c. \end{aligned} \tag{21}$$

Le equazioni 20 e 21 possono essere risolte come sistema di due equazioni in due incognite (p_1 e p_2 oppure K_1 e K_2). I risultati sono:

$$K_1 = 0.24\ \mathrm{MeV} \quad \text{e} \quad K_2 = 1.43\ \mathrm{MeV}.$$

Si noti che per risolvere questo problema abbiamo usato la dinamica non relativistica. Otterremo una buona approssimazione?

54-9 I MODELLI NUCLEARI *(Facoltativo)*

La struttura dell'atomo è ormai conosciuta a fondo. La forza di Coulomb si esercita dal centro dove è concentrata la massa (il nucleo) sugli elettroni, e per calcolare le proprietà dell'atomo (disponendo di sufficiente tempo di elaborazione su calcolatore) possiamo usare i metodi della meccanica quantistica.

Le cose non sono altrettanto semplici nel caso del nucleo. La legge che governa la forza nucleare è complicata e non può essere enunciata esplicitamente in tutti i suoi dettagli. E nemmeno esiste un centro naturale delle forze per semplificare i calcoli. Per comprendere la struttura del nucleo, dobbiamo affrontare un problema di molti corpi interagenti, di grande complessità.

In mancanza di una teoria generale della struttura nucleare, tentiamo invece di costruire dei *modelli nucleari*. I fisici usano i modelli per avere una visione semplificata di un sistema complesso, atta a consentire lo studio delle sue proprietà fisiche. L'utilità di un modello consiste essenzialmente nella sua capacità di fornire previsioni che possano essere verificate sperimentalmente.

Due modelli di nucleo si sono rivelati utili in tal senso. Un modello descrive situazioni in cui si possa ritenere che il comporta-

ISBN 88-408-0777-2

mento di tutti i protoni e i neutroni sia collaborativo, mentre l'altro modello, nel determinare le proprietà del nucleo, tiene conto soltanto della presenza di un protone o di un neutrone, ignorando tutti gli altri. Questi due modelli interpretano la struttura del nucleo da punti di vista totalmente opposti, ma possono essere combinati per creare un singolo modello unificato del nucleo.

Il modello collettivo

Nel modello collettivo ignoriamo i movimenti dei singoli nucleoni, ma consideriamo il nucleo come una unica entità. Questo modello, chiamato in origine «modello a goccia» (di liquido), fu sviluppato da Niels Bohr per spiegare la fissione nucleare. Immaginiamo il nucleo come un corpo analogo a una goccia di un liquido, entro il quale i nucleoni interagiscano fra loro come le molecole nel liquido.

La forma di equilibrio della goccia liquida è determinata dalle interazioni fra le sue molecole, e analogamente la forma di equilibrio del nucleo è determinata dalle interazioni fra i suoi nucleoni. Molti nuclei hanno forme sferiche di equilibrio, mentre altri possono avere forme ellissoidali.

Come una goccia liquida, un nucleo può assorbire energia per rotazione dell'intero nucleo intorno a un asse oppure per la sua vibrazione intorno alla forma di equilibrio. È possibile, compiendo esperimenti di decadimento radioattivo o con reazioni nucleari, studiare lo spettro di questi stati eccitati. La figura 16 mostra esempi di due tipi di situazioni. L'energia rotazionale $\frac{1}{2}I\omega^2$ può esprimersi, in termini di momento angolare L $(= I\omega)$, come $L^2/2I$. Scrivendo il momento angolare quantizzato secondo l'equazione 23 del capitolo 51 come

$$L = \sqrt{J(J+1)}\hbar,$$

ove J è il numero quantico del momento angolare totale, otteniamo

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1). \qquad (22)$$

Si noti che l'intervallo fra gli stati aumenta al crescere del momento angolare.

Gli stati vibrazionali hanno energie date da

$$E_n = n\hbar\omega = nh\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (23)$$

in cui ν è la frequenza di vibrazione. Si tratta della stessa espressione che fu usata da Planck per descrivere le vibrazioni quantizzate degli oscillatori atomici nella teoria della radiazione del corpo nero (vedi l'equazione 7 e la figura 6 del capitolo 49). Notare che gli stati vibrazionali nella figura 16*b* hanno intervalli uguali, come indicato dall'equazione 23.

Prove a favore della struttura collettiva si trovano anche nelle reazioni nucleari. In un certo tipo di reazioni $X + a \rightarrow Y + b$, si forma uno stato intermedio in cui X e a si coagulano in una singola entità C^*, chiamata nucleo composito, che si frammenta successivamente in Y e b. L'energia scaricata dal proiettile a nel bersaglio X è quindi distribuita più o meno uniformemente nel moto casuale dei nucleoni del nucleo composito. (Nel quadro del modello a goccia di liquido, possiamo immaginare due gocce che vengono a unirsi formando una goccia più grossa, le cui molecole hanno un'energia cinetica media più elevata, ciò che corrisponde, per la goccia composta, a una temperatura più elevata).

Il nucleo composito può esistere per un tempo fino a 10^{-16} s, una durata molto lunga rispetto a quelle usuali delle reazioni nucleari, che sono normalmente dell'ordine di 10^{-22} s. A un certo

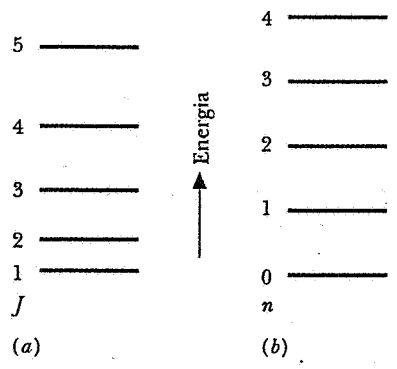


Figura 16 (*a*) Stati eccitati rotazionali, contraddistinti dal numero quantico J relativo al loro momento angolare. (*b*) Stati vibrazionali, contraddistinti dal numero quantico vibrazionale n.

punto, un nucleone o un gruppo di nucleoni arriverà, per fluttuazione statistica, ad acquisire abbastanza energia da riuscire a sfuggire al nucleo composito. Possiamo osservare questa particella b uscente e il nucleo residuo Y.

Caratteristica essenziale di questa ipotesi è che, una volta che l'energia del proiettile è stata spartita fra i nucleoni, il nucleo composito «dimentica» come è stato formato, per decadere semplicemente secondo una logica statistica. La figura 17 rappresenta un particolare processo, nel quale un nucleo composito $^{20}Ne^*$ si forma attraverso una qualsiasi di tre possibili reazioni, e decade in uno qualsiasi di tre modi diversi. Sperimentalmente si osserva che la probabilità relativa di ciascuno dei tre modi di decadimento ha lo stesso valore per qualsiasi combinazione di proiettile e bersaglio. Questo conferma l'interpretazione del nucleo composito e fornisce un altro esempio di comportamento collettivo dei nucleoni nel nucleo.

Il modello a particella indipendente

Nel modello a goccia liquida, i nucleoni circolano a casaccio e si urtano fra loro frequentemente. Il modello a particella indipendente, invece, suppone che ogni nucleone circoli su un'orbita ben definita all'interno del nucleo e che ben difficilmente entri in collisione con gli altri! Il nucleo – a differenza dell'atomo – non ha un centro fisso di carica, e in questo modello si suppone che ogni nucleone si muova entro un potenziale determinato dai movimenti di tutti gli altri nucleoni.

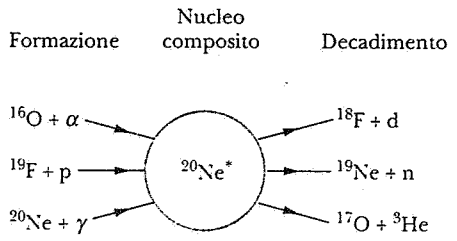


Figura 17 Alcuni dei molti processi possibili per la formazione e il decadimento del nucleo composito $^{20}Ne^*$.

Un nucleone dentro un nucleo, come un elettrone in un atomo, ha una serie di numeri quantici che definiscono il suo stato di moto. Anche i nucleoni, sempre come gli elettroni, obbediscono al principio di esclusione di Pauli. Ossia, due nucleoni non possono occupare uno stesso stato allo stesso tempo. Nel considerare gli stati dei nucleoni, neutroni e protoni sono trattati separatamente, avendo ciascuno la propria serie di stati quantizzati disponibili.

Il fatto che i nucleoni obbediscano al principio di Pauli ci aiuta a comprendere la relativa stabilità degli stati dei nucleoni. Se due nucleoni devono venire a collisione all'interno di un nucleo, l'energia di ciascuno di essi dopo la collisione deve corrispondere all'energia di uno stato stazionario non occupato. Se questi stati (o uno solo di essi) sono già riempiti, la collisione, molto semplicemente, non può aver luogo. A tempo debito, ogni singolo nucleone avrà una possibilità di collisione, ma nel frattempo avrà fatto un numero di rivoluzioni nella sua orbita sufficiente a dare un significato alla nozione di uno stato nucleonico stazionario con un'energia quantizzata.

Nel dominio degli atomi, l'essenza della tavola periodica degli elementi consiste nella sua periodicità. Ossia, certe proprietà degli elementi si ripetono con regolarità man mano che si procede nell'esame della tavola. Queste ripetizioni sono associate al fatto che gli elettroni dell'atomo si sistemano in strati e sottostrati che possiedono una spiccata stabilità quando sono occupati completamente. Possiamo considerare i numeri atomici dei gas inerti,

$$2, 10, 18, 36, 54, 86, \ldots\ldots$$

come *numeri magici elettronici* che marcano il completamento di strati successivi.

Anche i nuclei presentano l'aspetto a strati, associati con certi *numeri magici nucleonici*:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, \ldots.$$

Ogni nucleone il cui numero di protoni Z o di neutroni N corrisponda a uno di questi valori risulta avere un certo grado di stabilità che può essere evidenziato in molti modi.

Esempi di nuclidi «magici» sono ^{18}O ($Z = 8$), ^{40}Ca ($Z = 20$, $N = 20$), ^{92}Mo ($N = 50$), e ^{208}Pb ($Z = 82$, $N = 126$). Sia ^{40}Ca sia ^{208}Pb sono detti «doppi magici» perché hanno strati completi sia di protoni sia di neutroni.

Il numero magico 2 spicca per l'eccezionale stabilità della particella α (^4He), che, con $Z = N = 2$, è doppiamente magico. Per esempio, l'energia di legame per nucleone di questo nuclide si colloca ben al disopra di quella dei suoi vicini sulla curva dell'energia di legame della figura 6. La particella α è infatti così strettamente legata che è impossibile aggiungere ad essa un ulteriore nucleone: non esiste un nucleo stabile con $A = 5$.

Si può provare la struttura a gusci *degli atomi*, per esempio, con misurazioni delle energie di ionizzazione o dei raggi medi degli atomi. La figura 6 del capitolo 52 mostra la variazione dell'energia di ionizzazione degli atomi in funzione del numero di elettroni. Se riportiamo su un grafico i raggi atomici in funzione del numero di elettroni, troviamo una graduale discesa mentre si riempie uno strato, e poi un brusco salto quando si comincia a occupare lo strato successivo, perché il raggio dipende principalmente dal numero quantico principale n. Questi scarti improvvisi del raggio e dell'energia di ionizzazione hanno luogo quando il numero degli elettroni è uguale a uno dei numeri magici degli elettroni.

Anche nel caso dei nuclei possiamo raccogliere una nutrita documentazione sperimentale a favore della struttura a gusci del *nucleo*. L'esempio 12 dà un'idea della variazione della «energia di ionizzazione» (l'energia occorrente per estrarre dal nucleo un singolo protone o neutrone) in corrispondenza della «chiusura», ossia della saturazione di un guscio. La figura 18 mostra la variazione del raggio del nucleo in funzione del numero di neutroni. Proprio come nel caso degli atomi, il raggio diminuisce gradualmente mentre un guscio si sta riempiendo, per aumentare di colpo quando si passa a riempire il guscio successivo. Questi balzi improvvisi avvengono quando il numero dei protoni oppure quello dei neutroni è uguale a uno dei numeri magici dei nucleoni. E altre prove ancora della struttura a guscio si ottengono da altre proprietà del nucleo, quali il tempo di dimezzamento per decadimento alfa, il momento del dipolo magnetico, le sezioni d'urto per la cattura neutronica e per la diffusione di elettroni, e le energie degli stati eccitati. ■

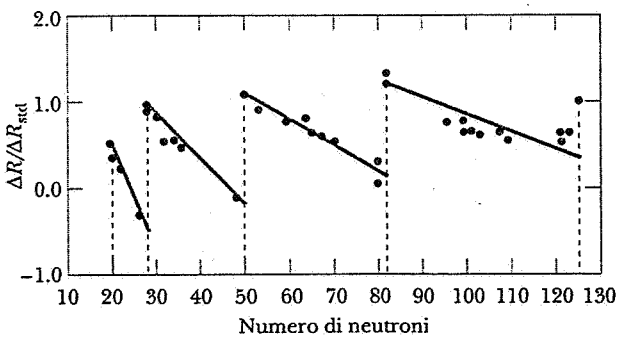


Figura 18 Andamento del raggio nucleare in funzione del numero di neutroni N. L'andamento è espresso relativamente alla variazione «standard» prevista per la struttura «collettiva» $R = R_0A^{1/3}$. Gli scarti improvvisi segnalano la presenza di un guscio completo.

Esempio 11 Consideriamo la reazione di cattura di neutroni

$$^{109}Ag + n \rightarrow {}^{110}Ag^* \rightarrow {}^{110}Ag + \gamma.$$

La figura 19 rappresenta la curva della sezione d'urto di questa reazione in funzione dell'energia del neutrone incidente. Si analizzi questa curva alla luce del concetto di nucleo composito e del principio di indeterminazione.

Soluzione La curva della sezione d'urto della figura 19 ha un picco molto marcato, che raggiunge un valore massimo di 12 500 barn.* La presenza di questo «picco di risonanza» indica che il nucleo composito $^{110}Ag^*$ possiede un solo livello eccitato. Quando l'energia disponibile è esattamente uguale all'energia di quel livello sopra lo stato fondamentale di ^{110}Ag, si ha «risonanza», e la reazione «si innesca» decisamente.

Il picco di risonanza non è però infinitamente netto. Dalla figu-

---

* La sezione d'urto relativa a una reazione è la misura della probabilità che la reazione abbia luogo. L'unità comunemente usata per esprimere le sezioni d'urto è il *barn*. che equivale a 10^{-28} m^2. Questa unità è tuttavia oggi esclusa dalle normative più recenti in materia. e al suo posto si può usare il fm^2.

ISBN 88-408-0777-2

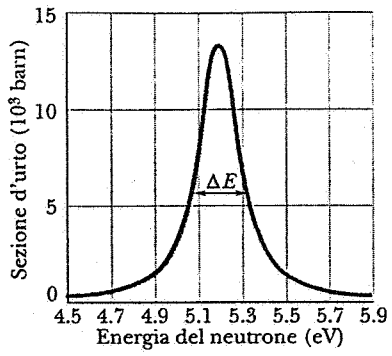


Figura 19 Esempio 11. La sezione d'urto per la reazione $^{109}Ag(n,\gamma)^{110}Ag$ in funzione dell'energia del neutrone incidente. La larghezza del picco a metà del valore massimo è di circa 0.20 eV.

ra si può misurare che a metà del valore massimo (ossia a 6250 barn) ha una larghezza approssimata di 0.20 eV. Da questa constatazione deduciamo che ^{110}Ag nel suo stato eccitato non ha un valore di energia ben definito: esso appare «sfumato», con un'incertezza dell'energia $\Delta E = 0.20$ eV.

Possiamo ricorrere al principio di indeterminazione, scritto nella forma

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h/2\pi, \tag{24}$$

per avere qualche informazione su uno stato qualsiasi di un sistema atomico o nucleare. Abbiamo visto che ΔE rappresenta il grado di incertezza della nostra conoscenza dell'energia dello stato. La quantità Δt è interpretata come il tempo disponibile per fare la misurazione dell'energia dello stato; di fatto è uguale alla vita media dello stato prima che decada.

Per lo stato eccitato $^{110}Ag^*$ abbiamo, dall'equazione 24:

$$\Delta t \approx \frac{h/2\pi}{\Delta E} = \frac{6.58 \times 10^{-16}\ \text{eV} \cdot \text{s}}{0.20\ \text{eV}} = 3.3 \times 10^{-15}\ \text{s}.$$

Questo è l'ordine di grandezza caratteristico della durata della vita di un nucleo composito.

Esempio 12 Il nuclide ^{120}Sn ($Z = 50$) ha un guscio di protoni completo, dato che 50 è uno dei numeri magici nucleonici. Il nuclide ^{121}Sb ($Z = 51$) ha un protone «in più» all'esterno di questo guscio. Secondo il concetto della struttura a gusci, la rimozione di questo protone in eccesso dovrebbe essere più agevole rispetto alla rimozione di uno dei protoni posti all'interno del guscio completo. Verificare questa affermazione calcolando l'energia richiesta nei due casi. Per le masse si usino i seguenti dati:

Nuclide	*Z*	*N*	*Massa atomica* (u)
^{121}Sb	50 + 1	70	120.903821
^{120}Sn	50	70	119.902199
^{119}In	50 − 1	70	118.905819

La massa atomica del protone è 1.007825 u.

Soluzione La rimozione del protone «extra» corrisponde al processo

$$^{121}Sb \rightarrow {}^{120}Sn + p.$$

L'energia richiesta E si ricava dalla

$$\begin{aligned} E &= [m(^{120}Sn) + m(^1H) - m(^{121}Sb)]c^2 \\ &= (119.902199\ \text{u} + 1.007825\ \text{u} - 120.903821\ \text{u}) \\ &\quad \times (931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 5.8\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

La rimozione di un protone dall'interno del guscio completo corrisponde a

$$^{120}Sn \rightarrow {}^{119}In + p.$$

L'energia richiesta E si ricava dalla

$$\begin{aligned} E &= [m(^{119}In) + m(^1H) - m(^{120}Sn)]c^2 \\ &= (118.905819\ \text{u} + 1.007825\ \text{u} - 119.902199\ \text{u}) \\ &\quad \times (931.5\ \text{MeV/u}) \\ &= 10.7\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Questa energia è notevolmente maggiore di quella richiesta per la rimozione di un protone «extra» (5.8 MeV), proprio come previsto dal modello a gusci. In modo analogo, l'energia richiesta per rimuovere un *elettrone* da uno *strato di elettroni* completamente occupato (22 eV per lo strato completo del neon) è molto maggiore di quella richiesta per rimuovere un elettrone «extra» dall'esterno di un analogo strato pieno (5 eV per l'elettrone «extra» del sodio).

DOMANDE

1. Quando una lamina sottile è bombardata con particelle α, alcune di esse sono diffuse all'indietro verso la sorgente. Da questa constatazione Rutherford giunse alla conclusione che la carica positiva dell'atomo – e anche la maggior parte della sua massa – debba essere concentrata in un microscopico «nucleo». Quale fu il filo logico del suo ragionamento?
2. Sotto quali aspetti differiscono fra loro la cosiddetta forza forte e la forza elettrostatica o di Coulomb?
3. Per quale ragione l'importanza *relativa* della forza di Coulomb rispetto alla potente forza nucleare aumenta per i numeri di massa più elevati?
4. Nel vostro corpo, si trovano più neutroni che protoni? Più

protoni che elettroni? Discutetene.

5. Perché i nuclei con grande numero di massa tendono ad avere più neutroni che protoni?
6. Perché usiamo le masse atomiche anziché le masse nucleari nell'analisi della maggior parte dei decadimenti nucleari e dei processi di reazione?
7. Come si potrebbe arrivare a trovare la relazione di equivalenza $1\ u = 1.6605 \times 10^{-27}$ kg in laboratorio?
8. Gli atomi di un determinato elemento possono avere masse differenti, caratteristiche fisiche differenti, e tuttavia non variare chimicamente. Perché?
9. La deviazione delle masse degli isotopi da valori interi può essere provocata da diversi fattori. Citatene alcuni. Quale di essi è il maggiore responsabile?
10. Come si determina la massa del neutrone?
11. I nuclidi più stabili hanno numero di massa vicino a 60 (fig. 6). Perché non hanno numero di massa vicino a 60 *tutti* i nuclidi?
12. Se trascuriamo i nuclei più leggeri, l'energia di legame per nucleone nella figura 6 è pressoché costante, compresa fra 7 e 8 MeV/nucleone. C'è da aspettarsi che anche negli atomi il valor medio per elettrone dell'energia di legame elettronico si mantenga pressoché costante per tutta la tavola periodica?
13. Perché l'energia di legame per nucleone (figura 6) è bassa ai bassi numeri di massa? E ai numeri alti?
14. Nella curva dell'energia di legame della figura 6 che cosa c'è di speciale o degno di nota per i nuclidi ^{2}H, ^{4}He, ^{62}Ni, e ^{239}Pu?
15. Il momento magnetico del neutrone è $-1.9130\ \mu_N$. Che cos'è un magnetone nucleare e in che cosa differisce dal magnetone di Bohr? Che cosa significa il segno meno? Come può il neutrone, che non possiede una carica netta, avere un momento magnetico?
16. Un certo nucleo di ^{238}U fu creato circa 10^{10} anni fa in una gigantesca esplosione stellare. Improvvisamente, mentre lo stiamo osservando, decade emettendo una particella α. Perché, dopo tutti quegli anni, ha deciso di decadere proprio in questo momento?
17. Potete confermare questa affermazione: "Misurando tempi di dimezzamento col metodo dell'esempio 4, non è necessario misurare direttamente la velocità di decadimento R, ma è sufficiente misurare qualsiasi grandezza a essa proporzionale. Invece col metodo dell'esempio 5 è indispensabile misurare *proprio* R."?
18. La temperatura influisce sulla velocità di decadimento dei nuclei radioattivi? Se è vero, in virtù di quale meccanismo?
19. State facendo prove di longevità su lampadine elettriche. Vi aspettate che il loro «decadimento» sia esponenziale? Qual è la differenza essenziale fra il decadimento delle lampadine elettriche e quello dei radionuclidi?
20. In generale gli orologi hanno processi periodici di estrema regolarità. Dato che il decadimento radioattivo avviene completamente a caso, come può ugualmente essere impiegato per la misura del tempo?
21. Potete dare una giustificazione, sia pure parziale, per il fenomeno dell'effetto tunnel sulle barriere, facendo riferimento a idee fondamentali sulla natura ondulatoria della materia?
22. Spiegate perché, nel decadimento alfa, tempi di dimezzamento brevi corrispondono a grandi energie di disintegrazione, e viceversa.
23. Un nucleo radioattivo può emettere un positrone, e^{+}. Questo significa che un protone all'interno del nucleo si è trasformato in un neutrone. La massa del neutrone, però, è maggiore di quella del protone. Come può allora avvenire l'emissione di un positrone?
24. Nel decadimento beta gli elettroni emessi formano uno spettro continuo, mentre nel decadimento alfa queste formano uno spettro discreto. Da questo fatto quali difficoltà sono sorte nell'interpretazione del decadimento beta, e come sono state superate?
25. Come si può distinguere un neutrino da un fotone? Entrambi hanno carica nulla e (presumibilmente) massa a riposo nulla, e viaggiano alla velocità della luce.
26. Il decadimento di elementi radioattivi produce elio, che prima o poi finisce nell'atmosfera terrestre. Tuttavia la quantità di elio presente nell'atmosfera è molto minore di quella liberata in quel modo. Spiegate perché.
27. Il tempo di dimezzamento di ^{238}U vale 4.5×10^{9} y, circa l'età del sistema solare. Come si può misurare un tempo di dimezzamento così lungo?
28. Nella datazione radioattiva con ^{238}U, come si riesce ad aggirare l'ostacolo quando non si conosce la quantità di ^{238}U che era inizialmente presente nelle rocce? (*Suggerimento*: qual è il prodotto finale di decadimento di ^{238}U?)
29. Elencate le diverse sorgenti di radiazioni ionizzanti, naturali o artificiali, che si trovano nell'ambiente.
30. Quali fra queste leggi di conservazione si applicano a tutte le reazioni nucleari? La legge della conservazione (*a*) della carica, (*b*) della massa, (*c*) dell'energia totale, (*d*) dell'energia a riposo, (*e*) dell'energia cinetica, (*f*) della quantità di moto, (*g*) del momento angolare, e (*h*) del numero totale dei nucleoni.
31. Piccole variazioni di temperatura hanno notevoli effetti sulla rapidità di svolgimento delle reazioni chimiche, ma hanno in genere effetti trascurabili sulla rapidità delle reazioni nucleari. Spiegatene la ragione.
32. Nell'evoluzione della conoscenza dell'atomo furono usati modelli atomici come ora usiamo modelli nucleari? La teoria di Bohr può essere considerata un modello atomico? Si usano attualmente modelli nella fisica atomica? Qual è la differenza fra un modello e una teoria?
33. Quali sono i postulati fondamentali del modello a goccia di liquido e del modello a particella indipendente per la struttura del nucleo? Su quali punti differiscono? Quali sono le analogie fra di essi?
34. È in grado il modello collettivo del nucleo di darci un quadro di ciascuno dei seguenti fenomeni: (*a*) accettazione da parte del nucleo di una particella che lo colpisce; (*b*) perdita di una particella per emissione spontanea; (*c*) fissione; (*d*) dipendenza della stabilità dal contenuto di energia?
35. Che cosa hanno di speciale («magico») i numeri magici nucleonici?
36. Perché i numeri magici dell'elettrone e quelli del nucleone non hanno identici valori? Da quali elementi dipende ciascuna delle due serie?
37. Il numero medio di isotopi stabili (o molto longevi) dei gas inerti è 3.7. Il numero medio di isotopi stabili per i quattro numeri magici dei neutroni è invece 5.8, notevolmente più alto. Se i gas inerti sono tanto stabili, perché non si è formato un maggior numero di loro isotopi stabili al momento della creazione degli elementi?

ISBN 88-408-0777-2

PROBLEMI

Paragrafo 54-1 Alla scoperta del nucleo

1. Calcolate la distanza di massimo avvicinamento per un urto frontale fra una particella α da 5.30 MeV e il nucleo di un atomo di rame.
2. (*a*) Calcolate la forza elettrica su una particella α alla superficie di un atomo di oro, supponendo che la carica positiva sia distribuita uniformemente per tutto il volume dell'atomo. Ignorate la presenza degli elettroni atomici. Un atomo di oro ha un raggio di 0.16 nm; trattate la particella α come una particella puntiforme. (*b*) Attraverso quale distanza dovrebbe agire questa forza, supposta costante, per riuscire a rallentare fino al completo arresto una particella α da 5.30 MeV? Esprimete la vostra risposta in termini del diametro di un atomo di oro.
3. Assumete per il nucleo dell'oro un raggio di 6.98 fm (vedi la tabella 1), e per una particella α un raggio di 1.8 fm. Quale valore deve avere l'energia di una particella α incidente per arrivare giusto a toccare il nucleo di oro?
4. Quando una particella α urta elasticamente un nucleo, questo rincula. Una particella α ha una collisione elastica frontale con un nucleo di oro, inizialmente a riposo. Qual è l'energia cinetica (*a*) del nucleo che rincula e (*b*) della particella α che rimbalza? Per la massa della particella α prendete 4.00 u e per il nucleo di oro 197 u.

Paragrafo 54-2 Alcune proprietà del nucleo

5. Rintracciate i nuclidi che appaiono nella tabella 1 sulla mappa dei nuclidi della figura 4. Quali di essi si trovano entro la zona di stabilità?
6. Il raggio di un nucleo, misurato con metodi di diffusione elettronica, risulta di 3.6 fm. Qual è la massa più probabile di quel nucleo?
7. Sistemate i 25 nuclidi elencati qui di seguito nei quadratini di una porzione di mappa dei nuclidi analoga a quella della figura 4. Tracciate e denominate (*a*) tutte le linee isobariche (A costante) e (*b*) tutte le linee di eccesso neutronico costante, definito come $N - Z$. Considerate i nuclidi $^{118\text{-}122}$Te, $^{117\text{-}121}$Sb, $^{116\text{-}120}$Sn, $^{115\text{-}119}$In, e $^{114\text{-}118}$Cd.
8. Una stella di neutroni è un oggetto stellare la cui densità è prossima a quella della materia nucleare, come calcolata all'esempio 2. Supponiamo che il Sole collassi in una forma siffatta senza perdere nulla della sua attuale massa. Quale diventerebbe presumibilmente il suo raggio?
9. Verificare se l'energia di legame per nucleone data dalla tabella 1 per il ^{239}Pu sia proprio 7.56 MeV/nucleone. I valori occorrenti per le masse atomiche sono: ^{239}Pu → 239.052158 u; ^{1}H → 1.007825 u; n → 1.008665 u.
10. Calcolare l'energia media di legame per nucleone del ^{62}Ni, che ha una massa atomica di 61.928346 u. Questo nuclide, fra tutti i nuclei stabili noti, ha la più elevata energia di legame per nucleone .
11. Le masse atomiche di ^{1}H, ^{12}C, e ^{238}U sono rispettivamente 1.007825 u, 12.000000 u (per definizione), e 238.050785 u, rispettivamente. (*a*) Quali valori assumerebbero queste masse se l'unità di massa fosse definita in modo che la massa di ^{1}H valga (esattamente) 1.000000 u? (*b*) Usate questo risultato per trovare una possibile ragione per la quale non è stata fatta questa scelta, apparentemente ovvia.
12. (*a*) Convincete voi stessi che l'energia racchiusa nei legami nucleari, o della forza forte, è proporzionale al numero di massa A del nucleo considerato. (*b*) Convincete voi stessi che l'energia racchiusa nei legami della forza di Coulomb fra i protoni è proporzionale a $Z(Z-1)$. (*c*) Dimostrate che, passando a nuclei sempre più grandi (vedi la figura 4), l'importanza di (*b*) aumenta più rapidamente di quella di (*a*).
13. Nella tavola del sistema periodico il magnesio è così identificato:

12
Mg
24.305

Ne esistono tre isotopi:

^{24}Mg, con massa atomica 23.985042 u,

^{25}Mg, con massa atomica 24.985837 u,

^{26}Mg, con massa atomica 25.982594 u.

L'abbondanza di ^{24}Mg è del 78.99% sulla massa totale. Calcolate le abbondanze relative degli altri due isotopi.

14. Dato che un nucleone è confinato entro un nucleo, possiamo ritenere che l'incertezza sulla sua posizione sia all'incirca uguale al raggio R del nucleo. Che valore ci dà il principio di indeterminazione per l'energia cinetica di un nucleone dentro un nucleo avente, per esempio, $A = 100$? (*Suggerimento*: Assumete per l'incertezza Δp della quantità di moto il valore effettivo della quantità di moto p.)
15. Vi si chiede di smembrare una particella α (^{4}He) estraendone, in successione, un protone, un neutrone e ancora un protone. Calcolate (*a*) il lavoro richiesto da ciascuna operazione; (*b*) l'energia di legame totale della particella α, e (*c*) l'energia di legame per nucleone. I valori occorrenti per le masse atomiche sono:

^{4}He 4.002603 u ^{2}H 2.014102 u

^{3}H 3.016049 u ^{1}H 1.007825 u

n 1.008665 u.

16. Per semplificare i calcoli, per le masse atomiche si trova talvolta indicato non il vero valore m, ma il valore $(m - A)c^2$, dove A è il numero di massa espresso in unità di massa. Questa quantità, espressa di solito in MeV, è chiamata l'*eccesso di massa*, simbolo Δ. Prendendo i dati dall'esempio 3, trovate gli eccessi di massa per (*a*) ^{1}H, (*b*) il neutrone, e (*c*) ^{120}Sn.
17. (*a*) Dimostrate che l'energia di legame complessiva di un nuclide può essere espressa così:

$$E_B = Z\Delta_H + N\Delta_n - \Delta.$$

ove Δ_H, Δ_n e Δ, sono i valori appropriati degli eccessi di massa; vedi il problema 16. (*b*) Calcolate, usando questo metodo, l'energia di legame per nucleone del ^{197}Au. Confrontate il risultato con i valori riportati nella tabella 1. I valori occorrenti per gli eccessi di massa sono: $\Delta_H = +7.289$ MeV, $\Delta_n = +8.071$ MeV, e $\Delta_{197} = -31.17$ MeV. Δ_H è l'eccesso di massa di ^{1}H. Notate il risparmio di calcolo che si realizza usando gli eccessi di massa invece che le masse effettive.
18. Una monetina ha una massa di 3.00 g. Calcolate l'energia nu-

cleare che sarebbe richiesta per separare tutti i neutroni e protoni presenti in questa monetina. Trascurate l'energia di legame degli elettroni. Per semplicità ammettete che la monetina sia costituita interamente da atomi di ^{63}Cu (massa = 62.929599 u). Le masse atomiche del protone e del neutrone sono rispettivamente 1.007825 u e 1.008665 u.

19. I raggi dei nuclei possono essere misurati per diffusione da parte dei nuclei di elettroni ad alta energia. (*a*) Qual è il valore della lunghezza d'onda di de Broglie per elettroni da 480 MeV? (*b*) Potrebbero essere usati come sonde adatte a questo scopo? Si tenga conto della relatività.
20. Poiché il neutrone non possiede carica, la sua massa deve essere misurata con un metodo diverso da quello dello spettrometro di massa. Quando un neutrone a riposo e un protone si incontrano, si combinano a formare un deuterone, emettendo un raggio gamma di energia 2.2233 MeV. Le masse atomiche del protone e del deuterone sono rispettivamente 1.007825 u e 2.014102 u. Da questi dati ricavate la massa del neutrone, con tante cifre significative quante ne sono consentite dai dati stessi.
21. Lo spin e il momento magnetico (massima componente lungo z) del ^{7}Li nel suo stato fondamentale (vedi la tabella 1) sono rispettivamente 3/2 e + 3.26 magnetoni nucleari. Un nucleo libero di ^{7}Li è situato in un campo magnetico di 2.16 T. (*a*) In quanti livelli si dividerà lo stato fondamentale a causa della quantizzazione dello spazio? (*b*) Qual è la differenza di energia fra coppie di livelli adiacenti? (*c*) Qual è la lunghezza d'onda che corrisponde a una transizione fra queste coppie di livelli? (*d*) In quale regione dello spettro elettromagnetico è situata questa lunghezza d'onda?
22. (*a*) Dimostrare che l'energia potenziale elettrostatica di una sfera uniforme di carica Q e raggio R è data da

$$U = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$$

(*Suggerimento*: Costruite la sfera per minuscoli strati trasportati qui da distanza infinita.) (*b*) Trovare l'energia del potenziale elettrostatico per il nuclide ^{239}Pu, supposto sferico; vedi la tabella 1. (*c*) Confrontare l'energia potenziale elettrostatica per particella con l'energia di legame per nucleone di 7.56 MeV. (*d*) Che cosa se ne conclude?

Paragrafo 54-3 Il decadimento radioattivo

23. Il tempo di dimezzamento di un isotopo radioattivo è 140 d. Quanti giorni impiegherebbe l'attività di questo radioisotopo per scendere a un quarto della sua velocità iniziale di decadimento?
24. Il tempo di dimezzamento di un certo isotopo radioattivo è 6.5 h. Se inizialmente un campione di questo radioisotopo ne contiene 48×10^{19} atomi, quanti ne rimangono dopo 26 ore?
25. Un isotopo radioattivo del mercurio, ^{197}Hg, decade in oro, ^{197}Au, con una costante di decadimento di 0.0108 h^{-1}. (*a*) Calcolare il suo tempo di dimezzamento. (*b*) Quale frazione della quantità iniziale rimarrà dopo tre tempi di dimezzamento? (*c*) E dopo 10 giorni?
26. Dai dati forniti nei primi capoversi del paragrafo 54-3 si deduca (*a*) la costante di disintegrazione λ e (*b*) il tempo di dimezzamento dello ^{238}U.
27. Il ^{67}Ga, di massa atomica = 66.93 u, ha tempo di dimezzamento di 78.25 h. Si consideri un campione di 3.42 g di questo isotopo, inizialmente puro. (*a*) Si trovi la sua attività (velocità di decadimento). (*b*) Si trovi la sua attività 48 ore dopo.
28. Dimostrare che la legge del decadimento radioattivo (equazione 6) può essere scritta nella forma

$$N = N_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}.$$

29. Il ^{223}Ra decade per decadimento alfa con un tempo di dimezzamento di 11.43 d. Quanti atomi di elio avrà creato dopo 28 d un campione di ^{223}Ra inizialmente puro contenente 4.70×10^{21} atomi?
30. Il radionuclide ^{64}Cu ha un tempo di dimezzamento di 12.7 h. Che quantità di un campione di 5.50 g di ^{64}Cu inizialmente puro decadrà durante un periodo di 2 h, contate a partire da 14.0 h dall'inizio?
31. Il radionuclide ^{32}P ($t_{1/2}$ = 14.28 d) è usato spesso come tracciante per seguire lo svolgersi di reazioni biochimiche alle quali partecipa il fosforo. (*a*) Se in un particolare esperimento il conteggio dà 3050 conteggi/s, dopo quanto tempo sarà calato a 170 conteggi/s? (*b*) Una soluzione contenente ^{32}P è stata immessa nell'apparato radicale di una pianta di pomodori, e dopo 3.48 giorni è stata misurata l'attività del ^{32}P in una foglia. Per quale fattore deve essere moltiplicata la lettura per tenere conto dei decadimenti avvenuti dall'inizio dell'esperimento?
32. Un campione di 1.00 g di samario emette 120 particelle α al secondo. L'isotopo ^{147}Sm, la cui naturale abbondanza nel samario totale è del 15%, ne è l'unico responsabile. Calcolare il tempo di dimezzamento di questo isotopo.
33. Il ^{239}Pu, di massa atomica = 239 u, decade per decadimento alfa con tempo di dimezzamento di 24100 y. Quanti grammi di elio saranno stati prodotti dopo 20000 y da un campione di 120 g di ^{239}Pu inizialmente puro?
34. Una sorgente contiene due radionuclidi di fosforo, ^{32}P ($t_{1/2}$ = 14.3 d) e ^{33}P ($t_{1/2}$ = 25.3 d). Inizialmente 10.0% del decadimento proviene da ^{33}P. Quanto tempo occorrerà attendere per vedere questa percentuale salire al 90.0%?
35. Dopo essere stato sottoposto a una breve irradiazione di neutroni, un campione di argento presenta due attività: ^{108}Ag ($t_{1/2}$ = 2.42 min) con una velocità iniziale di decadimento pari a 3.1×10^5 eventi/s, e ^{110}Ag ($t_{1/2}$ = 24.6 s) con una velocità iniziale di decadimento 4.1×10^6 disintegrazioni/s. Tracciate un diagramma, simile a quello della figura 7, che mostri la velocità complessiva dei due isotopi in funzione del tempo da $t = 0$ a $t = 10$ min. La figura 7 spiega come ricavare il tempo di dimezzamento per semplici decadimenti. Disponendo soltanto del diagramma per il decadimento complessivo, siete in grado di proporre un modo di analizzarlo per ricavare il tempo di dimezzamento di ciascuno dei due isotopi?
36. Proprio mentre scriviamo questo testo si sta sollevando il dubbio che il protone non sia una particella stabile, ma possa essere radioattivo con un un tempo di dimezzamento di circa 1×10^{32} y. Se dovesse risultare vero, quanto tempo all'incirca dovreste attendere per essere ragionevolmente certi che un protone nel vostro corpo sia decaduto? Supponete di essere fatti d'acqua e di avere una massa di 70 kg.
37. In un ciclotrone si sta creando un certo radionuclide con un ritmo produttivo costante P. Esso contemporaneamente decade con una costante di disintegrazione λ. Facciamo continuare il processo per un tempo lungo in confronto al tempo di dimezzamento del radionuclide. Convincete voi stessi che il numero di nuclei radioattivi presenti dopo questo tempo

ISBN 88-408-0777-2

sarà costante e uguale a $N = P/\lambda$. Convincetevi inoltre del fatto che questo risultato è valido qualunque fosse il numero di nuclei radioattivi presenti all'inizio. Il nuclide si definisce in *equilibrio secolare* con la sua sorgente; in questo stato la sua velocità di decadimento è uguale al suo ritmo di produzione.

38. Il radionuclide ^{56}Mn ha tempo di dimezzamento di 2.58 h ed è prodotto in un ciclotrone bombardando con deuteroni un bersaglio di manganese. Questo contiene soltanto l'isotopo stabile ^{55}Mn, e la reazione che produce ^{56}Mn è:

$$^{55}\text{Mn} + \text{d} \rightarrow {}^{56}\text{Mn} + \text{p}.$$

Dopo un «bombardamento» durato molto più di 2.58 h, l'attività del bersaglio, da attribuirsi a ^{56}Mn, è 8.88×10^{10} s^{-1}; vedi il problema 37. (*a*) A quale ritmo costante P sono prodotti nel ciclotrone i nuclei ^{56}Mn durante il bombardamento? (*b*) A quale ritmo stanno decadendo (sempre durante il bombardamento)? (*c*) Quanti nuclei ^{56}Mn saranno presenti al termine del bombardamento? (*d*) Qual è la loro massa totale? La massa atomica di ^{56}Mn è 55.94 u.

39. Una sorgente di radio contiene 1.00 mg di ^{226}Ra, che decade con tempo di dimezzamento di 1600 y producendo ^{222}Rn, un gas inerte. Questo gas radon, a sua volta, decade alfa con tempo di dimezzamento di 3.82 d. (*a*) Calcolate la velocità di decadimento del ^{226}Ra nella sorgente. (*b*) Con quale rapidità decade il radon quando è giunto all'equilibrio secolare con la sua sorgente? Vedi il problema 37. Quanto radon è in equilibrio secolare con la sua sorgente?

Paragrafo 54-4 Il decadimento alfa

40. In generale i nuclidi più pesanti tendono a essere più instabili per decadimento alfa. Per esempio, l'isotopo più stabile dell'uranio, ^{238}U, ha un tempo di dimezzamento per decadimento alfa di 4.5×10^9 y. L'isotopo più stabile del plutonio è ^{244}Pu con tempo di dimezzamento di 8.2×10^7 y, mentre per il curio troviamo ^{248}Cm con 3.4×10^5 y. Quando la metà di un campione originario di ^{238}U è decaduta, quale frazione rimane degli isotopi originali (*a*) di plutonio e (*b*) di curio?

41. Ammettiamo che un nucleo di ^{238}U sia costituito da una particella α e da un nucleo residuo (^{234}Th). Tracciate la curva dell'energia potenziale elettrostatica $U(r)$, ove r è la distanza fra le due particelle, nel tratto 10 fm $< r <$ 100 fm, e confrontate il vostro grafico con quello della figura 8.

42. Un nucleo di ^{238}U emette una particella α di energia 4.196 MeV. Calcolate l'energia di disintegrazione Q di questo processo, tenendo conto anche dell'energia di rinculo del nucleo residuo di ^{234}Th. La massa atomica di una particella α è 4.0026 u, e quella del nucleo ^{234}Th è 234.04 u. Confrontate il vostro risultato con quello dell'esempio 6*a*.

43. I radionuclidi pesanti emettono una particella α piuttosto che altre combinazioni di nucleoni perché la particella α è una struttura assai stabile e strettamente legata. A conferma di questo fatto, calcolate le energie di disintegrazione per questi ipotetici processi di decadimento, e discutete il significato di ciò che avrete trovato:

$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{232}\text{Th} + {}^{3}\text{He}, \quad Q_3;$$

$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{231}\text{Th} + {}^{4}\text{He}, \quad Q_4;$$

$$^{235}\text{U} \rightarrow {}^{230}\text{Th} + {}^{5}\text{He}, \quad Q_5.$$

Le masse atomiche che intervengono sono:

^{232}Th	232.038051 u	^{3}He	3.016029 u
^{231}Th	231.036298 u	^{4}He	4.002603 u
^{230}Th	230.033128 u	^{5}He	5.01222 u.
^{235}U	235.043924 u		

44. Supponete che un nucleo di ^{235}U emetta (*a*) una particella α oppure (*b*) una sequenza neutrone, protone, neutrone, protone. Calcolate l'energia liberata nei due casi. (*c*) Convincete voi stessi, sia per argomentazione logica che per calcolo diretto, che la differenza fra questi due numeri è esattamente uguale all'energia di legame totale della particella α. Trovate questa energia di legame. Le masse atomiche che intervengono sono:

^{238}U	238.050785 u	^{4}He	4.002603 u
^{237}U	237.048725 u	^{4}H	1.007825 u
^{236}Pa	236.048890 u	n	1.008665 u.
^{235}Pa	235.045430 u		
^{234}Th	234.043593 u		

45. In determinate circostanze, un nucleo può decadere emettendo una particella più pesante di una particella α. Questi tipi di decadimento sono molto rari. Considerate i decadimenti:

$$^{223}\text{Ra} \rightarrow {}^{209}\text{Pb} + {}^{14}\text{C}$$

e

$$^{223}\text{Ra} \rightarrow {}^{219}\text{Rn} + {}^{4}\text{He}.$$

(*a*) Calcolate i valori di Q per questi decadimenti e verificate che entrambi sono energeticamente possibili. (*b*) L'altezza della barriera di Coulomb per le particelle α in questo decadimento è 30 MeV. Quale sarà l'altezza della barriera per il ^{14}C? Le masse atomiche sono:

^{223}Ra	223.018501 u	^{14}C	14.003242 u
^{209}Pb	208.981065 u	^{4}He	4.002603 u.
^{219}Rn	219.009479 u		

Paragrafo 54-5 Il decadimento beta

46. Un certo nucleo stabile, dopo avere assorbito un neutrone, emette un elettrone negativo e poi si spacca spontaneamente in due particelle α. Identificate il nuclide.

47. ^{137}Cs è presente nella ricaduta radioattiva dall'esplosione nell'atmosfera di bombe nucleari. Questo radioisotopo, con tempo di dimezzamento di 30.2 y, decade beta in ^{137}Ba liberando una notevole energia nel corso del processo, e costituisce pertanto un grave rischio ambientale. Le masse atomiche di ^{137}Cs e di ^{137}Ba valgono rispettivamente 136.907073 u e 136.905812 u. Calcolate l'energia totale liberata in un decadimento.

48. Un neutrone libero decade secondo l'equazione 13. Calcolate la massima energia K_{max} dello spettro beta. Le masse atomiche occorrenti sono:

n 1.008665 u; ^{1}H 1.007825 u.

49. Un elettrone è emesso da un nuclide di massa media (diciamo, $A = 150$) con energia cinetica di 1.00 MeV. (*a*) Trovate la sua lunghezza d'onda di de Broglie. (*b*) Calcolate il raggio del nucleo emettente. (*c*) Un elettrone di queste caratteristi-

che può essere confinato come onda stazionaria in una «scatola» di queste dimensioni? (*d*) Potete usare questi numeri per smentire l'argomentazione (abbandonata da molto tempo) che nei nuclei esistono effettivamente degli elettroni?

50. Il radionuclide ^{32}P decade a ^{32}S nel modo descritto dall'equazione 11. In un certo evento di decadimento, viene emesso un elettrone da 1.71 MeV, valore massimo possibile. Trovate l'energia cinetica dell'atomo ^{32}S rinculante. La massa atomica di ^{32}S vale 31.97 u. (*Suggerimento*: Per l'elettrone usate le espressioni relativistiche dell'energia cinetica e della quantità di moto. La meccanica di Newton può essere tranquillamente usata per l'atomo, relativamente lento, ^{32}S.)

51. Il radionuclide ^{11}C decade secondo la reazione:

$$^{11}C \rightarrow {}^{11}B + e^+ + \nu, \qquad t_{1/2} = 20.3 \text{ min}.$$

La massima energia dello spettro del positrone vale 960.8 keV. (*a*) Dimostrare che l'energia di disintegrazione Q per questo processo è:

$$Q = (m_C - m_B - 2m_e)c^2,$$

ove m_C e m_B sono le masse atomiche rispettive di ^{11}C e ^{11}B e m_e è la massa dell'elettrone (positrone). (*b*) Dati $m_C = 11.011433$ u, $m_B = 11.009305$ u e $m_e = 0.0005486$ u, calcolare Q e confrontarla con la massima energia dello spettro del positrone, indicata qui sopra. (*Suggerimento*: Si chiamino m'_C e m'_B le masse nucleari e si proceda come all'esempio 7 per il decadimento beta. Si noti che il decadimento del positrone fa eccezione alla regola generale valida per i processi nucleari secondo la quale, usando le masse atomiche, si tiene automaticamente conto della massa dell'elettrone emesso.)

52. Alcuni radionuclidi decadono catturando uno degli elettroni del loro stesso atomo, diciamo un elettrone K. Un esempio è:

$$^{49}V + e^- \rightarrow {}^{49}Ti + \nu, \qquad t_{1/2} = 331 \text{ d}$$

Dimostrare che l'energia di disintegrazione di questo processo è data da:

$$Q = (m_V - m_{Ti})c^2 - E_K,$$

ove m_V e m_{Ti} sono le masse atomiche di ^{49}V e ^{49}Ti rispettivamente, e E_K è l'energia di legame dell'elettrone K del vanadio. (*Suggerimento*: Si chiamino m'_V e m'_{Ti} le masse nucleari e si proceda come all'esempio 7, osservando la nota in calce all'esempio stesso.)

53. Trovate l'energia di disintegrazione Q del decadimento di ^{49}V per cattura del proprio elettrone K, come descritto al problema 52. I dati occorrenti sono: $m_V = 48.948517$ u, $m_{Ti} = 48.947871$ u, e $E_K = 5.47$ keV.

Paragrafo 54-6 La misura delle radiazioni ionizzanti

54. Un contatore di Geiger registra 8722 conteggi in 1 min. Calcolate l'attività della sorgente in Bq, supponendo che il contatore registri tutti i decadimenti.

55. Una dose tipica di radiazione da radiografia del torace è 0.25 mSv, provenienti da raggi X con fattore di qualità 0.85. Ammettendo che la massa del tessuto esposto sia la metà della massa, 88 kg, del corpo del paziente, calcolate l'energia assorbita in joule.

56. Una persona del peso di 75 kg riceve una dose di radiazione di 0.24 mGy su tutto il corpo, portata da particelle α per le quali il fattore di qualità è 12. Calcolate (*a*) l'energia assorbita in joule e (*b*) la dose equivalente in Sv.

57. Un campione radioattivo per uso medico deve avere un'attività di 3.94 MBq. Una settimana prima del trattamento si prepara un campione di un nuclide con tempo di dimezzamento di 1.82×10^5 s. Quale deve essere l'attività del campione all'atto della preparazione per far sì che al momento del trattamento la sua attività abbia il valore richiesto?

58. L'isotopo del plutonio ^{239}Pu, di massa atomica pari a 239.05 u, si genera come sottoprodotto nei reattori nucleari e si accumula nelle barre del combustibile nucleare. Questo isotopo è radioattivo, con tempo di dimezzamento per decadimento alfa di 2.411×10^4 y. Ma il plutonio è al tempo stesso uno dei più tossici fra i prodotti chimici noti; una quantità di appena 2 mg è mortale per l'uomo. (*a*) Quanti nuclei costituiscono una dose chimicamente mortale? (*b*) Quale sarebbe la velocità di decadimento di questa dose? E quale la sua attività in becquerel?

59. Le cellule cancerose sono più vulnerabili da radiazioni X e gamma che le cellule sane. Anche se gli acceleratori lineari lo stanno rimpiazzando, in passato la sorgente normale per la radioterapia era l'isotopo radioattivo ^{60}Co, che decade beta in uno stato eccitato di ^{60}Ni, il quale scende immediatamente allo stato fondamentale, emettendo due fotoni gamma aventi ciascuno un'energia di circa 1.2 MeV. Il tempo di dimezzamento che controlla il processo di decadimento beta è 5.27 y. Quanti nuclei radioattivi di ^{60}Co sono presenti in una sorgente da 6000 Ci usata in un ospedale? La massa atomica di ^{60}Co è 59.93 u.

60. Un pilota di aerolinea passa una media di 20 h settimanali volando a un'altitudine di 12000 m, dove la dose equivalente dovuta a radiazione cosmica e solare è 12 μSv/h. Si calcoli la dose equivalente annua espressa in mrem.

61. Nel 1902, dopo molti tentativi, Maria e Pierre Curie riuscirono a separare da un minerale di uranio la prima quantità apprezzabile di radio, 1 decigrammo (dg) di puro $RaCl_2$. Il radio era l'isotopo radioattivo ^{226}Ra, che decade con tempo di dimezzamento di 1600 y. (*a*) Quanti nuclei di radio avevano isolato? (*b*) Qual era la velocità di decadimento del loro campione, espressa in Bq? (*c*) E in curie? La massa molecolare del cloro è 35.453 g/mole; la massa atomica dell'isotopo di radio è 226.03 u.

62. Calcolare la massa di 4.60 μCi di ^{40}K, che ha tempo di dimezzamento di 1.28×10^9 y e massa atomica di 40.0 u.

63. Uno dei pericoli della ricaduta radioattiva da una bomba nucleare è lo ^{90}Sr, che decade beta con tempo di dimezzamento di 29 y. Poiché ha proprietà chimiche molto vicine a quelle del calcio, lo stronzio, se ingerito da una mucca, si accumula concentrandosi nel latte e va a finire nelle ossa di chiunque beva quel latte. Gli elettroni energetici del decadimento danneggiano il midollo osseo e così peggiorano la produzione dei globuli rossi. Una bomba da 1 megaton produce circa 400 g di ^{90}Sr. Se la ricaduta si sparge uniformemente su una superficie di 2000 km^2, quale area di terreno avrebbe una radioattività corrispondente a 0.002 mCi, massimo valore ammesso per le ossa di una persona? La massa atomica di ^{90}Sr è 89.9 u.

64. Il nuclide ^{198}Au, con tempo di dimezzamento = 2.693 d, è usato nella terapia del cancro. Calcolate la massa di questo isotopo occorrente per avere un'attività di 250 Ci.

65. Un operaio del peso di 87 kg, addetto a un impianto di un reattore autofertilizzante, ha accidentalmente ingerito 2.5 mg di polvere di ^{239}Pu. ^{239}Pu ha tempo di dimezzamento di 24100 y per il decadimento alfa. L'energia delle particelle α emesse è 5.2 MeV, con fattore di qualità 13. Supponete che il

ISBN 88-408-0777-2

plutonio risieda nel corpo dell'operaio per 12 h, e che il 95% delle particelle α si fermi dentro il suo corpo. Calcolate (*a*) il numero di atomi di plutonio ingeriti, (*b*) il numero che decade entro le 12 ore, (*c*) l'energia assorbita dal corpo, (*d*) la dose fisica risultante in gray, (*e*) la dose biologica equivalente in sievert.

Paragrafo 54-7 La radioattività naturale

66. Si è trovato che una roccia contiene 4.20 mg di ^{238}U e 200 mg di ^{206}Pb. Supponete che la roccia non contenesse piombo all'atto della sua formazione, cosicché tutto il piombo oggi presente deriva dal decadimento dell'uranio. Trovate l'età della roccia. Il tempo di dimezzamento di ^{238}U è 4.47×10^9 y.

67. Due materiali radioattivi che sono instabili al decadimento alfa, ^{238}U e ^{232}Th, e uno che è instabile al decadimento beta, ^{40}K, sono abbastanza abbondanti nel granito da contribuire in misura significativa al riscaldamento della Terra con l'energia di decadimento prodotta. Gli isotopi instabili al decadimento alfa danno origine a catene che terminano in isotopi stabili del piombo. ^{40}K ha un solo tipo di decadimento beta. Seguono informazioni sui diversi tipi di decadimento:

Nuclide padre	*Tipo di decadimento*	$t_{1/2}$ (y)	*Prodotto finale stabile*	Q (MeV)	f (ppm)
^{238}U	α	4.47×10^9	^{206}Pb	51.7	4
^{232}Th	α	1.41×10^{10}	^{208}Pb	42.7	13
^{40}K	α	1.28×10^9	^{40}Ca	1.32	4

Q è l'energia totale liberata nel decadimento del nucleo padre fino al punto finale stabile, e f è l'abbondanza dell'isotopo in chilogrammi per chilogrammo di granito; ppm significa parti per milione. (*a*) Dimostrate che questi materiali danno origine a una produzione di calore di 987 pW per ogni kg di granito. (*b*) Ammettendo che, tutto intorno alla Terra, vi sia un involucro sferico di granito dello spessore di 20 km che pesa 2.7×10^{22} kg, stimate la potenza totale che svilupperà sull'intera Terra. Confrontate questo risultato con la potenza totale emessa dal Sole intercettata dalla Terra, 1.7×10^{17} W.

68. Si pensa che una certa roccia abbia un'età di 260 milioni di anni. Se contiene 3.71 mg di ^{238}U, quanto ^{206}Pb dovrebbe contenere?

69. Si è trovato che una roccia, ricuperata da grande profondità sottoterra, contiene 860 μg di ^{238}U, 150 μg di ^{206}Pb, e 1.60 mg di ^{40}Ca. Quanto ^{40}K dovrebbe contenere? Prendete 5 tempi di dimezzamento dal problema 67.

Paragrafo 54-8 Le reazioni nucleari

70. Completate col nuclide mancante le seguenti reazioni: (*a*) $^{110}Sn(?,p)^{117}Sn$; (*b*) $^{40}Ca(\alpha,n)?$; (*c*) $?(p,n)^7Be$.

71. Calcolate Q per la reazione $^{59}Co(p,n)^{59}Ni$. Le masse atomiche occorrenti sono:

^{59}Co	58.933198 u	^1H	1.007825 u
^{59}Ni	58.934349 u	n	1.008665 u.

72. Sovrapponendo mentalmente alla figura 12 il trasparente della figura 13, scrivete le reazioni attraverso le quali si può preparare, almeno teoricamente, il radionuclide ^{197}Pt ($t_{1/2} = 18.3$ h). Salvo circostanze particolari, soltanto i nuclei stabili possono servire praticamente da bersagli per reazioni nucleari.

73. Il radionuclide ^{60}Co ($t_{1/2} = 5.27$ y) è molto usato nella terapia del cancro. Tabulate alcune possibili reazioni che potrebbero essere usate per prepararlo. Come proiettili usate soltanto neutroni, protoni e deuteroni, e come bersagli soltanto nuclei stabili. I nuclidi favorevolmente vicini a ^{60}Co sono ^{63}Cu, $^{60,61,62}Ni$, ^{59}Co e $^{57,58}Fe$. (Commercialmente, ^{60}Co si fabbrica bombardando con neutroni in un reattore il cobalto naturale, che consiste soltanto dell'isotopo ^{59}Co).

74. Un fascio di neutroni colpisce un bersaglio di rame. Il rame possiede due isotopi stabili, ^{63}Cu (69.2%) e ^{65}Cu (30.8%). Elencate i nuclidi residui che possono essere prodotti dalle reazioni (d,n), (d,p), (d,α), e (d,γ). Esaminando la figura 4, indicate quali nuclei residui siano stabili e quali instabili.

75. Preparate un sovrapponibile trasparente come quello della figura 13, ma esteso a includere reazioni cui partecipino, sia come proiettili, sia come nuclidi emergenti, i nuclidi leggeri ^3H (trizio) e ^3He.

76. Dopo che un bersaglio di platino è stato bombardato per parecchie ore con deuteroni accelerati in un ciclotrone, ne viene separato chimicamente l'elemento iridio ($Z = 77$). Quali radioisotopi dell'iridio saranno presenti e attraverso quali reazioni saranno stati formati? (*Nota*: ^{190}Pt e ^{192}Pt, che non compaiono nella figura 12, sono isotopi stabili del platino, ma le loro abbondanze isotopiche sono così scarse che possiamo tranquillamente ignorarne la presenza).

77. Considerate la reazione $X(a,b)Y$, in cui si suppone che X si trovi a riposo nel sistema di riferimento del laboratorio. L'energia cinetica iniziale in questo sistema sia

$$K_{\text{lab}} = \tfrac{1}{2} m_a v_a^2.$$

(*a*) Dimostrare che la velocità iniziale del baricentro del sistema nel sistema del laboratorio è

$$V = v_a \left(\frac{m_a}{m_X + m_a} \right).$$

Il valore di questa quantità cambia per effetto della reazione? (*b*) Dimostrare che l'energia cinetica iniziale, considerata ora in un sistema di riferimento vincolato al centro di massa delle due particelle, vale

$$K_{\text{cm}} = K_{\text{lab}} \left(\frac{m_X}{m_X + m_a} \right).$$

Il valore di questa quantità cambia per effetto della reazione? (*c*) Nella reazione $^{90}Zr(d,p)^{91}Zr$ l'energia cinetica del deuterone, misurata nel sistema di riferimento del laboratorio, risulta di 15.9 MeV. Trovare v_a ($= v_d$), V, e K_{cm}. Si trascurino i piccoli effetti relativistici.

78. In una reazione endotermica ($Q < 0$) le particelle interagenti a e X devono avere un'energia cinetica, misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, pari almeno a $|Q|$ affinché la reazione possa procedere. Dimostrare, usando i risultati del problema 77, che l'*energia di soglia* K_s per la particella a, misurata nel sistema di riferimento del laboratorio, è

$$K_{\text{th}} = |Q| \frac{m_X + m_a}{m_X}.$$

È ragionevole che K_s sia maggiore di Q?

79. Preparare un sovrapponibile come quello della figura 13, nel

quale due nucleoni o nuclei leggeri possano apparire come particelle emergenti. Un esempio è dato dalla reazione $^{63}Cu(\alpha,pn)^{65}Zn$. Si considerino come possibilità le combinazioni nn, np, e pd.

Paragrafo 54-9 I modelli nucleari

80. Si può ritenere che 5 MeV sia un valore tipico per l'energia cinetica di un nucleone in un nucleo di massa media. A quale temperatura nucleare effettiva corrisponde questo valore, adottando per la struttura nucleare il modello a goccia? (*Suggerimento*: vedere l'equazione 30 del capitolo 24.)

81. Un nucleo intermedio di una certa reazione nucleare decade entro 1.2×10^{-22} s dalla sua formazione. (*a*) Qual è il grado di incertezza ΔE nella nostra valutazione di questo stato intermedio? (*b*) Questo stato si può definire un nucleo composito? Vedi l'esempio 11.

82. Nell'elenco di nuclidi che segue, identificate (*a*) quelli che hanno gusci completi di nucleoni, (*b*) quelli che hanno un nucleone all'esterno di un guscio completo, e (*c*) quelli che hanno un posto vacante in un guscio che sarebbe altrimenti completo. I nuclidi sono: ^{13}C, ^{18}O, ^{40}K, ^{49}Ti, ^{60}Ni, ^{91}Zr, ^{92}Mo, ^{121}Sb, ^{143}Nd, ^{144}Sm, ^{205}Tl e ^{207}Pb.

83. Come risulta dalla tabella 1, il nuclide ^{197}Au ha uno spin nucleare di 3/2. (*a*) Se consideriamo questo nucleo come una sfera rigida rotante avente il raggio dato dalla tabella 1, quale sarà la sua frequenza di rotazione? (*b*) Quale sarà la sua energia cinetica rotazionale? Notate che questo scenario è decisamente meccanicistico.

84. Considerate i tre modi di formazione illustrati nella figura 17 per il nucleo composito $^{20}Ne^*$. Per poter conferire al nucleo composito un'energia di eccitazione di 25.00 MeV, quale energia deve avere (*a*) la particella α, (*b*) il protone, e (*c*) il fotone gamma? Le masse atomiche occorrenti sono:

^{20}Ne	19.992435 u	α	4.002603 u
^{19}F	18.998403 u	^{1}H	1.007825 u.
^{16}O	15.994915 u		

85. Considerate le tre reazioni di decadimento illustrate nella figura 17 per il nucleo composito $^{20}Ne^*$. Se il nucleo composito è inizialmente a riposo e ha un'energia di eccitazione di 25.0 MeV, al momento del decadimento quali energie cinetiche, misurate nel laboratorio, avranno (*a*) il deuterone, (*b*) il neutrone, e (*c*) il nuclide ^{3}He? Le masse atomiche occorrenti sono:

^{20}Ne	19.992435 u	d	2.014102 u
^{19}Ne	19.001879 u	n	1.008665 u
^{18}F	18.000937 u	^{3}He	3.016029 u.
^{17}O	16.999131 u		

86. Il nuclide ^{208}Pb è «doppiamente magico», perché sia il suo numero protonico Z (82), sia il suo numero neutronico N (126) corrispondono a strati completi. Un protone supplementare darebbe ^{209}Bi, mentre un neutrone supplementare darebbe ^{209}Pb. Questi nucleoni «extra» dovrebbero essere più facili da estrarre che un protone o un neutrone dall'interno degli strati completi di ^{208}Pb. (*a*) Calcolare l'energia richiesta per rimuovere il protone «extra» da ^{209}Bi, e confrontarla con l'energia richiesta per estrarre un protone dal guscio completo di protoni di ^{208}Pb. (*b*) Calcolare l'energia richiesta per rimuovere il neutrone «extra» da ^{209}Pb, e confrontarla con l'energia richiesta per estrarre un neutrone dal guscio completo di neutroni di ^{208}Pb. Vi sembra che i risultati corrispondano alle previsioni? I dati per le masse atomiche sono i seguenti:

Nuclide	Z	N	*Massa atomica* (u)
^{209}Bi	82 + 1	126	208.980374
^{208}Pb	82	126	207.976627
^{207}Tl	82 −1	126	206.977404
^{209}Pb	82	126 + 1	208.981065
^{207}Pb	82	126 −1	206.975872

Le masse atomiche del protone e del neutrone sono rispettivamente 1.007825 u e 1.008665 u.

87. Il nucleo ^{91}Zr ($Z = 40$, $N = 51$) ha un unico neutrone esterno a un nocciolo completo di neutroni. Poiché 50 è un numero magico, questo neutrone sarà forse legato molto labilmente. (*a*) Calcolate la sua energia di legame. (*b*) Calcolate l'energia di legame del neutrone successivo, che deve essere estratto dal nocciolo completo. (*c*) Calcolate l'energia di legame per particella per il nucleo nel suo complesso. Confrontate e commentate questi tre numeri. Le masse atomiche occorrenti sono:

^{91}Zr	90.905644 u	n	1.008665 u
^{90}Zr	89.904703 u	^{1}H	1.007825 u.
^{89}Zr	88.908890 u		

Capitolo 55

ENERGIA DAL NUCLEO

In un sistema di particelle interagenti, possiamo estrarre energia utile quando il sistema si porta in uno stato di minore energia (ossia, in uno stato di legame più stretto). In un sistema atomico, possiamo ricavare quest'energia per mezzo di reazioni chimiche, come la combustione. In un sistema nucleare, esiste una grande varietà di modi per estrarre energia. Per esempio, l'energia sviluppata da decadimenti radioattivi è stata utilizzata per alimentare stimolatori cardiaci e sonde spaziali. In questo capitolo esamineremo i due principali metodi usati per ottenere energia dal nucleo e convertirla a scopi utili. Nella fissione nucleare, un nucleo pesante viene spaccato in due frammenti. Nella fusione nucleare, due nuclei leggeri si combinano formando un nucleo più pesante. La figura 6 del capitolo 54 ha messo in luce come entrambi questi processi possano generare nuclei più fortemente legati, e di conseguenza rilasciare l'energia in eccesso del legame nucleare per essere convertita in altre forme energetiche. I reattori basati sulla fissione nucleare forniscono già oggi una quota significativa di tutta l'energia elettrica consumata nel mondo. Mentre i reattori basati sulla fusione nucleare sono allo stadio di ricerca e di attivo sviluppo tecnico.

55-1 L'ATOMO E IL NUCLEO

Quando otteniamo energia dal carbone facendolo bruciare in una fornace, operiamo una trasformazione degli *atomi* di carbonio e di ossigeno, risistemando i loro *elettroni* periferici in configurazioni più stabili. Quando invece generiamo energia dall'uranio, consumandolo in un reattore nucleare, operiamo sul suo *nucleo*, risistemando i suoi *nucleoni* in configurazioni più stabili.

Gli elettroni sono trattenuti negli atomi dalla forza di Coulomb, e bastano energie di pochi elettronvolt per staccare uno degli elettroni esterni. I nucleoni, invece, sono trattenuti nel nucleo dalla intensa forza nucleare, e occorrono alcuni *milioni* di elettronvolt per estrarre dal nucleo *un solo* nucleone. Questa osservazione si riflette anche nella quantità di energia che possiamo estrarre da un kilogrammo di uranio, circa un milione di volte rispetto a quella sviluppata da un kilogrammo di carbone.

In entrambi i casi, atomico e nucleare, l'emissione di energia è accompagnata da una diminuzione dell'energia a riposo del combustibile. L'unica differenza fra il consumare uranio e il bruciare carbone è che, nel primo caso, una frazione molto maggiore dell'energia a riposo disponibile (ancora, nel rapporto di molti milioni di volte) è convertibile in altre forme di energia.

Dobbiamo specificare con chiarezza se siamo interessati alla quantità di energia ottenibile o alla rapidità con la quale essa viene erogata, ossia alla *potenza*. Nel caso dell'energia nucleare, si tratta di consumare lentamente dell'uranio nel reattore di una centrale oppure di disintegrarlo istantaneamente nell'esplosione di una bomba? E nell'altro caso, stiamo parlando dell'esplosione di un candelotto di dinamite o della digestione di una frittella al cioccolato? (Sorpresa: in questo secondo caso l'energia emessa è maggiore che nel primo!)

La tabella 1 mostra quanta energia si può ottenere da 1 kg di materia sottoponendola a diversi trattamenti. Invece di indicarne semplicemente i valori numerici, la quantità di energia ottenibile è rappresentata dal tempo durante il quale essa potrebbe mantenere accesa una lampadina da 100 watt. Nella riga 6 è contemplato il caso estremo, l'annichilazione reciproca di materia e antimateria. Quando è stata consumata tutta la massa disponibile, non si può più procedere oltre. (Nessuno però è ancora riuscito a immaginare un modo economico per produrre e immagazzinare 1 kg di antimateria da usare poi per produzione di energia.)

È da tener presente che i confronti riportati nella tabella 1 si riferiscono a masse unitarie dei diversi materiali. Otteniamo milioni di volte più energia da un kilogrammo di uranio che da 1 kg di carbone, o da 1 kg

ISBN 88-08-0777-2

TABELLA 1 ENERGIA OTTENIBILE DA 1 kg DI MATERIA

Tipo di sostanza	*Processo*	*Tempo* [a]
Acqua	Cascata alta 50 m	5 s
Carbone	Combustione	8 h
UO_2 arricchito (al 3%)	Fissione in un reattore	680 y
^{235}U	Fissione completa	3×10^4 y
Deuterio gassoso ad alta temperatura	Fusione completa	3×10^4 y
Materia e antimateria	Completa annichilazione	3×10^7 y

[a] Questi numeri indicano per quanto tempo l'energia generata potrebbe alimentare una lampadina da 100 W.

di acqua che cada per 50 m. D'altra parte, nella crosta terrestre c'è una gran quantità di carbone, come c'è una enorme quantità d'acqua accumulata dietro la diga di Assuan sul fiume Nilo.

55-2 FISSIONE NUCLEARE: IL PROCESSO FONDAMENTALE

Nel 1932 il fisico inglese James Chadwick scoprì il neutrone. Pochi anni dopo a Roma Enrico Fermi e i suoi collaboratori trovarono che, se alcuni elementi sono sottoposti a bombardamento con questi nuovi proiettili, si generano nuovi elementi radioattivi. Fermi aveva previsto che, essendo privo di carica, il neutrone avrebbe costituito un utile proiettile nucleare: infatti, a differenza del protone o della particella α, non subisce alcuna forza elettrostatica repulsiva quando si avvicina alla superficie di un nucleo. Ignorando l'esistenza di qualsiasi barriera coulombiana, un neutrone anche lentissimo può penetrare nel nucleo più pesante che ci sia e dotato della carica più elevata, interagendo con esso. I *neutroni termici*, ossia i neutroni in equilibrio con la materia a temperatura ambiente, sono particelle molto adatte ed efficaci. A 300 K, l'energia cinetica media di questi neutroni vale

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K}) = 0.04\ \text{eV}.$$

Nel 1939 i chimici tedeschi Otto Hahn e Fritz Strassmann, continuando un lavoro iniziato da Fermi e collaboratori, bombardarono l'uranio con neutroni termici. All'analisi chimica trovarono che dopo il bombardamento erano comparsi numerosi nuovi elementi radioattivi , fra i quali uno le cui proprietà chimiche erano assai simili a quelle del bario. Ripetuti controlli convinsero alla fine questi chimici che questo «nuovo» elemento non era per niente nuovo: *era* bario! Ma come aveva potuto prodursi questo elemento di massa media ($Z = 56$) dal bombardamento di uranio ($Z = 92$) con neutroni?

Il dilemma fu risolto entro poche settimane dai fisici Lise Meitner e Otto Frisch, suo nipote. Essi dimostrarono che un nucleo di uranio, avendo assorbito un neutrone, poteva spaccarsi, con liberazione di energia, in due frammenti circa equivalenti, uno dei quali avrebbe facilmente potuto essere bario. Chiamarono questo processo *fissione nucleare*.* In figura 1 compaiono le tracce lasciate nel gas di una camera a nebbia dai due frammenti di fissione ad alta energia emersi da un evento di fissione verificatosi al centro della camera.

La fissione del nucleo di ^{235}U da parte di neutroni termici, processo di enorme portata pratica, può essere così rappresentata:

$$^{235}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{236}\text{U}^* \rightarrow X + Y + b\text{n}, \qquad (1)$$

* Vedi Frish O. e Wheeler J., *The Discovery of Fission*, «Physics Today», novembre 1967: resoconto affascinante dei primi giorni immediatamente seguenti alla scoperta.

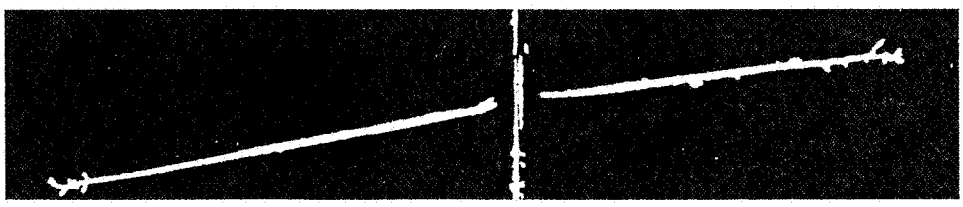


Figura 1 Quando una particella carica attraversa velocemente una camera a nebbia lascia una traccia di goccioline liquide. Le due tracce opposte rappresentano frammenti di fissione prodotti da un evento di fissione prodottosi in una sottile lamina verticale di uranio situata al centro della camera.

ISBN 88-408-0777-2

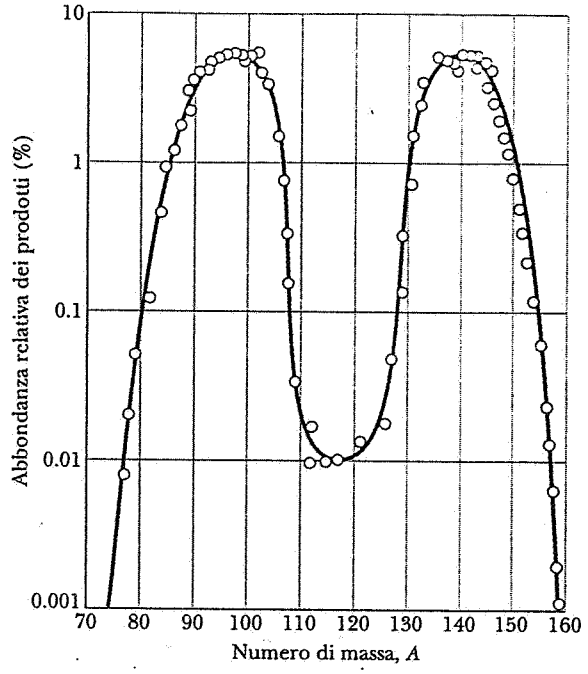


Figura 2 La distribuzione secondo le rispettive masse dei frammenti X e Y, secondo l'equazione 1, derivanti dalla fissione di ^{235}U, prodotta da neutroni termici. Si noti che la scala delle ordinate è logaritmica.

dove ^{236}U, contrassegnato dall'asterisco, è un nucleo composito. Qui X e Y stanno a indicare *frammenti di fissione*, nuclei di massa media che sono di solito altamente radioattivi. Il fattore b, che ha il valore medio 2.47 per eventi di fissione di questo tipo, rappresenta il numero di neutroni liberati da simili eventi.

La figura 2 mostra la distribuzione per numero di massa dei frammenti di fissione X e Y. Vediamo che soltanto nello 0.01% degli eventi i frammenti hanno massa uguale. I numeri di massa più probabili, che risultano dal 7% degli eventi, sono $A = 140$ e $A = 95$. Possiamo anche arguire, dalla differenza delle lunghezze delle tracce dei due frammenti di fissione di figura 1, che i frammenti usciti da questo specifico evento di fissione non hanno la stessa massa.

Il nuclide ^{236}U, che è il nucleo di fissione che compare nell'equazione 1, ha 92 protoni e $236 - 92 = 144$ neutroni, con un rapporto neutroni/protoni di circa 1.6. I frammenti primitivi formati subito dopo la fissione manterranno questo stesso rapporto numerico fra neutroni e protoni. Lo studio della curva di stabilità di figura 4 del capitolo 54 mostra tuttavia che i nuclei stabili nella regione di massa media ($75 < A < 150$) hanno un rapporto neutroni/protoni inferiore, compreso fra 1.2 e 1.4. I frammenti primitivi risulteranno pertanto troppo ricchi in neutroni ed «evaporeranno» un piccolo numero di neutroni, 2.47 in media per la reazione di equazione 1. Ma i frammenti residui X e Y, ancora troppo ricchi in neutroni, sono destinati ad avvicinarsi alla linea di stabilità attraverso una serie di decadimenti beta in cascata.

Un esempio specifico del processo generale descritto dall'equazione 1 è il seguente:

$$^{235}U + n \rightarrow ^{236}U^* \rightarrow ^{140}Xe + ^{94}Sr + 2n. \qquad (2)$$

I frammenti di fissione ^{140}Xe e ^{94}Sr decadono fino a raggiungere ciascuno un prodotto finale stabile, come segue:

$$^{140}Xe \xrightarrow[14\ s]{} ^{140}Cs \xrightarrow[65\ s]{} ^{140}Ba \xrightarrow[13\ d]{} ^{140}La \xrightarrow[40\ h]{} ^{140}Ce\ (\text{stabile})$$

$$^{94}Sr \xrightarrow[75\ s]{} ^{94}Y \xrightarrow[19\ min]{} ^{94}Zr\ (\text{stabile})$$

I decadimenti sono eventi β^-, aventi il tempo di dimezzamento indicato per ciascuno di essi. Come accade per tutti i decadimenti beta, i numeri di massa (140 e 94) rimangono invariati.

L'energia di disintegrazione per fissione Q supera di gran lunga quella cui siamo abituati nei processi chimici. Possiamo confermarlo con un calcolo molto grossolano. Dalla curva dell'energia di legame di figura 6 del capitolo 54, possiamo constatare che, per nuclidi pesanti (come $A = 240$), l'energia di legame per nucleone è circa 7.6 MeV. Nella fascia intermedia (diciamo $A = 120$), vale 8.5 MeV. La differenza nell'energia totale di legame fra il singolo nucleo originario ($A = 240$) e i due frammenti (supposti uguali) nei quali potrebbe essersi scisso è allora:

$$Q = 2(8.5\ \text{MeV})\frac{A}{2} - (7.6\ \text{MeV})A \approx 200\ \text{MeV}.$$

L'esempio 1 riporta un calcolo più preciso che è in ottimo accordo con questo valore stimato grossolanamente.

Esempio 1 Calcolare l'energia di disintegrazione Q per l'evento di fissione descritto dall'equazione 2, tenendo conto del decadimento dei prodotti di fissione. I valori delle masse atomiche che intervengono sono:

^{235}U	235.043924 u	^{140}Ce	139.905433 u
n	1.008665 u	^{94}Zr	93.906315 u

Soluzione Se nell'equazione 2 sostituiamo ai frammenti di fissione i loro prodotti stabili finali, troviamo che nel suo complesso il processo svolto è il seguente:

$$^{235}U \rightarrow ^{140}Ce + ^{94}Zr + n.$$

A destra troviamo un solo neutrone, perché il neutrone entrante che appare a sinistra nell'equazione 2 compensa uno dei due uscenti a destra nella stessa equazione.

La differenza di massa per questa reazione risulta

$$\Delta m = 235.043924 \text{ u} - (139.905433 \text{ u} + 93.906315 \text{ u} + 1.008665 \text{ u}) = 0.223511 \text{ u},$$

e l'energia liberata corrispondente è

$$Q = \Delta m\, c^2 = (0.223511 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 208.2 \text{ MeV},$$

che concorda appunto con la stima approssimata di 200 MeV sopra riportata.

Circa l'80% dell'energia di disintegrazione si presenta sotto forma di energia cinetica dei due frammenti di fissione, il resto va diviso fra il neutrone e i prodotti di decadimento radioattivo.

Se l'evento di fissione avviene in un corpo solido massiccio, la maggior parte dell'energia di disintegrazione va ad aumentare l'energia interna del corpo solido, provocandone un aumento di temperatura. Tuttavia il 5% circa dell'energia di disintegrazione è associato ai neutrini emessi durante i decadimenti beta dei frammenti primari di fissione. Quest'energia è trasportata fuori dal sistema e non contribuisce così all'aumento della sua energia interna.

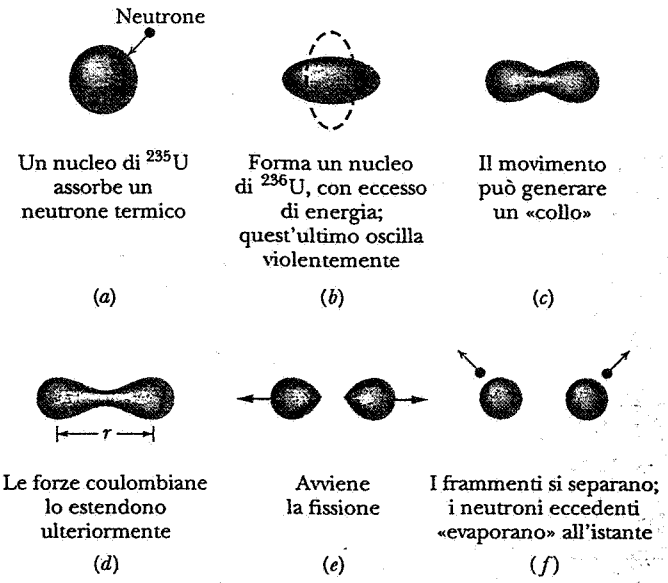


Figura 3 Fasi successive di un processo di fissione, secondo il modello di fissione a goccia di liquido.

55-3 TEORIA DELLA FISSIONE NUCLEARE

Ben presto, dopo la scoperta della fissione, Niels Bohr e John Wheeler svilupparono una teoria, basata sull'analogia fra un nucleo e una goccia di liquido dotata di carica, che ne spiegava le principali caratteristiche.

La figura 3 mostra, con l'ausilio di un modello, come potrebbe avvenire la fissione. Quando un nucleo pesante, ad esempio ^{235}U, assorbe un neutrone lento, come in figura 3*a*, quest'ultimo cade nella buca di potenziale associata con le potenti forze nucleari che agiscono all'interno del nucleo. La sua energia potenziale si trasforma allora in energia di eccitazione interna, come nella figura 3*b*.

La quantità di energia di eccitazione che un neutrone lento trasporta dentro il nucleo che lo assorbe equivale al lavoro che sarebbe richiesto per estrarre dal nucleo il neutrone, ossia all'energia di legame E_n del neutrone all'interno del nucleo. In modo praticamente identico, la quantità di energia di eccitazione introdotta in una buca quando vi si lascia cadere un sasso è uguale al lavoro richiesto per tirarlo di nuovo fuori dalla buca, ossia «l'energia di legame» E_s del sasso. Nell'esempio 2 si dimostra che l'energia di legame di un neutrone nello ^{236}U vale 6.5 MeV.

Nella figura 3*c* vediamo che il nucleo, comportandosi come una goccia di liquido carica che oscilla con molta energia, comincerà prima o poi ad allungarsi formando un corto «collo» fra due «globi» carichi che, se le condizioni sono favorevoli, andranno allontanandosi fra loro, per effetto della forza elettrostatica di repulsione agente fra di essi, fino a strappare il collo. I due frammenti, portando ancora ciascuno una certa energia di eccitazione, schizzano in opposte direzioni. è avvenuta la fissione.

Questo modello presenta, fino a questo punto, una buona immagine qualitativa del fenomeno. Rimane tuttavia da vedere se siamo in grado di rispondere a questa domanda insidiosa: "Perché mai alcuni nuclei pesanti (quali ad esempio ^{235}U e ^{239}Pu) sono facilmente fissionabili da parte di neutroni lenti, mentre altri nuclidi, pure altrettanto pesanti (^{238}U e ^{243}Am, ad esempio), non lo sono?"

Bohr e Wheeler riuscirono a rispondere a questa domanda. La figura 4 mostra la curva di energia potenziale per il processo di fissione che essi ricavarono dal loro modello. Sull'asse orizzontale troviamo il *parametro di distorsione r*, che esprime grossolanamente quanto la forma del nucleo oscillante si discosti da quella sferica. Alla figura 3*d* vediamo come questo parametro venga a definirsi immediatamente prima che avvenga la fissione: quando i due globi, ancora legati fra loro, raggiungono la massima distanza, il parametro è semplicemente uguale alla distanza fra i loro centri.

L'intervallo di energia fra lo stato iniziale e finale del processo di fissione del nucleo, ossia l'energia di

ISBN 88-408-0777-2

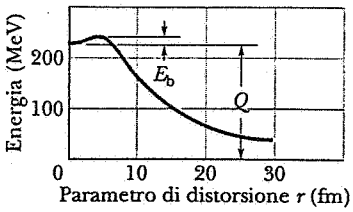


Figura 4 L'energia potenziale ai diversi stadi del processo di fissione, con l'indicazione dell'energia di disintegrazione Q e dell'altezza della barriera E_b.

disintegrazione Q, si ricava dal grafico di figura 4. La più importante caratteristica di questo grafico è la presenza di un massimo in corrispondenza di un certo valore del parametro r. Esiste una *barriera di potenziale* di altezza E_b che deve essere superata, (oppure penetrata per *effetto tunnel*) per poter arrivare alla fissione. Questo fatto richiama alla mente il caso del decadimento alfa (fig. 8 del cap. 54), altro processo che è inibito da una barriera di potenziale. Vediamo ora che la fissione potrà avvenire *soltanto* se il neutrone assorbito dal nucleo è in grado di fornire un'energia di eccitazione E_n abbastanza elevata da superare la barriera o da presentare una ragionevole probabilità di riuscire ad attraversarla per effetto tunnel.

La tabella 2 mostra alcuni parametri necessari a capire le possibilità di fissione prodotta da neutroni termici su quattro nuclidi pesanti, scelti fra decine di candidati che sarebbero stati altrettanto adatti al caso. Per ciascun nuclide sono indicate sia l'altezza della barriera E_b sia l'energia di eccitazione E_n. E_b è stata ricavata dalla teoria di Bohr e Wheeler, mentre E_n è calcolata, come all'esempio 2, dai valori noti delle masse.

Per lo ^{235}U e il ^{239}Pu vediamo che $E_n > E_b$. Ciò implica che per questi nuclei si può prevedere che la fissione per assorbimento di neutroni termici avvenga: ciò è in accordo con gli elevati valori, riportati nella stessa tabella, delle sezioni d'urto misurate (ossia, le probabilità che tali reazioni avvengano) relative a questo processo.

Per gli altri due nuclidi (^{238}U e ^{243}Am), troviamo che $E_n < E_b$: non è quindi disponibile energia sufficiente a superare la barriera o a tentare efficacemente di perforarla. Il nucleo eccitato (fig. 3*b*), invece di spaccarsi in due frammenti, preferisce liberarsi dell'energia di eccitazione emettendo un raggio gamma. La tabella 2, com'era prevedibile, indica per questi due casi valori piccolissimi per le sezioni d'urto nella fissione prodotta da neutroni lenti. Tuttavia *si può riuscire* a spaccare anche questi nuclidi bombardandoli con neutroni aventi energie molto più elevate di quella dei neutroni termici. Per lo ^{238}U, ad esempio, il neutrone assorbito deve avere un'energia minima di 1.3 MeV per poter contare su una ragionevole probabilità di provocare una fissione.

Esempio 2 Si consideri un nucleo di ^{236}U nel suo stato fondamentale. Quanta energia occorre per estrarne un neutrone, lasciando un nucleo di ^{235}U? I valori delle masse atomiche da considerare sono:

^{235}U 235.043924 u; n 1.008665 u; ^{236}U 236.045563 u.

Soluzione L'aumento di massa del sistema dovuto all'espulsione del neutrone è:

$$\Delta m = 1.008665 \text{ u} + 235.043924 \text{ u} - 236.045563 \text{ u}$$
$$= 0.007026 \text{ u}.$$

Ciò significa che deve essere fornita un'energia pari a

$$E_n = \Delta m\, c^2 = (0.007026 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 6.545 \text{ MeV}.$$

Questa, per definizione, è l'energia di legame del neutrone nel nucleo ^{236}U.

Quando un nucleo ^{235}U assorbe un neutrone termico, 6.545 MeV è l'energia di eccitazione fornita dal neutrone al nucleo ^{236}U: questo si forma in uno stato eccitato 6.545 MeV al disopra del suo stato fondamentale. Il nucleo eccitato può sbarazzarsi di questa energia sia emettendo un raggio gamma (lasciando così il nucleo ^{236}U nel suo stato fondamentale), sia per fissione (eq. 1). Si dà il caso che la fissione sia circa sei volte più probabile che l'emissione di un raggio gamma.

TABELLA 2 PROVE DI SCINDIBILITÀ PER QUATTRO NUCLIDI

Nuclide bombardato	*Nuclide soggetto a fissione*	E_b (MeV)	E_n (MeV)	$E_n - E_b$ (MeV)	*Sezione d'urto per la fissione*[a]
^{235}U	^{236}U	5.2	6.5	+1.3	584
^{238}U	^{239}U	5.7	4.8	−0.9	2.7×10^{-6}
^{239}Pu	^{240}Pu	4.8	6.4	+1.6	742
^{243}Am	^{244}Am	5.8	5.5	−0.3	< 0.08

[a] La sezione d'urto rappresenta la probabilità che avvenga una certa reazione nucleare. È espressa in barn[b].
[b] Il barn è un'unità di misura di superficie molto usata in fisica nucleare: 1 barn = 10^{-28} m^2. Il suo impiego non è tuttavia contemplato nelle norme più recenti in tema di unità di misura. Al suo posto è comodo l'uso del fm^2 pari a 0.01 barn. [N.d.T.]

55-4 REATTORI NUCLEARI: I PRINCIPI FONDAMENTALI

La quantità di energia liberata da un atomo in un singolo evento nucleare quale un'emissione alfa è circa un milione di volte più grande di quella prodotta da una reazione chimica. Per uno sfruttamento su larga scala dell'energia nucleare si dovrà fare in modo che un evento nucleare ne inneschi un altro, estendendo così il processo a tutta la massa del combustibile nucleare, come la fiamma si propaga attraverso un ceppo incandescente. Il fatto che nella fissione si generino più neutroni di quanti non se ne consumino (eq. 1) consente proprio questa possibilità; i neutroni prodotti possono provocare la fissione di nuclei vicini e innescare così una serie di eventi di fissione successivi. Questo processo è chiamato *reazione a catena*. Esso può svilupparsi rapidamente e fuor di ogni controllo come in una bomba nucleare, o sotto controllo come in un reattore nucleare.

Supponiamo di voler progettare un reattore basato, come la maggior parte dei reattori oggi in esercizio, sulla fissione di ^{235}U da parte di neutroni lenti. In questo tipo di reattori il combustibile nucleare è quasi sempre «arricchito» artificialmente, in modo che l'isotopo ^{235}U costituisca qualche percento dell'uranio presente in luogo dello 0.7% dell'uranio naturale, nel quale il restante 99.3% è ^{238}U, che non è scindibile da parte di neutroni lenti. Nonostante che, come abbiamo visto, siano prodotti in media 2.47 neutroni per ogni neutrone consumato nella fissione di un nucleo di ^{235}U, per far «avanzare» una reazione a catena si incontrano serie difficoltà. Qui di seguito indichiamo tre di queste difficoltà, e alcuni modi di superarle:

1. *Il problema delle fughe di neutroni.* Una certa percentuale dei neutroni prodotti sfugge semplicemente fuori dal nocciolo del reattore, e non contribuisce al mantenimento della catena. La fuga è un effetto di superficie, e la sua intensità sarà proporzionale al *quadrato* della dimensione caratteristica del nocciolo del reattore (l'area della superficie di una sfera vale $4\pi r^2$). La produzione di neutroni, invece, è un effetto di volume, proporzionale al *cubo* della dimensione caratteristica del nocciolo del reattore (volume della sfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$). La frazione di neutroni persi per fuga può essere ridotta a piacere scegliendo per il nocciolo del reattore dimensioni tali da ridurre convenientemente il valore del rapporto superficie/volume ($= 3/r$ per la sfera di raggio r).

2. *Il problema dell'energia dei neutroni.* La fissione produce neutroni *veloci*, con energia cinetica di circa 2 MeV, mentre la fissione è indotta più facilmente da neutroni *lenti*. I neutroni veloci possono essere rallentati mescolando l'uranio combustibile con una sostanza che abbia queste proprietà: (*a*) sia idonea a ridurre l'energia cinetica dei neutroni in collisioni coi suoi nuclei e (*b*) non assorba un numero eccessivo di neutroni, sottraendoli così al mantenimento della reazione a catena. Questa sostanza è chiamata *moderatore*. La maggior parte dei reattori in funzione nelle centrali elettronucleari impiegano come moderatore l'acqua, nella quale i nuclei di idrogeno (protoni) agiscono come efficaci elementi moderatori.

3. *Il problema della cattura dei neutroni.* I neutroni possono essere catturati dai nuclei secondo processi che non portano alla fissione. Il più frequente evento di questo tipo è una cattura seguita da emissione di un raggio gamma. In particolare, i neutroni veloci (2 MeV) generati da una fissione, mentre sono rallentati nel moderatore fino all'equilibrio termico (0.04 eV), attraversano un intervallo di energia (da 1 a 100 eV) nel quale sono particolarmente suscettibili alla cattura da parte di ^{238}U, dando luogo a una reazione non fissile.

Per rendere minima questa *cattura per risonanza*, come è chiamata, l'uranio combustibile e il moderatore (acqua, ad esempio) non sono mescolati intimamente, ma «agglomerati» in modo tale da rimanere in stretto contatto fra loro pure occupando distinte regioni dello spazio nel volume del reattore. Si spera così che un neutrone veloce prodotto da fissione all'interno di un blocco di uranio, che potrebbe essere una sbarra di combustibile, abbia buone probabilità di trovarsi nel moderatore quando la sua energia, scadendo, attraversa il «dannoso» intervallo di risonanza. Una volta che l'energia ha raggiunto il valore di equilibrio termico, il neutrone, nel suo vagabondare, può facilmente rientrare in un blocco di uranio e produrre una fissione. L'obiettivo del progettista di reattori consiste nel trovare la più efficiente configurazione geometrica per combustibile e moderatore.

La figura 5 mostra il bilancio dei neutroni in un tipico reattore di potenza che sviluppi energia a regime costante. Immaginiamo di osservare il comportamento di un campione di 1000 neutroni termici nel nocciolo del reattore. Essi producono 1330 neutroni per fissione nel combustibile ^{235}U e 40 per fissione veloce nello ^{238}U, per un totale di 370 nuovi neutroni, tutti veloci. Esattamente questo numero di neutroni va perso, alla fine della catena, per fuga dal nocciolo e per cattura senza fissione, lasciando 1000 neutroni termici a mantenere in vita la catena. Il guadagno ottenuto da questo ciclo, ovviamente, consiste nei 200 MeV trasportati da ciascuno dei 370 neutroni da fissione, tutta energia che va a riscaldare il nocciolo del reattore.

 ISBN 88-408-0777-2

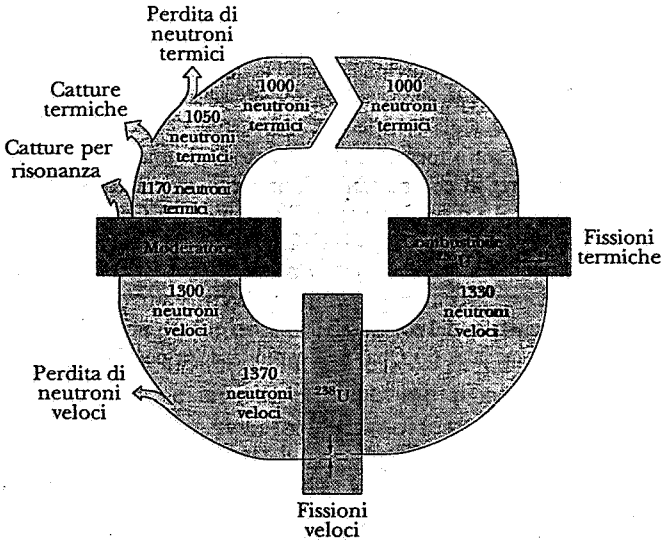


Figura 5 Una generazione di 1000 neutroni termici viene seguita nei successivi stadi all'interno del reattore. Nel funzionamento a regime, il numero di neutroni perduti per cattura (nel combustibile, nel moderatore e negli elementi strutturali) e per perdite dalla superficie del reattore è esattamente compensato dai neutroni prodotti nei processi di fissione.

Un importante parametro del reattore è il *fattore di moltiplicazione k*, ossia il rapporto fra il numero di neutroni termici presenti all'inizio di una generazione e quelli presenti all'inizio della precedente. Per la situazione illustrata nella figura 5 il fattore di moltiplicazione è esattamente uguale a 1. Per $k = 1$ si dice che il regime del reattore è esattamente *critico*, condizione desiderabile per una produzione costante di energia. I reattori sono progettati in modo da essere intrinsecamente *ipercritici* ($k > 1$); per controllare il regime di funzionamento del reattore, il fattore k viene poi ridotto in modo da mantenere il regime critico ($k = 1$) regolando l'inserimento di *barre di controllo* nel nocciolo del reattore. Queste barre, contenenti materiali, come il cadmio, atti ad assorbire prontamente i neutroni, possono essere gradualmente estratte, durante l'esercizio, per compensare la tendenza del reattore a diventare *subcritico* per effetto dell'accumularsi di prodotti di fissione (che assorbono neutroni) all'interno del nocciolo del reattore.

Se si estrae una delle barre di controllo, con quanta rapidità aumenterà il livello di potenza del reattore? Questo *tempo di risposta* è determinato dalla sorprendente circostanza fortuita che una piccola frazione dei neutroni generati dalla fissione non viene prontamente emessa dai prodotti di fissione appena formatisi, ma è liberata, per decadimento beta, con un certo ritardo. Così, dei 370 «nuovi» neutroni analizzati nella figura 5, circa 16 sono ritardati, essendo emessi dai frammenti di fissione per decadimenti beta aventi tempi di dimezzamento compresi fra 0.2 e 55 s. Questi neutroni in ritardo sono poco numerosi, ma sono preziosi in quanto allungano il tempo di risposta del reattore, rendendolo compatibile coi tempi di reazione degli esseri umani e facilitando la regolazione durante le fasi transitorie.

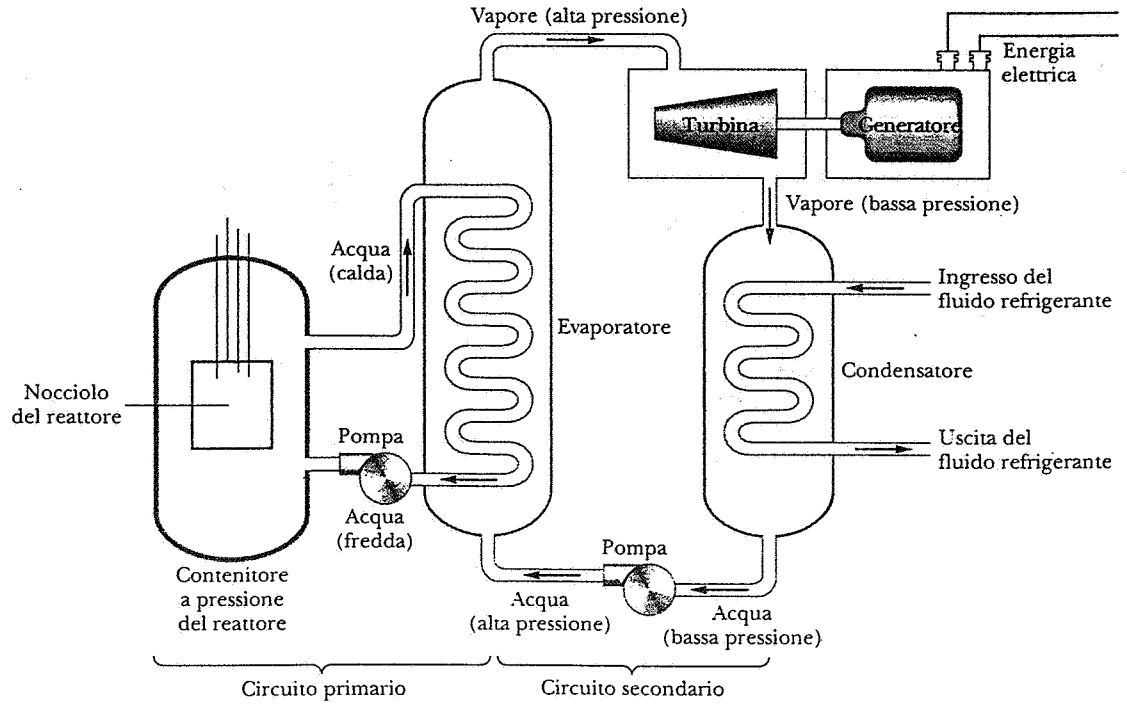


Figura 6 Uno schema semplificato di una centrale elettronucleare con un reattore ad acqua pressurizzata.

La figura 6 mostra uno schema di principio di un impianto per la produzione di energia elettrica basato su un *reattore ad acqua pressurizzata* (PWR), del tipo comunemente impiegato negli USA. L'acqua, in questo reattore, è usata sia come moderatore che come veicolo per il trasferimento dell'energia termica. Nel *circuito primario*, l'acqua pressurizzata, circolando nel contenitore del reattore, trasporta calore, a elevata temperatura (fino a 600 K) e alta pressione (fino a 150 volte la pressione atmosferica), dal nocciolo del reattore al generatore di vapore. Il circuito secondario di questo generatore produce il vapore surriscaldato che aziona il gruppo turboelettrogeno. Per completare il *circuito secondario*, il vapore a bassa pressione scaricato dalla turbina, condensato ad acqua per raffreddamento, è forzato nuovamente, da pompe d'alimentazione ad alta pressione, nel generatore di vapore. Per avere un'idea degli ordini di grandezza, un tipico contenitore di un reattore per un impianto da 1000 MW (elettrici) può avere un'altezza di 10 m e un peso di 450 t. La portata d'acqua nel circuito primario è dell'ordine di 20 m^3/s.

Un aspetto negativo inevitabile dell'esercizio di un reattore nucleare è l'accumulo di «scorie» radioattive, comprendenti prodotti di fissione e nuclidi pesanti *transuranici*, quali plutonio e americio. Un indice della loro radioattività è la velocità con la quale liberano energia sotto forma termica. La figura 7 mostra l'andamento nel tempo della potenza termica delle scorie prodotte in un anno di esercizio da una tipica centrale nucleare. Si noti che entrambe le scale degli assi coordinati sono logaritmiche. L'attività totale delle scorie 10 anni dopo che sono state rimosse dal reattore è di circa 10^6 TBq.

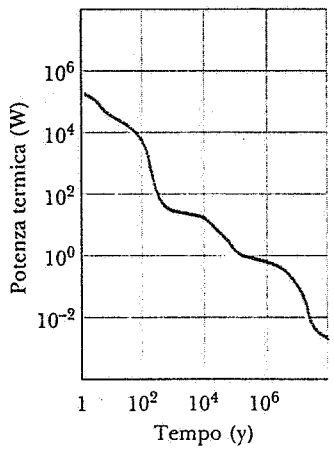


Figura 7 La potenza termica liberata dalle scorie radioattive prodotte in un anno di esercizio da una tipica grande centrale nucleare, in funzione del tempo dopo la rimozione delle scorie. La curva risulta dall'effetto combinato di parecchi radionuclidi con una larga gamma di tempi di dimezzamento. Si noti che entrambe le scale sono logaritmiche.

Esempio 3 Una grande centrale produttrice di energia elettrica è alimentata da un reattore nucleare ad acqua pressurizzata. La potenza termica nel nocciolo del reattore è 3400 MW, e si generano 1100 MW di energia elettrica. Il combustibile consiste di 86000 kg di uranio, sotto forma di 110 t di ossido di uranio, suddiviso in 57000 barre di combustibile. L'uranio è arricchito al 3% in ^{235}U. (*a*) Qual è il rendimento dell'impianto? (*b*) Con quale frequenza R si verificano eventi di fissione nel nocciolo? (*c*) Con quale rapidità si consuma il combustibile fissile ^{235}U? Si supponga di essere nelle condizioni del primo avviamento. (*d*) A questo ritmo di consumo del combustibile fissile, quanto potrebbe durare il carico iniziale? (*e*) Qual è la rapidità della perdita di massa del nocciolo?

Soluzione (*a*) Il rendimento η è il rapporto fra la potenza in uscita (sotto forma di energia elettrica) e quella in entrata (sotto forma di energia termica):

$$\eta = \frac{\text{potenza elettrica}}{\text{potenza termica}} = \frac{1100\ \text{MW}}{3400\ \text{MW}} = 0.32,$$

ossia 32%.

Come in tutte le centrali termoelettriche, alimentate da combustibili sia fossili che nucleari, il rendimento dipende dalla seconda legge della termodinamica. Nel nostro caso, la differenza 3400 MW – 1100 MW, ossia una potenza di 2300 MW, deve essere scaricata nell'ambiente sotto forma termica.

(*b*) Se P (= 3400 MW) è la potenza termica nel nocciolo e Q (= 200 MeV) è l'energia media liberata da ogni evento fissile, a regime stazionario avremo:

$$R = \frac{P}{Q} = \frac{3.4 \times 10^9\ \text{J/s}}{(200\ \text{MeV/fissione})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}$$
$$= 1.06 \times 10^{20}\ \text{fissioni/s}.$$

(*c*) ^{235}U si disintegra per fissione al ritmo calcolato in (b). Si consuma anche per cattura neutronica senza fissione a un ritmo circa quattro volte più lento. La rapidità totale del consumo di ^{235}U vale dunque $(1.25)(1.06 \times 10^{20}\ s^{-1})$ ossia $1.33 \times 10^{20}\ s^{-1}$. Riscriviamo questo risultato sotto forma di diminuzione della massa di ^{235}U nel tempo:

$$\frac{dM}{dt} = (1.33 \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1})\left(\frac{0.235\ \text{kg/mol}}{6.02 \times 10^{23}\ \text{atomi/mol}}\right)$$
$$= 5.19 \times 10^{-5}\ \text{kg/s} = 4.5\ \text{kg/d}.$$

(*d*) Dai dati indicati, possiamo calcolare che, al primo avviamento, erano disponibili circa (0.03)(86000 kg) = 2600 kg di ^{235}U. Una risposta semplicistica sarebbe allora

$$T = \frac{2600\ \text{kg}}{4.5\ \text{kg/d}} = 580\ \text{d}$$

In pratica, però, le barre di combustibile fissile debbono essere sostituite (di solito, a gruppi) prima del totale esaurimento del loro contenuto in ^{235}U.

(*e*) Dalla relazione di Einstein $E = m\,c^2$ possiamo scrivere:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dE/dt}{c^2} = \frac{3.4 \times 10^9\ \text{W}}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2}$$
$$= 3.8 \times 10^{-8}\ \text{kg/s} = 3.3\ \text{g/d}.$$

ISBN 88-408-0777-2

La perdita di massa giornaliera equivale circa alla massa di questa pagina! Questo ritmo di perdita di massa (diminuzione dell'energia a riposo) è totalmente differente dal ritmo di consumo del combustibile fissile (perdita di ^{235}U) calcolato sopra.

55-5 UN REATTORE NATURALE

Il 2 dicembre 1942, quando il reattore costruito da Enrico Fermi e i suoi collaboratori entrò per la prima volta in regime critico, essi avevano pieno diritto di pensare di avere avviato il primo reattore a fissione nucleare mai esistito su questo pianeta. Circa 30 anni dopo si scoperse invece che, se davvero lo avevano pensato, si erano ingannati.

Circa due miliardi di anni fa, in un giacimento di uranio che si sta sfruttando nel Gabon, Africa occidentale, un reattore a fissione naturale si mise in marcia e funzionò per qualche centinaio di migliaia di anni prima di estinguersi spontaneamente.

Il racconto di questa scoperta è affascinante quanto i migliori e più emozionanti racconti polizieschi. Ma, ciò che più importa, rappresenta un esempio lampante di quale genere di dimostrazione scientifica occorra produrre per sostenere quella che a prima vista può sembrare un'affermazione avventata. E stabilisce un modello di rigorosa metodologia per tutti coloro che ragionano su eventi del passato. Ne considereremo qui soltanto due aspetti.*

1. *C'era abbastanza combustibile?* Il combustibile per un reattore a fissione a uranio dev'essere l'isotopo ^{235}U, che subisce facilmente fissione ma che è presente soltanto nella misura dello 0.72% nell'uranio naturale. Questo rapporto dell'isotopo è stato misurato non soltanto su campioni terrestri ma anche su rocce della Luna e meteoriti, trovando sempre lo stesso valore. Il primo indizio sospetto per il caso del Gabon fu la deficienza di ^{235}U, che in alcuni campioni presentava un'abbondanza minore, lo 0.44%. Partendo da questa anomalia, si giunse a formulare l'ipotesi che questa scarsità di ^{235}U potesse attribuirsi al fatto che, in un'epoca remota, l'isotopo fosse stato parzialmente consumato in un reattore naturale a fissione.

Ma rimane il problema serio che, con soltanto lo 0.72% di abbondanza dell'isotopo, un reattore può essere realizzato (come Fermi e i suoi avevano ben appreso), soltanto con enormi difficoltà: sembrava perciò estremamente improbabile che avesse potuto formarsi naturalmente.

Ma le cose erano ben differenti in un remoto passato. Sia lo ^{235}U sia lo ^{238}U sono radioattivi, con tempi di dimezzamento, rispettivamente, di 0.704×10^9 y e 4.47×10^9 y. Il tempo di dimezzamento dell'isotopo facilmente fissionabile ^{235}U è dunque 6.4 volte più breve di quella dello ^{238}U. E poiché lo ^{235}U decade più rapidamente, nel passato doveva essere più abbondante rispetto allo ^{238}U. Due miliardi di anni or sono, in effetti, l'abbondanza non era, com'è ora, 0.72%, ma 3.8%. E questa è proprio la percentuale di ^{235}U alla quale l'uranio naturale deve essere arricchito per fungere da combustibile nei moderni reattori nucleari di potenza.

Con una simile disponibilità di combustibile fissile appare meno sorprendente che in un lontano passato, in condizioni particolarmente favorevoli, abbia potuto attivarsi spontaneamente un reattore nucleare a fissione. Il combustibile c'era. Incidentalmente, ricordiamo che due miliardi di anni or sono la forma di vita più evoluta era rappresentata dalle alghe verdi-azzurre.

2. *Qual è la prova valida?* Una semplice scarsità di ^{235}U in un giacimento non è prova sufficiente per sostenere la teoria dell'esistenza di un reattore naturale a fissione. Occorrono altre prove più convincenti.

Dove è stato attivo un reattore, debbono trovarsi anche prodotti di fissione; si veda la figura 2. E dei 30 elementi, di cui in questo modo possono essere stati prodotti isotopi stabili, deve pur essere rimasta qualche traccia. Lo studio dei loro rapporti isotopici potrebbe fornire una prova abbastanza convincente.

Dei numerosi elementi presi in esame, il caso del neodimio è di una spettacolare evidenza. La figura 8*a* mostra le abbondanze relative dei sette isotopi stabili del neodimio quali si presentano normalmente in natura. La figura 8*b* indica invece quelle che si misurano per i prodotti stabili finali da fissione di ^{235}U. Non fanno meraviglia marcate differenze che si riscontrano fra le due serie di valori, data la differenza fra le loro origini. Gli isotopi di figura 8*a* si sono formati in esplosioni di supernove avvenute prima della formazione del nostro sistema solare. Quelli di figura 8*b* sono stati invece prodotti in un reattore da processi totalmente differenti. Si noti in particolare che il ^{142}Nd, l'isotopo dominante nell'elemento naturale, non compare assolutamente fra i prodotti di fissione.

La domanda chiave è: "Come si distribuiscono gli isotopi di neodimio presenti nel giacimento di minerale d'uranio del Gabon?" Dobbiamo aspettarci che, se davvero laggiù entrò in attività un reattore naturale, dovrebbero essere presenti isotopi di *entrambe* le origini (ossia, isotopi naturali insieme a isotopi da prodotti

* Per un resoconto completo: Cowan G.A., *Un reattore naturale a fissione*, «Le Scienze», 99:22.

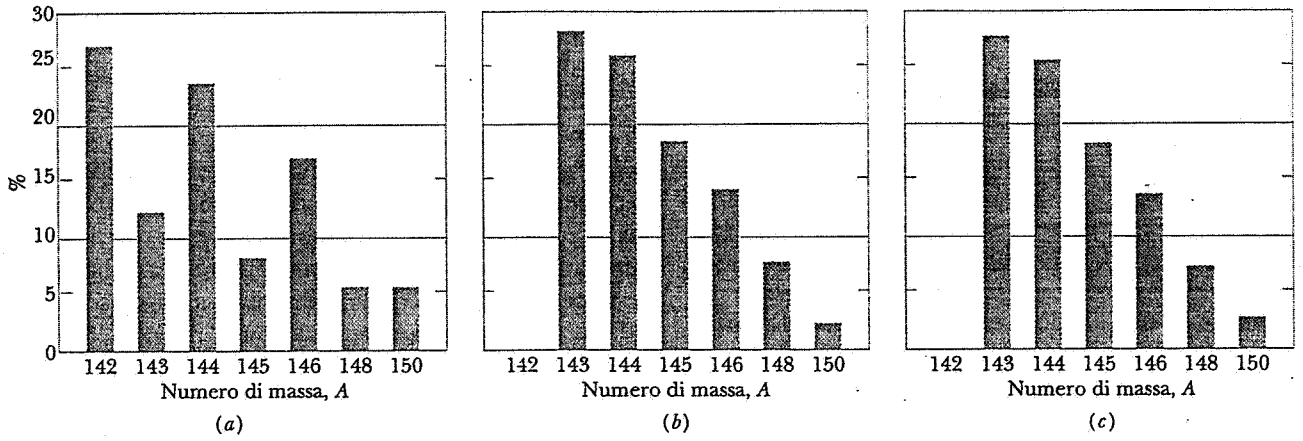


Figura 8 Distribuzione percentuale per numero di massa degli isotopi del neodimio presenti (*a*) nei giacimenti naturali terrestri, (*b*) nel combustibile esaurito di un reattore di potenza, (*c*) nella miniera di uranio nel Gabon, Africa occidentale. Da notare che (*b*) e (*c*) sono praticamente identici e totalmente differenti da (*a*).

di fissione). La figura 8*c* mostra i risultati dopo che sono state apportate opportune correzioni ai valori grezzi rilevati. Il confronto fra le figure 8*b* e 8*c* dimostra con certezza che un reattore naturale è stato davvero attivo nel Gabon!

Esempio 4 Attualmente il valore del rapporto isotopico di ^{235}U rispetto a ^{238}U è 0.0072. Qual era tale valore 2.0×10^9 anni fa? Il tempo di dimezzamento di ciascuno dei due isotopi vale, rispettivamente, 0.704×10^9 y e 4.47×10^9 y.

Soluzione Consideriamo due campioni di minerale di uranio che in origine, al tempo $t = 0$, contenevano $N_5(0)$ e $N_8(0)$ atomi, rispettivamente, di ^{235}U e ^{238}U. I numeri di atomi residui sono oggi, al tempo t:

$$N_5(t) = N_5(0)e^{-\lambda_5 t} \quad \text{e} \quad N_8(t) = N_8(0)e^{-\lambda_8 t},$$

ove λ_5 e λ_8 sono le rispettive costanti di disintegrazione. Dividendo membro a membro si ottiene:

$$\frac{N_5(t)}{N_8(t)} = \frac{N_5(0)}{N_8(0)} e^{-(\lambda_5 - \lambda_8)t},$$

che, espressa in termini del rapporto isotopico iniziale $R = N_5/N_8$ diventa:

$$R(0) = R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t}.$$

Le costanti di disintegrazione in funzione dei valori di tempo di dimezzamento, secondo l'equazione 8 del capitolo 54, valgono:

$$\lambda_5 = \frac{\ln 2}{t_{1/2.5}} = \frac{0.693}{7.04 \times 10^8 \text{ y}} = 0.984 \times 10^{-9} \text{ y}^{-1}$$

e

$$\lambda_8 = \frac{\ln 2}{t_{1/2.8}} = \frac{0.693}{4.47 \times 10^9 \text{ y}} = 0.155 \times 10^{-9} \text{ y}^{-1}$$

Sostituendo a λ_5 e λ_8 i rispettivi valori nell'espressione dei rapporti isotopici si ottiene:

$$\begin{aligned} R(0) &= R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t} \\ &= (0.0072)e^{(0.984 - 0.155)(10^{-9} \text{ y}^{-1})(2.00 \times 10^9 \text{ y})} \\ &= (0.072)e^{1.65} = 0.0378 \text{ ossia il } 3.78\%. \end{aligned}$$

Vediamo dunque che, due miliardi di anni or sono, l'abbondanza di ^{235}U rispetto a ^{238}U nei giacimenti di uranio naturale era molto più elevata di oggi: quando si è formata la Terra (4.5 miliardi di anni fa) raggiungeva il 30%.

55-6 FUSIONE TERMONUCLEARE: IL PROCESSO FONDAMENTALE

Avevamo osservato, a proposito della curva dell'energia di legame riportata nella figura 6 del capitolo 54, che si può avere liberazione di energia quando nuclei leggeri si combinano formando nuclei di numero di massa un po' maggiore, in un processo chiamato *fusione nucleare*. Questo processo è però ostacolato dalla reciproca repulsione elettrostatica, che tende a impedire che due particelle di ugual carica (positiva), entrino nel campo d'azione delle forze nucleari di attrazione reciproca, e arrivino a «fondersi». Questo richiama alla mente la barriera di potenziale che impedisce la fissione (fig. 4), e anche la barriera che impedisce i decadimenti alfa (fig. 8, cap. 54).

Nel caso del decadimento alfa, due particelle cariche – la particella α e il nucleo residuo – si trovano inizialmente *all'interno* delle loro reciproche barriere di potenziale. Affinché possa avvenire il decadimento alfa. la particella α deve riuscire a «evadere» attraversando la barriera per *effetto tunnel*, per ricomparire *fuori* della

 ISBN 88-408-0777-2

stessa. Nella fusione nucleare avviene esattamente il contrario. In questo caso, infatti, perché possa aver luogo l'interazione nucleare, le due particelle devono penetrare *dall'esterno* nel loro reciproco campo d'azione.

L'interazione fra due deuteroni è di particolare importanza per la fusione. L'esempio 5 espone un calcolo grossolano della barriera di potenziale fra due deuteroni, che risulterebbe «alta» all'incirca 200 keV. Per due nuclei di ^{3}He (con carica di $+2e$), fra loro interagenti, la barriera è di circa 1 MeV. Per nuclei con cariche più elevate la barriera è, ovviamente, più alta in proporzione.

Un sistema per ottenere che due nuclei leggeri riescano a superare la loro reciproca barriera di Coulomb consiste nell'utilizzare una delle due particelle leggere come bersaglio, contro il quale va a urtare l'altra particella, accelerata da un ciclotrone o da un analogo congegno. Ma, per estrarre dal processo di fusione un'energia utilizzabile in pratica, dobbiamo far sì che il processo si svolga all'interno di una massa estesa di qualche sostanza, come nella combustione del carbone. Dalla tecnica del ciclotrone non possiamo aspettarci grandi risultati in questa direzione. La prospettiva più attraente per sperare di ottenere la fusione nucleare controllata all'interno di una massa estesa è quella di elevare la temperatura della sostanza a un punto tale da consentire alle particelle di acquisire un'energia sufficiente a superare la barriera per effetto della sola agitazione termica. Questo processo si chiama *fusione termonucleare*.

Come dimostrato al capitolo 23, l'energia cinetica termica media $\overline{K}$ di una particella in equilibrio a una temperatura T vale

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}kT, \qquad (3)$$

ove k è la costante di Boltzmann, che vale 8.62×10^{-5} eV/K. A temperatura ambiente, per $T \approx 300$ K, $\overline{K} = 0.04$ eV, evidentemente troppo piccola per i nostri scopi.

Perfino al centro del Sole, dove $T = 1.5 \times 10^7$ K, l'energia cinetica termica media, calcolata secondo l'equazione 3, arriva soltanto a 1.9 keV. Valore che appare ancora troppo basso in confronto ai 200 keV di altezza della barriera di Coulomb, calcolati nell'esempio 5. Tuttavia noi sappiamo che la fusione termonucleare non soltanto è attiva al centro del Sole. ma ne costituisce la caratteristica dominante.

Per spiegare questa contraddizione occorre tener presente che (*a*) l'energia data dall'equazione 3 è un'energia cinetica *media*; particelle aventi energie molto superiori di questo valor medio costituiscono le «code» ad alta energia delle curve di Maxwell relative alla distribuzione delle velocità (fig. 10, cap. 24); e che inoltre

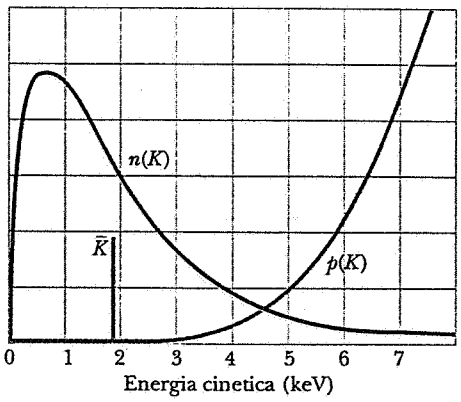


Figura 9 La curva $n(K)$ mostra la distribuzione, in funzione dell'energia, dei protoni nel nocciolo centrale del Sole, corrispondente a una temperatura di 1.5×10^7 K. La linea verticale segna l'energia cinetica media per particella a questa temperatura. La curva $p(K)$ dà la probabilità di penetrazione della barriera nelle collisioni protone-protone. Le scale delle due curve sono arbitrarie e differenti fra loro.

(*b*) le altezze di barriera che abbiamo indicato sono in realtà valori *di punta* delle barriere. La perforazione delle barriere può avvenire in misura significativa per energie ben al disotto di queste punte, come visto al paragrafo 54-4 per il caso del decadimento alfa.

La figura 9 riassume la situazione con un esempio quantitativo. La curva indicata con $n(K)$ è la curva di distribuzione maxwelliana dell'energia relativa alla temperatura al centro del Sole, $T = 1.5 \times 10^7$ K. Anche se la curva è ugualmente valida per qualsiasi particella, concentriamo la nostra attenzione sui protoni, dato che l'idrogeno costituisce circa il 35% della massa del nucleo centrale del Sole.

Per $T = 1.5 \times 10^7$ K, l'equazione 3 dà $\overline{K} = 1.9$ keV, e questo valore è marcato con una linea verticale nella figura 9. Si noti che molte particelle hanno energia maggiore di questo valore medio.

La curva indicata con $p(K)$ in figura 9 rappresenta la probabilità di penetrazione nella barriera per due protoni in rotta di collisione. Per $K = 6$ keV, ad esempio, troviamo $p = 2.4 \times 10^{-5}$ K. Questa è la probabilità che due protoni prossimi a urtarsi, ciascuno con energia cinetica $K = 6$ keV, riescano a sfondare la reciproca barriera di Coulomb giungendo nel campo d'azione delle reciproche potenti forze di attrazione nucleare. Detto in altro modo, possiamo affermare che, mediamente, su 42 000 tentativi di incontro, avverrà con esito favorevole un evento di questo tipo.

In conclusione, si può dimostrare che alla temperatura del centro del Sole il valore dell'energia cinetica di un protone che garantisce la massima probabilità per eventi di fusione protone/protone è intorno a 6 keV. Se si hanno energie molto superiori, è più facile

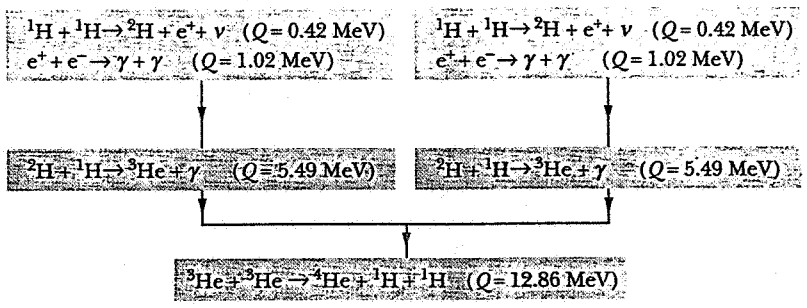


Figura 10 Il ciclo protone-protone, principale responsabile della produzione di energia nel Sole.

la penetrazione nella barriera (ossia, p è più elevato), ma vi sono troppo pochi protoni con tali energie nella «coda» della curva di Maxwell (n è sempre più basso). E se l'energia è molto inferiore, c'è una grande quantità di protoni utili ma la barriera diventa davvero insormontabile.

Esempio 5 Il deuterone (^2H) ha carica $+e$, e la misura del suo raggio risulta 2.1 fm. Due di queste particelle sono proiettate l'una contro l'altra con la stessa energia cinetica K. Che valore deve avere K affinché le particelle siano arrestate dalla mutua repulsione coulombiana quando i due deuteroni si stanno proprio «toccando»?

Soluzione Poiché i due deuteroni sono momentaneamente a riposo quando vengono reciprocamente a contatto, tutta la loro energia cinetica iniziale in quel momento dev'essere stata trasformata in energia potenziale elettrostatica associata alla repulsione coulombiana fra di essi esistente. Se li trattiamo come due cariche puntiformi poste alla distanza $2R$, abbiamo:

$$2K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{2R},$$

da cui

$$K = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 R}$$
$$= \frac{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(16\pi)(8.9 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(2.1 \times 10^{-15}\ \text{m})}\left(\frac{1\ \text{KeV}}{1.6 \times 10^{-16}\ \text{J}}\right)$$
$$\approx 200\ \text{KeV}.$$

Questo valore rappresenta una stima ragionevolmente attendibile dell'altezza della barriera di Coulomb fra due deuteroni.

55-7 FUSIONE TERMONUCLEARE NELLE STELLE

Esamineremo ora in dettaglio i processi di fusione termonucleare che hanno luogo nel nostro Sole e in altre stelle. Nella parte più interna del Sole, dove è concentrata la sua massa e dove si sviluppa la maggior parte dell'energia da esso prodotta, la temperatura (al centro) raggiunge 1.5×10^7 K, e la densità è dell'ordine di 10^5 kg/m^3, circa 13 volte quella del piombo. La temperatura al centro è tuttavia tanto elevata che, nonostante l'altissima pressione (2×10^{11} bar), il Sole rimane gassoso in tutta la sua massa.

La massa del nucleo centrale del Sole è attualmente costituita per circa il 35% da idrogeno e per circa il 65% da elio, con circa 1% di altri elementi. A queste temperature gli elementi leggeri sono quasi totalmente ionizzati, cosicché ci troviamo in presenza di un ammasso di protoni, elettroni e particelle α che si agitano incoerentemente.

Il Sole irraggia energia al ritmo di 3.9×10^{26} W, potenza che mantiene da quando si è formato il sistema solare, ossia da 4.5×10^9 y. È noto ormai dagli anni '30 che questa prodigiosa emissione di energia è sostenuta da processi di fusione termonucleare che avvengono all'interno del Sole. Prima di procedere oltre su questo argomento, dobbiamo parlare di due altre teorie, che erano state avanzate in precedenza. Consideriamo anzitutto reazioni chimiche, come la semplice combustione. Se il Sole, la cui massa è di 2.0×10^{30} kg, fosse costituito soltanto da carbone e ossigeno nelle giuste proporzioni per bruciare, potrebbe durare soltanto 10^3 y circa, tempo ovviamente troppo breve (vedi esempio 47). Il Sole, come vedremo, non brucia carbone, ma idrogeno, e in una fornace nucleare, non atomica o chimica.

Un'altra possibile spiegazione è che, raffreddandosi il nucleo centrale del Sole e diminuendo quindi la pressione interna, il Sole si schiacci per effetto delle proprie grandi forze gravitazionali. Trasformando energia potenziale gravitazionale in energia interna (come accade quando lasciamo cadere una pietra sulla superficie terrestre), la temperatura al centro del Sole tornerebbe ad aumentare, consentendo così il mantenimento della radiazione. I calcoli mostrano però che, per effetto di questi processi, la radiazione solare potrebbe durare soltanto 10^8 anni, tempo almeno 30 volte troppo breve (vedi esempio 51).

ISBN 88-408-0777-2

L'energia del Sole è generata dalla «combustione» termonucleare (cioè, dalla fusione) di nuclei d'idrogeno che si trasformano in nuclei di elio. La figura 10 mostra il *ciclo protone-protone* che è responsabile di questa trasformazione. Notare che ciascuna delle reazioni che qui compaiono è certamente una reazione di fusione, poiché almeno uno dei nuclei prodotti (^{2}H, ^{3}He, o ^{4}He) ha un numero di massa più elevato di ciascuna delle particelle primarie intervenute nella reazione; inoltre, la sua energia di reazione è positiva. Ciò significa che tutte le reazioni del ciclo sono esotermiche, e sviluppano quantità nette di energia utilizzabile.

Il ciclo comincia con la collisione di due protoni (^{1}H + ^{1}H) che vanno a formare un deuterone (^{2}H), creando contemporaneamente un positrone (e^+) e un neutrino (ν). Il positrone incontra ben presto un elettrone libero (e^-), e le due particelle si annientano reciprocamente, cedendo le loro energie a riposo a due fotoni gamma (γ), come descritto al paragrafo 8-7. Nella figura 10 vediamo le conseguenze di due eventi di questo tipo, che sono peraltro estremamente rari. In effetti, soltanto una volta su circa 10^{26} collisioni protone-protone riesce a formarsi un deuterone; nella grande maggioranza dei casi, i due protoni che si urtano si limitano ad allontanarsi l'uno dall'altro per diffusione. È l'intrinseca lentezza di questo processo che regola il ritmo di produzione dell'energia e impedisce l'esplosione del Sole. Nonostante questa lentezza, nel gigantesco volume del nucleo centrale del Sole sono presenti tanti protoni che il deuterio si forma con questo procedimento al ritmo di circa 10^{12} kg/s!

Non appena formato, ogni deuterone (entro pochi secondi) entra in collisione con un altro protone producendo un nucleo di ^{3}He, come appare nella riga centrale di figura 10. Due nuclei ^{3}He possono quindi a un certo momento (entro circa 10^5 y) venire a collisione, formando una particella α (^{4}He) e due protoni, come illustrato all'ultima riga di figura 10.

Esistono altre possibili varianti del ciclo protone-protone, che interessano altri elementi leggeri, ma preferiamo concentrarci sulla sequenza principale che appare nella figura 10.

Osservando nel suo insieme il ciclo protone-protone, troviamo che consiste nella combinazione di quattro protoni e due elettroni per formare una particella α, due neutrini e sei raggi gamma:

$$4\,^1\mathrm{H} + 2e^- \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\nu + 6\gamma. \qquad (4)$$

Possiamo, da un punto di vista formale, aggiungere due elettroni a ciascun membro della 4, ottenendo:

$$4(^1\mathrm{H} + e^-) \rightarrow (^4\mathrm{He} + 2e^-) + 2\nu + 6\gamma. \qquad (5)$$

Le espressioni fra parentesi rappresentano ora *atomi* (non soltanto nuclei spogli) di idrogeno ed elio.

Tenuto conto delle masse degli atomi di idrogeno ed elio, l'energia netta liberata nella reazione 5 vale:

$$\begin{aligned} Q = \Delta m\, c^2 &= [4m(^1\mathrm{H}) - m(^4\mathrm{He})]c^2 \\ &= [4(1.007825\ \mathrm{u}) - 4.002603\ \mathrm{u}](931.5\ \mathrm{MeV/u}) \\ &= 26.7\ \mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

Neutrini e fotoni gamma non hanno massa e non entrano quindi nel calcolo dell'energia di disintegrazione. Ovviamente, questo stesso valore di Q si ritrova sommando i valori di Q per i successivi passi del ciclo protone-protone di figura 10.

Non tutta questa energia è però disponibile nel Sole come energia interna. Circa 0.5 MeV sono associati ai due neutrini prodotti in ogni ciclo. I neutrini sono così penetranti che riescono quasi sempre a sfuggire dal Sole, portandosi via la loro energia. Alcuni sono intercettati dalla Terra, e ci forniscono le uniche informazioni dirette di cui disponiamo su ciò che accade all'interno del Sole.

Sottraendo l'energia dei neutrini restano 26.2 MeV per ogni ciclo disponibili all'interno del Sole. Come dimostrato dall'esempio 6, questi corrispondono al «potere calorifico» sviluppato dalla trasformazione in elio dell'idrogeno, nella misura di 6.3×10^{14} J per ogni kg di idrogeno consumato. Al confronto, il potere calorifico del carbone, circa 3.3×10^7 J/kg, è circa 20 milioni di volte più piccolo, in accordo con i valori generalmente rilevati per il rapporto fra le energie sviluppate nei processi nucleari e in quelli chimici.

Possiamo ora chiederci per quanto tempo il Sole continuerà a brillare con l'attuale intensità prima che tutto l'idrogeno nel suo nucleo centrale sia convertito in elio. La combustione dell'idrogeno sta avvenendo ormai da circa 4.5×10^9 anni, e dai calcoli risulta che rimane ancora disponibile idrogeno per altri 5×10^9 anni. Dopo questo periodo cominceranno ad accadere sensibili cambiamenti. Il nucleo centrale del Sole, che sarà ormai costituito quasi soltanto da elio, comincerà a contrarsi su se stesso, concentrandosi e riscaldandosi, mentre l'involucro esterno si espanderà enormemente, giungendo forse a incorporare l'orbita della Terra. Il Sole diventerà quello che gli astronomi chiamano una *gigante rossa*.

Se la temperatura al centro del Sole crescerà fino a circa 10^8 K, può prodursi energia per fusione termonucleare di elio con formazione di carbonio. L'elio non brucia facilmente: l'unica reazione possibile è

$$^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + \gamma \quad (Q = +7.3\ \mathrm{MeV}).$$

Affinché la reazione possa mantenersi, una collisione di tre particelle α di questo tipo deve avvenire entro

10^{-16} s. Ciononostante, se la densità e la temperatura dell'elio esistente nel centro del Sole sono abbastanza elevate, si avrà formazione di carbonio per combustione nucleare di elio secondo questo processo.

Quando una stella si evolve diventando sempre più calda, si possono formare anche altri elementi, attraverso altre reazioni di fusione nucleare. Tuttavia, non può avvenire la formazione per fusione nucleare di elementi oltre massa $A = 56$. Gli elementi con $A = 56$ (^{56}Fe, ^{56}Co, ^{56}Ni) sono tutti vicino al valor massimo della curva dell'energia di legame di figura 6 del capitolo 54, e la fusione fra nuclei oltre questo limite implica assorbimento e non produzione di energia. La produzione di elementi da processi di fusione è descritta nel capitolo 56.

Esempio 6 Con quale rapidità si consumerà l'idrogeno al centro del Sole, ammettendo che tutta l'energia irraggiata provenga dal ciclo protone-protone della figura 10?

Soluzione Abbiamo visto che la quantità di energia prodotta all'interno del Sole ogni quattro protoni consumati è 26.2 MeV, ossia 6.6 MeV per ogni protone. Si può allora scrivere che l'energia Q_m ricavata per fusione da 1 kg di protoni consumati vale:

$$Q_m = \left(\frac{6.6 \text{ MeV/protone}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg/protone}}\right)(1.6 \times 10^{-13} \text{J/MeV})$$

$$= 6.3 \times 10^{14} \text{ J/kg}.$$

Il ritmo di consumo di idrogeno in kg/s sarà dato dal rapporto fra la potenza irradiata (3.9×10^{26} W) e l'energia prodotta da 1 kg di protoni consumati:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{3.9 \times 10^{26} \text{ W}}{6.3 \times 10^{14} \text{ J/kg}} = 6.2 \times 10^{11} \text{ kg/s}.$$

Per valutare questo numero nella sua giusta prospettiva, si tenga presente che la massa del Sole è 2.0×10^{30} kg.

55-8 FUSIONE TERMONUCLEARE CONTROLLATA

Reazioni di fusione termonucleare sono andate svolgendosi nell'universo dal momento della sua creazione, il presunto *big bang* cosmico di 15 miliardi di anni fa. Sulla terra, tuttavia, esse hanno avuto inizio soltanto nell'ottobre del 1952, quando è stata fatta esplodere la prima bomba a fusione (o a idrogeno). L'altissima temperatura occorrente per innescare la reazione termonucleare è stata in quel caso realizzata da una bomba a fissione usata come detonatore.

Impresa molto più difficile è invece la realizzazione di un reattore a fusione termonucleare controllata, che possa costituire una fonte di energia affidabile e regolabile. A questo fine si sta dedicando il massimo sforzo, perché molti ritengono che il reattore a fusione rappresenti l'ultima possibile fonte di energia del futuro, almeno per quanto riguarda la produzione di energia elettrica.

L'interazione protone-protone descritta nella figura 10 non è suscettibile di impiego pratico sulla Terra in un reattore a fusione, perché la reazione che compare sulla prima riga è di una lentezza esasperante: la sezione d'urto di questa reazione è talmente piccola da non poter essere nemmeno misurata in laboratorio. Questa reazione ha probabilità di successo soltanto all'interno delle stelle, dove l'elevatissima densità rende disponibile un numero enorme di protoni.

Le due reazioni più promettenti per usi terrestri sembrano essere quelle che interessano i nuclei di deuterio + deuterio (d-d) e di deuterio + trizio (d-t):

$$\text{d-d: } {}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \text{n} \quad (Q = +3.27 \text{ MeV}), \quad (6)$$

$$\text{d-d: } {}^2\text{H} + {}^2\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + {}^1\text{H} \quad (Q = +4.03 \text{ MeV}), \quad (7)$$

$$\text{d-t: } {}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{n} \quad (Q = +17.59 \text{ MeV}). \quad (8)$$

^{3}H è il nucleo dell'isotopo d'idrogeno con $A = 3$, che prende il nome di *trizio*. Si noti che ciascuna di queste reazioni è una vera reazione di fusione, con un valore positivo di Q. Il deuterio, isotopo presente con percentuale dello 0.015% nell'idrogeno naturale, è disponibile in quantità illimitate come componente dell'acqua di mare. Il trizio (atomo di ^{3}H) è radioattivo e non è facilmente rintracciabile nell'idrogeno naturale.

Tre sono i requisiti fondamentali per il buon funzionamento di un reattore termonucleare.

1. *Un'elevata densità numerica n delle particelle.* Il numero di particelle interagenti (diciamo, deuteroni) per unità di volume dev'essere abbastanza grande da assicurare una frequenza adeguata delle collisioni deuterone-deuterone. Alle alte temperature richieste, il gas di deuterio si trova completamente ionizzato in un *plasma* neutro consistente di deuteroni ed elettroni.

2. *Un'elevata temperatura T del plasma.* Il plasma dev'essere caldissimo. I deuteroni che si scontrano non avrebbero altrimenti energia sufficiente a penetrare le barriere coulombiane che li separano. Nella sperimentazione sulla fusione, i valori delle temperature sono spesso indicati dando il corrispondente valore di kT (non $\frac{3}{2}kT$). In laboratorio sono state ottenute temperature del plasma fino a 33 keV, che corrisponde a 2.8×10^8 K: valore questo ben più alto della temperatura al centro del Sole (1.3 keV, pari a 1.5×10^7 K).

ISBN 88-408-0777-2

3. *Un lungo tempo di confinamento* τ. Un'ardua difficoltà è legata alla necessità di trattenere in un certo volume il plasma, per un tempo abbastanza lungo, alla temperatura e alla densità volute. Poiché è evidente che nessun recipiente solido potrebbe mai reggere l'altissima temperatura alla quale la reazione deve svolgersi, debbono essere impiegate tecniche particolari, che saranno descritte più avanti. Usando una di queste particolari tecniche, è stato possibile ottenere tempi di confinamento maggiori di 1 secondo.

Si può dimostrare che, per il buon funzionamento di un reattore termonucleare, occorre che sia

$$n\tau \geq 10^{20}\text{s} \cdot \text{m}^{-3}, \tag{9}$$

condizione chiamata *criterio di Lawson*. L'equazione 9 ci fa capire, in parole povere, che possiamo scegliere fra contenere un gran numero di particelle per unità di volume per un tempo relativamente breve o un numero minore per un tempo più lungo. Oltre a rispettare questo criterio, è anche necessario che la temperatura del plasma si mantenga sufficientemente alta.

Si conoscono due tecniche che sono state usate per tentare di ottenere una combinazione della temperatura T con il parametro di Lawson $n\tau$ che consenta la fusione nucleare. Il *confinamento magnetico* usa campi magnetici per tenere insieme il plasma mentre se ne aumenta la temperatura. Nel *confinamento inerziale*, invece, una piccola quantità di «combustibile» nucleare viene compressa e riscaldata tanto rapidamente che la fusione avviene prima che possa espandersi e raffreddarsi. Queste tecniche sono esaminate nei due prossimi paragrafi.

Deduzione del criterio di Lawson *(Facoltativo)*

Vediamo come si arriva al criterio di Lawson. Per elevare la temperatura di un plasma a un livello conveniente, e per mantenervela facendo fronte alle perdite, si deve somministrare energia al plasma impiegando una potenza P_r per unità di volume, dove l'indice r significa «riscaldamento». Questo può essere realizzato facendo passare una corrente elettrica attraverso il plasma, oppure sparandogli contro dall'esterno un fascio di particelle neutre ad alta energia, o in altri modi. Quanto più denso è il plasma, tanto maggiore dev'essere la potenza riscaldante, con legge proporzionale:

$$P_r = C_r n. \tag{10}$$

dove C_r è un'opportuna costante.

Se nel plasma avviene una fusione termonucleare, si genera una certa potenza P_f per unità di volume, dove f sta per «fusione». P_f è proporzionale al tempo di confinamento τ. Se n rappresenta la densità delle particelle, P_f è anche proporzionale a n^2. Per dimostrarlo, supponiamo di raddoppiare la densità delle particelle. In tal caso, non verrà soltanto raddoppiato il numero delle collisioni che ogni particella vagante nel plasma può compiere nell'unità di tempo, ma sarà doppio anche il numero delle particelle vaganti, giungendo così a un fattore globale uguale a quattro. Si ha dunque:

$$P_f = C_f n^2 \tau. \tag{11}$$

Per ottenere un bilancio energetico attivo, dev'essere:

$$P_f > P_r$$

ossia, dalle equazioni 10 e 11:

$$n\tau > C_r/C_f,$$

che, con un'opportuna stima delle costanti C_r e C_f, porta direttamente all'equazione 9. La condizione per cui $P_f = P_r$ è chiamata *condizione di pareggio*. ■

55-9 IL CONFINAMENTO MAGNETICO

Dato che un plasma consiste di particelle cariche, il suo movimento può essere controllato da campi magnetici. Ad esempio, le particelle cariche descrivono spirali con l'asse orientato secondo la direzione di un campo magnetico uniforme. Variando opportunamente l'intensità del campo, è possibile formare uno «specchio magnetico» (fig. 14, cap. 34) dal quale le particelle siano riflesse. Un altro schema ricorre a una geometria toroidale, facendo muovere le particelle su una spirale il cui asse è curvato fino a descrivere un cerchio all'interno di una camera a vuoto a forma di ciambella. Il tipo di reattore a fusione basato su questo principio, realizzato per la prima volta in Russia, ha preso il nome di *tokamak*, dalle sillabe iniziali, in russo, di «camera magnetica toroidale». In seguito sono state costruite e provate parecchie macchine di questo tipo, anche di grandi dimensioni.

In un tokamak, come appare nella figura 11, esistono due componenti del campo magnetico. Il campo toroidale B_t è quello che normalmente è associato a un avvolgimento toroidale di conduttori elettrici; la figura 11 mostra una piccola sezione di una spira esterna che contribuisce a formare questo campo. Ma poiché l'in-

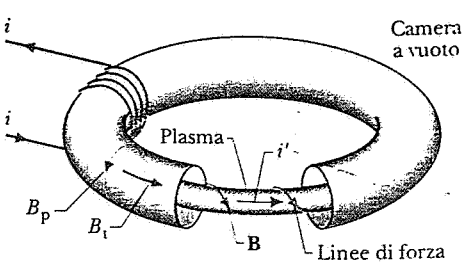


Figura 11 La camera toroidale che costituisce la base del *tokamak*. Da notare il plasma, il campo magnetico elicoidale **B** che lo tiene confinato, e la corrente indotta i' che lo riscalda.

tensità del campo toroidale decresce al crescere del raggio, per un corretto confinamento delle particelle è necessario aggiungere al campo magnetico una seconda componente. Questa componente *poloidale* B_P si somma con quella toroidale per conferire al campo risultante B una struttura a elica, come appunto risulta dalla figura 11. Il campo poloidale è generato da una corrente i' interna allo stesso plasma, che è a sua volta indotta da una serie di avvolgimenti esterni che non compaiono nella figura. Questa corrente i' serve anche a riscaldare il plasma. Per ottenere la temperatura richiesta è però indispensabile ricorrere ad altri artifici, come il bombardamento del plasma dall'esterno con particelle neutre.

La figura 12 mostra un tecnico al lavoro all'interno della camera a vuoto toroidale del reattore sperimentale a fusione Tokamak del laboratorio di Fisica del Plasma di Princeton. Il raggio interno della camera a vuoto è di 2 m, e il raggio principale del toroide è 2.5 m.

Nella progettazione di dispositivi per il confinamento magnetico del plasma, come il tokamak, si punta ad aumentare al tempo stesso il parametro di confinamento di Lawson $n\tau$ e la temperatura T del plasma. Per valori di questi due parametri abbastanza elevati, l'energia prodotta da reazioni di fusione nel plasma arriverà a compensare l'energia spesa per riscaldare il plasma. Questa è la condizione chiamata di «pareggio». Aumentando ancora quei due parametri, si avrà l'«ignizione»: da questo momento in poi, il processo di fusione si sosterrà in modo autonomo, senza più richiedere l'apporto di energia dall'esterno. Nella figura 13 si possono constatare i sensibili progressi verso quel traguardo che sono stati finora registrati. Pur essendo assai prossimi alla realizzazione del «pareggio», rimangono ancora da risolvere tanti, e tanto formidabili, problemi di ingegneria, che per assistere a una produzione industriale di energia elettrica da fusione si dovrà verosimilmente attendere ancora per parecchi decenni.

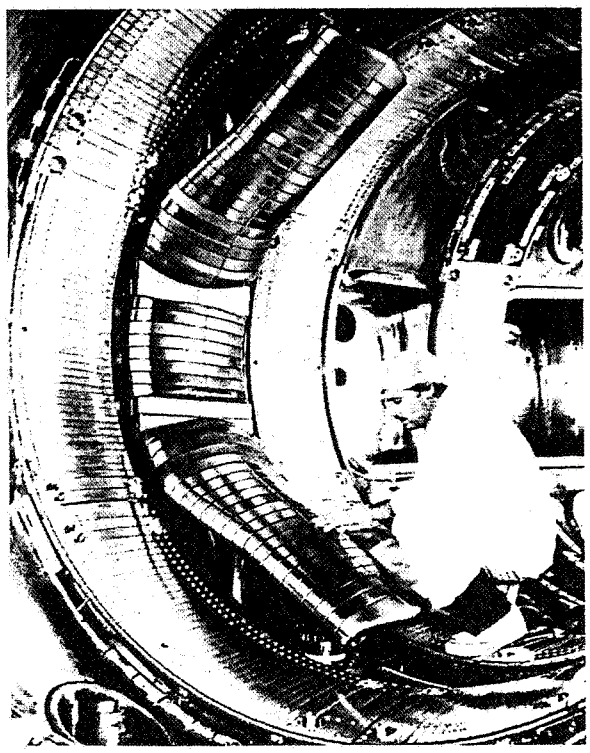


Figura 12 Un tecnico all'interno della camera toroidale del reattore sperimentale a fusione tokamak dell'università di Princeton.

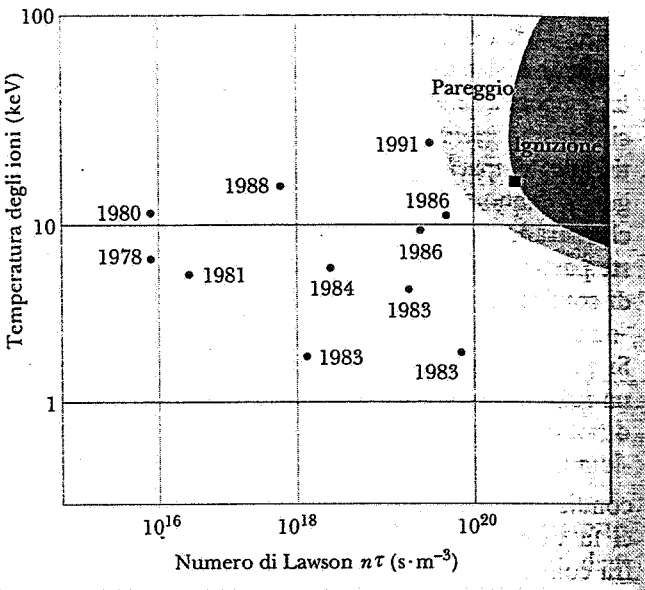


Figura 13 Le tappe verso il raggiungimento del pareggio e dell'ignizione nella ricerca sui reattori a fusione controllata, visualizzate su un diagramma temperatura/numero di Lawson.

Esempio 7 Il reattore sperimentale a fusione Tokamak del laboratorio di Fisica del Plasma di Princeton è riuscito a ottenere un tempo di confinamento di 400 ms.* (*a*) Quale dev'essere la densità delle particelle nel plasma per soddisfare il criterio di Lawson? (*b*) In quale rapporto è questo numero con il valore della densità degli atomi di un gas perfetto alle condizioni standard? (*c*) Se un tokamak della prossima generazione potesse arrivare all'ignizione con temperatura del plasma di 10 keV e tempo di confinamento di 1 s, quale dovrebbe essere la densità delle particelle del suo plasma?

Soluzione (*a*) Applicando il criterio di Lawson, troviamo

$$n = \frac{10^{20}\ \text{s}\cdot\text{m}^{-3}}{0.40\ \text{s}} = 2.5 \times 10^{20}\ \text{m}^{-3}$$

* È stato recentemente annunciato (dicembre 1993) un tempo di confinamento 10 volte maggiore. [N.d.T.]

ISBN 88-408-0777-2

(*b*) La densità numerica degli atomi in un gas perfetto alle condizioni standard è data da $n' = N_A/V_m$, dove N_A è il numero di Avogadro e $V_m = 2.24 \times 10^{-2}$ m^3/mole è il volume molecolare di un gas perfetto alle condizioni standard. Si ha quindi

$$n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ mole}^{-1}}{2.24 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{mole}} = 2.7 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}.$$

La densità delle particelle del plasma ricavata per il caso contemplato in (*a*) è circa centomila volte più piccola di quella di un gas perfetto in condizioni standard.

(*c*) Dalla figura 13 risulta che la curva chiamata di «ignizione» interseca la retta di temperatura costante = 10 keV per un valore del parametro di Lawson dell'ordine di 1×10^{21} s · m^{-3}. (Tener presente, nel formulare questa stima, che le scale sono logaritmiche.) La densità minima richiesta per il plasma risulta:

$$n = \frac{1 \times 10^{21} \text{ s} \cdot \text{m}^{-3}}{1\text{s}} = 1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}.$$

55-10 IL CONFINAMENTO INERZIALE

È attualmente in corso di sperimentazione un'altra tecnica di trattamento del plasma per l'innesco della fusione termonucleare: quella basata sul metodo del cosiddetto *confinamento inerziale*. Con riferimento al criterio di Lawson (eq. 9), questo metodo richiede di lavorare con densità n delle particelle estremamente elevate per tempi di confinamento τ molto brevi. Si cerca di ottenere tempi di reazione tanto brevi che l'evento di fusione sia già avvenuto prima che le particelle del plasma abbiano avuto il tempo di spostarsi in maniera apprezzabile dalla posizione che occupavano all'inizio della fusione. Insomma, le particelle destinate a interagire sono trattenute dalla loro stessa inerzia.

La *fusione a laser*, basata sul principio del confinamento inerziale, è studiata in vari laboratori di tutto il mondo. Nell'impianto sperimentale del progetto NOVA di fusione a laser (fig. 14) presso il Laboratorio Lawrence Livermore, ad esempio, alcune sferette di deuterio-trizio, più piccole di granellini di sabbia (fig. 15), saranno colpite da 10 potentissimi impulsi laser sincronizzati, disposti simmetricamente intorno alle sferette. Questi impulsi sono predisposti per trasmettere a ogni sferetta un'energia totale intorno ai 200 kJ in meno di un nanosecondo. Ciò corrisponde a una potenza, per la durata dell'impulso, di 2×10^{14} W: circa 100 volte la potenza elettrica installata in tutto il mondo!

L'energia dell'impulso laser è destinata a riscaldare le sferette, ionizzarle in un plasma e - almeno si spera - portarle a una temperatura dell'ordine di 10^8 K. Mentre gli strati superficiali di ogni sferetta evaporano ad altissima velocità per effetto termico, la forza di reazione delle particelle che schizzano via comprime la parte centrale della sferetta, aumentandone la densità

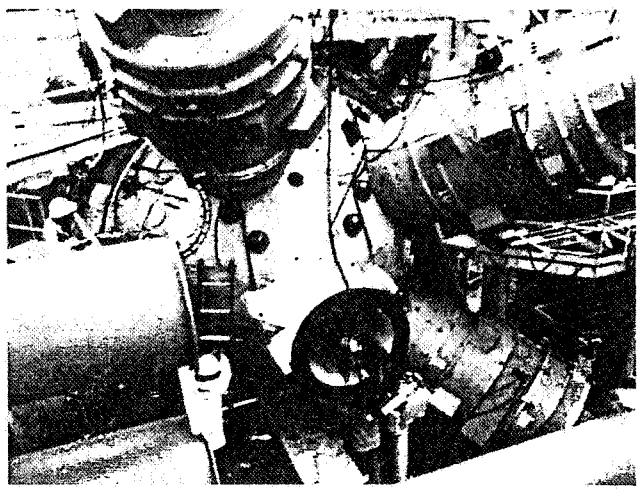


Figura 14 Il locale del bersaglio del progetto NOVA per la fusione a confinamento inerziale presso il Lawrence Livermore National Laboratory. Si notano alcuni dei 10 tubi per i fasci laser.

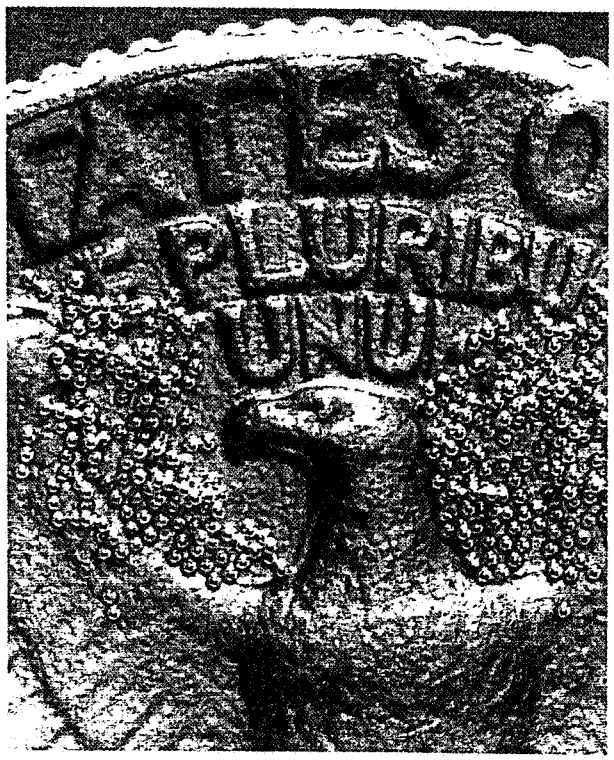


Figura 15 Le minuscole sferette, poste a confronto con una monetina da dieci centesimi di dollaro, sono palline di combustibile deuterio-trizio utili per esperimenti di confinamento inerziale.

di forse 10^3 volte. Se tutti questi eventi si svolgeranno come previsto, si verificheranno le condizioni perché avvenga la fusione termonucleare nella zona centrale supercompressa della sferetta, secondo lo schema d-t illustrato dall'equazione 8.

Durante l'esercizio di un reattore per fusione termonucleare a laser, si prevede che le sferette esplodano, come minuscole bombe all'idrogeno, in numero di 10 o 100 al secondo. Le particelle ad alta energia emesse dalla reazione di fusione (nuclidi ^{4}He e neutroni) dovrebbero essere assorbite da un «mantello» costituito da un flusso di litio fuso in movimento, riscaldandolo. L'energia interna sarebbe quindi trasferita dal litio a un'altra zona dell'impianto e usata per produrre vapore, proprio come in un reattore a fissione o in una caldaia a combustibile fossile. Il litio è molto adatto a fungere da recipiente e veicolo del calore perché, con molta probabilità, il neutrone ad alta energia emesso dalla reazione di fusione cederebbe integralmente la propria energia al «mantello» secondo la reazione

$$^6\mathrm{Li} + \mathrm{n} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + {}^3\mathrm{H}.$$

Nel litio, le due particelle cariche passeranno rapidamente allo stato di riposo; e il trizio così prodotto potrà essere estratto e rimesso in ciclo come combustibile per la fusione. A tutto il 1993, la possibilità di impiego del laser come attivatore di un reattore a fusione non era stata ancora confermata, ma la ricerca continua molto alacremente.

Esempio 8 Supponiamo che una sferetta di combustibile per un dispositivo di fusione a laser sia formata da una miscela liquida deuterio-trizio contenente un ugual numero di atomi dei due isotopi. La densità d (= 200 kg/m^3) della sferetta sia aumentata di un fattore 10^3 per effetto degli impulsi laser. (*a*) Quante particelle (di deuterio o trizio) per unità di volume contiene la sferetta allo stato compresso? (*b*) Secondo il criterio di Lawson, per quanto tempo la sferetta deve conservare questa densità delle particelle affinché si possa avere il pareggio del bilancio energetico?

Soluzione (*a*) Per la densità d' della sferetta compressa possiamo scrivere:

$$d' = 10^3 d = m_\mathrm{d}\frac{n}{2} + m_\mathrm{t}\frac{n}{2},$$

ove n è il numero delle particelle (nuclei di deuterio o trizio) per unità di volume nella sferetta compressa, m_d e m_t sono le masse atomiche del deuterio e del trizio, che sono a loro volta uguali al rapporto fra le rispettive masse molari (M_d e M_t) e il numero di Avogadro N_A:

$$m_\mathrm{d} = M_\mathrm{d}/N_\mathrm{A} \quad \text{e} \quad m_\mathrm{t} = M_\mathrm{t}/N_A.$$

Combinando queste equazioni e risolvendo rispetto a n si ha:

$$\begin{aligned} n &= \frac{2d'N_A}{M_\mathrm{d} + M_\mathrm{t}} \\ &= \frac{(2)(10^3\ 200\ \mathrm{kg/m^3})(6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mole^{-1}})}{2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/mole} + 3.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg/mole}} \\ &= 4.8 \times 10^{31}\ \mathrm{m^{-3}}. \end{aligned}$$

(*b*) Applicando il criterio di Lawson (eq. 9) troviamo:

$$\tau > \frac{10^{20}\ \mathrm{s \cdot m^{-3}}}{n} = \frac{10^{20}\mathrm{s \cdot m^{-3}}}{4.8 \times 10^{31}\mathrm{m^{-3}}} = 2 \times 10^{-12}\ \mathrm{s}.$$

La sferetta deve rimanere compressa per un tempo non minore di questo se si vuole ottenere il pareggio del bilancio energetico. (È inoltre necessario che la temperatura effettiva sia mantenuta all'elevato valore prescritto.)

Dal confronto con l'esempio 7 rimane confermato che, a differenza del tokamak, il processo di fusione a laser opera in condizioni di densità delle particelle estremamente elevata durante brevissimi tempi di confinamento.

DOMANDE

1. Visto che è tanto più difficile estrarre un nucleone da un nucleo piuttosto che un elettrone da un atomo, perché si insiste nei tentativi?
2. Dall'esame della tabella 1 siete in grado di decidere se una sorgente di energia sia preferibile a un'altra? E se no, che altro c'è da considerare?
3. A quali fra i processi citati nella tabella 1 si applica la relazione $E = \Delta m\, c^2$?
4. Dei due frammenti di fissione le cui tracce appaiono in figura 1, quale ha maggiore (*a*) quantità di moto, (*b*) energia cinetica, (*c*) velocità, (*d*) massa?
5. Nell'equazione generale $^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow X + Y + b\mathrm{n}$, relativa alla fissione di ^{235}U prodotta da neutroni termici, vi aspettate che l'energia di reazione dipenda dall'identità di X e Y?
6. La curva dei frammenti di fissione di figura 2 deve necessariamente essere simmetrica rispetto al suo minimo centrale? Spiegate le ragioni della vostra risposta.
7. Perché nei decadimenti a catena dei frammenti primari di fissione (eq. 2) non compaiono decadimenti β^-?
8. Il tempo di dimezzamento dello ^{235}U è 7.0×10^8 y. Discutete l'affermazione secondo cui, qualora essa fosse più breve di circa 10 volte, oggi non potrebbero esistere le bombe atomiche.

ISBN 88-408-0777-2

9. Lo ^{238}U non è fissionabile da parte di neutroni termici. Quale pensate debba essere la minima energia di un neutrone capace di indurre la fissione in questo nuclide?
10. Il tempo di dimezzamento per il decadimento alfa di ^{235}U è 7×10^8 y, mentre quello per fissione spontanea, in assenza di altre particelle, è 3×10^{17} y. In entrambi i processi si verifica l'effetto tunnel, come risulta dalla figura 8 del capitolo 54 e dalla figura 4 del capitolo 55. Perché esiste una così marcata differenza fra le probabilità di penetrare la barriera?
11. Confrontate la fissione con il decadimento alfa sotto il maggior numero possibile di diversi aspetti. Come può un neutrone termico cedere alcuni milioni di elettronvolt a un nucleo che li assorbe, come nella figura 3*a*? Il neutrone non ha essenzialmente alcuna energia iniziale!
12. La curva dell'energia di legame della figura 6 del capitolo 54 ci dice che qualsiasi nucleo di massa maggiore ad $A \approx 56$ è in grado di sviluppare energia per fissione. Tuttavia sembra che ci riescano soltanto i nuclei di massa molto elevata. Perché il piombo, per esempio, non può liberare energia per fissione?
13. Bombardando nuclidi pesanti in laboratorio è possibile preparare altri nuclidi pesanti, alcuni dei quali decadono per *fissione spontanea*. Ciò significa che si spaccano spontaneamente in due grossi frammenti dopo una vita media di una certa durata. Potete spiegare il fenomeno in base alla teoria di Bohr e Wheeler?
14. Per provocare la fissione, i neutroni lenti sono più efficaci di quelli veloci. Potete darne una spiegazione logica? (*Suggerimento*: Considerare la possibile correlazione fra la lunghezza d'onda di de Broglie di un neutrone e la sua sezione d'urto di cattura da parte di ^{235}U.)
15. Fate il confronto fra un reattore nucleare e un fuoco di carbone. In che senso si può dire che in entrambi si sviluppa una reazione a catena? Quali sono i meccanismi che liberano l'energia nei due casi?
16. Non tutti i neutroni prodotti in un reattore sono destinati a provocare un evento di fissione. Che cosa succede a quelli che non ne provocano?
17. Spiegate che cosa significhi esattamente affermare che nel nocciolo di un reattore la fuga di neutroni è un effetto di superficie mentre la produzione di neutroni è un effetto di volume.
18. Spiegate le funzioni del moderatore in un reattore nucleare. È possibile progettare un reattore che non richieda moderatore? In tal caso, quali sarebbero vantaggi e svantaggi di un simile reattore?
19. Spiegate come si devono manovrare le barre di controllo di un reattore nucleare (*a*) durante il primo avviamento, (*b*) per ridurre il livello di potenza, (*c*) a lungo termine di tempo, per tener conto del consumo di combustibile.
20. Un reattore sta funzionando a pieno regime con il fattore di moltiplicazione k fissato al valore 1. Se a un certo punto viene regolato per funzionare stabilmente a metà potenza, quale valore deve assumere k?
21. La separazione dei due isotopi ^{235}U e ^{238}U dall'uranio naturale richiede un metodo fisico, come la diffusione, anziché un metodo chimico. Spiegatene la ragione.
22. Un campione di ^{235}U (o di ^{239}Pu) puro esplode spontaneamente se supera una certa «dimensione critica». Una porzione più piccola non esplode. Perché?
23. Che cosa potete dire, se ne avete un'idea, del fattore di moltiplicazione k di una bomba atomica (a fissione)?
24. Si ritiene che il nocciolo centrale della Terra sia costituito principalmente di ferro, perché, durante la formazione della Terra, elementi pesanti come il ferro sarebbero sprofondati verso il centro del pianeta, mentre i più leggeri, come il silicio, sarebbero emersi galleggiando a formare la crosta terrestre. Tuttavia, il ferro non è certamente uno degli elementi più pesanti. Perché allora il centro della Terra non è costituito di uranio?
25. Dalle notizie riportate nel testo, raccogliete le informazioni e scrivete i valori dell'altezza approssimata della barriera di Coulomb per (*a*) il decadimento alfa di ^{238}U, (*b*) la fissione di ^{235}U da neutroni termici, e (*c*) l'urto frontale fra due deuteroni.
26. È oggi generalmente accettato che l'energia solare derivi da processi nucleari quali il ciclo protone-protone. Quali modi alternativi di generare l'energia solare sono stati proposti in passato, e perché sono stati scartati?
27. Gli elementi fino a numero di massa intorno a 56 sono creati per fusione termonucleare all'interno delle stelle. Perché con lo stesso processo non possono formarsi anche elementi più pesanti?
28. Pensate che la fusione termonucleare risultante dalle due curve tracciate nella figura 9 debba necessariamente presentare la massima efficacia per l'energia corrispondente al punto di intersezione delle due curve? Giustificate la vostra risposta.
29. Riferendovi alla figura 9, vi sorprende il fatto che, a giudicar dalle aree al disotto della curva $n(K)$, il numero di particelle aventi $K > \overline{K}$ sia minore di quello delle particelle con $K < \overline{K}$, essendo $\overline{K}$ l'energia termica media?
30. I nuclidi di uranio oggi presenti sulla Terra sono stati in origine fabbricati e scagliati nello spazio durante l'esplosione di stelle, le cosiddette supernove. Queste esplosioni, avvenute prima della formazione del nostro sistema solare, sono dovute al collasso delle stelle per effetto della loro stessa gravità. Si può allora dire che l'energia proveniente da fissione fosse in origine immagazzinata in un campo gravitazionale? L'energia da fissione, sotto questo particolare aspetto, ha qualcosa in comune con l'energia derivata da fonti idroelettriche?
31. Perché impiegano tanto tempo (circa 10^6 anni!) i fotoni gamma emessi dalle reazioni nucleari nel nocciolo centrale del Sole a diffondersi sulla superficie dell'astro? Che genere di interazioni presentano questi fotoni con i protoni, le particelle alfa e gli elettroni che costituiscono quel nocciolo centrale?
32. Si ritiene che la materia primordiale dell'universo fosse per la maggior parte idrogeno. Da dove proviene allora tutto il silicio che c'è ora sulla Terra? E l'oro?
33. Le condizioni al centro del Sole sono idonee, secondo il criterio di Lawson, a sostenere una reazione termonucleare? Datene la spiegazione.
34. Perché, per ottenere l'ignizione in un tokamak, occorre un plasma a temperatura molto elevata? E una densità molto elevata delle particelle del plasma? E un lungo tempo di confinamento?
35. Quale dei due produrrà più scorie radioattive: un reattore a fissione o uno a fusione?
36. Il criterio di Lawson è valido sia per i tokamak che per i reattori di fusione a laser?

PROBLEMI

Paragrafo 55-2 Fissione nucleare: il processo fondamentale

1. Vi proponete di produrre 1 GJ di energia. Calcolate e confrontate (*a*) la quantità di combustibile occorrente per ottenere questa energia bruciando carbone e (*b*) la quantità di uranio naturale occorrente per ottenere questa energia da un reattore a fissione. Supponete che dalla combustione di 1 kg di carbone si ricavi 2.9×10^7 J e che la fissione di 1 kg di uranio in un reattore sviluppi 8.2×10^{13} J.
2. Il carbone degli Stati Uniti d'America contiene normalmente 3 parti per milione (3 ppm) di uranio e torio fissionabili. Calcolate e confrontate (*a*) l'energia ricavata bruciando 1 kg di carbone e (*b*) l'energia che si potrebbe ricavare dalla fissione delle scorie fissionabili residue nelle ceneri. Assumete che dalla combustione di 1 kg di carbone si ricavi 2.9×10^7 J e che la fissione di 1 kg di uranio o di torio in un reattore sviluppi 8.2×10^{13} J.
3. (*a*) Quanti atomi sono contenuti in 1.00 kg di ^{235}U puro? (*b*) Quanta energia, in joule, si potrebbe ricavare dalla fissione completa di 1.00 kg di ^{235}U puro? Si supponga che sia $Q = 200$ MeV. (*c*) Per quanti anni questa energia potrebbe alimentare una lampadina da 100 W?
4. Con che ritmo si dovrebbe sottoporre a fissione da neutroni lenti dei nuclei di ^{235}U per produrre 200 W? Si assuma $Q = 200$ MeV.
5. Si verifichi che, come indicato nella tabella 1, la fissione dei nuclei di ^{235}U in 1 kg di UO_2 (arricchito in misura tale che lo ^{235}U costituisca il 3% dell'uranio totale) potrebbe mantenere accesa per 680 anni una lampadina da 100 W.
6. Le proprietà di fissione dell'isotopo del plutonio ^{239}Pu sono molto simili a quelle dello ^{235}U. L'energia media liberata per fissione è 180 MeV. Quanta energia, in joule, si libererebbe dalla fissione completa di 1.00 kg di ^{239}Pu puro?
7. Molto raramente un nucleo di ^{233}U, assorbendo un neutrone, si spacca in *tre* frammenti. Se due di questi sono identificati chimicamente come isotopi di cromo e gallio, e se non sono emessi nuovi neutroni freschi, indicate almeno una possibile ipotesi per l'identificazione dei tre frammenti. Consultate una carta o una tabella dei nuclidi.
8. Dimostrare che, nell'esempio 1, non c'è bisogno di tener conto esplicitamente della massa degli elettroni emessi durante il decadimento beta dei frammenti primari di fissione.
9. Lo ^{235}U decade per emissione alfa con un tempo di dimezzamento di 7.04×10^8 anni. Decade anche (raramente) per fissione spontanea, e, se non avvenisse prima il decadimento alfa, il suo tempo di dimezzamento per questo processo isolato sarebbe di 3.5×10^{17} y. (*a*) Con quale frequenza avvengono le disintegrazioni spontanee per fissione in 1 g di ^{235}U? (*b*) Quanti eventi di decadimento alfa intervengono per ogni evento di fissione spontanea?

Paragrafo 55-3 Teoria della fissione nucleare

10. Calcolate l'energia di disintegrazione Q per la fissione del ^{98}Mo in due frammenti uguali. Le masse che intervengono sono 97.905406 u per il ^{98}Mo, e 48.950022 u per lo ^{49}Sc. Se dovesse risultare che Q è positivo, spiegate perché questo processo non avviene spontaneamente.
11. Calcolate l'energia di disintegrazione Q liberata dalla fissione spontanea di ^{52}Cr in due frammenti uguali. Le masse che intervengono sono 51.940509 u per il ^{52}Cr, e 25.982593 u per il ^{26}Mg. Discutete il risultato.
12. Riempite la tabella seguente, che si riferisce alla reazione di fissione generalizzata:

$$^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow X + Y + b\mathrm{n}.$$

X	Y	b
^{140}Xe	–	1
^{139}I	–	2
–	^{100}Zr	2
^{141}Cs	^{92}Rb	–

13. Calcolare l'energia liberata nella reazione di fissione

$$^{235}\mathrm{U} + \mathrm{n} \rightarrow {}^{141}\mathrm{Cs} + {}^{92}\mathrm{Rb} + 3\mathrm{n}.$$

Le masse atomiche che intervengono sono:

^{235}U	235.043924 u	^{92}Rb	91.919661 u
^{141}Cs	140.920006 u	n	1.008665 u.

14. La barriera che si presenta nella fissione del ^{238}Np ha un'energia di 4.2 MeV. L'energia richiesta per estrarre un neutrone da questo nuclide è 5 MeV. Sarà possibile la fissione di ^{237}Np da parte di neutroni lenti?
15. Considerate la fissione dello ^{238}U prodotta da neutroni veloci. In un evento di fissione non si è avuta emissione di neutroni e i prodotti finali stabili, dopo il decadimento beta dei frammenti primari, sono risultati essere ^{140}Ce e ^{99}Ru. (*a*) Quanti eventi di decadimento beta si contano complessivamente nelle due catene di decadimento beta? (*b*) Calcolate Q, sapendo che le masse atomiche che intervengono sono:

^{238}U	238.050784 u	^{140}Ce	139.905433 u
n	1.008665 u	^{99}Ru	98.905939 u.

16. In un certo evento di fissione di ^{235}U da neutroni lenti, avviene che non sia emesso alcun neutrone e che uno dei frammenti primari di fissione risulti essere ^{83}Ge. (*a*) Che cos'è l'altro frammento? (*b*) Come si divide fra i due frammenti l'energia di disintegrazione Q di 170 MeV? Calcolare la velocità iniziale di ciascun frammento.
17. Si supponga che, subito dopo la fissione di ^{236}U* secondo l'equazione 2, i nuclei prodotti ^{140}Xe e ^{94}Sr si trovino esattamente a contatto. (*a*) Supponendo che i nuclei siano sferici, si calcoli l'energia potenziale elettrostatica (in MeV) di repulsione fra i due frammenti. (*Suggerimento*: si usi l'equazione 1 del capitolo 54 per calcolare il raggio di ciascun frammento.) (*b*) Si confronti questa energia con quella liberata in un tipico evento di fissione. In quale forma finale si presenterà in laboratorio questa energia?
18. Un nucleo di ^{236}U* sottoposto a fissione si spezza in due frammenti di massa media, ^{140}Xe e ^{96}Sr. (*a*) Di quale percentuale varia l'area della superficie del nucleo ^{236}U* durante questo processo? (*b*) Di quale percentuale varia il suo volume? (*c*) Di quale percentuale varia la sua energia potenziale elettrostatica? L'energia potenziale elettrostatica di una sfera

ISBN 88-408-0777-2

di raggio r avente una carica Q uniformemente distribuita è data da

$$U = \frac{3}{5}\left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right).$$

Paragrafo 55-4 Reattori nucleari: i princìpi fondamentali

19. Molti temono che, aiutando sempre nuove nazioni a sviluppare la tecnologia dei reattori nucleari, si venga ad accrescere il rischio di guerre nucleari, dato che i reattori possono essere usati non soltanto per produrre energia elettrica, ma anche per accumulare ^{239}Pu, «combustibile» per le bombe nucleari, come sottoprodotto della cattura di neutroni (nei reattori *autofertilizzanti*) da parte del poco costoso ^{238}U. Da quale semplice serie di reazioni, basate sulla cattura neutronica e sul decadimento beta, si potrebbe ottenere questo isotopo del plutonio?

20. Un reattore a fissione da 190 MW consuma metà del suo combustibile in 3 anni. Quanto ^{235}U conteneva inizialmente? Si supponga che tutta l'energia generata provenga da fissione di ^{235}U e che questo nuclide si consumi soltanto per fissione. Vedi esempio 3.

21. Risolvere ancora il problema 20, ma tenendo conto anche della cattura di neutroni senza fissione da parte dello ^{235}U. Vedi esempio 3.

22. (*a*) Un neutrone con energia cinetica iniziale K incorre in un urto frontale elastico con un atomo di massa m a riposo. Dimostrare che la perdita relativa di energia del neutrone vale:

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{4m_n m}{(m+m_n)^2},$$

ove m_n è la massa del neutrone. (*b*) Trovare $\Delta K/K$ supponendo che l'atomo a riposo sia idrogeno, deuterio, carbonio o piombo. (*c*) Se inizialmente è $K = 1.00$ MeV, quante collisioni di questo tipo dovrebbero aver luogo per ridurre l'energia del neutrone a valori termici (0.025 eV) se gli atomi colpiti sono di deuterio, materiale comunemente usato come moderatore? (*Nota*: In realtà, nei moderatori la maggior parte delle collisioni non sono «frontali».)

23. In un reattore, il tempo di generazione dei neutroni t_{gen} è il tempo medio che intercorre fra una fissione e le fissioni provocate dai neutroni da essa emessi. Supponiamo che la potenza prodotta da un reattore al tempo $t = 0$ sia P_0. Dimostrare che la potenza $P(t)$ prodotta dopo un intervallo di tempo t vale

$$P(t) = P_0 k^{t/t_{gen}},$$

k essendo il fattore di moltiplicazione. Si ricordi che, a potenza costante, $k = 1$.

24. Il tempo di generazione dei neutroni (vedi problema 23) di un certo reattore è di 1.3 ms. Esso sta producendo energia al regime di 1200 MW. Per compiere certi controlli di manutenzione, il livello della potenza dev'essere ridotto temporaneamente a 350 MW. Si desidera che la fase di passaggio al livello inferiore di potenza duri 2.6 s. A quale valore (costante) dovrà essere portato il fattore di moltiplicazione per effettuare la transizione nel tempo stabilito?

25. Il tempo di generazione dei neutroni t_{gen} (probl. 23) di un certo reattore è di 1.0 ms. Se sta operando alla potenza di 500 MW, all'incirca quanti neutroni liberi (neutroni che provocheranno successivamente una fissione) sono presenti in ogni momento nel reattore?

26. Un reattore sta funzionando a 400 MW con un tempo di generazione dei neutroni di 30 ms. Supponendo che la sua potenza aumenti per 5 minuti con un fattore di moltiplicazione 1.0003, si trovi quale sarà il valore della potenza al termine dei 5 minuti. Vedere il problema 23.

27. L'energia termica generata all'interno di un corpo che assorbe radiazioni emesse da nuclidi radioattivi può essere usata come sorgente di energia di piccola taglia per satelliti, stazioni meteorologiche non presidiate e altri casi simili. Una quantità di questi nuclidi radioattivi si forma nei reattori nucleari di potenza e può essere separata chimicamente dal combustibile esaurito. Un radionuclide molto adatto per questi usi è il ^{238}Pu ($t_{1/2} = 87.7$ y) che è un emettitore alfa con $Q = 5.59$ MeV. A quale livello di potenza si genera energia in 1.00 kg di questo materiale?

28. Fra i numerosi prodotti di fissione che si possono estrarre per via chimica dal combustibile esaurito di un reattore nucleare di potenza troviamo lo ^{90}Sr ($t_{1/2} = 29$ y). Esso viene prodotto, in tipici reattori di grandi dimensioni, in ragione di circa 18 kg/y. Grazie alla sua radioattività, può rendere energia termica per 2.3 W/g. (*a*) Calcolate l'energia effettiva di disintegrazione Q_{eff} associata al decadimento del nucleo ^{90}Sr. (Q_{eff} comprende contributi dal decadimento dei figli dello ^{90}Sr prodotti nella sua catena di decadimento, ma non dai neutrini, che sfuggono totalmente dal campione.) (*b*) Si vuole preparare una sorgente di energia che fornisca 150 W (elettrici) destinati ad alimentare l'apparecchiatura elettronica di uno scandaglio acustico subacqueo. Se il generatore utilizza soltanto l'energia termica generata dallo ^{90}Sr, e se il rendimento del processo di conversione termoelettrica è 5.0%, quanto ^{90}Sr occorre? La massa atomica dello ^{90}Sr è 89.9 u.

29. In una bomba atomica (bomba A), la liberazione di energia è dovuta alla fissione non controllata di ^{239}Pu (o di ^{235}U). L'energia liberata è espressa in termini della massa di trinitrotoluene (*tritolo*, in sigla TNT) che sarebbe in grado di liberare la stessa quantità di energia («potere deflagrante» della bomba). Un megaton (10^6 t) di TNT libera 2.6×10^{28} MeV di energia. (*a*) Calcolate il potere deflagrante, in megaton di TNT, di una bomba atomica che contiene 95 kg di ^{239}Pu, dei quali 2.5 kg sono effettivamente disintegrati per fissione. Per il plutonio l'energia Q media è 180 MeV. (*b*) A che servono i 92.5 kg di plutonio residui se non prendono parte alla fissione?

30. Una bomba A da 66 kiloton (vedi problema 29) è composta di ^{235}U puro, del quale il 4% sarà effettivamente disintegrato per fissione. (*a*) Quanto uranio deve contenere la bomba? (*b*) Quanti frammenti primari saranno prodotti? (*c*) Quanti neutroni generati dalle fissioni saranno dispersi nell'ambiente? (In media, ogni fissione produce 2.47 neutroni.)

31. Un metodo atto a rivelare la presenza di armi nucleari nascoste consiste nel captare i neutroni emessi, per fissione spontanea, dal ^{240}Pu contenuto nelle testate nucleari. In una prova pratica, un rivelatore di neutroni avente area di 2.5 m^2, montato su un elicottero, misura ad esempio un flusso di neutroni di 4.0 s^{-1} alla distanza di 35 m dalla testata di un missile. Valutare la massa del ^{240}Pu contenuto nella testata nucleare. Il tempo di dimezzamento per fissione spontanea del ^{240}Pu è di 1.34×10^{11} y, e in media ogni fissione emette 2.5 neutroni.

Paragrafo 55-5 Un reattore naturale

32. È stato valutato che il reattore a fissione naturale descritto al paragrafo 55-5 abbia generato, durante la sua vita, energia per 131 TWh. (*a*) Se è rimasto attivo per 200 000 anni, a quale livello medio di potenza ha funzionato? (*b*) Quanto ^{235}U può aver consumato durante la sua vita?
33. Alcuni dei campioni di uranio prelevati nella zona del reattore a fissione naturale descritto al paragrafo 55-5 sono stati trovati leggermente *arricchiti* di ^{235}U, piuttosto che depauperati. Giustificate questo risultato in termini di assorbimento di neutroni da parte dell'isotopo ^{238}U molto abbondante e dei conseguenti decadimenti alfa e beta dei suoi derivati.
34. In quale era del passato si sarebbe potuto impiegare l'uranio naturale come combustibile nei reattori nucleari a fissione, con un rapporto $^{235}U/^{238}U$ del 3.00%? Vedi esempio 4.

Paragrafo 55-6 Fusione termonucleare: il processo fondamentale

35. Calcolare l'altezza della barriera di Coulomb per l'urto frontale fra due protoni. Si può ritenere che il raggio efficace di un protone sia 0.80 fm. Vedere l'esempio 5.
36. L'equazione della curva $n(K)$ nella figura 9 è:

$$n(K) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} = \frac{K^{1/2}}{(kT)^{3/2}} e^{-K/kT},$$

dove N è la densità totale delle particelle. Al centro del Sole la temperatura è 1.5×10^7 K e l'energia media K del protone vale 1.9 keV. Trovate il rapporto fra la densità dei protoni a 5.0 keV e quella dei protoni aventi energia uguale a $\bar{K}$.
37. Altri metodi, oltre a quello di riscaldare il materiale, sono stati proposti per superare la barriera di Coulomb nella fusione. Si potrebbe ad esempio ricorrere agli acceleratori di particelle. Se ne doveste usare due per accelerare due fasci di deuteroni direttamente uno contro l'altro in modo da farli «scontrare frontalmente», (*a*) che potenziale di accelerazione richiederebbe ciascuno di essi per superare la barriera di Coulomb? (*b*) Sarebbe difficile ottenere questo potenziale? (*c*) Per quale motivo pensate che non si usi attualmente questo metodo?
38. Calcolare l'altezza della barriera di Coulomb per due nuclei di ^7Li sparati l'uno contro l'altro con pari energia cinetica iniziale K. Si veda l'esempio 5. (*Suggerimento*: usare l'equazione 1 del capitolo 54 per calcolare il raggio dei nuclei.)
39. Per quanto tempo la fusione di 1.00 kg di deuterio, con la reazione

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3He + n \quad (Q = +3.27 \text{ MeV})$$

potrebbe mantenere accesa una lampadina da 100 W? La massa atomica del deuterio è 2.014 u.

Paragrafo 55-7 Fusione termonucleare nelle stelle

40. Abbiamo visto che l'energia Q complessiva sviluppata dal ciclo protone-protone vale 26.7 MeV. In quale relazione si trova questo numero con i valori di Q indicati nella figura 10 per le tre reazioni componenti il ciclo?
41. Dimostrare che l'energia liberata quando tre particelle alfa si fondono per formare ^{12}C è 7.27 MeV. La massa atomica dello ^4He è 4.002603 e quella del ^{12}C è 12.000000 u.
42. Nel nocciolo centrale del Sole la densità è 1.5×10^5 kg/m^3 e la composizione è principalmente 35% idrogeno e 65% elio (in massa). (*a*) Qual è la densità dei protoni al centro del Sole? (*b*) Qual è il rapporto tra questa densità e quella delle particelle di un gas perfetto alle condizioni standard di temperatura e pressione?
43. Calcolate e confrontate l'energia in MeV liberata dalla (*a*) fusione di 1 kg di idrogeno nel nocciolo del Sole, (*b*) fissione di 1 kg di ^{235}U in un reattore a fissione.
44. Il Sole ha una massa di 2×10^{30} kg e irraggia energia a una potenza di 3.9×10^{26} W. (*a*) Con che ritmo diminuisce la massa del Sole? (*b*) Che porzione della sua massa originale ha perso il Sole in questo modo da quando ha cominciato a bruciare idrogeno, circa 4.5×10^9 anni fa?
45. Ammettiamo che il nocciolo centrale del Sole abbia un ottavo della sua massa totale, e sia compresso entro una sfera di raggio pari a un quarto di quello del Sole. Supponiamo inoltre che il 35% della massa del nocciolo sia idrogeno e che tutta l'energia del Sole sia praticamente prodotta in questa zona. Se il Sole continuerà a consumare idrogeno al ritmo calcolato nell'esempio 6, quanto tempo ci vorrà per esaurirlo totalmente? Il Sole ha una massa di 2×10^{30} kg.
46. Controllate i valori di Q indicati per le reazioni che compaiono nella figura 10. Le masse atomiche che intervengono sono:

^1H 1.007825 u ^3He 3.016029 u

^2H 2.014102 u ^4He 4.002603 u

$e^{\pm}$ 0.0005486 u.

(*Suggerimento*: distinguete attentamente le masse atomiche da quelle nucleari, e tenete opportunamente conto dei positroni.)
47. Il carbone brucia secondo la reazione chimica

$$C + O_2 \rightarrow CO_2.$$

Il calore di combustione è 3.3×10^7 J per kg di carbonio atomico consumato. (*a*) Esprimete questo valore in termini di energia per atomo di carbonio. (*b*) Esprimete questo valore in termini di energia per kg dei reagenti iniziali, carbonio e ossigeno. (*c*) Supponete che il Sole (di massa pari a 2×10^{30} kg) sia composto di carbonio e ossigeno nelle esatte proporzioni richieste per la combustione e che esso continui a irraggiare energia al ritmo attuale di 3.9×10^{26} W. Per quanto tempo potrebbe durare?
48. Una certa stella, avendo convertito tutto il suo idrogeno in elio, si trova a esser composta per il 100% di elio. Essa inizia ora a trasformare l'elio in carbonio con il processo delle tre particelle alfa:

$$^4He + {}^4He + {}^4He \rightarrow {}^{12}C + \gamma,$$

in cui $Q = 7.27$ MeV. La massa della stella è 4.6×10^{32} kg, e produce energia con la potenza di 5.3×10^{30} W. Quanto tempo ci vorrà per convertire tutto l'elio in carbonio?
49. In certe stelle appare verosimile che, per la produzione di energia, il *ciclo del carbonio* risulti più efficace del ciclo protone-protone. Il ciclo consta di questa sequenza di reazioni:

$$^{12}C + {}^1H \rightarrow {}^{13}N + \gamma, \qquad Q_1 = 1.95 \text{ MeV},$$

$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^+ + \nu, \qquad Q_2 = 1.19 \text{ MeV},$$

$$^{13}C + {}^1H \rightarrow {}^{14}N + \gamma, \qquad Q_3 = 7.55 \text{ MeV},$$

ISBN 88-408-0777-2

$$^{14}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{15}O + \gamma, \qquad Q_4 = 7.30 \text{ MeV},$$
$$^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^{+} + \nu, \qquad Q_5 = 1.73 \text{ MeV},$$
$$^{15}N + {}^{1}H \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He, \qquad Q_6 = 4.97 \text{ MeV}.$$

(*a*) Dimostrate che questo ciclo di reazioni è esattamente equivalente, nei suoi effetti complessivi, al ciclo protone-protone di figura 10. (*b*) Controllate che entrambi i cicli, com'era da aspettarsi, producono la stessa energia Q globale.

50. (*a*) Calcolare a quale ritmo il Sole generi neutrini. Si supponga che la produzione di energia avvenga esclusivamente attraverso il ciclo protone-protone. (*b*) Con che flusso i neutrini solari colpiscono la Terra?

51. L'energia potenziale gravitazionale di un corpo sferico uniforme di massa M e raggio R è data da

$$U = -3GM^2/5R,$$

ove G è la costante gravitazionale. (*a*) Si dimostri la coerenza di questa espressione con quella del problema 22 del capitolo 54. (*b*) Si usi questa espressione per trovare la massima energia che potrebbe generare un corpo sferico, di raggio iniziale infinito, restringendosi fino alle dimensioni attuali del Sole. (*c*) Si supponga che durante questa contrazione il Sole abbia costantemente irraggiato energia al ritmo attuale, e si calcoli l'età del Sole nell'ipotesi che tutta la sua energia provenga dalla contrazione gravitazionale.

Paragrafo 55-8 Fusione termonucleare controllata

52. Verificare i valori Q riportati nelle equazioni 6, 7 e 8. Le masse che intervengono sono:

^{1}H	1.007825 u	^{3}He	3.016029 u
^{2}H	2.014102 u	^{4}He	4.002603 u
^{3}H	3.016049 u	n	1.008665 u.

53. Supponiamo di avere una certa quantità N di deuteroni (nuclei di ^{2}H). (*a*) Quale dei processi di fusione qui di seguito indicati può ricavarne più energia? E quanta di più? (*A*) $N/2$ reazioni di fusione del tipo $^{2}H + {}^{2}H \rightarrow {}^{3}H + {}^{1}H$, oppure (*B*) $N/3$ reazioni di fusione del tipo $^{2}H + {}^{3}H \rightarrow {}^{4}He + n$, impiegando $N/3$ nuclei di ^{3}H ottenuti da $N/3$ reazioni tipo (*A*). (*b*) Elencate i nuclei che costituiscono il prodotto finale risultante dai due processi e le rispettive quantità.

54. L'acqua comune contiene circa 0.015% in massa di «acqua pesante», nella quale uno dei due atomi d'idrogeno è sostituito da deuterio, ^{2}H. Quanta potenza da fusione si potrebbe ottenere in media se si riuscisse a «bruciare» in 1 giorno tutto lo ^{2}H contenuto in 1 litro d'acqua con la reazione $^{2}H + {}^{2}H \rightarrow {}^{3}He + n + 3.27$ MeV?

55. Nella reazione di fusione deuterio-trizio data dall'equazione 8, come si suddivide l'energia Q fra la particella α e il neutrone? (Calcolare cioè le energie cinetiche K_α e K_n.) Trascurare le energie cinetiche, relativamente piccole, delle due particelle che si combinano.

56. La figura 16 mostra una rappresentazione ideale di una bomba a idrogeno. Il combustibile per la fusione è deuteruro di litio (LiD). L'altissima temperatura, la densità delle particelle e i neutroni occorrenti per la fusione sono forniti da una bomba atomica (a fissione) che funge da «detonatore». Le reazioni di fusione sono:

$$^{6}Li + n \rightarrow {}^{3}H + {}^{4}He + Q$$

e

$$^{2}H + {}^{3}H \rightarrow {}^{4}He + n + 17.59 \text{ MeV}.$$

È da notare che il trizio (^{3}H) prodotto nella prima reazione si «fonde» con il deuterio (D) presente nel combustibile; si veda l'equazione 8. Dal calcolo di Q della prima reazione si trovi la massa di LiD occorrente affinché la fusione renda 1 megaton di TNT, equivalente a 2.6×10^{28} MeV. Le masse atomiche che intervengono sono:

^{6}Li	6.015121 u	^{4}He	4.002603 u
^{3}H	3.016049 u	n	1.008665 u.

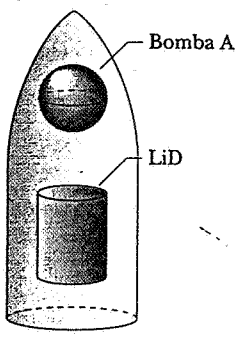


Figura 16 Problema 56.

Paragrafo 55-10 Confinamento inerziale

57. Si supponga che in un apparecchio per fusione a laser si raggiunga una temperatura del plasma di 1.3×10^{8} K. (*a*) Qual è la velocità più probabile di un deuterone a questa temperatura? (*b*) Quale distanza percorrerebbe questo deuterone durante il tempo di confinamento calcolato nell'esempio 8?

58. Il raggio della sferetta di combustibile dell'esempio 8, prima della compressione, è di 20 μm. Supponete che la sferetta di combustibile compresso «bruci» con un rendimento del 10%. Ciò significa che soltanto il 10% dei deuteroni e il 10% dei nuclei di trizio partecipano alla reazione di fusione dell'equazione 8. (*a*) Quanta energia è liberata in ciascuna delle microesplosioni di una sferetta? (*b*) A quanto TNT equivale ciascuna sferetta? Il calore di combustione del TNT è 4.6 MJ/kg. (*c*) Se un reattore a fusione è progettato per 100 microesplosioni al secondo, che potenza produrrà? (Si noti che una parte di questa potenza va spesa per alimentare i laser).

Capitolo 56

FISICA DELLE PARTICELLE E COSMOLOGIA

Nei laboratori di Fisica delle Particelle *si utilizzano fasci di particelle accelerate a velocità prossime a quella della luce (e quindi dotate di energia cinetica molto superiore alla loro energia a riposo) che si scontrano frontalmente tra di loro oppure contro bersagli costituiti in generale da protoni. Le collisioni così provocate fra singole particelle generano decine o anche centinaia di nuove particelle, alcune delle quali hanno vita incredibilmente breve, sovente inferiore a 10^{-20} secondi. Ma i fisici sono ugualmente in grado di seguire le tracce dei loro prodotti di decadimento e di interpretarne così la natura e le proprietà. È questo il più importante mezzo di sviluppo delle nostre conoscenze sui costituenti fondamentali della materia.*

Adottando tutt'altro approccio per penetrare i segreti dell'universo, gli astrofisici misurano, con sonde sensibilissime su tutto lo spettro di frequenze, radiazioni elettromagnetiche, raccolte da speciali radiotelescopi, che provengono dalle profondità dell'universo. Essi tentano così, guardando indietro nel tempo fino a quando l'universo era molto giovane, di ricostruirne la storia, per cercare anche di estrapolare quale sarà la sua futura evoluzione. È questo l'oggetto della cosmologia, *lo studio dell'origine e dell'evoluzione dell'universo.*

Può destare meraviglia il fatto che abbiamo riunito sotto un unico capitolo queste due discipline così differenti fra loro. Ma come vedremo, le misurazioni eseguite dai fisici delle particelle ci forniscono preziose informazioni sulla struttura dell'universo appena nato, mentre le conclusioni dei cosmologi consentono di prevedere i limiti del numero e della varietà delle particelle fondamentali e delle loro possibili interazioni. Pur trovandosi agli estremi opposti della scala delle osservazioni, i fisici delle particelle e i cosmologi procedono affiancati nell'esplorare la struttura dell'universo.

56-1 INTERAZIONI FRA PARTICELLE

Esistono decine di migliaia di composti chimici di vario grado di complessità. L'identificazione di un numero così grande di sistemi rappresenterebbe già un'impresa disperata senza l'ausilio della semplice classificazione in 109 unità fondamentali – *gli elementi* – che li costituiscono, e del numero relativamente ridotto di regole e di tipi di legame secondo cui essi interagiscono. Per comprendere la chimica non occorre studiare le proprietà di una moltitudine di composti, ma soltanto quelle di un centinaio di elementi, e di pochi tipi fondamentali di legami secondo i quali possono combinarsi fra loro.

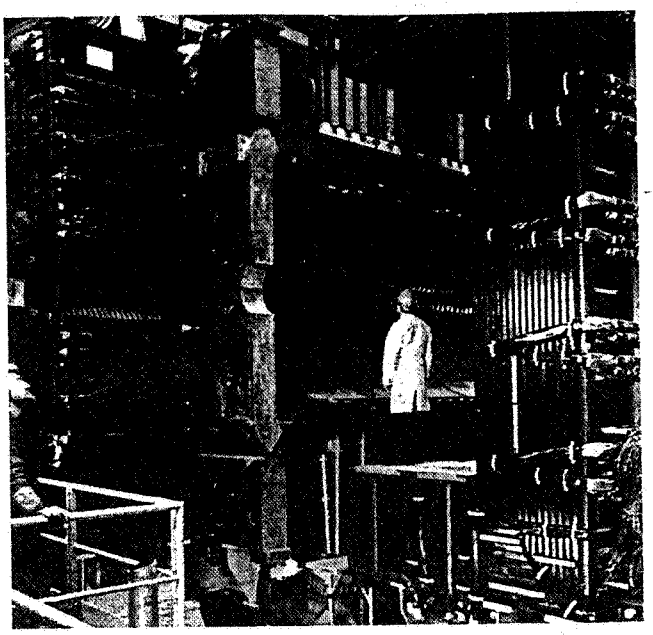
In realtà, l'impresa è ancora più semplice. I 109 elementi sono classificabili in gruppi in base alle loro proprietà chimiche: i gas inerti, gli alogeni, i metalli alcalini, i metalli di transizione, le terre rare, e così via. Studiando le proprietà di un elemento di ciascun gruppo si possono dedurre, per contiguità, quelle degli altri appartenenti allo stesso gruppo.

Il mondo subatomico può essere studiato e interpretato in modo analogo. Sappiamo che i 109 differenti modelli di *atomo* non sono unità elementari, ma che sono a loro volta costituiti da tre differenti tipi di particelle: protoni, neutroni ed elettroni. Se indaghiamo più a fondo, facendo urtare fra loro particelle ad alta energia per studiarne i frammenti (fig. 1), ci troviamo a prima vista di fronte a una situazione complessa quasi quanto quella della chimica, con centinaia di nuove particelle diverse. Ma a un esame più approfondito delle loro caratteristiche, risulta che possiamo ripartire queste particelle in un numero limitato di gruppi i cui membri hanno proprietà simili. E attraverso questa classificazione arriviamo a conoscere le chiavi della struttura più profonda, basata a sua volta su un numero ristretto di particelle fondamentali e un numero altrettanto ridotto di interazioni fra loro possibili.

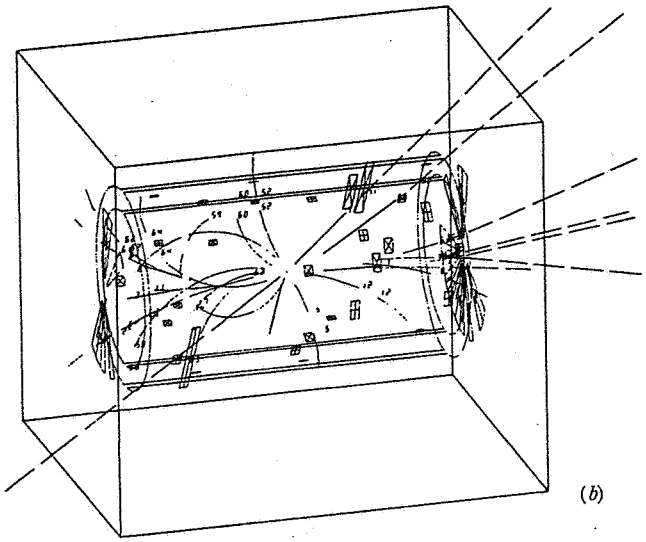
Le quattro forze fondamentali

Tutte le forze note dell'universo si possono raggruppare in quattro diversi tipi fondamentali, e precisamente,

ISBN 88-408-0777-2



(*a*)



(*b*)

Figura 1 (*a*) Il rivelatore di collisioni protoni-antiprotoni UA1 dell'acceleratore montato al Centro europeo di ricerca nucleare CERN di Ginevra. Fasci di protoni e antiprotoni accelerati in opposte direzioni si scontrano nella zona centrale del rivelatore, che è in grado di registrare le traiettorie di tutte le particelle che subiscono interazioni elettromagnetiche o forti, uscenti dalla zona di reazione. (*b*) Una ricostruzione al calcolatore delle tracce provenienti dalla zona centrale dopo una collisione. Un campo magnetico provoca una deviazione delle tracce che consente di calcolare la quantità di moto delle particelle e ne facilita l'identificazione. Nel 1983 al CERN eventi di questo tipo portarono alla scoperta delle particelle W e Z.

in ordine crescente di intensità, la forza *gravitazionale*, la forza *debole*, la forza *elettromagnetica* e la forza *forte*. Esse svolgono funzioni importanti non soltanto nei processi di interazione fra particelle, ma anche nella generazione di particelle per decadimento.

1. La *forza gravitazionale*. La forza di gravità è di gran lunga la più importante nella nostra vita di tutti i giorni, ma alla scala delle interazioni fondamentali fra particelle nel regno subatomico essa è assolutamente trascurabile. Per darne l'idea, la forza di attrazione gravitazionale fra due protoni fra loro a contatto è dell'ordine di 10^{-38} rispetto a quella di interazione forte. La gravità si differenzia principalmente da tutte le altre forze perché è cumulativa e agisce praticamente su un campo di estensione infinita. Ad esempio, il nostro peso risulta dalla somma delle forze di attrazione gravitazionale esercitate su ciascun atomo del nostro corpo da ciascun atomo della Terra.

2. La *forza debole*. La forza debole è responsabile del decadimento beta del nucleo (paragrafo 54-5) e di altri simili processi di decadimento che interessano le particelle fondamentali. Non esercita sensibile influenza nei legami nucleari. La forza di interazione debole fra due protoni vicini fra loro è all'incirca 10^{-7} volte quella forte, e il suo raggio di azione è minore di 1 fm: ciò significa che essa è trascurabile fra particelle distanti fra

ISBN 88-408-0777-2

loro più di 10^{-15} metri. La forza debole è tuttavia essenziale nel determinare il comportamento delle particelle fondamentali, e rappresenta un fattore critico per l'interpretazione dell'evoluzione dell'universo.

3. La *forza elettromagnetica.* Questo tipo di forza è importante per la struttura e per le interazioni delle particelle fondamentali. Alcune particelle interagiscono o decadono principalmente attraverso questo meccanismo. Le forze elettromagnetiche hanno un raggio d'azione praticamente infinito, ma la presenza di schermi ne diminuisce in genere l'effetto su oggetti ordinari. Le proprietà degli atomi e delle molecole sono determinate dalle forze elettromagnetiche, e molti dei fenomeni fisici che comunemente si manifestano a livello dei nostri sensi quali l'attrito, la resistenza dell'aria, le tensioni interne dei materiali, il trascinamento dei liquidi, dipendono quasi esclusivamente da esse. La forza elettromagnetica fra protoni adiacenti è circa 100 volte più piccola di quella forte, ma all'interno del nucleo, dove non ci sono schermature, essa agisce cumulativamente, e può quindi competere con la seconda nel determinare la stabilità e la struttura del nucleo.

4. La *forza forte.* Questa forza, responsabile dei legami del nucleo, è dominante nelle reazioni e nel decadimento della maggior parte delle particelle fondamentali. Tuttavia, come vedremo, alcune particelle, fra cui l'elettrone, non ne risentono alcun effetto. Ha un raggio d'azione assai limitato, dell'ordine di 1 fm.

L'intensità relativa di una forza determina l'ordine di grandezza del periodo di tempo durante il quale agisce. Se portiamo due particelle a una distanza corrispondente al raggio d'azione di qualsiasi di queste forze, noteremo che il tempo richiesto per compiere una reazione o un decadimento sarà maggiore per la forza più debole, che per quella forte. Come vedremo più avanti, la vita media di un processo di decadimento è spesso un segnale rivelatore del tipo di interazione responsabile del processo, trovandosi le forze più forti all'estremità inferiore della scala dei tempi (spesso fino a 10^{-23} s). La tabella 1 riassume le quattro forze e alcune delle loro proprietà. Il tempo caratteristico per ciascuna dà un quadro dei tipici intervalli di tempo misurati per i sistemi su cui ciascuna forza agisce. Essi di norma rappresentano la vita media delle particelle che decadono per effetto di quella forza.

L'unificazione delle forze

Nel 19° secolo una delle tappe fondamentali nella storia della fisica fu la scoperta della teoria dell'elettromagnetismo. Esperimenti condotti da Oersted e Faraday dimostrarono che effetti magnetici possono generare campi elettrici e che effetti elettrici possono generare campi magnetici. Le due ben distinte discipline scientifiche dell'elettricità e del magnetismo si fusero nella comune denominazione di elettromagnetismo. Questa unificazione risultò in seguito essere una premessa essenziale della teoria della relatività ristretta, secondo la quale campi elettrici e magnetici possono trasformarsi gli uni negli altri per effetto del movimento relativo dell'osservatore.

Nel 20° secolo si è tentato di estendere questo collegamento anche ad altre forze. Si dimostrò anzitutto che elettromagnetismo e forza debole possono essere considerati due differenti aspetti di una unica forza, chiamata forza *elettrodebole*: se infatti studiamo le interazioni di particelle a energie abbastanza elevate, constatiamo che le due forze si comportano in modo analogo. Può tuttavia essere conveniente considerarle ancora come forze distinte per molti dei fenomeni che discuteremo in questo capitolo, così come è spesso utile tenere distinti gli effetti delle forze elettriche e magnetiche. La teoria della forza elettrodebole, proposta indipendentemente da Stephen Weinberg e Abdus Salam nel 1967 (che nel 1979, insieme a un terzo ideatore della teoria, Sheldon Glashow, ottennero così il premio Nobel), afferma che, così come il fotone è il veicolo della forza elettromagnetica, debbono esistere particelle pesanti che trasportano la forza debole, e che queste particelle ancora da scoprire, per energie dell'ordine di 100 GeV (circa 100 volte l'energia a riposo del protone), debbono comportarsi come fotoni ad alta energia. Nel 1983 al Centro Europeo di Ricerche Nucleari (CERN) di Ginevra l'esistenza di queste particelle fu confermata da un gruppo di ricercatori che era guidato da Carlo Rubbia e usava spe-

TABELLA 1 LE QUATTRO FORZE FONDAMENTALI

Tipo	*Raggio d'azione*	*Intensità relativa*	*Tempo caratteristico*
Forte	1 fm	1	10^{-23}
Elettromagnetica	∞	10^{-2}	10^{-14}–10^{-20} s
Debole	$\ll$ 1 fm	10^{-7}	10^{-14}–10^{-20} s
Gravitazionale	∞	10^{-38}	Anni

ciali tecniche sviluppate da Simon van der Meer: anche ad essi fu assegnato, nel 1984, il premio Nobel per la fisica.

Confermata così sperimentalmente la validità della teoria unificata della forza elettrodebole, il passo successivo fu il tentativo di raggiungere un livello più elevato di unificazione combinando la forza elettrodebole con quella forte. Le teorie che questo scopo si propongono sono chiamate *Grandi Teorie Unificate* (GTU): ma delle molte che sono state enunciate nessuna è finora emersa come assolutamente corretta. Non è purtroppo possibile provare in laboratorio la validità di queste teorie, dato l'elevatissimo livello di soglia previsto per l'energia alla quale le forze dovrebbero unificarsi, dell'ordine di 10^{15} GeV, ossia 10^{11} volte maggiore di quella erogabile dalla più potente macchina che sia stata finora costruita o anche soltanto concepita. Dobbiamo perciò accontentarci di condurre prove alle energie attualmente disponibili in laboratorio, con risultati di difficile interpretazione per l'eccessiva piccolezza degli effetti misurabili. Una delle conclusioni di queste teorie prevede che il protone non sia una particella stabile, ma sia soggetto a decadere in un tempo dell'ordine di 10^{31} anni, durata da confrontare, per esempio, con l'età dell'universo, stimata in 10^{10} anni. Ricerche per il decadimento del protone non hanno finora ottenuto successo e hanno così fatto cadere alcune delle GTU, ma d'altra parte per nessuna delle rimanenti si è ancora ottenuto con certezza una sia pure parziale conferma.

Il traguardo finale dell'unificazione è uno schema che includa anche la gravità, la cosiddetta *Teoria Universale* (TU). Non è stata finora proposta una teoria quantistica della gravità, ed è quindi difficile prevedere quali forme potrebbero assumere simili teorie, ma grande è la sfida per nuove e ardite speculazioni teoriche.

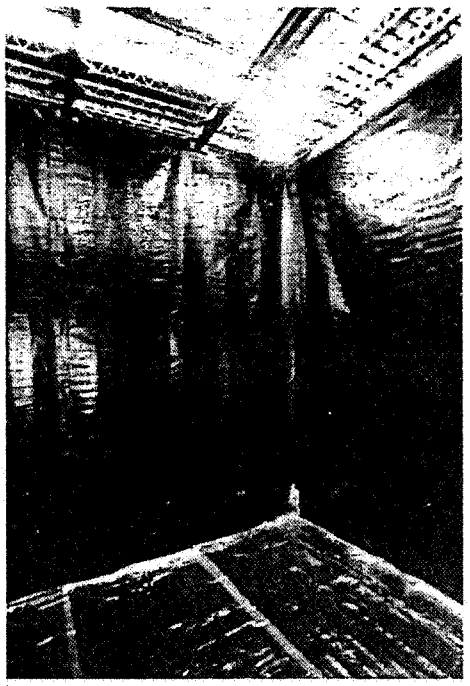


Figura 2 Una stanza sotterranea, rivestita di materiale plastico, nella miniera di sale di Morton presso Cleveland: per avere un'idea delle sue dimensioni si osservi la persona che sta in piedi nell'angolo. È stata riempita con 10000 t d'acqua, in cui sono immerse 2048 sonde sensibili ai microscopici lampi di luce emessi da protoni in decadimento.

Esempio 1 Si supponga che il tempo di dimezzamento di un protone sia 10^{31} anni, come ipotizzato da certe GTU. (*a*) In media, per quanto tempo si dovrà tenere sotto osservazione 1 litro di acqua per riuscire a vedere il decadimento di un protone? (*b*) Quale volume di acqua occorrerebbe osservare per avere una frequenza di decadimento di un protone al giorno?

Soluzione (*a*) Il numero N di molecole contenute in un litro d'acqua (circa 1000 g) è

$$\frac{(1000\text{g})(6.02 \times 10^{23}\text{molecole/mol})}{18\ \text{g/mol}} = 3.3 \times 10^{25}\text{molecole}.$$

Ogni molecola contiene 10 protoni (8 dell'ossigeno + 2 dei due atomi di idrogeno): il numero di protoni per litro risulta $N = 3.3 \times 10^{26}$. La frequenza di decadimento R che risulta dalla equazione 5 del capitolo 54 è

$$R = \lambda N = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} N = \frac{0.693}{10^{31}\text{y}} 3.3 \times 10^{26}$$
$$= 2.3 \times 10^{-5}\text{y}^{-1} = \frac{1}{43\,000\text{y}}.$$

Ciò significa che in media bisognerebbe attendere 43000 anni per osservare il decadimento spontaneo di un protone in un litro d'acqua.

(*b*) Per $R = 1\ \text{d}^{-1}$, otteniamo

$$N = \frac{R}{\lambda} = \frac{1\ \text{d}^{-1}}{0.693/(10^{31}\text{y})} = 5.3 \times 10^{33}\ \text{protoni}.$$

che corrispondono a 5.3×10^{32} molecole d'acqua, pari a un volume di 1.6×10^{7} litri: per contenerli occorre disporre di un recipiente cubico di 25 metri di lato! (Si veda la figura 2.)

56-2 FAMIGLIE DI PARTICELLE

Un approccio molto efficace per sviluppare la conoscenza della natura delle cose è la classificazione sistematica. È un metodo usato comunemente dai biologi: raggruppando piante e animali in categorie basate su

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 2 TRE FAMIGLIE DI PARTICELLE

Famiglia	*Struttura*	*Interazioni*	*Spin*	*Esempi*
Leptoni	Fondamentale	Debole, elettromagnetica	Semintero	e, ν
Mesoni	Composita	Debole, elettromagnetica, forte	Intero	π, K
Barioni	Composita	Debole, elettromagnetica, forte	Semintero	p, n

certi aspetti caratteristici della loro struttura, si può procedere a studiare il loro comportamento. Da un punto di vista scientifico, ad esempio, può risultare più produttivo confrontare un ragno con un altro ragno, piuttosto che accostarlo a una mosca o a una falena. Una gran parte della preparazione scientifica di un ricercatore consiste nell'imparare a scegliere i criteri più validi di classificazione in vista degli obiettivi che si propone di raggiungere.

Il primitivo sistema di classificazione delle particelle era fondato sulla loro massa. Le più leggere, comprendenti gli elettroni ($m_e c^2 = 0.511$ MeV), furono chiamate *leptoni* (da una parola greca che significa piccolo), e quelle più pesanti, comprendenti anche il protone ($m_p c^2 = 938$ MeV), *barioni* (in greco, pesante). Fra questi estremi vennero successivamente identificati i *mesoni*, (ossia, sempre dal greco, i medi), fra i quali citiamo il *pione* ($m_\pi c^2 = 140$ MeV).

Attualmente questa classificazione in funzione della massa non è più ritenuta valida: ad esempio, uno dei leptoni e molti mesoni sono risultati più pesanti del protone. Questi tre nomi sono tuttavia ancora utili a descrivere gruppi distinti di particelle aventi proprietà simili, anche se il criterio della massa è ormai stato abbandonato. La tabella 2 riassume i nomi e le proprietà delle tre famiglie di particelle.

I leptoni

I leptoni sono particelle fondamentali che interagiscono soltanto tramite forze deboli ed elettromagnetiche, e sono assolutamente insensibili a quelle forti, anche se di intensità enormemente più grande. I leptoni sono autentiche particelle fondamentali, prive di struttura interna e certamente non costituite da altre entità ancora più piccole. Possiamo considerarli particelle puntiformi, prive di dimensioni finite. Tutti i leptoni noti hanno spin $\frac{1}{2}$.

Nella tabella 3 sono elencati i sei leptoni noti, che si presentano come tre paia di particelle. Ogni coppia è formata da una particella carica (e^-, μ^-, τ^-) e da un neutrino privo di carica (ν_e, ν_μ, ν_τ). Del neutrino elettronico si è già discusso al paragrafo 54-5 a proposito del decadimento beta. Sia dei leptoni carichi che dei neutrini esistono le relative antiparticelle.

Secondo alcune teorie sulla struttura delle particelle fondamentali, i neutrini sono privi di massa (e viaggiano quindi alla velocità della luce), e stabili. Altre prevedono che i neutrini abbiano una massa piccolissima ma decisamente non nulla e che si trasformino gli uni negli altri. Finora nessun esperimento ha rivelato una massa sensibilmente diversa da zero, ma soltanto per il neutrino dell'elettrone il valore massimo compatibile con gli esperimenti è molto piccolo (energia a riposo < 20 eV). I neutrini e le loro presumibili masse hanno importanti implicazioni per la cosmologia, come vedremo in seguito.

L'elettrone è una particella stabile, ma il muone e la particella tau decadono in altri leptoni, secondo queste leggi:

$$\mu \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \qquad \text{(vita media} = 2.2 \times 10^{-6}\ \text{s)},$$
$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \nu_\tau \qquad \text{(vita media} = 3.0 \times 10^{-13}\ \text{s)}.$$

Di questi decadimenti è sicuramente responsabile l'interazione debole: ne è prova la generazione di neutrini, che sono *sempre* il prodotto di processi di interazione debole, e ne è indizio il confronto dei tempi di vita media con quelli indicati in tabella 1. La forma di questi decadimenti risponde a una legge di conservazione per i leptoni illustrata al paragrafo 56-3.

TABELLA 3 LA FAMIGLIA DEI LEPTONI

Particella	*Antiparticella*	*Carica della particella*	$h/2\pi$	*Energia a riposo*	*Vita media*	*Tipici prodotti di decadimento*
e^-	e^+	−1	$\frac{1}{2}$	0.511	∞	–
ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	$\frac{1}{2}$	< 20 eV	∞	–
μ^-	μ^+	−1	$\frac{1}{2}$	105.7	2.2×10^{-6}	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	$\frac{1}{2}$	< 0.3	∞	–
τ^-	τ^+	−1	$\frac{1}{2}$	1784	3.0×10^{-13}	$\mu^- + \nu_\mu + \nu_\tau$
ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	$\frac{1}{2}$	< 40	∞	–

TABELLA 4 ALCUNI MESONI

Particella	*Antiparticella*	*Carica*[a]	$(h/2\pi)$	*Stranezza*	*Energia a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Tipici prodotti di decadimento*
π^+	π^-	+1	0	0	140	2.4×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
π^0	π^0	0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
K^+	K^-	+1	0	+1	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
K^0	$\overline{K}^0$	0	0	+1	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
η	η	0	0	0	549	8.0×10^{-19}	$\gamma + \gamma$
ρ^+	ρ^-	+1	1	0	769	4.5×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^0$
η'	η'	0	0	0	958	2.2×10^{-21}	$\eta + \pi^+ + \pi^-$
D^+	D^-	+1	0	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
ψ	ψ	0	1	0	3097	1.0×10^{-20}	$e^+ + e^-$
B^+	B^-	+1	0	0	5278	1.2×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Y^0	Y	0	1	0	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

[a] La carica e la stranezza si riferiscono alla particella. I valori per le antiparticelle hanno segno opposto. Lo spin, l'lenergia a riposo e la vita media sono gli stessi sia per le particelle sia per le relative antiparticelle.

I mesoni

I mesoni sono particelle a interazione forte dotate di spin intero. La tabella 4 riporta un parziale elenco di queste particelle. In generale, i mesoni sono il prodotto di processi di interazione forte, e decadono quasi sempre in altri mesoni o in leptoni, per interazioni forti, elettromagnetiche o deboli. Alcune reazioni di nucleoni possono generare pioni, come per esempio

$$p + n \rightarrow p + p + \pi^- \quad \text{oppure} \quad p + n \rightarrow p + n + \pi^0,$$

e i pioni possono a loro volta decadere così:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu \qquad \text{(vita media} = 2.6 \times 10^{-8} \text{ s)},$$

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \qquad \text{(vita media} = 8.4 \times 10^{-17} \text{ s)}.$$

Nella prima reazione la generazione di neutrini è indizio di interazione debole, suggerita anche dal valore della vita media, mentre la seconda, con generazione di fotoni e vita media più corta, appare dovuta a interazione elettromagnetica.*

I barioni

I barioni sono particelle che interagiscono in maniera forte e hanno spin semintero ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$). La tabella 5 riporta un parziale elenco di queste particelle. I membri più noti della famiglia dei barioni sono il protone e il neutrone. I barioni hanno antiparticelle distinte, ad esempio l'antiprotone ($\overline{p}$) oppure l'antineutrone ($\overline{n}$).

Possiamo produrre barioni più pesanti in reazioni fra nucleoni, ad esempio con

$$p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + K^+,$$

TABELLA 5 ALCUNI BARIONI

Particella	*Antiparticella*	*Carica*[a]	$(h/2\pi)$	*Stranezza*	*Energia a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Tipici prodotti di decadimento*
p	$\overline{p}$	+1	$\frac{1}{2}$	0	938	∞	
n	$\overline{n}$	0	$\frac{1}{2}$	0	940	889	$p + e^- + \overline{\nu}_e$
Λ^0	$\overline{\Lambda}^0$	0	$\frac{1}{2}$	−1	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
Σ^+	$\overline{\Sigma}^+$	+1	$\frac{1}{2}$	−1	1189	0.8×10^{-10}	$p + \pi^0$
Σ^0	$\overline{\Sigma}^0$	0	$\frac{1}{2}$	−1	1192	5.8×10^{-20}	$\Lambda^0 + \gamma$
Σ^-	$\overline{\Sigma}^-$	−1	$\frac{1}{2}$	−1	1197	1.5×10^{-10}	$n + \pi^-$
Ξ^0	$\overline{\Xi}^0$	0	$\frac{1}{2}$	−2	1315	2.9×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^0$
Ξ^-	$\overline{\Xi}^-$	−1	$\frac{1}{2}$	−2	1321	1.6×10^{-10}	$\Lambda^0 + \pi^-$
Δ^*	$\overline{\Delta}^*$	+2, +1, 0, −1	$\frac{3}{2}$	0	1232	6×10^{-24}	$p + \pi$
Σ^*	$\overline{\Sigma}^*$	+1, 0, −1	$\frac{3}{2}$	−1	1385	2×10^{-23}	$\Lambda^0 + \pi$
Ξ^*	$\overline{\Xi}^*$	−1, 0	$\frac{3}{2}$	−2	1530	6×10^{-23}	$\Xi + \pi$
Ω^-	$\overline{\Omega}^-$	−1	$\frac{3}{2}$	−3	1672	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$

[a] La carica e la stranezza si riferiscono alla particella. I valori per le antiparticelle hanno segno opposto. Lo spin, l'energia a riposo e la vita media sono gli stessi sia per le particelle sia per le relative antiparticelle.

* È da notare che mentre i neutrini derivano sempre da decadimento per interazione debole, non tutti i decadimenti per interazione debole generano necessariamente neutrini. Lo stesso discorso vale per i fotoni rispetto all'interazione elettromagnetica.

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 6 LE PARTICELLE DI CAMPO

Particella	*Simbolo*	*Interazione*	*Carica (e)*	*Spin ($h/2\pi$)*	*Energia a riposo* (GeV)
Gravitone		Gravitazione	0	2	0
Bosone debole	W^+, W^-	Debole	± 1	1	80.6
Bosone debole	Z^0	Debole	0	1	91.2
Fotone	γ	Elettromagnetica	0	1	0
Gluone	g	Forte (colore)	0	1	0

che genera il barione Λ^0 e il mesone K^+. Il barione Λ^0 decade a sua volta secondo la formula

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad (\text{vita media } 2.6 \times 10^{-8} \text{ s}).$$

Benché non vi sia generazione di neutrini, la vita media suggerisce che il decadimento avviene in regime di interazione debole. Nel paragrafo 56-3 vedremo la ragione di questo decadimento «lento».

Particelle di campo e forze di scambio

Esiste ancora una piccola famiglia di particelle, che non sono classificabili come leptoni, mesoni o barioni. Si tratta della famiglia delle *particelle di campo*, che sono responsabili della trasmissione delle forze di interazione fra le altre particelle.

La legge di gravitazione di Newton e la legge di Coulomb per l'elettrostatica erano fondate in origine sul concetto di *azione a distanza*. In seguito, nel 19° secolo, a questo concetto venne a sostituirsi la nozione di campo. Due particelle interagiscono attraverso il campo da esse stesse generato: una particella crea un campo e l'altra interagisce con questo, piuttosto che direttamente con la particella. La teoria quantistica dei campi fa un passo ancora oltre, supponendo che i campi siano trasportati da quanti. In questo quadro, invece di affermare che la prima particella stabilisce un campo, diremo che essa emette dei quanti di quel tipo di campo, e che la seconda particella li assorbe. Così, ad esempio, l'interazione elettromagnetica fra due particelle può esser vista in termini di emissione e assorbimento di fotoni, che sono i quanti del campo elettromagnetico. Ogni tipo di campo ha le sue caratteristiche particelle di campo. La tabella 6 riporta una lista delle particelle associate alle quattro forze fondamentali.

Una forza che si esercita mediante uno scambio di particelle è una *forza di scambio*: per esempio, la forza fra due nucleoni in un nucleo agisce per scambio di pioni. In questo caso i pioni, insieme ad altri mesoni, possono agire da particelle di campo associate con l'interazione forte che si esercita fra i nucleoni.

Ma come può una particella, diciamo un protone, emettere un'altra particella con massa non nulla e rimanere ancora un protone? Questo processo apparentemente violerebbe la legge di conservazione dell'energia. La soluzione del problema risiede nella forma energia-tempo delle relazioni di indeterminazione. Il principio di indeterminazione rappresenta un limite basilare per la nostra capacità di misurare un sistema. Se infatti osserviamo un sistema durante un intervallo di tempo Δt abbiamo un fattore di incertezza ΔE nella valutazione della sua energia, di valore minimo, secondo l'equazione 7 del capitolo 50, dato da

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi\,\Delta t}. \qquad (1)$$

Non riusciremo mai a conoscere il valore dell'energia di un sistema con un'incertezza minore di questo valore ΔE se non eseguiremo la misurazione per un intervallo di tempo maggiore di Δt. Se la durata della nostra osservazione sarà molto breve, l'incertezza nella valutazione dell'energia a riposo di un protone può essere almeno pari all'energia a riposo di un pione, come è dimostrato dall'esempio che segue.

Esempio 2 (*a*) Qual è il massimo intervallo di tempo durante il quale possiamo misurare l'energia a riposo di un protone con un'incertezza pari all'energia a riposo di un pione? (*b*) Qual è la massima distanza che il pione può percorrere in questo intervallo?

Soluzione (*a*) Affinché l'incertezza nella misura dell'energia a riposo di un protone risulti $\Delta E = m_\pi c^2$, la durata dell'osservazione, per l'equazione 1, non deve superare

$$\Delta t = \frac{h}{2\pi\,\Delta E} = \frac{h}{2\pi m_\pi c^2}$$
$$= \frac{4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}}{(2\pi)(140\ \text{MeV})} = 4.7 \times 10^{-24}\text{s}.$$

Entro un intervallo di tempo minore di 4.7×10^{-24} s, un protone può emettere e assorbire un pione senza che si possa rilevare una violazione della legge di conservazione dell'energia.

(*b*) Ammettendo che il pione viaggi a una velocità prossima a quella della luce, la massima distanza d che riesce a percorrere entro quell'intervallo è

$$d = c\,\Delta t = (3.00 \times 10^8\ \text{m/s})(4.7 \times 10^{-24}\ \text{s})$$
$$= 1.4 \times 10^{-35}\ \text{m} = 1.4\ \text{fm}.$$

Questa distanza definisce il *raggio d'azione* della forza nucleare. Due nucleoni più vicini fra loro di circa 1.4 fm possono interagire con scambio di pioni. Se sono più distanziati, lo scambio di pioni non può verificarsi, e non si esercita fra di essi alcuna forza nucleare.

56-3 LEGGI DI CONSERVAZIONE

Ci troveremmo in serie difficoltà se dovessimo analizzare i processi fisici senza l'ausilio delle leggi di conservazione dell'energia, della quantità di moto e del suo momento. Queste leggi ci aiutano a comprendere le ragioni per cui certi eventi possono verificarsi, come nel caso delle collisioni che abbiamo esaminato nel capitolo 10. Ci consentono anche di capire perché certi processi, quelli appunto che violano le leggi di conservazione, non siano mai stati osservati. Sono leggi in un certo senso empiriche, dedotte dall'osservazione dei processi fisici e rigorosamente verificate in accurate esperienze di laboratorio. Da un altro punto di vista ci rivelano aspetti fondamentali delle leggi naturali.

Un esempio di legge di conservazione è la legge di conservazione della carica elettrica. Osservando i risultati di molti processi, siamo indotti a formulare questa legge: in qualsiasi processo, il totale netto della carica elettrica del sistema non può variare. Ciò equivale ad affermare che la carica elettrica netta presente all'inizio di una reazione o di un decadimento deve essere uguale alla carica netta presente alla fine della reazione o del decadimento. Nel corso di ripetute e rigorose esperienze di laboratorio non è mai stata constatata alcuna violazione di questa legge (vedere il paragrafo 27-6).

Conservazione del numero leptonico

Nel corso di processi di reazione e decadimento di particelle fondamentali osserviamo abitualmente certi tipi di eventi, ma non riusciamo a evidenziare altri tipi di eventi, ad essi apparentemente correlati, che ci aspetteremmo verificarsi. Quando ciò accade, nasce il sospetto che stia agendo qualche legge di conservazione finora ignota, che permette il primo tipo di eventi ma vieta il secondo. Ad esempio, si può generare un neutrino elettronico quando un protone cattura un elettrone:

$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e.$$

Da questo processo escono sempre dei neutrini, ma non osserviamo mai antineutrini. Inoltre la reazione produce sempre neutrini di elettroni, mai neutrini di muoni o di particelle tau.

Per giustificare il mancato verificarsi di certi tipi di eventi è invocata una legge di conservazione del *numero leptonico*, simile a quella relativa alla carica elettrica. A ogni leptone attribuiamo un numero leptonico $L = +1$, e a ogni antileptone $L = -1$. Tutte le altre particelle hanno numero leptonico $L = 0$. La legge di conservazione del numero leptonico stabilisce che:

In qualsiasi processo, ciascuno dei numeri leptonici L_e per leptoni tipo-elettrone, L_μ per leptoni tipo-muone e L_τ per leptoni tipo-tau deve rimanere costante.

Per quanto finora ne sappiamo, la legge di conservazione del numero leptonico è rigorosamente valida: in tutte le accurate esperienze di laboratorio alle quali è stata sottoposta, non è infatti mai stata constatata alcuna violazione di questa legge.

Nel processo di cattura di un elettrone, assegniamo all'elettrone e al neutrino tipo-elettrone un numero leptonico tipo-elettrone $L_e = +1$, mentre il protone e il neutrone hanno $L_e = 0$. Questo processo viene ad avere $L_e = +1$ sia a sinistra che a destra, rispettando così la legge di conservazione del numero leptonico. Se invece fosse stato generato un *anti*neutrino tipo-elettrone, a destra si verrebbe a trovare $L_e = -1$, violando così la legge. Questo spiega perché non riusciamo mai a osservare questo tipo di processo. Se poi si fosse generato un altro tipo di neutrino, ad esempio tipo-muone, il numero leptonico L_e sarebbe passato da +1 a 0 nel corso del processo; inoltre, il numero leptonico tipo-muone L_m sarebbe passato da 0 a +1, dando luogo a una doppia violazione della legge di conservazione del numero leptonico: di fatto, neanche questo tipo di processo è stato mai osservato.

Grazie alla legge di conservazione del numero leptonico è stato possibile interpretare molti risultati sperimentali. Anche questa legge, come le altre, è di grande aiuto nell'analisi di reazioni e decadimenti.

Esempio 3 Analizzare il decadimento di un muone sotto l'aspetto della conservazione del numero leptonico.

Soluzione Assegniamo il rispettivo numero leptonico a ciascuna delle particelle che partecipano al decadimento:

	$\mu^- \rightarrow$	$e^- +$	$\bar{\nu}_e +$	ν_μ
L_e:	0	+1	−1	0
L_e:	+1	0	0	+1

Si noti che ai leptoni tipo-elettrone è assegnato un numero leptonico tipo-muone $L_\mu = 0$ e a quelli tipo-muone un $L_e = 0$. Come possiamo constatare, nel corso del decadimento rimangono invariati $L_e = 0$ ed $L_\mu = +1$, rispettando così la legge di conservazione dei numeri leptonici. Questo spiega perché fra i prodotti di decadimento si possa trovare un antineutrino tipo-elettrone e un neutrino tipo-muone, ma mai, ad esempio, un neutrino tipo-elettrone e un antineutrino tipo-muone.

 ISBN 88-408-0777-2

Conservazione del numero barionico

Anche per i barioni vale un'analoga legge di conservazione. A ogni barione, quali i protoni o i neutroni, assegniamo un numero barionico $B = +1$, mentre agli antibarioni, come gli antiprotoni, diamo $B = -1$. La legge di conservazione del numero barionico stabilisce che:

In qualsiasi processo, il numero barionico totale deve rimanere costante.

Non risulta finora che sia stata osservata alcuna violazione a questa legge. (Si noti peraltro che talune speculazioni teoriche, le GTU citate al paragrafo 56-1, ipotizzano che il protone possa decadere in particelle non-barioniche, infrangendo in tal modo la legge di conservazione del numero barionico. Ma questo evento non è finora stato osservato: se ciò avvenisse, la legge di conservazione del numero barionico dovrebbe essere conseguentemente cambiata.)

Consideriamo ad esempio la reazione in cui vengono generati antiprotoni da un fascio di protoni che urta un bersaglio di protoni:

$$\begin{array}{rll} & \mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow & \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \\ B\text{:} & +1 + 1 & +1 + 1 + 1 - 1 \end{array}$$

In questa reazione, il numero barionico netto vale + 2 sia a sinistra sia a destra.

A differenza di quanto accade per i leptoni, esiste soltanto un tipo di numero barionico. La legge di conservazione del numero barionico è una versione più generale della regola che abbiamo usato nell'analisi dei processi nucleari ai capitoli 54 e 55; avevamo allora mantenuto costante in tutti i tipi di decadimento o reazione il numero totale (neutroni + protoni), ciò che equivale, poiché protoni e neutroni sono barioni, a mantenere costante il numero barionico.

Mentre sono state scoperte leggi di conservazione per due tipi di particelle (i leptoni e i barioni), non ne esistono per i mesoni. Ad esempio, in una reazione di protoni contro protoni, può essere generato qualsiasi numero di mesoni (purché le particelle incidenti abbiano energia sufficiente):

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{n} + \pi^{+},$$
$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \pi^{+} + \pi^{-}$$
$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{n} + \pi^{+} + \pi^{0} + \pi^{0}.$$

In tutti questi processi è da notare la conservazione della carica elettrica.

La stranezza

Vi sono altri processi difficili da comprendere, se ci limitiamo a considerare le leggi di conservazione che abbiamo enunciato finora. Esaminiamo ad esempio il gruppo dei kaoni, o mesoni K, simili ai pioni sotto molti punti di vista. Poiché non esistono leggi di conservazione per i mesoni, dovremmo aspettarci che da una reazione possa prodursi qualsiasi numero di kaoni. Troviamo invece che può accadere: o i kaoni sono generati a coppie, come ad esempio

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \mathrm{K}^{+} + \mathrm{K}^{-},$$
$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{n} + \mathrm{K}^{+} + \overline{\mathrm{K}}^{0},$$

oppure viene generato un solo kaone, ma sempre accompagnato da un'altra «strana» particella, ad esempio, una Λ^0

$$\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{p} + \Lambda^{0} + \mathrm{K}^{+}.$$

Per spiegare il fatto che soltanto questi due tipi di processo sono osservabili, con esclusione di altri che pure sembrerebbero compatibili con le leggi di conservazione che abbiamo finora illustrato, è stato introdotto un nuovo numero quantico, chiamato *stranezza*, che segue una nuova legge di conservazione, la *conservazione della stranezza*. A due kaoni (K^+ e K^0) è attribuito un valore di stranezza $S = +1$, mentre gli altri due (K^- e $\overline{\mathrm{K}}^0$) hanno $S = -1$. Invece tutte le particelle «non-strane» (quali ad esempio il protone, il neutrone e l'elettrone) hanno $S = 0$. Le reazioni in cui si genera una coppia di kaoni hanno perciò $S = 0$ sia a sinistra (solo particelle non-strane), sia a destra (somma algebrica nulla). E poiché il barione Λ^0 ha $S = -1$, anche la reazione che genera $\Lambda^0 + \mathrm{K}^+$ rispetta la legge di conservazione della stranezza, che è nulla in entrambi i membri.

A esaminare il decadimento delle particelle strane, sembra venir meno la conservazione della stranezza. Il kaone può decadere in due pioni (che sono particelle non-strane), come ad esempio

$$\mathrm{K}^{+} \rightarrow \pi^{+} + \pi^{0}.$$

Qui passiamo da $S = +1$ all'inizio a $S = 0$ alla fine, con evidente violazione della legge di conservazione della stranezza. Ma un'indicazione sul modo di risolvere questa difficoltà ci viene data dalla misurazione della vita media di questo decadimento, che risulta essere intorno a 10^{-8} s. Kaoni e pioni sono particelle sensibili alla forza forte: sarebbe quindi lecito aspettarsi una vita media tipica dell'interazione forte (tav. 1), dell'ordine di 10^{-23} s. La troviamo invece più lunga di circa 15 ordini di grandezza! Che cosa può essere re-

sponsabile di tanto rallentamento del processo?

Un'altra indicazione è data dal modo più usuale di decadimento del barione K^+:

$$K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu,$$

un processo di interazione debole per il quale è assai verosimile una vita media dell'ordine di 10^{-8} s. Apparentemente dunque *l'interazione debole può far variare la stranezza* di una unità. In entrambi questi processi di decadimento del kaone il valore di S è variato di 1. Anche se non compaiono i neutrini che usualmente caratterizzano i processi a interazione debole, il decadimento $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ avviene in regime di interazione debole. In questo caso, la violazione della conservazione della stranezza fa escludere che si tratti di una reazione a interazione forte (che è rigorosamente conservativa per la stranezza): deve quindi essere un decadimento a interazione debole.

E l'interazione elettromagnetica conserva la stranezza? Per rispondere a questa domanda, sono stati esaminati possibili decadimenti elettromagnetici che non conservano la stranezza, come $\Lambda^0 \rightarrow n + \gamma$. Decadimenti di questo tipo non sono mai stati ottenuti, cosicché possiamo concludere che *l'interazione elettromagnetica conserva la stranezza.*

In conclusione, queste sono le regole della legge di conservazione della stranezza:

In processi governati da interazione forte o elettromagnetica, il valore totale della stranezza deve rimanere costante. In processi governati dall'interazione debole, il valore totale della stranezza rimane costante oppure cambia di una unità.

Esempio 4 Il barione Ω^- ha $S = -3$. (*a*) Si vuole produrre Ω^- usando un fascio di K^- incidenti su protoni. Quali altre particelle saranno generate in questa reazione? (*b*) Come potrebbe decadere Ω^-

Soluzione (*a*) Queste reazioni normalmente si svolgono soltanto in regime di interazione forte, che conserva la stranezza. Consideriamo questa reazione:

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + ?$$

A sinistra abbiamo $S = -1$, $B = +1$ e $Q = 0$. A destra $S = -3$, $B = +1$ e $Q = -1$. Dobbiamo perciò completare il secondo membro con particelle che abbiano $S = +2$, $B = 0$ e $Q = +1$. Scorrendo le tabelle dei mesoni e barioni, troviamo che possiamo soddisfare queste esigenze con K^+ e K^0, ottenendo

$$K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$$

(*b*) Ω^- non può decadere per interazione forte, dato che non sono disponibili stati finali con $S = -3$. Deve perciò decadere in particelle aventi $S = -2$ per interazione debole, che può far variare di 1 il valore di S. Una delle particelle generate deve essere un barione, per conservare il numero barionico. Abbiamo due possibili soluzioni:

$$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^- \quad \text{e} \quad \Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$$

56-4 IL MODELLO A QUARK

Decadimenti e processi che interessano mesoni e barioni sono soggetti a leggi di conservazione riguardanti due grandezze: la carica elettrica Q e la stranezza S. Viene perciò spontaneo chiedersi se vi siano relazioni fra la carica elettrica e la stranezza di una particella. In un gruppo di particelle che presentino qualche affinità (ad esempio i mesoni a spin 0 o i barioni a spin $^1/_2$), sarà rappresentata qualsiasi combinazione di Q ed S, o soltanto alcune? Il fatto che esista soltanto un numero ridotto di combinazioni porta a concludere che le particelle siano costituite, secondo un certo insieme di regole, da unità più fondamentali che presentano certi valori di carica elettrica e di stranezza.

Per illustrare questa teoria, costruiamo un diagramma a griglia mettendo la carica elettrica su un asse e la stranezza sull'altro. Piazziamo le particelle su questa griglia in funzione dei rispettivi valori di Q e di S. La figura 3 mostra le griglie riguardanti i mesoni a spin 0, i barioni a spin 1/2 e i barioni a spin 3/2. La regolarità di questi grigliati suggerisce che queste particelle siano formate da unità più fondamentali.

Nel 1964 Murray Gell-Mann e George Zweig, partendo da questa constatazione, giunsero contemporaneamente a formulare una teoria secondo la quale barioni e mesoni sarebbero formati da tre tipi di unità fondamentali, che ben presto divennero noti sotto il nome di *quark*. La tabella 7 riporta le proprietà dei tre tipi di quark, contraddistinti dai nomi convenzionali *su* (simbolo «u»), *giù* («d») e *strano* («s»).

Secondo questo modello, i mesoni sono costituiti da un quark e da un antiquark, i barioni invece da tre quark. Consideriamo la combinazione $u\bar{d}$ di un quark su e di un antiquark giù, che ha somma algebrica degli spin uguale a 0. Il valore della carica del quark su (in unità *e*) è +2/3, quello dell'antiquark giù è +1/3 (opposto al valore −1 3 per il quark giù). Per la combinazione $u\bar{d}$ risulta $Q = +1$, $S = 0$ (entrambi i quark hanno $S = 0$), e $B = 0$ (somma dei numeri barionici opposti di un quark e un antiquark). Questa combinazione ha gli stessi numeri quantici del mesone π^+. Esaminando tutti i possibili accoppiamenti di questi tre ti-

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 7 PROPRIETÀ DI TRE QUARK

Quark	*Simbolo*	*Antiquark*	*Carica*[a] *(e)*	*Spin* $(h/2\pi)$	*Numero barionico*[a]	*Stranezza*[a]
Su	u	$\bar{u}$	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0
Giù	d	$\bar{d}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	0
Strano	s	$\bar{s}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$	−1

[a] I valori per la carica, il numero barionico e la stranezza sono riferiti ai quark: i valori per gli antiquark hanno segno opposto.

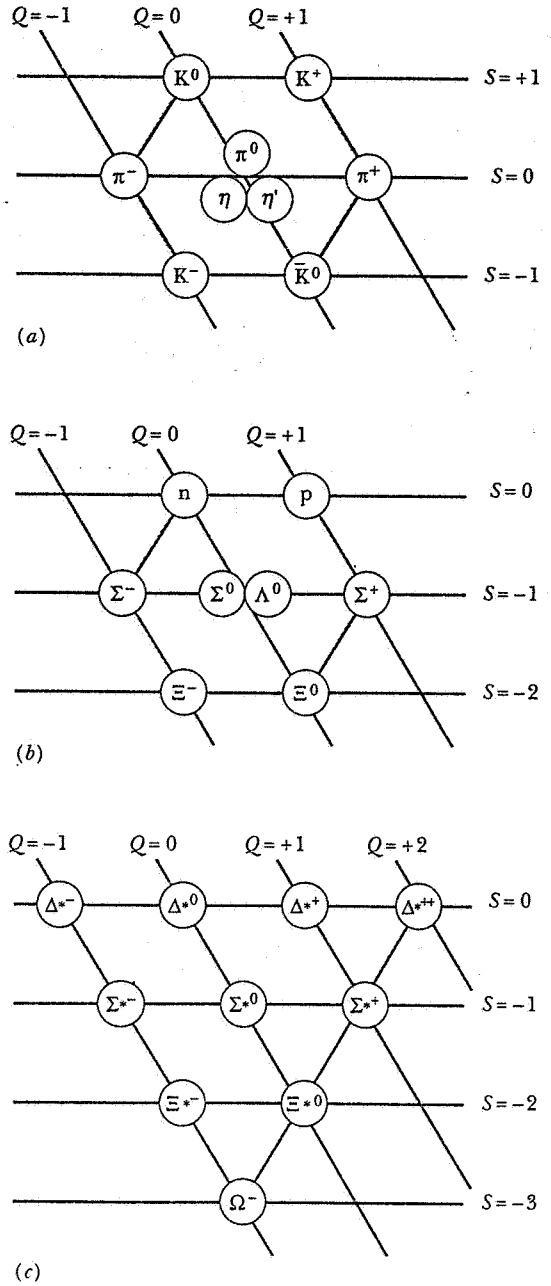


Figura 3 Tavole riguardanti (*a*) i mesoni a spin 0, (*b*) i barioni a spin 1/2, (*c*) i barioni a spin 3/2. Ogni particella occupa un nodo di una griglia che rappresenta la sua stranezza S e la sua carica elettrica Q. Le linee di uguale carica elettrica sono state tracciate obliquamente per accentuare la simmetria della figura.

pi di quark e antiquark, troviamo le nove combinazioni, elencate in tabella 8, che corrispondono esattamente alle combinazioni di carica elettrica e stranezza proprie dei mesoni a spin 0, come si vede in figura 4*a*.

I barioni sono costituiti da tre quark, la combinazione più semplice che dà $B = +1$. Sono dieci le differenti combinazioni che si possono fare con tre quark, elencate nella tabella 9. Le figure 4*b* e 4*c* mostrano i diagrammi delle combinazioni ammissibili aventi rispettivamente spin 1/2 e spin 3/2.

Notevoli sono le analogie fra le figure 3 e 4. Manipolando soltanto tre quark siamo riusciti a ricostruire i numeri quantici Q, S e B di tutte queste particelle. Il modello a quark non si limita però a tracciare questi semplici schemi. Dobbiamo pensare a questi diagrammi come a sistemi per organizzare particelle aventi proprietà analoghe, proprio come il sistema periodico ci consente di organizzare gli atomi aventi proprietà affini. La tavola del sistema periodico degli elementi è un prodotto della teoria atomica, che serve a calcolare le proprietà degli atomi ben oltre quanto si può dedurre dalla loro posizione geometrica relativa. Analogamente il modello dei quark permette di calcolare le proprietà delle particelle, come le masse, i momenti di dipolo magnetico, le caratteristiche di decadimento, le vite medie e i prodotti di reazione. La concordanza verificata fra i dati misurati e quelli calcolati ha rappre-

TABELLA 8 COMBINAZIONI QUARK – ANTIQUARK

Combinazione	*Carica (e)*	*Spin* $(h/2\pi)$	*Numero barionico*	*Stranezza*
$u\bar{u}$	0	0,1	0	0
$u\bar{d}$	+1	0,1	0	0
$u\bar{s}$	+1	0,1	0	+1
$d\bar{u}$	−1	0,1	0	0
$d\bar{d}$	0	0,1	0	0
$d\bar{s}$	0	0,1	0	+1
$s\bar{u}$	−1	0,1	0	−1
$s\bar{d}$	0	0,1	0	−1
$s\bar{s}$	0	0,1	0	0

sentato un successo spettacolare per la teoria del modello a quark. Infatti tutte le particelle conosciute (che si contano ormai a centinaia!) sono state correttamente descritte e inquadrate in questo modello, con l'ausilio di alcuni quark aggiuntivi dei quali parleremo più avanti.

L'aspetto più singolare del modello a quark è rappresentato dalle cariche elettriche frazionarie. Tutte le particelle scoperte finora hanno cariche elettriche il cui valore può essere espresso da multipli interi della carica fondamentale *e*. Nessuno ha mai visto una particella con carica elettrica frazionaria. In effetti, nessuno ha mai visto un quark libero, nonostante gli immani sforzi sperimentali intesi a scovarlo. Forse i nostri acceleratori di particelle non hanno ancora energia sufficiente per produrre un quark libero. È stato perfino ipotizzato che l'esistenza di quark liberi sia vietata dalle leggi naturali, e che quindi dobbiamo accontentarci di osservare quark legati in mesoni e barioni.

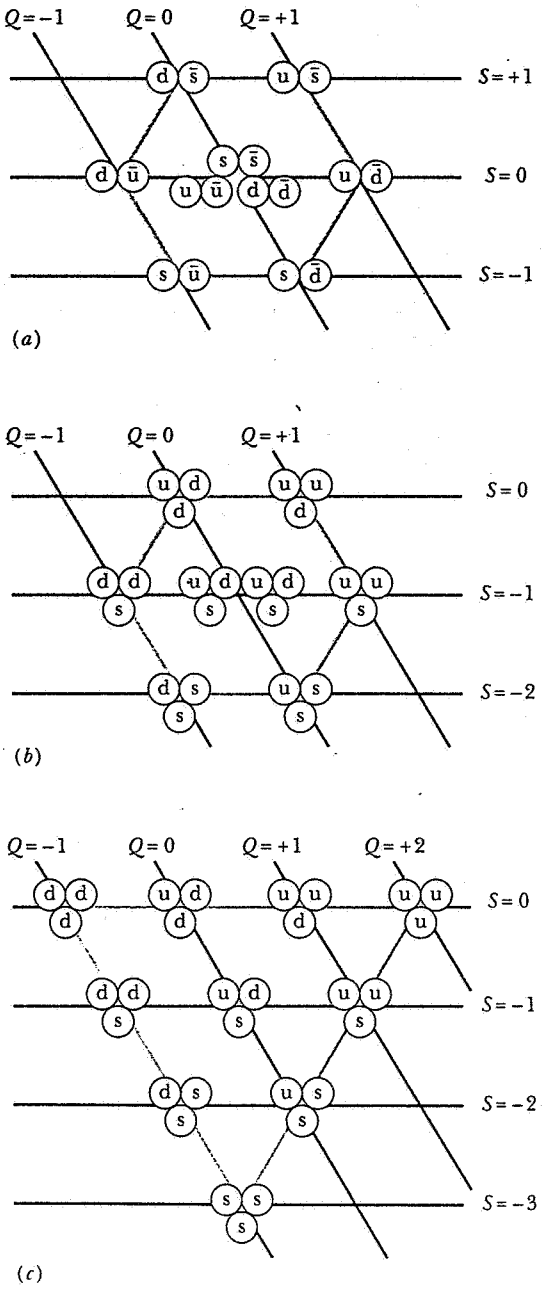


Figura 4 Tavole riguardanti (*a*) le combinazioni a spin 0 di un quark e di un antiquark, (*b*) le combinazioni a spin 1 2 di tre quark, (*c*) le combinazioni a spin 3/2 di tre quark. Confrontare con la figura 3.

Ma, anche se nessuno ha mai visto un quark isolato, è stato possibile osservare singoli quark *legati*. Esperimenti di diffusione che penetrano nelle profondità dei nucleoni hanno rivelato tre oggetti puntiformi che sembrano possedere valori di 1/2 per lo spin e di + 2/3 o −1/3 per la carica elettrica. Questi esperimenti forniscono una prova diretta dell'esistenza di particelle simili ai quark all'interno dei nucleoni.

Le forze tra quark

Che cosa tiene uniti i quark all'interno di un mesone o di un nucleone? È la versione più recente e fondamentale della forza forte, sviluppata mediante lo scambio di particelle chiamate *gluoni*. Così come la forza elettromagnetica agente fra particelle cariche può esser vista come uno scambio di fotoni, la forza forte tra quark è realizzata da uno scambio di gluoni. Possiamo quindi immaginare un nucleone come l'insieme di tre quark che si scambiano fra loro dei gluoni. È possibile, con metodi indiretti, misurare la porzione dovuta ai quark della quantità di moto di un nucleone, che risulta essere all'incirca del 50%. Il resto deve essere imputabile ai gluoni che vengono scambiati. Il quadro risultante dell'interno di un nucleone è quello di tre quark che «nuotano in un mare» di gluoni scambiati.

La forza tra quark ha due proprietà poco comuni. (*a*) È richiesta un'energia enorme (forse infinita) per allontanare fra loro due quark a una distanza maggiore della dimensione di un nucleone o di un mesone (circa 1 fm). Questa può essere la ragione per la quale non si è mai potuto vedere un quark libero. Quando cerchiamo di pompare energia in un nucleone, questa crea effettivamente una coppia quark-antiquark. L'antiquark si combina con uno dei quark per formare un mesone, ciò che va d'accordo con le osservazioni effettuate: quando facciamo urtare due nucleoni ad alta energia, otteniamo di ritorno i nostri nucleoni (o altri barioni), con l'aggiunta di qualche mesone in più. Quanta più energia ci mettiamo, tanti più mesoni ricaviamo, ma non compare mai alcun quark libero. (*b*) Paradossalmente, all'interno del nucleone o del mesone i quark sembrano muoversi liberamente. A distanze

ISBN 88-408-0777-2

TABELLA 9 COMBINAZIONI DI TRE QUARK

Combinazione	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Numero barionico*	*Stranezza*
uuu	+2	$\frac{3}{2}$	+1	0
uud	+1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	0
udd	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	0
uus	+1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−1
uss	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−2
uds	0	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−1
ddd	−1	$\frac{3}{2}$	+1	0
dds	−1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−1
dss	−1	$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	+1	−2
sss	−1	$\frac{3}{2}$	+1	−3

molto molto piccole (inferiori alla dimensione di un nucleone) la forza fra i quark svanisce.

Si può capire questo comportamento poco ortodosso di quark e gluoni facendo un paragone con l'elettromagnetismo. Due particelle cariche interagiscono fra loro per scambio di fotoni. Ma il fotone non porta con sé alcuna carica elettrica, e quindi l'interazione fra la particella carica e il fotone di scambio non implica l'intervento di fotoni addizionali. Un quark, invece, può emettere un gluone e interagire con esso. Questa forza tra quark e gluone può generare altri gluoni. Quando interagisce con un altro elettrone, un elettrone può emettere un fotone restando pur sempre un elettrone. Non deve sacrificare la sua «elettricità» (ossia cedere la sua carica elettrica) per emettere il fotone. Un quark, invece, cede al gluone emesso una quota della sua «fortitudine», che i fisici chiamano *colore*. Nell'interazione fra quark, il colore ha la stessa funzione della carica elettrica nell'interazione fra particelle cariche. Un fotone non sottrae carica elettrica, ma un gluone si porta via del colore, e così facendo modifica il colore residuo nel quark che lo ha emesso. In realtà il quark sparge il suo colore all'interno di una sfera che ha le dimensioni del nucleone (il raggio d'azione dei gluoni), e in definitiva l'interazione fra quark risulta molto indebolita a distanze di questo ordine.

I fisici delle particelle hanno scelto nomi divertenti e suggestivi per descrivere le particelle fondamentali e le loro proprietà. Nomi come quark, stranezza, gluone o colore hanno soltanto il significato di etichette convenzionali. Così i gluoni forniscono la colla che «agglutina» i quark fra loro, ma non ha niente a che fare con qualsiasi «glutine» di uso comune. E il «colore» diffuso da quark e gluoni non ha un aspetto simile ad alcun colore di nostra conoscenza. Ma rimane più facile individuare e distinguere queste proprietà se conferiamo loro nomi che le rendano familiari con la vita di tutti i giorni.

Ancora altri quark

In esperimenti condotti simultaneamente nel 1974 al Laboratorio Nazionale Brookhaven di New York, e in California al Centro dell'Acceleratore Lineare di Stanford, fu rivelato un mesone fuori dell'ordinario, dotato di un'energia a riposo quasi tripla di quella di un protone. Era lecito aspettarsi che questo nuovo mesone, chiamato ψ, dovesse decadere in mesoni più leggeri entro un tempo caratteristico dell'interazione forte, dell'ordine di 10^{-23} s. Si dovette invece constatare che esso decadeva in circa 10^{-20} s, vita media corrispondente piuttosto a un'interazione elettromagnetica (tav. 1). Di più, i suoi prodotti di decadimento non erano mesoni, ma un elettrone e un positrone, altro indizio di un processo elettromagnetico.

Perché dunque il decadimento rapido proprio dell'interazione forte deve essere interdetto a questa particella, costretta a rallentare di ben tre ordini di grandezza? Questo fenomeno è stato discusso nel caso della stranezza, il nuovo numero quantico introdotto appunto per spiegare certi decadimenti troppo lenti. Avevamo allora attribuito questi rallentamenti a una violazione della legge di conservazione della stranezza.

Analogamente, ammettiamo che il rallentamento del decadimento di ψ sia dovuto alla violazione della legge di conservazione di una nuova proprietà, detta *incanto* o *incantesimo*: da cui l'appellativo di *incantato* per il quark interessato, simbolo c (dall'inglese *charm*). Secondo questa interpretazione, il mesone ψ sarebbe formato da un quark c e dal suo antiquark $\bar{c}$. Il quark c ha carica elettrica + 2/3. Come al quark strano è stato assegnato un numero quantico di stranezza $S = -1$, al quark incantato è assegnato un incantesimo $C = +1$. Il decadimento del mesone ψ è rallentato dal fatto che il quark c deve decadere in altri quark (u, d oppure s), che hanno tutti $C = 0$. Il decadimento porterebbe a una violazione

della legge di conservazione dell'incantesimo e non può quindi avvenire in regime di interazione forte, che conserva l'incantesimo.

Nel 1977 analoga scoperta fu fatta all'Acceleratore del Laboratorio Nazionale Fermi presso Chicago. Anche qui fu scoperto un mesone pesante (in questo caso, dieci volte l'energia a riposo del protone), che avrebbe dovuto decadere ad altri mesoni entro tempi caratteristici dell'interazione forte, ma decadeva invece in una coppia $e^- + e^+$ facendo registrare tempi dell'ordine di 10^{-20} s. In questo caso il decadimento era ancora rallentato per aggirare un'altra legge di conservazione riguardante un altro tipo di quark chiamato *basso* o *bello* (in inglese *bottom* o *beauty*), simbolo b, dotato di carica elettrica $Q = -1/3$. Questo nuovo mesone, chiamato Y (ipsilon) si ritiene sia costituito dalla combinazione $b\bar{b}$. Se assegniamo al quark b un nuovo numero quantico che rappresenta la «bellezza», possiamo affermare che il decadimento è rallentato dal fatto che il quark b deve trasformarsi in quark più leggeri che non hanno questa proprietà: la violazione della legge di conservazione della bellezza è la causa del rallentamento.

Una nuova simmetria

La materia ordinaria è composta di protoni e neutroni, che sono a loro volta formati soltanto da quark u e d. Essa comprende anche elettroni; inoltre, nel decadimento beta della materia ordinaria, fra i prodotti della conversione di protoni in neutroni o di neutroni in protoni, vediamo comparire, oltre a positroni o elettroni, anche neutrini tipo elettrone.

Possiamo perciò ricostruire tutto il mondo fisico e i fenomeni che osserviamo comunemente impiegando due coppie di particelle fondamentali: i quark u e d e i leptoni e^- e ν_e. Fra i due componenti di ogni coppia, la carica elettrica Q differisce di una unità: + 2/3 e $-1/3$ per i quark, -1 e 0 per i leptoni.

Se sperimentiamo a energie un po' più elevate, troviamo nuovi tipi di particelle: un nuovo paio di leptoni (μ^- e il suo neutrino ν_μ), e un nuovo paio di quark (c ed s). Anche questa volta, fra i due componenti di ogni coppia la carica elettrica Q differisce di una unità.

Operando a energie ancora maggiori, troviamo una nuova coppia di leptoni (τ e ν_τ) e un nuovo quark (b). Si pensa che il quark b debba avere un partner, che è chiamato *alto* (in inglese *top* o *truth*, da cui il simbolo t): e se il quark t ha la carica presumibile di + 2/3, anche quest'ultimo paio di quark sarà simile agli altri.* Per riuscire a scoprire il quark t sono state fatte ricerche intese a rivelare nuovi mesoni con energia a riposo fino a 90 volte quella del protone. Nonostante l'esito negativo di queste ricerche, i fisici sono certi della sua esistenza e confidano che sarà rivelato non appena si disporrà di energia sufficiente allo scopo.

In conclusione, sembra accertato che le particelle veramente fondamentali, quark e leptoni, si presentano a coppie, e che una coppia di quark e una coppia di leptoni possono essere visti come componenti di una «generazione», secondo questo schema:

$$\text{Prima generazione:} \quad \begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$\text{Seconda generazione:} \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$

$$\text{Terza generazione:} \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

Le proprietà di questi sei quark e leptoni sono indicate nell'appendice F.

A questo punto può nascere il sospetto che la ricerca sia entrata in una specie di voragine senza fondo. Verremo forse in futuro a scoprire centinaia di quark e leptoni «fondamentali», cosicché, invece di semplificare, ci troveremo a dover concepire strutture sempre più complesse? È forse da aspettarsi che acceleratori sempre più potenti rivelino nuove generazioni di leptoni e quark sempre più pesanti, l'unico limite al loro moltiplicarsi essendo rappresentato dalla mole dell'energia di cui potremo disporre? Per rispondere a questi dubbi, passeremo a descrivere le scoperte fatte all'estremità superiore della scala delle energie, ben oltre quelle disponibili negli acceleratori di laboratorio: andremo a scrutare i primissimi istanti dopo la nascita dell'universo, e potremo convincerci che la lista di quark e leptoni che abbiamo finora compilato è da ritenersi realmente completa.

* Questa doppia terminologia per i quark tipo «b» e «t» si deve a una modifica in tempi successivi, che ha salvato le iniziali corrispondenti ai simboli in uso:

in luogo di «bottom» si usa «beauty»
in luogo di «top» si usa «truth».

In italiano si usano i termini «bellezza» e «verità» rispettivamente [N.d.T.]

ISBN 88-408-0777-2

Esempio 5 Analizzate questi processi con riguardo ai quark contenuti:

(*a*) $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$,
(*b*) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$,
(*c*) $K^- + p \rightarrow \Omega^- + K^+ + K^0$.

Soluzione (*a*) Usando le figure 3 e 4 per trovare il contenuto in quark di ogni particella, possiamo riscrivere il decadimento in questa forma

$$uud \rightarrow udd + e^+ + \nu_e.$$

Cancellando da entrambe le parti il paio di quark ud, troviamo

$$u \rightarrow d + e^+ + \nu_e.$$

Il quark u si trasforma in un quark d per decadimento beta.

(*b*) Il contenuto in quark è

$$sss \rightarrow uds + s\bar{u}.$$

Eliminando il paio comune ss, il processo netto risulta

$$s \rightarrow u + d + \bar{u}.$$

Ossia, il quark s si è trasformato in un quark d, e dall'energia di decadimento è stata generata una coppia.

(*c*) Sostituendo ancora alle particelle il rispettivo contenuto in quark, troviamo

$$s\bar{u} + uud \rightarrow sss + u\bar{s} + d\bar{s},$$

ed eliminando i quark comuni u, d ed s da entrambi i membri, rimangono soltanto:

$$u\bar{u} \rightarrow s\bar{s} + s\bar{s}.$$

Il processo netto consiste nell'annichilazione della coppia, e nella generazione di due coppie a spese dell'energia di reazione.

Questi tre casi sono esempi tipici di processi tra quark. Essi dimostrano che l'interazione debole può trasformare anche singoli quark da un tipo a un altro tipo, mentre l'interazione forte può creare o annientare coppie quark-antiquark, ma non può far cambiare il tipo di un quark.

56-5 LA COSMOLOGIA DEL *BIG BANG*

Dalle origini della storia gli esseri umani hanno formulato teorie sull'origine e sul futuro dell'universo, quel ramo della scienza che ora chiamiamo cosmologia. Fino al secolo scorso, questa disciplina era coltivata soprattutto da filosofi e teologi, poiché non si disponeva di alcun dato sperimentale che potesse costituire la base di una qualsiasi teoria scientifica. Durante questo secolo, due fondamentali scoperte sperimentali hanno aperto la via a una teoria coerente che è ormai accettata da quasi tutti i fisici.

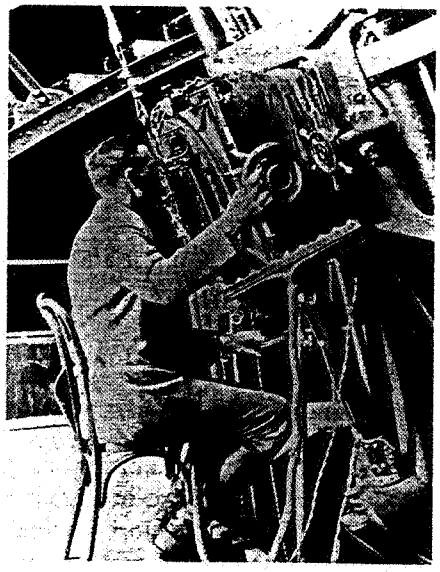


Figura 5 Edwin Hubble (1889-1953) ai comandi del telescopio da 100 pollici sul Monte Wilson, dove condusse la maggior parte delle ricerche che lo portarono a ipotizzare che l'universo sia in fase di espansione.

L'espansione dell'universo

La prima di queste due grandi scoperte fu fatta negli anni '20 dall'astronomo Edwin Hubble (fig. 5). Egli stava studiando quei confusi oggetti celesti dapprima noti come *nebulose*. Essendo riuscito a risolvere le immagini di singole stelle nelle nebulose, Hubble fu in grado di dimostrare che si tratta di galassie simili alla nostra Via Lattea, composte di centinaia di miliardi di stelle. Ma la scoperta più sorprendente fu che quelle galassie si allontanano fra loro e da noi, e che quanto maggiore è la loro distanza, tanto più rapidamente si allontanano. Ossia, se d è la distanza di una galassia dalla Terra (o da qualsiasi altro punto di riferimento nell'universo), e v è la velocità di allontanamento da noi, la legge di Hubble dice che

$$v = Hd, \qquad (2)$$

ove H è un fattore costante noto come *parametro di Hubble*.

Il parametro di Hubble ha le dimensioni dell'inverso di un tempo. Il suo valore può essere ottenuto soltanto per via sperimentale: dobbiamo riuscire a determinare in due modi indipendenti fra loro la distanza di una galassia dalla Terra e la sua velocità relativa alla Terra. La velocità di allontanamento può essere valutata direttamente misurando lo spostamento per effetto Doppler della frequenza della luce proveniente dalla galassia (fig. 6 del cap. 42), ma la scala delle distanze è difficile da determinare (infatti, le prime stime di Hub-

ble erano errate di un fattore 10). Oggi tuttavia disponiamo di una serie di dati fra loro coerenti (fig. 6) che conferma la legge di Hubble e indica per il parametro di Hubble un valore di

$$H = 67 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}},$$

dove il Mpc (megaparsec) è la più usata unità di misura per le distanze su scala cosmica, e vale:

$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{pc} = 3.26 \times 10^6 \text{anni luce}$$
$$= 3.084 \times 10^{19} \text{ km}.$$

Data l'incertezza della stima dell'ordine di grandezza delle distanze cosmiche, il valore numerico del parametro di Hubble è incerto, con valori possibili compresi fra 50 e 100 (km/s)/Mpc.

Nell'ipotesi che l'universo, fin dall'origine, sia andato sempre espandendosi al ritmo attuale, H^{-1} rappresenta l'età dell'universo. Accettando per il parametro di Hubble il valore sopra indicato, verremmo ad attribuire all'universo un'età di 15×10^9 anni, che, tenuto conto del grado di incertezza ammesso per H, può oscillare fra i due valori limite di 10×10^9 e 19×10^9 anni. Ma, come vedremo, l'espansione dell'universo non si è svolta sempre allo stesso ritmo, cosicché l'età effettiva dell'universo è minore di quella risultante dal valore attuale del parametro di Hubble.

La radiazione cosmica di fondo a microonde

Benché diverse altre teorie siano state formulate per spiegare l'espansione dell'universo, quella attualmente favorita è basata sull'affermazione che, se le galassie stanno oggi precipitosamente allontanandosi, esse debbano essere state molto vicine in un tempo remoto. Se facciamo girare all'indietro l'orologio cosmico abbastanza a lungo, troviamo che al suo stato primitivo l'universo consisteva di un insieme di materia e radiazione a una densità così grande da superare ogni immaginazione. Con l'espansione, sia la materia che la radiazione «si raffreddarono»; possiamo immaginare che le lunghezze d'onda dei fotoni radianti siano state «stirate» per effetto dell'espansione. La radiazione riempiva l'intero universo nel suo stato di iniziale compattezza, e continua a riempire l'intero universo in espansione. Ai nostri giorni dovremmo poter ancora captare quella radiazione, raffreddata al punto che nello spettro elettromagnetico la sua componente di maggiore intensità si trova nella fascia delle microonde: la cosiddetta *radiazione cosmica di fondo a microonde*.

Questa radiazione è stata scoperta nel 1965 da Arno Penzias e Robert Wilson dei Laboratori Bell nel New Jersey, mentre stavano provando un'antenna per microonde destinata a satelliti per telecomunicazioni (fig. 7). In qualunque direzione puntassero l'antenna, trovavano sempre un fastidioso sibilo di fondo. A un certo punto si resero conto che stavano proprio vedendo un residuo dell'universo primitivo, e per questa scoperta nel 1978 furono insigniti del premio Nobel per la fisica.

La radiazione di fondo a microonde ha un tipico spettro termico del tipo esaminato ai paragrafi 49-1 e 49-2. La figura 8 mostra alcuni valori dell'intensità della radiazione di fondo misurati per diversi valori della lunghezza d'onda, e si può constatare come siano in

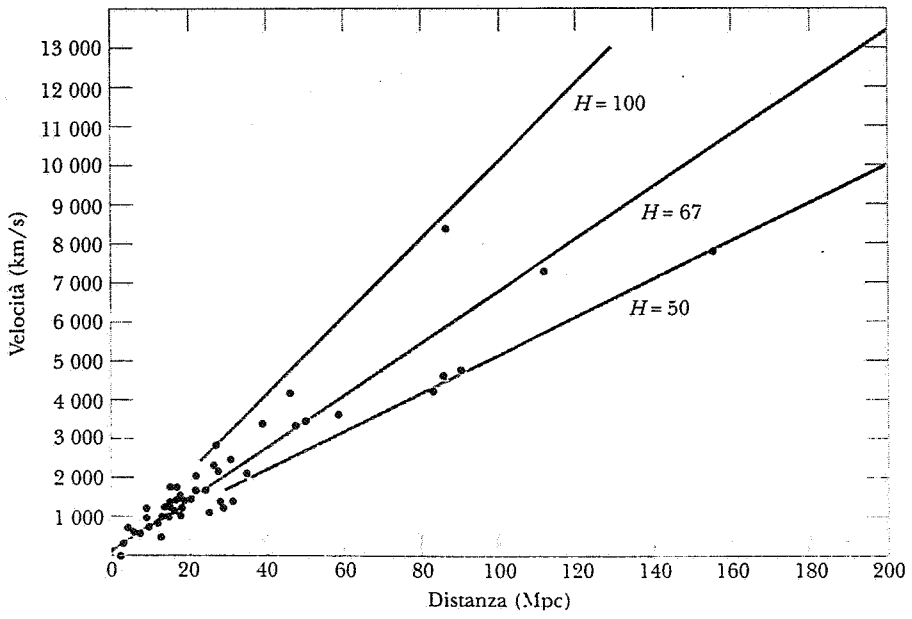


Figura 6 Relazioni fra velocità e distanza per gruppi e agglomerati di galassie. Le linee rette rappresentano la legge di Hubble per diversi valori del parametro H.

ISBN 88-408-0777-2

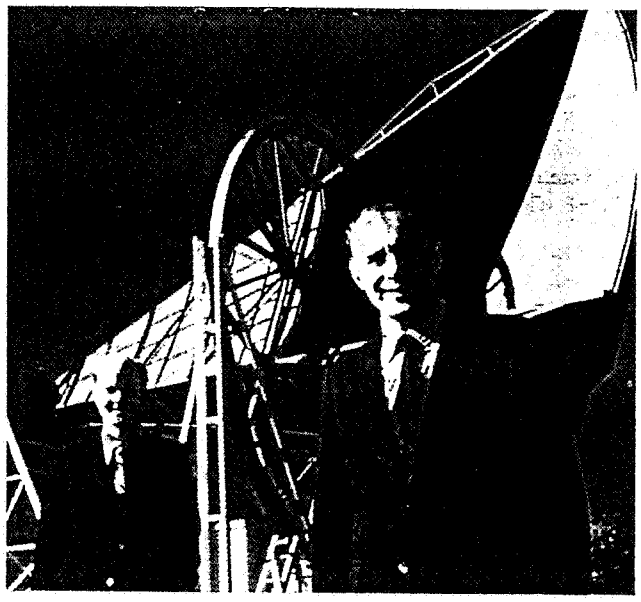


Figura 7 Arno Penzias (a destra) e Robert Wilson: sullo sfondo, la grande antenna «a corna» che consentì di rivelare la radiazione di fondo a microonde.

accordo con il grafico corrispondente a una temperatura di 2.735 K secondo la legge dell'irraggiamento di Planck. Alcuni dei punti sperimentali provengono da recenti misure effettuate da un satellite in orbita, non affette da assorbimento da parte dell'atmosfera.

La misurazione dell'intensità della radiazione di fondo a microonde in diverse direzioni mostra che essa ha una intensità uniforme in qualsiasi direzione; non sembra provenire da alcuna particolare regione dello spazio, ma riempie uniformemente l'intero universo, come c'è da aspettarsi da parte di una radiazione che lo riempiva fin dall'origine. Osservazioni più recenti hanno però rivelato fluttuazioni dell'ordine di 10^{-5} K fra differenti regioni dello spazio. Risultati questi che sono stati interpretati come prova di una disuniformità di distribuzione della materia nell'universo primitivo, che ebbe come conseguenza la condensazione di stelle e galassie.

La densità energetica della radiazione si può ricavare dalla legge dell'irraggiamento di Planck (eq. 6 del cap. 49). La concentrazione quantitativa di questi fotoni di fondo è di circa 400 per cm^3, e la densità di energia intorno a 0.25 eV/cm^3 (grossolanamente corrispondente alla metà dell'energia a riposo di un elettrone per ogni m^3). L'energia media per ogni fotone è dell'ordine di 0.00063 eV, ciò che giustifica il fatto che normalmente non ci accorgiamo della loro presenza.

La cosmologia del *big bang*

La teoria cosmologica che meglio si accorda con queste due scoperte sperimentali (la legge di Hubble e la radiazione di fondo) è la *cosmologia del big bang*. Secondo questa teoria, l'universo ebbe inizio qualcosa come 10 o 20 miliardi di anni or sono in condizioni estreme di densità e temperatura. Non c'erano galassie e neanche agglomerati di materia come la conosciamo ora; il «materiale» dell'universo primitivo era costituito da una grande varietà di particelle e antiparticelle, più radiazione. La densità della materia e della radiazione è funzione della temperatura dell'universo. L'universo, espandendosi, si raffredda, esattamente come un sistema termodinamico che si espande. Se facciamo qualche ipotesi verosimile sul ritmo di espansione, possiamo trovare la relazione esistente fra la temperatura e il tempo trascorso dalla formazione dell'universo:

$$T = \frac{1.5 \times 10^{10}\ \mathrm{s^{1/2} \cdot K}}{t^{1/2}}, \qquad (3)$$

ove la temperatura T è espressa in K e il tempo t in secondi.

La radiazione nell'universo primitivo consisteva di fotoni ad alta energia, la cui energia tipica era dell'ordine di kT, dove k è la costante di Boltzmann e T è la temperatura al tempo t risultante dall'equazione 3. Il processo dominante alle origini dell'universo può essere rappresentato dalla reazione di equilibrio

$$\text{fotoni} \rightleftarrows \text{particella} + \text{antiparticella}.$$

Ossia, i fotoni possono associarsi in una *produzione di coppie* per generare una coppia particella-antiparticella, come ad esempio un elettrone e un positrone oppure un protone e un antiprotone. E viceversa, una particella e la sua antiparticella possono annichilarsi generando fotoni. In ciascuno dei due casi, l'energia totale dei fotoni deve essere almeno uguale all'energia a riposo della particella e dell'antiparticella.

Il nostro scopo nel descrivere l'universo primitivo è comprendere come la materia ordinaria si sia formata dalle particelle e dalla radiazione generate nel big bang. Poiché la materia ordinaria è costituita da nucleoni, consideriamo le reazioni di generazione e di annichilazione di protoni e di neutroni:

$$\gamma + \gamma \rightleftarrows \mathrm{p} + \bar{\mathrm{p}} \quad \text{e} \quad \gamma + \gamma \rightleftarrows \mathrm{n} + \bar{\mathrm{n}},$$

dove i fotoni sono rappresentati da raggi γ. Affinché dei fotoni possano produrre coppie nucleone-antinucleone, la loro energia dev'essere almeno uguale all'energia a riposo mc^2 di un nucleone (940 MeV). La temperatura minima dell'universo che avrebbe permesso la formazione di nucleoni e antinucleoni è

$$T = \frac{mc^2}{k} = \frac{940\ \mathrm{Mev}}{8.62 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV/K}} = 1.1 \times 10^{13}\ \mathrm{K}.$$

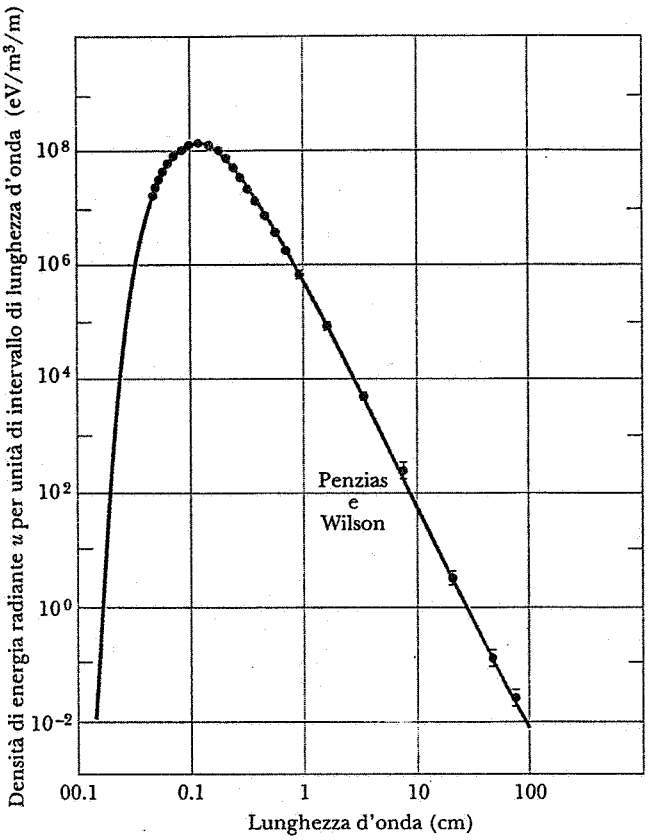


Figura 8 Spettro della radiazione cosmica di fondo a microonde. I punti rappresentano i valori misurati sperimentalmente, e la linea continua rappresenta lo spettro di Planck per l'irraggiamento alla temperatura di 2.735 K. Notare l'ottima concordanza fra i punti sperimentali e la curva teorica. I dati compresi fra 0.05 cm e 1.0 cm provengono da osservazioni fatte dal satellite COBE (COsmic Background Explorer) lanciato nel 1989.

Secondo l'equazione 3, l'universo scese al disotto di questa temperatura al tempo

$$t = \left(\frac{1.5 \times 10^{10}\ \mathrm{s^{1/2} \cdot K}}{T}\right)^2 = \left(\frac{1.5 \times 10^{10}\ \mathrm{s^{1/2} \cdot K}}{1.1 \times 10^{13}\mathrm{K}}\right)^2 =$$
$$= 2 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}.$$

Ossia, fino «all'età» di 2μs dall'inizio, l'universo era ancora abbastanza caldo da consentire la produzione di coppie nucleone-antinucleone da fotoni, ma dopo 2μs l'energia dei fotoni non sarebbe stata (mediamente) sufficiente a produrne.

A un'età antecedente (corrispondente a temperature più elevate), la radiazione può essere stata in grado di creare coppie quark-antiquark. Possiamo considerare che l'universo in questi momenti iniziali consistesse soltanto di particelle fondamentali (quark e leptoni) e di radiazione. Quark e antiquark continuavano a combinarsi formando mesoni e barioni, che erano istantaneamente dissociati dalla radiazione, con rapidità uguale a quella con la quale andavano formandosi. Ma, dato che l'universo, espandendosi, si raffreddava, a un certo momento la radiazione divenne troppo debole per riuscire a disintegrare mesoni e barioni. Non conoscendo però ancora nei dettagli il meccanismo intimo del modello dei quark (e in particolare. se possano esistere quark liberi), dobbiamo iniziare la storia da un tempo di circa 10^{-6} s dall'inizio, quando possiamo descrivere l'universo come un insieme di protoni, neutroni, antiprotoni, antineutroni, mesoni, leptoni, antileptoni e fotoni. I ritmi di generazione e di annichilazione delle particelle sono praticamente identici, cosicché possiamo considerare uguali fra loro i numeri delle particelle e delle loro corrispondenti antiparticelle. Inoltre anche il numero dei fotoni è all'incirca uguale a quello dei protoni, che è a sua volta praticamente uguale a quello degli elettroni. Fino a quel momento, l'interazione forte aveva avuto un'influenza preponderante nella definizione della struttura e della composizione dell'universo, attraverso processi come la formazione di barioni o mesoni per associazione di quark e antiquark, o le collisioni fra barioni che generano mesoni o altri barioni. Dopo quel tempo di circa 10^{-6} s (al quale corrisponde una temperatura $T = 1.5 \times 10^{13}$ K e un'energia $kT = 1300$ MeV), particelle e radiazione possiedono energie troppo piccole per poter sostenere queste reazioni, e viene così a chiudersi l'era dell'interazione forte.

Continuano a verificarsi processi di interazione elettromagnetica e di interazione debole. I processi elettromagnetici sono rappresentati dalla produzione di particelle e antiparticelle (come elettroni e positroni) da

ISBN 88-408-0777-2

parte di fotoni, mentre le interazioni deboli presiedono a processi del tipo

$$n + \nu_e \rightleftarrows p + e^-, \quad e \quad p + \bar{\nu}_e \rightleftarrows n + e^+$$

e altri analoghi, nei quali neutrini sono generati e distrutti allo stesso ritmo. Fintantoché elettroni e neutrini posseggono energia sufficiente, si ha equilibrio fra le reazioni nei due sensi, e rimane invariato il rapporto fra il numero dei leptoni carichi (e^+ ed e^-) e dei neutrini. E poiché queste reazioni convertono altrettanto facilmente neutroni in protoni e protoni in neutroni, l'universo primigenio conteneva circa ugual numero di protoni e di neutroni.

La differenza fra le energie a riposo di neutroni e protoni è circa $\Delta E = 1.3$ MeV (i neutroni sono leggermente più pesanti). A una qualsiasi temperatura T, la differenza fra i numeri dei neutroni e dei protoni contemporaneamente presenti dipende in una certa misura dal fattore di Boltzmann $e^{-\Delta E/kT}$ (vedi paragrafo 24-4). Per $t < 10^{-6}$ s (tempo al quale corrisponde una temperatura $T > 1.5 \times 10^{13}$ K e un'energia $kT >$ 1300 MeV), il fattore di Boltzmann è praticamente uguale a 1 e ha pertanto un'influenza trascurabile sul rapporto fra i numeri dei neutroni e dei protoni.

A tempi di poco superiori a 10^{-6} s, la radiazione ha un'energia media troppo piccola per consentire la creazione di coppie nucleone-antinucleone (ossia, non sono più possibili le reazioni dirette nel senso $\gamma + \gamma \rightarrow n + \bar{n}$ oppure $p + \bar{p}$), mentre continuano a verificarsi reazioni di annichilazione fra nucleoni e antinucleoni del tipo $n + \bar{n} \rightarrow \gamma + \gamma$ e $p + \bar{p} \rightarrow \gamma + \gamma$.

Da 10^{-6} s fino circa a 10^{-2} s ($T = 1.5 \times 10^{11}$ K e $kT = 13$ MeV), i processi di interazione debole mantengono un regime di sostanziale equilibrio fra protoni e neutroni.

Da 10^{-2} s a circa 1s ($T = 1.5 \times 10^{10}$ K e $kT = 1.3$ MeV), il fattore di Boltzmann comincia ad alterare l'equilibrio numerico fra protoni e neutroni, finché a $t =$ 1s questo rapporto arriva a circa e^{-1}, ossia i nucleoni sono per il 73% protoni e per il 27% neutroni. Durante questo intervallo di tempo, l'influenza dei neutrini è andata diminuendo, e intorno a $t =$ 1s i neutrini (che vanno anch'essi raffreddandosi insieme al resto dell'universo in espansione) hanno energie troppo scarse per provocare trasformazioni protone-neutrone, riducendo così l'importanza dell'interazione debole nel processo di evoluzione dell'universo. Questo è noto come il momento del «disaccoppiamento dei neutrini», quando non avvengono più episodi di interazione fra materia e neutrini. A partire da questo momento, i neutrini, sempre più raffreddandosi, continuano a riempire l'universo in espansione. Questi neutrini primordiali hanno all'incirca la stessa densità della radiazione di fondo a microonde, ma temperatura leggermente inferiore (circa 2 K). Data la estrema debolezza della loro interazione con la materia, la rivelazione di neutrini energetici ($E > 1$ MeV) richiede già strumentazioni molto raffinate e di grandi dimensioni. E per questi neutrini primordiali ($E < 10^{-3}$ eV) l'impresa appare addirittura disperata; ma se si riuscisse a scoprirli, misurarne la distribuzione dell'energia, e dedurne la temperatura si avrebbe una nuova sensazionale conferma della cosmologia del big bang.

Al tempo di circa 6 s ($T = 6 \times 10^9$ K e $kT = 0.5$ MeV), la temperatura della radiazione è scesa a un punto tale che la sua energia non è in grado di generare neppure una coppia particella-antiparticella delle più leggere (elettrone e positrone), cosicché non si generano più nuove particelle per formazione di coppie. Continuano però a verificarsi annichilazioni di particelle con antiparticelle, e i fotoni che ne risultano provocano un certo rallentamento del processo di raffreddamento dell'universo. Inoltre gli elettroni non hanno più un'energia sufficiente a produrre trasformazioni di protoni in neutroni ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ non può più verificarsi).

L'unico processo a interazione debole che ancora continua ad avvenire è il decadimento del neutrone ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$); a questo punto della storia i nucleoni sono per l'83% protoni e per il 17% neutroni.

Durante tutto questo tempo è continuato il processo di reciproca annichilazione fra particelle e antiparticelle, cosicché l'universo non contiene più né antinucleoni né positroni. Esso consiste ora di un numero N di protoni, un egual numero di elettroni (per mantenerlo elettricamente neutro), e circa $0.2N$ neutroni. E poiché le reazioni di annichilazione fra particelle e antiparticelle hanno ridotto sensibilmente il numero delle particelle senza diminuire l'intensità della radiazione, il numero dei fotoni supera di gran lunga (forse fino a 10^8 o 10^9 volte) quello dei nucleoni o degli elettroni, mentre il numero dei neutrini è circa uguale a quello dei fotoni.

Per quanto ne sappiamo, l'universo attuale non contiene stelle o galassie fatte di antimateria. Ma che cosa è successo di tutta l'antimateria, che rappresentava il 50% delle particelle all'origine dell'universo? Secondo la cosmologia del big bang, proprio all'inizio dell'evoluzione dell'universo una delle forze agenti sulle particelle creò un leggero squilibrio a favore della materia rispetto all'antimateria, forse dell'ordine di 1 su 10^8 o 10^9. L'esatta natura di questa forza non è ancora ben nota, nonostante siano stati eseguiti esperimenti di laboratorio utili a rivelare differenze anche minime fra il comportamento della materia e quello dell'antimateria. Nelle successive fasi dell'evoluzione, tutta l'antimateria venne annichilata contro altrettanta materia salvo circa 1 particella su 10^8 o 10^9: ossia, per ogni mi-

liardo di positroni esistevano all'origine forse 1 miliardo più 1 elettrone, ma dopo l'annichilazione di quei 2 miliardi di particelle rimase soltanto 1 elettrone.

Questa descrizione dell'evoluzione dell'universo, illustrata nella figura 9, ci ha guidati, per la durata di pochi secondi dall'inizio dell'universo e del big bang, attraverso periodi caldissimi e turbolenti dominati da reazioni nucleari, fino a un momento, dopo un po' di secondi, in cui il quadro delle particelle che compongono l'universo appare identico a quello attuale. Come queste particelle si siano combinate a formare i nuclei e gli atomi che oggi possiamo osservare costituisce l'oggetto del prossimo paragrafo.

Esempio 6 Quando l'universo è divenuto troppo freddo per consentire alla radiazione di formare le coppie $\mu^+ \mu^-$?

Soluzione L'energia a riposo del muone è 105.7 MeV. I fotoni possiedono questa energia quando la temperatura è

$$T = \frac{E}{k} = \frac{105 \text{ MeV}}{8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}} = 1.23 \times 10^{12} \text{ K}.$$

L'età corrispondente è calcolata con l'equazione 3:

$$t = \left(\frac{1.5 \times 10^{10} \text{ s}^{1/2} \cdot \text{K}}{1.23 \times 10^{12} \text{ K}} \right)^2 = 1.5 \times 10^{-4} \text{ s}.$$

56-6 LA SINTESI NUCLEARE

All'età di pochi secondi, l'universo consisteva di protoni, neutroni ed elettroni. Oggi esso è costituito principalmente di idrogeno ed elio, con una modesta quantità di elementi più pesanti. Come sono stati prodotti dal big bang gli attuali nuclei e atomi? La formazione degli elementi presenti nel nostro universo è chiamata *sintesi nucleare*. Come vedremo, lo studio della odierna abbondanza relativa dei diversi elementi ci può dare informazioni utili a spiegare il meccanismo dei processi che avvennero durante il big bang.

La sintesi nucleare nel big bang

Il primo passo nella fabbricazione di atomi complessi è la formazione di nuclei di deuterio (deuteroni) per combinazione di un protone con un neutrone, secondo la reazione

$$n + p \rightarrow d + \gamma.$$

L'energia di legame del deuterone (vedi paragrafo 54-2) vale 2.2 MeV, e corrisponde all'energia del raggio γ emesso durante la formazione del deuterone. La reazione inversa

$$d + \gamma \rightarrow n + p,$$

può spaccare i nuclei di deuterio nei protoni e neutro-

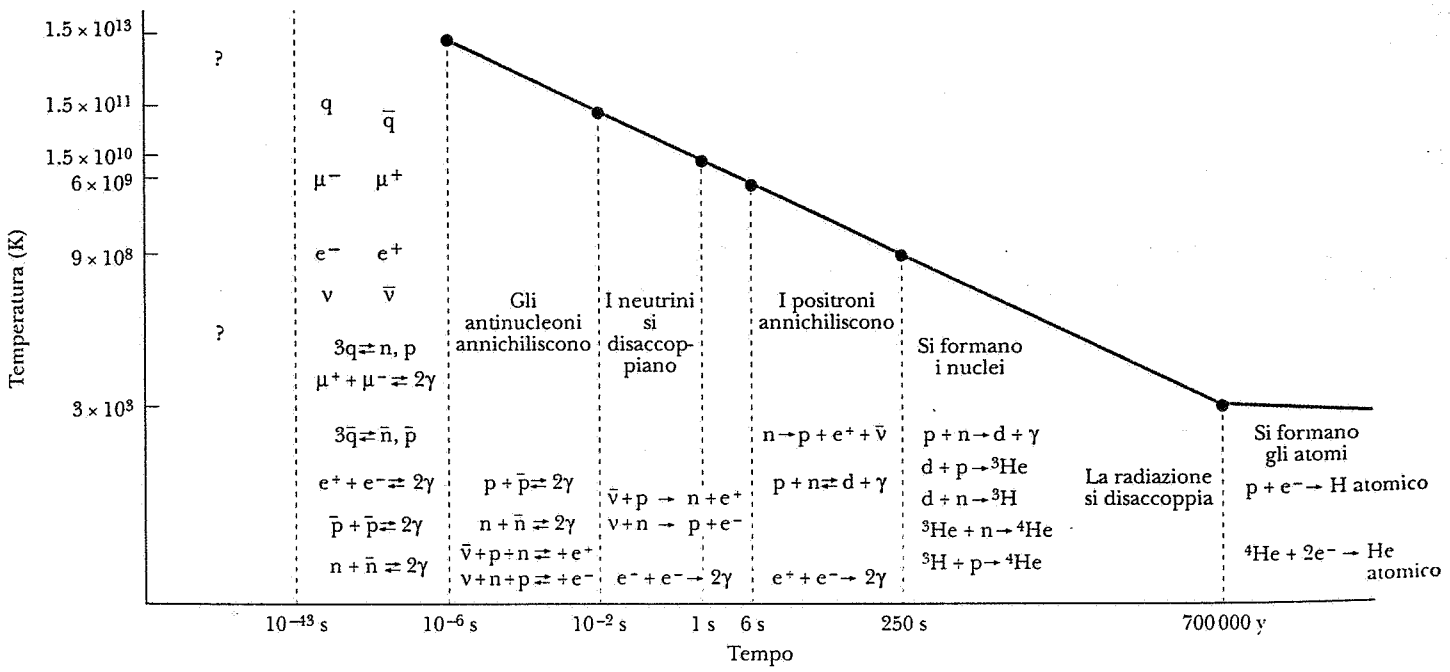


Figura 9 Evoluzione dell'universo secondo la teoria cosmologica del big bang. La linea a tratto continuo rappresenta l'andamento della temperatura in funzione del tempo secondo l'equazione 3. Sono indicate le importanti reazioni svoltesi in ogni era. (I simboli q e $\bar{q}$ significano quark e antiquark rispettivamente.)

ISBN 88-408-0777-2

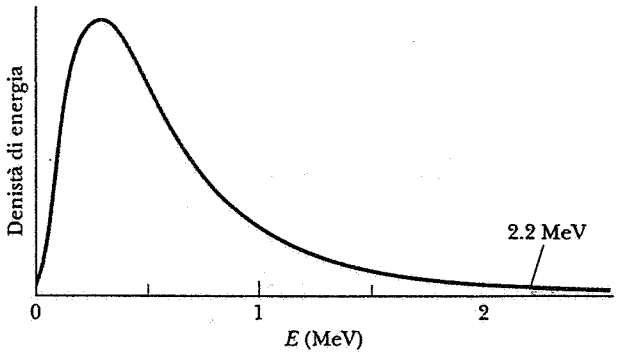


Figura 10 Spettro dell'energia dei fotoni in un particolare momento dell'evoluzione dell'universo. I fotoni dotati di energia superiore a 2.2 MeV, che rappresentano una esigua frazione del numero totale di fotoni, sono in grado di dissociare i deuteroni.

ni che li costituiscono, purché l'energia del raggio γ sia almeno uguale a 2.2 MeV.

Se l'universo è riempito di fotoni dotati di sufficiente energia, le due reazioni avranno luogo allo stesso ritmo, e il deuterio si dissocerà immediatamente appena formato. Ma quando l'universo sarà abbastanza «invecchiato», i fotoni non avranno più energia sufficiente a mantenere la reazione di dissociazione del deuterio, che comincerà quindi ad accumularsi.

Nel paragrafo precedente avevamo lasciato l'universo all'età di 6 secondi, che presentava un'energia media della radiazione di circa 0.5 MeV, molto al disotto di quella necessaria per neutralizzare la formazione del deuterio. Dobbiamo però ricordare che la distribuzione dell'energia della radiazione segue la legge di Planck (vedi figura 10, già discussa al paragrafo 49-2), e che per ogni protone o neutrone esistono da 10^8 a 10^9 fotoni. Si ha quindi una coda di alta energia nella distribuzione Planckiana che giustifica l'ipotesi che, per qualsiasi temperatura della radiazione, esisterà sempre qualche fotone di energia maggiore di 2.2 MeV, in grado quindi di dissociare nuclei di deuterio. Se tuttavia, in media, il numero di questi fotoni energetici sarà minore del numero dei protoni e neutroni, ecco che il deuterio potrà cominciare ad accumularsi.

Abbiamo visto che a quel momento il rapporto quantitativo neutroni/protoni è circa 0.2, e vi sono circa 10^9 fotoni per ogni nucleone, cosicché il rapporto neutroni/fotoni è intorno a 0.2×10^{-9}. Se la frazione di fotoni con energia maggiore di 2.2 MeV è inferiore a 0.2×10^{-9} del numero totale di fotoni, vi sarà meno di un fotone energetico per ogni neutrone, e la formazione di deuterio potrà procedere. Dall'espressione della legge di distribuzione di Planck (ottenuta dall'equazione 6 del capitolo 49) ricaviamo che la frazione di fotoni aventi energia maggiore di 2.2 MeV scenderà sotto il valore critico di 0.2×10^{-9} quando la temperatura sarà scesa sotto il valore di 9×10^8 K. L'equazione 3 indica che la temperatura scende sotto questo limite quando $t = 250$ s.

La formazione di nuclei di deuterio inizia dunque a 250 s dal big bang. Essendo però il numero dei deuteroni inferiore a quello dei protoni o neutroni, i deuteroni reagiranno subito con protoni e neutroni, secondo le due reazioni

$$d + n \rightarrow {}^3H + \gamma \quad e \quad d + p \rightarrow {}^3He + \gamma.$$

E, infine, ^{3}H e ^{3}He reagiranno ancora con protoni e neutroni, secondo le reazioni

$${}^3H + p \rightarrow {}^4He + \gamma \quad e \quad {}^3He + n \rightarrow {}^4He + \gamma\,.$$

Per tutte e quattro queste reazioni, l'energia di legame della particella risultante è maggiore di quella del deuterone. Se dunque la radiazione è troppo debole per impedire la formazione dei deuteroni, a maggior ragione non potrà ostacolare le successive reazioni. Si può quindi dedurre che tutti i deuteroni finiranno per essere convertiti in ^{4}He, e che il prodotto finale di questa fase dell'evoluzione dell'universo sono protoni e particelle α. E poiché non esistono nuclei stabili con numero di massa 5, questo tipo di reazioni non può proseguire oltre ^{4}He.

Per ricavare il numero relativo di particelle α, dobbiamo trovare il numero di neutroni disponibili al tempo $t = 250$ s, quando i deuteroni hanno cominciato ad accumularsi. A $t = 6$ s, i neutroni rappresentavano circa il 17% dei nucleoni, ma per effetto del decadimento radioattivo dei neutroni, alcuni di essi saranno stati convertiti in protoni nell'intervallo tra 6 s e 250 s. Conoscendo la vita media del neutrone (circa 11 min), possiamo dedurre che per $t = 250$ s i neutroni rappresenteranno il 12.5% dei nucleoni, e i protoni il restante 87.5%. Ossia, su 10 000 nucleoni avremo 8750 protoni e 1250 neutroni. Questi ultimi si combineranno con altrettanti protoni per formare 625 particelle α, riducendo il numero dei protoni a 7500 (8750 - 1250). In questo momento, sul numero totale di particelle presenti nell'universo, 7.7% saranno particelle α e 92.3% protoni.

In termini di massa, le particelle α costituiscono una frazione della massa totale dell'universo pari a

$$\frac{4 \times 625}{7500 + 4 \times 625} = 0.25 = 25\%.$$

L'abbondanza relativa di ^{4}He presente in quel momento nell'universo dovrebbe avere questo valore, se trascuriamo la combustione di idrogeno in elio che avviene nelle stelle. L'abbondanza relativa di elio misurata in una grande varietà di sistemi, comprendente stelle, nebulose gassose e nebulose planetarie, risulta essere

(24 ± 1)%, ciò che concorda con quanto stimato e conferma la ragionevolezza delle ipotesi sulle quali si basa la nostra descrizione.

La fase finale nella produzione di materia durante il big bang è la formazione di atomi neutri di idrogeno ed elio quando protoni e particelle α si combinano con elettroni. Analogamente a quanto accade per i deuteroni, questa formazione non può avere successo se nella coda della curva di distribuzione esistono parecchi fotoni dotati di energia sufficiente a provocare la immediata dissociazione degli atomi neutri che via via si producono. In questo caso, occorre che la frazione numerica di fotoni con energia superiore a 13.6 eV (l'energia di legame dell'atomo d'idrogeno) sia inferiore a 10^{-9}. Ciò avviene a una temperatura di circa 6000 K, che corrisponde a un'età dell'universo di circa 200 000 anni. (Col raffreddarsi della radiazione, la densità di energia dell'universo è sempre meno dominata dalla radiazione e sempre più dalla materia. In queste condizioni l'equazione 3, che si riferisce a un universo dominato dalla radiazione, non è più del tutto corretta. Prendendo in considerazione questo effetto, la temperatura dell'universo alla quale cominciano a formarsi atomi di idrogeno appare invece prossima ai 3000 K, corrispondenti a un'età di circa 700 000 anni.)

Una volta che si sono formati gli atomi neutri, nell'universo non rimangono praticamente più particelle libere dotate di carica elettrica. È questo il momento del disaccoppiamento fra materia e campo di radiazione. L'universo diventa trasparente alla radiazione, che può viaggiare su lunghe distanze senza interagire con la materia. Questa radiazione, che da quel momento non ha cessato di viaggiare, è captata oggi come radiazione di fondo a microonde: l'espansione dell'universo ha ridotto nel frattempo la temperatura di radiazione di un fattore 1000.

La narrazione della storia dell'universo secondo la cosmologia del big bang è veramente affascinante. Essa integra i risultati di moderni esperimenti di fisica sui nuclei e sulle particelle con le teorie della fisica quantistica e della termodinamica classica. Formula ipotesi che possono essere sottoposte a prove sperimentali nell'universo di oggi, quali l'abbondanza relativa dell'elio, la radiazione di fondo a microonde, e la presenza di una scarsa quantità di deuterio residuo che non è stato «sintetizzato» in nuclei di massa 3. Ci guida attraverso scenari definiti da certi valori critici dell'intensità di forze nucleari o subnucleari e dalle caratteristiche di una grande varietà di particelle che hanno preso parte alla creazione dell'universo. Ci induce a esaminare possibili ipotesi alternative: se ad esempio ci fosse una quarta generazione di leptoni, l'attività dei processi a interazione debole sarebbe maggiore, e si sarebbero formati più neutroni, con conseguente aumento dell'abbondanza relativa di ^{4}He. In effetti, anche se questa conclusione può essere ritenuta opinabile, il valore dell'abbondanza relativa di ^{4}He oggi misurabile è considerato da molti cosmologi come una conferma del fatto che non possano esistere altre generazioni di leptoni oltre la terza.

Sintesi nucleare nelle reazioni di fusione

Dopo il disaccoppiamento fra materia e radiazione, la materia (che consisteva di idrogeno ed elio) rimase soggetta soltanto alla forza gravitazionale. Recenti misurazioni molto accurate della radiazione di fondo a microonde hanno rivelato che la distribuzione della materia al momento del disaccoppiamento presentava una leggera disuniformità. In alcune regioni che presentavano densità un poco più elevata la materia cominciò a condensarsi in nubi di densità sempre crescente. E come ogni nube, andava contraendosi per effetto della propria gravità; la sua temperatura andava aumentando fino a raggiungere un valore tale da consentire l'innesco di reazioni di fusione nucleare. È così che si formarono le stelle di prima generazione.

Abbiamo visto al capitolo 55 che le stelle convertono l'idrogeno in elio attraverso reazioni di fusione. Quando una stella ha esaurito le sue riserve di idrogeno e si trova a essere costituita quasi esclusivamente di elio, può ricominciare a contrarsi, aumentando così la sua temperatura. (Questo aumento di temperatura provoca un aumento della pressione di radiazione, e quindi anche un aumento delle dimensioni della stella. L'area della superficie della stella aumenta però più rapidamente della temperatura, cosicché in definitiva l'energia irraggiata per unità di superficie diminuisce, e il colore della stella passa da giallo brillante a rosso. È in quest'ultima fase di evoluzione che la stella viene comunemente chiamata *gigante rossa*.) A un certo punto la temperatura raggiunge valori abbastanza elevati da sfondare, per agitazione termica, la barriera coulombiana fra due nuclei di ^{4}He, innescando la fusione dell'elio. La reazione elementare di fusione dell'elio

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^8\text{Be}$$

non porta alcun contributo alla fusione nella stella, perché il ^{8}Be è instabile e si dissocia immediatamente appena formato. La fusione vera e propria dell'elio richiede la partecipazione di una terza particella α, cosicché la reazione finale si presenta così:

$$^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C} + \gamma.$$

Una volta che si è formato ^{12}C, possono aver luogo

ISBN 88-408-0777-2

ulteriori reazioni di fusione per addizione di particelle α, quali ad esempio

$$^{12}C + {}^{4}He \rightarrow {}^{16}O + \gamma,$$

$$^{16}O + {}^{4}He \rightarrow {}^{20}Ne + \gamma,$$

$$^{20}Ne + {}^{4}He \rightarrow {}^{24}Mg + \gamma,$$

e così via. I nuclei che entrano in queste reazioni successive presentano barriere elettrostatiche sempre più elevate e richiedono quindi temperature sempre più alte.

Quando il combustibile elio è esaurito, la contrazione gravitazionale interviene nuovamente a far aumentare la temperatura, rendendo possibili altre reazioni di fusione, quali la fusione del carbonio in magnesio:

$$^{12}C + {}^{12}C \rightarrow {}^{24}Mg + \gamma.$$

A un certo momento, attraverso queste successive reazioni di fusione, si raggiunge il massimo della curva dell'energia di legame (fig. 6 del cap. 54), nel punto corrispondente alla massa 56, oltre il quale non si ha più liberazione di energia per fusione nucleare.

Nella figura 11 si vede in dettaglio l'abbondanza relativa dei nuclei dei diversi elementi compresi in questa fascia di numeri di massa. Le abbondanze relative sono in armonia con lo sviluppo delle reazioni di fusione qui descritte. Si noti che l'abbondanza di C è di oltre cinque ordini di grandezza superiore a quelle di Li, Be e B, che non sono generati in questo processo. È anche da notare che i nuclei aventi numero atomico pari sono in media più abbondanti, almeno di un ordine di grandezza, di quelli con Z dispari a essi contigui. E poiché le reazioni di fusione con particelle α generano soltanto nuclei con Z pari, anche i maggiori valori misurati per le loro abbondanze relative sono coerenti con questa spiegazione della loro formazione.

Si noti infine che l'ultimo punto a destra nella figura 11 indica che l'abbondanza *globale* di tutti i 50 elementi successivi alla fascia di massa 56 è inferiore a quella di tutti i singoli elementi compresi fra C e Zn, salvo uno: altra prova abbastanza evidente che la maggior parte della materia che conosciamo è stata generata da processi di fusione.

Sintesi nucleare per cattura di neutroni

Gli elementi di massa superiore a 56 furono generati lentamente nelle stelle oppure improvvisamente nelle supernove con reazioni di cattura neutronica. Nelle stelle si trova una piccola densità di neutroni, prodotti da sequenze di questo tipo:

$$^{12}C + {}^{1}H \rightarrow {}^{13}N + \gamma,$$

$$^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu_e,$$

$$^{13}C + {}^{4}He \rightarrow {}^{16}O + n.$$

Supponiamo di avere ottenuto, da un processo di fusione, ^{56}Fe. Può ora innescarsi una sequenza di reazioni di cattura neutronica:

$$^{56}Fe + n \rightarrow {}^{57}Fe + \gamma,$$

$$^{57}Fe + n \rightarrow {}^{58}Fe + \gamma,$$

$$^{58}Fe + n \rightarrow {}^{59}Fe + \gamma.$$

Sia il ^{57}Fe sia il ^{58}Fe sono nuclidi stabili, ma il ^{59}Fe è radioattivo e decade a ^{59}Co per decadimento beta negativo con tempo di dimezzamento di 45 giorni. La probabilità che ^{59}Fe catturi un altro neutrone, passando così a ^{60}Fe, oppure decada a ^{59}Co, dipende dalla densità dei neutroni presenti. Se questa è tanto bassa da rendere improbabile che un ^{59}Fe incontri un neutrone entro 45 giorni, esso decadrà a ^{59}Co. Se esiste invece una certa probabilità che avvenga questo incontro, il ^{59}Fe si trasformerà in ^{60}Fe e forse anche in ^{61}Fe, ^{62}Fe e così via. Questi nuclei sono molto ricchi di neutroni e si spingono quindi sempre più fuori dall'ambito dei nuclei stabili, rappresentato nella figura 4 del capitolo 54, e vengono di conseguenza a presentare tempi di dimezzamento sempre più brevi. Per esempio, il ^{64}Fe ha un tempo di dimezzamento di 2 s. Finché a un certo punto il tempo di dimezzamento diventa così breve che sfumano le probabilità di incontrare un neutrone prima che si verifichi un decadimento beta del nuclide instabile Fe, che si trasforma nel nuclide di Co di ugual massa, come indicato nella figura 12.

Il percorso che si sviluppa attraverso il ^{59}Co, che permette che si verifichino decadimenti beta anche di vita relativamente lunga prima della cattura del prossimo neutrone, prende il nome di *processo s* (dall'inglese *slow*, ossia lento). Quello invece lungo il quale la densità di neutroni è tanto grande da consentire molte catture di neutroni prima che intervenga un decadimento beta è chiamato *processo r* (rapido). Entrambi sono indicati in figura 12.

Ovviamente, i nuclei molto instabili che si formano nel corso del processo r a un certo momento decadranno beta in nuclei stabili, ma, come appare dalla figura 12, questi decadimenti seguono percorsi diversi da quello del processo s. Vediamo, ad esempio, i nuclidi Sn di figura 13. Il processo s si svolge attraverso ^{120}Sn, ^{121}Sn, e ^{121}Sb. Ma ^{121}Sn, che decade beta a ^{121}Sb, non può catturare un neutrone secondo il processo s. Perciò

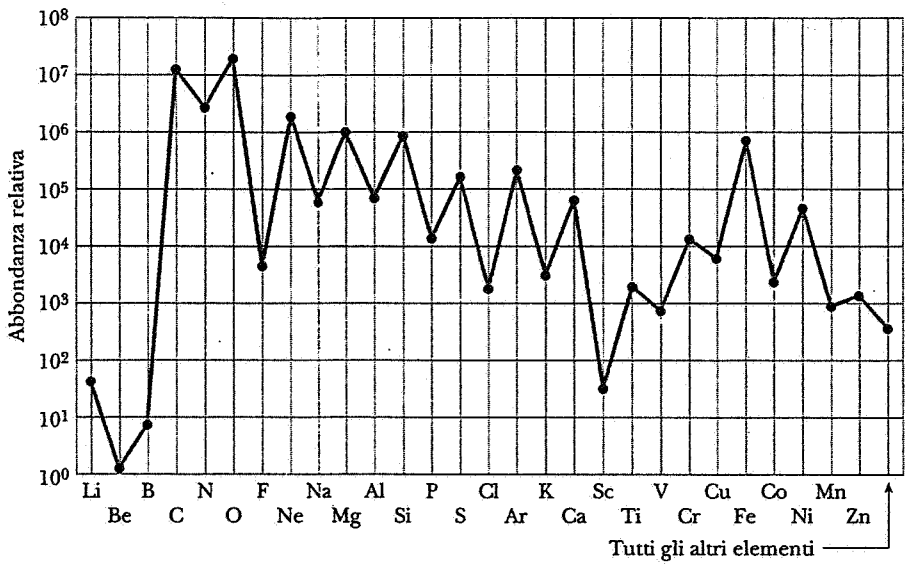


Figura 11 Abbondanze relative (in termini di massa) degli elementi più pesanti dell'elio nel sistema solare.

^{122}Sb, avente in natura un'abbondanza relativa del 4.6%, non può discendere da un processo s, ma deve derivare da un processo r. Il nuclide ^{120}Sn può essere prodotto da entrambi i processi, ma il nuclide ^{124}Te può prodursi *soltanto* attraverso il processo s, perché i decadimenti beta del processo r lungo la linea di massa 124 sono bloccati dal nuclide stabile ^{124}Sn.

In una stella gigante rossa, la densità dei neutroni può essere dell'ordine di 10^{14} per m^3, ciò che è sufficiente a mantenere il processo s. Nell'esplosione di una supernova la densità dei neutroni può aumentare anche di 10 o 20 ordini di grandezza, ma questa elevatissima densità dura soltanto pochi secondi. Durante questo tempo, la catena del processo r scorre all'insù fino ai nuclei più pesanti, che sono quindi violentemente espulsi nello spazio vuoto e decadono gradualmente fino a formare i nuclei stabili del processo r. Gli elementi che troviamo sulla terra aventi massa supe-

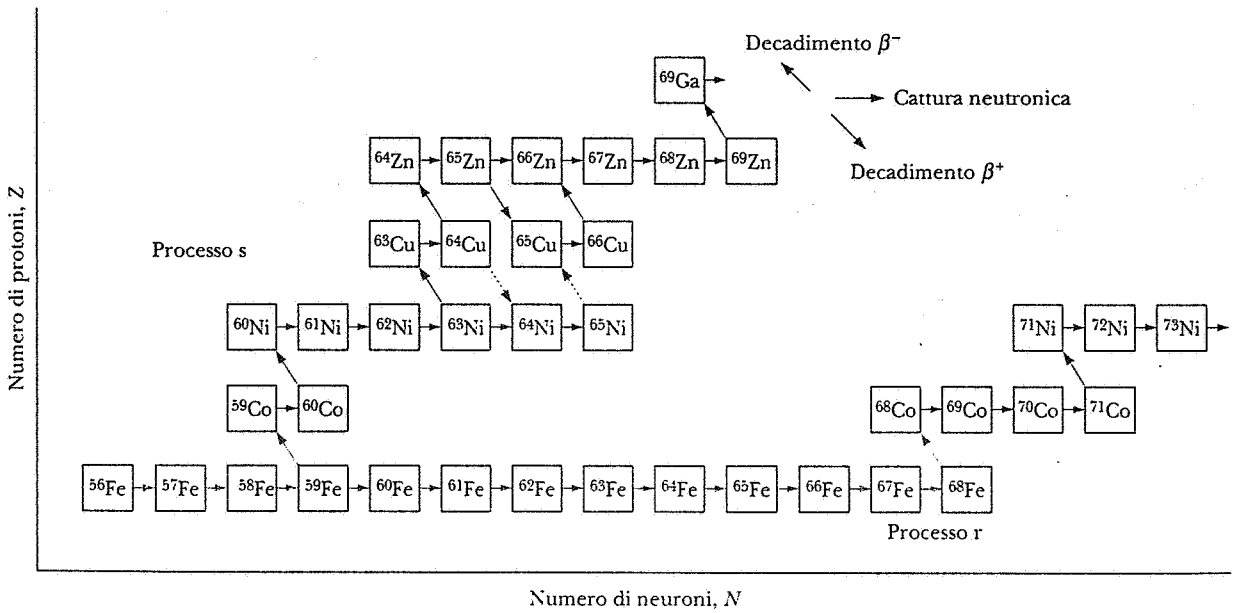


Figura 12 Una porzione del diagramma dei nuclidi (fig. 4 del cap. 54), che mostra i percorsi dei processi s ed r a partire dal ^{56}Fe. La figura mostra soltanto uno dei numerosi percorsi possibili per processi r per il decadimento beta di nuclei a vita breve. Tutti i nuclei lungo il processo r sono instabili e possono decadere beta verso nuclei stabili.

ISBN 88-408-0777-2

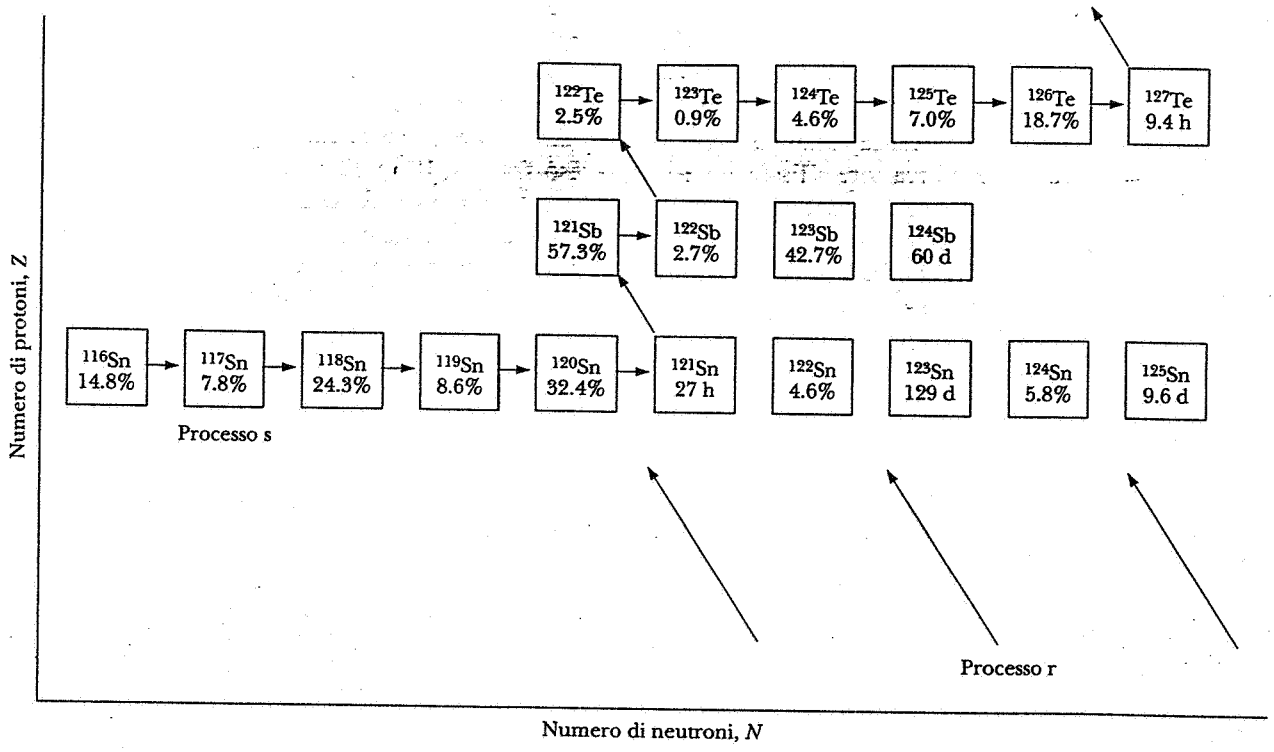


Figura 13 Percorsi di processi r ed s che conducono a isotopi di Sn, Sb e Te.

riore a 56 sono stati prodotti nelle stelle di prima generazione, forse attraverso il processo s o il processo r, e i pianeti del nostro sistema solare (e così anche noi stessi) son fatti di ceneri riciclate di stelle estinte.

56-7 L'ETÀ DELL'UNIVERSO

Nel paragrafo 54-7 abbiamo parlato dell'uso dei metodi di datazione radioattiva per la determinazione dell'età della terra. Esaminando le quantità relative di isotopi padri e figli in certi processi di decadimento radioattivo aventi tempi di dimezzamento dell'ordine di 10^8 -10^9 anni (come ad esempio $^{238}U \rightarrow {}^{206}Pb$, $^{87}Rb \rightarrow {}^{87}Sr$, o $^{40}K \rightarrow {}^{40}Ar$), è stato stabilito che l'età delle rocce più antiche sulla terra è di circa 4.5×10^9 anni. Identico valore si ottiene per le meteoriti e per le rocce provenienti dalla luna. Possiamo quindi essere abbastanza sicuri che questo valore rappresenti il tempo trascorso dalla condensazione del sistema solare.

Sappiamo che l'universo deve essere molto più vecchio, poiché il sistema solare è stato formato da elementi che erano stati creati all'interno delle stelle o in supernove. L'attuale composizione chimica del sistema solare è stata definita durante un'era precedente, per effetto di processi di sintesi nucleare svoltisi in stelle di una generazione anteriore. Per trovare l'età vera dell'universo dobbiamo determinare quanto tempo sia stato necessario per la produzione degli elementi.

Il tempo totale trascorso dal big bang a oggi si può dividere in quattro periodi: (1) dal big bang alla formazione di atomi neutri di H ed He (t_1); (2) condensazione delle galassie e formazione di stelle di prima generazione (t_2); (3) sintesi dei nuclei nelle stelle e nelle supernove, che porta alla generazione degli attuali elementi chimici (t_3); (4) formazione ed evoluzione del sistema solare dai residui delle stelle preesistenti (t_4). L'età dell'universo è oggi rappresentata dalla somma di questi quattro addendi:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4. \qquad (4)$$

Abbiamo visto nella discussione sulla cosmologia del big bang che il tempo t_1 dal big bang alla formazione degli atomi neutri non supera 10^6 anni. Il tempo t_2 per la condensazione delle galassie dall'idrogeno e dall'elio prodotti nel big bang non è noto con certezza, ma è stato stimato da 1×10^9 a 2×10^9 anni. E sapendo che t_4 è 4.5×10^9 anni, potremo determinare l'età dell'universo se saremo in grado di calcolare il tempo t_3 associato alla sintesi nucleare.

Per valutare la durata di questo intervallo si dovrà partire dallo studio delle abbondanze relative dei prodotti residui al termine delle reazioni di sintesi nucleare. Esaminiamo ad esempio gli isotopi ^{235}U e ^{238}U, che presentano oggi un'abbondanza relativa dello 0.72% (vedere la discussione sul reattore a fissione naturale, paragrafo 55-5). Sia ^{235}U sia ^{238}U sono andati decadendo durante tutto il tempo trascorso dalla formazione del sistema solare. Il loro rapporto 4.5×10^9 anni orsono valeva (vedi esempio 4 del capitolo 55):

$$R(0) = R(t)e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t}$$
$$= (0.0072)e^{(0.984-0.155)(10^{-9}\ y^{-1})(4.5\times10^9\ y)} = 0.30.$$

Durante tutto l'intervallo t_3 entrambi gli isotopi erano in corso di formazione, più o meno con continuità, attraverso processi r, pur non essendo impossibile il decadimento spontaneo. Producendosi entrambi gli isotopi, il rapporto delle loro abbondanze relative durante questo periodo non cambiò tanto rapidamente come durante il decadimento libero nel successivo intervallo t_4; si veda la figura 14. Considerazioni sull'abbondanza relativa dell'uranio suggeriscono che t_3 sia compreso fra 4×10^9 e 9×10^9 anni; analoghi valori risultano dall'analisi dell'abbondanza relativa di altri nuclei da processi r.

Una stima indipendente di t_3 è consentita dall'analisi della produzione dell'isotopo ^{187}Os da processi r ed s, come illustrato nella figura 15. L'isotopo ^{187}Re si forma soltanto per processo r, e decade a ^{187}Os con un tempo di dimezzamento di 40×10^9 anni, valore proprio adatto alla misurazione dell'età dell'universo. Il confronto fra le quantità relative del genitore ^{187}Re e del figlio ^{187}Os potrebbe fornire una misura della durata della sintesi nucleare per processo r. Tuttavia, lo ^{187}Os potrebbe anche essersi formato per processo s, come illustrato nella figura 15. Correggendo l'abbondanza relativa misurata di ^{187}Os per tener conto della frazione derivante dal processo s (che si può ricavare dall'abbondanza di ^{186}Os), dal confronto fra le quantità di ^{187}Os e ^{187}Re deduciamo che t_3 dev'essere compreso fra 9×10^9 e 12×10^9 anni. Il limite inferiore, 9×10^9 anni, coincide con il limite superiore di t_3 ricavato dalle abbondanze relative dell'uranio: lo si può quindi adottare come valore stimato per t_3.

Combinando questi risultati, ecco la nostra stima per l'età dell'universo:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$$
$$= 10^6\ y + 1.5 \times 10^9\ y + 9 \times 10^9\ y + 4.5 \times 10^9\ y$$
$$= 15 \times 10^9\ y.$$

Questo valore è alquanto incerto, a causa dell'imprecisione fra le diverse valutazioni ottenute per t_3. Tenendo conto di questa incertezza, possiamo scrivere

$$10 \times 10^9\ y < t < 18 \times 10^9\ y.$$

Si consideri la grande varietà di settori della fisica che sono intervenuti per ottenere questo semplice risultato. Per determinare t_1, siamo ricorsi al contributo della fisica delle particelle, dell'elettromagnetismo, della termodinamica e della fisica atomica e nucleare per ricostruire come si sia formata la materia quale ora la conosciamo. L'intervallo t_2 è definito da calcoli che usano la termodinamica e la teoria della gravitazione per analizzare la condensazione della materia fredda in stelle calde. La stima di t_3 si basa sui risultati dello studio, eseguito in laboratori terrestri di fisica nucleare, dei processi di sintesi nucleare tipo r e tipo s, mentre t_4 è ricavato da ulteriori esperimenti di fisica nucleare e ricerche di chimica terrestre.

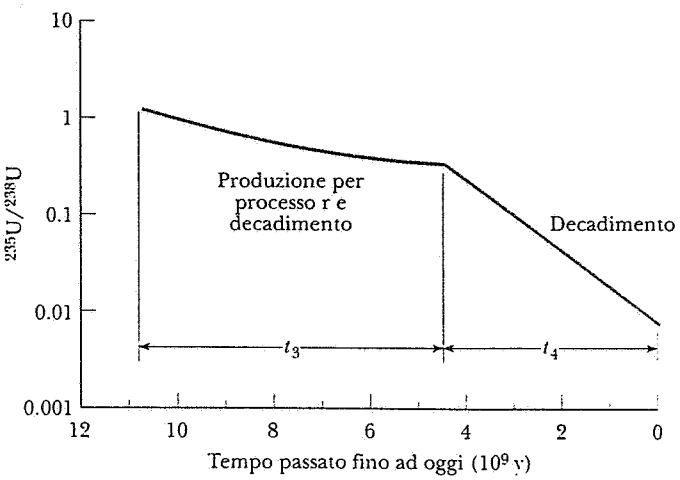


Figura 14 Variazione nel tempo del rapporto ^{235}U / ^{238}U. Durante la vita del sistema solare (intervallo t_4) questo rapporto è influenzato soltanto dai rispettivi decadimenti, arrivando a un certo momento al valore attuale di 0.0072. Durante il precedente intervallo t_3 si aveva anche produzione per processi r oltre che per decadimento. La valutazione della durata dell'intervallo t_3 dipende dal valore assegnato al rapporto iniziale, che deve essere determinato dal calcolo.

ISBN 88-408-0777-2

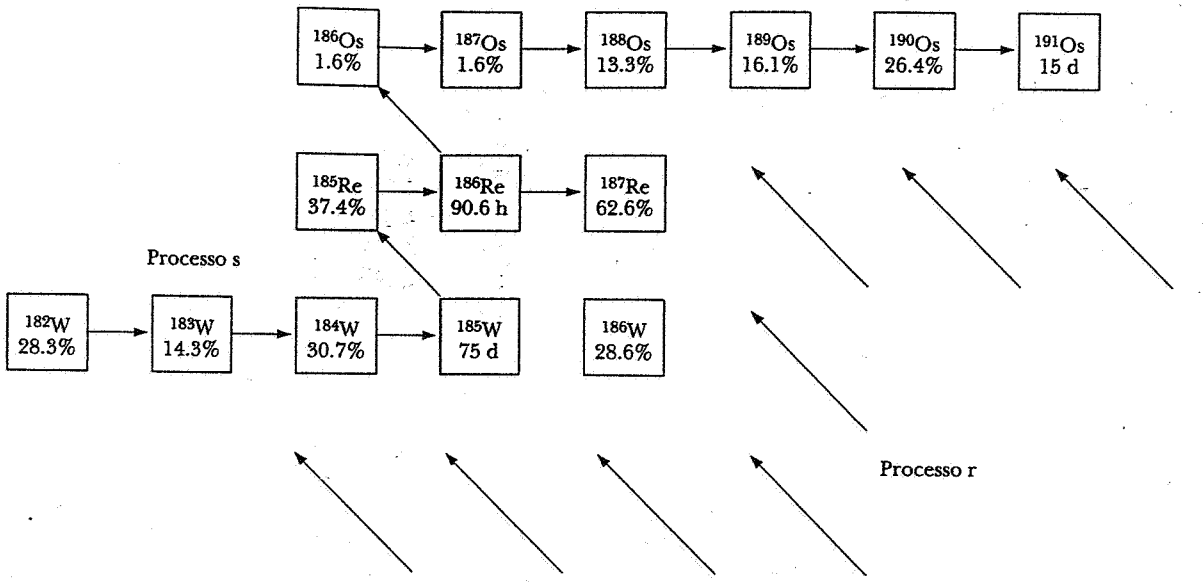


Figura 15 Formazione di isotopi di Re e Os attraverso processi r ed s.

Determinazione cosmologica dell'età dell'universo

Se accettiamo la semplificazione, non del tutto corretta, che l'universo sia andato sempre espandendosi fin dall'inizio secondo la stessa legge, la distanza d fra due galassie tipiche dovrebbe essere legata all'età dell'universo all'incirca da questa formula:

$$d = vt,$$

dove v è la velocità di separazione (supposta costante). Il confronto di questa espressione con l'equazione 2 mostra che l'età t dell'universo è proprio il reciproco del parametro di Hubble:

$$t = H^{-1}. \qquad (5)$$

La stima attualmente più precisa per il parametro di Hubble, $H = 67$ (km/s)/Mpc, fornisce per l'età dell'universo il valore

$$t = 15 \times 10^9 \text{ y},$$

valore che si accorda in modo significativo con quelli ottenuti dai calcoli di sintesi nucleare. Ma il grado di incertezza del parametro di Hubble, da 50 a 100 (km/s)/Mpc, è assai elevato, e determina l'incertezza del valore dell'età dell'universo

$$10 \times 10^9 \text{ y} < t < 19 \times 10^9 \text{ y},$$

che corrisponde alla fascia di valori ricavati dai ragionamenti sulla sintesi nucleare.

La nostra ipotesi semplificatrice sulla costanza della velocità di separazione delle galassie è quasi certamente scorretta. La reciproca attrazione gravitazionale fra le galassie ha sempre contrastato la tendenza all'espansione dell'universo: la velocità iniziale di separazione è perciò stata certamente più elevata di quella attuale. Il grafico di figura 16 rappresenta l'andamento tipico della separazione delle galassie in funzione del tempo. Se il modello a «velocità costante» fosse valido, l'età dell'universo sarebbe $t = H^{-1}$. Se invece la velocità è

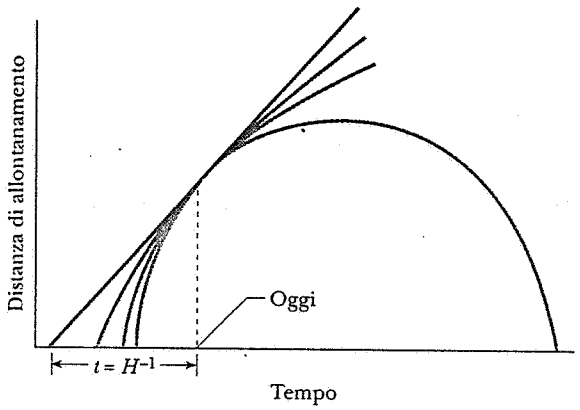


Figura 16 Tipiche leggi di dipendenza dal tempo, secondo differenti modelli, della distanza di separazione tra due galassie durante l'evoluzione dell'universo. Se l'universo è andato espandendosi secondo un ritmo costante (linea retta), possiamo estrapolare all'indietro l'istante in cui la distanza era zero (il big bang), pari a un intervallo di tempo H^{-1} prima del presente. Se invece l'espansione è andata rallentando per effetto della interazione gravitazionale (rappresentazione più verosimile), il tempo trascorso dal big bang è minore di H^{-1}. Se la gravitazione è abbastanza forte, l'espansione a un certo momento può diventare una contrazione.

diminuita a cominciare dal big bang, l'età che ne deriva dipende dal grado di rallentamento. Ma poiché nessun essere umano ha osservato le galassie abbastanza a lungo per rilevare sia pur minimi cambiamenti nella velocità di separazione, dobbiamo affidarci a due metodi indiretti per valutare questa decelerazione: (1) misurare gli spostamenti verso il rosso e dedurre le velocità delle galassie più lontane (e quindi più vecchie), che si possano osservare coi telescopi, oppure (2) calcolare la decelerazione valutando gli effetti gravitazionali della massa totale della materia contenuta nell'universo.

Se le galassie vanno rallentando, si dovrebbe trovare che gli oggetti più distanti hanno velocità di recessione maggiori di quelle deducibili dalla legge di Hubble. Ma purtroppo le misurazioni che possiamo fare su oggetti tanto distanti non sono ancora abbastanza precise per consentirci di rivelare un valore definito per la decelerazione. Anche il secondo metodo è però destinato all'insuccesso: la quantità di materia osservabile coi telescopi (una materia, cioè, che emetta qualche tipo di radiazione elettromagnetica) non è neppure sufficiente a giustificare l'attrazione gravitazionale all'interno delle galassie o degli ammassi di galassie. È possibile che almeno il 90% della materia contenuta nell'universo sia di un tipo che sfugge alle nostre possibilità di osservazione, forse neutrini (se hanno massa non nulla), o altre particelle elementari residue dal big bang, o magari da stelle estinte. E per effetto di questa «materia scura» a noi sconosciuta non possiamo azzardare valutazioni attendibili sulla decelerazione dell'universo.

Sono stati proposti diversi modelli cosmologici, a ciascuno dei quali corrispondono le diverse curvature dei grafici di figura 16, da cui si ricavano diverse età dell'universo. Da alcuni di questi modelli, ad esempio, risulterebbero età dell'universo pari a metà o due terzi di H^{-1}, ossia da 5×10^9 a 12×10^9 anni. Pur non essendo noi in grado di decidere *quale sia* (e addirittura *se vi sia)* , fra questi, il modello corretto, appare chiaro che l'età dell'universo ricavata dalla teoria della sintesi nucleare o stimata da considerazioni cosmologiche deve essere compresa fra 10×10^9 e 15×10^9 anni.

È fonte di grande frustrazione per i fisici la consapevolezza di non essere in grado di descrivere con maggiore precisione la storia dell'universo, dato che la nostra capacità di prevederne il futuro sviluppo rimane affetta dalla medesima incertezza. L'espansione è forse destinata a durare in eterno, oppure è presente già ora una quantità di materia sufficiente a rovesciare la situazione? La figura 16 mostra diversi possibili sviluppi. Forse i cosmologi di un'era futura assisteranno a una precipitosa corsa convergente, con conseguente «surriscaldamento» dell'universo, delle galassie, che andranno avvicinandosi fra loro fino ad arrivare ad annullarsi in un singolo punto: sarà il momento del *big crunch*, il gran collasso, che potrà essere seguito da un altro big bang. O forse invece l'espansione continuerà indefinitamente, fino a che l'universo diverrà freddo e buio. La ricerca di una soluzione a questo problema fondamentale richiederà un vigoroso impegno sui fronti più avanzati della ricerca in astrofisica, fisica nucleare e fisica delle particelle.

DOMANDE

1. Il rapporto fra l'intensità della forza gravitazionale fra elettrone e protone nell'atomo d'idrogeno e quella dell'attrazione elettromagnetica fra di essi è dell'ordine di 10^{-40}. Se la forza di gravità è tanto più debole di quella elettromagnetica, com'è che essa fu scoperta per prima ed è per noi tanto più appariscente?
2. Cosa si intende veramente per «particella elementare»? Nel formulare la risposta, tenete in considerazione le sue proprietà, quali la vita media, la massa, le dimensioni, il decadimento in altre particelle, la fusione in altre particelle, e le reazioni alle quali può partecipare.
3. Perché i fisici delle particelle vogliono accelerare le particelle a energie sempre più elevate?
4. Fate il nome di due particelle prive di massa e di carica. Quali proprietà hanno?
5. Per quale ragione i neutrini non lasciano tracce nelle camere di rivelazione?
6. I neutrini non hanno massa (presumibilmente) e viaggiano alla velocità della luce. Come possono, allora, trasportare quantità variabili di energia?
7. Tutte le particelle hanno antiparticelle? E i fotoni?
8. Nel decadimento beta di un antineutrone in un antiprotone, viene emesso un neutrino o un antineutrino?
9. Fotoni e neutrini sono simili in quanto hanno massa zero, carica zero e viaggiano alla velocità della luce. Quali sono le differenze fra queste due particelle? Come si potrebbero produrle? E come si può rivelarle?
10. Spiegate perché possiamo dire che il mesone π^0 coincide con la propria antiparticella.
11. Perché un elettrone non può decadere disintegrandosi in due neutrini?
12. Perché l'elettrone è stabile? Ossia, perché non decade spontaneamente in altre particelle?
13. Perché un elettrone a riposo non può emettere un singolo raggio γ e scomparire? E un elettrone in movimento potrebbe farlo?
14. Un neutrone ha una massa sufficiente per poter decadere emettendo un protone e due neutrini. Perché non lo fa?

ISBN 88-408-0777-2

15. Un positrone finisce sempre coll'incontrare un elettrone ed essi si annientano reciprocamente. Perché allora un positrone è considerato una particella stabile?
16. Qual è il meccanismo secondo il quale due elettroni esercitano forze l'uno sull'altro?
17. Perché le particelle non sono raggruppate in famiglie secondo la loro massa?
18. Una particella che risponde alla forza forte è un mesone o un barione. Si può capire di quale dei due casi si tratta lasciandola decadere fino a che rimangano soltanto prodotti finali stabili. Se fra questi si trova un protone, la particella originale era un barione. Se invece non ce ne sono, era un mesone. Spiegate questa regola di classificazione.
19. Quante specie di leptoni stabili esistono? Quante di mesoni stabili? Quante di barioni? Dite numero e nomi di ciascun tipo.
20. La maggior parte delle reazioni fisiche fra particelle sono endotermiche, piuttosto che esotermiche. Perché?
21. Qual é la più leggera particella che interagisce tramite forza forte? Qual è la più pesante che non è soggetta all'interazione forte?
22. Dite quali delle quattro forze fondamentali interessano ciascuna di queste particelle: (*a*) elettroni; (*b*) neutrini; (*c*) neutroni; (*d*) pioni.
23. Allo stesso modo con cui i raggi X sono impiegati per scoprire difetti causati da bolle di gas all'interno di pezzi fusi in metallo, si è fatto ricorso a muoni provenienti da raggi cosmici per tentare di scoprire camere sepolcrali nascoste nelle piramidi d'Egitto. Perché sono stati scelti i muoni?
24. Le particelle che interagiscono tramite la forza forte sono soggette a interazione debole?
25. Tutti i decadimenti per interazione debole producono neutrini?
26. Mesoni e barioni sono entrambi sensibili alla forza forte. Sotto quali aspetti sono differenti fra loro?
27. Confrontando le tabelle 3 e 7, indicate quali e quante somiglianze e differenze fra leptoni e quark siano a vostra conoscenza.
28. Qual è la prova sperimentale dell'esistenza dei quark?
29. Possiamo descrivere il mondo «ordinario» che ci circonda con due leptoni e due quark. Provate a indicarli.
30. Il pione neutro ha la struttura quark $u\bar{u}$ e decade con una vita media di 8.3×10^{-17} s solamente. Il pione carico, invece, ha una struttura a quark $u\bar{d}$ e decade con vita media 2.6×10^{-8} s. Spiegate, in termini della rispettiva struttura a quark, per quale ragione la vita media del pione neutro debba essere tanto più breve di quella del pione carico. (*Suggerimento*: pensate all'annichilazione.)
31. I leptoni contengono quark? E i mesoni? E i fotoni? E i barioni?
32. Il barione Δ^* può avere carica elettrica $+ 2e$ (tav. 5). Basandoci sul modello a quark, possiamo aspettarci di trovare mesoni con carica $+ 2e$? O barioni con carica $-2e$?
33. Il barione Σ^+ decade con una vita media caratteristica dell'interazione debole (tav. 5). Dovrebbe poter decadere nel barione Λ^0 per interazione forte senza cambiare stranezza. Perché non lo fa?
34. Perché non possiamo trovare il centro dell'universo in espansione? Lo stiamo cercando?
35. Per effetto della forza di gravitazione universale, il ritmo di espansione dell'universo deve essersi rallentato nel tempo successivo al big bang. Dimostrate che ciò significa che l'età dell'universo è minore di $1/H$.
36. Perché non è possibile, usando telescopi sensibili in ogni regione dello spettro elettromagnetico, «guardare indietro» più in là di 500 000 anni circa dopo il big bang?
37. Come si arriva alla conclusione che la materia visibile rappresenta soltanto il 10% della massa totale dell'universo?
38. Guardiamo sempre indietro nel tempo quando osserviamo una galassia lontana? Fa differenza la direzione in cui guardiamo?
39. Si può pensare a un'altra spiegazione plausibile per l'universo in espansione, oltre al big bang?

PROBLEMI

Paragrafo 56-1 Interazione fra particelle

1. (*a*) Un elettrone e un positrone sono separati da una distanza r. Trovare il rapporto fra la forza gravitazionale e la forza elettrostatica che agiscono su di essi. Che cosa si può concludere dal risultato, a riguardo delle forze agenti su particelle rivelate in una camera a bolle o altro simile apparecchio rivelatore? (*b*) La stessa domanda per una coppia protone-antiprotone.
2. Alcune GTU prevedono i seguenti possibili schemi di decadimento per il protone:

$$p \rightarrow e^+ + \gamma,$$

$$p \rightarrow e^+ + \pi^0.$$

(*a*) Calcolare i valori Q per questi decadimenti. (*b*) Dimostrare che questi decadimenti non violano le leggi di conservazione della carica, dell'energia relativistica e della quantità di moto. L'energia a riposo del protone è 938.27 MeV, quella di un elettrone 0.511 MeV, e quella del pione neutro 135 MeV.

3. Un elettrone e un protone sono disposti a una distanza a_0 uguale a un raggio di Bohr. Trovare il raggio R di una sfera di piombo che, piazzata accanto all'elettrone, eserciti una forza gravitazionale sull'elettrone tale da vincere la forza di attrazione elettrostatica fra protone ed elettrone; si veda la figura 17. Supponiamo che valga la legge gravitazionale di Newton, e che la densità della sfera sia uguale alla densità del piombo sulla terra.

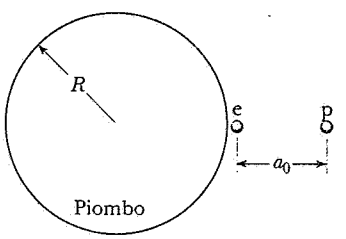


Figura 17 Problema 3.

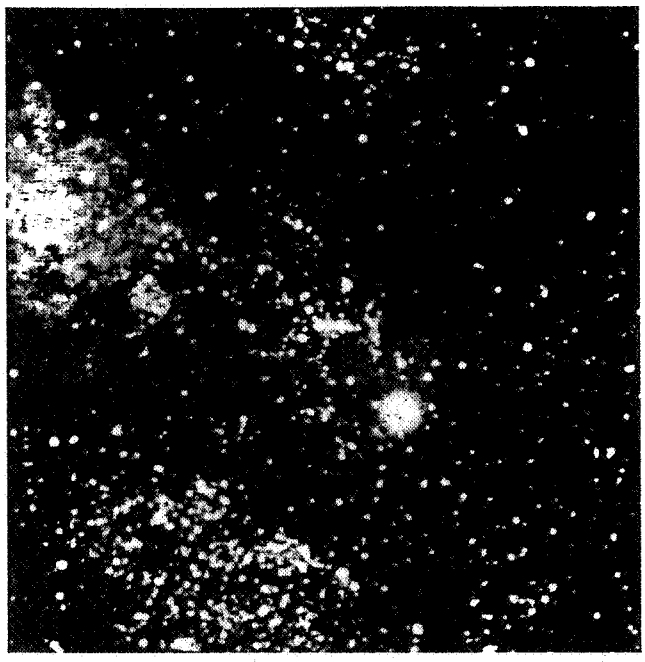


Figura 18 Problema 6.

Paragrafo 56-2 Famiglie di particelle

4. Un pione neutro decade in due raggi gamma: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Calcolare le lunghezze d'onda dei raggi gamma prodotti da un pione neutro a riposo.
5. L'energia a riposo di molte particelle a vita breve non è misurabile direttamente, ma deve essere dedotta dalla misura delle quantità di moto e dai valori noti delle energie a riposo dei prodotti di decadimento. Si consideri il mesone ρ^0, che decade secondo la reazione $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Si calcoli l'energia a riposo del mesone ρ^0 sapendo che le quantità di moto in ciascun verso opposto dei pioni generati hanno valore assoluto 358.3 MeV/c. L'energia a riposo dei pioni è riportata nella tabella 4.
6. Le osservazioni di neutrini emessi dalla supernova SN*1987* nella Grande Nebulosa di Magellano (fig. 18) stabiliscono un limite superiore di 20 eV per l'energia a riposo del neutrino elettronico. Supponiamo che l'energia a riposo del neutrino, anziché nulla, valga proprio 20 eV. Quanto più lento della luce viaggerà un neutrino da 1.5 MeV emesso da un decadimento β?
7. Un pione neutro ha un'energia a riposo di 135 MeV e una vita media di 8.4×10^{-17} s. Se è stato prodotto con un'energia cinetica iniziale di 80 MeV e decade dopo un tempo uguale alla vita media, qual è il suo percorso in una camera a bolle? Tenete conto della dilatazione relativistica del tempo.
8. Un particella tau positiva (τ^+, energia a riposo = 1784 MeV) viaggia con 2200 MeV di energia cinetica su un percorso circolare, perpendicolare a un campo magnetico uniforme di 1.2 T. (*a*) Calcolare la quantità di moto della particella tau in kg · m/s, tenendo conto degli effetti relativistici. (*b*) Trovare il raggio del percorso circolare. (*Suggerimento*: vedere il paragrafo 34-3.)
9. Calcolare il raggio d'azione della forza debole fra due protoni vicini. Si supponga che la particella di campo sia il bosone Z^0: si veda la tabella 6.
10. Identificate il tipo di interazione responsabile per ciascuno dei seguenti decadimenti: (*a*) $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$; (*b*) $K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$; (*c*) $\eta' \rightarrow \eta + \pi^+ + \pi^-$; (*d*) $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.

Paragrafo 56-3 Leggi di conservazione

11. Quale legge di conservazione è violata in ciascuno dei seguenti supposti decadimenti? (*a*) $\mu^- \rightarrow e^+ + \eta_\mu + \overline{\nu_e}$; (*b*) $\mu^+ \rightarrow \pi^+ + \overline{\nu_\mu}$.
12. La reazione $\pi^+ + p \rightarrow p + p + \bar{n}$ procede per interazione forte. Applicando le leggi di conservazione, ricavate la carica, il numero barionico e la stranezza dell'antineutrone.
13. Esaminando la stranezza delle particelle che prendono parte alle reazioni e ai decadimenti qui di seguito indicati, determinate quali avvengano per interazione forte: (*a*) $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; (*b*) $\Lambda^0 + p \rightarrow \Sigma^+ + n$; (*c*) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$; (*d*) $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. Si desumano i valori di S dalle tabelle 4 e 5.
14. Quali leggi di conservazione sono violate nelle reazioni e nei decadimenti qui di seguito proposti? (*a*) $\Lambda^0 \rightarrow p + K^-$; (*b*) $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$.
15. Applicando le leggi di conservazione, identificate le particelle indicate con x nelle reazioni seguenti, che avvengono in regime di interazione forte: (*a*) $p + p \rightarrow p + \Lambda^0 + x$; (*b*) $p + \bar{p} \rightarrow n + x$; (*c*) $\pi^- + p \rightarrow \Xi^0 + K^0 + x$.

Paragrafo 56-4 Il modello a quark

16. Dimostrare che, se invece di usare i diagrammi (S,Q) per i barioni a spin $\frac{1}{2}$ di figura 3*b* e per i mesoni a spin 0 di figura 3*a*, si usano diagrammi (Y,T_z), ove $Y = B + S$ e $T_z = Q - 1/2B$, il reticolato esagonale appare con assi non obliqui, ma perpendicolari. (La quantità Y è chiamata *ipercarica* e T_z è legata a una quantità chiamata *isospin*.)
17. Le composizioni in quark del protone e del neutrone sono rispettivamente uud e udd. Quali sono le composizioni in quark (*a*) dell'antiprotone e (*b*) dell'antineutrone?
18. Dalle tabelle 5 e 7 determinare l'identità dei barioni formati dalle combinazioni di quark indicate qui di seguito. Controllare le risposte con l'ottetto di barioni descritto nella figura 3*b*. (*a*) ddu; (*b*) uus; (*c*) ssd.
19. Quali sono le combinazioni di quark che formano (*a*) Λ^0; (*b*) Ξ^0?
20. Usando solamente quark su, giù e strani costruite, se possibile, un barione avente (*a*) $Q = +1$ e $S = -2$; (*b*) $Q = +2$ e $S = 0$.
21. Non si conoscono mesoni aventi $Q = +1$ e $S = -1$, oppure $Q = -1$ e $S = +1$. Spiegatene la ragione, utilizzando il modello dei quark.
22. Analizzate i seguenti decadimenti e reazioni in termini di contenuto in quark delle particelle di partenza: (*a*) $\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$; (*b*) $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$; (*c*) $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$; (*d*) $\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$.

Paragrafo 56-5 La cosmologia del big bang

23. Scegliendo due punti su ciascuna delle linee di figura 6 e calcolando la pendenza nell'intervallo fra di essi, verificare i valori indicati per il parametro di Hubble.
24. Se la legge di Hubble potesse essere estrapolata per distanze comunque grandi, a quale distanza la velocità di allontanamento risulterebbe uguale alla velocità della luce?
25. Qual è la lunghezza d'onda osservabile per la riga dell'idrogeno H_α, di lunghezza d'onda 656.3 nm, emessa da una galassia distante 2.4×10^8 pc?

ISBN 88-408-0777-2

26. In laboratorio una delle righe emesse dal sodio presenta lunghezza d'onda di 590.0 nm. Nelle osservazioni della luce proveniente da una certa galassia invece, la riga appare alla lunghezza d'onda di 602.0 nm. Si calcoli la distanza della galassia, assumendo per valida la legge di Hubble.

27. La lunghezza d'onda dei fotoni corrispondente alla massima intensità di un campo di radiazione alla temperatura T è $\lambda_{max} = (2898\ \mu m \cdot K) / T$ (eq. 4 del cap. 49). (*a*) Si dimostri che l'energia E in MeV di un simile fotone si può calcolare dalla

$$E = (4.28 \times 10^{-10}\ \text{MeV/K})T.$$

(*b*) Qual è la temperatura minima alla quale questo fotone può generare una coppia elettrone-positrone?

28. La velocità di allontanamento delle galassie e dei quasar a grandi distanze è prossima alla velocità della luce, cosicché si deve ricorrere alla formula relativistica dello spostamento per effetto Doppler (eq. 10 del cap. 42). Lo spostamento (relativo) verso il rosso è definito dalla frazione $z = \Delta\lambda/\lambda_0$. (*a*) Dimostrare che il parametro $\beta = v/c$ della velocità di recessione vale, in funzione di z,

$$\beta = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

(*b*) Il quasar più lontano che sia stato osservato (nel 1990) presenta $z = 4.43$. Calcolare il suo parametro di velocità β. (*c*) Trovare la distanza del quasar, ammettendo che la legge di Hubble sia valida per questa distanza.

29. Essendo dovunque presente la radiazione di fondo a microonde, la minima temperatura possibile per un gas nello spazio interstellare o intergalattico non è 0 K, ma 2.7 K. Ciò implica che una frazione significativa delle molecole presenti nello spazio che possiedono uno stato eccitato di energia a bassa eccitazione può trovarsi effettivamente in uno di questi stati di eccitazione. Una successiva diseccitazione porterebbe all'emissione di una radiazione che potrebbe essere captata. Si consideri una molecola (ipotetica) che possieda soltanto uno stato eccitato. (*a*) Quale dovrebbe essere il valore dell'energia di eccitazione affinché il 23% delle molecole si trovi nello stato eccitato? (*Suggerimento*: vedi paragrafo 52-6.) (*b*) Trovare la lunghezza d'onda di un fotone emesso durante la transizione allo stato fondamentale.

30. L'universo è destinato a espandersi indefinitamente? Per affrontare questo problema, ammettiamo l'ipotesi (ragionevole?) che la velocità di allontanamento v di una galassia alla distanza r da noi dipenda soltanto dalla quantità di materia presente all'interno di una sfera di raggio r centrata su di noi; vedi figura 19. Se la massa totale entro questa sfera vale M, la velocità di fuga v_e è $v_e = \sqrt{2GM/r}$ (vedi esempio 6 del capitolo 16). (*a*) Dimostrare che, per impedire una espansione illimitata, la densità media ρ all'interno della sfera dev'essere almeno pari a

$$\rho = 3H^2 / 8\pi G$$

(*b*) Valutare numericamente questa «densità critica», esprimendo la risposta in termini di atomi di H per m^3. Le misure della densità effettiva sono difficili e rese complicate della presenza di materia scura.

31. (*a*) Qual è la temperatura minima dell'universo necessaria affinché i fotoni producano coppie $\pi^+ - \pi^-$? (*b*) A che età l'universo aveva questa temperatura?

Paragrafo 56-7 L'età dell'universo

32. L'esistenza di materia scura (ossia non luminosa) in una galassia (ad esempio la nostra) può essere dedotta determinando, mediante osservazioni dirette, le variazioni, in funzione della distanza, dei periodi orbitali di rivoluzione delle stelle attorno al centro della galassia. Queste sono quindi confrontate con le variazioni calcolate in base alla distribuzione della materia risultante dall'osservazione della materia luminosa (principalmente stelle). Qualsiasi scarto significativo fra le variazioni corrispondenti implica l'esistenza di materia scura. Per esempio, supponiamo che la materia (stelle, gas, polvere) di una certa galassia, di massa totale M, sia uniformemente distribuita entro un volume sferico di raggio R. Una stella, di massa m, ruoti intorno al centro della galassia in un'orbita circolare di raggio $r < R$. (*a*) Dimostrare che la velocità orbitale v della stella è

$$v = r\sqrt{GM/R^3},$$

e pertanto il periodo di rivoluzione T vale

$$T = 2\pi\sqrt{R^3/GM},$$

che non dipende da r. (*b*) Qual è la formula corrispondente per il periodo orbitale, ammettendo che la massa sia fortemente concentrata in prossimità del centro della galassia, in modo tale che praticamente tutta la massa si trovi a una distanza dal centro minore di r? Queste considerazioni applicate alla nostra Via Lattea provano che sono presenti quantità rilevanti di materia scura.

33. (*a*) Dimostrare che il numero N di fotoni irraggiati, per unità di area e per unità di tempo, da un corpo nero alla temperatura T è dato da

$$\int_0^\infty \frac{R(\lambda)}{hc/\lambda}\,d\lambda \approx \frac{30\sigma}{\pi^4 k}T^3.$$

(*Suggerimento*: Nel calcolare l'integrale, si ignori l'1 al denominatore di $R(\lambda)$; vedere l'equazione 6 del cap. 49. Si usi il metodo di sostituzione delle variabili già visto al problema 17 (*a*) del capitolo 49.) (*b*) Con lo stesso grado di approssimazione, si dimostri che, alla temperatura di 9×10^8 K, l'abbondanza relativa di fotoni aventi energie superiori a 2.2 MeV vale 2.1×10^{-10}.

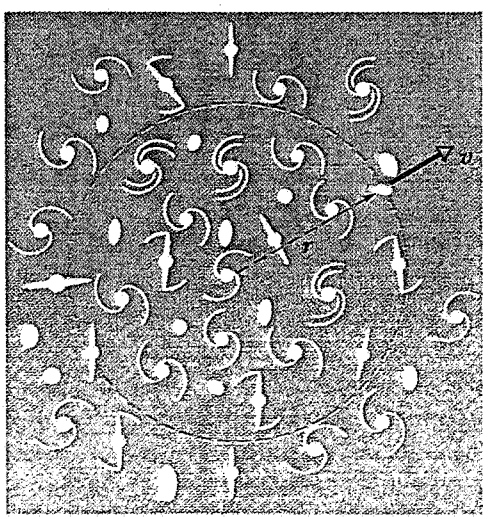


Figura 19 Problema 30.

Appendice A

SISTEMA INTERNAZIONALE DI UNITÀ (SI) (*)

UNITÀ SI FONDAMENTALI

Grandezza	*Nome*	*Simbolo*	*Definizione*
lunghezza	metro	m	"... la lunghezza è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299 792.458 di secondo" (1983)
massa	kilogrammo	kg	"... questo prototipo (un particolare cilindro di platino-irido) potrà d'ora in poi essere considerato l'unità di massa" (1889)
tempo	secondo	s	"... la durata di 9 192 631.770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133" (1967)
corrente elettrica	ampere	A	"... quella corrente costante che, passando in due conduttori paralleli rettilinei infinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a 1 m di distanza nel vuoto, produce tra i due conduttori una forza di 2×10^{-7} N per metro di lunghezza" (1946)
temperatura termodinamica	kelvin	K	"... la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua" (1967)
quantità di sostanza	mole	mol	"... la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0.012 kg di carbonio 12" (1971)
intensità luminosa	candela	cd	"... l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540×10^{12} Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è di (1/683) W/sr" (1979)

(*) Adattato da *The International System of Units (SI)*. National Bureau of Standards Special Publication 330, edizione 1972.
La definizione di queste unità fondamentali è stata adottata dalla Conferenza Generale Pesi e Misure, un ente internazionale, alle date indicate. In questo testo non faremo uso della candela.

ALCUNE UNITÀ DERIVATE SI

Grandezza	*Nome*	*Simbolo*	*Unità equivalenti*
superficie	metro quadrato	m^2	
volume	metro cubo	m^3	
frequenza	hertz	Hz	s^{-1}
massa volumica[1]	kilogrammo al metro cubo	kg/m^3	
velocità	metro al secondo	m/s	
velocità angolare	radiante al secondo	rad/s	
accelerazione	metro al secondo al quadrato	m/s^2	
accelerazione angolare	radiante al secondo al quadrato	rad/s^2	
forza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressione	pascal	Pa	N/m^2
energia, lavoro, calore	joule	J	$N \cdot m$
potenza, flusso radiante	watt	W	J/s
quantità di elettricità, carica elettrica	coulomb	C	$A \cdot s$
potenziale elettrico, differenza di potenziale, forza elettromotrice	volt	V	$N \cdot m/C$
campo elettrico	volt al metro	V/m	N/C
capacità elettrica	farad	F	$A \cdot s/V$
resistenza elettrica	ohm	Ω	V/A
flusso magnetico	weber	Wb	$V \cdot s$
induzione magnetica	tesla	T	Wb/m^2, $N/A \cdot m$
induttanza	henry	H	$V \cdot s/A$
entropia	joule al kelvin	J/K	
calore specifico	joule al kilogrammo per kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
conduttività termica	watt al metro per kelvin	$W/(m \cdot K)$	
intensità radiante	watt allo steradiante	W/sr	

1. Precedentemente chiamata *densità*.

UNITÀ SUPPLEMENTARI DEL SI

Grandezza	*Nome*	*Simbolo*
angolo	radiante	rad
angolo solido	steradiante	sr

Appendice B

ALCUNE COSTANTI FONDAMENTALI DELLA FISICA

Costante	*Simbolo*	*Valore usato nei calcoli*	*Valore migliore* (1986)	
			Valore [a]	*Incertezza* [b]
Velocità della luce nel vuoto	c	3.00×10^{8} m/s	2.99792458	esatto
Carica elementare	e	1.60×10^{-19} C	1.60217733	0.30
Massa a riposo dell'elettrone	m_e	9.11×10^{-31} kg	9.1093897	0.59
Costante dielettrica	ϵ_0	8.85×10^{-12} F/m	8.85418781762	esatto
Costante di permeabilità magnetica	μ_0	1.26×10^{-6} H/m	1.25663706143	esatto
Massa a riposo dell'elettrone m [c]	m_e	5.49×10^{-4} u	5.48579902	0.023
Massa a riposo del neutrone [c]	m_n	1.0087 u	1.008664904	0.014
Massa a riposo dell'atomo di idrogeno [c]	$m(^1\mathrm{H})$	1.0078 u	1.007825035	0.011
Massa a riposo dell'atomo di deuterio [c]	$m(^2\mathrm{H})$	2.0141 u	2.014101779	0.012
Massa a riposo dell'atomo di elio [c]	$m(^4\mathrm{He})$	4.0026 u	4.00260324	0.012
Rapporto tra carica e massa dell'elettrone	e/m_e	1.76×10^{11} C/kg	1.75881962	0.30
Massa a riposo del protone	m_p	1.67×10^{-27} kg	1.6726231	0.59
Rapporto tra le masse del protone e dell'elettrone	m_p/m_e	1840	1836.152701	0.020
Massa a riposo del neutrone	m_n	1.67×10^{-27} kg	1.6749286	0.59
Massa a riposo del muone	m_μ	1.88×10^{-28} kg	1.8835327	0.61
Costante di Planck	h	6.63×10^{-34} J·s	6.6260755	0.60
Lunghezza d'onda Compton dell'elettrone	λ_e	2.43×10^{-12} m	2.42631058	0.089
Costante universale dei gas	R	8.31 J/mole·K	8.314510	8.4
Numero di Avogadro	N_A	6.02×10^{23} mole^{-1}	6.0221367	0.59
Costante di Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J/K	1.3806513	1.8
Volume molare di un gas ideale a STP [d]	V_m	2.24×10^{-2} m^3/mole	2.2413992	1.7
Costante di Faraday	F	9.65×10^{4} C/mole	9.6485309	0.30
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	5.67×10^{-8} W/m^2·K^4	5.670399	6.8
Costante di Rydberg	R	1.10×10^{7} m^{-1}	1.0973731571	0.00036
Costante gravitazionale	G	6.67×10^{-11} m^3/s^2·kg	6.67259	128
Raggio di Bohr	a_0	5.29×10^{-11} m	5.29177249	0.045
Momento magnetico dell'elettrone	μ_e	9.28×10^{-24} J/T	9.2847700	0.34
Momento magnetico del protone	μ_p	1.41×10^{-26} J/T	1.41060761	0.34
Magnetone di Bohr	μ_B	9.27×10^{-24} J/T	9.2740154	0.34
Magnetone nucleare	μ_N	5.05×10^{-27} J/T	5.0507865	0.34
Costante di struttura fine	α	1/137	1/137.0359895	0.045
Quanto del flusso magnetico	Φ_0	2.07×10^{-15} Wb	2.06783461	0.30
Resistenza Hall quantizzata	R_H	25800 Ω	25812.8056	0.045

[a] Stesse unità e potenza del dieci del valore usato nei calcoli
[b] Parti per milione
[c] Masse espresse in unità di massa atomiche dove 1 u = $1.6605402 \times 10^{-27}$ kg
[d] STP indica temperatura e pressione standard ($T = 0$ °C e $p = 100$ kPa)

Appendice C

ALCUNI DATI ASTRONOMICI

IL SOLE, LA TERRA E LA LUNA

Proprietà	*Sole*[a]	*Terra*	*Luna*
Massa (kg)	1.99×10^{30}	5.98×10^{24}	7.36×10^{22}
Raggio medio (m)	6.96×10^{8}	6.37×10^{6}	1.74×10^{6}
Densità media (kg/m^3)	1410	5520	3340
Accelerazione gravitazionale alla superficie (m/s^2)	274	9.81	1.67
Velocità di fuga (km/s)	618	11.2	2.38
Periodo di rotazione[c] (d)	26 – 37[b]	0.997	27.3
Raggio medio dell'orbita (km)	2.6×10^{17}[d]	1.50×10^{8}[e]	3.82×10^{5}[f]
Periodo di rivoluzione	2.4×10^{8} y[d]	1.00 y[e]	27.3 d[f]

a Il Sole irradia energia con una potenza di 3.90×10^{26} W; l'intensità solare extraatmosferica alla distanza media della Terra è, per indicenza normale, di 1380 W/m^2.
b Il Sole, una palla di gas, non ruota come un corpo rigido. Il suo periodo di rivoluzione varia tra i 26 giorni all'equatore e i 37 giorni ai poli.
c Misurato rispetto alle stelle fisse.
d Rispetto al centro della galassia.
e Intorno al Sole
f Intorno alla Terra

ALCUNE PROPRIETÀ DEI PIANETI

	Mercurio	*Venere*	*Terra*	*Marte*	*Giove*	*Saturno*	*Urano*	*Nettuno*	*Plutone*
Distanza media dal Sole (10^6 km)	57.9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Periodo di rivoluzione (anni)	0.241	0.615	1.00	1.88	11.9	29.5	84.0	165	248
Periodo di rotazione[a] (giorni)	58.7	243[b]	0.997	1.03	0.409	0.429	0.451[b]	0.658	6.39
Velocità orbitale (km/s)	47.9	35.0	29.8	24.1	13.1	9.64	6.81	5.43	4.74
Inclinazione dell'asse rispetto all'orbita	0.0°	2.6°	23.5°	24.0°	3.08°	26.7°	82.1°	28.8°	65°
Inclinazione dell'orbita rispetto a quella terrestre	7.00°	3.39°	—	1.85°	1.30°	2.49°	0.77°	1.77°	17.2°
Eccentricità dell'orbita	0.206	0.0068	0.0167	0.0934	0.0485	0.0556	0.0472	0.0086	0.250
Diametro equatoriale (km)	4 880	12 100	12 800	6 790	143 000	120 000	51 800	49 500	3 400
Massa (Terra = 1)	0.0558	0.815	1.000	0.107	318	95.1	14.5	17.2	0.002
Densità media (g/cm^3)	5.60	5.20	5.52	3.95	1.31	0.704	1.21	1.67	0.5(?)
Accelerazione gravitazionale alla superficie[c] (m/s^2)	3.78	8.60	9.78	3.72	22.9	9.05	7.77	11.0	0.03
Velocità di fuga (km/s)	4.3	10.3	11.2	5.0	59.5	35.6	21.2	23.6	1.3
Satelliti noti	0	0	1	2	16 + anelli	19 – anelli	15 + anelli	8 + anelli	1

a Misurato rispetto alle stelle fisse.
b Il senso di rotazione è opposto a quello del moto orbitale.
c Misurato all'equatore del pianeta.

Appendice D

PROPRIETÀ DEGLI ELEMENTI

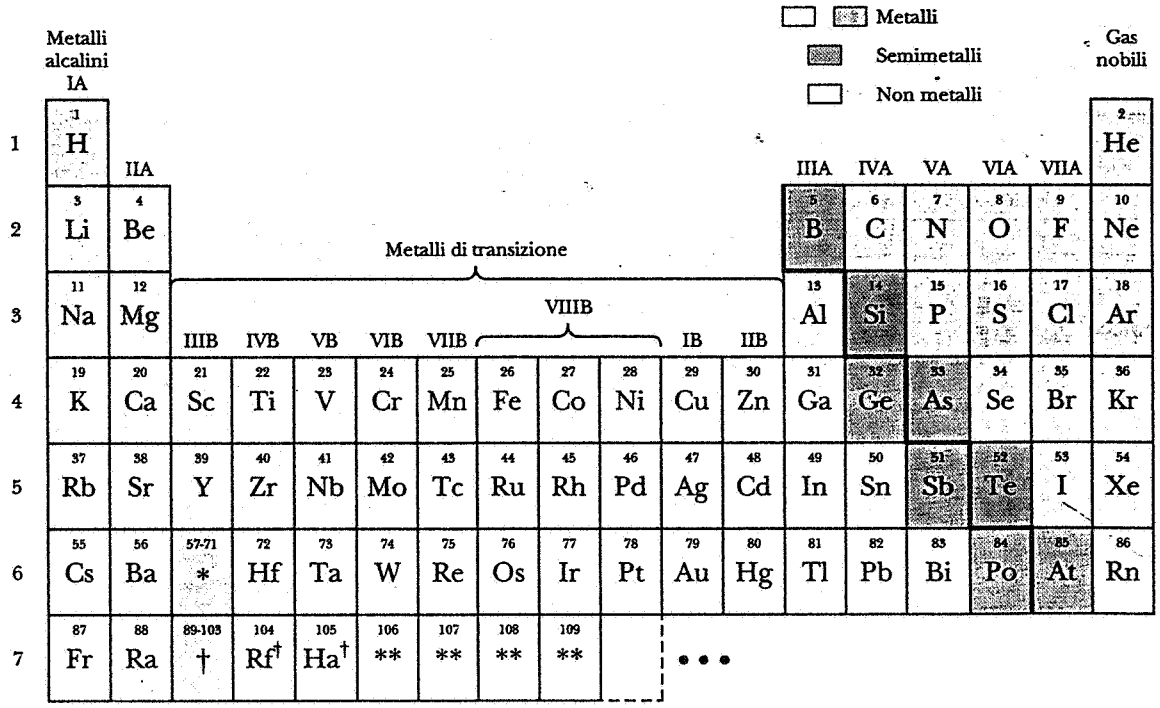
	Simbolo	*Numero atomico* Z	*Massa molare* (g/mole)	*Densità* (g/cm^3) a 20 °C	*Punto di fusione* (°C)	*Punto di ebollizione* (°C)	*Calore specifico* (J/g · K) a 25 °C
Afnio	Hf	72	178.49	13.31	2227	4602	0.144
Alluminio	Al	13	26.9815	2.699	660	2467	0.900
Americio	Am	95	(243)	13.7	994	2607	0.11
Antimonio	Sb	51	121.75	6.69	630.5	1780	0.205
Argento	Ag	47	107.86	10.49	961.9	2212	0.234
Argon	Ar	18	39.948	1.6626×10^{-3}	− 189.2	− 185.7	0.523
Arsenico	As	33	74.9216	5.72	817 (28 at.)	613	0.331
Astato	At	85	(210)	—	302	337	—
Attinio	Ac	89	(227)	—	1050	3200	0.092
Azoto	N	7	14.0067	1.1649×10^{-3}	− 210	− 195.8	1.03
Bario	Ba	56	137.33	3.5	725	1640	0.205
Berillio	Be	4	9.0122	1.848	1278	2770	1.83
Berkelio	Bk	97	(247)	—	—	—	—
Bismuto	Bi	83	208.980	9.75	271.3	1560	0.122
Boro	B	5	10.811	2.34	2250	2550	1.11
Bromo	Br	35	79.909	3.12 (liquido)	− 7.2	58	0.293
Cadmio	Cd	48	112.41	8.65	320.9	765	0.226
Calcio	Ca	20	40.08	1.55	839	1484	0.624
Californio	Cf	98	(251)	—	900	—	—
Carbonio	C	6	12.011	2.25	3550	—	0.691
Cerio	Ce	58	140.12	6.768	798	3443	0.188
Cesio	Cs	55	132.905	1.873	28.40	690	0.243
Cloro	Cl	17	35.453	3.214×10^{-3} (0 °C)	− 101	− 34.6	0.486
Cobalto	Co	27	58.9332	8.85	1495	2870	0.423
Cripton	Kr	36	83.80	3.488×10^{-3}	− 156.6	− 152.3	0.247
Cromo	Cr	24	51.996	7.19	1857	2672	0.448
Curio	Cm	96	(247)	13.5	1340	—	—
Disprosio	Dy	66	162.50	8.55	1412	2567	0.172
Einsteinio	Es	99	(252)	—	—	—	—
Elio	He	2	4.0026	0.1664×10^{-3}	− 272.2	− 268.9	5.23
Erbio	Er	68	167.26	9.07	1529	2868	0.167
Europio	Eu	63	151.96	5.245	822	1527	0.163
Fermio	Fm	100	(257)	—	—	—	—
Ferro	Fe	26	55.847	7.87	1535	2750	0.447
Fluoro	F	9	18.9984	1.696×10^{-3} (0 °C)	− 219.6	− 188.2	0.753
Fosforo	P	15	30.9738	1.83	44.25	280	0.741
Francio	Fr	87	(223)	—	(27)	(677)	—
Gadolinio	Gd	64	157.25	7.90	1313	3273	0.234
Gallio	Ga	31	69.72	5.907	29.78	2200	0.377
Germanio	Ge	32	72.61	5.323	937.4	2830	0.322
Idrogeno	H	1	1.00797	0.08375×10^{-3}	− 259.34	− 252.87	14.4
Indio	In	49	114.82	7.31	156.6	2080	0.233
Iodio	I	53	126.9044	4.94	113.5	184.35	0.218
Iridio	Ir	77	192.2	22.5	2410	4130	0.130
Itterbio	Yb	70	173.04	6.966	819	1196	0.155

(continua)

	Simbolo	Numero atomico Z	Massa molare (g/mole)	Densità (g/cm^3) a 20 °C	Punto di fusione (°C)	Punto di ebollizione (°C)	Calore specifico (J/g · K) a 25 °C
Ittrio	Y	39	88.905	4.469	1552	3000	0.297
Lantanio	La	57	138.91	6.145	918	3464	0.195
Laurenzio	Lr	103	(260)	—	—	—	—
Litio	Li	3	6.939	0.534	180.54	1342	3.58
Lutezio	Lu	71	174.97	9.84	1663	3402	0.155
Magnesio	Mg	12	24.305	1.74	649	1090	1.03
Manganese	Mn	25	54.9380	7.43	1244	2100	0.481
Mendelevio	Md	101	(258)	—	—	—	—
Mercurio	Hg	80	200.59	13.55	− 38.87	357	0.138
Molibdeno	Mo	42	95.94	10.22	2617	4612	0.251
Neodimio	Nd	60	144.24	7.00	1021	3074	0.188
Neon	Ne	10	20.180	0.8387×10^{-3}	− 248.67	− 246.0	1.03
Nettunio	Np	93	(237)	20.25	640	3902	1.26
Nichel	Ni	28	58.69	8.902	1453	2732	0.444
Niobio	Nb	41	92.906	8.57	2468	4742	0.264
Nobelio	No	102	(259)	—	—	—	—
Olmio	Ho	67	164.930	8.79	1474	2700	0.165
Oro	Au	79	196.967	19.32	1064.43	2900	0.131
Osmio	Os	76	190.2	22.57	3045	5027	0.130
Ossigeno	O	8	15.9994	1.3318×10^{-3}	− 218.4	− 183.0	0.913
Palladio	Pd	46	106.4	12.02	1554	3980	0.243
Piombo	Pb	82	207.19	11.36	327.50	1740	0.129
Platino	Pt	78	195.09	21.45	1772	3827	0.134
Plutonio	Pu	94	(244)	19.84	641	3232	0.130
Polonio	Po	84	(209)	9.24	254	962	0.126
Potassio	K	19	39.098	0.86	63.25	760	0.758
Praseodimio	Pr	59	140.907	6.773	931	3520	0.197
Prometeo	Pm	61	(145)	7.22	1042	(3000)	0.185
Protoattinio	Pa	91	(231)	15.4	1600	—	0.121
Radio	Ra	88	(226)	5.0	700	1140	0.12
Radon	Rn	86	(222)	9.96×10^{-3} (0 °C)	− 71	− 61.8	0.092
Rame	Cu	29	63.54	8.96	1083.4	2567	0.385
Renio	Re	75	186.2	21.04	3180	5627	0.134
Rodio	Rh	45	102.905	12.44	1965	3727	0.243
Rubidio	Rb	37	85.47	1.53	38.89	686	0.364
Rutenio	Ru	44	101.107	12.2	2250	3900	0.239
Samario	Sm	62	150.35	7.49	1074	1794	0.197
Scandio	Sc	21	44.956	2.99	1541	2836	0.569
Selenio	Se	34	78.96	4.79	217	685	0.318
Silicio	Si	14	28.086	2.33	1410	2680	0.712
Sodio	Na	11	22.9898	0.9712	97.81	882.9	1.23
Stagno	Sn	50	118.71	7.31	231.97	2270	0.226
Stronzio	Sr	38	87.62	2.54	769	1384	0.737
Tallio	Tl	81	204.38	11.85	304	1457	0.130
Tantalio	Ta	73	180.948	16.6	2996	5425	0.138
Tecnezio	Tc	43	(98)	11.46	2172	—	0.209
Tellurio	Te	52	127.60	6.24	449.5	990	0.201
Terbio	Tb	65	158.924	8.25	1357	3230	0.180
Titanio	Ti	22	47.88	4.54	1660	3287	0.523
Torio	Th	90	(232)	11.72	1750	(3850)	0.117
Tulio	Tm	69	168.934	9.31	1545	1950	0.159
Tungsteno	W	74	183.85	19.3	3410	5930	0.134
Uranio	U	92	(238)	19.07	1132	3818	0.117
Vanadio	V	23	50.942	6.1	1890	3380	0.490
Xenon	Xe	54	131.30	5.495×10^{-3}	− 111.79	− 108	0.159
Zinco	Zn	30	65.37	7.133	419.58	907	0.389
Zirconio	Zr	40	91.22	6.506	1852	3580	0.276
Zolfo	S	16	32.066	2.07	112.8	444.6	0.707

Tra gli elementi radioattivi i valori tra parentesi nella colonna delle masse atomiche sono i numeri di massa degli isotopi di vita media più lunga.
Il punti di fusione e i punti di ebollizione fra parentesi sono incerti.
Eccetto per i casi in cui i valori sono stati specificati, tutte le proprietà fisiche sono alla pressione atmosferica.
I dati per i gas si riferiscono allo stato molecolare come H_2, He, O_2, Ne, ecc. I calori specifici dei gas sono a pressione costante.
Riferimento: *Handbook of Chemistry and Physics*, 71ma edizione (CRC Press, 1990)

TAVOLA PERIODICA DEGLI ELEMENTI[1]



† I nomi di questi elementi (Rutherfordio e Hahnio) non sono stati accettati a causa di rivendicazioni della loro scoperta. Un gruppo della ex URSS ha proposto i nomi di Kurchatovio e Neilsbohrio.

** Questi elementi sono stati scoperti ma ancora non è stato loro attribuito un nome.

[1] Il sistema periodico degli elementi fu proposto, in una forma più primordiale, dal chimico russo D.I. Mendeleev (1834-1907). Per questo motivo questa tavola è anche detta *tavola di Mendeleev*.

Appendice F

PARTICELLE ELEMENTARI

1. PARTICELLE FONDAMENTALI

LEPTONI

Particella	*Simbolo*	*Antiparticella*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Massa a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Tipici prodotti di decadimento*
Elettrone	e^-	e^+	-1	1/2	0.511	∞	
Neutrino elettronico	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	1/2	<0.00002	∞	
Muone	μ^-	μ^+	-1	1/2	105.7	2.2×10^{-6}	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
Neutrino muonico	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	1/2	<0.3	∞	
Tau	τ^-	τ^+	-1	1/2	1784	3.0×10^{-13}	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$
Neutrino tau	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	1/2	<40	∞	

QUARK

Tipo di quark	*Simbolo*	*Antiparticella*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Massa a riposo*[a] (MeV)	*Altre proprietà*
Su	u	$\bar{u}$	+2/3	1/2	300	$C = S = T = B = 0$
Giù	d	$\bar{d}$	−1/3	1/2	300	$C = S = T = B = 0$
Incantato	c	$\bar{c}$	+2/3	1/2	1500	Incantesimo (C) $= +1$
Strano	s	$\bar{s}$	−1/3	1/2	500	Stranezza (S) $= -1$
Vero[b]	t	$\bar{t}$	+2/3	1/2	$>40\,000$	Verità (T) $= +1$
Bello	b	$\bar{b}$	−1/3	1/2	4700	Bellezza (B) $= -1$

PARTICELLE DI CAMPO

Particella	*Simbolo*	*Interazione*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Massa a riposo* (GeV)
Gravitone[b]		Gravitazionale	0	2	0
Bosone debole	W^+, W^-	Debole	± 1	1	80.6
Bosone debole	Z^0	Debole	0	1	91.2
Fotone	γ	Electromagnatica	0	1	0
Gluone	g	Forte (colore)	0	1	0

ISBN 88-408-0777-2

2. ALCUNE PARTICELLE COMPOSTE

BARIONI

Particella	*Simbolo*	*Quark contenuti*	*Antiparticella*	*Carica* (*e*)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Massa a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Decadimento tipico*
Protone	p	uud	$\bar{p}$	+1	1/2	938	$>10^{40}$	$\pi^0 + e^+(?)$
Neutrone	n	udd	$\bar{n}$	0	1/2	940	889	$p + e^- + \nu_e$
Lambda	Λ^0	uds	$\bar{\Lambda}^0$	0	1/2	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
Omega	Ω^-	sss	$\bar{\Omega}^-$	−1	3/2	1673	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$
Delta	Δ^{++}	uuu	$\bar{\Delta}^{--}$	+2	3/2	1232	5.7×10^{-24}	$p + \pi^+$
Lambda incantato	Λ_c^+	udc	$\bar{\Lambda}_c^-$	+1	1/2	2285	1.9×10^{-13}	$\Lambda^0 + \pi^+$

MESONI

Particella	*Simbolo*	*Quark contenuti*	*Antiparticella*	*Carica* (*e*)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Massa a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Decadimento tipico*
Pione	π^+	$u\bar{d}$	π^-	+1	0	140	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Pione	π^0	$u\bar{u} + d\bar{d}$	π^0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
Kaone	K^+	$u\bar{s}$	K^-	+1	0	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
Kaone	K^0	$d\bar{s}$	$\bar{K}^0$	0	0	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
Ro	ρ^+	$u\bar{d}$	ρ^-	+1	1	768	4.5×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^-$
Mesone D	D^+	$c\bar{d}$	D^-	+1	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
Psi	ψ	$c\bar{c}$	ψ	0	1	3097	1.0×10^{-20}	$e^+ + e^-$
Mesone B	B^+	$u\bar{b}$	B^-	+1	0	5278	1.2×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Ipsilon	Y	$b\bar{b}$	Y	0	1	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

[a] Le masse a riposo dei quark non sono quelle delle particelle libere; poiché non sono mai stati osservati quark liberi, non è possibile misurare la loro massa isolata. I valori riportati si riferiscono alle masse a riposo efficaci dei quark che costituiscono una particella composta.
[b] Particelle previste ma non ancora osservate
Valori tratti da: «Review of Particle Properties», Physics Letters B, vol. 239 (aprile 1990).

Appendice G

FATTORI DI CONVERSIONE

I fattori di conversione si possono ricavare rapidamente dalle tabelle. Per esempio, 1 grado $= 2.778 \times 10^{-3}$ angoli giri, quindi $16.7° = 16.7 \times 2.778 \times 10^{-3}$ giri. Le unità SI sono in carattere maiuscolo. Adattato parzialmente da G. Shortley e D. Williams, *Elements of Physics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1971

ANGOLI PIANI

	°	′	″	rad	angoli giri
1 grado =	1	60	3600	1.745×10^{-2}	2.778×10^{-3}
1 minuto =	1.667×10^{-2}	1	60	2.909×10^{-4}	4.630×10^{-5}
1 secondo =	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	4.848×10^{-6}	7.716×10^{-7}
1 RADIANTE	57.30	3438	2.063×10^{5}	1	0.1592
1 angolo giro =	360	2.16×10^{4}	1.296×10^{6}	6.283	1

ANGOLI SOLIDI

1 angolo sferico = 4π steradianti = 12.56 steradianti

LUNGHEZZA

	cm	m	km	pollici (in)	piedi (ft)	miglia (mi)
1 centimetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39.3	3.281	6.214×10^{-4}
1 kilometro =	10^{5}	1000	1	3.937×10^{-4}	3281	0.6214
1 pollice (inch) =	2.540	2.540×10^{-2}	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 piede (foot) =	30.48	0.3048	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 miglio (mile) =	1.609×10^{5}	1609	1.609	6.336×10^{4}	5280	1

1 ångström (Å) $= 10^{-10}$ m
1 miglio marino = 1852 m = 1.151 miglia = 6076 ft
1 fermi $= 10^{-15}$ m
1 anno-luce $= 9.4600 \times 10^{12}$ km
1 parsec $= 3.084 \times 10^{13}$ km
1 raggio di Bohr $= 5.292 \times 10^{-11}$ m
1 iarda = 3 ft

SUPERFICIE

	m^2	cm^2	ft^2	in^2
1 METRO QUADRATO =	1	10^{4}	10.76	1550
1 centimetro quadrato =	10^{-4}	1	1.076×10^{-3}	0.1550
1 piede quadrato =	9.290×10^{-2}	929.0	1	144
1 pollice quadrato =	6.452×10^{-4}	6.452	6.944×10^{-3}	1

1 miglio quadrato = 640 acri.
1 barn $= 10^{-28}$ m^2.
1 acro = 43 600 ft^2.
1 ettaro $= 10^{4}$ m^2

ISBN 88-408-0777-2

VOLUME

	m^3	cm^3	L	ft^3	in^3
1 METRO CUBO =	1	10^6	1000	35.31	6.102×10^4
1 centimetro cubo =	10^{-6}	1	1.000×10^{-3}	3.531×10^{-5}	6.102×10^{-2}
1 litro =	1.000×10^{-3}	1000	1	3.531×10^{-2}	61.02
1 piede cubo =	2.832×10^{-2}	2.832×10^4	28.32	1	1728
1 pollice cubo =	1.639×10^{-5}	16.39	1.639×10^{-2}	5.787×10^{-4}	1

MASSA

Le quantità indicate nelle zone colorate non sono unità di massa ma sono spesso usate come tali. Quando si scrive, per esempio 1 kg = 2.205 lb si vuol dire che 1 kg ha una *massa* che *pesa* 2.205 libbre (con $g = 9.80665\ m/s^2$).

	g	kg	t	u	oz	lb
1 grammo =	1	0.001	10^{-6}	6.024×10^{23}	3.527×10^{-2}	2.205×10^{-3}
1 KILOGRAMMO =	1000	1	0.001	6.024×10^{26}	35.27	2.205
1 tonnellata =	10^6	1000	1	6.024×10^{29}	3.527×10^4	2205
1 unità di massa atomica =	1.660×10^{-24}	1.660×10^{-27}	1.660×10^{-30}	1	5.855×10^{-26}	3.660×10^{-27}
1 oncia (ounce) =	28.35	0.02835	2.835×10^{-5}	1.718×10^{25}	1	6.250×10^{-2}
1 libbra (pound) =	453.6	0.4536	4.536×10^{-4}	2.732×10^{26}	16	1

DENSITÀ[1]

Le quantità nelle zone colorate sono pesi specifici e, come tali, sono dimensionalmente diversi dalle densità, (V. nota relativa alla tabella delle unità di massa).

	kg/m^3	g/cm^3	lb/ft^3	lb/in^3
1 KILOGRAMMO al METRO CUBO =	1	0.001	0.06243	3.613×10^{-5}
1 grammo al centimetro cubo =	1000	1	62.43	0.03613
1 libbra al piede cubo =	16.02	0.01602	1	5.787×10^{-4}
1 libbra al pollice cubo =	2.768×10^4	27.68	1728	1

1. Le recenti normative impongono l'uso del termine *massa volumica* in luogo di *densità*, termine che tuttavia non è ancora entrato nell'uso comune.

TEMPO

	y	d	h	min	s
1 anno =	1	365.2	8.766×10^3	5.259×10^5	3.156×10^7
1 giorno =	2.738×10^{-3}	1	24	1440	8.640×10^4
1 ora =	1.141×10^{-4}	4.167×10^{-2}	1	60	3600
1 minuto =	1.901×10^{-6}	6.944×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1	60
1 SECONDO =	3.169×10^{-8}	1.157×10^{-5}	2.778×10^{-4}	1.667×10^{-2}	1

VELOCITÀ

	ft/s	km/h	m/s	mi/h	cm/s
1 piede al secondo =	1	1.097	0.3048	0.6818	30.48
1 klometro all'ora =	0.9113	1	0.2778	0.6214	27.78
1 METRO al SECONDO =	3.281	3.6	1	2.237	100
1 miglio all'ora =	1.467	1.609	0.4470	1	44.70
1 centimetro al secondo =	3.281×10^{-2}	3.6×10^{-2}	0.01	2.237×10^{-2}	1

1 nodo = 1 miglio marino/h 1 miglio/min = 88.00 ft/s = 60.00 mi/h

FORZA

Le quantità nelle zone ombreggiate sono unità di forza definite per un determinato valore dell'accelerazione di gravità, pari a g. Per esempio, scrivendo:

1 grammo forza = 980.7 dyn

intendiamo che la *massa* di 1 grammo subisce una *forza* di 980.7 dyn nel campo gravitazionale terrestre ($g = 9.80665$ m/s^2).

	dyn	N	lb	pdl	gf	kgf
1 dyn =	1	10^{-5}	2.248×10^{-6}	7.233×10^{-5}	1.020×10^{-3}	1.020×10^{-6}
1 NEWTON =	10^5	1	0.2248	7.233	102.0	0.1020
1 libbra (pound) =	4.448×10^5	4.448	1	32.17	453.6	0.4536
1 poundal =	1.383×10^4	0.1383	3.108×10^{-2}	1	14.10	1.410×10^{-2}
1 grammo forza =	980.7	9.807×10^{-3}	2.205×10^{-3}	7.093×10^{-2}	1	0.001
1 kilogrammo forza =	9.807×10^5	9.807	2.205	70.93	1000	1

ENERGIA, LAVORO, CALORE

Le ultime due voci della tabella non sono propriamente di energia, ma sono state incluse per praticità. In base alla formula relativistica che esprime l'equivalenza massa-energia $E = mc^2$, rappresentano l'energia sviluppata dalla completa conversione in energia di 1 kilogrammo o di un'unità di massa atomica (u)

	Btu	erg	ft · lb	CV · h	J	cal	kWh	eV	MeV	kg	u
1 British thermal unit =	1	1.005×10^{10}	777.9	3.983×10^{-4}	1055	252.0	2.930×10^{-4}	6.585×10^{15}	6.585×10^{15}	1.174×10^{-14}	7.074×10^{12}
1 erg =	9.481×10^{-11}	1	7.376×10^{-8}	3.777×10^{-14}	10^{-7}	2.389×10^{-8}	2.778×10^{-14}	6.242×10^{11}	6.242×10^{5}	1.113×10^{-24}	670.5
1 foot-pound =	1.285×10^{-3}	1.350×10^{7}	1	5.121×10^{-7}	1.356	0.3239	3.766×10^{-7}	8.464×10^{18}	8.464×10^{12}	1.509×10^{-17}	9.092×10^{9}
1 cavallo-vapore ora =	2510	2.648×10^{13}	1.952×10^{6}	1	2.648×10^{6}	6.326×10^{5}	0.7355	1.653×10^{25}	1.653×10^{19}	2.947×10^{-11}	1.755×10^{16}
I JOULE =	9.481×10^{-4}	10^7	0.7376	3.777×10^{-7}	1	0.2389	2.778×10^{-7}	6.242×10^{18}	6.242×10^{12}	1.113×10^{-17}	6.705×10^{9}
1 caloria =	3.968×10^{-2}	4.186×10^{7}	3.087	1.581×10^{-6}	4.186	1	1.163×10^{-6}	2.613×10^{19}	2.613×10^{13}	4.659×10^{-17}	2.807×10^{10}
1 kilowattora =	3413	3.6×10^{13}	2.655×10^{6}	1.360	3.6×10^{6}	8.601×10^{5}	1	2.247×10^{25}	2.270×10^{19}	4.007×10^{-11}	2.414×10^{16}
1 elettronvolt =	1.519×10^{-22}	1.602×10^{-12}	1.182×10^{-19}	6.050×10^{-26}	1.602×10^{-19}	3.827×10^{-20}	4.450×10^{-26}	1	10^{-6}	1.783×10^{-36}	1.074×10^{-9}
10^6 elettronvolt =	1.519×10^{-16}	1.602×10^{-6}	1.182×10^{-13}	6.050×10^{-20}	1.602×10^{-13}	3.827×10^{-14}	4.450×10^{-20}	10^6	1	1.783×10^{-30}	1.074×10^{-3}
1 kilogrammo =	8.521×10^{13}	8.987×10^{23}	6.629×10^{16}	3.394×10^{10}	8.987×10^{16}	2.147×10^{16}	2.497×10^{10}	5.610×10^{35}	5.610×10^{29}	1	6.025×10^{26}
1 unità di massa atomica =	1.415×10^{-13}	1.492×10^{-3}	1.100×10^{-10}	5.635×10^{-17}	1.492×10^{-10}	3.564×10^{-11}	4.145×10^{-17}	9.31×10^{8}	931.0	1.660×10^{-27}	1

ISBN 88-408-0777-2

PRESSIONE

	atm	dyn/cm^2	mH_2O	cmHg	Pa	lb/in^2
1 atmosfera =	1	1.013×10^6	10.33	76	1.013×10^5	14.70
1 dina al cm^2 =	9.869×10^{-7}	1	1.02×10^{-5}	7.501×10^{-5}	0.1	1.450×10^{-5}
1 metro d'acqua a 4 °C (*a*) =	9.6784×10^{-2}	9.807×10^4	1	7.3556	9807	1.4223
1 centimetro di mercurio a 0 °C (*a*) =	1.316×10^{-2}	1.333×10^4	0.136	1	1333	0.1934
1 PASCAL =	9.869×10^{-6}	10	1.02×10^{-4}	7.501×10^{-4}	1	1.450×10^{-4}
1 libbra al in^2	6.805×10^{-2}	6.895×10^4	0.7033	5.171	6.895×10^3	1

(*a*) Dove l'accelerazione di gravità ha il valore standard 9.80665 m/s^2.
1 bar = 10^6 dyn/cm^2 = 0.1 MPa 1 millibar = 10^3 dyn/cm^2 = 10^2 Pa 1 torr = 1 millimetro di mercurio.

POTENZA

	Btu/h	ft · lb/s	CV	cal/s	kW	W
1 British thermal unit all'ora =	1	0.2161	3.982×10^{-4}	7.000×10^{-2}	2.930×10^{-4}	0.2930
1 piede libbra al secondo =	4.628	1	1.842×10^{-3}	0.32239	1.356×10^{-3}	1.356
1 cavallo vapore =	2510		1	175.8	0.7355	735.5
1 caloria al secondo =	14.29		5.688×10^{-3}	1	4.186×10^{-3}	4.186
1 kilowatt =	3413	737.6	1.359	238.9	1	1000
1 WATT =	3.413		1.359×10^{-3}	0.2389	0.001	1

FLUSSO MAGNETICO

	Mx	Wb
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^8	1

CAMPO MAGNETICO

	G	T	mG
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^4	1	10^7
1 milligauss =	0.001	10^{-7}	1

1 T = 1 Wb/m^2

Appendice H

FORMULE MATEMATICHE

GEOMETRIA

Cerchio di raggio r: circonferenza $= 2\pi r$, superficie $= \pi r^2$.
Sfera di raggio r: superficie $= 4\pi r^2$, volume $= 4\pi r^3/3$.
Cilindro circolare retto di raggio r e altezza h: superficie totale $= 2\pi r(r+h)$, volume $= \pi r^2 h$.
Triangolo di base a e altezza h: superficie $= \frac{1}{2}ah$.

EQUAZIONI DI 2° GRADO

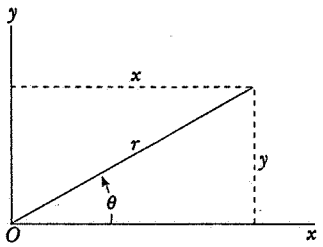
Se $ax^2 + bx + c = 0$, $\qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DELL'ANGOLO θ

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r} \qquad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

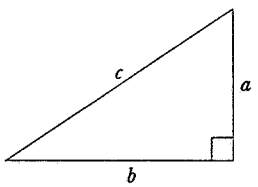
$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \qquad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{r}{y}$



TEOREMA DI PITAGORA

$a^2 + b^2 = c^2$.



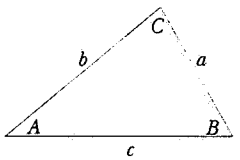
TRIANGOLI

Angoli A, B, C
Lati opposti a, b, c

$A + B + C = 180°$

$\dfrac{\operatorname{sen}A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}C}{c}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



SEGNI MATEMATICI E SIMBOLI

$=$ eguale
$\approx$ circa eguale
$\neq$ diverso
$\equiv$ identico a
$>$ maggiore di ($\gg$ molto maggiore di)
$<$ minore di ($\ll$ molto minore di)
$\geq$ maggiore o eguale a (oppure non minore di)
$\leq$ minore o eguale a (oppure non maggiore di)
$\pm$ più o meno (per es. $\sqrt{4} = \pm 2$)
$\propto$ proporzionale a
$\sum$ sommatoria
$\bar{x}$ valor medio di x.

PRODOTTI DI VETTORI

Siano $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ i versori dei tre assi x, y e z. Allora

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Qualsiasi vettore $\mathbf{a}$ di componenti a_x, a_y, a_z secondo i tre assi x, y e z si può scrivere

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sono tre vettori qualsiasi di moduli a, b e c, allora

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

$$(s\,\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(s\,\mathbf{b}) = s\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \qquad (s \text{ scalare})$$

Sia θ l'angolo più piccolo tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; allora

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\theta$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\,\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathbf{k}$$

$$|\,\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,| = ab\,\operatorname{sen}\theta$$

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

ISBN 88-408-0777-2

IDENTITÀ TRIGONOMETRICHE

$\text{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(90° - \theta) = \text{sen}\theta$
$\text{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \quad \text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$
$\text{sen}2\theta = 2\text{sen}\theta\cos\theta$
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\,\text{sen}^2\theta$
$\text{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}, \qquad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\,\text{sen}\theta$
$\text{sen}\alpha \pm \text{sen}\beta = 2\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

SVILUPPO DEL BINOMIO

$(1 \pm x)^n = 1 \pm \dfrac{nx}{1!} + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots (x^2 < 1)$
$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \dfrac{nx}{1!} + \dfrac{n(n+1)x^2}{2!} + \ldots (x^2 < 1)$

SVILUPPO ESPONENZIALE

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

SVILUPPO LOGARITMICO

$\ln(1 + x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots (|x| < 1)$

SVILUPPI DI FUNZIONI TRIGONOMETRICHE (θ in rad)

$\text{sen}\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} - \ldots$

$\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} - \ldots$

DERIVATE E INTEGRALI INDEFINITI

In ciò che segue u e v indicano funzioni arbitrarie di x, mentre a e m sono delle costanti. A tutti gli integrali va aggiunta una costante di integrazione. Per un elenco più ricco si veda *Handbook of Chemistry and Physics* (Chemical Rubber Pub. Co.).

1.	$\dfrac{dx}{dx} = 1$	1.	$\int dx = x$
2.	$\dfrac{d}{dx}(au) = a\dfrac{du}{dx}$	2.	$\int au\,dx = a\int u\,dx$
3.	$\dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$	3.	$\int (u+v)dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4.	$\dfrac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$	4.	$\int x^m\,dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\ (m \neq -1)$
5.	$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$	5.	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert$
6.	$\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$	6.	$\int u\dfrac{dv}{dx}dx = uv - \int v\dfrac{du}{dx}dx$
7.	$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$	7.	$\int e^x dx = e^x$
8.	$\dfrac{d}{dx}\text{sen}x = \cos x$	8.	$\int \text{sen}x\,dx = -\cos x$
9.	$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\text{sen}x$	9.	$\int \cos x\,dx = \text{sen}x$
10.	$\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	10.	$\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert$
11.	$\dfrac{d}{dx}\cot x = -\text{cosec}^2 x$	11.	$\int \text{sen}^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\text{sen}2x$
12.	$\dfrac{d}{dx}\sec x = \tan x\sec x$	12.	$\int e^{-ax}\,dx = -\dfrac{1}{a}e^{-ax}$
13.	$\dfrac{d}{dx}\text{cosec}x = -\cot x\,\text{cosec}x$	13.	$\int xe^{-ax}\,dx = -\dfrac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
14.	$\dfrac{d}{dx}e^u = e^u\dfrac{du}{dx}$	14.	$\int x^2e^{-ax}\,dx = -\dfrac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15.	$\dfrac{d}{dx}\text{sen}u = \cos u\dfrac{du}{dx}$	15.	$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$
16.	$\dfrac{d}{dx}\cos u = -\text{sen}u\dfrac{du}{dx}$	16.	$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$

Appendice I

PROGRAMMI AL CALCOLATORE

Nel seguito sono riportati due esempi di programmi utili per calcolare le traiettorie di particelle cariche che si muovono in campi elettrici e magnetici. Sono basati sui programmi per calcoli di cinematica, che comportano l'azione di forze non costanti, già forniti nell'appendice I del primo volume. I programmi sono scritti in linguaggio BASIC e si possono adattare facilmente per funzionare su quasi tutti i personal computer. Con opportune modifiche, possono essere utilizzati per qualsiasi configurazione del campo elettrico o magnetico. In entrambi i programmi tutte le variabili sono date in unità SI.

In tutt'e due i programmi bisogna porre attenzione ad assumere un intervallo di tempo DT (specificato nella linea 130 per il primo e nella linea 120 nel secondo) abbastanza piccolo da non introdurre, a causa delle approssimazioni adottate nel calcolo integrale, errori significativi nel procedimento. Al diminuire di quest'intervallo cresce il numero degli intervalli, aumentando così sia il tempo di elaborazione sia la sequenza di dati prodotti nel risultato. Per contenere questa mole di dati in uscita, in ciascun programma vengon date disposizioni per limitare la sequenza di dati a un determinato numero di punti. Ciò interferisce soltanto col numero di dati in uscita e non con la precisione del calcolo. Il programma calcola il moto della particella seguendola per un tempo totale di percorrenza pari al prodotto del numero di intervalli (NT) per la durata del singolo intervallo (DT).

1. CAMPI ELETTRICI

Questo programma è quello usato alla fine del paragrafo 28-6 per calcolare la traiettoria di una particella che si muove lungo l'asse di un anello carico. Il programma considera il moto solo nel piano xz. Le componenti x e z del campo elettrico sono specificate alle linee 180 e 190. In questo caso le componenti del campo elettrico sono $E_x = 0$, $E_z = zR\lambda/2\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}$ (eq. 22 del cap. 28), con $R = 0.02$ m e $\lambda = +2 \times 10^{-7}$ C/m. I risultati sono riportati sul grafico di figura 16*a* nel capitolo 28.

LISTA DELLE ISTRUZIONI DEL PROGRAMMA

```
10  REM *** CALCOLO DEL MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA ***
20  REM *** IN UN CAMPO ELETTRICO NEL PIANO XZ ***
30  E0 = 8.85E-12
40  REM * INTRODURRE MASSA, CARICA, POSIZIONE INIZIALE E VELOCITÀ INIZIALE *
50  M = 1.67E-27
60  Q = 1.6E-19
70  X = 0
80  Z = .5
90  VX = 0
100  VZ = -700000!
110  REM * INTRODURRE ISTANTE INIZIALE, INTERVALLO DI TEMPO E NUMERO DI IN-
     TERVALLI *
120  T = 0
130  DT = 5E-10
140  NT=3000
150  REM * INTRODURRE NUMERO DI INTERVALLI DA STAMPARE *
160  N=15
```

(continua)

ISBN 88-408-0777-2


```
170  REM * INTRODURRE COMPONENTI CAMPO ELETTRICO *
180  DEF FNEX(X,Z) = 0
190  DEF FNEZ(X,Z) = Z*.03*.0000002/2/E0/(Z^2+(.03)^2)^1.5
200  PRINT " ISTANTE        X         Z         VX         VZ "
210  LPRINT " ISTANTE        X         Z         VX         VZ "
220  PRINT USING "##.##^^^^ " ; T , X , Z , VX , VZ
230  LPRINT USING "##.##^^^^ " ; T , X , Z , VX , VZ
240  FOR I = 1 TO NT
250  T = T+DT
260  AX = Q*FNEX(X,Z)/M
270  AZ = Q*FNEZ(X,Z)/M
280  X = X + VX*DT + .5*AX*DT*DT
290  Z = Z + VZ*DT + .5*AZ*T*DT
300  VX = VX + AX*DT
310  VZ = VZ + AZ*DT
320  IF (NT/N)*INT(I/NT*N) <> I THEN 350
330  PRINT USING "##.##^^^^ " ; T , X , Z , VX , VZ
340  LPRINT USING "##.##^^^^ " ; T , X , Z , VX , VZ
350  NEXT I
400  END
```

ESEMPIO DI STAMPA DEI RISULTATI

ISTANTE	X	Z	VX	VZ
0.00E+00	0.00E+00	5.00E-01	0.00E+00	-7.00E+05
1.00E-07	0.00E+00	4.31E-01	0.00E+00	-6.85E+05
2.00E-07	0.00E+00	3.63E-01	0.00E+00	-6.64E+05
3.00E-07	0.00E+00	2.98E-01	0.00E+00	-6.35E+05
4.00E-07	0.00E+00	2.37E-01	0.00E+00	-5.90E+05
5.00E-07	0.00E+00	1.81E-01	0.00E+00	-5.16E+05
6.00E-07	0.00E+00	1.35E-01	0.00E+00	-3.89E+05
7.00E-07	0.00E+00	1.06E-01	0.00E+00	-1.78E+05
8.00E-07	0.00E+00	1.02E-01	0.00E+00	9.89E+04
9.00E-07	0.00E+00	1.25E-01	0.00E+00	3.37E+05
1.00E-06	0.00E+00	1.66E-01	0.00E+00	4.86E+05
1.10E-06	0.00E+00	2.20E-01	0.00E+00	5.72E+05
1.20E-06	0.00E+00	2.80E-01	0.00E+00	6.24E+05
1.30E-06	0.00E+00	3.44E-01	0.00E+00	6.58E+05
1.40E-06	0.00E+00	4.11E-01	0.00E+00	6.81E+05
1.50E-06	0.00E+00	4.80E-01	0.00E+00	6.97E+05

2. CAMPI MAGNETICI

Questo programma, utilizzato al termine del paragrafo 34-3, calcola il moto di una particella confinata nel piano *xy* e soggetta al campo magnetico nella direzione dell'asse *z*. La componente *z* del campo magnetico (in tesla) viene specificata alla linea 170. Nel nostro caso il campo è uniforme. Il risultato è riportato nel grafico della figura 17*a* al capitolo 34.

LISTA DELLE ISTRUZIONI DEL PROGRAMMA

```
10  REM *** CALCOLO DEL MOTO DI UNA PARTICELLA CARICA NEL PIANO XY ***
20  REM *** IN UN CAMPO MAGNETICO DIRETTO SECONDO Z ***
30  REM * INTRODURRE MASSA, CARICA, POSIZIONE INIZIALE E VELOCITÀ INIZIALE *
40  M = 6.645E-27
50  Q = 3.2E-19
```

(continua)

```
60  X = 0
70  Y = 0
80  VX = 3000000!
90  VY = 0
100  REM * INTRODURRE ISTANTE INIZIALE, INTERVALLO DI TEMPO E NUMERO
     DI INTERVALLI *
110  T = 0
120  DT = 1E-10
130  NT = 10000
140  REM * INTRODURRE NUMERO DI INTERVALLI DA STAMPARE *
150  N = 20
160  REM * INTRODURRE COMPONENTE Z DEL CAMPO MAGNETICO *
170  DEF FNBZ ( X , Y ) = .15
180  PRINT " ISTANTE     X     Y    VX      VY "
190  LPRINT " ISTANTE     X     Y     VX           VY"
200  PRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
210  LPRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
220  FOR I = 1 TO NT
230  T = T + DT
240  AX = Q*VY*FNBZ(X,Y)/M
250  AY = -Q*VX*FNBZ(X,Y)/M
260  X = X + VX*DT + .5*AX*DT*DT
270  Y = Y + VY*DT + .5*AY*DT*DT
280  VX = VX + AX*DT
290  VT = VY + AY*DT
300  IF (NT/N)*INT(I/NT*N) <> I THEN 330
310  PRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
320  LPRINT USING "##.##^^^^ ";T,X,Y,VX,VY
330  NEXT I
400  END
```

ESEMPIO DI STAMPA DEI RISULTATI

ISTANTE	X	Y	VX	VY
0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	3.00E+06	0.00E+00
5.00E-08	1.47E-01	-2.68E-02	2.81E+06	-1.06E+06
1.00E-07	2.75E-01	-1.04E-01	2.25E+06	-1.98E+06
1.50E-07	3.67E-01	-2.21E-01	1.41E+06	-2.65E+06
2.00E-07	4.12E-01	-3.63E-01	3.77E+05	-2.98E+06
2.50E-07	4.04E-01	-5.12E-01	-6.99E+05	-2.92E+06
3.00E-07	3.44E-01	-6.49E-01	-1.69E+06	-2.48E+06
3.50E-07	2.39E-01	-7.55E-01	-2.46E+06	-1.73E+06
4.00E-07	1.03E-01	-8.18E-01	-2.91E+06	-7.49E+05
4.50E-07	-4.55E-02	-8.29E-01	-2.99E+06	3.27E+05
5.00E-07	-1.89E-01	-7.86E-01	-2.68E+06	1.36E+06
5.50E-07	-3.08E-01	-6.95E-01	-2.02E+06	2.22E+06
6.00E-07	-3.87E-01	-5.69E-01	-1.11E+06	2.79E+06
6.50E-07	-4.16E-01	-4.22E-01	-5.14E+04	3.00E+06
7.00E-07	-3.92E-01	-2.75E-01	-1.01E+06	2.83E+06
7.50E-07	-3.17E-01	-1.45E-01	-1.95E+06	2.29E+06
8.00E-07	-2.01E-01	-5.08E-02	-2.63E+06	1.45E+06
8.50E-07	-5.94E-02	-3.27E-03	-2.98E+06	4.29E+05
9.00E-07	9.00E-02	-8.86E-03	-2.94E+06	-6.50E+05
9.50E-07	2.28E-01	-6.69E-02	-2.52E+06	-1.65E+06
1.00E-06	3.36E-01	-1.70E-01	-1.77E+06	-2.43E+06

Appendice J

PREMI NOBEL PER LA FISICA*

1901	Wilhelm Konrad Röntgen	1845-1923	Scoperta dei raggi X.
1902	Hendrik Antoon Lorentz Pieter Zeeman	1853-1928 1865-1943	Influenza del magnetismo sui fenomeni della radiazione.
1903	Henri Becquerel Pierre Curie Marie Sklowdowska Curie	1852-1908 1850-1906 1867-1934	Scoperta della radioattività naturale e degli elementi radioattivi radio e polonio.
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842-1919	Scoperta dell'argon.
1905	Philipp Lenard	1862-1947	Ricerche sui raggi catodici.
1906	Joseph John Thomson	1856-1940	Conduzione elettrica nei gas.
1907	Albert A. Michelson	1852-1931	Invenzione dell'interferometro e ricerche spettroscopiche e metrologiche.
1908	Gabriel Lippmann	1845-1921	Fotografia a colori.
1909	Guglielmo Marconi Karl Ferdinand Braun	1874-1937 1850-1918	Sviluppo della telegrafia senza fili.
1910	Johannes Diderik van der Waals	1837-1923	Equazioni di stato di gas e liquidi.
1911	Wilhelm Wien	1864-1928	Leggi sull'irraggiamento.
1912	Nils Gustaf Dalen	1869-1937	Faro costiero automatico.
1913	Heike Kammerlingh-Onnes	1853-1926	Proprietà della materia alle basse temperature; produzione dell'elio liquido.
1914	Max von Laue	1879-1960	Diffrazione di raggi X nei cristalli.
1915	Sir William Henry Bragg Sir William Lawrence Bragg	1862-1942 1890-1971	Studio di strutture cristalline mediante i raggi X.
1917	Charles Glover Barkla	1877-1944	Scoperta dei raggi X caratteristici dei vari elementi.
1918	Max Planck	1858-1947	Scoperta dei quanti di energia.
1919	Johannes Stark	1874-1957	Scoperta dell'effetto Doppler sui raggi canale e della scissione di righe spettrali in un campo elettrico.
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861-1938	Scoperta di anomalie nelle leghe nichel-acciaio.
1921	Albert Einstein	1879-1955	Scoperta delle leggi dell'effetto fotoelettrico.
1922	Niels Bohr	1885-1962	Studio della struttura e delle radiazioni degli atomi.
1923	Robert Andrews Millikan	1868-1953	Ricerche sulla carica elettrica elementare e sull'effetto fotoelettrico.
1924	Manne Siegbahn	1886-1978	Scoperte sugli spettri dei raggi X.
1925	James Franck Gustav Hertz	1882-1964 1887-1975	Leggi che governano le collisioni tra elettroni e atomi.
1926	Jean Baptiste Perrin	1870-1942	Scoperta dell'equilibrio nella sedimentazione.
1927	Arthur H. Compton Charles T.R. Wilson	1892-1962 1869-1959	Scoperta della diffusione di raggi X da parte di particelle cariche. Invenzione della camera a nebbia, dispositivo per rendere visibile il cammino delle particelle cariche.
1928	Owen Willans Richardson	1879-1959	Scoperta della legge omonima (dipendenza della temperatura dell'emissione di elettroni).

(*) Per le biografie, le motivazioni e le lezioni tenute in occasione del ricevimento del premio, si veda *Nobel Lectures*, Physics, 1901-1970, Elsevier Pub. Co.

1929	Louis-Victor de Broglie	1892-1987	Natura ondulatoria degli elettroni.
1930	Sir Chandrasekhara Raman	1888-1970	Ricerche sulla diffusione della luce e scoperta dell'omonimo effetto.
1932	Werner Heisenberg	1901-1976	Creazione della meccanica quantistica.
1933	Paul Adrien Maurice Dirac Erwin Schrödinger	1902-1984 1887-1961	Scoperta di nuove formulazioni della teoria atomica.
1935	James Chadwick	1891-1974	Scoperta del neutrone.
1936	Victor Hess	1883-1964	Scoperta della radiazione cosmica.
	Carl David Anderson	1905-1982	Scoperta del positrone.
1937	Clinton Joseph Davisson George P. Thomson	1881-1958 1892-1975	Scoperta della diffrazione di elettroni dai cristalli.
1938	Enrico Fermi	1901-1954	Elementi artificiali radioattivi prodotti dall'irraggiamento con neutroni lenti.
1939	E.O. Lawrence	1901-1958	Invenzione del ciclotrone.
1943	Otto Stern	1888-1969	Ricerche con fasci molecolari e sul momento magnetico del protone.
1944	Isidor Isaac Rabi	1898-1988	Risonanza magnetica nucleare.
1945	Wolfgang Pauli	1900-1958	Scoperta del principio di esclusione.
1946	Percy Williams Bridgman	1882-1961	Fisica delle alte pressioni.
1947	Sir Edward Appleton	1892-1965	Fisica dell'alta atmosfera e scoperta dello strato omonimo.
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897-1974	Scoperte sulla radiazione cosmica e in fisica nucleare.
1949	Kideki Yukawa	1907-1981	Predizione dell'esistenza del mesone.
1950	Cecil Frank Powell	1903-1969	Metodo fotografico per lo studio di processi nucleari; scoperte sui mesoni.
1951	Sir John Douglas Cockcroft Ernest Thomas Sinton Walton	1897-1967 1903-	Trasmutazione di nuclei atomici con particelle atomiche accelerate artificialmente.
1952	Felix Bloch Edward Mills Purcell	1905-1983 1912-	Sviluppo di nuovi metodi per lo studio del magnetismo nucleare.
1953	Fritz Zernike	1888-1966	Invenzione del microscopio a contrasto di fase.
1954	Max Born	1882-1970	Lavori di meccanica quantistica e interpretazione statistica della funzione d'onda.
	Walther Bothe	1891-1957	Analisi della radiazione cosmica con l'uso dei metodi di coincidenza.
1955	Willis E. Lamb Polykarp Kusch	1913- 1911-	Struttura fine dell'idrogeno. Momento magnetico dell'elettrone.
1956	John Bardeen Walter H. Brattain William B. Shockley	1908-1981 1902-1987 1910-	Invenzione e sviluppo del transistor.
1957	Chen Ning Yang Tsung Dao Lee	1922- 1926-	Non conservazione della parità e lavori sulla teoria delle particelle elementari.
1958	Pavel A. Čerenkov Ilya M. Frank Igor E. Tamm	1904- 1908- 1895-1971	Scoperta e interpretazione dell'effetto Čerenkov sulla radiazione emessa da particelle cariche veloci nella materia.
1959	Owen Chamberlain Emilio Gino Segré	1920- 1905-1989	Scoperta dell'antiprotone.
1960	Donald A. Glaser	1926-	Invenzione della camera a bolle.
1961	Robert L. Hofstadter	1915-1990	Struttura elettromagnetica dei nucleoni con esperimenti di diffusione di elettroni ad alta energia.
	Rudolf L. Mössbauer	1929-	Scoperta di assorbimento in risonanza di raggi gamma nei nuclei.
1962	Lev D. Landau	1908-1968	Teoria della materia condensata; fenomeni di superficialità e superconduttività.
1963	Eugene P. Wigner	1902-	Contributi alla fisica teorica atomica e nucleare.
	Maria Goeppert-Mayer J.H.D. Jensen	1906-1972 1907-1973	Teoria del modello a guscio e numeri magici del nucleo atomico.
1964	C.H. Townes Nikolai Basov Aleksandr Prokhorov	1915- 1922- 1916-	Scoperta del maser e teoria della radiazione atomica coerente.

ISBN 88-408-0777-2

1965	Richard Feynman Julian Schwinger Sin-Itiro Tomonaga	1918-1988 1918- 1906-1979	Sviluppo dell'elettrodinamica quantistica.
1966	Alfred Kastler	1902-1984	Scoperta e sviluppo di metodi ottici per lo studio della risonanza hertziana negli atomi.
1967	Hans Albrecht Bethe	1906-	Teoria delle reazioni nucleari e scoperte riguardanti la produzione di energia nelle stelle.
1968	Luis W. Alvarez	1911-1988	Fisica delle particelle elementari, in particolare la scoperta di un gran numero di stati di risonanza mediante l'impiego della camera a bolle a idrogeno.
1969	Murray Gell-Mann	1929-	Scoperte sulla classificazione delle particelle elementari e sulle loro interazioni.
1970	Hannes Alfvén	1908-	Scoperte in magnetoidrodinamica con applicazioni alla fisica del plasma.
	Louis Néel	1904-	Scoperte sull'antiferromagnetismo e sul ferrimagnetismo con importanti applicazioni alla fisica dei solidi.
1971	Dennis Gabor	1900-1979	Scoperta dei principi dell'olografia.
1972	John Bardeen Leon N. Cooper J. Robert Schrieffer	1908-1991 1930- 1931-	Teoria della superconduttività.
1973	Leo Esaki Ivar Giaever Brian D. Josephson	1925- 1929- 1940-	Scoperta dell'effetto tunnel nei semiconduttori. Predizione teorica della proprietà di una supercorrente atttraverso una barriera tunnel.
1974	Anthony Hewish Sir Martin Ryle	1924- 1918-1984	Scoperta delle pulsar. Ricerche fondamentali di radioastronomia.
1975	Aage Bohr Ben Mottelson James Rainwater	1922- 1926- 1917-1986	Scoperta della correlazione tra il moto collettivo e il moto di una particella e sviluppo della teoria della struttura del nucleo atomico basata su tale correlazione.
1976	Burton Richter Samuel Chao Chung Ting	1931- 1936-	Scoperta (indipendente) di una importante particella elementare.
1977	Philip Warren Anderson Nevill Francis Mott John Hasbrouck Van Vleck	1923- 1905- 1899-1980	Studi teorici sulla struttura elettronica di sistemi magnetici e disordinati.
1978	Peter L. Kapitza Arno A. Penzias Robert Woodrow Wilson	1894-1984 1926- 1936-	Scoperte e invenzioni nella fisica delle basse temperature. Scoperta della radiazione cosmica di fondo.
1979	Sheldon Lee Glashow Abdus Salam Steven Weinberg	1932- 1926- 1933-	Formulazione del modello unificato elettrodebole e previsione dell'esistenza delle correnti neutre.
1980	James W. Cronin Val L. Fitch	1931- 1923-	Scoperta delle violazioni dei principi di simmetria nel decadimento del mesone K.
1981	Nicolaas Bloembergen Arthur Leonard Schawlow Kai M. Siegbahn	1920- 1921- 1918-	Contributo allo sviluppo della spettroscopia laser. Contributo alla spettroscopia elettronica ad alta risoluzione.
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936-	Metodo di analisi dei fenomeni critici della materia sottoposta a variazioni di pressione e temperatura.
1983	Subrehmanyan Chandrasekhar William A. Fowler	1910- 1911-	Studio teorico sull'evoluzione delle stelle. Studio della formazione degli elementi chimici nell'universo.
1984	Carlo Rubbia Simon van der Meer	1934- 1925-	Decisivo contributo al progetto che portò alla scoperta dei bosoni intermedi W e Z dell'interazione elettrodebole.
1985	Klaus von Klitzing	1943-	Scoperta della resistenza Hall quantizzata.
1986	Ernst Ruska Gerd Binnig Heinrich Robrer	1906- 1947- 1933-	Invenzione del microscopio elettronico. Invenzione del microscopio elettronico a scansione.
1987	Karl Alex Müller J. Georg Bednorz	1927- 1950-	Scoperta di una nuova classe di superconduttori.

1988	Leon M. Lederman Melvin Schwartz Jack Steinberger	1922- 1932- 1921-	Esperimenti con fasci di neutrini e scoperta del neutrino muone.
1989	Hans G. Dehmelt Wolfgang Paul Norman F. Ramsey	1922- 1913- 1915-	Sviluppo della tecnica di intrappolamento di singoli atomi. Scoperte di spettroscopia della risonanza atomica che hanno permesso la costruzione dei maser a idrogeno e degli orologi atomici.
1990	Richard E. Taylor Jerome I. Friedman Henry W. Kendall	1929- 1930- 1926-	Esperimenti di diffusione di elettroni da nuclei che hanno messo in evidenza la presenza di quark nei nucleoni.
1991	Pierre-Gilles de Gennes	1932-	Scoperta di un certo ordine molecolare in sostanze come i cristalli liquidi, i superconduttori e polimeri.
1992	George Charpak	1924-	Invenzione dei rivelatori elettronici veloci per particelle ad alta energia

Appendice K

RISPOSTE AI PROBLEMI CON NUMERO DISPARI

CAPITOLO 27

1. 2.74 N su ciascuna carica. **3.** 0.50 C. **5.** (*a*) 1.77 N. (*b*) 3.07 N. **7.** $q_1 = -4q_2$.
9. 24.5 N, lungo la bisettrice dell'angolo.
11. 1.00 μC e 3.00 μC, di segno opposto.
13. (*a*) Bisogna porre una carica $-4q/9$ sul segmento che unisce le due cariche positive ad una distanza $L/3$ dalla carica $+q$.
15. $q = Q/2$. **17.** (*b*) 2.96 cm. **19.** $a/\sqrt{2}$.
23. $\sqrt{\pi^3 m\epsilon_0 d^3/2qQ}$. **25.** 2.89×10^{-9} N. **27.** 3.8 N.
29. 5.08 m sotto all'elettrone. **31.** 13.4 MC.
33. (*a*) 57.1 TC; no. (*b*) 598 tonnellate. **35.** (*a*) Boro. (*b*) Azoto. (*c*) Carbonio.

CAPITOLO 28

1. 10.5 mN/C, verso sinistra. **3.** 203 nN/C, verso l'alto.
5. 144 pC. **7.** 19.5 kN/C. **9.** 9:30. **11.** (*b*) Parallelo e nello stesso verso di **p**.
15. (*a*) $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{qz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$. (*b*) $\dfrac{1}{2\pi^2\epsilon_0}\dfrac{(q_1-q_2)R}{(R^2+z^2)^{3/2}}$.
19. Verso destra. **25.** $R/\sqrt{3}$. **27.** (*a*) 104 nC. (*b*) 1.31×10^{17}. (*c*) 4.96×10^{-6}. **29.** (*a*) 6.50 cm. (*b*) 4.80 μC. **35.** $q/8\pi\epsilon_0 R^2$. **37.** (*a*) 6.53 cm. (*b*) 26.9 ns. (*c*) 0.121. **39.** (*a*) 585 kN/C, verso la carica negativa. (*b*) 96.3 fN, verso la carica positiva. **41.** $5e$.
43. 1.64×10^{-19} C (≈ 2.5% troppo elevato). **45.** 1.2 mm.
47. Il piatto superiore; 4.06 cm. **49.** (*a*) Zero. (*b*) 8.50×10^{-22} N · m. (*c*) Zero. **51.** $2pE\cos\theta_0$.
53. (*a*) $8q/\pi\epsilon_0 a^3$.

CAPITOLO 29

1. -0.0078 N · m²/C. **3.** (*a*) $-\pi R^2 E$. (*b*) $\pi R^2 E$.
5. 208 kN · m²/C. **7.** $q/6\epsilon_0$. **9.** 4.6 μC.
13. (*a*) 22.3 N · m²/C. (*b*) 197 pC. **15.** (*a*) 452 nC/m². (*b*) 51.1 kN/C. **17.** (*b*) $-Q$. (*c*) $-(Q+q)$. (*d*) Si.
19. (*a*) 53 MN/C. (*b*) 60 N/C. **21.** (*a*) 322 nC. (*b*) 143 nC.
23. (*a*) Zero. (*b*) σ/ϵ_0, verso sinistra. (*c*) Zero.
25. 5.11 nC/m². **27.** 5.09 μC/m³. **29.** (*a*) $q/2\pi\epsilon_0 Lr$, radialmente entrante. (*b*) $-q$ sia sulla superficie interna che su quella sterna. (*c*) $q/2\pi\epsilon_0 Lr$, radialmente uscente.
31. −1.13 nC. **33.** (*a*) $\lambda/2\pi\epsilon_0 r$. (*b*) Zero. **35.** 270 eV.
37. (*a*) 2.19 MN/C, radialmente uscente. (*b*) 436 kN/C, radialmente entrante. **39.** 97.9 cm. **41.** 0.557 R.
45. (*b*) $\rho R^2/2\epsilon_0 r$.

CAPITOLO 30

1. (*a*) 484 keV. (*b*) Zero. **3.** (*a*) 27.2 fJ = 170 keV. (*b*) 3.02×10^{-31} kg, con un errore di circa un fattore tre.
5. (*a*) 3.0 kN. (*b*) 240 MeV. **7.** (*a*) 30 GJ. (*b*) 7.1 km/s. (*c*) 9.0×10^4 kg. **9.** (*a*) 256 kV. (*b*) 0.745*c*. **11.** 2.6 km/s.
13. $\dfrac{qQ}{8\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}\right]$. **15.** 2.17 d. **17.** (*a*) 24.4 kV/m. (*b*) 2.93 kV. **19.** (*a*) 132 MV/m. (*b*) 8.43 kV/m.
21. (*a*) 32 MeV. **23.** (*a*) −3.85 kV. (*b*) −3.85 kV.
25. −1.1 nC. **27.** (*a*) 0.562 mm. (*b*) 813 V. **29.** 637 MV.
31. (*a*) $qd/2\pi\epsilon_0 a(a+d)$. **33.** (*a*) −5.40 nm. (*b*) 9.00 nm. (*c*) No. **37.** 186 pJ. **41.** (*a*) 4.5 m. (*b*) No. **45.** 746 V/m.
47. -2.3×10^{21} V/m. **49.** −39.2 V/m.
51. (*a*) $\dfrac{k}{4\pi\epsilon_0}[\sqrt{L^2+y^2}-y]$. (*b*) $\dfrac{k}{4\pi\epsilon_0}\left[1-\dfrac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}\right]$. (*d*) $3L/4$. **53.** (*a*) $V_1 = V_2$. (*b*) $q_1 = q/3$; $q_2 = 2q/3$.
55. 840 V. **57.** 2.0×10^{-8}. **59.** (*a*) Zero. (*b*) Zero. (*c*) Zero. (*d*) Zero. (*e*) No. **63.** (*a*) 1.75 kV. (*b*) 7.40 cm.
65. 9.65 kW.

CAPITOLO 31

1. 7.5 pC **3.** 3.25 mC. **5.** 0.546 pF. **7.** (*a*) 84.5 pF. (*b*) 191 cm². **11.** 9090. **13.** 7.17 μF. **15.** (*a*) 2.4 μF. (*b*) $q_4 = q_6 = 480$ μC. (*c*) $V_4 = 120$ V; $V_6 = 80$ V.
17. (*a*) $d/3$. (*b*) $3d$. **19.** (*a*) 942 μC. (*b*) 91.4 V.
23. (*a*) 45.4 V. (*b*) 52.7 μC. (*c*) 146 μC. **25.** (*a*) 50 V. (*b*) Zero. **27.** (*a*) $q_1 = 9.0$ μC, $q_2 = 16$ μC, $q_3 = 9.0$ μC, $q_4 = 16$ μC. (*b*) $q_1 = 8.40$ μC, $q_2 = 16.8$ μC, $q_3 = 10.8$ μC, $q_4 = 14.4$ μC. **29.** 200 nJ. **31.** (*a*) 28.6 pF. (*b*) 17.9 nC. (*c*) 5.59 μJ. (*d*) 482 kV/m. (*e*) 1.03 J/m³. **33.** 74.1 mJ/m³.
35. (*a*) 2.0 J. **37.** (*a*) $2V$. (*b*) $U_i = \epsilon_0 AV^2/2d$; $U_f = \epsilon_0 AV^2/d$. (*c*) $\epsilon_0 AV^2/2d$. **39.** (*a*) $e^2/32\pi^2\epsilon_0 r^4$. (*b*) $e^2/8\pi\epsilon_0 R$. (*c*) 1.40 fm. **43.** 3.89. **45.** Il foglio di mica. **47.** 86.3 nF.
49. (*a*) 730 pF. (*b*) 28 kV. **51.** (*a*) $\epsilon_0 A/(d-b)$. (*b*) $d/(d-b)$. (*c*) $q^2 b/2A\epsilon_0$; viene attratta. **53.** 1.63 kV. **57.** (*a*) 13.4 kV/m. (*b*) 6.16 nC. (*c*) 5.02 nC. **59.** (*a*) 6.53. (*b*) 754 nc.

61. (*a*) 85.6 pF. (*b*) 119 pF. (*c*) 10.3 nC; 10.3 nC. (*d*) 9.86 kV/m. (*e*) 2.05 kV/m. (*f*) 86.6 V. (*g*) 170 nJ.

CAPITOLO 32

1. (*a*) 1.33 kC. (*b*) 8.31×10^{21}. **3.** (*a*) 9.41 A/m^2 verso nord. **5.** 0.400 mm. **7.** 0.67 A, verso l'elettrodo negativo. **9.** 7.1 ms. **11.** (*a*) 654 nA/m^2. (*b*) 83.4 MA. **13.** 52.5 min. **15.** (*a*) 95.0 μC. (*b*) 158 C°. **17.** 0.59 Ω. **19.** (*a*) 1.5 kA. (*b*) 53 MA/m^2. (*c*) 110 nΩ · m; platino. **23.** (*a*) 250 °C. **25.** (*a*) 380 μV. (*b*) Negativa. (*c*) 4.3 min. **27.** 54 Ω. **29.** 3. **31.** (*a*) 6.00 mA. (*b*) 15.9 nV. (*c*) 21.2 nΩ. **33.** 1190 $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. **35.** (*a*) Cu: 55.3 A/cm^2; Al: 34.0 A/cm^2. (*b*) Cu: 1.01 kg; Al: 0.495 kg. **37.** (*a*) Argento. (*b*) 60.8 nΩ. **39.** 0.036. **41.** (*a*) 8.52 kΩ. (*b*) 4.51 μA. **43.** 7.16 fs. **45.** 18 kC. **47.** (*a*) 1.03 kW. (*b*) 34.5 centesimi. **49.** (*a*) $4.46. (*b*) 144 Ω. (*c*) 833 mA. **51.** (*a*) 2.88×10^{11}. (*b*) 24.0 μA. (*c*) 1.14 kW; 23.1 MW. **53.** (*a*) 6.1 (*b*) 13 m. **55.** 27.4 cm/s. **57.** 311 nJ. **59.** (*a*) 37.0 min. (*b*) 122 min. **61.** (*a*) 1.37*L*. (*b*) 0.730*A*.

CAPITOLO 33

1. 10.6 kJ. **3.** 13 h 38 min. **5.** −10 V. **7.** (*a*) 14 Ω. (*b*) 35 mW. **9.** (*a*) 44.2 V. (*b*) 21.4 V. (*c*) Il morsetto di sinistra. **11.** Il cavo. **13.** (*a*) 1.5 kΩ. (*b*) 400 mV. (*c*) 0.26%. **15.** (*a*) 3.4 A. (*b*) 0.29 V. *E*: (*a*) 0.59 A. (*b*) 1.7 V. **17.** 4.0 Ω; 12 Ω. **19.** 7.5 V. **21.** 262 Ω oppure 38.2 Ω. **23.** (*a*) In parallelo. (*b*) 72.0 Ω; 144 Ω. **25.** (*a*) $\rho_A = 16.3$ nΩ · m; $\rho_B = 7.48$ nΩ · m. (*b*) $j_A = j_B = 62.3$ kA/cm^2. (*c*) $E_A = 10.2$ V/m; $E_B = 4.66$ V/m. (*d*) $V_A = 435$ V; $V_B = 195$ V. **27.** (*a*) $R/2$. (*b*) $5R/8$. **29.** (*a*) $3R/4$. (*b*) $5R/6$. **31.** (*a*) R_2. (*b*) R_1. **33.** $\mathcal{E}/7R$.

35. (50 kW) $\left(\dfrac{x}{2000 + 10x - x^2}\right)^2$, x in cm.

37. (*a*) $i_1 = 668$ mA, verso il basso; $i_2 = 85.7$ mA, verso l'alto; $i_3 = 582$ mA, verso l'alto. (*b*) −3.60 V. **39.** (*a*) 0.45 A. **41.** 0.90%. **45.** (*a*) Sopra: 70.9 mA; 4.91 V: sotto: 55.2 mA; 4.86 V. (*b*) Sopra: 69.3 Ω; sotto: 88.0 Ω. **49.** 4.61. **51.** (*a*) 2.20 s. (*b*) mV. **53.** 2.35 MΩ. **55.** (*a*) 955 pC/s. 1.08 μW. (*c*) 2.74 μW. (*d*) 3.82 μW.

CAPITOLO 34

1. 1 : +; 2 : −; 3 : 0; 4 : −. **3.** (*a*) 3.4 km/s. **5.** 8.2×10^9. **7.** 0.75 k, T. **9.** (*a*) Verso est. (*b*) 6.27×10^{14} m/s^2. (*c*) 2.98 mm. **11.** (*a*) 0.34 mm. (*b*) 2.6 keV. **13.** (*a*) 1.11×10^7 m/s. (*b*) 0.316 mm. **15.** (*a*) 2600 km/s. (*b*) 11 ns. (*c*) 140 keV. (*d*) 70 kV. **19.** (*a*) K_p. (*b*) $K_p/2$. **21.** (*a*) $r_p\sqrt{2}$. (*b*) r_p. **23.** (*a*) $B(qm/2V)^{1/2}\Delta x$. (*b*) 7.91 mm. **25.** (*a*) $-q$. (*b*) $\pi m/qB$. **27.** (*a*) 0.999928*c*. **29.** Si tratta di una particella alfa. **31.** (*a*) 78.6 ns. (*b*) 9.16 cm. (*c*) 3.20 cm. **33.** 240 m. **39.** 37 cm/s. **41.** 467 mA; da sinistra a destra. **43.** (*a*) 330 MA. (*b*) 1.1×10^{17} W. **45.** 4.2 C. **47.** −0.414k. N. **49.** (*a*) 0: 138 mN; 138 mN. **53.** $2\pi aiB \operatorname{sen}\theta$, perpendicolarmente al piano dell'anello, verso l'alto. **55.** 1.63 A. **57.** 2.1 GA. **59.** (*a*) −2.86k, A · m^2. (*b*) 1.10k, A · m^2.

CAPITOLO 35

1. 7.7 mT. **3.** 12 nT. **5.** (*a*) 0.324 fN, parallelamente al filo e in verso concorde alla corrente. (*b*) 0.324 fN, in direzione radiale uscente. (*c*) Zero. **7.** 30.0 A, e le correnti devono scorrere in versi opposti. **9.** (*a*) 4. (*b*) $\frac{1}{2}$. **11.** (*a*) 2.43 A · m^2. (*b*) 46 cm. **13.** 2 rad.

15. $\dfrac{\mu_0 i\theta}{4\pi}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)$, in verso uscente dalla figura.

19. (*b*) ia^2. **21.** $\left(\dfrac{\mu_0 i}{2\pi w}\right) \ln\left(1 + \dfrac{w}{d}\right)$; verso l'alto.

25. $\frac{1}{2}\pi i(a^2 + b^2)$. **29.** (*c*) $\frac{1}{2}nia^2 \operatorname{sen}(2\pi/n)$. **31.** (*a*) $(2\mu_0 i/3\pi L)(2\sqrt{2} + \sqrt{10})$. (*b*) Più intenso. **35.** 606 μN, verso il centro del quadrato. **37.** (*b*) 2.3 km/s. **39.** (*a*) −2.5 μT · m. (*b*) Zero. **41.** 6.0 μT · m.

45. (*a*) $\dfrac{\mu_0 ir}{2\pi r}$. (*b*) $\dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$. (*c*) $\dfrac{\mu_0 i\, a^2 - r^2}{2\pi r\, a^2 - b^2}$. (*d*) Zero.

47. $\mu_0 ir^2/2\pi a^3$. **49.** $3i_0/8$, in verso entrante nella pagina. **51.** 109 m. **53.** 272 mA. **55.** (*a*) Negativo. (*b*) 9.7 cm.

CAPITOLO 36

1. 57 μWb. **3.** (*a*) 31 mV. (*b*) Da destra a sinistra. **5.** (*a*) 1.12 mΩ. (*b*) 1.27 T/s. **7.** (*b*) 58 mA. **9.** 4.97 μW. **11.** (*b*) No. **15.** (*a*) 28.2 μV. (*b*) Da *c* a *b*. **17.** 80 μV; in verso orario. **19.** Zero. **21.** $iLBt/m$, in verso di allontanamento da G. **23.** 455 mV. **27.** (*b*) La si progetti in modo tale che $Nab = (5/2\pi)$ m^2. **29.** 6.3 giri/s. **31.** 25 μC. **33.** (*a*) 253 μV. (*b*) 610 μA. (*c*) 154 nW. (*d*) 31.7 nN. (*e*) 154 nW. **35.** (*a*) $\dfrac{\mu_0 ia}{2\pi}\left(1 + \dfrac{b}{D}\right)$.

(*b*) $\dfrac{\mu_0 iabv}{2\pi RD(D + b)}$. **39.** $(Bar)^2\omega\sigma t$. **41.** (*a*) −1.20 mV. (*b*) −2.79 mV. (*c*) 1.59 mV. **47.** (*a*) 34 V/m. (*b*) 6.0×10^{12} m/s^2. **49.** (*a*) 0.15°.

CAPITOLO 37

1. +3 Wb. **3.** (*a*) Stabile. (*b*) Instabile. (*c*) Stabile. (*d*) Instabile. **5.** $\left(\dfrac{\mu_0 iL}{\pi}\right)$ ln3. **7.** (*a*) 514 GV/m. (*b*) 19.0 mT. **11.** 24 mJ/T. **13.** (*a*) 0.86 μT. (*b*) 0.68 A/m. **15.** 0.58 K. **17.** (*a*) 150 T. (*b*) 600 T. **19.** Sì. **23.** (*a*) 3.0 μT. (*b*) 9.0×10^{-29} J. **27.** (*a*) 630 MA. **31.** 1660 km. **33.** 61 μT; 84°.

CAPITOLO 38

1. 100 nWb. **3.** 261 μH/m. **5.** (*a*) 600 μH. (*b*) 120.

ISBN 88-408-0777-2

7. 7.87 H. **15.** $\left(\frac{\mu_0 l}{2\pi}\right)\ln\frac{b}{a}$. **17.** 29.8 Ω. **19.** (*a*) 4.78 mH. (*b*) 2.42 ms. **21.** $42 + 20t$, V. **23.** 12 A/s. **25.** (*a*) $i_1 = i_2 = 3.33$ A. (*b*) $i_1 = 4.55$ A; $i_2 = 2.73$ A. (*c*) $i_1 = 0$; $i_2 = 1.82$ A. (*d*) $i_1 = i_2 = 0$. **29.** (*a*) 13.2 H. (*b*) 124 mA. **31.** 63.2 MJ/m^3. **33.** 150 MV/m. **35.** (*a*) 78 kJ. (*b*) 3.7 kg. **37.** (*a*) 117 H. (*b*) 225 μJ. **39.** (*a*) $\mu_0 i^2 N^2/8\pi^2 r^2$. (*b*) $(\mu_0 N^2 hi^2/4\pi)\ln\frac{b}{a}$. **41.** 12 PJ. **45.** 123 mA. **47.** 38 μH. **51.** (*a*) 6.08 μs. (*b*) 164 kHz. (*c*) 3.04 μs. **53.** (*a*) No. (*b*) 6.1 kHz. (*c*) 16 nF. **55.** (*a*) 5800 rad/s. (*b*) 1.1 ms. **57.** (*a*) $q_m/\sqrt{3}$. (*b*) $t/T = 0.152$. **59.** (*a*) 6.0:1. (*b*) 36 pF; 220 μH. **61.** (*a*) 180 μC. (*b*) $T/8$. (*c*) 67 W. **63.** (*a*) Zero. (*b*) $2i$. **65.** $(L/R)\ln 2$. **67.** 8.7 m Ω. **69.** 2.96 Ω.

CAPITOLO 39

1. 377 rad/s. **3.** (*a*) 3.75 krad/s. (*b*) 23.4 Ω. **5.** (*a*) 39.1 mA. (*b*) Zero. (*c*) 32.6 mA. (*d*) Sta prendendo energia dal resto del circuito. **7.** (*a*) 6.73 ms. (*b*) 2.24 ms. (*c*) Di un condensatore. (*d*) 56.6 μF. **13.** 1.0 kV > $\mathcal{E}_m$. **15.** (*a*) 36.0 V. (*b*) 27.4 V. (*c*) 17.0 V. (*d*) 8.4 V. **17.** (*a*) 39.1 Ω. (*b*) 21.7 Ω. (*c*) Prevalentemente capacitivo. **19.** (*a*) 45°. (*b*) 76.0 Ω. **23.** 177 Ω. **25.** (*a*) 1.82 W. (*b*) 3.13 W. **27.** 100 V. **31.** (*a*) 0.74. (*b*) In anticipo. (*c*) Capacitiva. (*d*) No. (*e*) Sì; no; sì. (*f*) 33 W. **33.** (*a*) 2.49 A. (*b*) 37.4 V; 153 V; 218 V; 65.0 V; 75.0 V. (*c*) $P_C = P_L = 0$; $P_R = 93.0$ W. **37.** 166 Ω; 315 mH; 14.8 μF. **39.** (*a*) 2.4 V. (*b*) 3.2 mA; 160 mA. **43.** 10.

CAPITOLO 40

3. $r = 2.5$ m; 10 m. **5.** Variando la differenza di potenziale tra le armature di 1.0 kV/s. **7.** (*a*) 1.84 A. (*b*) 140 GV/m · s. (*c*) 460 mA **9.** (*a*) 840 mA. (*b*) Zero. (*c*) 1.3 A. **11.** (*a*) 623 nT. (*b*) 2.11 TV/m · s. **13.** 2.27 pT. **19.** 1900 km di raggio, indipendentemente dalla lunghezza.

CAPITOLO 41*

3. (*a*) 4.5×10^{24} Hz. (*b*) 10 000 km. **5.** 5.0×10^{-21} H. **7.** 1.07 pT. **11.** 100 kJ. **13.** 4.62×10^{-29} W/m^2. **15.** 78 cm. **17.** (*a*) 883 m. (*b*) No. **19.** (*a*) 6.53 nT. (*b*) 5.10 mW/m^2. (*c*) 8.04 W. **21.** (*a*) $\pm EBA^2/\mu_0$ per le facce parallele al piano xy, zero attraverso ciascuna delle altre quattro facce. (*b*) Zero. **23.** (*a*) 9.14 mW/cm^2. (*b*) 1.68 MW. **25.** (*a*) 76.8 mV/m. (*b*) 256 pT. (*c*) 12.6 kW. **29.** (*a*) $\frac{\omega}{k} = c$: $E_m = cB_m$. (*b*) $S = \left(\frac{E^2_m}{4\mu_0 c}\right)\text{sen}2\omega t\,\text{sen}2kx$. **30.** (*a*) $E = \mathcal{E}/r\ln(b/a)$; $B = \mu_0\mathcal{E}/2\pi Rr$. (*b*) $S = \mathcal{E}^2/2\pi R r^2\ln(b/a)$. **32.** 0.043 kg · m/s. **34.** 7.7 MPa. **36.** (*a*) 586 MN. (*b*) 1.66×10^{-14}. **38.** (*a*) 94.3 MHz. (*b*) $+z$; 960 nT. (*c*) 1.98 m^{-1}; 593 Mrad/s. (*d*) 110 W/m^2. (*e*) 678 nN; 367 nPa. **40.** $I(2-f)/c$. **44.** (*a*) 3.60 GW/m^2. (*b*) 12.0 Pa. (*c*) 16.7 pN. (*d*) 2.78 km/s^2. **46.** 1.06 km^2. **48.** (*b*) 585 nm.

* Dal problema 30 in avanti sono date le risposte ai problemi di numero pari.

CAPITOLO 42

1. (*a*) 515 nm; 610 nm. (*b*) 555 nm; 541 THz; 1.85 fs. **3.** (*a*) 8.68 y. (*b*) 4.4 My. **5.** 67 ps. **11.** Giallo-arancione. **13.** (*b*) $0.80c$. **15.** ±0.0036 nm. **17.** (*a*) 1.66×10^{-5}. (*b*) 0.83×10^{-5}. **19.** (*a*) 6 min. (*b*) 12 min. (*c*) 6 min. **23.** (*a*) 0.067. (*b*) 10°; 7.0°; 2.2°. **25.** 4.43 nm. **27.** 78.9°.

CAPITOLO 43

1. (*a*) 38°. (*b*) 52.9°. **3.** 1.56. **5.** 1.95×10^8 m/s. **7.** 1.25. **9.** 1.5. **13.** 74 m. **15.** (*b*) 0.60 mm. **19.** 43 mm. **21.** 750 m. **23.** $1.24 < n < 1.37$. **27.** (*a*) $2v$. (*b*) v. **33.** 390 cm sotto la superficie dello specchio. **35.** $I_{\text{nuova}} = (10/9)I_{\text{vecchia}}$. **37.** Sei. **39.** (*a*) 405 nm. (*b*) 2.37 μm. (*c*) 112°. **41.** (*a*) 72.07°. (*b*) Da A a B. **43.** (*a*) $n_{\text{liquido}} < n_{\text{vetro}}$. **45.** 187 cm. **47.** (*b*) 0.170. **49.** (*b*) 60.2 μs. **51.** (*a*) Sì. (*b*) No. (*c*) 43°.

CAPITOLO 44

1. 11.0 cm. **3.** (*a*) +, +40, −20, +2, no, sì. (*b*) Piano, ∞, ∞, −10, sì. (*c*) Concavo, +40, +60, −2, sì, no. (*d*) Concavo, +20, +40, +30, sì, no. (*e*) Convesso, −20, +20, +0.50, no, sì. (*f*) Convesso, −, −40, −18, +180, no, sì. (*g*) −0, −, −, +5.0, +0.80, no, sì. (*h*) Concavo, +8.0, +16, +12, −, sì. **9.** (*b*) 2.0. (*c*) Nessuno. **11.** 12 cm a sinistra della lente. **13.** 2.5 mm. **17.** (*a*) 40 cm. (*b*) 80 cm. (*c*) 240 cm (*d*) −40 cm. (*e*) −80 cm. (*f*) −240 cm. **23.** 22 cm. **27.** 30 cm a sinistra della lente divergente; virtuale; diritta; $m = 0.75$. **29.** (*c*) La luce passa indeviata. **31.** (*a*) A 73.6 cm di distanza dallo specchio dalla parte della lente. (*b*) Reale. (*c*) Diritta. (*d*) 0.289. **35.** 2.0 mm. **37.** (*a*) 2.34 cm. (*b*) Più piccoli. **39.** (*a*) 5.3 cm. (*b*) 3.0 mm. **41.** 103. **43.** 25 ms.

CAPITOLO 45

1. (*a*) 0.22 rad. (*b*) 12°. **3.** 2.3 mm. **5.** 650 nm. **7.** 0.103 mm. **9.** 600 nm. **13.** (*a*) 0.253 mm. (*b*) I massimi e i minimi sono scambiati. **17.** 3.2×10^{-4}. **19.** 0°. **23.** (*a*) 1.21 m; 3.22 m; 8.13 m. **27.** 124 nm. **29.** (*a*) 552 nm. (*b*) 442 nm. **31.** 215 nm. **33.** 643 nm. **35.** 2.4 μm. **37.** 840 nm. **39.** 141. **41.** 1.89 μm. **43.** (*a*) 34. (*b*) 45. **45.** 1.00 m. **47.** (*a*) 88%. (*b*) 95%. **49.** 588 nm. **51.** 1.0003.

CAPITOLO 46

1. 690 nm. **3.** (*a*) 0.430°. (*b*) 118 μm. **5.** (*a*) $\lambda_a = 2\lambda_b$.

(*b*) I minimi coincidono quando $m_b = 2m_a$. **7.** 173 μm. **9.** 1.49 mm. **11.** (*a*) 0.186°. (*b*) 0.478 rad. (*c*) 0.926. **13.** 5.07°. **15.** (*b*) 0; 4.493 rad; 7.725 rad; ... (*c*) −0.50; 0.93; 1.96; ... **17.** (*a*) 137 μrad. (*b*) 10.4 km. **19.** 51.8 m. **21.** 1400 km. **23.** 15 m. **25.** (*a*) 6.8°. (*b*) Nessuna risposta. **27.** (*a*) 0.35°. (*b*) 0.94°. **29.** (*b*) 70 μm. (*c*) Tre volte il diametro lunare. **31.** $\lambda D/d$. **33.** (*a*) 3. **35.** (*a*) 5.0 μm. (*b*) 20 μm.

CAPITOLO 47

1. (*a*) 3.50 μm. (*b*) 9.69°; 19.7°; 30.3°; 42.3°; 57.3°. **3.** 523 nm. **5.** (*a*) 6.0 μm. (*b*) 1.5 μm. (*c*) $m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$. **9.** (*b*) A ugual distanza tra i massimi principali. (*c*) $I_m/9$. **13.** 400 nm $< \lambda <$ 635 nm. **15.** 3. **21.** 491. **23.** 3650. **25.** (*a*) 9.98 μm. **27.** (*a*) 0.032°/nm; 0.077°/nm; 0.25°/nm. (*b*) 40 000; 80 000; 120 000. **31.** 2.68°. **33.** 26 pm; 39 pm. **35.** 49.8 pm. **39.** 0.206 nm. **41.** (*a*) $a_0/\sqrt{2}$; $a_0/\sqrt{5}$; $a_0/\sqrt{10}$; $a_0/\sqrt{13}$; $a_0/\sqrt{17}$.

CAPITOLO 48

1. (*a*) $-y$. (*b*) $E_x = 0$, $E_y = 0$, $E_z = -cB \operatorname{sen}(ky + \omega t)$. (*c*) Polarizzata linearmente; direzione z. **3.** (*a*) 2.14 V/m. (*b*) 20.3 pPa. **5.** $\frac{1}{8}$. **7.** 27/128. **9.** 15.8 W/m^2. **11.** (*a*) 0.16. (*b*) 0.84. **13.** (*a*) 53.1°. (*b*) Sì, leggermente. **15.** Da 55°31′ a 55°46′. **17.** 12 μm. **21.** (*a*) Ruota il piano di polarizzazione di 90°. (*b*) Inverte il senso di rotazione della polarizzazione circolare. (*c*) La luce resta non polarizzata. **23.** (*a*) 2.90×10^{-14} kg · m^2/s^2. (*b*) 2.88 h.

CAPITOLO 49

1. 91 K. **3.** (*a*) 1.06 mm; microonde. (*b*) 9.4 μm; infrarossi. (*c*) 1.6 μm; infrarossi. (*d*) 500 nm; visibile. (*e*) 0.29 nm; raggi X. (*f*) 2.9×10^{-41} m; raggi gamma duri. **5.** 580 mW. **9.** (*a*) 138 K. (*b*) 21.0 μm. **11.** 1.44 W **13.** 780 K. **15.** (*b*) 6 °C. **19.** $0.796T_E$. **21.** (*a*) 92.1%. (*b*) 58.2%. **23.** (*a*) 1.4×10^{12}, 6.0×10^{12}, 1.4×10^{13}, Hz. (*b*) 5.9, 25, 60, meV. (*c*) 27, 64, 120, N/m. **25.** (*a*) 1110 J. (*b*) 713 J. **27.** (*a*) 2.11 eV. **29.** 1.17 eV. **31.** Ultravioletti. **33.** Cesio, litio, bario. **35.** (*a*) No. (*b*) 544 nm; verde. **37.** 172 nm. **39.** (*a*) 1.17 V. (*b*) 641 km/s. **43.** 2.63 m^2. **45.** (*a*) La lampada a infrarossi. (*b*) 1.97×10^{20}. **47.** (*a*) 3.10 keV. (*b*) 14.4 keV. **49.** (*a*) 2.97×10^{20} s^{-1}. (*b*) 48 600 km. (*c*) 281 m. (*d*) 5.91×10^{18}/m^2 · s; 1.97×10^{10} m^{-3}. **51.** (*a*) 29.8 keV. (*b*) 7.19×10^{18} Hz. (*c*) 1.59×10^{-23} kg · m/s = 29.8 keV/c. **53.** 2.95 cm/s. **55.** (*a*) 2.87 pm. (*b*) 5.89 pm. **59.** 2.64 fm. **61.** (*a*) 4.86 pm. (*b*) −42.1 keV. (*c*) 42.1 keV. **63.** 42.6°. **65.** (*b*) 1.12 keV.

CAPITOLO 50

1. (*a*) 1.7×10^{-35} m. **3.** (*a*) 38.8 pm. (*b*) 1.24 nm. (*c*) 907 fm. **5.** (*a*) 3.51×10^6 m/s. (*b*) 64.4 kV. **7.** (*a*) 5.3 fm. **9.** 3.9×10^{-17} m. **11.** Un neutrone. **13.** (*a*) 7.77 pm. (*b*) 7.68 pm. **15.** 5.5°. **17.** (*a*) I fasci sono assenti. (*b*) 47°. **21.** 690 mHz. **23.** 76 μeV. **25.** 8.8×10^{-24} kg · m/s. **27.** $\lambda/2\pi$. **29.** (*a*) 1900 MeV. (*b*) 1.0 MeV. **31.** 88.3 eV. **33.** (*a*) 6.2×10^{-41} J. (*b*) 1.0×10^{-20}. (*c*) 3.0×10^{-18} K. **35.** (*a*) 8.74 keV. (*b*) 1.01×10^{-22} kg · m/s. (*c*) 98.5 pm. **37.** (*a*) $x = NL/2n$, $N = 1, 3, 5, ..., (n-1)$. (*b*) $x = NL/n$, $N = 0, 1, 2, ..., n$. **39.** (*b*) 0.0006. (*c*) 0.0003. **41.** (*a*) 9.2×10^{-6}. (*b*) 7.5×10^{-8}. **43.** 1.1×10^{104} y.

CAPITOLO 51

3. 656.3, 486.1, 434.1, 410.2, 397.0 nm. **7.** 3.40 eV. **9.** (*a*) $n = 5 \rightarrow 3$. (*b*) Paschen. **11.** 66 neV; $E_2 = -3.4$ eV. **21.** (*a*) 54.4 eV. (*b*) 13.6 eV. **25.** (*b*) n^2. (*c*) n. (*d*) $1/n$. (*e*) $1/n^3$. (*f*) $1/n$. (*g*) $1/n^4$. (*h*) $1/n^4$. (*i*) $1/n^2$. (*j*) $1/n^2$. (*k*) $1/n^2$. **31.** (*a*) 3, 2, 1, 0, −1, −2, $-3\hbar$. (*b*) −3, −2, −1, 0, 1, 2, $3\mu_B$. (*c*) 30.0°, 54.7°, 73.2°, 90°, 107°, 125°, 150°. (*d*) $\sqrt{12}\hbar$. (*e*) $\sqrt{12}\mu_B$. **33.** (*b*) 0.358 meV; 1.07 meV; 2.15 meV. **37.** 72 km/s^2. **39.** $n = 4$; $l = 3$; $m_l = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$. **41.** $n \geq 5$; $l = 4$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$. **43.** $1, 0, 0, \frac{1}{2}$; $1, 0, 0, -\frac{1}{2}$. **45.** Tutte le affermazioni sono vere. **47.** 51 mT. **49.** (*a*) 2150 nm^{-3}; zero. (*b*) 291 nm^{-3}; 10.2 nm^{-1}. **51.** 1.85. **53.** 5.41×10^{-3}. **55.** 1.5×10^{-15}. **57.** 0.439. **59.** (*a*) $0.764a_0$; $5.236a_0$. (*b*) 0.981 nm^{-1}; 3.61 nm^{-1}. **61.** 1.90×10^{-3}. **63.** (*a*) 11.4 meV. (*b*) 1.62 eV. **65.** (*a*) 0.284 pm. (*b*) 2.53 keV. (*c*) 490 pm.

CAPITOLO 52

3. 9.84 kV. **5.** (*a*) 24.8 pm. (*b*) Invariati. (*c*) Invariati. **7.** ≈ 2.1 keV. **9.** 49.6 pm; 99.2 pm; 99.2 pm. **11.** (*a*) 19.7 keV; 17.5 keV. (*b*) Zr o Nb. **13.** (*a*) 5.72 keV. (*b*) 86.8 pm, 14.3 keV; 217 pm, 5.72 keV. **19.** (*a*) $2, 0, 0, \pm\frac{1}{2}$. (*b*) $n = 2$; $l = 1$; $m_l = 1, 0, -1$; $m_s = \pm\frac{1}{2}$. **21.** Solo l'argon resterebbe un gas inerte. **23.** (*a*) 1.84; 2.26. (*b*) 0.167; 0.119. **25.** 2.0×10^{16} s^{-1}. **27.** 3.2×10^7. **29.** 10 000 K. **31.** (*a*) Nessuno. (*b*) 51.1 J. **33.** 4.74 km. **35.** (*a*) No. (*b*) 0.11 μm. (*c*) 110 km.

CAPITOLO 53

3. 5.90×10^{28} m^{-3}. **5.** (*a*) 0.90. (*b*) 0.69. (*c*) Sodio. **7.** (*a*) 1.00; 0.986; 0.500; 0.014; zero. (*b*) 700 K. **9.** 5.53 eV. **11.** 65.4 keV. **19.** 234 keV. **23.** 201 °C. **27.** (*a*) 5.86×10^{28} m^{-3}. (*b*) 5.51 eV. (*c*) 1390 km/s. (*d*) 524 pm. **29.** (*a*) 52.1 nm. (*b*) 202. **31.** (*a*) 1.5×10^{-6}. (*b*) 1.5×10^{-6}. **35.** (*a*) 5.0×10^{21} m^{-3}. (*b*) 1.7×10^5. **37.** 46 nm.

39.

isolante	nessuna	–
semicond. estrins.	donatore	n
semicond. intrins.	nessuna	–
conduttore	nessuna	–
conduttore	nessuna	–
semicond. estrins.	accettore	p

41. (*a*) 0.74 eV al di sopra. (*b*) 5.6×10^{-7}. **43.** 20 GΩ; 90 Ω. **45.** 1.1 eV; no. **47.** (*a*) 230 nm. (*b*) Ultravioletti. **49.** Opaco.

ISBN 88-408-0777-2

CAPITOLO 54

1. 15.7 fm. **3.** 26 MeV.
11. (*a*) 1.000000 u; 11.906830 u; 236.202500 u.
13. ^{25}Mg: 10.01%; ^{26}Mg: 11.00%.
15. (*a*) 19.81 MeV; 6.258 MeV; 2.224 MeV. (*b*) 28.30 MeV. (*c*) 7.075 MeV. **17.** (*b*) 7.92 MeV. **19.** (*a*) 2.59 fm. (*b*) Si.
21. (*a*) 4. (*b*) 148 neV. (*c*) 8.38 m. (*d*) Radioonde.
23. 280 d. **25.** (*a*) 64.2 h. (*b*) 0.125. (*c*) 0.0749.
27. (*a*) 7.57×10^{16} s^{-1}. (*b*) 4.95×10^{16} s^{-1}. **29.** 3.84×10^{21}.
31. (*a*) 59.5 d. (*b*) 1.18. **33.** 87.8 mg. **39.** (*a*) 3.65×10^{7} s^{-1}. (*c*) 6.41 ng. **43.** $Q_3 = -9.460$ MeV; $Q_4 = 4.679$ MeV; $Q_5 = -1.326$ MeV. **45.** (*a*) 31.85 MeV; 5.979 MeV; (*b*) 73 MeV. **47.** 1.17 MeV. **49.** (*a*) 874 fm. (*b*) 6.4 fm. (*c*) No. **51.** (*b*) 960.2 keV. **53.** 596 keV. **55.** 13 mJ.
57. 39.4 MBq. **59.** 5.33×10^{22}. **61.** (*a*) 2.03×10^{20}. (*b*) 2.78×10^{9} Bq. (*c*) 75.1 mCi. **63.** 730 cm^2.
65. (*a*) 6.3×10^{18}. (*b*) 2.5×10^{11}. (*c*) 200 mJ. (*d*) 2.3 mGy. (*e*) 30 mSv. **67.** (*b*) 27 TW. **69.** 1.78 mg.
71. − 1.855 MeV. **77.** (*c*) 3.9×10^{7} m/s; 8.8×10^{5} m/s; 15.6 MeV. **81.** (*a*) 5.5 MeV. **83.** (*a*) 5.10×10^{18} Hz. (*b*) 20.5 keV. **85.** (*a*) 3.55 MeV. (*b*) 7.72 MeV. (*c*) 3.26 MeV. **87.** (*a*) 7.19 MeV. (*b*) 12.0 MeV. (*c*) 8.69 MeV.

CAPITOLO 55

1. (*a*) 34 kg. (*b*) 12 mg. **3.** (*a*) 2.56×10^{24}. (*c*) 25 900 y.
9. (*a*) 13.9 d^{-1}. (*b*) 4.97×10^{8}. **11.** −23.0 MeV.
13. 174 MeV. **15.** 231 MeV. **17.** (*a*) 253 MeV.
19. $^{238}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{239}\text{U} \rightarrow {}^{239}\text{Np} + \text{e}$; $^{239}\text{Np} \rightarrow {}^{239}\text{Pu} + \text{e}$.
21. 548 kg. **25.** 1.6×10^{16}. **27.** 566 W. **29.** (*a*) 44 kiloton.
31. 24 g. **35.** 450 keV. **37.** (*a*) 170 kV. **39.** 24 800 y.
43. (*a*) 4.0×10^{27} MeV. (*b*) 5.1×10^{26} MeV. **45.** 45 · 109 y.
47. (*a*) 4.1 eV/atomo. (*b*) 9.0 MJ/kg. (*c*) 1500 y.
51. (*b*) 2.28×10^{42} J. (*c*) 1.85×10^{8} y.
53. (*a*) B; 5.19*N*, MeV. (*b*) A: $\frac{1}{2}N$ ^{3}H, $\frac{1}{2}N$ n; B: $\frac{1}{3}N$ ^{1}H, ^{4}He, n. **55.** $K_\alpha = 3.52$ MeV; $K_\text{n} = 14.07$ MeV.
57. (*a*) 1000 km/s. (*b*) 2.0 μm.

CAPITOLO 56

1. (*a*) 2.4×10^{-43}. (*b*) 8.1×10^{-37}. **3.** 2.84×10^{28} m.
5. 769 MeV. **7.** 31 nm. **9.** 2.2×10^{-18} m.
11. (*a*) Carica; numero leptonico dell'elettrone. (*b*) Energia relativistica. **13.** *b*, *d*. **15.** (*a*) K^+. (*b*) $\bar{n}$. (*c*) π^0.
17. (*a*) $\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$. (*b*) $\bar{u}\,\bar{u}\,\bar{d}$. **19.** (*a*) Sud. (*b*) uss. **25.** 690 nm.
27. (*b*) 2.39 GK. **29.** (*a*) 280 μeV. (*b*) 4.4 mm.
31. (*a*) 1.6×10^{12} K. (*b*) 88 μs.

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

CAPITOLO 27
Figura 2: Xerox Corporation. Figura 9: *Seattle Times*.

CAPITOLO 28
Figura 9: Education Services, Inc.

CAPITOLO 30
Figura 23: High Voltage Engineering Company. Figura 30: NASA.

CAPITOLO 31
Figura 2: Spague Electric Company. Figura 8: Lawrence Livermore Laboratory. Figura 19: Pasco Scientific.

CAPITOLO 34
Figure 1 e 2: D. C. Heath and Company with Education Development Center. Figura 3: Varian Associates. Figura 10: Professor J. le P. Webb, University of Sussex, Brighton, England, Figura 11: Argonne National Laboratory. Figura 13: Fermi National Accelerator Laboratory.

CAPITOLO 37
Figura 5: GE Medical Systems. Figura 10: R. W. De Blois, Figura 12: Dr. Syun Akasofu/Geophysical Institute, University of Alaska, Copyright © 1977.

CAPITOLO 40
Figura 6: Stanford Linear Accelerator Laboratory.

CAPITOLO 41
Figura 2*a*: NASA. Figura 2*b*: Astronomical Society of the Pacific. Figura 3: AT&T Bell Labs. Figura 4: NASA. Figura 5: Astronomical Society of the Pacific. Figura 17: NASA.

CAPITOLO 42
Figura 2: Oregon State University. Figura 3: Copyright F Fotocentre Ltd. Oamuaru, New Zeland. Figura 6: Mount Wilson and Mount Palomar Observatories.

CAPITOLO 43
Figura 2: Education Development Center, Inc. Figura 3*a*: PSSC, *Physics, 2nd Ed.*, D. C. Heath and Co. with Education Development Center, 1965, Newton, Mass. Figura 20: Science Photo Library/Photo Researchers. Figura 21: Bell System.

CAPITOLO 44
Figura 27: NASA.

CAPITOLO 45
Figura 2: da *Atlas of Optical Phenomena* by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall. 1962, Figura 3: Education Development Center, Newton. Mass. Figura 16: Bausch & Lomb Optical, Co. Figura 18*b*: Robert Guenther.

CAPITOLO 46
Figure 1 e 2: da *Atlas of Optical Phenomena* by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Figura 3: da Sears, Zemansky, and Young, *University Physics*, 5th ed., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976. Figura 13: da *Atlas of Optical Phenomena*, by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Figura 15: Dr. G. D. Shockman da D. C. Shingo, J. B. Cornett, G. D. Shockman, *J. Bacteriology*, 138: 598–608, 1979. Figura 16: da *Atlas of Optical Phenomena*, by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962.

CAPITOLO 47
Figura 2: da *Atlas of Optical Phenomena*, by Cagnet et al., Springer-Verlag, Prentice-Hall, 1962. Figura 14: W. Arrington and J. L. Katz, X-Ray Laboratory, Rensselaer Polytechnic Institute. Figure 21 e 22: Ronald R. Erickson and Museum of Holography, Figura 23: da Rigden, *Physics and the Sound of Music*, «Scientific American», Hohn Wiley & Sons, Inc., 1985.

CAPITOLO 48
Figura 8: Copyright © R. Mark, *Experiments in Gothic Structure*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1982. Figura 9: Apple Computer, Inc. and Paul Matsuda. Figura 12: da Robert Guenther, *Modern Optics*, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

CAPITOLO 49
Figura 1: Alice Halliday.

CAPITOLO 50
Figura 1: Professor C. Jonsson, University Tübingen, Germany. Figura 2: G. Matteucci. Figura 24: Philippe Plailly/SPL/Photo Researchers.

CAPITOLO 51
Figura 1: W. Finkelnburg, *Structure of Matter*, Springer-Verlag, 1964. Figura 14: American Institute of Physics, Neils Bohr Library, Margaret Bohr Collection.

CAPITOLO 52
Figura 8: Dave Roback/AP/Wide World Photos. Figura 9: Roger Ressmeyer/Starlight Pictures. Figura 10: National Bureau of Standards.

CAPITOLO 53
Figura 18: AT&T.

CAPITOLO 55
Figura 12: Princeton University Plasma Physics Lab. Figura 14: Lawrence Livermore Laboratory. Figura 15: Los Alamos National Laboratory.

CAPITOLO 56
Figura 1*a*: CERN. Figura 5: American Institute of Physics, Neils Bohr Library. Margaret Bohr Collection Figura 7: AT&T.

INDICE ANALITICO

A
Acceleratore elettrostatico, 718
Accettore, atomo, 1219
Ampere, 752
Ampère, 820
  legge di, 827
Amperometro, 781
Angolo di:
  polarizzazione, 1089
  riflessione, 977
  rifrazione, 977
Antenna, 945
Antineutrino, 1245
Atomo:
  accettore, 1219
  donatore, 1218

B
Balmer, 1157
  serie di, 1157
Banda di:
  conduzione, 1216
  valenza, 1216
Barioni, 1292
Becquerel, 1247
Betatrone, 851
Big bang, 1303
  la sintesi nucleare nel, 1306
Bioluminescenza, 963
Biot-Savart, legge di, 821
Birifrangenza, 1091
Bohr, 1158
  magnetone di, 868, 1167, 1241
  raggio di, 1162
  teoria di, 1160
Bottiglia magnetica, 801
Bradley, 963
Bragg, legge di, 1076
Brewster, 1090
  legge di, 1090

C
Calcolo del potenziale, 706
Calore radiante, 942
Campo elettrico, 650, 651
  indotto, 849
Campo magnetico, 793, 824
  energia in un, 889
Cannocchiale, 1014
Capacità, 730
Carica:
  densità di, 657
  elementare, 641
  elettrica, 636
  superficiale indotta, 742
Cavità risonanti, 931
Chemiluminescenza, 963
Ciclotrone, 799
Circuiti, 771
  RC, 782
  RL, 886
  LC, 893
  RLC, 907
Coefficiente termico di resistività, 1217
Coerenza, 1027
Complementarità, principio di, 1150
Compton, 1117
  effetto, 1117
  spostamento, 1118
Condensatore, 729
  a piatti paralleli, 731
  cilindrico, 732
  con dielettrico, 737
  scarica di un, 784
  sfera isolata, 732
Condensatori:
  in parallelo, 733
  in serie, 734
Conduttore, 681, 682, 1216
  isolato, 716
Conduttori, 637
Conduzione, banda di, 1216
Confinamento:
  inerziale, 1279
  magnetico, 1277
Cooper, coppie di. 1228
Corona, effetto. 718
Corpo nero, radiazione di, 1106
Corrente:
  alternata, 907

densità di, 753
di diffusione, 1221
di spostamento, 928
elettrica, 752
forza magnetica su una, 806
indotta, 842
Correnti di Foucault, 845
Corrispondenza, principio di, 1110, 1149
Costante:
di Curie, 872
di disintegrazione, 1242
di Planck, 1109
di Rydberg, 1157
di Stefan-Boltzmann, 1107
di tempo capacitiva, 886
dielettrica del vuoto, 639
elettrica relativa, 738
Coulomb, 638
legge di, 639
Curie, 872
costante di, 872

D
Davisson e Germer, 1131
esperimento di, 1130
De Broglie, 1129
lunghezza d'onda di, 1130
De Haas, 1168
Debye, 1113
temperatura di, 1113
Decadimento:
alfa, 1244
beta, 1245
Densità di:
carica, 657
corrente, 753
energia, 736, 891
Derivata parziale, 715
Diagramma di Moseley, 1188
Diamagnetismo, 869, 873
Dielettrici polari, 739
Dielettrico, 737
condensatore con, 737
Diffrazione, 1045
da fenditura sottile, 1048
da un foro circolare, 1054
reticolo di, 1065
Diffusione:
della luce, 1097
doppia, 1099
Dimezzamento, tempo di, 1242
Diodo raddrizzatore, 1222
Diodo-laser, 1225
Dipolo elettrico, 652, 663
momento di, 653
Dipolo magnetico, 810
momento di, 823
Direzione di polarizzazione, 1086
Disintegrazione, costante di, 1242
Dispersione del reticolo, 1072
Divergenza, 935
Domini magnetici, 875
Donatore, atomo, 1218
Doppler:
effetto, 966
relativistico, effetto, 968
trasversale, effetto, 970

E
Effetto:
Compton, 1117
corona, 718
Doppler, 966
relativistico, 968
trasversale, 970
Einstein-De Haas, 1168
fotoelettrico, 1114
Hall, 637, 803
quantistico, 805
Joule, 761
tunnel, 1145
Zeeman, 1177
Einstein, 636, 1197
temperatura di, 1113
Einstein-De Haas, effetto, 1168
Emissione:
spontanea, 1197
stimolata, 1197, 1198
Energia:
densità di, 736, 891
di Fermi, 1210
elettrostatica, 735
in un campo magnetico, 889
potenziale, 701
elettrica, 702
Equazione:
dello specchio, 997
di Schrödinger, 1139, 1164
Equazioni di Maxwell, 929
Esperimento di:
Davisson-Germer, 1130
G.P. Thomson, 1132

F
F.e.m. di movimento, 846
Farad, 730
Faraday, 825, 841
legge dell'induzione di, 843
Fasori, 908
Fattore di potenza. 915
Fenditura sottile, diffrazione da, 1048
Fermat, 981
principio di, 981
Fermi:
energia di, 1210

velocità di, 1212
Fermi-Dirac, funzione di probabilità di, 1211
Ferromagnetismo, 869, 874
Fibra ottica, 987
Fissione nucleare, 1264
  teoria della, 1266
Fizeau, 964
Flusso, 675
  elettrico, 677
Formule per le lenti, 1009
Foro circolare, diffrazione da un, 1054
Forza:
  debole, 1288
  di Lorentz, 797
  elettrica, 638
  elettrodebole, 1289
  elettromotrice, 771
    indotta, 842
  forte, 1238, 1289
  linee di, 654, 824
  magnetica, 794
    su una corrente, 806
Foucault, correnti di, 845
Frange di interferenza, 1024
Franklin, 636
Frenamento magnetico, 845
Funzione di probabilità di Fermi-Dirac, 1211
Fusione:
  nucleare, 1272
  termonucleare, 1273
    controllata, 1276
    nelle stelle, 1274

G
Gauss, 679
  legge di, 675, 684
Generatore AC, 907
Generazione di un'onda elettromagnetica, 945
Gerlach, 1169
Giunzione p-n, 1220
Glashow, 1289
Goudsmit, 1171
Gray, 1247

H
Hall:
  effetto, 637, 803
  quantistico, effetto, 805
  resistenza, 805
Heaviside, 930
Heisenberg, 1136
  principio d'indeterminazione di, 1136
Henry, 841, 883
Henry, Joseph, 841
Hertz, 931
Hubble, 1301
  parametro di, 1301
Huygens, principio di, 980

I
Impedenza, 912
Incandescenza, 962
Indici:
  di rifrazione, 977
  principali, rifrazione, 1092
Induttanza, 883
  di un solenoide, 884
  di un toroide, 885
Infrarosso, 942
Interferenza, 1023
  a doppia fenditura, 1030
  da pellicole sottili, 1032
  frange di, 1024
Interferometro di Michelson, 1037
Isolante, 1216
Isolanti, 637
Isotopi, 1237

J
Josephson, 782
Joule:
  effetto, 761
  legge di, 761

K
Kirchoff:
  prima legge di, 779
  seconda legge di, 773

L
Laser, 1194
Laue, 1074
  macchie di, 1074
Lavoro di estrazione, 1213
LED, 1224
Legame:
  covalente, 1201
  ionici, 1203
Legge:
  dell'induzione di Faraday, 843
  della riflessione, 977
  della rifrazione, 977
  delle maglie, 773
  dello spostamento di Wien, 1107
  di Ampère, 827
  di Biot-Savart, 821
  di Bragg, 1076
  di Brewster, 1090
  di Coulomb, 639
  di Gauss, 675, 684

di Joule, 761
di Lenz, 844
di Malus, 1088
di Ohm, 758
di Planck, 1109
di Stefan-Boltzmann, 1106
Lente:
convergente, 1006
di ingrandimento, 1012
divergente, 1006
sottile, 1005
Lenti, formule per le, 1009
Lenz, 844
legge di, 844
Leptoni, 1291
Linee di forza, 654, 824
Lorentz, 635
forza di, 797
Luce, 941
diffusione della, 1097
velocità della, 963
Luminescenza, 962
Lunghezza d'onda di De Broglie, 1130

M
Macchie di Laue, 1074
Maglie, legge delle, 773
Magnetismo:
dei pianeti, 876
nucleare, 869
Magnetizzazione, 870
Magnetone di Bohr, 868, 1167, 1241
Malus, 1088
legge di, 1088
Maxwell, 635
equazioni di, 929
Mesoni, 1291
Michelson, 964, 1037
interferometro di, 1037
Microonde, 942
Microscopio, 1013
elettronico, 1055
Millikan, 662
Modello di Thomson, 691
Momento di dipolo:
elettrico, 653
magnetico, 823
Momento magnetico intrinseco μ_s, 868
Monopoli magnetici, 867
Moseley, 1187
diagramma di, 1188
Movimento, f.e.m. di, 846

N
Nabla, 935
Neutrino, 1245
Neutroni termici, 1264
Nuclei, sistematica dei, 1237
Numero quantico:
azimutale, 1164, 1165
magnetico, 1164, 1165
principale, 1164

O
Oersted, 819
Ohm, 755
legge di, 758
Onda elettromagnetica, generazione di un', 945
Onde:
elettromagnetiche, 931
radio, 943
Oscillatore elettromagnetico, 892
Oscillazioni forzate, 897
Ottica geometrica, 975

P
Pacchetto d'onda, 1134
Paramagnetici, 869
Paramagnetismo, 872
Parametro di Hubble, 1301
Pauli, 1190
principio di esclusione di, 1190
Pellicole sottili, interferenza da, 1032
Penzias, 1302
Permeabilità magnetica, 820, 871
Permessività del vuoto, 639
Pianeti, magnetismo dei, 876
Piano di polarizzazione, 1086
Piatti paralleli, condensatore a, 731
Planck, 1109
costante di, 1109
legge di, 1109
Polarizzatore, 1087
Polarizzazione, 1085
angolo di, 1089
circolare, 1094
direzione di, 1086
piano di, 1086
Poli, nord e sud, 796
Potenza, fattore di, 915
Potenziale:
elettrico, 704
il calcolo del, 706
Potere risolutivo di un reticolo, 1072
Poynting, 951
vettore di, 951
Pressione di radiazione, 953
Prima legge di Kirchoff, 779
Principio:
di complementarità, 1150
di corrispondenza, 1110, 1149
di esclusione di Pauli, 1190
di Fermat, 981
di Huygens, 980

d'indeterminazione di Heisenberg, 1136
Pulsar, 944

Q
Quark, 642, 1296

R
Radiazione:
cosmica di fondo, 1302
di corpo nero, 1106
pressione di, 953
termica, 1105
Raggi gamma, 944
Raggi X, 944, 1074
spettro caratteristico dei, 1186
spettro continuo dei, 1185
Raggio:
di Bohr, 1162
ordinario, 1091
straordinario, 1091
Reattanza:
capacitiva XC, 910
induttiva XL, 909
Reattori nucleari, 1268
Resistenza, 755
equivalente R_{eq}, 776
Hall, 805
interna r, 774
Resistività, 755, 1217
coefficiente termico di, 1217
Resistore, 755
Resistori:
in parallelo, 776
in serie, 777
Reticolo:
di diffrazione, 1065
dispersione del, 1072
potere risolutivo di un, 1072
Riflessione, 976
angolo di, 977
legge della, 977
totale, 978, 987
Rifrazione, 976
angolo di, 977
doppia, 1091
indici di, 977
indici principali, 1092
legge della, 977
Risonanza, 912
magnetica nucleare, 1172
Roemer, 963
Rotore, 935
Rutherford, 691, 1235
teoria di, 1236
Rydberg, 1157
costante di, 1157

S
Salam, 1289
Saturazione, 872
Scarica di un condensatore, 784
Schrödinger, 1139, 1163
equazione di, 1139, 1164
Seconda legge di Kirchoff, 773
Semiconduttore estrinseco, 1218
Semiconduttori, 762, 1217
Semiconduttrice intrinseca, 1218
Serie di Balmer, 1157
Sfera isolata, condensatore, 732
Sievert, 1248
Sincrotrone, 800
Sintesi nucleare nel big bang, 1306
Sistematica dei nuclei, 1237
Sistemi di riferimento, 831
Smagnetizzazione adiabatica, 873
Solenoide, induttanza di un, 884
Solenoidi, 829
Specchi:
piani, 982
sferici, 997
Specchio:
concavo, 997
convesso, 997
equazione dello, 997
Spettro:
caratteristico dei raggi X, 1186
continuo dei raggi X, 1185
elettromagnetico, 941
Spettrografi, 1070
Spin, 1171
Spostamento:
Compton, 1118
corrente di, 928
Stefan-Boltzmann:
costante di, 1107
legge di, 1106
Stern, 1169
Stranezza, 1295
Struttura fine, 1177
Superconduttività, 763
Superconduttori, 1227
Superfici equipotenziali, 713
Superficie gaussiana, 679
Svuotamento, zona di, 1221

T
Telescopio rifrattore, 1014
Temperatura di Einstein, 1113
Temperature di Debye, 1113
Tempo:
di dimezzamento, 1242
costante di, capacitiva, 886
Teoria:
dei Bohr, 1160
della fissione nucleare, 1266

di Rutherford, 1236
Thomson, 1132, 1236
determinazione di e/m, 798
esperimento di, 1132
modello di, 691
Tokamak, 1277
Toroide, induttanza di un, 885
Toroidi, 829, 830
Transienti, 908
Transistor, 1226
a effetto di campo, 1226
a giunzione, 1226
Trasformatore, 916
Triboluminescenza, 963
Tunnel, effetto, 1145

U
Uhlenbeck, 1171
Ultravioletto, 944

V
Valenza, banda di, 1216
Van de Graaff, 719
Velocità:
della luce, 963
di Fermi, 1212
Vettore di Poynting, 951
Volt, 705
Voltmetro, 781
Vuoto:
costante dielettrica del, 639
permettività del, 639

W
Weber, 842
Weinberg, 1289
Weiss, 875
Wien, legge dello spostamento di, 1107
Wilson, 1302

Y
Young, 1025

Z
Zeeman, effetto, 1177
Zona di svuotamento, 1221

ALCUNE TABELLE

Tavole	*Capitolo*	*Pagine*
Alcune proprietà di tre particelle	27	641
Alcuni campi elettrici	28	651
Esperimenti sulla legge di Coulomb	29	690
Alcune proprietà dei dielettrici	31	738
Resistività di alcuni materiali a temperatura ambiente (20 °C)	32	756
Valori tipici di alcuni campi magnetici	34	796
Risultati per l'effetto Hall per alcuni materiali	34	805
Alcuni momenti di dipolo magnetico	34	811
Alcune equazioni per i dipoli	35	823
Spin e momenti magnetici di alcune particelle	37	869
Permeabilità relativa di alcuni materiali paramagnetici a temperatura ambiente	37	872
Permeabilità relativa di alcune sostanze diamagnetiche a temperatura ambiente	37	874
Campi magnetici nel sistema solare	37	877
Relazioni di fase e ampiezza per correnti e differenze di potenziale alternate	39	911
Equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo (equazioni di Maxwell)	40	930
Velocità della relazione elettromagnetica nel vuoto*	42	965
Velocità della luce in alcuni materiali	42	965
Alcuni indici di rifrazione	43	977
Indici principali di rifrazione di alcuni cristalli birifrangenti	48	1092
I numeri quantici dell'atomo d'idrogeno	51	1164
Gli stati dell'atomo d'idrogeno	51	1173
Alcune proprietà elettriche del rame e del silicio	53	1217
Proprietà di alcuni superconduttori	53	1227
Alcuni isotopi radioattivi naturali	54	1249
La famiglia dei leptoni	56	1291
Alcuni mesoni	56	1292
Alcuni barioni	56	1292
Le particelle di campo	56	1293

* Alcune misure selezionate.

ALCUNE UNITÀ E ABBREVIAZIONI

ampere	A	litro	L
anno	y	metro	m
atmosfera	atm	miglio	mi
caloria	cal	minuto	min
cavallo vapore	CV	newton	N
coulomb	C	ohm	Ω
giorno	d	ora	h
grado Celsius	°C	pascal	Pa
grado Fahrenheit	°F	piede	ft
grammo	g	pollice	in
elettronvolt	eV	radiante	rad
farad	F	secondo	s
gauss	G	tesla	T
henry	H	unità di massa atomica	u
hertz	Hz	unità termica britannica	Btu
joule	J	volt	V
kelvin	K	watt	W
libbra	lb	weber	Wb

SEGNI MATEMATICI E SIMBOLI

$=$	eguale	$\sum$	sommatoria
$\approx$	circa eguale	$\bar{x}$	valor medio di x.
$\neq$	diverso	$\sim$	dell'ordine di grandezza di
$\equiv$	identico a	lim	limite di
$>$	maggiore di ($\gg$ molto maggiore di)	$\int$	integrale di
$<$	minore di ($\ll$ molto minore di)	Δx	variazione di x
$\geq$	maggiore o eguale a (oppure non minore di)	$\lvert x \rvert$	modulo di x
$\leq$	minore o eguale a (oppure non maggiore di)	$\frac{df}{dx}$	derivata di f rispetto a x
$\pm$	più o meno (per es. $\sqrt{4} = \pm 2$)		
$\propto$	proporzionale a (per es. la legge di Hooke: $F \propto x$ o $F = -kx$)	$\frac{\partial f}{\partial x}$	derivata parziale di f rispetto a x

PREFISSI DEL SI

Fattore	*Prefisso*	*Simbolo*	*Fattore*	*Prefisso*	*Simbolo*
10^{18}	exa	E	10^{-1}	deci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	tera	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	mega	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	etto	h	10^{-15}	femto	f
10^{1}	deca	da	10^{-18}	atto	a

ALFABETO GRECO

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Ro	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ, ς
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mi[1]	M	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ϵ	Ni[2]	N	ν	Fi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

1. In ambito scientifico è in uso il nome «mu».
2. In ambito scientifico è in uso il nome «nu».