QUINTA EDIZIONE

RESNICK • HALLIDAY • KRANE

Fisica 1

Edizione italiana a cura di:
Lanfranco Cicala

CASA EDITRICE AMBROSIANA

QUALCHE COSTANTE FISICA*

Velocità della luce	c	$3.00 \cdot 10^{8}$ m/s
Costante gravitazionale	G	$6.67 \cdot 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Numero di Avogadro	N_A	$6.02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Costante universale dei gas	R	8.31 J/(mol · K)
Relazione massa-energia	c^2	$8.99 \cdot 10^{16}$ J/kg
		931.5 MeV/u
Costante dielettrica	ε_0	$8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m
Permeabilità magnetica	μ_0	$1.26 \cdot 10^{-6}$ H/m
Costante di Planck	h	$6.63 \cdot 10^{-34}$ J · s
		$4.14 \cdot 10^{-15}$ eV · s
Costante di Boltzman	k	$1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K
		$8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
Carica elementare	e	$1.60 \cdot 10^{-19}$ C
Massa a riposo dell'elettrone	m_e	$9.11 \cdot 10^{-31}$ kg
Massa a riposo del protone	m_p	$1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Energia a riposo del protone	m_pc^2	938.3 MeV
Raggio di Bohr	a_0	$5.29 \cdot 10^{-11}$ m
Magnetone di Bohr	μ_B	$9.27 \cdot 10^{-24}$ J/T
		$5.79 \cdot 10^{-5}$ eV/T
Costante di Rydberg	R_∞	0.01097 nm^{-1}

*Per una lista più completa con i più recenti valori sperimentali *vedi* appendice B.

QUALCHE FATTORE DI CONVERSIONE*

Massa

1 kg = 1000 g = $6.02 \cdot 10^{26}$ u

1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg

Lunghezza

1 m = 100 cm = 39,4 in = 3,28 ft

1 mi = 1,61 km = 5280 ft

1 in = 2,54 cm

1 nm = 10^{-9} m = 10 Å

Tempo

1 d = 86 400 s

1 y = $\left(365 + \frac{1}{4}\right)$ d = $3{,}16 \cdot 10^{7}$ s

Volume

1 L = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3

1 gal (U.S.) = 231 in^3 = 3,79 L

Angoli

1 rad = 57,3° = 0,159 giri

π rad = 180° = $\frac{1}{2}$ giri

Velocità

1 m/s = 3,28 ft/s = 2,24 mi/h

1 km/h = 0,621 mi/h = 0,278 m/s

Forza e pressione

1 N = 10^5 dyn = 0,225 lb

1 Pa = 1 N/m^2 = 10 dyn/cm^2 = $1{,}45 \cdot 10^{-4}$ lb/in^2 = 10^{-5} bar

1 atm = $1.01 \cdot 10^5$ Pa = 14.7 lb/in^2 = 76 cmHg

Energia e potenza

1 J = 10^7 erg = 0,239 cal = 0,738 ft · lb

1 kW · h = $3{,}6 \cdot 10^6$ J

1 cal = 4,19 J

1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J

1 CV = 735,5 W = 0,986 horsepower (HP)

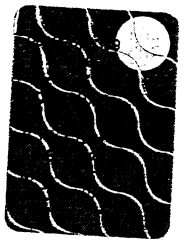
Elettricità e magnetismo

1 T = 1 Wb/m^2 = 10^4 G

*Per una lista più completa *vedi* appendice G.

QUALCHE PROPRIETÀ FISICA

Aria (secca a 20 °C e a pressione atmosferica)	
Massa volumica	1,21 kg/m^3
Calore specifico a pressione costante	1010 J/(kg · K)
Rapporto fra calori specifici	1,40
Velocità del suono	343 m/s
Potenziale di scarica elettrica	$3 \cdot 10^6$ V/m
Massa molare effettiva	0,0289 kg/mol
Acqua	
Massa volumica	1000 kg/m^3
Velocità del suono	1460 m/s
Calore specifico a pressione costante	4190 J/(kg · K)
Calore di fusione (0 °C)	333 kJ/kg
Calore di vaporizzazione (100 °C)	2260 kJ/kg
Indice di rifrazione (λ = 589 nm)	1,33
Massa molare	0,0180 kg/mol
Terra	
Massa	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
Raggio medio	$6{,}37 \cdot 10^6$ m
Accelerazione di gravità	9,81 m/s^2
Pressione atmosferica	$1{,}01 \cdot 10^5$ Pa
Periodo di rotazione di un satellite a 100 km di altezza	86,3 min
Raggio dell'orbita geosincrona	42 200 km
Velocità di fuga	11,2 km/s
Momento di dipolo magnetico	$8{,}0 \cdot 10^{22}$ A · m^2
Campo elettrico medio alla superficie	150 V/m
Distanza da:	
Luna	$3.82 \cdot 10^8$ m
Sole	$1.50 \cdot 10^{11}$ m
Stella più vicina	$4.04 \cdot 10^{16}$ m
Centro della galassia	$2.2 \cdot 10^{20}$ m
Galassia di Andomeda	$2.1 \cdot 10^{22}$ m
Dimensioni dell'Universo osservabile	$\sim 10^{26}$ m



PREFISSI DEL SI

Fattore	*Prefisso*	*Simbolo*	*Fattore*	*Prefisso*	*Simbolo*
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	decii	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	tera	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	mega	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	etto	h	10^{-21}	zepto	z
10^1	deca	da	10^{-24}	yocto	y

Titolo originale: *Physics - 5th edition Volume 1*

Copyright per l'edizione originale:
Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978, 1992, 2002 John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved

Copyright © 1967, 1982, 1993, 2003 C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana

Tutti i diritti riservati. Traduzione autorizzata dell'edizione originale in lingua inglese
pubblicata da John Wiley & Sons, Inc

I diritti di traduzione, di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati per tutti i paesi.

Fotocopie per uso personale (cioè privato e individuale) nei limiti del 15% di ciascun volume possono essere effettuate negli esercizi che aderiscono all'accordo tra SIAE - AIE - SNS e CNA - Confartigianato - CASA del 18 dicembre 2000, dietro
pagamento del compenso previsto in tale accordo.
Per riproduzioni a uso non personale l'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre un numero di pagine non superiore al 15% delle pagine del presente volume.
Le richieste per tale tipo di riproduzione vanno inoltrate a:

Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione
delle Opere dell'Ingegno (AIDRO)
via delle Erbe 2
20121 Milano
tel. e fax 02 809 506
e-mail: aidro@iol.it

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori del proprio catalogo editoriale.
La riproduzione a mezzo fotocopia degli esemplari di tali opere esistenti nelle biblioteche è consentita, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.

Traduzione: Lanfranco Cicala, Emilio Cirillo, Adelio Rossi

Redazione: Natalia T. Nanni

Immagine di copertina: per gentile concessione di IBM Research, Almaden Research Center

Quinta edizione: gennaio 2003

Ristampa

4 3 2 1 0 2003 2004 2005 2006 2007

Realizzare un libro è un'operazione complessa, che richiede numerosi controlli: sul testo, sulle immagini e sulle relazioni che si stabiliscono tra loro. L'esperienza suggerisce che è praticamente impossibile pubblicare un libro privo di errori. Saremo quindi grati ai lettori che vorranno segnalarceli. Per segnalazioni o suggerimenti relativi a questo libro rivolgersi a:

C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana - via Gargano 21 - 20139 Milano
fax 02 52 202 260
e-mail: redazione@ceaedizioni.it
www.ceaedizioni.it

Fotocomposizione: CompoMat, Configni (RI)

Stampato da Tecnografica Milanese
via Monte Grappa 6, 20090 Fizzonasco di Pieve Emanuele (Mi)
per conto della C.E.A. Casa Editrice Ambrosiana
via Gargano 21, 20139 Milano

PREFAZIONE DEGLI AUTORI

Questa è la quinta edizione del libro di testo pubblicato per la prima volta nel 1960 con il titolo *Physics for Students of Science and Engineering* di David Halliday e Robert Resnick. Per quattro decadi questo testo è servito da strumento chiave nei corsi introduttivi di fisica che fanno uso del calcolo infinitesimale e si è fatto conoscere per la chiarezza e la completezza dell'esposizione. Nell'attuale edizione ci siamo sforzati di migliorare l'accessibilità senza sacrificare il livello o il rigore del contenuto. Il testo è stato sostanzialmente riscritto al fine di rendere la materia più fluida e più scorrevole e di facilitare l'approccio dello studente a nuovi temi. Abbiamo cercato di fornire esempi più pratici e di procedere, nell'introduzione di nuovi argomenti, dal particolare al generale.

Questa edizione mette in evidenza cambiamenti significativi sia nell'approccio pedagogico sia nell'ordinamento dei capitoli. Coloro che hanno sperimentato la quarta edizione troveranno gli stessi argomenti, ma disposti diversamente. Nel redigere la nuova edizione abbiamo tenuto in considerazione i consigli degli utilizzatori delle edizioni passate e i risultati della ricerca sull'apprendimento della fisica. In questa edizione si sono quindi introdotti i seguenti cambiamenti.

1. Abbiamo continuato nello sforzo (iniziato nell'edizione precedente) di permettere un approccio più coerente al concetto di energia, specialmente a quello che fa da ponte tra la meccanica e la termodinamica. La necessità di un nuovo approccio all'energia ci è stata suggerita da una molteplicità di fonti. Attraverso la ricerca sull'apprendimento della fisica siamo venuti a conoscenza delle persistenti difficoltà degli studenti con tale concetto di energia. La necessità di una migliore comprensione delle leggi di Newton ha indotto Priscilla Laws a riorganizzare gli argomenti introduttivi di meccanica in cui la conservazione dell'energia meccanica è introdotta soltanto dopo uno studio completo della meccanica vettoriale, includendo i sistemi di particelle e la conservazione della quantità di moto. Arnold Arons ha studiato alcune difficoltà riscontrate con le presentazioni tradizionali della conservazione dell'energia. Partendo in parte da queste idee, abbiamo scelto, nella presente edizione, di sviluppare il concetto di energia dopo la presentazione della meccanica vettoriale (sia lineare sia rotazionale). Questo approccio ci permette di trattare in modo più coerente e unificato l'energia e il principio di conservazione dell'energia, e ci permette inoltre un approccio a «spirale» in cui possiamo applicare le tecniche dell'energia a problemi già risolti con le leggi della meccanica vettoriale. I concetti che riguardano l'energia sono introdotti nei Capitoli 11, 12 e 13 di questa edizione, che quindi forniscono una conoscenza critica necessaria per un ampio uso dell'energia e della sua conservazione nel resto del volume.

2. Il capitolo sui vettori in questa edizione è stato eliminato. Si sono invece introdotte, perché necessarie, le tecniche vettoriali, iniziando dalla somma vettoriale e dalla scomposizione componenti vettoriali, nel Capitolo 2 (cinematica) e proseguendo poi con il prodotto vettoriale nei Capitoli 8 e 9 (cinematica rotazionale e dinamica) e con il prodotto scalare nel Capitolo 11 (lavoro ed energia). In questo modo gli studenti trovano la presentazione delle tecniche vettoriali proprio nello stesso ordine in cui ne hanno bisogno e applicate immediatamente. In tutti i casi abbiamo fornito alla fine dei capitoli degli esercizi che aiutano gli studenti a familiarizzare con i concetti e con le tecniche trattate. Una nuova appendice riassume i concetti vettoriali importanti e le loro formule.

3. Basandoci ancora si risultati di Priscilla Laws e su altre ricerche sull'apprendimento della fisica, abbiamo cambiato la disposizione degli argomenti introduttivi in: cinematica unidimensionale, dinamica unidimensionale e ancora cinematica e dinamica bidimensionali. Non è necessario elencare qui tutte le ragioni che ci hanno indotto a questi cambiamenti, ma crediamo che almeno servano a evitare la confusione persistente tra gli studenti che associano l'accelerazione con la velocità piuttosto che con la forza; ad esempio la nuova disposizione permette di introdurre la forza centripeta nella prima presentazione del moto circolare uniforme (piuttosto che uno o due capitoli più tardi, come nelle precedenti disposizioni), e permette il collegamento tra forza gravitazionale e accelerazione gravitazionale, che dovrebbe essere fatto a uno stadio anteriore per evitare alcune delle maggiori difficoltà cui vanno incontro

 ISBN 88-408-1254-7

gli studenti nell'identificare il modulo e la direzione dell'accelerazione nel moto dei proiettili.

4. Il capitolo sulle oscillazioni, che nelle edizioni passate precedeva la meccanica gravitazionale e quella dei fluidi, qui li segue e serve come introduzione naturale al moto ondulatorio.

5. Il tema dell'equilibrio, che nella quarta edizione si trovava nel Capitolo 14, è stata qui diffusamente incorporata nel capitolo sulla dinamica rotazionale (Capitolo 9).

6. La termodinamica, che occupava cinque capitoli nelle edizioni precedenti, è stata qui riscritta in quattro capitoli. Un nuovo capitolo (22) sulle proprietà molecolari dei gas include argomenti di teoria cinetica e di meccanica statistica (Capitoli 23 e 24 della quarta edizione) in relazione alle proprietà del gas ideale. Gli argomenti relativi al lavoro e all'energia del gas perfetto sono quindi introdotti nel Capitolo 23 di questa edizione (prima legge della termodinamica). Il Capitolo 24 (l'entropia e la seconda legge) differisce considerevolmente dal capitolo suo corrispondente nella quarta edizione, avendo qui attribuito all'entropia un ruolo appropriato e più importante, come concetto fondamentale per l'apprendimento della seconda legge.

7. Nella quarta edizione gli argomenti tratti dalla fisica moderna erano «sparsi» in tutto il testo, generalmente classificati come facoltativi. In questa edizione continuiamo a utilizzare esempi tratti dalla fisica moderna, laddove ciò è appropriato, ma le parti specifiche della fisica moderna sono state consolidate, in questo volume, nel capitolo 20 (relatività ristretta) e nei capitoli dal 45 al 52 del secondo volume (che tratta la fisica quantistica e le sue applicazioni sugli atomi, sui solidi e sui nuclei). Crediamo fermamente che la relatività e la fisica quantistica siano parti essenziali di un corso introduttivo di questo livello, ma che miglior giustizia venga fatta a tali argomenti con una presentazione coerente e unificata piuttosto che con un insieme di esposizioni isolate. Come era già avvenuto nella quarta edizione, continuiamo a inserire il capitolo sulla relatività ristretta fra i capitoli di meccanica classica nel volume 1, ciò mostra la nostra ferma convinzione che la relatività ristretta appartenga proprio a quei capitoli di cinematica e meccanica che si servono della fisica classica. (Tuttavia gli insegnanti che desiderassero ritardare la presentazione di questa materia potranno facilmente posporre l'intero capitolo 20 a più tardi nel corso).

L'eserciziario che si trova alla fine dei capitoli, in questa edizione, differisce in modo significativo da quello dell'edizione passata. Le serie precedenti di problemi (che erano tutti riferiti ai paragrafi del capitolo) sono state attentamente completate e presentate in due gruppi: esercizi e problemi. Gli esercizi, collegati ai paragrafi del testo, rappresentano generalmente le applicazioni dirette degli argomenti trattati nel paragrafo di riferimento. Il loro scopo è quello di rendere familiari agli studenti i concetti, le formule importanti, le unità di misura le dimensioni, ecc. I problemi, che non sono strettamente collegati ai paragrafi del testo, spesso richiedono l'uso di concetti esposti nei vari paragrafi o anche nei capitoli precedenti. Alcuni problemi richiedono che lo studente stimi o ricerchi da solo i dati necessari a risolvere il problema. Nel compilare e raggruppare gli esercizi e i problemi abbiamo eliminato alcuni problemi dell'edizione passata. Come di consueto, si sono date nel testo le risposte agli esercizi e problemi di numero dispari.

Abbiamo aggiunto alla fine dei capitoli delle domande a risposta multipla e dei problemi da risolvere al calcolatore. Le domande a risposta multipla sono di natura generalmente concettuale e spesso richiedono capacità non immediate di penetrazione dell'argomento. I problemi al calcolatore richiedono familiarità con i programmi di tabulazione numerica e di diagrammatura, detti comunemente fogli elettronici, oppure con i programmi di elaborazione algebrica, come Maple o Mathematica.

Ci siamo sforzati di sviluppare un libro di testo che offrisse un'introduzione alla fisica completa e rigorosa, per quanto possibile a questo livello. Siamo coscienti del fatto che pochi insegnanti (forse nessuno) vorranno seguire l'intero testo dall'inizio alla fine, specialmente nel corso di un anno. Nel testo ci sono parecchi percorsi alternativi. L'insegnante che desidera trattare meno argomenti ma in modo più approfondito (la logica del «poco ma bene») sarà in grado di selezionarli tra questi percorsi. Alcuni paragrafi e sub-paragrafi sono esplicitamente classificati come «facoltativi»; saltandoli non si perde continuità. In dipendenza del tipo di corso, si possono tralasciare o trattare superficialmente altri paragrafi o persino interi capitoli. Anche così facendo, la presentazione completa rimane nel testo, dove lo studente curioso può cercare gli argomenti omessi ed essere ricompensato con uno sguardo più ampio della materia. Non ci dispiacerebbe che il testo fosse considerato una specie di «mappa stradale» attraverso la fisica; si possono prendere molte strade, panoramiche o dirette, ma non occorre percorrerle tutte nel corso del primo viaggio. Il viaggiatore zelante può essere incoraggiato a tornare alla mappa per esplorare aree trascurate nei viaggi precedenti.

Il testo è pubblicato in due volumi. Questo volume tratta la cinematica, la meccanica e la termologia: il volume 2 l'elettromagnetismo, l'ottica e la fisica quantistica con le sue applicazioni.

Abbiamo beneficiato per questa edizione dei consigli di un gruppo specializzato di revisori che hanno offerto, individualmente o collettivamente, commenti e critiche su quasi tutte le pagine del testo:

Richard Bukrey, Loyola University
Duane Carmony, Purdue University
J. Richard Christman, U. S. Coast Guard Academy
Paul Dixon, California State University-San Bernardino
John Federici, New Jersey Institute of Technology
David Gavenda, University of Texas-Austin
Stuart Gazes, University of Chicago

James Gerhart, University of Washington
John Gruber, San Jose State University
Martin Hackworth, Idaho State University
Jonathan Hall, Pennsylvania State University, Behrend
Oshri Karmon, Diablo Valley College
Jim Napolitano, Rensselaer Polytechnic Institute
Donald Naugle, Texas A&M University
Douglas Osheroff, Stanford University
Harvey Picker, Trinity College
Anthony Pitucco, Pima Community College
Robert Scherrer, Ohio State University
Paul Stanley, California Lutheran University
John Toutonghi, Seattle University

Siamo profondamente riconoscenti a questi studiosi per i loro sforzi e per i suggerimenti che hanno fornito agli autori. Vorremmo anche ringraziare il Physics Education Group dell'università di Washington per l'aiuto dato, in particolar modo Paula Heron e Lillian McDermott.

Estendiamo i nostri ringraziamenti a due persone i cui instancabili sforzi e il cui contributo eccezionale sono stati fondamentali per il successo di questo progetto, elevando il livello qualitativo del prodotto finito. J. Richard Christman è stato un nostro collaboratore per lungo tempo; ci ha dato finora contributi preziosi per più di tre edizioni. Insistendo sulla chiarezza delle spiegazioni e su corretti criteri di pedagogia attraverso tutto il testo, ci ha portato in moltissimi casi sulla strada giusta. Paul Stanley è invece nuovo del gruppo; la sua responsabilità principale si è concentrata sui quesiti e problemi di fine capitolo. Ha portato al progetto una ricchezza di idee nuove e intuizioni intelligenti che spingeranno gli studenti (e anche gli insegnanti) a espandere la loro comprensione della materia.

Siamo particolarmente grati ai collaboratori della John Wiley & Sons per aver fornito un costante aiuto a questo progetto. Vorremmo ringraziare in modo particolare Stuart Johnson per la direzione redazionale di questo libro e la dedizione che ha mostrato fino al suo completamento. Contributi fondamentali alla qualità del testo provengono dal direttore editoriale Elizabeth Swain, dal redattore della fotografia Hilary Newman, dal redattore delle illustrazioni Anna Melhorn e dal disegnatore Karin Kincheloe. La realizzazione di questo progetto non sarebbe stata possibile senza l'abilità e gli sforzi di ognuno di loro.

PREMESSA ALL'EDIZIONE ITALIANA

Oltre 10 anni sono occorsi per maturare il rinnovamento e dare alle stampe questa quinta edizione di uno dei testi di fisica più affermati, che ha contribuito alla formazione scientifica di base di moltissimi studenti di matematica, fisica ed ingegneria.

Oggi *Fisica* 1 di Resnick, Halliday e Krane si trova ad affrontare la prova della recente riforma degli studi universitari con rinnovato vigore e alcuni cambiamenti non secondari nell'impostazione del libro, soprattutto di ordine didattico.

Pur mantenendo la struttura fondamentale che lo caratterizza da sempre, il testo vede ricollocati, rispetto all'edizione precedente, alcuni argomenti, allo scopo di rendere più fluido e soprattutto più progressivo il percorso di apprendimento del discente. Anziché insomma affrontare un tema, svolgerlo ed esaurirlo completamente, anche nei suoi aspetti più complessi, prima di passare al tema successivo, gli autori hanno adottato una tecnica didatticamente più morbida: aprono successivamente più temi, ne sviluppano in sequenza gli argomenti limitando la trattazione alle forme più elementari, e poi ripercorrono il cammino elaborando via via sviluppi sempre più complessi. Questo consente anche l'introduzione progressiva in itinere degli strumenti matematici che man mano si rendono necessari. Ecco perché manca in questo libro, per esempio, il tradizionale capitolo di avvio all'analisi vettoriale.

Tra tutte le innovazioni che gli autori illustrano in dettaglio nella loro prefazione, è rimarchevole l'aver posposto la trattazione approfondita del concetto di energia e delle sue applicazioni all'introduzione preventiva di tutto il panorama della meccanica, inclusa quella dei moti rotatori e dell'equilibrio. Questo accorgimento, oltre a rispondere al criterio esposto poc'anzi, consente di affrontare appieno il concetto di energia, tradizionalmente ostico anche per le sue vaste implicazioni, solo dopo che lo studente ha ottenuto una solida padronanza di tutta la materia di statica, cinematica e dinamica cui questo concetto si applica; restano quindi inizialmente, in tema di energia, solo limitati accenni, come quello nella trattazione degli urti.

Chi sospettasse che una simile impostazione richieda spesso di ripassare argomenti che in parte sono stati già anticipati, creando così una certa sequenza di sovrapposizioni, di certo non sbaglierebbe del tutto, ma non va dimenticato che gli autori sostengono, spesso con piena ragione confermata da solidi risultati di ricerca sui metodi pedagogici, la validità del *repetita iuvant*, caratteristica che ha sempre contraddistinto il metodo espositivo di questo testo.

Proseguendo la tendenza che l'editoria scientifica mostra da diversi anni non solo in Italia, ma anche in Europa e soprattutto nei paesi anglosassoni, la Casa Editrice Ambrosiana si prodiga da tempo, anche con spirito d'avanguardia, negli sforzi per unificare le forme espressive, grafiche e simboliche del linguaggio scientifico. In questa edizione di *Fisica* si è, per così dire, completato un processo che ha portato a un progressivo adeguamento della simbologia e della terminologia alla normativa che da qualche anno ha introdotto in campo internazionale e nazionale regole precise, per i termini che definiscono le grandezze, per le unità di misura, per i segni e per le forme grafiche; citiamo solo come esempio, senza voler tediare con elenchi, le norme ISO 31 e 1000, nonché le CNR-UNI 10003.

In questo libro si applicano con rigore tutte le regole dettate dalle norme, anche quelle che hanno incontrato maggiore resistenza nell'uso pratico e la cui adozione è stata fino ad oggi rimandata in attesa che venissero lentamente assimilate. Ci rendiamo conto che cambiare le abitudini radicate – si pensi alla sostituzione dei termini densità di massa e densità lineare con massa volumica e massa lineica, oppure all'introduzione della virgola in luogo del punto come separatore decimale – richiedano altrettanti sforzi non solo da parte dei docenti, che hanno il loro bagaglio culturale già ben consolidato, ma persino da parte degli studenti, che nel loro cammino formativo sono già stati investiti da qualche forma espressiva e simbolica difforme da quella che troveranno nel testo; anch'essi infatti provengono da esperienze scolastiche meno attente al rigore formale e soprattutto devono confrontarsi con le «convenzioni» usate da tutti noi nella nostra vita quotidiana. Dobbiamo rallegrarci in fondo se l'arrivo dell' . . . euro, coi suoi centesimi comunemente preceduti da una virgola, ha proficuamente modificato il nostro modo di scrivere i numeri anche quando facciamo la spesa.

Ci auguriamo dunque che questi sforzi e questa «audacia» possano incontrare il favore di tutti quanti, insegnanti e allievi, siano convinti che parlare una stessa lingua, almeno sui libri di fisica, può semplificarci il lavoro.

Lanfranco Cicala

Milano, Dicembre 2002

INDICE

CAPITOLO 1

LE MISURE 1

1.1 Grandezze fisiche, campioni e unità di misura 1
1.2 Il Sistema Internazionale di unità di misura 2
1.3 Il campione di tempo 3
1.4 Il campione di lunghezza 4
1.5 Il campione di massa 6
1.6 Precisione e cifre significative 7
1.7 Analisi dimensionale 8
Quesiti e Problemi 9

CAPITOLO 2

MOTO IN UNA DIMENSIONE 15

2.1 I vettori e la cinematica 15
2.2 Proprietà dei vettori 16
2.3 Vettori posizione, velocità e accelerazione 20
2.4 Cinematica unidimensionale 22
2.5 Moto uniformemente accelerato 28
2.6 Corpi in caduta libera 30
Quesiti e Problemi 33

CAPITOLO 3

FORZA E LEGGI DI NEWTON 45

3.1 Meccanica classica 45
3.2 Prima legge di Newton 46
3.3 Forza 49
3.4 Massa 50
3.5 Seconda legge di Newton 52
3.6 Terza legge di Newton 54
3.7 Massa e peso 56
3.8 Applicazioni delle leggi di Newton nel moto unidimensionale 59
Quesiti e Problemi 61

CAPITOLO 4

MOTO IN DUE E TRE DIMENSIONI 69

4.1 Moto costantemente accelerato in tre dimensioni 69
4.2 Forma vettoriale delle leggi di Newton in tre dimensioni 70
4.3 Moto dei proiettili 72
4.4 Resistenza del mezzo e moto dei proiettili (facoltativo) 75
4.5 Moto circolare uniforme 78
4.6 Moto relativo 80
Quesiti e Problemi 82

CAPITOLO 5

APPLICAZIONI DELLE LEGGI DI NEWTON 93

5.1 Leggi delle forze 93
5.2 Tensione e forze normali 94
5.3 Forze di attrito 99
5.4 Dinamica del moto circolare uniforme 104
5.5 Forze dipendenti dal tempo (facoltativo) 106
5.6 Sistemi di riferimento non inerziali e forze fittizie (facoltativo) 107
5.7 Limiti delle leggi di Newton (facoltativo) 110
Quesiti e Problemi 111

CAPITOLO 6

QUANTITÀ DI MOTO 123

6.1 Urti 123
6.2 La quantità di moto 125
6.3 Impulso e quantità di moto 125
6.4 Conservazione della quantità di moto 128
6.5 Urti fra due corpi 130
Quesiti e Problemi 134

CAPITOLO 7

SISTEMI DI PARTICELLE 143

7.1 Il moto di un sistema di particelle 143
7.2 Sistemi di due particelle 144
7.3 Sistemi di particelle 147
7.4 Centro di massa di corpi solidi 150
7.5 Conservazione della quantità di moto per un sistema di particelle 152
7.6 Sistemi a massa variabile (facoltativo) 154
Quesiti e Problemi 157

ISBN 88-408-1254-7

CAPITOLO 8

CINEMATICA DEI MOTI ROTATORI 165

8.1 Moto rotatorio 165
8.2 Variabili rotazionali 166
8.3 Variabili rotazionali vettoriali 169
8.4 Rotazione con accelerazione angolare costante 170
8.5 Relazioni tra variabili lineari e angolari 172
8.6 Relazioni vettoriali tra variabili lineari e angolari (facoltativo) 173
Quesiti e Problemi 176

CAPITOLO 9

DINAMICA DEI MOTI ROTATORI 183

9.1 Momento torcente 183
9.2 Momento d'inerzia e seconda legge di Newton 187
9.3 Momento d'inerzia dei corpi rigidi 192
9.4 Momento torcente dovuto alla gravità 195
9.5 Statica dei corpi rigidi con asse fisso 197
9.6 Dinamica dei corpi rigidi con asse fisso 201
9.7 Moti rototraslatori 204
Quesiti e Problemi 207

CAPITOLO 10

MOMENTO ANGOLARE 219

10.1 Momento angolare di una particella 219
10.2 Sistemi di particelle 221
10.3 Momento e velocità angolari 223
10.4 Conservazione del momento angolare 228
10.5 La trottola 232
10.6 Riassunto della dinamica dei moti rotatori 234
Quesiti e Problemi 234

CAPITOLO 11

ENERGIA 1:
LAVORO ED ENERGIA CINETICA 243

11.1 Lavoro ed energia 243
11.2 Lavoro svolto da una forza costante 244
11.3 Potenza 248
11.4 Lavoro svolto da forze variabili 249
11.5 Lavoro svolto da una forza variabile in due dimensioni (facoltativo) 252
11.6 Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica 253
11.7 Lavoro ed energia cinetica nel moto rotatorio 257
11.8 Energia cinetica negli urti 259
Quesiti e Problemi 261

CAPITOLO 12

ENERGIA 2:
ENERGIA POTENZIALE 271

12.1 Forze conservative 271
12.2 Energia potenziale 273
12.3 Conservazione dell'energia meccanica 275
12.4 Conservazione dell'energia nel moto rotatorio 278
12.5 Sistemi conservativi in una dimensione: soluzione completa 280
12.6 Sistemi conservativi in tre dimensioni (facoltativo) 283
Quesiti e Problemi 284

CAPITOLO 13

ENERGIA 3:
CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA 293

13.1 Lavoro svolto su un sistema da forze esterne 293
13.2 Energia interna in un sistema di particelle 295
13.3 Lavoro svolto dalle forze d'attrito 296
13.4 Conservazione dell'energia in un sistema di particelle 298
13.5 Energia associata al centro di massa 299
13.6 Reazioni e decadimenti 303
13.7 Trasferimento di energia sotto forma di calore 304
Quesiti e Problemi 307

CAPITOLO 14

LA GRAVITAZIONE 313

14.1 Le origini della legge di gravitazione 313
14.2 La legge di Newton della gravitazione universale 314
14.3 La costante gravitazionale G 316
14.4 La gravitazione vicino alla superficie terrestre 318
14.5 I due teoremi dei gusci 319
14.6 Energia potenziale gravitazionale 322
14.7 Moto dei pianeti e dei satelliti 326
14.8 Il campo gravitazionale (facoltativo) 330
14.9 Moderni sviluppi della teoria della gravitazione (facoltativo) 330
Quesiti e Problemi 334

CAPITOLO 15

STATICA DEI FLUIDI 345

15.1 Fluidi e solidi 345
15.2 Pressione e massa volumica 346

15.3 Variazione della pressione in un fluido a riposo 348
15.4 Il principio di Pascal e il principio di Archimede 351
15.5 Misurazione della pressione 354
15.6 Tensione superficiale (facoltativo) 355
Quesiti e Problemi 357

CAPITOLO 16

DINAMICA DEI FLUIDI 365

16.1 Concetti generali sul moto dei fluidi 365
16.2 Linee di flusso ed equazione di continuità 366
16-3 L'Equazione di Bernoulli 368
16.4 Applicazioni dell'equazione di Bernoulli e dell'equazione di continuità 370
16.5 Campi di flusso (facoltativo) 373
16.6 Viscosità, turbolenza e flusso caotico (facoltativo) 375
Quesiti e Problemi 378

CAPITOLO 17

FENOMENI OSCILLATORI 387

17.1 Sistemi oscillanti 387
17.2 L'oscillatore armonico 389
17.3 Moto armonico semplice 390
17.4 Energia di una particella in moto armonico semplice 393
17.5 Applicazioni del moto armonico semplice 395
17.6 Moto armonico semplice e moto circolare uniforme 399
17.7 Moto armonico smorzato 400
17.8 Oscillazioni forzate e risonanza 402
17.9 Oscillazioni in un sistema di due corpi (facoltativo) 404
Quesiti e Problemi 406

CAPITOLO 18

FENOMENI ONDULATORI 417

18.1 Onde meccaniche 417
18.2 Classificazione delle onde 418
18.3 Onde in moto 419
18.4 Velocità di propagazione lungo una corda tesa 423
18.5 Equazione delle onde (facoltativo) 425
18.6 Energia trasportata da un'onda 426
18.7 Principio di sovrapposizione 428
18.8 Interferenza 429
18.9 Onde stazionarie 431
18.10 Onde stazionarie e risonanza 433
Quesiti e Problemi 436

CAPITOLO 19

ONDE ACUSTICHE 445

19.1 Proprietà delle onde acustiche 445
19.2 Onde acustiche in moto 446
19.3 Velocità del suono 449
19.4 Potenza e intensità delle onde acustiche 450
19.5 Interferenza di onde acustiche 452
19.6 Onde stazionarie longitudinali 453
19.7 Sistemi vibranti e sorgenti sonore 455
19.8 Battimenti 458
19.9 Effetto Doppler 459
Quesiti e Problemi 462

CAPITOLO 20

TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA 471

20.1 La fisica classica in difficoltà 471
20.2 I postulati della relatività ristretta 473
20.3 Conseguenze dei postulati di Einstein 474
20.4 Transformazioni di Lorentz 457
20.5 Misura delle coordinate spaziotemporali di un evento 479
20.6 Trasformazione delle velocità 480
20.7 Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz 481
20.8 Quantità di moto relativistica 485
20.9 Energia relativistica 487
20.10 Il senso comune della relatività ristretta 491
Quesiti e Problemi 491

CAPITOLO 21

TEMPERATURA 499

21.1 Temperatura ed equilibrio termico 499
21.2 Scale di temperature 501
21.3 Misurazione della temperatura 502
21.4 Dilatazione termica 505
21.5 Il gas perfetto 508
Quesiti e Problemi 509

CAPITOLO 22

PROPRIETÀ MOLECOLARI DEI GAS 517

22.1 Natura atomica della materia 517
22.2 Descrizione molecolare della pressione 519
22.3 Libero cammino medio 521
22.4 Distribuzione delle velocità molecolari 523
22.5 Distribuzione delle energie molecolari 526
22.6 Equazioni di stato dei gas reali 507
22.7 Forze intermolecolari (facoltativo) 530
Quesiti e Problemi 531

ISBN 88-408-1254-7

CAPITOLO 23

PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA 537

23.1 Calore: energia in transito 537
23.2 Trasmissione del calore 538
23.3 Prima legge della termodinamica 542
23.4 Capacità termica e calore specifico 543
23.5 Lavoro scambiato con un gas ideale 546
23.6 Energia interna di un gas ideale 550
23.7 Calori specifici di un gas ideale 551
23.8 Applicazioni della prima legge della termodinamica 553
Quesiti e Problemi 557

CAPITOLO 24

ENTROPIA E SECONDA LEGGE DELLA TERMODINAMICA 567

24.1 Processi a senso unico 567
24.2 Definizione di variazione entropica 568
24.3 Variazioni entropiche nei processi irreversibili 569
24.4 Seconda legge della termodinamica 573
24.5 Entropia e rendimento dei motori termici 573
24.6 Entropia e rendimento dei frigoriferi 577
24.7 Rendimenti delle macchine reali 579
24.8 Riordino delle idee sulla seconda legge 580
24.9 Aspetto statistico dell'entropia 580
Quesiti e Problemi 583

APPENDICI

A. Sistema internazionale di unità (SI) A-1
B. Alcune costanti fondamentali della fisica A-3
C. Alcuni dati astronomici A-4
D. Proprietà degli elementi A-5
E. Tavola periodica degli elementi A-8
F. Particelle elementari A-9
G. Fattori di conversione A-11
H. Vettori A-16
I. Formule matematiche A-19
J. Premi Nobel per la fisica A-21

RISPOSTE A ESERCIZI E PROBLEMI DI NUMERO DISPARI A-25

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI F-1

INDICE ANALITICO I-1

CAPITOLO 1

LE MISURE

Malgrado l'elegante forma matematica che caratterizza alcune delle sue più complesse e astratte teorie, la fisica resta innanzitutto una scienza sperimentale. Per gli studiosi che si dedicano dunque a misurazioni precise, riveste particolare importanza la necessità di concordare sulle unità di misura con cui esprimere i risultati, in modo da poterli trasmettere e confrontare tra un laboratorio e l'altro.

Lo studio della fisica comincia pertanto in questo capitolo con l'introduzione delle unità di misura di alcune grandezze fondamentali e dei campioni universalmente accettati che rappresentano queste unità. Descriveremo il modo corretto di esprimere i risultati di calcoli e misure, illustrando come attribuire loro dimensioni appropriate e un congruo numero di cifre significative. Sottolineeremo quanto sia importante l'analisi dimensionale delle equazioni e delle grandezze che vi compaiono. Nel seguito del testo incontreremo man mano altre unità di misura fondamentali e unità da queste derivate.

1.1 GRANDEZZE FISICHE, CAMPIONI E UNITÀ DI MISURA

Gli elementi con cui si costruiscono le leggi fisiche sono le varie grandezze quali, ad esempio, la massa, la lunghezza, il tempo, la forza, la velocità, la massa volumica, la resistenza, la temperatura, il flusso luminoso, l'intensità di campo magnetico e moltissime altre. Ciascuno di questi termini ha un significato preciso e fa parte del linguaggio che comunemente i fisici e gli altri scienziati utilizzano per dialogare tra di loro: quando un fisico parla di "energia cinetica", tutti gli altri fisici capiscono subito cosa egli intenda dire. Ciascuna delle espressioni che abbiamo elencato come esempio rappresenta una grandezza misurabile in laboratorio, e così come occorre pieno accordo sul significato di questi termini, altrettanto necessaria è l'uniformità sulle unità usate per esprimerne le misure. Senza questa concordanza, agli scienziati risulterebbe impossibile scambiarsi i risultati e confrontare gli esperimenti condotti in diversi laboratori.

La necessità di questi confronti richiede di sviluppare un insieme di *campioni* di unità di misura accettati da tutti. Per esempio, nel citare la lunghezza di 4,3 metri di una certa distanza si sottintende che la distanza misurata sia 4,3 volte maggiore di una lunghezza ben definita e largamente accettata, chiamata *metro*. Solo quando due laboratori basano le loro misure su uno stesso campione di metro, si può presumere che i loro risultati possano essere efficacemente confrontati. A questo scopo è indispensabile che il campione comune sia *accessibile* a tutti coloro che hanno necessità di calibrare i loro campioni secondari, e che questo campione comune sia *invariabile* al trascorrere del tempo o al mutare delle condizioni ambientali (temperatura, umidità, ecc.).

Un'attiva branca delle scienze, chiamata metrologia, si occupa proprio di sviluppare e conservare i campioni necessari per le misurazioni. Quasi tutti i paesi affidano questa responsabilità a un istituto di carattere nazionale, ma naturalmente per l'uniformità dei campioni è indispensabile anche un ottimo accordo internazionale, ciò che di solito si realizza attraverso incontri mondiali della Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure (CGPM), organo internazionale con sede a Parigi, istituito nel 1889; l'ultimo congresso, il 21°, si è tenuto nel 1999*.

Non è fortunatamente necessario stabilire un camp[illegible]

*Le raccomandazioni emanate da questo congresso sono rip[illegible]
Internet http://www.bipm.fr.

 ISBN 88-408-1254-7

di misura per ogni grandezza fisica: si possono considerare alcune grandezze come fondamentali e poi definire i campioni delle altre grandezze in funzione di quelli fondamentali. Per esempio, fino a non molto tempo fa la lunghezza e il tempo erano definite grandezze fondamentali, e per esse erano stabiliti dei campioni di unità (il metro e il secondo, rispettivamente). Il campione per la misura della velocità, che equivale a una lunghezza diviso per un tempo, si poteva poi ricavare in funzione di queste unità: 1 metro diviso per 1 secondo. In epoca più recente, però, la precisione raggiunta nella misura della velocità della luce ha superato la precisione con cui era stato realizzato il metro campione; oggi, dunque, utilizziamo ancora l'unità «secondo» come fondamentale, ma deriviamo l'unità di lunghezza (il metro) dal campione di velocità (quella della luce), e dal campione di tempo (Paragrafo 1.4). Il caso descritto illustra come l'accresciuta precisione possa influire sulla scelta dei campioni e come questi campioni si evolvano rapidamente. Da quando è stato pubblicato per la prima volta questo libro (1960), la precisione del campione dell'unità di tempo (il secondo) è aumentata di 1000 volte.

Il problema di fondo si riduce dunque a scegliere un sistema che comporti il minor numero possibile di grandezze fisiche fondamentali e di stabilire campioni per le loro unità di misura che siano facilmente accessibili e si conservino immutati. Nei paragrafi che seguono presenteremo il sistema oggi universalmente adottato e alcune delle grandezze fondamentali che ne fanno parte.

1.2 IL SISTEMA INTERNAZIONALE DI UNITÀ DI MISURA*

Nel corso dei suoi vari congressi, la CGPM ha scelto come *unità fondamentali* quelle relative alle sette grandezze elencate nella tabella 1.1. Queste costituiscono la base del Sistema Internazionale di unità, abbreviato in SI. Il Sistema Internazionale è la versione moderna di ciò che tradizionalmente intendiamo con l'espressione *Sistema Metrico Decimale*.

Nel corso di tutto il testo incontreremo numerosi esempi di unità derivate del sistema SI, quali la velocità, la forza e la resistenza elettrica, tutte grandezze ricavabili da quelle fondamentali della tabella 1.1. Per esempio, l'unità SI della forza, chiamata *newton* (abbreviata con il simbolo N), è definita in funzione delle unità fondamentali SI in questo modo:

$$1\ \mathrm{N} = 1\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2},$$

come ci risulterà chiaro nel Capitolo 3.

Nell'indicare alcune proprietà fisiche, come la potenza di una centrale elettrica o l'intervallo di tempo tra due eventi nucleari, spesso usando le unità SI ci imbattiamo in numeri molto grandi o molto piccoli. È per ragioni di comodità, quindi, che la CGPM ha raccomandato l'impiego dei prefissi riportati nella Tabella 1.2. Così la potenza di una tipica centrale elettrica, $1{,}3 \cdot 10^9$ watt, si può indicare con l'espressione 1,3 gigawatt ovvero 1,3 GW. Allo stesso modo, volendo esprimere un intervallo di tempo comunemente incontrato in fisica nucleare come $2{,}35 \cdot 10^{-9}$ secondi, si può dire 2,35 nanosecondi, ossia 2,35 ns. Nella Tabella 1.1 si osserva che il kilogrammo è l'unica unità di misura fondamentale SI che *già* incorpora uno dei prefissi elencati nella Tabella 1.2. Sicché 10^3 kg *non* si indica con 1 kilokilogrammo, ma con 10^6 g o anche 1 Mg (megagrammo).

Per dare efficacia alla Tabella 1.1, bisogna ora indicare sette procedimenti che descrivano come ottenere in laboratorio le sette unità fondamentali SI. Nei prossimi paragrafi ne esamineremo tre: quelli relativi al tempo, alla lunghezza e alla massa.

Tra gli altri sistemi di unità di misura, due sono abbastanza importanti da poter competere con il Sistema Internazionale. Uno è il sistema gaussiano, al quale ha fatto ricorso la maggior parte della letteratura tradizionale della recente storia della fisica. Non utilizzeremo questo sistema e rimandiamo semplicemente all'appendice G che riporta le tabelle di conversione tra le unità di misura.

L'altro è il sistema britannico, ancora di largo uso quotidiano per esempio negli Stati Uniti. In questo sistema le unità fondamentali della meccanica sono il piede (simbolo ft) per la lunghezza, la libbra (lb) per la forza e il secondo (s) per il tempo. Nell'appendice G si trovano i relativi fattori di conversione. Salvo che in questo primo capitolo a

TABELLA 1.1 Unità fondamentali del Sistema Internazionale

	Unità SI	
Grandezza	*Nome*	*Simbolo*
Tempo	secondo	s
Lunghezza	metro	m
Massa	kilogrammo	kg
Quantità di materia	mole	mol
Temperatura termodinamica	kelvin	K
Corrente elettrica	ampere	A
Intensità luminosa	candela	cd

TABELLA 1.2 Prefissi per le unità SI[a]

Fattore	*Prefisso*	*Simbolo*	*Fattore*	*Prefisso*	*Simbolo*
10^{18}	exa-	E	10^{-1}	deci-	d
10^{15}	peta-	P	10^{-2}	**centi-**	c
10^{12}	tera-	T	10^{-3}	**milli-**	m
10^{9}	**giga-**	G	10^{-6}	**micro-**	μ
10^{6}	**mega-**	M	10^{-9}	**nano-**	n
10^{3}	**kilo-**	k	10^{-12}	**pico-**	p
10^{2}	etto-	h	10^{-15}	femto-	f
10^{1}	deca-	da	10^{-18}	atto-	a

[a] I prefissi più comunemente usati sono evidenziati in grassetto.

*Vedi R.A. Nelson, "SI: The Interntional System of Units", *American Association of Physics Teachers*, 1981. Il testo base ove si riportano le definizioni del sistema SI sono le pubblicazioni della ISO (*International Organization for Standardization*, organo internazionale cui aderisce l'ente italiano di unificazione UNI) n. 31 e n. 1000 del 1992.

scopo esemplificativo e in qualche esercizio, nel testo non utilizzeremo più le unità di misura britanniche. Gli Stati Uniti sono oggi l'unico tra i paesi sviluppati a non aver ancora adottato il Sistema Internazionale con provvedimenti ufficiali; tuttavia anche negli USA tutti i laboratori di ricerca, inclusi quelli governativi, e la grande industria, che hanno a che trattare molto con l'estero, si conformano al Sistema Internazionale. Come esempio delle sgradevoli conseguenze di questa mancanza di uniformità, citeremo il caso del satellite artificiale *Mars Climate Orbiter*, andato perduto nel settembre 1999 perché il costruttore aveva indicato alcune delle caratteristiche tecniche del satellite in unità britanniche, valori che invece i tecnici della NASA avevano erroneamente creduto espressi nel sistema SI. L'attenzione che occorre prestare alle unità di misura può essere assai importante!

PROBLEMA SVOLTO 1.1 Ogni quantità fisica può essere moltiplicata per 1 senza che il suo valore ne risulti modificato. Per esempio, se 1 min = 60 s, 1 = (60 s)/(1 min); analogamente 1 ft = 12 in, da cui 1 = (1 ft)/(12 in). Tramite gli appropriati fattori di conversione, trovare (a) la velocità in m/s equivalente a 55 miglia (terrestri) all'ora (mi/h) e (b) il volume espresso in cm^3 di un barile contenente 16 galloni fluidi USA (gal) di benzina.

Soluzione (a) Nell'appendice G troviamo che 1 mi = 1609 m, talché 1 = (1609 m)/(1 mi), ed essendo 1 h = 3600 s abbiamo 1 = (3600 s)/(1 h). Pertanto

$$\text{velocità} = 55\ \frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1609\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{mi}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \text{m/s}.$$

(b) Ancora dall'appendice G veniamo a sapere che 1 gal = 231 in^3 e che 1 in = 2,54 cm. Ne segue che

$$\text{volume} = 16\ \cancel{\text{gal}} \cdot \frac{231\ \cancel{\text{in}^3}}{1\ \cancel{\text{gal}}} \cdot \left(\frac{2{,}54\ \text{cm}}{1\ \cancel{\text{in}}}\right)^3 = 6{,}1 \cdot 10^4\ \text{cm}^3.$$

Si noti che i fattori di conversione compaiono in queste equazioni in modo che le unità di misura indesiderate, presenti sia al numeratore sia al denominatore, si elidano.

1.3 IL CAMPIONE DI TEMPO

La determinazione del tempo presenta due aspetti. Per scopi civili e per alcuni scopi scientifici ci interessa conoscere il momento esatto del giorno in cui si colloca un evento in modo da poter stabilire una corretta sequenza dei fatti. In molte attività scientifiche vogliamo invece sapere qual è la durata di un evento (o l'intervallo di tempo che intercorre tra due eventi). Perciò qualsiasi unità di misura del tempo deve poter dare risposta a due domande: "*Quando* è accaduto?" e "*Quanto* è durato?". La Tabella 1.3 riporta la misura di alcuni intervalli di tempo. Essa presenta un campo di variabilità di 10^{63}.

Qualsiasi fenomeno ripetitivo può servire come misura del tempo. La misurazione consiste nel contare il numero di ripetizioni, tenendo conto delle eventuali frazioni. Si può per esempio, usare un pendolo, un sistema oscillante a

TABELLA 1.3 La misura di alcuni intervalli di tempo[a]

Intervallo di tempo	*Secondi*
Vita media del protone	$> 10^{40}$
Vita media del doppio decadimento β del ^{82}Se	$3 \cdot 10^{27}$
Età dell'Universo	$5 \cdot 10^{17}$
Età della piramide di Cheope	$1 \cdot 10^{11}$
Vita media dell'uomo	$2 \cdot 10^{9}$
Tempo di rivoluzione terrestre (1 a)	$3 \cdot 10^{7}$
Tempo di rotazione terrestre (1 d)	$9 \cdot 10^{4}$
Periodo di un'orbita bassa di satellite terrestre	$5 \cdot 10^{3}$
Tempo tra due battiti di cuore umano	$8 \cdot 10^{-1}$
Periodo di vibrazione di un diapason da concert	$2 \cdot 10^{-3}$
Periodo di oscillazione di microonde (3 cm)	$1 \cdot 10^{-10}$
Tipico periodo di rotazione di una molecola	$1 \cdot 10^{-12}$
Il più breve impulso di luce prodotto	$6 \cdot 10^{-15}$
Vita media delle particelle più instabili	$< 10^{-23}$

[a] Valori approssimativi.

molla o un cristallo di quarzo. Tra i molti moti periodici esistenti in natura, la rotazione della Terra attorno al suo asse, che determina la durata del giorno, per secoli ha costituito il campione di tempo: il secondo (solare medio) era definito come 1/(86 400) di un giorno (solare medio).

Gli orologi al quarzo si basano sulla vibrazione periodica di un cristallo di quarzo eccitata da un campo elettrico; l'oscillazione così ottenuta può servire da ottimo campione secondario del tempo. Lo si può infatti tarare per confronto col tempo di rotazione terrestre basato su osservazioni astronomiche, e torna utile come campione del tempo da laboratorio. I migliori orologi di questo tipo hanno mantenuto il tempo con una precisione di circa 1 s su 200 000 anni; eppure anche una tal precisione risulta insufficiente per alcune applicazioni scientifiche, tecniche e commerciali moderne.

Nel 1967 la 13ª Conferenza CGPM ha adottato una definizione del secondo basata sulla frequenza caratteristica di radiazione emessa da un atomo di cesio, stabilendo che

> *Il secondo è il tempo richiesto a una (specifica) radiazione emessa da uno (specifico) isotopo del cesio per effettuare 9 192 631 770 oscillazioni.*

La Figura 1.1 mostra l'attuale campione nazionale di tempo per gli USA, il cosiddetto *orologio a fontana di cesio* sviluppato dal National Institute of Standards and Technology (NIST). La sua precisione raggiunge 1 secondo su 20 milioni di anni.

Gli orologi al cesio alloggiati sui satelliti costituiscono la base del sistema di localizzazione GPS (Global Positioning System). Sono disponibili anche orologi al cesio sistemati in una valigetta. In commercio si trovano orologi da scrivania o da polso che periodicamente si aggiornano in modo automatico, sincronizzandosi col segnale radio campione proveniente dagli istituti metrologici nazionali. Il grafico di Figura 1.2 suggerisce la variazione giornaliera della velocità di rotazione terrestre in un periodo di 4 anni, misurata con un orologio al cesio. Il confronto dimostra quanto sia poco affidabile come campione di tempo la periodica ro-

 ISBN 88-408-1254-7

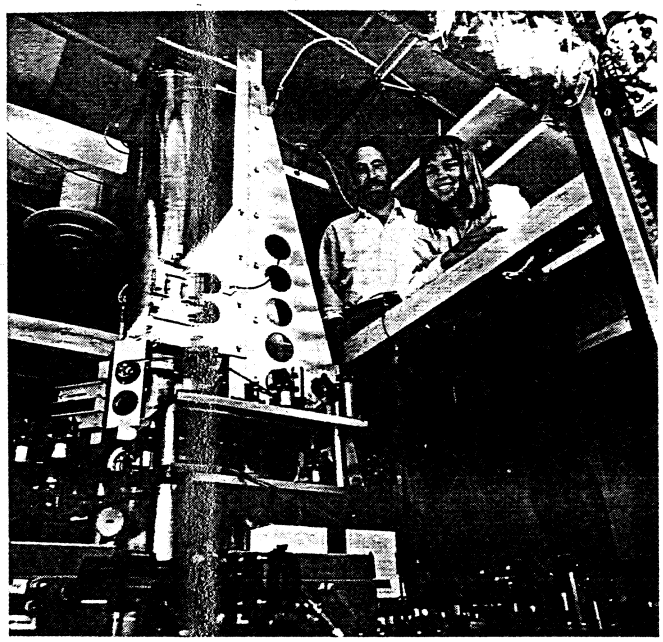


FIGURA 1.1 Il campione nazionale USA di frequenza, un cosiddetto orologio a fontana di cesio, sviluppato in USA al National Institute of Standard and Technology, accanto ai suoi creatori Steve Jefferts e Dawn Meekhof. In questo dispositivo un lentissimo flusso di atomi di cesio viene proiettato verso l'alto percorrendo la distanza di circa 1 m prima di ricadere per gravità verso la posizione di lancio nel tempo totale di circa 1s; da qui il nome di orologio a fontana. Le basse velocità degli atomi permettono una misura precisa della frequenza emessa dalla loro radiazione.

tazione della Terra, laddove è richiesto un campione di misura molto preciso. La Figura 1.3 illustra gli impressionanti miglioramenti ottenuti nella misurazione del tempo negli ultimi 350 anni, a partire dallo sviluppo del pendolo operato da Christian Huygens nel 1665.

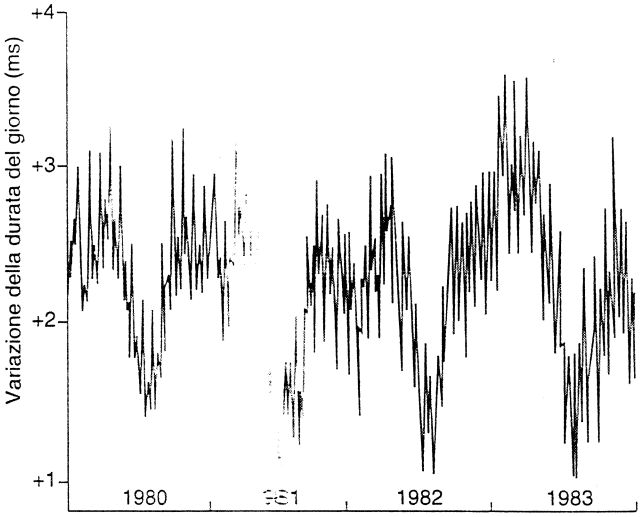


FIGURA 1.2 Variazione della lunghezza del giorno nel corso di 4 anni. Si noti che lo scarto giornaliero rispetto alla media è contenuto entro 3 ms (= 0,0[illegible]

1.4 IL CAMPIONE DI LUNGHEZZA

Il primo campione internazionale di lunghezza fu una barra in lega di platino-iridio, chiamata metro standard, conservata all'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure a Parigi (BIPM dal corrispondente acronimo francese). Il metro era definito come la distanza fra due linee sottili incise agli estremi della barra posta alla temperatura di 0 °C e sospesa meccanicamente con specifiche modalità. Storicamente il metro è stato così fissato per rappresentare la decimilionesima parte della distanza fra il Polo Nord e l'Equatore lungo il meridiano passante per Parigi. Misure più accurate permisero in seguito di stabilire che il metro campione differisce leggermente (circa lo 0,023 %) da questo valore.

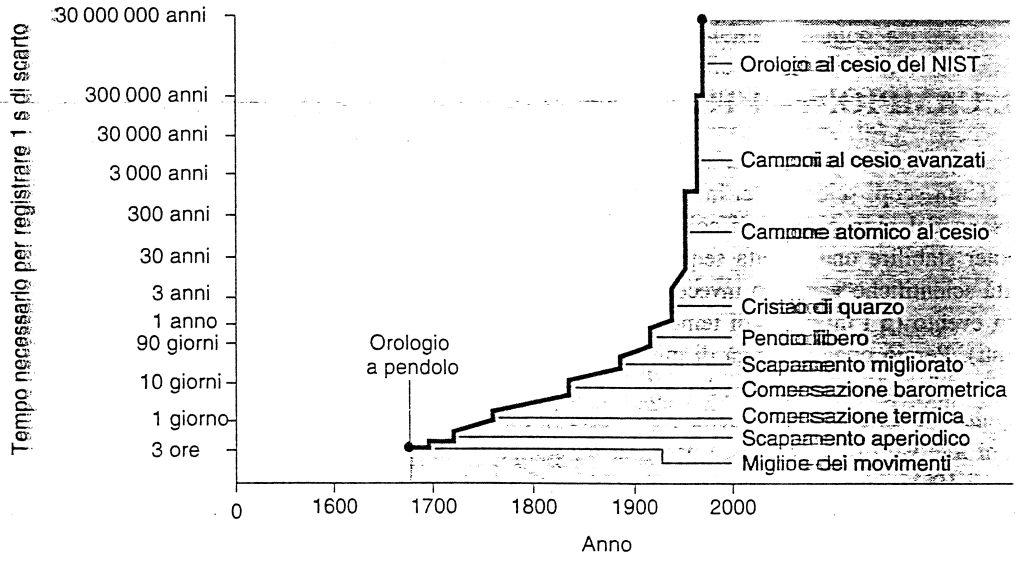


FIGURA 1.3 Miglioramento nei secoli della misura del tempo. I primi orologi a pendolo perdevano o guadagnavano 1 s in poche ore. Gli odierni orologi al cesio impiegano milioni di anni per registrare un simile scarto.

Poiché il campione primario del metro era nella pratica poco accessibile, se ne ricavarono copie accurate di riferimento inviate poi agli istituti metrologici di tutto il mondo. Questi campioni secondari erano poi impiegati per tarare altre barre campione via via più accessibili. Quindi, sino a non molti anni fa, ogni barra o dispositivo di misura delle lunghezze proveniva dal metro standard attraverso una complicata serie di confronti eseguiti con microscopi e dispositivi comparatori. A partire dal 1959 lo stesso principio é stato applicato anche per la iarda, la cui definizione legale, adottata in quell'anno negli Stati Uniti per farne discendere la definizione da quella del metro, è

$$1 \text{ iarda} = 0{,}9144 \text{ metri} \quad \text{(esattamente)},$$

da cui si deduce, essendo 1 iarda pari a 36 pollici (in), che

$$1 \text{ in} = 2{,}54 \text{ cm} \quad \text{(esattamente)}.$$

La scienza e la tecnologia moderne non possono più accontentarsi dell'accuratezza con la quale viene eseguito il confronto fra lunghezze traguardardando sottilissime incisioni al microscopio. Un campione di lunghezza più preciso e riproducibile fu ottenuto dal fisico statunitense Albert A. Michelson nel 1893 confrontando il metro campione con la lunghezza d'onda della luce rossa emessa dagli atomi di cadmio. Egli misurò accuratamente la lunghezza del metro campione e stabilì che è uguale a 1 553 163,5 volte la lunghezza d'onda di quella radiazione. Lampade al cadmio identiche si potevano facilmente ottenere in qualsiasi laboratorio e così Michelson aveva trovato un modo per avere un campione di lunghezza valevole per tutti gli scienziati del mondo, senza che essi dovessero ricondursi alla barra del metro standard.

Nonostante questo avanzamento tecnologico, la barra di metallo rimase il metro campione ufficiale sino al 1960, quando la 11ª Conferenza CGMP adottò per il metro un campione atomico. Questo campione fu scelto come la lunghezza d'onda nel vuoto di una certa luce rosso-arancione emessa da atomi di un particolare isotopo del cripton avente numero di massa 86 e identificato dal simbolo ^{86}Kr.* Più precisamente un metro fu definito come 1 650 763,73 volte la lunghezza d'onda di questa luce. Adottando questo nuovo campione si poté confrontare lunghezze con una precisione inferiore a 1 parte su 10^9.

Nel 1983 la richiesta di precisioni ancora maggiori era giunta a tal punto che anche il campione basato sul cripton risultava insufficiente e fu compiuto un passo decisivo. Il metro venne ridefinito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un determinato intervallo di tempo. La 17° Conferenza CGPM stabilì che

il metro è la lunghezza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a 1/(299 792 458) secondi.

Ciò equivale a dire che la velocità della luce c è *definita* oggi come

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \quad \text{(esattamente)}.$$

Questo nuovo modo di definire l'unità di lunghezza si rese necessario perché le misure della velocità della luce erano divenute ormai così precise da far diventare limitante la riproducibilità dello stesso metro campione basato sul ^{86}Kr. Si giustificava quindi l'adozione della velocità della luce come grandezza fondamentale e la ridefinizione del metro attraverso il già abbastanza preciso campione di tempo (il secondo).

La Tabella 1.4 illustra il campo di variabilità delle misure di lunghezza a confronto con il metro campione.

TABELLA 1.4 Alcune misure di lunghezza

Lunghezza	*Metri*
Distanza del quasar più lontano osservato (1996)	$2 \cdot 10^{26}$
Distanza della galassia di Andromeda	$2 \cdot 10^{22}$
Raggio della Via Lattea	$6 \cdot 10^{19}$
Distanza della stella più vicina (Proxima Centauri)	$4 \cdot 10^{16}$
Raggio medio dell'orbita del pianeta più lontano (Plutone)	$6 \cdot 10^{12}$
Raggio del Sole	$7 \cdot 10^{8}$
Raggio della Terra	$6 \cdot 10^{6}$
Altezza del monte Everest	$9 \cdot 10^{3}$
Statura di una persona media	$2 \cdot 10^{0}$
Spessore di questa pagina	$1 \cdot 10^{-4}$
Lunghezza di un virus tipico	$1 \cdot 10^{-6}$
Raggio dell'atomo di idrogeno	$5 \cdot 10^{-11}$
Raggio efficace di un protone	$\sim 10^{-15}$

PROBLEMA SVOLTO 1.2 L'anno-luce (a.l.) è una misura di lunghezza (non di tempo) uguale alla distanza percorsa nel vuoto dalla luce in un anno. Calcolare il fattore di conversione fra anni-luce e metri e trovare la distanza in anni-luce della stella Proxima Centauri ($4{,}0 \cdot 10^{16}$ m).

Soluzione Il fattore di conversione tra anni e secondi è

$$1 \text{ a} = 1 \text{ a} \cdot \frac{365{,}25 \text{ d}}{1 \text{ a}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \cdot \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 3{,}16 \cdot 10^{7} \text{ s}.$$

Assumendo tre cifre significative la velocità della luce ha il valore $3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s. Quindi in un anno la luce percorre una distanza di

$$(3{,}00 \cdot 10^{8} \text{ m/s})(3{,}16 \cdot 10^{7} \text{ s}) = 9{,}48 \cdot 10^{15} \text{ m},$$

e quindi

$$1 \text{ a.l.} = 9{,}48 \cdot 10^{15} \text{ m}.$$

La distanza di Proxima Centauri è dunque

$$(4{,}0 \cdot 10^{16} \text{ m}) \cdot \frac{1 \text{ a.l.}}{9{,}48 \cdot 10^{15} \text{ m}} = 4{,}2 \text{ a.l.}$$

Per arrivare sulla Terra, la luce proveniente da Proxima Centauri impiega circa 4,2 anni.

*Il numero di massa rappresenta il numero totale di neutroni più protoni contenuti nel nucleo. Il Cripton che si incontra in natura presenta molti isotopi diversi, caratterizzati da numeri di massa differenti. Per definire la lunghezza campione è essenziale indicare l'isotopo, giacché la radiazione emessa varia in lunghezza d'onda tra un isotopo e l'altro di circa 1 parte su 105, differenza eccessiva se confrontata con la precisione richiesta per il campione.

 ISBN 88-408-1254-7

1.5 IL CAMPIONE DI MASSA

Il campione di massa del SI è un cilindro di platino-iridio conservato presso il BIPM. Per accordo internazionale, ad esso è stata assegnata la massa di 1 kilogrammo. Campioni secondari sono stati inviati agli istituti metrologici degli altri paesi; le masse di altri corpi si confrontano usando una bilancia a bracci uguali con una precisione di 1 parte su 10^8.

La fotografia di Figura 1.4 riproduce il campione di massa degli Stati Uniti, registrato come prototipo n. 20 del kilogrammo, conservato al National Institute of Standards and Technology sotto una doppia campana di vetro. Viene rimosso non più di una volta all'anno per calibrare i campioni terziari. Per essere confrontato con il campione principale, dal 1889 il prototipo n. 20 è stato portato in Francia due volte. Quando viene spostato dalla sua teca a campane, sono sempre presenti due persone: una trasporta il kilogrammo tenendolo con un paio di pinze, l'altra sta pronta ad afferrarlo nel caso la prima persona dovesse cadere.

Nella Tabella 1.5 è riportata la misura di alcune masse. Si noti che coprono un campo di variabilità di 10^{83}. Molte masse sono state confrontate con la massa campione usando metodi indiretti. Per esempio, possiamo misurare la massa della Terra (Paragrafo 14.3) per confronto con la forza gravitazionale esercitata fra due sfere di piombo in laboratorio, comparandola poi con la forza di attrazione della Terra su un corpo di massa nota. Le masse delle due sfere vanno determinate per confronto diretto con il kilogrammo campione.

Su scala atomica si usa un altro campione di massa che non è un'unità del Sistema Internazionale. Si tratta della massa dell'atomo di carbonio ^{12}C alla quale, per convenzione internazionale, è stato assegnato il valore, esatto per definizione, di 12 *unità di massa atomica* (abbreviazione u). Le masse degli altri atomi si possono quindi ottenere con notevole accuratezza tramite uno spettrometro di massa (Paragrafo 32.2). Nella Tabella 1.6 sono riportate alcune misure di masse atomiche insieme ai loro errori di misura. Dato che la tecnica di laboratorio consente di confrontare le masse atomiche tra di loro con una precisione ben maggiore di quanto si possa fare con il kilogrammo campione, sarebbe utile definire un nuovo campione di massa. Attualmente è in corso la messa a punto di un campione atomico di massa da sostituire al kilogrammo campione. La relazione fra l'*unità di massa atomica* e l'unità di massa kilogrammo è approssimativamente

$$1\ \text{u} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}.$$

Un'altra unità SI collegata alla massa è la *mole* (abbreviata in mol), che misura la quantità di materia che compone una sostanza. Una mole di ^{12}C ha la massa di 12 grammi e contiene un numero di atomi pari al numero di Avogadro N_A:

$$N_A = 6{,}02214199 \cdot 10^{23}\ \text{atomi/mole}.$$

Questo numero è determinato sperimentalmente con un'incertezza di 1 parte su 10^6. Una mole di qualunque altra sostanza contiene lo stesso numero di elementi (atomi, molecole, o altro). Quindi 1 mole di elio contiene N_A atomi di He, 1 mole di ossigeno contiene N_A molecole di O_2 e 1 mole di acqua contiene N_A molecole di H_2O.

TABELLA 1.5 Alcune misure di massa[a]

Oggetto	*kilogrammi*
Universo conosciuto (stima)	$1 \cdot 10^{53}$
La Via Lattea	$2 \cdot 10^{41}$
Il Sole	$2 \cdot 10^{30}$
La Terra	$6 \cdot 10^{24}$
La Luna	$7 \cdot 10^{22}$
Un transatlantico	$7 \cdot 10^{7}$
Un elefante	$5 \cdot 10^{3}$
Un uomo	$6 \cdot 10^{1}$
Un acino d'uva	$3 \cdot 10^{-3}$
Un granello di polvere	$7 \cdot 10^{-10}$
Un virus	$5 \cdot 10^{-15}$
Una molecola di penicillina	$5 \cdot 10^{-17}$
L'atomo di uranio	$4 \cdot 10^{-26}$
Il protone	$2 \cdot 10^{-27}$
L'elettrone	$9 \cdot 10^{-31}$

[a] Valori approssimativi.

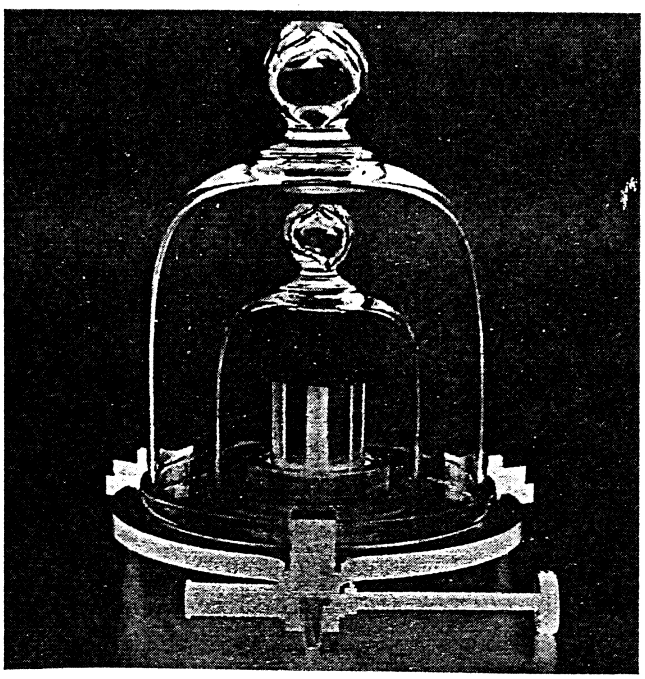


FIGURA 1.4 Il campione prototipo del kilogrammo catalogato con il n. 20 e conservato in USA al National Institute of Standards and Technology.

TABELLA 1.6 Alcune misure di massa atomica

Isotopo	*Massa (u)*	*Incertezza (u)*
^{1}H	1,00782503214	0,00000000035
^{12}C	12,00000000	(esatto)
^{64}Cu	63,9297679	0,0000015
^{109}Ag	108,9047551	0,0000032
^{137}Cs	136,9070836	0,0000032
^{208}Pb	207,9766358	0,0000031
^{238}Pu	238,0495534	0,0000022

L'unità di massa atomica è legata all'unità macroscopica di massa tramite il numero di Avogadro. Per sostituire dunque il kilogrammo con un campione atomico di massa, occorre migliorare la precisione nella misura di N_A di almeno due ordini di grandezza, in modo da ottenere masse con la precisione di 1 parte su 10^8.

1.6 PRECISIONE E CIFRE SIGNIFICATIVE

Migliorando la qualità degli strumenti di misura e impiegando tecniche sempre più raffinate, si possono condurre esperimenti a livelli di precisione sempre crescenti; ciò significa essenzialmente che il numero di cifre significative che esprimono i risultati delle misure crescono sempre più, riducendo quindi l'errore sperimentale delle misure. Sia il numero di cifre significative, sia l'errore (o incertezza) di una misura ci forniscono informazioni sulla precisione stimata del risultato. Per esempio, scrivendo $x = 3$ m, diamo un'informazione più vaga rispetto a scrivere $x = 3{,}14159$ m. Quando affermiamo che $x = 3$ m, vogliamo dire che siamo ragionevolmente certi che x sia compreso fra 2 m e 4 m. Scrivendo $x = 3{,}14159$ m, invece, significhiamo che esso è probabilmente compreso fra 3,14158 m e 3,14160 m. Se scriviamo $x = 3$ m, quando di fatto siamo convinti che valga 3,14159 m, ignoriamo un'informazione che può essere importante. D'altra parte, se scriviamo $x = 3{,}15159$ m, pur sapendo che le nostre informazioni non ci consentono di dare alla misura un valore più preciso di 3 m, commettiamo una scorrettezza, sostenendo di avere informazioni che non abbiamo. È molto importante fare attenzione al numero di cifre significative che vengono fornite come risultato di una misura o di un calcolo, e sia aumentarne sia ridurne il numero è scorretto allo stesso modo.

Esistono poche e semplici regole per trattare le cifre significative:

Regola 1. Contando da sinistra, si considerano significative tutte le cifre successive agli zeri che precedono la prima cifra non nulla, troncando quelle di valore incerto oltre la prima. Per esempio, $x = 3$ m presenta una sola cifra significativa ed esprimendola nella forma 0,003 km il numero di cifre significative non cambia. Se invece avessimo scritto $x = 3{,}0$ m (o in modo equivalente $x = 0{,}0030$ km), ciò avrebbe significato che ne conosciamo il valore con due cifre significative. In particolare nell'uso delle calcolatrici, se non sono giustificate dalla precisione dei dati immessi, non possiamo scrivere tutte le 9 o 10 cifre che compaiono nel risultato visualizzato! Gran parte dei calcoli condotti in questo libro riportano due o tre cifre significative.

Occorre fare attenzione alle notazioni ambigue come $x = 300$ m, che lascia dubbi se vi siano uno, due o tre cifre significative; non è chiaro infatti se gli zeri finali contengano qualche informazione o se servano solo a indicare la posizione decimale. Per evitare questo equivoco conviene scrivere $x = 3 \cdot 10^2$ m o $3{,}0 \cdot 10^2$ m o $3{,}00 \cdot 10^2$ m, a seconda del numero di cifre significative che vogliamo specificare.

Regola 2. Moltiplicando o dividendo due o più fattori, il risultato non deve contenere più cifre significative di quante ne contenga il fattore meno preciso. Quindi per esempio

$$2{,}3 \cdot 3{,}14159 = 7{,}2\,.$$

Questa regola va però applicata con giudizio. Per esempio:

$$9{,}8 \cdot 1{,}03 = 10{,}1$$

perché in questo caso il numero 9,8 ha sì due sole cifre significative, ma è un numero molto prossimo ad averne tre, per cui il prodotto potrebbe essere anche efficacemente espresso con tre cifre significative.

Regola 3. Nelle addizioni e sottrazioni, ammettendo che per ciascun addendo sia incerta solo l'ultima cifra significativa, sono da considerare incerte tutte le cifre del risultato che occupano posizione decimale corrispondente alle cifre incerte degli addendi; se ne mantiene pertanto solo la prima di esse, che rappresenta quindi l'ultima cifra significativa. In questo caso nel risultato non ha importanza il *numero* di cifre significative; è la *posizione* che conta. Per esempio, supponiamo di voler calcolare la massa totale dei tre oggetti seguenti:

$$\begin{array}{rl} 103{,}\mathbf{9} & \text{kg} \\ 2{,}1\mathbf{0} & \text{kg} \\ 0{,}31\mathbf{9} & \text{kg} \\ \hline 106{,}\mathbf{319} & \text{o} \quad 106{,}\mathbf{3} \quad \text{kg}. \end{array}$$

Le cifre incerte sono indicate in carattere grassetto. Per la regola 1 dobbiamo includere una sola cifra incerta, quindi il risultato deve essere espresso come 106,3 kg: se il 3 è già incerto, le due cifre successive 1 e 9 sono prive di significato.

PROBLEMA SVOLTO 1.3 Supponiamo di voler pesare il nostro gatto e di avere a disposizione solo una bilancia pesapersone a indicazione digitale che fornisce il valore della massa in kilogrammi. Procediamo quindi come segue: dapprima determiniamo la nostra massa corporea, che risulta uguale a 75 kg, quindi ripetiamo la pesata con il gatto in braccio ottenendo il valore di 80 kg. Qual è l'errore percentuale sul nostro peso e su quello del gatto?

Soluzione L'ultima cifra significativa fornita dalla bilancia occupa la posizione decimale delle unità. Quindi la misura della nostra massa presenta l'errore di 1 kg. Vale a dire che la bilancia, per qualsiasi massa compresa fra 74,5 e 75,5 kg, registrerà sempre 75 kg. L'errore percentuale sarà quindi

$$(1\text{ kg})/(75\text{ kg}) = 0{,}013 \quad \text{ossia} \quad 1{,}3\,\%.$$

La massa del gatto è 80 kg − 75 kg = 5 kg. Però l'errore sulla misura della sua massa è ancora circa 1 kg e quindi l'errore percentuale sarà in questo caso

$$(1\text{ kg})/(5\text{ kg}) = 0{,}2 \quad \text{ossia} \quad 20\,\%.$$

Per quanto l'errore *assoluto* sulle misure della nostra massa e di quella del gatto sia il medesimo (1 kg), l'errore *relativo* sulla no-

 ISBN 88-408-1254-7

stra massa è di un ordine di grandezza più piccolo che su quella del gatto. Se si cercasse di determinare con questo metodo la massa di un gattino di 0,5 kg, si otterrebbe un errore relativo del 200 %. Questo esempio mette in guardia contro il pericolo al quale si va incontro quando si sottraggono due numeri abbastanza vicini: l'errore relativo sulla differenza può risultare grandissimo.

1.7 ANALISI DIMENSIONALE

A ogni grandezza misurata o calcolata si associa una *dimensione*. Per esempio, l'assorbimento del suono all'interno di un involucro e la probabilità che avvenga una certa reazione nucleare contengono entrambi le dimensioni di un'area. Le unità di misura con le quali si esprimono non influiscono sulle dimensioni della grandezza: un'area, che sia espressa in m^2, in ft^2, in acri, in barn (reazioni nucleari) o in sabin (assorbimento acustico), rimane sempre un'area.

Allo stesso modo in cui abbiamo scelto alcuni campioni di unità come fondamentali, possiamo elevare al rango di fondamentali le corrispondenti grandezze, i cui campioni di misura siano indipendenti l'uno dall'altro. In meccanica le grandezze massa, lunghezza e tempo sono elementari e indipendenti, di modo che possono servire come dimensioni fondamentali. Esse sono rappresentate rispettivamente coi simboli M, L e T.

Ogni equazione deve possedere coerenza *dimensionale*, vale a dire che i membri dell'equazione devono avere la stessa dimensione. Scrivendo delle equazioni, il porre attenzione alle dimensioni può evitarvi degli errori. Per esempio, come vedremo nel prossimo capitolo, la distanza x percorsa nel tempo t da un oggetto, che parta da fermo e che sia sottoposto a un'accelerazione costante a, è data da $x = \frac{1}{2}at^2$. L'accelerazione si misura in m/s^2. Indichiamo le dimensioni di una grandezza racchiudendola tra parentesi quadrate; per cui $[x] = L$ e $[t] = T$. Ne consegue che $[a] = L/T^2$ ovvero LT^{-2}. Se dunque si tiene presente la coerenza dimensionale dei due termini, non rischierete di scrivere $x = \frac{1}{2}at$ oppure $x = \frac{1}{2}at^3$.

L'analisi dimensionale può talvolta essere d'aiuto nello sviluppare le equazioni. Ne illustreremo il procedimento con i due esempi che seguono.

PROBLEMA SVOLTO 1.4 Per mantenere un oggetto in moto su una circonferenza con velocità costante in valore assoluto, occorre assoggettarlo a una «forza centripeta». (Il moto circolare verrà discusso nel Capitolo 4). Eseguire l'analisi dimensionale di una forza centripeta.

Soluzione Ci domandiamo dapprima: "Da quali variabili meccaniche dipenderà una forza centripeta F?" Per un corpo in moto su una circonferenza, ci sono solo tre grandezze da cui è probabile che dipenda: la massa m, la velocità v e il raggio r della circonferenza. A prescindere da eventuali costanti adimensionali moltiplicative, la forza centripeta dovrà quindi essere espressa dalla relazione

$$F \propto m^a v^b r^c ,$$

dove il simbolo $\propto$ significa «è proporzionale a» e i numeri a, b e c sono esponenti da determinare in base all'analisi dimensionale. Come abbiamo visto nel Paragrafo 1.2 (e si discuterà nel Capitolo 5) l'unità di misura della forza è il $kg \cdot m/s^2$ e dunque le sue dimensioni sono $[F] = MLT^{-2}$. La forza centripeta in termini dimensionali si scriverà come

$$\begin{aligned} [F] &= [m^a][v^b][r^c] \\ MLT^{-2} &= M^a(L/T)^b L^c \\ &= M^a L^{b+c} T^{-b}. \end{aligned}$$

Coerenza dimensionale significa che entrambi i membri devono avere le stesse dimensioni. Uguagliando gli esponenti si ottiene

esponenti di M: $a = 1$;
esponenti di T: $b = 2$;
esponenti di L: $b + c = 1$, da cui $c = -1$.

L'espressione della forza è quindi

$$F \propto \frac{mv^2}{r} .$$

L'effettiva espressione della forza centripeta derivata dalle leggi di Newton e dalla geometria del moto circolare uniforme è $F = mv^2/r$. L'analisi dimensionale ci fornisce quindi l'esatta dipendenza della forza dalle variabili meccaniche. Si tratta però di una coincidenza fortunata, in quanto l'analisi dimensionale non può fornirci il valore della costante moltiplicativa, che nel caso analizzato è proprio uguale a 1.

PROBLEMA SVOLTO 1.5 Un istante cruciale nella storia dell'evoluzione dell'Universo subito dopo il *Big Bang* è il tempo di Planck, t_P, che dipende da tre costanti fondamentali: (1) la velocità della luce (la costante fondamentale nella teoria della relatività), $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s; (2) la costante gravitazionale di Newton (la costante fondamentale della teoria gravitazionale), $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ m^3/(s^2 \cdot kg)$; (3) la costante di Planck (la costante fondamentale che compare nella meccanica quantistica), $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ kg \cdot m^2/s$. Si determini il valore del tempo di Planck mediante un'analisi dimensionale.

Soluzione Dalle unità delle tre costanti possiamo risalire alle loro dimensioni:

$$\begin{aligned} [c] &= [m/s] = LT^{-1} \\ [G] &= [m^3/(s^2 \cdot kg)] = L^3T^{-2}M^{-1} \\ [h] &= [kg \cdot m^2/s] = ML^2T^{-1}. \end{aligned}$$

Il tempo di Planck dipenderà dalle tre costanti universali secondo l'espressione generale

$$t_P \propto c^i C^j h^k ,$$

dove i, j e k sono gli esponenti da determinare. Le dimensioni di questa espressione sono

$$\begin{aligned} [t_P] &= [c^i][G^j][h^k] \\ T &= (LT^{-1})^i (L^3T^{-2}M^{-1})^j (ML^2T^{-1})^k = \\ &= L^{i+3j+2k} T^{-i-2j-k} M^{-j+k}. \end{aligned}$$

Uguagliando gli esponenti di entrambi i termini si ottiene

esponenti di L: $0 = i + 3j + 2k$

esponenti di T: $1 = -i - 2j - k$

esponenti di M: $0 = -j + k$

e, risolvendo queste tre equazioni, troviamo

$$i = -\tfrac{5}{2}, \qquad j = \tfrac{1}{2}, \qquad k = \tfrac{1}{2}.$$

Pertanto

$$t_P \propto c^{-5/2} C^{1/2} h^{1/2}, =$$

$$= \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} = \sqrt{\frac{[6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(s^2 \cdot kg)}]6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s)}}{(3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s})^5}}$$

$$= 1{,}35 \cdot 10^{-45}\ \mathrm{s}.$$

Questa espressione differisce dalla comune definizione del tempo di Planck per la presenza di un fattore $(2\pi)^{-1/2}$. Il metodo utilizzato non permette di trovare tale fattore adimensionale.

Allo stesso modo è possibile determinare la lunghezza di Planck e la massa di Planck, che hanno entrambe un'importante interpretazione fisica (vedi Esercizi 32 e 33).

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

1.1 Grandezze fisiche, campioni e unità di misura
1.2 Il Sistema Internazionale di unità di misura
1.3 Il campione di tempo
1.4 Il campione di lunghezza
1.5 Il campione di massa
1.6 Precisione e cifre significative

1. Uno studente vuole calcolare l'area di un foglio di carta. Egli ne misura la lunghezza $l = 27{,}9$ cm e la larghezza $w = 21{,}6$ cm. In che modo indicherà l'area del foglio?

   (A) 602,64 cm^2. (B) 602,6 cm^2.
   (C) 602 cm^2. (D) 603 cm^2.

2. Lo studente vuole ora calcolare lo spessore del foglio di carta. Misura col calibro la spessore di una risma di 80 fogli e trova che sia $h = 1{,}27$ cm. Divide poi h per il numero di fogli. Qual è il risultato corretto?

   (A) 0,15875 mm. (B) 0,159 mm.
   (C) 0,16 mm. (D) 0,2 mm.

1.7 Analisi dimensionale

3. Il periodo di oscillazione di un oscillatore non lineare dipende dalla sua massa m, che ha dimensioni M, da una costante elastica di richiamo k, che ha dimensioni $ML^{-2}T^{-2}$, e dall'ampiezza di oscillazione A, che ha dimensioni L. In base all'analisi dimensionale, il periodo di oscillazione risulterà proporzionale a

   (A) $A\sqrt{m/k}$. (B) $A^2 m/k$.
   (C) $A^{-1}\sqrt{m/k}$. (D) $A^2 k^3/m$.

QUESITI

1. Commentare la seguente affermazione: "Una volta scelto un dato campione, per definizione stessa di «campione» esso risulta inalterabile."
2. Si elenchino le caratteristiche (oltre all'accessibilità e all'invariabilità) desiderabili per un campione fisico.
3. È possibile immaginare un sistema di unità fondamentali (Tabella 1.1) che non comprenda il tempo?
4. Fra le sette unità fondamentali elencate nella Tabella 1.1, solo una, il kilogrammo, ha un prefisso (vedi Tabella 1.2). Sarebbe sensato ridefinire la massa del cilindro in platino-iridio del BIPM come 1 g (anziché 1 kg)?
5. Che cosa significa il prefisso «micro-» nelle parole «forno a microonde»? È stato proposto di marcare con la locuzione «trattato con picoonde» gli alimenti irradiati con raggi gamma al fine di prolungarne la conservabilità. Che cosa può significare?
6. Molti ricercatori capaci, di fronte all'evidenza, considerano attendibile anche la percezione extrasensoriale. Supponendo che tale percezione costituisca un fenomeno naturale, quale grandezza fisica dovremmo introdurre per poterla descrivere anche quantitativamente?
7. Si indichi qualche fenomeno naturale ripetitivo adatto a definire un campione di tempo.
8. Un battito cardiaco dell'attuale presidente della Società italiana di Fisica potrebbe costituire il campione dell'unità di tempo. Anche Galileo in qualche lavoro usò il suo battito cardiaco come campione del secondo. Perché la definizione basata sull'orologio atomico è migliore?
9. Quali caratteristiche deve avere un buon orologio?
10. Si vogliono provare in laboratorio cinque orologi. A mezzogiorno esatto, riferito al segnale radio, di sette giorni consecutivi le letture degli orologi sono le seguenti:

Orologio	Dom.	Lun.	Mar.	Mer.
A	12:36:40	12:36:56	12:37:12	12:37:27
B	11:59:59	12:00:02	11:59:57	12:00:07
C	15:50:45	15:51:43	15:52:41	15:53:39
D	12:03:59	12:02:52	12:01:45	12:00:38
E	12:03:59	12:02:49	12:01:54	12:01:52

Orologio	Gio.	Ven.	Sab.
A	12:37:44	12:37:59	12:38:14
B	12:00:02	11:59:56	12:00:03
C	15:54:37	15:55:35	15:56:33
D	11:59:31	11:58:24	11:57:17
E	12:01:32	12:01:22	12:01:12

   In che ordine mettereste gli orologi in base alla loro esattezza? Giustificate la risposta.
11. Basandovi sulla vostra conoscenza del pendolo, indicate le ragioni che lo rendono idoneo a costituire un campione di tempo.
12. Come faceva Galileo ad affermare che la frequenza di oscillazione del pendolo è indipendente dalla sua ampiezza? Si tenga presente che i primi orologi si basavano proprio su questo principio e quindi egli non poteva usare degli orologi per dimostrarlo.

 ISBN 88-408-1254-7

13. Quale potrebbe essere l'errore di una buona clessidra? E quello di un buon quadrante solare?
14. Il 30 giugno 1981 il minuto compreso tra le 10:59 e le 11:00 è stato arbitrariamente allungato in modo da contenere 61 secondi. L'ultimo giorno del 1989 è stato anch'esso allungato di 1 secondo. Un tale *secondo d'aggiustamento* viene di tanto in tanto introdotto per compensare la lenta riduzione del periodo di rotazione terrestre messa in evidenza dai moderni orologi atomici. Per quale ragione è opportuno aggiustare i nostri orologi?
15. Una stazione radio trasmette "in FM a 89,5". Che significato ha questo numero?
16. Perché non si hanno unità fondamentali SI per l'area e il volume?
17. Il metro è stato inizialmente definito come la decimilionesima parte del meridiano che va dal Polo Nord all'equatore passando per Parigi. Questa definizione è in disaccordo di circa lo 0,023 % con la barra campione del metro costruita a quel tempo. Si può dire che tale è anche l'errore percentuale della barra che costituiva il metro campione?
18. La definizione originale del metro *non* comportò la misura effettiva dell'intera distanza dal polo all'equatore. Come si poté procedere? Si discuta ogni errore sperimentale introdotto.
19. È possibile misurare la lunghezza di una linea curva? Se sì, in che modo?
20. Quando si adottò la barra come metro campione, se ne specificò la temperatura. È possibile assumere come unità fondamentale la lunghezza se poi occorre specificare un'altra proprietà fisica, come ad esempio la temperatura, per definirne il campione?
21. Per quale ragione nel 1983 i delegati della Conferenza CGPM, nel ridefinire il metro in funzione della velocità della luce, non hanno posto esattamente $c = 3 \cdot 10^8$ m/s oppure addirittura $c = 1$ m/s? Erano queste delle possibilità legittime? Se sì, per quale ragione le esclusero?
22. Il kilogrammo fu originariamente definito in modo tale che la massa volumica dell'acqua risultasse pari a 1000 unità nel sistema metrico decimale. Seguendo lo stesso criterio di arbitrarietà sarebbe possibile ridefinire $\pi = 3{,}1415926535\ldots$ come ad esempio eguale esattamente a 22/7? E, se volessimo risparmiarci un bel po' di fastidi nei calcoli, porre addirittura $\pi = 3$?
23. Si suggerisca un metodo per misurare (a) il raggio terrestre, (b) la distanza tra il Sole e la Terra, (c) il raggio del Sole.
24. Si suggerisca un metodo per misurare (a) lo spessore di un foglio di carta, (b) lo spessore dell'involucro di una bolla di sapone, (c) il diametro di un atomo.
25. Se qualcuno vi raccontasse che durante la scorsa notte le dimensioni di tutti gli oggetti si sono ridotte della metà, come potreste confutare questa affermazione?
26. L'attuale campione del kilogrammo è davvero accessibile, invariabile, riproducibile e indistruttibile? Rappresenta un campione praticabile per scopi comparativi? Potrebbe un campione atomico essere migliore sotto tutti gli aspetti? Per quale ragione non si adotta un campione atomico per la massa, così come si è fatto per la lunghezza e il tempo?
27. Per quale ragione è opportuno definire due campioni di massa: il kilogrammo e l'atomo di ^{12}C?
28. Come si ottiene la relazione fra la massa del kilogrammo campione e quella dell'atomo di ^{12}C?
29. Suggerire dei metodi pratici per determinare le masse degli oggetti elencati nella Tabella 1.5.
30. Indicare oggetti di massa intermedia fra quella del transatlantico e quella della Luna, citati nella Tabella 1.5. Stimare quindi le loro masse.
31. Gli oppositori del sistema metrico obiettano con argomenti come questo: "Invece di comprare una libbra di burro, ci toccherebbe chiedere 0,454 kg di burro. In questo modo si renderebbe la vita più complicata." Cosa potreste replicare?

ESERCIZI

1.1 Grandezze fisiche, campioni e unità di misura

1.2 Il Sistema Internazionale di unità di misura

1. Esprimere utilizzando i prefissi della Tabella 1.2: (a) 10^{-6} film; (b) 10^1 denti; (c) 10^{12} libri.
2. Alcuni prefissi del SI possono entrare a far parte del linguaggio comune. (a) Qual è l'equivalente settimanale di uno stipendio annuale di 10 kiloeuro? (b) Una lotteria promette 10 megaeuro come premio pagabile in 20 anni. Quanto si riceve ogni mese? (c) Il disco fisso di un calcolatore ha la capacità di 30 gigabyte. Se ogni parola richiede 8 byte, quante parole si possono immagazzinare? Nella numerazione binaria usata in informatica il prefisso kilo sta per 1024 ($= 2^{10}$) volte, anziché per 1000 volte.

1.3 Il campione di tempo

3. Una volta Enrico Fermi osservò che la durata media di un'ora di lezione (50 minuti) equivale circa a un microsecolo. A quanti minuti corrisponde più precisamente un microsecolo e quanta è la sua differenza percentuale con l'approssimazione di Fermi?
4. La distanza tra Nairobi e Singapore, entrambe vicine all'equatore, è di circa 8000 km; la differenza di fuso orario fra le due città è di 5 ore. Stimare la circonferenza della Terra.
5. Il numero di secondi di un anno è uguale a circa $10^7\pi$. Qual è l'approssimazione percentuale di questo numero?
6. (a) Un'unità di tempo usata talvolta in microfisica è lo *shake*. Uno shake equivale a 10^{-8} s. Vi sono più shake in un secondo o più secondi in un anno? (b) L'uomo esiste sulla Terra da almeno 10^6 anni mentre l'Universo ha un'età di circa 10^{10} anni. Ponendo uguale a un giorno l'età dell'Universo, da quanti secondi esisterebbe l'umanità?
7. In due diverse gare di atletica leggera i due vincitori hanno corso il miglio rispettivamente in 3 min 58,05 s e 3 min 58,20 s. Quale deve essere il massimo errore tollerabile nella misura delle due distanze per potere concludere che l'atleta titolare del minor tempo sia sicuramente il più veloce?
8. Un certo orologio a pendolo (con il quadrante di 12 ore) avanza di 1 minuto al giorno. Dopo avere regolato l'orologio, quanto tempo bisogna aspettare perché l'orologio segni nuovamente l'ora esatta?
9. L'età dell'Universo è di circa $5 \cdot 10^{17}$ s; l'impulso più breve prodotto in un laboratorio (1990) è di $6 \cdot 10^{-15}$ s (vedi Tabella 1.3). Indicare un evento fisicamente significativo che presenti una durata a metà intervallo su scala logaritmica fra quelli precedenti.

10. Supponendo che la durata di un giorno cresca di 0.001 s in 100 anni, calcolare l'effetto cumulativo su 20 secoli. Questo rallentamento della rotazione terrestre si registra nelle osservazioni delle eclissi solari effettuate su un tale arco di tempo.
11. Il *mese sidereo*, che dura 27,3 d, è il tempo impiegato dalla Luna a ritornare in una data posizione, vista sullo sfondo di riferimento delle stelle fisse. L'intervallo di tempo fra due identiche fasi lunari è detto invece *mese lunare*. Il mese lunare è più lungo del mese sidereo. Perché e di quanto?

1.4 Il campione di lunghezza

12. Il vostro amico canadese Paul è alto 5,9 ft. Qual è la sua altezza in metri?
13. (a) In atletica leggera si corrono sia i 100 m sia le 100 iarde. Quale gara è più lunga? Di quanti metri? E di quanti piedi? (b) In atletica leggera e nella corsa campestre si corrono il miglio e i 1500 m. Confrontate queste distanze.
14. La stabilità di un orologio atomico al cesio è tale che due esemplari possono differire al massimo di 1 s dopo 300 000 anni. Supponendo di misurare con la stessa precisione la distanza New York-San Francisco e di avere trovato 4138 km, di quanto può differire da questo valore una successiva misura?
15. La regione antartica ha una forma approssimativamente semicircolare con raggio di 2000 km. Lo spessore medio del ghiaccio che la ricopre è di 3000 m. Quanti centimetri cubi di ghiaccio sostiene (trascurando la curvatura della Terra)?
16. L'*ettaro*, definito come 10^4 m^2, è un'unità di area spesso usata per misurare una porzione di terreno. Una miniera a cielo aperto di carbone consuma ogni anno 77 ettari di terre sino a una profondità di 26 m. Quanti kilometri cubi di terra vengono scavati annualmente?
17. La Terra è approssimativamente una sfera di raggio $6{,}37 \cdot 10^6$ m. (a) Quanto misura la sua circonferenza in kilometri? (b) Qual è la sua superficie in kilometri quadrati? (c) E quale il suo volume in kilometri cubi?
18. Qui di seguito sono indicate le velocità massime di alcuni animali in unità diverse. Convertire questi dati in m/s e ordinarli secondo le velocità crescenti. Scoiattolo: 19 km/h; coniglio: 30 nodi; lumaca: 0,030 mi/h; ragno: 1,8 ft/s; ghepardo: 1,9 km/min; uomo: 1000 cm/s; volpe: 1100 m/min; leone: 1900 km/d.
19. Un veicolo spaziale ha una velocità di 30 900 km/s. Qual è la sua velocità in anni-luce al secolo?
20. Un'automobile è equipaggiata con un indicatore istantaneo del consumo di carburante. Un commutatore permette di leggere il dato sia in unità britanniche sia in unità SI. Nel primo caso indica il valore in mi/gal (miglia al gallone fluido USA) mentre nel secondo fornisce la grandezza inversa in L/km. Qual è il valore nel SI che corrisponde a 30.0 mi/gal?
21. Le distanze astronomiche sono tanto più grandi di quelle terrestri, che per agevolare il loro confronto fra corpi celesti si usano diverse unità di misura di lunghezze. Una *unità astronomica* (UA) è uguale alla distanza media tra Terra e Sole, cioè $1{,}50 \cdot 10^8$ km. Un *parsec* (pc) è la distanza alla quale 1 UA sottende un angolo di 1 secondo di grado. Un *anno-luce* è la distanza che la luce nel vuoto percorre in un anno alla velocità di $3{,}00 \cdot 10^5$ km/s. (a) Si esprima la distanza Terra-Sole in parsec e in anni-luce. (b) Si esprima l'anno-luce e il parsec in kilometri. Sebbene l'anno-luce sia l'unità più nota, il parsec è quella preferita dagli astronomi.
22. Il raggio efficace del protone è di circa $1 \cdot 10^{-15}$ m: il raggio dell'Universo esplorato (ottenuto dalla distanza del quasar più lontano) è $2 \cdot 10^{26}$ m (Tabella 1.4). Indicare una distanza fisicamente significativa che presenti un valore a metà intervallo su scala logaritmica fra quelli precedenti.

1.5 Il campione di massa

23. Usando i fattori di conversione e i dati forniti in questo capitolo, determinare il numero di atomi contenuti in 1,00 kg d'idrogeno.
24. La molecola d'acqua (H_2O) contiene due atomi d'idrogeno e un atomo di ossigeno. L'atomo d'idrogeno ha una massa di 1,0 u e quello di ossigeno di 16 u. (a) Quanto vale la massa della molecola d'acqua in kg? (b) Quante molecole d'acqua contengono gli oceani se la loro massa totale è di $1{,}4 \cdot 10^{21}$ kg?
25. Una libbra è una massa prossima a quella di 0,5 kg. È più conveniente 1 kg di caffè a Parigi, che costa 18 euro, o una libbra a New York, ove tale quantità di caffè si vende a 7,2 euro?
26. Una stanza ha le dimensioni di 6,40 m · 3,96 m · 3,66 m. Quant'è la massa d'aria in essa contenuta se la massa volumica dell'aria alla temperatura della stanza e a pressione normale è di 1,21 kg/m^3?
27. Una tipica zolletta cubica di zucchero ha lo spigolo di 1 cm. Quanto sarebbe lungo lo spigolo di una scatola cubica che contenesse una mole (cioè un numero pari a quello di Avogadro) di zollette di zucchero?
28. Una persona in dieta perde 0,23 kg ogni settimana. Calcolate quanta massa in milligrammi perde in media al secondo.

1.6 Precisione e cifre significative

29. Negli anni tra il 1960 e il 1983 il metro era definito come 1 650 763,23 volte la lunghezza d'onda di una certa radiazione rosso-arancione, emessa dagli atomi di cripton. Calcolare la lunghezza d'onda in nanometri di questa radiazione. Esprimere il risultato usando il corretto numero di cifre significative.
30. Usando il corretto numero di cifre significative calcolare: (a) la somma 37,76 + 0,132; (b) la differenza 16,264 − 16,26325.

1.7 Analisi dimensionale

31. Un terreno poroso attraverso il quale può scorrere l'acqua è chiamato acquifero. Il volume V di acqua che fluisce attraverso una sezione di acquifero di area A nel tempo t è dato da

$$V/t = KAH/L,$$

ove H rappresenta la caduta verticale dell'acquifero su una distanza orizzontale L (Figura 1.5). Questa relazione è chiamata

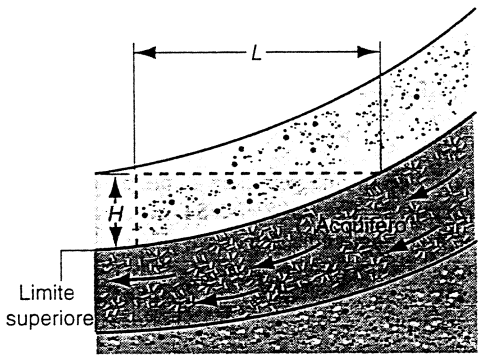


FIGURA 1.5 Esercizio 31.

 ISBN 88-408-1254-7

legge di Darcy. La quantità K è detta *conducibilità idraulica* dell'acquifero. Quali sono le sue dimensioni nel SI?

32. Nel Problema svolto 1.5 si sono combinate le costanti h, G e c in modo da ottenere una grandezza avente le dimensioni di un tempo. Ripetete il procedimento per ottenere una grandezza avente le dimensioni di una lunghezza e valutatene il risultato numerico ignorando le costanti adimensionali. È questa la *lunghezza di Planck*, pari alle dimensioni dell'Universo osservabile dopo un tempo di Planck dalla sua nascita.

33. Ripetere il procedimento dell'Esercizio 32 per ottenere una grandezza avente le dimensioni di una massa: è la *massa di Planck*, cioè la massa dell'Universo osservabile dopo un tempo di Planck dalla sua nascita.

PROBLEMI

1. A seguito della rivoluzione francese, la Convenzione Nazionale rivoluzionaria, nell'introdurre il sistema metrico decimale, tentò di introdurre anche il tempo decimale. Secondo questo sistema il giorno, da una mezzanotte all'altra, era diviso in 10 ore decimali, ognuna costituita da 100 minuti decimali. Le lancette dell'orologio da tasca di Figura 1.6 sono ferme alle ore decimali 8 e 22,8 minuti decimali. Che ora segna?

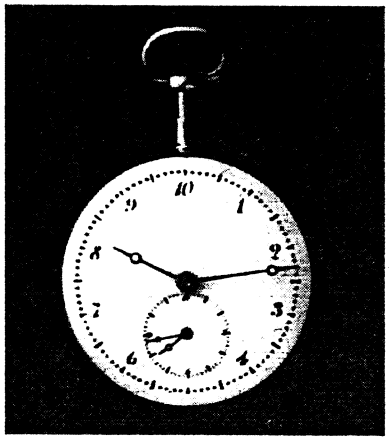
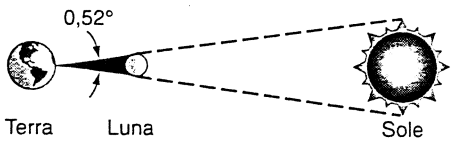


FIGURA 1.6 Problema 1.

2. La distanza media del Sole dalla Terra è 390 volte la distanza media della Luna dalla Terra. Durante l'eclissi totale di Sole (la Luna si trova tra la Terra e il Sole; Figura 1.7) calcolare (a) il rapporto tra il diametro solare e il diametro della Luna, (b) il rapporto fra il volume solare e quello della Luna. (c) L'angolo sotteso dalla Luna è di 0,52°, mentre la distanza fra la Terra e la Luna è di $3{,}82 \cdot 10^5$ km. Calcolare il diametro della Luna.



(Il disegno non è in scala)

FIGURA 1.7 Problema 2.

3. Il navigatore di una petroliera impiega i satelliti del Global Positioning System (GPS/NAVSTAR) per determinare la latitudine e la longitudine della nave (Figura 1.8). Ottiene rispettivamente i valori 43°36'25,3" N e 77°31'48,2" W. Se l'errore di queste due misure è di ±0,5", quanto vale l'errore sulla posizione della petroliera misurata lungo (a) la linea nord-sud (meridiano) e (b) la linea est-ovest (parallelo)? (c) Dove si trova la petroliera?

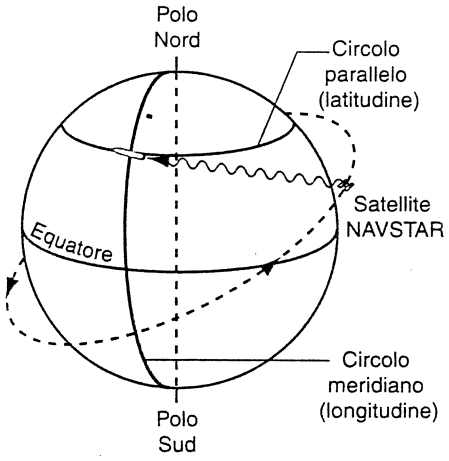


FIGURA 1.8 Problema 3.

4. Nell'ottobre del 1707 quattro navi da guerra britanniche si incagliarono a causa di un errore nei calcoli della posizione. L'incidente diede un impulso alla ricerca di orologi precisi abbastanza da permettere una localizzazione con errore inferiore a 30 miglia marine dopo un intero viaggio dalla Gran Bretagna alle Americhe e ritorno. (a) Quale errore massimo giornaliero deve presentare un tal orologio? (b) Quale sarebbe l'errore massimo giornaliero per un orologio che consenta una localizzazione esatta entro 0,5 miglia dopo un anno di navigazione?

5. Durante il respiro notturno il volume di ossigeno (O_2) inspirato ad ogni ciclo è di circa 0,3 L, mentre viene espirato un uguale volume di biossido di carbonio (CO_2). Le masse volumiche a condizioni standard di O_2 e CO_2 sono rispettivamente 1,43 g/L e 1,96 g/L. Determinare la massa corporea perduta durante un sonno di 8 ore, stimando il periodo del ciclo respiratorio.

6. Supponiamo che lo svuotamento di un serbatoio d'acqua richieda 12 h di tempo. Se il volume contenuto è di 5700 m^3, qual è la portata massica media (in kg/s) di uscita del fluido? La massa volumica dell'acqua è di 1000 kg/m^3.

7. I granelli di una sabbia fine hanno raggio medio di 50 μm. Quanti granelli, espressi in massa di sabbia, hanno complessivamente una superficie pari a quella di un cubo di spigolo 1 m? Il volume occupato da 1 kg di sabbia è di 0,38 L.

8. Il kilogrammo campione (Figura 1.4) ha la forma di un cilindro retto (altezza uguale al diametro di base). Dimostrare che, dato il volume di un cilindro, la forma retta è quella che presenta la minor superficie totale del cilindro, ciò che contribuisce a minimizzare gli effetti di deterioramento e contaminazione superficiale del campione.

9. La distanza tra atomi o molecole adiacenti in una sostanza solida può essere approssimata a due volte il raggio di una sfera avente il volume pari al volume medio occupato da un atomo di quella sostanza. Calcolare la distanza tra atomi adiacenti (a) nel ferro e (b) nel sodio. Le loro masse volumiche sono rispettivamente 7870 kg/m^3 e 1013 kg/m^3, mentre le loro masse atomiche valgono rispettivamente $9{,}27 \cdot 10^{-26}$ kg e $3{,}82 \cdot 10^{-26}$ kg.

10. (a) Una lastra metallica rettangolare ha le dimensioni di 8,43 cm e 5,12 cm. Se ne calcoli l'area esprimendola con il corretto numero di cifre significative. (b) Una lastra metallica circolare ha raggio di 3,7 cm. Se ne calcoli l'area esprimendola con il corretto numero di cifre significative.

CAPITOLO 2

MOTO IN UNA DIMENSIONE

La meccanica, la più antica branca della fisica, studia il moto dei corpi. Appartengono ai suoi scopi il calcolo della traiettoria seguita da una palla, o di una sonda spaziale diretta su Marte, così come l'analisi delle tracce formate dalle particelle elementari quando si urtano nei più potenti acceleratori. La parte della meccanica chiamata cinematica *(dal greco* kínesis, *movimento, come nella parola «cinema») si occupa di* descrivere *il moto. È invece compito della* dinamica *(dal greco* dýnamis, *forza, come nella parola «dinamite») analizzare le* cause *del moto. In questo capitolo ci limiteremo per lo più alla cinematica in una sola dimensione. Nel prossimo capitolo affronteremo la dinamica unidimensionale e nel successivo estenderemo questi concetti a due e tre dimensioni.*

2.1 I VETTORI E LA CINEMATICA

Una squadriglia di boy-scout è rimasta bloccata in mezzo alla foresta, lontana dal suo attendamento (Figura 2.1). Basandosi sulle loro osservazioni, gli esploratori sanno di trovarsi a 2,0 km di distanza dalle tende nella direzione che forma un angolo di 30° verso ovest rispetto al nord. Essi sanno anche che il loro attendamento è piantato a 3,0 km di distanza dal campo base nella direzione che forma un angolo di 45° verso est rispetto al nord. Per ottenere soccorso devono comunicare via radio al campo base il luogo in cui si trovano. Come possono definire la loro posizione rispetto al campo base?

Sebbene vi siano molti modi di risolvere questo problema, l'uso dei *vettori* è il modo più sintetico di trattarlo. I vettori rappresentano delle grandezze caratterizzate, oltre che da un valore assoluto (detto altrimenti *modulo*, o *intensità*), anche da una direzione e da un verso; seguono inoltre alcune regole matematiche per le operazioni quali l'addizione e la moltiplicazione. Nella Figura 2.1 il *vettore posizione* $\boldsymbol{r}_1$ (che ha modulo 3,0 km, direzione coincidente con l'asse sudovest-nordest, e verso che va dal campo base all'attendamento) localizza l'attendamento rispetto al campo base. Il vettore posizione $\boldsymbol{r}_2$ (che ha modulo 2,0 km, direzione coincidente con la retta che forma un angolo di 30° con l'asse nord-sud, e verso che va dall'attendamento alla posizione degli scout) localizza il punto in cui si trova la squadriglia rispetto al loro attendamento.

Il problema consiste ora nel trovare il vettore $\boldsymbol{r}$ che individua la posizione degli esploratori rispetto al campo base. Dal punto di vista matematico scriviamo questa relazione nel seguente modo: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$, avvertendo subito che il segno + che compare in questa *somma vettoriale* ha significato diverso da quello dell'addizione nell'algebra ordinaria. Ci rendiamo subito conto infatti che, per trovare il risultato corretto che esprime la distanza della squadriglia dal campo base, non si tratta di sommare semplicemente 3,0 km + 2,0 km. Per localizzare la squadriglia si richiede di coinvolgere nel calcolo qualche informazione concernente le direzioni. L'equazione che abbiamo scritto dunque *non* ci dice che la distanza della squadriglia dal campo base

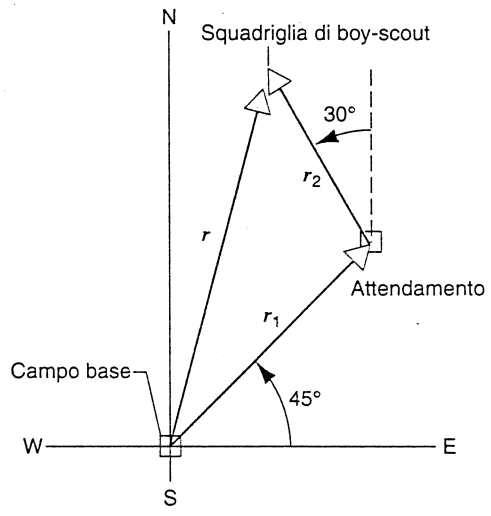


FIGURA 2.1 Posizioni relative del campo base, dell'attendamento e della squadriglia di boy-scout, specificate mediante vettori.

 ISBN 88-408-1254-7

lungo la direzione di $\boldsymbol{r}$ è pari alla somma delle distanze rappresentate da r_1 e da r_2. Ci suggerisce invece la possibilità di raggiungere gli esploratori in difficoltà partendo dal campo base attraverso due percorsi «equivalenti», dove il termine «equivalenti» si riferisce al fatto che i due itinerari terminano entrambi nello stesso luogo.

La posizione non è che una delle molte grandezze che in fisica si possono rappresentare con vettori. Tra le altre troviamo la velocità, l'accelerazione, la forza, la quantità di moto e i campi elettromagnetici. In contrapposizione al concetto di vettore, quelle grandezze che possono essere completamente descritte da una sola quantità numerica (assieme alla sua unità di misura) sono dette grandezze *scalari*. Esempi di scalari sono la massa, il tempo, la temperatura e l'energia.

Cinematica

In questo capitolo cominceremo lo studio del moto dei corpi introducendo la terminologia usata per descrivere i moti e le relazioni che intercorrono tra loro. Questa branca della fisica si chiama *cinematica*. Potremo descrivere il modo in cui i corpi si muovono specificandone la *posizione*, la *velocità* e l'*accelerazione*, ciò che ci permetterà di ottenere informazioni sulla loro direzione, su come questa si modifica nel tempo, su eventuali incrementi di velocità, eccetera.

Per motivi di semplicità, in questo capitolo limiteremo le nostre considerazioni al moto di *particelle*, e con questo termine intendiamo alludere a corpi ideali puntiformi dotati di massa, ma di estensione nulla, come potremmo quasi considerare un elettrone; se preferite potete anche pensare a corpi estesi che siano però perfettamente rigidi e le cui parti si muovano tutte insieme con le medesime identiche caratteristiche cinematiche (posizione, velocità e accelerazione). Anche un corpo esteso molto articolato può infatti considerarsi come una particella, purché non avvengano al suo interno moti come rotazioni o vibrazioni delle sue parti. Per esempio un pneumatico che rotola non può essere trattato come una particella, perché un punto sul suo bordo si muove in modo ben diverso da un punto sul suo asse (ma una ruota bloccata che striscia *può* assimilarsi a una particella, a patto che non subisca alcuna deformazione). Ne consegue che uno stesso oggetto può considerarsi una particella in alcune circostanze di calcolo, ma non in altre. Per quel che ci riguarda, al momento ignoreremo tutti i possibili moti interni di un corpo, e quindi nei nostri esempi ci potranno tornare ugualmente utili gli elettroni come i treni merci. Poste queste limitazioni, le particelle possono subire moti di tipo diverso: accelerare, diminuire la velocità, arrestarsi, cambiare verso o percorrere traiettorie curve come quelle circolari e paraboliche. Finché tratteremo i corpi come particelle, potremo servirci delle medesime equazioni per descrivere i loro movimenti.

Molte leggi fisiche possono assumere un'espressione più compatta se le grandezze che vi compaiono sono rappresentate da vettori. Una relazione scritta in forma vettoriale è spesso più agevole da leggere e da trattare. La posizione, la velocità e l'accelerazione, che sono le grandezze tipiche della cinematica, sono tutte grandezze vettoriali e le regole che le definiscono e le legano l'una all'altra sono regole vettoriali. Ora le svilupperemo per applicarle al moto rettilineo. Nel Capitolo 4 avremo un'ulteriore conferma dell'utilità di queste regole vettoriali, allorché dovremo occuparci del moto bidimensionale e tridimensionale su traiettorie curve.

Alcune delle proprietà fondamentali dei vettori, che ci serviranno in cinematica, sono esposte nel prossimo paragrafo. Rimandiamo invece all'appendice H per gli altri particolari sulle caratteristiche dei vettori.

2.2 PROPRIETÀ DEI VETTORI

Per rappresentare un vettore su un diagramma disegnamo una freccia. Fissata una scala opportuna, tracceremo la freccia di lunghezza proporzionale al modulo del vettore da rappresentare. Eventuali altri vettori che dovessimo disegnare sul diagramma nell'ambito dello stesso problema dovranno rispettare la medesima scala, in modo che le lunghezze relative delle frecce siano coerenti con le proporzioni tra i moduli dei vettori. Per esempio nella Figura 2.1 il vettore $\boldsymbol{r}_1$, che rappresenta una distanza di 3,0 km, è lungo una volta e mezza il vettore $\boldsymbol{r}_2$, che rappresenta la distanza di 2,0 km. La direzione in cui è disegnata la freccia corrisponde alla direzione della grandezza vettoriale che essa rappresenta. La punta della freccia indica il verso della grandezza vettoriale. In questo testo i vettori sono stampati con caratteri grassetti, come per esempio i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Nella scrittura a mano si può specificare la natura di vettore sovrapponendo al suo simbolo una freccetta, come in $\vec{a}$ e in $\vec{b}$.

Il modulo, o intensità, di un vettore $\boldsymbol{a}$ viene indicato col simbolo $|\boldsymbol{a}|$, ciò che non ci fornisce alcuna informazione direzionale sul vettore. Nei libri, per indicare il modulo si può anche, come faremo noi, scrivere il simbolo in normali caratteri chiari anziché grassetti, come per esempio a, che ha dunque lo stesso significato di $|\boldsymbol{a}|$.

Componenti dei vettori

Possiamo descrivere completamente un vettore specificandone la lunghezza, la direzione e il verso, come abbiamo fatto per i vettori posizione della Figura 2.1. Spesso tuttavia è più utile descriverlo in termini di *componenti*. La Figura 2.2a mostra un vettore $\boldsymbol{a}$, che ha l'intensità a pari alla lunghezza, la direzione determinata dall'angolo ϕ misurato rispetto all'asse x, e il verso stabilito dalla freccia. La componente secondo l'asse x e la componente secondo l'asse y (dette brevemente anche componente x e componente y) del vettore $\boldsymbol{a}$ sono rispettivamente

$$a_x = a\cos\phi \quad \text{e} \quad a_y = a\sin\phi. \tag{2.1}$$

Per quanto il modulo a sia sempre positivo, le componenti a_x e a_y possono essere sia positive sia negative, in dipendenza del valore che assume l'angolo ϕ. Per esempio ve-

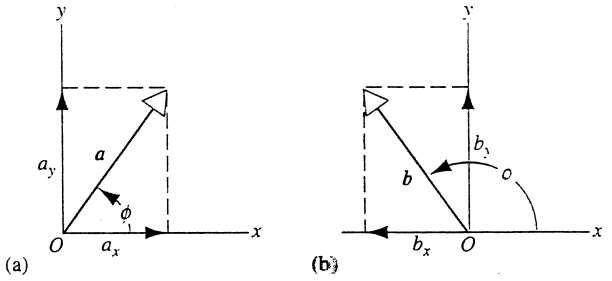


FIGURA 2.2 (a) Il vettore a ha componenti a_x nella direzione dell'asse x e a_y nella direzione dell'asse y. (b) La componente lungo l'asse x del vettore b è negativa.

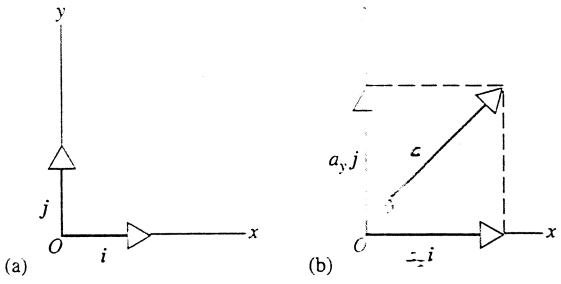


FIGURA 2.3 (a) I vettori unitari, detti anche *versori*, i e j. (b) Le componenti *vettoriali* di a. Quando vogliamo sostituire un vettore a con le sue componenti è utile tracciare sopra due sbarrette a ricordarci di non considerarlo oltre.

diamo nella Figura 2.2b che la direzione del vettore b è individuata da un angolo ϕ compreso tra 90° e 180° (ϕ è normalmente misurato a partire dal semiasse positivo delle x; gli si attribuisce segno positivo quando si effettua la misurazione in senso antiorario). In questo caso dunque b_x risulta negativo e b_y risulta positivo.

Se conosciamo i valori di a e ϕ, possiamo calcolare le componenti in base alle Equazioni 2.1. Possiamo anche seguire il procedimento opposto, e cioè, conoscendo le componenti a_x e a_y, trovare il modulo a del vettore risultante e l'angolo ϕ che definisce la sua direzione nel seguente modo:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\phi = a_y/a_x. \tag{2.2}$$

Il quadrante in cui giace il vettore a e, di conseguenza, il valore di ϕ si trovano tenendo conto dei segni *sia* di a_x *sia* di a_y. Per esempio, l'angolo di $-45°$ (coincidente con quello di 315°) e l'angolo di 135° hanno entrambi per tangente il valore -1, e individuano in effetti una stessa direzione; di conseguenza in entrambi i casi il rapporto a_y/a_x assume valore pari a -1. Ma nel caso che ϕ valga $-45°$ abbiamo a_x positivo e a_y negativo, mentre nel secondo caso in cui ϕ vale 135°, è a_x ad essere negativo mentre a_y assume valore positivo. Conoscendo dunque i segni delle due componenti è possibile determinare di quale dei due angoli si tratta e quindi il verso che deve assumere il vettore. (Un altro esempio di questo procedimento è riportato nel Problema svolto 2.3.)

Una maniera più formale di scrivere un vettore in termini di componenti fa uso dei *vettori unitari*, detti anche *versori*. Sono questi dei vettori di modulo 1 che hanno la direzione e il verso di ciascuno degli assi coordinati. Nelle coordinate cartesiane i versori secondo gli assi x e y si indicano coi simboli i e j rispettivamente, come illustrato nella Figura 2.3a. In questa notazione possiamo scrivere il vettore a come

$$a = a_x i + a_y j. \tag{2.3}$$

I versori sono adimensionali; le dimensioni di a dell'Equazione 2.3 sono implicite nelle sue componenti a_x e a_y.

La relazione vettoriale rappresentata dall'Equazione 2.3 è esattamente equivalente alle due relazioni scalari 2.1. Talvolta indichiamo $a_x i$ e $a_y j$ col termine di *componenti vettoriali* di a. La Figura 2.3b mostra il vettore a e le sue componenti vettoriali. Dato che l'effetto fisico prodotto da un vettore è uguale alla combinazione degli effetti fisici prodotti dalle sue componenti vettoriali, occasionalmente può tornare utile analizzare i problemi operando la sostituzione di un vettore con le sue componenti vettoriali. Quando tuttavia parliamo di «componenti», normalmente ci riferiamo alle componenti scalari descritte dalle Equazioni 2.1.

Nello scrivere un'equazione vettoriale come $a = b$, intendiamo affermare che i due vettori sono esattamente uguali: hanno cioè stesso modulo, stessa direzione e stesso verso. Ne consegue necessariamente che $a_x = b_x$ e che $a_y = b_y$. Ciò significa che

due vettori sono uguali solo se son uguali tutte le loro rispettive componenti.

Somma vettoriale

Come nell'esempio di Figura 2.1, abbiamo spesso bisogno di addizionare due o più vettori per trovarne la somma. Consideriamo i vettori a e b di Figura 2.4a. Ci proponiamo di trovare il vettore s tale che $s = a + b$.

Nella Figura 2.4b è illustrato un procedimento grafico che ci permette di operare la somma $a + b$. Si disegna prima il vettore a. Poi, invece di disegnare il vettore b con la coda nell'origine del piano cartesiano, come avevamo fatto nella Figura 2.4a, lo trasliamo fino a far coincidere la sua coda con la punta di a. Un siffatto trasferimento grafico è ammesso purché non si modifichino le caratteristiche del

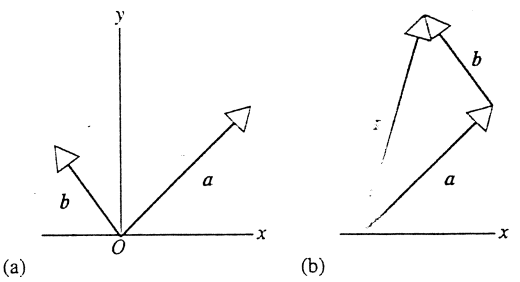


FIGURA 2.4 (a) Vettori a e b. (b) Per trovare il vettore s somma dei vettori a e b, trasliamo il vettore b, mantenendone inalterati lunghezza e orientamento, fino a far coincidere la sua coda con la punta del vettore a. Disegnamo quindi il vettore $s = a + b$ congiungendo la coda di a con la punta di b.

 ISBN 88-408-1254-7

vettore traslato: né la sua lunghezza né la sua direzione né il suo orientamento. Possiamo ora tracciare il vettore s, che rappresenta la somma $a + b$, dalla coda di a alla punta di b. Volendo sommare più vettori, possiamo concatenarli tutti disegnandoli in modo che la coda del successivo coincida con la punta del precedente: la somma sarà rappresentata dal vettore tracciato dalla coda del primo fino alla punta dell'ultimo. Per trovare la somma di vettori è possibile anche seguire un metodo geometrico o trigonometrico.

Un altro modo ancora per sommare vettori consiste nel sommare le loro componenti. Vogliamo dire che $s = a + b$ è equivalente a

$$s_x i + s_y j = (a_x i + a_y j) + (b_x i + b_y j) = \\ = (a_x + b_x)i + (a_y + b_y)j.$$

Poniamo ora le componenti x che compaiono a primo membro uguali a quelle che compaiono a secondo membro e la stessa cosa facciamo anche per le componenti y:

$$s_x = a_x + b_x \quad \text{e} \quad s_y = a_y + b_y. \tag{2.4}$$

Per poter sommare i vettori in questo modo dobbiamo dapprima scomporre ciascun vettore nelle sue componenti e poi sommarle (non trascurando i loro segni) per ottenere infine le componenti del vettore somma. Il procedimento è illustrato nella Figura 2.5. Una volta note le componenti del vettore somma possiamo agevolmente ricavarne modulo, direzione e verso applicando le Equazioni 2.2 e le considerazioni sul segno a loro commento.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare

Il prodotto tra uno scalare c e un vettore a, che si scrive ca, è definito come un nuovo vettore di modulo pari al prodotto aritmetico tra c e il modulo di a. Le componenti di questo nuovo vettore sono di conseguenza ca_x e ca_y. Lo scalare può essere un numero puro oppure può rappresentare il valore di una grandezza fisica; in quest'ultimo caso, essendo dotato di dimensioni e unità di misura, il nuovo vettore ca rappresenterà una grandezza diversa da quella del vettore a. La divisione di un vettore per uno scalare, come a/c, si effettua semplicemente moltiplicando il vettore per il reciproco dello scalare, $1/c$.

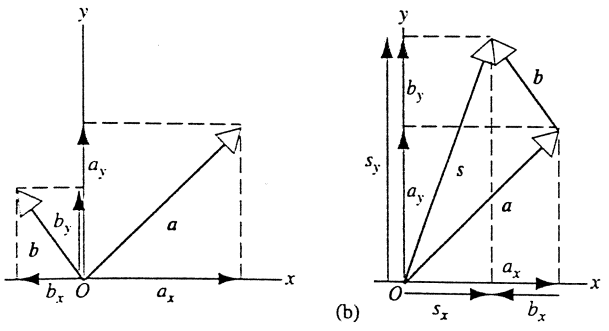


FIGURA 2.5 (a) Componenti dei vettori a e b. (b) Si può calcolare il vettore somma $s = a + b$ eseguendo l'addizione delle componenti di a con le rispettive componenti di b. Si noti che, essendo b_x negativa, la somma delle componenti x è in realtà una sottrazione.

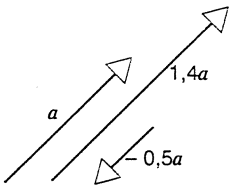


FIGURA 2.6 La moltiplicazione di un vettore a per uno scalare c dà per prodotto un vettore ca il cui modulo corrisponde a c volte il modulo di a. Il vettore prodotto ha la stessa direzione di a e mantiene lo stesso verso se c è positivo, altrimenti ha verso opposto. Nei due esempi illustrati i valori di c sono rispettivamente +1,4 e –0,5.

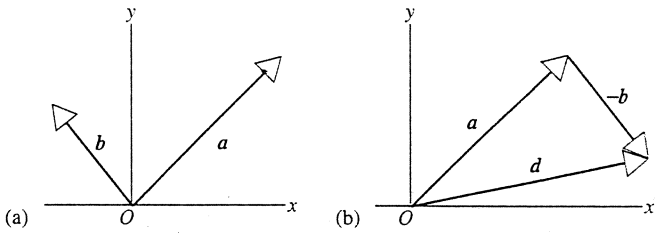


FIGURA 2.7 (a) Vettori a e b. (b) Il vettore differenza $d = a - b$ si ottiene sommando $-b$ ad a.

La moltiplicazione per uno scalare non modifica la direzione del vettore; può invece rovesciarne il verso nel caso che lo scalare sia di segno negativo. La Figura 2.6 mostra l'effetto prodotto dalla moltiplicazione di un vettore a per uno scalare positivo e per uno scalare negativo.

Moltiplicando un vettore b per lo scalare -1, si ottiene il vettore $-b$, che è un vettore di modulo e direzione uguali a quelli di b, ma avente verso opposto. Le componenti di $-b$ sono $-b_x$ e $-b_y$. Questa proprietà è utile per esprimere la differenza tra due vettori, per esempio $d = a - b$, scrivendola come $d = a + (-b)$ e riducendola quindi all'addizione di a e $-b$. La figura 2.7 illustra il metodo grafico da seguire per sommare a e $-b$ e trovare il vettore differenza $d = a - b$. In analogia con le Equazioni 2.4, le componenti di d sono $d_x = a_x - b_x$ e $d_y = a_y - b_y$.

PROBLEMA SVOLTO 2.1 Un aereo ha volato per 209 km su una rotta che forma un angolo di 22,5° verso Est rispetto al Nord. Di quanto si è allontanato, nella sua attuale posizione, dalla direzione Nord e dalla direzione Est?

Soluzione Facciamo coincidere la direzione est con il semiasse positivo delle x e la direzione Nord col semiasse positivo delle y. Tracciamo poi un vettore spostamento (Figura 2.8) a partire dall'origine degli assi (punto di partenza), che formi con l'asse y (Nord) un angolo di 22,5° e giaccia sul semipiano positivo delle x (tendente a Est). La lunghezza del vettore rappresenta un modulo di valore pari a 209 km. Chiamando d questo vettore, l'attuale allontanamento dalla rotta Nord sarà rappresentato dalla componente d_x e l'allontanamento dalla rotta Est dalla componente d_y. Essendo

$$\phi = 90{,}0° - 22{,}5° = 67{,}5°,$$

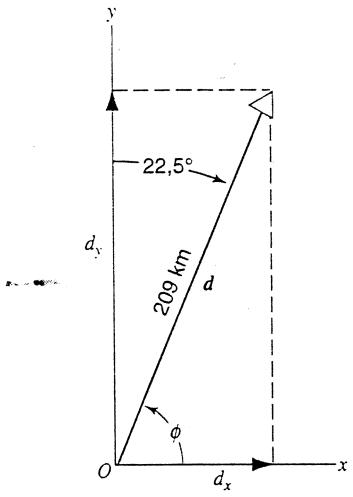


FIGURA 2.8 Problema svolto 2.1.

avremo, in base alle Equazioni 2.1,

$$d_x = d\cos\phi = (209\text{ km})(\cos 67{,}5°) = 80.0\text{ km}$$

e

$$d_y = d\sin\phi = (209\text{ km})(\sin 67{,}5°) = 193\text{ km}.$$

In questo problema abbiamo assunto che la superficie terrestre possa essere rappresentata su un piano cartesiano xy. Sappiamo tuttavia che tale superficie è in realtà incurvata con un raggio di curvatura di circa 6400 km. Se le distanze sono modeste, possiamo considerarla piana senza commettere grandi errori. Siete in grado di stimare quale distanza d deve percorrere l'aeroplano per causare un errore del 5 % nella vostra risposta a causa dell'approssimazione cartesiana introdotta?

PROBLEMA SVOLTO 2.2 Un'automobile viaggia su strade piane prima per 32 km verso Est e da qui per 47 km verso Nord. Trovare il vettore spostamento che individua la sua posizione finale.

Soluzione Scegliamo un sistema di coordinate fisse rispetto alla Terra con l'asse x diretto verso Est e l'asse y diretto verso Nord. Nella Figura 2.9 disegnamo i due vettori spostamento parziali indicandoli con $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, rispettivamente. Lo spostamento risultante $\boldsymbol{s}$ è dato dalla somma $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Tenendo conto che il vettore $\boldsymbol{a}$ ha nulla la componente y nulla e il vettore $\boldsymbol{a}$ ha nulla la componente x, dalle Equazioni 2.4 otteniamo

$$s_x = a_x + b_x = 32\text{ km} + 0 = 32\text{ km},$$
$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47\text{ km} = 47\text{ km}.$$

Mediante le Equazioni 2.2 troviamo il modulo e la direzione di $\boldsymbol{s}$:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(32\text{ km})^2 + (47\text{ km})^2} = 57\text{ km},$$
$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_y} = \frac{47\text{ km}}{32\text{ km}} = 1{,}47, \quad \phi = \arctan(1{,}47) = 56°.$$

Lo spostamento risultante $\boldsymbol{s}$ ha un modulo di 57 km e forma un angolo di +56° rispetto all'asse x (Est).

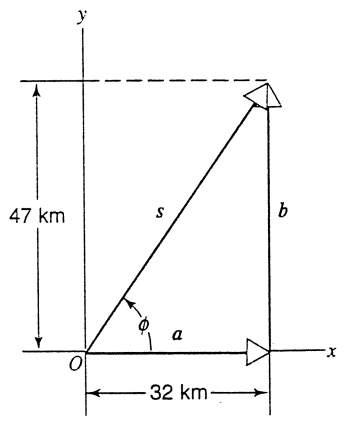


FIGURA 2.9 Problema svolto 2.2.

PROBLEMA SVOLTO 2.3 Tre vettori giacenti sul piano xy hanno le seguenti espressioni:

$$\boldsymbol{a} = 4{,}3\boldsymbol{i} - 1{,}7\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{b} = -2{,}9\boldsymbol{i} + 2{,}2\boldsymbol{j},$$

e

$$\boldsymbol{c} = -3{,}6\boldsymbol{j},$$

ove le componenti hanno unità arbitrarie. Determinare la somma $\boldsymbol{s}$ dei tre vettori.

Soluzione Estendendo le Equazioni 2.4 al caso di tre vettori, abbiamo

$$s_x = a_x + b_x + c_x = 4{,}3 - 2{,}9 + 0 = 1{,}4,$$

e

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -1{,}7 + 2{,}2 - 3{,}6 = -3{,}1.$$

Perciò

$$\boldsymbol{s} = s_x\boldsymbol{i} + s_y\boldsymbol{j} = 1{,}4\boldsymbol{i} - 3{,}1\boldsymbol{j}.$$

Nella Figura 2.10 sono disegnati i 4 vettori. Il modulo del vettore $\boldsymbol{s}$, calcolato con l'Equazione 2.2, risulta pari a 3,4 e la sua direzione forma con l'asse x un angolo ϕ pari a

$$\phi = \arctan(-3{,}1/1{,}4) = -66°.$$

Occorre ora determinare il verso del vettore $\boldsymbol{s}$; infatti anche l'angolo pari a $\phi + 180° = 114°$ presenta il medesimo valore della tangente e individua quindi il vettore $-\boldsymbol{s}$, che ha la medesima direzione. Prendendo in considerazione i segni delle componenti di $\boldsymbol{s}$ si riconosce, anche dalla Figura 2.10, che quest'ultimo vettore giace nel quarto quadrante e pertanto l'angolo corretto è quello di −66°.

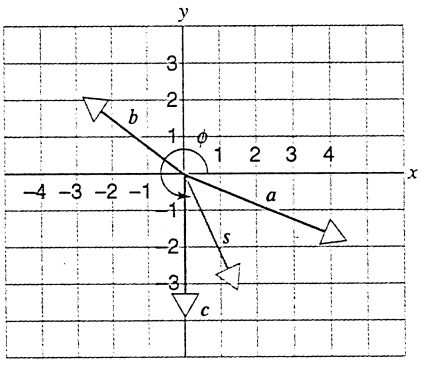


FIGURA 2.10 Problema svolto 2.3.

 ISBN 88-408-1254-7

2.3 VETTORI POSIZIONE, VELOCITÀ E ACCELERAZIONE

In cinematica il moto di una particella si descrive mediante vettori che individuano la sua posizione, velocità e accelerazione. Finora abbiamo limitato i nostri esempi di moto al caso bidimensionale (sul piano xy). Adesso allargheremo la trattazione ai moti in tre dimensioni (in un sistema di coordinate spaziali xyz).

Nella Figura 2.11 vediamo un itinerario qualunque in tre dimensioni percorso da una particella. Ad ogni istante la sua posizione è individuata dalle coordinate x, y e z, che rappresentano dunque le tre componenti del suo *vettore posizione* $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \tag{2.5}$$

laddove $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ sono i versori in coordinate cartesiane, indicati nella Figura 2.11.

Supponiamo che all'istante t_1 la particella si trovi nella posizione individuata dal vettore $\boldsymbol{r}_1$ e si muova poi lungo il suo percorso fino a raggiungere nell'istante t_2 la posizione individuata da $\boldsymbol{r}_2$, come è illustrato nella Figura 2.12a. Definiamo *vettore spostamento* $\Delta\boldsymbol{r}$ la variazione di posizione intervenuta nell'intervallo di tempo considerato:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 . \tag{2.6}$$

I tre vettori $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ e $\Delta\boldsymbol{r}$ stanno in rispettiva relazione tra loro come i tre vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ed $\boldsymbol{s}$ della Figura 2.4b. Ciò significa che, utilizzando il metodo di addizione grafica testa-coda, $\Delta\boldsymbol{r}$ sommato a $\boldsymbol{r}_1$ dà luogo al vettore somma $\boldsymbol{r}_2$. Ne consegue che $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \Delta\boldsymbol{r}$, che equivale all'Equazione 2.6.

Si osservi nella Figura 2.12a che lo spostamento qui definito non coincide con la lunghezza percorsa dalla particella lungo il suo itinerario. Lo spostamento dipende solo dai punti di partenza e di arrivo, ma non dipende dal percorso effettivamente eseguito.

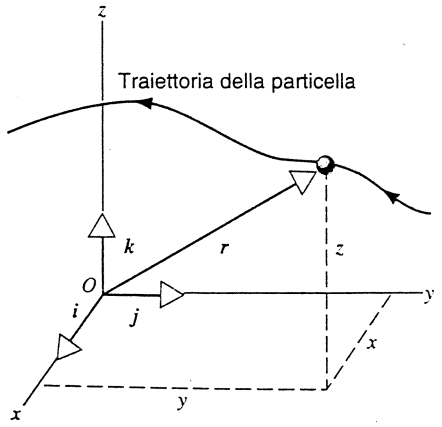


FIGURA 2.11 La posizione di una particella che segue una certa traiettoria è individuata dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$, che ha componenti lungo gli assi x, y e z. Sono messi in evidenza anche i tre versori cartesiani $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$.

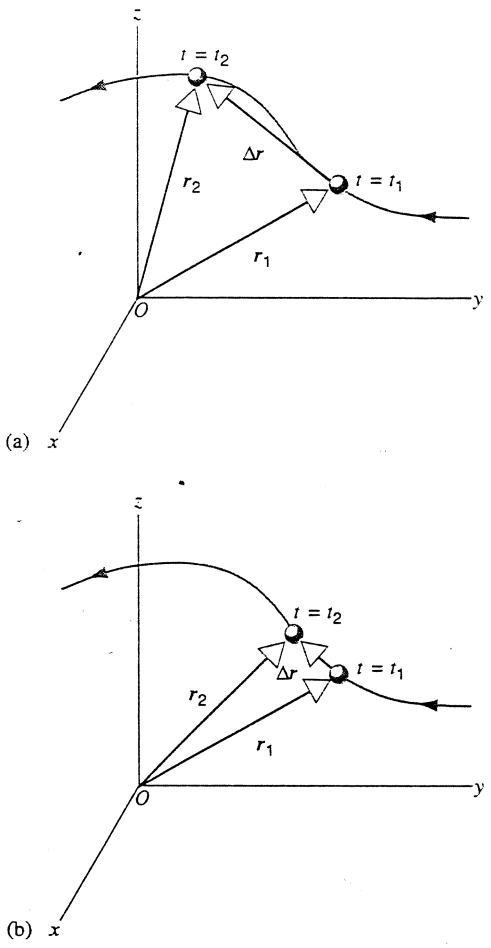


FIGURA 2.12 (a) Nell'intervallo di tempo Δt tra t_1 e t_2 la particella si sposta dalla posizione $\boldsymbol{r}_1$ alla posizione $\boldsymbol{r}_2$. Lo spostamento effettuato durante quest'intervallo è $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. (b) Considerando spostamenti sempre più piccoli, il vettore spostamento si avvicina sempre di più alla traiettoria seguita dalla particella.

Velocità

La *velocità* (vettoriale) *media* $\overline{\boldsymbol{v}}$ in un certo intervallo di tempo è definita come lo spostamento (variazione di posizione) diviso per il tempo trascorso durante lo spostamento, ossia

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}, \tag{2.7}$$

ove $\Delta t = t_2 - t_1$. In questa equazione il vettore $\Delta\boldsymbol{r}$ viene moltiplicato per lo scalare positivo $1/\Delta t$, *di modo che il vettore* $\overline{\boldsymbol{v}}$ *assume la stessa direzione e lo stesso verso del vettore* $\Delta\boldsymbol{r}$.

Come per lo spostamento, la velocità media di una particella durante un certo intervallo di tempo dipende solamente dalla sua posizione all'inizio e alla fine dell'intervallo; non dipende da eventuali accelerazioni che essa abbia eventualmente subìto durante l'intervallo, né da eventuali variazioni di percorso o inversioni di marcia. Si noti in particolare che, se la particella alla fine dell'intervallo di tempo si trova nello stesso luogo in cui era all'inizio, in base alla

definizione data dalla (2.7) la sua velocità vettoriale media è zero. Non stupisca quindi che la velocità vettoriale media di un'autovettura durante 1 giro d'autodromo sia nulla!

La velocità vettoriale media può quindi avere utilità quando l'interesse si concentra sul comportamento complessivo di una particella durante un certo intervallo di tempo, ma volendo descrivere i dettagli del suo movimento è più utile disporre di una funzione matematica che fornisca il valore del vettore velocità a ciascun istante dell'intervallo considerato. È questa la *velocità* (vettoriale) *istantanea* v, spesso indicata semplicemente *velocità* (vettoriale).

Per trovare la velocità vettoriale istantanea riduciamo l'intervallo di tempo Δt, in modo che il vettore Δr si avvicini alla traiettoria effettivamente percorsa (come in Figura 2.12b), fino al limite in cui tale vettore diventa tangente alla traiettoria al tendere di Δt a zero. In questa situazione limite la velocità media approssima la velocità istantanea:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}. \tag{2.8}$$

La direzione di v è sempre tangente al percorso della particella e il verso è concorde con quello del suo moto all'istante considerato.

L'Equazione 2.8 ricorda la definizione matematica di derivata, ed è per questo che possiamo anche scrivere

$$v = \frac{dr}{dt}. \tag{2.9}$$

La derivata di un vettore equivale alla somma delle derivate di ciascuna delle sue componenti:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}(xi + yj + zk) = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k. \tag{2.10}$$

I vettori unitari i, j e k sono costanti sotto tutti gli aspetti e perciò nella derivazione si possono portare fuori dal segno di derivata. Non altrettanto si può fare però nel caso che i versori siano definiti in sistemi di coordinate diverse da quelle cartesiane (come ad esempio le coordinate cilindriche o sferiche); in questi altri casi i versori cambiano di direzione nel tempo e non sono perciò costanti.

Il vettore v può scriversi anch'esso in termini di componenti:

$$v = v_x i + v_y j + v_z k. \tag{2.11}$$

Giacché due vettori sono uguali solo quando sono uguali tutte le loro rispettive componenti, eguagliando le relazioni 2.10 e 2.11 si ottengono le seguenti uguaglianze:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{2.12}$$

Così la relazione tridimensionale data dalla (2.9) risulta equivalente alle tre relazioni unidimensionali (2.12).

Nota importante: Il termine *velocità* nella nostra lingua si presta a equivoci. Quando parliamo comunemente di «velocità» nel linguaggio di tutti i giorni, *non* intendiamo normalmente ciò che qui abbiamo descritto come *vettore velocità* e indicato con il nome di *velocità vettoriale* (in inglese *velocity*); si intende quasi sempre il modulo del vettore velocità, ciò che possiamo anche chiamare *velocità scalare* (in inglese *speed*), una quantità priva cioè di connotati direzionali. Quando parliamo dunque di *velocità* tout-court occorre fare attenzione per capire a quale delle due accezioni si allude. Poiché nella maggior parte dei casi il contesto rende inequivocabile, se non indifferente, il riferimento all'uno o all'altro concetto di velocità, in questo libro si specificherà in modo esplicito, a parole o simbolicamente, se si tratti del vettore velocità (velocità vettoriale) oppure del suo modulo (velocità scalare), soltanto quando vi sia il rischio di ambiguità.

La velocità scalare v è dunque il modulo del vettore v, che si può anche scrivere, come abbiamo detto, $|v|$. Il tachimetro dell'automobile indica la velocità scalare, e non quella vettoriale, dato che nulla dice a riguardo della direzione. Possiamo a questo punto definire la velocità scalare media in questo modo:

$$\text{velocità scalare media} = \frac{\text{lunghezza totale percorsa}}{\text{tempo trascorso}}. \tag{2.13}$$

Si noti che normalmente non c'è relazione tra la velocità scalare media e il modulo della velocità vettoriale media. Un giro esatto d'autodromo, che fa registrare, come abbiamo visto, una velocità vettoriale media pari a zero, viene di solito effettuato a una velocità scalare media tutt'altro che nulla! L'Equazione 2.13 è una relazione scalare perché la «lunghezza totale percorsa» non contiene alcuna informazione sull'orientamento assunto durante il tragitto.

La velocità è dimensionalmente una lunghezza divisa per un tempo, e dunque la sua unità di misura SI è il metro al secondo (m/s). Si usano naturalmente anche altre unità, come il km/h, il nodo, ecc.

Accelerazione

La velocità di una particella durante il suo moto può variare sia in modulo, sia in direzione e anche in verso. Una tal variazione di velocità, in rapporto all'intervallo di tempo in cui viene effettuata, prende il nome di *accelerazione*. Seguendo la stessa impostazione dell'Equazione 2.1, definiamo l'*accelerazione media* impressa durante un dato intervallo di tempo come il rapporto tra la variazione di velocità e l'intervallo stesso:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{2.14}$$

Il vettore Δv che individua la variazione di velocità è dato dalla differenza $v_{\text{finale}} - v_{\text{iniziale}}$. Come per la velocità, anche il vettore accelerazione media non dà informazioni su come è variata v durante l'intervallo di tempo considerato Δt. Inoltre si osserva che la direzione di $\bar{a}$ è la stessa di Δv.

 ISBN 88-408-1254-7

L'*accelerazione istantanea* si ottiene dall'Equazione 2.14 passando al limite per $\Delta t \to 0$:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (2.15)$$

Anche qui possiamo mettere questa espressione sotto forma di derivata:

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (2.16)$$

e, per analogia con le Equazioni 2.10 e 2.11, possiamo scrivere le componenti del vettore accelerazione istantanea come

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \qquad (2.17)$$

Le equazioni vettoriali, come la (2.16), possono rendere più compatta la notazione e aiutarci a ricordare come separare le componenti (per esempio, a_x non ha effetti su v_y e v_z).

In generale la direzione dell'accelerazione non ha relazione con la direzione di v. Possono essere parallele e concordi, parallele ma discordi, perpendicolari, o formare tra loro qualunque altro angolo.

Dato che v è una quantità vettoriale, una modifica della sua direzione dà luogo a un'accelerazione non nulla, anche se il modulo di v dovesse rimanere immutato. Anche nel caso di velocità scalare costante, dunque, si può avere moto accelerato. Per esempio, le componenti del vettore v possono cambiare in modo tale che il modulo di v $\left(= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)$ rimanga costante. Questa situazione si incontra comunemente nel moto circolare uniforme, che tratteremo nel Paragrafo 4.5.

Dato che l'accelerazione è dimensionalmente definita come una velocità divisa per un tempo, le sue dimensioni equivalgono a L/T^2 e la sua unità di misura SI è il metro al secondo quadrato (m/s^2). Potreste incontrare forme del tipo m/s/s, che sottolineano come l'accelerazione sia una variazione di velocità divisa per un tempo.

PROBLEMA SVOLTO 2.4 Una particella si muove sul piano xy in modo tale che le sue coordinate seguano un andamento dettato dalle seguenti equazioni: $x(t) = At^3 + Bt$ e $y(t) = Ct^2 + D$, ove $A = 1{,}00$ m/s^3, $B = -32{,}0$ m/s, $C = 5{,}0$ m/s^2 e $D = 12{,}0$ m. Trovare i vettori posizione, velocità e accelerazione della particella all'istante $t = 3$ s.

Soluzione La posizione è data dall'Equazione 2.5 che, introducendo le espressioni di $x(t)$ e $y(t)$, diventa

$$r = xi + yj = (At^3 + Bt)i + (Ct^2 + D)j.$$

Ponendo $t = 3$ s, si ottiene

$$r = (-69 \text{ m})i + (57 \text{ m})j.$$

Tramite le Equazioni 2.12 si trovano le componenti della velocità:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(At^3 + Bt) = 3At^2 + B$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(Ct^2 + D) = 2Ct.$$

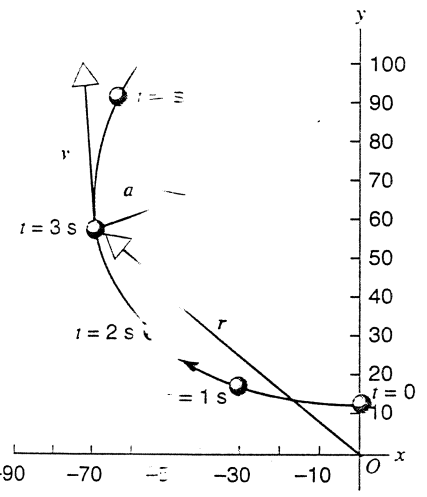


FIGURA 2.13 Problema svolto 2.4. Sul grafico è disegnata la traiettoria della particella in moto e sono segnate le sue posizioni agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$ e –. Per l'istante $t = 3$ s sono rappresentati anche i vettori velocità e accelerazione. Si noti che non si percepiscono particolari relazioni tra le direzioni di r, v, e a, né tra le lunghezze dei vettori che li rappresentano.

Introducendovi il valore $t =$ s si ha

$$v = v_x i + v_y j = (-5 \text{ m/s})i + (30 \text{ m/s})j.$$

Le componenti dell'accelerazione sono

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3At^2 + B) = 6At$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(2Ct) = 2C.$$

All'istante $t = 3{,}0$ s l'accelerazione vale

$$a = a_x i + a_y j = (18 \text{ m/s}^2)i + (10 \text{ m/s}^2)j.$$

La Figura 2.13 mostra il percorso della particella dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 4$ s. Sono tracciati i vettori posizione, velocità e accelerazione relativi all'istante $t = 3$ s. Siccome le dimensioni di questi tre vettori sono diverse le loro lunghezze relative non hanno significato in questo caso. Il vettore r localizza la particella rispetto all'origine. Il vettore v è tangente alla traiettoria della particella. Il vettore a rappresenta la variazione di velocità e la sua direzione si può approssimativamente determinare dalla direzione della variazione di v in un breve intervallo intorno all'istante $t = 3$ s.

2.4 CINEMATICA UNIDIMENSIONALE

Una volta stabilite le definizioni delle più importanti grandezze che descrivono il moto, dedichiamoci ad alcuni esempi delle loro applicazioni. Al momento considereremo per semplicità moti che si svolgono in una sola direzione, ciò che ci permetterà di limitare a una sola componente le Equazioni 2.5, 2.12 e 2.17.

Nella cinematica unidimensionale una particella si muove solamente su una linea retta: può variare la velocità e invertire il senso di marcia, ma comunque il suo moto si svolge solo su quella retta. Rispettando questa limitazione possiamo considerare molte situazioni fisiche diverse, come

un sasso che cade, un treno in accelerazione, un'auto in frenata, un disco da hockey che scivola sul ghiaccio, una cassa che viene trascinata su per una rampa o un elettrone veloce in un tubo a raggi X.

Due sono i modi di rappresentare il moto di una particella: con le equazioni matematiche e con i diagrammi. Entrambi forniscono informazioni sul problema e spesso li useremo ambedue. L'approccio matematico è di solito migliore nella risoluzione dei problemi, giacché consente una maggior precisione del metodo grafico. D'altro canto la rappresentazione grafica offre spesso un'interpretazione fisica più immediata di quanto sia capace di fare una serie di equazioni.

Ecco alcuni tipi di moto accompagnati dalle equazioni o dai diagrammi che li descrivono.

1. *Particella ferma.* In questo caso la particella occupa permanentemente la stessa posizione. Supponiamo che si trovi sull'asse x in corrispondenza della coordinata A, di modo che in qualsiasi istante

$$x(t) = A\,. \tag{2.18}$$

Nella Figura 2.14a è riportato un grafico del «moto». La velocità, costante, è nulla ed è raffigurata sul diagramma di Figura 2.14b. Pensiamo per esempio a una biglia ferma sull'asta di un pallottoliere.

Sovente nei problemi di cinematica si vuole sapere come dipendono dal tempo la posizione e la velocità di una particella in moto. Per questo motivo scriviamo le coordinate della posizione come $x(t)$. Per lo stesso motivo si disegnano i grafici, come quello di Figura 2.14, ponendo la x come variabile dipendente sull'asse delle ordinate, mentre si riporta il tempo come variabile indipendente sull'asse delle ascisse. Questo non significa che la particella si muove su un asse x verticale. La retta su cui si muove la particella può avere qualunque direzione.

2. *Moto a velocità costante* (detto anche *moto uniforme*). Nel caso unidimensionale (in cui facciamo coincidere la direzione di moto con l'asse x), la velocità v_x può essere positiva se la particella si muove nel verso delle x crescenti, negativa nel caso opposto. Se la velocità è costante, il diagramma della posizione in funzione del tempo è una linea retta. In base all'Equazione 2.12, la derivata della posizione rispetto al tempo corrisponde alla velocità, e su un grafico rappresenta la pendenza della retta: quanto più pendente è la retta, tanto maggiore è la velocità. Un grafico di questo tipo è riportato nella Figura 2.15a, ove la retta rappresentata può essere espressa nella forma matematica

$$x(t) = A + Bt, \tag{2.19}$$

che è la forma comune dell'equazione della retta (di solito scritta come $y = mx + b$), la cui pendenza è data dal coefficiente angolare B. Si noti che $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = B$; nella Figura 2.15b, l'andamento della velocità è costante.

Come si evince dalla Figura 2.15 e anche dall'equazione 2.19, la particella occupa la posizione $x = A$ all'istante $t = 0$. Essa avanza nel verso delle x crescenti e quindi la pendenza B della retta (la velocità v_x) è positiva.

3. *Moto accelerato.* Considerata la definizione che ne abbiamo dato – una variazione di velocità nel tempo – l'accelerazione caratterizza un moto in cui il vettore velocità subisce modifiche. Poiché la velocità è rappresentata dalla pendenza della retta $x(t)$, nel moto accelerato si assisterà a una variazione di questa pendenza. L'andamento della posizione in funzione del tempo non assumerà più quindi la forma di una retta, ma più genericamente di una curva. Ecco due esempi di moto accelerato:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2, \tag{2.20}$$

$$x(t) = D\cos(\omega t). \tag{2.21}$$

Nel primo caso (Figura 2.16a), ponendo C positivo, al procedere della particella la pendenza della curva $x(t)$ cresce, ciò che corrisponde a un aumento della velocità della particella in verso concorde al suo senso di avanzamento. Combinando le Equazioni 2.12 e 2.17 si ha che $a_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$. Applicando questa relazione alla (2.20) si ottiene $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 = 2C$, concludendo che nel caso citato l'accelerazione è costante. Nel secondo caso (Figura 2.16b), la particella oscilla tra due punti estremi, $x = +D$ e $x = -D$; al variare di segno della derivata dell'Equazione 2.21, il vettore velocità cambia segno e quindi la particella cambia verso di avanzamento.

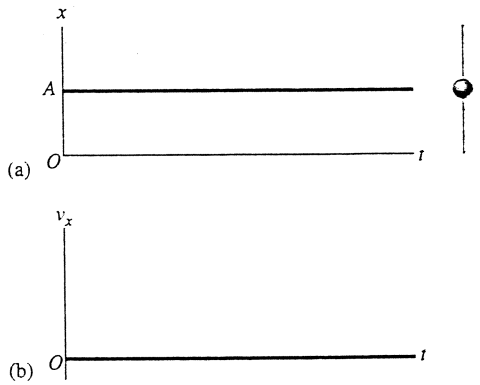


FIGURA 2.14 (a) Posizione e (b) velocità di una biglia vincolata a un filo e ferma nella posizione $x = A$.

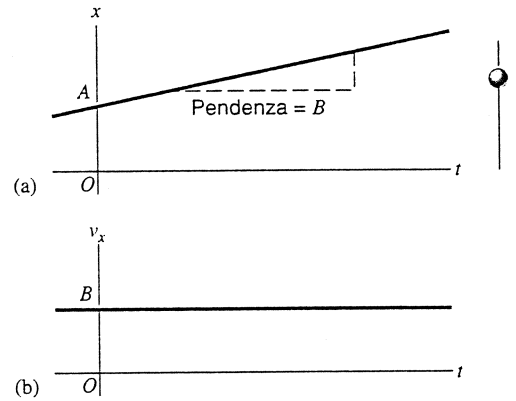


FIGURA 2.15 (a) Posizione e (b) velocità di una biglia che scorre su un filo rettilineo a velocità costante. La velocità corrisponde alla pendenza della retta che rappresenta $x(t)$. Il grafico che esprime $v_x(t)$ è la retta orizzontale $v_x = B$.

 ISBN 88-408-1254-7

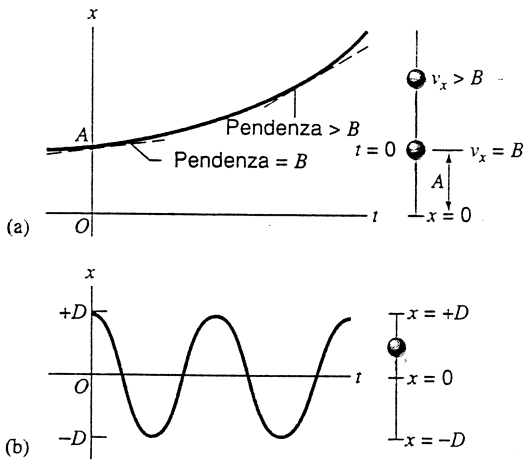


FIGURA 2.16 (a) Una biglia che scorre lungo una guida rettilinea aumenta costantemente la sua velocità, che è concorde all'asse x. La velocità è uguale alla pendenza della curva che descrive la posizione della particella; tale pendenza cresce con continuità. (b) Una biglia che scorre lungo una guida rettilinea oscilla tra i punti $x = +D$ e $x = -D$.

Spesso la descrizione completa di un moto è molto più complicata dei semplici casi descritti e qui di seguito ne diamo ulteriori esempi.

4. *L'auto che accelera e frena.* Un'automobile inizialmente ferma comincia ad accelerare fino a raggiungere una certa velocità. Poi procede a velocità uniforme, infine frena per giungere nuovamente all'arresto. La Figura 2.17a illustra le varie fasi dell'accelerazione, che per semplicità assumiamo costante in ciascuna fase. L'accelerazione è nulla quando l'auto è ferma e quando procede a velocità costante: come risulta dall'Equazione 2.17 e come vediamo dal confronto tra le Figure 2.17a e 2.17b, quando v_x è costante, $a_x = dv_x/dt = 0$).

Dalle medesime figure riconosciamo che, a una pendenza positiva del tratto di retta che rappresenta v_x, corrisponde un valore di a_x positivo (costante nel nostro caso), e viceversa. In qualsiasi istante il valore di a_x si può dedurre dalla pendenza del grafico v_x in funzione di t.

In modo simile possiamo tracciare il grafico della posizione in funzione del tempo, $x(t)$, come in Figura 2.17c. Si noti che la pendenza di questa curva dà il valore di $v_x(t)$, come è richiesto dall'Equazione 2.12 ($v_x = dx/dt$). Per esempio, nell'intervallo di tempo in cui l'auto accelera, la pendenza di $x(t)$ va gradatamente aumentando, così come fa la velocità. Quando l'auto procede a velocità costante, $x(t)$ è rappresentata da una retta a pendenza costante.

Questi diagrammi sono un poco astratti; un'automobile in realtà non potrebbe passare istantaneamente da una condizione di arresto a un'altra in cui la sua accelerazione non è nulla ed è costante. In poche parole, i «salti» della curva $a_x(t)$ dovrebbero in effetti essere raccordati da curve continue e i punti angolosi del grafico $v_x(t)$ dovrebbero essere smussati.

5. *Corpo in caduta.* Come approfondiremo più avanti in questo stesso capitolo, un corpo che cada in prossimità della superficie terrestre a causa della gravità subisce un'accelerazione costante diretta verso il basso. Fissiamo un asse y verticale e scegliamo positivo il verso diretto in alto, di modo che l'accelerazione di gravità presenti una componente y, che chiamiamo a_y, negativa. Nella Figura 2.18a ne è riportato l'andamento costante di valore negativo.

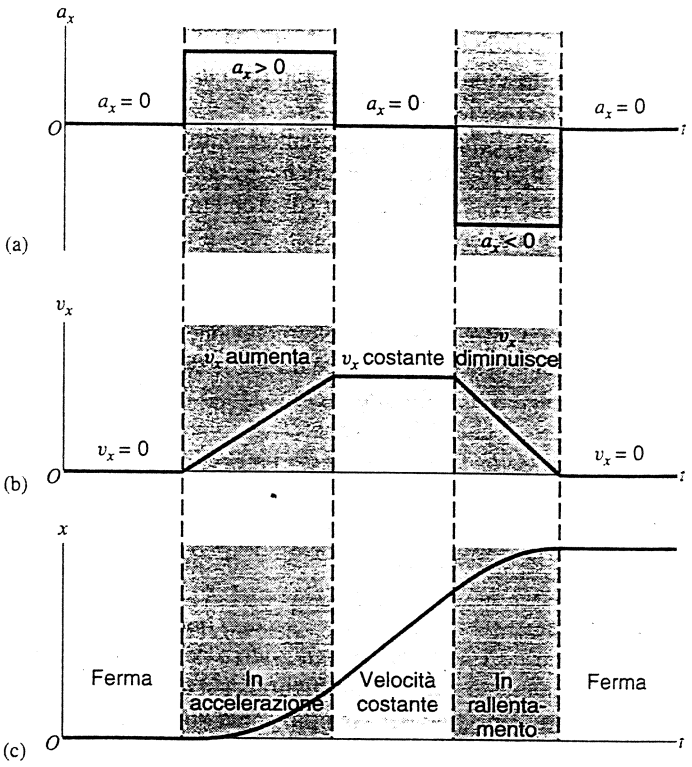


FIGURA 2.17 (a) Accelerazione, (b) velocità e (c) posizione di un'automobile che, partendo da ferma su un rettilineo, dapprima accelera, poi avanza a velocità costante, poi rallenta applicando un'accelerazione negativa fino ad arrestarsi nuovamente. Nella realtà una macchina non può cambiare accelerazione istantaneamente: gli andamenti di $a_x(t)$ e $v_x(t)$ in un caso reale sarebbero curve continue smussate. Sarebbero dunque dei tratti curvi a congiungere i segmenti orizzontali del grafico di $a_x(t)$ e i punti angolosi della curva $v_x(t)$ sarebbero in realtà arrotondati.

Quando un oggetto viene lasciato cadere da fermo, la sua velocità diretta verticalmente verso il basso (negativa) cresce in modulo sotto l'effetto di questa accelerazione. Dato che a_y è costante, l'andamento di $v_y(t)$ dev'essere una retta a pendenza costante negativa, come si vede nella Figura 2.18b. Nella figura 2.18c osserviamo invece che la posizione $y(t)$ dell'oggetto, inizialmente a una determinata altezza positiva H, diminuisce gradualmente per giungere a zero quando il corpo tocca terra. All'istante della partenza, la pendenza di $y(t)$ è zero perché la velocità è inizialmente nulla; al crescere (in modulo) della velocità, la corrispondente pendenza di $y(t)$ aumenta (sempre in modulo), come si può verificare tracciando alcune rette tangenti alla curva.

6. *La pallina che cade e rimbalza.* Immaginate ora una pallina d'acciaio lasciata cadere dalla posizione di riposo su una superficie rigida che le permette di rimbalzare. Consideriamo ancora l'asse y positivo verso l'alto.

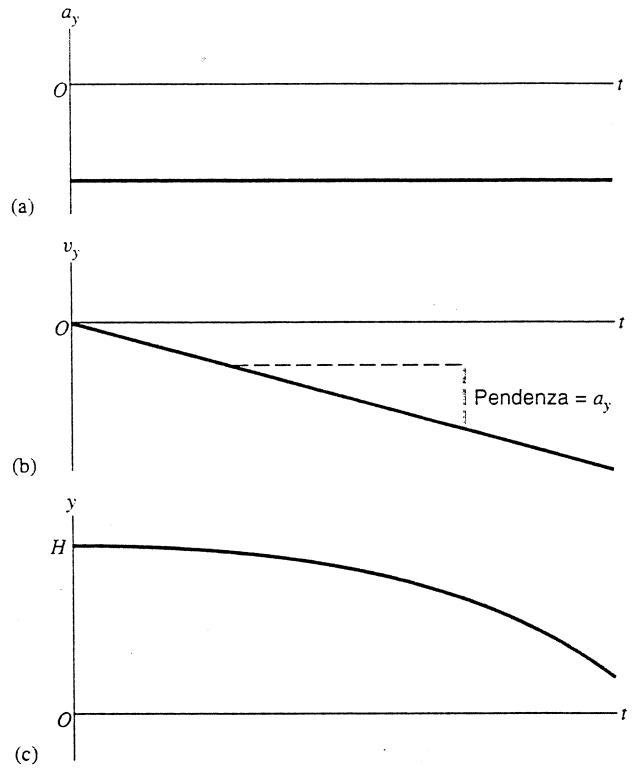


FIGURA 2.18 (a) Accelerazione, (b) velocità e (c) posizione di un corpo che cade da fermo, sottoposto all'accelerazione di gravità, che è orientata verso il basso. L'accelerazione ha valore costante negativo, pari alla pendenza di $v_y(t)$.

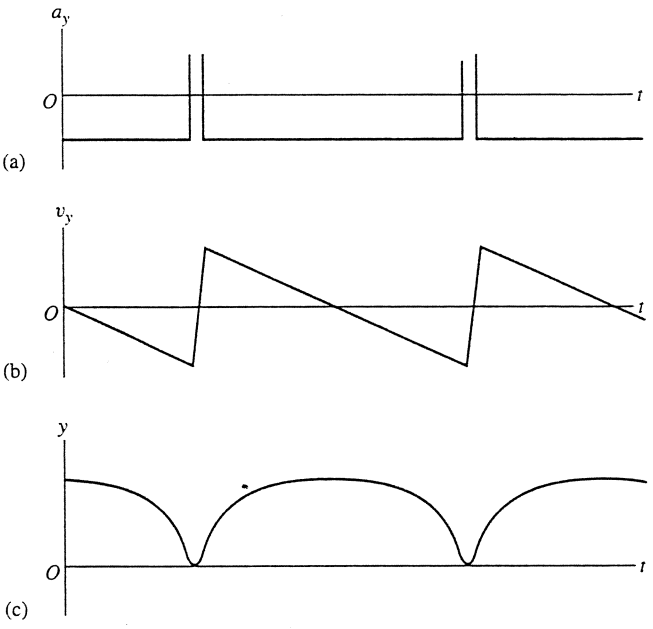


FIGURA 2.19 (a) Accelerazione, (b) velocità e (c) posizione di una pallina d'acciaio che cade a terra rimbalzando su una superficie rigida. Le improvvise e rapide variazioni che si riscontrano nell'andamento di $v_y(t)$, corrispondenti ai brevissimi intervalli di tempo in cui la pallina è a contatto con il terreno, sono state approssimate all'effetto di un'accelerazione positiva costante di valore elevato. Si noti che $y(t)$ raggiunge il valore massimo (punto culminante della pallina) e la tangente alla curva è orizzontale quando $v_y(t)$ si annulla.

Quando la pallina tocca terra, rimbalza verso l'alto e, quantunque nella realtà questo evento non le consenta di mantenere invariato il modulo della velocità a causa dell'incompleta elasticità dei materiali, noi assumeremo che essa nell'impatto inverta semplicemente il verso del vettore velocità e ne mantenga integro il valore assoluto. Nel brevissimo lasso di tempo in cui la pallina è a contatto del terreno, agisce un'intensa accelerazione diretta verso l'alto (positiva) che provoca l'inversione del vettore velocità. Si noti che, sebbene la velocità non cambi il suo modulo né la sua direzione, essa cambia verso: una tale variazione del vettore velocità implica un'accelerazione.

Mentre la pallina risale dopo il rimbalzo, la gravità agisce ancora imprimendo un'accelerazione (costante) diretta verso il basso, che rallenta la pallina fino ad arrestarla e a invertirne nuovamente il senso del moto.

Nella Figura 2.19 sono riportate la posizione, la velocità e l'accelerazione della pallina in funzione del tempo. Anche qui $a_y(t)$ corrisponde alla pendenza di $v_y(t)$, la quale a sua volta corrisponde alla pendenza di $y(t)$.

Anche qui il moto è stato in qualche modo idealizzato: il comportamento reale nella fase di collisione può essere molto più complicato e certamente non sarà caratterizzato da un'accelerazione costante, come qui supposto per semplicità. Il comportamento complessivo apparirebbe comunque molto simile a quello da noi descritto.

Equazioni di cinematica unidimensionale

Le equazioni viste nel Paragrafo 2.3 sono direttamente applicabili al moto in una dimensione, che assumiamo coincidere con l'asse x. Immaginiamo una particella che si trova nel punto x_1 all'istante t_1 e da qui raggiunge il punto x_2 all'istante t_2. Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, lo spostamento della particella è $\Delta x = x_2 - x_1$. Secondo l'Equazione 2.7, la sua velocità media è

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.22)$$

La velocità media ci informa sul comportamento medio del moto durante l'intervallo di tempo Δt. Essa dipende solo dalle posizioni finale e iniziale della particella e non dall'itinerario da essa percorso tra x_1 e x_2. Se assumiamo che Δt sia positivo (cioè, che il tempo scorra nel normale verso cui siamo abituati), in base all'equazione 2.22 e alla regola del prodotto di un vettore per uno scalare, il segno di $\overline{v}_x$ è determinato dal segno di Δx. Se $\overline{v}_x > 0$, significa che in media la coordinata x della posizione è aumentata (la particella si è mossa concordemente al verso dell'asse x). In caso contrario la coordinata x è diminuita, per esempio da $x_1 = +5$ m a $x_2 = +2$ m, oppure da $x_1 = -3$ m a $x_2 = -6$ m (in entrambi i casi $\Delta x = -3$ m).

 ISBN 88-408-1254-7

La velocità istantanea discende dall'Equazione 2.12:

$$v_x = \frac{dx}{dt}. \tag{2.23}$$

Questa equazione ci permette di analizzare gli esempi di moto unidimensionale discussi poc'anzi. Per esempio, per il moto uniforme di Figura 2.15a, se poniamo $x(t) = A + Bt$, avremo $v_x = dx/dt = B$, come è mostrato nella Figura 2.15b.

Per il caso di moto accelerato, in cui la particella si trova ad avere velocità v_{1x} all'istante t_1 e velocità v_{2x} all'istante t_2, l'Equazione 2.14 dà

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2.24}$$

Il segno dell'accelerazione media è determinato dal segno di Δv_x; per esempio, una variazione di velocità da $v_{1x} = -9$ m/s a $v_{2x} = -4$ m/s oppure da $v_{1x} = +4$ m/s a $v_{2x} = +9$ m/s corrisponde in entrambi i casi a $\Delta v_x = +5$ m/s e quindi a un'accelerazione media positiva (concorde a Δv_x), mentre una variazione da $v_{1x} = +9$ m/s a $v_{2x} = +4$ m/s oppure da $v_{1x} = -4$ m/s a $v_{2x} = -9$ m/s comporta in entrambi i casi un Δv_x pari a –5 m/s, un valore di accelerazione media negativo: il vettore accelerazione ha verso discorde da quello di Δv_x.

Come nel caso della velocità media, l'accelerazione media dipende soltanto dalle velocità all'inizio e alla fine dell'intervallo; non dà informazioni su come si svolga il moto durante quest'intervallo. Tutti i moti caratterizzati dal medesimo valore di Δv_x e Δt danno luogo alla medesima accelerazione media.

L'Equazione 2.17 dà l'accelerazione istantanea

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \tag{2.25}$$

Per esempio, nel caso di Figura 2.16a, ponendo $x(t) = A + Bt + Ct^2$, dall'Equazione 2.23 si ottiene $v_x = B + 2Ct$ e dall'Equazione 2.25 si ha $a_x = 2C$.

Le Equazioni 2.23 e 2.25 potranno servirvi per rivedere i diagrammi dei moti riportati nelle Figure 2.17, 2.18 e 2.19, affinché siate sicuri di aver ben appreso come sono legate tra loro la posizione, la velocità e l'accelerazione. Osservate soprattutto come l'accelerazione corrisponda alla pendenza del grafico di $v(t)$. Dal confronto tra le Figure 2.17a e 2.17b noterete che, ove la pendenza di $v_x(t)$ è zero (segmenti orizzontali), $a_x = 0$; ove $v_x(t)$ aumenta (segmenti a inclinazione positiva), a_x è positiva e costante.

L'accelerazione può essere positiva o negativa, indipendentemente dal segno della velocità. Consideriamo per esempio un ascensore che si muove in direzione verticale; assumiamo questa direzione coincidente con l'asse y, con il verso positivo orientato in alto. Se l'ascensore sta salendo e rallentando, v_y è positiva ma a_y è negativa: il vettore velocità è rivolto verso l'alto (verso positivo delle y), mentre il vettore accelerazione è rivolto verso il basso (verso negativo delle y). Quando invece l'ascensore scende e rallenta, v_y è negativa ma a_y è positiva. A casi come questi, in cui velocità e accelerazione hanno versi opposti, nel linguaggio comune si riserva il termine di «decelerazione».

TABELLA 2.1 Il passaggio al limite

Punto iniziale		*Punto finale*		*Velocità media*
x_1 (m)	t_1 (s)	x_2 (m)	t_2 (s)	$\Delta x/\Delta t$ (m/s)
12	1,0	62	3,0	25
12	1,0	45	2,5	22
12	1,0	31	2,0	19
12	1,0	20	1,5	16
12	1,0	13,4	1,1	13,6
12	1,0	12,7	1,05	13,3
12	1,0	12,1	1,01	13,06

Il passaggio al limite

È interessante notare come la velocità media approssimi la velocità istantanea man mano che Δt tende a zero. Come esempio, consideriamo il caso $x(t) = 5{,}0 + 1{,}0t + 6{,}0t^2$, dove i coefficienti sono espressi in unità tali che x risulti in metri e t in secondi. Scegliamo arbitrariamente il punto $x_1 = 12$ m, $t_1 = 1{,}0$ s, e calcoliamo con l'Equazione 2.22 il valore di $\bar{v}_x$ scegliendo una serie di punti x_2, t_2 via via più prossimi a x_1, t_1 per simulare un'operazione di passaggio al limite. Nella Tabella 2.1 sono elencati i risultati dei calcoli. Si osserva che la velocità media approssima pian piano il valore limite di 13 m/s. Per confrontare questo valore limite con la velocità istantanea, ricorriamo all'Equazione 2.23, da cui ricaviamo $v_x(t) = 1{,}0 + 12{,}0t$ che, per $t = 1{,}0$ s, dà proprio $v_x = 13$ m/s.

La Figura 2.20 riporta un'illustrazione grafica di questo processo. Spostando il punto 2 sempre più vicino al punto 1,

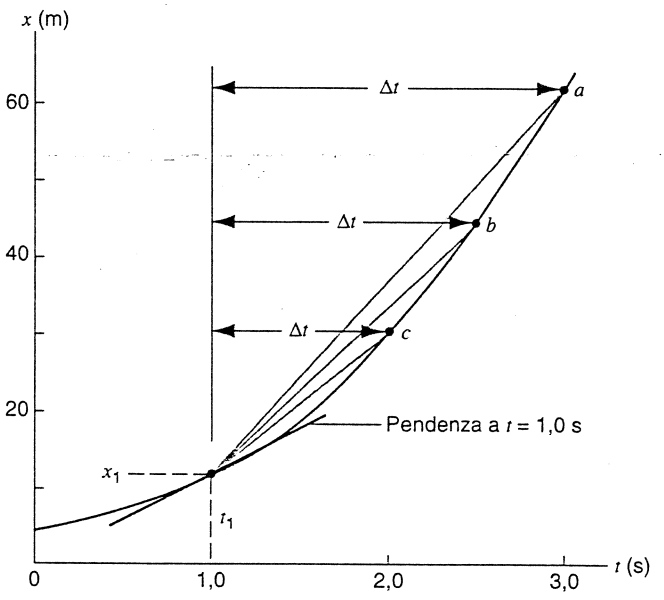


FIGURA 2.20 Mantenendo fisso l'istante t_1 e portando l'istante finale t_2 sempre più vicino a t_1, si riduce via via l'intervallo Δt. Al limite, l'intervallo tende a zero e la corda viene a coincidere con la tangente. I tre valori di x_2 e t_2 qui contrassegnati con a, b e c corrispondono ai valori elencati nelle prime tre righe della Tabella 2.1.

il segmento che unisce i due punti, la cui pendenza rappresenta la velocità media nell'intervallo, tende a diventare parallelo alla tangente passante per il punto 1. Ciò significa che la velocità media approssima al limite la velocità istantanea, come emerge dai calcoli matematici.

PROBLEMA SVOLTO 2.5 Con la vostra auto partite da casa e percorrete una strada rettilinea per 5,2 km alla velocità di 43 km/h, quando improvvisamente restate senza benzina. A piedi raggiungete il distributore più vicino, distante 1,2 km, camminando per 27 min. Qual è stata la vostra velocità media sul percorso completo casa-distributore?

Soluzione Conoscendo sia Δx, spostamento totale, sia Δt, intervallo di tempo totale, l'Equazione 2.22 vi dà la risposta. Le due quantità sono rispettivamente

$$\Delta x = 5{,}2 \text{ km} + 1{,}2 \text{ km} = 6{,}4 \text{ km}$$

e

$$\Delta t = \frac{5{,}2 \text{ km}}{43 \text{ km/h}} + 27 \text{ min} =$$

$$= 7{,}3 \text{ min} + 27 \text{ min} = 34 \text{ min} = 0{,}57 \text{ h}.$$

Dall'Equazione 2.22 otteniamo dunque

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6{,}4 \text{ km}}{0{,}57 \text{ h}} = 11{,}2 \text{ km/h}.$$

Il grafico $x(t)$ riprodotto nella Figura 2.21 ci aiuta a visualizzare il problema. Il punto O e il punto P rappresentano la posizione iniziale e quella finale e definiscono l'intervallo su cui dobbiamo calcolare la velocità media, quantità rappresentata dalla pendenza della retta che li unisce.

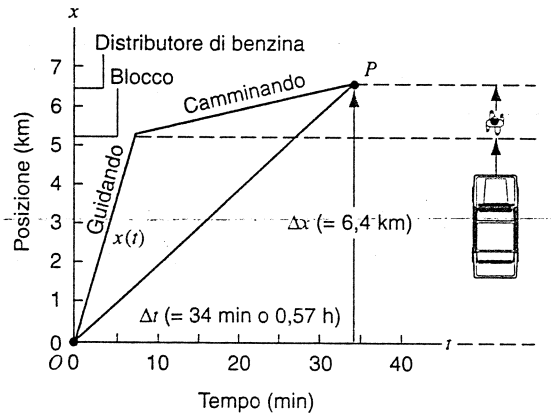


FIGURA 2.21 Problema svolto 2.5. Le linee marcate «Guidando» e «Camminando» descrivono il moto a diverse velocità costanti per i due tratti del percorso. La pendenza della retta OP rappresenta la velocità vettoriale media per tutto il viaggio.

PROBLEMA SVOLTO 2.6 La Figura 2.22a mostra le caratteristiche cinematiche in sei istanti diversi di una particella in moto lungo l'asse x. Al tempo $t = 0$ si trova nella posizione $x = +1{,}00$ m; al tempo $t = 2{,}5$ s la troviamo ferma nel punto $x = +5{,}00$ m; a $t = 4{,}0$ s è ritornata nella posizione $x = 1{,}4$ m. Nella Figura 2.22b è tracciato il grafico di x in funzione di t, men-

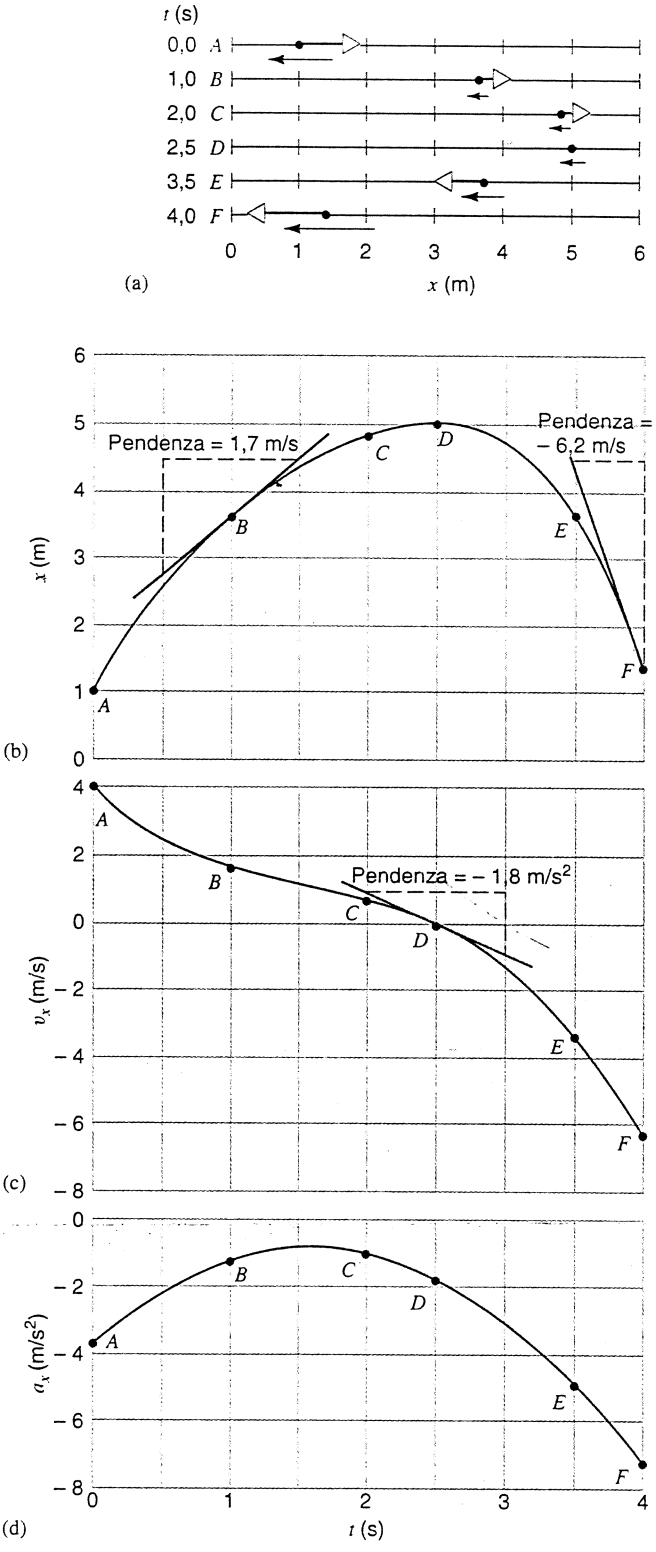


FIGURA 2.22 Problema svolto 2.6. (a) Sei «foto istantanee» di una particella in moto lungo l'asse x. Le frecce applicate ai punti che rappresentano la particella indicano le sue velocità istantanee, mentre le freccette sotto i punti indicano le accelerazioni istantanee. (b) Grafico che descrive la funzione $x(t)$. I sei punti da A a F corrispondono alle sei «istantanee». (c) Grafico di $v_x(t)$. (d) Grafico di $a_x(t)$.

 ISBN 88-408-1254-7

tre nelle successive figure sono rappresentate la velocità e l'accelerazione della particella. (a) Trovare la velocità media per gli intervalli AD e DF. (b) Valutare la pendenza della curva $x(t)$ nei punti B ed F confrontando poi i risultati coi rispettivi punti sulla curva $v_x(t)$. (c) Valutare la pendenza della curva $v_x(t)$ nel punto D confrontandola col rispettivo punto sulla curva $a_x(t)$.

Soluzione (a) Dall'Equazione 2.22 abbiamo

$$AD: \quad \bar{v}_x = \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} = \frac{5{,}0\text{ m} - 1{,}0\text{ m}}{2{,}5\text{ s} - 0{,}0\text{ s}} = +1{,}6\text{ m/s}$$

$$DF: \quad \bar{v}_x = \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D} = \frac{1{,}4\text{ m} - 5{,}0\text{ m}}{4{,}0\text{ s} - 2{,}5\text{ s}} = -2{,}4\text{ m/s}.$$

Nell'intervallo AD il valore positivo di $\bar{v}_x$ indica che, in media, la particella procede nel verso positivo delle x (verso destra nella figura). Viceversa, nell'intervallo DF il segno negativo indica che la particella si muove in senso opposto (verso sinistra).

(b) Analizzando le tangenti alla curva $x(t)$ nei punti B ed F deduciamo quanto segue:

$$\text{punto } B: \quad \text{pendenza} = \frac{4{,}5\text{ m} - 2{,}8\text{ m}}{1{,}5\text{ s} - 0{,}5\text{ s}} = +1{,}7\text{ m/s}$$

$$\text{punto } F: \quad \text{pendenza} = \frac{1{,}4\text{ m} - 4{,}5\text{ m}}{4{,}0\text{ s} - 3{,}5\text{ s}} = -6{,}2\text{ m/s}.$$

Dal grafico $v_x(t)$ riportato in Figura 2.22c abbiamo dedotto che $v_x = +1{,}7$ m/s nel punto B e $v_x = -6{,}2$ m/s nel punto F, coerentemente con le rispettive pendenze.

(c) In base all'Equazione 2.24 otteniamo

$$AD: \quad a_x = \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A} = \frac{0{,}0\text{ m/s} - 4{,}0\text{ m/s}}{2{,}5\text{ s} - 0{,}0\text{ s}} = -1{,}6\text{ m/s}^2$$

$$AF: \quad a_x = \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A} = \frac{-6{,}2\text{ m/s} - 4{,}0\text{ m/s}}{4{,}0\text{ s} - 0{,}0\text{ s}} = -2{,}6\text{ m/s}^2.$$

(d) dalla tangente nel punto D alla curva $v_x(t)$ possiamo ricavare

$$\text{pendenza} = \frac{-0{,}9\text{ m/s} - 0{,}9\text{ m/s}}{3{,}0\text{ s} - 2{,}0\text{ s}} = -1{,}8\text{ m/s}^2.$$

Sul grafico che descrive $a_x(t)$ in corrispondenza del punto D si ha $a_x = -1{,}8$ m/s^2, e dunque $a_x = dv_x/dt$. Dall'esame della curva $v_x(t)$ di Figura 2.22c si vede che la pendenza è negativa ovunque e quindi $a_x(t)$ dev'essere pure negativa. La Figura 2.22d rende esplicito questo concetto.

2.5 MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Non è raro incontrare situazioni in cui il moto è animato da accelerazione costante o quasi costante, moto che si definisce uniformemente accelerato: tipici sono gli esempi già citati di corpi che cadono o di automobili che frenano uniformemente. Ci occuperemo in questo paragrafo di trovare le relazioni che descrivono questo caso particolare della cinematica in cui l'accelerazione è costante. Non dimenticate che queste equazioni si applicano solo al caso di accelerazione uniforme e quindi *non* a sistemi quali un pendolo che oscilla, un razzo lanciato in orbita terrestre o una goccia di pioggia che cade ostacolata dalla resistenza dell'aria. Successivamente affronteremo anche questi casi.

Supponiamo che il moto si svolga lungo l'asse x. Chiamiamo a_x la componente dell'accelerazione lungo quest'asse; a_x può assumere entrambi i segni. La velocità iniziale (al tempo $t = 0$) della particella sia v_{0x} e la sua posizione iniziale sia x_0: entrambe queste sono le componenti x dei rispettivi vettori e possono essere sia positive sia negative, indipendentemente l'una dall'altra. In un generico istante successivo t la particella avrà velocità v_x e occuperà la posizione x. Ci ripromettiamo di trovare questi valori in funzione del tempo t.

Se l'accelerazione è costante (Figura 2.23a), le accelerazioni media e istantanea coincidono e l'Equazione 2.14 ci permette quindi di scrivere

$$a_x = \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0}$$

che, risolta rispetto a v_x, dà

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \tag{2.26}$$

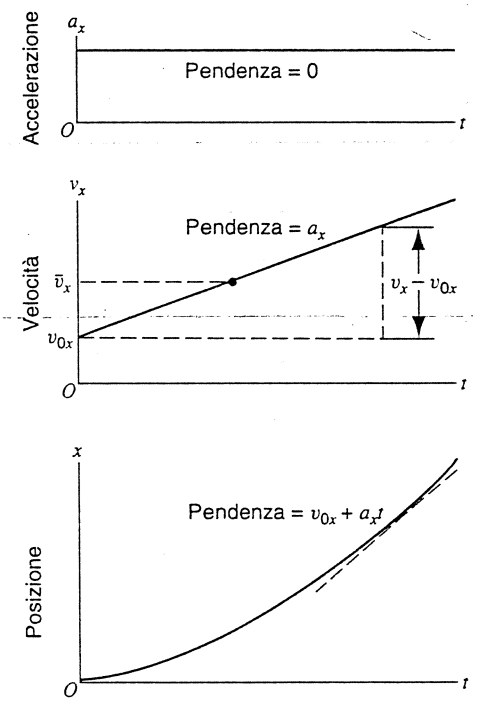


FIGURA 2.23 (a) Accelerazione costante di una particella, uguale alla pendenza (costante) della curva $v_x(t)$. (b) La velocità $v_x(t)$ è data in ogni punto dalla pendenza della curva $x(t)$. È indicata la velocità media $\bar{v}_x$, che nel caso di accelerazione costante è pari alla media tra v_x e v_{0x}. (c) Posizione $x(t)$ di una particella animata da accelerazione costante. La curva è tracciata ponendo la posizione iniziale $x_0 = 0$.

Questo importante risultato ci consente di conoscere la velocità in qualunque momento, ma si applica soltanto quando l'*accelerazione è costante*. L'Equazione 2.26 esprime la velocità in funzione del tempo, ciò che potremmo scrivere come $v_x(t)$, ma che normalmente per semplicità scriviamo v_x. Osservate che la forma della (2.26) è del tipo $y = mx + b$, che descrive una retta. Il grafico di v_x in funzione di t è dunque una retta di coefficiente angolare a_x e intercetta v_{0x} (il valore di v_x quando $t = 0$). Nella Figura 2.23b vediamo tracciata questa retta. È evidente che l'Equazione 2.26 soddisfa l'Equazione 2.25 $a_x = dv_x/dt$.

Consideriamo ora come varia la posizione in funzione del tempo. In questo caso speciale, in cui $v_x(t)$ è rappresentata da una retta, la velocità media in qualsiasi intervallo (come definita dall'Equazione 2.22) è uguale alla media tra le velocità iniziale e finale dell'intervallo considerato. Per l'intervallo da 0 a t si ha

$$\bar{v}_x = \tfrac{1}{2}(v_x + v_{0x}). \qquad (2.27)$$

Possiamo constatare l'esattezza di questa affermazione osservando il grafico di Figura 2.23b. Combinando le Equazioni 2.22, 2.26 e 2.27, eliminando v_x e risolvendo rispetto a x, si ottiene

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2, \qquad (2.28)$$

equazione che ci permette di conoscere la posizione in qualunque istante. Possiamo anche scriverla in modo da esplicitare lo spostamento $x - x_0$ (variazione di posizione subita complessivamente nell'intervallo di tempo considerato). La Figura 2.23c riporta il grafico di x in funzione di t, che descrive una parabola. Le Equazioni 2.27 e 2.28 sono valide *solo nel caso di accelerazione costante*.

La posizione è legata alla velocità istantanea dalla relazione $v_x = dx/dt$, condizione soddisfatta dalla (2.28), come si può dimostrare:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2) = v_{0x} + a_x t = v_x.$$

Chi abbia nozioni di calcolo integrale riconoscerà che, come l'Equazione 2.26 può essere ricavata dalla (2.28) per derivazione, così per integrazione si può ottenere la (2.28) dalla (2.26). Lo dimostreremo alla fine del paragrafo.

Le Equazioni 2.26 e 2.28 sono le relazioni base per l'analisi dei moti uniformemente accelerati. Una volta note le *condizioni iniziali*, cioè i valori iniziali di posizione x_0 e velocità v_0, conoscendo l'accelerazione (che vedremo essere determinata dall'interazione tra particella e ambiente) si possono prevedere posizione e velocità in qualsiasi istante t.

Non sfugga che in queste equazioni, v_x e x rappresentano le componenti secondo l'asse x dei vettori velocità e posizione. Come in tutti problemi vettoriali siamo sempre liberi di disporre gli assi coordinati e la loro orientazione a nostro piacimento. Nei problemi del tipo qui esaminato occorre scegliere l'origine degli assi (che spesso facciamo coincidere per semplicità col punto x_0), la direzione e il verso dell'asse x: tutti i vettori spostamento, velocità e accelerazione di verso concorde saranno positivi, altrimenti saranno negativi. Una volta operata la scelta degli assi coordinati, occorre mantenerla per tutto lo svolgimento del problema.

Integrali delle equazioni del moto (facoltativo)*

Si possono ottenere le Equazioni 2.26 e 2.28, equazioni fondamentali del moto uniformemente accelerato, anche con metodi di calcolo integrale. Cominciamo dalla definizione di accelerazione $a_x = dv_x/dt$, che si può scrivere come

$$dv_x = a_x dt.$$

Integriamo entrambi i membri dell'equazione:

$$\int dv_x = \int a_x dt = a_x \int dt,$$

ove l'ultimo passaggio è legittimo perché l'accelerazione è costante. Sviluppando gli integrali si ottiene

$$v_x = a_x t + C,$$

in cui C è la costante d'integrazione, che possiamo determinare in base a una delle condizioni iniziali: per $t = 0$, la velocità è v_{0x}. Introducendo questi valori nella precedente espressione, si ottiene $C = v_{0x}$, e quindi l'espressione si riduce a $v_x = v_{0x} + a_x t$, in accordo con l'Equazione 2.26.

Per trovare $x(t)$ partiamo dalla definizione di velocità, $v_x = dx/dt$, e scriviamola come

$$dx = v_x dt.$$

Sostituiamo ora v_x con l'espressione data dalla (2.26) e integriamo entrambi i membri:

$$\int dx = \int (v_{0x} + a_x t)\, dt = v_{0x} \int dt + a_x \int t\, dt.$$

Sviluppando gli integrali si ottiene

$$x = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 + C',$$

in cui C' è un'altra costante d'integrazione. Per stabilirne il valore introduciamo la seconda condizione iniziale: per $t = 0$, $x = x_0$. Sostituiti i valori, si trova $C' = x_0$, da cui si ricava l'espressione di $x(t)$ già data dalla (2.28).

PROBLEMA SVOLTO 2.7 Una particella alfa (nucleo di elio) si muove entro il tubo rettilineo a vuoto lungo 2,0 m di un acceleratore di particelle. Essa entra nel tubo all'istante $t = 0$ con velocità di $9{,}5 \cdot 10^5$ m/s ed emerge dall'altra estremità al tempo $t = 8{,}0 \cdot 10^{-7}$ s. (a) Qual è l'accelerazione della particella, supposta costante? (b) A che velocità esce dal tubo?

Soluzione (a) Scegliamo l'asse x parallelo al tubo con verso concorde a quello del moto della particella. Fissiamo l'origine all'in-

*Gli studenti che non hanno ancora familiarità col calcolo integrale possono posporre la lettura di questo paragrafo.

 ISBN 88-408-1254-7

gresso del tubo di modo che $x_0 = 0$. Risolvendo l'Equazione 2.28 rispetto all'accelerazione si trova a_x:

$$a_x = \frac{x - v_{0x}t}{\frac{1}{2}t^2} = \\ = \frac{2{,}0\text{ m} - (9{,}5 \cdot 10^5\text{ m/s})(8{,}0 \cdot 10^{-7}\text{ s})}{0{,}5(8{,}0 \cdot 10^{-7}\text{ s})^2} = \\ = +3{,}9 \cdot 10^{12}\text{ m/s}^2.$$

Il segno positivo ci garantisce che la particella aumenta la sua velocità (positiva anch'essa) durante il transito nel tubo.

(b) La velocità di uscita si trova con l'Equazione 2.26:

$$v_x = v_{0x} + a_x t = \\ = (9{,}5 \cdot 10^5\text{ m/s}) + (3{,}9 \cdot 10^{12}\text{ m/s}^2)(8{,}0 \cdot 10^{-7}\text{ s}) = \\ = +4{,}1 \cdot 10^6\text{ m/s}.$$

La velocità è aumentata, come ci aspettavamo sapendo che l'accelerazione è concorde.

PROBLEMA SVOLTO 2.8 Con la vostra auto avete rallentato dalla velocità di 23,6 m/s alla velocità di 12,5 m/s, mentre avete percorso una distanza di 105 m. (a) Quanto tempo ha richiesto questa manovra? (b) Qual è stato il valore dell'accelerazione supposta costante? (c) Continuando a frenare con la stessa accelerazione, quanto tempo ancora vi servirà per arrestarvi e quanto ulteriore spazio percorrerete?

Soluzione Scegliamo come asse coordinato la direzione di marcia dell'auto e come verso positivo quello del suo avanzamento. Poniamo l'origine $x_0 = 0$ in corrispondenza del punto in cui inizia il rallentamento. All'istante iniziale $t = 0$, abbiamo dunque $v_{0x} = +23{,}6$ m/s; all'istante finale t, la velocità e la posizione finali valgono rispettivamente $v_x = +12{,}5$ m/s e $x = 105$ m. Grazie all'accelerazione costante, la velocità media su tutto l'intervallo è pari al valor medio tra la velocità iniziale e quella finale, secondo l'Equazione 2.27:

$$\bar{v}_x = \tfrac{1}{2}(v_x + v_{0x}) = \tfrac{1}{2}(12{,}5\text{ m/s} + 23{,}6\text{ m/s}) = 18{,}05\text{ m/s}.$$

La velocità media si può anche esprimere come $\bar{v}_x = \Delta x/\Delta t$. Ponendo $\Delta x = 105$, $\Delta t = t - 0$, e risolvendo rispetto a t, si ottiene

$$t = \frac{\Delta x}{\bar{v}_x} = \frac{105\text{ m}}{18{,}05\text{ m/s}} = 5{,}81\text{ s}.$$

(b) Con l'Equazione 2.26 troviamo ora l'accelerazione:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{12{,}5\text{ m/s} - 23{,}6\text{ m/s}}{5{,}81\text{ s}} = -1{,}91\text{ m/s}^2.$$

Il segno è negativo; ciò significa che, come ci aspettavamo, la velocità (di segno positivo) va diminuendo.

(c) Conoscendo il valore dell'accelerazione possiamo trovare il tempo totale necessario per l'arresto. Risolvendo l'Equazione 2.26 rispetto a t, abbiamo

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{0 - 23{,}6\text{ m/s}}{-1{,}91\text{ m/s}^2} = 12{,}4\text{ s}.$$

La distanza totale percorsa in questo intervallo di tempo si trova con l'ausilio dell'Equazione 2.28, ponendo $x_0 = 0$:

$$x = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = \\ = (23{,}6\text{ m/s})(12{,}4\text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-1{,}91\text{ m/s}^2)(12{,}4\text{ s})^2 = 146\text{ m}.$$

Dall'istante in cui è cominciato il rallentamento all'istante di arresto l'auto ha percorso una distanza totale di 146 m in un tempo complessivo di 12,4 s. La prima fase di rallentamento fino alla velocità di 12,5 m/s ha richiesto uno spazio di 105 m e un tempo di 5,8 s. Di conseguenza da quest'ultimo momento fino all'arresto la distanza percorsa è di 146 m − 105 m = 41 m e il tempo trascorso è di 12,4 s − 5,8 s = 6,6 s.

2.6 CORPI IN CADUTA LIBERA

Il più comune esempio di moto uniformemente accelerato (almeno idealmente) è quello di un corpo che cade liberamente in prossimità della superficie terrestre. Potendo trascurare la resistenza dell'aria, si assiste a un fenomeno sorprendente: in qualsiasi luogo vicino alla superficie terrestre, *tutti i corpi, senza riguardo alla loro forma, dimensione o sostanza, cadono sottoposti alla medesima accelerazione.* Questa accelerazione, designata col simbolo g, prende il nome di *accelerazione di gravità*. Per quanto questa accelerazione dipenda dalla distanza dal centro della Terra (come vedremo nel Capitolo 14), se lo spazio di caduta è modesto rispetto al raggio della Terra (6400 km), possiamo considerare l'accelerazione costante per tutta la caduta.

In prossimità della superficie terrestre il valore di g è di circa 9,8 m/s^2, valore che useremo nel nostro testo salvo che sia altrimenti specificato. La direzione del vettore accelerazione è la direzione verticale e il suo verso è quello che noi definiamo con la locuzione «verso il basso».

Sebbene parliamo sempre di corpi che *cadono*, anche i corpi che, svincolati, si muovono verso l'alto sono soggetti alla medesima accelerazione di gravità (in modulo, direzione *e* verso). Ciò significa che, indipendentemente dal fatto che una particella stia salendo o scendendo, se si trova in stato *libero*, è sempre soggetta, per effetto dell'attrazione terrestre, a un'accelerazione di gravità orientata verso il basso.

Il valore esatto dell'accelerazione di gravità varia con la latitudine e con l'altitudine. Esistono inoltre significative variazioni in dipendenza della disuniformità della massa della crosta terrestre. Ne discuteremo nel Capitolo 14.

Al moto di caduta libera si possono applicare le equazioni per il caso di accelerazione costante (Equazioni 2.26 e 2.28). A questo scopo introduciamo però due piccole modifiche formali. (1) Assumiamo come asse coordinato la direzione verticale y e fissiamone il verso positivo orientato in alto. Nel Capitolo 4, quando tratteremo i moti bidimensionali, assumeremo l'asse x in direzione orizzontale. (2) Attribuiamo all'accelerazione costante a il simbolo $-g$, poiché la scelta del verso positivo dell'asse implica che l'accelerazione, orientata verso il basso, abbia segno negativo. Ponendo dunque $a_y = -g$, consegue che g ha sempre valore numerico positivo.

Le due equazioni del moto uniformemente accelerato diventano dunque, per il moto di caduta libera:

$$v_y = v_{0y} - gt, \qquad (2.29)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (2.30)$$

Così come le Equazioni 2.26 e 2.28 sono servite per affrontare i problemi di moto uniformemente accelerato, le Equazioni 2.29 e 2.30 sono le relazioni fondamentali per il moto di caduta libera.

PROBLEMA SVOLTO 2.9 Un corpo lasciato andare da fermo cade liberamente nel vuoto. Determinare la sua posizione e la sua velocità dopo 1,0 s, 2,0 s, 3,0 s e 4,0 s.

Soluzione Fissiamo l'origine nel punto di partenza, in modo che sia $y_0 = 0$. Sono note la velocità iniziale (zero) e l'accelerazione. Ci viene dato il tempo. Con l'Equazione 2.30, ponendo $y_0 = 0$ e $v_{0y} = 0$, possiamo trovare la posizione:

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 .$$

Introducendo il valore $t = 1{,}0$ s, otteniamo

$$y = -\tfrac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}0\ \text{s})^2 = -4{,}9\ \text{m} .$$

L'equazione 2.29, sempre ponendo $v_{0y} = 0$, ci dà la velocità:

$$v_y = -gt = -(9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}0\ \text{s}) = -9{,}8\ \text{m/s} .$$

Dopo 1,0 s di caduta, il corpo si trova, in valore assoluto, 4,9 m *sotto* (y è negativa) il punto di partenza e la sua velocità, orientata verso il *basso* (v_y è negativa), ha modulo 9,8 m/s. Allo stesso modo possiamo calcolare posizione e velocità del corpo agli istanti $t = 2{,}0$ s, 3,0 s e 4,0 s; i risultati sono riportati nella Figura 2.24.

Si noti che in ogni intervallo di 1 s la velocità cambia di $-9{,}8$ m/s, e che la velocità media durante ciascuno di questi intervalli (spostamento effettuato nell'intervallo diviso per l'intervallo di tempo) è pari alla media tra le velocità iniziale e finale relative all'intervallo considerato, come richiede l'Equazione 2.27.

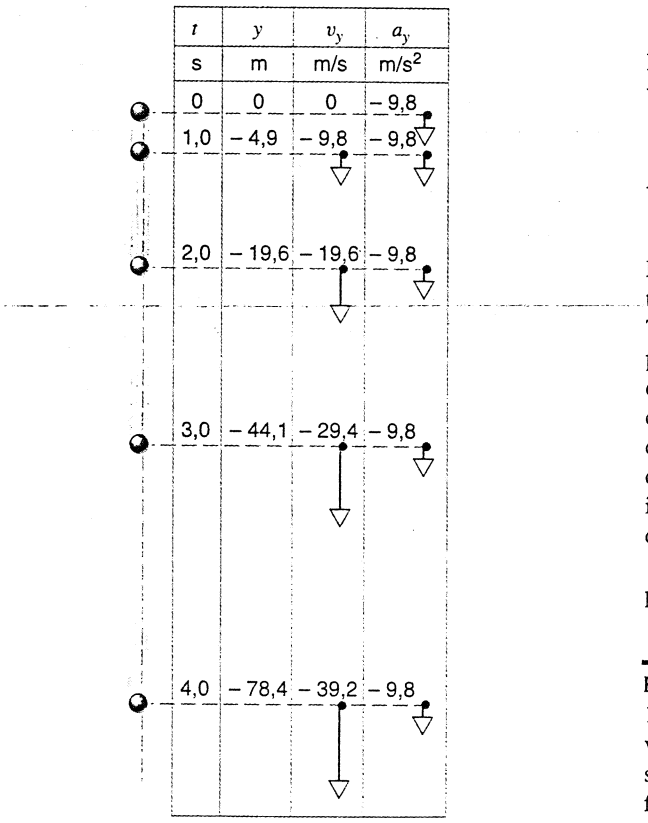


FIGURA 2.24 Problema svolto 2.9. Altezza, velocità e accelerazione di un corpo in caduta libera.

PROBLEMA SVOLTO 2.10 Lanciamo da terra verticalmente verso l'alto una palla imprimendole una velocità iniziale di 25,2 m/s. (a) Quanto tempo impiega per raggiungere il punto più alto durante il suo moto? (b) Che altezza massima raggiunge? (c) In quali istanti si troverà all'altezza di 27,0 m sopra il terreno?

Soluzione (a) Quando raggiunge il culmine del suo percorso, la palla ha velocità nulla. Conosciamo quindi v_{0y} e $v_y (= 0)$. Giacché dobbiamo trovare t, ricorriamo all'Equazione 2.29 risolta rispetto a t:

$$t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{25{,}2\ \text{m/s} - 0}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 2{,}57\ \text{s}.$$

(b) Ora che conosciamo il tempo necessario a raggiungere la posizione culminante, conoscendo le altre variabili, l'Equazione 2.30, posto $y_0 = 0$, ci consente di trovare y:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 =$$
$$= (25{,}2\ \text{m/s})(2{,}57\ \text{s}) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\ \text{m/s}^2)(2{,}57\ \text{s})^2 = 32{,}4\ \text{m}.$$

(c) Essendo ora t l'unica incognita, l'Equazione 2.30 è di nuovo utile e, inserendo il valore $y_0 = 0$, va risolta rispetto a t come un'equazione di secondo grado:

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y = 0 ,$$

che, introducendo i valori numerici, diventa

$$(4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2 - (25{,}2\ \text{m/s})t + 27{,}0\ \text{m} = 0 .$$

Risolvendola troviamo $t = 1{,}52$ s e $t = 3{,}62$ s. Nel primo caso la velocità della palla è

$$v_y = v_{0y} - gt = 25{,}2\ \text{m/s} - (9{,}8\ \text{m/s}^2)(1{,}52\ \text{s}) = 10{,}3\ \text{m/s} .$$

All'istante $t = 3{,}62$ s, invece, la velocità è

$$v_y = v_{0y} - gt = 25{,}2\ \text{m/s} - (9{,}8\ \text{m/s}^2)(3{,}62\ \text{s}) = -10{,}3\ \text{m/s} .$$

Le due velocità hanno modulo identico (e anche direzione identica), ma sono di segno opposto e quindi presentano versi opposti. Trascurando la resistenza dell'aria, dovreste essere convinti che la palla, per salire al punto culminante e ridiscendere di un'uguale distanza, impiega due intervalli di tempo uguali, assumendo velocità uguale in modulo quando passa per uno stesso punto. Si noti che la risposta alla parte (a), $t = 2{,}57$ s, è il valore intermedio tra i due valori trovati nella risposta (c). Sapete spiegare perché? Siete in grado di prevedere in termini qualitativi quale sarà l'effetto della resistenza dell'aria sui tempi di salita e di discesa?

Nella Figura 2.25 sono elencati i valori relativi al moto della palla. Si noti la simmetria tra la fase di ascesa e quella di discesa.

PROBLEMA SVOLTO 2.11 Da una base sottomarina posta 125 m sotto il livello dell'acqua si lancia un missile in direzione verticale verso l'alto, con accelerazione non nota ma supposta costante (un'accelerazione frutto della combinazione di varie forze: forza di gravità, spinta dei motori, resistenza dell'acqua e forza di galleggiamento di Archimede). Il missile raggiunge la superficie marina in 2,15 s. In questo istante i suoi motori si arrestano (per ostacolarne la localizzazione) e il missile prosegue la sua corsa in

 ISBN 88-408-1254-7

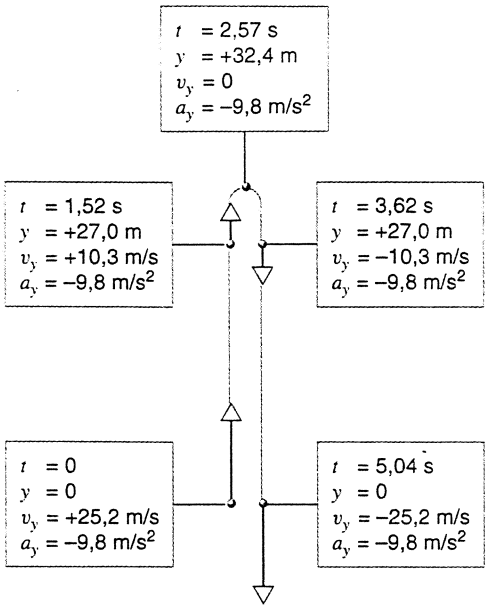


FIGURA 2.25 Problema svolto 2.10. Altezza, velocità e accelerazione in vari punti del moto.

atmosfera verso l'alto. Che altitudine massima raggiunge (trascurando gli effetti di emersione e di resistenza dell'aria)?

Soluzione Se conoscessimo la velocità iniziale di emersione dall'acqua, potremmo analizzare il moto del missile in aria come quello di un comune corpo in caduta libera. Cerchiamo dunque il modo di ottenere questa velocità iniziale della fase in aria esaminando la fase di moto subacqueo e calcolandone la velocità di emersione. Le due fasi vanno trattate separatamente perché caratterizzate ciascuna da un'accelerazione diversa.

Nella prima fase abbiamo un moto con accelerazione costante ma non di caduta libera. Possiamo trovare l'accelerazione applicando l'Equazione 2.28 in cui, sostituita y a x, poniamo $y - y_0 = 125$ m e $v_{0y} = 0$:

$$a_y = \frac{2(y - y_0)}{t^2} = \frac{2(125\text{ m})}{(2{,}15\text{ s})^2} = 54{,}1\text{ m/s}^2.$$

Ora con l'Equazione 2.26 (sempre con y al posto di x) troviamo la velocità di emersione:

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (54{,}1\text{ m/s}^2)(2{,}15\text{ s}) = 116\text{ m/s}.$$

La velocità alla superficie marina è dunque di 116 m/s, orientata verticalmente verso l'alto. Analizziamo ora la seconda fase del volo, quella di caduta libera effettuata in aria, in cui poniamo il valore trovato come velocità *iniziale* v_{0y}. Quando il missile raggiunge il culmine della traiettoria la sua velocità è nulla ($v_y = 0$) e l'Equazione 2.29 ci consente di trovare l'istante in cui ciò avviene:

$$t = -\frac{v_y - v_{0y}}{g} = -\frac{(0 - 116\text{ m/s})}{9{,}8\text{ m/s}^2} = 11{,}8\text{ s}.$$

Ponendo $y_0 = 0$, nell'Equazione 2.30 troviamo l'altezza del punto culminante:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = (116\text{ m/s})(11{,}8\text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)(11{,}8\text{ s})^2 = 687\text{ m}.$$

Vi sarà utile, per accertarvi della vostra comprensione, disegnare i grafici di $y(t)$, $v_y(t)$ e $a_y(t)$ in maniera analoga alla Figura 2.17. Cercate di rendervi conto di quali variabili subiscono un andamento continuo con curve smussate in luogo delle variazioni brusche che l'idealizzazione di questo problema comporta. Come si discosterebbe da questo schema il moto di un missile vero?

Misura dell'accelerazione di gravità

Filosofi e scienziati si sono sempre interessati alla natura del moto di un corpo in caduta. Aristotele (384-322 a.C.) pensava che quanto più un oggetto è pesante tanto più rapidamente cade. Per un paio di millenni questa fu la concezione prevalente fino a che Galileo (1564-1642) avanzò l'interpretazione esatta, e cioè che, in assenza di aria, gli oggetti cadono tutti con la stessa velocità. Possiamo verificare quest'asserzione lasciando cadere nel vuoto una piuma assieme a un pallino di piombo: cadono insieme. Nel 1971 l'astronauta David Scott mostrò che sulla Luna (priva di atmosfera) una piuma e un martello giungono a terra praticamente assieme.

Ai tempi di Galileo non c'erano mezzi per creare il vuoto, né egli aveva a disposizione apparecchi di misura del tempo sufficientemente precisi. Appartiene probabilmente più alla leggenda che alla storia la figura di Galileo che lascia cadere vari oggetti dall'alto della torre di Pisa: la resistenza dell'aria da un'altezza simile falsa considerevolmente le misure se non si pone attenzione alle forme e dimensioni degli oggetti. Galileo al contrario esperimentò la caduta con accelerazioni più modeste, usando sfere su piani inclinati anziché lasciando cadere oggetti: ciò facilita le misure dei tempi, che risultano maggiori, e riduce gli effetti di resistenza dell'aria. Egli dimostrò che in uguali intervalli di tempo la sfera percorre distanze proporzionali a numeri interi dispari, 1, 3, 5, 7, ... La distanza totale percorsa in intervalli consecutivi è dunque proporzionale a 1,1 + 3 (= 4), 1 + 3 + 5 (= 9), 1 + 3 + 5 + 7 (= 16), eccetera. Concluse che la distanza aumenta col *quadrato* del tempo, legge che noi sappiamo valere *solo* in caso di accelerazione costante. Verificò inoltre che i medesimi risultati si ottengono qualunque sia la massa della sfera e che quindi, come diciamo oggi, l'accelerazione di gravità è indipendente dalla massa del corpo.

La misura di g oggigiorno è un classico esperimento di laboratorio didattico. Misurando il tempo di caduta su una distanza di un metro o due (tempi dell'ordine di 0,5 s) si può determinare il valore di g entro un errore di pochi percento. Mediante un pendolo anche rudimentale (altro modo di rallentare il fenomeno come l'uso del piano inclinato) e misurando il tempo di un'oscillazione (come vedremo nel Capitolo 17), la misura di g può raggiungere la precisione di 0,1 %: una precisione sufficiente a osservare le differenze di g che sussistono tra il livello del mare e l'alta montagna (3000 m) o tra l'equatore e i poli.

Con apparecchi a pendolo progettati con cura si può elevare questa precisione fino a una parte su 10^6, sufficiente per rilevare le differenze di g tra due piani adiacenti di un edificio. Per ottenere precisioni ancora maggiori, gli sperimentatori hanno raffinato i dispositivi di caduta. Lasciando cadere il corpo nel vuoto, con un raggio laser riflesso dal

corpo si possono misurare le distanze di caduta con elevata precisione; accoppiando poi la misura del tempo con orologi atomici si giunge a precisioni nella misura di g dell'ordine di 10^{-9}, sufficienti a evidenziare differenze su una distanza verticale di 1 cm. Un tale misuratore di gravità è in grado di rivelare gli effetti gravitazionali dovuti alla massa dello sperimentatore alla distanza di 1 m dall'apparecchiatura!

Misuratori gravimetrici a caduta di questo tipo sono oggi disponibili in commercio. In un modello recente il corpo in caduta libera viene proiettato verso l'alto in un tubo a vuoto finché ricade, eseguendo le misure secondo la traccia del Problema 33. Nella Figura 2.26 si vede una versione portatile di questo tipo di apparecchio.

Misure accurate dell'accelerazione di gravità consentono studi dettagliati della gravità terrestre, con importanti conseguenze pratiche. Per esempio, le variazioni di g da un luogo all'altro possono rivelare la presenza di giacimenti minerari o petroliferi, così come possono essere utili negli studi di tettonica e dei fenomeni sismici. La conoscenza delle piccole variazioni di g dovute alle irregolarità della crosta terrestre consentono calcoli accurati nelle traiettorie dei missili balistici e dei satelliti artificiali. Oltre a ciò le misure precise di g possono portare supporto sperimentale alle teorie della gravitazione, una delle forze fondamentali dell'Universo.



FIGURA 2.26 Gravimetro ad ascesa e ricaduta. I suoi impieghi comprendono la ricerca geofisica, le prospezioni mineralogiche e petrolifere, la navigazione inerziale.
Foto concessa dal Dr. T.M. Niebauer della Micro-g Solutions (http://www.microgsolutions.com).

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

2.1 I vettori e la cinematica

2.2 Proprietà dei vettori

2.3 Vettori posizione, velocità e accelerazione

1. Un oggetto si muove con velocità data dall'espressione $v(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j} + v_z(t)\boldsymbol{k}$ ove $v_z(t) = 0$. Se ne può dedurre che

(a) l'accelerazione $\boldsymbol{a}(t)$

(A) non avrà componenti identicamente nulle.
(B) può avere alcune componenti identicamente nulle.
(C) avrà solo la componente z identicamente nulla.
(D) avrà la componente z identicamente nulla e può avere identicamente nulla anche una delle due altre componenti.

(b) la posizione $\boldsymbol{r}(t)$

(A) non avrà componenti identicamente nulle.
(B) può avere componenti identicamente nulle.
(C) avrà solo la componente z identicamente nulla.
(D) avrà la componente z identicamente nulla e può avere identicamente nulla anche una delle due altre componenti.

2. Un corpo si muove sul piano xy e la sua posizione in funzione del tempo è data da $\boldsymbol{r} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$. Il corpo si sta muovendo certamente verso l'origine quando

(A) $v_x > 0, v_y > 0$. (B) $v_x < 0, v_y < 0$.
(C) $xv_x + yv_y < 0$. (D) $xv_x + yv_y > 0$.

2.4 Cinematica unidimensionale

3. Lanciamo un oggetto da terra verticalmente verso l'alto con velocità iniziale di 30 m/s. L'oggetto si eleva fino a un'altezza di circa 45 m in 3 s. Poi cade a terra impiegando altri 3 s e colpendo il terreno a una velocità di 30 m/s.

(a) La velocità *scalare media* dell'oggetto durante tutto l'intervallo di 6 s è prossima a

(A) 0 m/s. (B) 5 m/s. (C) 15 m/s. (D) 30 m/s.

(b) Il modulo della velocità *vettoriale media* dell'oggetto durante tutto l'intervallo di 6 s è prossimo a

(A) 0 m/s. (B) 5 m/s. (C) 15 m/s. (D) 30 m/s.

4. Una macchina viaggia verso est per 15 km alla velocità costante di 20 km/h. Poi prosegue per altri 20 km nella stessa direzione alla velocità costante di 30 km/h. Cosa si può dire sul modulo della velocità media?

(A) $\overline{v} < 25$ km/h. (B) $\overline{v} = 25$ km/h.
(C) $\overline{v} > 25$ km/h.
(D) Non si può rispondere senza maggiori informazioni.

5. La posizione di un oggetto che si muove lungo l'asse x è data dall'espressione $x = x(t)$. L'origine coincide con il punto $x = 0$. L'oggetto si muove certamente verso l'origine quando

(A) $dx/dt < 0$. (B) $dx/dt > 0$.
(C) $d(x^2)/dt < 0$. (D) $d(x^2)/dt > 0$.

 ISBN 88-408-1254-7

6. Un corpo parte da fermo all'istante $t = 0$ dalla posizione $x = 0$. Si muove da questo momento in poi nel verso dell'asse x con velocità positiva. La velocità istantanea e la velocità media sono legate da
(A) $dx/dt < x/t$. (B) $dx/dt = x/t$. (C) $dx/dt > x/t$.
(D) Sono possibili tutte e tre le precedenti soluzioni.

7. La Figura 2.27 mostra alcuni grafici su un piano cartesiano i cui assi non sono contrassegnati. (a) Quale grafico rappresenta meglio la velocità in funzione del tempo per un oggetto che si muove a velocità costante? (b) Quale grafico rappresenta meglio la velocità in funzione del tempo per un oggetto la cui accelerazione è data da $a = +3t$? (c) Quale grafico rappresenta meglio la posizione in funzione del tempo per un corpo soggetto ad accelerazione negativa costante? (d) Quale grafico rappresenta meglio la velocità in funzione del tempo per un oggetto la cui posizione in funzione del tempo è data dalla curva E?

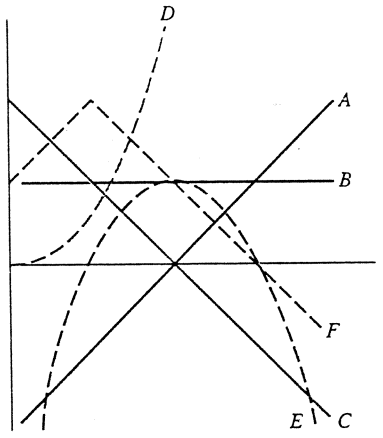


FIGURA 2.27 Domanda a risposta multipla 7.

2.5 Moto uniformemente accelerato

8. Un oggetto si muove nel verso dell'asse x con velocità $v_x(t)$, la cui derivata dv_x/dt è una costante non nulla. Se all'istante $t = 0$ la velocità è $v_x = 0$, per $t > 0$ la quantità $v_x dv_x/dt$ è
(A) negativa. (B) zero. (C) positiva.
(D) indeterminata in base alle informazioni date.

2.6 Corpi in caduta libera

9. Nostro compagno di studi fa la seguente affermazione: "Un corpo in caduta libera percorre in ogni secondo una distanza maggiore di quella percorsa complessivamente in tutti i secondi precedenti." Questa asserzione è
A) sempre vera.
B) vera solo per tempi sufficientemente brevi.
C) vera solo per tempi sufficientemente lunghi.
D) sempre falsa.

10. Lanciate un corpo verticalmente verso l'alto con velocità iniziale di 8 m/s. Aderendo alla convenzione da noi stabilita sui segni (segno positivo verso l'alto), la componente verticale dell'accelerazione a_y varia durante il volo?
A) Durante l'ascesa $a_y > 0$, durante la discesa $a_y > 0$.
B) Durante l'ascesa $a_y < 0$, durante la discesa $a_y > 0$.
C) Durante l'ascesa $a_y > 0$, durante la discesa $a_y < 0$.
D) Durante l'ascesa $a_y < 0$, durante la discesa $a_y < 0$.

11. Un ragazzo si tuffa da un trampolino. A metà del tuffo lancia una palla verticalmente verso l'alto. Trascurando la resistenza dell'aria, dopo che ha lasciato la sua mano, la palla ha la componente verticale dell'accelerazione
A) positiva, che poi diminuisce prima annullandosi e poi assestandosi sul valore $-9{,}8$ m/s^2.
B) nulla, che poi diminuisce fino al valore $-9{,}8$ m/s^2.
C) compresa tra zero e $-9{,}8$ m/s^2, che poi diminuisce fino al valore di $-9{,}8$ m/s^2.
D) sempre pari a $-9{,}8$ m/s^2.

12. In una specie di cerbottana sono contenute due biglie al centro, che vengono automaticamente sparate uscendo dalle opposte estremità. La cerbottana viene lasciata cadere giù da un libero e il meccanismo di sparo si aziona quando essa si trova a metà volo. Le due biglie sono sparate verticalmente, una verso l'alto, l'altra verso il basso. Si consideri la componente verticale dell'accelerazione a_y delle biglie subito dopo lo sparo, trascurando la resistenza dell'aria.
A) La biglia in salita ha $a_y < -9{,}8$ m/s^2.
B) La biglia in salita ha $a_y = -9{,}8$ m/s^2.
C) La biglia in salita ha $a_y > -9{,}8$ m/s^2.
D) La biglia in discesa ha $a_y > -9{,}8$ m/s^2.

QUESITI

1. La somma di due vettori di modulo differente può essere un vettore nullo? E se i vettori sono tre?
2. Un vettore con componenti non nulle può avere modulo nullo?
3. La somma dei moduli di due vettori può in qualche caso essere uguale al modulo della somma dei due vettori?
4. Il modulo della differenza tra due vettori può essere in qualche caso maggiore dei moduli di uno dei due vettori? Può essere maggiore del modulo della loro somma? Fate degli esempi.
5. Si supponga che $d = d_1 + d_2$. Ciò significa che o $d \geq d_1$ o $d \geq d_2$? Se non è così si spieghi perché.
6. La velocità di una particella può mai essere negativa? In caso affermativo si dia un esempio, in caso contrario si spieghi perché.
7. La velocità vettoriale media possiede una direzione?
8. Un coniglio ogni secondo dimezza la distanza che lo separa da un ciuffo d'insalata. Lo raggiungerà mai? Qual è il valore limite del vettore velocità media del coniglio? Tracciate i grafici della posizione e della velocità del coniglio in funzione del tempo.
9. Invece della definizione data dall'Equazione 2.13 avremmo potuto definire la velocità scalare media come il modulo del vettore velocità media. Le due definizioni designano cose diverse? Fate degli esempi.
10. Un'auto da corsa, in un doppio giro di qualificazione, copre il primo giro con una velocità scalare media di 90 km/h. Il pilota vorrebbe correre il secondo giro molto più velocemente in modo che la velocità media sui due giri diventasse di 180 km/h. Dimostrare che non è possibile.

11. Gigi batte Pina in una gara dei 100 m piani, sopravanzandola di 10 m quando egli giunge sul traguardo. Gigi pensa di darle la rivincita concedendole un vantaggio iniziale e quindi disponendosi 10 m più indietro della linea di partenza. Questo accorgimento compensa effettivamente lo svantaggio dimostrato?

12. Quando la velocità vettoriale è costante il suo valor medio su un intervallo di tempo qualunque può differire dalla velocità istantanea in qualsiasi momento? Se sì, datene un esempio; se no, spiegate perché.

13. Se l'accelerazione non è costante, la velocità vettoriale media di una particella che si muove lungo l'asse x può assumere il valore $\frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)$. Dimostratelo graficamente.

14. (a) Può un corpo avere velocità vettoriale nulla e accelerazione non nulla? (b) Può un corpo avere velocità vettoriale costante e veder variare la propria velocità scalare? Per entrambe le domande fate degli esempi in caso affermativo o spiegate le ragioni in caso negativo.

15. Il vettore velocità di un oggetto può cambiare verso se la sua accelerazione è costante? Se sì, datene un esempio; se no, giustificate la risposta.

16. Nella Figura 2.28 vediamo il colonnello J.P. Stapp sulla sua slitta a razzo in fase di frenata (vedi Esercizio 45). (a) "Il suo corpo è un accelerometro, non un tachimetro." Rendete conto di questa affermazione. (b) Dall'immagine potete indovinare il verso dell'accelerazione?



FIGURA 2.28 Quesito 16 ed esercizio 45.

17. Se il modulo dell'accelerazione di un corpo sta diminuendo, può la sua velocità scalare essere in aumento? In caso positivo, esemplificate; altrimenti giustificate la risposta.

18. Dire quale delle seguenti situazioni è impossibile. (a) Un corpo ha velocità e accelerazione orientate entrambe ad est. (b) Un corpo ha il vettore velocità orientato a est e il vettore accelerazione orientato a ovest. (c) Un corpo ha velocità vettoriale nulla, ma accelerazione non nulla. (d) Un corpo ha accelerazione costante e velocità variabile.

19. Per una particella ferma ($v_{0x} = 0$) nel punto $x_0 = 0$ all'istante $t = 0$, l'Equazione 2.28, applicabile nel caso che sia animata da accelerazione costante, fornisce due valori di tempo in cui la particella si trova nella posizione x, ed esattamente $+\sqrt{2x/a_x}$ e $-\sqrt{2x/a_x}$. Qual è il significato fisico della radice negativa di questa equazione di secondo grado?

20. Se operiamo un'inversione del tempo, cioè sostituiamo t con $-t$, come si modificano le equazioni della cinematica (Equazioni 2.26 e 2.28)? Si commenti.

21. Ci aspettiamo che una relazione valida in generale, come l'Equazione 2.26 o 2.28, resti valida qualunque sia la scelta del sistema di coordinate. Richiedendo poi che un'equazione generale sia dimensionalmente coerente, ci assicuriamo che quest'equazione sia valida indipendentemente dalla scelta delle unità di misura. Che bisogno abbiamo allora delle unità di misura e dei sistemi di coordinate?

22. Ideate degli esempi di corpi in caduta, per i quali sarebbe irragionevole trascurare la resistenza dell'aria.

23. La Figura 2.29 mostra una torre per pallini di piombo, costruita a Baltimora (USA) nel 1829. Era usata per la fabbricazione dei pallini d'arma da fuoco, che si formavano lasciando cadere dall'alto piombo fuso attraverso un setaccio. La solidificazione avveniva quando le gocce di piombo atterravano in una vasca piena d'acqua fredda, dopo una caduta di 70 m. Che vantaggio si ha nel fabbricare pallini di piombo in questo modo?



FIGURA 2.29 Quesito 23.

24. Un persona sul ciglio di una rupe lancia verticalmente in alto una palla, che poi cade giù dalla rupe, con velocità iniziale v_0. Poi ripete l'esperimento lanciandola verticalmente in basso con medesima (in modulo) velocità iniziale. In quale dei due casi la palla arriva a terra con velocità maggiore? Si trascuri la resistenza dell'aria.

25. Qual è l'accelerazione di un corpo che viene lasciato cadere verso il basso da un missile che sta accelerando verso l'alto con accelerazione di 9,8 m/s^2?

26. Siamo su un pianeta dove l'accelerazione di gravità vale la metà di quella sulla Terra. Che rapporto c'è tra i tempi di caduta sul pianeta e quelli sulla Terra a parità di distanza?

 ISBN 88-408-1254-7

27. (a) Su un pianeta ove l'accelerazione di gravità ha valore doppio rispetto a quello sulla Terra lanciate in aria un sasso verticalmente verso l'alto con una determinata velocità iniziale. Che massima altezza raggiunge rispetto a quella che raggiungerebbe sulla Terra? (b) E se raddoppiate la velocità iniziale come cambierebbe la risposta?
28. Considerate una palla lanciata verticalmente verso l'alto. Se tenete conto della resistenza dell'aria, vi aspettate che il tempo di ascesa sia maggiore o minore di quello necessario per ridiscendere di un'ugual lunghezza? Perché?
29. Disegnate un diagramma qualitativo di v in funzione di t per un corpo in caduta libera (a) nel caso che la resistenza dell'aria possa essere trascurata, e (b) per il caso in cui occorre tenerne conto.
30. Dopo una prima palla, ne lasciamo cadere una seconda a distanza temporale di 1 s. (a) Coma varia la distanza tra le due palle al procedere del tempo? (b) E come varia il rapporto v_1/v_2 tra la velocità della prima palla e quella della seconda? Date risposte qualitative trascurando la resistenza dell'aria.
31. Ripetete il quesito 30 tenendo conto della resistenza dell'aria.
32. Dato un sasso m più leggero di un altro, M, Aristotele sosteneva che M cade più rapidamente di m. Galileo tentò di dimostrare la fallacia di quest'asserzione con il seguente argomento. Se leghiamo assieme i due sassi, m nella caduta dovrebbe rallentare M perché di sua natura cade più lentamente. Di conseguenza l'insieme dovrebbe cadere più velocemente di m ma più lentamente di M. Ma la combinazione $(M + m)$ è più pesante di M e quindi, secondo Aristotele, dovrebbe cadere più rapidamente di M. Accogliendo il ragionamento di Galileo si conclude che i due sassi cadono alla stessa velocità? Che bisogno ci sarebbe delle prove sperimentali in tal caso? Se invece credete che il ragionamento di Galileo sia falso, spiegatene il motivo.

ESERCIZI

2.1 I vettori e la cinematica

2.2 Proprietà dei vettori

1. Considerate due vettori spostamento, uno di modulo 3 m e l'altro di modulo 4 m. Fate vedere come si possono combinare per ottenere un vettore risultante di modulo (a) 7 m, (b) 1 m e (c) 5 m.
2. Una persona percorre a piedi i seguenti tratti: 3,1 km verso nord, poi 2,4 km verso ovest e infine 5,2 km verso sud. (a) Disegnare il diagramma dei vettori che descrivono questo moto. (b) A che distanza in linea d'aria e in che direzione si trova il punto d'arrivo rispetto al punto di partenza?
3. Il vettore $\boldsymbol{a}$ ha modulo 5,2 unità ed è orientato verso est. Il vettore $\boldsymbol{b}$ ha modulo 4,3 unità ed è orientato 35° a est rispetto al nord. Costruendo i diagrammi dei vettori, trovare modulo, direzione e verso di (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ e (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.
4. (a) Trovare le componenti del vettore giacente sul piano xy di modulo 7,34 unità avente direzione che forma un angolo di 252° rispetto all'asse x e verso uscente dall'origine. (b) Di un certo vettore la componente x è lunga -25 unità e la componente y è lunga $+43$ unità. Trovare il modulo del vettore e la direzione che esso forma con l'asse x.
5. Un'escursionista vuole raggiungere una località che dista da lei 3,42 km nella direzione che forma un angolo di 35,0° verso nord rispetto all'est. È costretta però a camminare su percorsi ortogonali secondo gli assi determinati dai punti cardinali. Qual è la distanza minima che deve coprire per raggiungere la meta?
6. Una nave salpa diretta a un porto situato 124 km a nord. Un'improvvisa tempesta la spinge fino a un punto che si trova 72,6 km a nord e 31,4 km a est rispetto al porto di partenza. In che direzione deve ora puntare la prora e che distanza le resta da coprire per raggiungere la destinazione?
7. (a) Nella notazione dei versori qual è la somma dei due vettori $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$? Determinare il modulo, la direzione e il verso di $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.
8. Siano dati i due vettori $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$. Determinare (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ e (c) il vettore $\boldsymbol{c}$ tale che $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$.
9. Dati i due vettori $\boldsymbol{a} = 4{,}0\boldsymbol{i} - 3{,}0\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{b} = 6{,}0\boldsymbol{i} + 8{,}0\boldsymbol{j}$ trovare modulo, direzione e verso di (a) $\boldsymbol{a}$, (b) $\boldsymbol{b}$, (c) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (d) $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ e (e) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.
10. Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno modulo uguale di 12,7 unità. Sono orientati come in figura 2.30 e la loro somma vettoriale è $\boldsymbol{r}$. Trovare (a) le componenti x e y di $\boldsymbol{r}$, (b) il modulo di $\boldsymbol{r}$ e (c) l'angolo che $\boldsymbol{r}$ forma con l'asse x.

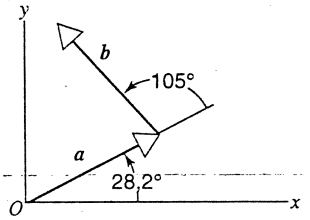


FIGURA 2.30 Esercizio 10.

2.3 Vettori posizione, velocità e accelerazione

11. Un podista corre per 250 m in direzione di 35° verso est rispetto al nord e poi per 170 m verso est. (a) Con il metodo grafico trovate il suo spostamento dal punto di partenza. (b) Confrontate il modulo del suo spostamento con la distanza che egli ha effettivamente percorso.
12. Un'automobile si dirige verso est per 54 km, poi piega a nord per altri 32 km, infine percorre 27 km nella direzione che forma un angolo di 28° verso est rispetto al nord. Disegnare il diagramma dei vettori e determinare lo spostamento complessivo dal punto di partenza a quello di arrivo.
13. La lancetta dei minuti di un orologio da parete misura 11,3 cm dal perno alla punta. Qual è il vettore spostamento descritto dalla sua punta (a) nell'intervallo tra il quarto d'ora e la mezz'ora, (b) nella mezz'ora successiva e (c) nell'ora successiva?

14. Una particella effettua sul piano xy tre successivi spostamenti: 4,13 m verso sud-est; 5,26 m verso est; 5,94 m nella direzione che forma un angolo di 64,0° verso nord rispetto all'est. Fissiamo l'asse x orientato a est e l'asse y orientato a nord. Trovate (a) le componenti di ciascuno spostamento, (b) le componenti dello spostamento risultante, (c) il modulo, la direzione e il verso della risultante, (d) lo spostamento necessario per riportare la particella all'origine.

15. Una stazione radar individua un missile in avvicinamento proveniente da est. All'inizio il missile viene localizzato alla distanza di 3660 m nella direzione formante un angolo di 40° sopra l'orizzonte (vedi Figura 2.31). La sua traccia perdura per altri 123° nel piano verticale est-ovest fino all'ultimo rilevamento alla distanza di 7860 m. Determinare lo spostamento complessivo realizzato dal missile durante il contatto radar.

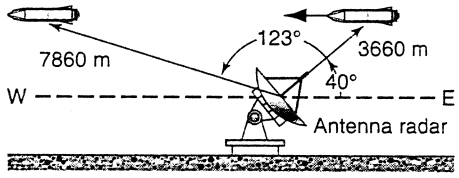


FIGURA 2.31 Esercizio 15.

16. Un aeroplano vola per 45 min coprendo la distanza di 410 km dalla città A alla città B in direzione est. Poi, diretto a sud, in 90 min raggiunge la città C distante 810 km da B. Determinare (a) il modulo e la direzione del vettore spostamento complessivo; (b) il vettore velocità media e (c) la velocità scalare media relativa all'intero percorso.

17. La posizione di una particella in moto sul piano xy è data da $\boldsymbol{r} = [(2\ \text{m/s}^3)t^3 - (5\ \text{m/s})t]\boldsymbol{i} + [(6\ \text{m}) - (7\ \text{m/s}^4)t^4]\boldsymbol{j}$. Determinare (a) $\boldsymbol{r}$, (b) $\boldsymbol{v}$ e (c) $\boldsymbol{a}$ all'istante $t = 2$ s.

18. Un pallone aerostatico, nel volgere di 204 min, si sposta di 8,4 km verso nord, 9,7 km verso est e si eleva di 2,9 km da terra. Trovare (a) il modulo del vettore velocità media e (b) l'angolo che questo vettore forma col piano orizzontale.

19. La velocità di una particella in moto sul piano xy è data da $\boldsymbol{v} = [(6{,}0\ \text{m/s}^2)t - (4{,}0\ \text{m/s}^3)t^2]\boldsymbol{i} + (8{,}0\ \text{m/s})\boldsymbol{j}$. Considerate solo $t > 0$. (a) Quanto vale l'accelerazione all'istante $t = 3$ s? (b) In che momento eventualmente l'accelerazione si annulla? (c) In che momento eventualmente la velocità si annulla? (d) In che momento eventualmente la velocità assume valore di 10 m/s?

20. Una particella si muove sul piano xy con velocità $\boldsymbol{v}(t) = v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j}$ e accelerazione $\boldsymbol{a}(t) = a_x(t)\boldsymbol{i} + a_y(t)\boldsymbol{j}$. Operando la derivata, dimostrare che il modulo della velocità v può essere costante solo quando $a_x v_x + a_y v_y = 0$.

2.4 Cinematica unidimensionale

21. Un aeroplano compie un volo da Roma a Godthåb (*Nuuk*, nell'idioma del paese) e ritorno, con partenza da Roma alle ore 18:50 e arrivo a Godthåb alle 20:50 (ora locale). Al ritorno decolla da Godthåb alle 07:10 (sempre ora locale) e atterra a Roma alle 17:10. Si assuma che il tempo di volo sia uguale per entrambe le tratte e che l'aereo segua una rotta rettilinea con velocità media di 800 km/h. (a) Quant'è il tempo di volo (per una sola tratta, dal punto di vista del passeggero)? (b) Qual è la differenza di fuso orario tra Roma e Godthåb? (c) All'incirca dove si colloca Godthåb sul globo terrestre?

22. Il giorno 15 Aprile un aeromobile decolla da Belém (sulla costa settentrionale del Brasile) alla ore 16:40 diretto a Puerto Villamil (nelle isole Galápagos, Ecuador) ove giunge alle 20:40 locali. L'ora del tramonto quel giorno, espressa in ora locale, è 18:15 a Belém e 19:06 a Puerto Villamil. A che ora durante il volo i passeggeri assistono al tramonto?

23. State guidando alla velocità di 112 km/h. Un incidente sull'altro lato della strada vi distrae per 1,0 s. Quanto spazio percorre la vostra macchina in questo lasso di tempo?

24. Il lanciatore di baseball Roger Clemens scaglia la palla in traiettoria orizzontale a una velocità (misurata col laser) di 160 km/h. Quanto tempo impiega la palla a raggiungere la base distante 18,4 m?

25. Nella Figura 2.32 è riportata l'età, in milioni di anni, del più antico sedimento rinvenuto sulla Terra, in funzione della distanza, in kilometri, a cui si trova il sedimento dalla dorsale oceanica di provenienza. Il sottofondo oceanico viene estruso da questa dorsale e se ne allontana a velocità pressoché uniforme. Calcolare questa velocità, in centimetri all'anno.

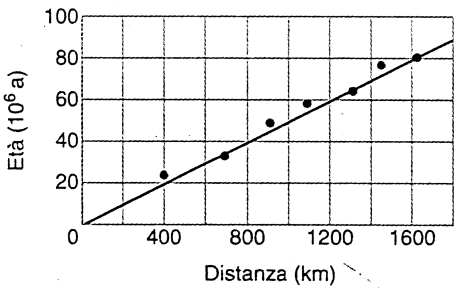


FIGURA 2.32 Esercizio 25.

26. Maurice Greene ha corso i 100 m piani in 9,81 s (con vento a favore), mentre Khalid Khannouchi ha corso la maratona (42,25 km) in 2 h 05 min 42 s. (a) Calcolare le loro velocità medie. (b) Se M. Greene potesse mantenere la sua velocità media per tutta la durata di una maratona, in quanto tempo la percorrerebbe?

27. Supponiamo che il limite di velocità su un'autostrada lunga 700 km venga elevato da 130 km/h a 150 km/h. Quanto tempo si risparmierebbe viaggiando sull'intera tratta alla nuova velocità massima rispetto alla precedente?

28. Un aereo da caccia molto agile in un'esercitazione antiradar sta volando orizzontalmente a una quota di 35 m, quando incontra una collina che si eleva con pendenza costante di 4,3° (Figura 2.33). Se la velocità dell'aereo è di 1300 km/h, quanto tempo ha il pilota per cominciare l'impennata ed evitare di schiantarsi?

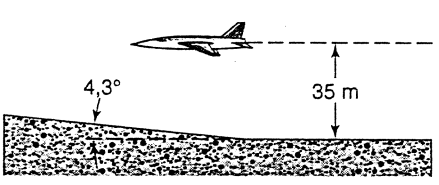


FIGURA 2.33 Esercizio 28.

29. Un'automobile percorre una strada in salita alla velocità di 40 km/h e la ridiscende alla velocità di 60 km/h. Qual è la velocità media dell'intero viaggio?

 ISBN 88-408-1254-7

30. Calcolare la velocità scalare media realizzata nei seguenti due itinerari. (a) Distanza di 73,1 m percorsa alla velocità di 1,22 m/s seguita da un'uguale distanza alla velocità di 3,05 m/s. (b) Tragitto della durata di 1,00 min compiuto alla velocità di 1,22 m/s, seguito da un altro tragitto della stessa durata alla velocità di 3,05 m/s.

31. La Figura 2.34 riporta il grafico della velocità in funzione del tempo mantenuta da un corridore. Quanta strada ha percorso in 16 s?

32. All'istante $t = 11$ s qual è l'accelerazione del corridore dell'Esercizio 31?

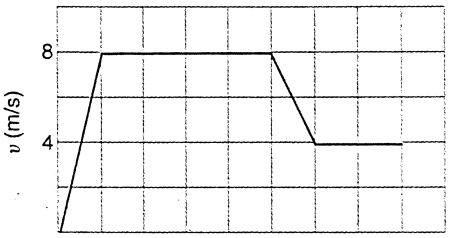


FIGURA 2.34 Esercizi 31 e 32.

33. Una particella in un certo istante presenta una velocità di 18 m/s in direzione dell'asse x e concorde al verso positivo. Dopo un tempo di 2,4 s la sua velocità ha assunto il valore di 30 m/s e verso opposto. Qual è stata l'accelerazione media della particella durante quest'intervallo di tempo?

34. Un corpo si trova in moto rettilineo come descritto dal grafico velocità-tempo di Figura 2.35. Tracciare il diagramma dell'accelerazione in funzione del tempo.

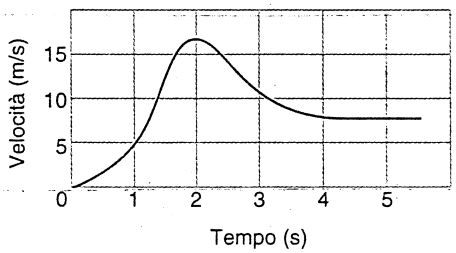


FIGURA 2.35 Esercizio 34.

35. La Figura 2.36a riporta il grafico di x in funzione di t per una particella in moto rettilineo. (a) Per ciascun intervallo segnato in figura stabilire se la velocità v_x è positiva, negativa o nulla. A giudicare dalla forma della curva esiste un intervallo in cui l'accelerazione è evidentemente non costante? Non si tenga conto degli effetti agli estremi degli intervalli.

36. Ripetere l'Esercizio 35 per il grafico di Figura 2.36b.

37. Il moto di una particella lungo l'asse x è descritto nel diagramma spostamento-tempo di Figura 2.37. Disegnate grossolanamente le curve della velocità e dell'accelerazione in funzione del tempo.

38. La seguente tabellina riporta tempi e posizioni di una particella in moto lungo l'asse x. (a) Tracciare il grafico che descrive lo spostamento (non la posizione) in funzione del tempo. (b) Trovare la velocità vettoriale media della particella nel primo secondo, nei primi due secondi, nei primi tre secondi e nei primi quattro secondi. (c) Trovare la pendenza della curva tracciata nella parte (a) agli istanti $t = 0, 1, 2, 3, 4$ e 5 s. (d) Tracciare il grafico che descrive la pendenza (in che unità?) in funzione del tempo. (e) Dalla curva tracciata per la parte (d) determinare l'accelerazione della particella agli istanti $t = 2, 3$ e 4 s.

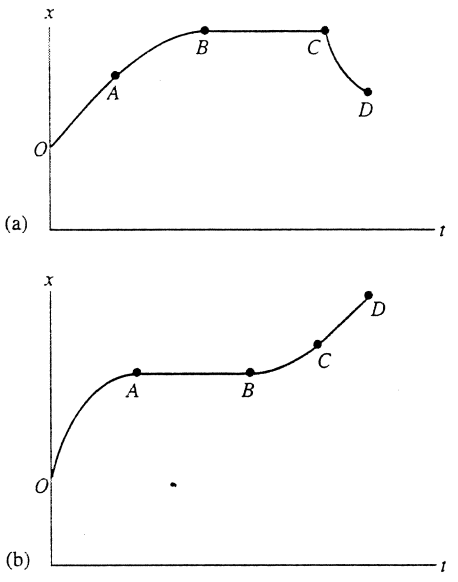


FIGURA 2.36 (a) Esercizio 35 e (b) Esercizio 36.

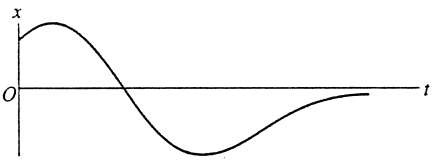


FIGURA 2.37 Esercizio 37.

x(m)	0,080	0,050	0,040	0,050	0,080	0,13	0,20
t(s)	0	1	2	3	4	5	6

39. La posizione di una particella in moto lungo l'asse x dipende dal tempo in base all'equazione $x = At^2 - Bt^3$, ove i coefficienti hanno unità di misura tali che x risulti in metri e t in secondi. (a) Quali sono le unità di misura SI di A e di B? Fissiamo ora i loro valori rispettivamente in 3,0 e 1,0 unità SI. (b) In quale istante la particella raggiunge il valore massimo di x? (c) Qual è la lunghezza totale del cammino seguito dalla particella nei primi 4 secondi? (d) Qual è lo spostamento che realizza in quest'intervallo di 4 secondi? (e) Qual è il vettore velocità della particella al termine di ciascuno di questi 4 secondi? (f) Qual è il vettore accelerazione della particella al termine di ciascuno di questi 4 secondi? (g) Qual è la velocità vettoriale media per l'intervallo compreso tra $t = 2$ s e $t = 4$ s?

2.5 Moto uniformemente accelerato

40. Il *jumbo jet* decolla quando raggiunge sulla pista la velocità di 360 km/h. Se la lunghezza utile della pista è di 1,8 km, qual è l'accelerazione minima, supposta costante, che i motori devono imprimere all'aereo che parte da fermo?

41. I razzi di una navicella spaziale possono imprimerle un'accelerazione costante di 9,8 m/s^2. (a) Se la navicella parte da ferma nel vuoto, quanto tempo impiega per raggiungere una velocità pari a 1/10 di quella della luce? (b) Che distanza percorre per raggiungere questa velocità? La velocità della luce nel vuoto è $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

42. Il serpente a sonagli nel colpire la sua vittima può muovere la testa imprimendole un'accelerazione di 50 m/s^2. Se un'automobile potesse fare altrettanto, quanto tempo impiegherebbe per raggiungere la velocità di 100 km/h?

43. Un mesone μ (particella elementare) viene proiettato con velocità iniziale di $5{,}20 \cdot 10^6$ m/s in una regione di spazio dove un campo elettrico gli imprime un'accelerazione di $1{,}30 \cdot 10^{14}$ m/s^2 in ugual direzione e verso opposto a quello della velocità iniziale. Che distanza percorre il mesone prima di arrestarsi?

44. Un elettrone dotato di velocità iniziale $v_0 = 1{,}5 \cdot 10^5$ m/s entra in una regione di spazio dove viene accelerato da un campo elettrostatico (Figura 2.38). Ne emerge con velocità $v = 5{,}8 \cdot 10^6$ m/s. Qual è stata l'accelerazione, supposta costante? Questa è la condizione cui è comunemente sottoposto il raggio dei tubi catodici che costituiscono i televisori e i monitor.

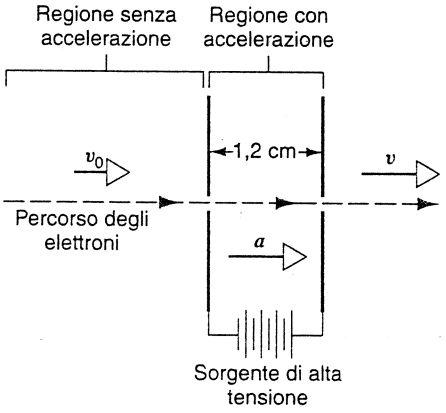


FIGURA 2.38 Esercizio 44.

45. Il colonnello J.P. Stapp, alla guida di una slitta su rotaie spinta da razzi, stabilì il 19 Marzo 1954 un primato di velocità a terra: 1020 km/h. La slitta venne frenata da questa velocità fino all'arresto nel tempo di 1,4 s (Figura 2.28). Che accelerazione media dovette subire? Si esprima la risposta come multiplo di $g = 9{,}8$ m/s^2, l'accelerazione di gravità. Si noti che il nostro corpo è sensibile all'accelerazione, non alla velocità.

46. I freni di un'automobile sono in grado di applicare un'accelerazione di modulo pari a 5,20 m/s^2. Se state viaggiando alla velocità di 137 km/h ed avvistate una pattuglia della polizia stradale, quanto tempo impiegate, frenando al massimo, per diminuire la velocità fino a 90 km/h?

47. Su asfalto asciutto e con buoni pneumatici un'auto è in grado di frenare con accelerazione di modulo pari a 4,92 m/s^2. (a) In queste condizioni, se la velocità iniziale è di 24,6 m/s, quanto tempo occorre per l'arresto? (b) E quant'è lo spazio percorso in quest'intervallo di tempo?

48. Una freccia lanciata verticalmente in aria ricade a terra e, alla velocità di 79,2 m/s, si conficca nel terreno per una profondità di 22,9 cm. Calcolare (a) l'accelerazione, supposta costante, subita durante la fase di penetrazione, e (b) il tempo trascorso durante questa fase.

49. Un ascensore del grattacielo Marriott Marquis di New York ha una corsa totale di 190 m (Figura 2.39). La sua velocità massima è di 5,08 m/s, mentre la sua accelerazione è di 1,22 m/s^2. (a) Partendo da fermo che distanza gli occorre per raggiungere la velocità massima? (b) Quanto tempo dura la corsa completa, tenendo conto delle fasi di accelerazione e di rallentamento?

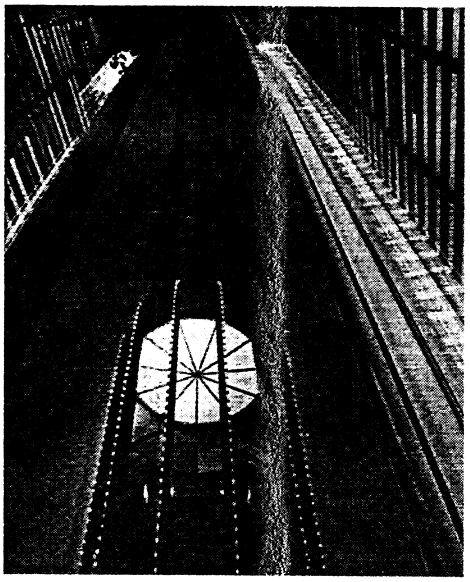


FIGURA 2.39 Esercizio 49.

50. Un'automobile che viaggia alla velocità di 56 km/h si trova improvvisamente di fronte a una barriera distante 34 m. Pur frenando, l'auto sfonda la barriera 4,0 s più tardi. (a) Qual è stata l'accelerazione applicata, supposta costante, nella fase di rallentamento? (b) Qual era la velocità dell'auto al momento dell'impatto?

2.6 Corpi in caduta libera

51. Da una nuvola alta 1700 m stanno cadendo gocce di pioggia. Se non fossero rallentate dalla resistenza dell'aria, a che velocità colpirebbero il terreno? Sarebbe prudente rimanere investiti dalla pioggia?

52. Il cavo che regge un montacarichi, per fortuna vuoto, si spezza improvvisamente quando il montacarichi è fermo a 120 m di altezza. (a) Con che velocità esso arriva a terra precipitando? (b) Quanto dura la caduta? (c) Che velocità aveva nell'istante in cui ha passato il punto intermedio nella caduta? (d) Quanto tempo ha impiegato per raggiungere questo punto?

53. In un cantiere una chiave inglese sfuggita di mano piomba a terra alla velocità di 24,0 m/s. (a) Da che altezza è caduta? (b) Quanto tempo è durato il volo?

54. (a) Se una palla lanciata in aria verticalmente deve raggiungere l'altezza culminante di 53,7 m, che velocità iniziale occorre imprimerle? (b) Quanto tempo impiega a raggiungerlo?

55. Da una rupe alta 100 m si lascia cadere un sasso. Quanto tempo impiega a percorrere (a) i primi 50,0 m e (b) i successivi 50,0 m?

56. Gli astronauti appena atterrati su un pianeta del sistema solare osservano che un corpo lanciato in aria verticalmente con ve-

 ISBN 88-408-1254-7

locità iniziale di 14,6 m/s impiega 7,72 s per ritornare a terra. Su che pianeta si trovano (vedi Appendice C)?

57. Una palla lanciata verticalmente in alto impiega 2,25 s per raggiungere un'altezza di 36,8 m. (a) Qual era la sua velocità iniziale? (b) Che velocità possiede a quell'altezza? (c) Quanto più in alto salirà al massimo?

58. Si lascia cadere una palla da un'altezza di 2.2 m. Essa rimbalza fino all'altezza di 1,9 m. Se la palla è rimasta in contatto col pavimento per un tempo totale di 96 ms, quanto vale l'accelerazione media (modulo, direzione e verso) cui è stata sottoposta in questa fase di rimbalzo?

59. Due corpi vengono fatti cadere da fermi e da una medesima altezza a una distanza temporale di 1,00 s l'uno dopo l'altro. Quanto tempo dopo la partenza del primo i due corpi si troveranno a 10,0 m di distanza l'uno dall'altro?

60. Da un pallone aerostatico che sta salendo con velocità di 12,4 m/s viene lasciato cadere un pacco quando il pallone si trova all'altezza di 81,3 m. (a) Con che velocità il pacco giunge a terra? (b) Quanto tempo impiega per arrivare a terra?

61. Un cane appisolato sul divano si desta un po' stupito nel vedere un vaso da fiori che, fuori dalla finestra (alta 1,1 m), veleggia prima salendo in aria e poi ricomparendo in discesa. Misurando il tempo, pari a 0,54 s, in cui il vaso resta in vista per attraversare l'intera luce della finestra, il cane deduce l'altezza massima sopra la finestra a cui il vaso è arrivato. Quant'è?

PROBLEMI

1. Le *faglie* sono spaccature della roccia, lungo le quali due pareti di roccia possono scivolare, scostandosi una rispetto all'altra, fenomeno che si accompagna spesso ai terremoti. Nella Figura 2.40 i punti A e B coincidevano, prima che la roccia anteriore slittasse verso il basso e verso destra. Lo spostamento netto AB è avvenuto lungo il piano di scorrimento. AC, componente orizzontale di $\boldsymbol{AB}$, è lo *scorrimento orizzontale*, mentre AD, componente di $\boldsymbol{AB}$ perpendicolare ad AC nel piano di scorrimento, è lo *scorrimento verso il basso*. (a) Qual è lo spostamento netto $\boldsymbol{AB}$ se lo scorrimento orizzontale è di 22 m e lo scorrimento verso il basso è di 17 m? (b) Se il piano di scorrimento è inclinato di 52° rispetto al piano orizzontale, qual è la componente verticale di $\boldsymbol{AB}$?

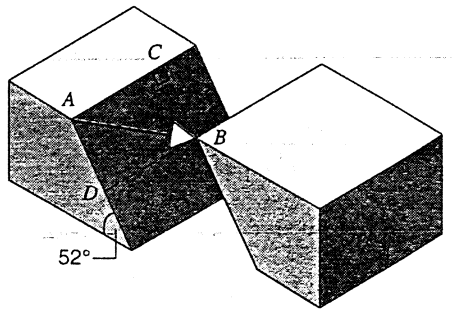


FIGURA 2.40 Problema 1.

2. Una ruota di raggio 45 cm gira senza strisciare su un pavimento orizzontale, come si vede nella Figura 2.41. P è una tacca segnata sul bordo della ruota. Nell'istante t_1, P è sul punto di contatto fra la ruota e il pavimento. In un secondo istante t_2, la ruota si è mossa di mezzo giro. Qual è lo spostamento di P durante questo intervallo?

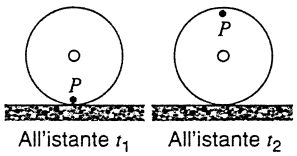


FIGURA 2.41 Problema 2.

3. Le dimensioni di un locale sono, in metri, 3,0 (altezza), 3,7 e 4,3. Una mosca parte da un vertice della stanza e vola in giro, fermandosi infine nel vertice opposto, in diagonale, a quello da cui era partita. (a) Trovare il vettore spostamento, assumendo gli assi coordinati paralleli agli spigoli del locale. (b) Quant'è il modulo di questo spostamento? (c) La lunghezza del tragitto percorso potrebbe essere minore di questa distanza? E maggiore di questa distanza? E uguale a questa distanza? (d) Se la mosca dovesse camminare sulle pareti invece che volare, quale sarebbe la lunghezza del più breve percorso possibile?

4. Due vettori di lunghezza a e b hanno direzioni che formano un angolo θ quando sono collocati coda contro coda. Si dimostri, ricavando le componenti lungo due assi perpendicolari, che la lunghezza del loro vettore somma $\boldsymbol{r}$ è

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\,.$$

5. Un autobus di linea viaggia sulla statale 10 da Torino a Mantova per metà del tempo alla velocità di 56 km/h e per l'altra metà a 89 km/h. Al ritorno percorre metà della distanza alla velocità di 56 km/h e l'altra metà a 89 km/h. Qual è la sua velocità scalare media (a) all'andata, (b) al ritorno e (c) per l'intero percorso?

6. La posizione di un oggetto che si muove in linea retta è data dall'espressione $x = At + Bt^2 + Ct^3$, ove i coefficienti hanno unità di misura tali che x risulti in metri e t in secondi. (a) Qual è la sua posizione per $t = 0, 1, 2, 3,$ e 4 s? (b) Qual è lo spostamento dell'oggetto nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 2$ s? E fra $t = 0$ e $t = 4$ s? (c) Qual è la velocità vettoriale media nell'intervallo tra $t = 2$ e $t = 4$ s? E fra $t = 0$ e $t = 3$ s?

7. Due treni, che viaggiano alla stessa velocità di 34 km/h, sono diretti uno contro l'altro su una stessa ferrovia rettilinea. Un uccello che vola alla velocità di 58 km/h decolla dalla testa di un treno dirigendosi verso l'altro treno, quando essi si trovano alla distanza di 102 km. Appena lo ha raggiunto, inverte la rotta fino a ritornare sul primo treno, e così di seguito (non riusciamo a capacitarci del *perché* un uccello debba comportarsi in questo modo). (a) Quanti tragitti riesce a compiere l'uccello prima dell'incontro fra i treni? (b) Qual è la distanza totale percorsa dall'uccello?

8. Un corpo, vincolato a muoversi lungo l'asse x, percorre una distanza d_1 a velocità costante v_1 impiegando un tempo t_1. Poi cambia istantaneamente velocità e prosegue per una distanza v_2 a una velocità t_2 e un tempo d_2. (a) Dimostrare che

$$\frac{v_1 d_1 + v_2 d_2}{d_1 + d_2} \geq \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Sotto quali condizioni vale il segno di uguaglianza?

9. La posizione di una particella in moto lungo l'asse x è data dall'espressione $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$, dove i coefficienti hanno unità di misura tali che t risulti in secondi e x in centimetri. Calcolare (a) la velocità vettoriale media durante l'intervallo di tempo da $t = 2{,}00$ s a $t = 3{,}00$ s; (b) la velocità vettoriale istantanea all'istante $t = 2{,}00$ s; (c) la velocità vettoriale istantanea all'istante $t = 3{,}00$ s; (d) la velocità vettoriale istantanea all'istante $t = 2{,}50$ s; (e) la velocità vettoriale istantanea quando la particella è a metà strada tra la posizione relativa a $t = 2{,}00$ s e a $t = 3{,}00$ s.

10. Tracciate un grafico indicativo delle curve $x(t)$ per il moto lungo l'asse x di una particella che, all'istante $t = 1$ s, abbia: (a) velocità nulla e accelerazione positiva; (b) velocità nulla e accelerazione negativa; (c) velocità negativa e accelerazione positiva; (d) velocità negativa e accelerazione negativa. (e) Per quali di queste situazioni la velocità scalare della particella aumenta in corrispondenza di $t = 1$ s?

11. Se la posizione di un corpo è data dalla funzione $x = (2{,}0\ \text{m/s}^3)t^3$ trovate i valori vettoriali di (a) velocità e accelerazione media tra $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s, (b) velocità e accelerazione istantanea agli istanti $t = 1{,}0$ s e $t = 2{,}0$ s. (c) Comparate per ciascun caso il valore medio con il valore istantaneo e spiegate perché il maggiore sia tale nei confronti dell'altro.

12. Un elettrone, partendo da fermo, è sottoposto a un'accelerazione che cresce linearmente col tempo ed è quindi descritta dall'espressione $a = kt$, ove $k = 1{,}50\ \text{m/s}^3$. (a) Tracciare il grafico di a in funzione di t per i primi 10 secondi. (b) A partire da questa curva si tracci il diagramma di v in funzione di t stimando poi la velocità dell'elettronea un tempo $t = 5{,}0$ s dopo la partenza. (c) In base a quest'ultima curva si tracci il diagramma della funzione $x(t)$ stimando poi la posizione dell'elettrone all'istante $t = 5{,}0$ s.

13. Siete chiamati a una perizia tecnica in una causa giudiziaria. Si tratta di stabilire se un'auto superava il limite di 50 km/h nel momento in cui ha cominciato a frenare bruscamente bloccando le ruote e scivolando sull'asfalto. La lunghezza delle strisce di pneumatico lasciate sull'asfalto era di 6,40 m. Gli inquirenti hanno ritenuto che il modulo dell'accelerazione applicata non potesse eccedere il valore dell'accelerazione di gravità ($9{,}8\ \text{m/s}^2$) e di qui, in base ai loro calcoli, hanno sospeso la patente di guida al conducente. Era davvero in fallo?

14. Un treno parte da fermo e si muove con accelerazione costante. A un certo istante sta viaggiando alla velocità di 33,0 m/s e, dopo aver percorso altri 160 m, la sua velocità diventa di 54,0 m/s. Calcolare (a) l'accelerazione richiesta e (b) il tempo impiegato a percorrere quei 160 m. Calcolare inoltre (c) il tempo richiesto per raggiungere la velocità di 33,0 m/s e (d) la distanza percorsa dalla partenza all'istante in cui il treno raggiunge questa velocità.

15. Nella frenata più rapida che può conseguire un'automobile lo *spazio d'arresto* si può considerare somma di uno «spazio di reazione», uguale alla velocità iniziale moltiplicata per il tempo di reazione del pilota, e di uno «spazio di frenata», che è la distanza percorsa durante la frenata vera e propria. La seguente tabella fornisce alcuni valori tipici. (a) Qual è il valore supposto del tempo di reazione del pilota? (b) Quant'è lo spazio di arresto per una velocità iniziale di 25 m/s?

Velocità iniziale (m/s)	Spazio di reazione (m)	Spazio di frenata (m)	Spazio di arresto (m)
10	7,5	5,0	12,5
20	15	20	35
30	22,5	45	67,5

16. Nel momento in cui il semaforo volge al verde, un'auto parte con accelerazione costante $a = 2{,}2\ \text{m/s}^2$. Nello stesso istante un autocarro che sopravviene alla velocità costante di 9,5 m/s sorpassa l'auto. (a) A quale distanza oltre il semaforo l'auto risorpasserà il camion? (b) Quale sarà la velocità dell'auto in quel momento? (È utile tracciare schematicamente dei grafici di $x(t)$ per entrambi i veicoli.)

17. Un centometrista accelera da fermo fino alla sua massima velocità con accelerazione costante di 2,80 m/s e poi mantiene questa velocità fino al traguardo dei 100 m. Sapendo che ha realizzato nella prova un tempo totale di 12,2 s, (a) quanto tempo ha impiegato e (b) che corrispondente distanza ha percorso per raggiungere la velocità massima?

18. Una palla viene lanciata verticalmente in aria a una velocità iniziale compresa tra $(25 - \varepsilon)$ m/s e $(25 + \varepsilon)$ m/s, ove ε è un numero piccolo rispetto a 25. Il tempo totale di volo necessario alla palla per giungere a terra è compreso tra $t - \tau$ e $t + \tau$. Trovare t e τ.

19. La Figura 2.42 mostra un semplice dispositivo per misurare il tempo di reazione. Consiste in una striscia di cartone con una scala di riferimento e due grossi punti. Un amico tiene la striscia sospesa per il punto superiore fra pollice e indice mentre voi preparate pollice e indice all'altezza del punto inferiore, senza toccare la striscia. L'amico la lascia cadere, e voi dovete tentare di bloccarla appena vedete che comincia a cadere. La tacca corrispondente al punto in cui afferrate la striscia indica il vostro tempo di reazione. A che distanza dal punto inferiore deve trovarsi il segno dei 50,0 ms, 100 ms, 150 ms, 200 ms e 250 ms?

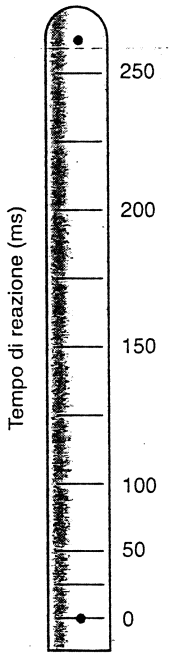


FIGURA 2.42 Problema 19.

 ISBN 88-408-1254-7

20. A una distratta ammiratrice di Isaac Newton sfugge inavvertitamente di mano una mela fuori dal parapetto di un cavalcavia sopra un'autostrada. Nell'istante in cui la lascia andare, verticalmente sotto di essa sta passando, alla velocità di 55 km/h, il muso di un autocarro lungo 12 m. La mela cade dietro di esso mancandolo per un soffio. Da che altezza, sopra l'autocarro, è caduta la mela?
21. Un razzo viene lanciato verticalmente con accelerazione costante di 20 m/s^2, che agisce per il tempo di 1,0 min. A questo punto il combustibile si esaurisce e il razzo prosegue la sua corsa come corpo in caduta libera. (a) Che altezza massima raggiungerà? (b) Quanto sarà il tempo totale trascorso dal lancio alla ricaduta a terra? (Si trascuri la variazione di g con l'altitudine.)
22. Un giocatore di pallacanestro, per infilare il pallone a canestro, salta in alto per un'altezza di 76 cm. Quanto tempo impiega a coprire (a) i 15 cm più alti del salto, e (b) i 15 cm più bassi? Ciò aiuta a spiegare come mai questi giocatori sembrano «galleggiare» quando sono in prossimità del culmine del loro salto (Figura 2.43).

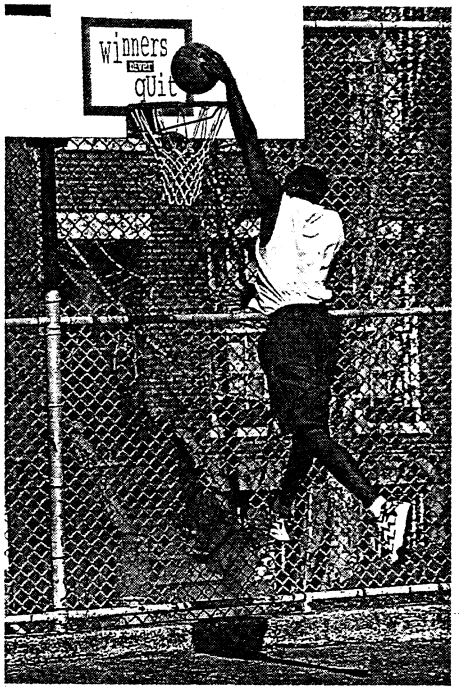


FIGURA 2.43 Problema 22.

23. Gettiamo un sasso verticalmente in aria. Durante l'ascesa passa attraverso il punto A con velocità v e poi attraverso il punto B, situato 3,00 m più in alto, con velocità $v/2$. Calcolare (a) la velocità v e (b) l'altezza massima, sopra il punto B, raggiunta dal sasso.
24. Gli impianti sperimentali a gravità zero del centro di ricerca Lewis della NASA comprendono una torre di caduta alta 145 m. Si tratta di una torre verticale che consente, fra l'altro, di lasciar cadere nel vuoto una sfera di 1 m di diametro contenente campioni in prova. (a) Per quanto tempo la sfera rimane in caduta libera? (b) Qual è la sua velocità quando tocca il fondo della torre? (c) Quando colpisce il fondo, mentre la sua velocità si annulla la sfera subisce un'accelerazione media di modulo pari a $25g$. Di quale distanza si sposta durante questa fase di decelerazione?
25. Una donna, cadendo dal tetto di un edificio alto 43,2 m, finì su una tettoia in lamiera, che si deformò per una profondità di 45,7 cm, ciò che le consentì di sopravvivere senza gravi danni. Quale accelerazione, supposta costante, subì durante l'urto? Esprimete la risposta come multiplo di g.
26. Un'unità disco rigido per calcolatore elettronico è progettata per sopportare un'accelerazione di $100g$ senza subire danni. Supponiamo che, cadendo per terra, si arresti nello spazio di 2,0 mm. Da quale altezza massima può cadere senza danneggiarsi?
27. Come appare nella Figura 2.44, Clara salta da un ponte sùbito seguita da Remo. Quanto ha tardato Remo a lanciarsi dopo Clara? Remo è alto 1,70 m e il livello di partenza coincide con il bordo della fotografia. Prendete le misure in scala direttamente dalla figura.



FIGURA 2.44 Problema 27.

28. Un paracadutista si getta in caduta libera per 52,0 m. Poi il paracadute si apre, e da quel momento rallenta con accelerazione costante di valore assoluto 2,10 m/s^2, toccando il suolo alla velocità di 2.90 m/s. (a) Per quanto tempo è rimasto in aria? (b) Da che altezza è iniziata la caduta?
29. Una sferetta d'acciaio per cuscinetti, lasciata cadere dal tetto di un edificio (inizialmente ferma), passa davanti a una finestra impiegando 0,125 s a percorrerne l'altezza, che è di 120 cm. Quindi cade sul marciapiedi e rimbalza «perfettamente» fino a passare nuovamente davanti alla finestra incontrandone il bordo inferiore 2,0 s dopo essere passata in discesa dal medesimo punto. Quanto è alto l'edificio? (Un corpo che rimbalza con urto completamente elastico presenta a una certa altezza uguali velocità scalari sia all'andata sia al ritorno.)

30. Un giocoliere palleggia in aria 5 sfere con entrambe le mani. Ciascuna sfera sale di 2,0 m al di sopra delle sue mani. Quanti lanci in aria compie approssimativamente ciascuna mano in 1 minuto?

31. Stimare il ragionevole numero massimo di sfere che un giocoliere può palleggiare in aria con le due mani in funzione dell'altezza h cui le sfere vengono lanciate sopra le mani.

32. Immaginiamoci Galileo che lascia cadere due corpi dall'alto della torre di Pisa. (a) Se, lasciandoli cadere con le due mani, uno dei due parte leggermente prima dell'altro, diciamo di $\Delta t = 0{,}1$ s, qual è la distanza verticale che li separa quando il primo colpisce il terreno? (b) Quale scarto Δt massimo sarebbe tollerabile per far sì che questa distanza non superi 1 cm? (Trascurate gli effetti dell'aria.)

33. Al National Physical Laboratory in Gran Bretagna hanno eseguito una misurazione di g lanciando verticalmente in alto una sfera di vetro in un tubo a vuoto e lasciandola ricadere. Come illustrato nella Figura 2.45, sia Δt_i l'intervallo di tempo fra i due passaggi della sfera a un livello inferiore, e Δt_s l'intervallo di tempo fra i due passaggi a un livello superiore. Posta H la distanza tra i due livelli, si dimostri che

$$g = \frac{8H}{(\Delta t_i)^2 - (\Delta t_s)^2}.$$

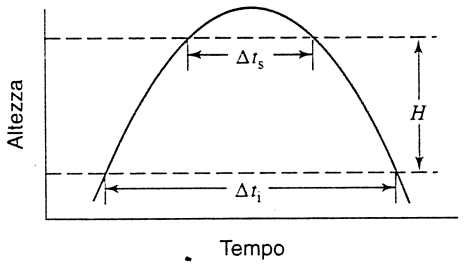


FIGURA 2.45 Problema 33.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. La velocità di un oggetto è data dall'espressione

$$v_x(t) = e^{-t^2/100}(t + 10 \sin \pi t).$$

All'istante $t = 0$, sia v_x sia x risultano nulli. (a) Trovare per via numerica la prima occorrenza di v_x nulla che si verifica dopo la partenza e la distanza percorsa fino a quell'istante. (b) Trovare la posizione dell'oggetto per $t \to \infty$.

CAPITOLO 3

FORZA E LEGGI DI NEWTON

Nel Capitolo 2 ci siamo occupati del moto di una particella. Non ci siamo mai domandati però quale fosse la «causa» del moto. Semplicemente lo abbiamo descritto in funzione della posizione, della velocità e dell'accelerazione della particella. In questo capitolo affronteremo la dinamica, cioè lo studio delle cause che provocano il moto.

Il nostro approccio alla dinamica, chiamato generalmente meccanica classica, fu sviluppato e largamente sperimentato nel XVII e nel XVIII secolo. Teorie più recenti (la relatività ristretta e la relatività generale, nonché la meccanica quantistica) hanno evidenziato domìni dello scibile lontani dalle esperienze ordinarie, in cui le previsioni della meccanica classica divergono dai risultati sperimentali, anche se, nelle condizioni limite degli oggetti ordinari, queste nuove teorie vengono a coincidere con quelle classiche.

Ma anche senza tenere minimamente conto della relatività o della meccanica quantistica, siamo in grado di costruire grattacieli e di studiare le proprietà dei materiali che li sorreggono; costruire aeroplani capaci di trasportare centinaia di persone compiendo mezzo giro del mondo; inviare sonde spaziali in ardite missioni per esaminare pianeti, comete e lo spazio extrasolare. Questo è il dominio della meccanica classica.

3.1 MECCANICA CLASSICA

Gli antichi filosofi rimanevano perplessi di fronte al moto dei corpi. Essi erano angustiati da domande del tipo: "Il moto richiede necessariamente una causa? In questo caso qual è la natura di questa causa?" Di fronte a queste domande la confusione imperò fino al XVII secolo, quando Galileo (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727) svilupparono un nuovo modo di trattare il moto che ora noi chiamiamo *meccanica classica*. Newton presentò le sue tre leggi del moto nel 1687 nell'opera *Philosophiae naturalis principia mathematica*, comunemente chiamate *Principia*. Le leggi di Newton sulla meccanica classica hanno costituito il fondamento della nostra comprensione del moto e delle sue cause fino alle scoperte del XX secolo, quando la fisica quantistica (che governa il comportamento del mondo microscopico, come quello degli elettroni e degli atomi) e la teoria della relatività ristretta (che governa il comportamento dei corpi che si muovono ad altissima velocità) hanno messo in luce i limiti della meccanica classica.

In questa disciplina si focalizza l'attenzione sul moto di un particolare corpo, che interagisce con i corpi circostanti (il suo *ambiente*) in modo da variare la sua velocità, subendo cioè una accelerazione. Nella tabella 3.1 sono elencati alcuni casi comuni di moto accelerato e, per ciascuno di questi, viene indicato il corpo dell'ambiente circostante maggiormente responsabile dell'accelerazione. Il problema principale della meccanica si delinea in questo modo: (1) un corpo di proprietà fisiche note (massa, volume, carica elettrica, eccetera) si trova in una posizione iniziale specificata e sta muovendosi con velocità iniziale nota; (2) conosciamo (o possiamo misurare) tutte le interazioni che il corpo subisce con l'ambiente; (3) siamo ora in grado di prevedere il moto del corpo che ne seguirà? In altre parole, possiamo calcolare la posizione e la velocità del corpo in qualsiasi istante successivo?

In questa analisi cominceremo col trattare tutti i corpi fisici come *particelle puntiformi*, termine col quale indichiamo corpi per i quali possiamo ignorare la struttura interna e il moto relativo delle singole parti, tutte caratterizzate dal medesimo tipo di moto. Spesso siamo di fronte a moti di corpi estesi in cui le diverse componenti possono avere interazioni differenti con l'ambiente esterno. Per esempio pensiamo a un operaio che spinge una cassa premendo su un lato mentre un altro lato subisce attrito scivolando sul pavimento. Se tutte le parti della cassa si muovono allo stesso

 ISBN 88-408-1254-7

TABELLA 3.1 **Alcuni esempi di moto accelerato e cause principali**

Corpo	*Tipo di moto*	*Corpo presente nell'ambiente*	*Tipo di forza*
Mela	Cade da un albero	Terra	Gravitazionale
Automobile	Frena	Rivestimento stradale	D'attrito
Ago della bussola	Ruota dirigendosi verso nord	Terra	Magnetica
Getto d'inchiostro in una stampante	Devia	Condensatore elettrico	Elettrostatica
Pallone aerostatico gonfio d'elio	Si alza da terra	Aria	Di galleggiamento

modo, possiamo trattarla come fosse una particella puntiforme. Di conseguenza non ha alcuna importanza individuare in quale modo l'ambiente interagisca con l'oggetto; il nostro interesse si concentra sull'*effetto complessivo* di tutte le interazioni con l'ambiente. (Più avanti nel corso degli studi incontreremo situazioni nelle quali il punto di applicazione delle forze a un oggetto esteso *riveste* importanza, ma per il momento ci limitiamo a trattare quei casi in cui i corpi equivalgono a particelle.)

Descriviamo l'interazione di un corpo con il suo ambiente mediante una *forza* $\boldsymbol{F}$. Possiamo immaginare questa forza come qualcosa che tira o spinge in una particolare direzione. Per descrivere le forze utilizziamo i vettori: ad ogni forza dobbiamo quindi associare la direzione e il verso in cui essa agisce; inoltre le forze si combinano con le regole di addizione vettoriale. In questo capitolo ci dedicheremo per lo più a casi che comportano moto unidimensionale, nel qual caso dovremo specificare la componente della forza (con il suo segno) relativa a quella particolare direzione.

Ogni forza esercitata su un oggetto trova la sua causa in un particolare corpo dell'ambiente esterno. Agli inizi dei vostri studi di meccanica classica, nell'analizzare le forze che intervengono in un determinato problema vi tornerà utile descrivere ciascuna forza indicando il corpo su cui essa agisce e il corpo dell'ambiente che ne è responsabile.

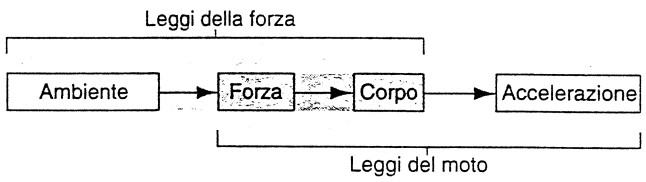


FIGURA 3.1 Il nostro programma di studio della meccanica. I tre riquadri a sinistra sottolineano che la forza è data da un'interazione tra un corpo e il suo ambiente esterno. I tre riquadri a destra ricordano che una forza agente su un corpo lo accelera.

Ne sono un esempio le espressioni "la spinta esercitata *su* una cassa *da* un operaio", "la forza d'attrito esercitata *dal* pavimento *sulla* cassa", oppure, "la forza gravitazionale agente *su* una cassa *per effetto* della Terra." Questa abitudine vi sarà di particolare aiuto quando tratteremo della terza legge di Newton.

Affronteremo il tema della meccanica classica seguendo questo schema: dapprima definiremo il modulo di una forza riferendoci all'accelerazione che questa forza imprime su un particolare corpo campione. Poi assegneremo una *massa* m a un corpo generico confrontando l'accelerazione impressa a questo corpo con quella impressa al corpo campione, quando essi siano sottoposti alla medesima forza. Infine svilupperemo le *leggi della forza* basandoci sulle proprietà del corpo e del suo ambiente. La forza compare sia nelle leggi del moto (che legano l'accelerazione di un corpo all'azione di una certa forza) sia nelle leggi della forza (che ci guidano nel calcolo della forza agente su un corpo immerso in un certo ambiente). Le leggi del moto e le leggi della forza messe assieme costituiscono le leggi della meccanica classica, come illustrato nella Figura 3.1.

Questo schema descrittivo della meccanica non può essere affrontato in modo parziale, ma va considerato nella sua interezza, giudicandone il successo in base alla risposta che riesce a fornire a due domande: (1) lo schema fornisce risultati che aderiscono all'esperienza? (2) Le leggi della forza sono espresse in modo semplice e ragionevole? Il successo della meccanica classica consiste nell'entusiastica risposta affermativa a queste due domande.

3.2 PRIMA LEGGE DI NEWTON

Prima di Galileo la maggior parte dei filosofi pensava che per mantenere un corpo in moto fosse necessario qualche tipo di influenza su di esso, ovverosia una *forza*. Essi erano convinti che un corpo si trovi nel suo stato naturale quando è a riposo. Per mantenere un corpo in moto rettilineo a velocità costante, quindi, sarebbe necessaria, secondo la loro concezione, una forza esterna che continuamente lo sospingesse; altrimenti esso si fermerebbe «spontaneamente».

Volendo dimostrare questa tesi sperimentalmente dovremmo dapprima trovare il modo di liberare un corpo da qualunque influenza dell'ambiente esterno e da tutte le forze che agiscono su di esso. Non è tanto facile da ottenere, ma in certe situazioni possiamo fare in modo che le forze si riducano enormemente. Studiando il moto man mano che diminuisce l'intensità delle forze, possiamo farci un'idea di quali sarebbero le caratteristiche del moto se tutte le forze esterne si annullassero completamente.

Collochiamo un corpo campione, per esempio un blocco, su un piano orizzontale rigido. Facendo scivolare questo

corpo sul piano e lasciandolo andare, osserviamo che esso prima rallenta e poi si arresta. Ed è questa l'osservazione che in passato sorreggeva l'idea che il moto debba cessare quando viene a mancare una forza esterna, rappresentata in questo caso dalla mano che inizialmente spinge il blocco. Possiamo tuttavia confutare questo ragionamento nel seguente modo. Eseguiamo l'esperimento con un blocco liscio su un piano altrettanto liscio e utilizzando una sostanza lubrificante. Noteremo che la velocità diminuisce più lentamente. Rendiamo ora blocco e superficie ancor più lisci e utilizziamo un lubrificante più efficace. Ripetendo l'esperimento si osserverà che il blocco rallenta sempre meno e che finisce per arrestarsi sempre più lontano. Possiamo condurre l'esperimento tenendo il blocco sospeso sopra la superficie mediante un sottilissimo cuscinetto d'aria compressa; una tale disposizione si avvicina alla condizione limite di assenza d'attrito, dato che basta una spinta impercettibile per far scivolare il blocco a velocità lenta e quasi costante. Ora possiamo estrapolare il comportamento limite affermando che, se eliminassimo totalmente l'attrito, il corpo in moto continuerebbe a muoversi indefinitamente a velocità costante in direzione rettilinea. Certo che occorre una forza esterna per avviare il moto del corpo, ma *per mantenerlo in moto uniforme non occorre alcuna forza.*

Non è facile creare una condizione che annulli tutte le forze agenti su un corpo. Ogni corpo che si trovi sulla Terra o nelle sue vicinanze è soggetto alla forza di gravità e qualsiasi oggetto subisce attrito sia che si trovi a contatto con un piano di sostegno sia che galleggi in aria o in un altro fluido. Fortunatamente, per studiare il moto in assenza di forze esterne, non è indispensabile ricorrere al vuoto dello spazio interstellare perché, finché siamo interessati al moto di un oggetto nel suo complesso, *non c'è distinzione tra un corpo libero da forze esterne e uno soggetto a forze esterne la cui risultante sia pari a zero.* Talvolta indicheremo questa risultante delle forze esterne col termine di forza netta. Per esempio, possiamo spingere il blocco che scivola sulla superficie controbilanciando la forza d'attrito che la superficie applica al blocco; inoltre la forza orientata verso l'alto che la superficie di appoggio applica al blocco controbilancia la forza di gravità agente su di esso. La risultante di tutte le forze può quindi essere nulla e il corpo in questo caso continua ad avanzare con moto rettilineo uniforme.

Si osservi soprattutto che, malgrado le forze che agiscono sul blocco del nostro esempio siano quattro, la loro somma *vettoriale*, cioè la risultante o forza netta, è nulla: infatti forze uguali in modulo e direzione, ma aventi versi opposti, si annullano. Siamo quindi in grado di applicare una forza esterna, come la spinta del braccio o di un motore, regolandola in modo da controbilanciare le forze che agiscono naturalmente sul corpo, come la forza d'attrito.

Newton ha assunto questo principio come prima legge del moto.

> *Considerate un corpo su cui agisca una forza netta nulla. Se il corpo è a riposo, in tale condizione rimane. Se invece è in moto, esso continuerà a procedere con velocità vettoriale costante.*

La prima legge e i sistemi di riferimento

Immaginate di stare seduti in macchina e di avere la cintura di sicurezza ben serrata. Quando l'auto comincia a frenare, il libro che sta appoggiato al vostro fianco slitta in avanti. Non si vede alcuna forza spingerlo, eppure esso si muove rispetto a voi che l'osservate, in apparente violazione della prima legge di Newton. Ma un vostro amico che si trova in quel momento a terra sul ciglio della strada vede l'auto, assieme a voi e al libro, muoversi inizialmente alla velocità, diciamo, di 30 km/h, e ridursi d'improvviso a 25 km/h. L'amico osserva che il libro, in assenza d'attrito sul sedile, continua ad avanzare alla velocità di 30 km/h. Secondo lui non esiste alcuna violazione della prima legge di Newton.

Per fare un altro esempio pensate ora di essere seduti in aereo trattenuti dalla cintura; incontrando un'improvvisa turbolenza il velivolo precipita di un metro. Il bicchiere che avete davanti vi appare come lanciato in aria per un metro, senza che su di esso abbia agito alcuna forza. Di nuovo, secondo la vostra prospettiva, percepite una violazione della prima legge di Newton. Ma dall'aereo che sta volando a fianco al vostro e che non viene colpito dalla turbolenza vedono il bicchiere proseguire in moto rettilineo mentre voi precipitate improvvisamente di un metro: concludono che la prima legge di Newton è rispettata.

Ciascun osservatore, che siate voi a bordo dell'auto o dell'aereo, oppure i vostri amici a terra o su un altro aereo, costituisce un sistema di riferimento. Un sistema di riferimento implica l'esistenza di un sistema di coordinate spaziali e di orologi, che consentano all'osservatore di determinare le posizioni, le velocità e le accelerazioni nel proprio particolare *sistema di riferimento*. Di conseguenza osservatori in diversi sistemi di riferimento possono misurare velocità o accelerazioni differenti.

La prima legge di Newton, che sembra a prima vista una conclusione ovvia dei nostri ragionamenti, è molto importante perché ci permette di individuare una categoria particolare di riferimenti per i quali sono applicabili le leggi della meccanica classica. Nell'esempio dell'automobile voi e il vostro amico siete giunti a conclusioni contrastanti: secondo voi il libro accelera, secondo l'amico la sua accelerazione è nulla. Possiamo dire che in generale l'accelerazione dipende dal sistema di riferimento nel quale viene misurata. Le leggi della meccanica classica sono valide però solamente in quei sistemi di riferimento in cui *tutti* gli osservatori misurano la *medesima* accelerazione per un corpo in movimento. La prima legge di Newton ci permette di scegliere questa speciale famiglia di sistemi di riferimento enunciando il principio in questo modo:

> *quando un corpo è soggetto a una forza risultante nulla è possibile individuare una classe di riferimenti rispetto ai quali la sua accelerazione è zero.*

La naturale tendenza dei corpi a mantenere il loro stato di quiete o di moto rettilineo uniforme è chiamata *inerzia*. Per questo la prima legge di Newton è detta anche *legge d'inerzia* e i sistemi di riferimento nei quali è valida si chiamano *inerziali*.

 ISBN 88-408-1254-7

Per assicurarci che un certo riferimento sia un sistema inerziale, collochiamo un corpo in quiete rispetto al sistema e verifichiamo che su di esso agisca una forza risultante nulla. Se il corpo non sta fermo, il sistema di riferimento non è inerziale. Parimenti proviamo a disporre il corpo, sempre soggetto a forza netta nulla, in moto rettilineo uniforme; se la sua velocità cambia, o in modulo o in direzione o in verso, il sistema di riferimento non è inerziale. Un riferimento che invece sia in grado di superare positivamente queste due prove è un sistema inerziale.

Trovandovi a bordo dell'auto che frena, il vostro sistema di riferimento non è inerziale, e non potete quindi applicare le leggi della meccanica come le abbiamo enunciate. L'amico a terra invece si trova in un sistema di riferimento inerziale e le può quindi applicare con successo. Può misurare l'accelerazione dell'automobile in frenata (accelerazione provocata dalla forza d'attrito dei pneumatici sull'asfalto) e concludere che la forza agente sul libro è complessivamente nulla, ciò che giustifica il suo moto uniforme. Analogamente l'aereo che vola indisturbato e da cui osservano voi e il bicchiere è un sistema di riferimento inerziale; i suoi passeggeri possono applicare a buon diritto le leggi della meccanica, associare l'improvvisa caduta verticale del vostro aereo con una forza risultante verticale (in questo caso data dalla differenza tra la forza di gravità e la forza di sostentamento aerodinamico del velivolo) e rendere perfettamente conto del moto inerziale del bicchiere.

Sistemi di riferimento inerziali e moto relativo

Supponete di essere su un'automobile che viaggia alla velocità costante di 22 m/s. L'amico che avete a fianco viaggia anch'egli alla medesima velocità. Se gli lanciate una pallina in modo che gli cada in grembo, la pallina non risente della velocità dell'auto. Se l'auto prosegue a velocità vettoriale costante, la pallina cadrà in grembo dove programmato.

Immaginiamo ora che la vostra amica Sabrina vi sorpassi su un'altra macchina alla velocità di 27 m/s: la vedrete allontanarsi alla velocità di 27 m/s – 22 m/s = 5 m/s. Quest'ultima velocità naturalmente è calcolata rispetto alla vostra auto. Ora cercate di eliminare mentalmente tutti i riferimenti estranei che avete a disposizione: la vista del paesaggio che vi passa a fianco, l'aria che lambisce la carrozzeria, le irregolarità del fondo stradale, il rumore del motore, ecc.; considerate solo le due macchine avulse dal contesto. Non avreste alcuna maniera di stabilire quale delle due auto si stia «realmente muovendo». Per esempio la macchina di Sabrina potrebbe essere ferma mentre voi indietreggiate con velocità di modulo pari a 5 m/s; la vostra osservazione darebbe comunque il medesimo risultato. Un minuto dopo il sorpasso, la distanza che vi separa da Sabrina è pari alla velocità relativa moltiplicata per l'intervallo di tempo: 5 m/s · 60 s = 300 m.

Ora riesaminiamo la scena con gli occhi del vostro amico Beppe, che sta fermo per strada (Figura 3.2). Supponiamo che l'istante del sorpasso coincida con il momento in cui entrambe le auto passano proprio davanti a Beppe. Egli un minuto dopo troverà che voi avete percorso una lunghezza di 22 m/s · 60 s = 1320 m, mentre Sabrina si è allontanata di 27 m/s · 60 s = 1620 m. Beppe potrà concludere che tra le due auto intercorrono 1620 m – 1320 m = 300 m di distanza e quindi si trova d'accordo con voi.

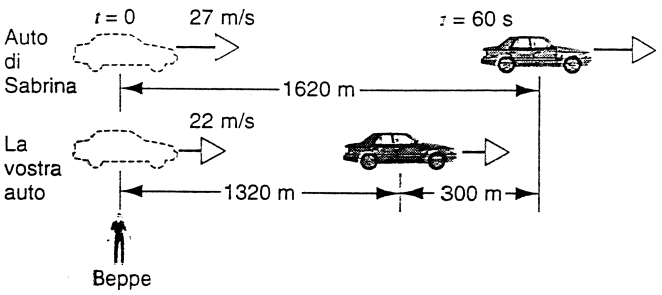


FIGURA 3.2 Voi e Beppe concordate nel valutare che dopo 60 s l'auto di Sabrina si trova 300 m davanti alla vostra.

Ripetiamo l'esperimento supponendo invece che Sabrina, subito dopo il sorpasso, avvistando la polizia, freni passando dalla velocità di 27 m/s alla velocità di 20 m/s in 3,5 s. Secondo le osservazioni di Beppe, posta la direzione del moto parallela e concorde con l'asse x, l'accelerazione di Sabrina è, in base all'Equazione 2.26 risolta rispetto ad a_x,

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(20\ \text{m/s}) - (27\ \text{m/s})}{3{,}5\ \text{s}} = -2{,}0\ \text{m/s}^2 .$$

Secondo il vostro sistema di riferimento, la velocità di Sabrina è ora 20 m/s – 22 m/s = – 2 m/s; in altre parole ora siete più veloci di Sabrina di 2 m/s. In base al vostro rilevamento, Sabrina varia la sua velocità da 5 m/s a – 2 m/s e quindi la sua accelerazione risulta

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-2\ \text{m/s}) - (5\ \text{m/s})}{3{,}5\ \text{s}} = -2{,}0\ \text{m/s}^2 .$$

Su questo valore di accelerazione siete d'accordo con Beppe!

Il fatto è che ambedue siete osservatori inerziali. Di conseguenza le vostre misurazioni sull'accelerazione di Sabrina concordano e così pure concorderanno le vostre valutazioni sulla forza che imprime quell'accelerazione. Dunque, *tutti gli osservatori in riferimenti inerziali concordano sulle misure di accelerazione* (anche se in generale non concordano sulle misure di posizione e velocità).

Considerate il caso diverso in cui anche voi, scorgendo la polizia, riduciate la vostra velocità da 22 m/s a 21 m/s, nel medesimo intervallo di 3,5 s. All'inizio dell'intervallo trovate che la velocità di Sabrina è di 5 m/s. Alla fine dell'intervallo la trovate modificata in 20 m/s – 21 m/s = –1 m/s (cioè con cambio di verso). Concludete che l'accelerazione di Sabrina è stata

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-1\ \text{m/s}) - (5\ \text{m/s})}{3{,}5\ \text{s}} = -1{,}7\ \text{m/s}^2 ,$$

che differisce dal risultato di Beppe, pari a $-2{,}0\ m/s^2$. Ma ora il vostro riferimento non è più inerziale perché durante quei 3,5 s avete rallentato e quindi non avreste superato la prova della prima legge di Newton.

Nel nostro testo avremo quasi sempre a che fare con sistemi inerziali in cui applicare le leggi della meccanica classica. Solo occasionalmente esporremo problemi che comportano la presenza di riferimenti non inerziali, come una macchina in accelerazione, una giostra in rotazione o un satellite in orbita. Anche se la Terra è un corpo rotante, un sistema di riferimento solidale con la Terra potrà considerarsi con buona approssimazione inerziale per la maggior parte degli scopi pratici. Il carattere non inerziale connesso alla rotazione della Terra emergerà solamente nelle applicazioni di larga scala, come negli studi sui missili balistici, sui venti o sulle correnti marine (Paragrafo 5.6).

Si noti che nella prima legge di Newton non si fa distinzione tra un corpo in quiete e un corpo in moto rettilineo uniforme. Entrambi questi stati risultano «normali» quando sul corpo agisce una forza netta nulla. Questa osservazione appare evidente quando un corpo in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale viene considerato, da un secondo riferimento inerziale, in moto (rettilineo uniforme) rispetto al primo. Il primo osservatore troverà il corpo fermo. Il secondo osservatore lo troverà in moto rettilineo uniforme. Entrambi gli attribuiranno accelerazione zero (nessuna variazione di velocità) e concluderanno che su di esso agisce una forza netta nulla.

3.3 FORZA

In base alla prima legge di Newton, una forza netta *nulla* implica un'accelerazione *nulla*. Se invece la forza netta *non* è nulla? Sappiamo per comune esperienza che un corpo sottoposto a una forza subisce un'accelerazione. Sviluppiamo quindi il concetto di forza in funzione dell'accelerazione da essa provocata su un corpo campione. Qualunque corpo può servire da «campione», purché sia chiaramente identificato e riproducibile. Possiamo per esempio scegliere un blocco di rame o vetro di qualsiasi dimensione purché nota.

Prima di procedere a questo genere di misure occorre accertarsi, attraverso la prima legge di Newton, che stiamo lavorando in un sistema di riferimento inerziale. Un corpo inizialmente fermo resta fermo? Se si muove a velocità vettoriale costante, mantiene il suo moto rettilineo uniforme? Nel tentativo di rispondere a questo secondo quesito, scopriremo probabilmente che il corpo, una volta in moto, rallenta inesorabilmente a causa dell'attrito. Cercheremo allora di creare le condizioni ambientali che consentono di ridurre al minimo questo attrito, in modo che la forza d'attrito agente sul corpo risulti quantomeno trascurabile rispetto alle forze che noi applicheremo per l'esperimento.

Scegliamo una molla leggera come agente responsabile delle forze applicate. Esistono molle di diversi gradi di rigidità, che quindi richiedono sforzi differenti per essere estese. Osserviamo anche che, data una certa molla, la forza richiesta per estenderla di una data lunghezza aumenta man mano che la stiriamo.

Disponiamo il corpo campione su una superficie orizzontale idealmente priva d'attrito e fissiamo ad esso un capo della molla (Figura 3.3a). Per tentativi tiriamo la molla fino a trovarne l'elongazione che provoca sul corpo campione un'accelerazione misurata di $1\ m/s^2$ esatto (Figura 3.3b). Definiamo la forza così applicata come *una unità* di forza, e annotiamo ad uso futuro l'elongazione ΔL della molla corrispondente a questa forza. Ripetiamo quindi l'esperimento estendendo maggiormente la molla finché il corpo campione subisca un'accelerazione di $2\ m/s^2$; definiamo la forza corrispondente come *due unità* di forza e annotiamo la nuova elongazione richiesta per ottenere una tale forza. Proseguendo troveremo le condizioni che determinano una forza pari a *tre unità*, e così via. Abbiamo tarato la molla, cioè per ogni valore di elongazione siamo ora in grado di prevedere qual è l'accelerazione impressa al corpo campione. Con lo stesso corpo possiamo tarare altre molle di diversa elasticità.

Otteniamo alla fine una serie di molle tarate in funzione dell'accelerazione che esse sono in grado di imprimere al corpo campione. Con questo dispositivo possiamo ora misurare anche forze ignote. Per esempio, sospendiamo un corpo a una delle molle tarate, in modo che esso penda verticalmente e rimanga in equilibrio, come in Figura 3.4a: essendo fermo, la forza risultante che agisce su di esso deve essere nulla e ciò significa che la forza esercitata dalla molla verso l'alto è contrapposta ed eguaglia in modulo la forza di gravità orientata verso il basso; la somma vettoriale delle due forze è zero. Misurando ora l'elongazione della molla, attraverso la tabella di taratura precedentemente costruita possiamo conoscere il valore dell'accelerazione di gravità cui è sottoposto il corpo. Abbiamo costruito una comune bilancia a molla, quale comunemente usata al mercato per pesare le pere o le zucchine.

Anche le forze d'attrito si possono misurare in questo modo. Disponiamo il corpo sulla superficie orizzontale che vogliamo sottoporre a misura, vi attacchiamo una molla tarata come illustrato nella Figura 3.4b, e tiriamo la molla in modo che il corpo avanzi con velocità esattamente costante. In questa situazione, la forza applicata dalla molla eguaglia

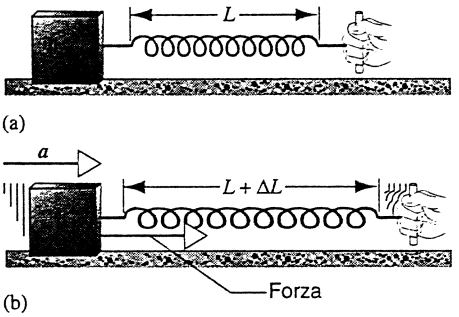


FIGURA 3.3 (a) Un corpo campione a riposo su una superficie orizzontale priva d'attrito. (b) Tirando la molla verso destra di una distanza ΔL, il corpo accelera.

 ISBN 88-408-1254-7

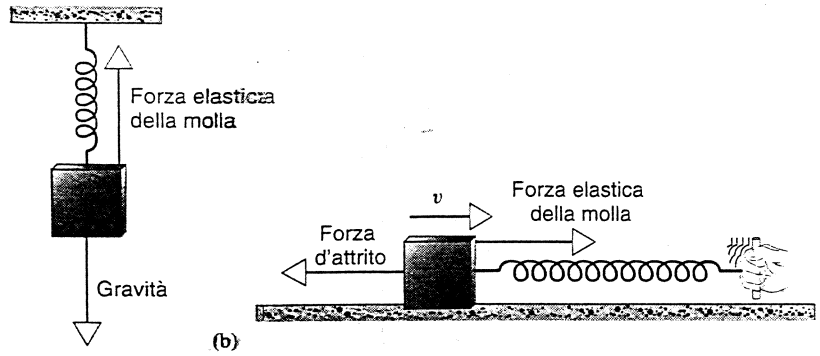


FIGURA 3.4 (a) Un corpo è sospeso a una molla in posizione di riposo. Su di esso agiscono la forza di gravità e la forza elastica di richiamo della molla. (b) Un corpo si muove a velocità costante su una superficie orizzontale, che esercita sul corpo una forza d'attrito.

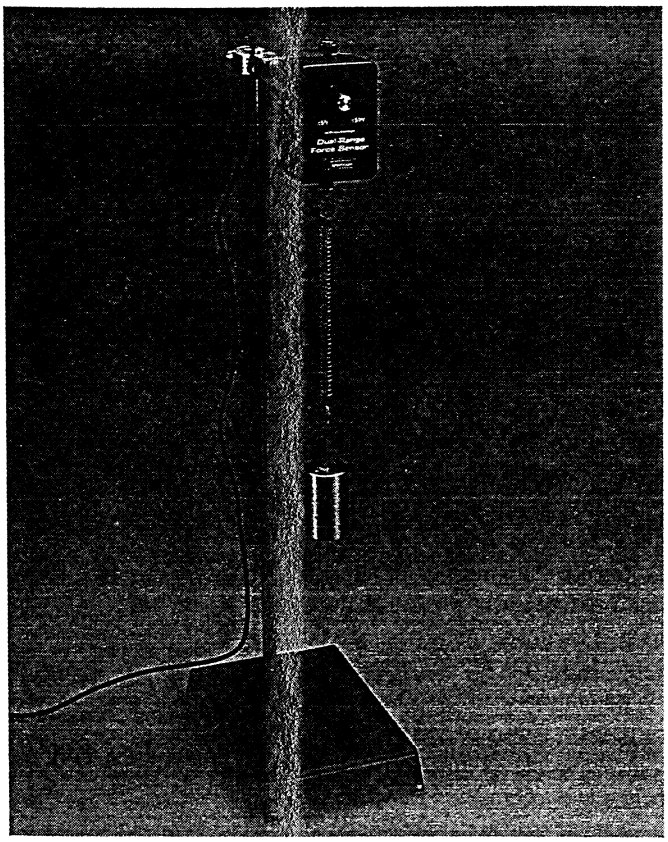


FIGURA 3.5 Una massa pende da una molla attaccata alla sonda di un dinamòmetro elettronico, che tramite un elaboratore dà il valore della forza. Per gentile concessione della *Vernier Software and Technology*.

in modulo la forza d'attrito (le due forze agiscono nella stessa direzione con versi opposti) e quindi la somma vettoriale delle due forze è zero. Il valore assoluto di queste forze resta quindi determinato dall'allungamento richiesto dalla molla. Una bilancia può servire dunque anche a questo scopo (disposizione che tuttavia assume più frequentemente il nome di *dinamòmetro*).

Per misurare le forze sono disponibili in commercio dei dinamometri elettronici che, collegati a un computer, forniscono direttamente il valore della forza (Figura 3.5). La forza applicata all'elemento sensibile provoca una piccola deflessione di natura meccanica o elettromagnetica che, previa taratura, si può tradurre in un segnale elettronico registrato dall'elaboratore.

3.4 MASSA

Abbiamo descritto nel paragrafo precedente un metodo empirico per ottenere una serie di molle tarate, correlando la loro elongazione all'accelerazione impressa su un corpo campione. Riprendiamo gli esperimenti con l'intento di rispondere a un interrogativo: che effetto produce una *medesima forza* applicata a *corpi diversi*?

La pratica quotidiana ci suggerisce già una risposta qualitativa: ci richiede meno sforzo spingere una bicicletta che un'automobile! È chiaro che una stessa forza applicata a corpi diversi produce differenti accelerazioni. A questa proprietà dei corpi che li rende differenti al nostro tentativo di imprimergli un'accelerazione diamo il nome di *massa*. La massa è dunque la *proprietà di un corpo di opporsi alle variazioni del suo stato di moto*.

Come possiamo servirci delle molle tarate che accelerano corpi diversi per studiare la relazione tra forza e massa? Cominciamo col procurarci un secondo corpo campione identico al primo; saldandoli assieme otteniamo un corpo composto a cui possiamo applicare una unità di forza, quale avevamo precedentemente determinato: scopriamo che l'accelerazione impressa a questo nuovo corpo composto è la metà del caso già visto: 0,5 m/s^2. Se gli applichiamo una forza di due unità, l'accelerazione diventa di 1,0 m/s^2. Ricominciamo la serie di prove usando ora un oggetto composto da tre corpi campione uniti assieme; poi proviamo con quattro e così via. Ecco un specchietto dei risultati ottenuti:

Forza applicata	1 unità	2 unità	3 unità	4 unità
Accelerazione di un corpo campione	1,0 m/s^2	2,0 m/s^2	3,0 m/s^2	4,0 m/s^2
Accelerazione di due corpi campione	0,5 m/s^2	1,0 m/s^2	1,5 m/s^2	2,0 m/s^2
Accelerazione di tre corpi campione	0,33 m/s^2	0,67 m/s^2	1,0 m/s^2	1,3 m/s^2

Risulta evidente che, per ciascuna combinazione di corpi campione, l'accelerazione è direttamente proporzionale alla forza applicata (per esempio, una forza doppia implica in tutti i casi un'accelerazione doppia). La costante di proporzionalità è diversa per ciascuna riga della tabella ed è una proprietà caratteristica del corpo sottoposto ad accelera-

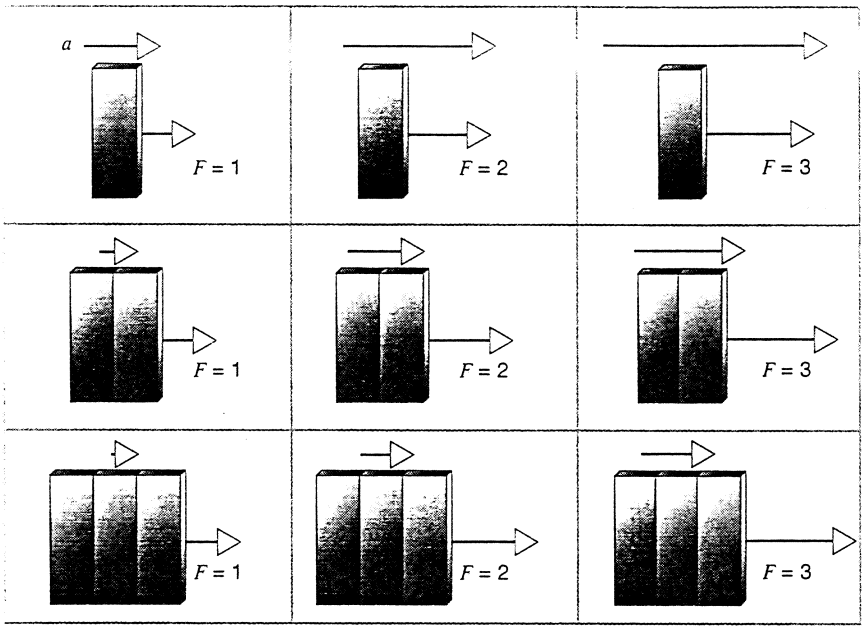


FIGURA 3.6 Esperimenti che illustrano la relazione tra forza (in unità arbitrarie), massa e accelerazione. I vettori accelerazione sono disegnati in scala sopra i blocchi. Leggendo i riquadri in senso orizzontale osserviamo che l'accelerazione è sempre proporzionale alla forza, ma la costante di proporzionalità è differente per le diverse masse. Leggendo i riquadri in senso verticale si osserva che, a parità di forza applicata, l'accelerazione impressa è inversamente proporzionale alla massa.

zione. Questa proprietà non è altro che la sua massa, che dunque esprime la proporzionalità tra la forza ad esso applicata e l'accelerazione subita. La Figura 3.6 dà un'idea schematica dei risultati di questi esperimenti, in cui risulta chiara la relazione tra forza, massa e accelerazione.

Dopo una serie di sperimentazioni analoghe concludiamo che, data una forza applicata, al crescere della massa diminuisce l'accelerazione. Ciò equivale a dire che l'*accelerazione prodotta da una certa forza è inversamente proporzionale alla massa del corpo cui è applicata.* La massa di un corpo può quindi considerarsi come la sua *capacità di opporsi all'accelerazione che una data forza gli imprime.*

Questa osservazione ci permette di confrontare direttamente le masse di due corpi diversi: applichiamo loro una stessa forza e per ciascuno di essi misuriamo l'accelerazione che ne risulta. Il rapporto tra i valori di accelerazione ottenuti è pari all'*inverso* del rapporto tra le loro masse. Applichiamo per esempio una forza F al corpo campione di massa m_{std} e misuriamone l'accelerazione, che chiamiamo a_{std}. Applichiamo poi la medesima forza F a un corpo di massa ignota m_x, misuriamone l'accelerazione e chiamiamola a_x. Vale quindi la proporzione

$$\frac{m_x}{m_{\text{std}}} = \frac{a_{\text{std}}}{a_x} \quad \text{(stessa forza applicata } F\text{)}. \tag{3.1}$$

A questo punto è possibile calcolare la massa del corpo ignoto in funzione della massa campione. Supponiamo per esempio che l'accelerazione del corpo ignoto sia $\frac{1}{3}$ dell'accelerazione impressa al corpo campione (sotto l'azione di una stessa forza); significa che il corpo ignoto ha massa tripla del corpo campione. Si noti che questo risultato non dipende dall'entità della forza applicata ai due corpi, come potete verificare dalla tabella sopra descritta: l'accelerazione del triplo corpo campione (ultima riga) è sempre $\frac{1}{3}$ dell'accelerazione subita dal singolo corpo campione (prima riga), indipendentemente dalle unità di forza applicate. Applicando dunque un'altra forza F' sia al corpo campione sia al corpo ignoto, e ottenendo le accelerazioni a'_{std} e a'_x, troviamo che il rapporto tra le accelerazioni non cambia:

$$\frac{m_x}{m_{\text{std}}} = \frac{a_{\text{std}}}{a_x} = \frac{a'_{\text{std}}}{a'_x}. \tag{3.2}$$

Per la massa da determinare otteniamo insomma sempre lo stesso valore, *indipendentemente da quale intensità di forza utilizziamo.* Il rapporto tra le masse m_x/m_{std} è dunque indipendente dalla forza e la massa è quindi una proprietà fondamentale del corpo non legata al valore della forza impiegata per confrontarla con la massa campione.

Estendendo questo metodo, possiamo confrontare le masse di due corpi qualsiasi, anziché confrontare la massa di ciascuno con quella del corpo campione. Consideriamo due oggetti qualunque, di masse m_1 ed m_2. Applichiamo una forza di modulo F al primo corpo e misuriamone l'accelerazione a_1. Applichiamo poi la stessa forza al secondo corpo ottenendone un'accelerazione a_2. Il rapporto tra le rispettive masse è dato da

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{(stessa forza applicata)}, \tag{3.3}$$

che è lo stesso rapporto che otterremmo con l'Equazione 3.1 se deducessimo le due masse dal confronto di ciascuna con quella del corpo campione.

Il procedimento seguito dimostra anche che due masse m_1 ed m_2, unite assieme a formare un sol corpo, si comportano meccanicamente come un corpo di massa $m_1 + m_2$. Ciò significa che *la massa si somma come una quantità scalare*, quale in effetti essa è.

Un esempio pratico dell'uso di questa tecnica – stabilire la massa misurando l'accelerazione prodotta da una certa forza – ci è offerto dalle misurazioni precise delle masse ato-

 ISBN 88-408-1254-7

miche. La forza in questo caso è di natura magnetica e l'accelerazione impressa è perpendicolare alla direzione della velocità dell'atomo, ciò che provoca una deviazione al suo percorso; il principio è esattamente lo stesso: il rapporto tra due masse atomiche è uguale al reciproco del rapporto delle loro accelerazioni. La misura della deviazione consente una determinazione precisa del rapporto di massa e, per confronto con una massa campione (quella del ^{12}C definita come 12 u esatte), permette la determinazione di precisi valori di massa, come quelli esposti nella Tabella 1.6.

3.5 SECONDA LEGGE DI NEWTON

La relazione che esprime la legge fondamentale della meccanica classica,

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}\,, \tag{3.4}$$

riassume i risultati di tutti gli esperimenti e di tutte le osservazioni precedenti. La quantità $\sum \boldsymbol{F}$ rappresenta il vettore *somma* di *tutte* le forze agenti *sul* corpo, m è la massa del corpo e $\boldsymbol{a}$ è la sua accelerazione (un vettore). In seguito ci riferiremo a $\sum \boldsymbol{F}$ come alla *risultante* delle forze o forza *netta*.

L'Equazione 3.4 esprime la seconda *legge di Newton*. Se la scriviamo nella forma $\boldsymbol{a} = (\sum \boldsymbol{F})/m$, vediamo subito che l'accelerazione del corpo è una grandezza direttamente proporzionale alla forza risultante che agisce su di esso ed ha direzione parallela a quella della forza. Ci accorgiamo inoltre che tale accelerazione è inversamente proporzionale alla massa del corpo.

Si noti che la prima legge di Newton sembra essere implicita nella seconda come caso particolare, poiché se $\sum \boldsymbol{F} = 0$ allora $\boldsymbol{a} = 0$. In altre parole, se la forza risultante su un corpo è nulla, anche la sua accelerazione risulta nulla e il corpo, come stabilisce la prima legge, è caratterizzato da velocità vettoriale costante. Pur tuttavia, la prima legge ha un ruolo importante e indipendente, in quanto permette di definire i sistemi di riferimento inerziali. Senza questa legge non potremmo stabilire in quali sistemi di riferimento si applica la seconda legge. Ci servono quindi ambedue le leggi per ottenere un sistema completo della meccanica classica.

L'Equazione 3.4 è un'equazione vettoriale. Come nel caso di tutte le equazioni vettoriali, possiamo scriverla anche in forma di tre equazioni unidimensionali,

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z\,, \tag{3.5}$$

relazioni scalari che legano le componenti lungo gli assi x, y e z della forza risultante ($\sum F_x$, $\sum F_y$ e $\sum F_z$) alle tre componenti lungo gli stessi assi dell'accelerazione (a_x, a_y e a_z), e alla massa m. Va posto in evidenza che $\sum F_x$, $\sum F_y$ e $\sum F_z$ sono le somme *algebriche* delle rispettive componenti di tutte le forze che agiscono su m. Nel calcolare tali somme bisogna tener conto dei segni delle singole componenti (cioè dei versi relativi delle forze).

Come tutte le equazioni, la seconda legge di Newton deve essere dimensionalmente coerente. Ricordando che i simboli [ ] indicano le *dimensioni* della grandezza riportata tra parentesi, abbiamo che $[m][a] = \mathrm{ML/T^2}$, per cui le dimensioni della forza sono

$$[F] = \mathrm{ML/T^2}\,.$$

La natura della forza non ha importanza; può essere gravitazionale, elettrica, nucleare o di altro tipo, e non importa quanto complicata sia l'equazione che la descrive; queste dimensioni valgono comunque.

TABELLA 3.2 Unità di misura nella seconda legge di Newton

Sistema di misura	*Forza*	*Massa*	*Accelerazione*
SI	newton (N)	kilogrammo (kg)	$\mathrm{m/s^2}$
CGS	dina (dyn)	grammo (g)	$\mathrm{cm/s^2}$
Britannico	libbra (lb)	slug	$\mathrm{ft/s^2}$

Nel sistema SI il corpo campione ha una massa di 1 kg (Paragrafo 1.5), e infatti misuriamo le masse degli oggetti comparandoli con il kilogrammo campione. Per imprimere alla massa di 1 kg un'accelerazione di 1 $\mathrm{m/s^2}$ è necessaria la forza di 1 $\mathrm{kg \cdot m/s^2}$. Questa combinazione di unità di misura è chiamata *newton* (abbreviata in N):

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m/s^2}\,.$$

Misurando la massa in kg e l'accelerazione in $\mathrm{m/s^2}$, in base alla seconda legge di Newton la forza si misura in N.

Altri due sistemi di unità di uso comune sono il sistema CGS (centimetro-grammo-secondo) e il sistema britannico. Nel sistema CGS la massa si misura in grammi e l'accelerazione in $\mathrm{cm/s^2}$. L'unità di misura della forza è la *dina*, che equivale a 1 $\mathrm{g \cdot cm/s^2}$. Considerato che 1 kg = 10^3 g e 1 $\mathrm{m/s^2} = 100\ \mathrm{cm/s^2}$, ne consegue che 1 N = 10^5 dine. La dina è una unità di forza piuttosto modesta, circa uguale al peso di un millimetro cubo di acqua (1 newton, invece, è il peso di circa mezzo bicchiere d'acqua).

Nel sistema britannico la forza è misurata in *libbre* (pound) e l'accelerazione in piedi al secondo quadrato ($\mathrm{ft/s^2}$). In questo sistema la massa accelerata di 1 $\mathrm{ft/s^2}$ dalla forza di 1 libbra è chiamata *slug*.

Esistono altre varianti ai sistemi di base esposti, ma questi tre sono di gran lunga i più comuni. La Tabella 3.2 riassume le unità di misura della forza; una lista più esauriente si trova nell'appendice G.

Analisi dinamica basata sulla seconda legge di Newton

Nell'analizzare problemi che coinvolgono la seconda legge di Newton è bene seguire sistematicamente una serie di passaggi:

1. Scegliete un sistema di riferimento inerziale opportuno. Stabilite l'orientamento e il verso degli assi coordinati nel riferimento scelto. Le componenti delle forze concordi con gli assi sono positive, quelle discordi sono negative.

2. Per ciascun corpo presente nel problema disegnate un *diagramma delle forze*, che illustri tutte le forze agenti sul corpo considerato. Trattate il corpo alla stregua di un oggetto puntiforme.
3. Marcate ciascuna forza con due lettere a pedice: la prima designa il corpo su cui agisce la forza; la seconda indica quale altro corpo presente nel sistema è responsabile della forza applicata. Per esempio, F_{AB} indica la forza F esercitata sul corpo A per effetto del corpo B, mentre F_{BA} designa la forza F esercitata sul corpo B dal corpo A. In presenza di molti corpi, A, B, C ..., è possibile che sul corpo A agiscano più forze, F_{AB}, F_{AC}, ..., ecc. Questo metodo di indicare le forze è molto utile perché evita il rischio di considerare forze fittizie non associate a corpi facenti parte dell'ambiente considerato.
4. Per ciascun corpo operate la somma vettoriale di tutte le forze che agiscono su quel corpo. In pratica ciò significa di solito addizionare separatamente le componenti x, y e z delle forze, prestando attenzione ai segni. Infine si applica l'Equazione 3.5 e si trovano le componenti dell'accelerazione impressa al corpo.

Gli esempi che seguono illustrano come applicare questo procedimento.

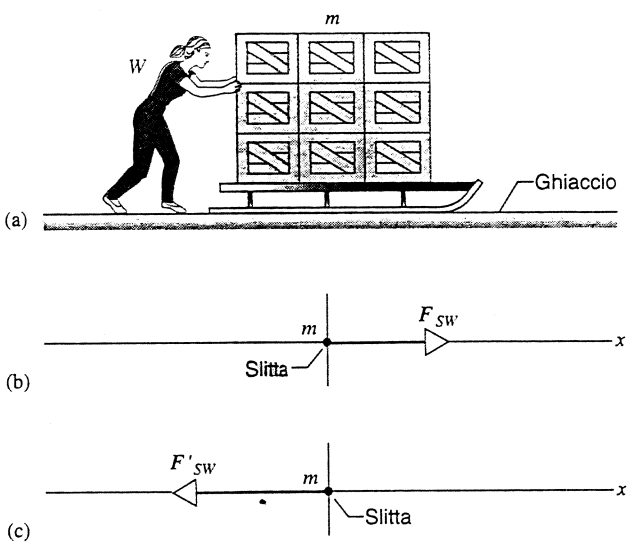


FIGURA 3.7 Problemi svolti 3.1 e 3.2. (a) Wanda spinge una slitta carica su una superficie priva d'attrito. (b) Diagramma delle forze in cui la slitta è trattata come una particella puntiforme ed è illustrata la forza che agisce su di essa. (c) Un altro diagramma delle forze relativo al caso in cui Wanda spinge in verso opposto.

PROBLEMA SVOLTO 3.1 Wanda (W) spinge una slitta carica di massa $m = 240$ kg per una distanza $d = 2{,}3$ m sulla superficie senza attrito di un lago ghiacciato. Wanda spinge con forza costante orizzontale $F_{SW} = 130$ N (Figura 3.7a). Se la slitta parte da ferma, qual è la sua velocità finale?

Soluzione Come si vede dalla Figura 3.7b, consideriamo un asse x orizzontale orientato verso destra e trattiamo la slitta come fosse un corpo puntiforme. La Figura 3.7b rappresenta un diagramma parziale delle forze. In un tale diagramma di solito si includono tutte le forze agenti sul corpo considerato; qui trascuriamo le due forze verticali che non influiscono sul problema, di cui parleremo in seguito. Assumiamo inoltre che F_{SW} sia l'unica forza orizzontale agente sulla slitta e che quindi $\sum F_x = F_{SW}$. La seconda legge di Newton ci dà a questo punto l'accelerazione subita dalla slitta:

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F_{SW}}{m} = \frac{130\text{ N}}{240\text{ kg}} = 0{,}54\text{ m/s}^2 .$$

L'Equazione 2.28, $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, ci dà la possibilità di conoscere il tempo necessario a percorrere una distanza $d = x - x_0$, nota l'accelerazione e posto $v_{0x} = 0$. Risolvendola rispetto a t troviamo $t = \sqrt{2d/a_x} = 2{,}9$ s. Da qui ricaviamo la velocità finale mediante l'Equazione 2.26, in cui poniamo $v_{0x} = 0$:

$$v_x = a_x t = (0{,}54\text{ m/s}^2)(2{,}9\text{ s}) = 1{,}6\text{ m/s} .$$

I vettori forza, accelerazione, spostamento e velocità finale sono tutti positivi e quindi orientati tutti verso destra nella Figura 3.7b.

Da osservare che Wanda, al fine di continuare ad applicare sempre la medesima forza costante, deve correre sempre più velocemente. Quando la slitta assume una velocità che ella non è più in grado di mantenere, la spinta viene a mancare e la slitta, in assenza anche d'attrito, prosegue la sua corsa a velocità rettilinea uniforme.

PROBLEMA SVOLTO 3.2 Con riferimento al precedente problema, Wanda ora vuole invertire il senso di marcia della slitta e farle assumere la medesima velocità scalare. Impiega un tempo complessivo di 4,5 s. Che forza costante applica alla slitta?

Soluzione Se la forza è costante, tale dev'essere anche l'accelerazione. Ricaviamone il valore dall'Equazione 2.26 risolta rispetto ad a:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(-1{,}6\text{ m/s}) - (1{,}6\text{ m/s})}{4{,}5\text{ s}} = -0{,}71\text{ m/s}^2 .$$

L'accelerazione qui ha un valore assoluto maggiore di quella del problema precedente (0,54 m/s^2): Wanda deve spingere più forte! Calcoliamo questa forza (costante) F'_{SW} tramite le relazione

$$F'_{SW} = ma_x = (240\text{ kg})(-0{,}71\text{ m/s}^2) =$$
$$= -170\text{ N} .$$

Il segno negativo sta a indicare che Wanda deve spingere nel verso negativo dell'asse x, come mostrato nel diagramma delle forze di Figura 3.7c.

PROBLEMA SVOLTO 3.3 Sul pianale di un autocarro, che viaggia alla velocità v_0 di 105 km/h, giace una cassa di massa $m = 360$ kg (Figura 3.8a). L'autista frena e la velocità in 17 s scende al valore $v = 62$ km/h. Assumendo che la cassa non scivoli sul pianale, quale forza (costante) applica quest'ultimo sulla cassa?

Soluzione Troviamo dapprima l'accelerazione della cassa, anch'essa costante. L'Equazione 2.26 risolta rispetto ad a_x dà

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{(62\text{ km/h}) - (105\text{ km/h})}{(17\text{ s})(3600\text{ s/h})} = -0{,}70\text{ m/s}^2 .$$

Avendo fissato come positiva la direzione destra, l'accelerazione è orientata verso sinistra.

 ISBN 88-408-1254-7

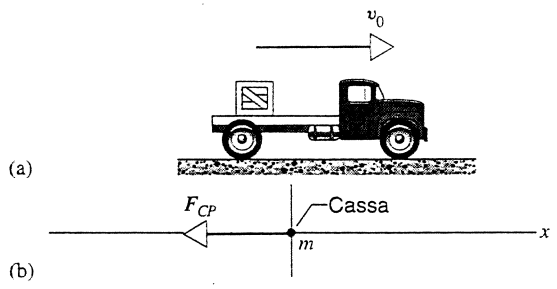


FIGURA 3.8 Problema svolto 3.3. (a) Una cassa sul pianale di un autocarro che sta rallentando. (b) Il diagramma delle forze relativo alla cassa.

Dalla seconda legge di Newton discende la forza F_{CP} esercitata sulla cassa dal pianale:

$$F_{CP} = ma_x = (360\text{ kg})(-0{,}70\text{ m/s}^2) = -250\text{ N}.$$

Questa forza è orientata come l'accelerazione e cioè verso sinistra nella Figura 3.8b. La forza deve essere applicata da un agente esterno alla cassa, come una cinghia o altro che assicuri la cassa al pianale. In sua mancanza, è l'attrito tra la cassa e il pianale che deve applicare la forza richiesta. Se l'attrito non è sufficiente a fornire i 250 N necessari, la cassa scivola sul pianale perché, vista da un osservatore a terra, la sua accelerazione è in valore assoluto minore di quella dell'autocarro.

3.6 TERZA LEGGE DI NEWTON

Consideriamo la Terra e la Luna. La Terra esercita una forza gravitazionale sulla Luna e la Luna esercita una forza gravitazionale sulla Terra. Tutte le forze fanno parte di analoghe mutue interazioni tra due o più corpi: non è possibile che esista una singola forza isolata.

Le forze che agiscono su un corpo A sono dovute alla presenza di altri corpi presenti nel suo ambiente. Supponete che B sia uno di questi corpi dell'ambiente di A. Tra le forze che agiscono sul corpo A, si consideri F_{AB}, forza esercitata dal corpo B. Rivolgendo invece l'attenzione sul corpo B, tutti gli altri corpi fanno parte del suo ambiente; tra questi troviamo A, che esercita una forza F_{BA} sul corpo considerato B. Tra F_{AB} ed F_{BA} intercorre una relazione data dalla terza legge di Newton.

Si constata sperimentalmente che, quando un corpo esercita una forza su un secondo corpo, esiste sempre un'altra forza esercitata dal secondo corpo sul primo. Inoltre risulta che le due forze sono *sempre* uguali in valore assoluto e agiscono sulla stessa direzione con versi opposti. Nel sistema dato dalla Terra e dalla Luna, il modulo della forza agente sulla Terra per effetto della Luna eguaglia quello della forza esercitata dalla Terra sulla Luna. Le due forze sono contrapposte, agiscono cioè lungo la linea congiungente i due corpi celesti, l'una in un verso e l'altra nel verso contrario.

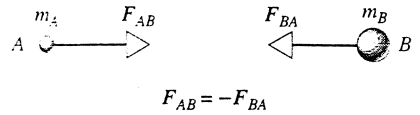


FIGURA 3.9 Terza legge di Newton. Il corpo A esercita una forza F_{BA} sul corpo B. Il corpo B deve necessariamente esercitare sul corpo A una forza $F_{AB} = -F_{BA}$.

La terza legge di Newton sintetizza queste osservazioni.

> *Se un corpo esercita una forza su un altro corpo, il secondo corpo esercita una forza sul primo. Queste due forze sono uguali in modulo, hanno la stessa direzione e versi opposti.*

Formalmente, se un corpo B esercita una forza F_{AB} sul corpo A (Figura 3.9), l'esperienza dimostra che il corpo A esercita una forza F_{BA} sul corpo B, legata alla prima forza dalla relazione

$$F_{AB} = -F_{BA}. \tag{3.6}$$

Il segno meno sta a indicare che le due forze hanno versi contrari, come mette in evidenza la Figura 3.9.

Per abitudine si dà alle due forze F_{AB} ed F_{BA}, frutto delle mutua interazione tra i due corpi, l'appellativo di forza di «azione» e forza di «reazione». L'attribuzione dei due nomi è del tutto arbitraria: ciascuna delle due forze può costituire l'azione, lasciando che sia l'altra forza a essere denominata reazione. L'uso di questi nomi non implica che una delle due forze, l'azione, sia in qualche modo causa della seconda, la reazione. Semplicemente entrambe le forze esistono e interagiscono mutuamente, e scegliendone una delle due come azione, all'altra non resta che assumere l'appellativo di reazione, senza che ciò significhi che quest'ultima reagisce a un qualche stimolo della prima. Da qui proviene una più sintetica e comune enunciazione della terza legge di Newton:

> *ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria.*

La legge impone l'esistenza di una reazione in presenza di ogni forza, e ne specifica in modo sintetico il modulo, la direzione e il verso.

È molto importante ricordare che l'azione e la reazione agiscono *sempre* su due corpi *diversi*, come ci rammentano i pedici sottoscritti ai simboli delle forze. Si incontrano frequentemente casi in cui su uno *stesso* corpo agiscono due forze uguali contrapposte (come in Figura 3.4). Queste due forze *non* sono una coppia di azione e reazione, come si evince anche dall'Equazione 3.6. Una coppia azione-reazione infatti richiede che una forza agisca su un corpo e l'altra su un secondo corpo. Se abbiamo cura di indicare la forza con le appropriate lettere al pedice, che identificano il corpo su cui agisce la forza e quello che ne è causa, è facile individuare la forza di reazione semplicemente invertendo l'ordine delle lettere a pedice. Per esempio:

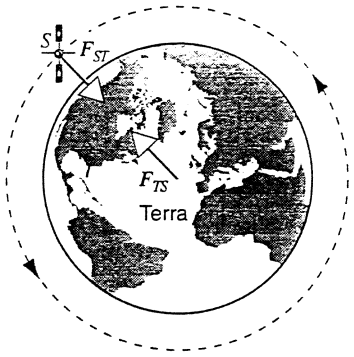


FIGURA 3.10 Una satellite in orbita terrestre. Le forze indicate costituiscono una coppia azione-reazione. Si osservi che agiscono su due corpi diversi.

Azione: Forza esercitata dal ripiano sul libro	*Reazione:* Forza esercitata dal libro sul ripiano
Azione: Forza esercitata dalla Terra sulla Luna	*Reazione:* Forza esercitata dalla Luna sulla Terra
Azione: Forza esercitata dal nucleo sull'elettrone	*Reazione:* Forza esercitata dall'elettrone sul nucleo
Azione: Forza esercitata dal piede sul pallone	*Reazione:* Forza esercitata dal pallone sul piede

Se ci prefiggiamo di studiare la dinamica di un solo corpo, per esempio il libro o il pallone, prenderemo in considerazione solamente un elemento della coppia azione-reazione: la forza che agisce sul corpo. L'altro elemento della coppia interverrà solo nel caso vogliamo studiare la dinamica anche del secondo corpo (il tavolo o il piede).

Alcune applicazioni della terza legge della dinamica sono descritte qui di seguito.

1. *Il satellite in orbita.* Nella Figura 3.10 è schematizzato un satellite in orbita terrestre. La sola forza che agisce su di esso è F_{ST}, la forza applicata sul satellite dall'attrazione gravitazionale terrestre. Dove è applicata la reazione corrispondente? Si tratta di F_{TS}, la forza gravitazionale che il satellite esercita nei confronti della Terra.

Può sembrare strano che il piccolo satellite eserciti una forza sulla Terra, ma invece è così, come richiede la terza legge di Newton: $F_{TS} = -F_{ST}$. La forza F_{TS} imprime un'accelerazione alla Terra, che tuttavia a causa della sua massa enorme è difficilmente apprezzabile.

2. *Il libro appoggiato sul tavolo.* La Figura 3.11a mostra un libro appoggiato sul ripiano di un tavolo. La Terra attira il libro verso il basso con una forza F_{LT}. L'accelerazione del libro è tuttavia nulla perché la forza di gravità è esattamente controbilanciata dalla forza di contatto F_{LR} esercitata dal ripiano sul libro.

Sebbene queste due forze siano uguali in modulo e orientate in versi opposti sulla stessa direzione, esse non formano una coppia azione-reazione. Perché no? *Perché agiscono sullo stesso corpo*, il libro. La loro somma vettoriale è zero e ciò giustifica l'accelerazione nulla del libro.

Ciascuna di queste due forze deve dunque avere una sua corrispettiva forza di reazione. Quali sono? La reazione alla forza F_{LT} è F_{TL}, cioè la forza gravitazionale esercitata dal libro nei confronti della Terra. Nella Figura 3.11b sono disegnate le due forze di azione e reazione.

La Figura 3.11c invece illustra F_{RL}, forza di reazione a F_{LR} che costituisce la forza di contatto esercitata dal libro nei confronti del ripiano. Le due coppie di azione e reazione che coinvolgono il libro e il suo ambiente sono riassunte di seguito:

$$\text{prima coppia} \quad F_{LT} = -F_{TL} \quad \text{(libro e Terra)}$$

e

$$\text{seconda coppia} \quad F_{LR} = -F_{RL} \quad \text{(libro e ripiano)}.$$

3. *La spinta di una fila di casse.* Nella Figura 3.12 vediamo Walter alle prese con due casse da spingere, collocate su carrelli che rendono trascurabile l'attrito sul pavimento. Egli esercita una forza F_{1W} sulla prima cassa, che a sua volta reagisce nei suoi confronti con la forza F_{W1}. La prima cassa applica alla seconda una forza F_{21}, cui corrisponde una forza di reazione F_{12} esercitata dalla seconda cassa sulla prima. Si osservi dunque che Walter non applica alcuna forza direttamente sulla cassa 2. Per poter avanzare egli deve spingere indietro il pavimento coi propri piedi, applicando cioè una forza F_{PW} sul pavimento, cui fa da reazione la forza F_{WP} esercitata su di lui dal pavimento. Nella figura sono dunque messe in evidenza tre coppie di azione e reazione:

$$F_{21} = -F_{12} \quad \text{(cassa 1 e cassa 2)},$$
$$F_{1W} = -F_{W1} \quad \text{(Walter e cassa 1)},$$
$$F_{WP} = -F_{PW} \quad \text{(Walter e pavimento)}.$$

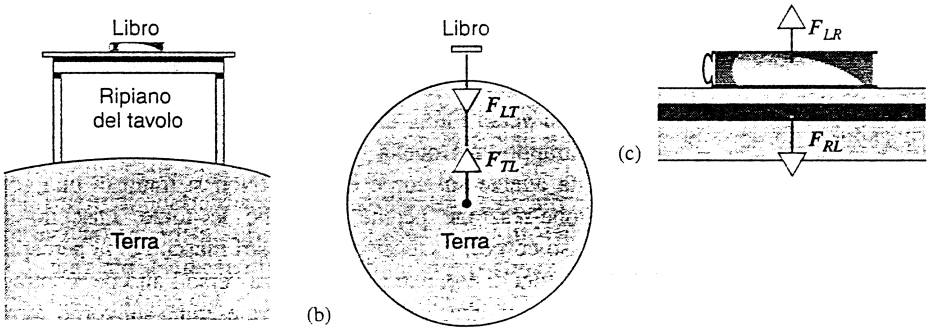


FIGURA 3.11 (a) Un libro appoggiato sul tavolo, che a sua volta poggia sulla superficie terrestre. (b) Il libro e la Terra si attirano vicendevolmente per gravità, e formano una coppia di azione-reazione. (c) Il libro e il tavolo si scambiano due forze di contatto, una d'azione e l'altra di reazione.

 ISBN 88-408-1254-7

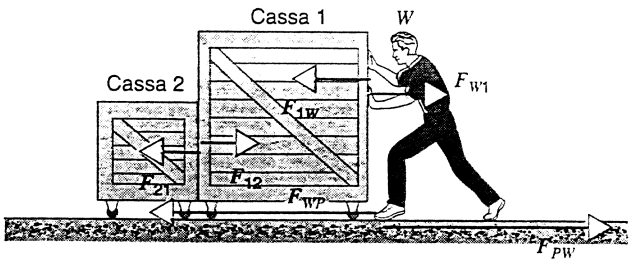


FIGURA 3.12 Walter spinge la cassa 1, che a sua volta spinge la cassa 2. Posano entrambe su carrelli che rotolano in assenza d'attrito.

Si noti che in questo esempio sembra Walter il responsabile del moto, ma in realtà è la reazione del pavimento su di lui che lo rende possibile. Se non esistesse l'attrito tra le sue scarpe e la superficie del pavimento, egli non potrebbe muovere né se stesso né le casse.

4. *Il blocco appeso alla molla.* Il blocco appeso alla molla della Figura 3.13a si trova a riposo. L'altro capo della molla è fissato al soffitto. Le forze agenti sul blocco, rappresentate nella Figura 3.13b, sono F_{BT} (forza gravitazionale esercitata dalla Terra) e F_{BM} (forza di richiamo esercitata dalla molla). Il blocco è fermo pur soggetto a queste due forze, le quali *non* sono una coppia azione-reazione, perché agiscono sullo stesso corpo. La forza di reazione alla forza peso F_{BT} è la forza gravitazionale F_{TB} esercitata dal blocco sulla Terra, che non è illustrata.

La forza di reazione a F_{BM} è F_{MB}, la forza che il blocco applica alla molla. Per metterla in evidenza la disegnamo nella Figura 3.13c, che riassume tutte le forze agenti sulla molla. Tra di esse anche la forza peso F_{MT} applicata dalla Terra sulla molla (di solito trascurabile) e la forza di trazione F_{MS} che il soffitto esercita sulla molla. Dato che la molla è ferma, la loro risultante deve essere nulla.

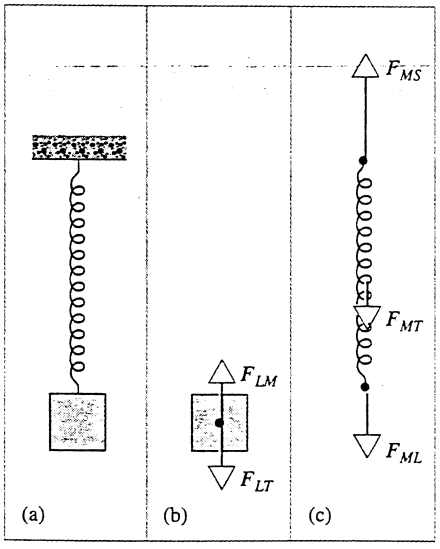


FIGURA 3.13 (a) Un blocco pende dal soffitto appeso a una molla tirata. (b) Forze agenti sul blocco. (c) Forze agenti sulla molla.

La forza di reazione a F_{MS} agisce sul soffitto. Nei nostri disegni il soffitto e le forze esercitate su di esso non sono contemplati e quindi questa forza non appare.

Verifica della terza legge di Newton

Risulta semplice verificare la terza legge di Newton ricorrendo a due dinamometri elettronici (Figura 3.5) applicati a due vagoncini che si scontrano su una superficie senza attrito. Collegando i dinamometri a un elaboratore si può riportare su un grafico la forza istantanea registrata dagli strumenti durante la collisione.

Nella Figura 3.14 si vedono i risultati per tre diverse prove di collisione. Nel caso di Figura 3.14a il vagoncino 1 era inizialmente fermo quando ha subito l'urto del vagoncino 2 (di massa uguale). Si noti che in ogni istante la forza esercitata dal primo vagone sul secondo è uguale e contraria a quella applicata dal secondo vagone sul primo.

La Figura 3.14b illustra lo scontro frontale quando tutt'e due i vagoncini sono in moto, mentre la Figura 3.14c mostra i risultati nel caso che il secondo vagoncino abbia massa tripla del primo.

In tutti i casi, senza riguardo alle masse dei vagoni o a quale fosse inizialmente in moto, le forze di azione e reazione sono costantemente uguali e contrapposte come vuole la terza legge di Newton.

3.7 MASSA E PESO

Consideriamo un corpo di massa m fermo e libero di muoversi in prossimità della superficie terrestre. Nel Paragrafo 3.6 abbiamo visto che esso cade verso il basso soggetto all'accelerazione di gravità $\boldsymbol{g}$, purché siano trascurabili altri tipi di forze, quale ad esempio la resistenza dell'aria. In questo contesto $\boldsymbol{g}$ è un vettore di modulo g, valore dell'accelerazione di gravità in quel sito, avente direzione verticale e verso orientato verso il basso (cioè verso il centro della Terra). Se consideriamo il riferimento terrestre come un sistema inerziale, la forza risultante che agisce sul corpo è $m\boldsymbol{a}$, che in questo caso può scriversi come $m\boldsymbol{g}$, dato che il vettore accelerazione è quello di gravità. Questa forza è dovuta all'attrazione gravitazionale tra il corpo e la Terra.

Se questo corpo, anziché essere libero di cadere, viene tenuto in mano, la sua accelerazione è zero e di conseguenza la forza risultante che agisce su di esso è nulla, in virtù della seconda legge di Newton. Ovviamente non abbiamo cancellato l'esistenza della forza di gravità che la Terra esercita sul corpo. Essa continua ad agire ed è sempre espressa da $m\boldsymbol{g}$. La mano tuttavia esercita anch'essa una forza orientata verticalmente verso l'alto, di modulo pari a quello di $m\boldsymbol{g}$, e quindi contrapposta a quella di gravità. Ne consegue che la forza netta agente sul corpo è nulla. (Non si tratta di una coppia azione-reazione perché entrambe le forze agiscono sullo stesso corpo.) La tensione nei nostri muscoli ci fa percepire la necessità di esercitare questa forza verso l'alto per contrastare la forza gravitazionale che la Terra esercita sul corpo sorretto.

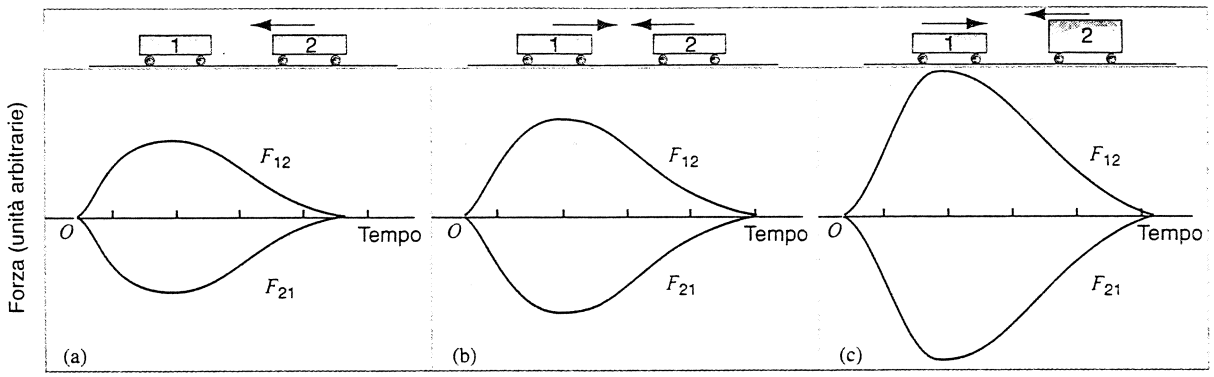


FIGURA 3.14 Su due vagoncini destinati a scontrarsi sono montati due dinamometri elettronici del tipo illustrato nella Figura 3.5. I dinamometri misurano contemporaneamente la forza che ciascun vagone esercita sull'altro. I grafici mostrano l'andamento in funzione del tempo delle due forze agenti sui vagoni durante la collisione. (a) Il vagone 2 è in moto e va a urtare il vagone 1 fermo. I vagoni sono uguali. (b) Urto frontale tra i due vagoni di ugual massa. (c) Urto frontale tra i due vagoni, di cui il secondo ha massa tripla del primo.

La forza orientata verticalmente verso il basso che l'attrazione gravitazionale terrestre esercita sul corpo è chiamata *peso* del corpo. Questa forza agisce sul corpo indipendentemente dal suo stato di riposo o di moto, anche di caduta. La forza ha modulo mg e si esercita lungo l'asse che congiunge il corpo con il centro della Terra. Considerando il solo modulo, il peso P è dato da

$$P = mg\,. \tag{3.7}$$

Il peso è una forza e dunque si misura in unità di forza, come il newton.

Possiamo misurare il peso di un corpo direttamente, per esempio collocandolo su una bilancia a piattaforma, come le bilance pesapersone: il quadrante indica il modulo della forza necessaria a sostenere il corpo in misurazione. Quando il corpo è fermo, la forza risultante su di esso è nulla e quindi la forza di sostegno esercitata dalla piattaforma sul corpo equivale in modulo a quella che la Terra applica al corpo per gravità, e cioè al suo peso. La misura può anche eseguirsi con una bilancia a molla, come quelle che si incontrano nei negozi. Anche qui, per far sì che la forza netta sull'oggetto da pesare sia nulla, la molla esercita una forza (leggibile sul quadrante) pari in modulo al peso dell'oggetto mg.

Disegnando il diagramma delle forze per un oggetto in prossimità della superficie terrestre occorre sempre apporre la forza mg orientata verso il centro della Terra. Questa rappresenta il suo peso, e cioè la forza gravitazionale che la Terra esercita sul corpo. La forza di reazione al peso è costituita dalla forza di attrazione che il corpo esercita sulla Terra; la si può mettere in evidenza nel diagramma delle forze solo se questo comprende tra i corpi disegnati anche la Terra, come nelle Figure 3.10 e 3.11b.

All'inizio di questa discussione abbiamo specificato che occorreva assumere la superficie terrestre come un riferimento inerziale. Nella realtà questa è un'approssimazione, perché, tenuto conto che la Terra ruota, la sua superficie non è propriamente un sistema inerziale. L'errore provocato da questa approssimazione non supera tuttavia lo 0,3 % all'equatore, laddove si fa maggiormente sentire l'effetto della rotazione terrestre. Una bilancia posta all'equatore misura circa lo 0,3 % in meno della forza di gravità esercitata sul corpo. L'errore dovuto alla rotazione terrestre si annulla invece ai poli. Se le circostanze ci autorizzano a trascurare questi effetti, possiamo considerare le letture delle bilance sulla superficie terrestre come misure sufficientemente accurate del peso dei corpi.

Differenza tra massa e peso

Dall'Equazione 3.7 risulta chiaro che il peso dipende dalla massa: a massa maggiore corrisponde un peso maggiore. Un corpo di massa doppia rispetto a un primo corpo, se si trova nello stesso luogo, ha un peso doppio. Ciononostante il peso e la massa sono due grandezze ben distinte. La definizione di massa che abbiamo esposto nel Paragrafo 3.4, così come tutto il procedimento per misurarla, non ha nulla a che fare con la forza gravitazionale o l'attrazione terrestre. Se fossimo sulla Luna (dove l'accelerazione di gravità è $\frac{1}{6}$ di quella terrestre) useremmo lo stesso procedimento e giungeremmo a ottenere gli stessi valori di massa rapportata al kilogrammo. E lo stesso dicasi se fossimo nello spazio lontani da qualsiasi astro o pianeta, in condizioni di assenza di gravità. Il peso di un corpo sarebbe invece differente in ciascuno di questi siti, pur essendo la sua massa sempre la stessa: la forza da applicare per imprimere al corpo una data accelerazione non cambia, quella per contrastare la sua attrazione gravitazionale, sì.

La massa di un corpo ha ovunque lo stesso valore, mentre il suo peso varia sulla superficie terrestre al variare dell'accelerazione di gravità locale. In un luogo della Terra ove g vale 9,78 m/s^2 (vicino all'equatore, per esempio), un corpo di massa 1,00 kg ha un peso di 9,78 N, mentre lo stesso corpo in prossimità dei poli, ove g vale 9,83 m/s^2, pesa 9,83 N (la differenza, oltre che alla rotazione, è dovuta anche allo schiacciamento dello sferoide terrestre). Due molle di bilan-

 ISBN 88-408-1254-7

cia identiche in questi luoghi diversi si allungherebbero di quantità leggermente differenti, fornendo quindi valori di peso lievemente diversi. A differenza dunque della massa, che è una proprietà *intrinseca* di un corpo, il peso dipende dalla posizione del corpo rispetto al centro della Terra. Le variazioni del valore di g sulla superficie terrestre saranno trattate nel Paragrafo 14.4.

L'Equazione 3.7 esprime chiaramente la proporzionalità, secondo il coefficiente g, tra il peso e la massa. Abbiamo tuttavia sottolineato come essi non siano la stessa cosa. Nel linguaggio comune e nella nostra vita ordinaria la confusione tra i due termini è talmente radicata da richiedere sempre una costante attenzione sul significato e sul contesto in cui i termini massa e peso vengono usati. Se chiedete al pasticcere quanto *pesa* una torta (chiederne la massa vi esporrebbe a un dialogo tra sordi), non potete aspettarvi che risponda 14,7 N (risposta coerente) quando la torta risulta avere una massa di 1,50 kg. Starà a voi, nel caso che il fatto debba assumere importanza, interpretare l'incoerente risposta che egli vi dà, "1,50 kg", per esempio ipotizzando che il pasticcere in realtà vi abbia fornito il valore della massa e sarebbe stato formalmente coerente se la vostra domanda fosse stata "che massa ha questa torta?" La chiara acquisizione di questo concetto vi consente di fare la spesa senza sorprese anche sulla Luna o su Giove, ove sapete già che quella medesima torta di massa 1,50 kg pesa rispettivamente 2,50 N e 34,3 N.

Assenza di peso

Le fotografie degli astronauti nelle loro navicelle spaziali (come in Figura 3.15) ce li presentano in uno stato cui diamo il nome di *assenza di peso*. Occorre fare attenzione nell'analizzare il moto degli astronauti, perché nelle loro navicelle orbitanti a gran velocità essi non si trovano nemmeno approssimativamente in un sistema di riferimento inerziale. Un oggetto inizialmente fermo e lasciato libero, secondo l'astronauta, rimane dov'è. L'accelerazione di gravità sembrerebbe quindi nulla nella posizione dell'astronauta, ma se la navicella non orbitasse, un corpo lasciato libero a quella altitudine sopra la superficie terrestre (circa 400 km per i normali satelliti artificiali) risentirebbe di un'accelerazione di gravità terrestre attorno a 8,7 m/s^2.

Se collocassimo un corpo su una bilancia di qualsiasi tipo nel sistema di riferimento non inerziale dell'astronauta, la lettura della bilancia sarebbe zero. In questo riferimento non è possibile usare le bilance per determinare il peso di un corpo. Tuttavia i corpi nella navicella orbitante non sono certo «privi di peso». Ponendo $g = 8{,}7$ m/s^2, quale si può riscontrare a queste altitudini, un corpo di massa 1 kg pesa 8,7 N, circa l'11% in meno di quanto pesa sulla Terra.

La sensazione che abbiamo del nostro peso è legata alla forza che il pavimento esercita su di noi verso l'alto. Quando galleggiamo in acqua non ci accorgiamo del nostro peso, ma abbiamo percezione della nostra *massa*, per esempio tentando di accelerare nuotando. Quando siamo in un ascensore che accelera verso l'alto, il pavimento esercita su di noi una forza che sentiamo maggiore della forza di gravità, e quindi il nostro peso sembra aumentare; se viceversa l'ascensore accelera verso il basso, ci sembra di pesare di meno. E se, nell'ascensore, ci disponiamo in piedi su una bilancia pesapersone, la lettura della bilancia conferma le nostre sensazioni (vedi Problema svolto 3.7). Pur tuttavia, indipendentemente dalle accelerazioni, il modulo del peso rimane sempre mg.

La vera assenza di peso non si può ottenere che nello spazio sidereo, ben lontani da qualsiasi corpo celeste. In una sonda spaziale in tale situazione, purché priva di motori accesi, gli astronauti galleggerebbero davvero liberamente. L'eventuale accensione di motori a razzo renderebbe il riferimento non più inerziale a causa dell'accelerazione impressa alla sonda. In questo caso, nel loro sistema di riferimento, gli astronauti sentirebbero il pavimento della sonda in accelerazione premere su di loro dando una sensazione di peso. Analogamente, se la sonda ruota, la parete esterna costituirebbe il pavimento che esercita la forza e dà la sensazione di peso spingendo verso l'asse di rotazione i corpi a contatto della parete. A questo effetto si dà talvolta il nome di *gravità artificiale*, condizione spesso creata nelle stazioni spaziali internazionali per scopi di studio su campioni biologici.

Un corpo in caduta libera in prossimità della superficie terrestre non ha alcun pavimento su cui premere e pertanto si sente privo di peso. Se vi trovaste in una capsula in caduta libera (come un ascensore che cade per la rottura del cavo), il pavimento non eserciterebbe forza su di voi e non avreste sensazione di peso. Studieremo nel prossimo capitolo che un proiettile in caduta libera non lontano dalla superficie terrestre segue una traiettoria parabolica. Un aeroplano che volasse mantenendo una traiettoria parabolica darebbe ai suoi passeggeri l'opportunità di trovarsi in caduta libera e quindi la sensazione di mancanza di peso perché essi non sentirebbero alcun pavimento che li sostiene. Questo è il metodo impiegato dagli astronauti per allenarsi alle condizioni di as-

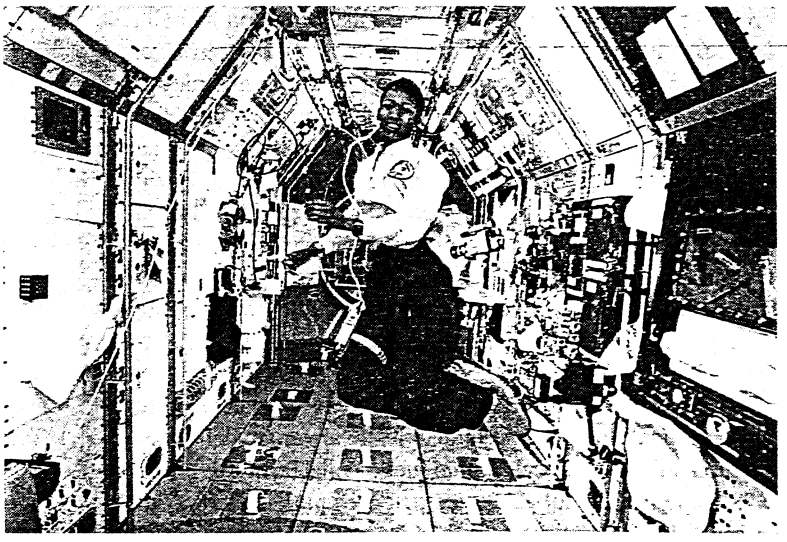


FIGURA 3.15 La astronauta Dr. Mae C. Jemison in caduta libera all'interno della navicella orbitante *Endeavor*: sembra galleggiare in assenza di peso.



FIGURA 3.16 Gli attori del film *Apollo 13* in assenza di peso simulata. Si trovano in stato di caduta libera nell'aeromobile KC-135 che vola in traiettoria parabolica. Questo velivolo è impiegato dalla NASA per le ricerche di microgravità.

senza di peso e anche per girare filmati che simulano le condizioni tipiche di oggetti in orbita (Figura 3.16). Ma anche se un corpo in caduta libera vicino alla superficie terrestre prova una sensazione di assenza di peso, peso che normalmente percepisce sotto forma di sostentamento, è chiaro che il suo peso rimane sempre pari a mg, l'intensità che l'attrazione gravitazionale terrestre esercita su di lui.

3.8 APPLICAZIONI DELLE LEGGI DI NEWTON NEL MOTO UNIDIMENSIONALE

Quantunque ogni problema da risolvere con le leggi di Newton richieda un approccio particolare, lo schema generale indicato nel Paragrafo 3.5 costituisce una buona base di partenza. Il miglior modo di apprenderne le modalità di applicazione consiste nell'esaminare molti esempi. Spesso in questi problemi si hanno due o più corpi a cui applicare separatamente le leggi della meccanica.

Nei problemi facciamo di solito qualche assunzione per semplificarne l'analisi sacrificando leggermente la realtà fisica dei casi. Considereremo tutti i corpi come particelle applicando quindi le forze in un solo punto. Le corde si considerano prive di massa (non richiedono una forza per accelerarle) e inestensibili (non si allungano, sicché i corpi che esse collegano sono caratterizzati da medesima velocità e accelerazione). Malgrado queste semplificazioni gli esempi che daremo forniscono una panoramica delle tecniche fondamentali per le analisi di dinamica. Più avanti nel corso degli studi aggiungeremo ulteriori tecniche che permetteranno di affrontare queste analisi in modo ancor più realistico. Per il momento ignoreremo alcuni effetti anche manifestamente importanti, ciò che tuttavia ci consente di focalizzare l'attenzione sul metodo di base per risolvere questi problemi.

PROBLEMA SVOLTO 3.4 Walter spinge una cassa di massa $m_1 = 4{,}2$ kg. Davanti a questa cassa ve ne è una seconda di massa $m_2 = 1{,}4$ kg (Figura 3.17a). Entrambe possono scivolare senza attrito sul pavimento. Walter applica alla cassa 1 una forza di spinta orizzontale di modulo $P_{1W} = 3{,}0$ N. Si calcoli l'accelerazione delle casse e la forza esercitata dalla cassa 1 sulla 2.

Soluzione Scegliamo l'asse x nella direzione del moto delle casse, orientato nel verso di avanzamento. Le forze e le accelerazioni orientate a destra nella figura sono positive. Walter spinge solo sulla cassa 1, mentre la cassa 2 è spinta dalla cassa 1 mediante la forza F_{21}. In base alla terza legge di Newton la cassa 2 esercita

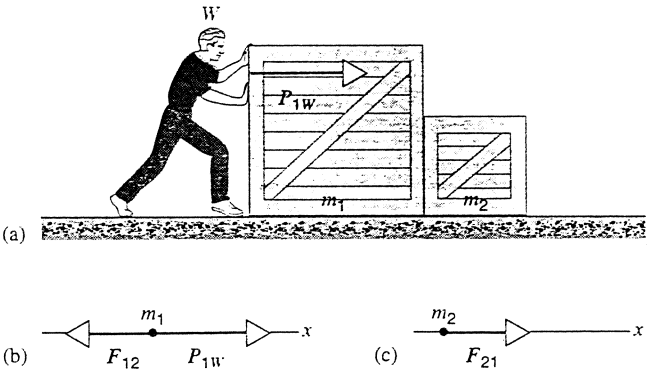


FIGURA 3.17 Problema svolto 3.4. (a) Walter spinge una cassa che a sua volta ne spinge un'altra. (b) Il diagramma delle forze relativo alla cassa 1. (c) Il diagramma delle forze relativo alla cassa 2.

 ISBN 88-408-1254-7

dunque una forza sulla cassa 1 pari a $F_{12} = -F_{21}$. La componente lungo l'asse x di F_{12} è $-F_{12}$, mentre quella di F_{21} è F_{21}. Le Figure 3.17b e 3.17c mostrano i diagrammi delle forze per le casse 1 e 2 rispettivamente. La forza risultante applicata a m_1 è $\sum F_x = P_{1W} - F_{12}$, e la seconda legge di Newton dà per la cassa 1

(cassa 1) $$P_{1W} - F_{12} = m_1 a_1 ,$$

dove a_1 rappresenta la componente x dell'accelerazione impressa alla cassa 1. La forza netta agente sulla cassa 2 è $\sum F_x = F_{21}$, di modo che la seconda legge di Newton dà

(cassa 2) $$F_{21} = m_2 a_2 .$$

Dato che le casse sono sempre a contatto tra di loro, dev'essere $a_1 = a_2$. Chiamiamo semplicemente a questa accelerazione comune tra le casse. Sommando le due precedenti equazioni otteniamo

$$P_{1W} - F_{12} + F_{21} = m_1 a + m_2 a$$

la quale, tenuto conto che $F_{12} = F_{21}$, si può scrivere, per trovare a:

$$a = \frac{P_{1W}}{m_1 + m_2} = \frac{3{,}0\ \text{N}}{4{,}2\ \text{kg} + 1.4\ \text{kg}} = 0{,}54\ \text{m/s}^2 .$$

Non dovrebbe sorprendere che l'accelerazione sia condizionata dalla massa totale $m_1 + m_2$ del sistema di due casse, considerato che la forza applicata P_{1W} è responsabile dell'accelerazione della massa complessiva. La forza di contatto esercitata dalla cassa 2 sulla cassa 1 è

$$F_{21} = m_2 a = (1{,}4\ \text{kg})(0{,}54\ \text{m/s}^2) = 0{,}76\ \text{N} .$$

Si noti che questa forza (0,76 N) è minore di quella esercitata da Walter sulla cassa 1 (3,0 N). La cosa è ragionevole perché F_{21} agisce solo nei confronti della cassa 2 mentre P_{1W} agisce su entrambe le casse.

PROBLEMA SVOLTO 3.5 Un carrello piano di massa $m_C = 360$ kg scorre su rotelle prive d'attrito. Sopra vi è posato un baule di massa $m_B = 150$ kg (Figura 3.18a). Il baule può scivolare sul pianale del carrello, ma tra di essi agisce una forza d'attrito. L'amico Walter tira il baule con una forza F_{BW}. Sia il baule sia il carrello avanzano verso destra in Figura, ma il baule più velocemente del carrello perché la forza d'attrito non è sufficiente a evitare il suo scivolamento sul pianale. Un osservatore esterno misura le accelerazioni, quella del baule pari a 1,00 m/s^2 e quella del carrello pari a 0,167 m/s^2. Calcolare (a) la forza d'attrito tra baule e carrello e (b) la forza esercitata da Walter sul baule.

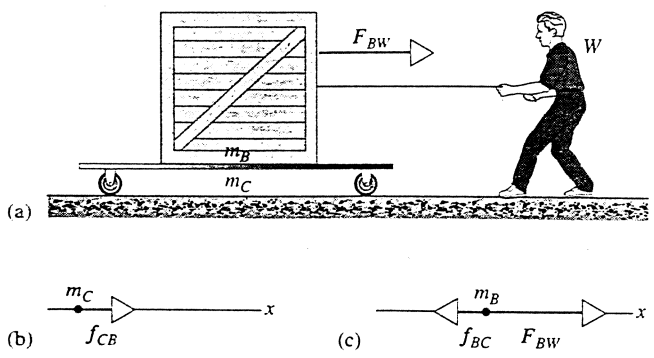


FIGURA 3.18 Problemi svolti 3.5 e 3.6. (a) Walter tira un baule che scorre su un carrello. (b) Il diagramma delle forze relativo al carrello. (c) Il diagramma delle forze relativo al baule.

Soluzione (a) Scegliamo l'asse x nella direzione del moto con verso positivo verso destra in figura. Le componenti x delle forze e delle accelerazioni sono dunque positive verso destra. Spesso le forze d'attrito sono rappresentate con la lettera f minuscola, di modo che la forza che il carrello esercita sul baule è f_{BC}, orientata verso sinistra (opposta al verso del moto del baule) e con componente x pari a $-f_{BC}$. Per reazione il baule applica una forza f_{CB} sul carrello. Le Figure 3.18b e 3.18c mostrano i diagrammi delle forze relativi al carrello e al baule rispettivamente. La forza complessiva agente sul carrello è $\sum F_x = f_{CB}$ e dalla seconda legge di Newton applicata al carrello otteniamo

(carrello) $$f_{CB} = m_c a_c = (360\ \text{kg})(0{,}167\ \text{m/s}^2) = 60\ \text{N} .$$

(b) In modo simile la forza risultante che agisce sul baule è $\sum F_x = F_{BW} - f_{BC}$, per cui la seconda legge di Newton impone che

(baule) $$F_{BW} - f_{BC} = m_B a_B ,$$

da cui, risolvendo rispetto a F_{BW}, si ottiene

$$F_{BW} = f_{BC} + m_B a_B = 60\ \text{N} + (150\ \text{kg})(1{,}00\ \text{m/s}^8) = 210\ \text{N} ,$$

ove si è posto $f_{BC} = f_{CB}$ perché queste due forze costituiscono una coppia azione-reazione.

La forza d'attrito trascina il carrello facendolo avanzare. Anche in casi come questo, in cui è l'attrito a provocare il moto, la forza d'attrito ha sempre verso opposto a quello del moto *relativo* tra i due corpi coinvolti. Se in questo problema l'attrito fosse inesistente, il carrello non si muoverebbe e l'accelerazione relativa tra baule e carrello sarebbe maggiore. Se d'altra parte l'attrito fosse sufficiente (vedi il problema svolto seguente), il carrello e il baule si muoverebbero assieme senza moto *relativo* tra di loro.

PROBLEMA SVOLTO 3.6 Con riferimento al problema precedente si supponga che la forza d'attrito tra baule e carrello sia più intensa, in modo che non avvenga lo slittamento del baule (i due corpi si muovono solidali). Ammesso che la forza esercitata da Walter rimanga sempre di 210 N, quanto vale la forza d'attrito tra baule e carrello?

Soluzione Il baule e il carrello muovendosi assieme hanno la stessa accelerazione a. Dalla seconda legge di Newton abbiamo allora

(carrello) $$\sum F_x = f_{CB} = m_c a$$

(baule) $$\sum F_x = F_{BW} - f_{BC} = m_B a .$$

Risolviamo il sistema di queste due equazioni eliminando a per ottenere

$$f_{CB} = \frac{m_C F_{BW}}{m_C + m_B} = \frac{(360\ \text{kg})(210\ \text{N})}{360\ \text{kg} + 150\ \text{kg}} = 150\ \text{N} .$$

PROBLEMA SVOLTO 3.7 Nella Figura 3.19a vediamo un viaggiatore V di massa $m = 72{,}2$ kg ritto su una bilancia pesapersone in un ascensore. La bilancia in pratica legge l'intensità della forza F_{VB} che essa stessa esercita nei confronti della persona che vi sta sopra. (Potremmo usare anche un dinamometro a molla cui sta appeso il viaggiatore.) Stabilire la lettura della bilancia quando

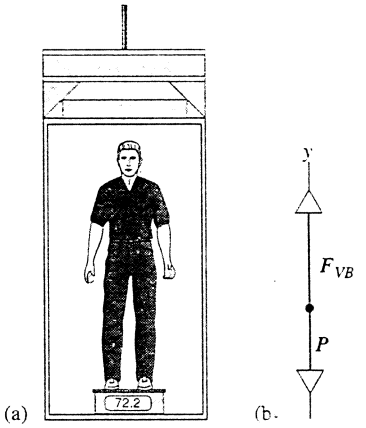


FIGURA 3.19 Problema svolto 3.7. (a) Un viaggiatore nella cabina di un ascensore ritto su una bilancia pesapersone. Come quasi tutte le bilance, questa dà la risposta in unità di massa (kg), anziché nella corrispondente unità di forza (N). (b) Il diagramma delle forze per il viaggiatore.

(a) l'ascensore scende con velocità costante e (b) quando l'ascensore sale con accelerazione di $+3{,}20\ \text{m/s}^2$.

Soluzione (a) Stabiliamo un metodo generale di risoluzione valido per qualsiasi accelerazione a dell'ascensore. Il sistema di riferimento inerziale potrebbe essere quello dell'edificio che ospita l'ascensore. L'ascensore infatti non lo può essere giacché la sua accelerazione non è necessariamente nulla. Un osservatore inerziale esterno, pertanto, misura sia a sia g. Fissiamo le coordinate in modo che l'asse y risulti verticale, orientato verso l'alto. Il diagramma delle forze relativo al viaggiatore è riportato nella Figura 3.19b. Due sono le forze agenti su di lui: F_{VB} orientata verso l'alto è applicata dalla bilancia, mentre P di modulo $P = mg$ (forza gravitazionale esercitata dalla Terra) è orientata verso il basso.

La risultante delle forze agenti sul viaggiatore è dunque $\sum F_y = F_{VB} - P$ e, in base alla seconda legge di Newton, possiamo scrivere

$$F_{VB} - P = ma_y\,.$$

ossia

$$F_{VB} = P + ma_y = mg + ma_y\,.$$

Nel caso in cui $a_y = 0$ (velocità costante), si ha

$$F_{VB} = mg = (72{,}2\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2) = 708\ \text{N}\,.$$

La lettura della bilancia non dipende dalla velocità dell'ascensore ed è quindi la stessa anche quando l'ascensore è riposo.

(b) Se $a_y = +3{,}20\ \text{m/s}^2$, si ottiene

$$F_{VB} = m(g + a_y) = (72{,}2\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2 + 3{,}20\ \text{m/s}^2) = 939\ \text{N}\,.$$

La lettura della bilancia aumenta quando l'accelerazione dell'ascensore è orientata verso l'alto e viceversa diminuisce quando è orientata verso il basso. Com'è la lettura quando l'ascensore sale ma sta rallentando? E qual è la lettura se si spezza il cavo e l'ascensore precipita in caduta libera ($a_y = -g$)?

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

3.1 Meccanica classica

3.2 Prima legge di Newton

1. Una nave spaziale, lontana dall'influsso gravitazionale di qualsiasi corpo celeste, viaggia ad altissima velocità spinta dai suoi razzi, quando improvvisamente questi si guastano e si arrestano. La nave spaziale
   (A) si arresta istantaneamente scaraventando i passeggeri verso il fronte dell'abitacolo.
   (B) comincia a rallentare e alla fine si ferma immobile negli spazi siderali.
   (C) prosegue la sua corsa in eterno alla stessa velocità.
2. Un bambinetto sta giocando con una palla su una superficie orizzontale. La spinge per farla rotolare per terra. La palla rotola per un po', poi si ferma. La palla si è arrestata perché
   (A) è venuta a mancare la spinta del bambino.
   (B) la velocità è proporzionale alla forza.
   (C) ci deve essere una forza che si oppone al moto della palla.
   (D) la forza netta sulla palla era zero e perciò deve arrestarsi.

3.3 Forza

3. Uno studente incolla un righello su un blocchetto di legno posato su un piano, come illustrato nella Figura 3.20a. La superficie esercita una considerevole forza d'attrito sul blocchetto. Egli fissa un anello nel legno in corrispondenza dell'origine del righello. Infilato un elastico nell'anello, comincia a tirarlo dapprima fino alla tacca dei 5 cm. Constata che il blocchetto non si muove. Prosegue a tirare progressivamente finché il blocchetto si mette bruscamente in moto quando l'elastico teso raggiunge la lunghezza di 8 cm (Figura 3.20b). Prima che il blocchetto si muovesse, quando l'elastico era lungo 7 cm, la forza risultante esercitata sul blocchetto era
   (A) maggiore della (B) uguale alla
   (C) minore della (D) senza relazione con la
   forza risultante esercitata sul blocchetto precedentemente, per esempio quando l'elastico era lungo 5 cm.
4. Lo studente della domanda precedente tende ora l'elastico fino a 9 cm. Il blocchetto accelera costantemente ed egli continua a tirare in modo che l'elastico rimanga sempre lungo 9 cm. In tali condizioni la forza risultante che agisce sul blocchetto è
   (A) maggiore della (B) uguale alla
   (C) minore della (D) senza relazione con la
   forza risultante che agiva sul blocchetto quando l'elastico era lungo 5 cm.

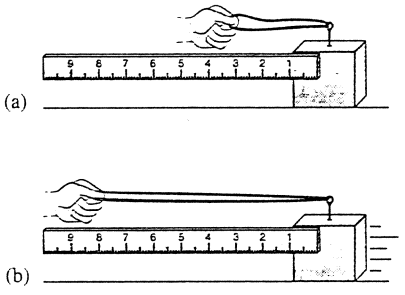


FIGURA 3.20 Domande a risposta multipla 3 e 4.

3.4 Massa

5. Due corpi aventi masse M ed m ($M > m$) giacciono su una superficie priva d'attrito. Una forza F accelera il corpo più piccolo imprimendogli un'accelerazione a. Se la stessa forza viene applicata al corpo più grande, questo si muove
   (A) con accelerazione maggiore.
   (B) con la medesima accelerazione.
   (C) con accelerazione minore.
   (D) solo se la forza F supera un dato valore minimo.

3.5 Seconda legge di Newton

6. Un corpo si muove diretto a nord. Da questa sola informazione
   (A) si può dedurre che una sola forza orientata verso nord agisce sul corpo.
   (B) si può dedurre che esiste una forza risultante non nulla, orientata verso nord, che agisce sul corpo.
   (C) si può dedurre che possono agire più forze sul corpo, ma prepondera quella orientata verso nord.
   (D) non si può dedurre nulla riguardo le forze che agiscono sul corpo.

7. Un corpo è diretto a nord con velocità crescente. Da queste sole informazioni
   (A) si può dedurre che una sola forza orientata verso nord agisce sul corpo.
   (B) si può dedurre che esiste una forza risultante non nulla, orientata verso nord, che agisce sul corpo.
   (C) si può dedurre che possono agire più forze sul corpo, ma prepondera quella orientata verso nord.
   (D) non si può dedurre nulla riguardo le forze che agiscono sul corpo.

8. Quali dei seguenti corpi non è soggetto a una forza netta orientata verso nord?
   (A) Un corpo diretto a sud con velocità decrescente.
   (B) Un corpo diretto a nord con velocità crescente.
   (C) Un corpo fermo che comincia a muoversi verso nord.
   (D) Un corpo diretto a nord con velocità costante.

3.6 Terza legge di Newton

9. Una pietra giace su una superficie orizzontale. Il modulo della forza esercitata dalla pietra sulla superficie è F_{SP}, mentre il modulo della forza esercitata dalla superficie sulla pietra è F_{PS}. Confrontando queste due forze troviamo che
   (A) la prima è minore della seconda.
   (B) sono uguali.
   (C) la prima è maggiore della seconda.
   (D) non abbiamo informazioni sufficienti per fare il confronto.

10. Una pietra giace su una superficie inclinata. È inizialmente ferma ma a un certo punto inizia a scivolare giù. Il modulo della forza esercitata dalla pietra sulla superficie è F_{SP}, mentre il modulo della forza esercitata dalla superficie sulla pietra è F_{PS}. Confrontando queste due forze troviamo che
    (A) la prima è sempre minore della seconda.
    (B) sono uguali quando la pietra è ferma, altrimenti la prima è maggiore della seconda.
    (C) sono sempre uguali.
    (D) la prima è sempre maggiore della seconda

11. Un pianoforte inizia a scivolare senza attrito su un piano inclinato con velocità crescente. L'accordatore se ne accorge e lo trattiene per contrastarne la discesa, dapprima rallentandolo e poi facendolo scendere con velocità costante. Il modulo della forza applicata dal pianoforte sull'accordatore è F_{AP}; quello della forza applicata dall'accordatore sul pianoforte, F_{PA}. Confrontando queste due forze si trova che
    (A) la prima è sempre minore della seconda.
    (B) la prima è minore della seconda quando il pianoforte rallenta; sono uguali quando scende a velocità costante.
    (C) sono sempre uguali.
    (D) sono uguali quando il pianoforte rallenta; la prima è maggiore della seconda quando scende a velocità costante.

3.7 Massa e peso

12. Un sasso vi cade sull'alluce. Quale delle seguenti variabili è più importante nel determinare il male che vi arreca?
    (A) La massa del sasso.
    (B) Il peso del sasso.
    (C) Massa e peso sono entrambi determinanti.
    (D) L'una o l'altro indifferentemente, giacché sono legati dalla sola costante moltiplicativa g.

13. Una grossa pietra è appoggiata sul vostro alluce. Quale delle seguenti variabili è più importante nel determinare il male che vi fa?
    (A) La massa della pietra.
    (B) Il peso della pietra.
    (C) Massa e peso sono entrambi determinanti.
    (D) L'una o l'altro indifferentemente, giacché sono legati dalla sola costante moltiplicativa g.

3.8 Applicazioni delle leggi di Newton nel moto unidimensionale

14. Un corpo si può muovere liberamente su un tavolo, a meno della forza d'attrito f cui è soggetto. Quando gli si applica una forza di 10,0 N, la sua accelerazione risulta di 2,0 m/s^2. Raddoppiando l'intensità della forza, l'accelerazione aumenta a 6,00 m/s^2.
    (a) Quanto vale l'intensità della forza d'attrito f?
    (A) 1,0 N. (B) 3,33 N. (C) 5,0 N. (D) 10,0 N.
    (b) Quant'è la massa del corpo?
    (A) 0,40 kg. (B) 2,5 kg. (C) 3,33 kg. (D) 5,0 kg.

15. Una paracadutista sta precipitando in caduta libera prima di aprire il paracadute. La forza risultante che agisce su di lei ha modulo F ed è orientata verso il basso. È minore del suo peso P per la resistenza opposta dall'aria. A un certo punto apre il paracadute. Dopo che si è dispiegato, la forza risultante esercitata su di lei è
    (A) maggiore di F e ancora orientata verso il basso.
    (B) minore di F e ancora orientata verso il basso.
    (C) nulla.
    (D) orientata verso l'alto, indipendentemente dal fatto che sia maggiore o minore di F.

16. (a) State su una bilancia pesapersone in casa vostra. La bilancia indica sullo schermo la vostra «massa». Cosa sta in realtà misurando la bilancia? (b) Ora state sulla bilancia in un ascensore con accelerazione verso l'alto di 2,0 m/s^2. La bilancia indica sullo schermo la vostra «massa». Cosa sta in realtà misurando la bilancia?
    (A) La vostra massa.
    (B) Il vostro peso.
    (C) La forza che la bilancia esercita sui vostri piedi.
    (D) La forza che i vostri piedi applicano alla bilancia.

ISBN 88-408-1254-7

QUESITI

1. Degli oggetti descritti nella Tabella 3.1 quali potrebbero essere trattati come delle particelle puntiformi? Potreste per questi descrivere un tipo di moto in cui essi *non* si comportano come particelle puntiformi?
2. Perché vi sentite proiettati in avanti quando l'autobus frena, e viceversa siete sospinti indietro quando accelera? Chi sta in piedi sull'autobus può trovare più confortevole disporsi con il proprio fronte verso i lati del veicolo quando questo accelera o frena, e viceversa orientarsi verso la testa o la coda dell'autobus quando procede a velocità costante. Perché?
3. Per che ragione negli esperimenti descritti al Paragrafo 3.3 abbiamo specificato che la molla è *leggera*? Che differenza avrebbe comportato l'adozione di una molla con massa considerevole?
4. Un blocco di massa m pende appeso al soffitto, sorretto da una corda C. Una corda uguale D pende sotto il blocco come illustrato in Figura 3.21. Spiegate il seguente fenomeno: dando uno strattone improvviso alla corda D, questa si spezza; se invece la tirate aumentando progressivamente l'intensità della forza, si spezza C.

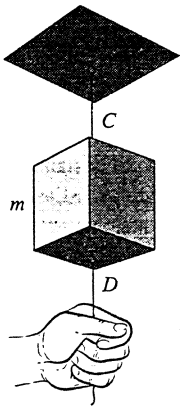


FIGURA 3.21 Quesito 4.

5. Commentate la definizione, che spesso si dà comunemente, della massa di un corpo, secondo cui essa è una misura della «quantità di materia» che lo compone.
6. Se definiamo come fondamentali le grandezze forza, tempo e lunghezza, quali sono le dimensioni della massa?
7. A quanti kilogrammi equivale uno *slug*?
8. Un'automobile che procede a velocità costante comincia a frenare. I passeggeri, sia pur trattenuti dalle cinture di sicurezza, si sentono proiettati in avanti. Nell'istante in cui si arresta però, essi ricevono uno strattone all'indietro. Perché? È possibile arrestare un veicolo evitando del tutto questo strattone?
9. La prima legge di Newton può considerarsi meramente un caso particolare della seconda? E se è così, è una legge davvero necessaria? Si commentino queste domande.
10. Qual è la relazione, se esiste, tra la forza che agisce su un corpo e la direzione in cui esso si muove?
11. Si supponga che un corpo acceleri sotto l'effetto di due forze. È lecito concludere che (a) il corpo non può avere velocità costante; (b) la sua velocità non può essere nulla; (c) la somma delle due forze non può essere nulla; (d) le due forze devono agire sulla stessa direzione?
12. State incitando un cavallo a trainare una carrozza. Questi si rifiuta giustificandosi con la terza legge di Newton: "Se la forza che esercito sulla carrozza è sempre uguale e contraria a quella che la carrozza esercita su di me, non potrò mai tirare più forte di quanto mi tira la carrozza, e perciò non posso muovermi." Come potreste convincerlo?
13. Discutete se le seguenti coppie di forze sono esempi di azione-reazione. (a) La Terra attrae un mattone; il mattone attrae la Terra. (b) Le eliche di un aeroplano spingono l'aria verso la coda; l'aria spinge l'aereo in avanti. (c) Un cavallo tira un carro avanzando in avanti; il carro tira il cavallo indietro. (d) Un cavallo tira un carro senza avanzare; il carro tira il cavallo indietro. (e) Un cavallo tira un carro senza avanzare; il terreno esercita sul carro una forza uguale e contrapposta. (f) La Terra tira un carro verso il basso; il terreno spinge il carro verso l'alto con una forza uguale e contrapposta.
14. Spiegate perché è vera questa affermazione: due squadre si sfidano al tiro alla fune; vince la squadra che esercita la forza più intensa, nella sua componente orizzontale, sul terreno.
15. Due studenti vogliono spezzare una corda. Dapprima tirano afferrando ciascuno un'estremità, ma non ci riescono. Poi decidono di tirare tutti e due la stessa estremità legando l'altro capo a un palo. Questa seconda disposizione dà maggiore possibilità di successo? Si dia una spiegazione.
16. Qual è il vostro peso in newton?
17. Uno studente, compilando una scheda anagrafica, ove viene richiesto il suo peso, scrive "78 kg". Sappiamo che il peso è una forza, mentre il kilogrammo è un'unità di misura della massa. Cosa ha in mente lo studente (come del resto tutta la gente comune) quando indica il proprio peso in kilogrammi? Perché non lo esprime in newton? Quanti newton pesa lo studente?
18. Giudicate queste affermazioni scritte in elaborati d'esame. (a) La massa e il peso rappresentano una stessa grandezza espressa in unità diverse. (b) La massa è una proprietà di un corpo a sé stante, mentre il peso emerge dall'interazione tra due corpi. (c) Il peso di un oggetto è proporzionale alla sua massa. (d) La massa di un corpo varia al variare del suo peso locale.
19. Una forza orizzontale agisce su un corpo libero di muoversi su un piano con attrito. Può imprimergli un'accelerazione se ha intensità minore del peso del corpo?
20. Perché l'accelerazione di un corpo in caduta libera non dipende dal suo peso?
21. Descrivete più modi in cui potete sperimentare le condizioni di caduta libera, anche se di breve durata.
22. In che circostanze il vostro peso può risultare nullo? La vostra risposta dipende dalla scelta del sistema di riferimento?
23. Il braccio meccanico di una sonda spaziale può maneggiare, alla sua massima estensione di 12 m, un satellite di massa 2200 kg (Figura 3.22). Eppure sulla Terra questo braccio meccanico non potrebbe sostenere neppure il proprio peso. Come mai, invece, quando orbita nello spazio in «assenza di peso», può esercitare qualunque forza?

 ISBN 88-408-1254-7

24. Nel novembre del 1984 gli astronauti Joe Allen e Dale Gardner recuperarono un satellite per comunicazioni Westar 6 dall'orbita sbagliata in cui era caduto, alloggiandolo nella stiva della loro navicella *Discovery* (Figura 3.22). Descrivendo le operazioni, Joe Allen così si espresse parlando del satellite: "Non sarà... pesante, ma massiccio lo è!" Cosa intendeva dire?

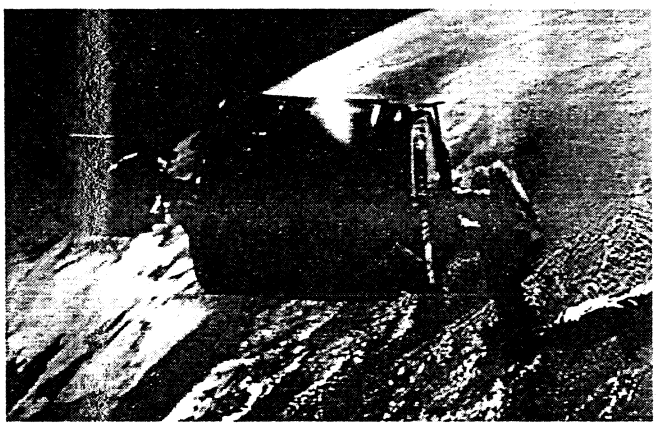


FIGURA 3.22 Quesiti 23 e 24.

25. Sul libretto d'istruzioni di un'automobile sta scritto: "le cinture di sicurezza vanno aggiustate in modo da essere ben aderenti al corpo e i poggiatesta anteriori vanno regolati in altezza, non in modo da adattarsi alla nuca, ma in modo che il loro bordo superiore sia allo stesso livello dell'orecchio." In qual modo le leggi di Newton giustificano queste sagge raccomandazioni?

26. È possibile ricavare la relazione $\sum F = ma$ da qualche altro principio? O è frutto conclusivo di sperimentazione?

27. Osservatori di due diversi sistemi di riferimento misurano la stessa accelerazione per un corpo in movimento. Misureranno anche la stessa velocità di un corpo in movimento? E anche la stessa forza agente sul corpo in movimento?

28. Siete un viaggiatore nella cucina di un'astronave. Aprite un barattolo alto e stretto contenente una sola oliva. Descrivete più di un modo per estrarre l'oliva dal barattolo sfruttando l'inerzia sia dell'oliva sia del barattolo.

29. Nella Figura 3.23 si vede un'asticella alle cui estremità sono conficcati due spilli, a loro volta appoggiati sui bordi di due bicchieri pieni di vino all'orlo. Lo sperimentatore assesta all'asticella un colpo secco per mezzo di un bastone robusto. L'asticella si spezza, ma i due bicchieri rimangono al loro posto senza perdere neanche una goccia. Questo stupefacente gioco da salotto era di moda alla fine del 1800. Quali sono i principi fisici che lo spiegano? Attenzione: se lo tentate, esercitatevi prima con lattine vuote!

30. Un ascensore è sostenuto da una sola fune senza contrappesi. L'ascensore carica i passeggeri a piano terra e li porta all'ultimo piano. Qui, dopo averli sbarcati, si riempie di nuovo e porta i nuovi passeggeri a terra. In quale fase di questo ciclo la forza esercitata dalla fune sulla cabina eguaglia il peso dell'ascensore, passeggeri inclusi? Quando è maggiore? Quando è minore?

31. Siete sulla navicella spaziale *Discovery*. Qualcuno vi porge due palle di legno in apparenza identiche. Una di esse però è riempita di piombo; l'altra è vuota. Descrivete più modi per distinguerle.



FIGURA 3.23 Quesito 29.

32. Siete su una piattaforma di una bilancia e annotate il vostro peso. Fate un passo in avanti e osservate che all'inizio del movimento la lettura della bilancia diminuisce rispetto al vostro peso mentre nella fase conclusiva essa segna di più del vostro peso. Come si spiega?

33. Siete in grado di pesarvi su una bilancia che ha una portata massima inferiore al vostro peso? Se sì, come?

34. Dal soffitto di un ascensore pende una bilancia a molla cui è attaccato un peso. Quale delle seguenti situazioni farà registrare il valore di peso maggiore? (a) L'ascensore è fermo; (b) l'ascensore sale a velocità costante. (c) l'ascensore scende ed è in fase di rallentamento; (d) l'ascensore scende ed è in fase di accelerazione. E in quale situazione il peso sarà minore?

35. Una signora in ascensore sta ritta su una bilancia pesapersone. Quale delle seguenti situazioni farà registrare il valore di peso minore? (a) L'ascensore è fermo; (b) si spezza la fune e l'ascensore precipita. (c) l'ascensore è sottoposto a un'accelerazione orientata verso l'alto; (d) l'ascensore è sottoposto a un'accelerazione orientata verso il basso; (e) l'ascensore si muove a velocità costante. E in quale situazione il peso sarà maggiore?

36. La foto di figura 3.24 mostra la cometa Kohoutek come è apparsa nel 1973. Come tutte le comete, orbita attorno al Sole sotto la sua attrazione gravitazionale. Il nucleo della cometa è



FIGURA 3.24 Quesiti 36 e 37.

un corpo relativamente massiccio posto nel punto *P*. La coda della cometa si genera per effetto del vento solare, che consiste di un flusso di particelle cariche emesse dal Sole. Dall'esame della figura che informazione è eventualmente possibile trarre sulla direzione della forza che agisce sul nucleo? E sulla direzione dell'accelerazione cui è soggetto il nucleo? E sulla direzione in cui si muove la cometa?

37. In generale (Figura 3.24) le comete hanno una coda costituita di polveri, cioè di particelle cariche spinte dal vento solare in direzione di allontanamento dal Sole. Perché questa coda spesso è incurvata?

38. Riuscite a immaginare fenomeni che coinvolgano il globo terrestre, in cui la Terra non si possa considerare come una particella?

39. Pensate a un tuffo da un alto trampolino. Prima di gettarvi, la vostra accelerazione è nulla e purtuttavia percepite la forza di gravità che vi attrae in basso. Durante il tuffo invece la vostra accelerazione è tutt'altro che zero, ma in questa situazione di «assenza di peso» vi viene a mancare la sensazione di essere attratti verso il basso, come se su di voi agisse una forza risultante nulla. È una contraddizione alle leggi di Newton? Come potreste spiegarlo a chi è digiuno di fisica?

ESERCIZI

3.1 Meccanica classica

3.2 Prima legge di Newton

3.3 Forza

3.4 Massa

3.5 Seconda legge di Newton

1. Supponete che venga improvvisamente a mancare l'attrazione gravitazionale del Sole e la Terra diventi un corpo libero anziché vincolato alla sua orbita. Quanto tempo impiegherebbe la Terra per raggiungere una distanza dal Sole pari all'attuale raggio orbitale di Plutone? (Vedi l'Appendice C per i dati necessari.)
2. Un blocco di massa 5,5 kg è inizialmente fermo su un piano orizzontale privo d'attrito. Viene tirato da una forza orizzontale costante di 3,8 N. (a) Che accelerazione assume? (b) Dopo quanto tempo raggiunge la velocità di 5,2 m/s? (c) Che distanza percorre in questo intervallo di tempo?
3. Un elettrone procede in linea retta dal catodo all'anodo di un tubo a vuoto, distanti fra loro 1,5 cm. Parte da fermo e raggiunge l'anodo con velocità di $5{,}8 \cdot 10^6$ m/s. Calcolare la forza di natura elettrica che agisce sull'elettrone, supposta costante. La massa dell'elettrone vale $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.
4. Un neutrone viaggia alla velocità di $1{,}4 \cdot 10^7$ m/s. Le forze nucleari sono intense ed efficaci solo a distanze brevissime: già fuori dal nucleo praticamente non agiscono più. Se il neutrone viene catturato e arrestato da un nucleo di diametro $1{,}0 \cdot 10^{14}$ m, qual è l'intensità minima della forza, supposta costante, che agisce sul neutrone? La massa del neutrone vale $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.
5. In una sorta di tiro alla fune due persone tirano in versi opposti una slitta di massa 25 kg su una strada ghiacciata. Che accelerazione assume la slitta se le due forze applicate valgono 90 N e 92 N?
6. Un'automobile finisce contro il pilone di un ponte alla velocità di 53 km/h. Il passeggero dell'auto viene proiettato in avanti per una lunghezza di 65 cm (rispetto alla strada) mentre l'*air bag* arresta la sua avanzata. Che forza, assunta costante, esercita l'*air bag* sul torace del passeggero, che ha una massa di 39 kg?
7. Un elettrone che procede orizzontalmente alla velocità di $1{,}2 \cdot 10^7$ m/s entra in un campo elettrostatico che esercita su di esso una forza verticale costante di intensità $4{,}5 \cdot 10^{-16}$ N. Essendo la massa dell'elettrone $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg, determinare la distanza verticale di cui viene deflesso mentre percorre una lunghezza orizzontale di 33 mm.
8. Il veliero solare *Diana*, progettato per navigare nel sistema solare sotto l'azione della pressione di radiazione del Sole, ha una superficie velica di 3,1 km^2 e una massa di 930 kg. Vicino all'orbita terrestre il Sole può esercitare sulla sua vela una forza di 29 N. (a) Che accelerazione imprimerebbe alla navicella? (b) Anche un'accelerazione modesta può produrre effetti considerevoli se si mantiene costante per un lungo periodo di tempo. Se il veliero parte da fermo, che distanza può percorrere in 1 giorno sotto queste condizioni? (c) Che velocità raggiungerebbe nello stesso tempo? (Si veda *The Wind from the Sun*, un affascinante racconto fantascientifico di una gara tra velieri solari di A.C. Clarke.)
9. Un corpo di massa m_1 sotto l'azione di una certa forza assume l'accelerazione di 12,0 m/s^2. La stessa forza applicata a un corpo di massa m_2 gli imprime un'accelerazione di 3,30 m/s^2. Applicando sempre la stessa forza, che accelerazione assumerebbe un corpo la cui massa sia (a) pari alla differenza tra m_1 ed m_2 o (b) pari alla somma di m_1 ed m_2?
10. (a) Trascurando le forze gravitazionali, che forza è richiesta per accelerare una nave spaziale di massa $1{,}2 \cdot 10^6$ kg da ferma a un decimo della velocità della luce in 3 giorni? E in 30 giorni? (b) Si supponga di spegnere i motori a velocità raggiunta. Quanto tempo occorre per effettuare un viaggio lungo 150 giorni-luce nei due casi?

3.6 Terza legge di Newton

1. Due blocchi di masse $m_1 = 4{,}6$ kg ed $m_2 = 3{,}8$ kg giacciono su un piano orizzontale privo d'attrito, tenuti legati da una molla leggera. In un certo istante m_2 ha un'accelerazione $a_2 = 2{,}6$ m/s^2. In quell'istante (a) quanto vale la forza agente su m_2, e (b) quanto vale l'accelerazione di m_1?

3.7 Massa e peso

1. Calcolare il peso in newton di (a) 2,0 kg di zucchero, (b) un calciatore di 100 kg, (c) un'automobile di 1800 kg.
2. Quant'è il peso di (a) una motoslitta di massa 700 kg e (b) una pompa di calore di massa 412 kg?
3. Un astronauta di massa pari a 75,0 kg parte per un viaggio interplanetario. Calcolate il suo peso (a) sulla Terra, (b) su Marte, ove $g = 3{,}72$ m/s^2, (c) nello spazio interstellare. (d) Quanto vale la sua massa in ognuno di questi luoghi?
4. Una particella pesa 26,0 N in una località ove g vale 9,80 m/s^2. (a) Quanto valgono il peso e la massa della particella laddove $g = 4{,}60$ m/s^2? (b) E nello spazio, lontano da ogni attrazione gravitazionale?

 ISBN 88-408-1254-7

16. Un aeromobile di massa 12 000 kg è in volo orizzontale alla velocità di 870 km/h. Quanto vale la forza di sostentamento che l'aria applica verso l'alto sull'aeromobile?
17. Quanto vale la forza netta che agisce su un'auto di massa pari a 1700 kg che ha un'accelerazione di 4,0 m/s^2?
18. Una slitta a razzo sperimentale di massa 523 kg può essere accelerata da zero a 1620 km/h in 1,82 s. Che forza si richiede allo scopo?
19. Un aviogetto, partendo da fermo, sulla pista di decollo ha un'accelerazione di 2,30 m/s^2. Ciascuno dei suoi due reattori sviluppa una spinta di $1{,}40 \cdot 10^5$ N. Che peso ha l'aeroplano?

3.8 Applicazioni delle leggi di Newton nel moto unidimensionale

20. (a) Due blocchi di massa 4,5 kg ciascuno sono appesi a un dinamometro nella disposizione di Figura 3.25a. Che forza legge il dinamometro? (b) Un blocco di massa 4,5 kg è appeso a un dinamometro nella disposizione di Figura 3.25b. Che forza legge il dinamometro? Si trascuri il peso del dinamometro.

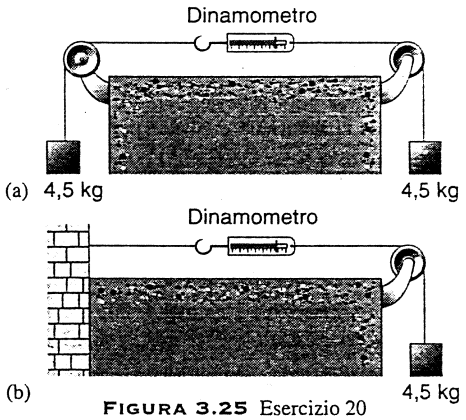


FIGURA 3.25 Esercizio 20

21. Una macchina del peso di 13 000 N si arresta partendo da una velocità iniziale di 80 km/h, nello spazio di 61 m. Trovare (a) la forza frenante e (b) il tempo richiesto per l'arresto. Se la velocità iniziale fosse di 40 km/h, con la stessa forza frenante quali sarebbero (c) lo spazio e (d) il tempo richiesti?
22. Un meteorite di massa 0,25 kg sta cadendo verticalmente in atmosfera con un'accelerazione di 9,2 m/s^2. A causa della resistenza dell'aria sul meteorite, oltre alla forza di gravità (con $g = 9{,}8$ m/s^2), agisce anche una forza frenante. Quanto vale il suo modulo? Si veda la Figura 3.26.



FIGURA 3.26 Esercizio 22.

23. Un uomo di massa 83 kg salta giù nel cortile dal davanzale della finestra posto 0,48 m sopra il piano del cortile. Non flette le gambe, sicché il suo corpo si arresta nello spazio di 2,2 cm. (a) Quanto vale la sua accelerazione media tra l'istante in cui tocca terra e l'istante in cui si arresta? (b) Che forza media deve sopportare la sua struttura ossea?
24. A quale forza è soggetta una lenza in grado di fermare nello spazio di 11 cm un salmone di massa 8,5 kg che nuota alla velocità di 3,0 m/s?
25. Se volete calare dal tetto un oggetto di massa 45 kg con una fune in grado di reggere fino a una trazione di 400 N, come potete agire?
26. Un dinamometro fissato al soffitto di un ascensore, pesando un oggetto mentre la cabina è ferma, segna 65 N. (a) Se l'ascensore sale verso l'alto con velocità costante di 7,6 m/s, qual è la lettura del dinamometro? (b) E se invece, mentre ha questa velocità, è sottoposto a un'accelerazione di $-2{,}4$ m/s^2 (orientata quindi verso il basso)?
27. Un montacarichi di massa 1600 kg precipita da un'altezza di 72 m per l'improvvisa rottura del cavo. Se il freno di emergenza agente sulle rotaie laterali esercita una forza di resistenza costante di 3700 N, con che velocità la cabina si abbatte al suolo?
28. Un caccia di massa 26 000 kg, per decollare dal ponte lungo 90 m di una portaerei, in ausilio al proprio motore che sviluppa una spinta di 105 kN, usa una catapulta elastica (Figura 3.27), Che forza costante deve applicare quest'ultima per ottenere in fondo alla pista la velocità minima di decollo pari a 85 m/s?

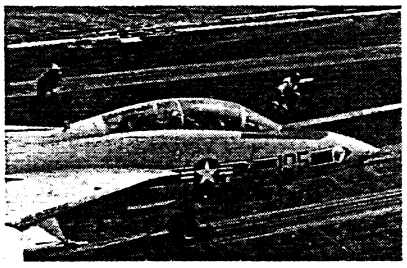


FIGURA 3.27 Esercizio 28.

29. Un razzo assieme al suo carico ha una massa complessiva di 51 000 kg. Qual è la spinta esercitata dal motore quando (a) riesce a sollevare appena il razzo dalla rampa, (b) gli imprime un'accelerazione verso l'alto di 18 m/s^2?
30. Un paracadutista di massa 77 kg è soggetto a un'accelerazione di 2,5 m/s^2 subito dopo l'apertura del paracadute, che ha una massa di 5,2 kg. Calcolare (a) la forza verso l'alto che l'aria applica al paracadute e (b) la forza verso il basso esercitata dal paracadutista sul paracadute.
31. Un elicottero di massa 15 000 kg sta sollevando un veicolo di massa 4500 kg con un'accelerazione verso l'alto di 1,4 m/s^2. Calcolare (a) la forza verso l'alto che l'aria esercita sulle pale dell'elicottero e (b) la tensione sul cavo di sollevamento. Si veda la Figura 3.28.

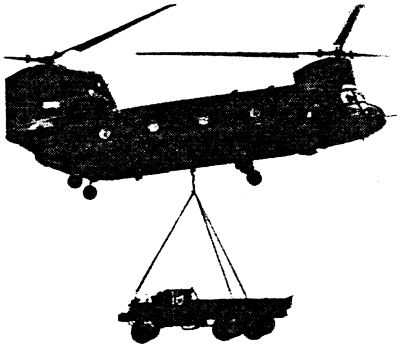


FIGURA 3.28 Esercizio 31.

PROBLEMI

1. Il fascio laser emesso da un satellite intercetta un oggetto espulso da un missile balistico lanciato accidentalmente (Figura 3.29). Il raggio laser esercita sul bersaglio una forza di $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ N. Se il tempo di azione di questa forza è di 2,4 s, di quanto si sposta l'oggetto in quest'intervallo se si tratta (a) di una testata nucleare di massa 280 kg, oppure (b) di un falso bersaglio di massa 2,1 kg?

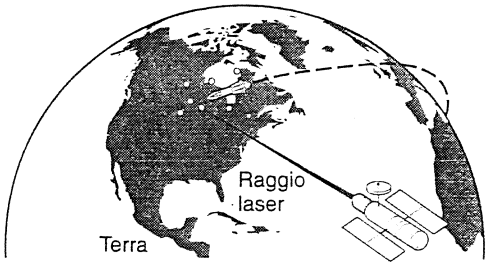


FIGURA 3.29 Problema 1.

2. Sulla superficie di un lago ghiacciato privo d'attrito si trovano una slitta di massa 8,4 kg e una ragazza di massa 40 kg, distanti tra di loro 15 m. Tirando a sé una corda la ragazza esercita sulla slitta una forza orizzontale di 5,2 N. (a) Qual è l'accelerazione della slitta? (b) Qual è l'accelerazione della ragazza? (c) Assumendo queste forze costanti, in che punto, misurato dalla posizione iniziale della ragazza, ella si incontra con la slitta?
3. Dalla cima di un piano inclinato lungo 16 m e privo d'attrito si lascia andare una cassa che raggiunge il fondo 4,2 s dopo. Parallelamente, dal fondo del piano nell'esatto istante in cui parte questa prima cassa se ne lancia una seconda su per la superficie inclinata con velocità tale che questa, riscendendo, giunga di nuovo in fondo simultaneamente alla prima. (a) Trovare l'accelerazione di ciascuna cassa nella direzione del moto. (b) Qual è la velocità iniziale del secondo blocco? (c) Di che distanza sul piano inclinato riesce a salire la seconda cassa?
4. Il reattore di massa 1400 kg di un aviogetto è fissato alla fusoliera con tre soli bulloni, come si fa abitualmente. Si supponga che ciascun bullone sopporti un terzo del carico. (a) Si calcoli la forza esercitata su ciascun bullone mentre l'aereo è fermo. (b) In volo l'aereo incontra una turbolenza che gli imprime un'improvvisa accelerazione verso l'alto di $2{,}60\ \text{m/s}^2$. Quant'è ora la forza sopportata da ciascun bullone? Perché se ne usano solo tre? Si veda la Figura 3.30.
5. Un modulo di atterraggio sta avvicinandosi alla superficie di Callisto, un satellite di Giove privo di atmosfera (Figura 3.31). Se il razzo di frenata applica una spinta verso l'alto con intensità di 3260 N, il modulo scende a velocità costante; se invece la spinta è di 2200 N, l'accelerazione del modulo verso terra è di $0{,}390\ \text{m/s}^2$. (a) Calcolare il peso del modulo di atterraggio in prossimità di Callisto. (b) Che massa ha il modulo? (c) Quanto vale l'accelerazione di gravità su Callisto?
6. Il pallone di Figura 3.32, avente massa M, sta scendendo verticalmente con accelerazione verso il basso a. Quanta zavorra occorre gettare per imprimere al pallone un'accelerazione a verso l'alto, supposta costante la spinta dell'aria sul pallone?

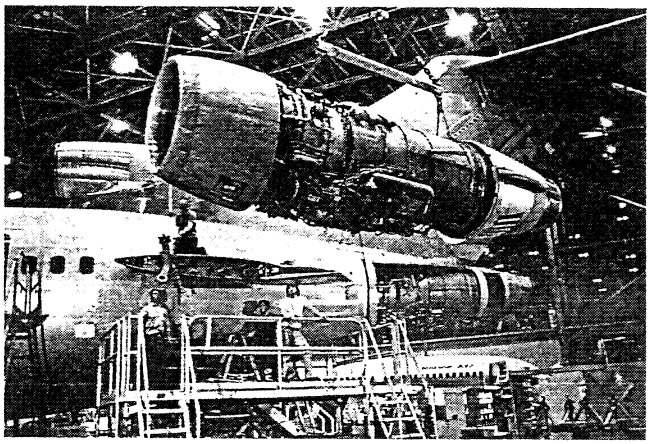


FIGURA 3.30 Problema 4.

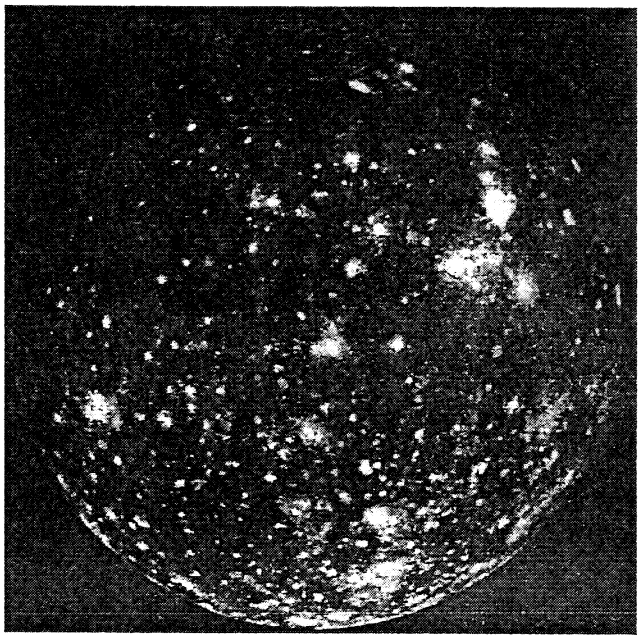


FIGURA 3.31 Problema 5.

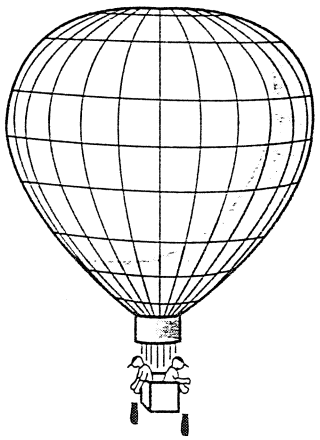


FIGURA 3.32 Problema 6.

 ISBN 88-408-1254-7

7. Un trenino giocattolo consiste di tre vagoni agganciati che possono avanzare senza attrito (Figura 3.33). Le masse dei vagoni sono: $m_1 = 3{,}1$ kg; $m_2 = 2{,}4$ kg; $m_3 = 1{,}2$ kg. Tirandoli verso destra con forza orizzontale P di 6,5 N, si trovi (a) l'accelerazione del treno, (b) la forza esercitata dal secondo vagone sul terzo, e (c) la forza esercitata dal primo vagone sul secondo.

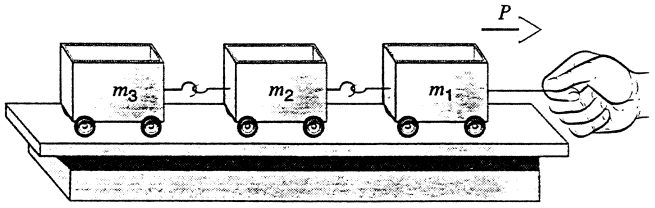


FIGURA 3.33 Problema 7.

8. Nella Figura 3.34 si vedono su un piano orizzontale privo d'attrito tre casse con le seguenti masse: $m_1 = 45{,}2$ kg; $m_2 = 22{,}8$ kg; $m_3 = 34{,}3$ kg. (a) Che forza orizzontale F è richiesta per spingerle a destra tutte assieme con accelerazione di 1,32 m/s^2 ? (b) Calcolare la forza esercitata da m_2 su m_1, (c) e viceversa.

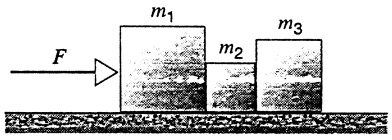


FIGURA 3.34 Problema 8.

9. Nella Figura 3.35 è illustrata una catena di massa 500 g, composta da cinque maglie uguali, mentre viene sollevata verticalmente con accelerazione di 2,50 m/s^2. Trovare (a) le forze agenti tra maglie adiacenti, (b) la forza F esercitata sulla catena da chi la solleva, e (c) la forza netta esercitata su ciascuna maglia.



FIGURA 3.35 Problema 9.

10. Abbiamo due blocchi in contatto tra di loro appoggiati su un piano privo d'attrito. Come si vede nella Figura 3.36, viene applicata una forza F orizzontale sul primo blocco. (a) Ponendo $m_1 = 2{,}3$ kg, $m_2 = 1{,}2$ kg ed $F = 3{,}2$ N, si calcoli la forza di contatto tra i due blocchi. (b) Si dimostri che, applicando la forza al secondo blocco anziché al primo (invertendo tra loro i due blocchi), la forza di contatto vale 2,1 N, valore diverso dal caso precedente. Se ne dia una spiegazione.

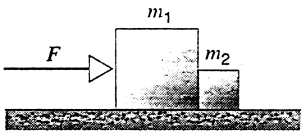


FIGURA 3.36 Problema 10.

11. Come illustra la Figura 3.37, mediante una corda di massa m si tira con una forza orizzontale P un blocco di massa M su una superficie orizzontale priva d'attrito. Assumendo trascurabile l'elasticità della corda, si trovi (a) l'accelerazione di corda e blocco; (b) la forza che la corda esercita sul blocco.

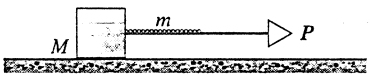


FIGURA 3.37 Problema 11.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Assistiamo al lancio verticale di un proiettile in aria con velocità iniziale di 50,0 m/s. Oltre alla gravità agisce su di esso una forza di resistenza aerodinamica proporzionale alla velocità secondo la relazione $f_y = -bv_y$; si osservi che la forza d'attrito è negativa (rivolta verso il basso) quando il proiettile sale, mentre è positiva (verso l'alto) se il proiettile scende.

   (a) Produrre numericamente, ponendo $b = 0$, un grafico dell'altezza in funzione del tempo, provando con intervalli di tempo di diversa entità, per esempio Δt = 1,0 s, 0,1 s, 0,01 s, 0,001 s. Riportare i risultati su un singolo diagramma. Come varia il punto di culminazione del lancio al variare dell'intervallo di tempo scelto?

   (b) Produrre ora numericamente, nell'intervallo $\Delta t = 0{,}01$ s, diversi grafici dell'altezza in funzione del tempo per alcuni valori di b, come 0,1 N · s/m, 0,5 N · s/m, 1,0 N · s/m, 5,0 N · s/m, 10,0 N · s/m. Come varia il punto culminante al variare di b? Cosa notate riguardo alla forma delle curve all'aumentare di b?

CAPITOLO 4

MOTO IN DUE E TRE DIMENSIONI

In questo Capitolo estendiamo i concetti presentati nei Capitoli 2 e 3 dove abbiamo introdotto la cinematica e la dinamica in notazione vettoriale, ma limitandoci a una sola dimensione. Ora allargheremo la discussione per includere i casi che comportano due o tre dimensioni. Risulterà più facile tenere conto separatamente delle componenti x, y e z del moto, se ci affideremo ai vettori per descrivere la posizione, la velocità e l'accelerazione dei corpi puntiformi, così come le forze che agiscono su di essi. Allo scopo di illustrare la tecnica vettoriale faremo ricorso a due esempi: un proiettile lanciato sotto l'effetto della gravità che segue una traiettoria bidimensionale, e un oggetto che percorre un'orbita circolare.

4.1 MOTO COSTANTEMENTE ACCELERATO IN TRE DIMENSIONI

Nel Paragrafo 2.5 abbiamo descritto un procedimento per analizzare la posizione, la velocità e l'accelerazione di una particella che si muove ad accelerazione costante in una dimensione. Conoscendo l'accelerazione possiamo trovare la velocità in qualsiasi istante mediante l'Equazione 2.26 ($v_x = v_{0x} + a_x t$) e la posizione in qualunque istante tramite l'Equazione 2.28 ($x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$).

Ora consideriamo una particella che si muove in tre dimensioni, sempre con accelerazione costante. Mentre essa avanza, la sua velocità non cambia né in modulo, né in direzione, né in verso. Possiamo rappresentare l'accelerazione con un vettore $\boldsymbol{a}$, le cui tre componenti cartesiane a_x, a_y e a_z rimangono tutte costanti. Consideriamo il caso generale in cui la particella si muove su una traiettoria curva; come per il moto unidimensionale, saremo interessati a conoscere, in qualunque istante, la velocità della particella $\boldsymbol{v}$ (un vettore di componenti v_x, v_y e v_z) e la sua posizione $\boldsymbol{r}$ (un vettore di componenti x, y e z).

Possiamo ottenere l'equazione generale del moto costantemente accelerato ponendo

$$a_x = \text{costante}, \quad a_y = \text{costante} \quad \text{e} \quad a_z = \text{costante}.$$

La particella parte all'istante $t = 0$ dalla posizione iniziale $\boldsymbol{r}_0 = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ avendo una velocità iniziale data da $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j} + v_{0z}\boldsymbol{k}$. Procediamo ora come nel Paragrafo 2.5 e sviluppiamo in analogia all'Equazione 2.26 tre equazioni unidimensionali: $v_x = v_{0x} + a_x t$, $v_y = v_{0y} + a_y t$ e $v_z = v_{0z} + a_z t$, che possiamo riassumere nella singola equazione vettoriale

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t\,. \tag{4.1}$$

Quando siete di fronte a un'equazione vettoriale come questa non dimenticate che potete sempre intenderla come la combinazione di tre equazioni unidimensionali. Detto in altri termini, un'uguaglianza vettoriale come $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ implica che siano soddisfatte le tre uguaglianze $A_x = B_x$, $A_y = B_y$ e $A_z = B_z$. È chiaro dunque come l'Equazione 4.1 rappresenti le tre equazioni unidimensionali riferite alle tre componenti cartesiane.

Quando diciamo che queste tre equazioni sono «indipendenti» vogliamo significare che le componenti della velocità variano indipendentemente una dall'altra. Per esempio, a_x fa variare solo v_x e non produce effetti su v_y o v_z. Se abbiamo $a_y = a_z = 0$ e $a_x = a$, allora v_y e v_z resteranno costanti mentre v_x varierà col tempo.

Il secondo addendo a destra dell'Equazione 4.1 comporta la moltiplicazione tra il vettore $\boldsymbol{a}$ e lo scalare t. Come

 ISBN 88-408-1254-7

troviamo anche nell'Appendice H, il prodotto è costituito da un vettore di modulo at avente la stessa direzione e, se t è positivo, lo stesso verso di $\boldsymbol{a}$.

In modo simile possiamo scrivere le tre equazioni per le componenti del vettore posizione, come abbiamo fatto nell'Equazione 2.28: $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ e $z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2$. Anche queste tre equazioni unidimensionali si possono combinare in una sola equazione vettoriale tridimensionale:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 , \qquad (4.2)$$

che contiene in sé le equazioni unidimensionali per le tre componenti.

PROBLEMA SVOLTO 4.1 La sonda spaziale *Enterprise* sta viaggiando a velocità costante nello spazio (ove la gravità è trascurabile) alla velocità di 15,0 km/s rispetto a un certo riferimento inerziale, quando improvvisamente viene agganciata da un fascio attrattore che la tira in direzione perpendicolare a quella del suo moto, imprimendole un'accelerazione di 4,2 km/s^2. Dopo che il fascio attrattore ha agito per 4,0 s, la *Enterprise* accende i motori, che spingono l'astronave in direzione parallela a quella della sua velocità originaria, imprimendole un'accelerazione di 18,0 km/s^2. Dopo altri 3,0 s entrambe le forze cessano e l'astronave procede nuovamente in volo libero. Calcolare la velocità vettoriale della sonda spaziale in quest'ultimo istante e la sua posizione rispetto al punto in cui il fascio attrattore ha cominciato ad agire.

Soluzione Fissiamo il sistema di coordinate in modo che l'asse x coincida con la direzione e il verso del moto iniziale, l'asse y coincida con la direzione e il verso del fascio attrattore, e l'origine sia situata nel punto occupato dall'astronave nel momento in cui il fascio è apparso. Il moto da analizzare si svolge in due tempi, che vanno esaminati separatamente: (1) da $t = 0$ a $t = 4{,}0$ s l'astronave è soggetta all'accelerazione $a_x = 0$ e $a_y = +4{,}2$ km/s^2; (2) dall'istante $t = 4{,}0$ s all'istante $t = 7{,}0$ s è sottoposta all'accelerazione $a_x = +18{,}0$ km/s^2 e $a_y = +4{,}2$ km/s^2.

Analizziamo la prima fase del moto. La velocità iniziale è $v_{0x} = +15$ km/s e $v_{0y} = 0$. Al termine del periodo di tempo le componenti della velocità e della posizione diventano, in base alle Equazioni 4.1 e 4.2:

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 15{,}0\,\text{km/s} + 0 = 15{,}0\,\text{km/s}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (4{,}2\,\text{km/s}^2)(4{,}0\,\text{s}) = 16{,}8\,\text{km/s}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = 0 + (15{,}0\,\text{km/s})(4{,}0\,\text{s}) + 0 = 60{,}0\,\text{km}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(4{,}2\,\text{km/s}^2)(4{,}0\,\text{s})^2 =$$
$$= 33{,}6\,\text{km}$$

Per la fase successiva, da $t = 4{,}0$ s a $t = 7{,}0$ s, applichiamo le medesime equazioni, in cui ora introduciamo un nuovo intervallo t' di 3,0 s mantenendo la medesima origine per le coordinate spaziali. Come velocità e posizioni iniziali di questa fase assumiamo i valori finali trovati per la fase precedente ($t = 4{,}0$ s, $v_{0x} = 15{,}0$ km/s, $v_{0y} = 16{,}8$ km/s, $x_0 = 60{,}0$ km, $y_0 = 33{,}6$ km):

$$v_x = v_{0x} + a_x t' = 15{,}0\,\text{km/s} + (18{,}0\,\text{km/s}^2)(3{,}0\,\text{s}) = 69{,}0\,\text{km/s}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t' = 16{,}8\,\text{km/s} + (4{,}2\,\text{km/s}^2)(3{,}0\,\text{s}) = 29{,}4\,\text{km/s}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t' + \tfrac{1}{2}a_x t'^2 =$$
$$= 60{,}0\,\text{km} + (15{,}0\,\text{km/s})(3{,}0\,\text{s}) + \tfrac{1}{2}(18{,}0\,\text{km/s}^2)(3{,}0\,\text{s})^2 =$$
$$= 186\,\text{km}$$

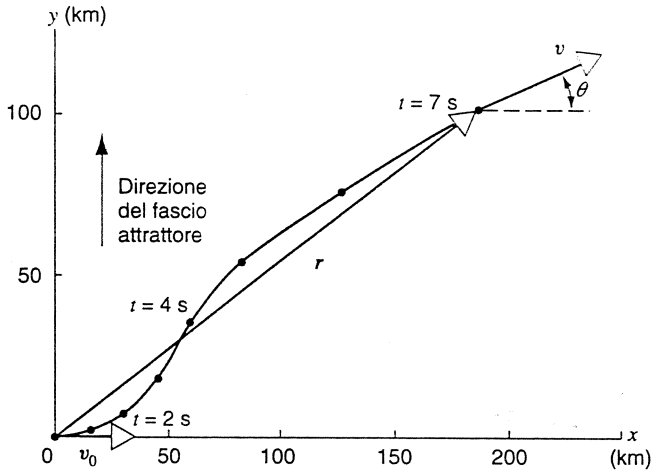


FIGURA 4.1 Problema svolto 4.1. I punti indicano le posizioni successive della nave spaziale a intervalli di 1 s a partire da $t = 0$ fino a $t = 7$ s. Per l'istante $t = 7$ s sono tracciati i vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{v}$. Si noti che $\boldsymbol{v}_0$ è tangente alla traiettoria nell'istante $t = 0$, e $\boldsymbol{v}$ è tangente nell'istante $t = 7$ s.

$$y = y_0 + v_{0y}t' + \tfrac{1}{2}a_y t'^2 =$$
$$= 33{,}6\,\text{km} + (16{,}8\,\text{km/s})(3{,}0\,\text{s}) + \tfrac{1}{2}(4{,}2\,\text{km/s}^2)(3{,}0\,\text{s})^2 =$$
$$= 103\,\text{km}.$$

All'istante finale $t = 7{,}0$ s l'astronave si trova nella posizione individuata da $x = 186$ km, $y = 103$ km, ovvero a una distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 213$ km dall'origine, che è il punto di riferimento iniziale. Le componenti della velocità sono $v_x = 69$ m/s e $v_y = 29$ m/s, sicché la velocità scalare alla fine risulta data da $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 75$ km/s e la sua direzione è individuata dall'angolo $\theta = \arctan(v_y/v_x) = 23°$ rispetto all'asse x. La Figura 4.1 illustra il percorso della sonda spaziale e la sua posizione in vari istanti. In generale, come si è messo in evidenza per l'istante $t = 7$ s, le direzioni dei vettori posizione e velocità variano continuamente.

Si noti come nello svolgimento del problema l'uso delle componenti vettoriali ci abbia aiutato nel separare il moto nelle due direzioni x e y. Le soluzioni delle equazioni per il moto lungo l'asse x non dipendono dal moto lungo l'asse y. Se il fascio attrattore non fosse intervenuto e l'*Enterprise* avesse comunque acceso i motori nell'intervallo da $t = 4{,}0$ s a $t = 7{,}0$ s, si sarebbe trovato egualmente ad avere $x = 186$ km e $v_x = 69$ km/s alla fine dell'intervallo. Se invece avesse tenuto i motori spenti e il fascio fosse stata l'unica forza ad agire, la posizione e la velocità finali sarebbero state caratterizzate comunque dalle componenti $y = 103$ km e $v_y = 29$ km/s.

4.2 FORMA VETTORIALE DELLE LEGGI DI NEWTON IN TRE DIMENSIONI

Prima di poter scrivere le leggi di Newton in forma vettoriale, dobbiamo verificare che la forza, come l'abbiamo definita, si comporti come un vettore. Nel Capitolo 3 abbiamo visto che,

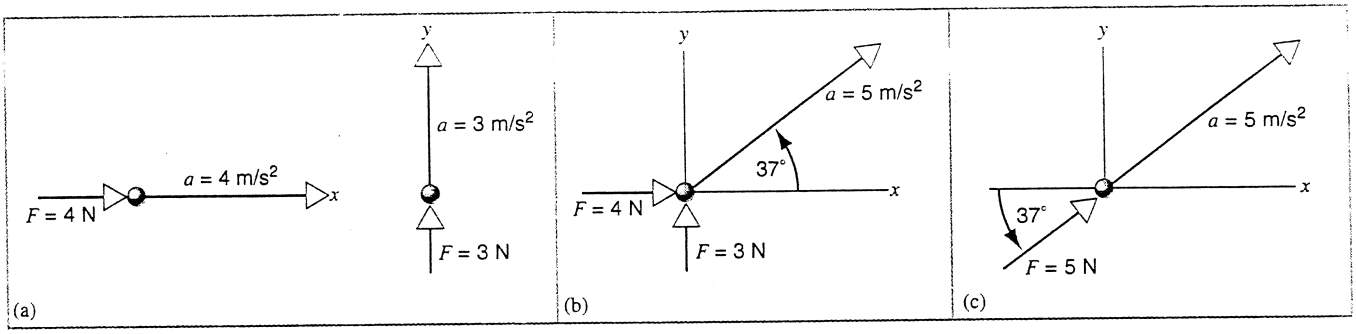


FIGURA 4.2 (a) Una forza d'intensità 4 N nella direzione dell'asse x produce un'accelerazione di 4 m/s^2 nella stessa direzione, mentre una forza d'intensità 3 N nella direzione dell'asse y produce un'accelerazione di 3 m/s^2 nella stessa direzione. (b) Se si applicano le due forze contemporaneamente, l'accelerazione che ne risulta è di 5 m/s^2 nella direzione indicata. (c) La stessa accelerazione può ottenersi applicando una sola forza d'intensità 5 N nella medesima direzione.

anche in una dimensione, dobbiamo tenere conto attentamente della direzione di ciascuna forza. Dato che la forza è caratterizzata da una direzione e da un verso, è possibile che si comporti come una grandezza vettoriale. Sappiamo però che ciò non è sufficiente a garantire che si tratti di grandezza vettoriale: una tale caratteristica è attribuibile solo se la grandezza risponde anche alle leggi di addizione dei vettori, descritte nel Paragrafo 2.2. È solo sperimentalmente che possiamo stabilire se le forze si sommano secondo queste regole.

Disponiamo lungo l'asse x una forza che agisce con intensità di 4 N, e un'altra forza lungo l'asse y di intensità pari a 3 N. Applichiamo queste forze prima separatamente, poi insieme, al corpo campione di massa 1 kg, sistemato su una superficie orizzontale priva d'attrito. Quale sarà l'accelerazione del corpo campione? Troveremo sperimentalmente che la prima forza di 4 N da sola produce un'accelerazione di 4 m/s^2 nella direzione dell'asse x, mentre la seconda forza di 3 N, sempre da sola, imprime un'accelerazione di 3 m/s^2 nella direzione dell'asse y (Figura 4.2a). Se le applichiamo contemporaneamente, come in Figura 4.2b, troviamo che l'accelerazione ha intensità di 5 m/s^2 nella direzione che forma un angolo di 37° con l'asse x. E questa sarebbe proprio l'accelerazione che il corpo campione assumerebbe per effetto di una forza di 5 N in quella direzione. Forza che corrisponde alla somma vettoriale delle due forze sperimentate (Figura 4.2c), le quali, sommate, danno proprio come risultato un vettore di modulo 5 N e direzione formante un angolo di 37° con l'asse x. Applicando questa forza risultante al corpo campione otteniamo la stessa accelerazione sperimentata con l'applicazione simultanea delle due forze componenti. Molte esperienze di questo tipo dimostrano che la forza è una grandezza vettoriale: è dotata di modulo, direzione e verso, *e* soprattutto segue le regole di addizione dei vettori.

Ora che possiamo a buon diritto trattare le forze come vettori, siamo autorizzati a scrivere la seconda legge di Newton in forma vettoriale, come abbiamo fatto nel Capitolo 3:

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}\,, \qquad (4.3)$$

che congloba le tre equazioni relative alle componenti,

$$\sum F_x = ma_x\,, \quad \sum F_y = ma_y\,, \quad \sum F_z = ma_z\,. \qquad (4.4)$$

Concludendo, nell'applicare la seconda legge di Newton, tutte e tre le equazioni devono essere soddisfatte simultaneamente.

L'Equazione 4.3 indica che la direzione dell'accelerazione, considerato che m è uno scalare, corrisponde a quella del vettore somma di tutte le forze agenti sulla particella. Tramite l'Equazione 4.3, dalla forza risultante possiamo anche dedurre il modulo di $\boldsymbol{a}$. Tuttavia vedremo che in pratica è spesso più conveniente risolvere i problemi ricorrendo alle Equazioni 4.4, cioè scomponendo le forze nelle loro componenti, operando la somma delle componenti lungo ciascun asse e trovando le componenti dell'accelerazione.

Quando le forze sono costanti, l'accelerazione è pure costante, e in questo caso vengono utili le equazioni del Paragrafo 4.1 per calcolare in ogni istante la posizione e la velocità della particella. Se le forze non sono costanti, ciò non è possibile; ne vedremo un esempio – la resistenza dell'aria che agisce su un proiettile – più avanti in questo stesso capitolo.

Anche la terza legge di Newton si esprime con un'equazione vettoriale:

$$\boldsymbol{F}_{AB} = -\boldsymbol{F}_{BA}\,. \qquad (4.5)$$

Indipendentemente dunque dall'orientamento nello spazio, qualsiasi forza $\boldsymbol{F}_{AB}$ esercitata da B su A ha una controparte costituita dal vettore $\boldsymbol{F}_{BA}$, che rappresenta la forza esercitata da A su B, uguale in modulo e direzione, ma di verso opposto.

PROBLEMA SVOLTO 4.2 Una cassa di massa $m = 62$ kg sta scivolando sul pavimento senza attrito con velocità iniziale $v_0 = 6{,}4$ m/s. Per modificarne la direzione Tiziano spinge la cassa in senso opposto al suo moto con forza costante di modulo $F_{CT} = 81$ N, mentre Jolanda spinge in direzione perpendicolare con forza costante di intensità $F_{CJ} = 105$ N (Figura 4.3a). La loro azione dura 3,0 s. Che direzione ha assunto la cassa alla fine di quest'intervallo di tempo?

 ISBN 88-408-1254-7

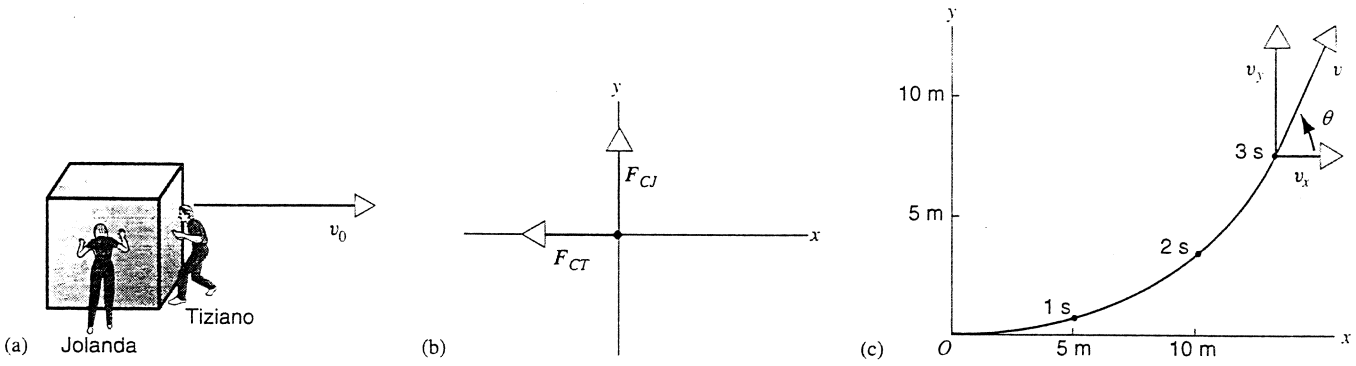


FIGURA 4.3 Problema svolto 4.2. (a) Tiziano spinge in verso opposto a quello del moto iniziale della cassa e Jolanda spinge nella direzione perpendicolare. (b) Diagramma delle forze per la cassa. (c) La linea tangente alla traiettoria dà la direzione del moto della cassa. Sono indicate le componenti della velocità all'istante $t = 3{,}0$ s.

Soluzione Assumiamo l'asse x nella direzione e nel verso della velocità iniziale (la spinta di Tiziano è orientata quindi in senso opposto), e l'asse y nella direzione e nel verso della spinta di Jolanda. La Figura 4.3b riporta il diagramma delle forze per la cassa. L'unica forza esistente in direzione dell'asse x è quella esercitata da Tiziano, di modo che $\sum F_x = -F_{CT}$; analogamente dicasi per l'asse y: $\sum F_y = F_{CJ}$. Scriviamo la seconda legge di Newton relativa alla cassa per le singole componenti (Equazione 4.4):

direzione x $\left(\sum F_x = ma_x\right)$: $\quad -F_{CT} = ma_x$

direzione y $\left(\sum F_y = ma_y\right)$: $\quad -F_{CJ} = ma_y$.

Risolvendo si ottiene

$$a_x = -\frac{F_{CT}}{m} = \frac{-81\text{ N}}{62\text{ kg}} = -1{,}31\text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{F_{CJ}}{m} = \frac{105\text{ N}}{62\text{ kg}} = 1{,}69\text{ m/s}^2\,.$$

Mediante l'Equazione 4.1 espressa per le singole componenti possiamo calcolare le componenti della velocità all'istante $t = 3{,}0$ s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 6{,}4\text{ m/s} + (-1{,}31\text{ m/s}^2)(3{,}0\text{ s}) = 2{,}5\text{ m/s}$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (1{,}69\text{ m/s}^2)(3{,}0\text{ s}) = 5{,}1\text{ m/s}.$$

Nella Figura 4.3c è riportato un grafico che illustra il percorso effettuato dalla cassa e in particolare la velocità all'istante $t = 3{,}0$ s. Il modulo della velocità e la sua direzione si trovano con l'Equazione 2.2:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2{,}5\text{ m/s})^2 + (5{,}1\text{ m/s})^2} = 5{,}7\text{ m/s}$$

$$\theta = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\frac{5{,}1\text{ m/s}}{2{,}5\text{ m/s}} = 64°\,.$$

Si noti che v ha la direzione del moto, cioè è tangente alla curva che descrive la traiettoria della cassa.

Sapreste trovare la posizione della cassa all'istante $t = 3{,}0$ s?

4.3 MOTO DEI PROIETTILI

Un esempio comune di moto in due dimensioni è offerto dal moto dei proiettili in vicinanza della superficie terrestre, quale potrebbe essere quello di una pallina da golf lanciata in una certa direzione. Per il momento trascureremo la resistenza dell'aria, che è una forza incostante, ciò che semplifica di molto i calcoli.

La figura 4.4a presenta il proiettile all'istante del lancio e la sua direzione di puntamento. La velocità iniziale del proiettile è v_0, con direzione definita dall'angolo ϕ_0 rispetto al piano orizzontale, detto angolo di *alzo*. Scegliamo il sistema di coordinate con l'asse x disposto orizzontalmente, parallelo e concorde alla componente orizzontale della velocità iniziale. L'asse y sia disposto verticalmente, con il verso positivo orientato in alto. Poniamo l'origine delle coordinate nel luogo di lancio, di modo che risulti $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Le componenti della velocità iniziale sono

$$v_{0x} = v_0 \cos\phi_0\,, \qquad v_{0y} = v_0 \sin\phi_0\,. \tag{4.6}$$

Il diagramma delle forze relativo al proiettile (di massa m) è riportato nella Figura 4.4b. L'unica forza agente è quella di gravità, che è costante, ha direzione verticale, verso orientato in basso e modulo costantemente uguale a mg in qualsiasi punto della traiettoria. Le componenti della forza risultante sono

$$\sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \sum F_y = -mg \tag{4.7}$$

e la seconda legge di Newton per le singole componenti (Equazione 4.4) risulta

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = 0 \quad \text{e} \quad a_y = \frac{\sum F_y}{m} = -g\,. \tag{4.8}$$

La componente orizzontale dell'accelerazione è ovunque zero, mentre quella verticale vale sempre $-g$.

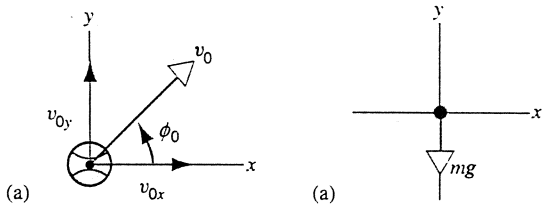


FIGURA 4.4 (a) Un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0. (b) Diagramma delle forze per il proiettile.

Ricorriamo dunque alle formule per il moto con accelerazione costante del Paragrafo 4.1 e otteniamo

componenti della velocità

$$(a)\ v_x = v_{0x}\,, \quad (b)\ v_y = v_{0y} - gt \tag{4.9}$$

componenti della posizione

$$(a)\ x = v_{0x}t\,, \quad (b)\ y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2\,. \tag{4.10}$$

Si noti che la componente orizzontale della velocità resta invariata per tutto il percorso e uguale alla velocità iniziale. D'altra parte l'Equazione 4.4 indica chiaramente che la componente x dell'accelerazione è influenzata *solo* da una forza risultante che abbia componente x non nulla. Dato che nel nostro caso $\sum F_x = 0$, ne consegue che v_x resta costante. Analogamente, la componente y della forza netta ha effetto solo su y e v_y e quindi non su x né su v_x.

Le equazioni relative al moto verticale (Equazioni 4.9b e 4.10b) sono le stesse già viste per il moto di caduta libera (Equazioni 2.29 e 2.30). Difatti, se per esempio osservassimo il moto del proiettile da un veicolo che corre a terra con velocità v_{0x} nella stessa direzione x del proiettile, questo ci apparirebbe come lanciato verticalmente in alto con velocità iniziale v_{0y}.

Il moto è raffigurato nel diagramma di Figura 4.5. Il modulo del vettore velocità in qualsiasi punto è dato da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{4.11}$$

e la sua direzione è data da

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x}\,, \tag{4.12}$$

in cui ϕ è l'angolo che il vettore velocità forma con il piano orizzontale. Il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria seguita dal proiettile.

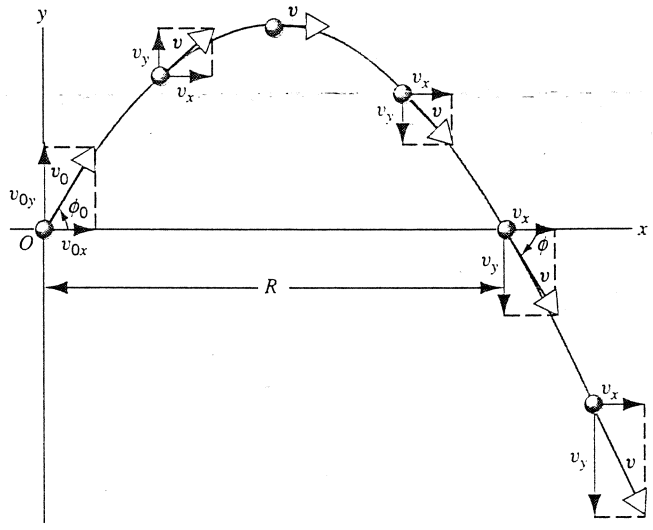


FIGURA 4.5 Traiettoria di un proiettile. È indicata la velocità iniziale con le sue componenti, nonché le velocità v con le proprie componenti in cinque istanti successivi. Si noti che in ogni istante, $v_x = v_{0x}$. La distanza orizzontale R rappresenta la gittata del proiettile.

L'Equazione 4.10 fornisce le coordinate x e y della posizione in funzione di t. Combinando queste equazioni ed eliminando t, si ottiene

$$y = (\tan\phi_0)x - \frac{g}{2(v_0\cos\phi_0)^2}x^2\,, \tag{4.13}$$

relazione che lega x e y e descrive quindi la traiettoria del proiettile. Considerato che v_0, ϕ_0 e g sono costanti, l'equazione assume la forma

$$y = bx - cx^2\,,$$

equazione della parabola. Da qui si deduce che la traiettoria di un proiettile è parabolica, come si vede chiaramente dalla Figura 4.5.

La *gittata* R di un proiettile è definita come la distanza orizzontale tra il punto di lancio e il punto in cui il proiettile ripassa attraverso la medesima quota di lancio. La si può trovare imponendo $y = 0$ nell'Equazione 4.13. Una soluzione dà $x = 0$, l'altra esprime il valore della gittata:

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\phi_0\cos\phi_0 = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\phi_0)\,, \tag{4.14}$$

in cui abbiamo introdotto l'identità trigonometrica $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$. Si noti che, fissata la velocità iniziale, la gittata massima si ottiene per un angolo $\phi_0 = 45°$, che corrisponde a $\sin(2\phi_0) = 1$.

Nella Figura 4.6 è riportata una fotografia stroboscopica della traiettoria seguita da un proiettile non sensibilmente influenzato dalla resistenza dell'aria. Risulta evidente la forma parabolica. Nella Figura 4.7 è illustrato un confronto tra i moti di due proiettili, uno lasciato cadere da fermo, l'altro lanciato simultaneamente in direzione orizzontale. Qui si

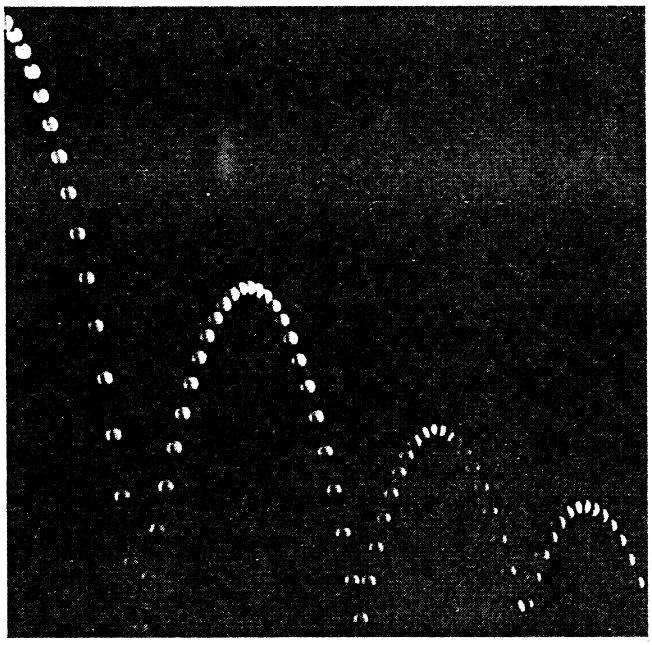


FIGURA 4.6 Fotografia stroboscopica di una pallina da golf che rimbalza su una superficie rigida (entra da sinistra). Tra un impatto e l'altro la pallina mette in evidenza la traiettoria parabolica tipica del moto dei proiettili. Perché l'altezza dei successivi vertici va diminuendo? (Troverete la risposta nel Capitolo 6.)

 ISBN 88-408-1254-7

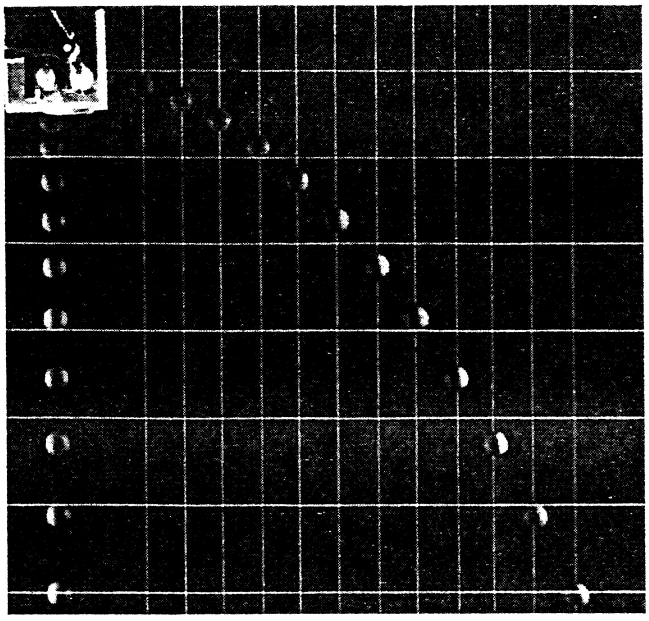


FIGURA 4.7 Una pallina viene lasciata cadere da ferma nell'istante in cui un'altra pallina viene sparata orizzontalmente verso destra. Si noti che cadono con la stessa velocità verticale; il moto orizzontale della seconda pallina non influenza la componente verticale della sua velocità. Le immagini di questa fotografia stroboscopica sono state riprese a intervalli di 1/30 s. La velocità orizzontale della seconda pallina è costante?

possono verificare direttamente le previsioni dell'Equazione 4.10, in cui $\phi_0 = 0$. Notate che (1) il moto orizzontale del secondo proiettile segue davvero quanto previsto dalla (4.10): la sua coordinata x aumenta di incrementi uguali in uguali intervalli di tempo, indipendentemente dall'andamento di y; (2) la variazione di y per i due proiettili è identica: gli incrementi verticali della posizione dei due proiettili sono uguali, indipendentemente dal moto orizzontale subito dal secondo.

PROBLEMA SVOLTO 4.3 In una competizione di lancio aereo su bersaglio, un concorrente sta volando a 225 m di altezza con velocità orizzontale costante di 155 km/h verso la verticale passante per il bersaglio. A che «angolo di visuale» α l'aereo deve sganciare il carico per colpire il bersaglio? Si veda la Figura 4.8.

Soluzione Fissiamo il sistema di riferimento solidale con la Terra, ponendo l'origine nella posizione di sgancio dall'aereo. Il moto del carico all'istante del lancio è uguale a quello dell'aereo. Quindi la sua velocità iniziale è v_0, con direzione orizzontale e modulo di 155 km/h. L'angolo di lancio è $\phi_0 = 0$.

L'Equazione 4.10 ci permette di trovare l'istante in cui il carico atterra. Ponendo $v_{0y} = 0$ e $y = -225$ m (livello del suolo), si ottiene

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-225\text{ m})}{9{,}8\text{ m/s}^2}} = 6{,}78\text{ s}.$$

Si noti che il tempo di caduta non dipende dalla velocità dell'aereo.

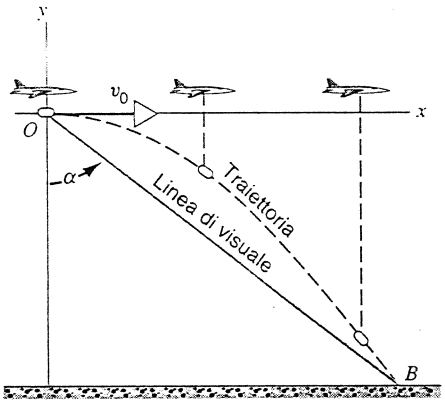


FIGURA 4.8 Problema svolto 4.3.

La distanza orizzontale che il carico percorre in questo lasso di tempo è data dall'Equazione 4.10a:

$$x = v_{0x}t = (155\text{ km/h})(1\text{ h}/3600\text{ s})(6{,}78\text{ s}) =$$
$$= 0{,}292\text{ km} = 292\text{ m}$$

e quindi l'angolo di visuale dev'essere (Figura 4.8)

$$\alpha = \arctan\frac{x}{|y|} = \arctan\frac{292\text{ m}}{225\text{ m}} = 52°.$$

Se osserviamo il moto del carico da un sistema di riferimento solidale con l'aeroplano, la sua traiettoria non appare parabolica.

PROBLEMA SVOLTO 4.4 Un calciatore tira il pallone con velocità iniziale di 15,5 m/s in una direzione che forma un angolo di 36° con il piano orizzontale. Ammettendo che la traiettoria resti su un piano verticale, si calcoli (a) l'istante t in cui il pallone raggiunge il punto culminante del suo percorso, (b) l'altezza di questo punto, (c) il tempo totale di volo e la gittata, (d) la velocità al momento dell'impatto con il terreno.

Soluzione (a) La componente verticale della velocità iniziale è $v_{0y} = v_0 \sin\phi_0 = (15.5\text{ m/s}) \sin 36° = 9.1$ m/s. Al culmine v_y è nulla e quindi possiamo ottenere il tempo dall'Equazione 4.9b introducendovi i valori numerici:

$$t_1 = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{9.1\text{ m/s} - 0}{9{,}8\text{ m/s}^2} = 0{,}93\text{ s}.$$

(b) L'altezza massima y_{max} viene raggiunta all'istante $t_1 = 0.93$ s. Dall'Equazione 4.10b abbiamo pertanto

$$y_{max} = v_{0y}t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 =$$
$$= (9{,}1\text{ m/s})(0{,}93\text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}93\text{ s})^2 = 4{,}2\text{ m}.$$

(c) Per calcolare il tempo di volo t_2 imponiamo $y = 0$ nell'Equazione 4.10b e la risolviamo scartando la soluzione $t = 0$ (relativa all'istante di partenza):

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(9.1\text{ m/s})}{9{,}8\text{ m/s}^2} = 1{,}86\text{ s}.$$

È interessante osservare che $t_2 = 2t_1$. Il tempo di salita del pallone è uguale al tempo di discesa. La gittata corrisponde alla distanza orizzontale coperta nell'intervallo di tempo t_2:

$$x = v_{0x}t_2 = (v_0 \cos\phi_0)t_2 =$$
$$= (15{,}5\text{ m/s})(\cos 36°)(1.86\text{ s}) = 23{,}3\text{ m}.$$

(d) Per rispondere all'ultimo quesito ricorriamo all'Equazione 4.9a, da cui ricaviamo v_x, costante durante tutto il tragitto:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\phi_0 = (15.5 \text{ m/s})(\cos 36°) = 12.5 \text{ m/s};$$

dall'Equazione 4.9b ricaviamo poi v_y nel punto di atterraggio ($t = t_2$):

$$v_y = v_{0y} - gt = 9.1 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(1.86 \text{ s}) = \\ = -9.1 \text{ m/s},$$

sicché il modulo della velocità è

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5 \text{ m/s})^2 + (-9.1 \text{ m/s})^2} = 15.5 \text{ m/s},$$

e la sua direzione è definita da

$$\tan\phi = v_y/v_x = (-9.1 \text{ m/s})/(12.5 \text{ m/s}),$$

da cui otteniamo $\phi = -36°$, ovvero 324° misurati dal semiasse positivo delle x in senso antiorario. Si noti che $\phi = -\phi_0$, come ci aspettiamo per ragioni di simmetria (Figura 4.5).

La velocità finale è in modulo uguale a quella iniziale. È una coincidenza fortuita? Sapete darne una spiegazione?

Tiro al bersaglio in caduta

In una classica e appassionante esperienza di laboratorio si punta una cerbottana su un bersaglio posto più in alto. Il bersaglio, tramite un apposito meccanismo di sgancio, viene lasciato cadere nell'esatto momento in cui la pallina-proiettile emerge dal tubo della cerbottana. Si constata che, indipendentemente dalla velocità con cui viene lanciata la pallina, questa colpisce sempre il bersaglio in caduta.

Per comprendere il motivo di questo sorprendente risultato, cominciamo col considerare che, in assenza di gravità, il bersaglio non cadrebbe, il proiettile seguirebbe una traiettoria rettilinea e quindi, essendo puntato sul bersaglio, lo colpirebbe certamente (Figura 4.9). L'effetto della gravità si fa sentire per entrambi i corpi dal momento (simultaneo) in cui essi diventano liberi di cadere, imprimendo loro una medesima accelerazione. Di conseguenza, durante l'intervallo di tempo t la pallina cade di una distanza verticale $\frac{1}{2}gt^2$ rispetto alla posizione che assumerebbe in assenza di gravità, e il bersaglio cade di una medesima distanza dal suo punto di partenza. Quando il proiettile giunge a intersecare la linea verticale di caduta del bersaglio, esso si trova sotto il punto di partenza del bersaglio proprio di una lunghezza uguale a quella percorsa in caduta da quest'ultimo: di qui la collisione. Se la pallina viene sparata con velocità iniziale maggiore, incontrerà il bersaglio sulla sua linea verticale di caduta in un punto più alto. Vi giungerà però in minor tempo, e minore sarà il tempo impiegato dal bersaglio per cadere di questa minor distanza. Viceversa accade se la velocità di lancio della pallina è minore.

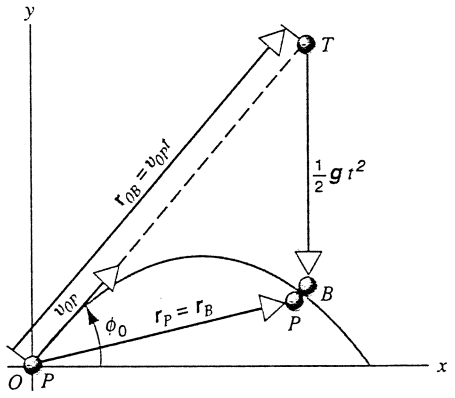


FIGURA 4.9 Nel moto di un proiettile lo spostamento dall'origine in qualunque istante t può essere pensato come la somma di due vettori: $v_{0P}t$, diretto come v_{0P}, e $\frac{1}{2}gt^2$, orientato verso il basso.

Per una descrizione più analitica, ricorriamo all'Equazione 4.2,

$$r = r_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

per definire la posizione del proiettile e del bersaglio in qualsiasi istante t. Per il proiettile P, $r_0 = 0$ e $a = g$, per cui

$$r_P = v_{OP}t + \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (4.15)$$

Per il bersaglio B, $r_0 = r_{0B}$, $v_0 = 0$ e $a = g$, per cui

$$r_B = r_{0B} + \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (4.16)$$

Se avviene una collisione, dev'essere $r_P = r_B$. Combinando queste due equazioni che danno la posizione dei corpi, si deduce che l'urto tra loro avviene all'istante t dato dalla condizione $r_{0B} = v_{0P}t$, cioè all'istante $t(= r_{0B}/v_{0P})$, lo stesso tempo che impiegherebbe il proiettile a raggiungere il bersaglio se procedesse in linea retta. Dato che il prodotto di un vettore per uno scalare positivo è un vettore avente il medesimo verso, dall'uguaglianza $r_{0B} = v_{0P}t$ deduciamo che i due vettori sono concordi: la cerbottana punta verso il bersaglio.

4.4 RESISTENZA DEL MEZZO E MOTO DEI PROIETTILI (facoltativo)

Le gocce di pioggia possono cadere da nubi situate ad altezza h sul suolo anche di 2 km. Se applicassimo le Equazioni 2.29 e 2.30 per il moto di caduta libera, concluderemmo che cadono a terra con velocità $v = 200$ m/s, ovvero 720 km/h. Un proiettile a quella velocità, anche delle dimensioni di una goccia, sarebbe letale. Per fortuna le gocce di pioggia cadono a velocità molto minore, ma questa rassicurazione indica che nella nostra analisi c'è qualcosa di sbagliato.

L'errore consiste nel trascurare la forza d'attrito esercitata dall'aria sulle gocce. Questa forza è un esempio di *resistenza del mezzo*. Tutti i corpi in moto attraverso un fluido, sia esso un liquido o un aeriforme, sono soggetti a questo tipo di forza frenante. La resistenza del mezzo è una forza che influenza il moto di una quantità di corpi, dalla pallina da golf, che devia sensibilmente dalla traiettoria che avrebbe nel vuoto, al corpo di uno sciatore, che tende ad assumere posizioni atte a ridurre la forza di resistenza. La resistenza del mezzo è un importante parametro nella progettazione dei velivoli e dei natanti. Dal punto di vista dei corpi in caduta, la resistenza del mezzo è un fattore che evita loro, cadendo, di veder crescere senza limiti la loro velocità, e che anzi finisce per imporre ai corpi in caduta una velocità *limite*.

 ISBN 88-408-1254-7

Una caratteristica particolare della resistenza del mezzo è che si tratta di una forza che dipende dalla velocità: quanto più il corpo è veloce, tanto maggiore è la forza di resistenza che lo frena. Le formule per accelerazione costante non servono quindi per l'analisi di questo fenomeno.

Illustriamo la tecnica adatta a trattare i casi in cui la forza non è costante considerando un corpo di massa m lasciato cadere da fermo. Ipotizziamo che il modulo D della resistenza del mezzo dipenda dalla velocità con legge lineare:

$$D = bv \tag{4.17}$$

e che questa forza agisca sempre nella direzione del moto con verso opposto. La costante b dipenderà dalle caratteristiche fisiche del corpo (dimensione e forma, per esempio) e dalle proprietà del mezzo fluido – aria in questo caso – attraverso cui si muove il corpo. Ci proponiamo di trovare la velocità del corpo in funzione del tempo.

La figura 4.10 riporta il diagramma delle forze, il quale varia man mano che il corpo cade. Quando il corpo viene liberato, $D = 0$ perché $v_y = 0$. Al crescere della velocità di caduta, D aumenta. Se la forza D continua a crescere, a un certo punto diventerà uguale al peso del corpo, e in quel momento la forza risultante che agisce sul corpo diventerà nulla. Di conseguenza la sua accelerazione sarà zero e il corpo seguiterà a cadere con velocità costante, ciò che comporta anche una resistenza D costante. Questa velocità di caduta, che non muta più, prende il nome di *velocità limite*.

Scegliamo l'asse y verticale e il verso positivo orientato in basso (essendo la scelta arbitraria, questo verso ci consente di trattare il problema con valori positivi, più comodi). Se il peso mg è orientato verso il basso e la resistenza del mezzo $D = bv$ è orientata verso l'alto, il modulo della forza netta è dato da $\sum F_y = mg - bv_y$, e quindi la seconda legge di Newton diventa

$$mg - bv_y = ma_y , \tag{4.18}$$

ossia

$$a_y = g - \frac{bv_y}{m} . \tag{4.19}$$

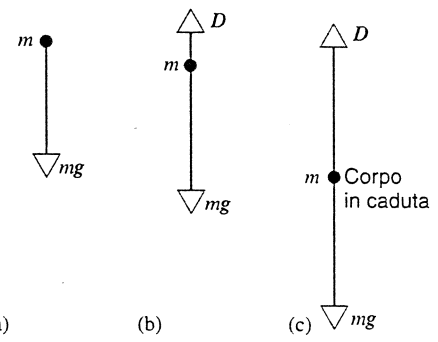


FIGURA 4.10 Forze agenti su un corpo in caduta attraverso l'aria. (a) Alla partenza $v_y = 0$ e la resistenza del mezzo è nulla. (b) La resistenza del mezzo cresce man mano che il corpo aumenta la sua velocità. (c) Alla fine la resistenza del mezzo eguaglia il peso del corpo; da quel momento in poi rimane uguale al peso e la velocità di caduta resta costante, pari alla velocità limite.

Dobbiamo trovare la velocità in funzione del tempo. Cominciamo col sostituire $a_y = dv_y/dt$ nell'Equazione 4.19 e risistemiamo l'espressione isolando dt:

$$\frac{dv_y}{g - bv_y/m} = dt . \tag{4.20}$$

Ponendo $v_y = 0$ al tempo $t = 0$, siamo interessati a conoscere v_y al tempo t. Integriamo perciò il termine di sinistra dell'Equazione 4.20 tra 0 e v_y e il termine destro tra 0 e t (Equazione 5 dell'Appendice I). Il risultato è

$$-\frac{m}{b} \ln\left(\frac{mg - bv_y}{mg}\right) = t , \tag{4.21}$$

che, risolto rispetto a v_y, dà

$$v_y(t) = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) . \tag{4.22}$$

Questa è la relazione che esprime la velocità in funzione del tempo.

È interessante esaminare il risultato in due casi limite: (1) tempo t molto piccolo e (2) tempo t molto grande. Per il primo caso osserviamo che, subito dopo la partenza del corpo in caduta ($t = 0$), essendo t molto piccolo, possiamo ricorrere all'approssimazione del fattore esponenziale $e^{-x} \approx 1 - x$, valevole per $x \ll 1$. Perciò

$$v_y(t) \approx \frac{mg}{b}\left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m}\right)\right] = gt \quad (t \text{ piccolo}) . \tag{4.23}$$

espressione che coincide con la (2.29) quando $v_{0y} = 0$ (ricordando che qui il verso positivo è orientato in basso). All'inizio del volo, quando la resistenza del mezzo non è ancora significativa, il corpo si comporta come se fosse approssimativamente in caduta libera.

Per valori molto grandi di t, l'esponenziale tende a zero ($e^{-x} \to 0$ per $x \to \infty$), e il modulo della velocità tende alla *velocità limite*:

$$v_L = \frac{mg}{b} . \tag{4.24}$$

La velocità limite si può trovare direttamente anche con l'Equazione 4.19, la quale, ponendo $a_y = 0$ perché il peso e la resistenza del mezzo in questa situazione si compensano, viene a coincidere con la (4.24).

Si osserva che, come c'era da aspettarsi, al crescere del coefficiente b, diminuisce la velocità limite. Un sasso che cade in acqua presenta una velocità limite molto minore di quella in aria, perché in acqua il *coefficiente di resistenza del mezzo* è maggiore che in aria.

Conoscendo ora l'espressione per $v_y(t)$ in funzione di t, possiamo derivarla per ottenere $a_y(t)$, oppure integrarla per ottenere $y(t)$. Si veda il Problema 17. Nella Figura 4.11 sono riportati i tre andamenti in funzione del tempo.

Una resistenza del mezzo proporzionale a v è tipica delle *forze viscose*, quale esperimentano per esempio piccole particelle che si muovono in un fluido denso. Oggetti di grandi dimensioni in aria sono soggetti invece a una *resistenza aerodinamica*, in cui la forza D è proporzionale a v^2.

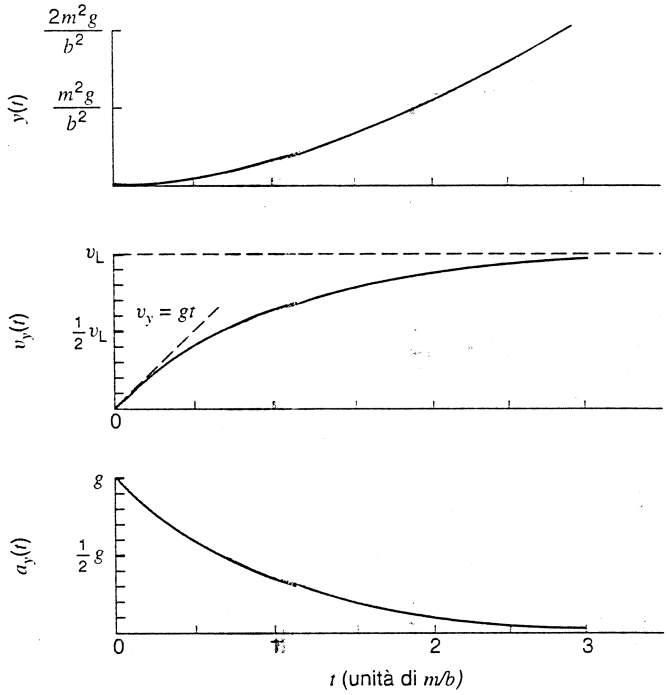


FIGURA 4.11 Posizione, velocità e accelerazione di un corpo in caduta, soggetto alla resistenza dell'aria. Si noti che l'accelerazione all'inizio vale g e alla fine vale 0; la velocità invece all'inizio è 0 e finisce per approssimare v_L. Si osservi anche che $y(t)$ dopo molto tempo diventa quasi lineare, come ci aspettiamo per il moto uniforme.

Questo è un caso più complicato da trattare matematicamente, ma dà luogo comunque a una velocità limite (definita in modo diverso da quella calcolata per $D \propto v$).

La Tabella 4.1 elenca i valori tipici misurati di velocità limite per alcuni oggetti in aria.

Moto dei proiettili in aria

La resistenza del mezzo è un elemento importante anche nel caso dei proiettili in moto bidimensionale. Una palla da baseball per esempio lascia la mazza con una velocità di circa 45 m/s, maggiore della sua velocità limite in aria (Tabella 4.1). Si può stimare la resistenza del mezzo $D = bv$ col metodo di calcolo visto poc'anzi. Dall'Equazione 4.24 osserviamo che b è dato da mg/v_L. Ponendo per la palla da baseball $m = 0.14$ kg e $v_L = 42$ m/s si ottiene $b = 0{,}033$ kg/s. Quando la palla ha velocità di 35 m/s, è soggetta a una resistenza del mezzo bv di circa 1 N, maggiore del suo peso e quindi particolarmente importante per gli effetti che provoca.

TABELLA 4.1 Alcuni valori di velocità limite in aria

Oggetto	*Velocità limite* (m/s)	*Distanza di regime*[a] (m)
Proiettile da 7 kg	145	2500
Paracadutista in caduta libera (tipico)	60	430
Palla da baseball	42	210
Palla da tennis	31	115
Pallone da pallacanestro	20	47
Pallina da ping pong	9	10
Goccia di pioggia (raggio = 1.5 mm)	7	6
Paracadutista con paracadute (tipico)	5	3

[a] Distanza attraverso la quale il corpo deve cadere da fermo per raggiungere il 95 % della velocità limite.

Fonte: Adattamento da Brancazio P.J., *Sport Science*, Simon & Schuster, New York 1984.

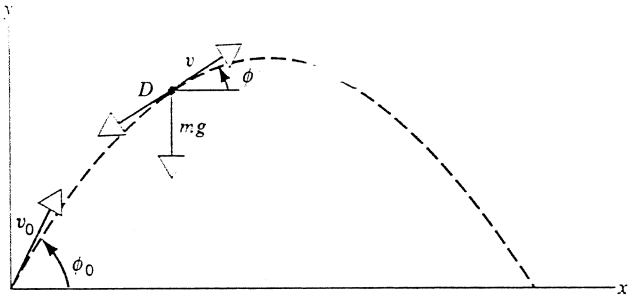


FIGURA 4.12 Un proiettile viene lanciato con velocità iniziale v_0 in direzione formante un angolo ϕ_0 con il piano orizzontale. In un generico istante successivo la sua velocità è v e l'angolo con il piano orizzontale è ϕ. Vengono anche mostrati il peso e la resistenza del mezzo (che è sempre contrapposta a v).

La Figura 4.12 illustra il diagramma delle forze in un particolare punto della traiettoria seguita dalla palla. Come tutte le forze d'attrito, D è orientata in verso opposto a v. Qui supponiamo che l'aria sia ferma in assenza di vento. Ponendo $D = -bv$, le leggi di Newton ci offrono la possibilità di avere una soluzione analitica per la traiettoria, illustrata nell'esempio di Figura 4.13. Tenendo conto della resistenza dell'aria, la gittata si riduce da 179 m a 72 m e l'altezza culminante da 78 m a 48 m. Si noti anche che, con l'intervento della resistenza del mezzo, la curva non è più simmetrica rispetto al vertice: il tratto in discesa è più ripido di quello in salita. Per un angolo di lancio $\phi_0 = 60°$, l'angolo di atterraggio, anziché essere di $-60°$, è di $-79°$.

Calcoli più realistici per casi complessi di resistenza dell'aria si conducono numericamente.*

* Un interessante programma di calcolo che permette di visualizzare la traiettoria per diversi angoli di lancio e diversi valori del coefficiente di resistenza del mezzo, si trova in
http://www.physics.uoguelph.ca/fun/J-.../trajplot/trajplot.html.

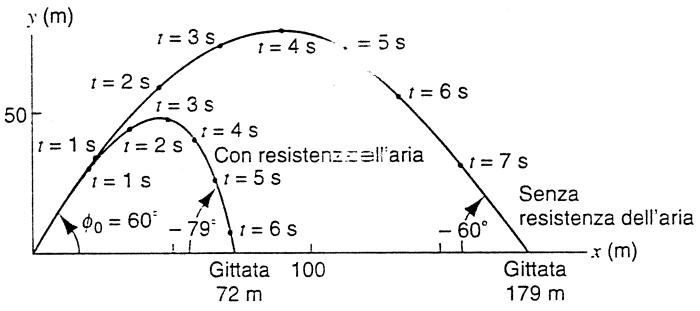


FIGURA 4.13 Moto di un proiettile in presenza e in assenza di aria, calcolato per $v_0 = 45$ m/s e $\phi_0 = 60°$.

 ISBN 88-408-1254-7

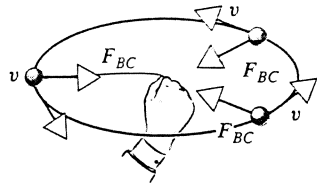


FIGURA 4.14 Una biglia legata a una corda viene fatta roteare su un piano orizzontale. Per tre differenti posizioni sono disegnati i vettori che rappresentano la velocità e la forza esercitata dalla corda sulla biglia.

4.5 MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Nel moto dei proiettili nel vuoto l'accelerazione è costante, ma la velocità cambia sia in modulo sia in direzione. Esamineremo ora un caso di moto uniformemente accelerato in cui la velocità *scalare* rimane costante e varia solo la direzione della velocità: il *moto circolare uniforme* di una particella. Esempi di questo genere di moto sono offerti dai satelliti in orbita terrestre o da punti collocati su organi rotanti, come i ventilatori e le giostre. E dopotutto noi stessi, nella misura in cui possiamo considerarci puntiformi, ci troviamo costantemente in moto circolare uniforme attorno all'asse terrestre.

Consideriamo l'esempio di una biglia fatta ruotare su un piano orizzontale, trattenuta da una corda attorno a un punto fisso, come in Figura 4.14. Per il momento trascuriamo la resistenza dell'aria e la forza di gravità. La mano esercita una forza sulla corda (e viceversa la corda sulla mano). Se allentate la presa, la corda vi sfugge dalle dita e la biglia vola via allontanandosi dal centro del cerchio. Per evitare questo fenomeno dovete stringere le dita ed applicare una forza di trazione sulla corda orientata verso il centro.

Un esempio analogo è dato dal moto planetario. La Terra esercita sulla Luna, che le orbita attorno, una forza gravitazionale orientata sempre verso il centro della Terra (Figura 4.15).

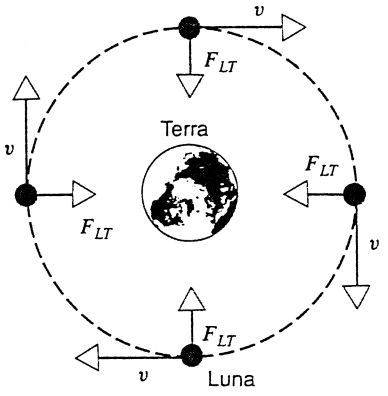


FIGURA 4.15 La Luna orbita attorno alla Terra. Vengono mostrati i vettori velocità e forza per quattro diversi istanti. La velocità è sempre tangente alla traiettoria circolare e la forza che la Terra esercita sulla Luna è sempre diretta verso il centro della Terra.

In entrambi questi casi la forza è costante in modulo, ma varia in direzione per seguire il corpo che ruota sulla traiettoria circolare. In omaggio al fatto che la forza è sempre orientata verso il centro, questa forza è chiamata *centripeta*. Dal momento che non è presente nessun'altra forza, l'accelerazione è diretta come la forza e orientata verso il centro, da cui il nome di *accelerazione centripeta*. La geometria del moto circolare ci consente di trovare un'espressione per questa accelerazione.

È importante notare che nel moto circolare uniforme il modulo della velocità rimane costante, tuttavia l'accelerazione non è nulla perché la velocità cambia continuamente *direzione*. Per quanto noi siamo abituati ad associare l'accelerazione a una variazione di velocità scalare, formalmente qualsiasi modifica del vettore velocità, quindi anche della sua direzione, comporta un'accelerazione non nulla.

Per esaminare la relazione che intercorre tra i moduli dell'accelerazione e della velocità, consideriamo la geometria della Figura 4.16. Una particella si muove su una circonferenza di raggio r. Disponiamo il sistema di coordinate in modo che il centro della circonferenza coincida con l'origine e analizziamo il moto della particella in due posizioni, P_1 e P_2, ove le velocità rispettive sono v_1 e v_2. I punti sono scelti simmetricamente rispetto all'asse y, di modo che questo formi angoli uguali θ coi raggi tracciati dal centro ai due punti.

I moduli di v_1 e v_2 sono uguali, ma le loro direzioni sono diverse, essendo entrambe tangenti alla circonferenza nei rispettivi punti. Le componenti della velocità sono

$$\begin{aligned} v_{1x} &= +v\cos\theta \qquad v_{1y} = +v\sin\theta \\ v_{2x} &= +v\cos\theta \qquad v_{2y} = -v\sin\theta \end{aligned} \tag{4.25}$$

ove v rappresenta il modulo di entrambi i vettori velocità.

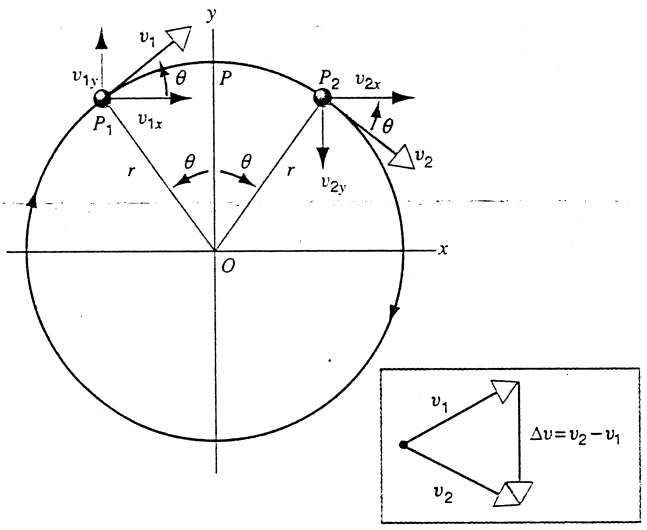


FIGURA 4.16 Una particella in moto circolare uniforme di raggio r. È messa in evidenza quando si trova nei punti P_1 e P_2, ove il raggio forma angoli θ uguali in valore assoluto rispetto all'asse y. Il riquadro illustra il vettore $\Delta v = v_2 - v_1$, che, indipendentemente dalla scelta dei punti P_1 e P_2 simmetrici rispetto all'asse y, ha direzione sempre parallela a quest'asse e tende perciò, al diminuire di θ, ad assumere direzione coincidente con quella del raggio orientata verso il centro.

La particella, avanzando da P_1 a P_2, percorre la distanza $2r\theta$ (con θ misurato in radianti). Se il tempo impiegato per questo percorso è Δt, la sua velocità scalare v è pari a $2r\theta/\Delta t$. L'intervallo di tempo può quindi essere scritto come

$$\Delta t = \frac{2r\theta}{v} . \tag{4.26}$$

Possiamo trovare ora le componenti dell'accelerazione media. Torniamo alla definizione di accelerazione media data dall'Equazione 2.14, $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$, ove $\Delta v = v_2 - v_1$. La componente dell'accelerazione media lungo l'asse x è allora

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t} = \frac{v\cos\theta - v\cos\theta}{\Delta t} = 0 . \tag{4.27}$$

Come risulta evidente anche dalla Figura 4.16, la componente x della velocità è la stessa sia in P_1 e in P_2, di modo che non sorprende che la componente x dell'accelerazione media in questo intervallo sia zero. La componente dell'accelerazione media lungo l'asse y è

$$\bar{a}_y = \frac{v_{2,y} - v_{1,y}}{\Delta t} = \frac{-v\sin\theta - v\sin\theta}{\Delta t} = \\ = \frac{-2v\sin\theta}{2r\theta/v} = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) . \tag{4.28}$$

L'accelerazione istantanea si ricava da questa espressione portando l'intervallo di tempo al limite infinitesimo. In alternativa possiamo far tendere a zero l'angolo θ in modo che P_1 e P_2 approssimino P. Possiamo perciò scrivere

$$a_y = \lim_{\theta\to 0}\left[-\left(\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\right] = -\left(\frac{v^2}{r}\right)\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) .$$

Se l'angolo è piccolo possiamo porre $\sin\theta \approx \theta$ (misurato in radianti), sicché il limite tende a 1. La componente lungo l'asse y dell'accelerazione istantanea è dunque $a_y = -v^2/r$, ove il segno meno sottolinea che l'accelerazione in P ha verso opposto a quello dell'asse y, ed è orientata quindi verso il centro.

Il punto P è stato scelto arbitrariamente sulla circonferenza. Significa che l'analisi effettuata vale per qualunque punto della circonferenza: l'accelerazione è sempre diretta verso il centro del cerchio e ha modulo v^2/r. Questo è un risultato generale valevole per qualsiasi particella che ruoti uniformemente attorno a un punto; la sua accelerazione centripeta ha modulo a_c dato da

$$a_c = \frac{v^2}{r} . \tag{4.29}$$

All'accelerazione centripeta si dà anche il nome di accelerazione *radiale*, alludendo alla sua direzione sempre parallela al raggio. Nella Figura 4.16 si può riconoscere che $\boldsymbol{a}$ e $\Delta\boldsymbol{v}$ hanno la stessa direzione, come richiede l'Equazione vettoriale 2.14.

Sia nel moto di caduta libera sia nel moto dei proiettili, $\boldsymbol{a}$ è sempre costante (in modulo, direzione e verso), ciò che ci autorizza all'uso delle equazioni per accelerazione costante. Non così per il moto circolare uniforme, in cui l'accelerazione non è costante, ma varia continuamente in direzione.

L'unità di misura dell'accelerazione centripeta è naturalmente quella dell'accelerazione. La coerenza dimensionale della (4.29) si dimostra scrivendo

$$[a] = \frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(\mathrm{L/T})^2}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2} ,$$

che sono le dimensioni dell'accelerazione. L'unità di misura può essere quindi $\mathrm{m/s^2}$, $\mathrm{km/h^2}$ o qualunque altra unità che esprima le suddette dimensioni.

L'accelerazione che modifica la direzione della velocità è altrettanto reale quanto quella che ne fa variare il modulo. Se una grandezza fisica ha le caratteristiche di un vettore, il suo aspetto direzionale non può essere ignorato, e pertanto le variazioni di direzione sono altrettanto importanti quanto quelle di intensità.

In base alla seconda legge di Newton scritta in forma vettoriale, l'accelerazione e la forza risultante devono avere la stessa direzione. Nel moto circolare uniforme la forza netta deve quindi essere diretta verso il centro del cerchio. Per adesso esprimeremo questo concetto riferito al modulo: $|\sum \boldsymbol{F}| = ma$. Nel caso del moto circolare uniforme abbiamo $a = a_c = v^2/r$ e pertanto

$$\left|\sum \boldsymbol{F}\right| = \frac{mv^2}{r} . \tag{4.30}$$

Il termine di sinistra prende talvolta il nome di *forza centripeta*. Non è un nuovo genere di forza. Molteplici possono essere le forze che agiscono nei confronti di una particella in moto circolare uniforme, ma la loro risultante dev'essere orientata verso il centro del cerchio e viene dunque chiamata centripeta. La seconda legge di Newton impone quindi sia l'intensità sia la direzione e il verso dell'accelerazione.

Nella Figura 4.14 è la corda a fornire la forza centripeta che agisce sulla pallina; nel caso di figura 4.15 è invece la forza di attrazione terrestre ad assolvere questo compito. L'attributo di «centripeta» assegnato a una forza indica che questa forza è diretta verso il centro di un moto circolare, ma non dice nulla riguardo alla natura della forza e non individua il corpo che ne è responsabile. Come sempre, le forze, anche quando sono centripete, devono essere riferite a un corpo dell'ambiente esterno all'oggetto su cui agiscono, ma qualsiasi genere di forza può essere centripeta, da quella gravitazionale, a quella di tensione, a quella elastica, a quella elettrica, magnetica, ecc. E come suggerisce l'Equazione 4.30, può anche essere il risultato di più forze che si combinano in una forza risultante, purché questa sia orientata verso il centro della traiettoria circolare.

In questo paragrafo abbiamo presentato il moto circolare uniforme come un esempio di moto in cui l'impiego delle relazioni vettoriali è indispensabile per l'analisi in due dimensioni. Più in generale le tecniche vettoriali saranno utili a descrivere il caso in cui l'accelerazione ha componenti sia radiale sia tangenziale. Lo vedremo nel Capitolo 8.

 ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMA SVOLTO 4.5 La Luna ruota attorno alla Terra compiendo una rivoluzione in 27.3 d. Assumiamo che l'orbita sia circolare con raggio di 382 000 km. Qual è il modulo della forza gravitazionale esercitata dalla Terra sulla Luna?

Soluzione Abbiamo $r = 382\,000 \text{ km} = 3{,}82 \cdot 10^8 \text{ m}$. Troviamo la massa della Luna nell'Appendice C: $m = 7{,}36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$. Il periodo di rivoluzione è $T = 27{,}3 \text{ d} = 2{,}36 \cdot 10^6 \text{ s}$. La velocità scalare della Luna (supposta costante) è quindi

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3{,}82 \cdot 10^8 \text{ m})}{2{,}36 \cdot 10^6 \text{ s}} = 1017 \text{ m/s}.$$

La forza centripeta è costituita dalla forza gravitazionale esercitata dalla Terra sulla Luna:

$$F_{LT} = \frac{mv^2}{r} = \frac{(7{,}36 \cdot 10^{22} \text{ kg})(1017 \text{ m/s})^2}{3.82 \cdot 10^8 \text{ m}} = 2.00 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

PROBLEMA SVOLTO 4.6 Si vuole mettere in orbita circolare a un'altitudine $h = 210$ km, ove $g = 9{,}2 \text{ m/s}^2$, un satellite di massa 1250 kg. (a) Che peso avrà il satellite in orbita? (b) Che velocità scalare deve avere sulla sua traiettoria? Il raggio R della Terra è di 6370 km.

Soluzione (a) Il peso del satellite è

$$P = mg = (1250 \text{ kg})(9{,}2 \text{ m/s}^2) = 1{,}15 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

(b) Il peso corrisponde alla forza di gravità F_{ST} esercitata dalla Terra sul satellite. Dato che è l'unica forza che agisce sul satellite, deve corrispondere alla forza centripeta. Risolvendo l'Equazione 4.30 rispetto alla velocità v e ponendo $r = R + h$, si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{F_{ST}r}{m}} = \sqrt{\frac{(1{,}15 \cdot 10^4 \text{ N})(6370 \text{ km} + 210 \text{ km})}{1250 \text{ kg}}} = 7780 \text{ m/s}.$$

A questa velocità il satellite compie un giro in 1,48 h.

4.6 MOTO RELATIVO

Nel Paragrafo 3.2 abbiamo parlato dei sistemi di riferimento inerziali concludendo che, se due osservatori si trovano in due sistemi inerziali in moto l'uno rispetto all'altro, l'accelerazione che essi misurano è identica, e pertanto essi concordano riguardo alle applicazioni della seconda legge di Newton.

Allarghiamo ora l'argomento con l'aiuto dei vettori per comprendere le osservazioni fatte da osservatori in diversi sistemi di riferimento. Consideriamo le descrizioni del moto di una particella riferite da due osservatori in moto relativo tra di loro a velocità vettoriale costante. Potrebbero essere per esempio il passeggero di un'automobile che viaggia a velocità costante su un rettilineo idealmente infinito e una persona ferma sul ciglio della strada. Il corpo puntiforme sotto osservazione potrebbe essere per esempio un pallone calciato o un altro veicolo in moto.

Denominiamo i due osservatori S ed S'. Ciascuno di essi ha il proprio sistema di riferimento cartesiano e per semplicità immaginiamo che si trovi nella rispettiva origine delle proprie coordinate. Ricordiamo però la limitazione che ci siamo imposti: la velocità relativa tra S ed S' è costante in modulo, direzione e verso. Questa limitazione non riguarda il moto della particella osservata. Essa non è tenuta a mantenere costante la sua velocità e anzi, in generale, è soggetta a un'accelerazione.

La Figura 4.17 illustra i due sistemi di coordinate al tempo t. Per semplicità ci limitiamo a considerare il moto in due dimensioni, definite dal piano comune xy e $x'y'$ della Figura 4.17. L'origine del sistema S' vista dall'osservatore S è caratterizzata dalla posizione $\mathbf{r}_{S'S}$. Si osservi in particolare l'ordine degli indici che abbiamo usato a pedice del vettore: il primo individua il sistema da localizzare (nel caso specifico, S') mentre il secondo individua il sistema rispetto al quale si effettua l'osservazione (in questo caso, S). Il vettore $\mathbf{r}_{S'S}$ va quindi letto così: "La posizione di S' rispetto a S."

Nella Figura 4.17 è disegnata una particella P sul piano cartesiano comune ai due sistemi. Secondo S la particella è individuata dal vettore posizione $\mathbf{r}_{PS}$, mentre secondo S' il vettore posizione è $\mathbf{r}_{PS'}$. Osservando la geometria possiamo scrivere la seguente relazione tra i tre vettori citati:

$$\mathbf{r}_{PS} = \mathbf{r}_{S'S} + \mathbf{r}_{PS'} = \mathbf{r}_{PS'} + \mathbf{r}_{S'S}, \tag{4.31}$$

dove ci siamo serviti della proprietà commutativa dell'addizione vettoriale per scambiare l'ordine dei due vettori. Si faccia ben attenzione all'ordine dei simboli a pedice. L'Equazione 4.31 dice in sostanza: "Il vettore posizione di P misurato da S è uguale al vettore posizione di P misurato da S' più il vettore posizione di S' misurato da S."

Supponete che, secondo le osservazioni di S', la particella si stia muovendo con velocità $\mathbf{v}_{PS'}$. Che velocità misurerà S'? Per rispondere ci basta derivare l'Equazione 4.31 rispetto al tempo:

$$\frac{d\mathbf{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{S'S}}{dt}.$$

Le derivate temporali delle posizioni corrispondono alle rispettive velocità:

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PS'} + \mathbf{v}_{S'S}. \tag{4.32}$$

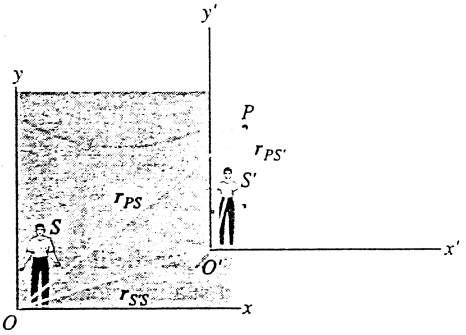


FIGURA 4.17 Gli osservatori S ed S', che sono in moto relativo tra loro, osservano la stessa particella P in moto. All'istante considerato le misure di posizione della particella che essi rilevano rispetto ai propri sistemi di riferimento sono rispettivamente $\mathbf{r}_{PS}$ e $\mathbf{r}_{PS'}$. Nello stesso momento, la posizione dell'osservatore S' misurata da S rispetto alla sua origine è $\mathbf{r}_{S'S}$.

In qualsiasi istante dunque, la velocità di P misurata da S è uguale alla velocità di P misurata da S' più la velocità relativa di S' rispetto a S. Benché le Equazioni 4.31 e 4.32 siano state espresse per due dimensioni, esse valgono ugualmente bene in tre dimensioni.

L'Equazione 4.32 rappresenta la formula per la *trasformazione delle velocità* che permette di trasformare la misura di velocità effettuata in un sistema di riferimento, per esempio S', nella misura rispetto a un altro sistema di riferimento, per esempio S, purché sia nota la velocità relativa tra i due sistemi. Esprime un concetto saldamente radicato sia nelle conoscenze comuni sia nelle teorie della fisica classica di Galileo e di Newton. E in effetti l'Equazione 4.32 è spesso chiamata *trasformazione galileiana delle velocità*.

Abbiamo qui considerato solamente l'importante caso particolare in cui due sistemi di riferimento si muovano a velocità rettilinee uniforme l'uno rispetto all'altro. Ciò significa che $v_{S'S}$ è costante in modulo, direzione e verso. Le velocità v_{PS} e $v_{PS'}$ della particella P misurate dai due sistemi di riferimento possono anche non essere costanti. E naturalmente in generale non saranno uguali tra di loro. Se tuttavia uno degli osservatori, diciamo S', dovesse constatare che la velocità della particella è costante nel tempo, tutti gli altri osservatori devono giungere alla medesima conclusione, finché questi si muovono con velocità vettoriale costante rispetto a S'.

Lo possiamo verificare in modo più formale derivando la (4.32) rispetto al tempo:

$$\frac{dv_{PS}}{dt} = \frac{dv_{PS'}}{dt} + \frac{dv_{S'S}}{dt} . \qquad (4.33)$$

L'ultimo addendo è nullo perché la velocità relativa dei due osservatori è costante. Quindi

$$\frac{dv_{PS}}{dt} = \frac{dv_{PS'}}{dt} .$$

Attribuendo a queste derivate il loro significato di accelerazione, possiamo scrivere

$$a_{PS} = a_{PS'} . \qquad (4.34)$$

Le accelerazioni della particella P sono identiche per i due osservatori!

Ecco perché le leggi di Newton possono essere applicate indifferentemente da qualunque osservatore in qualsiasi sistema di riferimento inerziale. Se gli osservatori infatti concordano sul valore dell'accelerazione per la particella, concorderanno anche sui risultati che derivano dall'applicazione di $F = ma$. Se l'osservatore S esperimenta con successo la validità delle leggi di Newton, lo stesso faranno tutti gli altri osservatori in moto relativo uniforme rispetto a S.

PROBLEMA SVOLTO 4.7 La bussola di un aeroplano indica che il velivolo è diretto a est. Il tachimetro misura 215 km/h rispetto all'aria. Se soffia un vento costante verso nord alla velocità di 65 km/h, (a) qual è la velocità dell'aeroplano rispetto al terreno? (b) Se il pilota vuole veramente mantenere la rotta verso est, in che direzione deve puntare la prua? E cioè quale dev'essere la lettura della bussola?

Soluzione (a) Trattiamo l'aeroplano P come un corpo puntiforme. Abbiamo due sistemi di riferimento, il terreno (T) e l'aria (A). Il terreno costituisce il riferimento S e l'aria costituisce il riferimento S'. Con una semplice sostituzione di pedici, l'Equazione 4.32 ci dà

$$v_{PT} = v_{PA} + v_{AT} .$$

Il modulo della velocità rispetto al terreno è dato da

$$v_{PT} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AT}^2} = \\ = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 + (65 \text{ km/h})^2} = 225 \text{ km/h} .$$

L'angolo α indicato nella Figura 4.18a si ricava da

$$\alpha = \arctan \frac{v_{AT}}{v_{PA}} = \arctan \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 16{,}8° .$$

L'aeroplano insomma sta volando alla velocità di 225 km/h rispetto al terreno nella direzione che forma un angolo di 16,8° verso nord rispetto a est. Si noti che la velocità rispetto al terreno è maggiore di quella rispetto all'aria.

(b) Il pilota deve puntare l'aereo in modo che il velivolo avanzi davvero verso est rispetto al terreno. Il vento è immutato e l'Equazione 4.32 è rappresentata dal diagramma vettoriale di Figura 4.18b. I tre vettori formano ancora un triangolo rettangolo, come nella figura 4.18a, ma ora l'ipotenusa è v_{PA} invece di v_{PT}.

La velocità rispetto al terreno è ora

$$v_{PT} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AT}^2} = \\ = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 - (65 \text{ km/h})^2} = 205 \text{ km/h} .$$

Come si evince dalla figura 4.18b, il pilota deve piegare la prua verso la direzione del vento con rotta che forma un angolo β dato da

$$\beta = \arcsin \frac{v_{AT}}{v_{PA}} = \arcsin \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 17{,}6° .$$

Si osservi che ora la velocità rispetto al terreno è minore di quella rispetto all'aria.

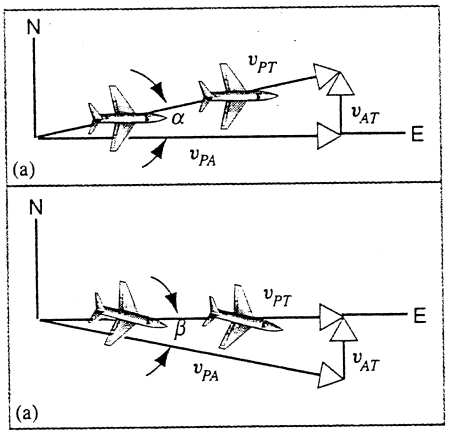


FIGURA 4.18 Problema svolto 4.7. (a) Un aeroplano, puntando la prua verso est, viene trascinato verso nord. (b) Per mantenere la rotta verso est, l'aereo deve «stringere» il vento puntando la prua un poco verso sud.

 ISBN 88-408-1254-7

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

4.1 Moto costantemente accelerato in tre dimensioni

1. Un corpo si muove sul piano xy con un'accelerazione che ha la componente x positiva. Al tempo $t = 0$ il corpo ha velocità data da $v = 3i + 0j$.
(a) Cosa si può concludere riguardo alla componente y dell'accelerazione?
(A) Dev'essere positiva e costante.
(B) Dev'essere negativa e costante.
(C) Dev'essere nulla.
(D) Non si può dire nulla.
(b) Cosa si può concludere riguardo alla componente y della velocità?
(A) Dev'essere in crescita.
(B) Dev'essere costante.
(C) Dev'essere in diminuzione.
(D) Non si può dire nulla.
(c) Cosa si può concludere riguardo al modulo della velocità?
(A) Dev'essere in crescita.
(B) Dev'essere costante.
(C) Dev'essere in diminuzione.
(D) Non si può dire nulla.

2. Un oggetto è animato da accelerazione costante a. Quali delle seguenti quantità sono pure costanti?
(A) $d|v|/dt$. (B) $|dv/dt|$.
(C) $d(v^2)/dt$. (D) $d(v/|v|)/dt$.

4.2 Forma vettoriale delle leggi di Newton in tre dimensioni

3. Si supponga che la forza risultante F agente su un oggetto sia una costante non nulla. Quale delle seguenti quantità potrebbe essere costante?
(A) Posizione. (B) Velocità scalare.
(C) Velocità vettoriale. (D) Accelerazione.

4. Su un oggetto agiscono due forze di intensità F_1 ed F_2. Il modulo della forza risultante F_{net} cadrà nell'intervallo
(A) $F_1 \le F_{net} \le F_2$.
(B) $(F_1 - F_2)/2 \le F_{net} \le (F_1 + F_2)/2$.
(C) $|F_1 - F_2| \le F_{net} \le |F_1 + F_2|$.
(D) $F_1^2 - F_2^2 \le (F_{net})^2 \le F_1^2 + F_2^2$.

5. Un blocchetto di massa 2,0 kg è a riposo, sospeso tra due corde come in Figura 4.19. Il modulo della forza esercitata da ciascuna delle due sull'oggetto è 13,9 N. Il modulo della forza di gravità è 19,6 N. Quale sarà il modulo della forza risultante sull'oggetto?
(A) 47,4 N. (B) 33,5 N. (C) 13,9 N.
(D) 8,2 N. (E) 0 N.

6. La corda di sinistra nella Figura 4.19 si spezza improvvisamente. Immediatamente dopo che si è spezzata, il modulo della forza risultante sull'oggetto è
(A) 47,4 N. (B) 33,5 N. (C) 13,9 N.
(D) 8,2 N. (E) 0 N.

4.3 Moto dei proiettili

7. Si spara un proiettile con velocità iniziale v_0 a un angolo di alzo ϕ_0 rispetto al piano orizzontale. Si trascuri la resistenza dell'aria. (a) In che punto della traiettoria la forza netta agente sul proiettile è nulla? (b) In che punto della traiettoria l'accelerazione del proiettile è nulla?
(A) Prima di raggiungere l'altezza culminante.
(B) Nel punto culminante.
(C) Dopo aver passato il punto culminante.
(D) In nessun punto della traiettoria.

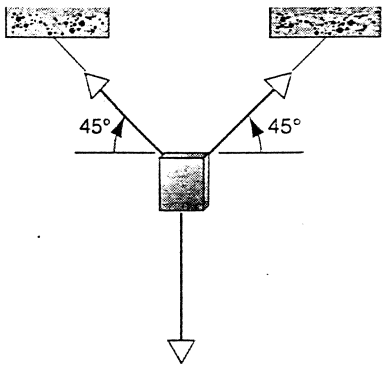


FIGURA 4.19 Domande a risposta multipla 5 e 6.

8. Un corpo viene lanciato in aria con velocità iniziale $v_0 = (4{,}9i + 9{,}8j)$ m/s. Si trascuri la resistenza dell'aria.
(a) Nel punto culminante il modulo della velocità è
(A) 0. (B) $\sqrt{4{,}9^2}$ m/s.
(C) $\sqrt{9{,}8^2}$ m/s. (D) $\sqrt{4{,}9^2 + 9{,}8^2}$ m/s.
(b) All'istante $t = 0{,}5$ s il modulo della velocità è
(A) $\sqrt{(4{,}9 + 9{,}8/2)^2}$ m/s.
(B) $\sqrt{4{,}9 + (9{,}8/2)^2}$ m/s.
(C) $\sqrt{(4{,}9/2)^2 + 9{,}8^2}$ m/s.
(D) $\sqrt{(4{,}9/2)^2 + (9{,}8/2)^2}$ m/s.

9. Durante la battaglia di Tarawa, nella seconda guerra mondiale, una nave da guerra sparò proiettili sulla base giapponese di Betio da una distanza di 64 km. Supposta trascurabile la resistenza dell'aria e supposto che l'angolo di alzo fosse regolato per la massima gittata,
(a) i proiettili raggiunsero la massima altezza compresa tra
(A) 0 e 0,8 km. (B) 0,8 e 3,2 km. (C) 3,2 e 8,0 km.
(D) 8,0 e 13 km. (E) 13 km e 20 km.
(b) Quale doveva essere la velocità approssimativa di sparo?
(A) 8000 m/s. (B) 800 m/s.
(C) 80 m/s. (D) 8 m/s.

10. Un proiettile sparato verticalmente verso l'alto sale fino a 200 m di altezza prima di ricadere. Sparando invece con angolo di alzo di 45° e trascurando la resistenza dell'aria, la massima gittata sarebbe
(A) 200 m. (B) 400 m.
(C) 800 m. (D) 1000 m.

4.4 Resistenza del mezzo e moto dei proiettili

11. Quale grafico di Figura 4.20 descrive meglio l'andamento velocità-tempo per un corpo lanciato verticalmente in aria, ove la resistenza del mezzo sia data da $D = bv$? Le linee tratteggiate si riferiscono all'andamento in assenza d'attrito.

12. Trascurando la resistenza dell'aria, avete calcolato che, per raggiungere una determinata altezza h con un oggetto lan-

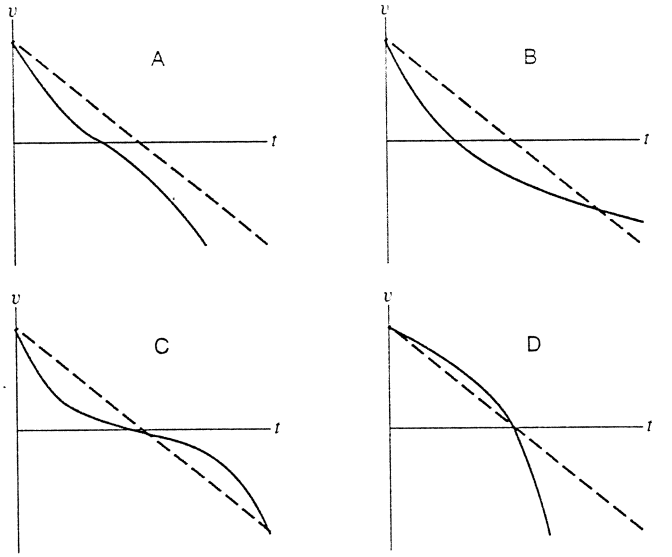


FIGURA 4.20 Domanda a risposta multipla 11.

ciato verticalmente in alto, la velocità iniziale richiesta è v_0. Le linee tratteggiate nei grafici di Figura 4.21 descrivono il moto in queste condizioni. Quale degli andamenti velocità-tempo riportati nei quattro grafici rappresenta il reale comportamento di un oggetto che, soggetto alla resistenza dell'aria, abbia effettivamente raggiunto l'altezza h dopo essere stato lanciato con velocità iniziale v_0'?

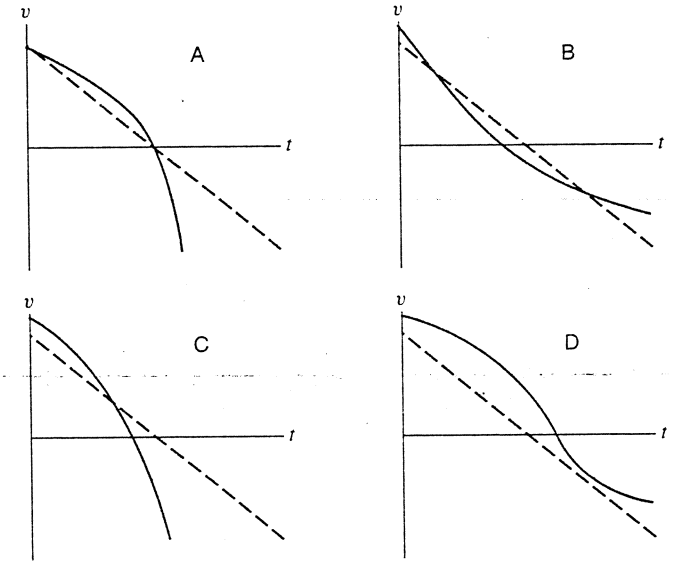


FIGURA 4.21 Domanda a risposta multipla 12.

13. Un paracadutista si butta dall'aereo e, dopo un certo tempo di volo libero, apre il paracadute. Poco dopo che il paracadute si è completamente dispiegato, il paracadutista
    (A) si sente cadere ma rallenta lentamente.
    (B) si arresta per un istante e poi ricomincia a cadere ma più lentamente.
    (C) riceve un improvviso strappo verso l'alto e poi ricomincia a cadere, ma più lentamente.
    (D) riceve un improvviso strappo verso l'alto e poi ricomincia a cadere, acquisendo dopo un po' la stessa velocità che aveva prima di aprire il paracadute.

4.5 Moto circolare uniforme

14. Quale di queste affermazioni è più corretta?
    (A) Il moto circolare uniforme provoca una forza costante verso il centro.
    (B) Il moto circolare uniforme è causato da una forza costante diretta verso il centro.
    (C) Il moto circolare uniforme è causato da una forza netta di modulo costante diretta verso il centro.
    (D) Il moto circolare uniforme è causato da una forza netta di modulo costante in verso uscente dal centro.

15. Un disco percorre una traiettoria circolare di raggio r_0 a velocità scalare costante v_0 sul piano privo di attrito di un tavolo. Lo trattiene nel moto circolare uniforme una corda che, attraversando senza attrito il ripiano del tavolo per un foro centrale, è attaccata all'altro capo a una massa M (Figura 4.22).

    (a) Il disco viene ora fatto ruotare con velocità $v' = 2v_0$, sempre in traiettoria circolare, lasciando invariata la massa M. L'accelerazione a' e il raggio r' sono ora dati da
    (A) $a' = 4a_0$ e $r' = r_0$. (B) $a' = 2a_0$ e $r' = r_0$.
    (C) $a' = 2a_0$ e $r' = 2r_0$. (D) $a' = a_0$ e $r' = 4r_0$.

    (b) Il disco continua a muoversi con velocità $v' = 2v_0$ su traiettoria circolare, ma adesso si raddoppia la massa appesa. L'accelerazione a' e il raggio r' sono ora dati da
    (A) $a' = 4a_0$ e $r' = r_0$. (B) $a' = 2a_0$ e $r' = r_0$.
    (C) $a' = 2a_0$ e $r' = 2r_0$. (D) $a' = a_0$ e $r' = 4r_0$.

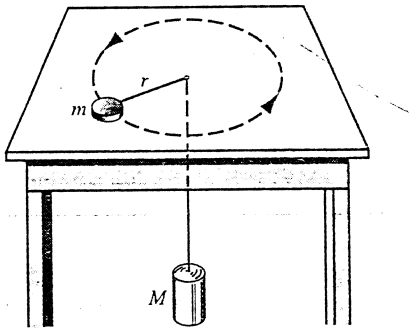


FIGURA 4.22 Domanda a risposta multipla 15.

4.6 Moto relativo

16. Un oggetto ha velocità v_1 rispetto al terreno. La velocità dell'oggetto misurata da un osservatore, che si muove con velocità v_0 rispetto al terreno, risulta v_2. Tra i moduli delle velocità intercorre la relazione
    (A) $v_0 \leq v_1 + v_2$. (B) $v_1 \leq v_2 + v_0$.
    (C) $v_2 \leq v_0 + v_1$. (D) Valgono tutte e tre le relazioni precedenti.

17. (a) Un bambino seduto in un vagoncino, che si muove a velocità rettilinea uniforme, lancia verticalmente (secondo chi gli sta a fianco) in aria una palla. Dove ricadrà?
    (A) Dietro di lui. (B) Davanti a lui.
    (C) Nelle sue mani. (D) Al suo fianco.

    (c) Dove cadrà la palla se il treno accelera in avanti mentre la palla è in aria? E se affronta una curva?
    (A) Dietro di lui. (B) Davanti a lui.
    (C) Nelle sue mani. (D) Al suo fianco.

 ISBN 88-408-1254-7

QUESITI

1. Una particella si muove nello spazio tridimensionale con accelerazione costante. La componente z dell'accelerazione può influire sulla componente x della posizione? E sulla componente y della velocità?
2. Descrivere una situazione fisica in cui un oggetto in moto sul piano xy abbia un'accelerazione caratterizzata da una componente x positiva costante e una componente y negativa costante.
3. L'accelerazione di un corpo può cambiare direzione senza che cambi direzione la sua velocità?
4. Siano v e a la velocità e l'accelerazione di un'automobile. Descrivere le circostanze in cui (a) i due vettori sono paralleli e concordi, (b) i due vettori sono paralleli e discordi, (c) i due vettori sono perpendicolari tra di loro, (d) v è nullo, ma a non lo è, (e) a è nullo, ma v non lo è.
5. Nella Figura 4.23 compaiono quattro forze di uguale intensità. Quale combinazione di tre di esse, agendo simultaneamente su una stessa particella, la terrebbe ferma?

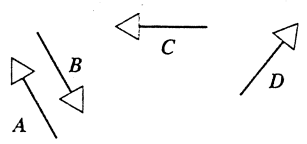


FIGURA 4.23 Quesito 5.

6. Scagliate una freccia in aria seguendone attentamente il percorso parabolico. Osserverete che la freccia si mantiene tangente alla traiettoria. Perché?
7. In un tiro alla fune, supposta priva di massa, tre uomini tirano da una parte nel punto A e altri tre dall'altra nel punto B, con uguale intensità. Ora si appende un peso di 20 N alla fune nel punto intermedio tra A e B. (a) Gli uomini sono in grado di mantenere la fune orizzontale? (b) In caso negativo, si spieghi perché. In caso positivo, si stabilisca il modulo delle forze da applicare in A e in B per ottenere lo scopo.
8. Un tubo a forma di rettangolo è sistemato nel piano verticale come in Figura 4.24. Introducendo contemporaneamente due sferette d'acciaio all'angolo destro in alto, una segue il percorso AB e l'altra il percorso CD. Quale arriva prima all'angolo in basso a sinistra?

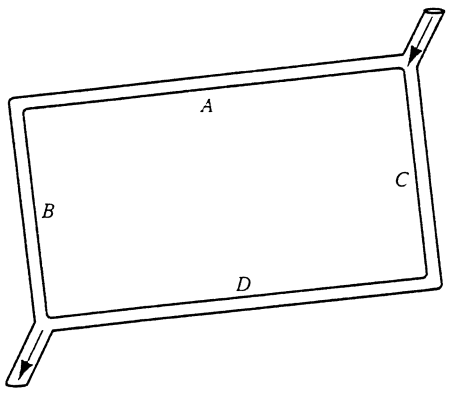


FIGURA 4.24 Quesito 8.

9. Nella specialità atletica del salto in lungo ha importanza l'altezza del salto? Quali fattori determinano la lunghezza del salto?
10. Perché l'elettrone contenuto nel fascio di un pennello elettronico non cade sotto l'effetto della gravità al pari di una molecola nel flusso uscente da una canna dell'acqua? Si supponga che il moto iniziale di entrambi i corpi sia orizzontale.
11. In quale(i) punto(i) del suo percorso un proiettile assume la velocità minima? E la massima?
12. La Figura 4.25 mostra la traiettoria seguita da un aereo della NASA in un volo che simula le condizioni di bassa gravità per un breve periodo di tempo. Spiegate perché, se la traiettoria è perfettamente parabolica, i passeggeri esperimentano le condizioni di assenza di peso.

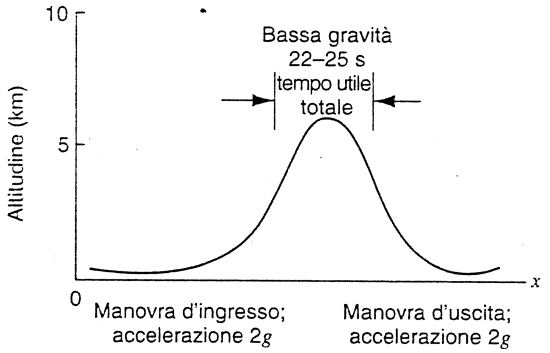


FIGURA 4.25 Quesito 12.

13. Si spara un proiettile da una posizione più elevata del terreno circostante. L'angolo di alzo che garantisce la maggior gittata è minore di 45°. Si spieghi come mai.
14. Si consideri un proiettile al culmine della sua traiettoria. (a) Qual è la sua velocità in funzione di v_0 e ϕ_0? (b) Quanto vale l'accelerazione? (c) Che direzione ha l'accelerazione rispetto alla velocità?
15. Nella Figura 4.26 vediamo le traiettorie seguite da tre palloni calciati. Trascurando la resistenza dell'aria, determinare quale lancio presenta (a) il minor tempo di volo; (b) la maggior componente verticale della velocità iniziale; (c) la maggior componente orizzontale della velocità iniziale; (d) la minor velocità di lancio.

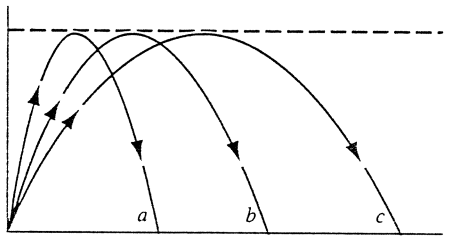


FIGURA 4.26 Quesito 15.

16. Dimostrare che, se si effettua la taratura di allineamento del mirino di un fucile tenendo la canna orizzontale, a parità di gittata, la mira è troppo alta sia quando si spara verso l'alto sia quando si spara verso il basso.

17. Peter Brancazio nel suo libro *Sport Science*, a proposito di proiettili come palle da tennis e da golf, scrive: "A parità di tutte le altre condizioni, la gittata sarà più lunga in una giornata calda piuttosto che in una fredda, in un clima umido piuttosto che in uno secco, in altitudine piuttosto che a livello del mare." Sapete rendere conto di questa affermazione?
18. Il grafico dell'altezza in funzione del tempo per un corpo lanciato verticalmente in alto è rappresentato da una parabola. La traiettoria di un proiettile lanciato non verticalmente ha pure una forma parabolica. Si tratta di una coincidenza? Giustificate la risposta.
19. I pezzi d'artiglieria per lunga gittata, quando voglio colpire alla gittata massima non vengono puntati con alzo di 45°, ma di 55-65°. Perché?
20. Nell'analizzare il moto di un proiettile, potendo trascurare la resistenza dell'aria, è sempre necessario considerare il moto tridimensionale piuttosto che in due dimensioni?
21. Quando è necessario considerare tutte e tre le dimensioni nel moto di un proiettile?
22. Spiegare come mai la scelta dell'angolo di alzo per ottenere la massima gittata è influenzata dalla presenza dell'aria.
23. Quali gocce, se vi è differenza, cadono più rapidamente: quelle piccole o quelle grandi?
24. La velocità limite di una palla da baseball è di 42 m/s. Spesso però i battitori riescono a batterla con velocità maggiore, fino a 45 m/s. Come può essere?
25. Descrivere il moto di un corpo che viene lanciato verticalmente verso il basso a una velocità iniziale maggiore della sua velocità limite.
26. Un tronco galleggiante scende lungo un fiume trascinato dalla corrente. Come calcolereste la resistenza del mezzo che si esercita su di esso?
27. Lasciate cadere dalla cima di una torre due oggetti di massa differente. Dimostrate che, nel caso la resistenza del mezzo abbia lo stesso valore costante per entrambi, quello di massa maggiore arriva a terra per primo. L'ipotesi sulla resistenza del mezzo è realistica?
28. Perché la Tabella 4.1 dà i valori di distanza per raggiungere il 95 % della velocità limite e non il 100 %?
29. Se procedete a velocità costante, può la vostra accelerazione essere diversa da zero?
30. Descrivete qualitativamente l'accelerazione cui è sottoposta una biglia che, scorrendo su un filo privo d'attrito, si muove a velocità scalare costante verso l'interno descrivendo una spirale piana.
31. Dimostrare che, se si tiene conto della rotazione e della rivoluzione terrestri, un libro appoggiato sul tavolo ha velocità maggiore di notte che di giorno. In quale sistema di riferimento vale questa affermazione?
32. Un pilota, riprendendo quota dopo una picchiata lungo una traiettoria ad arco di circonferenza, si dice che esperimenta una "accelerazione $3g$". Cosa significa?
33. L'accelerazione di un proiettile potrebbe essere rappresentata in termini di componente radiale e componente tangenziale in ogni punto della traiettoria? In caso positivo, sarebbe vantaggioso?
34. Se l'accelerazione di un corpo risulta costante in un certo sistema di riferimento, sarà costante in qualunque altro sistema di riferimento?
35. Una donna, dalla piattaforma posteriore di un treno in moto rettilineo uniforme, lascia cadere una moneta sul binario. Si descriva il percorso seguito dalla moneta in caduta visto da (a) la donna sul treno, (b) una persona ferma lungo la massicciata, (c) una persona a bordo di un altro treno che passa in senso opposto sul binario a fianco.
36. Un ascensore sta scendendo a velocità costante. Un passeggero lascia cadere a terra una moneta. Che accelerazione misurano per la moneta (a) il passeggero e (b) una persona ferma sulle scale di fianco all'ascensore?
37. L'acqua di una pioggia costante viene raccolta in un secchio. Se soffia un vento stazionario orizzontale, cambia la rapidità di riempimento del secchio?
38. Un autobus con parabrezza verticale avanza con velocità costante v_b, sotto una pioggia che cade verticalmente alla velocità limite v_p. Con che angolo le gocce colpiscono il parabrezza?
39. Durante una pioggia costante le gocce cadono verticalmente. Dovendovi recare da un punto A a un punto B e volendo rendere minimo il numero di gocce che vi colpisce, dovreste andare alla velocità massima, minima, o a una velocità intermedia? (Si veda S.A. Stern, *An Optimal Speed for Traversing a Costant Rain*, Amer. J. Ph., Sept 1983, p. 815.)
40. La barca di Figura 4.27 sta navigando spinta dalle vele. Cosa c'è di sbagliato nella figura?

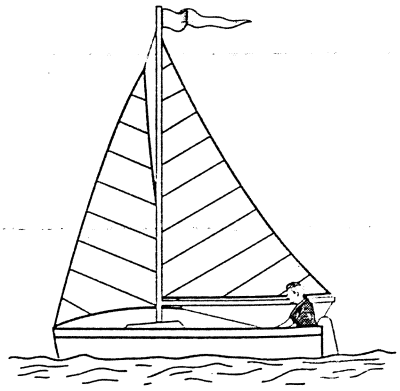


FIGURA 4.27 Quesito 40.

41. La trasformazione galileiana delle velocità, Equazione 4.32, è così istintivamente familiare nell'esperienza quotidiana che talvolta la si considera "talmente ovvia da non richiedere dimostrazione". Molte confutazioni alla teoria della relatività si basano su questo asserto. Cosa potreste obiettare a chi fa simili asserzioni?

 ISBN 88-408-1254-7

ESERCIZI

4.1 Moto costantemente accelerato in tre dimensioni

1. In un tubo a raggi catodici si proietta un fascio di elettroni con velocità di $9{,}6 \cdot 10^8$ cm/s nella regione compresa tra due piatti orizzontali lunga 2,3 cm. Un campo elettrostatico presente tra i due piatti costringe gli elettroni a un'accelerazione costante verso il basso avente modulo di $9{,}4 \cdot 10^{16}$ cm/s^2. Si trovi (a) il tempo richiesto agli elettroni per attraversare la regione, (b) lo spostamento verticale che subiscono nell'attraversamento e (c) le componenti orizzontale e verticale della loro velocità al termine dell'attraversamento.
2. Una slitta a vela scivola sulla superficie di un lago gelato con accelerazione costante impressa dal vento. La sua velocità in un certo istante è $\boldsymbol{v} = 6{,}30\boldsymbol{i} - 8{,}42\boldsymbol{j}$. Dopo un intervallo di 3,00 s la velocità è nulla. Quanto vale l'accelerazione?
3. Una particella si muove e la sua posizione varia secondo la legge

$$\boldsymbol{r}(t) = A\boldsymbol{i} + Bt^2\boldsymbol{j} + Ct\boldsymbol{k},$$

in cui $A = 1{,}0$ m, $B = 4{,}0$ m/s^2 e $C = 1{,}0$ m/s. Scrivete le espressioni per (a) la sua velocità e (b) la sua accelerazione, in funzione del tempo. (c) Che forma ha la traiettoria della particella?
4. Una particella parte dall'origine delle coordinate all'istante $t = 0$ con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0 = (3{,}6 \text{ m/s})\boldsymbol{i}$. Subisce un'accelerazione costante $\boldsymbol{a} = -(1{,}2 \text{ m/s}^2)\boldsymbol{i} - (1{,}4 \text{ m/s}^2)\boldsymbol{j}$. (a) In quale istante la particella raggiunge il valore massimo della coordinata x? (b) Quanto vale la velocità in quell'istante? (c) Qual è la sua posizione in quell'istante?

4.2 Forma vettoriale delle leggi di Newton in tre dimensioni

5. Due forze F_1 ed F_2 agiscono su un corpo di massa m, come illustra la Figura 4.28. Posti $m = 5{,}2$ kg, $F_1 = 3{,}7$ N ed $F_2 = 4{,}3$ N, si calcoli il vettore accelerazione della particella.

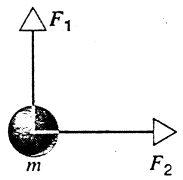


FIGURA 4.28 Esercizio 5.

6. Un oggetto di massa 8,5 kg quando passa dall'origine ha velocità parallela e concorde all'asse x, di modulo 42 m/s. Sull'oggetto agisce una forza costante di modulo 19 N in direzione parallela e concorde all'asse y. Si calcoli (a) la velocità e (b) la posizione dell'oggetto dopo un intervallo di 15 s.
7. Una corda esercita una forza $P = 12$ N nella direzione formante un angolo $\theta = 25°$ con il piano orizzontale, per tirare su un pavimento privo d'attrito un blocco di massa 5,1 kg, come si vede in Figura 4.29. (a) Qual è l'accelerazione del blocco? (b) Ora si incrementa gradualmente P; qual è il suo valore nel momento in cui il blocco comincia a sollevarsi da terra? (c) E la sua accelerazione in quel momento?

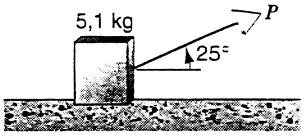


FIGURA 4.29 Esercizio 7.

8. Un operaio tira sul pavimento una cassa mediante una corda. La corda è inclinata di 38° rispetto al piano orizzontale ed esercita sulla cassa una forza di modulo 450 N. Il pavimento esercita sulla cassa una forza d'attrito orizzontale di modulo 125 N, come è illustrato nella Figura 4.30. Calcolare l'accelerazione della cassa, supposto che abbia (a) una massa di 96,0 kg, o (b) un peso di 96,0 N.

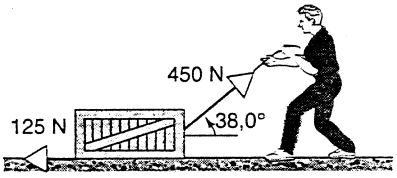


FIGURA 4.30 Esercizio 8.

9. Un carro-attrezzi trascina un'auto di massa 1200 kg su per una rampa inclinata di 18° sul piano orizzontale. Il cavo di traino forma un angolo di 27° col piano di traino, come si vede nella figura 4.31. Ignorando tutte le forze d'attrito agenti sull'auto, qual è la massima distanza che i veicoli possono compiere partendo da fermi durante i primi 7,5 s, se la tensione massima che sopporta il cavo è di 4,6 kN?

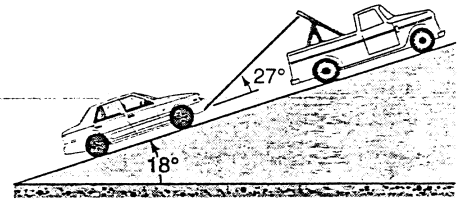


FIGURA 4.31 Esercizio 9.

10. Come illustrato nella Figura 4.32 si spinge una cassa di massa 110 kg a velocità uniforme su per una rampa priva d'attrito inclinata di 34° sul piano orizzontale. Che forza orizzontale F si richiede? (*Suggerimento*: scomporre la forza nelle componenti parallela e perpendicolare alla rampa.)

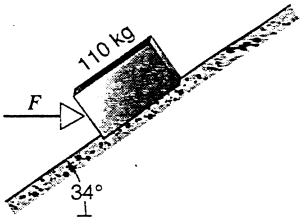


FIGURA 4.32 Esercizio 10.

11. Un tempo i canali navigabili erano rimorchiati da cavalli nel modo illustrato dalla Figura 4.33. Supponiamo che il cavallo tiri la fune con una forza di 7900 N sotto un angolo di 18° rispetto alla direzione del moto del barcone, orientato secondo l'asse del canale. La massa del barcone è di 5000 kg, e l'accelerazione di 0,12 m/s^2. Calcolate la forza orizzontale esercitata dall'acqua sul barcone.

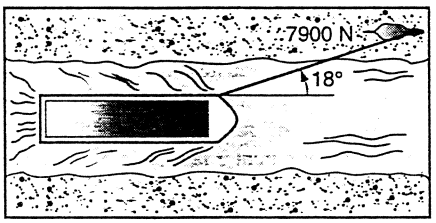


FIGURA 4.33 Esercizio 11.

12. Un aereo da caccia di peso 79 300 N sale con un angolo di 27,0° rispetto al piano orizzontale con accelerazione di 2,62 m/s^2. Trovare (a) la spinta T dei motori e (b) la forza di portanza esercitata dall'aria sulle ali perpendicolarmente alla direzione di volo. Si veda la Figura 4.34.

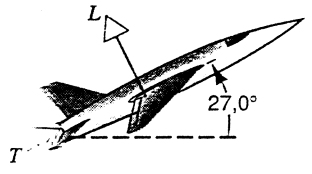


FIGURA 4.34 Esercizio 12.

4.3 Moto dei proiettili

13. Una pallina rotola dal bordo di un tavolo alto 42,3 cm e arriva a terra avendo percorso una distanza orizzontale di 51,1 cm. (a) Quanto è durato il volo? (b) Che velocità aveva la pallina all'istante della caduta?

14. Gli elettroni, come tutti i corpi materiali, cadono sotto l'effetto della gravità. Percorrendo una distanza orizzontale di 1,0 m, di che lunghezza verticale cade un elettrone proiettato orizzontalmente con velocità di $3{,}0 \cdot 10^7$ m/s (un decimo della velocità della luce)?

15. Si scaglia una freccetta orizzontalmente con velocità iniziale di 10 m/s puntando al centro P (Figura 4.35). La freccetta, 0,19 s dopo finisce sul bordo del quadrante nel punto Q, verticalmente al di sotto di P. (a) Qual è la distanza PQ? (b) A che distanza dal bersaglio si trovava il lanciatore?

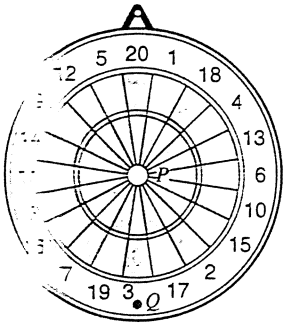


FIGURA 4.35 Esercizio 15.

16. Dall'alto di una rupe lanciate una palla con velocità iniziale di 15 m/s in una direzione che forma un angolo di 20° al di sotto del piano orizzontale. Trovate (a) il suo spostamento orizzontale e (b) il suo spostamento verticale, realizzati nel tempo di 2,3 s.

17. Si dimostri che l'altezza massima raggiunta da un proiettile è data da

$$y_{\max} = (v_0 \sin \phi_0)^2/(2g) .$$

18. Una palla rotola giù dall'ultimo gradino di una rampa di scale con velocità orizzontale di modulo 1,6 m/s. I gradini sono alti 20 cm e profondi altrettanto. Su che gradino cadrà la palla al primo impatto?

19. Una palla viene gettata in aria da terra. Alla quota di 9,1 m la sua velocità è $v = (7{,}6 \text{ m/s})i + (6{,}1 \text{ m/s})j$ (l'asse x è orizzontale, l'asse y è verticale e orientato verso l'alto). (a) A che altezza massima arriva la palla? (b) Qual è la distanza orizzontale coperta dalla palla? (c) Che velocità (modulo e direzione) ha la palla quando giunge a terra?

20. Un pallone viene calciato da terra con velocità iniziale di 19,5 m/s e direzione formante un angolo di 45° sopra il piano orizzontale. Nello stesso istante un giocatore, che si trova a 55 m di distanza nella stessa direzione (proiettata orizzontalmente) del lancio, scatta per intercettare il pallone. Che velocità media deve realizzare per raggiungerlo nel momento della caduta a terra? (Si trascuri la resistenza dell'aria.)

21. In base all'Equazione 4.14 la gittata di un proiettile dipende non solo da v_0 e da ϕ_0, ma anche da g, l'accelerazione di gravità. Nel 1936 Jesse Owens ai giochi olimpici di Berlino (ove $g = 9{,}8128$ m/s^2) stabilì in 8,09 m il primato mondiale di salto in lungo. Quale sarebbe stata la sua prestazione se, a parità di tutti gli altri parametri, avesse invece gareggiato nel 1956 a Melbourne, ove $g = 9{,}7999$ m/s^2?

22. A che velocità iniziale deve tirare il cestista di Figura 4.36 per centrare in pieno il canestro, che ha l'imboccatura di 45 cm di diametro? Si desumano i valori dalla figura.

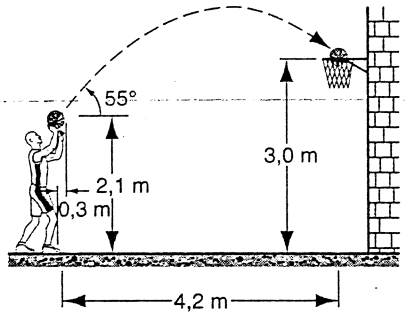


FIGURA 4.36 Esercizio 22.

23. Un giocatore calcia al volo un pallone che atterra dopo un volo durato 4,50 s alla distanza di 45,7 m da lui. La palla lascia il piede del calciatore a un'altezza di 1,52 m da terra. Qual è la velocità di lancio (modulo e direzione)?

24. Un aeroplano, volando a 290 km/h con un angolo di 27.0° verso il basso rispetto al piano orizzontale, sgancia un falso bersaglio radar, come mostra la Figura 4.37. La distanza orizzontale fra il punto di rilascio e il punto in cui il falso bersaglio colpisce il terreno è di 700 m. (a) Per quanto tempo è rimasto in aria il falso bersaglio? (b) A che quota si trovava l'aereo al momento dello sgancio?

 ISBN 88-408-1254-7

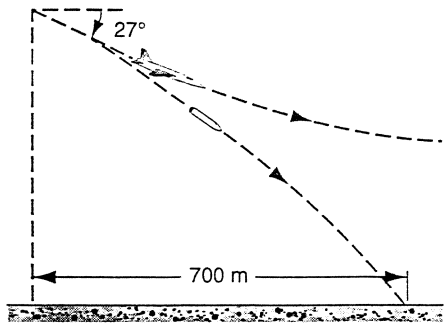


FIGURA 4.37 Esercizio 24.

25. (a) Un tennista serve la palla orizzontalmente da un'altezza (riferita al centro della palla) sul campo di 2,37 m, a una velocità di 23,6 m/s. A che altezza sopra la rete, alta 0,90 m e distante 12,0 m, passerà la pallina? (b) Supponiamo ora che il tennista serva come in (a), ma con un'inclinazione verso il basso di 5,00° rispetto all'orizzontale. (c) La palla riuscirà ancora a passare la rete?

26. Un battitore di baseball ribatte la palla con la mazza ad altezza di 1,3 m in una direzione che forma un angolo di 45° sopra il piano orizzontale. La gittata di questa battuta è di 110 m. La palla va verso il limite del campo, distante dalla base 105 m, ove si erge una recinzione alta 7,5 m. Supererà la rete? E se sì, di quanto?

27. In un campo da baseball il battitore scaglia la palla con la mazza all'altezza di 1,40 m sul terreno e in una direzione che forma un angolo di 52,0° col piano orizzontale. La palla atterra su un terrapieno 11,7 m sopra il suo bordo inferiore; si veda la Figura 4.38. Il piano del terrapieno è inclinato di 28.0° sul piano orizzontale e il suo bordo inferiore dista 110 m dalla base del battitore. Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli la velocità di battuta della palla.

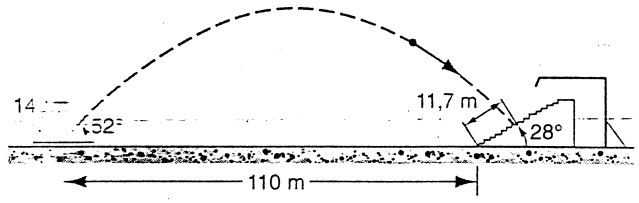


FIGURA 4.38 Esercizio 27.

28. A che altezza massima un lanciatore di baseball è in grado di scagliare una palla, se il suo primato di gittata è di 60.0 m? Si assuma che la palla venga liberata dalla mano quando è a un'altezza di 1,60 m e con ugual velocità in entrambi i casi.

4.4 Resistenza del mezzo e moto dei proiettili

29. Un ciottolo di massa 150 g sta scendendo nelle profondità oceaniche, 3,4 km sotto il livello del mare, alla velocità limite di 25 m/s. Quant'è la forza di resistenza che oppone l'acqua alla sua discesa?

30. Si lascia cadere un corpo da fermo. Assumendo che la resistenza del mezzo dipenda dalla legge $D = bv^2$, si calcoli la velocità limite.

31. Quanto tempo impiega il corpo dell'Equazione 4.22 a raggiungere metà della sua velocità limite?

32. Assumendo che la resistenza del mezzo sia data da $D = bv$, calcolare dai dati della Tabella 4.1 il valore di b per le gocce di pioggia, la cui massa volumica vale 1,0 g/cm^3.

33. Un locomotore deve accelerare un treno di 23 carrozze su un binario orizzontale. Ciascuna carrozza ha una massa di 48,6 t ed è soggetta a una forza d'attrito data da $f = (243 \text{ kg/s})v$. Nell'istante in cui il treno ha la velocità di 34,5 km/h, l'accelerazione vale 0,182 m/s^2. (a) Calcolare la forza esercitata dal locomotore sulla prima carrozza. (b) Supponendo che questa sia la forza massima applicabile dal locomotore, qual è la massima pendenza su cui può trainare il treno alla velocità di 34,5 km/h?

4.5 Moto circolare uniforme

34. Nel modello di Bohr per l'atomo d'idrogeno, l'elettrone ruota attorno al protone in orbita circolare di raggio $5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m con velocità scalare di $2{,}18 \cdot 10^6$ m/s. (a) Quanto vale l'accelerazione dell'elettrone? (b) Calcolare il modulo e la direzione della forza che agisce sull'elettrone.

35. Un astronauta si esercita ruotando in una centrifuga di raggio 5,2 m. (a) Con un'accelerazione pari a 6,8g, quant'è la velocità scalare? (b) Per ottenere questa accelerazione quanti giri al minuto si richiedono?

36. Una ruota panoramica ha raggio di 15 m e compie cinque giri al minuto attorno al suo asse orizzontale. (a) A che accelerazione (modulo e direzione) sono sottoposti i passeggeri nel punto più alto? (b) E nel punto più basso? (c) In questi punti che forza deve applicare la struttura su un passeggero di massa 75 kg?

37. Si ritiene che certe stelle di neutroni (corpi estremamente densi) ruotino intorno al proprio asse alla velocità di circa 1 giro al secondo. Se il raggio è di 20 km (tipico per queste stelle), (a) qual è la velocità scalare per un punto sull'equatore? (b) E l'accelerazione centripeta nel medesimo punto?

38. (a) Calcolare l'accelerazione centripeta che subisce un corpo sull'equatore terrestre per effetto della rotazione della Terra. (b) All'equatore un corpo di massa 25,0 kg è appeso a una bilancia a molla. Se l'attrazione gravitazionale comporta da sola un'accelerazione di 9,80 m/s^2, qual è la lettura della bilancia?

4.6 Moto relativo

39. Su una scala mobile ferma, lunga 15 m, una persona sale in 90 s. Quando la scala mobile funziona, la persona compie il tragitto in 60 s stando ferma su un gradino. Salendo alla sua velocità abituale mentre la scala mobile è in funzione, quanto tempo impiega? La risposta dipende dalla lunghezza della scala?

40. L'aeroporto di Ginevra è dotato in un lungo corridoio di un *tapis roulant* di ausilio. Pietro, che cammina lungo il corridoio senza questo ausilio, impiega 150 s a percorrerlo. Paolo, stando fermo sul tapis roulant, lo percorre in 70 s. Maria non solo usa il tapis roulant ma vi cammina sopra alla velocità di Pietro. Quanto tempo impiega?

41. Un volo intercontinentale di 4300 km richiede nel verso da est a ovest 50 min di più che nel verso opposto. La velocità dell'aereo rispetto all'aria è di 960 km/h. Che cosa si può dire riguardo i venti in quota che esso incontra?

42. Un treno viaggia verso sud alla velocità di 28 m/s (rispetto al terreno) sotto una pioggia sospinta a sud dal vento. La direzione delle gocce forma un angolo di 64° rispetto all'asse verticale, secondo un osservatore a terra. Un viaggiatore sul treno invece le vede cadere perfettamente verticali. Determinare la velocità di caduta delle gocce rispetto al terreno.

43. Un ascensore soggetto a un'accelerazione verso l'alto di 1.3 m/s^2. Nel momento in cui la velocità verso l'alto è di 2,6 m/s, dal soffitto della cabina, alta 2,8 m, cade un bullone allentato. Calcolare (a) il tempo di caduta del bullone dal soffitto al pavimento, (b) la distanza di caduta rispetto al riferimento di terra.

PROBLEMI

1. Una particella A si sposta sulla retta $y = d$ (30 m) a velocità costante v di modulo $v = 3.0$ m/s e direzione parallela all'asse x, come nella figura 4.40. Una seconda particella B parte dall'origine, con velocità iniziale zero e accelerazione a di modulo $a = 0{,}40$ m/s^2, nello stesso istante in cui la particella A attraversa l'asse y. Quale angolo θ fra a e il verso positivo dell'asse y potrebbe provocare una collisione fra le due particelle?

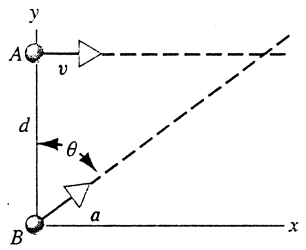


FIGURA 4.40 Problema 1.

2. Una palla cade da un'altezza di 39,0 m. Il vento soffia orizzontalmente e le imprime un'accelerazione costante di 1.20 m/s^2. (a) Dimostrate che la traiettoria della palla è rettilinea e trovate i valori di R e θ nella Figura 4.41. (b) Quanto tempo impiega la palla per giungere a terra? (c) Con che velocità colpisce il terreno?

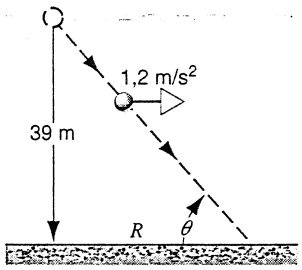


FIGURA 4.41 Problema 2.

3. Un razzo di massa 3030 kg viene sparato da terra nella direzione che forma un angolo di 58,0° col piano orizzontale. Il motore sviluppa una spinta di 61,2 kN per 48 s sempre nella stessa direzione e poi si spegne. Si trascurino la resistenza dell'aria e la massa di carburante consumato. Determinare (a) l'altezza del razzo allo spegnimento dei motori e (b) la distanza totale dal punto di lancio al punto di ricaduta a terra.

4. Una palla da baseball viene lanciata verso il battitore orizzontalmente a una velocità iniziale di 161 km/h. La distanza a cui si trova il battitore è di 18,3 m. (a) Quanto tempo impiega a coprire i primi 9,15 m in orizzontale? E i rimanenti 9,15 m? (b) Di quanto cade per effetto della gravità nei primi 9,15 m in orizzontale? (c) E nei rimanenti 9,15 m? (d) Per quale ragione le quantità (b) e (c) non sono uguali fra loro? Si trascuri la resistenza dell'aria.

5. Una palla viene lanciata contro un muro con la velocità iniziale di 25,3 m/s nella direzione formante un angolo di 42,0° rispetto al suolo orizzontale, come indicato nella Figura 4.42. Il muro si trova alla distanza di 21,8 m dal punto di lancio. (a) Per quanto tempo rimane in aria prima di colpire la parete? (b) A che altezza sopra la quota di lancio colpisce il muro? (c) Quali sono le componenti orizzontale e verticale della sua velocità all'istante in cui colpisce la parete? (d) In questo istante ha già superato il vertice della traiettoria?

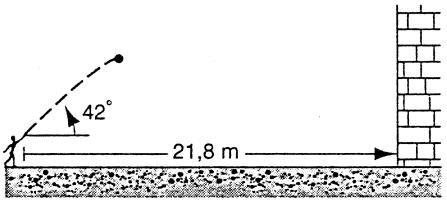


FIGURA 4.42 Problema 5.

6. Su un suolo orizzontale si spara un proiettile nella direzione che forma un angolo ϕ_0 rispetto al piano orizzontale. (a) Dimostrare che l'angolo di visuale θ del vertice della traiettoria è legato a ϕ_0 dalla relazione $\tan\theta = \frac{1}{2}\tan\phi_0$. Si veda la Figura 4.43. (b) Si calcoli θ per $\phi_0 = 45°$.

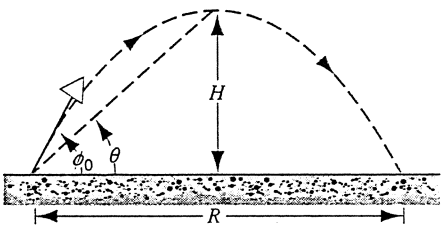


FIGURA 4.43 Problema 6.

 ISBN 88-408-1254-7

7. Nella Figura 4.44 vediamo un proiettile sparato con velocità iniziale di 36 m/s e angolo di alzo di 62° verso un altipiano di altezza h sopra la quota di lancio. Il proiettile colpisce il terreno nel punto A, 5,5 s dopo il lancio. Determinare (a) l'altezza h dell'altipiano, (b) la velocità del proiettile all'impatto e (c) la sua altezza culminante rispetto alla quota di lancio.

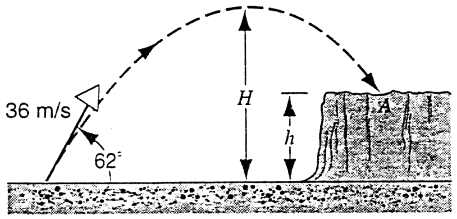


FIGURA 4.44 Problema 7.

8. (a) Galileo scriveva che "per angoli di alzo che si discostano di uguali quantità dal valore di 45°, la gittata è identica". Con riferimento alla Figura 4.45, dimostrate questa affermazione. (b) Trovare i due possibili angoli di alzo che permettono di ottenere una gittata di 20,0 m con una velocità iniziale di 30.0 m/s.

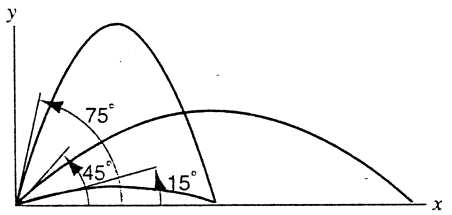


FIGURA 4.45 Problema 8.

9. Un calciatore è in grado di imprimere al pallone una velocità iniziale di 25 m/s. Entro quale intervallo di angolo d'alzo deve calciare se vuole segnare una rete dalla distanza di 50 m dalla porta, alta 3,4 m?

10. Un radarista a terra sta seguendo un proiettile in avvicinamento. Queste sono le sue informazioni in un dato istante: il proiettile si trova al culmine della traiettoria; il suo vettore velocità ha direzione orizzontale e modulo v; la distanza in linea d'aria tra il radar e il proiettile è L; l'angolo di visuale sotteso dal proiettile è θ, misurato dal piano orizzontale. (a) Trovare la distanza D tra il radar e il punto d'impatto del proiettile, esprimendolo in funzione di v, L, θ e g. Si assuma che il terreno sia piano e orizzontale e che il radar si trovi nel piano della traiettoria del proiettile. (b) Come si può determinare se il proiettile passerà sopra il radar schiantandosi oltre, oppure atterrerà prima del radar?

11. Si dimostri che per il moto di un proiettile vale la relazione $d^2(v^2)/dt^2 = 2g^2$.

12. Consideriamo un proiettile lanciato dall'origine in una direzione formante un angolo ϕ_0 con il piano orizzontale; la sua posizione successiva sia $\mathbf{r}(t)$. Per angoli abbastanza piccoli la distanza dall'origine $r = |\mathbf{r}|$ aumenta sempre. Per angoli vicini a 90°, invece, il proiettile salendo dapprima si allontana dall'origine e poi scendendo si avvicina nuovamente. Quale angolo critico ϕ_c suddivide le due classi di lanci?

13. Un aerostato sta scendendo in aria ferma alla velocità costante v di 1,88 m/s. Il peso totale del pallone, carico incluso, è di 10,8 kN. Su di esso agisce una forza di sostentamento costante orientata verso l'alto di 103 kN. L'aria esercita anche una resistenza del mezzo data da $D = bv^2$, ove b è una costante. A un certo momento dal pallone si gettano 26,5 kg di zavorra. Quale sarà la velocità costante verso il basso che alla fine verrà ad assumere l'aerostato?

14. Ripetere il Problema 13 assumendo che la resistenza del mezzo sia data da $D = bv$. Si noti che occorre ricalcolare la costante b.

15. Un corpo di massa m cade in aria da fermo. Al suo moto si oppone una resistenza aerodinamica $D = bv^2$. (a) Qual è l'accelerazione iniziale del corpo verso il basso? (b) Dopo un certo tempo la velocità del corpo si avvicina a un valore costante. Qual è la velocità limite v_L? (c) Quant'è l'accelerazione verso il basso nel momento in cui $v = v_L/2$?

16. Un barcone di massa m sta procedendo a velocità costante v_i quando spegne i motori. La resistenza del mezzo è data da $D = bv$. (a) Trovare un'espressione per calcolare il tempo richiesto per ridurre la velocità al valore v_f. (b) Calcolate il tempo occorrente a un barcone di massa 970 kg per passare dalla velocità di 32 km/h a quella di 8,3 km/h. Ponete $b = 68$ kg/s.

17. Consideriamo il corpo in caduta descritto nel Paragrafo 4.4. (a) Trovare l'accelerazione in funzione del tempo. Qual è l'accelerazione per piccoli valori di t? E per grandi valori di t? (b) Trovare la lunghezza di caduta in funzione del tempo.

18. (a) Assumendo che la resistenza del mezzo sia data da $D = bv$, dimostrare che la distanza y_{95} di caduta da fermo, richiesta per raggiungere il 95 % della velocità limite, ha la seguente espressione:

$$y_{95} = (v_L^2/g)(\ln 20 - \tfrac{19}{20}),$$

ove v_L rappresenta la velocità limite. (*Suggerimento*: guardate il risultato per $y(t)$ ottenuto nel Problema 17.) (b) Calcolare y_{95} per la palla da baseball, sapendo dalla Tabella 4.1 che la sua velocità limite è di 42 m/s. Perché il risultato non coincide con quello esposto nella tabella stessa?

19. Il treno veloce francese TGV Atlantique (*Train à grande vitesse*), nel tratto Parigi-Le Mans raggiunge una velocità massima di 310 km/h. (a) Se abborda una curva a questa velocità e la massima accelerazione accettabile dai passeggeri è $0{,}050g$, qual è il minimo raggio ammissibile per le curve dei binari? (b) Se una curva ha un raggio di 0,94 km, a quale valore deve essere ridotta la velocità del treno per rispettare il limite di accelerazione consentito?

20. Una particella P ruota a velocità costante su un cerchio di raggio 3,00 m (Figura 4.46), compiendo una rivoluzione ogni 20,0 secondi. Passa per il punto O all'istante $t = 0$. (a) Trovate il modulo e la direzione (rispetto all'origine) dei seguenti vettori: posizione rispetto a O per $t = 5{,}00$ s, $t = 7{,}50$ s e $t = 10{,}0$ s. Quindi, per l'intervallo di 5,00 s dalla fine del 5° alla fine del 10° secondo, (b) modulo e direzione dello spostamento e (c) velocità vettoriale media. Poi, agli istanti iniziale e finale di questo intervallo, (d) velocità istantanea e (e) accelerazione istantanea.

21. Un ragazzino fa ruotare un sasso legato a una cordicella lunga 1,4 m su un cerchio orizzontale a 1,9 m dal suolo. La cordicella si spezza, e il sasso fila via orizzontalmente

andando a cadere a 11 m di distanza orizzontale. Qual era l'accelerazione centripeta del sasso in moto circolare?

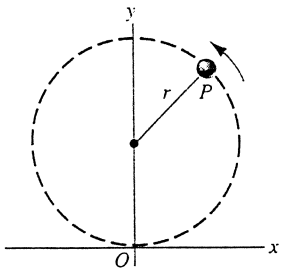


FIGURA 4.46 Problema 20.

22. Una ragazza alta 1,6 m sta in piedi per 24 h in una località di latitudine 50°. (a) Quanto più velocemente ruota l'estremità della sua testa rispetto alla pianta dei piedi attorno all'asse terrestre? (b) Di quanto maggiore è l'accelerazione della testa rispetto a quella dei piedi?

23. Una particella si muove su un piano in base alle seguenti funzioni:

$$x = R\sin(\omega t) + \omega R t$$

$$y = R\cos(\omega t) + R,$$

dove ω ed R sono costanti. La curva, chiamata cicloide, è il percorso seguito da un punto posto sul bordo di una ruota che rotola senza slittare attorno al suo asse x. (a) Fate uno schizzo di questa curva. (b) Calcolate la velocità e l'accelerazione istantanee quando la particella si trova al valore minimo e massimo di y.

24. Cade la neve verticalmente a velocità costante di 7,8 m/s. L'autista di una macchina che corre rettilinea alla velocità costante di 55 km/h, (a) con che angolo rispetto all'asse verticale e (b) a che velocità vede cadere i fiocchi di neve?

25. Uno dei primi tentativi di misurare la velocità della luce fu compiuto misurando la posizione di una stella situata in direzione perpendicolare alla traiettoria dell'orbita terrestre (Figura 4.47). (a) Se l'angolo θ misurato è compreso tra 89°59′39,3″ e 89°59′39,4″, quale sarebbe il corrispondente intervallo di valori per la velocità della luce? (b) Descrivete un metodo ragionevole per misurare quest'angolo con l'accuratezza dei valori qui dati. (*Suggerimento*: la risposta a questa domanda potrebbe non essere così immediata come appare a prima vista.)

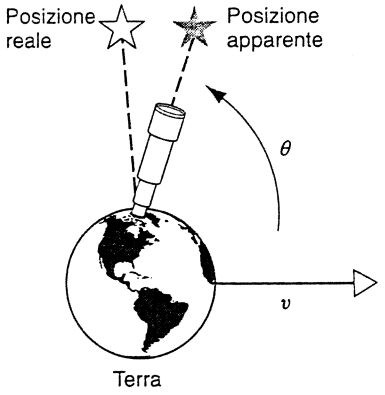


FIGURA 4.47 Problema 25.

26. Un aereo deve volare verso est dal punto A al punto B e tornare indietro ad A. La velocità del velivolo in aria è v. La velocità del vento rispetto a terra è u. La distanza che separa A da B è L e l'aereo vola a velocità costante. (a) Dimostrare che, se $u = 0$ (assenza di vento), il tempo di andata e ritorno è $t_0 = 2L/v$. (b) Si supponga ora che la velocità del vento sia diretta come l'asse est-ovest. Dimostrare che il tempo di andata e ritorno è

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}.$$

(c) Supponiamo invece che il vento spiri in direzione nord-sud. Dimostrare che il tempo di andata e ritorno è

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}.$$

(d) Per i casi (b) e (c) occorre assumere che sia $u < v$. Perché?

27. Siamo all'incrocio di due strade come in figura 4.48. Nell'istante raffigurato una macchina della polizia P si trova alla distanza di 41 m dall'incrocio e avanza alla velocità di 76 km/h, mentre un'altra automobile M dista 57 m dall'incrocio, cui si avvicina con la velocità di 62 km/h. Calcolare il vettore velocità dell'auto M rispetto al riferimento della polizia (modulo e angolo rispetto al senso di marcia di P).

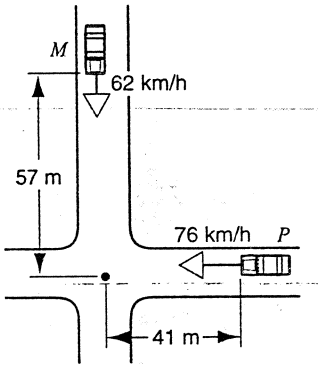


FIGURA 4.48 Problema 27.

28. La polizia impiega talvolta degli elicotteri per il controllo del traffico autostradale. Supponiamo che un elicottero stia procedendo alla velocità di 220 km/h con assenza di vento. Dirige verso nord mantenendosi sopra un'autostrada rettilinea con asse nord-sud. A un certo punto gli comunicano via radio che ha cominciato a soffiare un vento alla velocità di 140 km/h, trascurando di specificare in quale direzione. Il pilota osserva tuttavia che copre ancora 220 km di autostrada in 1,00 h; la sua velocità rispetto terra è cioè rimasta invariata. (a) Che direzione ha il vento? (b) In che direzione punta l'elicottero (quale angolo forma il suo asse con quello dell'autostrada)?

 ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. La forza agente su una particella di massa 5,0 kg sia data da $F_x = -(20{,}0\ \text{N/m})x$ e $F_y = -(20{,}0\ \text{N/m})y$. Tracciare il grafico xy del moto della particella. La posizione iniziale è $x_0 = 2{,}0$ m, $y_0 = 0$ e la velocità iniziale è $v_{0x} = 0$, $v_{0y} = 4{,}0$ m/s. Provate con diversi intervalli di Δt finché non ne trovate uno che dia luogo a una traiettoria che riporti la particella al punto di partenza entro la distanza di 1,0 cm dalla posizione iniziale. Che forma ha la traiettoria? Quanto tempo impiega la particella per tornare al punto di partenza? Come si modificherebbe la traiettoria se la velocità iniziale fosse $v_{0y} = 3{,}0$ m/s anziché 4,0 m/s?
2. L'accelerazione di una particella sia data dalle espressioni $a_x = -(10{,}0\ \text{m}^2/\text{s}^2)x/|x|^3$ e $a_y = -(10{,}0\ \text{m}^2/\text{s}^2)y/|y|^3$. La posizione iniziale della particella è $\boldsymbol{r}_0 = 5\boldsymbol{i}$ m e la velocità iniziale ha componente non nulla solo nella direzione y. (a) Con un intervallo $\Delta t = 0{,}1$ s, scegliete un valore iniziale di v_y in modo che la soluzione numerica risulti in una traiettoria circolare. Confrontatela con la soluzione analitica. (b) Ripetete cercando un valore iniziale v_y che dia luogo a una traiettoria ellittica di asse maggiore doppio rispetto a quello minore. Esistono due valori di v_y. Trovateli entrambi.
3. Dal ciglio di una rupe si lancia verticalmente in aria una palla di massa 150 g con velocità iniziale di 25 m/s, che ricade mancando di un soffio il ciglio e atterra nella piana sottostante, 300 m al di sotto della rupe. Oltre alla forza di gravità, agisce su di essa una resistenza del mezzo data dall'espressione $D = bv$, con $b = 0{,}0150$ kg/s. (a) Quanto tempo resta in volo la palla? (b) Qual è la sua velocità d'impatto a terra? (c) Qual è il rapporto tra questa velocità e la velocità limite? (*Suggerimento*: provate con il metodo di Eulero ponendo un intervallo $\Delta t = 0{,}001$ s.)
4. La velocità di un proiettile soggetto alla resistenza dell'aria si avvicina a quella limite. Supponete che $mg - bv$ rappresenti la forza netta agente sul proiettile, ove b è il coefficiente di resistenza del mezzo e l'asse y è scelto verticale verso l'alto. Alla velocità limite v_L la forza netta si annulla e quindi $v_L = -(mg/b)$. Si noti che la componente orizzontale è zero. Il proiettile alla fine cade verticalmente verso il basso.

   Con un programma al computer o un «foglio elettronico» osservate l'evolversi della velocità di un proiettile verso la velocità limite. Considerate un proiettile di massa 2,5 kg lanciato con velocità iniziale di 150 m/s nella direzione formante un angolo di 40° rispetto al piano orizzontale. Ponete il coefficiente di resistenza del mezzo pari a $b = 0{,}50$ kg/s. Integrate numericamente la seconda legge di Newton e visualizzate i risultati ogni 0,5 s da $t = 0$ (istante di lancio) fino al momento in cui la componente y della velocità ha raggiunto il 90 % di v_L. Diagrammate $v_x(t)$ e $v_y(t)$ sullo stesso grafico. Osservate che, al tendere di v_y a v_L, v_x tende a 0.

CAPITOLO 5

APPLICAZIONI DELLE LEGGI DI NEWTON

Nel Capitolo 3 abbiamo presentato le leggi di Newton con alcuni esempi delle loro applicazioni, intenzionalmente molto semplificati per meglio farne comprendere il funzionamento. Ma l'eccessiva semplificazione ci ha fatto perdere di vista alcuni fenomeni fisici connessi a quelle leggi.

In questo capitolo esamineremo ancora altre applicazioni delle leggi di Newton, che si riferiscono all'attrito e alle altre forze di contatto, al moto circolare e alle forze non costanti. E infine dimostreremo che l'adozione di uno schema di riferimento non inerziale produce effetti che possono essere analizzati introducendo forze inerziali o forze fittizie che, a differenza da quelle reali, non sono causate dalla presenza di oggetti specifici nell'ambiente circostante.

5.1 LEGGI DELLE FORZE

Prima di ritornare alle applicazioni delle leggi di Newton, dobbiamo esaminare rapidamente la natura delle forze in gioco. Abbiamo usato le equazioni del moto per analizzare e calcolare gli *effetti* delle forze, che non ci dicono però nulla circa le loro *cause*. Per capire come si generino le forze dobbiamo arrivare a conoscere fino ai più microscopici dettagli le interazioni degli oggetti fra loro e con lo spazio circostante. Al livello più elementare, la natura sembra operi mediante un piccolo numero di forze fondamentali. I fisici ne hanno tradizionalmente individuato quattro tipi: (1) *la forza gravitazionale*, che dipende dalla presenza di materia; (2) *la forza elettromagnetica*, che è basata su interazioni elettriche e magnetiche ed è responsabile dei legami fra gli atomi e della struttura dei solidi; (3) *la forza nucleare debole*, che provoca certi processi di decadimento radioattivo e certe reazioni fra le particelle fondamentali: e infine (4) *la forza nucleare forte*, che agisce fra le particelle fondamentali ed è quella che «tiene insieme» il nucleo.

Per il caso più microscopico – diciamo, due protoni all'interno di un nucleo tipico – i valori relativi dell'intensità delle forze di interazione sono, in scala decrescente: 1 per l'interazione forte, 10^{-2} per l'interazione elettromagnetica, 10^{-9} per l'interazione debole e 10^{-38} per l'interazione gravitazionale. A questo livello, la gravità è estremamente debole e presenta effetti trascurabili. Questa sua debolezza si rivela in molte banali circostanze – e risulta spesso assai fastidiosa! – come quando frammenti di plastica si attaccano a un pettine carico elettrostaticamente, o un attrezzo magnetizzato attira piccoli chiodi: la forza magnetica di una piccola calamita prevale sulla forza gravitazionale esercitata da tutta la Terra!

Il miraggio di una semplificazione ancora maggiore ha indotto alcuni fisici a tentare di ridurre ulteriormente il numero delle forze. Nel 1967 è stata proposta una teoria che considera la forza debole e l'elettromagnetica come un'unica forza, denominata *forza elettrodebole*. Questa combinazione o *unificazione* delle due forze è analoga a quella operata nel 19° secolo fra le due distinte forze, magnetica ed elettrostatica, ricondotte a un'unica forza, detta *elettromagnetica*. Non mancano tentativi di teorie della *grande unificazione*, che combinano ulteriormente l'interazione forte con l'elettrodebole, e addirittura *teorie del tutto*, che si sforzano di includere anche la forza di gravità.

 ISBN 88-408-1254-7

Per fortuna la nostra analisi dei sistemi meccanici non ha bisogno di ricorrere a simili teorie. Tutti i fenomeni che studieremo, riguardanti normali sistemi meccanici, dipendono infatti soltanto da due tipi d'interazione: gravitazionale ed elettromagnetica. La prima si manifesta nell'attrazione degli oggetti da parte della Terra, che conferisce loro il *peso*. In laboratorio è quasi sempre trascurabile la debolissima attrazione gravitazionale fra diversi oggetti.

Tutte le altre forze che possiamo considerare comunemente sono senz'altro di origine elettromagnetica: le forze di contatto, come quelle esercitate da un oggetto che è premuto o spinge contro un altro, o l'attrito prodotto dallo sfregamento di una superficie contro un'altra; le forze viscose, come la resistenza dell'aria; le forze di tensione, come quelle che agiscono in una corda tesa; le forze elastiche, come quelle di una molla, e molte altre ancora. Su scala microscopica, queste forze sono causate dall'interazione fra atomi. Fortunatamente, quando si tratta di normali sistemi meccanici possiamo ignorare questa base microscopica e sostituire alla complicata sottostruttura atomica una singola forza agente di una ben definita intensità e direzione.

5.2 TENSIONE E FORZE NORMALI*

Nella Figura 5.1a vediamo un operaio che tira con una forza P una fune fissata a una cassa, facendola accelerare su una superficie che supponiamo priva di attrito. La forza è esercitata sulla cassa non direttamente dall'operaio, ma piuttosto dalla fune. Si definisce questa forza una *tensione* T.

La Figura 5.1b mostra i diagrammi delle forze parziali riferiti alla fune e alla cassa, comprendenti soltanto le forze orizzontali. La fune tira la cassa con una tensione T e, per la terza legge di Newton, la cassa deve tirare la fune con una forza di intensità uguale a T, ma di verso opposto. Supponiamo che la fune sia molto sottile, e quindi la forza di tensione sia sempre orientata secondo l'asse della fune. Ammettiamo inoltre che la massa della fune sia trascurabile.

In Figura 5.1, assumendo che l'asse x sia orizzontale e con il verso positivo rivolto verso destra, vediamo che la forza risultante diretta secondo l'asse x esercitata sulla fune vale $\sum F_x = P - T$, ove P e T rappresentano l'intensità delle forze P e T. Per la seconda legge di Newton, $\sum F_x = ma_x$, si ha $P - T = m_{\text{fune}} a_x = 0$, perché abbiamo ammesso che la massa della fune sia nulla. Concludiamo dunque che $P = T$.

La forza netta secondo l'asse x esercitata sulla cassa è $\sum F_x = T$, e per la seconda legge di Newton risulta $T = m_{\text{cassa}} a_x$, da cui $a_x = T/m_{\text{cassa}} = P/m_{\text{cassa}}$. La sottile fune priva di massa trasmette semplicemente da un'estremità all'altra la forza applicata, senza alcun cambiamento di

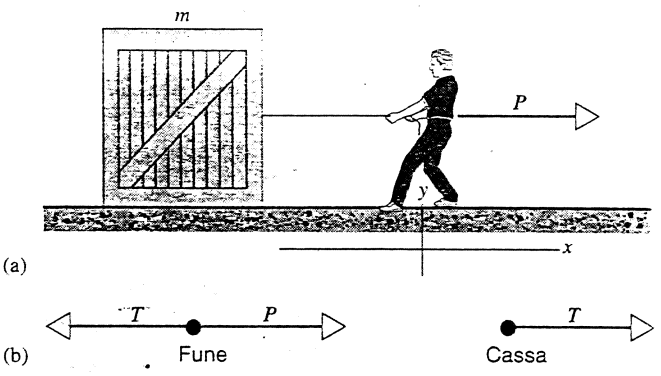


FIGURA 5.1 (a) Un operaio tira con una forza P una fune attaccata a una cassa. (b) Diagramma parziale delle forze per la fune e la cassa, che mostrano soltanto le forze orizzontali.

intensità o direzione: la forza P applicata alla fune dall'operaio è uguale a quella che la fune applica alla cassa.

La fune ideale non subisce allungamenti sotto sforzo. Supponiamo di aggiungere al nostro sistema un'altra cassa, come appare in Figura 5.2a. L'intensità della tensione T_1 nella prima fune è ancora uguale a P, e riferendoci sempre allo stesso asse x, troveremo che la forza netta agente sulla prima cassa è $\sum F_x = T_1 - T_2 = P - T_2$ e analogamente, per la seconda cassa, $\sum F_x = T_2$. Per la seconda legge di Newton abbiamo

$$\text{cassa 1:} \qquad P - T_2 = m_1 a_{1x} \tag{5.1}$$

$$\text{cassa 2:} \qquad T_2 = m_2 a_{2x} \tag{5.2}$$

Se il secondo tratto di fune, che collega m_1 con m_2, non si allunga, m_1 ed m_2 si muovono con uguali velocità e accelerazioni. Posto $a_{1x} = a_{2x} = a_x$, combinando le Equazioni 5.1 e 5.2 troviamo

$$a_x = \frac{P}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} P, \tag{5.3}$$

ossia le due casse accelerano esattamente come un unico corpo avente massa $m_1 + m_2$ al quale sia applicata la forza P. Considerando soltanto lo sforzo esercitato dall'operaio, possiamo sostituire al sistema delle due casse un'unica cassa avente massa $m_1 + m_2$.

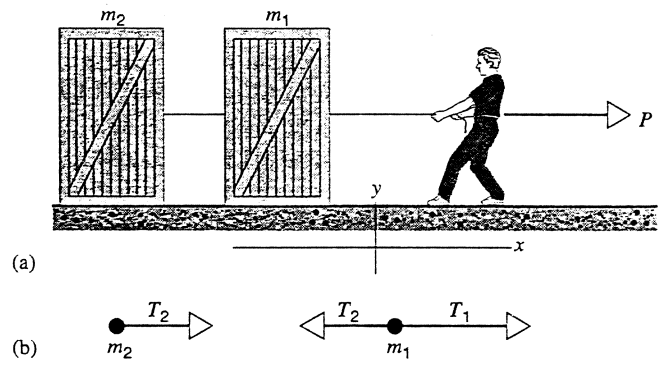


FIGURA 5.2 (a) Un operaio tira una fune attaccata a una fila di due casse. (b) Diagramma parziale delle forze per le due casse, che mostra soltanto le forze orizzontali.

* In questo capitolo, per semplificare le notazioni, non specificheremo più per ogni forza gli indici relativi al corpo su cui la forza agisce e a quello che ne è la causa. Nello studio degli esempi e nella soluzione dei problemi di questo capitolo, tuttavia, dovreste continuare a individuare questi due corpi ogniqualvolta vi troviate di fronte a una forza.

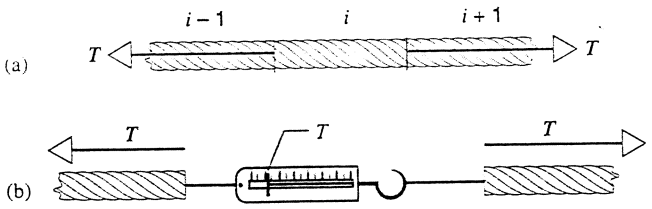


FIGURA 5.3 (a) Tre elementi di una fune tesa, chiamati $i-1$, i, $i+1$. Sono indicate le forze che agiscono sull'elemento i. (b) Se si taglia la fune e, senza alterare il resto della fune, si inserisce al posto dell'elemento i un dinamometro a molla, si può leggere la tensione T.

La forza di tensione si manifesta perché ogni piccolissimo elemento della fune tira l'elemento adiacente, ed è a sua volta tirato da quest'ultimo per la terza legge di Newton. Una forza di trazione applicata a un'estremità della fune è così trasmessa a un corpo attaccato all'altra estremità. Questa forza dipende dalla forza che agisce fra gli atomi ed è in definitiva di origine elettromagnetica.

Come illustra la Figura 5.3a, ciascun elemento i della fune è soggetto a una tensione T in un verso da parte dell'elemento $i-1$, e a una tensione uguale e contraria da parte dell'elemento $i+1$. Se provassimo a tagliare la fune in un punto qualsiasi per inserirvi un dinamometro a molla, come in Figura 5.3b, potremmo leggere direttamente l'intensità della forza di tensione T.

Si noti che il dinamometro non misura $2T$, anche se su di esso agisce una forza T applicata a ciascuna estremità. Analogamente, se appendiamo un oggetto di peso P a un dinamometro verticale, leggeremo P e non $2P$, nonostante che ad esso sia applicata una forza P verso il basso dovuta al peso dell'oggetto e una forza P orientata verso l'alto applicata alla struttura che sostiene il sistema.

PROBLEMA SVOLTO 5.1 La Figura 5.4a mostra un blocco di massa $m = 15{,}0$ kg appeso a tre funi. Quali sono le tensioni nei tre tratti di corda?

Soluzione Supponiamo anzitutto che il nodo che unisce i tre elementi sia il «corpo» da sostenere. La Figura 5.4b mostra il diagramma delle forze per questo corpo, che è a riposo sotto l'azione delle tre forze T_A, T_B e T_C, dovute alle tensioni nelle corde. Scelti gli usuali assi x e y, determiniamo le componenti delle tre forze come appare nella Figura 5.4c. Poiché le componenti delle accelerazioni sono nulle, applicando al nodo la seconda legge di Newton si ottiene

componente x: $\sum F_x = -T_A \cos 30^\circ + T_B \cos 45^\circ = ma_x = 0$

componente y: $\sum F_y = T_A \sin 30^\circ + T_B \sin 45^\circ - T_C = ma_y = 0.$

La Figura 5.4d mostra il diagramma delle forze per il blocco. Le forze hanno soltanto componente y non nulla, ed essendo l'accelerazione ancora zero si ha

$$\sum F_y = T_C - mg = ma_y = 0.$$

Risolvendo rispetto a T_C troviamo

$$T_C = mg = (15{,}0 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2) = 147 \text{ N},$$

e, sostituendo questo valore nelle due equazioni relative al nodo, risulta

$$T_A = 108 \text{ N} \quad \text{e} \quad T_B = 132 \text{ N}.$$

Per questi valori si può verificare che la somma vettoriale delle tre forze che agiscono sul nodo è nulla.

PROBLEMA SVOLTO 5.2 Un pacco di massa $m = 2{,}4$ kg è appeso a una corda fissata al soffitto della cabina di un ascensore (Figura 5.5a). Qual è la tensione nella corda quando l'ascensore (a) scende a velocità costante, e (b) sale con l'accelerazione di 3,2 m/s^2?

Soluzione (a) La Figura 5.5b mostra il diagramma delle forze. Sul pacco agiscono due forze: una verso l'alto, data dalla tensione nella corda, e l'altra verso il basso, dovuta alla gravità terrestre. Poniamo che l'asse y sia verticale e orientato verso l'alto. La forza netta agente sul pacco è $\sum F_y = T - mg$. La seconda legge di Newton ($\sum F_y = ma_y$) dà $T - mg = ma_y$, da cui si ottiene la tensione T:

$$T = m(g + a_y).$$

Quando l'ascensore sale a velocità costante, a_y è nulla e pertanto

$$T = mg = (2{,}4 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 24 \text{ N}.$$

(b) Se l'ascensore si muove con accelerazione $a_y = +3{,}2$ m/s^2, la tensione diventa

$$T = m(g + a_y) = (2{,}4 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2 + 3.2 \text{ m/s}^2) = 31 \text{ N}.$$

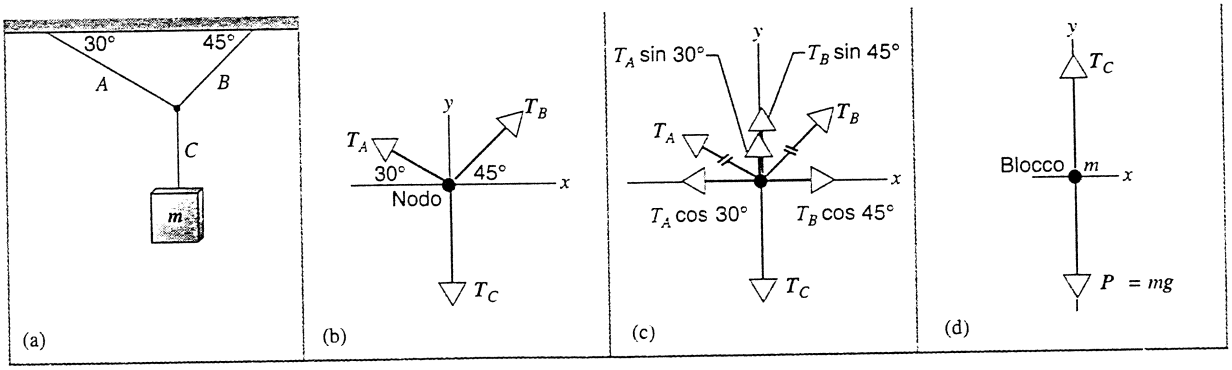


FIGURA 5.4 Problema svolto 5.1. (a) Un blocco è appeso a tre funi A, B e C. (b) Diagramma delle forze agenti sul nodo che unisce i tre elementi di fune. (c) Diagramma delle forze che agiscono sul nodo, con T_A e T_B scomposti nei loro vettori componenti secondo gli assi x e y. I doppi trattini che tagliano un vettore indicano appunto che è stato scomposto nelle sue componenti vettoriali. (d) Diagramma delle forze che agiscono sul blocco.

 ISBN 88-408-1254-7

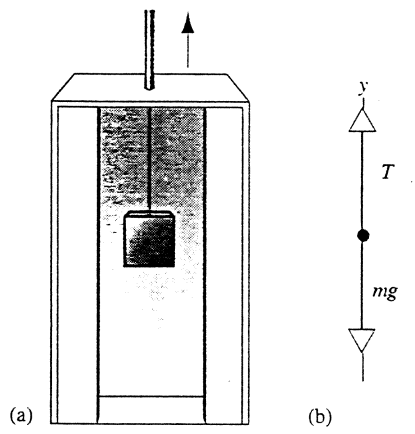


FIGURA 5.5 Problema svolto 5.2. (a) Un pacco è appeso a una bilancia all'interno della cabina di un ascensore. (b) Diagramma delle forze agenti sul pacco.

Nel caso in esame la cabina sale aumentando la velocità di salita. Vi aspettate che la tensione nella corda sia maggiore che ad ascensore fermo o in moto a velocità costante? Supponiamo che stia scendendo e freni in modo tale che l'accelerazione sia diretta verso l'alto, sempre con modulo di $+3{,}2\ \text{m/s}^2$. La tensione nella bilancia può essere la stessa? Vi sembra ragionevole? E quale sarebbe la tensione se la cabina fosse in caduta libera?

Confrontate questo problema con il Problema svolto 3.7 e spiegate somiglianze e differenze.

La forza normale

La Figura 5.6a mostra un libro appoggiato su un tavolo. Sul libro agisce la forza di gravità rivolta verso il basso, ma il libro ha un'accelerazione nulla, e tale deve essere anche la forza risultante applicata al libro. Su di esso deve perciò essere applicata anche una forza verticale orientata verso l'alto: è la forza *normale* esercitata sul libro dal tavolo, ove *normale* significa *perpendicolare*; la forza normalmente esercitata su un corpo da una superficie è *sempre* perpendicolare (ossia *normale*) alla superficie stessa.

Nonostante la forza normale disegnata nel diagramma delle forze di Figura 5.6b sia uguale e opposta al peso, *non* è una reazione al peso. Il peso rappresenta la forza esercitata dalla Terra sul libro, che provoca una reazione rivolta verso il basso esercitata dal libro sulla Terra. La forza di reazione alla forza normale qui considerata è la forza rivolta verso il basso esercitata dal libro sul tavolo: apparirebbe nel diagramma delle forze relativo al tavolo. Ricordando che le coppie azione-reazione della terza legge di Newton non possono *mai* agire sullo stesso corpo, le forze N e P applicate al libro nel diagramma non possono essere una coppia azione-reazione.

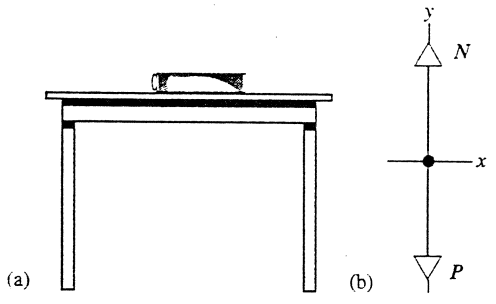


FIGURA 5.6 (a) Un libro è appoggiato su un tavolo. (b) Diagramma delle forze agenti sul libro.

Se appoggiamo una mano sul libro e spingiamo verso il basso con una forza W, il libro rimarrà fermo. Per avere un'accelerazione nulla, la forza netta sul libro deve essere nulla: la forza $W + P$ diretta verso il basso sarà così uguale alla forza totale verso l'alto N. Questa perciò aumenta al crescere di W, fino al punto in cui supera la capacità del tavolo di fornire la necessaria forza normale orientata verso l'alto, situazione che corrisponde allo sfondamento del tavolo.

La tensione e la forza normale sono esempi di *forze di contatto*, esercitate da un corpo su un altro per effetto del contatto fra essi. Tali forze hanno origine in entrambi i corpi a livello atomico: ogni atomo esercita una forza su quello più vicino, che può anche appartenere a un altro corpo. Una forza di contatto può mantenersi soltanto se non supera le forze interatomiche esistenti all'interno dei corpi; in caso contrario si arriva al collasso dei legami fra gli atomi, e la fune o il tavolo vanno in pezzi.

PROBLEMA SVOLTO 5.3 Una slitta di massa $m = 7{,}5$ kg è trascinata senza attrito su una superficie orizzontale da una corda (Figura 5.7a) con una forza costante $P = 21{,}0$ N. Analizzate il movimento supponendo (a) che la corda sia orizzontale e (b) che formi un angolo $\theta = 15°$ con il piano orizzontale.

Soluzione (a) La Figura 5.7b mostra il diagramma delle forze per il caso della corda orizzontale. La superficie esercita una forza normale N sulla slitta. Le componenti della forza netta che agisce

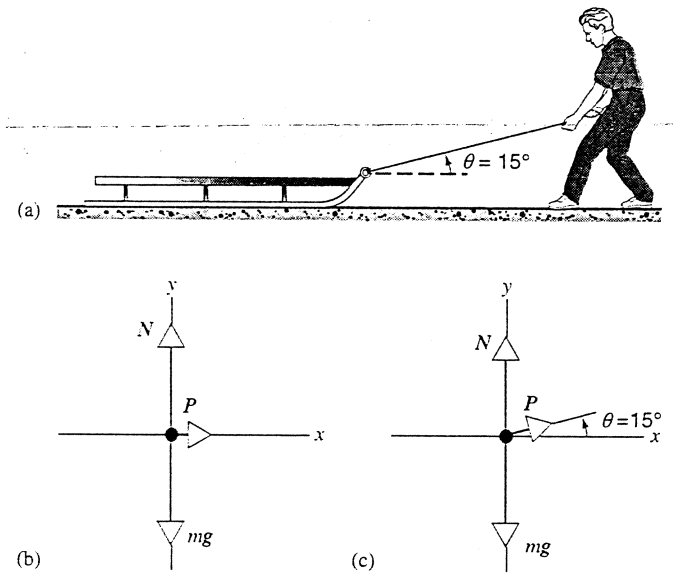


FIGURA 5.7 Problema svolto 5.3. (a) Una slitta è trascinata su una superficie priva di attrito. (b) Diagramma delle forze agenti sulla slitta per $\theta = 0°$. (c) Diagramma delle forze agenti sulla slitta per $\theta = 15°$.

sulla slitta sono $\sum F_x = P$ e $\sum F_y = N - mg$: per la seconda legge di Newton si ha

componente x: $\left(\sum F_x = ma_x\right)$: $\quad P = ma_x$

componente y: $\left(\sum F_y = ma_y\right)$: $\quad N - mg = ma_y$.

Se il moto verticale è nullo, la slitta rimane appoggiata alla superficie, $a_y = 0$ e perciò

$$N = mg = (7.5 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 74 \text{ N}.$$

L'accelerazione orizzontale vale

$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{21.0 \text{ N}}{7.5 \text{ kg}} = 2.80 \text{ m/s}^2.$$

Si noti che, se la superficie fosse veramente priva di attrito come ipotizzato, sarebbe difficile per l'operatore mantenere a lungo il traino della slitta: dopo 30 s ad accelerazione costante, la velocità della slitta raggiungerebbe la velocità di 84 m/s, ossia di oltre 300 km/h!

(b) La Figura 5.7c mostra il diagramma delle forze per il caso in cui la forza non sia orizzontale. Le componenti della forza risultante sono $\sum F_x = P\cos\theta$ e $\sum F_y = N + P\sin\theta - mg$. Per la seconda legge di Newton si ha

componente x: $\left(\sum F_x = ma_x\right)$: $\quad P\cos\theta = ma_x$

componente y: $\left(\sum F_y = ma_y\right)$: $\quad N + P\sin\theta - mg = ma_y$.

Supponiamo ora che la slitta rimanga sulla superficie, ossia $a_y = 0$; si avrà

$$N = mg - P\sin\theta = 74 \text{ N} - (21{,}0 \text{ N})(\sin 15^\circ) = 69 \text{ N},$$

$$a_x = \frac{P\cos\theta}{m} = \frac{(21{,}0 \text{ N})(\cos 15^\circ)}{7{,}5 \text{ kg}} = 2{,}70 \text{ m/s}^2.$$

Una forza normale è sempre perpendicolare alla superficie di contatto; rispetto alle coordinate adottate nella Figura 5.7b, N deve essere positiva. Se si aumenta P sin θ, N diminuisce fino a diventare nulla. A questo punto la slitta si stacca dalla superficie per effetto della componente verso l'alto di P, e noi dovremmo passare ad analizzare il suo moto verticale. Per i valori di P e θ che abbiamo adottato, la slitta rimane appoggiata alla superficie: $a_y = 0$.

Si noti che nel caso (b) a_x è minore che nel caso (a): perché?

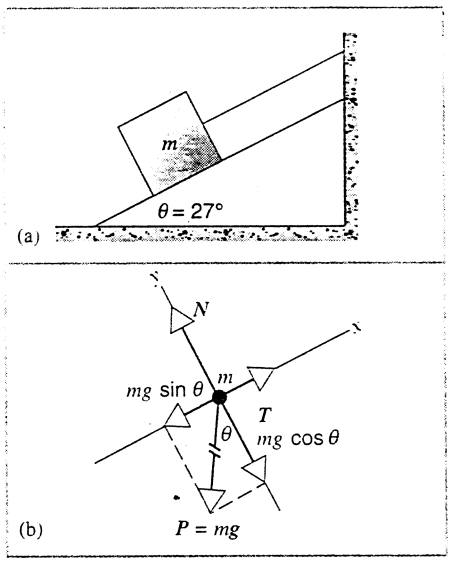


FIGURA 5.8 Problema svolto 5.4. (a) Una corpo di massa m trattenuto da una corda su un piano inclinato privo di attrito. (b) Diagramma delle forze relativo alla massa m. Si noti che il sistema di coordinate xy è scelto in modo che l'asse x sia parallelo al piano. Il peso mg è stato scomposto nei suoi vettori componenti; i doppi trattini che lo tagliano ci ricordano che è scomposto nelle sue componenti.

PROBLEMA SVOLTO 5.4 Un blocco di massa $m = 18{,}0$ kg è trattenuto da una corda su un piano inclinato di 27° rispetto al piano orizzontale, come in Figura 5.8a. (a) Calcolate la tensione nella corda e la forza normale esercitata dal piano sul blocco. (b) Analizzate il moto che si provoca nel caso che la corda venga tagliata.

Soluzione (a) La Figura 5.8a mostra il diagramma delle forze per il blocco. Su di esso agiscono la forza normale N, il suo peso $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$ e una forza dovuta alla tensione $\boldsymbol{T}$ della corda. Adottiamo un sistema di assi cartesiani con l'asse x parallelo al piano inclinato e orientato verso l'alto e l'asse y normale a esso e uscente dal piano. In tal modo due dei vettori forza ($\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{N}$) sono già scomposti nelle loro componenti, e anche il moto che si potrebbe avere lungo il piano si svolge lungo l'asse x. Il peso si scompone nella componente x, che vale $-mg$ sin θ, e nella componente $y = -mg\cos\theta$. La forza netta secondo l'asse x risulta $\sum F_x = T - mg\sin\theta$, e secondo l'asse y risulta $\sum F_y = N - mg\cos\theta$.

Nel caso statico, $a_x = 0$ e $a_y = 0$, e per la seconda legge di Newton si ha $\sum F_x = ma_x = 0$ e $\sum F_y = ma_y = 0$, da cui

$$T - mg\sin\theta = 0 \quad \text{e} \quad N - mg\cos\theta = 0.$$

Prendiamo in esame queste equazioni. Sono ragionevoli? Che succede al limite di $\theta = 0°$? La tensione apparentemente si annulla. Vi sembra che la tensione possa annullarsi se il blocco si trova su un piano orizzontale? Dove tende la forza normale per $\theta = 0°$? È ragionevole? E se $\theta = 90°$? Bisogna prendere l'abitudine di porsi questo tipo di domande prima di passare all'introduzione dei valori numerici per risolvere i problemi. Se c'è un errore, è il momento buono per riconoscerlo ed eliminarlo.

Risolvendo le equazioni otteniamo

$$T = mg\sin\theta = (18{,}0 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2)(\sin 27°) = 80 \text{ N},$$

$$N = mg\cos\theta = (18{,}0 \text{ kg})(9{,}80 \text{ m/s}^2)(\cos 27°) = 157 \text{ N}.$$

(b) Se si taglia la corda, la tensione diventa nulla e il blocco non è più in equilibrio. Le componenti della forza risultante diventano $\sum F_x = -mg\sin\theta$ e $\sum F_y = N - mg\cos\theta$. La seconda legge di Newton per le componenti x e y dà allora

$$-mg\sin\theta = ma_x \quad \text{e} \quad N - mg\cos\theta = ma_y.$$

Il taglio della corda non cambia il moto nella direzione y (il blocco non fa un balzo verso l'alto!): l'accelerazione rimane $a_y = 0$ e la forza normale è sempre uguale a mg cos θ, ossia 157 N. Nella direzione dell'asse x si ha

$$a_x = -g\sin\theta = -(9{,}80 \text{ m/s}^2)(\sin 27°) = -4{,}45 \text{ m/s}^2.$$

Il segno negativo indica che il blocco accelera nel verso negativo di x, ossia in discesa sul piano inclinato. Confrontate i limiti per $\theta = 0°$ e $\theta = 90°$. Corrispondono alle vostre aspettative?

 ISBN 88-408-1254-7

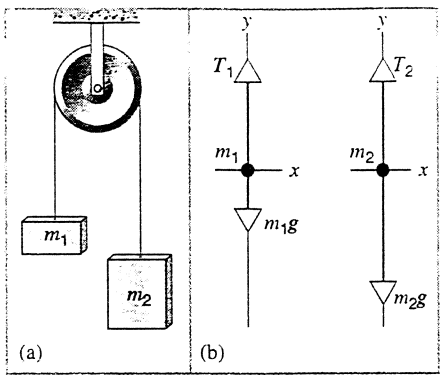


FIGURA 5.9 Problema svolto 5.5. (a) Schema della macchina di Atwood, che è costituita da due blocchi appesi a una corda passante sopra una puleggia. (b) Diagrammi delle forze che agiscono su m_1 ed m_2.

Ulteriori applicazioni

Esamineremo ora alcune ulteriori applicazioni delle leggi di Newton. Questi esempi riguardano due oggetti che vanno analizzati separatamente ma in modo non del tutto indipendente, perché il moto di un oggetto è determinato anche dal moto dell'altro, come nel caso in cui siano collegati da una corda di lunghezza fissa. Studiando questi esempi noterete come per ogni oggetto si possa scegliere un diverso sistema di coordinate.

PROBLEMA SVOLTO 5.5 Due blocchi di masse diverse m_1 ed m_2 sono collegati da una corda che passa sopra una puleggia ideale (di massa trascurabile, che ruota senza attrito sul proprio asse), come appare nella Figura 5.9. (Questa sistemazione è chiamata anche *macchina di Atwood.**) Posto $m_2 > m_1$, trovare la tensione nella corda e l'accelerazione dei due blocchi.

Soluzione Adottiamo un sistema di coordinate con l'asse y verticale orientato verso l'alto, e consideriamo soltanto le componenti y delle forze e delle accelerazioni, rappresentate nel diagramma delle forze di Figura 5.9b. La forza netta agente su m_1 vale $\sum F_y = T_1 - m_1 g$, e quella agente su m_2, $\sum F_y = T_2 - m_2 g$. Applicando per la componente y di ogni blocco la seconda legge di Newton, si ha

blocco 1: $$T_1 - m_1 g = m_1 a_{1y}$$

blocco 2: $$T_2 - m_2 g = m_2 a_{2y},$$

ove a_{1y} e a_{2y} sono rispettivamente le accelerazioni dei due blocchi. Se la corda è priva di massa e indeformabile, e la puleggia è priva di massa e senza attrito, la tensione ha la stessa intensità lungo tutto il tratto di corda e le accelerazioni dei due blocchi hanno anch'esse uguale intensità. Si noti che la puleggia ideale non altera i valori della tensione e dell'accelerazione da un estremo all'altro della corda: la sua unica funzione è invertire il senso di azione passando da una parte all'altra. Ponendo $T_1 = T_2 = T$, valore comune della tensione nella corda, e indicando con a il valore comune dell'accelerazione, risulta $a_{1y} = a$, valore positivo perché il blocco 1, più leggero, sale verso l'alto, e $a_{2y} = -a$, negativo per il blocco 2, che invece scende. Fatte queste sostituzioni, risolvendo il sistema di due equazioni, si ottiene

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \quad \text{e} \quad T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g . \tag{5.4}$$

Verificate che cosa accade nei casi limite in cui $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $g = 0$ e $m_1 = m_2$. E osservate che $m_1 g < T < m_2 g$: riflettete sulla ragione di questa disuguaglianza. Se il sistema accelera, la tensione nella corda *non* è uguale al peso di alcuno dei due blocchi.

* George Atwood (1745-1807), matematico inglese, ideò questo dispositivo nel 1784 per dimostrare le leggi del moto accelerato e misurare g. Adottando masse m_1 ed m_2 poco differenti fra loro, riuscì a rallentare l'effetto della caduta libera e a misurare il tempo di caduta con un orologio a pendolo, che costituiva allora il modo più preciso di misurare il tempo.

PROBLEMA SVOLTO 5.6 Nella Figura 5.10a vediamo un blocco di massa m_1 appoggiato su una superficie orizzontale priva di attrito. Il blocco è tirato orizzontalmente da un blocco di massa m_2 appeso a una corda indeformabile di massa trascurabile passante su una puleggia ideale. Trovare la tensione nella corda e l'accelerazione di ciascuno dei due blocchi.

Soluzione Le Figure 5.10b e 5.10c presentano i diagrammi delle forze per i due blocchi.

Sul blocco 1 agiscono una forza normale esercitata dalla superficie di appoggio, la forza di gravità e la forza indotta dalla tensione nella corda. Le componenti della forza netta sul blocco 1 sono $\sum F_x = T_1$ e $\sum F_y = N - m_1 g$, e per la seconda legge di Newton si ha

$$T_1 = m_1 a_{1x} \qquad \text{e} \qquad N - m_1 g = m_1 a_{1y} .$$

Il blocco 1 non dovrebbe spostarsi verticalmente, e quindi $a_{1y} = 0$.

Per il blocco 2 non esistono forze dirette orizzontalmente. La componente lungo l'asse y della forza risultante su questo blocco

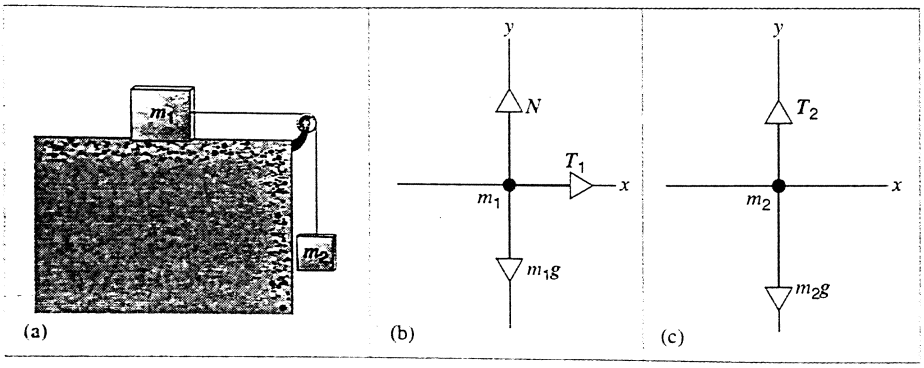


FIGURA 5.10 Problema svolto 5.6. (a) Il blocco m_1 è trascinato su una superficie orizzontale liscia da una corda che passa sopra una puleggia e tiene sospeso il blocco m_2. (b) Diagramma delle forze agenti sul blocco m_1. (c) Diagramma delle forze agenti sul blocco m_2.

vale $\sum F_y = T_2 - m_2 g$, e per la seconda legge di Newton si ha

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_{2y}.$$

Essendo ideali sia la corda sia la puleggia, le intensità delle forze di tensione T_1 e T_2 sono uguali fra loro: chiamiamo T il loro valore comune. Essendo la corda indeformabile, anche i valori delle accelerazioni dei due blocchi sono uguali in modulo: poniamo $a_{1x} = a$ e $a_{2y} = -a$. Otteniamo così due equazioni:

$$T = m_1 a \qquad \text{e} \qquad T - m_2 g = m_2(-a),$$

che, poste a sistema e risolte, diventano

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \qquad \text{e} \qquad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \tag{5.5}$$

È istruttivo esaminare i casi limite. Che cosa succede per $m_1 = 0$? È prevedibile che la corda si allenti ($T = 0$), e il blocco m_2 vada in caduta libera ($a = g$), come correttamente previsto dalle equazioni. Per $m_2 = 0$ la forza orizzontale sul blocco 1 si annulla e così pure la sua accelerazione a_{1x}, altro risultato corretto fornito dalle equazioni.

Si noti che, come è prevedibile, $a < g$, e T è minore di mg per il blocco che aumenta la sua velocità di caduta (vedi Problema svolto 5.2).

E per $g = 0$, le Equazioni 5.5 si comporterebbero correttamente?

PROBLEMA SVOLTO 5.7 Nel sistema di Figura 5.11a un blocco di massa $m_1 = 9{,}5$ kg può scivolare senza attrito su un piano inclinato di un angolo $\theta = 34°$ sul piano orizzontale, trattenuto da un secondo blocco ($m_2 = 2{,}6$ kg) tramite una corda ideale che passa su una puleggia ideale. Il sistema è lasciato libero dallo stato di riposo. Trovate l'accelerazione dei blocchi e la tensione nella corda.

Soluzione I diagrammi delle forze per i due blocchi sono rappresentati nelle Figure 5.11b e 5.11c. Scegliamo due diversi sistemi di coordinate, in modo tale che per ciascun blocco uno degli assi sia diretto secondo l'accelerazione prevedibile per il blocco stesso. Come negli esempi precedenti, sappiamo che la tensione ha un unico valore assoluto lungo tutta la corda, e che le accelerazioni dei due blocchi, verticale verso il basso per il blocco 2 e parallela al piano inclinato per il blocco 1, hanno uguale valore assoluto. Assumiamo arbitrariamente che il moto di m_1 avvenga secondo il verso positivo di x (se ciò non è vero, il valore di a risulterà negativo). Le componenti della forza netta agente su m_1 sono $\sum F_x = T - m_1 g \sin\theta$ e $\sum F_y = N - m_1 g \cos\theta$ e, per la seconda legge di Newton, con $a_{1x} = a$ e $a_{1y} = 0$, si ha

$$T - m_1 g \sin\theta = m_1 a \qquad \text{e} \qquad N - m_1 g \cos\theta = 0.$$

Per m_2 la componente y della forza netta vale $\sum F_y = T - m_2 g$, e per la seconda legge di Newton, ponendo $a_{2y} = -a$, si ha

$$T - m_2 g = m_2(-a).$$

Risolvendo insieme le due equazioni troviamo

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin\theta}{m_1 + m_2} g \tag{5.6a}$$

e

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \sin\theta). \tag{5.6b}$$

Si noterà che, ponendo $\theta = 0$, queste espressioni diventano la copia delle equazioni 5.5 del precedente problema svolto e, ponendo $\theta = 90°$, delle (5.4) del problema svolto 5.5.

Introducendo i valori numerici troviamo

$$a = \frac{2.6\text{ kg} - (9{,}5\text{ kg})(\sin 34°)}{9.5\text{ kg} + 2{,}6\text{ kg}}(9{,}80\text{ m/s}^2) = -2{,}2\text{ m/s}^2.$$

L'accelerazione risulta negativa, ciò che significa che la nostra ipotesi circa il verso del moto era errata. Il blocco 1 scivola giù per il piano inclinato, e il blocco 2 sale. Ma poiché le equazioni della dinamica non comprendono forze che dipendono dal verso del moto, l'errore di questa ipotesi iniziale non influisce sulle espressioni ottenute e possiamo ritenere valido il risultato. Questo non varrà invece quando considereremo forze di attrito, che agiscono in verso opposto al moto.

Per la tensione nella corda troviamo

$$T = \frac{(9{,}5\text{ kg})(2{,}6\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)}{9{,}5\text{ kg} + 2{,}6\text{ kg}}(1 + \sin 34°) = 31\text{ N},$$

valore maggiore del peso del blocco 2 ($m_2 g = 26$ N), coerente con l'orientamento verso l'alto dell'accelerazione a_{2y}.

5.3 FORZE DI ATTRITO*

Un blocco di massa m che si muove con velocità iniziale v_0 su una lunga superficie orizzontale a un certo istante si ferma. Ciò significa che nel suo moto ha subìto un'accelerazione media $\bar{a}$ diretta in senso contrario al suo movimento. Se, in un sistema di riferimento inerziale, notiamo che un corpo è soggetto a un'accelerazione, associamo sempre a questo tipo di moto una forza definita dalla seconda legge di Newton. In questo caso diciamo che la superficie esercita sul blocco che scivola una forza di *attrito*, il cui valore medio vale $m\bar{a}$. Di

* Vedi J. Krim, *Friction at the Atomic Scale*, «Scientific American», ott. 1996, p.74.

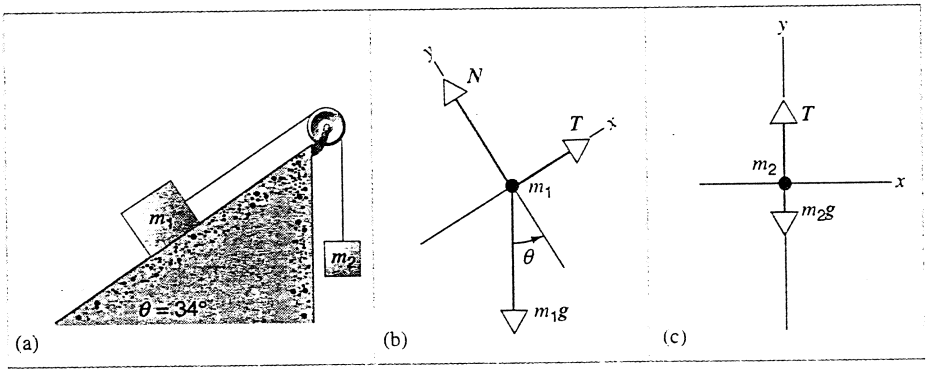


FIGURA 5.11 Problema svolto 5.7. (a) Il blocco m_1 scivola senza attrito su un piano inclinato. Il blocco m_2 è appeso a una corda attaccata a m_1. (b) Diagramma delle forze agenti sul blocco m_1. (c) Diagramma delle forze agenti sul blocco m_2.

 ISBN 88-408-1254-7

solito chiamiamo attrito un'interazione per contatto fra corpi solidi. Gli effetti simili all'attrito che si manifestano fra liquidi e gas sono chiamati con altri nomi (Paragrafo 4.4).

In realtà ogni volta che la superficie di un corpo scivola su quella di un altro corpo, ciascuno dei due esercita una forza di attrito sull'altro. Questa forza agisce su ciascuno dei due corpi in senso opposto a quello del suo moto rispetto all'altro. Le forze di attrito si oppongono sempre a qualunque moto relativo, e non accade mai che lo favoriscano. Anche in assenza di moto relativo possono esistere forze di attrito fra le superfici dei corpi.

Nonostante finora ne abbiamo ignorato gli effetti, l'attrito è molto importante per la nostra vita di tutti i giorni. Se lo si lascia libero di agire, arriva ad arrestare il moto rotatorio di qualsiasi albero. In un'automobile, circa il 20 % della potenza del motore è speso per vincere le forze di attrito. L'attrito provoca il logorio e l'inceppamento delle parti mobili, e i progettisti di macchine si sforzano con molto impegno di ridurne gli effetti. D'altra parte, se non esistesse l'attrito non potremmo camminare; non potremmo maneggiare una matita e, se anche ci riuscissimo, non potrebbe lasciare segni sulla carta, né sarebbe possibile il trasporto su ruote.

Vogliamo ora esprimere le forze d'attrito in funzione delle proprietà di un corpo e dell'ambiente in cui si trova; ci proponiamo di determinare le leggi che governano le forze di attrito. Prenderemo in considerazione lo slittamento (non il rotolamento) di una superficie secca (non lubrificata) contro un'altra simile. Come vedremo, l'attrito a livello microscopico, è un fenomeno assai complicato. Le leggi della forza d'attrito per superfici secche che strisciano l'una contro l'altra sono di natura empirica e consentono soltanto previsioni approssimate. Non presentano l'elegante semplicità e la precisione della legge sulla forza di gravità (Capitolo 14), o dell'elettrostatica (Capitolo 25). È però notevole, vista la grande varietà di superfici da considerare, che molti aspetti del comportamento dell'attrito possano essere interpretati qualitativamente con l'ausilio di pochi semplici meccanismi.

Consideriamo un blocco in stato di quiete appoggiato su una tavola orizzontale, come nella Figura 5.12a, e proviamo ad attaccargli una molla per misurare la forza orizzontale F necessaria per metterlo in moto. Troveremo che il blocco non si muove anche se gli applichiamo una forza non trascurabile, come in Figura 5.12b. Affermiamo allora che la forza da noi applicata è contrastata da una opposta forza di attrito f, di uguale intensità e direzione, ma di verso contrario. Se aumentiamo la forza applicata (Figura 5.12c, d), arriveremo a esercitare una forza di valore ben definito che provocherà lo «scatto di partenza» del blocco, il quale comincerà quindi ad accelerare (Figura 5.12e). Riducendo la forza una volta che il moto è iniziato, troveremo che è possibile mantenere il blocco in moto uniforme con accelerazione nulla (Figura 5.12f). La Figura 5.12g mostra i risultati di un esperimento di misurazione della forza di attrito. A partire da $t = 2$ s si applica al corpo in quiete una forza crescente, che induce una forza di attrito

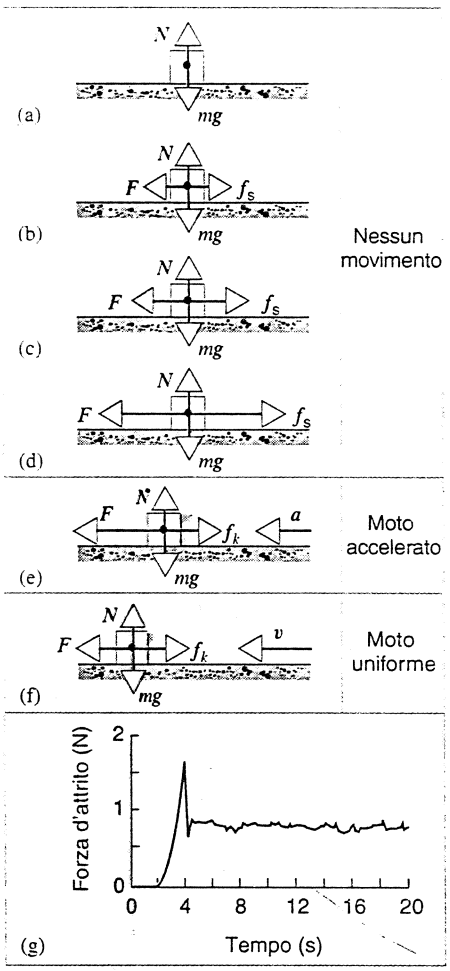


FIGURA 5.12 (a-d) Una forza esterna F applicata a un blocco in quiete è equilibrata da una forza di attrito f uguale e contraria. Quando F aumenta, aumenta anche f, fino a che f raggiunge un certo valore massimo. (e) A questo punto il blocco compie uno «scatto di partenza», accelerando verso sinistra. (f) Affinché il blocco possa muoversi a velocità costante, la forza applicata F deve essere ridotta rispetto al valore massimo che aveva raggiunto subito prima dell'avvio del blocco. (g) Risultati sperimentali: la forza applicata F comincia ad aumentare a $t = 2$ s, e il moto comincia improvvisamente a $t = 4$ s.

uguale in modulo alla forza applicata, ciò che impedisce al corpo di muoversi. A $t = 4$ s il corpo improvvisamente si mette in movimento e la forza di attrito diventa costante, indipendentemente dalla forza applicata.

Le forze di attrito che agiscono fra le superfici in quiete sono definite forze di *attrito statico*. La massima forza di attrito statico, corrispondente al picco per $t = 4$ s nella Figura 5.12g, sarà di modulo uguale alla minima forza da applicare per avviare il moto. Una volta avviato, di solito le forze di attrito agenti fra le superfici tendono a diminuire, consentendo il mantenimento di un moto uniforme da parte di una forza minore, che coincide con la forza pressoché costante misurata per $t > 4$ s nella Figura 5.12g. Le forze di attrito che agiscono fra le superfici durante il loro moto relativo sono definite forze di *attrito dinamico*.

TABELLA 5.1 Coefficienti di attrito[a]

Superfici	μ_s	μ_k
Legno contro legno	0,25–0,5	0,2
Vetro contro vetro	0,9–1,0	0,4
Acciaio contro acciaio, superfici lisce	0,6	0,6
Acciaio contro acciaio, lubrificato	0,09	0,05
Gomma contro calcestruzzo secco	1,0	0,8
Sci in legno sciolinato su neve asciutta	0,04	0,04
Teflon contro teflon	0,04	0,04

[a] Valori approssimati, da considerare soltanto come stime. Gli effettivi coefficienti di attrito per qualsiasi coppia di superfici dipendono da condizioni quali lo stato di pulizia, la temperatura e l'umidità.

La massima forza di attrito statico per una coppia qualsiasi di superfici secche non lubrificate rispetta queste due regole empiriche: (1) è praticamente indipendente, entro larghi margini, dall'area della superficie di contatto, e (2) è proporzionale alla forza normale.*

Il rapporto tra la *massima* intensità della forza di attrito statico e l'intensità della forza normale è definito *coefficiente di attrito statico* per la coppia di superfici considerate. Se f_s rappresenta l'intensità della forza di attrito statico, possiamo scrivere

$$f_s \leq \mu_s N, \tag{5.7}$$

ove μ_s è il coefficiente di attrito statico ed N l'intensità della forza normale. Il segno di uguaglianza vale soltanto per il massimo valore di f_s.

La forza di attrito dinamico f_k fra superfici secche non lubrificate segue le stesse due leggi valide per l'attrito statico: (1) è praticamente indipendente, entro larghi margini, dall'area della superficie di contatto, e (2) è proporzionale alla forza normale. Essa è inoltre abbastanza indipendente dalla velocità relativa alla quale le due superfici strisciano l'una contro l'altra.

Il rapporto tra l'intensità della forza di attrito dinamico e l'intensità della forza normale è definito *coefficiente di attrito dinamico* per la coppia di superfici considerate. Se f_k rappresenta l'intensità della forza di attrito dinamico, possiamo scrivere

$$f_k = \mu_k N, \tag{5.8}$$

ove μ_k è il coefficiente di attrito dinamico.

Sia μ_s sia μ_k sono costanti adimensionali, essendo entrambi il rapporto (delle intensità) di due forze. Di solito, per una data coppia di superfici si ha $\mu_s > \mu_k$. I valori di μ_s e μ_k dipendono dalla natura di entrambe le superfici a contatto. Nella maggior parte dei casi possiamo considerarli costanti (per quella particolare coppia di superfici) entro gli intervalli di valori delle forze e delle velocità che si presentano normalmente. Entrambi possono essere maggiori dell'unità, anche se di solito non la superano. La Tabella 5.1 contiene alcuni valori caratteristici di μ_s e μ_k.

È da notare che le Equazioni 5.7 e 5.8 sono relazioni fra le *so* intensità della forza normale e della forza di attrito. Esse sono in effetti sempre perpendicolari fra loro.

I fondamenti microscopici dell'attrito

Su scala atomica anche la superficie più finemente lucidata è ben lungi dall'essere piana. La Figura 5.13, per esempio, mostra il reale profilo, molto ingrandito, di una superficie d'acciaio che si può considerare molto lucida. Si può ritenere che quando due corpi vengono a contatto fra loro, l'effettiva area di contatto su scala microscopica sia molto minore dell'area apparente delle superfici a contatto: in casi particolari può arrivare a un rapporto di $1/10^4$.

L'area effettiva (microscopica) di contatto è proporzionale alla forza normale, perché la zona di contatto si deforma plasticamente sotto gli enormi sforzi che agiscono sui singoli punti di contatto. Molte coppie di punti di contatto costituiscono addirittura «saldature a freddo» fra le due superfici. Questo fenomeno della *adesione fra superfici* avviene perché nei punti di contatto le molecole delle due superfici sono così ravvicinate da interagire con grandi forze intermolecolari.

Quando un corpo, poniamo di metallo, è trascinato contro un altro, la resistenza di attrito al moto dipende dalla rottura di queste migliaia di sottilissime saldature, che si riformano continuamente al formarsi casuale di altre coppie di punti di contatto (Figura 5.14). Esperimenti con traccianti radioattivi rivelano che in questo processo di rottura piccolissimi frammenti metallici possono essere strappati da una superficie per incorporarsi nell'altra. Se la velocità relativa è abbastanza grande, può verificarsi in certi punti una vera fusione, anche se la superficie nel suo insieme risulta soltanto intiepidita. Gli eventi di «attacca e stacca» sono responsabili del rumore prodotto dallo strofinarsi fra loro di due corpi, come lo stridere del gesso sulla lavagna.

Il coefficiente d'attrito dipende da molti fattori, quali la natura dei materiali, la finitura delle superfici, gli strati superficiali, la temperatura e il grado di contaminazione. Per esempio, se due superfici metalliche accuratamente lucidate sono conservate in un ambiente ad alto vuoto, in modo tale da impedire la formazione di strati di ossidi superficiali, il



FIGURA 5.13 Sezione ingrandita di una superficie d'acciaio finemente levigata. La scala verticale delle irregolarità è di alcune migliaia di diametri atomici. La sezione è stata tagliata obliquamente con un angolo tale che le dimensioni verticali siano 10 volte maggiori di quelle orizzontali.

* Le due leggi dell'attrito sono state scoperte sperimentalmente da Leonardo da Vinci (1452-1519). L'enunciazione da parte di Leonardo di queste due leggi è notevole, perché precede di due secoli la definizione da parte di Newton del concetto di forza. Lo sviluppo dell'espressione matematica delle leggi dell'attrito e il concetto di coefficiente d'attrito sono dovuti a Charles Augustin Coulomb (1736-1806), più noto per i suoi studi di elettrostatica (Capitolo 25).

 ISBN 88-408-1254-7

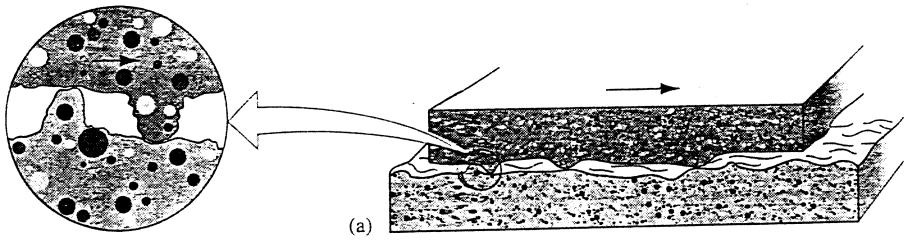


FIGURA 5.14 Il meccanismo dell'attrito radente. (a) In questa sezione ingrandita la superficie superiore scivola verso destra rispetto all'inferiore. (b) Un particolare che mostra due punti in cui si è verificata la saldatura a freddo. Per rompere queste saldature conservando il movimento occorre disporre di una forza. Aumentando la forza normale, le superfici sono premute l'una contro l'altra in modo da formare un maggior numero di punti di saldatura e da aumentare così la forza di attrito.

coefficiente di attrito raggiunge valori altissimi perché le superfici sono intimamente «saldate» fra loro. Consentendo l'ingresso di una modesta quantità d'aria, così da permettere la formazione di strati di ossido sulle superfici affacciate, si otterrà che il coefficiente d'attrito si stabilisca sul suo valore «normale».

La forza d'attrito che ostacola lo spostamento relativo per *rotazione* di due corpi a contatto è molto inferiore a quella dovuta allo strisciamento: ciò costituisce il vantaggio della ruota sulla slitta. Questa diminuzione dell'attrito è dovuta soprattutto al fatto che nella rotazione i minuscoli frammenti delle saldature sono «risucchiati», anziché «strappati» lateralmente.

La resistenza per attrito radente fra superfici secche può essere molto ridotta dalla lubrificazione. Questa tecnica era già in uso nell'antico Egitto per spostare i blocchi nella costruzione delle piramidi. Un metodo ancora più efficace consiste nell'introdurre fra le due superfici a contatto uno strato di gas: due esempi sono le rotaie ad aria in laboratorio e i cuscinetti sostenuti da gas. Un'ulteriore riduzione si può ottenere sospendendo un corpo per forza magnetica. Gli esperimenti in corso su treni a levitazione magnetica indicano la possibilità di realizzare alte velocità con minimi attriti.

PROBLEMA SVOLTO 5.8 Un blocco è in stato di quiete su una superficie inclinata di un angolo θ sul piano orizzontale, come nella Figura 5.15a. Aumentando l'inclinazione si trova che il blocco inizia a scivolare quando θ raggiunge l'ampiezza $\theta_s = 15°$. Qual è il coefficiente di attrito statico fra il blocco e il piano inclinato?

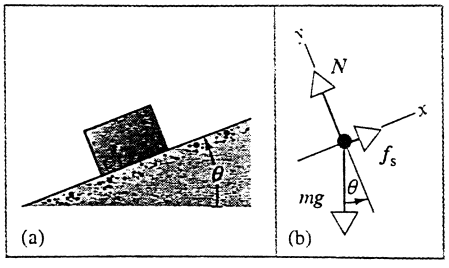


FIGURA 5.15 Problema svolto 5.8. (a) Un blocco a riposo su un piano inclinato. (b) Diagramma delle forze agenti sul blocco.

Soluzione La Figura 5.15b mostra le forze che agiscono sul blocco, considerato una particella. Il peso del blocco è mg, la forza normale e la forza d'attrito esercitate sul blocco dal piano inclinato sono rispettivamente N ed f_s. Si noti che la risultante di queste ultime forze, $N + f_s$, non è perpendicolare alla superficie di contatto, come nel caso delle superfici senza attrito ($f_s = 0$). Il blocco è in stato di quiete, e la seconda legge di Newton impone $\sum \boldsymbol{F} = 0$. Scomponendo la forza peso secondo gli assi x e y (Figura 5.8), le componenti della forza risultante sono $\sum F_x = f_s - mg\sin\theta$ e $\sum F_y = N - mg\cos\theta$. Essendo il blocco a riposo, a_x e a_y sono nulle e quindi, per la seconda legge di Newton, si ha

$$f_s - mg\sin\theta = 0 \qquad \text{e} \qquad N - mg\cos\theta = 0\,.$$

Quando l'angolo d'inclinazione vale θ_s ed inizia lo slittamento, l'attrito statico assume il suo valore massimo $f_s = \mu_s N$. Calcolando f_s ed N dalle precedenti equazioni, troviamo

$$\mu_s = \frac{f_s}{N} = \frac{mg\sin\theta_s}{mg\cos\theta_s} = \tan\theta_s = \tan 15^\circ = 0{,}27.$$

Osserviamo che la misura dell'angolo di inclinazione minimo per avviare la slittamento costituisce un semplice metodo sperimentale per la determinazione del coefficiente di attrito statico relativo a una data coppia di superfici a contatto. Da notare che il risultato è indipendente dal peso del corpo.

Si può usare lo stesso metodo per dimostrare che l'angolo di inclinazione del piano θ_k che consente di tenere *costante la velocità* di discesa del blocco, una volta che è stato avviato da un leggero colpetto, è dato da

$$\mu_k = \tan\theta_k\,,$$

ove $\theta_k < \theta_s$. Con l'aiuto di un righello per la misura della pendenza del piano inclinato potete ora determinare μ_s e μ_k per una moneta che scivola su questo libro.

PROBLEMA SVOLTO 5.9 Consideriamo un'automobile che viaggia su una strada diritta in pianura alla velocità v_0. Il guidatore frena fino ad arrestare la vettura senza slittare. Se il coefficiente di attrito dinamico fra i pneumatici e l'asfalto vale μ_s, qual è lo spazio minimo di frenata?

Soluzione Le forze che agiscono sul veicolo appaiono nella Figura 5.16. Si suppone che l'auto sia diretta concordemente al verso positivo di x. Se supponiamo che f_s sia una forza costante, siamo di fronte a un moto uniformemente accelerato.

Ci proponiamo di ricorrere alle leggi di Newton per trovare l'accelerazione del veicolo, e quindi alle equazioni della cinema-

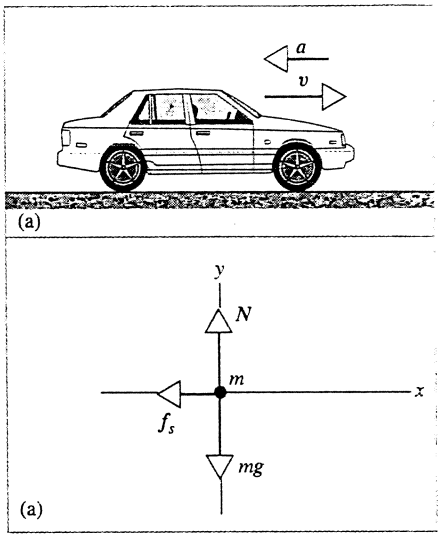


FIGURA 5.16 Problema svolto 5.9. (a) Un'automobile in frenata. (b) Diagramma delle forze per l'auto che rallenta. Per semplicità si è supposto che tutte le forze agiscano su un unico punto. In realtà N ed f_s sono la somma di singole forze esercitate dalla strada su ciascuna delle quattro ruote.

tica del Capitolo 2 per conoscere lo spazio di frenata. Dal diagramma delle forze di Figura 5.16b ricaviamo le equazioni delle componenti della forza netta, $\sum F_x = -f_s$ e $\sum F_y = N - mg$, da cui, per la seconda legge di Newton

$$-f_s = ma_x \qquad \text{e} \qquad N - mg = ma_y = 0,$$

ove abbiamo posto $a_y = 0$ giacché il moto si svolge interamente sul piano orizzontale. Da queste equazioni e dall'espressione della forza di attrito statico ($f_s = \mu_s N$) si ottiene

$$a_x = -\frac{f_s}{m} = -\frac{\mu_s N}{m} = -\frac{\mu_s (mg)}{m} = -\mu_s g .$$

Se l'auto ha velocità iniziale v_{0x} e velocità finale $v_x = 0$, tramite l'Equazione 2.26 ($v_x = v_{0x} + a_x t$) troviamo il tempo di arresto $t = -v_{0x}/a_x = v_0/(\mu_s g)$. La distanza d'arresto $d = x - x_0$ si ricava dall'Equazione 2.28 ($x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$) usando per t il suo valore appena trovato

$$d = v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = v_0\left(\frac{v_0}{\mu_s g}\right) + \tfrac{1}{2}(-\mu_s g)\left(\frac{v_0}{\mu_s g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} .$$

Quanto maggiore è la velocità iniziale, tanto più lungo sarà lo spazio di frenata, che varia con il quadrato della velocità iniziale. E quanto maggiore è il coefficiente di attrito statico, tanto minore è la distanza di arresto.

In questo problema interviene il coefficiente di attrito statico, in luogo di quello di dinamico, perché abbiamo supposto che non vi sia slittamento fra i pneumatici e la strada. Abbiamo inoltre ammesso che la forza di attrito statico assuma il suo massimo valore ($f_s = \mu_s N$), perché il problema richiede la minima distanza di arresto. Per una minore forza di attrito statico questa distanza sarebbe ovviamente maggiore. La tecnica richiesta per ottenere la distanza minima di frenata consiste nel tenere le ruote proprio sul punto di slittamento. I dispositivi antibloccaggio ABS, ormai di normale dotazione su molti tipi di auto, realizzano automaticamente questa condizione. In caso contrario, quando si preme a fondo sul pedale del freno, specie se la superficie è liscia, si arriva facilmente a slittare. In questo caso μ_k sostituisce μ_s e la distanza di arresto aumenta perché μ_k è minore di μ_s.

Per fare un esempio, per $v_0 = 27$ m/s e $\mu_s = 0{,}60$ (un valore tipico), si ha

$$d = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27\ \text{m/s})^2}{2(0{,}60)(9{,}8\ \text{m/s}^2)} = 62\ \text{m} .$$

Si noti che il risultato non dipende dalla massa del veicolo. Per auto a trazione posteriore con il motore davanti è buona pratica «appesantire» il portabagagli per aumentare la sicurezza viaggiando sul ghiaccio. Come si giustifica questo accorgimento visto che la distanza di frenata è indipendente dalla massa del veicolo? (*Suggerimento*: vedi l'Esercizio 10.)

PROBLEMA SVOLTO 5.10 Riprendiamo il Problema svolto 5.7, ammettendo ora l'esistenza di una forza di attrito fra il blocco 1 e il piano, con valori dei coefficienti di attrito $\mu_s = 0{,}24$ e $\mu_k = 0{,}15$.

Soluzione Come nel Problema svolto 5.7, supponiamo che il blocco 1 scivoli giù per il piano, così che la forza di attrito sia parallela al piano e orientata verso l'alto. La Figura 5.17a rappresenta il diagramma delle forze per m_1. Scomponendo queste forze si ottiene $\sum F_x = T + f - m_1 g \sin\theta$ e $\sum F_y = N - m_1 g \cos\theta$, e per la seconda legge di Newton

$$T + f - m_1 g \sin\theta = m_1 a \qquad \text{e} \qquad N - m_1 g \cos\theta = 0 ,$$

ove abbiamo posto $a_{1x} = a$ e $a_{1y} = 0$, come nel Problema svolto 5.7. La forza netta sul blocco 2 vale $\sum F_y = T - m_2 g$ e, per $a_{2y} = -a$, la seconda legge di Newton dà

$$T - m_2 g = m_2(-a) .$$

Posto $f = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos\theta$ e risolvendo le altre due equazioni rispetto ad a e a T, otteniamo

$$a = \frac{m_2 - m_1(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)}{m_1 + m_2} g , \qquad (5.9a)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \sin\theta - \mu_k \cos\theta) . \qquad (5.9b)$$

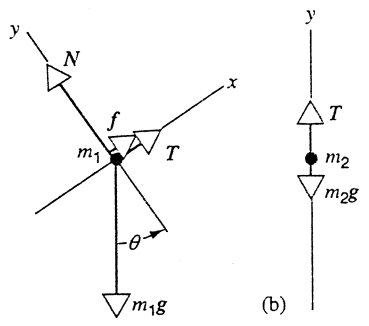


FIGURA 5.17 Problema svolto 5.10. Diagramma delle forze della Figura 5.11, se si tiene conto dell'attrito sul piano inclinato.

 ISBN 88-408-1254-7

Si noti che al limite di $\mu_k \to 0$ l'Equazione 5.9 si riduce alla (5.6) del Problema svolto 5.7.

Introducendo i valori numerici per a e per T:

$$a = \frac{2{,}6\text{ kg} - 9{,}5\text{ kg}(\sin 34° - 0{,}15\cos 34°)}{2.6\text{ kg} + 9{,}5\text{ kg}}(9{,}80\text{ m/s}^2) =$$
$$= -1{,}2\text{ m/s}^2,$$

$$T = \frac{(9{,}5\text{ kg})(2{,}6\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)}{9{,}5\text{ kg} + 2{,}6\text{ kg}}(1 + \sin 34° - 0.15\cos 34°) =$$
$$= 29\text{ N}.$$

Il valore negativo di a è coerente con la forma che abbiamo imposto alle equazioni; il blocco scende lungo il piano, come nel Problema svolto 5.7, ma con minore accelerazione rispetto al caso di assenza di attrito (2,2 m/s^2).

Anche la tensione nella corda è inferiore al caso di assenza di attrito (31 N). Per effetto dell'attrito il blocco 1 accelera più lentamente, e quindi tira meno intensamente sulla corda che regge il blocco 2.

Dobbiamo chiederci anche se il sistema arriverà a muoversi, ossia: la forza di trascinamento giù per il piano è sufficiente a vincere la forza dell'attrito statico? Quando il sistema è inizialmente in quiete la tensione nella corda è uguale al peso di m_2, cioè (2,6 kg)(9,8 m/s^2) = 26 N. Il massimo attrito statico, che si oppone alla tendenza del blocco 1 a scendere lungo il piano, vale $\mu_s N = \mu_s m_1 g\cos\theta = 19$ N. La componente del peso di m_1 orientata lungo il piano è $m_1 g\sin\theta = 52$ N. In conclusione, la componente del peso che tende a far scendere il blocco lungo il piano (52 N) è più che sufficiente a vincere la risultante della tensione della corda e dell'attrito statico (26 N + 19 N = 45 N): il sistema si muove. Dovreste essere ora in grado di dimostrare che, se il coefficiente di attrito statico è maggiore di 0,34, il blocco non si muove.

5.4 DINAMICA DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Come osservato nel Paragrafo 4.5, quando un corpo di massa m si muove su un cerchio di raggio r a velocità uniforme v, è soggetto a un'accelerazione radiale o centripeta di intensità v^2/r. In questo paragrafo esaminiamo il moto circolare risultante dall'azione di varie forze che agiscono sul corpo. La seconda legge di Newton assume in questo caso la forma vettoriale: $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Poiché $\boldsymbol{a}$ è sempre diretto come il raggio, anche la forza risultante deve essere radiale, e la sua intensità è data da

$$\left|\sum F\right| = ma = \frac{mv^2}{r}. \qquad (5.10)$$

Qualunque sia la natura o l'origine delle forze che agiscono su un corpo in moto circolare uniforme, la loro risultante deve essere (1) diretta radialmente e (2) di intensità mv^2/r. Anche se il modulo della velocità rimane costante, l'accelerazione *non* è nulla e deve quindi esistere una forza connessa con il cambiamento di *direzione* della velocità del corpo.

Gli esempi che seguono descrivono alcune applicazioni delle leggi di Newton al moto circolare uniforme.

Il pendolo conico

La Figura 5.18 mostra un piccolo corpo di massa m, appeso a un filo di lunghezza L, che ruota a velocità costante v su un'orbita circolare giacente in un piano orizzontale. Mentre il corpo ruota, il filo descrive la superficie di un cono immaginario. Questo dispositivo si chiama *pendolo conico*. Vogliamo trovare il tempo impiegato dal corpo per eseguire un giro completo.

Se il filo forma un angolo θ rispetto all'asse verticale, il raggio dell'orbita è $R = L\sin\theta$. Le forze agenti sul corpo di massa m sono il suo peso mg e la tensione $\boldsymbol{T}$ nel filo (Figura 5.18b). Possiamo in ogni istante scomporre $\boldsymbol{T}$ in una componente radiale e una verticale:

$$T_r = -T\sin\theta \qquad \text{e} \qquad T_z = T\cos\theta, \qquad (5.11)$$

ove la componente radiale risulta negativa se definiamo positivo il verso radiale orientato verso l'esterno del cerchio.

Adottando il sistema di assi indicato nella Figura 5.18b, le componenti della forza netta agente sul corpo sono $\sum F_r = T_r = -T\sin\theta$ e $\sum F_z = T\cos\theta - mg$. Poiché la componente verticale dell'accelerazione che agisce sul corpo è nulla, per la seconda legge di Newton possiamo scrivere, per la componente z,

$$T\cos\theta - mg = 0. \qquad (5.12)$$

La seconda legge di Newton espressa per la componente radiale è $\sum F_r = ma_r$, e la relativa accelerazione risulta $a_r = -v^2/R$, negativa perché rivolta verso il centro del cerchio. Per la seconda legge di Newton si ha

$$-T\sin\theta = ma_r = m\left(\frac{-v^2}{R}\right). \qquad (5.13)$$

Eliminando T fra queste due equazioni, troviamo la velocità del corpo

$$v = \sqrt{Rg\tan\theta}. \qquad (5.14)$$

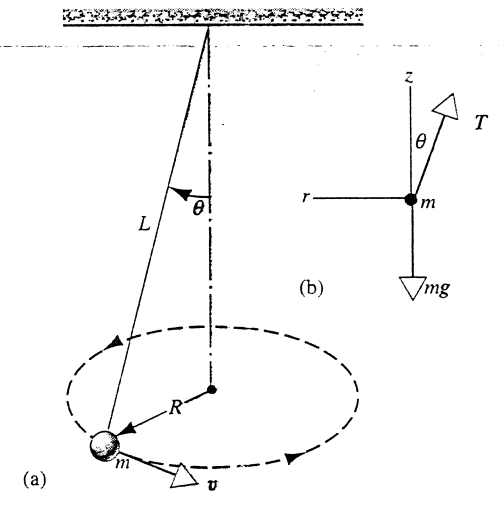


FIGURA 5.18 Il pendolo conico. (a) Un corpo di massa m sospeso a un filo di lunghezza L si muove circolarmente; il filo descrive un cono circolare retto con semiangolo di apertura θ. (b) Diagramma delle forze agenti sul pendolo.

Chiamando t il tempo necessario per una rivoluzione completa, si avrà

$$v = \frac{2\pi R}{t},$$

ossia

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg\tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}},$$

che, per $R = L\sin\theta$, diventa

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}. \qquad (5.15)$$

Questa equazione lega fra loro t, L e θ. Si noti che t, chiamato *periodo* del moto circolare uniforme, non dipende da m.

Ponendo $L = 1{,}2$ m e $\theta = 25°$, qual è il periodo del moto circolare uniforme? Troviamo

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}2\text{ m})(\cos 25°)}{9{,}8\text{ m/s}^2}} = 2{,}1\text{ s}.$$

Il rotore

In molti parchi di divertimento si trova una sorta di giostra talvolta chiamata *rotore*. È una stanza cilindrica che può ruotare intorno al proprio asse verticale. Una persona entra nel rotore, chiude la porta e si appoggia alla parete. La velocità di rotazione della giostra aumenta gradualmente finché, a una certa velocità prestabilita, il pavimento sprofonda, lasciando sotto i piedi un pozzo profondo. La persona non cade, ma rimane «incollata» alla parete. Qual è la minima velocità di rotazione che impedirà la caduta?

Le forze agenti sulla persona sono indicate nella Figura 5.19. Il peso della persona è mg; chiamiamo f_s la forza di attrito statico fra il suo corpo e la parete, ed N la forza normale esercitata sulla parete dalla persona (che, come vedremo, fornisce la forza centripeta necessaria). Come nel calcolo precedente, scomponiamo le forze nelle loro componenti radiali r e verticali z, sempre con il senso positivo rispettivamente verso l'esterno del cerchio e verso l'alto. Le componenti della forza risultante sulla persona sono $\sum F_r = -N$ e $\sum F_z = f_s - mg$. Si noti che in questo caso N fornisce la forza centripeta.

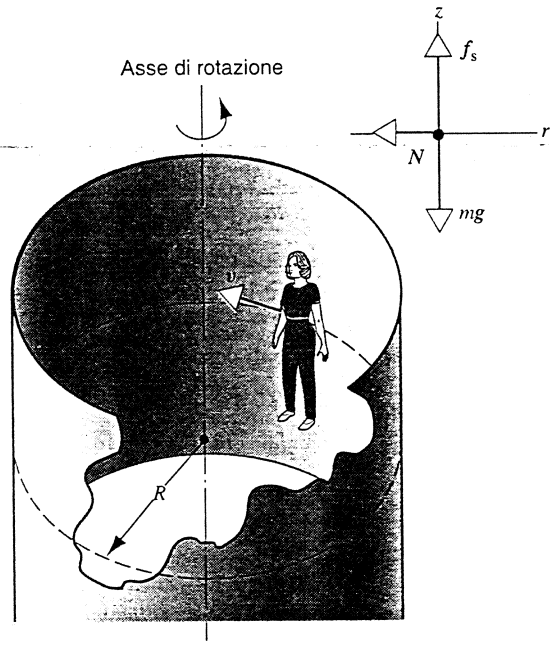


FIGURA 5.19 Il rotore. Sono indicate le forze che agiscono sulla persona.

L'accelerazione radiale vale $a_r = -v^2/R$ e l'accelerazione verticale $a_z = 0$. Le componenti radiale e verticale per la seconda legge di Newton sono

$$-N = ma_r = m\left(\frac{-v^2}{R}\right) \quad \text{e} \quad f_s - mg = ma_z = 0.$$

Essendo $f_s = \mu_s N$, possiamo scrivere $N = mv^2/R$ (dalla prima equazione) e $f_s = mg$ (dalla seconda) e troveremo per v

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}, \qquad (5.16)$$

che lega il coefficiente di attrito statico fra il corpo e la superficie rotante con la velocità minima necessaria per tenere un corpo incollato alla parete. Si noti che il risultato non dipende dalla massa della persona.

In pratica il coefficiente di attrito statico fra il tessuto di un vestito e la tipica parete di un rotore (tela di juta) vale circa 0,40. Per un rotore tipico il raggio della camera cilindrica è 2,0 m, per cui v deve essere almeno 7,0 m/s. La lunghezza della circonferenza è $2\pi R = 12{,}6$ m, e il periodo $t = 12{,}6$ m/(7,0 m/s) = 1,80 s. Il rotore deve quindi ruotare a una velocità di almeno 1 giro/(1,80 s) = 0,56 giri/s, ossia circa 33 giri/min, pari alla comune velocità di rotazione di un vecchio giradischi.

La curva sopraelevata

Supponiamo che il blocco di Figura 5.20a sia un'automobile o un vagone ferroviario che viaggi a velocità costante v su un fondo stradale *orizzontale* descrivendo una curva di raggio R. Oltre a due forze verticali – il peso mg e la forza normale N – agirà sul veicolo una forza orizzontale P che fornisce la forza centripeta necessaria a mantenere il moto circolare uniforme. Per le automobili questa forza è data da una forza d'attrito laterale esercitata sui pneumatici dalla superficie stradale; per i treni è dovuta a una forza laterale esercitata dalla rotaia più esterna sul bordo interno delle ruote. Questi due tipi di forze laterali non possono essere sufficienti a garantire in ogni caso la tenuta di strada, e sono entrambe fonte di logorio. Per questo motivo nelle curve il piano stradale è sopraelevato, come mostra la Figura 5.20b. In questo caso, la forza normale N, oltre alla componente verticale, ha anche una componente orizzontale non nulla, che contribuisce appunto alla forza centripeta richiesta dal moto circolare uniforme. In tal modo per i veicoli di una determinata velocità, con un'opportuna sopraelevazione del piano stradale, non occorrono ulteriori forze laterali.

 ISBN 88-408-1254-7

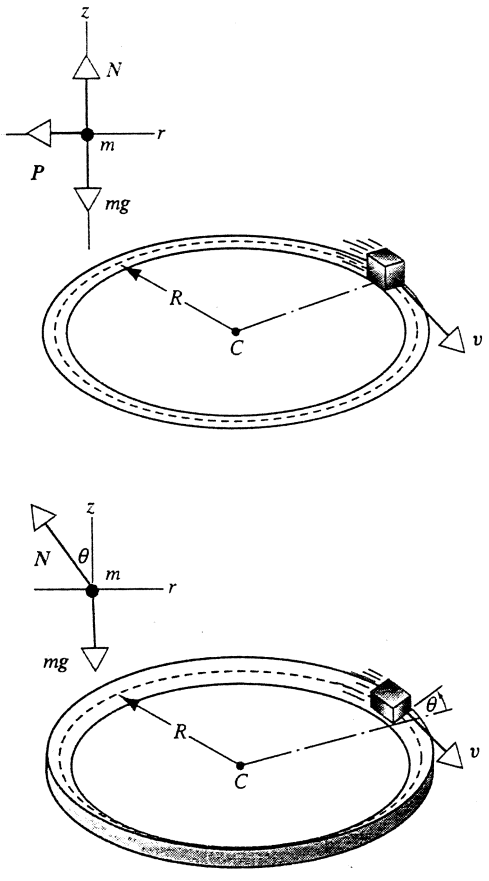


FIGURA 5.20 (a) Un fondo stradale piano. A sinistra, il diagramma delle forze sul corpo in movimento. La forza centripeta è data dall'attrito fra i pneumatici e la strada. (b) Curva con fondo stradale sopraelevato. Non occorre forza di attrito trasversale per affrontare la curva in assoluta sicurezza.

L'esatto angolo di inclinazione trasversale θ che elimina la necessità dell'attrito si può calcolare in questo modo. Riferendoci al diagramma delle forze di Figura 5.20b, iniziamo l'analisi, come di consueto, dalla seconda legge di Newton. Le componenti radiale e verticale della forza netta che agisce sul corpo in movimento sono $\sum F_r = -N \sin\theta$ e $\sum F_z = N\cos\theta - mg$. Come prima, l'accelerazione radiale è $a_r = -v^2/R$ e l'accelerazione verticale è $a_z = 0$; per la seconda legge di Newton si ha

$$-N\sin\theta = ma_r = m\left(\frac{-v^2}{R}\right)$$

e

$$N\cos\theta - mg = ma_z = 0.$$

Ricavando $\sin\theta$ e $\cos\theta$ da queste due equazioni e dividendole tra loro si ottiene

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}. \tag{5.17}$$

È da notare che la pendenza trasversale ottimale non dipende dalla massa del veicolo, ma dalla sua velocità e dal raggio della curva. Per ogni curva, in funzione del raggio r, sarà quindi adottata una pendenza trasversale corrispondente al valore stimato della velocità media dei veicoli in transito, tale data indicata da un segnale posto in prossimità dell'ingresso della curva. Se tale valore sarà superato, l'attrito fra asfalto e pneumatici avrà il compito di contribuire alla forza centripeta per ottenere un adeguato margine di sicurezza.

Controllate la formula della sopraelevazione per i casi limite $v = 0$, $R \to \infty$, v molto grande ed R molto piccolo. Si noti anche che, ricavando v dall'Equazione 5.17, si ottiene lo stesso risultato trovato per il pendolo conico. Confrontate le somiglianze fra le Figure 5.18b e 5.20b.

5.5 FORZE DIPENDENTI DAL TEMPO (facoltativo)*

Nel Capitolo 2 abbiamo analizzato il caso di un'automobile in frenata assumendo costante l'accelerazione. Ciò in pratica si verifica raramente. In molti casi, specie ad alta velocità, all'inizio il freno viene azionato dolcemente, aumentando gradualmente l'intensità mentre il veicolo rallenta. Durante la fase di frenata, la forza frenante dipende quindi dal tempo: l'accelerazione $a(t)$ è funzione del modo in cui è azionato il freno.

Anche se la forza non è costante, possiamo applicare ancora le leggi di Newton all'analisi del moto, ma non possiamo usare le equazioni del Capitolo 2, scritte nell'ipotesi di accelerazione costante, per ricavare posizioni e velocità in funzione del tempo. Per semplificare supponiamo qui che le forze e il moto si svolgano in un'unica dimensione secondo l'asse x. Troveremo al solito modo la componente x della forza netta $F_x(t)$ dal diagramma delle forze, e scriveremo $a_x = dv_x/dt$, da cui, per la seconda legge di Newton,

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x(t)}{m},$$

ossia

$$dv_x = \frac{F_x(t)}{m}dt. \tag{5.18}$$

Supponiamo che il corpo parta da fermo al tempo $t = 0$ con velocità iniziale v_{0x}. Quale sarà la sua velocità v_x al tempo t? Integrando l'Equazione 5.18 fra v_{0x} e v_x per il termine di sinistra e fra 0 e t per il termine di destra, si ottiene

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t \frac{F_x(t)}{m}dt,$$

cioè

$$v_x - v_{0x} = \frac{1}{m}\int_0^t F_x(t)dt,$$

* In questo paragrafo si fa uso del calcolo infinitesimale, e può essere opportuno posporre lo studio fino a che lo studente abbia acquisito una buona familiarità con i metodi di integrazione.

da cui

$$v_x(t) = v_{0x} + \frac{1}{m}\int_0^t F_x(t)\,dt. \qquad (5.19)$$

Si noti che la (5.19) coincide con la (2.26) se F_x è costante ($= ma_x$) e può quindi essere portato fuori dall'integrale.

Ponendo poi $v_x = dx/dt$ troviamo la posizione x in funzione del tempo:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)\,dt, \qquad (5.20)$$

che si riduce alla (2-28) per F_x costante, nel qual caso è $v_x(t) = v_{0x} + a_x t$.

Quando abbiamo una forza dipendente dal tempo useremo la (5.19) e la (5.20) per trovare espressioni analitiche di $v_x(t)$ e di $x(t)$. Nel Capitolo 4.4 abbiamo analizzato in modo analogo una forza che è funzione della velocità. E sempre più spesso, specie quando non esiste un'espressione analitica degli integrali, si rivela necessario o conveniente ricorrere a metodi numerici o al calcolatore.

PROBLEMA SVOLTO 5.11 Un'auto di massa $m = 1260$ kg viaggia alla velocità di 105 km/h (29,2 m/s). Il guidatore comincia ad azionare il freno in modo tale che l'intensità della forza frenante cresca linearmente col tempo in misura di 3360 N/s. (a) Quanto tempo passa fino all'arresto totale? (b) Che distanza percorre il veicolo durante questo tempo?

Soluzione (a) Facendo coincidere con la direzione del veicolo il verso positivo dell'asse x, la forza frenante sarà $F_x = -ct$, ove $c = 3360$ N/s (il segno negativo indica che la forza frenante ha verso opposto a quello del moto). Dall'Equazione 5.19 si ricava

$$v_x(t) = v_{0x} + \frac{1}{m}\int_0^t (-ct)\,dt = v_{0x} - \frac{ct^2}{2m}.$$

Ponendo $v_x(t) = 0$ e risolvendo rispetto a t si trova, per l'istante di arresto t_1, il valore

$$t_1 = \sqrt{\frac{2v_{0x}m}{c}} = \sqrt{\frac{2(29{,}2\text{ m/s})(1260\text{ kg})}{3360\text{ N/s}}} = 4{,}68\text{ s}.$$

(b) Per conoscere la distanza percorsa nel tempo t_1 dobbiamo trovare un'espressione di $x(t)$ che contenga l'integrale di $v_x(t)$ come nell'Equazione 5.20:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(v_{0x} - \frac{ct^2}{2m}\right) dt = x_0 + v_{0x}t - \frac{ct^3}{6m}.$$

Calcolando questa espressione per $t = t_1$ e azzerando x_0 si ottiene

$$x(t_1) = 0 + (29{,}2\text{ m/s})(4{,}68\text{ s}) - \frac{(3360\text{ N/s})(4{,}68\text{ s})^3}{6(1260\text{ kg})} =$$

$$= 91{,}1\text{ m}.$$

La Figura 5.21 mette a confronto i diagrammi di distanza, velocità e accelerazione in funzione del tempo t. Diversamente dal caso di moto uniformemente accelerato, il grafico della velocità non è rappresentato da una linea retta.

Questa modalità di frenata comporta una maggiore diminuzione della velocità nell'ultima parte dello svolgimento. La diminuzione di velocità nel primo secondo di rallentamento è soltanto di 1,3 m/s (circa 4,7 km/h), mentre durante l'ultimo secondo raggiunge 11,2 m/s (circa 40,3 km/h). Ricordiamo che nel caso di accelerazione costante la variazione di velocità durante uguali intervalli di tempo rimane costante. Vi sembra conveniente frenare in questo modo? Vi sono anche svantaggi?

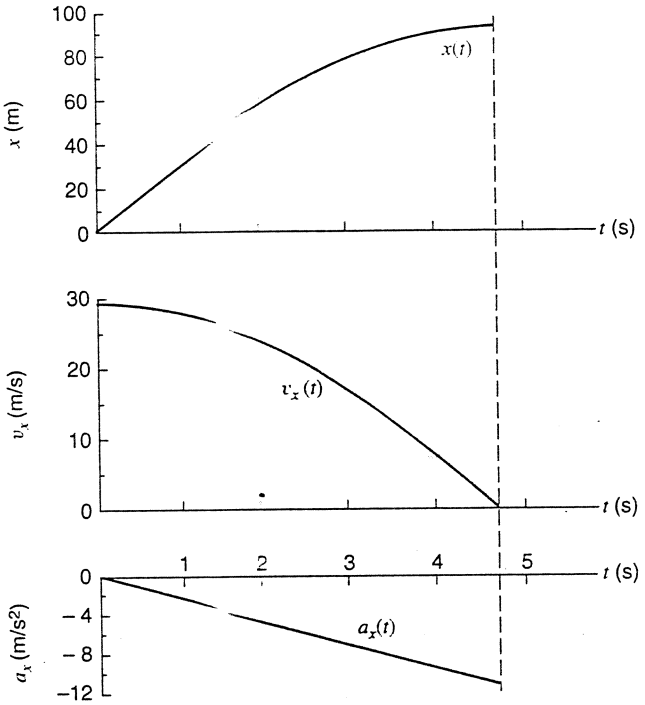


FIGURA 5.21 Problema svolto 5.11. I grafici della posizione $x(t)$ e della velocità $v_x(t)$ sono confrontati con quello di $a_x(t)$ che varia linearmente nel tempo. La linea tratteggiata segna l'istante ($t = 4{,}68$ s) in cui l'auto si ferma.

5.6 SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI E FORZE FITTIZIE (facoltativo)

Nel trattare argomenti di meccanica classica abbiamo finora ammesso implicitamente che le misurazioni e le osservazioni avvenissero in un sistema di riferimento inerziale. È questo un tipo di sistema di riferimento definito dalla prima legge di Newton, un sistema in cui un corpo è soggetto ad accelerazione nulla ($a = 0$) se nel suo intorno non sono presenti corpi generatori di forze o se la risultante ad esso applicata è nulla ($\sum F = 0$). La scelta del sistema di riferimento spetta sempre a noi osservatori, e se decidiamo di adottare soltanto sistemi inerziali, non limitiamo in alcun modo la nostra capacità di applicare la meccanica classica ai fenomeni naturali.

Ma se lo riteniamo opportuno possiamo applicare la meccanica classica al punto di vista di un osservatore posto in un sistema di riferimento *non inerziale*, ossia un sistema vincolato a un corpo che accelera rispetto a un sistema inerziale. I sistemi di riferimento di un osservatore che si trova su un veicolo che sta rallentando oppure su una giostra in movimento sono esempi di sistemi non inerziali.

 ISBN 88-408-1254-7

Per poter applicare la meccanica classica a questi sistemi di riferimento si devono introdurre delle forze aggiuntive note come *forze fittizie*, che taluni chiamano pseudoforze o forze inerziali. A differenza delle forze finora considerate, non possiamo associare queste forze ad alcuno dei corpi esistenti nell'ambiente dell'oggetto sul quale agiscono, e non possiamo collocarle in alcuna delle categorie esaminate nel Paragrafo 5.1. Inoltre, se osserviamo quello stesso corpo dal punto di vista di un sistema inerziale, queste forze fittizie scompaiono. Esse sono semplicemente un accorgimento che ci permette di applicare normalmente la meccanica classica a certi eventi se insistiamo a volerli osservare in un sistema non inerziale.

A titolo di esempio, consideriamo un osservatore S' in un furgone che viaggia a velocità costante e che, attaccata al soffitto, porta una lunga guida costituita da una rotaia priva di attrito, all'estremità posteriore della quale è appeso un corpo scorrevole di massa 0,25 kg (Figura 5.22a). Il pilota frena, e il furgone comincia a rallentare. Un osservatore S a terra misura per il furgone un'accelerazione costante $a = -2{,}8\ \text{m/s}^2$. Da quando inizia il rallentamento, l'osservatore S' nel furgone si trova in un sistema di riferimento non inerziale e vede il corpo scorrevole muoversi lungo la guida con un'accelerazione di $+2{,}8\ \text{m/s}^2$ (Figura 5.22b). Come può ciascun osservatore invocare la seconda legge di Newton per valutare il moto del corpo scorrevole?

Per l'osservatore inerziale a terra S, ciò è molto semplice. Lo scorrevole, che si muoveva a velocità costante prima della frenata, continua a muoversi allo stesso modo. Secondo lui il corpo non accelera e perciò è soggetto a una forza risultante orizzontale nulla.

L'osservatore S' invece si accorge che il corpo scorrevole accelera, ma non vede alcun altro corpo nelle vicinanze che possa esercitare una forza atta a provocarne l'accelerazione. Per salvare l'applicabilità della seconda legge di Newton, deve supporre che una forza (fittizia) agisca sullo scorrevole. Secondo S' questa forza $\boldsymbol{F}$ deve essere uguale a $m\boldsymbol{a}'$, ove $\boldsymbol{a}'$ è l'accelerazione dell'oggetto scorrevole da lui stesso misurata. La componente x di questa forza fittizia vale

$$F'_x = ma'_x = (0{,}25\ \text{kg})(2{,}8\ \text{m/s}^2) = 0{,}70\ \text{N}$$

ed è diretta come $\boldsymbol{a}'$, ossia verso la parte anteriore del furgone. Questa forza, che è reale per S', non esiste per l'osservatore a terra S, che non rileva alcun cambiamento nel moto dello scorrevole.

Una prova che le forze fittizie non sono *forze newtoniane* è costituita dal fatto che non rispettano la terza legge di Newton. Infatti S' non trova alcuna forza di reazione esercitata *dallo* scorrevole *su* altri corpi. È così violata la terza legge di Newton.

Le forze fittizie sono reali per coloro che le subiscono. Immaginate di essere su un'auto che sta virando a sinistra. Per un osservatore a terra l'auto è soggetta a un'accelerazione centripeta e costituisce quindi un sistema di riferimento non inerziale. Se l'auto ha dei cuscini lisci di polivinile vi troverete a scivolare sul sedile verso destra. Per l'osservatore a terra ciò è perfettamente normale: il vostro corpo sta soltanto ubbidendo alla prima legge di Newton e sta quindi tentando di proseguire in linea retta, mentre è l'auto a scivolarvi sotto, verso sinistra. Ma nel sistema non inerziale in cui vi trovate, voi dovete attribuire il vostro slittamento verso destra a una forza fittizia che vi trascina verso destra. Questo tipo di forza fittizia è chiamato *forza centrifuga*, ossia una forza che *allontana* dal centro di rotazione.

Se vi trovate su una giostra in movimento, siete in un sistema di riferimento soggetto ad accelerazione e quindi non inerziale. Se reggete in mano un oggetto, vi sembra che la forza netta orizzontale esercitata su di esso sia nulla, perché la forza centrifuga, fittizia, diretta verso l'esterno è equilibrata dalla forza verso l'interno esercitata dalla vostra mano. Per un osservatore a terra invece l'oggetto è in moto circolare e accelera verso il centro sotto l'effetto della forza *centripeta* esercitata dalla vostra mano. Per lui non esiste alcuna forza centrifuga, perché la forza netta esercitata sull'oggetto *non* è nulla: esso accelera radialmente verso l'interno.

Le forze fittizie stanno alla base della pratica realizzazione di macchine e apparecchi. Pensiamo per esempio alla centrifuga, uno dei più utili strumenti di laboratorio. Se una miscela di sostanze ha un rapido moto circolare, le componenti di massa maggiore subiscono una maggiore forza cen-

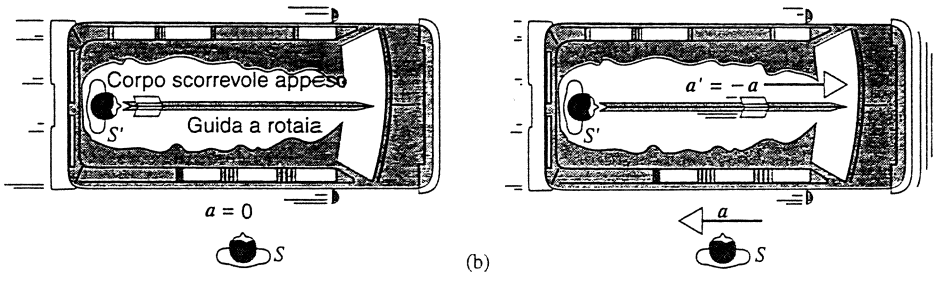


FIGURA 5.22 (a) L'osservatore a terra S assiste alle operazioni di misura dell'osservatore S', che viaggia in un furgone a velocità costante. Il furgone avanza verso destra, concordemente all'asse x. Entrambi gli osservatori sono in un sistema inerziale di riferimento. (b) Il furgone rallenta con accelerazione costante a rispetto all'osservatore S, mentre S', che si trova ora in un sistema non inerziale, vede la slitta scivolare in avanti sulla rotaia con accelerazione costante $a' = -a$. L'osservatore S' attribuisce questa accelerazione a una forza fittizia.

trifuga mv^2/r e tendono a portarsi più lontano dall'asse di rotazione. Si usa così una forza fittizia per separare sostanze in base alla loro massa, così come lo spettrometro di massa (Paragrafo 3.4) usa una forza elettromagnetica per separare atomi di massa diversa.

Un'altra forza fittizia è la *forza di Coriolis*. Supponete di far rotolare una palla a velocità costante verso il centro di una giostra in movimento lungo una linea radiale tracciata sul pavimento. All'istante in cui, stando a una distanza r dal centro, la lasciate andare, possiede la stessa velocità tangenziale che avete anche voi nel vostro moto rotatorio sulla giostra. Avvicinandosi al centro, la velocità tangenziale della palla dovrebbe diminuire se essa vuole mantenersi sulla linea radiale tracciata; non avendo modo, in assenza di attrito, di smaltire la sua velocità tangenziale in eccesso, essa tende ad andare *più avanti*, nel senso del moto rotatorio, rispetto alla linea radiale segnata sul pavimento. Perciò nel vostro sistema non inerziale di riferimento dovete ammettere l'esistenza di una forza fittizia, detta di Coriolis, che obbliga la palla, mentre rotola verso il centro, a deviare continuamente dalla linea tracciata sul pavimento. Per l'osservatore a terra nel sistema inerziale, non esiste alcuna forza di Coriolis: la palla prosegue in linea retta a una velocità determinata dalle componenti della sua velocità al momento del rilascio.

Forse l'esempio più comune degli effetti della forza di Coriolis è il movimento dell'atmosfera intorno a un centro di alta o bassa pressione. La Figura 5.23 rappresenta lo schema di un centro di bassa pressione nell'emisfero nord. L'aria circostante, proveniente da regioni di maggiore pressione, tende ad affluire al centro di bassa pressione. Poiché la Terra, ruotando, costituisce un sistema di riferimento non inerziale, si ha un fenomeno simile a quello della palla sulla giostra: l'aria che proviene da sud, avvicinandosi all'asse terrestre, devia un po' verso est rispetto a una linea immaginaria diretta verso il centro di bassa pressione, mentre quella proveniente da nord, allontanandosi dall'asse di rotazione della Terra, rimane indietro rispetto alla linea diretta verso il centro di bassa pressione. Il risultato è che si forma un vortice di aria che gira in senso antiorario intorno al centro di bassa pressione. L'effetto Coriolis è quindi responsabile della circolazione del vento tipica di un ciclone o di un uragano. Nell'emisfero sud l'effetto si inverte.

Le artiglierie a lunga gittata tengono conto dell'effetto Coriolis. Per una distanza di 10 km, l'effetto Coriolis può provocare una deviazione di una ventina di metri. I programmi su computer che governano i cannoni a lunga gittata introducono un'apposita correzione per tener conto dell'effetto Coriolis. A volte però tutto può andare storto, come dovette constatare la marina britannica nella battaglia delle isole Falkland durante la prima guerra mondiale. Le tavole di tiro erano state compilate per l'emisfero nord, mentre le Falkland sono nell'emisfero sud, per cui le correzioni sarebbero dovute essere di segno opposto, e le granate britanniche cadevano a oltre 100 m dal bersaglio!

Nei problemi di meccanica ci troviamo di fronte a un'alternativa: (1) adottare un sistema di riferimento *inerziale* e considerare soltanto forze «reali», ossia associate a corpi ben individuati nell'intorno del sistema; oppure (2) scegliere un sistema *non inerziale* e considerare, oltre alle

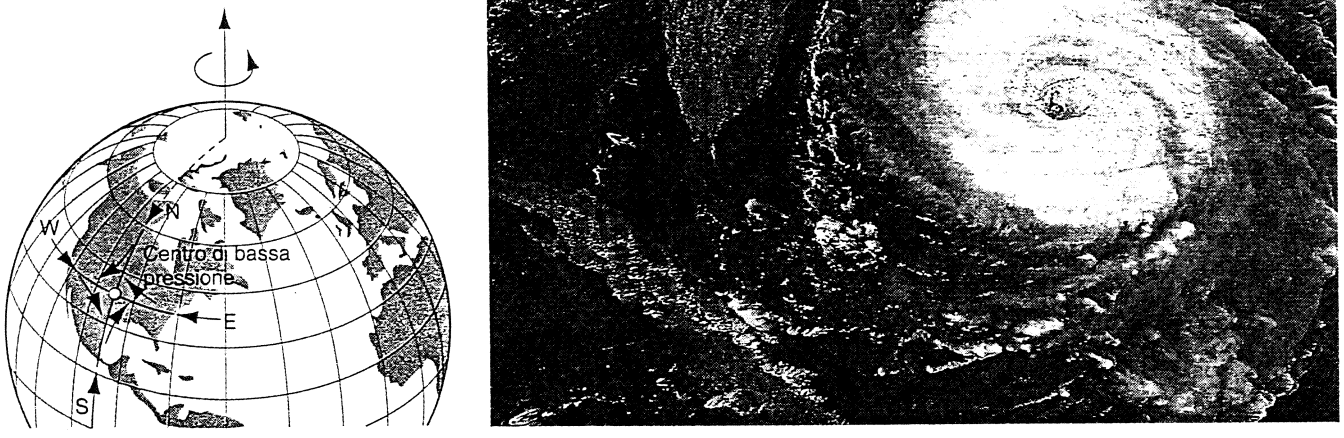


FIGURA 5.23 Un centro di bassa pressione sulla Terra che ruota. L'aria che affluisce verso il centro sembra ruotare in senso antiorario a osservatori non inerziali nell'emisfero settentrionale. Nella fotografia a destra si vede un uragano provocato da un centro di bassissima pressione.

 ISBN 88-408-1254-7

forze reali, forze fittizie opportunamente definite. Anche se di solito si preferisce la prima possibilità, conviene talvolta adottare la seconda: entrambe sono perfettamente equivalenti, e la scelta dipende da questioni di opportunità.

5.7 LIMITI DELLE LEGGI DI NEWTON (facoltativo)

Nei primi cinque capitoli abbiamo descritto un metodo per analizzare il comportamento meccanico in un campo di applicazioni piuttosto esteso. Con poco più delle equazioni delle leggi di Newton si possono progettare grattacieli e ponti sospesi, o tracciare la traiettoria di un volo interplanetario (Figura 5.24). La meccanica di Newton, che elaborò questi strumenti di calcolo, fu il primo autentico sviluppo rivoluzionario della fisica teorica.

Ecco un esempio della nostra fiducia nelle leggi di Newton. Osservando galassie e agglomerati di galassie che ruotano, si è potuto calcolare la loro velocità di rotazione. Da questa si deduce la quantità di materia che deve essere presente per fornire la forza centripeta corrispondente alla velocità di rotazione. Ma la quantità di materia che è stata osservata coi telescopi è molto minore di quella prevista da questi calcoli. Si è quindi ipotizzato che esista una «materia oscura» invisibile che integra la quantità richiesta dalla forza di gravità. Non si è ancora trovata un'ipotesi soddisfacente circa la natura di questa materia invisibile. Una delle spiegazioni proposte suggerisce che i nostri calcoli siano errati perché le leggi di Newton non sono valide per le condizioni esistenti su una scala tanto grande, quando le accelerazioni sono esigue, inferiori a volte a 10^{-10} m/s^2). È stato addirittura ipotizzato che per accelerazioni così piccole la forza sia proporzionale al quadrato dell'accelerazione, anziché ad a.

La Figura 5.25 dà il risultato di prove intese a verificare la fondatezza di questa ipotesi. La linea retta descrive la previsione newtoniana e i punti neri le misure eseguite. Con queste misurazioni estremamente precise si è constatato che anche per bassissime accelerazioni la legge $f = ma$ rimane valida.

Durante il ventesimo secolo abbiamo assistito a tre altri sviluppi rivoluzionari: le leggi di Einstein della relatività ristretta nel 1905 e della relatività generale nel 1915, e la meccanica quantistica nel 1925 circa. La teoria della relatività ristretta afferma che non si possono estrapolare le leggi di Newton per particelle che si muovono a velocità dell'ordine della velocità della luce. La relatività generale dimostra che le leggi di Newton non sono valide in vicinanza di oggetti di massa estremamente grande. La meccanica quantistica insegna che non si possono applicare le leggi di Newton a oggetti di dimensioni atomiche.

La relatività ristretta, che è basata su una visione decisamente non newtoniana dello spazio e del tempo, è valida in qualsiasi circostanza, ad alte e a basse velocità. Al limite delle basse velocità si dimostra che la dinamica della relatività ristretta viene a coincidere con quella di Newton. Analogamente, la relatività generale si applica a forze gravitazionali sia deboli che molto intense, ma le sue equazioni si riducono a quelle delle leggi di Newton per forze molto piccole. La meccanica quantistica, che consente di considerare comportamenti piuttosto casuali, può essere applicata a singoli atomi o anche a oggetti che contengono un enorme numero di atomi, nel qual caso la casualità porta a un valore medio statistico che va d'accordo con le leggi di Newton.

Negli ultimi due decenni del secolo scorso in fisica teorica si è manifestato un nuovo corso di pensiero apparentemente rivoluzionario, che considera dei sistemi meccanici il

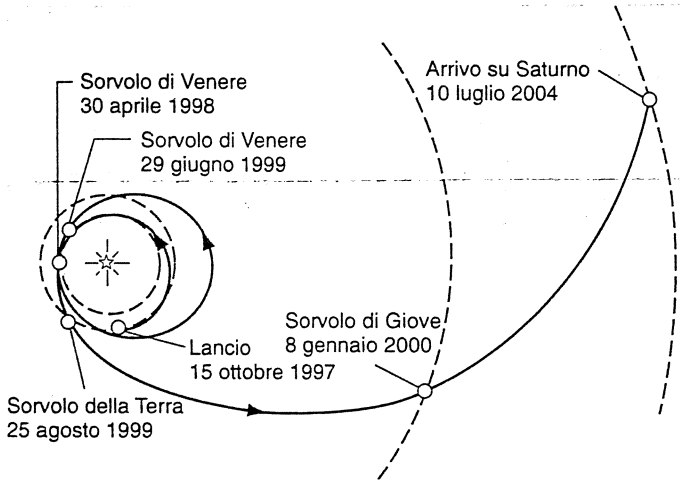


FIGURA 5.24 La traiettoria della sonda Cassini per Saturno, lanciata dalla Terra il 15 ottobre 1997. La possibilità di calcolare queste traiettorie con estrema precisione rappresenta un trionfo della meccanica classica. I quattro passaggi ravvicinati ai pianeti sono usati come *spinte gravitazionali* per aumentare la velocità dell'astronave (vedi Paragrafo 6.1) e metterla in grado di raggiungere Saturno.

Per maggiori informazioni su questa missione si veda il sito Web http//www.jpl.nasa.gov/cassini.

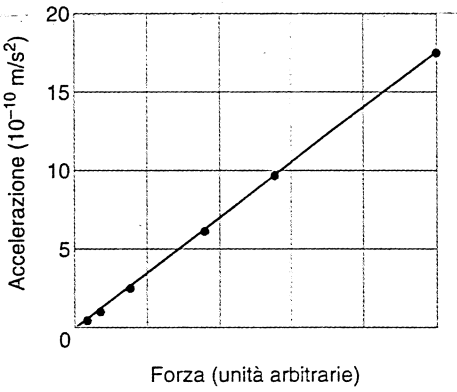


FIGURA 5.25 Risultati di un esperimento volto a verificare la validità della seconda legge di Newton ad accelerazioni molto basse, inferiori a 10^{-9} m/s^2. Il fatto che i punti misurati giacciano tutti su una retta conferma che l'accelerazione è proporzionale alla forza fino a 10^{-10} m/s^2, come previsto dalla legge di Newton.

cui comportamento è definito *caotico*. Uno dei punti di forza delle leggi di Newton è la loro capacità di prevedere il comportamento futuro di un sistema conoscendo le forze che in esso agiscono e le condizioni del suo moto iniziale. Così per esempio conoscendo la posizione e la velocità iniziale di una sonda spaziale soggetta a forze gravitazionali note da parte del Sole e dei pianeti, siamo in grado di determinare con precisione la sua traiettoria a venire. Se però consideriamo un rametto trascinato da una corrente turbolenta, nonostante il suo moto sia governato da forze che rispettano le leggi di Newton, è impossibile prevedere il suo percorso futuro. Se lasciamo andare nella corrente due rametti affiancati li ritroveremo a valle molto distanti fra loro. Un aspetto particolare della dinamica del caos è la constatazione che piccolissime variazioni delle condizioni iniziali possono essere enormemente amplificate causando sostanziali differenze nei prevedibili sviluppi successivi. Alla dinamica del caos si fa spesso riferimento nelle previsioni meteorologiche, ed è stato detto che il volteggiare di una farfalla in Giappone può essere collegato alla formazione di un uragano nel golfo del Messico.

Questi moti caotici si manifestano non soltanto in sistemi assai complessi come una corrente turbolenta, ma anche in semplici sistemi fisici come un pendolo, un rubinetto che sgocciola o un circuito elettrico oscillante. Negli anni sessanta si scoprì che il comportamento in apparenza caotico di questi sistemi nasconde un ordine occulto e una certa regolarità, il cui studio è l'oggetto di un nuovo ramo della scienza, il *caos*.* Le leggi del caos trovano applicazione non soltanto in sistemi fisici, ma anche in sistemi biologici e perfino in aree delle scienze sociali, quali la macroeconomia e la dinamica della popolazione.

Combinando la meccanica newtoniana delle particelle con la teoria del caos sono stati elaborati dei calcoli che dimostrano che l'orbita del pianeta Plutone è caotica su una scala di tempo dell'ordine delle decine di milioni di anni: un tempo abbastanza breve se confrontato con l'età del sistema solare, stimata in 4,5 miliardi di anni, ma assai lungo se confrontato con il periodo di rivoluzione di Plutone sulla sua orbita, circa 250 anni. La teoria del caos è stata invocata anche per spiegare due proprietà della fascia degli asteroidi, situata fra le orbite di Marte e di Giove, che non erano interpretabili nel quadro della meccanica convenzionale di Newton: (1) molti asteroidi deviano da quelle che dovrebbero essere orbite stabili, e alcuni di essi diventano meteoriti che piovono sulla Terra; (2) entro la fascia degli asteroidi vi sono parecchi intervalli vuoti, entro i quali il numero degli asteroidi è molto piccolo o addirittura nullo. Soltanto nell'ultimo decennio calcolatori ad alta velocità hanno consentito di studiare in dettaglio la dinamica di questo tipo di sistemi per i lunghi periodi di tempo necessari all'osservazione di tali comportamenti anomali. E man mano che si procede su questa via si apre un orizzonte sempre più ampio per eccitanti, nuove applicazioni.

* Vedi J. Gleick, *Chaos – Making a New Science*, Penguin Books, 1987.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

5.1 Leggi delle forze

5.2 Tensione e forze normali

1. Un dinamometro è sospeso fra due corde che passano sopra due pulegge senza attrito e portano appesi due corpi del peso di 20 N ciascuno, come in Figura 5.26. La lettura sulla scala sarà in prossima a
(A) 0 N (B) 10 N. (C) 20 N. (D) 40 N.

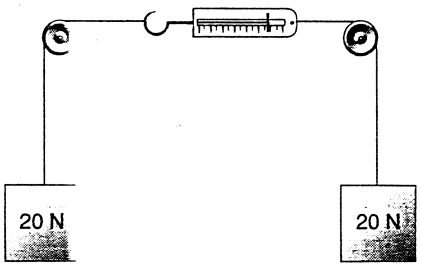


FIGURA 5.26 Domanda a risposta multipla 1.

2. Quale delle seguenti affermazioni è più corretta?
(A) La forza normale e il peso sono la stessa cosa.
(B) La forza normale è diversa dal peso, ma ha sempre la sua stessa intensità.
(C) La forza normale è diversa dal peso, ma insieme formano una coppia azione-reazione secondo la terza legge di Newton.
(D) La forza normale è diversa dal peso, ma può in certi casi avere la sua stessa intensità.

3. Una scatola di legno è appoggiata su un tavolo. La forza normale esercitata sulla scatola dal tavolo è di 75 N. Un'altra scatola identica viene appoggiata sulla prima. La forza normale sulla prima scatola
(A) diminuirà. (B) rimarrà costante a 75 N.
(C) aumenterà a 150 N. (D) aumenterà a 300 N.

4. Una donna sta in piedi su una superficie piana indossando o scarpe da ginnastica o stivaletti con tacchi a spillo. Ammettendo che la sua massa totale rimanga invariata nei due casi, la forza normale esercitata dal pavimento sulle sue scarpe
(A) sarà maggiore per le scarpe da ginnastica, vista la maggiore area di contatto col pavimento.
(B) sarà uguale nei due casi.
(C) sarà maggiore per i tacchi a spillo, vista la minore area di contatto col pavimento.
(D) dipenderà soltanto da come la donna piega le ginocchia stando comunque in piedi.

5. Una corda *reale* è appesa al soffitto, con l'estremità inferiore libera. Se la sua massa è di 100 g, la tensione avrà il valore di
(A) 0,98 N su tutta la lunghezza.
(B) 0,49 N su tutta la lunghezza.

 ISBN 88-408-1254-7

(C) 0,98 N all'estremità inferiore, diminuito linearmente fino a zero all'attacco al soffitto.
(D) 0,98 N all'attacco al soffitto, diminuito linearmente fino a zero all'estremità inferiore.

6. Un uccellino di peso P è posato al centro di un filo teso di massa trascurabile. Le due metà del filo sono inclinate di un piccolo angolo rispetto all'asse orizzontale. Come si può valutare la tensione T nel filo?
(A) $T < P/2$. (B) $P/2 \leq T \leq P$. (C) $T > P$.
(D) Per poter rispondere occorrono ulteriori informazioni.

5.3 Forze di attrito

7. Tra queste affermazioni sulla relazione fra il peso di un oggetto e la forza di attrito dinamico che agisce su di esso, quale è corretta?
(A) Il peso è sempre maggiore della forza di attrito dinamico.
(B) Il peso è sempre uguale alla forza di attrito dinamico.
(C) Per oggetti abbastanza leggeri il peso è minore della forza di attrito dinamico.
(D) Il peso può essere maggiore o minore della forza di attrito dinamico.

8. Un blocco di legno di massa 2,0 kg è appoggiato su una superficie piana con $\mu_s = 0{,}80$ e $\mu_k = 0{,}60$. Viene applicata al blocco una forza di 13,7 N parallela al piano.
(a) Se il blocco era inizialmente fermo, allora
(A) rimarrà fermo, e la forza di attrito sarà circa 15,7 N.
(B) rimarrà fermo, e la forza di attrito sarà circa 13,7 N.
(C) rimarrà fermo, e la forza di attrito sarà circa 11,8 N.
(D) comincerà a scivolare sotto l'effetto di una forza netta di circa 1,9 N.
(b) Se il blocco era inizialmente in movimento e la forza applicata di 13,7 N è parallela e concorde al moto, allora
(A) accelererà sotto l'effetto di una forza netta di circa 1,9 N.
(B) continuerà a scivolare a velocità costante.
(C) rallenterà sotto l'effetto di un forza netta di circa 1,9 N.
(D) rallenterà sotto l'effetto di un forza netta di circa 11,8 N.

9. Due blocchi di legno identici sono legati uno dietro all'altro e trascinati su una superficie orizzontale. L'attrito non è trascurabile. La forza richiesta per trascinarli a velocità costante è F. Se un blocco è collocato sopra l'altro la nuova forza occorrente per trascinarli a velocità costante sarà circa
(A) $F/2$. (B) F. (C) $\sqrt{2}F$. (D) $2F$.

10. I dispositivi automatici di controllo della frenata (ABS) impediscono il bloccaggio dei pneumatici diminuendo la forza frenante quando rilevano che la ruota cessa di girare fino ad ottenere la ripresa della rotazione. Sapendo che è sempre $\mu_s > \mu_k > \mu_{volv}$, ove quest'ultimo coefficiente si riferisce al caso della ruota in rotolamento, un automobile munita di ABS, rispetto a un'altra che ne è priva,
(A) si arresta sempre a una distanza più breve.
(B) si arresta a una distanza più breve su un fondo stradale secco ma non su un fondo bagnato.
(C) si arresta circa alla stessa distanza.
(D) si arresta sempre a una distanza più lunga.

11. Un blocco di legno di massa 1,0 kg è collocato sopra un altro blocco identico appoggiato su un piano orizzontale di plastica. Il coefficiente di attrito statico fra le due superfici di legno è μ_1, e quello fra legno e plastica μ_2.
(a) Al blocco superiore è applicata una forza orizzontale F, che aumenta fino a che esso comincia a scivolare. Il blocco inferiore si sposterà insieme a quello superiore se e soltanto se
(A) $\mu_1 < \frac{1}{2}\mu_2$. (B) $\frac{1}{2}\mu_2 < \mu_1 < \mu_2$.
(C) $\mu_2 < \mu_1$. (D) $2\mu_2 < \mu_1$.
(b) La stessa forza orizzontale F è invece applicata al blocco inferiore, e viene aumentata fino a che questo comincia a scivolare sul piano di plastica. Per quali valori dei coefficienti di attrito il blocco superiore si sposterà insieme a quello inferiore?
(A) Se $\mu_1 > 0$ il blocco superiore si sposterà qualunque sia μ_2.
(B) $\frac{1}{2}\mu_2 < \mu_1 < \mu_2$. (C) $\mu_2 < \mu_1$. (D) $2\mu_2 < \mu_1$.

5.4 Dinamica del moto circolare uniforme

12. Una motocicletta corre all'interno di una pista circolare verticale a velocità costante, sotto l'influenza della forza di gravità $\boldsymbol{P}$, della forza di attrito $\boldsymbol{f}$ fra pneumatici e pista e della forza normale $\boldsymbol{N}$ fra le ruote e la pista.
(a) Quale di questi vettori ha intensità costante?
(A) N. (B) $N+f$. (C) $f+P$. (D) $N+P+f$.
(b) Quale di questi vettori, se diverso da zero, è sempre diretto verso il centro del cerchio?
(A) f. (B) P. (C) $f+P$. (D) $N+f$.

13. Un'auto corre su un terreno collinoso. Il moto dell'auto in cima a un dosso è temporaneamente simile a un moto circolare con il centro di curvatura posto sotto la superficie stradale. Il moto dell'auto in fondo a un avvallamento è temporaneamente simile a un moto circolare con il centro di curvatura posto sopra la superficie stradale. Sull'auto agiscono costantemente tre forze: il suo peso $\boldsymbol{P}$, la forza normale $\boldsymbol{N}$ e l'attrito dei pneumatici sul terreno $\boldsymbol{f}$, le cui intensità sono rispettivamente P, N ed f.
(a) Quando l'auto è in cima a un dosso, quale di queste espressioni rappresenta l'intensità della forza centripeta?
(A) N. (B) $P+N$. (C) $P-N$. (D) $N-P$.
(b) Quando l'auto è in fondo a un avvallamento, quale di queste espressioni rappresenta l'intensità della forza centripeta?
(A) N. (B) $P+N$. (C) $P-N$. (D) $N-P$.

5.5 Forze dipendenti dal tempo

5.6 Sistemi di riferimento non inerziali e forze fittizie

5.7 Limiti delle leggi di Newton

QUESITI

1. Con una corda si può trainare un vagone, ma non lo si può spingere. Esiste qualcosa come una tensione *negativa*?

2. C'è un limite oltre il quale la lucidatura di una superficie aumenta la resistenza al moto dovuta alla forza di attrito. Spiegatene la ragione.

3. Una cassa, più pesante di voi, è appoggiata su un terreno irregolare. Il coefficiente di attrito statico fra la cassa e il terreno è uguale a quello fra le suole delle vostre scarpe e il terreno. Riuscireste a spingere la cassa facendola strisciare sul terreno?

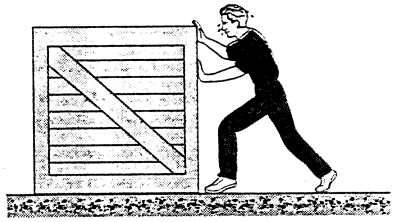


FIGURA 5.27 Quesito 3.

4. Nel baseball il *base runner* arriva di solito alla base più rapidamente correndo che scivolando. Spiegatene la ragione. Perché allora scivola?
5. Come può raggiungere la riva una persona ferma sulla superficie gelata priva di attrito di un laghetto? Può riuscirci camminando, rotolando, agitando le braccia o scalciando? E comunque, come avrà fatto a mettersi in quella situazione?
6. Perché i pneumatici «mordono» meglio il terreno su strada piana che in salita o in discesa?
7. A che scopo si montano quelle superfici incurvate, chiamate *spoiler*, poste sulla parte posteriore delle auto sportive? Sono piegate in modo che l'aria che le investe eserciti una pressione verso il basso.
8. Due superfici a contatto sono ferme una rispetto all'altra. Tuttavia ciascuna di esse esercita una forza di attrito sull'altra. Spiegatelo.
9. L'auto che state guidando slitta spingendosi oltre la mezzeria di una strada gelata. Dovrete sterzare le ruote anteriori nella direzione verso cui slitta o in quella opposta (a) per evitare l'urto contro un veicolo che arriva in senso contrario? (b) E se non sta arrivando alcun veicolo ma volete riprendere il controllo della guida? Supponete dapprima che la trazione sia posteriore, e poi che sia anteriore.
10. Perché i piloti di auto da corsa accelerano quando sono in curva?
11. State pilotando un aeroplano e volete virare di 90°. Perché fate inclinare l'aereo durante la virata?
12. Quando un cane bagnato si scrolla l'acqua di dosso, la gente attorno subisce una doccia. Perché l'acqua schizza lontano in quel modo?
13. Avrete forse notato (Einstein lo notò) che, mescolando una tazza di tè, le foglioline galleggianti si raccolgono al centro anziché al bordo esterno della tazza. Sapete darne una spiegazione? (Einstein la diede).
14. Supponete di dover controllare se il piano di un tavolino su un treno è esattamente orizzontale. Se usate una livella a bolla, potete fare la misura mentre il treno viaggia in salita o in discesa? O quando è in curva? (*Suggerimento*: vi sono due componenti orizzontali.)
15. In un pendolo conico, come diventano il periodo e la velocità quando $\theta = 90°$? Perché non è fisicamente possibile ottenere quest'angolo? Esaminate il caso di $\theta = 0°$.
16. Una moneta è appoggiata sul piatto di un giradischi. Dopo che questo è stato avviato, prima di arrivare alla velocità normale di rotazione, la moneta schizza via. Spiegate perché.
17. Un'auto percorre una strada di campagna che assomiglia alla pista di un ottovolante. Se viaggia a velocità scalare costante, confrontate la forza che esercita sulla superficie di un tratto in piano con quella che esercita in cima a un dosso e in fondo a un avvallamento.
18. State guidando un furgone a velocità uniforme su un rettilineo. Un pallone è appoggiato al centro della cabina e in alto sopra di esso galleggia un palloncino gonfio di elio a contatto del soffitto. Come si comporta ciascuno dei due quando (a) abbordate una curva a velocità costante oppure (b) frenate?
19. Come influisce all'equatore la rotazione della Terra sulla misurazione del peso di un oggetto?
20. Spiegate perché a molte latitudini un filo a piombo non è diretto esattamente verso il centro della Terra.
21. Alcuni astronauti nella loro navetta in orbita vogliono controllare ogni giorno il loro peso. Descrivete come possono farlo, visto che sono in condizioni di «assenza di gravità».
22. Spiegate perché la domanda: "qual è la velocità lineare di un punto sull'equatore" richiede la scelta di un sistema di riferimento. Spiegate come cambia la risposta al mutare del sistema di riferimento.
23. Qual è la differenza fra i sistemi di riferimento inerziali e quelli che ne differiscono per una traslazione o rotazione degli assi?
24. Un passeggero sul sedile anteriore di un'auto si sente scivolare verso la portiera quando il pilota esegue una brusca virata verso sinistra. Descrivete le forze agenti sul passeggero e sul veicolo rispetto a un sistema di riferimento solidale (a) con la Terra e (b) col passeggero.
25. Dovete preoccuparvi dell'effetto Coriolis quando giocate a golf o a tennis? Se non dovete, perché?
26. Supponete di trovarvi su un terrazzino in cima a un'alta torre rivolti verso est. Lasciate cadere da fermo un oggetto che arriva sul terreno sottostante, come in Figura 5.28. Supponete inoltre di poter localizzare con grande esattezza il punto di arrivo a terra. L'oggetto toccherà terra nel punto *a*, sulla verticale del punto da cui è caduto, o in *b*, verso est o in *c*, verso ovest? La Terra gira in senso antiorario per chi la guarda da un punto sul suo semiasse uscente dal polo nord.

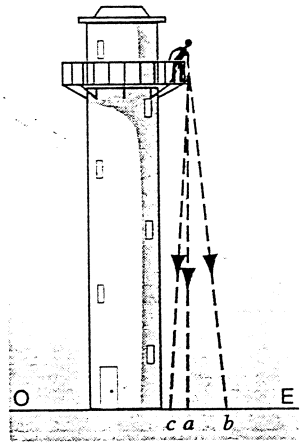


FIGURA 5.28 Quesito 26.

 ISBN 88-408-1254-7

27. Dimostrate con un ragionamento qualitativo che, a causa della rotazione terrestre, nell'emisfero boreale un vento che soffia da nord verso sud viene deviato verso destra. E un vento che soffia da sud verso nord? E che cosa succede nell'emisfero australe?

ESERCIZI

5.1 Leggi delle forze

5.2 Tensione e forze normali

1. Una sfera appesa a un filo ha massa di $2,8 \cdot 10^{-4}$ kg ed è elettrostaticamente carica. Su di essa agisce una forza orizzontale di natura elettrica in modo tale che il filo a riposo formi un angolo di 33° rispetto all'asse verticale. Trovare (a) l'intensità della forza elettrica e (b) la tensione nel filo.
2. La cabina di un ascensore del peso di 27 kN appesa a un cavo sale con l'accelerazione verso l'alto di 1,6 m/s^2. (a) Qual è la tensione nel cavo? (b) Qual è la tensione se nelle stesse condizioni l'accelerazione è orientata verso il basso?
3. Una lampadina è appesa a un filo verticale nella cabina di un ascensore in discesa che rallenta con accelerazione di 2,4 m/s^2 fino ad arrestarsi. (a) Se la tensione del filo è di 89 N, qual è la massa della lampadina? (b) E quant'è la tensione se l'ascensore sale con la stessa accelerazione orientata verso l'alto?
4. La massa della cabina di un ascensore con il suo carico è di 1600 kg. Trovare la tensione del cavo quando l'ascensore, mentre scende alla velocità di 12,0 m/s, si arresta ad accelerazione costante in una lunghezza di 42,0 m.
5. Un uomo di massa 110 kg si cala da un'altezza di 12 m, appeso a una fune che passa su una puleggia senza attrito alla quale è attaccato un contrappeso di massa 74 kg. (a) A che velocità toccherà terra? (b) Ha qualche modo di ridurre la velocità di atterraggio?
6. Una scimmia di massa 11 kg si arrampica su una fune priva di massa che, passando su un ramo d'albero privo di attrito, è attaccata a un contrappeso di 15 kg appoggiato sul terreno. (a) Con quale accelerazione minima deve arrampicarsi per sollevare da terra il contrappeso? Se, dopo aver sollevato da terra il contrappeso, smette di arrampicarsi e rimane appesa alla fune, quali saranno (b) l'accelerazione della scimmia e (c) la tensione nella fune?
7. Nella Figura 5.29 vediamo un tratto di cabinovia. Il massimo carico tollerabile per ogni cabina, passeggeri inclusi, è una massa di 2800 kg. Le cabine, le cui carrucole scorrono su una fune portante, sono tirate da una fune traente agganciata al sostegno di ogni cabina. Qual è la differenza di tensione fra due tratti adiacenti della fune traente se le cabine salgono lungo un asse inclinato di 35° rispetto al piano orizzontale con accelerazione di 0,81 m/s^2?

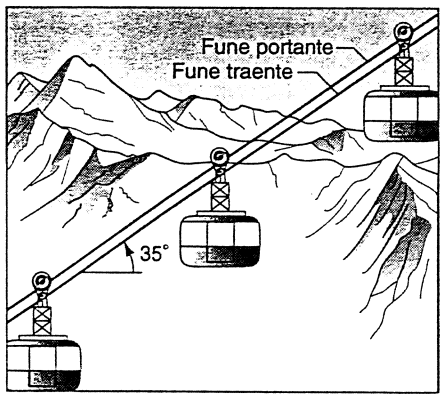


FIGURA 5.29 Esercizio 7.

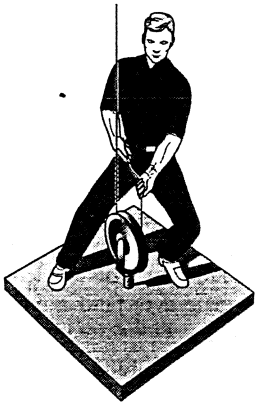


FIGURA 5.30 Esercizio 8.

8. L'uomo nella Figura 5.30 pesa 800 N; la piattaforma cui è attaccata la puleggia priva di attrito pesa 190 N. Il peso della fune è trascurabile. Con quale forza egli deve tirare la fune per sollevarsi assieme alla piattaforma con accelerazione di 0,36 m/s^2?

5.3 Forze di attrito

9. Il coefficiente di attrito statico fra il teflon e le uova strapazzate è circa 0,04. Qual è l'angolo minimo rispetto al piano orizzontale che farà scivolare le uova sul fondo di un padellino rivestito di teflon?
10. Ammettiamo che soltanto le ruote posteriori di un'auto possano accelerarla, e che metà del peso totale del veicolo graviti su queste ruote. (a) Qual è la massima accelerazione ottenibile per un coefficiente di attrito statico fra pneumatici e ruote pari a μ_s? (b) Posto $\mu_s = 0,56$ qual è il valore di a?
11. Qual è la massima accelerazione che può ottenere un velocista se il coefficiente di attrito statico fra la suola delle sue scarpe e il terreno è 0,95?
12. Un giocatore di baseball (Figura 5.31) di massa 79 kg, mentre scivola per raggiungere la base, è rallentato da una forza di attrito di 470 N. Qual è il coefficiente di attrito dinamico fra il giocatore e il terreno?

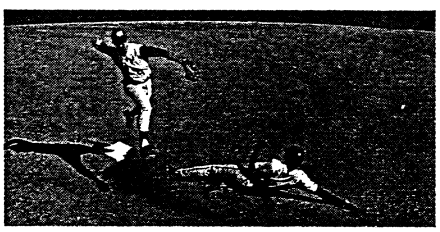


FIGURA 5.31 Esercizio 12.

13. Un oggetto di massa 75 kg è sostenuto fra due pareti da una trave orizzontale, come appare in Figura 5.32. Le forze uguali F esercitate dalla trave sulle pareti possono essere variate regolando la lunghezza della trave mediante il dispositivo a *viti contrapposte*. Il sistema è sostenuto soltanto dalla forza d'attrito fra le estremità della trave e le pareti. Il coefficiente di attrito statico fra trave e pareti è 0,41. Trovare il minimo valore delle forze F che garantisce la stabilità del sistema.

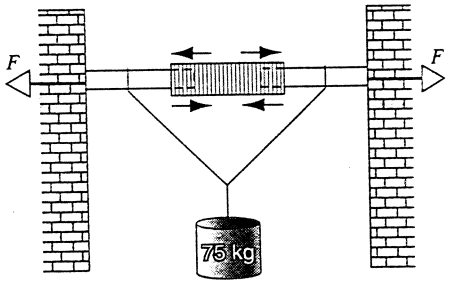


FIGURA 5.32 Esercizio 13.

14. Un baule pesante 240 N è appoggiato sul pavimento. Il coefficiente di attrito statico fra baule e pavimento è 0,41, quello di attrito dinamico 0,32. (a) Qual è la forza orizzontale minima con cui si deve spingere il baule per riuscire a muoverlo? (b) Una volta avviato lo slittamento, qual è la forza orizzontale da applicare al baule per mantenerlo in moto uniforme? (c) Se invece continua a essere applicata la forza che ha dato inizio al movimento, quale sarà l'accelerazione del baule?

15. Il coefficiente di attrito statico fra i pneumatici di un veicolo avente massa 1500 kg e un fondo stradale asciutto è 0,62. Qual è la massima forza frenante ottenibile (a) su strada piana e (b) su una discesa inclinata di 8,6° rispetto al piano orizzontale?

16. Si costruisce una casa in cima a un poggio come in Figura 5.33, il cui declivio ha pendenza di 42° rispetto al piano orizzontale. Frequenti smottamenti avvenuti in seguito suggeriscono di ridurre la pendenza. Se il coefficiente d'attrito del terreno su se stesso è 0,55, di quale angolo ϕ occorre diminuire la pendenza della scarpata?

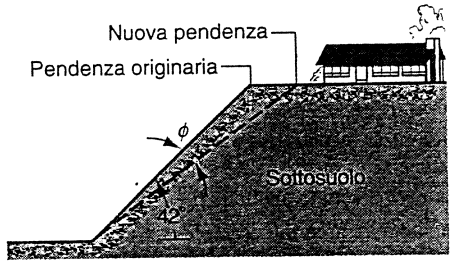


FIGURA 5.33 Esercizio 16.

17. Una cassa di massa 136 kg è appoggiata sul pavimento. Un operaio tenta di spingerla applicando orizzontalmente una forza di 412 N. (a) Dimostrate che, se il coefficiente di attrito statico vale 0,37, la cassa non si sposta. (b) Un secondo operaio interviene in aiuto tirando su la cassa in direzione verticale. Qual è la minima forza verticale che consentirà lo spostamento della cassa appoggiata sul pavimento? (c) Se la forza applicata dal secondo operaio fosse orizzontale anziché verticale, quale valore minimo, da sommare ai 412 N del primo, dovrebbe avere per far spostare la cassa?

18. Una studentessa vuole determinare i coefficienti di attrito statico e dinamico fra una scatola e una tavola di legno. Sistema la scatola sulla tavola e ne solleva gradatamente un'estremità. Quando l'angolo di inclinazione rispetto al piano orizzontale raggiunge i 28,0° la scatola comincia a scivolare e scende per 2,53 m lungo la tavola in 3,92 s. Trovare i coefficienti di attrito.

19. Il calore generato per attrito dagli sci è il più importante fattore che favorisce la discesa. Lo sci inizialmente è come incollato alla pista, ma una volta avviatosi scioglie la neve sottostante. La sciolina, essendo idrorepellente, impedisce che la suola dello sci si bagni e riduce l'attrito con il sottile strato d'acqua formatosi sulla superficie della neve. Una rivista sportiva segnala che un nuovo tipo di plastica rende la suola dello sci ancor più repellente, e che su un tratto di 203 m in leggera pendenza uno sciatore riduce il tempo di discesa da 61 a 42 s. Supponendo una pendenza di 3,0°, calcolare i coefficienti di attrito dinamico nei due casi.

20. Un blocco scivola a velocità costante giù per un piano inclinato di un angolo θ rispetto al piano orizzontale. A un certo istante è spinto su per lo stesso piano alla velocità iniziale v_0. (a) Di quanto risalirà lungo il piano inclinato prima di fermarsi? (b) Riprenderà poi di nuovo a scendere?

21. Un pezzo di ghiaccio scivola giù per un terreno irregolare inclinato di 33,0° nel doppio del tempo che impiega a scendere su un tratto identico ma privo di attrito. Trovare il coefficiente di attrito dinamico fra il ghiaccio e il terreno irregolare.

22. Nella Figura 5.34, A è un blocco di massa 4,4 kg e B un blocco di massa 2,6 kg. I coefficienti di attrito statico e dinamico fra A e il piano d'appoggio sono 0,18 e 0,15 rispettivamente. (a) Determinare qual è la massa minima di un blocco C da collocare sopra A per impedirgli di spostarsi. (b) Se C viene rimosso improvvisamente, qual è l'accelerazione di A?

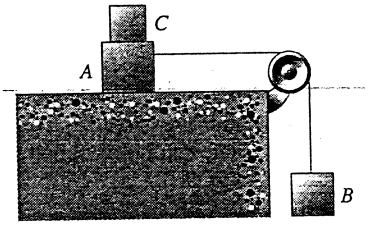


FIGURA 5.34 Esercizio 22.

23. Un blocco di massa 4,8 kg posto su un piano inclinato di 39° rispetto al piano orizzontale è soggetto a una forza orizzontale di 46 N (vedi Figura 5.35), con un coefficiente

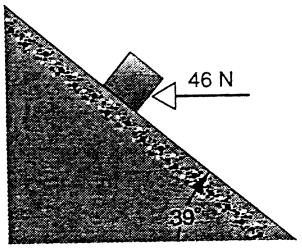


FIGURA 5.35 Esercizio 23.

 ISBN 88-408-1254-7

di attrito statico di 0,33. (a) Con quale accelerazione si sposta il blocco se sale lungo il piano? (b) Sempre sotto l'azione della forza orizzontale, di quanto risalirà lungo il piano se aveva una velocità iniziale di salita di 4,3 m/s? (c) Che cosa accade se successivamente raggiunge il punto più alto?

24. Un blocco d'acciaio di massa 12 kg è fermo su una superficie orizzontale, con un coefficiente di attrito statico pari a 0,52. (a) Qual è l'intensità della forza orizzontale che riuscirà appena a far muovere il blocco? (b) E se la forza è inclinata di 62° rispetto al piano orizzontale verso l'alto? (c) E se agisce invece inclinata di 62° verso il basso, a quale valore massimo può arrivare senza che il blocco si sposti?

25. Un operaio trascina sul pavimento una cassa avente massa di 68 kg tirando una fune inclinata di 17° sopra il piano orizzontale. I coefficienti di attrito statico e dinamico sono 0,52 e 0,35 rispettivamente. (a) Qual è la minima tensione nella fune in grado di far muovere la cassa? (b) Quale sarà la sua accelerazione iniziale?

26. Un cavo si spezza quando la tensione supera il valore di 1,22 kN. Se il cavo, non necessariamente orizzontale, è usato per trascinare una cassa sul pavimento con un coefficiente di attrito statico di 0,35, quale peso massimo può avere la cassa?

27. Il blocco B della Figura 5.36 pesa 712 N. Per un coefficiente di attrito statico fra B e il tavolo pari a 0,25, trovare il peso massimo di A per cui B resterà a riposo.

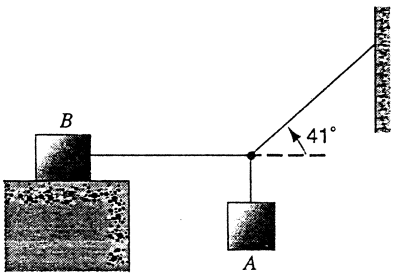


FIGURA 5.36 Esercizio 27.

28. Nella Figura 5.37 il blocco m_1 ha una massa di 4,20 kg e il blocco m_2 di 2,30 kg. Il coefficiente di attrito dinamico fra m_2 e il piano orizzontale è 0,47, mentre quello del piano inclinato è trascurabile. Trovare (a) l'accelerazione dei blocchi e (b) la tensione nel filo.

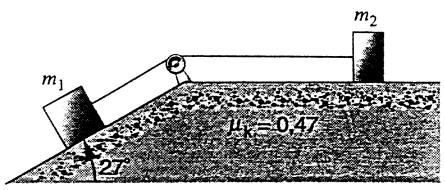


FIGURA 5.37 Esercizio 28.

29. Nella Figura 5.38 l'oggetto B pesa 420 N e l'oggetto A 13,0 N. Tra B e il piano i coefficienti di attrito statico e dinamico sono 0,56 e 0,25 rispettivamente. (a) Trovare l'accelerazione del sistema per B inizialmente fermo, e (b) per B in moto verso l'alto. (c) Qual è l'accelerazione se B scende lungo il piano? Il piano è inclinato di 42,0° rispetto al piano orizzontale.

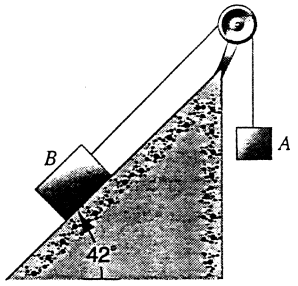


FIGURA 5.38 Esercizio 29.

30. Una cassa scivola giù per una gronda inclinata a sezione retta come indicato nella Figura 5.39. Il coefficiente di attrito dinamico fra la cassa e il materiale di cui è composta la gronda è μ_k. Trovare l'accelerazione della cassa.

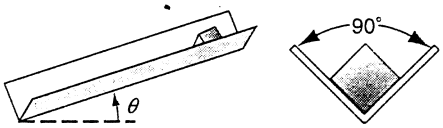


FIGURA 5.39 Esercizio 30.

31. Una lastra di massa 42 kg giace su un pavimento orizzontale privo di attrito. Un blocco di massa 9,7 kg è appoggiato sopra la lastra, come in Figura 5.40. I coefficienti di attrito statico e dinamico fra blocco e lastra sono 0,53 e 0,38 rispettivamente. Sul blocco agisce una forza orizzontale di 110 N. Quali sono le accelerazioni (a) del blocco e (b) della lastra?

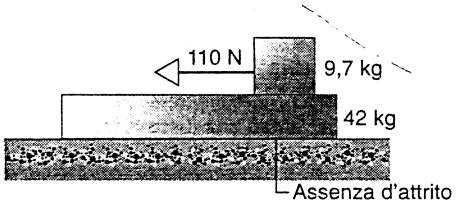


FIGURA 5.40 Esercizio 31.

5.4 Dinamica del moto circolare uniforme

32. Durante una gara olimpica di bob, un equipaggio europeo abborda una curva di raggio 7,5 m con velocità di 100 km/h. A quale accelerazione sono soggetti i membri dell'equipaggio (a) in m/s^2? E (b) in multipli di g?

33. Un'auto del peso di 10,7 kN che viaggia alla velocità di 13,4 m/s abborda una curva non sopraelevata di raggio 61,0 m. (a) Che forza di attrito è richiesta per mantenere l'auto sul suo percorso circolare? (b) Qual è il minimo coefficiente di attrito statico fra pneumatici e strada atto ad assicurare la tenuta di strada?

34. Una curva ad arco di cerchio di un'autostrada è progettata per una velocità media di 60 km/h. (a) Se il raggio della curva è 150 m, quale deve essere l'angolo di pendenza trasversale della curva sopraelevata? (b) Se la curva non fosse sopraelevata, quale dovrebbe essere il coefficiente di attrito minimo fra pneumatici e strada per evitare slittamenti a quella velocità?

35. Un pendolo conico consiste di un ciottolo di massa 53 g appeso a un filo lungo 1,4 m, che ruota su un cerchio di raggio 25 cm. (a) Qual è la velocità tangenziale del ciottolo? (b) E la sua accelerazione? (c) E la tensione nel filo?

ISBN 88-408-1254-7

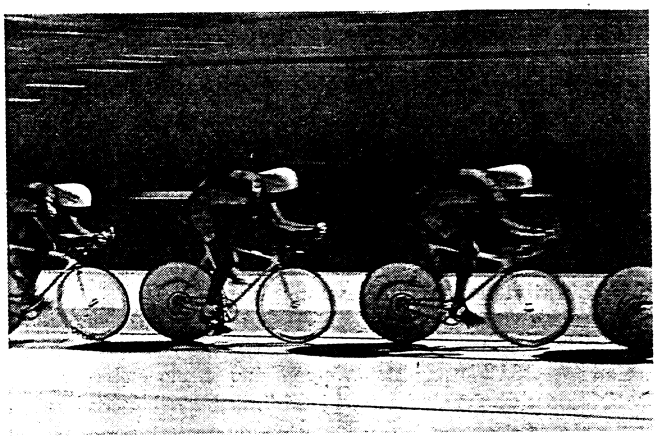


FIGURA 5.41 Esercizio 36.

36. Il ciclista della Figura 5.41 pedala su una pista circolare di raggio 25 m alla velocità scalare costante di 8,7 m/s. Calcolare la forza (intensità e angolo rispetto all'asse verticale) esercitata dalla pista sulla bicicletta.
37. Nel modello di Bohr dell'atomo d'idrogeno l'elettrone gira intorno al nucleo su un'orbita circolare di raggio $5{,}3 \cdot 10^{-11}$ m compiendo $6{,}6 \cdot 10^{15}$ giri/s. Trovare (a) la velocità dell'elettrone, (b) la sua accelerazione e (c) la forza che agisce sull'elettrone. (Questa forza è dovuta all'attrazione fra la carica positiva del nucleo e la carica negativa dell'elettrone.)
38. Un bambino colloca il panierino della merenda sul bordo esterno di una giostra che ha raggio 4,6 m e un periodo di rotazione di 24 s. Quanto deve valere il coefficiente di attrito statico per trattenere il panierino sul bordo della giostra?
39. A un disco di massa m appoggiato su un tavolo privo di attrito (Figura 5.42) è attaccato un filo che passa attraverso un foro al centro del tavolo e tiene appeso un cilindro di massa M. Trovare a che velocità deve girare il disco su un cerchio di raggio r per tener fermo il cilindro.

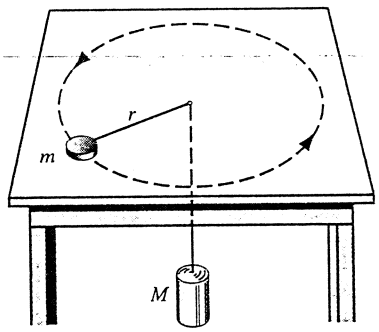


FIGURA 5.42 Esercizio 39.

40. Un manuale dell'automobilista afferma che un guidatore che viaggia alla velocità di 48 km/h e vuole d'improvviso arrestarsi al più presto percorre 10 m prima che il suo piede raggiunga il pedale del freno. L'auto quindi percorre altri 21 m prima di fermarsi. (a) Qual è il coefficiente di attrito adottato in questo calcolo? (b) Qual è il minimo raggio che consente di abbordare una curva a 48 km/h senza slittare?
41. Una curva sopraelevata di un'autostrada ad arco di circonferenza avente raggio 210 m è calcolata per una velocità media di 95 km/h. In un giorno di pioggia un veicolo l'affronta alla velocità di 52 km/h. (a) Qual è il minimo coefficiente di attrito fra pneumatici e strada che permetterà ai veicoli di superare la curva senza slittare verso il basso? (b) Per questo valore del coefficiente, qual è la massima velocità alla quale è possibile superare la curva senza fuoriuscirne?
42. Uno studente di massa 78 kg su una ruota panoramica che gira a velocità costante sta seduto su una bilancia che segna 65 kg quando si trova al punto più alto. (a) Quale sarà la lettura al punto più basso? (b) E quale sarebbe al punto più alto se la ruota girasse a velocità doppia?
43. Un piccolo oggetto è collocato alla distanza di 13,0 cm dal centro del piatto di un giradischi. Si osserva che esso rimane al suo posto quando il disco gira a 33,3 giri/min, ma scivola via quando ruota a 45 giri/min. Entro quali limiti deve essere compreso il coefficiente di attrito statico fra l'oggetto e il piatto rotante?
44. Un aeroplano vola descrivendo una circonferenza orizzontale alla velocità di 482 km/h, con le ali inclinate di 38,2° rispetto al piano orizzontale, come in Figura 5.43. Trovare il raggio del cerchio, ammettendo che la forza centripeta sia fornita esclusivamente dalla portanza perpendicolare alla superficie delle ali.

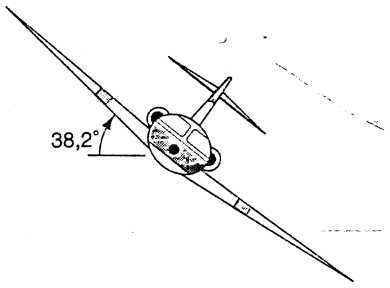


FIGURA 5.43 Esercizio 44.

45. Un gabbiano plana su un cerchio orizzontale con un angolo di inclinazione delle ali stimato di 25° e impiega 13 s per compiere un giro. (a) A che velocità sta volando? (b) Qual è il raggio del cerchio? (vedi "The Amateur Scientist" di Jearl Walker, «Scientific American», marzo 1985, p.122)
46. Un modellino di aeroplano avente massa di 0,75 kg, attaccato a un filo lungo 33 m fissato a terra, vola a velocità costante su un cerchio orizzontale a quota 18 m. Esso compie 4,4 giri/min e la portanza si suppone sia perpendicolare alle ali non inclinate. (a) Qual è la sua accelerazione? (b) E la tensione nel filo? (c) E qual è la portanza delle ali?
47. Supponiamo che, se la Terra non ruotasse, il peso del kilogrammo campione, all'equatore e a livello del mare, fosse esattamente 9,80 N. Prendiamo quindi in considerazione il fatto che la Terra ruota, e che quindi l'oggetto percorre una circonferenza di raggio 6370 km in un giorno. (a) Calcolare la forza centripeta necessaria per trattenere il kilogrammo campione sul suo percorso circolare. (b) Trovare la forza esercitata dal kilogrammo campione su un dinamometro al quale è sospeso all'equatore (il suo peso apparente).

 ISBN 88-408-1254-7

5.5 Forze dipendenti dal tempo

48. La posizione di una particella avente massa 2,17 kg che si muove in linea retta è data da

$$x = (0{,}179\ \text{m/s}^4)t^4 - (2{,}08\ \text{m/s}^2)t^2 + 17{,}1\ \text{m}.$$

Trovare (a) la sua velocità, (b) la sua accelerazione e (c) la forza che agisce sulla particella per $t = 7{,}18$ s.

49. Una particella di massa m è soggetta a una forza netta $F(t)$ data da

$$F(t) = F_0(1 - t/T)i,$$

ossia $F(t) = F_0$ per $t = 0$, che diminuisce linearmente fino a zero nel tempo T. La particella passa per l'origine $x = 0$ alla velocità $v_0 i$. Dimostrare che all'istante $t = T$, in cui $F(t)$ si annulla, la velocità v e la distanza percorsa x sono date da $v(T) = v_0 + a_0 T/2$, e $x(T) = v_0 T + a_0 T^2$, ove $a_0 = F_0/m$ è l'accelerazione iniziale. Confrontare questi risultati con le Equazioni 2.26 e 2.28.

5.6 Sistemi di riferimento non inerziali e forze fittizie

5.7 Limiti delle leggi di Newton

PROBLEMI

1. Un blocco di massa m_1 posto su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo θ_1 rispetto al piano orizzontale è collegato da un filo che passa sopra una puleggia ideale a un altro blocco di massa m_2, posto su un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo θ_2 rispetto al piano orizzontale, come in Figura 5.44. (a) Dimostrare che l'accelerazione di ciascun blocco è data da

$$a = \frac{m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2}{m_1 + m_2} g$$

e che la tensione nel filo è

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2).$$

(b) Calcolare accelerazione e tensione per $m_1 = 3{,}70$ kg ed $m_2 = 4{,}86$ kg, essendo $\theta_1 = 28°$ e $\theta_2 = 42°$. In quale direzione si muove m_1 sul piano inclinato? (c) Per gli stessi valori di m_1 e degli angoli θ, determinare i valori di m_2 per i quali m_1 accelera in salita, accelera in discesa e non accelera.

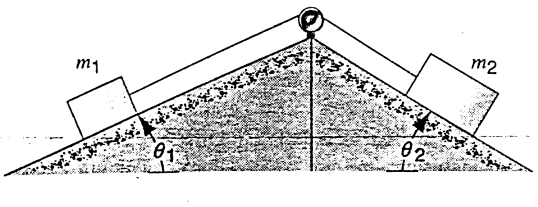


FIGURA 5.44 Problema 1.

2. Una forza F agisce direttamente sull'asse della puleggia di Figura 5.45. Puleggia e corda sono di massa trascurabile, e il cuscinetto privo di attrito. Alle estremità della corda che passa sopra la puleggia sono appesi due oggetti, $m_1 = 1{,}2$ kg ed $m_2 = 1{,}9$ kg, che è appoggiato al suolo. (a) Qual è il massimo valore della forza F per cui m_2 rimane a contatto del suolo? (b) Qual è la tensione nella corda per un valore di F uguale a 110 N? (c) Con la tensione calcolata in (b), qual è l'accelerazione di m_1?

3. Due particelle, di uguale massa m, sono collegate da una cordicella orizzontale di lunghezza $2L$, come in Figura 5.46. Una forza costante verticale F orientata verso il basso è applicata al centro della cordicella (punto $x = 0$). Dimostrare che l'accelerazione di ciascuna delle due masse in direzione perpendicolare a F è data da

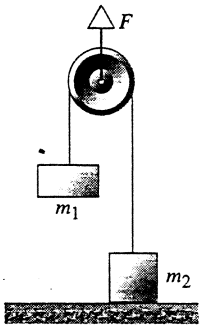


FIGURA 5.45 Problema 2.

$$a_x = \frac{F}{2m} \frac{x}{(L^2 - x^2)^{1/2}},$$

ove x è la distanza di una particella dalla linea di azione di F. Esaminate il caso in cui $x = L$.

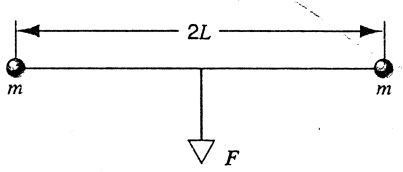


FIGURA 5.46 Problema 3.

4. Una forza orizzontale F di 50 N spinge un blocco del peso di 24 N contro una parete verticale, come in Figura 5.47. I coefficienti di attrito statico e dinamico fra parete e blocco sono $\mu_s = 0{,}60$ e $\mu_k = 0{,}40$. Supposto che il blocco sia inizialmente fermo (a) comincerà a muoversi? (b) Quale forza esercita la parete sul blocco?

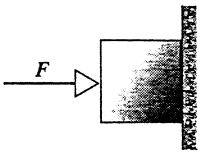


FIGURA 5.47 Problema 4.

5. Un blocco di massa 7,96 kg è fermo su un piano inclinato di 22,0° sul piano orizzontale, come in Figura 5.48. I coefficienti d'attrito sono $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}15$. (a) Qual è la forza minima applicata parallelamente al piano che impedirà al blocco di scivolare in giù? (b) Qual è la forza minima applicata parallelamente al piano per la quale il blocco comincerà a scivolare verso l'alto? (c) Quale forza applicata parallelamente al piano farà salire il blocco a velocità costante?

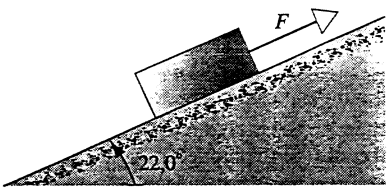


FIGURA 5.48 Problema 5.

6. Un operaio vuole ammucchiare in cortile della sabbia in un'area circolare di raggio R, come in Figura 5.49, senza spargerne intorno. Dimostrare che il massimo volume di sabbia che si può ammucchiare è $\pi\mu_s R^3/3$, ove μ_s è il coefficiente di attrito statico di sabbia contro sabbia. (Il volume del cono è $Ah/3$, ove A è l'area della base e h l'altezza del cono.)

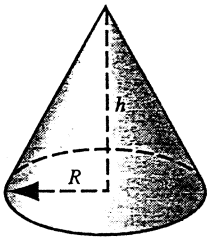


FIGURA 5.49 Problema 6.

7. Il manico di uno strofinaccio da pavimento di massa m forma un angolo θ con l'asse verticale, come in Figura 5.50. Siano μ_k e μ_s i coefficienti di attrito fra lo strofinaccio e il pavimento. Si ignori la massa del manico. (a) Trovare il valore della forza F orientata lungo il manico, atta a far scorrere l'attrezzo sul pavimento a velocità uniforme. (b) Dimostrare che, se θ è inferiore a un certo valore θ_0, per quanto grande sia la forza F orientata lungo il manico non si può far scivolare lo strofinaccio sul pavimento. Quant'è l'angolo θ_0?

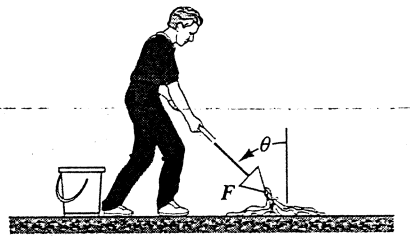


FIGURA 5.50 Problema 7.

8. La Figura 5.51 rappresenta la sezione verticale di una strada tagliata nel fianco di una montagna. La linea continua AA' indica un piano di discontinuità lungo il quale può verificarsi uno smottamento. Il blocco B direttamente sovrastante la strada è separato dalla roccia a monte da una larga fenditura, per cui soltanto la forza di attrito fra il blocco e la possibile superficie di frattura ne impedisce lo slittamento. La massa del blocco è $1{,}8 \cdot 10^7$ kg, l'angolo di immersione del piano di clivaggio è 24°, e il coefficiente di attrito statico fra blocco e piano è 0,63. (a) Dimostrare che il blocco non smotterà. (b) L'acqua filtra nella fenditura, esercitando una forza di pressione idrostatica F parallela all'inclinazione del blocco. Calcolare il minimo valore di F che innescherà lo smottamento.

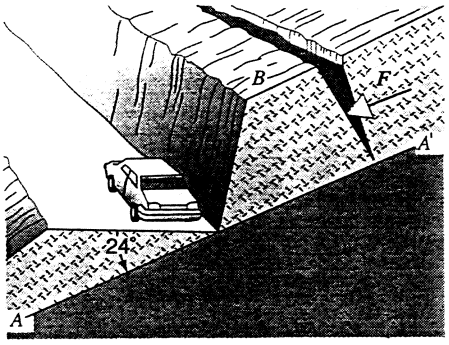


FIGURA 5.51 Problema 8.

9. I due blocchi di Figura 5.52, $m = 16$ kg ed $M = 88$ kg, sono liberi di spostarsi. Il coefficiente di attrito statico fra i due blocchi è $\mu_s = 0{,}38$, mentre la superficie del pavimento è priva di attrito. Qual è la minima forza orizzontale atta a trattenere m contro M?

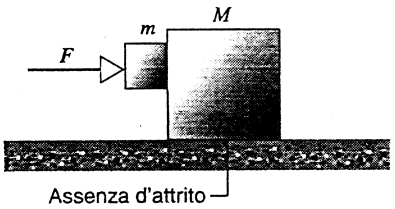


FIGURA 5.52 Problema 9.

10. Due oggetti, di masse $m_1 = 1{,}65$ kg ed $m_2 = 3{,}22$ kg, sono collegate da una barretta di massa trascurabile parallela a un piano inclinato di un angolo $\theta = 29{,}5°$, su cui entrambi possono scivolare. Scendono lungo il piano, essendo m_1 trascinata da m_2, come appare in Figura 5.53. I coefficienti di attrito dinamico fra gli oggetti e il piano inclinato sono rispettivamente $\mu_1 = 0{,}226$ e $\mu_2 = 0{,}127$. Calcolare (a) l'accelerazione comune ai due oggetti e (b) la tensione nella barretta. (c) Quali saranno i risultati di (a) e (b) se si inverte la posizione dei due oggetti, cioè m_2 trascina m_1?

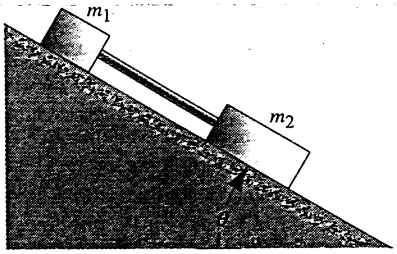


FIGURA 5.53 Problema 10.

11. Una fune di massa trascurabile scavalca un mozzo di legno di raggio r, in modo da poter sollevare dal suolo un oggetto molto pesante di peso P, come in Figura 5.54. Il coefficiente di attrito radente fra fune e mozzo è μ. Dimostrare che la minima forza diretta verso il basso da applicare alla fune per sollevare il carico è

$$F = Pe^{\pi\mu}.$$

(*Suggerimento*: la soluzione di questo problema richiede il calcolo integrale.)

 ISBN 88-408-1254-7

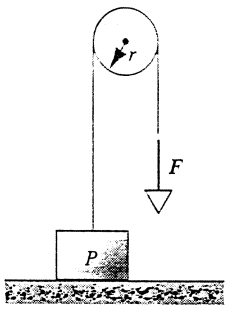


FIGURA 5.54 Problema 11.

12. Un blocco di massa 4,40 kg è collocato sopra un altro di massa 5,50 kg. Per far scivolare il blocco superiore rispetto all'altro, tenuto fisso, occorre applicargli una forza orizzontale di 12,0 N. Appoggiamo quindi l'insieme dei due blocchi su una superficie orizzontale priva di attrito, come in Figura 5.55. Trovare (a) la forza orizzontale massima F che si può applicare al blocco inferiore per farli muovere insieme, (b) l'accelerazione corrispondente e (c) il coefficiente di attrito statico fra i due blocchi.

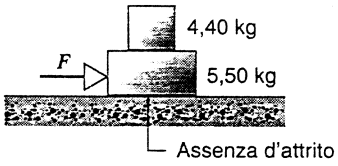


FIGURA 5.55 Problema 12.

13. Il pilota di un'auto che viaggia alla velocità di 85 km/h avvista una barriera che ostruisce la strada a 62 m di distanza. (a) Qual è il minimo coefficiente di attrito statico fra i pneumatici e la strada che gli permetterà di fermarsi senza investire la barriera? (b) Supponiamo che lo stesso pilota entri a 85 km/h in un grande parcheggio vuoto. Qual è il minimo coefficiente di attrito statico che gli permetterà di far curvare l'auto su un raggio di 62 m, evitando così di andare a sbattere contro un muro che si trova di fronte a 62 m?
14. Un'auto viaggia a velocità costante su una strada diritta ma molto ondulata. In un tratto incontra un dosso e un avvallamento aventi entrambi lo stesso raggio di 250 m, come indicato in Figura 5.56. (a) Quando l'auto passa sopra il dosso, è soggetta a una forza normale pari a metà del suo peso di 16 kN. Quale sarà la forza normale quando passa in fondo all'avvallamento? (b) Qual è la massima velocità che si potrà tenere per evitare il distacco dalla strada in cima al dosso? (b) E alla velocità così calcolata quale sarà la forza nomale che agisce sul veicolo quando è in fondo all'avvallamento?

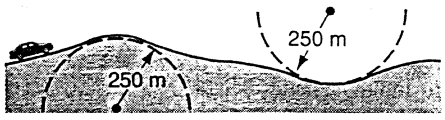


FIGURA 5.56 Problema 14.

15. Una monetina è posta su un giradischi orizzontale, che compie esattamente tre giri in 3,3 s. (a) Qual è la velocità tangenziale della monetina se giace alla distanza di 5,2 cm dal centro di rotazione? (b) Qual è, in queste condizioni, l'accelerazione della monetina (intensità e direzione)? (c) Qual è, sempre nelle stesse condizioni, la forza di attrito statico fra la monetina, di massa 1,7 g, e il giradischi? (d) E qual è il coefficiente di attrito statico fra la monetina e il giradischi se essa scappa via quando è collocata a più di 12 cm dal centro di rotazione?
16. Un certo filo può sopportare senza rompersi una tensione di 40 N. Un bambino lega a un pezzo di filo un sasso di massa 0,4 kg e, tenendo l'altro estremo, lo fa roteare su una circonferenza verticale di raggio 0,9 m, aumentando gradatamente la velocità fino a che il filo si spezza. (a) In quell'istante in quale punto della sua orbita si trova il sasso? (b) E qual è la sua velocità?
17. Una palla di massa 1,34 kg è attaccata a un'asta verticale rigida con due tratti di filo di massa trascurabile di lunghezza 1,70 m ciascuno, fissati all'asta in due punti a distanza di 1,70 m tra loro. Il sistema ruota intorno all'asse dell'asta, e, come si vede nella Figura 5.57, i fili sono tesi formando con l'asta un triangolo equilatero. La tensione nel filo superiore è 35,0 N. (a) Trovare la tensione nel filo inferiore. (b) Calcolare la forza netta sulla palla nell'istante rappresentato nella figura. (c) Qual è la velocità della palla?

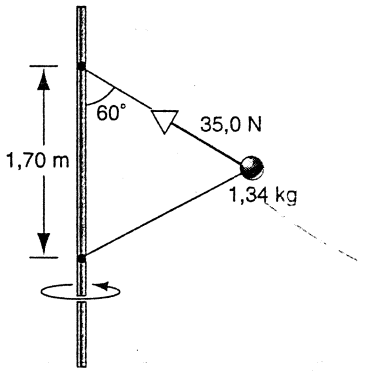


FIGURA 5.57 Problema 17.

18. Un cubetto di massa m è all'interno di un imbuto (Figura 5.58) che ruota intorno al proprio asse verticale a velocità costante di ω giri/s. La parete dell'imbuto forma un angolo

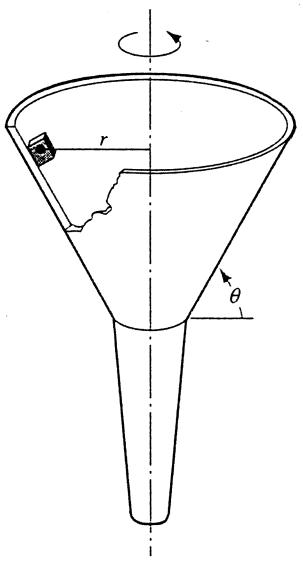


FIGURA 5.58 Problema 18.

ISBN 88-408-1254-7

θ con il piano orizzontale. Il centro del cubetto, che aderisce a una parete dell'imbuto, si trova a una distanza r dall'asse; il coefficiente di attrito statico fra cubetto e parete è μ_s. Trovare (a) il massimo e (b) il minimo valore di ω per i quali il cubetto rimane fermo rispetto all'imbuto.

19. A causa della rotazione della Terra, può accadere che un filo a piombo non sia diretto esattamente secondo la direzione della forza di gravità terrestre, ma sia leggermente deviato. (a) Dimostrare che l'angolo di deviazione θ in radianti in un luogo a latitudine L vale

$$\theta = \left(\frac{2\pi^2 R}{gT^2}\right) \sin(2L),$$

ove R è il raggio della Terra e T il periodo di rotazione terrestre. (b) A quale latitudine questa deviazione raggiunge il valore massimo? E quanto vale? (c) Qual è la deviazione ai poli? E all'equatore?

20. Una particella di massa m si trova in stato di quiete nel punto $x = 0$. Al tempo $t = 0$ una forza data dall'espressione $F = F_0 e^{-t/T}$ è applicata nella direzione $+x$; F_0 e T sono costanti. Per $t = T$ la forza si annulla. A questo istante in cui la forza è nulla (a) qual è la velocità della particella e (b) dove si trova?

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Un'automobile viaggia a velocità costante trascinandosi dietro mediante una corda elastica un blocco di legno avente massa $m = 200$ kg. La forza esercitata sul blocco dalla corda dipende dalla lunghezza della corda, ed è data da $F = (400\ \text{N/m})(l - 10\ \text{m})$. Questa forza è però nulla se $l < 10$ m. Il coefficiente di attrito statico fra blocco e terreno è $\mu_s = 0{,}60$, e quello di attrito dinamico $\mu_k = 0{,}50$. Scrivete un programma sul calcolatore per valutare numericamente il moto del blocco nelle seguenti situazioni: (a) il blocco è inizialmente a riposo e l'automobile è inizialmente a 10 m di distanza e si allontana dal blocco a una velocità costante di 5 m/s. (b) Il blocco è inizialmente a riposo e l'automobile è inizialmente a 10 m di distanza e si allontana dal blocco a una velocità costante di 20 m/s.

2. Partendo da ferma, una persona spinge una cassa di massa 95 kg su terreno irregolare con un a forza data da $F = 200e^{-0{,}15t}$, ove F risulta in newton e t in secondi. La forza decresce con legge esponenziale perché la persona si stanca. Mentre la cassa si muove si oppone al moto una forza d'attrito costante. (a) Quanto tempo dopo la partenza si ferma la cassa? (b) Che distanza ha percorso? (c) Qual è la precisione di questi risultati? (Provate con il metodo di Eulero assumendo un intervallo di tempo inizialmente uguale a $\Delta t = 0{,}01$ s. Ripetete il calcolo usando un intervallo $\Delta t = 0{,}001$ s. Confrontate i risultati per avere una stima della precisione ottenuta.)

CAPITOLO 6

QUANTITÀ DI MOTO

Le leggi di Newton sono di grande utilità per risolvere una vasta gamma di problemi della dinamica. Esistono tuttavia problemi per i quali, pur essendo sempre valide le leggi di Newton nella forma in cui le abbiamo definite, possiamo trovarci ad avere una conoscenza delle forze in gioco insufficiente ad analizzare il moto. Sono i problemi che comportano urti *fra corpi.*

In questo capitolo impareremo ad analizzare urti fra coppie di oggetti ricorrendo a una nuova grandezza chiamata quantità di moto *o* momento lineare. *Ci accorgeremo che la legge di conservazione della quantità di moto, che è una delle fondamentali leggi di conservazione della fisica, può essere applicata allo studio degli urti fra oggetti di ogni tipo e dimensione, dalle particelle subatomiche alle galassie.*

6.1 URTI

In un urto due corpi esercitano forze l'uno sull'altro durante un intervallo di tempo ben identificabile, così che possiamo separare l'evento in tre parti: prima, durante e dopo l'urto. Prima e dopo possiamo ritenere che i due corpi siano abbastanza distanti fra loro da non esercitare alcuna forza tra di loro. Durante l'urto invece essi interagiscono esercitando due forze di uguale intensità e direzione, ma orientate in verso opposto d'accordo con la terza legge di Newton. Ammettiamo che queste forze siano di intensità molto maggiore di qualsiasi altra forza dovuta ad altri oggetti eventualmente presenti nelle vicinanze. Il moto dei due corpi (o quantomeno il moto di uno dei due) cambia piuttosto bruscamente durante l'urto, ciò che fa sì che si assista a un cambiamento abbastanza netto della situazione da prima a dopo la collisione.

Quando una mazza da baseball colpisce la palla, per esempio, il tempo che intercorre fra l'inizio e la fine dell'urto può essere determinato con una buona precisione. La mazza rimane in contatto con la palla per un intervallo di tempo assai breve rispetto al tempo durante il quale teniamo la palla sotto osservazione. Durante l'urto la mazza esercita sulla palla un'intensa forza che varia nel tempo in un modo assai complesso, e si può valutare soltanto con grande difficoltà. Sia la palla sia la mazza si deformano durante la collisione (Figura 6.1). Le forze che agiscono durante un tempo molto breve rispetto alla durata dell'osservazione del sistema sono chiamate *forze impulsive*.

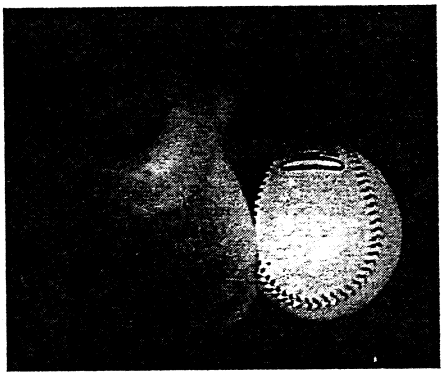


FIGURA 6.1 Fotografia a rapida esposizione di una mazza da baseball che colpisce una palla. Notare la deformazione della palla, che rivela la grande forza impulsiva esercitata dalla mazza.

 ISBN 88-408-1254-7

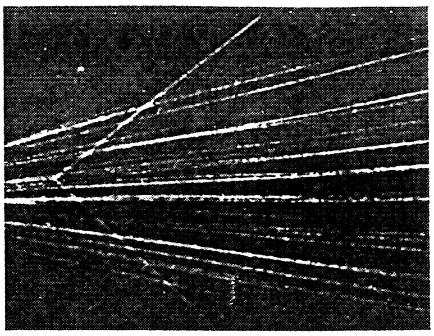


FIGURA 6.2 Una particella alfa urta un nucleo di elio in una camera a nebbia. La maggior parte delle particelle incidenti, provenienti da sinistra, passa indisturbata.

Quando una particella alfa (un nucleo di Elio, ^4He) entra in collisione con un altro nucleo (Figura 6.2), la forza con cui interagiscono può essere la forza elettrostatica di repulsione fra particelle aventi cariche dello stesso segno: in questo caso le due particelle possono anche non arrivare a contatto fra loro, ma possiamo ugualmente definire *urto* o *collisione* questo tipo di interazione, perché una forza relativamente molto grande, esercitata durante un tempo molto breve rispetto alla durata dell'osservazione della particella alfa, ha avuto un effetto molto significativo sul suo moto.

Possiamo perfino parlare di una collisione fra due galassie (Figura 6.3) se siamo disposti a osservarle su una scala dei tempi dell'ordine di milioni o miliardi di anni. (È naturalmente più agevole abbreviare questo tempo mediante una simulazione al computer!).

Gli urti fra particelle elementari costituiscono la principale fonte di informazioni circa la loro struttura interna. Quando due particelle ad alta energia entrano in collisione, i prodotti della collisione sono molto differenti dalle particelle originarie (Figura 6.4): si contano talvolta a centinaia. Studiando le traiettorie delle particelle uscenti e applicando leggi fondamentali si può ricostruire l'evento che le ha generate.

In tutt'altro campo, anche coloro che studiano gli incidenti automobilistici si sforzano di ricostruirne la dinamica. Dai percorsi dei veicoli e dalle deformazioni prodotte dall'urto (Figura 6.5) è possibile dedurre dati fondamentali, quali le velocità e le rotte dei veicoli al momento dell'urto.

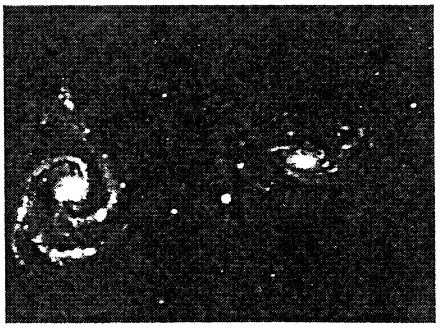
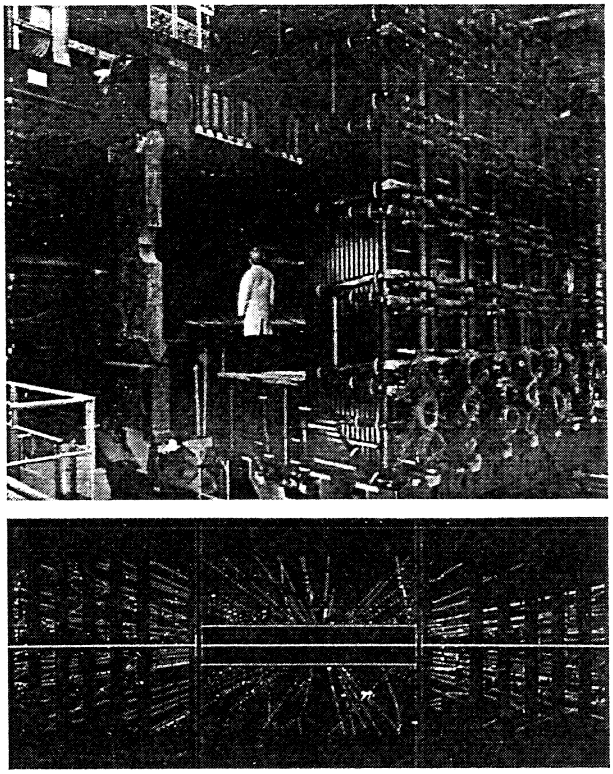


FIGURA 6.3 L'urto fra due galassie.



(a)

(b)

FIGURA 6.4 (a) Il grande rilevatore UA1 impiegato nel generatore di urti fra protoni del CERN, il laboratorio di ricerca sulle particelle a Ginevra, Svizzera. (b) Una ricostruzione al computer dei percorsi delle particelle generate in un urto protone-protone. Queste ricostruzioni furono usate nel 1983 per confermare l'esistenza delle particelle di vita brevissima chiamate W e Z, verificando così la teoria che considera la forza elettromagnetica e la forza nucleare debole come differenti manifestazioni di un'unica forza fondamentale.

Un altro genere di collisione è quella che avviene fra una sonda spaziale e un pianeta, il cosiddetto «effetto fionda», che può provocare l'aumento della velocità della sonda durante un «incontro ravvicinato» con un pianeta (in movimento). La sonda non viene fisicamente a contatto con il pianeta, ma entra nel campo di influenza della sua forza gravitazionale per un tempo molto breve rispetto alla durata del suo viaggio interplanetario. Si giustifica così per questi eventi la definizione di *urto* o collisione. Per esempio, i passaggi della missione Cassini (Figura 5.24) in vicinanza di Venere e della Terra hanno aumentato la velocità della sonda in misura equivalente alla spinta di 75 tonnellate di propellente! Senza questo ausilio gravitazionale il veicolo spaziale non potrebbe raggiungere Saturno (vedi problema 14).

In linea di principio sarebbe possibile affrontare l'analisi di tutti questi tipi di urto alla luce della seconda legge di Newton. Conoscendo il moto iniziale di ciascun corpo e le forze agenti fra loro potremmo adottare i metodi del capitolo 5 per trovare velocità e posizione di ciascuno al momento dell'urto. Vi sono tuttavia due ragioni che ne rendono impossibile l'applicazione per gli urti da Figura 6.1 a Figura 6.5: (1) per alcuni non conosciamo esattamente le relazioni esistenti fra le forze interagenti e gli oggetti, e (2) i



FIGURA 6.5 Uno scontro fra due automobili. Il principio di conservazione della quantità di moto è utile ai periti per ricostruire le velocità dei due veicoli prima dell'urto.

corpi che entrano in collisione sono costituiti da molte particelle, e sarebbe vano tentare di applicare le leggi di Newton alla forza agente fra ogni singola particella di uno di essi e ciascuna particella dell'altro.

È questo il problema fondamentale. Abbiamo due oggetti aventi distinte condizioni di moto che sono inizialmente tanto distanti da non esercitare l'uno sull'altro una forza misurabile. A un certo istante si avvicinano tanto che ciascuno interagisce con l'altro e modifica il proprio moto. La forza d'interazione agisce per un tempo relativamente breve rispetto alla durata del moto dei due oggetti; alla fine essi si separano nuovamente e cessano di interagire. Possiamo osservare con successo il moto prima e dopo l'urto, ma non siamo in condizioni di osservare o misurare tutte le variabili durante quel breve intervallo.

Se conosciamo le condizioni iniziali del moto dei due corpi, possiamo trovarne le condizioni finali pur non conoscendo la forza che ne causa la variazione? A sorpresa, la risposta è "sì"! Nel prossimo paragrafo definiremo una nuova grandezza della dinamica che ci consentirà di analizzare queste collisioni.

6.2 LA QUANTITÀ DI MOTO

Per analizzare gli urti occorre introdurre una nuova grandezza, la *quantità di moto* di un corpo. (Dato che si riferisce ai moti traslatori, la si chiama anche *momento lineare*, un nome che la mette meglio in relazione con un'altra analoga grandezza che definiremo più avanti per il moto rotatorio, il *momento angolare*.) La quantità di moto $\boldsymbol{p}$ di un corpo è definita come il prodotto della sua massa per la sua velocità:

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} . \tag{6.1}$$

Essendo il prodotto di un vettore per uno scalare, anche la quantità di moto deve essere un vettore. L'Equazione 6.1 indica che la direzione di $\boldsymbol{p}$ coincide con la direzione di $\boldsymbol{v}$. E poiché $\boldsymbol{p}$ dipende da $\boldsymbol{v}$, *la quantità di moto (come la velocità) dipende dal sistema di riferimento adottato dall'osservatore, che deve sempre essere specificato.*

Newton, nei suoi celebri *Principia*, espresse la seconda legge del moto in termini di quantità di moto. Con la terminologia odierna, la seconda legge si esprime così:

> *la derivata rispetto al tempo della quantità di moto è uguale alla risultante delle forze che agiscono sul corpo ed è diretta come quella forza.*

Espresso in forma simbolica,

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} , \tag{6.2}$$

ove $\sum \boldsymbol{F}$ rappresenta la risultante delle forze che agiscono sul corpo.

Per una singola particella di massa costante questa forma della seconda legge è equivalente a $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, che abbiamo usato finora. Infatti per m costante si ha

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a} .$$

L'equivalenza delle due espressioni,

$$\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \quad \text{e} \quad \sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} ,$$

che vale in meccanica classica per una singola particella, presuppone che la massa m sia costante e possa quindi essere portata fuori dal simbolo di derivata: $\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t = m(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t)$. Per i problemi che esaminiamo in questo capitolo possiamo ritenere che ciò sia vero. Nel paragrafo 7.6 troveremo le leggi di Newton applicate a sistemi in cui la massa varia, come razzi che scaricano i gas combusti.

6.3 IMPULSO E QUANTITÀ DI MOTO

In questo paragrafo studieremo le relazioni esistenti tra la forza che agisce su un corpo durante un urto e la variazione della sua quantità di moto. Durante l'urto la forza varia nel

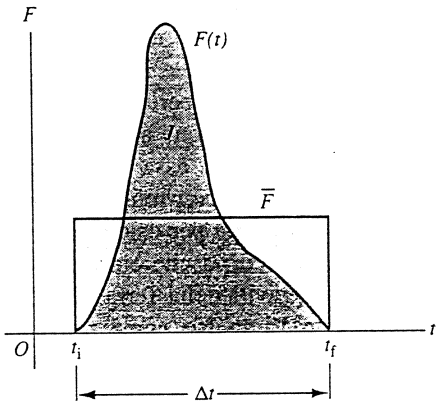


FIGURA 6.6 Una forza impulsiva $F(t)$ varia in modo arbitrario nel corso di un urto che dura da t_i a t_f. L'area al di sotto della curva $F(t)$ equivale all'impulso J, e il rettangolo determinato dalla forza media $\overline{F}$ ha la stessa area.

 ISBN 88-408-1254-7

tempo. Il grafico della Figura 6.6 dà un esempio del modo in cui l'intensità della forza può variare in funzione del tempo: essa si esercita soltanto durante la fase di collisione, che inizia al tempo t_i e termina al tempo t_f, ed è nulla fuori di questo intervallo di tempo.

Dalla seconda legge di Newton scritta nella forma, $\sum \boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ (Equazione 6.2), ricaviamo $d\boldsymbol{p} = \sum \boldsymbol{F}\, dt$. Per trovare la variazione totale della quantità di moto durante la fase di collisione, integriamo $d\boldsymbol{p}$ nell'intervallo da t_i (quantità di moto $= \boldsymbol{p}_i$) a t_f (quantità di moto $= \boldsymbol{p}_f$):

$$\int_{\boldsymbol{p}_i}^{\boldsymbol{p}_f} d\boldsymbol{p} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \boldsymbol{F}\, dt \,. \tag{6.3}$$

La parte sinistra della (6.3) rappresenta la variazione della quantità di moto $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i$, mentre a destra troviamo una nuova quantità chiamata *impulso*. Per qualsiasi forza arbitraria $\boldsymbol{F}$, l'impulso $\boldsymbol{J}$ è dato da

$$\boldsymbol{J} = \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}\, dt \,. \tag{6.4}$$

L'impulso, che dipende dall'intensità della forza e dalla sua durata, è un vettore che, come indica l'Equazione 6.3, ha le stesse dimensioni di una quantità di moto.

La parte destra della (6.3) rappresenta l'impulso della forza *risultante* o forza netta: $\boldsymbol{J}_{net} = \int \sum \boldsymbol{F}\, dt$. La (6.3) diventa così

$$\boldsymbol{J}_{net} = \Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_f - \boldsymbol{p}_i \,, \tag{6.5}$$

espressione matematica del *teorema dell'impulso*:

> *l'impulso della forza risultante che agisce su una particella durante un certo intervallo di tempo è uguale alla variazione della quantità di moto della particella in quell'intervallo di tempo.*

L'Equazione 6.5, esprimendo una relazione fra vettori, si scompone in tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} J_{net,x} &= \Delta p_x = p_{fx} - p_{ix} \,, \\ J_{net,y} &= \Delta p_y = p_{fy} - p_{iy} \,, \\ J_{net,z} &= \Delta p_z = p_{fz} - p_{iz} \,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Nonostante in questo capitolo si usi l'Equazione (6.5) soltanto in casi che riguardano forze impulsive (ossia forze di durata assai breve rispetto al periodo di osservazione del moto dei corpi), questa equazione non è soggetta ad alcuna limitazione a tale proposito: essa è altrettanto generale quanto la seconda legge di Newton dalla quale discende. Potremmo ad esempio usarla per calcolare la variazione di quantità di moto di un corpo che entra nel campo di influenza della forza di gravità della Terra.

Abbiamo definito l'impulso come riferito a una sola forza, ma il teorema dell'impulso considera la variazione di quantità di moto dovuta all'impulso della forza *netta*, ossia all'effetto combinato di tutte le forze che agiscono sulla particella. Nel caso di un urto che interessa due particelle non vi è in generale alcuna distinzione, perché ogni particella subisce soltanto l'azione di una forza, che è generata dall'altra particella. In questo caso, la variazione di quantità di moto di una particella è uguale all'impulso della forza esercitata dall'altra.

Ammettiamo che la forza impulsiva, la cui intensità è rappresentata dal grafico della Figura 6.6, abbia una direzione costante. L'intensità del suo impulso sarà rappresentata dall'area sottesa alla curva $F(t)$, che equivale all'area del rettangolo tracciato nella stessa figura, avente base Δt e altezza $\overline{F}$, ove $\overline{F}$ è l'intensità della *forza media* che agisce durante l'intervallo Δt, ossia

$$J = \overline{F}\Delta t \,. \tag{6.7}$$

In un urto del tipo di quello fra la mazza e la palla della Figura 6.1 è difficile misurare direttamente la forza $F(t)$, ma si può stimare Δt (dell'ordine dei millisecondi) ed ottenere un valore abbastanza verosimile per $\overline{F}$, partendo dall'impulso calcolato secondo la (6.6) in base alla variazione di quantità di moto della palla (vedi Problema svolto 6.1).

Abbiamo definito *urto* un'interazione che avviene durante un intervallo di tempo Δt trascurabile rispetto alla durata dell'osservazione del sistema. Possiamo anche descriverlo come un evento nel quale le forze esterne che possono agire sul sistema nel corso dell'urto sono trascurabili rispetto alle forze impulsive dell'urto. Mentre una mazza da baseball colpisce la palla, o due palle da bigliardo si urtano, le forze esterne continuano ad agire sul sistema. La forza di gravità o l'attrito possono agire su ciascuno dei due corpi, anche con diversa intensità e direzione, senza necessariamente essere annullate da altre forze esterne: durante l'urto si può tuttavia ignorarle senza pericolo di commettere errore. Insomma, la variazione di quantità di moto di una particella dovuta a forze esterne che agiscono durante l'urto è trascurabile rispetto alla variazione provocata dalla forza impulsiva dell'urto (Figura 6.7).

Per esempio, quando la mazza colpisce la palla, l'urto dura soltanto qualche millisecondo. Ma poiché la variazione di quantità di moto della palla è grande e la durata dell'urto è breve, dall'equazione

$$\Delta\boldsymbol{p} = \overline{\boldsymbol{F}}\Delta t \tag{6.8}$$

si deduce che la forza impulsiva media $\overline{\boldsymbol{F}}$ deve essere relati-

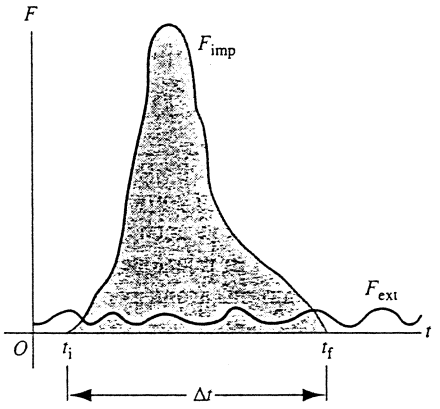


FIGURA 6.7 La forza impulsiva F_{imp} che agisce durante l'urto è in generale molto più intensa di qualsiasi altra forza esterna F_{ext} che possa agire contemporaneamente.

vamente grande, e al suo confronto la forza esterna dovuta alla gravità è trascurabile. Durante l'urto possiamo tranquillamente ignorare l'influenza di questa forza sul moto della palla; e quanto più breve sarà la durata della collisione, tanto maggiore sarà l'attendibilità di questa semplificazione.

PROBLEMA SVOLTO 6.1 Una palla da baseball, che ufficialmente ha una massa di 0,14 kg, mentre vola orizzontalmente alla velocità di 42 m/s (circa 150 km/h) è colpita dalla mazza (Figura 6.1). Si allontana dalla mazza con una direzione che forma un angolo $\phi = 35°$ sopra la direzione di provenienza, alla velocità di 50 m/s. (a) Trovare l'impulso della forza esercitata sulla palla. (b) Supposto che l'urto duri 1,5 ms (0,0015 s), quanto vale la forza media? (c) Trovare la variazione di quantità di moto della mazza.

Soluzione (a) Il grafico della Figura 6.8a riporta i vettori quantità di moto iniziale e finale della palla, p_i e p_f rispettivamente. Le componenti di quest'ultima sono

$$p_{fx} = mv_f \cos\phi = (0{,}14\text{ kg})(50\text{ m/s})(\cos 35°) = 5.7\text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$p_{fy} = mv_f \sin\phi = (0{,}14\text{ kg})(50\text{ m/s})(\sin 35°) = 4.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

In questo sistema di coordinate soltanto la componente (negativa) di p_i secondo l'asse x ha valore diverso da zero:

$$p_{ix} = mv_i = (0{,}14\text{ kg})(-42\text{ m/s}) = -5{,}9\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Dalle Equazioni 6.6 si ricavano le componenti dell'impulso:

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = 5{,}7\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-5{,}9\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 11{,}6\text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = 4{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s} - 0 = 4{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Ciò significa che l'impulso ha intensità

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(11{,}6\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2 + (4{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2} =$$

$$= 12{,}3\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

e agisce in una direzione determinata dall'angolo:

$$\theta = \arctan(J_y/J_x) =$$

$$= \arctan[(4{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s})/(11{,}6\text{ kg}\cdot\text{m/s})] = 19°,$$

misurato al di sopra del piano orizzontale. La Figura 6.8b verifica graficamente che il vettore J dell'impulso corrisponde alla definizione data dalle Equazioni 6.6:

$$J = p_f - p_i = p_f + (-p_i).$$

(b) Dall'Equazione 6.7 otteniamo l'intensità della forza media

$$\overline{F} = J/\Delta t = (12{,}3\text{ kg}\cdot\text{m/s})/(0{,}0015\text{ s}) = 8200\text{ N}.$$

Questa forza agisce nella stessa direzione di J, ossia secondo un angolo di 19° sopra il piano orizzontale. Si noti che questa è la forza *media*; quella *massima* è parecchio maggiore, come si deduce dalla Figura 6.6. E si osservi anche che la forza media $\overline{F}$ (= 8200 N) è molto maggiore di mg = 1,4 N. Si può così affermare che sicuramente la forza impulsiva dell'urto supera di molto la forza esterna (in questo caso la gravità), ed è quindi molto prossima alla forza netta che agisce durante l'urto.

(c) Secondo la terza legge di Newton la forza esercitata dalla palla sulla mazza è uguale e contraria a quella esercitata dalla mazza sulla palla. E quindi per la mazza troviamo

$$\Delta p_x = -11{,}6\text{ kg}\cdot\text{m/s},$$

$$\Delta p_y = -4{,}0\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Si tratta di una variazione grande o piccola? Per rispondere, provate a calcolare la quantità di moto della mazza in movimento.

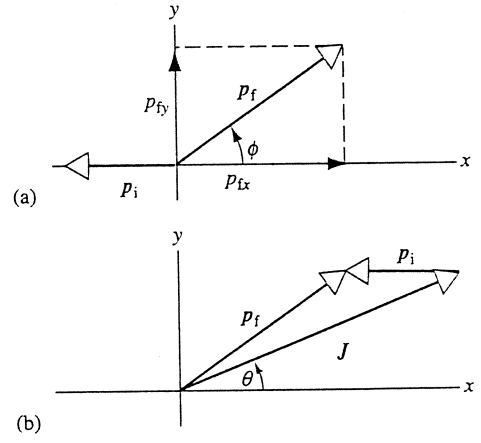


FIGURA 6.8 Problema svolto 6.1. (a) Le quantità di moto iniziale e finale della palla da baseball. (b) La differenza $p_f - p_i$ è uguale all'impulso J.

PROBLEMA SVOLTO 6.2 Un carrello di massa $m_1 = 0{,}24$ kg corre senza attrito su una rotaia alla velocità iniziale di 0,17 m/s. Si scontra con un'altro carrello, fermo, di massa $m_2 = 0{,}68$ kg. Sul primo carrello è montato un dinamometro elettronico, che registra la forza esercitata da un carrello sull'altro nella fase di collisione. Il grafico della Figura 6.9 riporta l'andamento della forza durante l'urto. Trovare la velocità di ciascuno dei due veicoli dopo l'urto.

Soluzione Dobbiamo trovare l'impulso a partire dal grafico che descrive l'andamento della forza. L'impulso dà la variazione di quantità di moto e quindi da esso si deducono le quantità di moto finali dei due carrelli. L'impulso $\int F\,dt$ è uguale all'area sottesa al grafico $F(t)$ di Figura 6.9, ossia all'area di un triangolo:

$$J = \int F\,dt = \tfrac{1}{2}(0{,}014\text{ s} - 0{,}003\text{ s})(10\text{ N}) =$$

$$= 0{,}055\text{ N}\cdot\text{s} = 0{,}055\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Poiché il grafico rappresenta l'intensità della forza, questo integrale dà l'intensità dell'impulso. Assumiamo come verso positivo delle x quello del moto del primo carrello. Allora la componente secondo x

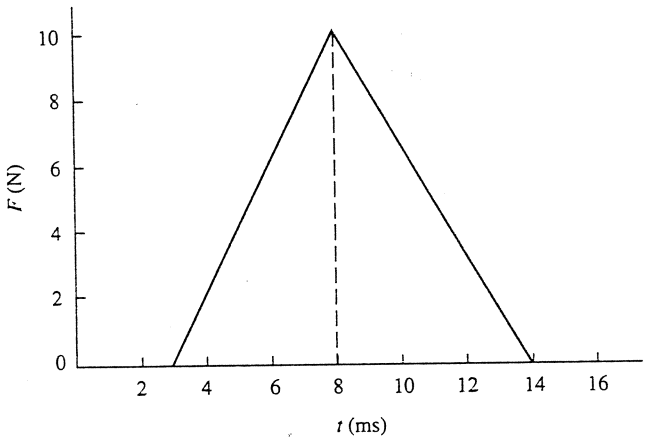


FIGURA 6.9 Problema svolto 6.2.

 ISBN 88-408-1254-7

della forza esercitata dal primo carrello sul secondo è negativa, e così anche la corrispondente componente dell'impulso J. Ma $J_x = \Delta p_x$, così per il primo carrello abbiamo $\Delta p_{1x} = -0{,}055$ kg·m/s, da cui la quantità di moto e le velocità finali risultano

$$p_{1fx} = p_{1ix} + \Delta p_{1x} = (0{,}24 \text{ kg})(0{,}17 \text{ m/s}) - 0{,}055 \text{ kg·m/s} = \\ = -0{,}014 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$v_{1fx} = \frac{p_{1fx}}{m_1} = \frac{-0{,}014 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0{,}24 \text{ kg}} = -0{,}058 \text{ m/s} = -5{,}8 \text{ cm/s}.$$

Il primo carrello si muove dopo l'urto nel verso negativo di x.

La forza su m_2, per la terza legge di Newton, è uguale e contraria a quella su m_1, ed è quindi orientata secondo il verso positivo di x. E come le forze hanno uguale intensità, anche gli impulsi hanno uguale intensità, ma versi opposti: $J_{2x} = \Delta p_{2x} = +0{,}055$ kg·m/s; la quantità di moto e la velocità finali del carrello 2 sono

$$p_{2fx} = p_{2ix} + \Delta p_{2x} = 0 + 0{,}055 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = +0{,}055 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$v_{2fx} = \frac{p_{2fx}}{m_2} = \frac{+0{,}055 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0{,}68 \text{ kg}} = +0{,}081 \text{ m/s} = +8{,}1 \text{ cm/s}.$$

Dopo l'urto il secondo carrello si muove nel verso positivo delle x.

6.4 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

In questo paragrafo analizzeremo gli urti fra due oggetti che potranno essere entrambi in movimento, non necessariamente in una stessa direzione come nel Problema svolto 6.2. Per descrivere il moto dovremo quindi ricorrere ai vettori.

La Figura 6.10a presenta il problema nei suoi termini più generali. Un corpo di massa m_1 si muove inizialmente alla velocità v_{1i} e possiede quindi una quantità di moto $p_{1i} = m_1 v_{1i}$. Si scontra con un corpo di massa m_2 che si muove inizialmente alla velocità v_{2i} e possiede quindi una quantità di moto $p_{2i} = m_1 v_{2i}$. Concentriamo la nostra attenzione sui movimenti dei due corpi, che definiamo il nostro *sistema*. Supponiamo che il sistema formato dai due corpi sia isolato dall'ambiente circostante, così che nessun'altra forza agisca sui due corpi durante la collisione oltre alla forza impulsiva che ciascun corpo esercita sull'altro. Dopo l'urto (Figura 6.10b) m_1 si muove alla velocità v_{1f} con la quantità di moto $p_{1f} = m_1 v_{1f}$, mentre m_2 ha la velocità v_{2f} e la quantità di moto $p_{2f} = m_2 v_{2f}$.

In qualsiasi istante la quantità di moto totale del sistema dei due corpi vale

$$P = p_1 + p_2, \tag{6.9}$$

che possiamo valutare prima, dopo e durante la collisione. Derivando la 6.9 rispetto al tempo otteniamo l'equazione

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = \sum F_1 + \sum F_2, \tag{6.10}$$

nella quale, in base all'Equazione 6.2, per ogni corpo abbiamo sostituito alla derivata dp/dt la forza risultante agente sul corpo. Prima dell'urto per ipotesi nessuna forza agisce sui due corpi, per cui $\sum F_1 = 0$ e $\sum F_2 = 0$, e quindi $dP/dt = 0$. Analogamente dopo l'urto è ancora $dP/dt = 0$, perché nessuna forza agisce sui due corpi. Durante l'urto la sola forza che agisce sul corpo 1 è F_{12}, dovuta al corpo 2; e analogamente F_{21} è l'unica forza esercitata sul corpo 2 dal corpo 1. F_{12} e F_{21} formano una coppia azione-reazione, per cui $F_{12} = -F_{21}$, e $F_{12} + F_{21} = 0$, e anche $dP/dt = 0$. L'Equazione 6.10 ha dunque lo stesso valore prima, durante e dopo l'urto, ossia

$$\frac{dP}{dt} = 0. \tag{6.11}$$

Se la derivata rispetto al tempo di una funzione è nulla, il valore della funzione non varia col tempo e quindi è costante:

$$P = \text{costante}. \tag{6.12}$$

Ciò significa che la quantità di moto totale $p_1 + p_2$ rimane uguale prima dell'urto, durante l'urto e dopo l'urto, sia in intensità sia in direzione e verso. Anche se p_1 e p_2 possono essere variati a causa dell'urto, la loro somma vettoriale è costante, come mostra la Figura 6.10.

Un altro modo di esprimere questo risultato è

$$P_i = P_f, \tag{6.13}$$

ove $P_i = p_{1i} + p_{2i}$ è la quantità di moto totale del sistema prima dell'urto, e $P_f = p_{1f} + p_{2f}$ è la quantità di moto totale del sistema dopo l'urto.

Le Equazioni 6.11, 6.12 e 6.13 sono espressioni matematiche, fra loro equivalenti, del *principio di conservazione della quantità di moto* per un sistema isolato formato da due corpi:

> *quando la forza esterna netta che agisce su un sistema è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante.*

È questo un risultato generale, valido per qualsiasi tipo di interazione fra due corpi. Non è nemmeno necessario che i due corpi si comportino come particelle perché questo principio sia valido (vedi Figura 6.5). Anche se l'abbiamo dedotto dall'esempio di un sistema di due soli corpi, il princi-

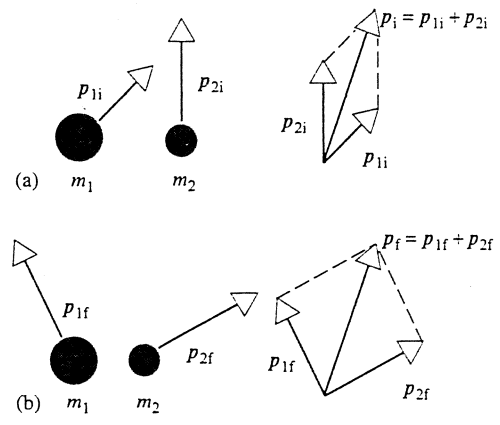


FIGURA 6.10 (a) Due oggetti e le loro quantità di moto prima dell'urto. (b) Gli oggetti e le loro quantità di moto dopo l'urto. Si noti che i vettori della quantità di moto totale P_i e P_f sono identici prima e dopo l'urto.

pio di conservazione della quantità di moto è assolutamente generale, e si applica a qualsiasi raggruppamento o sistema di corpi entro il quale le uniche forze che agiscono sono quelle che i corpi esercitano reciprocamente fra loro.

La quantità di moto è una grandezza vettoriale; affinché rimanga costante, occorre che rimanga tale ciascuna delle sue tre componenti:

$$P_x = \text{costante}, \quad P_y = \text{costante}, \quad P_z = \text{costante}. \quad (6.14)$$

La componente x non cambia durante la collisione, e lo stesso dicasi per le componenti y e z. Dato che abbiamo dedotto il principio di conservazione della quantità di moto partendo dalle leggi di Newton, esso è valido in ogni sistema di riferimento inerziale. Diversi osservatori, che descrivano il comportamento di uno stesso raggruppamento isolato di corpi secondo i rispettivi sistemi di riferimento inerziali, potranno trovare diversi valori per le quantità di moto iniziale e finale, ma saranno concordi nel riconoscere che esse sono uguali fra loro. Se la quantità di moto si conserva costante in un sistema di riferimento inerziale, rimane tale in *qualsiasi* altro sistema di riferimento inerziale.

I principi di conservazione hanno un'importanza fondamentale come strumenti di analisi e di interpretazione di processi fisici. Ci consentono di confrontare il comportamento di un sistema «prima» e «dopo», senza preoccuparci di studiare in dettaglio ciò che accade «durante». Per esempio, questo principio di conservazione della quantità di moto non richiede che si definisca quale tipo di forze i corpi esercitino l'uno sull'altro: per qualsiasi tipo di forze agenti all'interno del sistema considerato la quantità di moto totale rimarrà invariata.

Più avanti troveremo altri principi di conservazione, per esempio dell'energia, del momento angolare o della carica elettrica. Sono principi di grande importanza teorica e pratica. Esiste una profonda connessione teorica fra grandezze che si conservano e simmetrie della natura. Così il principio di conservazione della quantità di moto è legato alla simmetria *spaziale* della natura; ciò implica che un esperimento fatto in un luogo dia identici risultati a un uguale esperimento fatto in un altro luogo qualsiasi. Più avanti studieremo un altro principio di conservazione, quello relativo all'energia, che è legato alla simmetria *temporale*: il risultato di un esperimento eseguito oggi sarà uguale al risultato dello stesso esperimento fatto ieri. E alla luce di queste connessioni possiamo affermare che questi due principi di conservazione sono validi in tutto l'universo, purché la natura dello spazio e del tempo sia uguale ovunque.

PROBLEMA SVOLTO 6.3 Fred (m_F = 75 kg) e Ginger (m_G = 55 kg), mentre pattinano fianco a fianco alla stessa velocità di 3,2 m/s (Figura 6.11a), a un tratto si separano spingendosi in due opposte direzioni perpendicolari alla loro rotta iniziale. Quando si sono staccati, Ginger si trova a pattinare in una direzione che forma un angolo di 32° con quella originaria (Figura 6.11b). In quale direzione sta ora pattinando Fred?

Soluzione Assumiamo come sistema l'insieme di Fred e Ginger, che per separarsi esercitano forze di repulsione l'uno contro l'altra. Se ignoriamo l'effetto delle forze esterne, quale l'attrito sul ghiaccio, la loro quantità di moto totale prima del distacco deve essere uguale a quella dopo il distacco. Le componenti secondo x delle loro quantità di moto iniziali sono (assumendo come verso positivo dell'asse x il loro senso di marcia iniziale)

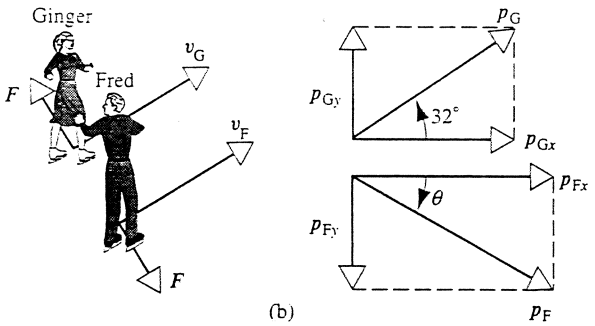


FIGURA 6.11 Problema svolto 6.3. (a) Due pattinatori si staccano l'uno dall'altro in direzione perpendicolare rispetto alla primitiva direzione comune. (b) Le loro quantità di moto dopo il distacco.

$$p_{Gx} = m_G v_G = (55 \text{ kg})(3{,}2 \text{ m/s}) = 176 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$p_{Fx} = m_F v_F = (75 \text{ kg})(3{,}2 \text{ m/s}) = 240 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Dopo il distacco, la quantità di moto di Ginger acquisisce una componente secondo y di valore tale che il vettore della sua quantità di moto formi un angolo di 32° con la direzione dell'asse x:

$$p_{Gy} = p_{Gx} \tan 32° = +110 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Prima del distacco, la componente secondo y della quantità di moto totale era nulla: dovendo rimanere tale, la componente secondo y della quantità di moto di Fred deve essere -110 kg · m/s, e la nuova direzione del suo moto risulta da

$$\tan\theta = \frac{p_{Fy}}{p_{Fx}} = \frac{-110 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{240 \text{ kg} \cdot \text{m/s}} = -0{,}458,$$

ossia

$$\theta = -25°.$$

Si noti che le componenti secondo x delle quantità di moto di Fred e Ginger non sono state modificate dalla forza impulsiva di distacco, perché questa forza era diretta secondo l'asse y, in accordo con il teorema dell'impulso (Equazione 6.6) secondo il quale una forza diretta lungo l'asse y che agisca sul sistema non può modificare la componente secondo l'asse x della quantità di moto.

PROBLEMA SVOLTO 6.4 Marco, che ha massa di 65 kg, corre su un molo alla velocità di 4,9 m/s (Figura 6.12). Salta dal molo in una barca a remi di 88 kg che va alla deriva senza attrito nella stessa direzione alla velocità di 1,2 m/s. Una volta che Marco si è seduto sul fondo, qual è la velocità finale della barca?

Soluzione Quando Marco entra nella barca, agiscono forze fra lui e la barca che li porteranno ad assumere la stessa velocità: Marco rallenta e la barca accelera. Se non esistono altre forze agenti sul sistema Marco + barca, la quantità di moto totale di Marco e della barca prima del balzo deve essere uguale alla quantità di moto to-

 ISBN 88-408-1254-7

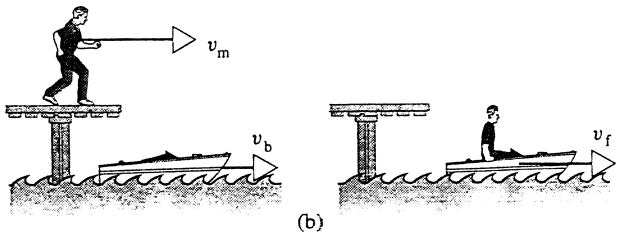


FIGURA 6.12 Problema svolto 6.4. (a) Marco corre a velocità v_m e balza in una barca che naviga nella stessa direzione a velocità v_b. (b) Marco e la barca navigano insieme alla velocità v_f.

tale dopo che Marco si è seduto nella barca. Assumiamo come verso positivo delle x la direzione iniziale del moto di Marco, e poiché tutto il movimento è nella stessa direzione, per le velocità e le quantità di moto consideriamo soltanto le componenti x. Prima del balzo, Marco ha quantità di moto $p_{mx} = m_m v_{mx}$, e la barca $p_{bx} = m_b v_{bx}$. La quantità di moto totale è

$$P_{ix} = p_{mx} + p_{bx} = m_m v_{mx} + m_b v_{bx} =$$
$$= (65\text{ kg})(4{,}9\text{ m/s}) + (88\text{ kg})(1{,}2\text{m/s}) = 424\text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

Dopo che è saltato e si è seduto nella barca, entrambi si muovono insieme alla stessa velocità v_{fx}. La quantità di moto finale combinata sarà $P_{fx} = m_m v_{fx} + m_b v_{fx} = (m_m + m_b)v_{fx}$. Essendo $P_{ix} = P_{fx}$, si ottiene

$$v_{fx} = \frac{P_{ix}}{m_m + m_b} = \frac{424\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{65\text{ kg} + 88\text{ kg}} = 2{,}8\text{ m/s}.$$

6.5 URTI FRA DUE CORPI

In questo paragrafo esamineremo diversi tipi di urti fra due corpi, ricorrendo al principio di conservazione della quantità di moto per confrontare il moto dei due corpi prima e dopo l'urto.

Nella figura 6.13 è rappresentato un urto generico fra due corpi. Prima dell'urto m_1 si muove con velocità iniziale v_{1i} ed m_2 con velocità iniziale v_{2i}. Dopo l'urto le velocità finali sono v_{1f} e v_{2f}. Per il principio di conservazione della quantità di moto, la quantità di moto totale di m_1 ed m_2 *prima* dell'urto è uguale alla quantità di moto totale *dopo* l'urto:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}. \qquad (6.15)$$

Un altro modo di scrivere l'Equazione 6.15 è

$$m_1(v_{1f} - v_{1i}) = -m_2(v_{2f} - v_{2i}), \qquad (6.16)$$

oppure

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2. \qquad (6.17)$$

Le variazioni di quantità di moto dei due corpi, per il principio di conservazione, hanno intensità uguali e segni opposti, in accordo anche con la terza legge di Newton: per il teorema dell'impulso (Equazione 6.5) la variazione di quantità di moto di ciascun corpo è uguale all'impulso della forza netta che agisce su quel corpo. L'Equazione 6.17 può dunque essere scritta così: $J_1 = -J_2$, ove J_1 rappresenta l'impulso della forza F_{12} esercitata sul corpo 1 dal corpo 2, e J_2 l'inverso: ciò in accordo con la definizione di impulso (Equazione 6.4) a patto di considerare $F_{12} = -F_{21}$, per la terza legge di Newton.

Dopo certi tipi di urto i corpi rimangono attaccati insieme (Figura 6.13b), e proseguono con una stessa velocità finale. Per $v_{1f} = v_{2f} = v_f$, la (6.15) diventa

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f. \qquad (6.18)$$

Le Equazioni 6.15 e 6.18 sono equazioni vettoriali; ciò implica che la conservazione delle quantità di moto debba valere anche per ciascuna delle componenti, come suggerisce la (6.14). Così

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

e analogamente per le componenti y e z. Se tutti i moti avvengono in un piano (il piano xy) e conosciamo le velocità iniziali di m_1 ed m_2, la (6.15) fornisce due equazioni in quattro incognite, le componenti x e y di v_{1f} e v_{2f}. Se conosciamo anche *una* delle due velocità finali, possiamo ricavare l'altra; se invece conosciamo le loro direzioni possiamo ricavare le loro intensità. D'altra parte la (6.18) contiene soltanto due incognite (le componenti secondo x e y di v_f), per cui le due equazioni delle componenti derivanti dalla (6.18) sono sufficienti per determinare i valori di queste due incognite.

In molti casi m_2 è inizialmente a riposo ($v_{2i} = 0$), ciò che semplifica alquanto il calcolo. Poiché la conservazione della quantità di moto è valida in qualsiasi sistema di riferimento inerziale, possiamo sempre trovare un sistema di riferimento nel quale m_2 sia inizialmente a riposo e applicare il principio di conservazione in questo sistema inerziale, ritornando poi al sistema di riferimento originario se vogliamo ricavare le velocità finali in quel sistema.

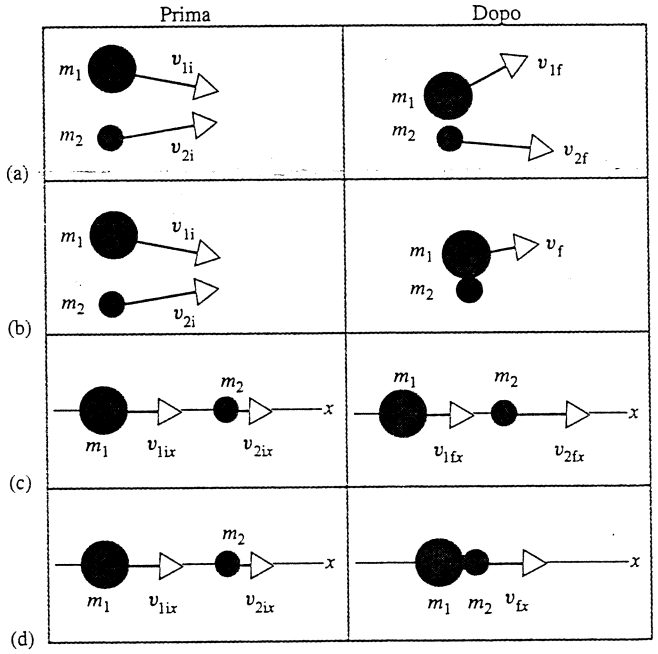


FIGURA 6.13 Le velocità iniziali e finali in diversi tipi di urti fra due corpi.

Spesso abbiamo anche un «urto frontale», quando tutti i moti avvengono in un'unica direzione, che adottiamo come direzione dell'asse x del nostro sistema di coordinate (Figura 6.13c). La conservazione della quantità di moto si può esprimere così:

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} . \qquad (6.19)$$

Se tre delle velocità sono note, dalla (6.19) si può ricavare la quarta. Se dopo l'urto m_1 ed m_2 rimangono attaccate insieme muovendosi a una comune velocità v_{fx} (Figura 6.13d), la (6.19) diventa

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = (m_1 + m_2) v_{fx} . \qquad (6.20)$$

Le componenti secondo x delle velocità nelle Equazioni 6.19 e 6.20 possono essere positive o negative a seconda di come definiamo la direzione positiva dell'asse x.

PROBLEMA SVOLTO 6.5 Un carrello su cuscinetto d'aria, di massa $m_1 = 1{,}25$ kg, scorre senza attrito su una rotaia orizzontale alla velocità di 3,62 m/s, e urta un altro carrello, fermo, di massa $m_2 = 2{,}30$ kg. Dopo l'urto il primo carrello si muove a velocità 1,07 m/s in senso opposto a quello iniziale. Qual è dopo l'urto la velocità di m_2?

Soluzione L'Equazione 6.19 esprime il principio di conservazione della quantità di moto in una dimensione. Adottiamo come direzione positiva dell'asse delle x quella del moto di m_1, per cui $v_{1ix} = +3{,}62$ m/s e $v_{1fx} = -1{,}07$ m/s. Dall'Equazione 6.19, ponendo $v_{2ix} = 0$, si ricava l'incognita v_{2fx}:

$$v_{2fx} = \frac{m_1}{m_2}(v_{1ix} - v_{1fx}) =$$

$$= \frac{1{,}25 \text{ kg}}{2{,}30 \text{ kg}}[3{,}62 \text{ m/s} - (-1{,}07 \text{ m/s})] = 2{,}55 \text{ m/s} .$$

Possiamo verificare il risultato trovando la variazione di quantità di moto di ciascun carrello:

$$\Delta p_{1x} = m_1(v_{1fx} - v_{1ix}) = (1{,}25 \text{ kg})(-1{,}07 \text{ m/s} - 3{,}62 \text{ m/s}) =$$

$$= -5{,}86 \text{ kg} \cdot \text{m/s} ,$$

$$\Delta p_{2x} = m_2(v_{2fx} - v_{2ix}) = (2{,}30 \text{ kg})(2{,}55 \text{ m/s} - 0) =$$

$$= 5{,}86 \text{ kg} \cdot \text{m/s} .$$

Come era lecito aspettarsi, $\Delta p_{1x} = -\Delta p_{2x}$.

PROBLEMA SVOLTO 6.6 Supponiamo che due carrelli scorrevoli, inizialmente in moto come nel problema 6.5, rimangano attaccati insieme dopo l'urto. Qual è la velocità finale del sistema?

Soluzione In questo caso usiamo l'Equazione 6.20 con $v_{2ix} = 0$:

$$v_{fx} = \frac{m_1 v_{1ix}}{m_1 + m_2} = \frac{(1{,}25 \text{ kg})(3{,}62 \text{ m/s})}{1{,}25 \text{ kg} + 2.30 \text{ kg}} = 1{,}27 \text{ m/s} .$$

Con lo stesso procedimento del problema precedente, si dimostra che $\Delta p_{1x} = -2.93 \text{kg} \cdot \text{m/s}$ e $\Delta p_{2x} = +2.93 \text{kg} \cdot \text{m/s}$, rispettando così la conservazione delle quantità di moto $\Delta p_{1x} = -\Delta p_{2x}$.

PROBLEMA SVOLTO 6.7 Un'astronave di massa totale m sta navigando alla velocità di 8,45 km/s (misurata rispetto a un particolare sistema di riferimento), in una regione dello spazio ove la gravità è trascurabile. La nave è formata da due elementi di massa $m_1 = m/4$ e $m_2 = 3m/4$, collegati da un giunto a molla (Figura 6.14). A un segnale lanciato dal comandante i bulloni che collegano i due elementi saltano, e il giunto a molla li fa allontanare in modo tale che l'elemento più piccolo vada avanti, sulla rotta iniziale dell'astronave, alla velocità di 11,63 km/s. Qual è la velocità finale dell'elemento maggiore?

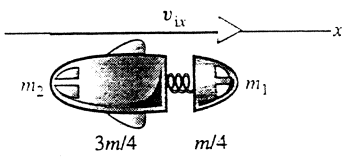


FIGURA 6.14 Problema svolto 6.7.

Soluzione Questo problema è l'inverso del precedente. Invece di due corpi che si urtano e rimangono attaccati insieme, troviamo due corpi inizialmente attaccati che si separano. La forza che li fa separare è una forza interna al sistema dei due corpi, ciò che consente l'applicazione della legge di conservazione della quantità di moto. Adottiamo come positivo per l'asse x il verso del moto iniziale, coincidente con quello della velocità finale dell'elemento minore. Riportandoci all'Equazione 6.20, ove la velocità iniziale comune del complesso è v_{ix} e le velocità finali dei due frammenti sono v_{1fx} e v_{2fx}, il principio di conservazione della quantità di moto dà

$$(m_1 + m_2) v_{ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx} . \qquad (6.21)$$

Sono date le velocità $v_{ix} = 8{,}45$ km/s e $v_{1fx} = 11{,}63$ km/s; dobbiamo trovare v_{2fx}:

$$v_{2fx} = \frac{(m_1 + m_2) v_{ix} - m_1 v_{1fx}}{m_2} =$$

$$= \frac{(m)(8{,}45 \text{ km/s}) - (m/4)(11{,}63 \text{ km/s})}{3m/4} = +7{,}39 \text{ km/s} .$$

Da notare che, per eseguire il calcolo, non è necessario conoscere la massa totale del veicolo spaziale, ma soltanto il rapporto delle masse dei due frammenti. Ciò è vero per tutti gli urti tra due corpi? Per rispondere, andate a rivedere le Equazioni 6.19 e 6.20.

È molto istruttivo analizzare questo problema dal punto di vista di un osservatore su un'altra astronave che vola parallelamente alla prima alla stessa velocità $v_x = 8{,}45$ km/s. Rispetto a questo, dopo l'urto il frammento minore m_1 ha la velocità $v'_{1fx} = v_{1fx} - v_x = 11{,}63$ km/s $- 8{,}45$ km/s $= 3{,}18$ km/s (nella stessa comune direzione del moto), e il maggiore $v'_{2fx} = v_{2fx} - v_x = 7{,}39$ km/s $- 8{,}45$ km/s $= -1{,}06$ km/s: dunque in questo sistema di riferimento il frammento maggiore m_2 indietreggia alla velocità di 1,06 km/s. Secondo questo osservatore, la quantità di moto iniziale della prima astronave, prima della separazione, era nulla, nulla essendo la sua velocità relativamente al sistema di riferimento. Dopo la separazione, la quantità di moto totale dell'insieme dei due frammenti è sempre zero: $P'_{fx} = m_1 v'_{1fx} + m_2 v'_{2fx} = 0$. Per l'osservatore, il principio di conservazione della quantità di moto è così rispettato.

Se la quantità di moto è conservata in un sistema inerziale, lo è in tutti i sistemi inerziali. È spesso conveniente risolvere un problema in un certo sistema di riferimento e trasferire poi i risultati in un altro sistema. Nel seguito di questo paragrafo studieremo come l'uso del secondo sistema di riferimento in problemi come questo, in cui la quantità di moto totale è nulla, possa spesso rivelare particolari aspetti nell'analisi dell'urto.

 ISBN 88-408-1254-7

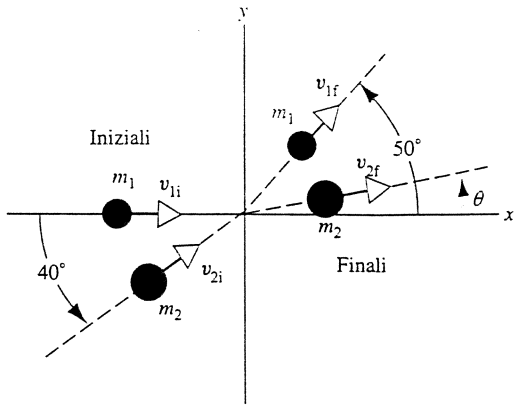


FIGURA 6.15 Problema svolto 6.8.

PROBLEMA SVOLTO 6.8 In un campo di hockey un disco, che sta scivolando senza attrito sul ghiaccio alla velocità di 2,48 m/s, si scontra con un altro disco di massa 1,5 volte maggiore del primo, che si muove inizialmente alla velocità di 1,86 m/s in una direzione che forma un angolo di 40° rispetto alla direzione di moto del primo, come in Figura 6.15. Dopo l'urto il primo disco scivola alla velocità di 1,59 m/s in una direzione che forma un angolo di 50° con la sua direzione iniziale, sempre come nella Figura 6.15. Trovare velocità e direzione del secondo disco dopo l'urto.

Soluzione Dobbiamo qui ricorrere al principio di conservazione della quantità di moto nella sua forma vettoriale a due dimensioni. Assumiamo come asse delle x la retta su cui corre il primo disco. Chiamiamo θ l'angolo formato dal vettore velocità v_{2f} del secondo disco con l'asse delle x. L'Equazione 6.15 della conservazione della quantità di moto per la componente x risulta

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx},$$

ossia, per $m_1 = m$ ed $m_2 = 1{,}5m$:

$$m(2{,}48 \text{ m/s}) + 1{,}5m(1{,}86 \text{ m/s}) \cos 40° =$$
$$= m(1{,}59 \text{ m/s}) \cos 50° + 1{,}5m v_{2f} \cos\theta,$$

che si riduce a

$$v_{2f} \cos\theta = 2{,}40 \text{ m/s},$$

mentre la componente y è $m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$, da cui

$$m(0) + 1{,}5m(1{,}86 \text{ m/s}) \sin 40° =$$
$$= m(1{,}59 \text{ m/s}) \sin 50° + 1{,}5m v_{2f} \sin\theta,$$

che si riduce a

$$v_{2f} \sin\theta = 0.38 \text{ m/s}.$$

Risolvendo le due equazioni rispetto alle due incognite, otteniamo

$$v_{2f} = 2{,}43 \text{ m/s}, \qquad \theta = 9{,}0°.$$

Urti unidimensionali nel sistema di riferimento del centro di massa

In questo paragrafo abbiamo prima analizzato un urto fra due corpi in una sola dimensione osservato da un sistema di riferimento inerziale scelto a caso. Spesso preferiamo fissare questo sistema di riferimento nel laboratorio dove osserviamo le collisioni, che chiamiamo *sistema di riferimento del laboratorio*. Esiste però un altro sistema particolare di riferimento nel quale l'urto manifesta una simmetria, che consente un'analisi relativamente più semplice. Questo sistema, largamente adottato dai fisici per l'analisi di urti fra atomi e particelle subatomiche, è chiamato *sistema di riferimento* del *centro di massa* (c.d.m.). La ragione di questa denominazione sarà rivelata nel prossimo capitolo. Nel Problema 6.7 il secondo metodo di analisi ha adottato il riferimento del c.d.m., nel quale le due astronavi risultavano essere a riposo prima della separazione.

L'urto (unidimensionale) nel riferimento di laboratorio appare nella figura 6.16a. Passiamo ora a esaminare questo urto nel riferimento del c.d.m. Tutte le velocità sono parallele all'asse x, e possiamo quindi eliminare l'indice x per velocità e quantità di moto, senza tuttavia dimenticare che si tratta di componenti x di vettori e quindi i loro segni devono essere scelti in accordo con la convenzione adottata per il verso positivo dell'asse x. Useremo l'Equazione 4.22 in una dimensione, adottando gli indici S ed S' per indicare rispettivamente il riferimento di laboratorio e il riferimento del c.d.m. La velocità $v_{S'S}$ del riferimento del c.d.m. rispetto al riferimento di laboratorio sarà rappresentata semplicemente dal simbolo v. Per un osservatore collocato nel riferimento del c.d.m. le velocità iniziali dei due oggetti prima dell'urto sono

$$m_1: \quad v'_{1i} = v_{1i} - v \qquad \text{e} \qquad m_2: \quad v'_{2i} = v_{2i} - v,$$

ove l'apice distingue le grandezze misurate nel riferimento del c.d.m.

All'inizio la quantità di moto totale dell'insieme dei due oggetti nel riferimento del c.d.m. vale

$$P'_i = m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = m_1(v_{1i} - v) + m_2(v_{2i} - v). \quad (6.22)$$

Definiamo ora il riferimento del c.d.m. come *il sistema di riferimento in cui all'inizio la quantità di moto totale del sistema è nulla*. Per trovare il particolare valore di v che realizza questa condizione, nella (6.22) poniamo $P'_i = 0$ e risolviamo rispetto a v, trovando

$$v = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (6.23)$$

Se viaggiamo a questa velocità e osserviamo l'urto, il moto dei due corpi *prima* dell'urto ci si presenta come in Figura 6.16b. Anche se le loro masse sono differenti, le quantità di moto dei due corpi sono uguali e opposte, così che la loro somma è zero.

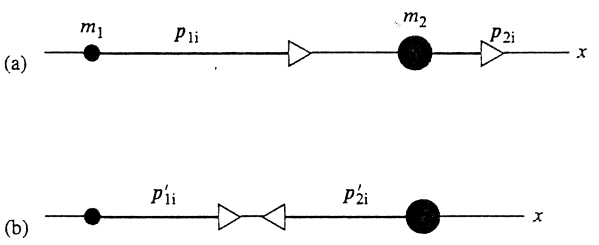


FIGURA 6.16 Le quantità di moto di due corpi prima dell'urto (a) nel sistema di riferimento originale e (b) in quello del centro di massa.

Per conservare la quantità di moto totale, questa dopo l'urto ($P'_f = p'_{1f} + p'_{2f}$) nel riferimento del c.d.m. deve mantenersi nulla, e quindi anche p'_{1f} e p'_{2f} devono essere uguali e opposte. I vettori delle quantità di moto finali possono avere qualsiasi modulo, purché sia uguale per entrambi.

Il primo grafico della Figura 6.17, che è identico a quello della Figura 6.16b, indica le quantità di moto iniziali dei due corpi nel riferimento del c.d.m. L'esito dell'urto dipende dalle proprietà dei corpi che si urtano e dalla natura delle forze che reciprocamente essi esercitano. Le righe da 2 a 5 della Figura 6.17 contemplano diverse possibili coppie di valori per le quantità di moto finali dei due corpi nel riferimento del c.d.m., sempre tenendo presente che deve essere $p'_{1f} = -p'_{2f}$. Qualunque sia il tipo di collisione, nel riferimento del c.d.m. questa simmetria prevale sempre.

Nel caso della riga 2 della Figura 6.17 i due corpi rimbalzano semplicemente uno contro l'altro, conservando ciascuno la propria quantità di moto, uguale in intensità e direzione ma in verso opposto rispetto a quello iniziale. Questo tipo di urto è chiamato urto *elastico*. Oggetti solidi rigidi, come palle da biliardo o dischi da hockey, subiscono di solito urti che si possono considerare elastici. Negli urti *parzialmente anelastici* (Figura 6.17, riga 3) nel riferimento del c.d.m. i corpi rimbalzano con quantità di moto ridotta. Si tratta di oggetti semirigidi, come la palla da baseball di Figura 6.1. Se dopo l'urto i corpi rimangono attaccati insieme (riga 4), nel riferimento del c.d.m. il complesso dei due corpi apparirà in quiete: si parla di urto *completamente anelastico*. L'urto di due palline di stucco o di plastilina ne costituisce un esempio. Infine, riga 5, i corpi possono separarsi con quantità di moto maggiori di quelle iniziali: ciò può accadere se la separazione avviene per l'espansione di un gas o di una molla interna, oppure per l'esplosione di una carica posta tra i due corpi.

Urti elastici. Per il caso unidimensionale abbiamo definito urto elastico quello in cui, *nel riferimento del c.d.m.*, la velocità di ciascuno dei corpi cambia il verso ma non l'intensità. Così per m_1, nel riferimento del c.d.m. si ha $v'_{1f} = -v'_{1i}$, e analogamente per m_2. Partendo da queste espressioni dedurremo le velocità finali nel riferimento di laboratorio di due corpi che si urtano elasticamente.

Per m_1 le velocità nei due sistemi di riferimento sono legate dalla relazione $v'_{1i} = v_{1i} - v$ e $v'_{1f} = v_{1f} - v$, ove v è la velocità relativa fra i due sistemi di riferimento (Equazione 6.23). Risolvendo la seconda rispetto alla velocità finale nel riferimento di laboratorio otteniamo $v_{1f} = v'_{1f} + v$, e applicando la regola dell'urto elastico ($v'_{1f} = -v'_{1i}$) troviamo $v_{1f} = -v'_{1i} + v$; infine applicando la relazione $v'_{1i} = v_{1i} - v$ otteniamo

$$v_{1f} = -(v_{1i} - v) + v = -v_{1i} + 2v = \\ = -v_{1i} + 2\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2},$$

in cui l'ultima espressione proviene dalla (6.23). Con qualche riordino si arriva a

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}. \qquad (6.24)$$

Per trovare v_{2f}, velocità finale di m_2, nel riferimento di laboratorio, possiamo ripetere l'analisi che ci ha portato alla (6.24) scambiando i pedici 1 e 2 ovunque compaiono: troviamo così

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}. \qquad (6.25)$$

Le Equazioni 6.24 e 6.25 sono risultati generali per ogni tipo di urto elastico unidimensionale, e ci consentono di calcolare le velocità finali in *qualsiasi* sistema di riferimento inerziale partendo dalle velocità iniziali in quello stesso sistema di riferimento. Esaminiamo ora alcuni casi particolari:

1. *Masse uguali.* Se $m_1 = m_2$ le Equazioni 6.24 e 6.25 diventano

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}, \qquad (6.26)$$

ossia le particelle si scambiano le velocità: la velocità finale di una particella è uguale alla velocità iniziale dell'altra.

2. *Bersaglio fermo.* Se $v_{2i} = 0$, si ha

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}. \qquad (6.27)$$

Combinando questi due casi speciali – urto fra due particelle di massa uguale la seconda delle quali è ferma – si vede che la prima si «si arresta» e l'altra «parte» alla velocità che aveva inizialmente la prima, evento che si osserva frequentemente nel biliardo, fra bocce che rotolano senza imperniamento.

3. *Bersaglio molto pesante.* Se $m_2 \gg m_1$ la (6.24) e la (6.25) si riducono a

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx v_{2i}, \qquad (6.28)$$

e, se la particella maggiore si muove lentamente o è ferma,

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 0. \qquad (6.29)$$

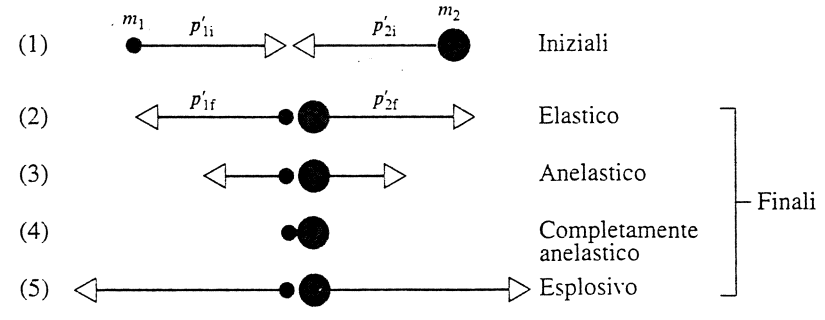


FIGURA 6.17 Le quantità di moto di due oggetti che si urtano nel sistema di riferimento del centro di massa, per vari tipi di urto. La riga 1 indica le quantità di moto iniziali, e le righe da 2 a 5 riportano alcune possibili quantità di moto finali.

 ISBN 88-408-1254-7

Insomma, se un proiettile leggero urta un bersaglio fermo molto più grande, la velocità della particella leggera si inverte, e quella pesante rimane praticamente ferma. Così per esempio una palla lasciata cadere da un'altezza h rimbalza dopo l'urto con la Terra a velocità invertita e, se l'urto fosse perfettamente elastico e non esistesse la resistenza dell'aria, ritornerebbe all'altezza iniziale h. Analogamente un elettrone in un urto frontale con un atomo (relativamente pesante) rimbalza a velocità invertita, mentre il moto dell'atomo-bersaglio non è praticamente influenzato dall'evento.

4. *Proiettile molto pesante.* Se $m_1 \gg m_2$ le Equazioni 6.24 e 6.25 diventano

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i}\,. \tag{6.30}$$

Se il bersaglio leggero è inizialmente fermo, o si muove molto lentamente rispetto alla velocità di m_1, dopo l'urto si muove a una velocità doppia di quella del proiettile m_1, il cui moto non è praticamente influenzato dall'urto col bersaglio molto più leggero.

In un evento di diffusione di particelle alfa (Figura 6.2), il moto della particella alfa incidente (di massa pari a circa 7000 volte quella dell'elettrone, non è praticamente influenzato dagli urti con gli elettroni degli atomi bersaglio, come rivelano nella stessa figura le numerose tracce rettilinee. La particella alfa è deviata soltanto negli urti molto meno frequenti con il nucleo massiccio di un atomo del bersaglio.

Le Equazioni da 6.26 a 6.30 valgono soltanto per urti elastici. Nel caso di urti parzialmente anelastici o urti esplosivi, per le velocità finali non è possibile ottenere equazioni generali come la (6.24) o la (6.25), qualora non si possiedano ulteriori informazioni circa la quantità di moto delle singole particelle che si aggiunge o si perde nel riferimento del c.d.m. Vedremo nel Capitolo 11 come considerazioni riguardanti l'energia consentano di analizzare questi differenti tipi di collisioni. In urti parzialmente anelastici o esplosivi, dal guadagno o dalla perdita di quantità di moto (o di energia) di uno dei corpi che si urtano è possibile dedurre proprietà caratteristiche dell'interazione fra i corpi. È una tecnica comunemente usata dai fisici nucleari, che dall'osservazione della quantità di moto delle particelle uscenti da una collisione nucleare ricavano informazioni circa le proprietà dei nuclei atomici.

PROBLEMA SVOLTO 6.9 Una particella alfa (un nucleo di elio ^{4}He, $m_1 = 4{,}0$ u) accelerata alla velocità di $1{,}52 \cdot 10^7$ m/s ha un urto frontale con un nucleo di ossigeno ^{16}O, ($m_2 = 16{,}0$ u), fermo. Dopo l'urto il nucleo di ossigeno parte alla velocità di $6{,}08 \cdot 10^6$ m/s nella direzione iniziale del moto della particella alfa. (a) Quale sarà la velocità di quest'ultima dopo l'urto? (b) Quale dei tipi di urto descritti nella Figura 6.17 è il più adatto a descrivere questo evento?

Soluzione (a) La conservazione della quantità di moto ci consente di trovare la velocità finale della particella alfa, usando l'Equazione 6.19 che si riferisce appunto a un generico urto unidimensionale. Poniamo che la direzione del moto della particella alfa coincida con il verso positivo dell'asse x. Indicando con il pedice α la particella alfa e con il pedice O il nucleo di ossigeno, la (6.19) per $v_{2ix} = 0$ diventa

$$v_{\alpha fx} = \frac{m_\alpha v_{\alpha ix} - m_O v_{Ofx}}{m_\alpha} = \frac{(4{,}0\text{ u})(1{,}52 \cdot 10^7\text{ m/s}) - (16{,}0\text{ u})(6{,}08 \cdot 10^6\text{ m/s})}{4{,}0\text{ u}} =$$

$$= -9{,}12 \cdot 10^6\text{ m/s}\,.$$

La particella alfa rimbalza nel verso negativo dell'asse x.

Si noti che, avendo adottato per le masse la stessa unità di misura u, questa scompare nell'espressione finale, ciò che ci consente di assumere per le masse qualsiasi unità di misura.

(b) L'Equazione 6.23 fornisce la velocità relativa fra i due sistemi di riferimento:

$$v_x = \frac{m_\alpha v_{\alpha ix} + m_O v_{Oix}}{m_\alpha + m_O} = \frac{(4{,}0\text{ u})(1{,}52 \cdot 10^7\text{ m/s}) + 0}{4{,}0\text{ u} + 16{,}0\text{ u}} =$$

$$= +0{,}304 \cdot 10^7\text{ m/s}$$

La quantità di moto iniziale della particella α nel riferimento del c.d.m. vale:

$$p'_{\alpha ix} = m_\alpha v'_{\alpha ix} = m_\alpha (v_{\alpha ix} - v_x) =$$

$$= (4{,}0\text{ u})(1{,}52 \cdot 10^7\text{ m/s} - 0{,}304 \cdot 10^7\text{ m/s}) =$$

$$= +4{,}86 \cdot 10^7\text{ u} \cdot \text{m/s}$$

e la sua quantità di moto finale risulta

$$p'_{\alpha fx} = m_\alpha v'_{\alpha fx} = m_\alpha (v_{\alpha fx} - v_x) =$$

$$= (4{,}0\text{ u})(-9{,}12 \cdot 10^6\text{ m/s} - 0{,}304 \cdot 10^7\text{ m/s}) =$$

$$= -4{,}86 \cdot 10^7\text{ u} \cdot \text{m/s}.$$

Risulta dunque $p'_{\alpha ix} = -p'_{\alpha fx}$; la particella alfa si limita a invertire il proprio senso di marcia, restando invariata in modulo la sua quantità di moto. E anche la quantità di moto del nucleo di ossigeno cambia semplicemente di segno durante l'urto. Sono queste le caratteristiche di un *urto elastico*.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

6.1 Urti

6.2 La quantità di moto

1. 1. Quale di questi oggetti ha la maggiore quantità di moto?
(A) Un proiettile sparato da un fucile.
(B) Un calciatore lanciato alla massima velocità.
(C) Un cavallo che marcia a circa 3 km/h.
(D) Un elefante fermo.

2. Una palla di massaa 2 kg in caduta verticale colpisce il pavimento alla velocità di 8 m/s. Rimbalza verso l'alto alla velocità di 6 m/s. Qual è il modulo della variazione della sua quantità di moto?
(A) 2 kg · m/s. (B) 4 kg · m/s.
(C) 14 kg · m/s. (D) 28 kg · m/s.

3. Un oggetto si muove su una circonferenza alla velocità scalare costante v. Il modulo della variazione di quantità di moto dell'oggetto è
(A) Zero. (B) Proporzionale a v.
(C) Proporzionale a v^2. (D) Proporzionale a v^3.

4. Se la forza netta che agisce su un corpo è costante, che cosa possiamo dedurre circa la sua quantità di moto?
   (A) L'intensità e/o la direzione di p possono variare.
   (B) L'intensità di p rimane costante, ma la sua direzione può variare.
   (C) La direzione di p rimane costante, ma la sua intensità può variare.
   (D) p rimane costante sia in direzione sia in intensità.

6.3 Impulso e quantità di moto

5. Un oggetto si muove su una circonferenza alla velocità scalare costante v. Dal tempo t_i al tempo t_f compie mezzo giro. L'intensità dell'impulso dovuto alla forza netta agente sull'oggetto durante questo intervallo di tempo è
   (A) Zero. (B) Proporzionale a v.
   (C) Proporzionale a v^2. (D) Proporzionale a v^3.

6. Se J è l'impulso di una certa forza, che cos'è dJ/dt?
   (A) La quantità di moto.
   (B) La variazione della quantità di moto.
   (C) La forza.
   (D) La variazione della forza.

7. Una forza variabile agisce su un oggetto dall'istante $t_i = 0$ all'istante t_f. L'impulso della forza è zero. Si può dedurre che
   (A) $\Delta r = 0$ e $\Delta p = 0$.
   (B) $\Delta r = 0$ ma Δp può essere diverso da zero.
   (C) Δr può essere diverso da zero ma $\Delta p = 0$.
   (D) Δr può essere diverso da zero e Δp può essere diverso da zero.

8. Un pilota che viaggia su una strada ad alta velocità perde il controllo dell'auto. Il pilota può scegliere: andare a sbattere contro una solida parete di calcestruzzo oppure contro un camion da 10 tonnellate a pieno carico che gli viene incontro anch'esso ad alta velocità. Quale alternativa porterà allo scontro più dannoso? Si suppone che in entrambi i casi dopo lo scontro l'auto resterà ferma.
   (A) Lo scontro con il camion.
   (B) L'urto contro la parete di calcestruzzo.
   (C) I due scontro sono ugualmente gravi, perché in entrambi i casi l'auto subirà lo stesso impulso.
   (D) Occorre avere maggiori informazioni per valutare i due scontri.

9. La polizia antiguerriglia usa spesso proiettili di gomma invece che di piombo. Supponiamo che nessuno dei due tipi di proiettili perfori la pelle e che entrambi abbiano la stessa massa, lo stesso tempo di contatto e la medesima velocità iniziale. La differenza consiste nel fatto che il piombo si schiaccia contro l'ostacolo, mentre la gomma rimbalza. Quale dei due fa più male?
   (A) Il piombo.
   (B) La gomma.
   (C) È uguale.
   (D) Dipende dal punto in cui si è colpiti.

6.4 Conservazione della quantità di moto

10. Il principio di conservazione della quantità di moto può in qualche caso esser violato?
   (A) No.
   (B) Sì, se esistono più di due particelle.
   (C) Sì, quando le forze che agiscono fra le particelle variano nel tempo.
   (D) Sì, se le due particelle si attaccano fra loro dopo l'urto.

11. Un giocatore di pallacanestro fa un balzo e infila un pallone nel cesto. Si ha conservazione della quantità di moto?
   (A) Sì, ma soltanto se si adotta il corretto sistema di riferimento.
   (B) Sì, ma soltanto in direzione orizzontale.
   (C) No, perché la velocità del giocatore di pallacanestro varia nel tempo.
   (D) È una domanda mal posta, perché la conservazione della quantità di moto riguarda oggetti che si muovono a velocità costante, mentre il giocatore accelera.

6.5 Urti fra due corpi

12. Consideriamo un urto unidimensionale fra un corpo di massa m_1 che si sposta nel verso positivo delle x a velocità v_0 e un corpo di massa m_2 a riposo. L'urto può essere completamente anelastico, coi due corpi che rimangono attaccati fra loro, completamente elastico, o qualcosa di intermedio. Dopo l'urto m_1 ha velocità v_1 mentre m_2 ha velocità v_2.
   (a) Se $m_1 > m_2$, si ha
   (A) $-v_0 < v_1 < 0$ (B) $0 < v_1 < v_0$
   (C) $0 < v_1 < 2v_0$ (D) $v_0 < v_1 < 2v_0$
   (b) e
   (A) $-v_0 < v_2 < 0$. (B) $0 < v_2 < v_0$.
   (C) $v_0/2 < v_2 < 2v_0$. (D) $v_0 < v_2 < 2v_0$.
   (c) Se $m_1 < m_2$, si ha
   (A) $-v_0 < v_1 < 0$ (B) $-v_0 < v_1 < v_0/2$
   (C) $0 < v_1 < v_0/2$ (D) $0 < v_1 < v_0$
   (c) e
   (A) $-v_0 < v_2 < 0$. (B) $-v_0 < v_2 < v_0/2$.
   (C) $0 < v_2 < v_0/2$. (D) $0 < v_2 < v_0$.

QUESITI

1. Giustificare questa affermazione: "Il principio di conservazione della quantità di moto, applicato a una singola particella, equivale alla prima legge di Newton sul moto.
2. Una particella di massa $m = 0$ (un neutrino, forse) ha quantità di moto non nulla. Come può essere se l'Equazione 6.1 richiede che la quantità di moto sia direttamente proporzionale alla massa?
3. Nonostante l'accelerazione di una palla da baseball dopo che è stata colpita non dipenda da chi sia il battitore, qualche particolare del volo della palla può dipendere dal modo di battuta. Che cosa?
4. Spiegate come un *airbag* può essere utile per evitare gravi lesioni al passeggero di un'auto durante uno scontro.
5. Si è detto che durante uno scontro alla velocità di 50 km/h un bambino del peso di 50 N può esercitare una forza di

 ISBN 88-408-1254-7

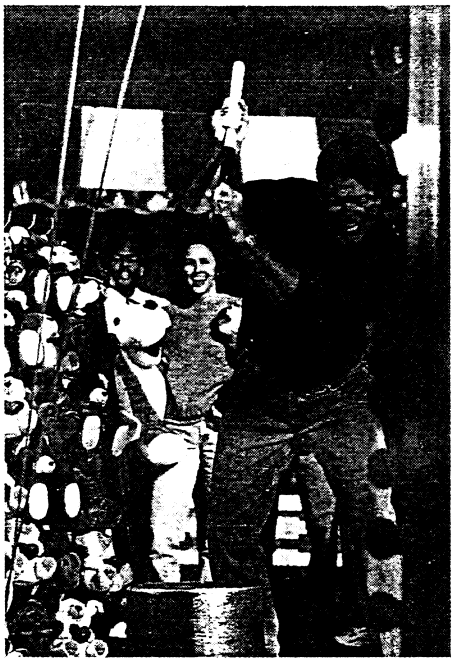


FIGURA 6.18
Quesito 7.

1500 N contro un genitore che lo tiene stretto in braccio. Da dove viene una simile forza?

6. L'impulso di una forza può essere nullo anche se la forza non è nulla? Spiegate il perché della risposta.
7. La Figura 6.18 mostra una popolare attrazione dei luna park, nella quale si misura l'altezza alla quale un concorrente fa salire un blocco pesante battendo con una mazza sull'estremità di una leva. Quale grandezza fisica misura l'apparecchio? La forza media, la forza massima, il lavoro sviluppato, l'energia trasferita, la quantità di moto trasmessa o qualcosa d'altro? Discutete la risposta.
8. Una clessidra è pesata da una bilancia molto sensibile, dapprima mentre la sabbia scende con un flusso costante, poi di nuovo quando la parte superiore è vuota. Le due pesate saranno uguali o no? Spiegate le ragioni della risposta.
9. Date una spiegazione plausibile della rottura di una tavola di legno o di un mattone con un pugno da parte di un cultore del karatè. (Vedi "Karatè Strikes", di Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, ott. 1975, p. 845.)
10. Spiegate come si applica il principio di conservazione della quantità di moto a una palla a mano che rimbalza contro una parete.
11. Un giocatore di rugby, momentaneamente fermo in campo, afferra il pallone mentre un giocatore avversario in corsa lo placca. Si tratta di un vero e proprio urto (anelastico!), e la quantità di moto deve essere conservata. Nel sistema di riferimento del campo di rugby prima dell'urto c'è una certa quantità di moto, ma dopo l'urto si è annullata. È davvero conservata la quantità di moto? In ogni caso, spiegate il perché.
12. State guidando su un'autostrada alla velocità di 80 km/h, seguiti da un'altra auto avente la stessa velocità. Rallentate fino alla velocità di 64 km/h, ma l'altro guidatore non frena e si verifica uno scontro. Quali sono le velocità iniziali dei veicoli che si scontrano viste dal sistema di riferimento (a) vostro (b) dell'altro guidatore e (c) di un agente della stradale appostato al bordo della strada? (d) Un giudice vi chiede se siete stati voi a urtare l'altro veicolo o se vi ha urtati l'altro guidatore. Come fisici, che cosa rispondereste?
13. C. R. Daish afferma che per i giocatori professionisti di golf la velocità iniziale della palla quando lascia la testa della mazza è di circa 220 km/h. Egli afferma inoltre: (a) "Se al posto della mazza per vibrare il colpo si usasse l'Empire State Building con la stessa velocità della mazza, la velocità iniziale della palla aumenterebbe soltanto del 2 % circa" e (b) "una volta che il giocatore di golf ha iniziato la rotazione della mazza verso il basso, il clic di una macchina fotografica, uno starnuto o qualsiasi altro disturbo non avrebbero alcun effetto sul moto della palla." Sapete portare qualche argomento qualitativo a sostegno di queste affermazioni?
14. Due blocchi cubici identici che si muovono nella stessa direzione alla stessa velocità v urtano un terzo blocco identico inizialmente fermo su una superficie orizzontale senza attrito. Quale sarà il moto dei blocchi dopo l'urto? Fa differenza se i due blocchi incidenti fossero stati a contatto? E se fossero stati incollati insieme? Supponete che l'urto sia (a) completamente anelastico, oppure (b) elastico.
15. In un urto fra due corpi nel sistema di riferimento del centro di massa le quantità di moto delle particelle sono uguali e opposte sia prima sia dopo l'urto. La direzione di moto relativo dopo l'urto rimane necessariamente la stessa iniziale? In quali condizioni a seguito dell'urto i valori delle velocità dei corpi potrebbero aumentare? Diminuire? Rimanere invariati?

ESERCIZI

6.1 Urti

6.2 La quantità di moto

1. A che velocità deve viaggiare una Volkswagen di massa 816 kg per avere la stessa quantità di moto (a) di una Cadillac di massa 2650 kg che avanza alla velocità di 16,0 km/h? (b) Di un camion di massa 9080 kg che va alla stessa velocità di 16,0 km/h?
2. Un camion di massa 2000 kg che viaggia verso nord alla velocità di 40,0 km/h curva verso est e accelera fino alla velocità di 50,0 km/h. Quali sono il modulo, la direzione e il verso della variazione della sua quantità di moto?
3. Un oggetto di massa 4,88 kg colpisce una lamiera d'acciaio alla velocità di 31,4 m/s in direzione che forma un angolo di 42,0°rispetto al piano della lamiera; rimbalza alla stessa velocità e con lo stesso angolo, come in Figura 6.19. Qual è, in intensità, direzione e verso, la variazione della sua quantità di moto?

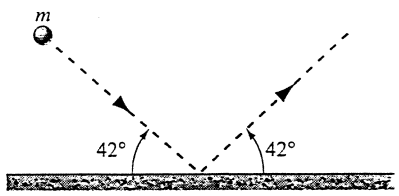


FIGURA 6.19 Esercizio 3.

6.3 Impulso e quantità di moto

4. Si sta collaudando il paraurti di un nuovo modello di auto. Il veicolo di massa 2300 kg viene mandato a sbattere, alla velocità di 15 m/s, contro il plinto di un ponte e arriva a fermarsi dopo 0,54 s. Trovate la forza media che ha agito sul veicolo durante l'urto.
5. Una palla di massa m e velocità v colpisce perpendicolarmente una parete e rimbalza con velocità invariata. (a) Se la durata dell'urto è Δt, qual è la forza media esercitata dalla palla sulla parete? (b) Valutate numericamente questa forza per una palla di gomma con massa 140 g alla velocità di 7,8 m/s; la durata dell'urto è di 3,9 ms.
6. Un giocatore di golf colpisce una palla facendola partire con una velocità iniziale di 52,2 m/s e direzione inclinata di 30° sul piano orizzontale. Supponendo che la massa della palla sia 46,0 g e che la mazza e la palla stiano a contatto per 1,20 ms, trovare (a) l'impulso conferito alla palla; (b) l'impulso conferito alla mazza, e (c) la forza media esercitata dalla mazza sulla palla.
7. Una palla da baseball di massa 150 g lanciata alla velocità di 41,6 m/s è battuta indietro in direzione del lanciatore alla velocità di 61,5 m/s. La mazza resta in contatto con la palla per 4,70 ms. Trovare la forza media esercitata dalla mazza sulla palla.
8. Un urto della durata di 27,0 ms applica una forza che vale in media 984 N a una palla d'acciaio di massa 420 g in movimento alla velocità di 13,8 m/s. Supposto che la forza sia diretta in verso opposto al moto della palla, trovare la velocità finale di quest'ultima.
9. Il grafico della Figura 6.20 rappresenta in modo approssimato l'intensità di una forza in funzione del tempo durante l'urto in direzione perpendicolare contro una parete, alla velocità iniziale di 32 m/s, di una palla da tennis di massa 58 g, che rimbalza alla stessa velocità in verso opposto. Qual è il valore di F_{max}, la massima forza di contatto durante l'urto?

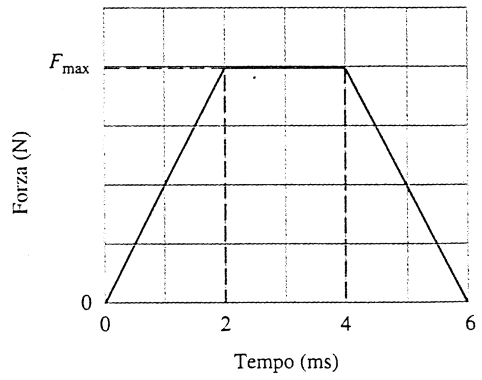


FIGURA 6.20 Esercizio 9.

10. Due componenti di un veicolo spaziale, aventi masse di 1200 kg e 1800 kg, sono separati dalla detonazione di un bullone esplosivo che li teneva assieme. L'intensità dell'impulso applicato a ciascuno è 300 N · s. Qual è la velocità relativa di allontanamento delle due parti?
11. Una palla da *croquet* avente massa 0,50 kg è colpita dal martelletto ricevendo l'impulso registrato dal grafico di figura 6.21. Qual è la velocità della palla subito dopo l'azzeramento della forza?

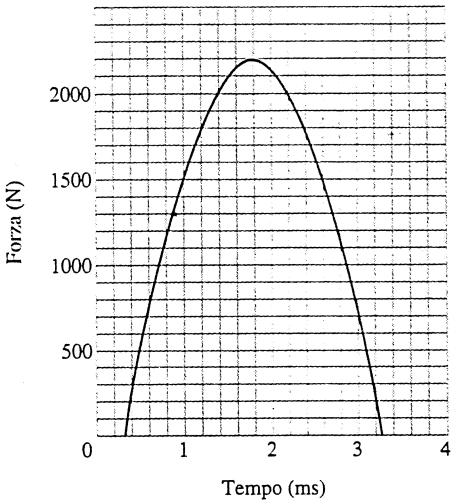


FIGURA 6.21 Esercizio 11.

12. Un esperto di karatè rompe con un colpo di mano una tavola di pino dello spessore di 2,2 cm. Dalla ripresa in fotografia stroboscopica risulta che la mano, che si può stimare abbia una massa di 540 g, ha colpito la superficie superiore della tavola alla velocità iniziale di 9,5 m/s e si è arrestata 2,8 cm sotto quel livello. (a) Qual è la durata dell'urto (ammesso che la forza sia rimasta costante)? (b) Qual è la forza media applicata?
13. Una sonda spaziale senza equipaggio da 2500 kg è in moto rettilineo alla velocità costante di 300 m/s. Un motore a razzo della sonda si accende per 65,0 s dando una spinta di 3000 N. Qual è la variazione di intensità della quantità di moto se la spinta è diretta all'indietro, in avanti o lateralmente? Si ammette che la massa del propellente emesso sia trascurabile rispetto alla massa della sonda.
14. Un fucile a pallini spara ogni secondo, alla velocità di 483 m/s, 10 sferette di massa 2,14 g ciascuna, che sono arrestate da una parete rigida. (a) Trovare la quantità di moto di ogni sferetta. (b) Calcolare la forza media esercitata sulla parete dal flusso di sferette. (c) Se ogni sferetta rimane a contatto con la parete per 1,25 ms, qual è la forza media esercitata da ciascuna durante il contatto? E perché è tanto differente da (b)?
15. Dopo il lancio dall'orbita terrestre un'astronave satellite sta viaggiando a velocità costante e si trova a metà strada del suo viaggio di sei mesi verso Marte, quando un controllore di volo della NASA si accorge che invece di essere diretta a inserirsi su un'orbita a 100 km di altezza dalla superficie di Marte, è in rotta di collisione col centro del pianeta. Per correggere la rotta egli ordina una breve accensione dei razzi direzionali perpendicolari alla direzione del moto che generano una spinta costante di 1200 N. Per

 ISBN 88-408-1254-7

quanto tempo devono rimanere accesi quei razzi? Troverete i dati necessari nell'Appendice C, supponendo che la distanza fra la Terra e Marte rimanga costante e pari al suo valore minimo.

6.4 Conservazione della quantità di moto

16. Un uomo del peso di 860 N stando in piedi su una superficie di attrito trascurabile, calcia in avanti un sassolino pesante 0,70 N che si trova vicino al suo piede, imprimendogli una velocità di 3,8 m/s. Che velocità acquisisce l'uomo a seguito dell'urto?

17. Un uomo di massa 75,2 kg viaggia su un carrello di massa 38,6 kg alla velocità di 2,33 m/s. Salta giù in modo da atterrare a velocità nulla. Trovate la variazione di velocità del carrello così prodotta.

18. Un carro ferroviario piatto di peso W corre senza attrito su un binario rettilineo orizzontale. All'inizio una persona di peso w sta in piedi sul vagone che si muove verso destra alla velocità v_0. Qual è la variazione di velocità del vagone se l'uomo corre verso sinistra, come nella Figura 6.22, alla velocità v_{rel} rispetto al vagone subito prima di saltare giù dall'estremità di sinistra?

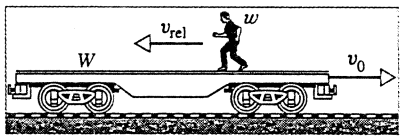


FIGURA 6.22 Esercizio 18.

6.5 Urti fra due corpi

19. Un veicolo spaziale che sta viaggiando a 3860 km/h rispetto alla Terra sgancia il motore di uno stadio che ha esaurito il propellente, proiettandolo indietro alla velocità relativa di 125 km/h rispetto al modulo di comando. La massa del motore è quattro volte la massa del modulo. Qual è la velocità del modulo dopo la separazione?

20. I blocchi della Figura 6.23 slittano verso destra senza attrito. Qual è la velocità v dopo l'urto del blocco di massa 1,6 kg?

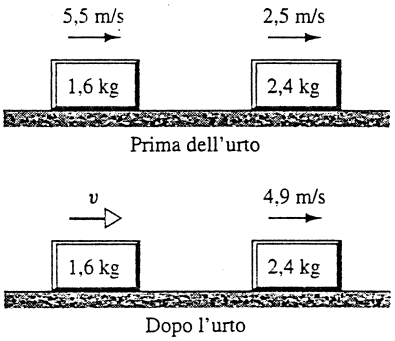


FIGURA 6.23 Esercizi 20 e 21.

21. Con riferimento alla Figura 6.23, supponiamo che il blocco di massa 2,4 kg inverta la propria corsa, dirigendosi contro il blocco di massa 1,6 kg. Quale sarà dopo l'urto la velocità v del blocco di massa 1,6 kg?



FIGURA 6.24 Esercizio 22.

22. Si ritiene che il cratere Meteor in Arizona (Figura 6.24) sia stato formato dalla caduta di un meteorite circa 20 000 anni or sono. La massa e la velocità del meteorite sono stimate in $5 \cdot 10^{10}$ kg e 7,2 km/s. Quale velocità imprimerebbe questo meteorite alla Terra in un urto frontale?

23. Un proiettile di massa 5,18 g colpisce alla velocità di 672 m/s un blocco di legno di massa 715 g fermo su una superficie senza attrito, ed esce dall'urto alla velocità ridotta di 428 m/s nella stessa direzione. Trovare la velocità finale del blocco.

24. Una particella alfa si scontra con un nucleo di ossigeno inizialmente a riposo. La particella alfa è deviata di un angolo di 64,0° rispetto all'asse del suo moto iniziale, mentre il nucleo di ossigeno viene proiettato in direzione formante un angolo di 51,0° rispetto al medesimo asse, ma con velocità finale di $1{,}20 \cdot 10^5$ m/s. Qual è la velocità finale della particella alfa, la cui massa è di 4,00 u contro una massa di 16,00 u del nucleo di ossigeno?

25. Due oggetti, A di massa 2,0 kg e B di massa 3,0 kg, si urtano. Le velocità iniziali sono $v_{iA} = (15 \text{ m/s})i + (30 \text{ m/s})j$ e $v_{iB} = (-10 \text{ m/s})i + (5{,}0 \text{ m/s})j$. Dopo l'urto è $v_{fA} = (-6{,}0 \text{ m/s})i + (30 \text{ m/s})j$. Qual è la velocità finale di B?

26. Un nucleo radioattivo inizialmente a riposo decade emettendo un elettrone e un neutrino in direzioni formanti fra loro un angolo retto. La quantità di moto dell'elettrone è $1{,}2 \cdot 10^{-22}$ kg·m/s e quella del neutrino $6{,}4 \cdot 10^{-23}$ kg·m/s. Trovare direzione e intensità della quantità di moto del nucleo residuo.

27. Una chiatta avente massa $1{,}50 \cdot 10^5$ kg, mentre in una fitta nebbia discende alla velocità di 6,20 m/s la corrente di un fiume, investe sul fianco un'altra chiatta, di massa $2{,}78 \cdot 10^5$ kg, che sta attraversando il fiume (Figura 6.25) alla velocità di 4,30 m/s. Subito dopo l'urto la seconda chiatta devia di 18,0° verso valle e la sua velocità aumenta a 5,10 m/s. La corrente del fiume al momento dell'inci-

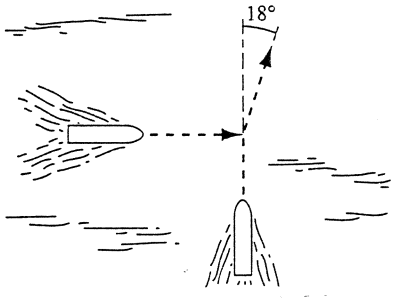


FIGURA 6.25 Esercizio 27.

dente è praticamente nulla. Quali sono la velocità e la direzione finali del moto della prima chiatta subito dopo l'urto?

28. Una mosca svolazzante è investita da un elefante furioso alla velocità di 2,1 m/s. Supposto che l'urto sia elastico, a che velocità rimbalza la mosca? Si tenga presente che il proiettile (l'elefante) è molto più pesante del bersaglio (la mosca).
29. Due sfere di titanio, animate da uguali velocità, si scontrano frontalmente in modo elastico. Dopo l'urto una delle due sfere, di massa 300 g, rimane ferma. Qual è la massa della seconda sfera?
30. Un carrello di massa 342 g che corre su una guida a cuscino d'aria priva di attrito alla velocità iniziale di 1,24 m/s investe un altro carrello fermo, di massa ignota. L'urto è elastico. Dopo l'urto il primo carrello continua la sua corsa nella stessa direzione alla velocità di 0,636 m/s. (a) Qual è la massa del secondo carrello? (b) E la sua velocità?
31. Un oggetto di massa 2,0 kg entra in collisione elastica con un altro oggetto a riposo e continua a muoversi nella direzione primitiva a un quarto della velocità iniziale. Qual è la massa dell'oggetto investito?
32. Un vagone merci di massa 31 800 kg viaggiando alla velocità di 1,5 m/s ne tampona un altro di massa 24 200 kg che viaggia alla velocità di 0,90 m/s nella stessa direzione. (a) Trovare le velocità finali dei due vagoni ammesso che rimangano agganciati. (b) Se invece, ciò che è poco probabile, l'urto è elastico, trovare le velocità di ciascuno dopo l'urto.
33. Dopo un urto totalmente anelastico risulta che due oggetti di uguali masse e velocità iniziali continuano a muoversi congiuntamente a velocità dimezzata. Trovare l'angolo formato dai due vettori velocità iniziali.
34. Un protone (massa 1,01 u) si scontra elasticamente alla velocità di 518 m/s con un altro protone fermo. Il primo è deviato di un angolo pari a 64,0° dalla sua direzione iniziale. (a) Qual è la direzione della velocità finale del protone bersaglio? (b) Quali sono le velocità finali dei due protoni?
35. In laboratorio una particella di massa 3,16 kg che si muove verso sinistra a 15,6 m/s si scontra frontalmente con un'altra di massa 2,84 kg in moto verso destra alla velocità di 12,2 m/s. Trovare la velocità del centro di massa delle due particelle dopo l'urto.

PROBLEMI

1. Un getto d'acqua investe una pala direttrice (stazionaria) di una turbina, come in Figura 6.26. Il modulo della velocità dell'acqua è u sia prima che dopo essere entrata a contatto con la superficie curva della pala, e la massa μ dell'acqua che la investe nell'unità di tempo è costante. Trovare la forza esercitata dall'acqua sulla pala.

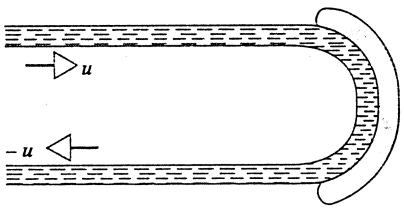


FIGURA 6.26 Problema 1.

2. Un'automobile di massa 1420 kg viaggia verso nord alla velocità di 5,28 m/s. Dopo aver compiuto una curva a destra di 90° in 4,60 s, il guidatore distratto investe un albero, che arresta l'auto in 350 ms. Qual è l'intensità dell'impulso impresso al veicolo (a) durante la curva e (b) durante l'urto? Quale forza media agisce sull'auto (c) durante la curva e (d) durante l'urto?
3. Una palla di massa 325 g colpisce una parete alla velocità $v = 6{,}22$ m/s con una direzione formante un angolo $\theta = 33{,}0°$ rispetto alla superficie e rimbalza con la stessa velocità e lo stesso angolo, come in Figura 6.27, dopo essere rimasta in contatto con la parete per 10,4 ms. (a) Qual è l'impulso ricevuto dalla palla? (b) Quale è stata la forza media esercitata dalla palla sulla parete?
4. È ben noto che proiettili e altri missili sparati contro Superman rimbalzano semplicemente sul suo torace come in Figura 6.28. Supponiamo che un gangster irrori il suo torace di 100 proiettili di massa 3,0 g al minuto, sparati alla

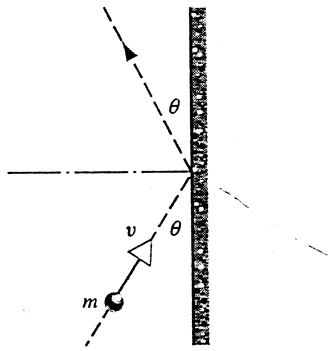


FIGURA 6.27 Problema 3.

velocità di 500 m/s. Supponiamo inoltre che questi rimbalzino indietro senza perdere velocità. Trovare la forza media esercitata dai proiettili sul torace di Superman.



FIGURA 6.28 Problema 4.

 ISBN 88-408-1254-7

5. Durante un violento temporale chicchi di grandine delle dimensioni di una biglia (diametro = 1,0 cm) cadono alla velocità di 25 m/s, nel numero stimato di 120 per metro cubo d'aria. Si trascuri il rimbalzo della grandine al suolo. (a) Qual è la massa di ogni chicco? (b) Qual è la forza esercitata dalla grandine su un tetto piano di 10 m · 20 m? Si ammette che la grandine, come il ghiaccio, abbia una massa volumica di 0,92 g/cm^3.
6. Una catena uniforme molto flessibile di massa M e lunghezza L, appesa a un estremo, pende verticalmente fino a sfiorare la superficie di un tavolo. L'estremità superiore è improvvisamente lasciata libera e la catena cade arrotolandosi su una piccola area, dove ogni anello si arresta nell'istante in cui tocca il tavolo, come in Figura 6.29. Trovare la forza esercitata in ogni istante dal tavolo sulla catena, in funzione del peso della porzione di catena che è già arrivata ad arrestarsi sul tavolo.

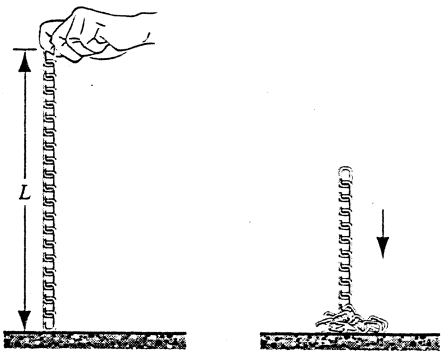


FIGURA 6.29 Problema 6.

7. Una scatola è appoggiata su una bilancia tarata a zero a scatola vuota. Si versa nella scatola da un'altezza h un flusso di biglie, ciascuna di massa m, al ritmo di R biglie al secondo. Gli urti sono completamente anelastici: si suppone che le biglie aderiscano al fondo della scatola senza rimbalzi. Trovare il peso indicato dalla bilancia al tempo t dall'inizio della caduta delle biglie. Calcolare il valore del peso per $R = 115\ s^{-1}$, $h = 9{,}62$ m, $m = 4.60$ g e $t = 6{,}50$ s.
8. Un vagone ferroviario piatto di massa 1930 kg, in grado di viaggiare praticamente senza attrito, è fermo in una stazione vicino alla piattaforma di carico. Un uomo di massa 108 kg corre sulla piattaforma parallelamente alle rotaie alla velocità di 9,74 m/s. Salta sul retro del pianale del vagone. (a) Qual è la velocità del vagone dopo che egli è salito a bordo e si è fermato? (b) Se comincia a camminare verso la parte anteriore del vagone a una velocità relativa di 0,520 m/s rispetto al vagone, qual è la velocità del vagone?
9. Un battipalo di massa 2900 kg, cadendo da un'altezza di 1,95 m, conficca nel terreno per una profondità di 3,8 cm un palo di massa 500 kg. (a) Ammesso che l'urto fra il battipalo e il palo sia completamente anelastico, determinare la forza di resistenza esercitata dal terreno. (b) Supposto che la forza calcolata in (a) rimanga costante, a che profondità sarebbe stato conficcato il palo nel caso di un urto elastico? (c) Che cosa è più efficace in questo caso, l'urto elastico o quello anelastico?

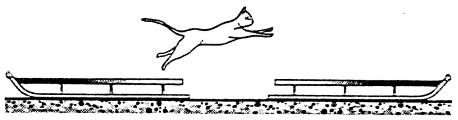


FIGURA 6.30 Problema 10.

10. Due slitte da ghiaccio, di massa 22,7 kg ciascuna, sono collocate una dietro all'altra a breve distanza, come nella Figura 6.30. Un gatto di massa 3.63 kg che si trova su una delle due slitte balza sull'altra e ritorna immediatamente sulla prima. Entrambi i salti avvengono alla velocità di 3,05 m/s rispetto alla slitta dalla quale è effettuato il salto. Trovare le velocità finali delle due slitte.
11. Due veicoli A e B, che viaggiano uno verso ovest e l'altro verso nord, raggiungono un incrocio nel quale si scontrano rimanendo incastrati fra loro. Prima dello scontro la velocità di A, di massa 1232 kg, è di 62 km/h, mentre quella di B, di massa 1650 kg, è di 93,3 km/h. Trovare intensità e direzione della velocità comune ai due veicoli subito dopo l'urto.
12. Due palle A e B, di masse ignote ma differenti fra loro, si scontrano. A è inizialmente ferma mentre B ha velocità di modulo v. Dopo l'urto B ha velocità $v/2$ e direzione deviata di 90° rispetto a quella originaria. (a) Trovare la direzione di A dopo l'urto. (b) Dalle informazioni ricevute è possibile determinare la velocità di A? Si spieghi la risposta.
13. In una partita di biliardo la palla d'inizio ne colpisce un'altra ferma, e prosegue alla velocità di 3,50 m/s su una linea che forma un angolo di 65,0° con la sua direzione primitiva, mentre la seconda acquisisce la velocità di 6,75 m/s. Valendosi del principio di conservazione della quantità di moto trovare (a) l'angolo fra la direzione del moto della seconda palla e quella iniziale della prima e (b) la velocità iniziale della prima.
14. La sonda spaziale *Voyager 2* (massa m e velocità v rispetto al Sole) si avvicina al pianeta Giove (massa M e velocità V, sempre rispetto al Sole), come appare nella Figura 6.31. La sonda gira intorno al pianeta e prosegue nella direzione opposta. Qual è la sua velocità rispetto al Sole dopo questo incontro «a fionda»? Poniamo $v = 12$ km/s e $V = 13$ km/s (la velocità orbitale di Giove), e supponiamo che si tratti di un urto elastico. La massa di Giove è molto maggiore della massa della sonda ($M \gg m$).

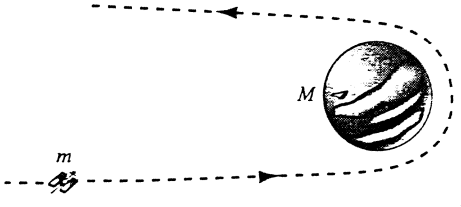


FIGURA 6.31 Problema 14.

15. La testa di una mazza da golf, di massa M pari a 220 g, colpisce alla velocità di 45.0 m/s una palla (massa 46.0 g) ferma sul *tee*. (a) Che velocità assume la palla? (b) Che velocità assumerebbe se M fosse doppia? O tripla? A quali conclusioni si può giungere circa l'uso di mazze pesanti? Supponiamo che gli urti siano perfettamente elastici e che il giocatore sia in grado di imprimere la stessa velocità di impatto alle mazze più pesanti. Vedi Quesito 13.

16. Le due sfere sulla destra della Figura 6.32 sono leggermente separate e a riposo; la sfera a sinistra si avvicina alla velocità v_0. Supponendo urti frontali elastici, (a) se $M \leq m$, dimostrare che si verificano due urti e trovare tutte le velocità finali; (b) posto $M > m$, dimostrare che si verificano tre urti e trovare tutte le velocità finali.

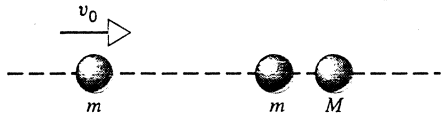


FIGURA 6.32 Problema 16.

17. Come si vede nella Figura 6.33, una palla con velocità iniziale 10,0 m/s urta elasticamente, senza attrito, due palle identiche a contatto fra loro e allineate simmetricamente con asse perpendicolare rispetto alla direzione iniziale della palla 1. Trovare le velocità finali delle tre palle dopo l'urto. (*Suggerimento*: in assenza di attrito ogni impulso è diretto lungo la linea che congiunge i centri delle palle che si urtano, normalmente alle loro superfici di contatto.)

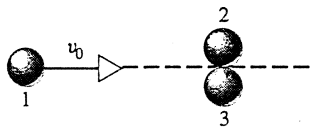


FIGURA 6.33 Problema 17.

18. Dimostrare che nell'urto elastico di una particella di massa m_1 con un'altra di massa m_2, inizialmente ferma, (a) il massimo angolo θ_m di cui m_1 può essere deviata dall'urto è dato da $\cos^2 \theta_m = 1 - (m_2/m_1)^2$, per cui $0 \leq \theta_m \leq \pi/2$ per $m_1 > m_2$; (b) $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, per $m_1 = m_2$; (c) θ_1 può avere qualsiasi valore fra 0 e π se $m_1 < m_2$.

19. Un proiettile di massa 3,54 g è sparato contro due blocchi posti su una superficie piana senza attrito, come in Figura 6.34a. Il proiettile passa attraverso il primo blocco, di massa 1,22 kg, e si conficca nel secondo, di massa 1,78 kg. Come risulta dalla Figura 6.34b, i due blocchi assumono rispettivamente le velocità di 0,630 m/s e di 1,48 m/s. Trascurando la massa asportata dal primo blocco dal proiettile passante, trovare (a) la velocità del proiettile all'uscita dal primo blocco e (b) la sua velocità iniziale.

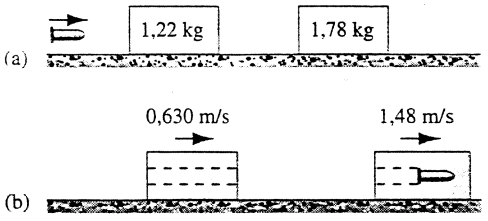


FIGURA 6.34 Problema 19.

20. Un blocco di 2,0 kg parte da fermo, senza attrito, lungo un piano inclinato di 22° rispetto al piano orizzontale dall'altezza di 0,65 m, come in Figura 6.35. All'arrivo sul piano a quota zero urta, attaccandovisi, un blocco di massa 3,5 kg. I due blocchi congiunti slittano per una distanza di 0,57 m sul piano orizzontale fino ad arrestarsi. Qual è il coefficiente di attrito della superficie orizzontale?

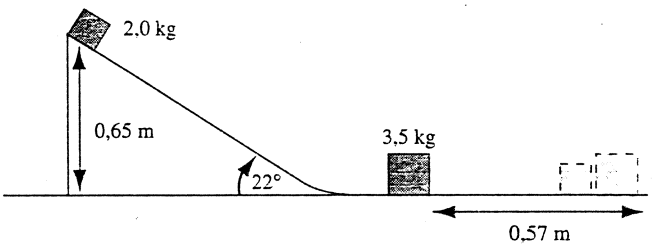


FIGURA 6.35 Problema 20.

21. Due automobili, A, di massa 1100 kg, e B, di massa 1400 kg, slittano sul ghiaccio tentando di fermarsi a un semaforo rosso. Il coefficiente di attrito dinamico fra le ruote bloccate dei due veicoli e il terreno è 0,130. L'auto A riesce a fermarsi al semaforo, ma B non ci riesce e tampona A. Dopo l'urto A si arresta a 8,20 m dal punto di impatto e B a 6,10 m, come indicato nella Figura 6.36. Entrambi i veicoli avevano le ruote bloccate durante l'incidente. (a) In base alla distanza percorsa da ciascun veicolo dopo l'urto trovare le rispettive velocità finali. (b) In base al principio di conservazione della quantità di moto, trovare a che velocità B ha tamponato A. Su quali basi si può qui discutere la validità del principio di conservazione della quantità di moto?

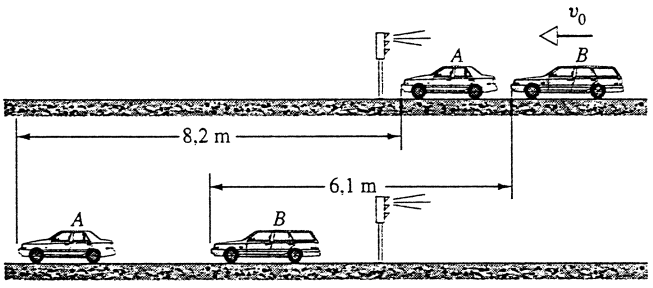


FIGURA 6.36 Problema 21.

 ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Un gioco interessante chiamato *Astro Blaster* (Figura 6.37) è formato da quattro palle di plastica infilate su un bastoncino. Se lo si lascia cadere verticalmente, la palla più bassa rimbalza e si scontra con quella subito sopra. Questa quindi urta la terza, che a sua volta urta la quarta. La velocità di quest'ultima dopo l'ultimo urto è notevolmente maggiore della velocità alla quale la prima palla ha toccato il suolo. Ammettendo che tutti gli urti siano elastici, trovate il rapporto delle masse delle quattro palle che conferirà la massima velocità possibile alla quarta palla, sapendo che quest'ultima ha una massa 64 volte minore della più grande. (*Nota*: il problema può essere risolto numericamente, ma anche analiticamente).



FIGURA 6.37 Problema al calcolatore 1.

CAPITOLO 7

SISTEMI DI PARTICELLE

Nei capitoli precedenti è stato affrontato il problema del moto di una particella puntiforme, ovvero di un oggetto dotato di massa ma di dimensioni trascurabili. Questa semplificazione non è da considerarsi troppo limitante; per esempio tutti gli elementi di un corpo rigido in moto traslatorio si muovono con la medesima legge; in tale situazione considerare il corpo come un oggetto esteso o come un particella puntiforme non fa alcuna differenza. Vi sono molte situazioni, d'altro canto, in cui l'approssimazione di particella puntiforme non è applicabile; ciò accade, per esempio, se si considerano rotazioni di un corpo attorno a un suo asse o moti in cui le diverse parti di un corpo oscillano le une rispetto alle altre. Anche in moti di questa natura, però, è possibile individuare un punto del corpo, detto centro di massa, *il cui moto, sotto opportune ipotesi sulle forze applicate al corpo stesso, può essere descritto come il moto di una particella puntiforme. In questo capitolo viene descritto come individuare il centro di massa di un corpo e viene mostrato come sia possibile usare la legge di Newton per studiarne il moto.*

7.1 IL MOTO DI UN SISTEMA DI PARTICELLE

In Figura 7.1 è illustrato il moto di un bastone lanciato da un giocoliere. A prima vista il moto sembra molto complesso e non appare ovvio che possa essere descritto per mezzo delle leggi di Newton. È chiaro, d'altronde, che il bastone non si comporta come una particella puntiforme: i diversi elementi che costituiscono il bastone compiono moti differenti e, inoltre, *non* è evidente che si possa individuare un elemento del bastone in moto parabolico come un proiettile puntiforme.

La legge di Newton, così come è stata formulata nei capitoli precedenti, è stata desunta a partire dal comportamento delle particelle puntiformi. In alcuni casi, quando tutti gli elementi di un sistema complesso si muovono in modo simile, il moto di un sistema di particelle o di un corpo esteso può essere ricondotto a quello di una particella puntiforme. Nel caso del moto del bastone in Figura 7.1 ciò non è vero, ed è quindi necessario trovare una strategia diversa per descrivere il suo moto.

Un'analisi attenta del moto del bastone mostra che tale oggetto compie allo stesso tempo due moti dalle caratteristiche diverse: un moto traslatorio parabolico, tipico dei proiettili, e un moto rotatorio, quale è possibile per i corpi rigidi (si rimanda al capitolo seguente). Il fenomeno dovuto alla combinazione di questi due moti sembra abbastanza complesso; ma se si fissa l'attenzione su un punto particolare del corpo, il *centro di massa*, la descrizione del fenomeno può essere fatta in termini semplici: il moto del ba-

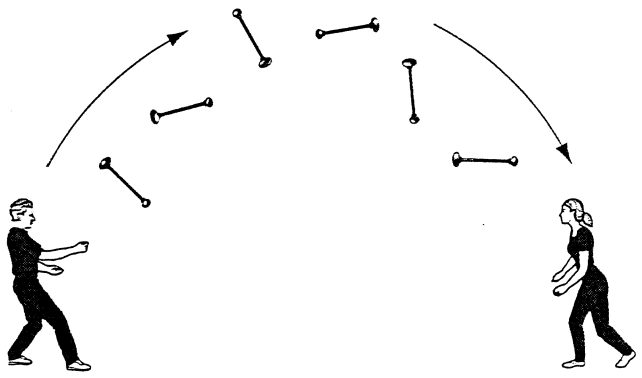


FIGURA 7.1 Il moto complicato di un bastone lanciato da un giocoliere.

 ISBN 88-408-1254-7

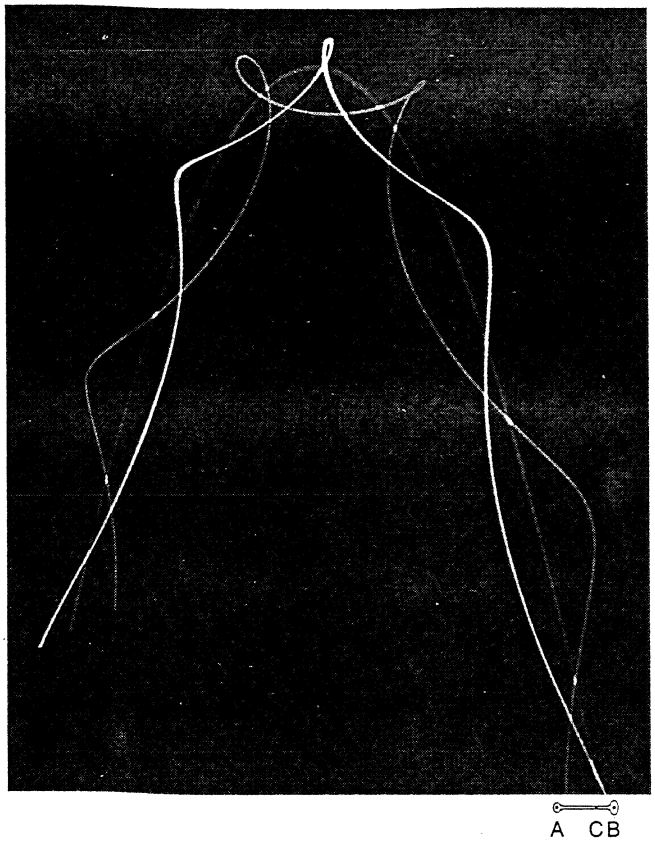


FIGURA 7.2 Fotografia del bastone con tempo di esposizione molto lungo; il moto di tre elementi del bastone, A, B e C, è messo in evidenza mediante punti luminosi. Gli elementi A e B hanno un moto complesso, mentre il centro di massa C segue una traiettoria parabolica.

stone può essere considerato, infatti, come la combinazione del moto parabolico del centro di massa e di un moto rotatorio attorno a tale punto. In Figura 7.2 è riportata una fotografia del bastone con tempo di esposizione molto lungo; il moto del centro di massa e di altri due elementi del bastone è stato evidenziato per mezzo di punti luminosi. Dalla fotografia è evidente che la traiettoria del centro di massa è una parabola, mentre quella degli altri due punti appare decisamente più complessa.

Nel Paragrafo 6.5 è stata introdotta la nozione di centro di massa e si è mostrata la sua utilità nella descrizione degli urti tra particelle puntiformi. In questo capitolo si mostrerà come individuare il centro di massa di un corpo e come usarlo al fine di semplificare la descrizione del moto del corpo stesso.

7.2 SISTEMI DI DUE PARTICELLE

Proviamo a semplificare il problema discusso nel pararafo precedente: in prima approssimazione il bastone può essere pensato come un oggetto costituito da due particelle poste alle due estremità A e B del bastone e connesse da una sbarretta sottile di lunghezza fissata e massa trascurabile. La massa della particella in B viene supposta pari al doppio di quella della particella in A.

Un'ulteriore semplificazione consiste nel supporre che il bastone si muova su un piano orizzontale privo di attrito; con questa scelta vengono di fatto eliminati tutti gli effetti dovuti alla gravità.

Quando si è usata la legge di Newton per descrivere il moto di un corpo assimilabile a una particella puntiforme, si è suddiviso il problema in due parti separando il moto della particella da quello dell'ambiente circostante. Un approccio simile può essere adottato per sistemi più complessi, come il modello a due particelle del bastone; il problema può essere suddiviso nella descrizione del moto di un *sistema* e dell'ambiente in cui è immerso. Il sistema va definito in modo da semplificare il più possibile il problema, indipendentemente dal numero di particelle attribuite al sistema; è importante, però, che l'analisi del problema sia coerente e che si tengano in conto tutte le interazioni tra ciò che si definisce sistema e ciò che si definisce ambiente esterno. Tali interazioni sono dette *forze esterne*. Le interazioni tra le diverse parti del sistema, invece, sono dette *forze interne*. Nel caso del bastone si può costruire un modello in cui il sistema è costituito dalle due particelle e dalla sbarretta di massa trascurabile che le connette rigidamente; la gravità e la reazione normale esercitata dal piano sono le forze esterne, mentre la tensione che la sbarretta esercita sulle due particelle va classificata come forza interna.

Esaminiamo in dettaglio il moto del bastone che avanza sul piano. In Figura 7.3 sono riportate alcune posizioni successive del centro di massa C e delle estremità A e B del

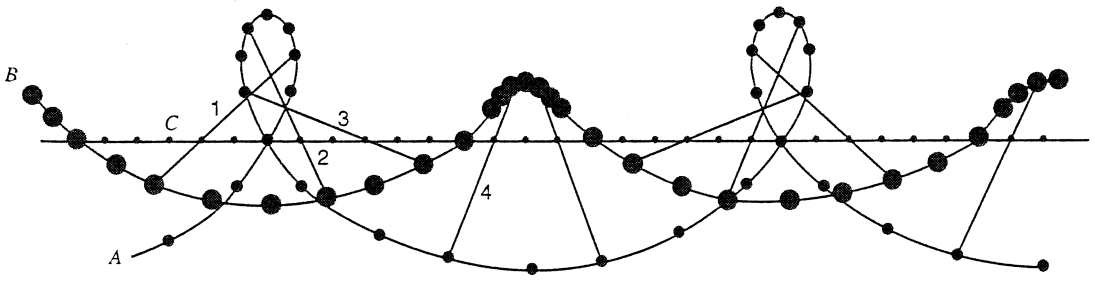


FIGURA 7.3 Moto di due particelle puntiformi connesse mediante una sbarretta di massa trascurabile. I punti rappresentano posizioni successive del centro di massa C e delle estremità A e B della sbarretta. Il punto C si muove lungo una linea retta e le sue posizioni successive sono equidistanti; pertanto il moto del centro di massa è rettilineo uniforme.

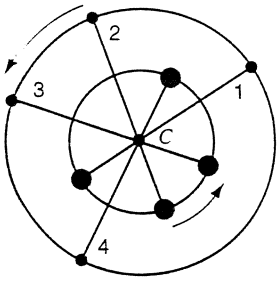


FIGURA 7.4 Se si osserva il moto descritto in Figura 7.3 da un sistema di riferimento solidale con il punto C, la sbarretta sembra ruotare attorno a C e le due particelle sembrano descrivere circonferenze di raggio diverso.

bastone. Dall'illustrazione risulta evidente che le due particelle in A e B hanno accelerazione non nulla e pertanto, come conseguenza della legge di Newton, devono essere sottoposte all'azione di forze la cui risultante è diversa da zero. Il centro di massa C, invece, si muove a velocità costante in modulo e in direzione; la sua accelerazione, di conseguenza, è nulla. Gli altri elementi del bastone si muovono in modo più complicato.

È di sicuro interesse descrivere il moto del bastone in un sistema di riferimento in moto con la stessa velocità di C (come si vedrà in seguito, tale riferimento è il riferimento del centro di massa introdotto nel Paragrafo 6.5). In tale riferimento il punto C è in quiete; il moto delle particelle in A e in B è illustrato dalla Figura 7.4. In particolare in figura sono riportate le posizioni del bastone agli istanti indicati con 1, 2, 3 e 4 nella Figura 7.3. Il moto è rotatorio e le due particelle hanno velocità di modulo costante.

L'aver fissato la nostra attenzione sul centro di massa ha permesso di separare il moto complicato del bastone in due moti molto semplici: il moto rettilineo uniforme del centro di massa e il moto rotatorio uniforme del sistema attorno al centro di massa C. Il moto rotatorio del sistema verrà discusso nel capitolo successivo; in questo capitolo, invece, ci si limita a studiare il moto rettilineo del centro di massa.

Al fine di determinare la posizione del centro di massa del sistema, si considera un riferimento cartesiano sul piano orizzontale, come in Figura 7.5. Le masse delle particelle in A e in B vengono indicate rispettivamente con m_1 ed m_2; le loro posizioni rispetto all'origine del riferimento di coordinate a un particolare istante di tempo sono individuate dai vettori $\boldsymbol{r}_1$ ed $\boldsymbol{r}_2$. La posizione del centro di massa allo stesso istante di tempo, allora, è individuata dal vettore

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{7.1}$$

ovvero dalle coordinate

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad \text{e} \quad y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}. \tag{7.2}$$

È importante osservare che il centro di massa di un oggetto solido è un punto solidale con il corpo stesso la cui posizione dipende solo da come la massa del corpo è distribuita.

Come illustra la Figura 7.5, il sistema si muove al passare del tempo e con esso si muove il centro di massa; per comprendere la ragione per cui il moto del centro di massa ha proprietà speciali è utile calcolare la sua velocità e la sua accelerazione:

$$\boldsymbol{v}_{cm} = \frac{d\boldsymbol{r}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\dfrac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + m_2\dfrac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}}{m_1 + m_2}, \tag{7.3}$$

ovvero

$$\boldsymbol{v}_{cm} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{7.4}$$

e

$$\boldsymbol{a}_{cm} = \frac{d\boldsymbol{v}_{cm}}{dt} = \frac{m_1\dfrac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} + m_2\dfrac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}}{m_1 + m_2}, \tag{7.5}$$

ovvero

$$\boldsymbol{a}_{cm} = \frac{m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2}{m_1 + m_2}. \tag{7.6}$$

L'Equazione 7.6 permette di capire perché il moto del centro di massa risulta così semplice. In Figura 7.6 sono riportati i diagrammi delle forze per le due particelle e per la sbarretta

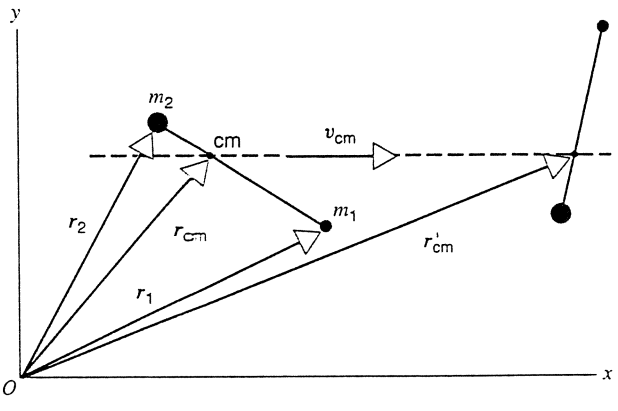


FIGURA 7.5 Sistema di riferimento usato per determinare la posizione del centro di massa del sistema a un certo istante di tempo. A un tempo successivo la nuova posizione del centro di massa è indicata da $\boldsymbol{r}'_{cm}$.

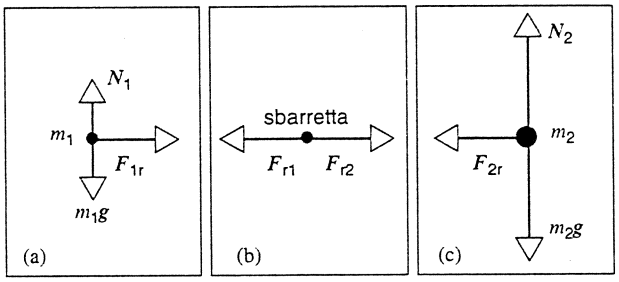


FIGURA 7.6 Diagrammi delle forze per (a) la particella di massa m_1, (b) la sbarretta di massa nulla e (c) la particella di massa m_2.

 ISBN 88-408-1254-7

che, si ricorda, è considerata priva di massa. La componente verticale dell'accelerazione delle due particelle è nulla, pertanto anche la componente verticale della risultante delle forze applicate alle due particelle è nulla. Il modulo della reazione normale esercitata dal piano su ciascuna particella è uguale al modulo della forza peso applicata alla particella stessa. La risultante F_{1s} delle forze applicate alla particella di massa m_1 è uguale alla tensione esercitata dalla sbarretta sulla particella; in virtù della legge di Newton si ha $F_{1s} = m_1a_1$. In modo analogo, per la seconda particella si ha $F_{2s} = m_2a_2$. La terza legge di Newton implica che la forza esercitata dalla sbarretta sulla particella di massa m_1 sia uguale e opposta alla forza che la stessa particella esercita sulla sbarretta, ovvero $F_{1s} = -F_{s1}$. Analogamente si ha anche $F_{2s} = -F_{s2}$. Combinando i risultati precedenti si può calcolare il numeratore nell'Equazione 7.6: $m_1a_1+m_2a_2 = F_{1s}+F_{2s} = -F_{s1}+(-F_{s2}) = -(F_{s1}+F_{s2})$. Osservando che $\sum F_s = F_{s1}+F_{s2}$ si ha che

$$m_1a_1+m_2a_2 = -(F_{s1}+F_{s2}) = -\sum F_s = 0.$$

Di conseguenza $a_{cm} = 0$ e, pertanto, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme.

Nell'esempio appena discusso si è supposto che la risultante delle forze esterne fosse nulla; si ricorda che F_{1s} ed F_{2s} sono forze *interne*, ovvero forze esercitate da una parte del sistema su un'altra parte del sistema stesso. Si supponga, ora, che su ciascuna particella agisca una forza esterna, per esempio una forza d'attrito dovuta alla superficie scabra. La forza totale agente su ciascuna particella è data dalla somma vettoriale della forza interna dovuta alla sbarretta e di quella esterna:

$$\sum F_1 = F_{1,ext}+F_{1s} \quad e \quad \sum F_2 = F_{2,ext}+F_{2s}. \qquad (7.7)$$

Ripetendo in questo caso l'analisi dell'Equazione 7.6 si ottiene

$$m_1a_1+m_2a_2 = \sum F_1+\sum F_2 = \\ = F_{1,ext}+F_{1s}+F_{2,ext}+F_{2s}. \qquad (7.8)$$

Anche in questo caso $F_{1s}+F_{2s} = 0$; allora, se si definisce la forza esterna totale $\sum F_{ext} = F_{1,ext}+F_{2,ext}$, si ha che l'Equazione 7.8 diventa $m_1a_1+m_2a_2 = \sum F_{ext}$. Dall'Equazione 7.6 discende quindi

$$\sum F_{ext} = (m_1+m_2)a_{cm}. \qquad (7.9)$$

L'equazione precedente ricorda da vicino la seconda legge di Newton, ma è scritta per un oggetto nella realtà inesistente, ovvero per una particella di massa m_1+m_2 la cui posizione coincide con quella del centro di massa.

Riassumendo i risultati ottenuti per sistemi di due particelle si può affermare che lo studio del moto del sistema può essere semplificato scomponendo il moto in quello del centro di massa e in quello attorno al centro di massa. Se la forza esterna agente sul sistema è nulla, il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. In caso contrario, ovvero qualora la risultante delle forze esterne sia diversa da zero, il moto del centro di massa può essere descritto come il moto di una particella che occupi la posizione del centro di massa, che abbia massa uguale alla massa totale del sistema e su cui agisca la risultante delle forze esterne. Nel prossimo paragrafo studieremo il moto di sistemi più complicati, costituiti da un numero arbitrariamente grande di particelle, e si mostrerà come si possano ottenere espressioni simili a quelle ricavate nel caso dei sistemi di due particelle.

PROBLEMA SVOLTO 7.1 (a) Si supponga che il bastone in Figura 7.3 sia in quiete, che tutti i suoi elementi giacciano sull'asse x, che la particella di massa maggiore m_2 ($= 2m$) abbia ascissa x e che quella di massa minore m_1 ($= m$) abbia ascissa $x + L$, ove L è la lunghezza della sbarretta che connette le due particelle. La situazione appena descritta è rappresentata in Figura 7.7a. Si determini la posizione del centro di massa. (b) Si supponga, ora, che la particella di massa m_2 occupi l'origine del riferimento cartesiano e che la sbarretta formi un angolo di 45° sia con l'asse delle ascisse sia con quello delle ordinate (Figura 7.7b). Si determini la posizione del centro di massa.

Soluzione (a) Sostituendo $y_1 = y_2 = 0$ nell'Equazione 7.2 si ha $y_{cm} = 0$. L'ascissa del centro di massa viene calcolata come segue a partire dall'Equazione 7.2:

$$x_{cm} = \frac{m(x+L)+2m(x)}{m+2m} = x+\frac{L}{3}.$$

Il centro di massa si trova sulla sbarretta a distanza $L/3$ dalla particella di massa maggiore.

(b) In questo caso $x_1 = L/\sqrt{2}$, $y_1 = L/\sqrt{2}$, $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$; applicando l'Equazione 7.2 si ottiene

$$x_{cm} = \frac{m(L/\sqrt{2})+2m(0)}{m+2m} = \frac{L}{3\sqrt{2}},$$

$$y_{cm} = \frac{m(L/\sqrt{2})+2m(0)}{m+2m} = \frac{L}{3\sqrt{2}}.$$

Anche in questo caso il centro di massa si trova sulla sbarretta a distanza $L/3$ dalla particelle di massa maggiore.

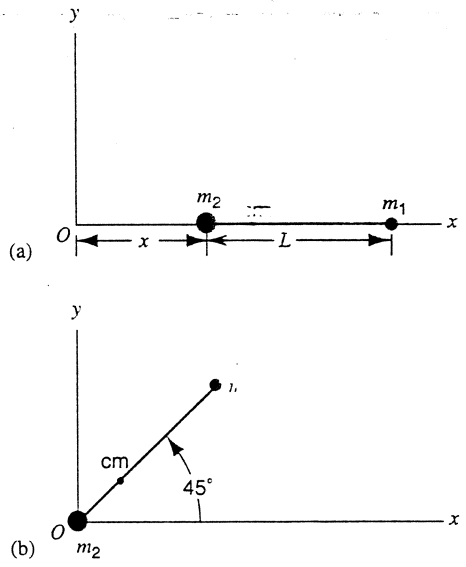


FIGURA 7.7 Problema svolto 7.1.

7.3 SISTEMI DI PARTICELLE

In questo paragrafo estenderemo i risultati precedenti al caso di sistemi costituiti da un numero arbitrario, ma finito, di particelle in moto nello spazio tridimensionale.

Si consideri un sistema di N particelle puntiformi di masse $m_1, m_2, \ldots, m_N$. La massa totale del sistema è data da

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N = \sum m_n. \tag{7.10}$$

Ciascuna particella del sistema è completamente caratterizzata dalla sua massa m_n, con $n = 1, 2, \ldots, N$, dalla sua posizione, individuata dal vettore $\boldsymbol{r}_n$ di componenti x_n, y_n e z_n, dalla sua velocità $\boldsymbol{v}_n$ di componenti v_{nx}, v_{ny} e v_{nz} e dalla sua accelerazione $\boldsymbol{a}_n$. La forza netta agente sulla particella m_n è indicata con $\sum \boldsymbol{F}_n$ e in generale differisce da particella a particella. Tale forza netta è in parte dovuta all'interazione con le altre particelle del sistema e in parte all'interazione con l'ambiente esterno in cui il sistema è immerso.

Il centro di massa del sistema può essere definito estendendo in modo naturale la definizione data dalla (7.1); si pone

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots m_N},$$

ovvero

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_n\boldsymbol{r}_n. \tag{7.11}$$

Proiettando il vettore definito dall'Equazione 7.11 lungo gli assi cartesiani si ottengono le seguenti equazioni per le coordinate del centro di massa:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_Nx_N) = \frac{1}{M}\sum m_nx_n, \tag{7.12a}$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_Ny_N) = \frac{1}{M}\sum m_ny_n, \tag{7.12b}$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}(m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_Nz_N) = \frac{1}{M}\sum m_nz_n. \tag{7.12c}$$

Derivando l'Espressione 7.11 si ottiene la velocità del centro di massa:

$$\boldsymbol{v}_{cm} = \frac{d\boldsymbol{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\left(\frac{m_1\,d\boldsymbol{r}_1}{dt} + \frac{m_2\,d\boldsymbol{r}_2}{dt} + \cdots + \frac{m_N\,d\boldsymbol{r}_N}{dt}\right),$$

ovvero

$$\boldsymbol{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{v}_N) = \frac{1}{M}\sum m_n\boldsymbol{v}_n. \tag{7.13}$$

Derivando l'espressione che fornisce la velocità si ottiene l'accelerazione del centro di massa:

$$\boldsymbol{a}_{cm} = \frac{d\boldsymbol{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{a}_N) = \frac{1}{M}\sum m_n\boldsymbol{a}_n, \tag{7.14}$$

che può essere riscritta nella forma

$$M\boldsymbol{a}_{cm} = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + m_N\boldsymbol{a}_N.$$

Applicando la seconda legge di Newton, $\sum \boldsymbol{F}_n = m_n\boldsymbol{a}_n$, a ciscuna particella del sistema, si ottiene

$$M\boldsymbol{a}_{cm} = \sum \boldsymbol{F}_1 + \sum \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \sum \boldsymbol{F}_N. \tag{7.15}$$

La forza totale agente sul sistema, quindi, è uguale alla massa totale del sistema moltiplicata per l'accelerazione del centro di massa. L'Equazione 7.15 non è null'altro che la seconda legge di Newton per il sistema di N particelle considerato come una singola particella di massa M la cui posizione coincide in ogni istante con quella del centro di massa ed è in moto con velocità $\boldsymbol{v}_{cm}$ e accelerazione $\boldsymbol{a}_{cm}$.

L'Equazione 7.15 può essere semplificata ulteriormente distinguendo le forze agenti su ciascuna particella del sistema in forze interne, dovute all'interazione mutua tra le particelle del sistema, e forze esterne, dovute all'interazione con l'ambiente esterno in cui il sistema è immerso. Sulla generica particella di massa m_n agisce la forza $\boldsymbol{F}_{nk}$ esercitata dalla particella di massa m_k; tale forza è una delle tante che contribuiscono alla forza totale $\sum \boldsymbol{F}_n$ applicata alla particella m_n. Analogamente, alla forza totale agente sulla particella di massa m_k contribuirà la forza $\boldsymbol{F}_{kn}$ dovuta all'interazione con la particella m_n. In virtù della terza legge di Newton si ha che $\boldsymbol{F}_{nk} = -\boldsymbol{F}_{kn}$, e pertanto tali forze si cancellano nella somma che fornisce la forza netta agente sul sistema, detta anche risultante delle forze agenti sul sistema, che compare nell'Equazione 7.15. In altri termini ciascuna di queste forze è parte di una coppia azione-reazione e quindi non contribuisce alla forza totale agente sul sistema. Nel Capitolo 3 si è osservato che le due forze che costituiscono una coppia azione-reazione devono essere applicate a due particelle differenti e quindi non agiscono l'una contro l'altra quando si studia il moto di una singola particella. Nel contesto del presente paragrafo non si sta contravvenendo a questa regola; infatti le due forze che costituiscono l'azione e la reazione sono considerate applicate a particelle diverse. Nel caso dei sistemi di particelle, però, le due forze vengono sommate per calcolare la forza totale agente sulla *coppia* di particelle e in tale somma l'azione e la reazione si compensano pur essendo applicate a particelle differenti.

Il secondo membro dell'Equazione 7.15, allora, si riduce alla sola somma delle forze *esterne*, ovvero

 ISBN 88-408-1254-7

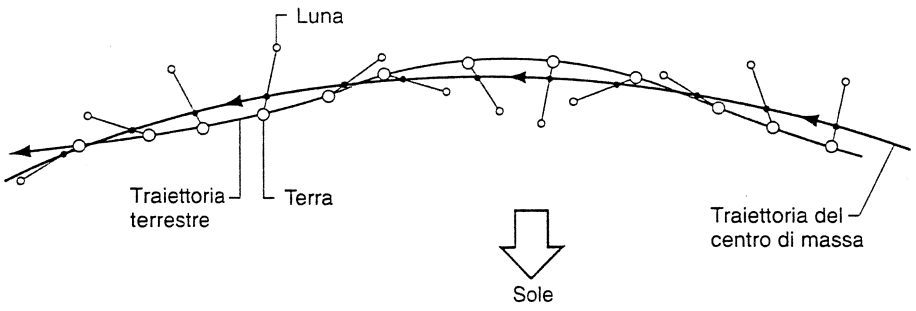


FIGURA 7.8 Il centro di massa del sistema Terra-Luna con ottima approssimazione segue una traiettoria circolare attorno al Sole, mentre la Terra e la Luna ruotano attorno al loro centro di massa esattamente come il bastone illustrato in Figura 7.3. Questo fenomeno, che causa un leggero «tremolio» dell'orbita terrestre, è stato decisamente esagerato nella figura. In realtà il centro di massa del sistema Terra-Luna cade all'interno della Terra che, pertanto, tocca in ogni istante l'orbita del centro di massa con almeno un suo punto.

$$Ma_{cm} = \sum F_{ext}. \qquad (7.16)$$

Proiettando il vettore definito dall'Equazione precedente lungo i tre assi cartesiani si ottengono le tre equazioni

$$Ma_{cm,x} = \sum F_{ext,x}, \qquad Ma_{cm,y} = \sum F_{ext,y}$$

e

$$Ma_{cm,z} = \sum F_{ext,z}. \qquad (7.17)$$

Possiamo riassumere i risultati finora ottenuti come segue:

il moto traslatorio complessivo di un sistema di particelle può essere studiato applicando la legge di Newton a una particella fittizia di massa pari alla massa totale del sistema, posizione coincidente con quella del centro di massa e sottoposta all'azione di una forza pari alla risultante delle forze esterne agenti sul sistema.

Come immediato corollario dell'affermazione precedente, nel caso $\sum F_{ext} = 0$, si può affermare che

se la risultante delle forze esterne agente su un sistema di particelle è nulla, allora il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme.

I risultati ottenuti in questo paragrafo sono del tutto generali e si applicano sia a generici sistemi di particelle separate tra loro sia a sistemi in cui le diverse particelle sono tenute assieme in un oggetto solido da forze interne opportune. In quest'ultimo caso, nonostante l'oggetto possa compiere un moto comunque complicato, il suo centro di massa si muoverà sempre in accordo con l'Equazione 7.16. Si consideri, per esempio, il moto del bastone illustrato in Figura 7.1: durante il suo moto il bastone compie delle rotazioni su se stesso, ma il centro di massa segue una semplice traiettoria parabolica. Per quel che riguarda l'effetto delle forze esterne – la gravità nel caso del bastone – il sistema si comporta come una particella puntiforme di massa M con posizione coincidente con il centro di massa. In definitiva un problema complesso è stato ridotto a due problemi ragionevolmente semplici: il moto parabolico del centro di massa e la rotazione del corpo attorno al centro di massa.

Un altro esempio interessante è costituito dal sistema Terra-Luna in moto sotto l'azione del campo gravitazionale solare (le forze esterne). Come è illustrato nella Figura 7.8, il centro di massa del sistema si muove lungo un'orbita stabile attorno al Sole; questa traiettoria è quella che verrebbe percorsa da una particella di massa $m_{Terra} + m_{Luna}$. Il moto della Terra e della Luna, però, è più complicato; infatti i due corpi ruotano attorno al centro di massa e per questa ragione l'orbita descritta dalla Terra presenta delle oscillazioni attorno all'orbita stabile del centro di massa. Facendo uso dei dati in Appendice C, dovreste essere in grado di dimostrare che il centro di massa del sistema Terra-Luna cade all'interno della Terra (Esercizio 1).

In Figura 7.9 è illustrato il moto di un proiettile che esplode in volo e si separa in tre frammenti; le forze relative all'esplosione sono di natura interna al sistema e quindi non influenzano il moto del centro di massa. Il centro di massa, allora, se nessuno dei tre frammenti sperimenta forze esterne ulteriori come la resistenza dell'aria o quelle dovute all'impatto con il suolo, persevera nel suo moto parabolico come se non fosse avvenuta alcuna esplosione.

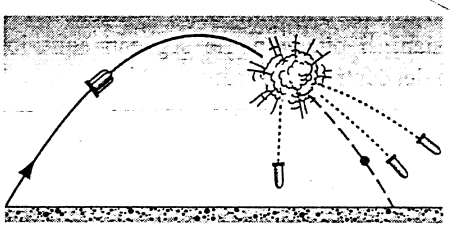


FIGURA 7.9 Un proiettile segue la traiettoria parabolica indicata dalla linea a tratto continuo. Il proiettile esplode e si spezza in tre frammenti. Il moto dei tre frammenti è tale che il centro di massa del sistema costituito dai tre frammenti segue l'originaria traiettoria parabolica.

PROBLEMA SVOLTO 7.2 La Figura 7.10a illustra un sistema costituito da tre particelle, inizialmente a riposo, di masse $m_1 = 4,1$ kg, $m_2 = 8.2$ kg ed $m_3 = 4,1$ kg. Le risultanti delle forze esterne agenti su ogni particella hanno modulo $F_1 = 6$ N, $F_2 = 12$ N, $F_3 = 14$ N e sono orientate come in figura. Si determini la posizione del centro di massa del sistema e la sua accelerazione all'istante iniziale.

Soluzione Nella figura la posizione del centro di massa è indicata con un un punto. Come illustrato in Figura 7.10b, trattiamo il centro di massa come fosse una particella fittizia di massa M uguale alla massa totale del sistema ($= m_1 + m_2 + m_3 = 16,4$ kg) e sottoposta all'azione di tutte le forze esterne agenti sul sistema. Le

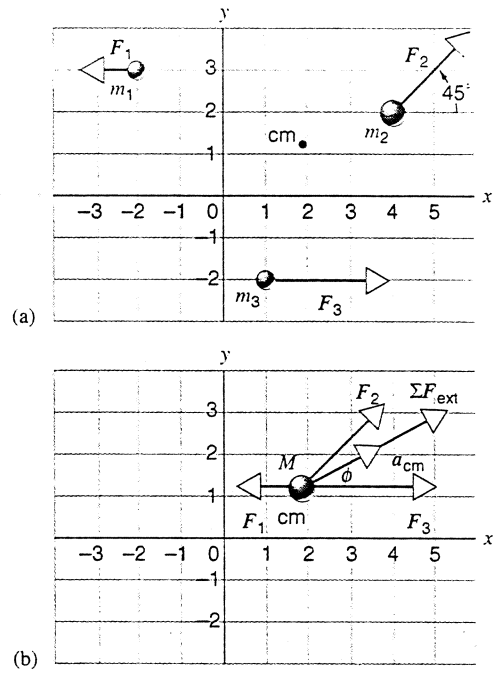


FIGURA 7.10 Problema svolto 7.2. (a) Sulle tre particelle che occupano le posizioni in Figura agiscono le tre forze riportate. Il centro di massa del sistema è indicato con un punto. (b) Il moto traslatorio del sistema può essere descritto come moto traslatorio di un elemento di massa M, che occupa la posizione del centro di massa e su cui agiscono le tre forze esterne. Sono riportate la risultante delle forze esterne e l'accelerazione di tale particella fittizia. L'unità di misura degli assi x e y è il centimetro.

coordinate del centro di massa si possono determinare mediante le Equazioni 7.12a e 7.12b:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_2 + m_2x_2 + m_3x_3) =$$
$$= \frac{1}{16{,}4\text{ kg}}[(4,1\text{ kg})(-2\text{ cm}) + (8{,}2\text{ kg})(4\text{ cm}) +$$
$$+ (4{,}1\text{ kg})(1\text{ cm})] = 1{,}8\text{ cm},$$
$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_2 + m_2y_2 + m_3y_3) =$$
$$= \frac{1}{16{,}4\text{ kg}}[(4{,}1\text{ kg})(3\text{ cm}) + (8{,}2\text{ kg})(2\text{ cm}) +$$
$$+ (4{,}1\text{ kg})(-2\text{ cm})] = 1{,}3\text{ cm}.$$

La componente della forza esterna totale lungo l'asse x è data da (Figura 7.10b)

$$\sum F_{ext,x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} =$$
$$= -6\text{ N} + (12\text{ N})(\cos 45°) + 14\text{ N} = 16{,}5\text{ N},$$

e la componente lungo l'asse y è data da

$$\sum F_{ext,y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} =$$
$$= 0\text{ N} + (12\text{ N})(\sin 45°) + 0\text{ N} = 8{,}5\text{ N}.$$

La risultante delle forze esterne ha modulo

$$\left|\sum F_{ext}\right| = \sqrt{(F_{ext,x})^2 + (F_{ext,y})^2} =$$
$$= \sqrt{(16{,}5\text{ N})^2 + (8{,}5\text{ N})^2} = 18{,}6\text{ N}$$

e forma un angolo con l'asse delle ascisse dato da

$$\phi = \arctan\frac{\sum F_{ext,y}}{\sum F_{ext,x}} = \arctan\frac{8{,}5\text{ N}}{16{,}5\text{ N}} = 27°.$$

La direzione del vettore accelerazione del centro di massa è uguale a quella della risultante delle forze esterne; dall'Equazione 7.16 si deduce che il modulo dell'accelerazione del centro di massa è dato da

$$|a_{cm}| = \frac{F_{ext}}{M} = \frac{18{,}6\text{ N}}{16.4\text{ kg}} = 1.1\text{ m/s}^2.$$

Si osserva infine che, se le forze esterne fossero costanti, l'accelerazione del centro di massa risulterebbe costante quandanche le eventuali forze interne, e quindi le accelerazioni delle singole particelle, dovessero dipendere dal tempo.

PROBLEMA SVOLTO 7.3 Un proiettile di massa 9,6 kg è lanciato da terra con velocità iniziale 12,4 m/s e alzo 54° sull'orizzontale (Figura 7.11). In volo il proiettile esplode e si divide in due frammenti; dopo 1,42 s dal lancio il frammento di massa 6,5 kg viene osservato a un'altezza di 5.9 m e a distanza di 13,6 m dal punto di lancio. Si determini la posizione del secondo frammento allo stesso istante.

Soluzione È possibile usare l'Equazione 7.16 per studiare il moto dei due frammenti in termini del moto del sistema combinato da essi costituito. All'istante $t = 1{,}42$ s, misurato a partire dal lancio, il centro di massa del sistema costituito dai due frammenti si trova nella posizione in cui si sarebbe trovato il proiettile se non fosse esploso. Determiniamo tale posizione: introduciamo nell'Equazione 4.10 $v_{0x} = v_0\cos\phi_0 = (12{,}4\text{ m/s})\cos 54° = 7{,}3\text{ m/s}$ e $v_{0y} = v_0\sin\phi_0 = (12{,}4\text{ m/s})\sin 54° = 10{,}0\text{ m/s}$. Se ora si sceglie l'origine del riferimento cartesiano nel punto di lancio del proiettile, si ha

$$x = v_{0x}t = (7{,}3\text{ m/s})(1{,}42\text{ s}) = 10{,}4\text{ m},$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 =$$
$$= (10{,}0\text{ m/s})(1{,}42\text{ s}) - \frac{1}{2}(9{,}80\text{ m/s}^2)(1{,}42\text{ s})^2 = 4{,}3\text{ m}.$$

Dal momento che il moto del centro di massa del sistema costituito dai due frammenti è lo stesso di quello che avrebbe compiuto il proiettile inesploso, si può dedurre che il centro di massa del si-

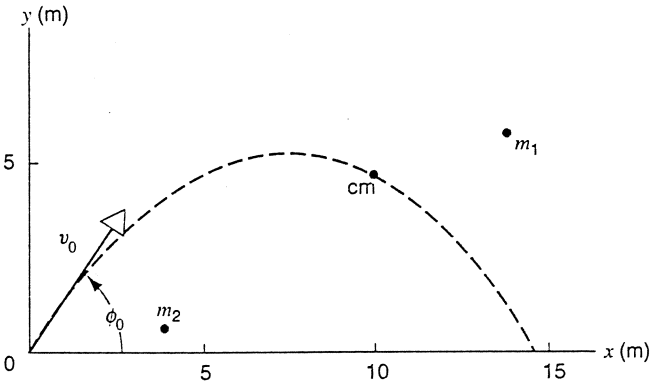


FIGURA 7.11 Problema svolto 7.3. La linea tratteggiata rappresenta la traiettoria parabolica del centro di massa dei due frammenti. Le posizioni del centro di massa e dei due frammenti indicate in Figura si riferiscono all'istante $t = 1{,}42$ s.

 ISBN 88-408-1254-7

stema dei due frammenti all'istante $t = 1{,}42$ s occupa il punto di coordinate $x_{cm} = 10{,}4$ m e $y_{cm} = 4{,}3$ m. Tra i dati del problema vi è la posizione all'istante t di uno dei due frammenti di cui è data anche la massa m_1: $x_1 = 13{,}6$ m e $y_1 = 5{,}9$ m. Si può, quindi, determinare la posizione del secondo frammento, di massa $m_2 = M - m_1 = 9{,}6\text{ kg} - 6{,}5\text{ kg} = 3{,}1$ kg, risolvendo le equazioni 7.12a e 7.12b rispetto a x_2 e y_2:

$$x_2 = \frac{Mx_{cm} - m_1x_1}{m_2} = \\ = \frac{(9{,}6\text{ kg})(10{,}4\text{ m}) - (6{,}5\text{ kg})(13{,}6\text{ m})}{3{,}1\text{ kg}} = 3{,}7\text{ m},$$

$$y_2 = \frac{My_{cm} - m_1y_1}{m_2} = \\ = \frac{(9{,}6\text{ kg})(4{,}3\text{ m}) - (6{,}5\text{ kg})(5{,}9\text{ m})}{3{,}1\text{ kg}} = 0{,}9\text{ m}.$$

La posizione del secondo frammento di massa m_2 è disegnata nella Figura 7.11.

Se si conoscesse la velocità di uno dei due frammenti si potrebbe risalire, con argomenti simili a quelli usati per la posizione, alla velocità del secondo frammento (vedi Esercizio 12).

Si osserva, infine, che alla base dell'analisi appena sviluppata vi è l'ipotesi che la gravità sia l'unica forza esterna agente sul sistema; in virtù di questa ipotesi il moto del centro di massa del sistema costituito dai due frammenti è stato trattato come un usuale moto parabolico di un proiettile puntiforme nel campo gravitazionale terrestre. Se uno dei due frammenti colpisse il suolo, allora vi sarebbero nuove forze esterne in gioco – quelle esercitate dal suolo sul frammento che ha toccato terra – e il centro di massa del sistema seguirebbe una traiettoria diversa. In linea di principio anche questo caso potrebbe essere studiato con l'approccio sviluppato in questo esempio, purché siano note le forze esercitate dal suolo sul frammento caduto a terra.

7.4 CENTRO DI MASSA DI CORPI SOLIDI

La posizione del centro di massa di un corpo solido potrebbe essere determinata mediante le Espressioni 7.12 sommando i contributi di tutti gli atomi di cui è costituito il corpo. Si può semplificare il calcolo suddividendo il corpo stesso in elementi di massa infinitesima δm_n e sostituendo le somme presenti nell'Equazione 7.12 con opportuni integrali:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\lim_{\delta m_n \to 0}\sum x_n\,\delta m_n = \frac{1}{M}\int x\,dm, \qquad (7.18a)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\lim_{\delta m_n \to 0}\sum y_n\,\delta m_n = \frac{1}{M}\int y\,dm, \qquad (7.18b)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}\lim_{\delta m_n \to 0}\sum z_n\,\delta m_n = \frac{1}{M}\int z\,dm. \qquad (7.18c)$$

Usando il formalismo vettoriale (si confronti la formula seguente con l'Equazione 7.11) si può scrivere

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}\,dm. \qquad (7.19)$$

In numerose situazioni, argomenti geometrici e proprietà di simmetria permettono di semplificare il calcolo della posizione del centro di massa. Se un corpo ha simmetria *sferica* il centro di massa coincide con il centro geometrico della sfera. Si osserva che non v'è necessità che la distribuzione di massa sia uniforme: si pensi, per esempio, a una palla da tennis che ha simmetria sferica sebbene sia fatta da strati sferici di materiali differenti. Il suo centro di massa è ubicato nel centro geometrico della sfera. Nel seguito intenderemo per corpo a simmetria sferica un corpo la cui massa volumica dipenda dalla distanza r dal centro con la medesima legge in ogni direzione. Se un solido ha simmetria *cilindrica*, ovvero se la sua distribuzione di massa dipende soltanto dalla distanza da un certo asse, il suo centro di massa deve giacere sull'asse di simmetria. Se, infine, la massa del corpo è distribuita in modo simmetrico rispetto a un piano, il centro di massa deve cadere sul piano.

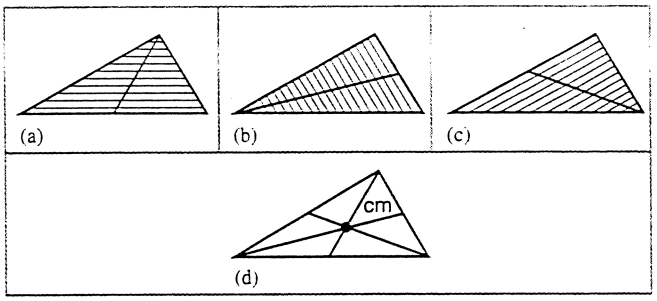


FIGURA 7.12 In (a), (b) e (c) il triangolo viene suddiviso in strisce infinitesime parallele ai tre lati. Il centro di massa deve cadere sul segmento, indicato in figura, che divide ciascuna striscia in modo simmetrico. (d) Il punto di intersezione dei tre segmenti rappresenta la posizione del centro di massa.

Nei problemi meccanici si incontrano spesso solidi irregolari che possono essere scomposti in più parti dotate di proprietà di simmetria. In tali situazioni è possibile determinare la posizione del centro di massa di ciascuna parte e successivamente, trattando ogni parte come una particella puntiforme ubicata nel centro di massa, trovare la posizione del centro di massa del corpo di partenza.

Si consideri, per esempio, il triangolo riportato in Figura 7.12. Tale oggetto può essere suddiviso, come in Figura 7.12a, in infinite strisce di altezza infinitesima, parallele alla base del triangolo. Il centro di massa di ciascuna striscia cade nel suo centro geometrico, ovvero nel suo punto medio, e quindi il centro di massa del triangolo cade sulla retta che si ottiene unendo tutti i punti medi delle diverse strisce, ovvero sulla mediana del triangolo. Se si rimpiazza, infatti, ogni striscia con una particella posizionata nel suo punto medio, si ottiene un oggetto unidimensionale posto lungo la mediana del triangolo: il suo centro di massa cade sulla mediana stessa. La costruzione appena descritta può essere ripetuta, come nelle Figure 7.12b e 7.12c, considerando strisce parallele agli altri due lati del triangolo. In questo modo si ottengono le altre due mediane del triangolo e si deduce che il centro di massa del triangolo è ubicato nel punto di intersezione delle sue tre mediane.

PROBLEMA SVOLTO 7.4 In Figura 7.13a è disegnato un disco, denotato con X, di raggio $2R$, in cui è stato praticato un foro di raggio R; la posizione del suo centro di massa è indicata con il punto X sull'asse delle ascisse. Si vogliono determinare, supponendo il disco omogeneo, le coordinate di tale punto.

Soluzione Il corpo X ha distribuzione di massa simmetrica rispetto all'asse x e per tale ragione si può affermare che il centro di massa cade sull'asse delle ascisse. Se si osserva, inoltre, che la maggior parte della massa del corpo è distribuita a destra dell'asse delle ordinate, si deduce che il centro di massa deve trovarsi a destra dell'asse y. È abbastanza ragionevole, allora, che il centro di massa cada effettivamente nel punto X disegnato in figura.

In Figura 7.13b è disegnato il corpo X con il suo foro riempito da un disco, chiamato D, di raggio R e fatto con lo stesso materiale di cui è fatto X. Indichiamo con C il disco pieno così ottenuto; per ovvie ragioni di simmetria il centro di massa di C si trova nell'origine del sistema di riferimento.

Quando si cerca la posizione del centro di massa di un oggetto composito, è possibile supporre che le masse delle diverse componenti del corpo siano concentrate nei relativi centri di massa. L'oggetto C, allora, può essere trattato come se fosse costituito dalle due particelle puntiformi associate ai corpi X e D; le posizioni dei centri di massa dei tre oggetti in gioco, X, D e C, sono riportate in Figura 7.13c.

La posizione del centro di massa di C può essere ottenuta tramite l'Equazione 7.12a:

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

ove x_D e x_X sono, rispettivamente, le ascisse dei centri di massa dei corpi D e X. Osservando che $x_C = 0$ e risolvendo l'Equazione precedente rispetto all'ascissa x_X si ottiene

$$x_X = -\left(\frac{m_D}{m_X}\right) x_D.$$

Il rapporto m_D/m_X, ricordando che si è supposta uniforme la distribuzione di massa dell'oggetto X, è uguale al rapporto tra le superfici degli oggetti D e X; allora

$$\frac{m_D}{m_X} = \frac{\text{area di } D}{\text{area di } X} = \frac{\text{area di } D}{\text{area di } C - \text{area di } D} = \\ = \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}.$$

Dalla simmetria circolare del disco D si ha $x_D = -R$ e allora

$$x_X = \frac{1}{3}R.$$

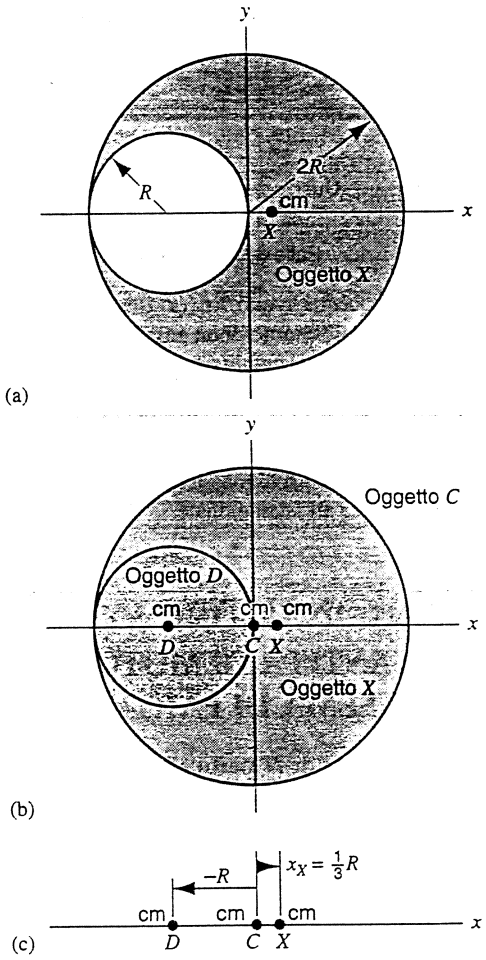


FIGURA 7.13 Problema svolto 7.4. (a) L'oggetto X è un disco metallico di raggio $2R$ in cui è stato praticato un foro di raggio R. (b) L'oggetto D è un disco metallico che riempie perfettamente il foro praticato in X; il suo centro di massa occupa il punto di ascissa $x_D = -R$. L'oggetto C è un disco composito costituito dagli oggetti X e D; il suo centro di massa si trova nell'origine. (c) I centri di massa dei tre oggetti.

PROBLEMA SVOLTO 7.5 Un striscia sottile omogenea è piegata a forma di semicirconferenza di raggio R come in Figura 7.14. Si determini la posizione del centro di massa.

Soluzione La striscia semicircolare presenta simmetria rispetto all'asse delle ordinate, ovvero per ogni suo elemento a sinistra dell'asse y ve ne è uno a destra con medesima ordinata e ascissa opposta. Il centro di massa della striscia, allora, cade sull'asse y, ovvero $x_{cm} = 0$. Poiché non vi è simmetria rispetto all'asse delle

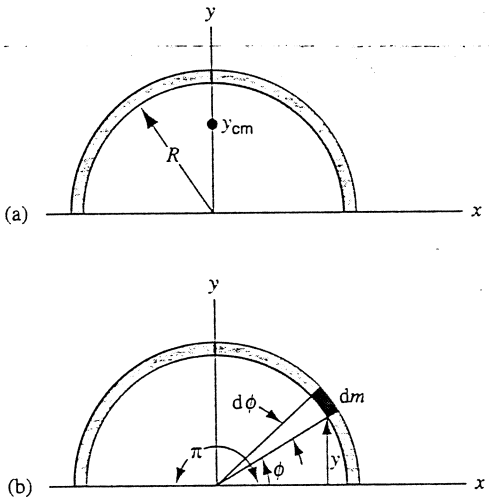


FIGURA 7.14 Problema svolto 7.5. (a) Una striscia sottile omogenea piegata in forma di semicirconferenza di raggio R. (b) Un elemento della striscia di massa dm la cui posizione è individuata dalla coordinata polare ϕ.

 ISBN 88-408-1254-7

ascisse, per determinare l'ordinata y_{cm} del centro di massa è necessario ricorrere all'Equazione 7.18b. Il calcolo dell'integrale diventa più semplice usando le coordinate polari del piano: si consideri l'elemento di massa infinitesima dm in Figura 7.14b; esso sottende l'angolo infinitesimo $d\phi$. L'intera striscia semicircolare, d'altro canto, sottende l'angolo π rad; si ricorda infatti che un'intera circonferenza sottende l'angolo giro 2π rad. La massa infinitesima dm deve stare con la massa totale M della sbarretta nello stesso rapporto in cui l'angolo infinitesimo $d\phi$ sta con l'angolo π, pertanto $dm/M = d\phi/\pi$, ovvero $dm = (M/\pi)d\phi$. Se si osserva che l'elemento dm occupa la posizione di ordinata $y = R\sin\phi$, si ha che l'Equazione 7.18b può essere scritta come segue:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} R\sin\phi\frac{M}{\pi}\,d\phi =$$
$$= \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi = \frac{2R}{\pi} = 0{,}637R.$$

Il centro di massa si trova sull'asse y a una distanza di circa due terzi del raggio dall'origine. Si osserva che, come messo in luce da questo esempio, il centro di massa non cade necessariamente all'interno della regione occupata materialmente dal corpo.

PROBLEMA SVOLTO 7.6 Una palla di massa m e raggio R è posta all'interno di un guscio sferico di medesima massa m e raggio interno $2R$. Il sistema costituito dai due corpi solidi è a riposo, a contatto con un piano orizzontale come illustrato in Figura 7.15a. Il contatto tra guscio e piano è supposto privo di attrito. La palla viene abbandonata al suo moto, rotola avanti e indietro all'interno del guscio sferico fino ad arrestarsi definitivamente nella posizione illustrata in Figura 7.15c. Si calcoli lo spostamento finale del guscio sferico.

Soluzione Le uniche forze esterne agenti sul sistema sono il peso, che agisce tanto sulla palla quanto sul guscio, e la reazione normale del piano su cui è poggiato il guscio. Tali forze hanno componente orizzontale nulla, $\sum F_{ext,x} = 0$. In virtù dell'Equazione 7.16 anche la componente orizzontale dell'accelerazione del centro di massa è nulla, $a_{cm,x} = 0$; allora l'ascissa x_{cm} del centro di massa non varia durante il moto e quindi il guscio deve muoversi in modo tale che ciò sia verificato.

Sia la palla sia il guscio possono essere trattati come particelle puntiformi la cui massa è concentrata nei rispettivi centri di massa coincidenti con i loro centri geometrici. In Figura 7.15b è rappresentata la situazione all'istante iniziale, mentre in Figura 7.15d è rappresentata quella all'istante finale. Scegliamo un sistema di riferimento la cui origine O coincida con il centro del guscio all'istante iniziale; nella Figura 7.15b si vede che il centro di massa del sistema all'istante iniziale è ubicato a sinistra di O a distanza $R/2$ dall'origine, ovvero si trova a metà strada tra le due particelle. Dalla Figura 7.15d si riconosce che lo spostamento complessivo del guscio è dato da

$$d = \frac{1}{2}R.$$

Al raggiungimento dello stato di quiete da parte del sistema, il guscio avrà compiuto uno spostamento netto di $R/2$ verso sinistra.

La ragione per la quale la palla raggiunge uno stato di quiete è la presenza di forze di attrito tra la superficie interna del guscio e la palla stessa. Per quale motivo tali forze di attrito non hanno alcuna influenza sulla posizione finale del centro di massa?

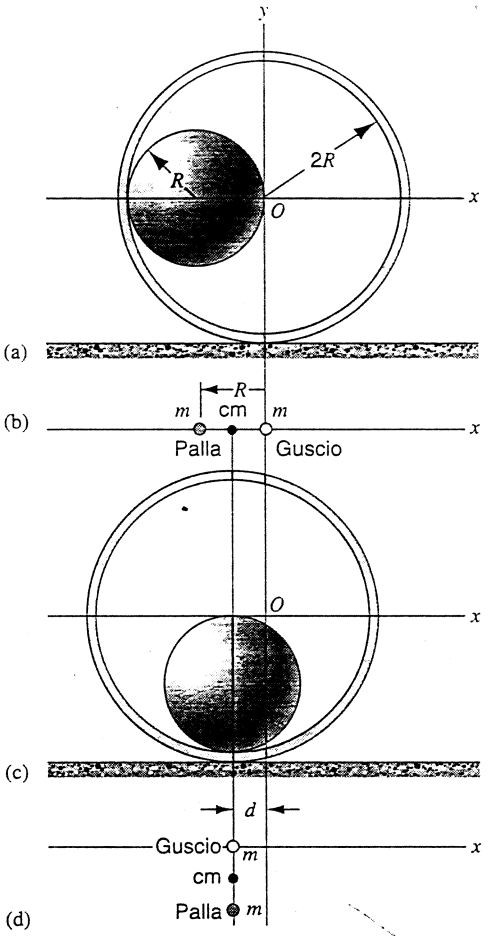


FIGURA 7.15 Problema svolto 7.6. (a) Una palla di raggio R viene lasciata rotolare all'interno di un guscio sferico di raggio $2R$ a partire dalla posizione iniziale illustrata in Figura. (b) I centri di massa della palla, del guscio e del sistema palla-guscio all'istante iniziale. (c) Lo stato finale con la palla in quiete. Il guscio si è mosso in modo tale da lasciare invariata l'ascissa del centro di massa del sistema. (d) I centri di massa della palla, del guscio e del sistema palla-guscio all'istante finale.

7.5 CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER UN SISTEMA DI PARTICELLE

Si consideri un sistema di N particelle puntiformi di masse m_n, con $n = 1, \ldots, N$; siano v_n e $p_n = m_n v_n$ la velocità e la quantità di moto della particella n-esima. La quantità di moto totale del sistema è data da

$$P = \sum_{n=1}^{N} p_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_N =$$
$$= \sum_{n=1}^{N} m_n v_n = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \cdots + m_n v_N. \qquad (7.20)$$

In virtù dell'Equazione 7.13 si può scrivere

$$P = M v_{cm}, \qquad (7.21)$$

ove $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_N$ è la massa totale del sistema. L'Equazione 7.21 costituisce una definizione equivalente di quantità di moto totale di un sistema di particelle:

la quantità di moto totale di un sistema di particelle è uguale al prodotto della massa totale del sistema per la velocità del suo centro di massa.

Assumendo che la massa totale M del sistema sia costante e usando l'Equazione 7.14, si può calcolare la derivata della quantità di moto totale del sistema:

$$\frac{dP}{dt} = M\frac{dv_{cm}}{dt} = Ma_{cm}. \tag{7.22}$$

Confrontando l'Equazione 7.22 con la 7.16, $\sum F_{ext} = Ma_{cm}$, ne deriva che la seconda equazione di Newton per un sistema di particelle può essere scritta nella forma

$$\sum F_{ext} = \frac{dP}{dt}. \tag{7.23}$$

Tale equazione può essere interpretata affermando che in un sistema di particelle la risultante delle forze esterne uguaglia la variazione istantanea della quantità di moto totale del sistema. L'Equazione 7.23 può essere vista anche come una generalizzazione dell'Equazione 6.2, $\sum F = dp/dt$, estesa a un sistema di particelle. L'Equazione 7.23, infine, nel caso di un sistema costituito da una sola particella, si riduce all'Equazione 6.2, perché se il sistema è costituito da una sola particella non vi possono essere forze interne al sistema stesso.

Il principio di conservazione della quantità di moto, dimostrato nel Paragrafo 6.4 per il caso di due particelle, può essere esteso a un generico sistema di particelle per mezzo dell'Equazione 7.23. Se la risultante delle forze esterne è nulla, infatti, si ha che $dP/dt = 0$ e quindi la quantità di moto totale si conserva.

Considerando il moto del sistema rispetto al riferimento del centro di massa si ha che la velocità v'_n dell'n-esima particella in tale riferimento è data da

$$v'_n = v_n - v_{cm}. \tag{7.24}$$

Usando, allora, l'Equazione 7.13 si può calcolare la quantità di moto totale del sistema rispetto al riferimento del centro di massa:

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{n=1}^{N} m_n v'_n = \sum_{n=1}^{N} m_n v_n - \sum_{n=1}^{N} m_n v_{cm} = \\ &= Mv_{cm} - v_{cm}\sum_{n=1}^{N} m_n = \\ &= Mv_{cm} - v_{cm}M = 0. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Il riferimento del centro di massa, allora, è anche il riferimento rispetto al quale la quantità di moto totale del sistema è nulla. Questa osservazione giustifica l'aver scelto, nel Paragrafo 6.5, il centro di massa come origine del sistema di riferimento in cui studiare l'urto tra due particelle: in questo caso la quantità di moto totale del sistema costituito dalle due particelle è nulla prima e dopo l'urto (si confrontino le Equazioni 6.23 e 7.4).

Fino a questo momento abbiamo considerato sistemi in cui la massa totale è costante; nel caso di sistemi in cui la massa totale varia con il tempo, l'Equazione 7.23 va usata con grande cautela. Questo problema sarà l'argomento del Paragrafo 7.6.

PROBLEMA SVOLTO 7.7 Una raffica di $N = 8$ pallottole di massa 3,8 g ciascuna viene sparata orizzontalmente con velocità $v = 1100$ m/s contro un grosso blocco di legno di massa $M = 12$ kg inizialmente a riposo su un piano orizzontale (Figura 7.16). Supponendo che tutte le pallottole si conficchino nel blocco di legno e che il blocco possa scivolare senza attrito sul piano orizzontale; se ne calcoli la velocità finale.

Soluzione Si considera dapprima il moto nella direzione orizzontale e si denota con x l'asse orizzontale, in Figura 7.16 orientato verso destra. La proiezione lungo l'asse x dell'Equazione 7.23 fornisce $\sum F_{ext,x} = dP_x/dt$. Le forze agenti sul blocco, per effetto delle pallottole, hanno risultante non nulla lungo l'asse x; analogamente il blocco esercita una forza sulle pallottole che ha componente diversa da zero nella direzione orizzontale. D'altro canto, se si considerano le pallottole e il blocco come un unico sistema di particelle, tali forze diventano forze interne al sistema, quindi la risultante delle forze esterne agenti sul sistema ha componente orizzontale nulla e la componente lungo l'asse x della quantità di moto totale del sistema si conserva. Il contorno del sistema di particelle è rappresentato in Figura 7.16. La componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema, misurata quando il blocco di legno è a riposo e le pallottole sono ancora in volo, è data da

$$P_{ix} = N(mv),$$

in cui mv rappresenta la quantità di moto di ciascuna particella e, si ricorda, $N = 8$. La quantità di moto finale, misurata quando le pallottole si trovano all'interno del blocco di legno e questo scivola sul piano con velocità V, è data da

$$P_{fx} = (M + Nm)V.$$

In virtù della conservazione della quantità di moto totale del sistema si ha che

$$P_{ix} = P_{fx},$$

ovvero

$$Nmv = (M + Nm)V,$$

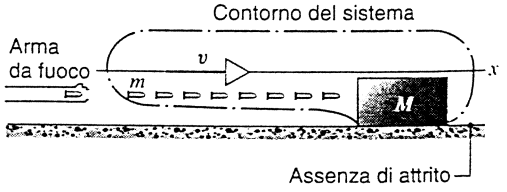


FIGURA 7.16 Problema svolto 7.7. Un'arma da fuoco spara una raffica di pallottole contro un blocco di legno. Si studia il moto del sistema definito come l'insieme del blocco di legno e delle pallottole.

 ISBN 88-408-1254-7

da cui, risolvendo rispetto a V, si ottiene

$$V = \frac{Nm}{M + Nm} v = \frac{8(3.8 \cdot 10^{-3}\ \text{kg})}{12\ \text{kg} + 8(3,8 \cdot 10^{-3}\ \text{kg})}(1100\ \text{m/s}) =$$
$$= 2,8\ \text{m/s}.$$

Studiamo, ora, il moto lungo la direzione verticale: le forze esterne che hanno componente verticale non nulla sono il peso, che agisce sia sulle pallottole sia sul blocco di legno, e la reazione normale esercitata dal piano sul blocco. Durante il loro moto dalla canna dell'arma da fuoco al blocco di legno, le pallottole acquistano una componente verticale della quantità di moto a causa della forza peso. Nell'istante in cui una pallottola colpisce il blocco, quest'ultimo deve esercitare sulla pallottola una forza con componenti orizzontale e verticale non nulle. Assieme alla componente verticale della forza esercitata dal blocco sulle pallottole, che è necessaria per annullare la componente verticale della quantità di moto delle pallottole, vi deve essere un incremento nella reazione normale esercitata dal piano liscio sul blocco. Questa variazione della reazione normale non è dovuta alla sola forza peso agente sulle pallottole conficcate nel blocco, ma anche alla variazione istantanea della componente verticale della quantità di moto delle pallottole. Quando tutte le pallottole si saranno conficcate nel blocco, e saranno a riposo rispetto al blocco stesso, la reazione normale avrà modulo uguale alla somma della massa del blocco e delle otto pallottole, moltiplicata per l'accelerazione di gravità g.

Per semplificare la trattazione si è assunto che le pallottole vengano sparate a frequenza tale che siano tutte in volo prima che comincino a colpire il blocco. Il lettore provi a risolvere il problema nel caso in cui questa ipotesi non sia soddisfatta.

Si supponga, ora, di modificare il contorno del sistema in modo da inserirvi anche l'arma da fuoco che spara le otto pallottole. Se l'arma da fuoco è fissa rispetto al riferimento terrestre, vi è variazione della quantità di moto orizzontale del sistema rispetto a tale riferimento? La risultante delle forze esterne agenti sul sistema ha componente orizzontale diverza da zero?

PROBLEMA SVOLTO 7.8 Un cannone antico avente massa $M = 1300$ kg spara una palla di massa 72 kg in direzione orizzontale con velocità $v = 55$ m/s relativamente al cannone (Figura 7.17). Il cannone è montato in modo da poter rinculare liberamente, senza attrito. (a) Si determini a quale velocità il cannone rincula rispetto alla Terra. (b) Si determini la velocità iniziale v_T della palla rispetto alla Terra.

Soluzione (a) Il sistema di riferimento cartesiano viene scelto con l'asse x orizzontale e orientato verso destra in Figura 7.17; come sistema di riferimento inerziale si sceglie quello solidale con la Terra.

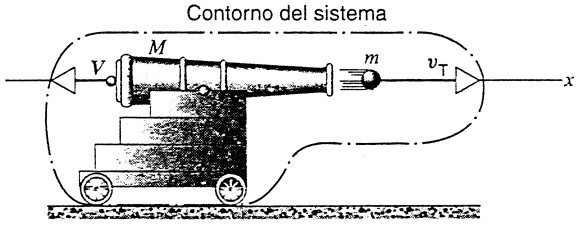


FIGURA 7.17 Problema svolto 7.8. Un cannone di massa M spara una palla di massa m. In figura sono riportate la velocità della palla e quella del cannone rinculante rispetto a un riferimento solidale con la Terra. Le componenti della velocità sono considerate positive se il vettore è orientato verso destra.

Come sistema di particelle si considera l'insieme costituito dal cannone e dalla palla: con questa scelta tutte le forze implicate nello sparo della palla sono da considerarsi interne al sistema e, quindi, non hanno alcun effetto ai fini del nostro problema. Le forze esterne agenti sul sistema hanno componente nulla nella direzione orizzontale, quindi la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema si conserva, ovvero è la stessa prima e dopo lo sparo.

Se si denota con v la velocità della palla rispetto al cannone, con V quella del cannone rispetto alla Terra e con v_T quella della palla rispetto alla Terra, si ha che $v_T = v + V$. La sua componente orizzontale è $v_{Tx} = v_x + V_x$; come illustrato in Figura 7.17 ci si aspetta che la componente V_x sia negativa.

Nel sistema di riferimento terrestre la componente orizzontale, P_{ix}, della quantità di moto totale del sistema è nulla. Dopo lo sparo la quantità di moto totale rispetto alla Terra ha una componente dovuta alla palla e una dovuta al cannone:

$$P_{fx} = MV_x + mv_{Tx} = MV_x + m(v_x + V_x).$$

Ricordando che $\sum F_{ext,x} = 0$ si deve avere $P_{ix} = P_{fx}$ e quindi

$$MV_x + m(v_x + V_x) = 0$$

che, risolta rispetto a V_x, diventa

$$V_x = -\frac{mv_x}{M + m} = -\frac{(72\ \text{kg})(55\ \text{m/s})}{1300\ \text{kg} + 72\ \text{kg}} = -2,9\ \text{m/s}.$$

Dal fatto che V_x è negativa si deduce, come ci si aspettava, che il cannone, con riferimento alla Figura 7.17, rincula verso sinistra.

(b) La componente orizzontale della velocità della palla rispetto al riferimento terrestre è data da

$$v_{Tx} = v_x + V_x = 55\ \text{m/s} + (-2,9\ \text{m/s}) = 52\ \text{m/s}.$$

A causa del rinculo la palla si muove, rispetto alla Terra, un po' più lentamente di quanto si sarebbe mossa in assenza di rinculo. Il lettore si soffermi sull'importanza che ha avuto in questo problema una scelta saggia del sistema di particelle – cannone e palla – e sulla coerenza con cui sono stati trattati i diversi sistemi di riferimento, quello terrestre e quello solidale con il cannone.

7.6 SISTEMI A MASSA VARIABILE (facoltativo)

Si supponga che il carro che sostiene il cannone in Figura 7.17 contenga anche un gran numero di palle da cannone. Se il cannone spara ripetutamente, il carro, che si suppone in moto senza attrito rispetto alla Terra, rincula verso sinistra a velocità sempre più alta. La scelta del contorno del sistema, Figura 7.17, fa sì che la componente orizzontale della risultante delle forze esterne sia nulla e che la componente orizzontale della quantità di moto totale del sistema si conservi e, quindi, si mantenga costantemente uguale a zero. Se, d'altronde, si considerasse il sistema costituito dal carro e dal cannone, le osservazioni precedenti non sarebbero più valide. Il carro, infatti, acquisterebbe una quantità di moto via via maggiore e ciò, nel linguaggio della fisica newtoniana, sarebbe dovuto all'azione della forza di reazione sul carro stesso: il cannone, infatti, grazie alla sua ca-

rica esplosiva, spinge verso l'esterno della canna il proiettile e la reazione corrispondente (la palla spinge indietro il cannone) fa sì che il cannone si sposti verso sinistra.

Se il cannone viene azionato ripetutamente, la massa totale dei corpi posti sul carro decresce a causa delle palle di cannone sparate. Il metodo usato nel Problema svolto 7.8 non può essere applicato al caso in studio senza opportune modifiche, perché la massa M del carro cambia ogniqualvolta il cannone spara un proiettile.

Il sistema S costituito da cannone e carro è un esempio di sistema con *massa variabile*. Naturalmente il sistema S' costituito da carro, cannone e palle in volo ha massa costante e, a causa dell'assenza di componenti orizzontali delle forze esterne, conserva la componente orizzontale della quantità di moto. Il sistema più piccolo S non ha massa costante e inoltre la palla espulsa dalla canna del cannone trasporta con sé una quantità di moto che viene, di fatto, sottratta al sistema; questa variazione della quantità di moto del sistema giustifica l'accelerazione subita dal sistema stesso.

Il problema appena discusso fornisce un'immagine semplificata, ma ragionevole, del funzionamento di un missile. Il carburante, che viene bruciato ed espulso ad alta velocità, svolge la parte delle palle da cannone dell'esempio appena discusso. Il missile, privato del carburante consumato, subisce un'accelerazione che dipende dalla quantità di combustibile bruciato nell'unità di tempo e dalla velocità alla quale viene espulso.

Quando si studia il moto di sistemi di questa natura, il vero obiettivo non è lo studio della cinematica dell'intero sistema S', ma di un suo sottosistema S la cui massa cambia durante il moto. Più precisamente, la massa totale dell'intero sistema S' resta costante, ma quella del sottosistema S può cambiare, aumentare o diminuire, e con essa possono variare la quantità di moto e, più in generale, lo stato di moto di S.

In Figura 7.18 è illustrato, in modo schematico, un sistema a massa variabile. All'istante t il sottosistema S ha massa M e si muove con velocità v rispetto al sistema di riferimento inerziale da cui si osserva il moto. All'istante $t + \Delta t$ la massa di S vale $M + \Delta M$ e, quindi, differisce da quella all'istante t di ΔM, quantità negativa se si suppone che una parte della massa del sistema sia stata espulsa. Nello stesso intervallo di tempo la parte restante del sistema S' ha subito una variazione di massa pari a $-\Delta M$. La velocità di S all'istante $t + \Delta t$, rispetto al solito sistema di riferimento, è denotata con $v + \Delta v$, quella della massa espulsa con u.

Al fine di rendere la discussione quanto più generale possibile, si suppone che sul sistema agiscano forze esterne. Nel caso del problema del missile le forze che causano il moto del missile stesso sono da considerarsi interne al sistema S', mentre come forze esterne possono essere considerate quelle dovute alla gravità o alla resistenza dell'aria. La quantità di moto totale dell'intero sistema S' è denotata con P e la seconda legge di Newton può essere scritta come segue:

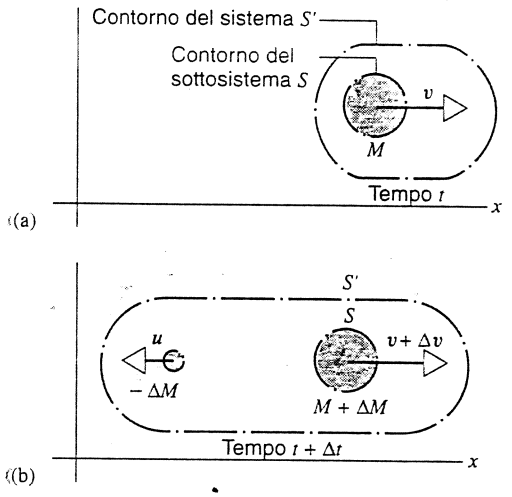


FIGURA 7.18 (a) Un sistema S' che all'istante t ha massa M e velocità v. (b) Nell'intervallo di tempo Δt è stata espulsa la massa $-\Delta M$ e quindi la massa restante, che è detta sistema S, è pari a $M + \Delta M$ e si muove con velocità $v + \Delta v$.

$$\sum F_{\text{ext}} = \frac{dP}{dt}. \tag{7.26}$$

La variazione ΔP della quantità di moto totale nell'intervallo di tempo Δt è data da

$$\Delta P = P_f - P_i, \tag{7.27}$$

ove P_f è la quantità di moto totale finale del sistema S', ovvero la sua quantità di moto totale all'istante $t + \Delta t$, e P_i è la sua quantità di moto totale iniziale, ovvero all'istante t. Più esplicitamente

$$P_i = Mv, \tag{7.28a}$$

$$P_f = (M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u. \tag{7.28b}$$

La variazione di quantità di moto del sistema S' è, quindi,

$$\Delta P = P_f - P_i = \\ = (M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u - Mv. \tag{7.29}$$

Se si riscrive la derivata presente nell'Equazione 7.26 come limite e si usa l'espressione appena trovata per la variazione ΔP si ha

$$\sum F_{\text{ext}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \\ = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(M+\Delta M)(v+\Delta v)+(-\Delta M)u - Mv}{\Delta t} = \\ = \lim_{\Delta t \to 0} \left[M\frac{\Delta v}{\Delta t} + (v-u)\frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta v \frac{\Delta M}{\Delta t} \right] = \\ = M\frac{dv}{dt} + (v-u)\frac{dM}{dt}. \tag{7.30}$$

Si osserva che al limite per $\Delta t \to 0$ l'ultimo addendo tra parentesi quadre scompare perché $\Delta v \to 0$ quando $\Delta t \to 0$. Nell'Equazione 7.30 M è la massa del sottosistema S all'istante t e dv/dt è la sua accelerazione dovuta alla variazione

 ISBN 88-408-1254-7

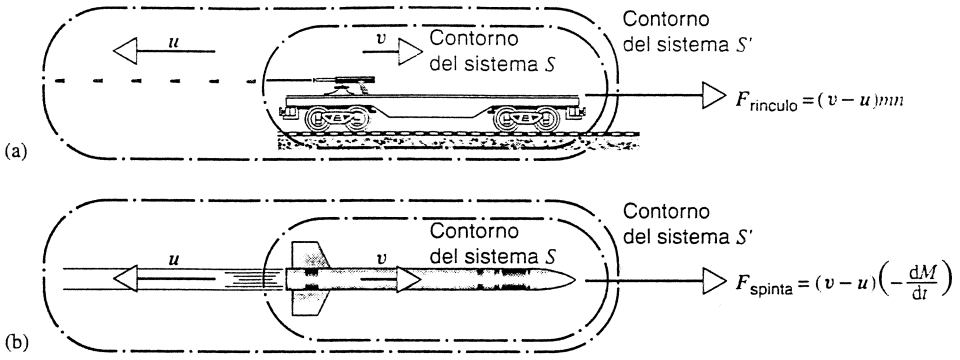


FIGURA 7.19 (a) Una mitragliatrice spara una raffica di n pallottole nell'unità di tempo. La quantità di moto totale del sistema S' si mantiene costante, ma sul sistema S viene esercitata una forza di rinculo che ne modifica la quantità di moto totale. La variazione di quantità di moto totale in un intervallo infinitesimo di tempo dt è esattamente uguale a quella trasportata dalle pallottole $mnu\,dt$. (b) Un missile emette gas di scarico. La quantità di moto totale del sistema S' si mantiene costante, ma sul sistema S viene esercitata una forza di propulsione che ne modifica la quantità di moto totale. La variazione di quantità di moto totale in un intervallo infinitesimo di tempo dt è esattamente uguale a quella trasportata dai gas di scarico $u\,dM$.

temporale di massa $|dM/dt|$ (perdita o guadagno) a velocità $\boldsymbol{u}$, rispetto al sistema di riferimento inerziale fissato. Se $dM/dt > 0$ la massa del sottosistema aumenta, altrimenti diminuisce.

L'Equazione 7.30 può essere riscritta in una forma più istruttiva

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{ext} + \boldsymbol{v}_{rel}\frac{dM}{dt}, \qquad (7.31)$$

ove $\boldsymbol{v}_{rel} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ è la velocità della massa persa, o acquisita, dal sottosistema S rispetto a un riferimento solidale con S. Se, per esempio, il sottosistema S è un missile, allora $\boldsymbol{v}_{rel}$ è la velocità *relativa al missile* con cui vengono esplusi i gas di scarico. L'introduzione della grandezza $\boldsymbol{v}_{rel}$ è del tutto ragionevole, perché la velocità dei gas di scarico è uno dei parametri fondamentali nella progettazione di un motore e il riferimento più naturale rispetto al quale va espressa è senza dubbio uno solidale con il motore stesso.

L'Equazione 7.31 mostra che l'accelerazione $d\boldsymbol{v}/dt$ del sottosistema S, per esempio il missile, è frutto sia dell'effetto delle forze esterne che della variazione di quantità di moto dovuta alla perdita o al guadagno di massa. Si osservi che il vettore $\boldsymbol{v}_{rel} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ è rivolto a sinistra della Figura 7.18 e, poiché dM/dt è negativo, il secondo termine del secondo membro dell'Equazione 7.31 è un vettore orientato verso destra ed è quindi responsabile di un'accelerazione del sottosistema S in questo verso. Questo termine è detto *spinta* del missile e può essere interpretato come la forza esercitata dai gas di scarico sul missile stesso. Si osserva che la spinta di un missile può essere aumentata sia con l'aumento della velocità di espulsione dei gas di scarico che con un incremento della massa di gas espulso nell'unità di tempo.

Se la massa viene espulsa a ritmo e a velocità $\boldsymbol{v}_{rel}$ costanti, la propulsione del missile risulta costante, ma non la sua accelerazione a causa del decremento di M. Se, infine, $dM/dt = 0$, ovvero se la massa del sottosistema S non varia, l'Equazione 7.31 si riduce alla solita seconda Equazione di Newton $\sum \boldsymbol{F}_{ext} = M\boldsymbol{a}$.

L'analogia tra il comportamento di un missile e di una mitragliatrice è illustrata in Figura 7.19. In entrambi i casi la quantità di moto totale dell'intero sistema, costituito dagli oggetti emessi (pallottole o carburante) e dall'oggetto che li emette, si conserva; ma quando si concentra l'attenzione sulla mitragliatrice o sul missile, si osserva che la loro massa diminuisce e che si minifesta una forza, di rinculo nel caso della mitragliatrice e di spinta nel caso del missile, che ne varia lo stato di moto. Se si analizza il problema dal riferimento del centro di massa, si osserva che al passare del tempo aumenta la massa espulsa, spostata verso sinistra in Figura 7.19, e che pertanto l'oggetto si deve muovere verso destra in modo che la posizione del centro di massa dell'intero sistema rimanga invariata.

PROBLEMA SVOLTO 7.9 Una navicella spaziale di massa 13 600 kg si muove con velocità di 960 m/s rispetto a un riferimento inerziale in una regione in cui la gravità è trascurabile. Il motore viene attivato al fine di ottenere un'accelerazione parallela alla velocità iniziale. Il razzo propulsore emette i gas di scarico in ragione di 146 kg/s e con velocità, relativa alla navicella, di 1520 m/s. Il propulsore agisce fino ad aver bruciato ed emesso 9100 kg di carburante. (a) Quanto vale la spinta prodotta dal motore? (b) Quanto vale la velocità della navicella al termine del periodo di attività del motore?

Soluzione (a) La spinta è data dall'ultimo termine dell'Equazione 7.31. Il suo modulo vale

$$F = \left|v_{rel}\frac{dM}{dt}\right| = (1520\ \text{m/s})(146\ \text{kg/s}) = 2{,}22 \cdot 10^5\ \text{N}.$$

(b) Se si sceglie l'asse x parallelo e orientato nel verso della velocità iniziale della navicella, l'Equazione 7.31, con $\sum F_{ext} = 0$,

può essere riscritta come segue:

$$M\frac{dv_x}{dt} = v_{rel,x}\frac{dM}{dt}.$$

Dal momento che il gas viene espulso, relativamente al missile, in verso opposto a quello della sua velocità, che si ricorda è concorde al verso positivo dell'asse x, la quantità v_{rel} è negativa. Poiché anche dM/dt è negativo, il secondo membro dell'equazione precedente è positivo e quindi la velocità della navicella aumenta. L'equazione precedente viene ora riscritta nella forma $dv_x = v_{rel,x}(dM/M)$ e integrata a sinistra dalla velocità iniziale 960 m/s a quella finale incognita e a destra dalla massa iniziale 13 600 kg a quella finale 13 600 kg − 9100 kg = 4500 kg:

$$\int_{v_{i,x}}^{v_{f,x}} dv_x = v_{rel,x}\int_{M_i}^{M_f}\frac{dM}{M},$$

che fornisce

$$v_{f,x} - v_{i,x} = v_{rel,x}\ln\frac{M_f}{M_i}. \qquad (7.32)$$

Risolvendo, infine, rispetto alla velocità finale, si ottiene

$$v_{f,x} = 960\text{ m/s} + (-1520\text{ m/s})\ln\frac{4500\text{ kg}}{13600\text{ kg}} = 2640\text{ m/s}.$$

PROBLEMA SVOLTO 7.10 Si consideri il dispositivo di Figura 7.20: dei granelli di sabbia cadono da un imbuto fisso, in ragione di 0,134 kg/s, su un nastro trasportatore che si muove con velocità costante 0,96 m/s rispetto al riferimento del laboratorio. Si calcoli la forza che deve essere esercitata sul nastro trasportatore affinché la sua velocità resti costante.

Soluzione Si consideri l'asse x parallelo al nastro trasportatore e con verso concorde con la velocità del nastro stesso. Il sistema di riferimento, inoltre, viene scelto solidale con quello del laboratorio, che viene assunto inerziale. L'imbuto è a riposo in tale riferimento. Il sistema S' è costituito dal nastro, dalla sabbia sul nastro e da quella nell'imbuto; il sottosistema S, invece, è costituito dal nastro e dalla sola sabbia caduta su di esso. La massa totale del sottosistema S aumenta ($dM/dt > 0$) mano a mano che nuova sabbia cade dall'imbuto sul nastro.

L'Equazione 7.31 può essere applicata al nostro problema se si pone $dv_x/dt = 0$, giacché il nastro si muove a velocità costante, e $u_x = 0$, poiché la velocità, misurata rispetto al riferimento inerziale, con cui la sabbia cade sul nastro ha componente nulla lungo l'asse x. In altri termini, $v_{rel,x} = -v_x$, ovvero un osservatore solidale con il nastro vede l'imbuto e la sabbia che ne esce in moto nel verso opposto a quello dell'asse x. Risolvendo l'Equazione 7.31 rispetto alla forza esterna totale si ottiene

$$\sum F_{ext,x} = -v_{rel,x}\frac{dM}{dt} = v_x\frac{dM}{dt} =$$
$$= (0{,}96\text{ m/s})(0{,}134\text{ kg/s}) = 0{,}129\text{ N}.$$

La forza esterna totale ha componente lungo l'asse x positiva, ovvero deve essere applicata in direzione e verso del moto del nastro per far passare la velocità di ciascun granello di sabbia da 0 a 0,96 m/s.

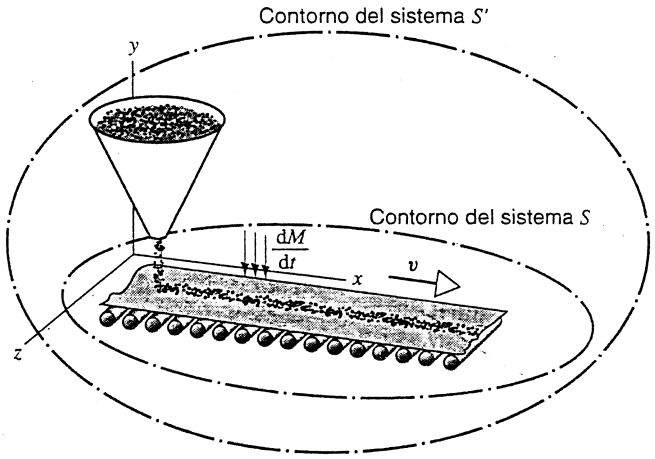


FIGURA 7.20 Problema svolto 7.10. Dispositivo in cui granelli di sabbia cadono da un imbuto su un nastro trasportatore, che si muove con velocità costante v rispetto al riferimento del laboratorio, in ragione di dM/dt. L'imbuto è in quiete rispetto al laboratorio.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

7.1 Il moto di un sistema di particelle

7.2 Sistemi di due particelle

1. Due dischi da hockey sono congiunti con una cinghia di gomma. Uno dei due dischi viene lanciato su un piano privo d'attrito; la cinghia si tende e il secondo disco segue il moto del primo in modo apparentemente aleatorio. Il centro di massa del sistema si trova
   (A) a distanza fissa da uno dei due dischi.
   (B) tipicamente, ma non sempre, tra i due dischi.
   (C) a distanza da uno dei due dischi in rapporto costante con la distanza tra i due dischi.
   (D) talvolta vicino a uno dei due dischi, talvolta vicino all'altro disco.
2. Due corpi si muovono su una superficie; il centro di massa esiste se e solo se
   (A) i due corpi sono connessi fisicamente.
   (B) la superficie è orizzontale.
   (C) la superficie è liscia.
   (D) Il centro di massa esiste sempre.
3. Due corpi sono a riposo su un piano liscio orizzontale. I due corpi non sono connessi fisicamente e non sono a contatto. Una forza F è applicata a *uno* dei due oggetti e questi acquista accelerazione a. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
   (A) Non è possibilie introdurre la nozione di centro di massa perché la forza non viene esercitata su entrambi i corpi.
   (B) Il centro di massa si muove con accelerazione di modulo anche maggiore di a.

 ISBN 88-408-1254-7

(C) Il centro di massa si muove con accelerazione di modulo uguale ad g.

(D) Il centro di massa si muove con accelerazione di modulo minore di g.

4. Due corpi di massa differente sono connessi da una corda priva di massa passante su una puleggia. La velocità iniziale di uno dei due corpi è orientata verso l'alto; il centro di massa del sistema costituito dai due corpi

(A) accelera verso l'alto verso il basso a seconda del valore delle masse dei due corpi.

(B) raggiunge il punto più alto della sua traiettoria e poi accelera verso il basso.

(C) si muove con accelerazione rivolta verso il basso e di modulo inferiore a g.

(D) si muove con accelerazione rivolta verso il basso e di modulo g.

5. Due corpi di massa differente sono connessi da una molla compressa. Il sistema viene lanciato verso l'alto e, giunto al culmine della sua traiettoria, la molla si espande e lancia ancora più in alto uno dei due oggetti, mentre la molla stessa resta attaccata al secondo oggetto. Subito dopo l'espansione della molla, il centro di massa del sistema costituito dai due corpi

(A) si muove verso l'alto e accelera verso l'alto.

(B) si muove verso l'alto e accelera verso il basso.

(C) si muove verso il basso e accelera verso l'alto.

(D) si muove verso il basso e accelera verso il basso.

(E) Le informazioni non sono sufficienti per rispondere al quesito.

7.3 Sistemi di particelle

6. Tre corpi sono a riposo sul tavolo. È possibile determinare il centro di massa del sistema

(A) combinando i tre oggetti in accordo con l'Equazione 7.12.

(B) combinando i due oggetti più leggeri in accordo con l'Equazione 7.12, considerando il risultato una nuova particella e combinando quest'ultima con il terzo corpo usando nuovamente l'Equazione 7.12.

(C) combinando i due oggetti più pesanti in accordo con l'Equazione 7.12, considerando il risultato una nuova particella e combinando quest'ultima con il terzo corpo usando nuovamente l'Equazione 7.12.

(D) con uno qualsiasi dei metodi precedenti.

7. Sette oche identiche volano verso sud a velocità costante. Un cacciatore spara a una delle oche che muore e cade immediatamente. Le sei sopravvissute continuano nel loro moto uniforme. Dopo che l'oca colpita dal cacciatore tocca terra, il centro di massa del sistema costituito dalle sette oche

(A) continua a muoversi verso sud con la velocità iniziale, ma si trova più in basso rispetto alla quota alla quale volano le sei oche sopravvissute.

(B) continua a muoversi verso sud, ma con velocità pari a $\frac{6}{7}$ di quella iniziale.

(C) continua a muoversi verso sud, ma con velocità pari a $\frac{1}{7}$ di quella iniziale.

(D) si ferma così come l'oca abbattuta dal cacciatore.

8. Si supponga di misurare l'altezza raggiunta da una persona in un salto con la quota toccata dalla sua testa. Il saltatore giunge più in alto se le sue mani sono legate sulla testa oppure lungo i fianchi?

(A) Con le mani legate sulla testa.

(B) Con le mani legate lungo i fianchi.

(C) Non vi è differenza.

(D) La risposta dipende dal rapporto tra la massa delle mani e quella dell'intera persona.

7.4 Centro di massa di corpi solidi

9. Il centro di massa di un corpo solido cade all'interno del corpo; nel corpo viene praticato un foro lontano dalla posizione del centro di massa. A causa del foro la posizione del centro di massa

(A) si allontana dal foro.

(B) si avvicina al foro.

(C) resta invariata.

(D) si muove in una direzione indeterminata.

10. Si consideri il sistema introdotto nel Problema svolto 7.6. La palla interna rotola all'interno del guscio prima di giungere in una configurazione di riposo. In questo intervallo di tempo il centro di massa del sistema

(A) si muove sia orizzontalmente che verticalmente.

(B) si muove sia orizzontalmente che verticalmente, ma torna nella sua posizione orizzontale iniziale quando il sistema giunge nella configurazione finale di riposo.

(C) si muove solo nella direzione verticale.

(D) si muove solo nella direzione verticale verso il basso, perché il centro di massa del sistema in esame non può mai muoversi verso l'alto.

7.5 Conservazione della quantità di moto per un sistema di particelle

11. Si consideri un sistema di N particelle puntiformi libero, ovvero si supponga che sul sistema non agiscano forze esterne.

(a) Quale delle affermazioni seguenti è vera riguardo al modulo della quantità di moto totale del sistema?

(A) Deve essere nullo.

(B) Potrebbe essere diverso da zero, ma deve essere costante.

(C) Potrebbe essere diverso da zero e non costante.

(D) La risposta dipende dalla natura delle forze interne agenti sul sistema.

(a) Quale delle affermazioni seguenti è vera riguardo alla somma dei *moduli* delle quantità di moto delle singole particelle del sistema?

(A) Deve essere nulla.

(B) Potrebbe essere diversa da zero, ma deve essere costante.

(C) Potrebbe essere diversa da zero e non costante.

(D) Potrebbe essere nulla anche se il modulo della quantità di moto totale fosse diverso da zero.

12. Un vagone ferroviario di massa M si muove in linea retta lungo un binario liscio con velocità iniziale v_0. Durante il passaggio del vagone sotto un ponte, da quest'ultimo viene lasciata cadere nell'interno del vagone una cassa contenente N palle da bowling, ciascuna di massa m. La cassa va in frantumi, le palle rimbalzano avanti e indietro nel vagone, ma nessuna di esse fuoriesce dal vagone stesso.

(a) La quantità di moto totale del sistema costituito dalle palle da bowling e dal vagone si conserva in questa collisione?

(A) Sì.

(B) Si conserva soltanto la componente verticale della quantità di moto totale.

(C) Si conserva soltanto la componente della quantità di moto totale parallela al binario.
(D) No, nessuna delle componenti si conserva.

(b) Qual è la velocità media del sistema costituito dal vagone e dalle palle da bowling qualche tempo dopo la collisione?
(A) $(M + Nm)v_0/M$. (B) $Mv_0/(Nm + M)$.
(C) Nmv_0/M.
(D) Non vi sono informazioni sufficienti per rispondere al quesito.

13. Un vagone ferroviario, contenente un'enorme quantità di sabbia, si muove in linea retta lungo un binario liscio con velocità iniziale v_0. Da una valvola di scarico difettosa fuoriesce della sabbia scendendo in direzione verticale rispetto alla linea ferroviaria.

(a) La quantità di moto totale si conserva in questo processo?
(A) Si conserva la quantità di moto del vagone.
(B) Si conserva la quantità di moto totale del sistema costituito dal vagone e dalla sabbia che resta nel vagone.
(C) Si conserva soltanto la quantità di moto totale del sistema costituito dal vagone e da tutta la sabbia.
(D) La quantità di moto totale non si conserva per nessuno dei sistemi elencati in precendenza.

(b) Cosa accade alla velocità del vagone durante la fuoriuscita della sabbia?
(A) Il vagone accelera.
(B) Il vagone conserva la velocità iniziale.
(C) Il vagone rallenta.
(D) Il problema non può essere risolto perché non vi è conservazione della quantità di moto totale.

7.6 Sistemi a massa variabile

QUESITI

1. Un canoista in un laghetto calmo può raggiungere la riva tirando bruscamente verso di sé la corda legata alla prua della canoa. Come si spiega questo fenomeno?

2. Una persona si trova seduta su una superficie piana, orizzontale e priva d'attrito; come può spostarsi e uscirne?

3. Una scatola è posta a riposo su una superficie orizzontale e liscia. Alla faccia superiore della scatola viene appeso, per mezzo di una molla, un cannone a molla in grado di sparare piccoli pezzi di argilla. Sia A il punto occupato dal centro di massa del sistema costituito dal cannone, dal pezzo d'argilla e dalla scatola prima che il cannone spari. Dopo lo sparo l'argilla fuoriesce dal cannone e si attacca su una delle pareti della scatola. La posizione finale del centro di massa del sistema differisce da A? Si giustifichi la risposta.

4. Il centro di massa di un corpo solido cade necessariamente all'interno del corpo? In caso di risposta negativa si forniscano alcuni esempi.

5. In Figura 7.21 sono disegnati un prisma a base triangolare isoscele (a) e un cono circolare retto (b) il cui diametro di base è uguale alla base delle facce triangolari del prisma. Il centro di massa del prisma dista dalla base un terzo dell'altezza, mentre quello del cono ne dista solo un quarto. Si spieghi la ragione di questa differenza.

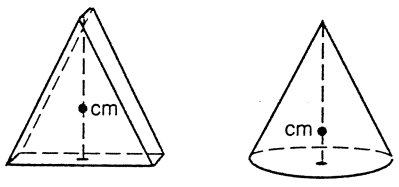


FIGURA 7.21 Quesito 5.

6. Che relazione esiste tra la nozione di centro di massa e quelle di centro geografico e demografico di una nazione? Perché il centro geografico e quello demografico in generale non coincidono?

7. Dove si trova il centro di massa dell'atmosfera terrestre?

8. Il centro di massa di una lattina piena di bibita occupa approssimativamente il centro geometrico della lattina stessa. (a) Cosa accade al centro di massa del sistema costituito dalla lattina e dalla bibita se questa viene parzialmente svuotata? (b) Cosa si può dire della posizione del centro di massa della lattina se la bibita viene svuotata completamente? Si rimanda al Problema 5.

9. Uno scultore dilettante decide di rappresentare un uccello (Figura 7.22). Fortunatamente l'oggetto finale è tale da restare in equilibrio se posto su un piano orizzontale. L'oggetto è costituito da un'unica lamina metallica di spessore uniforme. Quale dei punti riportati in figura è, con buona probabilità, il centro di massa?

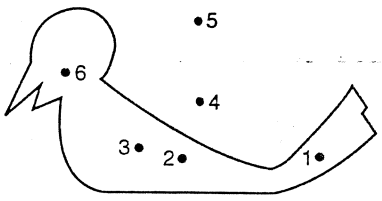


FIGURA 7.22 Quesito 9.

10. Taluni sostengono che il centro di massa di un saltatore in alto che supera l'asticella passa sotto l'asticella stessa. Lo ritenete possibile?

11. Nella parte centrale di un *grand jété* (Figura 7.23) si ha la sensazione che la ballerina si sposti orizzontalmente. Si dimostri che, muovendo opportunamente le gambe, la balle-



FIGURA 7.23 Quesito 11.

 ISBN 88-408-1254-7

rina può far sì che la sua testa trasli quasi orizzontalmente nonostante il suo centro di massa segua la usuale traiettoria parabolica.

12. È possibile far muovere una barca a vela soffiando aria sulle vele con un ventilatore posto a bordo? Si giustifichi la risposta.
13. Ricordando che solo le forze esterne possono modificare lo stato di moto del centro di massa di un sistema, si spieghi per quale ragione è possibile arrestare un'automobile per mezzo dei freni.
14. Un uomo è fermo su una superficie ghiacciata molto estesa e ha in mano un petardo acceso; a un certo punto l'uomo lancia il petardo in una direzione diversa dall'asse verticale. Si descriva brevemente, ma con la massima precisione possibile, il moto del centro di massa del petardo, e quello del centro di massa del sistema costituito dall'uomo e dal petardo. Si considerino i seguenti intervalli di tempo: (a) dal lancio all'esplosione del petardo; (b) dall'esplosione fino all'istante in cui il primo frammento del petardo cade a terra; (c) dall'istante in cui tocca terra il primo fino a quello in cui tocca terra l'ultimo frammento del petardo; (d) dall'istante in cui l'ultimo frammento del petardo tocca terra fino a quello in cui il primo frammento fuoriesce dalla regione ghiacciata.
15. Si supponga di lanciare con velocità v un cubo di ghiaccio in un ambiente vuoto molto caldo in assenza di gravità. Il cubo si scioglie un po' alla volta e il liquido si trasforma subito in vapore. (a) Si può descrivere il fenomeno precedente in termini di un sistema di particelle? (b) In caso di risposta affermativa, si può parlare di un unico sistema di particelle? (c) In caso di risposta affermativa, il moto del centro di massa del sistema subisce variazioni improvvise? (d) La quantità di moto totale del sistema si conserva?
16. Un contenitore in cui è stato ottenuto un vuoto spinto viene posto a riposo su una superficie liscia. Successivamente viene praticato un forellino su una delle pareti del contenitore (Figura 7.24) in modo tale che l'aria possa penetrarvi. Si descriva il moto del contenitore e si giustifichi la risposta.

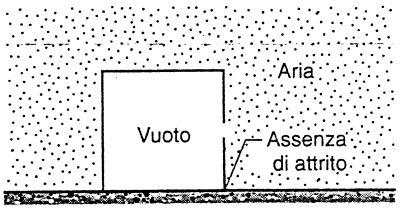


FIGURA 7.24 Quesito 16.

17. Un carrello ferroviario carico di N persone ciascuna di massa w, si trova inizialmente a riposo. Il carrello avrà una velocità finale maggiore se le N persone corrono una dopo l'altra con velocità relativa al carrello v_{rel} e saltano giù dal carrello oppure se questa operazione viene effettuata simultaneamente da tutte le N persone?
18. Si proponga un esempio di sistema a massa variabile differente da quelli contemplati nel testo.
19. Non è possibile usare l'equazione $\sum \boldsymbol{F}_{ext} = \mathrm{d}(M\boldsymbol{v})/\mathrm{d}t$ per i sistemi a massa variabile. Per poter rendere conto di questa affermazione (a) si scriva l'Equazione nella forma $(\sum \boldsymbol{F}_{ext} - M\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t)/(\mathrm{d}M/\mathrm{d}t) = \boldsymbol{v}$ e (b) si mostri che uno dei due membri di tale equazione ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali, mentre l'altro membro non gode di questa proprietà. Per questa ragione l'equazione non può essere valida in un qualsiasi riferimento inerziale. (c) Si mostri, inoltre, che l'Equazione 7.31 non conduce all'assurdo appena discusso.
20. Nel 1920 su un quotidiano di ampia diffusione apparve un editoriale relativo agli esperimenti pionieristici di Robert H. Goddard sui vettori a reazione in cui si affermava l'idea che tali razzi non potessero funzionare nel vuoto: "È sorprendente come il Professor Goddard, nonostante la sua cattedra al Clark College e il sostegno dello Smithsonian Institution, non conosca le relazioni esistenti tra azione e reazione e non si renda conto che bisogna avere a disposizione qualcosa di meglio del vuoto su cui esercitare un'azione nella speranza di ottenerne una reazione. Sembra che gli manchino le conoscenze di base insegnate ogni giorno agli studenti liceali." Per quale motivo gli argomenti dell'editorialista sono errati?
21. Si spieghi per quale ragione la velocità dello stadio finale di un razzo a più stadi è maggiore della velocità finale di un razzo a singolo stadio con la stessa massa totale e stessa quantità di carburante a disposizione.
22. Un razzo può raggiungere una velocità superiore a quella alla quale vengono emessi i gas combusti? Si giustifichi la risposta.
23. Vi sono mezzi di propulsione diversi dei vettori a reazione nello spazio interstellare? In caso di risposta affermativa se ne diano alcuni esempi e si spieghi per quale ragione non vengono usati.
24. L'Equazione 7.32 suggerisce che la velocità di un razzo può raggiungere valori arbitrariamente elevati, purché vi sia carburante sufficiente. Vi sembra ragionevole? Qual è il limite di applicabilità dell'Equazione 7.32? In che punto della nostra deduzione è stata introdotta questa limitazione?

ESERCIZI

7.1 Il moto di un sistema di particelle

7.2 Sistemi di due particelle

1. Quanto dista il centro di massa del sistema Terra-Luna dal centro della Terra? (Per i dati necessari alla soluzione del problema, massa della Terra e della Luna e distanza tra i loro centri, si rimanda all'Appendice C.) È interessante confrontare la risposta con il raggio della Terra.
2. Si dimostri che il rapporto tra le distanze x_1 e x_2 di due particelle dal loro centro di massa è uguale all'inverso del rapporto tra le loro masse, ovvero $x_1/x_2 = m_2/m_1$.
3. Una Jaguar di massa 2210 kg viaggia su una strada rettilinea alla velocità di 105 kg/h. La segue una Ford di massa 2080 kg alla velocità di 43 km/h. Si determini la velocità del centro di massa del sistema costituito dalle due autovetture.

4. Due pattinatori di masse 65 kg e 42 kg, in piedi su una pista ghiacciata, reggono dalle due estremità un bastone di lunghezza 9.7 m e massa trascurabile. Tirando il bastone verso di sé ciascun pattinatore avanza verso l'altro fino a toccarsi. A quanto ammonta lo spostamento complessivo del pattinatore più leggero?
5. Due particelle P e Q di masse 1,43 kg e 4,29 kg sono a riposo a distanza mutua di 1,64 m. Le due particelle si scambiano una forza attrattiva di intensità pari a $1,79 \cdot 10^{-2}$ N. Assumendo che sul sistema non agiscano forze esterne (a) si descriva il moto del centro di massa; (b) si determini a che distanza dalla posizione iniziale di P avviene la collisione tra le due particelle.
6. Un proiettile viene sparato da un cannone, posto a terra, con alzo di 57,4° e velocità di modulo 466 m/s. Giunto al vertice della sua traiettoria, il proiettile esplode e si suddivide in due frammenti di massa uguale. Subito dopo l'esplosione, uno dei due frammenti ha velocità nulla e, quindi, cade verticalmente. A che distanza orizzontale dal cannone cade il secondo frammento?
7. Un cane di massa pari a 5,0 kg si trova su una barca a 7,0 m dalla riva. Il cane percorre 2,8 m sulla barca verso la riva. Sapendo che la barca pesa 21 kg e assumendo che non vi sia attrito tra essa e la superficie dell'acqua, si determini la distanza finale tra il cane e la riva. (*Suggerimento*: il centro di massa del sistema costituito dal cane e dalla barca non si muove. Perché?) In Figura 7.25 la riva si sviluppa anche a sinistra.

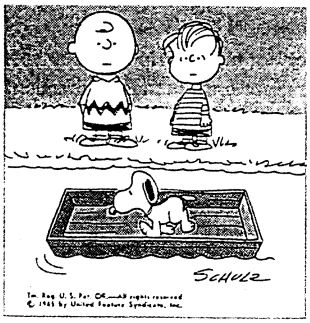


FIGURA 7.25 Esercizio 7.

8. Richard, di massa 78,4 kg, e Judy, più leggera dell'amico, navigano sul Lago George su una canoa di 31,6 kg. Con la canoa a riposo i due ragazzi si scambiano i rispettivi posti, simmetrici rispetto al centro di massa della canoa e a distanza di 2,93 m l'uno dall'altro. Richard osserva che rispetto al fondo del lago la canoa si è spostata di 41,2 cm e con questo dato riesce a calcolare la massa di Judy. Come ha fatto?
9. Un uomo di massa 84,4 kg si trova nella parte posteriore di una slitta di massa 425 kg in moto senza attrito alla velocità di 4,16 m/s. L'uomo si sposta dalla poppa verso la prua della slitta alla velocità di 2,08 m/s percorrendo 18,2 m. Di quanto si sposta la barca rispetto al ghiaccio nell'intervallo di tempo impiegato dall'uomo per raggiungere la prua?

7.3 Sistemi di particelle

10. Si determini il centro di massa del sistema costituito dalle tre particelle di Figura 7.26.

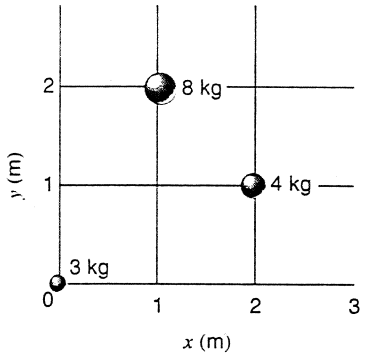


FIGURA 7.26 Esercizio 10.

11. Nella molecola di ammoniaca NH_3 i tre atomi di idrogeno H formano un triangolo equilatero di lato $16,28 \cdot 10^{-11}$ m; il centro del triangolo dista, quindi, $9,40 \cdot 10^{-11}$ m da ciascun atomo di idrogeno. L'atomo di azoto N costituisce il vertice di una piramide la cui base è individuata dal triangolo formato dai tre atomi di idrogeno (Figura 7.27). La distanza tra l'atomo di azoto e ciascuno dei tre atomi di idrogeno vale $10,14 \cdot 10^{-11}$ m; il rapporto tra la massa atomica dell'azoto e quella dell'idrogeno è 13,9. Si determini la distanza del centro di massa della molecola dall'atomo di azoto.

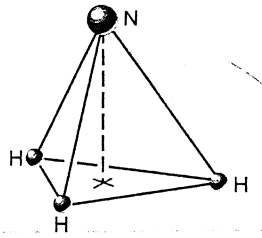


FIGURA 7.27 Esercizio 11.

12. Si consideri il Problema svolto 7.3. All'istante $t = 1,42$ s il frammento di massa 6,5 kg si muove con componente orizzontale della velocità 11,4 m/s, nello stesso verso del proiettile originario, e con componente verticale 4,6 m/s verso il basso. Si determini la velocità che allo stesso istante possiede il frammento di massa 3,1 kg.

7.4 Centro di massa di corpi solidi

13. Tre sbarrette di lunghezza L sono state saldate come in Figura 7.28; le due sbarrette che costituiscono le braccia della U hanno massa M, mentre la terza sbarretta ha massa $3M$. Si determini il centro di massa dell'intero oggetto.

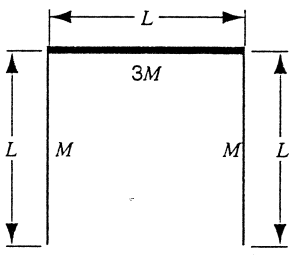


FIGURA 7.28 Esercizio 13.

 ISBN 88-408-1254-7

14. In Figura 7.29 è illustrata una sbarra composita di dimensioni 22.0 cm · 13.0 cm · 2,80 cm. La sbarra è costituita per metà di alluminio (massa volumica = 2.70 g/cm^3) e per metà di ferro (massa volumica = 7,85 g/cm^3). Si determini la posizione del centro di massa della sbarra.

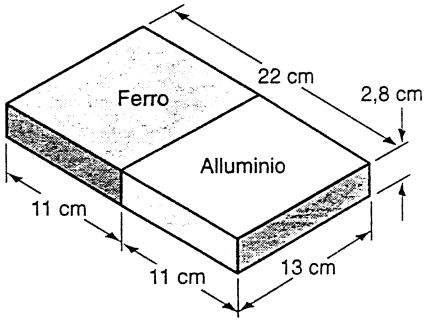


FIGURA 7.29 Esercizio 14.

15. Una scatola ha forma cubica ed è priva della faccia superiore. La scatola è stata ottenuta ripiegando un sottile foglio metallico. Sapendo che lo spigolo del cubo è [illegible] o 40 cm, si determini la posizione del centro di massa facendo uso del sistema di riferimento di Figura 7.30.

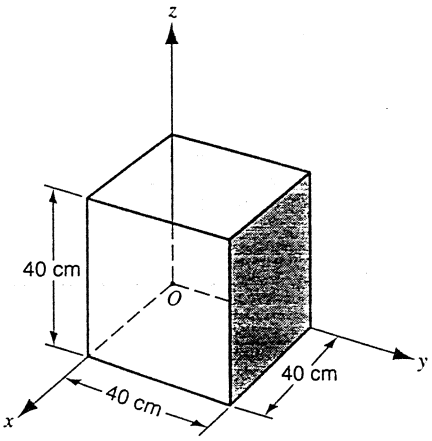


FIGURA 7.30 Esercizio 15.

7.5 Conservazione della quantità di moto per un sistema di particelle

16. Un vascello, fermo rispetto a un riferimento terrestre, esplode e si spezza in tre pezzi. Due dei tre pezzi, uno dei quali ha massa pari al doppio dell'altro, vengono scagliati lungo direzioni mutuamente ortogonali, entrambi con velocità 31,4 m/s. Il terzo pezzo ha massa pari a tre volte la massa del pezzo più leggero. Si determini la direzione e il modulo della velocità del terzo pezzo sùbito dopo l'esplosione. Si specifichi la direzione calcolando l'angolo formato dalla velocità in questione con la direzione di volo del pezzo più leggero.

17. Un'arma da fuoco spara ogni minuto 220 proiettili di gomma, di massa 12,6 g e alla velocità d'uscita di 975 m/s. Si calcoli quanti proiettili è necessario sparare contro una sagoma di un animale di massa 84,7 kg, in moto verso lo sparatore alla velocità di 3,87 m/s, al fine di arrestarne il moto. Si assuma che i proiettili viaggino orizzontalmente e che cadano a terra dopo aver colpito l'animale.

18. Un carro ferroviario si muove su un binario orizzontale senza attrito alla velocità di 45 m/s. Sul carro è montato un cannone, puntato in avanti, che può sparare palle di massa 65 kg con velocità d'uscita di 625 m/s. La massa complessiva del carro, del cannone e dell'abbondante scorta di palle ammonta a 3500 kg. Si calcoli il numero di palle che è necessario sparare per rendere più vicina possibile a zero la velocità del carro.

19. Dodici contenitori di massa 100,0 kg ciascuno sono tenuti assieme nello spazio interstellare per mezzo di catene vincolate a un punto comune. Il centro di massa del sistema è inizialmente a riposo. Uno dei contenitori viene colpito in modo plastico da un corpo di massa 50 kg in moto alla velocità di 80 m/s, rimanendone attaccato. Si determini la velocità del centro di massa del sistema costituito dai dodici contenitori dopo la collisione supponendo (a) che tutte le catene restino intatte e (b) che si rompa la catena collegata al contenitore colpito.

7.6 Sistemi a massa variabile

20. Un razzo a riposo nello spazio interstellare, in assenza di gravità, ha massa pari a $2{,}55 \cdot 10^5$ kg di cui $1{,}81 \cdot 10^5$ kg sono costituiti dal carburante. Il carburante viene bruciato dal motore in ragione di 480 kg/s e i gas di scarico vengono espulsi con velocità di 3,27 km/s. Si supponga che il motore venga messo in funzione per 250 s. (a) Si calcoli la spinta del razzo. (b) Si determini la massa del razzo alla fine del periodo di attività del motore. (c) Si determini la velocità finale del razzo.

21. Si consideri un razzo a riposo nello spazio interstellare. Si calcoli il rapporto tra la massa iniziale e quella finale dopo un periodo di attività del motore in modo tale che (a) la velocità finale sia uguale alla velocità di espulsione dei gas di scarico e (b) la velocità finale sia uguale al doppio della velocità di espulsione dei gas di scarico.

22. Durante una missione lunare si rende necessario correggere di 22,6 m/s la velocità della navicella, in moto alla velocità di 388 m/s. La velocità di esplusione dei gas di scarico è uguale a 1230 m/s. Si calcoli la frazione della massa iniziale che deve essere espulsa.

23. Un razzo di massa pari a $1{,}11 \cdot 10^5$ kg, di cui $8{,}70 \cdot 10^4$ kg sono costituiti dal carburante, deve essere lanciato verticalmente. Il carburante verrà bruciato in ragione di 820 kg/s. Si calcoli la minima velocità di espulsione dei gas combusti che permette il decollo.

24. Un contenitore di massa 5,4 kg, riempito con 35 kg di sabbia, scivola, partendo da una posizione di riposo, lungo un pendio ghiacciato lungo 93 m e inclinato di 26° rispetto al piano orizzontale. Dalla parte posteriore del contenitore si perde sabbia in ragione di 2,3 kg/s. Si calcoli il tempo impiegato dal contenitore per giungere alla base del pendio.

25. Un carro ferroviario scoperto di massa pari a 9,75 tonnellate si muove lungo un binario liscio e orizzontale alla velocità di 1,36 m/s. Improvvisamente inizia a piovere e le gocce d'acqua cadono verticalmente rispetto al suolo. Si calcoli la velocità del carro dopo aver imbarcato 0,50 tonnellate di acqua. Sono necessarie ipotesi semplificative? Quali?

PROBLEMI

1. Un uomo di massa m si trova su una scala di corda sospesa a una mongolfiera (Figura 7.31), a riposo rispetto a un riferimento terrestre. (a) Se l'uomo inizia a salire con velocità v rispetto alla scala, si determini in quale direzione e con quale velocità si muoverà la mongolfiera rispetto al suolo. (b) Si determini lo stato di moto finale se l'uomo interrompe la sua salita.

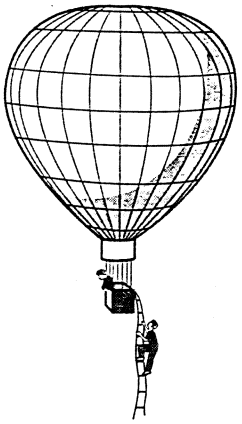


FIGURA 7.31 Problema 1.

2. Due piatti, aventi la stessa massa complessiva di 850 g ciascuno, sostengono pesi da bilancia e sono connessi per mezzo di una corda leggera che passa su una puleggia liscia di diametro pari a 56,0 mm, anch'essa di massa trascurabile. I due corpi sono inizialmente alla stessa quota. (a) Si determini la posizione iniziale del centro di massa del sistema costituito dai due piatti. (b) Trentaquattro grammi vengono trasferiti da un piatto all'altro facendo attenzione che le posizioni dei due piatti restino invariate. Si determini la posizione del centro di massa. (c) I due piatti vengono lasciati liberi di muoversi. Si descriva il moto del centro di massa e se ne determini, in particolare, l'accelerazione.
3. Una catena uniforme e flessibile di lunghezza L e di massa per unità di lunghezza λ viene fatta passare su un piccolo perno liscio (Figura 7.32). Nella posizione iniziale la catena è a riposo e una sua porzione x pende a destra del perno mentre la restante porzione $L - x$ pende alla sua sinistra. Si determini l'accelerazione a in funzione di x.

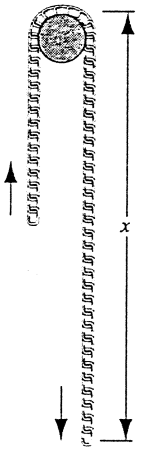


FIGURA 7.32 Problema 3.

4. Un cannone e una riserva di palle sono posti all'interno di un vagone ferroviario di lunghezza L (Figura 7.33). Il cannone spara verso destra, il vagone rincula verso sinistra e la palla resta nel vagone dopo aver urtato la sua parete destra. (a) Si determini la massima distanza che il vagone può aver percorso dopo che tutte le palle siano state sparate. (b) Si calcoli la velocità del vagone dopo che tutte le palle sono state sparate.

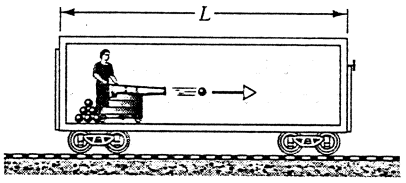


FIGURA 7.33 Problema 4.

5. Un serbatoio cilindrico viene inizialmente riempito di gasolio e in seguito il liquido viene fatto uscire tramite un condotto posto alla base del contenitore (Figura 7.34). (a) Si descriva in modo qualitativo il moto del centro di massa del sistema costituito dal serbatoio e dal liquido in esso contenuto durante la fuoriuscita del gasolio. (b) Si determini l'altezza x del liquido nel serbatoio nell'istante in cui il centro di massa del sistema costituito dal serbatoio e dal liquido in esso contenuto raggiunge l'altezza minima. Si faccia uso dei seguenti parametri: l'altezza del serbatoio H, la sua massa M e la massa m del gasolio nel serbatoio pieno.

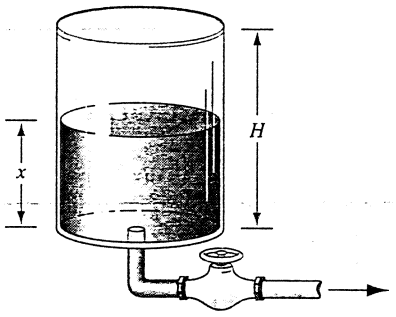


FIGURA 7.34 Problema 5.

6. Si determini la posizione del centro di massa di una lamina semicircolare omogenea di raggio R.
7. Un cannone di massa pari a 1400 kg spara proiettili di massa 70,0 kg con velocità d'uscita di 556 m/s. Il cannone viene posto su una rotaia liscia con alzo di 39,0° rispetto all'orizzontale. (a) Si calcoli la velocità d'uscita dei proiettili rispetto alla Terra. (b) Si calcoli a quale angolo rispetto al piano orizzontale vengono scagliati i proiettili. Suggerimento: si osservi che la componente orizzontale del momento totale della quantità di moto del sistema si conserva quando viene sparato un proiettile.
8. Una slitta a reazione di massa 2870 kg si muove su binario alla velocità di 252 m/s. A un certo punto una pala posta sulla slitta si abbassa immergendosi in un corso d'acqua

 ISBN 88-408-1254-7

che scorre tra le rotaie e pesca dell'acqua trasferendola all'interno di un contenitore, anch'esso posto sulla slitta. Si calcoli la velocità della slitta dopo che 971 kg d'acqua sono stati introdotti nel contenitore.

9. La forza che bisogna esercitare per mantenere in moto un nastro trasportatore carico è maggiore di quella necessaria nel caso in cui il nastro sia vuoto. Si calcoli questa forza supplementare se il nastro si muove alla velocità costante di 1,5 m/s e i bagagli vengono caricati a un'estremità e scaricati dall'altra in ragione di 20 kg/s. Si assuma che i bagagli cadano verticalmente sul nastro e che chi li scarica, prima di sollevarli, li arresti rispetto al suolo.
10. Un razzo di massa 5860 kg è pronto per il decollo verticale. La velocità di espulsione dei gas di scarico è 1,17 km/s. Si calcoli la quantità di gas che deve essere bruciata in un secondo per imprimere una spinta sufficiente ad (a) vincere il peso del razzo e (b) fornire al razzo un'accelerazione verticale iniziale pari a 18,3 m/s^2. Si noti che a differenza di quanto osservato a proposito del Problema svolto 7.9, in questo caso la gravità agisce sul razzo come forza esterna al sistema.
11. Due chiatte si muovono nella stessa direzione sulla superficie di un lago calmo con velocità di 9,65 km/h e 21,2 km/h. Mentre la più rapida sorpassa la più lenta, si trasferisce del carbone a badilate da quest'ultima alla prima in ragione di 925 kg/min (Figura 7.35). Si calcoli la forza aggiuntiva richiesta ai motori perché le velocità restino invariate. Si supponga che l'attrito tra le imbarcazioni e l'acqua non dipenda dal peso delle imbarcazioni stesse e che le badilate abbiano direzione trasversale.
12. Una corda flessibile e inestensibile di lunghezza L viene introdotta in un tubo di diametro pressoché uguale a quello della corda. Il tubo è formato da due braccia ad angolo retto ed è posto in modo che una delle due braccia sia orizzontale e l'altra verticale con l'apertura verso l'alto. All'istante $t = 0$ una porzione y_0 di corda è stata introdotta nel braccio verticale del tubo. La corda viene lasciata libera di scivolare nel tubo in modo che a istanti successivi la sua velocità può essere espressa come dy/dt, ove $y(t)$ rappresenta la lunghezza della corda penetrata nel tubo. (a) Si dimostri che, se si pensa al problema come a un problema a massa variabile, si ha $v_{rel} = 0$, così che l'equazione del moto ha la forma $m\,dv/dt = F_{ext}$. (b) Si dimostri che l'equazione del moto in questo caso assume la forma $d^2y/dt^2 = gy/L$. (c) Si dimostri, sostituendo nell'equazione precedente, che una soluzione dell'equazione del moto è

$$y = (y_0/2)(e^{t\sqrt{g/L}} + e^{-t\sqrt{g/L}}).$$

Si discuta la soluzione dell'equazione del moto.

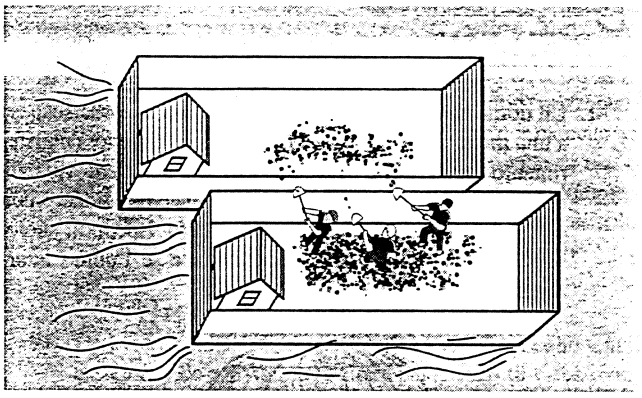


FIGURA 7.35 Problema 11.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Un razzo ha massa a vuoto di 4000 kg e può essere caricato con 27 000 kg di carburante. Il motore brucia 230 kg/s di carburante ed espelle i gas combusti alla velocità di 2500 m/s. Si assuma che il razzo venga lanciato verticalmente e che la resistenza dell'aria sia trascurabile. Si determini numericamente la traiettoria del missile, considerando anche la variazione dell'accelerazione di gravità con la quota, data dalla seguente espressione:

$$g = (9,8\ \text{m/s}^2)\left(\frac{R_T}{R_T + y}\right)^2,$$

ove y rappresenta la quota del razzo ed R_T il raggio terrestre. (a) A quale quota viene esaurito il carburante? (b) Qual è la velocità del razzo in questo istante? (c) Qual è il punto più alto della traiettoria?

CAPITOLO 8

CINEMATICA DEI MOTI ROTATORI

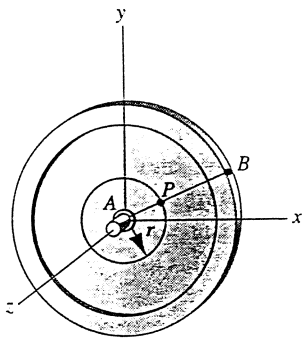
Nei capitoli precedenti si è studiato il moto traslatorio *di oggetti di diversa natura. Per esempio è stato considerato il caso dei corpi rigidi (bastone lanciato in aria) e quello di sistemi le cui diverse parti sono in moto relativo (cannone e palla da cannone). In questo capitolo ci si occuperà del più generale moto di un corpo rigido; tale moto può essere pensato come composizione di un moto traslatorio e di uno rotatorio. Più precisamente si studierà la cosiddetta* cinematica dei moti rotatori, *ovvero si mostrerà come sia possibile introdurre le opportune variabili per la descrizione del moto rotatorio. Nei due capitoli successivi ci si occuperà della dinamica dei moti rotatori, ovvero si studieranno le relazioni intercorrenti tra i diversi aspetti del moto rotatorio e le forze agenti sul corpo in moto.*

8.1 MOTO ROTATORIO

In Figura 8.1 è riportata la foto di una cyclette. L'asse della ruota anteriore è fisso nello spazio; consideriamo un riferimento cartesiano con asse z parallelo all'asse della ruota, assimilando la ruota a un disco sottile. Consideriamo un generico elemento P della ruota e denotiamo con r la sua distanza dal centro A posto sull'asse z. Il segmento AB in figura giace sulla retta passante per A e P. A causa del moto della ruota l'elemento P si muove lungo una circonferenza.



(a)



(b)

FIGURA 8.1 (a) La ruota di una cyclette è un esempio di corpo rigido in moto puramente rotatorio. (b) Sistema di riferimento usato per descrivere il moto rotatorio della ruota. L'asse di rotazione, che è perpendicolare al piano xy, coincide con l'asse z. Un generico elemento P della ruota a distanza r dall'asse si muove lungo una circonferenza di raggio r.

 ISBN 88-408-1254-7

La velocità alla quale P percorre tale circonferenza non è necessariamente costante, infatti varia se la ciclista modifica il ritmo delle sue pedalate.

Il moto della ruota è un esempio di *moto puramente rotatorio di un corpo rigido*. Tale moto può essere definito come segue.

> *Si dice che il moto di un corpo rigido è puramente rotatorio se e solo se tutti gli elementi del corpo (come l'elemento P in Figura 8.1) si muovono lungo una traiettoria circolare. I centri di tutte le circonferenze così ottenute devono, inoltre, cadere su una stessa retta detta asse di rotazione (l'asse z in Figura 8.1).*

Una caratterizzazione alternativa può essere ottenuta fissando l'attenzione sul segmento AB illustrato in Figura 8.1: per effetto del moto della ruota il segmento AB descrive un angolo del piano xy. Si può, quindi, dare la seguente definizione alternativa di moto rotatorio puro:

> *si dice che il moto di un corpo rigido è puramente rotatorio attorno a un asse se e solo se tutte le linee di riferimento ortogonali all'asse (come il segmento AB in Figura 8.1) descrivono angoli uguali in intervalli di tempo uguali.*

Nel caso di una vera e propria ruota di bicicletta la linea AB può essere pensata coincidente con uno dei raggi della ruota (si assumano i raggi ortogonali all'asse). La definizione precedente, allora, può essere esemplificata dicendo che, se una ruota di bicicletta è in moto puramente rotatorio attorno al suo asse e se un raggio spazza l'angolo $\Delta\phi$ in un intervallo di tempo Δt, allora tutti gli altri raggi della bicicletta nello stesso intervallo di tempo descrivono il medesimo angolo $\Delta\phi$.

In generale il moto di un corpo rigido può essere pensato come il risultato della composizione di un moto puramente rotatorio e di uno traslatorio; si pensi, per esempio, al moto di una ruota di una bicicletta che avanza su una strada. Un elemento P di tale ruota descrive una circonferenza rispetto a un osservatore solidale con la bicicletta stessa, per esempio il ciclista; d'altro canto un osservatore fermo rispetto alla strada darà una descrizione completamente diversa del moto di P. In generale la situazione è ancora più complessa, si pensi al moto scomposto di una palla da rugby in volo: nel caso più complicato il moto complessivo è il risultato di un moto traslatorio e di un moto rotatorio il cui asse varia da istante a istante. In generale la descrizione del moto di un corpo rigido nello spazio tridimensionale necessita di sei coordinate: tre coordinate lineari per individuare la posizione del centro di massa, due angoli (come la latitudine e la longitudine) per individuare l'asse di rotazione e uno per descrivere la rotazione attorno a tale asse. In Figura 8.2 è illustrato il moto rototraslatorio di un corpo rigido bidimensionale; in questo caso la descrizione del moto può essere effettuata con tre sole coordinate: due coordinate lineari per individuare la posizione del centro di massa e un angolo per individuare la posizione della linea di riferimento solidale con il corpo.

In questo capitolo verrà studiato il moto puramente rotatorio (il caso più complicato del moto rototraslatorio viene rimandato al prossimo capitolo) dei soli corpi rigidi, ovvero di oggetti le cui diverse parti non possono muoversi le une rispetto alle altre. Per esempio, il moto di un liquido in un contenitore rotante non costituisce materia di questo capitolo.

8.2 VARIABILI ROTAZIONALI

In Figura 8.3a è illustrato il moto di un corpo rigido di forma imprecisata in rotazione attorno all'asse z. La posizione dell'intero corpo nel riferimento in figura può essere specificata una volta nota la posizione di un suo elemento P rispetto allo stesso riferimento. Per quanto riguarda, allora, gli aspetti cinematici del moto in questione, è sufficiente descrivere il moto bidimensionale di un elemento lungo una circonferenza di raggio r uguale alla distanza di P dal punto A dell'asse di rotazione z. In Figura 8.3b è riportata una sezione trasversa del corpo ottenuta tagliando il corpo stesso con un piano parallelo al piano xy e passante per P.

L'angolo ϕ in Figura 8.3b individua la posizione angolare della linea di riferimento AP rispetto all'asse x'. In modo del tutto arbitrario, ma senza perdita di generalità, il *verso positivo viene scelto antiorario rispetto all'asse z*, ovvero l'angolo ϕ viene supposto crescente per rotazioni antiorarie e decrescente per rotazioni orarie rispetto a un os-

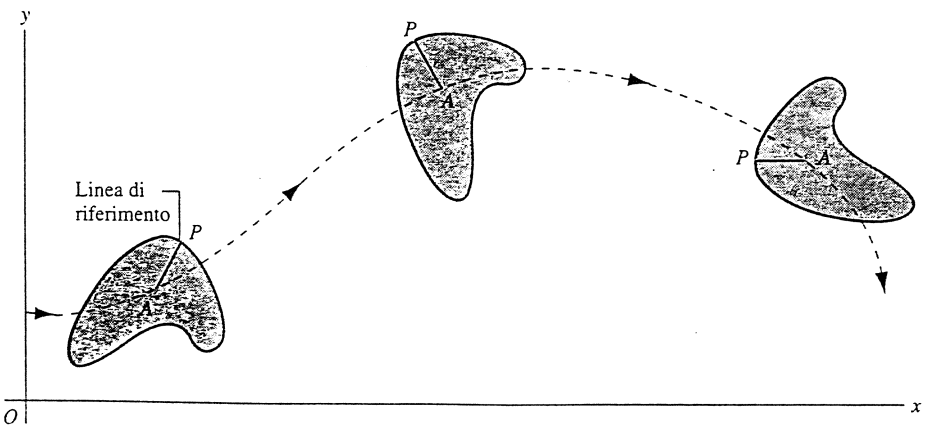


FIGURA 8.2 Rappresentazione del moto rotatorio e traslatorio di un generico corpo rigido. In questo caso particolare il moto traslatorio è confinato nel piano xy. In ogni istante l'asse di rotazione è parallelo all'asse z e il suo punto di intersezione con il piano xy si muove lungo la linea tratteggiata. Il moto rotatorio è messo in evidenza per mezzo del segmento AP.

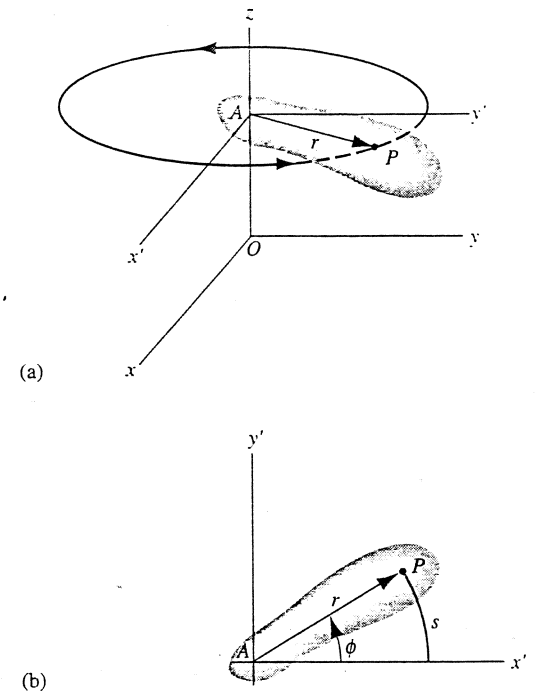


FIGURA 8.3 (a) Un generico corpo rigido in moto puramente rotatorio attorno all'asse z. (b) Sezione trasversa del corpo. Gli assi x' e y' sono paralleli rispettivamente a x e y e passano entrambi per il punto A. La posizione della linea di riferimento AP, che connette perpendicolarmente l'elemento P con l'asse di rotazione, all'istante t è individuata assegnando il valore dell'angolo ϕ formato dalla linea di riferimento stessa con l'asse x'. L'elemento P percorre un arco di lunghezza s in un intervallo di tempo in cui la linea di riferimento descrive l'angolo ϕ.

servatore che guarda la rotazione del corpo dall'alto relativamente alla direzione dell'asse z.

Si supponga che per effetto della rotazione del corpo (si veda la Figura 8.3b) l'elemento P descriva un arco di lunghezza s. La lunghezza di tale arco e il raggio della circonferenza lungo cui si muove P (distanza di P dall'asse di rotazione) individuano l'angolo di rotazione della linea di riferimento:

$$\phi = s/r. \tag{8.1}$$

Con questa definizione gli angoli vengono misurati in *radianti* (rad). L'angolo ϕ è definito come rapporto tra due lunghezze, si tratta quindi di un numero puro cui si associa, purtuttavia, l'unità di misura radiante. Se la lunghezza dell'arco risultasse uguale al raggio r, allora il corrispondente angolo di rotazione sarebbe uguale a $\phi = r/r = 1$ rad. Spesso l'unità di misura rad può essere omessa nelle equazioni e introdotta solo qualora risulti necessaria. Si osserva, infine, che non tutte le quantità espresse come rapporto tra due lunghezze possono essere interpretate come angoli e misurate in radianti, come accade per ϕ nell'Equazione 8.1.

Ricordando che la lunghezza di una circonferenza di raggio r è pari a $2\pi r$, dall'Equazione 8.1 segue che, se l'elemento P descrive un'intera circonferenza, l'angolo di rotazione corrispondente è uguale a

$$1 \text{ angolo giro} = 2\pi \text{ rad} = 360^\circ,$$

ovvero

$$1 \text{ rad} = 57{,}3^\circ = 0{,}159 \text{ angoli giro}.$$

Spesso gli angoli e le relativi grandezze rotazionali potranno essere espressi in unità basate non solo sui radianti, ma anche sui gradi o sul numero di giri. Va osservato, però, che qualora un'equazione, come la 8.1, mescoli grandezze lineari e angolari, sarà necessario esprimere queste ultime in radianti.

Si consideri, ora, il moto rotatorio antiorario del corpo in Figura 8.3b e si supponga che la posizione della linea di riferimento AP sia individuata dagli angoli ϕ_1 e ϕ_2 agli istanti t_1 e t_2, con $t_2 > t_1$. La situazione appena descritta è illustrata in Figura 8.4 ove sono riportate le posizioni dell'elemento P e le corrispondenti linee di riferimento ai due istanti di tempo considerati. Per semplicità, in Figura 8.4 lo schizzo del corpo è stato omesso.

Lo *spostamento angolare* dell'elemento P nell'intervallo $t_2 - t_1 = \Delta t$ è dato da $\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$. Si definisce la *velocità angolare media* $\overline{\omega}$ dell'elemento P nell'intervallo Δt nel modo seguente:

$$\overline{\omega} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \tag{8.2}$$

La *velocità angolare istantanea* è data dal limite del rapporto appena considerato quando l'intervallo di tempo Δt tende a zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t},$$

ovvero

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}. \tag{8.3}$$

A seconda che ϕ cresca o decresca la velocità angolare risulta positiva o negativa. In seguito si mostrarà che in realtà la velocità angolare è una quantità vettoriale che può avere componente positiva o negativa lungo un asse fissato, esattamente come accade per l'usuale velocità v. Così come nel caso del moto traslatorio, con l'espressione «velocità angolare» ci si riferirà alla velocità angolare istantanea e, parlando di velocità angolare, specificheremo se si tratta del vettore o del suo modulo solo quando il contesto non lo chiarisce e ne richiede la distinzione.

La dimensione della velocità angolare è quella dell'inverso del tempo, T^{-1}; come unità di misura si possono usare i radianti al secondo (rad/s) o anche il numero di giri al secondo (giri/s).

Nel caso di un corpo rigido in moto puramente rotatorio tutti i suoi elementi hanno la medesima velocità angolare. In altri termini tutte le linee di riferimento come il segmento AP in Figura 8.3, solidali con il corpo e ortogonali all'asse di rotazione, ruotano con lo stesso vettore velocità angolare.

Se l'elemento P ha velocità angolare non costante gli si può associare un'accelerazione angolare non nulla. Siano

ω_1 e ω_2 le sue velocità angolari agli istanti t_1 e t_2 rispettivamente; si definisce l'*accelerazione angolare media* $\bar{\alpha}$ dell'elemento P nell'intervallo Δt nel modo seguente:

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{8.4}$$

L'*accelerazione angolare istantanea* è data dal limite del rapporto precedentemente considerato quando l'intervallo di tempo Δt tende a zero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

ovvero

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \tag{8.5}$$

A seconda che ω cresca o decresca l'accelerazione angolare risulta positiva o negativa. Nel seguito con la locuzione «accelerazione angolare» ci si riferirà all'accelerazione angolare istantanea; la sua dimensione è quella dell'inverso del tempo al quadrato, T^{-2}; come unità di misura si possono usare i radianti al secondo quadrato (rad/s^2) o anche il numero di giri al secondo quadrato (giri/s^2). Ricordando che tutti gli elementi di un corpo rigido in moto puramente rotatorio hanno la medesima velocità angolare ω, dall'Equazione 8.5 segue che essi hanno anche la medesima accelerazione angolare α; in altri termini α e ω sono caratteristici del moto rotatorio del corpo rigido nella sua interezza.

La discussione precedente si applica immutata anche al caso di una singola particella in moto lungo una traiettoria circolare. Il punto P in Figura 8.4 potrebbe rappresentare la posizione di una particella puntiforme di massa m vincolata a muoversi lungo una circonferenza di raggio r, per esempio mediante una sbarretta rigida di massa trascurabile e di lunghezza r con un estremo fisso sull'asse z. Tutti i risultati ottenuti in questo paragrafo sono ugualmente validi sia se si considera P come un punto matematico sia se lo si associa a una particella puntiforme; per esempio anche per la *particella* P è possibile definire l'accelerazione angolare α del suo moto circolare attorno all'asse z. In seguito risulterà utile pensare al corpo rigido in Figura 8.3 come a un insieme di particelle puntiformi, dette anche punti o elementi materiali, tutte in moto circolare attorno all'asse z con medesima velocità e accelerazione angolare.

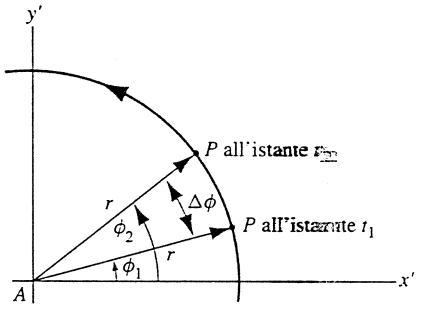


FIGURA 8.4 La linea di riferimento AP introdotta nella Figura 8.3b è individuata dall'angolo ϕ_1 all'istante t_1 e dall'angolo ϕ_2 all'istante t_2. Lo spostamento angolare corrispondente all'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ è dato da $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

PROBLEMA SVOLTO 8.1 La pala di un ventilatore è posta in rotazione con velocità angolare di 48.6 giri/min. Nell'arco di 32 s la pala rallenta e infine si ferma dopo aver compiuto 8.8 giri. Si calcoli (a) la velocità angolare media e (b) l'accelerazione angolare media della pala.

Soluzione (a) Lo spostamento angolare totale $\Delta\phi$ della pala nell'intervallo di $\Delta t = 32$ s è pari a 8.8 giri. Dall'Equazione 8.2 si ottiene la velocità angolare media

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{8.8 \text{ giri}}{32 \text{ s}} = 0.28 \text{ giri/s}$$

(b) La velocità angolare iniziale è $\omega_i = 48.6$ giri/min $= 0.81$ giri/s, quella finale è $\omega_f = 0$. In virtù dell'Equazione 8.4 vale che l'accelerazione angolare media è data da

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 0.81 \text{ giri/s}}{32 \text{ s}} = -0.025 \text{ giri/s}^2.$$

In questo problema risulta naturale esprimere le grandezze angolari in termini del numero di giri; si ribadisce, però, che, come sarà chiaro dagli esempi futuri, nelle equazioni che manipolano grandezze lineari a grandezze angolari è obbligatorio esprimere queste ultime in radianti.

Il fatto che la velocità angolare media risulti positiva mentre l'accelerazione angolare media risulti negativa suggerisce, come nel caso della cinematica dei moti traslatori, che la pala stia rallentando. Si ricorda, però, che nel caso traslatorio, per dare significato al segno delle grandezze cinematiche era necessario definire il verso positivo di percorrenza degli assi coordinati. Nel paragrafo seguente si mostrerà che anche le grandezze angolari hanno in realtà una natura vettoriale, pertanto per mezzo di un riferimento cartesiano con assi orientati sarà possibile dare senso al segno delle componenti delle grandezze angolari lungo tali assi.

PROBLEMA SVOLTO 8.2 Una ruota con asse fisso (situazione simile a quella descritta in Figura 8.1) è posta in moto rotatorio in modo tale che una linea di riferimento tracciata lungo uno dei suoi raggi abbia velocità angolare istantanea che varia con il tempo in accordo con la legge $\omega = At + Bt^2$, ove $A = 6.2$ rad/s^2 e $B = 8.7$ rad/s^3. (a) Se la posizione iniziale, a $t = 0$, della linea di riferimento è $\phi = 0$, se ne determini la posizione all'istante $t = 2.0$ s. (b) Si determini l'accelerazione angolare istantanea all'istante $t = 0{,}50$ s.

Soluzione (a) Per determinare la funzione del tempo ϕ a partire dalla velocità angolare è necessario calcolare un integrale. L'Equazione 8.3 può essere riscritta nella forma $d\phi = \omega\, dt$ e quindi può essere integrata in modo da ottenere $\phi = \int d\phi = \int \omega\, dt$. Più precisamente

$$\phi = \int (At + Bt^2)\, dt = \frac{1}{2}At^2 + \frac{1}{3}Bt^3 + C,$$

ove C è una costante arbitraria di integrazione che può essere determinata facendo uso della condizione iniziale. Infatti, perché risulti $\phi = 0$ all'istante $t = 0$ deve essere necessariamente $C = 0$. Calcolando l'espressione risultante all'istante $t = 2.0$ s si ottiene

$$\phi = \frac{1}{2}(6.2 \text{ rad/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 + \frac{1}{3}(8.7 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^3 = 35.6 \text{ rad}.$$

La ruota, quindi, compie una rotazione di 35.6 rad, ovvero di 5.7 giri, in 2.0 s. (b) Per calcolare l'accelerazione angolare istanta-

nea a partire dalla velocità angolare istantanea è necessario derivare la funzione del tempo ω come prescritto dall'Equazione 8.5:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(At + Bt^2) = A + 2Bt.$$

Calcolando l'espressione precedente all'istante $t = 0.50$ s si ottiene

$$\alpha = 6{,}2 \text{ rad/s}^2 + 2(8{,}7 \text{ rad/s}^3)(0.50 \text{ s}) = 14{,}9 \text{ rad/s}^2.$$

8.3 VARIABILI ROTAZIONALI VETTORIALI

Nella descrizione del moto traslatorio per mezzo dei concetti di spostamento, velocità e accelerazione, il primo passo consiste nella scelta di un sistema di riferimento cartesiano con assi mutuamente ortogonali e orientati. L'aver fissato un verso di percorrenza positivo su ciascun asse permette di dare significato all'essere positivo o negativo delle componenti dei vettori spostamento, velocità e accelerazione lungo i tre assi coordinati. Questo passo è necessario a causa del carattere vettoriale di tutte le citate grandezze cinematiche. Altre osservabili fisiche, come per esempio la massa e la temperatura, hanno carattere scalare e il loro valore è indipendente dalla scelta dei sistemi di coordinate.

A questo punto è necessario chiedersi se le grandezze cinematiche associate al moto rotatorio (spostamento, velocità e accelerazione angolari) hanno comportamento scalare o vettoriale. Se la loro natura risulterà vettoriale sarà necessario introdurre un riferimento di coordinate e definire tali osservabili relativamente al riferimento scelto. Per stabilire il carattere vettoriale di una grandezza fisica è necessario dimostrare che questa è dotata di intensità, di direzione e che soddisfa alla legge di composizione vettoriale. Per stabilire se le grandezze angolari godono di tali proprietà è necessario procedere in modo sperimentale.

Si consideri in primo luogo lo spostamento angolare $\Delta\phi$. La somma tra grandezze vettoriali, si ricorda, gode della proprietà commutativa: comunque si scelgano due vettori si ha che $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$, ovvero la somma di due vettori non cambia se si scambia l'ordine degli addendi. Analizziamo, ora, il caso dello spostamento angolare: si supponga di sottoporre uno stesso oggetto, per esempio il libro rappresentato in Figura 8.5, a due spostamenti angolari successivi $\Delta\phi_1$ e $\Delta\phi_2$. Come illustrato in Figura 8.5a si suppone che all'istante iniziale il libro giaccia sul piano yz: in primo luogo tale oggetto viene sottoposto allo spostamento $\Delta\phi_1$ di 90° attorno all'asse x e poi a $\Delta\phi_2$ di 90° attorno all'asse z. In Figura 8.5b, invece, viene illustrata la situazione nel caso in cui le due rotazioni venissero invertite: spostamento $\Delta\phi_2$ di 90° attorno all'asse z seguito da $\Delta\phi_1$ di 90° attorno all'asse x. È immediato osservare che le posizioni finali del libro sono completamente differenti; in modo conciso, ancorché impreciso, si può affermare che $\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 \neq \Delta\phi_2 + \Delta\phi_1$. In definitiva si può concludere che *gli spostamenti angolari finiti non hanno natura vettoriale.*

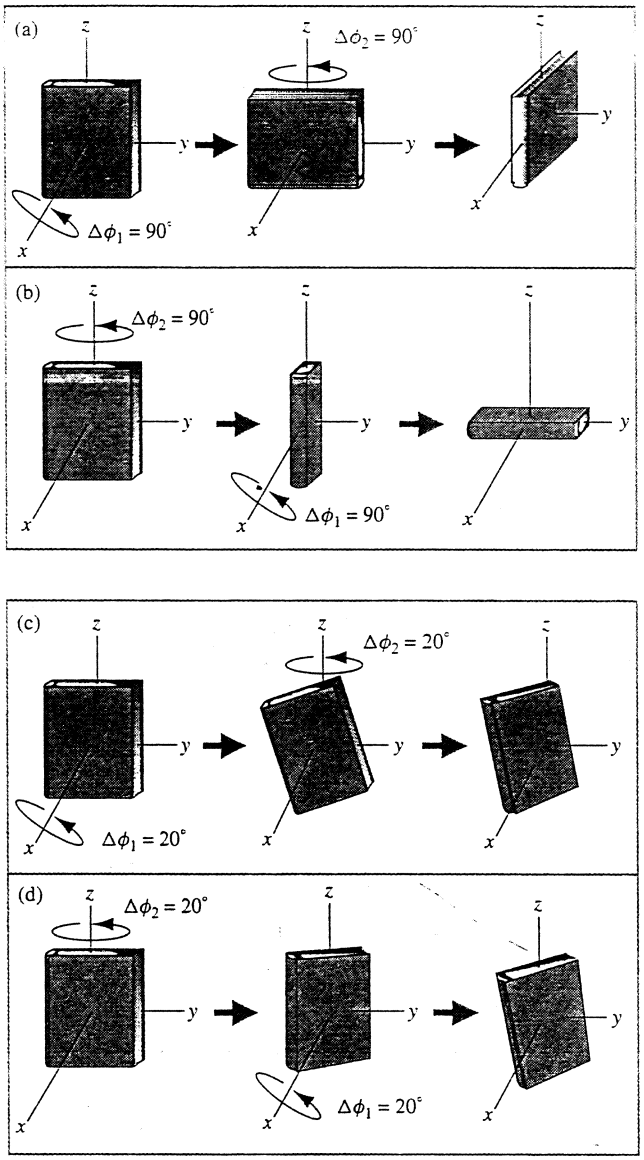


FIGURA 8.5 (a) Il libro viene sottoposto a due rotazioni successive: $\Delta\phi_1 = 90°$ attorno all'asse x e $\Delta\phi_2 = 90°$ attorno all'asse z. (b) Scambiando l'ordine delle rotazioni la posizione finale del libro risulta diversa. (c) Il libro viene ruotato come al punto (a) ma con spostamenti angolari più piccoli: $\Delta\phi_1 = 20°$ attorno all'asse x e $\Delta\phi_2 = 20°$ attorno all'asse z. (d) Scambiando l'ordine delle rotazioni si ottiene una posizione finale diversa ma abbastanza simile a quella ottenuta al punto (c).

La situazione cambia se si considerano spostamenti più piccoli: in Figura 8.5c e 8.5d sono descritte le stesse rotazioni discusse in precedenza con spostamenti angolari di 20°. Le posizioni finali sono diverse, ma molto prossime. Quanto più piccoli sono gli spostamenti angolari tanto più vicine saranno le posizioni finali del libro. In caso di spostamenti angolari infinitesimi le posizioni finali dell'oggetto risultano coincidenti e quindi l'ordine con cui vengono effettuate le rotazioni non incide sulla posizione finale dell'oggetto stesso; più concisamente, $\mathbf{d\phi_1} + \mathbf{d\phi_2} = \mathbf{d\phi_2} + \mathbf{d\phi_1}$. In conclusione *gli spostamenti angolari infinitesimi possono essere rappresentati da vettori.*

 ISBN 88-408-1254-7

Tutte le grandezze fisiche che possono essere definite a partire dagli spostamenti infinitesimi hanno natura vettoriale; per esempio si può definire la velocità angolare $\omega = \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$. Dal momento che $\mathrm{d}\phi$ è un vettore e $\mathrm{d}t$ è uno scalare il loro rapporto ω è una grandezza vettoriale. La *velocità angolare può essere quindi rappresentata mediante un vettore*. In Figura 8.6a, per esempio, la freccia disegnata lungo l'asse di rotazione rappresenta il vettore velocità angolare ω associato al moto di pura rotazione di un corpo rigido. In Figura 8.6b in modo analogo viene rappresentato il vettore velocità angolare del moto circolare di una particella P. La lunghezza della freccia è proporzionale all'intensità della velocità angolare, mentre il verso della rotazione determina il verso in cui punta il vettore. Per convenzione si usa la regola della mano destra: se le dita della mano destra si chiudono attorno all'asse nel verso della rotazione del corpo, allora il pollice teso indica il verso del vettore velocità angolare (Figura 8.6c). Nel caso della ruota della cyclette rappresentata in Figura 8.1, se l'atleta pedala in avanti il vettore velocità angolare risulta ortogonale alla pagina del libro ed entrante (verso negativo dell'asse z). In Figura 8.3b, invece, il vettore ω è perpendicolare alla pagina del libro e uscente – situazione corrispondente a una rotazione antioraria. Si vuole sottolineare che il moto rotatorio del corpo non avviene nella direzione del vettore velocità angolare; tale direzione, in realtà, è ortogonale al piano su cui si svolge la rotazione.

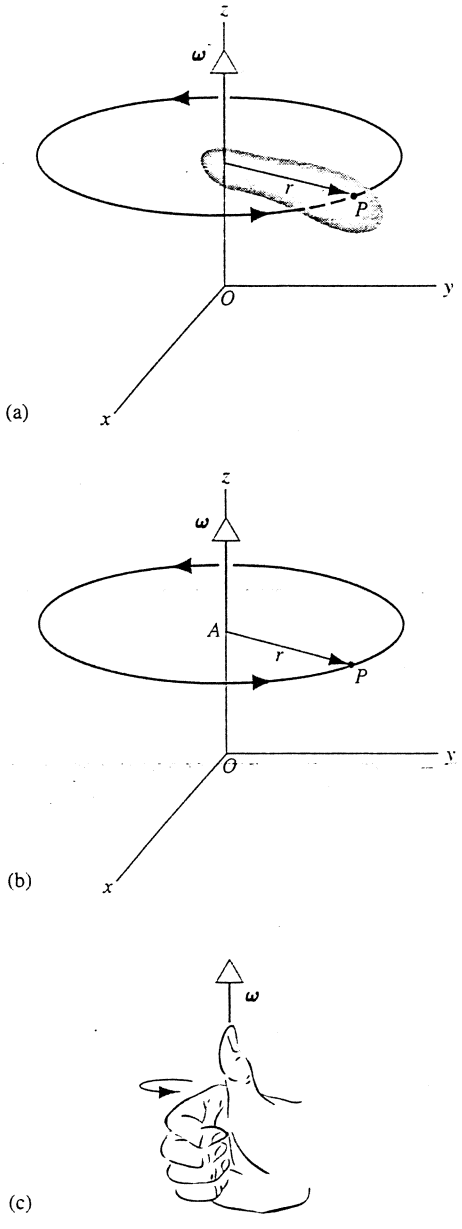


FIGURA 8.6 Il vettore velocità angolare di (a) un corpo rigido in moto puramente rotatorio e (b) una particella in moto circolare attorno allo stesso asse. (c) Il verso del vettore velocità angolare può essere determinato mediante la regola della mano destra.

Anche l'accelerazione angolare è una quantità vettoriale che può essere definita nel modo seguente: $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$, ove $\mathrm{d}\omega$ è un vettore e $\mathrm{d}t$ uno scalare. In seguito si incontreranno altre grandezze fisiche rotazionali di natura vettoriale, per esempio il momento torcente e il momento angolare (momento della quantità di moto). L'uso della regola della mano destra per definire il verso delle grandezze $\mathrm{d}\phi$, ω e α conduce a un formalismo vettoriale coerente per tutte le grandezze associate al moto rotatorio.

8.4 ROTAZIONE CON ACCELERAZIONE ANGOLARE COSTANTE

Nel caso di moti traslatori di un particella o di un corpo rigido lungo una direzione fissata, per esempio l'asse x, si è visto nel Capitolo 2 che la situazione più semplice è quella in cui l'accelerazione a_x è nulla. Un caso leggermente più complicato è quello in cui l'accelerazione è costante e diversa da zero; per tale situazione sono state presentate le Equazioni 2.26 e 2.28 che forniscono la posizione e la velocità della particella in funzione del tempo.

In modo analogo, per un moto rotatorio puro di un corpo rigido attorno a un asse fisso, che supponiamo essere l'asse z, il caso più semplice è quello in cui l'accelerazione angolare α_z è nulla (per esempio si pensi al moto circolare uniforme). La situazione diventa un po' più complicata se si suppone che l'accelerazione sia non nulla ma costante; questo caso corrisponde a quello uniformemente accelerato discusso per i moti traslatori. Come nel caso traslatorio, è possibile determinare in funzione del tempo lo spostamento angolare ϕ e la velocità angolare ω. Tali funzioni possono essere ricavate ragionando come nel caso traslatorio o più semplicemente sostituendo nelle corrispondenti equazioni relative al moto traslatorio le opportune grandezze angolari.

In primo luogo mostriamo come si possa determinare la velocità angolare ω_z in funzione del tempo. L'Equa-

zione 8.5 può essere riscritta nel modo seguente:

$$d\omega_z = \alpha_z dt.$$

Integrando a sinistra da ω_{0z}, velocità angolare all'istante zero, a ω_z, velocità angolare all'istante t, e a destra da 0 a t, si ha

$$\int_{\omega_{0z}}^{\omega_z} d\omega_z = \int_0^t \alpha_z \, dt = \alpha_z \int_0^t dt,$$

ove nell'ultimo passaggio è stato possibile portare l'accelerazione angolare fuori dal segno di intergrale perché tale accelerazione è stata supposta indipendente dal tempo (costante). Procendendo nei calcoli si ottiene

$$\omega_z - \omega_{0z} = \alpha_z t,$$

ovvero

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t. \tag{8.6}$$

L'equazione precedente è l'analogo per i moti rotatori dell'Equazione 2.26, $v_x = v_{0x} + a_x t$. Si osserva che l'equazione valida per il moto rotatorio può essere ottenuta dalla corrispondente equazione relativa al moto traslatorio sostituendo in essa v_x con ω_z e a_x con α_z.

Se si introduce, ora, $\omega_z = d\phi/dt$ nell'Equazione 8.6 e si integra nuovamente rispetto al tempo si ottiene la funzione spostamento angolare nel caso di accelerazione angolare costante:

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_0^t (\omega_{0z} + \alpha_z t) \, dt,$$

ovvero

$$\phi = \phi_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2, \tag{8.7}$$

che è del tutto simile alla corrispondente Equazione 2.28, che descrive il moto traslatorio uniformemente accelerato, $x = x_0 + v_{0x} t + a_x t^2/2$.

Il verso positivo di ω_z e α_z dipende dal comportamento di ϕ; dall'Equazione 8.3 si evince che ω_z risulta positivo se ϕ è una funzione crescente del tempo, ovvero se il corpo ruota in senso antiorario. Similmente, dall'Equazione 8.5 si ha che α_z è positivo se ω_z è una funzione crescente del tempo, indipendentemente dal segno di ω_z. Queste convenzioni sono del tutto analoghe a quelle osservate nel caso dei moti traslatori. Si noti, inoltre, che attribuire segno positivo alla velocità angolare ω_z qualora lo spostamento angolare ϕ sia crescente è una convenzione coerente con la regola della mano destra (Figura 8.3b): se le dita della mano destra si piegano nel verso delle ϕ crescenti, il pollice punta in verso uscente dalla pagina, ovvero nel verso positivo dell'asse z, indicando che ω_z è una quantità positiva.

Il moto circolare di una particella (ovvero rotatorio di un corpo rigido) *attorno a un asse fisso* ha una corrispondenza formale con il moto traslatorio di una particella (o di un corpo rigido) *lungo un asse fisso*. Le variabili cinematiche ϕ, ω_z e α_z del moto rotatorio corrispondono alle variabili x, v_x e a_x del moto traslatorio. La corrispondenza è binaria: ϕ corrisponde a x, ω_z a v_x e α_z a a_x. È interessante osservare che le grandezze angolari differiscono dimensionalmente di una lunghezza dalle corrispondenti grandezze lineari. Si nota, infine, che le sei grandezze cinematiche considerate possono essere pensate come componenti di un vettore lungo una direzione opportuna. Per esempio se una particella si muove in linea retta il verso del moto può essere in avanti o all'indietro e a queste due situazioni corrispondono il segno positivo e negativo della velocità v_x; analogamente un corpo rigido in moto rotatorio attorno a un asse fisso può muoversi in uno dei due versi possibili, e a tali versi corrisponde il segno positivo o negativo della velocità angolare ω_z.

Nel caso di moto traslatorio, se si rimuove il vincolo di moto rettilineo e si considera il generico moto di una particella lungo una curva nello spazio tridimensionale, le tre grandezze x, v_x e a_x vanno sostituite con i vettori $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$. Nel Paragrafo 8.5 si mostrerà in che senso le grandezze angolari rivelano il loro carattere vettoriale quando si rimuove il vincolo di asse fisso.

PROBLEMA SVOLTO 8.3 Una macina a riposo all'istante $t = 0$ viene messa in moto con accelerazione angolare costante di 3,2 rad/s^2. All'istante $t = 0$ la linea di riferimento AB illustrata in Figura 8.7 è in posizione orizzontale. Si determini (a) lo spostamento angolare della linea AB, e quindi dell'intera macina, e (b) la velocità angolare di quest'ultima dopo 2,7 s.

Soluzione (a) Si sceglie il sistema di riferimento in modo tale che il vettore $\boldsymbol{\omega}$ risulti parallelo e concorde con l'asse z; con questa scelta la rotazione della macina avviene nel piano xy.

All'istante $t = 0$ si ha $\phi_0 = 0$, $\omega_{0z} = 0$ e $\alpha_z = 3{,}2$ rad/s^2. Usando l'Equazione 8.7, si ha che dopo 2,7 s

$$\phi = \phi_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 =$$
$$= 0 + (0)(2{,}7 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3{,}2 \text{ rad/s}^2)(2{,}7 \text{ s})^2 =$$
$$= 11{,}7 \text{ rad} = 1{,}9 \text{ giri}.$$

(b) Dall'Equazione 8.6 si ottiene

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t =$$
$$= 0 + (3{,}2 \text{ rad/s}^2)(2{,}7 \text{ s}) =$$
$$= 8{,}6 \text{ rad/s} = 1{,}4 \text{ giri/s}.$$

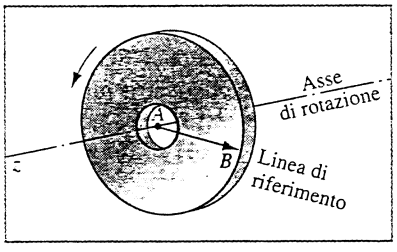


FIGURA 8.7 Problema svolto 8.3. La linea di riferimento AB è orizzontale all'istante $t = 0$ e ruota solidalmente alla macina nel piano xy.

 ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMA SVOLTO 8.4 Si supponga di spegnere il motore della macina di cui al Problema svolto 8.3 quando questa ha velocità angolare pari a 8,6 rad/s. Una piccola forza resistiva sull'albero della macina causa il rallentamento del suo moto rotatorio con accelerazione costante fino al suo arresto definitivo dopo 192 s. Si determini (a) l'accelerazione angolare e (b) lo spostamento angolare complessivo della macina durante la fase di rallentamento.

Soluzione (a) Sapendo che $\omega_{0z} = 8{,}6$ rad/s, $\omega_z = 0$ e $t = 192$ s, l'Equazione 8.6 permette di calcolare l'accelerazione costante:

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t} = \frac{0 - 8{,}6 \text{ rad/s}}{192 \text{ s}} = -0{,}045 \text{ rad/s}^2.$$

Il segno negativo dell'accelerazione è dovuto al fatto che la velocità angolare, che è positiva, decresce in modulo.

(b) Dall'Equazione 8.7 si ha

$$\phi = \phi_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 =$$
$$= 0 + (8{,}6 \text{ rad/s})(192 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-0{,}045 \text{ rad/s}^2)(192 \text{ s})^2 =$$
$$= 822 \text{ rad} = 131 \text{ giri}.$$

8.5 RELAZIONI TRA VARIABILI LINEARI E ANGOLARI

Nel Paragrafo 4.5 sono stati introdotti i concetti di velocità e accelerazione lineare per una particella in moto circolare. Se un corpo rigido si muove di moto puramente rotatorio tutti i suoi elementi descrivono un moto circolare attorno all'asse di rotazione; per la descrizione di tali moti si possono usare sia le grandezze cinematiche lineari sia quelle angolari. Opportune relazioni tra queste classi di osservabili permettono di passare da una descrizione all'altra senza alcuna difficoltà.

Sia P un elemento di un corpo rigido in moto puramente rotatorio, sia r la sua distanza dall'asse di rotazione e A la sua proiezione ortogonale sull'asse stesso (Figura 8.3a). L'elemento P si muove di moto circolare; la posizione angolare ϕ della linea di riferimento AP è misurata rispetto agli assi x e x'; si veda la Figura 8.3b. Se il corpo ruota di un angolo ϕ, l'elemento P descrive un arco di circonferenza di lunghezza

$$s = \phi r, \tag{8.8}$$

con l'angolo ϕ misurato in radianti.

Derivando rispetto al tempo i due membri dell'equazione precedente e ricordando che il raggio r è costante, si ha

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt} r.$$

Osservando che ds/dt è uguale alla componente tangenziale v_T della velocità lineare dell'elemento e $d\phi/dt$ alla velocità angolare ω del corpo rigido si ha che

$$v_T = \omega r. \tag{8.9}$$

La relazione precedente lega le *intensità* della velocità lineare e di quella angolare dell'elemento P; l'intensità della velocità lineare è uguale alla velocità angolare moltiplicata per la distanza r dell'elemento dall'asse di rotazione.

Derivando i due membri dell'Equazione 8.9 rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{dv_T}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$

Osservando che dv_T/dt è uguale alla componente tangenziale a_T dell'accelerazione lineare dell'elemento P (Paragrafo 8.6) e $d\omega/dt$ all'accelerazione angolare α del corpo rigido si ha che

$$a_T = \alpha r. \tag{8.10}$$

In altri termini, la componente tangente alla traiettoria dell'accelerazione lineare dell'elemento P in moto circolare è uguale alla velocità angolare moltiplicata per la distanza r dell'elemento dall'asse di rotazione.

Nel Paragrafo 4.5 è stato dimostrato che la componente *radiale* (centripeta) a_R dell'accelerazione di una particella in moto circolare è pari a v_T^2/r. Questa relazione può essere scritta anche in funzione della velocità angolare; dall'Equazione 8.9 si ottiene, infatti,

$$a_R = \frac{v_T^2}{r} = \omega^2 r. \tag{8.11}$$

Il vettore accelerazione $\boldsymbol{a}$ risultante è illustrato in Figura 8.8.

Le Equazioni dalla 8.8 alla 8.11 permettono di descrivere il moto di un elemento di un corpo rigido in moto rotatorio attorno a un asse fisso sia in termini delle variabili lineari sia in termini di quelle angolari. Risulta naturale chiedersi per quale ragione siano state introdotte le osservabili angolari se la descrizione del moto può essere effettuata equivalentemente con quelle lineari. La grande utilità delle variabili angolari emerge chiaramente quando è necessario descrivere il moto di più elementi dello stesso corpo rigido. Due elementi di uno stesso corpo rigido in moto rotatorio a distanza diversa dall'asse di rotazione hanno, infatti, spostamento, velocità e accelerazione *lineari* differenti, pur avendo mede-

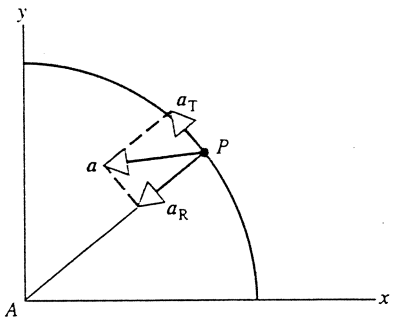


FIGURA 8.8 Componente radiale e componente tangenziale dell'accelerazione di un elemento P di un corpo rigido in moto rotatorio puro attorno all'asse z.

simi spostamento, velocità e accelerazione *angolari* a ogni istante di tempo. Per questa ragione le variabili angolari forniscono una descrizione semplice del moto dell'intero corpo rigido.

Un esempio interessante della relazione esistente tra velocità angolare e lineare è illustrato in Figura 8.9. Una ciminiera molto alta, che cade per opera di una carica esplosiva che ne distrugge le fondamenta, si spezza solitamente prima di giungere a terra; la frattura si propaga a partire dalla parte più vicina al suolo.

Prima della rottura la ciminiera è di fatto un corpo rigido in rotazione con una certa accelerazione angolare α attorno a un asse prossimo alla base. Dall'Equazione 8.10 segue che il culmine della ciminiera ha accelerazione tangenziale a_T pari ad αL, ove L è la lunghezza della ciminiera. Per L abbastanza grande può accadere che la componente verticale dell'accelerazione tangenziale risulti più grande dell'accelerazione di gravità g; in altri termini può accadere che la punta della ciminiera cada con accelerazione superiore a quella di un mattone in caduta libera.

Questa situazione può realizzarsi fintanto che la ciminiera si muove rigidamente. Un'accelerazione superiore a quella dovuta alla gravità può essere giustificata con forze di reazione che la base esercita sulla ciminiera e che tendono a tirare verso il basso l'estremità della ciminiera stessa. Può accadere, però, che la struttura non sia sufficientemente resistente per sostenere tali sforzi e ciò giustifica la rottura della ciminiera. Dopo la rottura la ciminiera si spezza in due e la parte superiore cade liberamente sotto l'azione della gravità, giungendo al suolo più lentamente rispetto al tempo che avrebbe impiegato se la ciminiera non si fosse rotta.

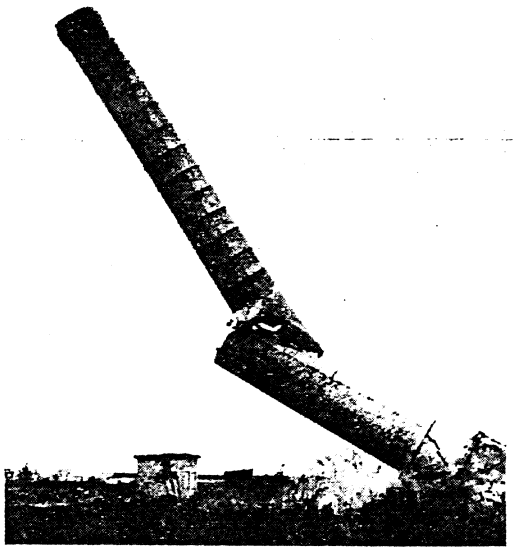


FIGURA 8.9 Solitamente una ciminiera non è abbastanza solida per reggere gli sforzi necessari a fornire alle sue estremità le opportune accelerazioni tangenziali durante la caduta a terra, che avviene con una rotazione rigida attorno a un asse passante per la base.

PROBLEMA SVOLTO 8.5 Si supponga che il raggio della macina considerata nel Problema svolto 8.3 sia 0.24 m; si calcoli (a) la velocità tangenziale di un elemento sul bordo, (b) l'accelerazione tangenziale di un elemento sul bordo e (c) l'accelerazione radiale di un elemento sul bordo all'istante $t = 2{,}7$ s. (d) Si risponda alle stesse domande per un elemento a distanza 0,12 m dall'asse della macina.

Soluzione Si ha $\alpha = 3.2\ \text{rad/s}^2$, $\omega = 8{,}6\ \text{rad/s}$ dopo 2,7 s ed $r = 0.24$ m. Allora

(a) $v_T = \omega r = (8{,}6\ \text{rad/s})(0{,}24\ \text{m}) = 2{,}1\ \text{m/s}$.

(b) $a_T = \alpha r = (3{,}2\ \text{rad/s}^2)(0.24\ \text{m}) = 0{,}77\ \text{m/s}^2$.

(c) $a_R = \omega^2 r = (8{,}6\ \text{rad/s})^2(0{,}24\ \text{m}) = 18\ \text{m/s}^2$.

(d) Le grandezze angolari sono le stesse per un elemento sul bordo e uno a distanza $r = 0{,}12$ m dall'asse; pertanto $\alpha = 3{,}2\ \text{rad/s}^2$ e $\omega = 8{,}6$ rad/s. Usando le Equazioni 8.9, 8.10 e 8.11 con $r = 0{,}12$ m si ha

$$v_T = 1{,}0\ \text{m/s}, \quad a_T = 0{,}38\ \text{m/s}^2, \quad a_R = 8{,}9\ \text{m/s}^2.$$

Si osserva che tutte queste grandezze sono uguali alla metà di quelle corrispondenti calcolate per un elemento sul bordo. Le grandezze lineari dipendono in modo direttamente proporzionale dalla distanza degli elementi dall'asse di rotazione.

Si osserva, ancora una volta, che nelle equazioni che contengono solo grandezze angolari si possono scegliere indifferentemente le unità di misura – gradi, radianti o numero di giri – purché le scelte siano coerenti. D'altro canto nelle Equazioni, come quelle dalla 8.8 alla 8.11, in cui le grandezze angolari sono presenti assieme a quelle lineari, è necessario esprimere le prime in radianti, come è stato fatto nella soluzione di questo problema. Tale scelta è inevitabile perché le Equazioni dalla 8.9 alla 8.11 si basano tutte sulla (8.8) che altro non è se non la definizione di radiante.

PROBLEMA SVOLTO 8.6 Una pulsar è una stella di neutroni in rapida rotazione su se stessa, risultato del collasso di una stella ordinaria che ha terminato il suo carburante. Le pulsar emettono luce e altra radiazione elettromagnetica in un fascio sottile che può investire la Terra una volta per ogni rotazione della stella. Si consideri una pulsar con periodo di rotazione $T = 0{,}033$ s e raggio $r = 15$ km. Si calcoli la velocità tangenziale di un punto sul suo equatore.

Soluzione La velocità angolare è data da

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ \text{rad}}{0{,}033\ \text{s}} = 190\ \text{rad/s}$$

e la velocità tangenziale cercata è data da

$$v_T = \omega r = (190\ \text{rad/s})(15\ \text{km}) = 2900\ \text{km/s}.$$

è interessante osservare che la velocità tangenziale è dell'ordine di un centesimo della velocità della luce e circa quattro ordini di grandezza più grande della velocità tangenziale di un elemento sull'equatore terrestre.

8.6 RELAZIONI VETTORIALI TRA VARIABILI LINEARI E ANGOLARI (facoltativo)

Nel paragrafo precedente sono state derivate le relazioni che legano la velocità angolare ω e quella tangenziale v_T, l'accelerazione angolare α e le accelerazioni tangenziale a_T e radiale a_R. Tutte queste grandezze sono di natura vetto-

 ISBN 88-408-1254-7

riale e in questo paragrafo verranno discusse le relazioni vettoriali che le legano.

Nei capitoli precedenti è risultato spesso utile esprimere i vettori mediante le loro componenti rispetto ai versori; nel caso dei riferimenti cartesiani sono stati introdotti i versori i, j e k corrispondenti ai tre assi cartesiani x, y e z (Appendice H). Nell'analisi dei moti rotatori è utile introdurre due nuovi versori che individuino la direzione radiale e quella tangenziale. Si consideri la rotazione illustrata in Figura 8.3 e si fissi l'attenzione su un elemento, denotato con P, del corpo rigido. Tale elemento si muove di moto circolare nel piano xy, quindi la sua velocità tangenziale ha componenti non nulle soltanto lungo gli assi x e y. Come è stato già osservato, la sua velocità angolare è parallela all'asse z.

L'elemento P in moto circolare e i corrispondenti versori radiale e tangenziale, u_r e u_ϕ, sono illustrati in Figura 8.10a. Il versore radiale u_r è orientato nel verso di r crescente, ovvero punta radialmente dal centro della circonferenza verso l'esterno. Il versore tangenziale u_ϕ è orientato nel verso di ϕ crescente, ovvero è tangente alla circonferenza nel punto P ed è orientato in verso antiorario. Così come i versori i e j, anche i versori u_r e u_ϕ sono adimensionali, di lunghezza unitaria e mutuamente ortogonali. A differenza di quanto accade per i e j, invece, le direzioni di u_r e u_ϕ cambiano durante il moto dell'elemento P lungo la circonferenza. Quando si derivano espressioni contenenti i versori u_r e u_ϕ è necessario calcolare la derivata dei due versori tenendo in conto la variazione della loro direzione; i versori i e j, invece, possono essere considerati costanti quando si esegue l'operazione di derivazione rispetto al tempo.

È facile esprimere i versori u_r e u_ϕ in funzione di i e j osservando la costruzione riportata in Figura 8.10b:

$$u_r = (\cos\phi)\,i + (\sin\phi)\,j \tag{8.12a}$$

$$u_\phi = -(\sin\phi)\,i + (\cos\phi)\,j. \tag{8.12b}$$

La velocità dell'elemento ha soltanto componente tangenziale diversa da zero, quindi può essere scritta come il suo modulo per il versore tangenziale:

$$v = v_T u_\phi. \tag{8.13}$$

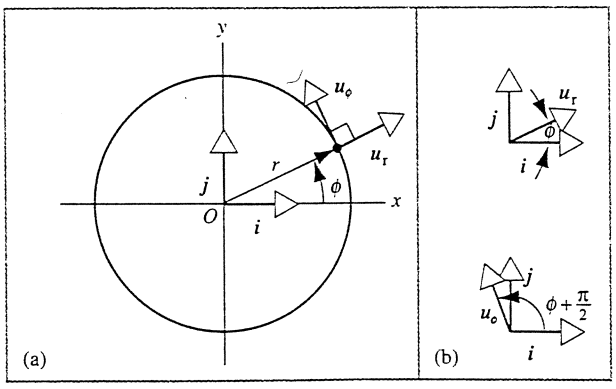


FIGURA 8.10 (a) Particella in moto antiorario su una circonferenza di raggio r. (b) Relazione tra i versori u_r e u_ϕ e i versori i e j.

Va osservato, però, che, a causa di un'eventuale accelerazione angolare non nulla del corpo rigido, la velocità tangenziale dell'elemento può risultare dipendente dal tempo.

Per il calcolo dell'accelerazione a si procede come al solito derivando la velocità:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_T u_\phi) = \frac{dv_T}{dt}u_\phi + v_T\frac{du_\phi}{dt}. \tag{8.14}$$

La derivata dv_T/dt nel primo addendo dell'ultimo membro è l'accelerazione tangenziale a_T; invece, per calcolare il secondo addendo, è necessario trovare una strategia che permetta di calcolare la derivata del versore tangenziale. Usando l'Equazione 8.12b si ha

$$\frac{du_\phi}{dt} = -\frac{d\sin\phi}{dt}i + \frac{d\cos\phi}{dt}j. \tag{8.15}$$

Ora, $d\sin\phi/dt = \cos\phi\, d\phi/dt = \omega\cos\phi$ ove, come si deduce dall'Equazione 8.3, $\omega = d\phi/dt$. Analogamente, $d\cos\phi/dt = -\omega\sin\phi$. Sostituendo le espressioni appena trovate nell'Equazione 8.15, con alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$\frac{du_\phi}{dt} = -\omega[(\cos\phi)\,i + (\sin\phi)j] = -\omega u_r, \tag{8.16}$$

ove nell'ultimo passaggio è stata usata l'Equazione 8.12a. L'Equazione 8.14 può essere, infine, riscritta nel modo seguente

$$a = a_T u_\phi - v_T\omega u_r. \tag{8.17}$$

Il primo addendo del secondo membro dell'Equazione 8.17, $a_T = a_T u_\phi$, è detto accelerazione tangenziale ed è un vettore di intensità a_T nella direzione del versore tangente che, si ricorda, è orientato nel verso di ϕ crescente. Il secondo termine, inoltre, può essere scritto in modo istruttivo usando l'Equazione 8.11: $-v_T\omega u_r = -v_T(v_T/r)u_r = -(v_T^2/r)u_r$. La quantità v_T^2/r, in virtù dell'Equazione 8.11, è la cosiddetta accelerazione centripeta o radiale. In forma vettoriale l'accelerazione centripeta è scritta come $a_R = -a_R u_r$, ove il segno meno segnala che tale vettore è orientato nel verso decrescente di r, ovvero verso il centro della circonferenza. Usando le espressioni appena determinate per a_T e a_R, l'Equazione 8.17 può essere scritta come segue

$$a = a_T + a_R. \tag{8.18}$$

I tre vettori accelerazione che appaiono nell'Equazione 8.18 sono illustrati in Figura 8.8.

Vettori ω e a

Le relazioni tra i vettori angolari ω e α e i corrispondenti vettori lineari v e a possono essere scritte in forma compatta usando la nozione di *prodotto vettoriale*, per la cui definizione si rimanda all'Appendice H. Il prodotto vettoriale di

due vettori A e B è un terzo vettore C e si scrive $C = A \times B$, che gode delle seguenti proprietà: (1) l'intensità di C è uguale ad $AB \sin\theta$, ove A è il modulo di A, B quello di B e θ è l'angolo compreso tra i vettori A e B; (2) il vettore C è perpendicolare al piano individuato dai due vettori A e B e il suo verso è dato dalla regola della mano destra (Appendice H).

In Figura 8.11a è riportato un elemento P del corpo rigido in rotazione attorno all'asse z, assieme ai vettori ω e v che rappresentano, rispettivamente, la velocità angolare e quella tangenziale dell'elemento. Il vettore R individua la posizione dell'elemento rispetto all'origine di un sistema di riferimento cartesiano xyz; l'elemento P si muove lungo una circonferenza di raggio $r = R \sin\theta$, ove R è il modulo del vettore posizione R.

Si consideri, ora, il prodotto vettoriale $\omega \times R$: in accordo con la sua definizione tale vettore ha intensità $\omega R \sin\theta = \omega r$; la sua intensità è, quindi, uguale a quella della velocità tangenziale (Equazione 8.9). In Figura 8.11, inoltre, si dimostra che la direzione e il verso del prodotto vettoriale sono uguali a quelli della velocità v: ruotando le dita della mano destra da ω verso R di un angolo pari a θ, il pollice esteso ha lo stesso verso di v. Si è dimostrato, in definitiva, che il modulo, la direzione e il verso del prodotto vettoriale $\omega \times R$ sono uguali a quelli del vettore v e allora si può scrivere

$$v = \omega \times R. \tag{8.19}$$

L'equazione precedente è la versione vettoriale della già nota Equazione 8.9.

Si vuole ora esprimere l'accelerazione dell'elemento in termini delle osservabili angolari; la strategia di calcolo consiste nel derivare l'Equazione 8.19. Nel calcolo della derivata di un prodotto vettoriale è importante preservare l'ordine in cui i vettori vengono moltiplicati; si ricorda, infatti, che $A \times B = -B \times A$. Applicando la regola di derivazione di un prodotto si ha

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega \times R) = \frac{d\omega}{dt} \times R + \omega \times \frac{dR}{dt}. \tag{8.20}$$

Si osservi che in entrambi i termini dell'ultimo membro il vettore ω appare prima di R e si è quindi conservato l'ordine di moltiplicazione dei vettori ω e R.

Fissiamo, ora, l'attenzione sul primo termine dell'ultimo membro dell'Equazione 8.20. Così come l'uguaglianza lineare $a = dv/dt$, anche l'uguaglianza angolare $\alpha = d\omega/dt$ espressa dall'Equazione 8.5 vale per ciascuna componente dei vettori α e ω, ciò che conduce all'uguaglianza vettoriale $\alpha = d\omega/dt$. Nell'ultimo termine dell'Equazione 8.20, inoltre, la derivata dR/dt è proprio la velocità v dell'elemento. Sostituendo le espressioni appena ottenute nella (8.20) si ha

$$a = \alpha \times R + \omega \times v. \tag{8.21}$$

Usando la definizione di prodotto vettoriale si ha che il modulo del primo termine $\alpha \times R$ è dato da $\alpha R \sin\theta = \alpha r$, ovvero dall'accelerazione tangenziale a_T (Equazione 8.10). Al fine di determinare la direzione di tale prodotto si osserva che $\alpha = d\omega/dt$ implica che il vettore α ha la stessa direzione del vettore infinitesimo $d\omega$. Dal momento che l'asse di rotazione è fisso, il vettore ω si mantiene in ogni istante parallelo all'asse di rotazione, quindi anche le sue variazioni elementari godranno di questa proprietà. In conclusione α è parallelo a ω e all'asse di rotazione z illustrato in Figura 8.11b. In virtù della regola della mano destra, inoltre, si ha che il prodotto $\alpha \times R$ è un vettore tangente alla circonferenza lungo cui si muove l'elemento P nel punto occupato da tale elemento all'istante considerato. Riassumendo, il prodotto $\alpha \times R$ ha stessi modulo, direzione e verso del vettore accelerazione tangenziale e quindi si può concludere che $\alpha \times R = a_T$.

Si considera, ora, il secondo termine $\omega \times v$ dell'ultimo membro dell'Equazione 8.21. Il suo modulo è uguale a ωv_T perché, come illustrato in Figura 8.11a, l'angolo tra i due vettori è di 90°. In base all'Equazione 8.9 si può scrivere $\omega v_T = \omega^2 r$ ottenendo, così, l'accelerazione centripeta (Equazione 8.11). Applicando, ora, la regola della mano destra come illustrato in Figura 8.11a, si ha che il prodotto vettoriale $\omega \times v$ è diretto radialmente da P verso il centro della circonferenza. In conclusione si ha che $\omega \times v = a_R$. Sostituendo le esressioni trovate, $\alpha \times R = a_T$ e $\omega \times v = a_R$, nell'Equazione 8.21 si perviene nuovamente all'Equazione 8.18.

In conclusione le Equazioni 8.19 e 8.21 costituiscono le relazioni vettoriali tra le variabili angolari e quelle lineari. L'eleganza di tali equazioni sta nel fatto che, pur nella loro compattezza, esse contengono informazioni relative sia ai moduli sia alle direzioni e ai versi dei vettori che vi appaiono.

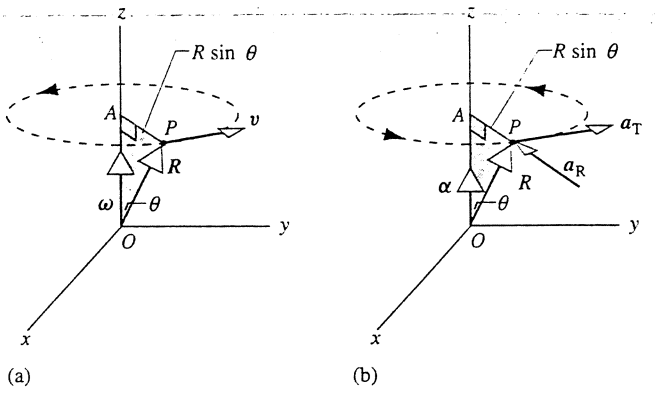


FIGURA 8.11 (a) L'elemento P del un corpo rigido in moto puramente rotatorio illustrato nella Figura 8.3a è individuato dal vettore R rispetto all'origine O. L'elemento ha velocità angolare ω, parallela all'asse z, e velocità tangenziale v. (b) L'elemento P ha accelerazione angolare α, parallela all'asse z, accelerazione tangenziale a_T e accelerazione radiale a_R.

 ISBN 88-408-1254-7

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

8.1 Moto rotatorio

1. Si consideri un mappamondo in grado di ruotare attorno all'asse polare e attorno a un asse orizzontale (con rotazioni di questo tipo si possono scambiare le mutue posizioni occupate dai poli). Si supponga di porre in rapida rotazione il globo attorno all'asse polare e, prima del suo arresto, di imporgli anche una rotazione attorno all'asse orizzontale. Restano punti a riposo rispetto al riferimento del laboratorio?
   (A) Vi sono due punti solidali con il globo a riposo.
   (B) Vi sono due punti con velocità nulla in ogni istante rispetto al laboratorio ma in moto attorno al globo in modo apparentemente casuale.
   (C) Soltanto in alcuni istanti particolari è possibile determinare due punti a riposo rispetto al laboratorio.
   (D) Non vi sono punti a riposo durante il moto del mappamondo.
2. Una ruota di bicicletta rotola su una superficie orizzontale. In ogni istante la ruota
   (A) si muove di moto puramente rotatorio.
   (B) si muove di moto puramente traslatorio.
   (C) si muove di moto rototraslatorio.
   (D) si muove di un moto che può essere descritto come in (A) e in (B).
3. Si supponga di voler studiare i moti rigidi in dimensione diversa da tre. Quante coordinate sono necessarie per individuare la posizione di tutti gli elementi del corpo rigido
   (a) se lo spazio ha dimensione due?
   (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5.
   (b) se lo spazio ha dimensione uno?
   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3.
   (c) se lo spazio ha dimensione quattro?
   (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10.

8.2 Variabili rotazionali

8.3 Variabili rotazionali vettoriali

4. Quali sono la direzione e il verso della velocità angolare terrestre?
   (A) Direzione parallela all'asse polare e verso orientato a nord.
   (B) Direzione parallela all'asse polare e verso orientato a sud.
   (C) Direzione parallela all'asse polare e verso orientato a est.
   (D) Direzione parallela all'asse polare e verso orientato a ovest.

8.4 Rotazione con accelerazione angolare costante

5. Due dischi di raggi $r_1 > r_2$ possono ruotare liberamente e indipendentemente attorno a un asse passante per i due centri e ortogonale ai due dischi. I due dischi sono inizialmente a riposo e per lo stesso intervallo di tempo vengono sottoposti alla medesima accelerazione angolare. Quale dei due dischi avrà velocità angolare maggiore?
   (A) Il disco 1.
   (B) Il disco 2.
   (C) I due dischi hanno la stessa velocità angolare finale.
   (D) La risposta dipende dalla massa dei dischi.

8.5 Relazioni tra variabili lineari e angolari

6. Un disco viene accelerato in modo uniforme con accelerazione angolare α a partire dalla posizione di riposo. Il modulo dell'accelerazione lineare di un elemento del bordo del disco
   (a) per $\alpha t^2 \ll 1$ cresce con il tempo come
   (A) t (B) t^2 (C) t^3 (D) t^4.
   (b) e per $1 \ll \alpha t^2$ cresce con il tempo come
   (A) t (B) t^2 (C) t^3 (D) t^4.

8.6 Relazioni vettoriali tra variabili lineari e angolari

7. Un piccolo insetto di massa m è fermo rispetto a un piano rotante con velocità angolare ω in un punto individuato dal vettore r rispetto all'asse di rotazione del piano. Si consideri il vettore $m\omega \times (\omega \times r)$.
   (a) In che direzione è orientato tale vettore?
   (A) Verso l'asse di rotazione.
   (B) Radialmente verso l'esterno.
   (C) Lungo la tangente alla circonferenza tracciata dall'insetto durante il suo moto.
   (D) In direzione verticale.
   (b) Il vettore ha le stesse dimensioni
   (A) dell'accelerazione angolare.
   (B) della forza.
   (C) della quantità di moto.
   (D) del quadrato della velocità.
   (c) Denotato con v il modulo della velocità dell'insetto rispetto al riferimento del laboratorio, si ha che il modulo del vettore considerato è proporzionale a
   (A) mvr. (B) mr^2. (C) mv^2/r. (D) mr/v^2.
8. La forza di Coriolis (Paragrafo 5.6) è una forza apparente che è necessario introdurre nei sistemi di riferimento non inerziali come, per esempio, quelli solidali con il pianeta Terra. Nel caso del moto di una particella rispetto a un riferimento non inerziale terrestre, la forza di Coriolis è data da $-2m\omega \times v$ ove v è la velocità della particella nel riferimento terrestre e ω è la velocità angolare della Terra rispetto a un osservatore inerziale.
   (a) Un proiettile viene lanciato dall'equatore verso il polo nord. La forza di Coriolis agente sul proiettile è diretta verso
   (A) est. (B) ovest. (C) l'alto.
   (D) il basso. (E) La forza di Coriolis è nulla.
   (b) Un proiettile viene lanciato dall'equatore verso est. La forza di Coriolis agente sul proiettile punta verso
   (A) nord. (B) sud. (C) l'alto.
   (D) il basso. (E) La forza di Coriolis è nulla.
   (c) Un proiettile viene lanciato dall'equatore verticalmente verso l'alto. La forza di Coriolis agente sul proiettile è diretta verso
   (A) nord. (B) sud. (C) est.
   (D) ovest. (E) La forza di Coriolis è nulla.

Si veda anche l'Esercizio 34.

QUESITI

1. Nel Paragrafo 8.1 si è affermato che sono sufficienti sei coordinate per individuare la posizione di tutti gli elementi di un corpo rigido rispetto a un dato sistema di riferimento. Quante variabili sono necessarie per individuare la posizione del corpo illustrato in Figura 8.2 rispetto al riferimento xy in figura? Se tale numero è diverso da sei, si spieghi la ragione di tale differenza.
2. La rotazione del Sole può essere tenuta sotto controllo osservando il moto delle macchie solari, tempeste magnetiche che appaiono come macchie nere in contrasto con il disco solare luminoso. In Figura 8.12a è illustrata la posizione di cinque macchie solari a un certo istante e in Figura 8.12b la posizione delle stesse macchie dopo che il Sole ha compiuto una rotazione attorno al suo asse. Cosa si può dedurre, a partire da questa osservazione, sulle caratteristiche fisiche del Sole?

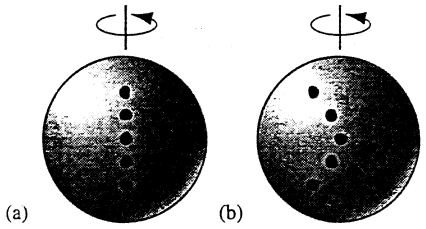


FIGURA 8.12 Quesito 2.

3. In che senso i radianti sono un'unità di misura naturale per gli angoli, mentre i gradi sono un'unità completamente arbitraria? Che vantaggi vi sono nell'uso dei radianti?
4. Le grandezze angolari ϕ, ω_z e α_z possono essere espresse in gradi, invece che in radianti, nelle Equazioni 8.6 e 8.7?
5. Un corpo rigido è libero di ruotare attorno a un asse fisso. È possibile che tale corpo abbia simultaneamente, magari anche in un solo istante, accelerazione angolare diversa da zero e velocità angolare nulla? Qual è l'equivalente lineare di questa circostanza? Si illustrino sia la situazione lineare sia quella angolare con esempi concreti.
6. Un giocatore di golf fa ruotare la sua mazza in modo da colpire la pallina per un lancio molto lungo. È vero che durante il moto tutti gli elementi della mazza hanno la medesima velocità angolare?
7. La velocità angolare di una ruota in rotazione attorno al suo asse è necessariamente parallela all'asse stesso? Ha senso pensare a tale vettore come a un vettore parallelo all'asse ma applicato in un punto non appartenente all'asse? Si ricordi che è possibile traslare un vettore spostamento lungo la sua stessa direzione o anche in direzione ad esso ortogonale senza modificarne il valore.
8. Si ripeta l'esperimento illustrato in Figura 8.5 ruotando il libro di 180° invece che di 90°. Cosa si può dire della posizione finale del libro? Il risultato di questo esperimento vi fa ripensare alla possibilità di rappresentare gli spostamenti angolari finiti come vettori?
9. Un cubetto è posto all'interno di un cubo più grande cavo come illustrato nella Figura 8.13. Ciascun vertice del cubo interno è fissato al corrispondente vertice del cubo esterno mediante un elastico; l'oggetto risultante è un esempio semplice di *spinore*. Si mostri che, se il cubo viene ruotato di 360°, gli elastici non possono essere sbrogliati, mentre ciò risulta possibile nel caso di una rotazione di 720°.

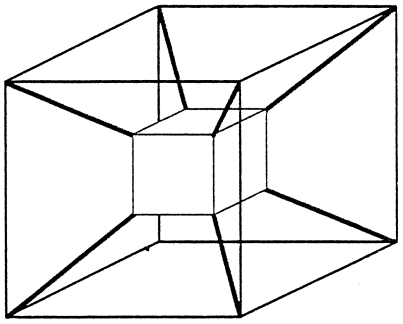


FIGURA 8.13 Quesito 9.

10. La relazione $\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 = \Delta\phi_2 + \Delta\phi_1$ è valida per due rotazioni attorno a diversi assi di rotazione? E per due diverse rotazioni attorno al medesimo asse?
11. Il pianeta Venere, una cui foto è riportata nella Figura 8.14, si muove lungo una traiettoria circolare attorno al Sole con periodo di rivoluzione di 225 giorni. Venere, inoltre, ruota attorno al proprio asse con periodo di rotazione di 243 giorni. L'asse di rotazione è ortogonale al piano dell'orbita, ma il verso della rotazione propria è opposto rispetto a quello del moto orbitale. (a) Si descriva il vettore velocità angolare della rotazione propria di Venere. (b) Si descriva il vettore velocità angolare associato alla rivoluzione del pianeta attorno al Sole. (c) Si descriva il vettore ottenuto sommando le due velocità angolari appena introdotte.

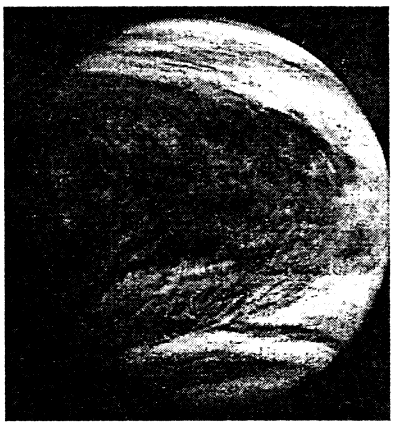


FIGURA 8.14 Quesito 11.

12. Un disco è libero di ruotare con velocità angolare variabile. Per un punto sul bordo del disco (a) può essere $a_T = 0$ se $a_R \neq 0$? (b) Può essere $a_R = 0$ se $a_T \neq 0$? (c) Può essere $a_T = 0$ se $a_R = 0$?
13. Per quale ragione nell'Equazione 8.7 è comodo esprimere l'accelerazione angolare in giri/s^2, mentre non è possibile farlo nell'Equazione 8.10?

 ISBN 88-408-1254-7

14. In quale sistema di riferimento il modulo della velocità angolare di un punto dell'equatore terrestre è uguale a 2π rad/d?
15. Se si considera sia il moto di rotazione sia quello di rivoluzione della Terra, un albero si muove più rapidamente di giorno o di notte? Rispetto a quale sistema di riferimento avete dato la risposta precedente? Si ricorda che la rotazione e la rivoluzione terrestre avvengono nello stesso verso.
16. Una ruota è posta in rotazione attorno al suo asse. Si consideri un elemento del suo bordo esterno. Se la ruota ha velocità angolare costante l'elemento ha accelerazione radiale non nulla? Ha accelerazione tangenziale non nulla? I moduli di queste accelerazioni variano o si mantengono costanti nel tempo?
17. Si vuole calcolare lo spazio percorso dalla puntina di un vecchio giradischi. Di quali informazioni si ha bisogno? Si discuta il problema dal punto di vista di un osservatore solidale (a) con il laboratorio, (b) con il disco, (c) con il braccio del giradischi.
18. Si determini la relazione esistente tra le velocità angolari di due ingranaggi accoppiati di raggio differente.

ESERCIZI

8.1 Moto rotatorio

1. Quante coordinate sono necessarie per assegnare la posizione e l'orientamento di un corpo rigido in uno spazio di dimensione n?

8.2 Variabili rotazionali

2. Si dimostri che 1 giro/min = 0,105 rad/s.
3. Nell'intervallo $[0, t]$ un volano ruota di un angolo

$$\phi = at + bt^3 - ct^4,$$

ove si suppongono a, b e c costanti. Si determini l'espressione (a) della velocità angolare e (b) dell'accelerazione angolare.
4. Il Sole dista $2{,}3 \cdot 10^4$ anni-luce dal centro della Via Lattea e si muove di moto circolare attorno a questo punto alla velocità di 250 km/s. (a) Quanto impiega il Sole per compiere una rivoluzione completa attorno al centro della Via Lattea? (b) Quante rivoluzioni ha compiuto il Sole a partire dalla sua formazione avvenuta circa $4{,}5 \cdot 10^9$ anni fa?
5. Una ruota è in moto rotatorio con accelerazione angolare

$$\alpha_z = 4at^3 - 3bt^2,$$

ove t è il tempo e a e b sono costanti. Denotata con ω_0 la velocità angolare all'istante 0 si determini (a) la velocità angolare e (b) lo spostamento angolare in funzione del tempo.
6. Si calcoli la velocità angolare della lancetta (a) dei secondi, (b) dei minuti e (c) delle ore in un orologio.
7. Un buon lanciatore può lanciare la palla da baseball alla velocità di 136 km/h ponendola in rotazione attorno a un suo asse alla velocità angolare di 1800 giri/min. Quanti giri compie la palla mentre percorre 18 m in linea retta?
8. Un tuffatore lanciatosi da una piattaforma posta all'altezza di 10 m, prima di toccare il pelo dell'acqua, compie 2,5 giri attorno a se stesso. Si calcoli la sua velocità angolare media assumendo che il tuffatore si sia lasciato cadere con componente verticale della velocità inizialmente nulla.
9. Una ruota ha sei raggi della lunghezza di 30 cm (Figura 8.15). La ruota è montata su un asse fisso e gira attorno a tale asse alla velocità di 2,5 giri/s. Si vuole sparare una freccia di 24 cm di lunghezza attraverso la ruota senza che urti uno dei suoi raggi. Si assuma che i raggi e la freccia siano di spessore trascurabile. (a) Qual è la velocità minima alla quale deve essere scagliata la freccia? (b) Fa differenza mirare un punto in prossimità dell'albero o in prossimità del bordo della ruota? In caso di risposta affermativa, qual è la scelta migliore?

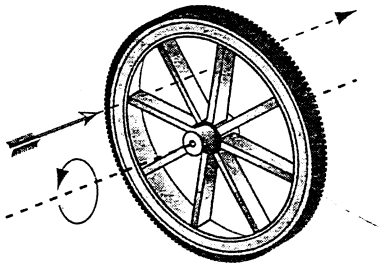


FIGURA 8.15 Esercizio 9.

8.3 Variabili rotazionali vettoriali

10. Un pianeta P si muove attorno al Sole lungo un'orbita circolare complanare e concentrica con l'orbita che la Terra (T) descrive attorno al Sole. La rivoluzione dei due pianeti avviene nello stesso verso e i periodi di rivoluzione vengono denotati con T_P e T_T. Sia T_S il tempo in cui P compie una rivoluzione attorno al Sole relativamente a T. Si dimostri che $1/T_S = 1/T_T - 1/T_P$. Si assuma $T_P > T_T$.
11. Nella stessa situazione fisica descritta nell'esercizio precedente si determini la relazione tra i tre periodi, qualora si assuma $T_P < T_T$.

8.4 Rotazione con accelerazione angolare costante

12. Un giradischi in rotazione alla velocità di 78 giri/min rallenta e si arresta in 32 s se il motore viene spento. (a) Si determini la sua accelerazione angolare costante e la si esprima in giri/min^2. (b) Si calcoli il numero di giri compiuti dal disco a partire dall'istante in cui il motore viene spento.
13. La velocità angolare del motore di un'autovettura viene aumentata da 1170 giri/min a 2880 giri/min nell'arco di 12,6 s. (a) Si determini l'accelerazione angolare, supposta costante, e la si esprima in giri/min^2. (b) Si calcoli il numero di giri compiuti dal motore in questo intervallo.

14. Nell'ambito del programma di manutenzione, il motore di un jet viene fatto ruotare secondo i parametri riportati nel grafico di Figura 8.16. Si calcoli il numero di giri compiuti dal motore durante il test.

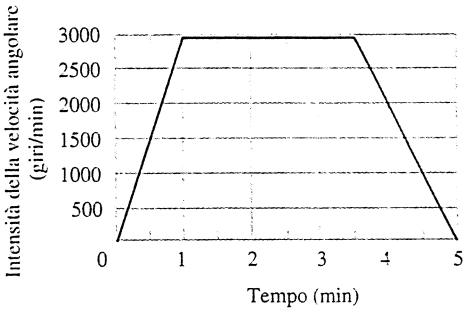


FIGURA 8.16 Esercizio 14.

15. Il volano di un motore ruota alla velocità di 25,2 rad/s. Spento il motore, il volano rallenta con accelerazione costante e si arresta in 19,7 s. Si calcoli (a) l'accelerazione angolare in rad/s^2, (b) l'angolo (in radianti) di cui ruota il volano e (c) il numero di giri compiuti dal volano nella nella fase di rallentamento.
16. Si osserva che la velocità angolare delle pale di un elicottero passa da 315 giri/min a 255 giri/min in 1,00 min. (a) Si determini l'accelerazione angolare media in questo intervallo. (b) Assumendo che in seguito il moto delle pale prosegua ad accelerazione angolare costante pari a questo valore medio, si determini il tempo necessario per l'arresto delle pale. (c) Si calcoli il numero di giri compiuti dalle pale nella fase d'arresto a partire dall'istante in cui la velocità angolare vale 255 giri/min.
17. Una ruota compie 90 giri in 15 s e alla fine di questo intervallo di tempo ha velocità angolare 10 giri/s. (a) Si calcoli la velocità angolare iniziale supponendo che nell'intervallo di tempo considerato la ruota abbia subìto un'accelerazione angolare costante. (b) Quanto tempo è stato necessario per portare la ruota dalla posizione di riposo alla velocità angolare iniziale?
18. Una corda lunga 5,63 m è attorcigliata a una puleggia circolare di 8,14 cm di diametro. La puleggia viene messa in moto, a partire dalla posizione di riposo, con accelerazione angolare costante di 1,47 rad/s^2. (a) Si determini lo spostamento angolare che deve subire la puleggia affinché la corda si srotoli completamente. (b) Si calcoli il tempo necessario per questa operazione.
19. Un volano compie 42,3 giri per rallentare fino al completo arresto a partire dalla velocità angolare di 1,44 rad/s. (a) Si assuma che il moto sia ad accelerazione angolare costante e si calcoli il tempo necessario per l'arresto del volano. (b) Si calcoli l'accelerazione angolare. (c) In quanto tempo il volano compie la prima metà dei 42,3 giri?
20. Un ruota a riposo all'istante $t = 0$ viene messa in rotazione con accelerazione angolare costante. All'istante $t = 2{,}33$ s la ruota ha velocità angolare di 4,96 rad/s. Il moto continua a essere uniformemente accelerato fino all'istante $t = 23{,}0$ s e poi prosegue a velocità angolare costante. Si calcoli l'angolo descritto dalla ruota nell'intervallo che va da $t = 0$ fino a $t = 46{,}0$ s.

8.5 Relazioni tra variabili lineari e angolari

21. Si calcoli la velocità angolare di un'automobile in moto lungo un percorso circolare di raggio 110 m alla velocità di 52,4 km/h.
22. La velocità di un elemento del bordo di una ruota di diametro 0.75 m cresce in modo uniforme da 12 m/s fino a 25 m/s in 6,2 s. Si calcoli l'accelerazione angolare della ruota in questo intervallo.
23. Si calcoli (a) velocità angolare, (b) accelerazione radiale e (c) accelerazione tangenziale di una navicella spaziale che percorre una curva circolare di raggio 3220 km alla velocità costante di 28 700 km/h.
24. Una vite filettata con passo di 12.0 solchi/cm e diametro di 1,18 cm è avvitata, come illustrato in Figura 8.17, in una lastra con un foro filettato internamente con lo stesso passo. La vite ruota alla velocità di 237 giri/min. In quanto tempo la lastra si muove di 1.50 cm lungo la vite?

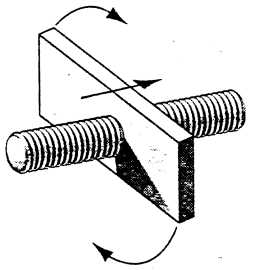


FIGURA 8.17 Esercizio 24.

25. (a) Si calcoli la velocità angolare di un punto sulla superficie terrestre alla latitudine di 40° N. (b) Si calcoli il modulo della sua velocità lineare. (c) Si ripetano i calcoli precedenti per un punto all'equatore.
26. Il volano di un giroscopio ha raggio di 2,83 cm e viene messo in rotazione a partire dalla posizione di riposo con accelerazione angolare di 14,2 rad/s^2; tale stato di moto permane fino al raggiungimento della velocità angolare di 2760 giri/min. (a) Si calcoli l'accelerazione tangenziale di un elemento sul bordo del volano. (b) Si calcoli l'accelerazione radiale del medesimo elemento quando il volano è in rotazione alla velocità massima. (c) Si calcoli lo spazio percorso da un elemento del bordo del volano durante la fase di accelerazione.
27. L'elica di un aeroplano ha raggio di 1,5 m e ruota alla velocità di 2000 giri/min. L'aeroplano vola rispetto a un osservatore terrestre alla velocità di 480 km/h. Si calcoli la velocità di un elemento della punta di una delle pale dell'elica (a) rispetto al pilota e (b) rispetto a un osservatore terrestre. Si assuma che la velocità dell'aeromobile sia parallela all'asse di rotazione dell'elica.
28. Le pale di un mulino a vento ruotano, a partire dalla posizione di riposo, con accelrazione angolare costante di 0,236 rad/s^2. Dopo quanto tempo vi è un elemento di una delle pale che ha accelerazione centripeta e tangenziale di uguale intensità?
29. Un corpo rigido, a partire dalla posizione di riposo, viene messo in rotazione attorno a un asse fisso con accelera-

zione angolare costante α. Si consideri un elemento del corpo a distanza r dall'asse di rotazione. Si determini (a) l'accelerazione radiale e (b) quella tangenziale di questo elemento in funzione dei parametri α, r e del tempo t. (c) Supponendo che all'istante t l'accelerazione di tale elemento formi un angolo di 57,0° con l'accelerazione tangenziale dello stesso elemento, si calcoli lo spostamento angolare totale subito dal corpo dall'istante 0 all'istante t.

30. Un'automobile in moto alla velocità di 97 km/h ha ruote di 76 cm di diametro. (a) Si determini la velocità angolare del moto rotatorio delle ruote attorno al loro asse. (b) L'automobile subisce un rallentamento ad accelerazione uniforme e si arresta in un intervallo di tempo in cui le ruote compiono 30 giri. Si calcoli l'accelerazione dell'automobile. (c) Si calcoli di quanto avanza l'automobile durante l'intervallo in cui agiscono i freni.

31. Un tachimetro montato su una bicicletta fornisce una stima della velocità direttamente proporzionale alla velocità angolare delle ruote. Si supponga che il tachimetro sia tarato per ruote di 72 cm di diametro. Se lo stesso tachimetro venisse usato su una biciletta con ruote di diametro di 62 cm, la misura della velocità sarebbe corretta? In caso di risposta negativa si calcoli l'errore sulla misura.

8.6 Relazioni vettoriali tra variabili lineari e angolari

32. Una particella si muove nel piano xy di un riferimento cartesiano con legge: $x = R\cos(\omega t)$ e $y = R\sin(\omega t)$, ove x e y sono le coordinate della particella, t è il tempo e R e ω sono costanti. (a) Si determini l'equazione della traiettoria eliminando il parametro t dalle due equazioni precedenti. Si discuta la natura della traiettoria e il significato fisico del parametro ω. (b) Si derivino le espressioni precedenti per determinare le componenti v_x e v_y della velocità dell'elemento. A partire da tali componenti si determini il modulo e la direzione della velocità. Si descriva il moto della particella. (c) Derivando le espressioni così ottenute per le componenti cartesiane della velocità si determini il modulo e la direzione dell'accelerazione.

33. Un corpo rigido in rotazione attorno all'asse z rallenta con accelerazione costante pari a 2.66 rad/s^2. Si consideri l'elemento del corpo che, all'istante in cui la velocità angolare vale $\omega = (14.3\ \text{rad/s})k$, è individuato dal vettore posizione $r = (1.83\ \text{m})j + (1.26\ \text{m})k$. Si determini (a) la velocità di tale elemento e (b) la sua accelerazione. (c) Si calcoli il raggio della traiettoria circolare descritta dallo stesso elemento.

34. Un proiettile di massa 12 kg viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale di 35 m/s da un campo di calcio. (a) Si calcoli il modulo e la direzione della forza di Coriolis agente sul corpo subito dopo il lancio (si veda anche la domanda a risposta multipla 8 e il Paragrafo 5.6). (b) Si calcoli approssimativamente la direzione della forza di Coriolis agente sul proiettile mentre questo torna giù verso terra. (c) Il proiettile cadrà sullo stesso punto da cui è stato lanciato? In caso di risposta negativa, in che direzione si sarà spostato rispetto al punto di lancio?

PROBLEMI

1. La posizione angolare di un elemento sul bordo di una ruota in moto rotatorio con asse fisso è data dalla legge $\phi = (4{,}0\ \text{rad/s})t - (3{,}0\ \text{rad/s}^2)t^2 + (1{,}0\ \text{rad/s}^3)t^3$. (a) Si calcoli la velocità angolare agli istanti $t = 2{,}0$ s e $t = 4{,}0$ s. (b) Si calcoli l'accelerazione angolare media nell'intervallo che va dall'istante $t = 2{,}0$ s all'istante $t = 4{,}0$ s. (c) Si calcoli l'accelerazione angolare agli istanti iniziale e finale dell'intervallo di tempo considerato al punto precedente.

2. Una ruota con 16 raggi in rotazione oraria viene ripresa con una cinepresa. Il film viene, poi, proiettato con frequenza di 24 fotogrammi al secondo. Sullo schermo la ruota appare in rotazione antioraria alla velocità di 4,0 giri/min. Si determini la minima velocità angolare possibile alla quale si muoveva la ruota.

3. Il giorno solare è definito come l'intervallo di tempo tra due albe successive, ovvero il tempo impiegato dalla Terra per compiere, in un riferimento relativo al Sole, una rotazione completa su se stessa. Il giorno siderale, invece, è il tempo impiegato dalla Terra per compiere, in un riferimento relativo alle stelle fisse, una rotazione completa su se stessa, ovvero l'intervallo di tempo che intercorre tra due albe successive di una stella lontana, o meglio di una direzione fissa detta equinozio primaverile. (a) Si dimostri che in un anno vi è un giorno solare (medio) in meno rispetto al numero totale di giorni siderali (medi). (b) Se il giorno solare (medio) dura 24 ore, quanto dura un giorno siderale medio?

4. Una pulsar è una stella di neutroni in rapida rotazione dalla quale riceviamo segnali radio perfettamente sincronizzati: un impulso ogni rotazione della stella. Il periodo di rotazione T può essere misurato come l'intervallo trascorso tra due segnali successivi. Nella regione centrale della nebulosa del Granchio (Figura 8.18) vi è una pulsar con periodo $T = 0{,}033$ s; si è osservato un aumento di tale periodo in ragione di $1{,}26 \cdot 10^{-5}$ s/a (secondi all'anno). (a) Si dimostri che la velocità angolare della stella e il periodo di rotazione sono legati dalla relazione $\omega = 2\pi/T$. (b) Si calcoli l'accelerazione angolare e la si esprima in rad/s^2. (c) Supponendo l'accelerazione angolare costante si cal-

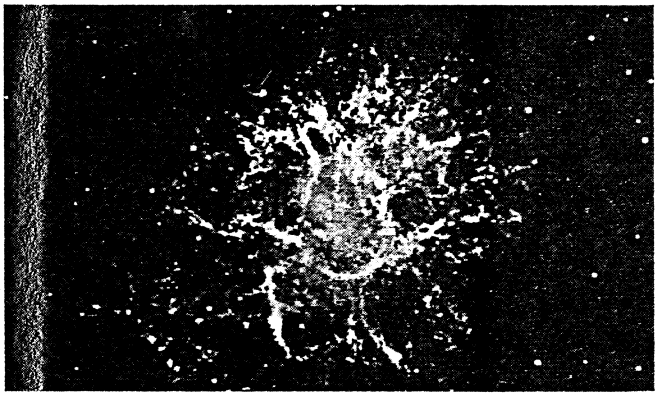


FIGURA 8.18 Problema 4.

coli tra quanto tempo si arresterà il moto rotatorio della pulsar. (d) Sapendo che la pulsar è stata originata dall'esplosione di una supernova nel 1054 d.C. e assumendo che durante tutta la sua vita la sua accelerazione angolare si sia mantenuta costante, si calcoli il periodo di rotazione all'atto della formazione.

5. Due studenti eseguono un esperimento molto semplice. Il primo studente osserva la posizione di un disco a riposo con un segno sul suo bordo esterno e poi rivolge altrove lo sguardo. Il secondo studente mette in rotazione il disco con accelerazione angolare costante di 3,0 rad/s^2 e lo lascia ruotare per 4,0 s. Dopo questi primi quattro secondi il secondo studente rallenta il moto del disco con accelerazione costante portandolo all'arresto in 0,10 s. Solo a questo punto al primo studente è permesso di guardare nuovamente il disco. (a) Dal punto di vista del primo studente, di quanto ha ruotato il disco? (b) Quale è stata la velocità angolare media del disco?
6. Un astronauta si allena in una centrifuga di raggio 10,4 m. La centrifuga ruota con legge $\phi = (0{,}326 \text{ rad/s}^2)t^2$. Si calcoli (a) la velocità angolare, (b) la velocità tangenziale, (c) l'accelerazione tangenziale e (d) l'accelerazione radiale dell'astronauta dopo 5,60 s.
7. L'orbita descritta dalla Terra attorno al Sole può essere ben approssimata con una circonferenza. (a) Trattando la Terra come una particella si calcoli la velocità angolare del suo moto attorno al Sole. (b) Si calcoli il modulo della sua velocità lineare. (c) Si determini l'acelerazione della Terra rispetto al Sole.
8. Il volano di una macchina a vapore ruota con velocità angolare costante di 156 giri/min. Se viene interrotto il flusso di vapore per effetto degli attriti, la ruota rallenta il suo moto e dopo 2,20 h si ferma. (a) Si calcoli l'accelerazione angolare, supposta costante, e la si esprima in giri/min^2. (b) Si calcoli il numero di giri compiuti dalla ruota prima di giungere nella posizione di arresto. (c) Si calcoli l'accelerazione tangenziale di un elemento della ruota a distanza di 52,4 cm dall'asse di rotazione quando il volano ruota alla velocità di 72,5 giri/min. (d) Si calcoli il modulo dell'accelerazione lineare dell'elemento di cui al punto precedente.
9. Uno dei primi metodi per la misura della velocità della luce è il cosiddetto interferometro di Fizeau. Un fascio di luce attraversa una fenditura del bordo esterno di una ruota dentata, come illustrato nella Figura 8.19, viaggia verso uno specchio e, riflesso da questo, torna sulla ruota dentata per passare attraverso la fenditura successiva della ruota. Si supponga che la ruota abbia raggio di 5,0 cm e che sul suo bordo siano stati ricavati 500 denti. Misurando la velocità della luce con lo specchio posto a $L = 500$ m dalla ruota si è ottenuto $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s. (a) Si calcoli la velocità angolare, supposta costante, della ruota dentata. (b) Si calcoli il modulo della velocità lineare di un elemento sul bordo della ruota.
10. La ruota A di raggio $r_A = 10{,}0$ cm è accoppiata, tramite la cinghia B illustrata in Figura 8.20, alla ruota C di raggio $r_C = 25{,}0$ cm. La ruota A aumenta la sua velocità angolare con accelerazione costante 1,60 rad/s^2 a partire dalla posizione di riposo. Supponendo che la cinghia non strisci rispetto alle ruote, si calcoli il tempo necessario perché la ruota C raggiunga la velocità angolare di 100 giri/min. (*Suggerimento*: se la cinghia non striscia le velocità tangenziali dei bordi delle ruote sono uguali.)

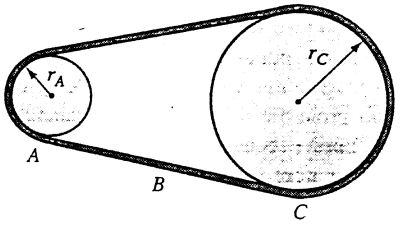


FIGURA 8.20 Problema 10.

11. La porzione di *compact disc* su cui sono registrati i concerti per violino di Tchaikovsky e Mendelssohn è una corona circolare di raggio interno 2,50 cm e raggio esterno 5,80 cm. Durante la fase di riproduzione il disco viene letto con velocità lineare costante di 130 cm/s a partire dalla parte più interna verso quella più esterna. (a) Se la velocità angolare iniziale è di 50,0 rad/s, si calcoli la velocità angolare finale. (b) Le linee di lettura a spirale si discostano l'una dall'altra di 1,60 μm. Qual è la lunghezza totale della traccia letta? (c) Quanto dura la riproduzione del disco?
12. Un'automobile si muove verso est a velocità costante v, lungo una strada rettilinea e perfettamente orizzontale. Un osservatore si trova lungo la strada a distanza b da essa in direzione nord. Si determinino la velocità angolare ω e l'accelerazione angolare α dell'automobile misurate dall'osser-

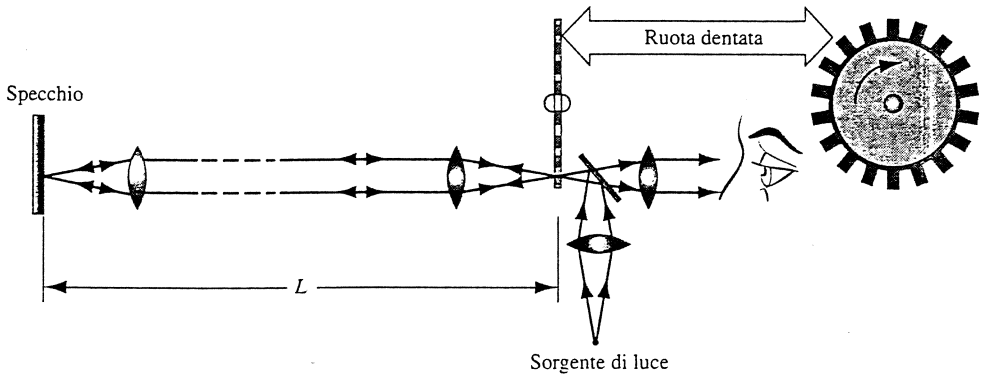


FIGURA 8.19 Problema 9.

 ISBN 88-40- 134-7

vatore. Si assuma che l'autovettura sia puntiforme e che all'istante $t = 0$ occupi il punto della strada più vicino all'osservatore.

13. Una slitta a reazione si muove lungo un binario orizzontale rettilineo con velocità $v(t)$. Un osservatore a distanza b dal binario misura una velocità angolare ω costante. (a) Si determini $v(t)$ assumendo che la slitta sia il più vicino possibile all'osservatore all'istante $t = 0$. (b) A che istante t_c il moto della slitta diviene fisicamente impossibile?

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. La forza efficace agente su un proiettile in moto in una regione molto vicina alla superficie terrestre è

$$F = mg - m\omega \times (\omega \times r) - 2m\omega \times v,$$

ove g è l'accelerazione di gravità, ω è la velocità angolare terrestre e v è la velocità del proiettile relativa a un riferimento terrestre (non inerziale). (a) Si scriva un programma che permetta di determinare la traiettoria di un proiettile di massa 1,0 kg lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale di 100 m/s da un punto dell'equatore terrestre. A che distanza dal punto di lancio cade il proiettile? (b) Si scriva un programma che permetta di determinare la traiettoria di un proiettile di massa 1,0 kg lanciato con alzo di 45° verso nord e con velocità iniziale di 1000 m/s da un punto dell'equatore terrestre. Che errore si commette sulla localizzazione del bersaglio a causa della rotazione terrestre?

2. Un volano rallenta con accelerazione angolare non costante: la posizione angolare della linea di riferimento è descritta dalla legge

$$\phi(t) = (A + Bt + Ct^3)e^{-\beta t}$$

a partire dall'istante $t = 0$ fino all'istante $t = T$, in cui il volano arresta il suo moto. Per i parametri si usino i valori seguenti: $A = 2{,}40$ rad, $B = 5{,}12$ rad/s, $C = -0{,}12$ rad/s^3 e $\beta = 0{,}100\ s^{-1}$. (a) Si scriva l'espressione della velocità angolare in funzione del tempo e si determini l'istante di arresto T. (b) Si determini lo spostamento angolare totale subìto dalla ruota durante la fase di arresto.

CAPITOLO 9

DINAMICA DEI MOTI ROTATORI

Nel Capitolo 8 abbiamo affrontato la cinematica dei moti rotatori e osservato che tale problema non presenta aspetti davvero nuovi rispetto alla cinematica dei moti traslatori, dal momento che le variabili angolari ϕ, ω e α, che entrano nella descrizione del moto rotatorio di un corpo esteso, sono intimamente connesse alle variabili lineari x, v e a che intervengono, invece, nella descrizione del moto traslatorio dei costituenti elementari del corpo rotante. In questo capitolo ci si occupa della dinamica dei moti rotatori*: seguendo lo stesso schema adottato per il caso traslatorio si studieranno le cause alla base dei moti rotatori. I sistemi rotanti possono essere pensati come aggregati di costituenti elementari assimilabili a particelle puntiformi, per le quali si è già visto come si possano applicare le leggi della dinamica. Ci si aspetta, quindi, che al fine di studiare la dinamica dei moti rotatori non si dovranno introdurre dei concetti veramente nuovi. Come si è già visto nel Capitolo 8, però, sarà di grande utilità riscrivere alcuni dei risultati noti in una forma più adatta alla descrizione dei moti rotatori.*

9.1 MOMENTO TORCENTE

Nel Capitolo 3 s'è visto come alla base della dinamica vi sia la definizione di forza, data in funzione dell'accelerazione che essa produce su un corpo di massa fissata (Paragrafo 3.3). Grazie a questa definizione è stato poi possibile misurare il rapporto tra la massa di un generico corpo e la massa di un corpo di riferimento misurando il rapporto tra le accelerazioni dei due corpi sottoposti all'azione di una medesima forza (Paragrafo 3.4). Tutte le osservazioni sperimentali relative ai concetti di forza, massa e accelerazione sono state, poi, sintetizzate nella seconda legge di Newton, la quale afferma che la forza totale agente su un corpo è uguale al prodotto della massa del corpo per la sua accelerazione.

Nel caso della dinamica dei moti rotatori si tenterà di procedere in modo analogo. In primo luogo verrà osservata l'accelerazione angolare di un corpo rigido, libero di ruotare attorno a un asse fisso, dovuta all'azione su di esso di una forza esterna. In analogia con quanto visto per i moti traslatori si mostrerà che tale accelerazione angolare è, in un senso che verrà specificato in seguito, proporzionale all'intensità della forza applicata. A questo punto, però, emergerà un fatto nuovo rispetto a quanto visto per i moti traslatori: l'accelerazione angolare dipende non solo dalla forza *ma anche dal punto del corpo in cui* essa viene applicata. La stessa forza applicata in due punti diversi di un corpo produrrà, in generale, accelerazioni angolari differenti.

La grandezza fisica che permetterà di tenere in conto l'intensità della forza, la sua direzione, il suo verso e il punto d'applicazione sarà il *momento torcente* o *momento della forza*. Per avere un'idea intuitiva di cosa sia il momento torcente (o momento di una forza) bisogna pensare a qualcosa che tenda a ruotare un corpo così come una forza tende a spingerlo o a tirarlo. Il momento torcente, così come la forza e l'accelerazione angolare, è una grandezza vettoriale, ma poiché in questo capitolo ci si limiterà a considerare *moti rotatori attorno a un asse fisso*, sarà sufficiente considerare una sola componente di tale vettore. Questa restrizione è simile a quella effettuata nel caso dei moti traslatori unidimensionali studiati nel Capitolo 3.

Un altro fatto nuovo che emergerà nello studio dei moti rotatori sarà la dipendenza dell'accelerazione angolare non solo dalla massa totale del corpo ma anche dalla sua distri-

 ISBN 88-408-1254-7

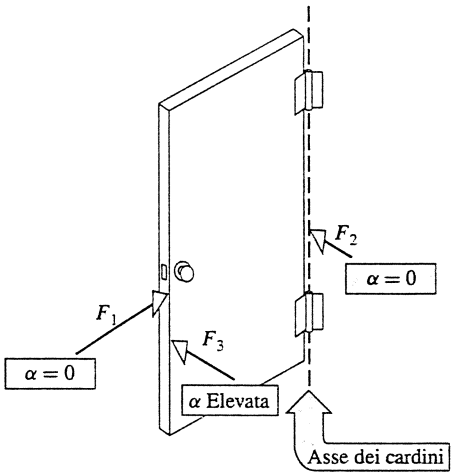


FIGURA 9.1 L'accelerazione angolare α impressa da una forza F su una porta incernierata a un asse fisso dipende sia dal punto in cui viene applicata la forza sia dalla sua direzione rispetto all'asse dei cardini. La forza F_1 è applicata lungo una retta che interseca l'asse dei cardini e induce un'accelerazione angolare nulla. talché la porta non subisce alcuno spostamento. La forza F_2 è applicata in un punto dell'asse dei cardini e anch'essa induce un'accelerazione angolare nulla. La forza F_3 è applicata in un punto lontano dall'asse dei cardini e in direzione ortogonale all'asse stesso; a parità di intensità, questa forza induce l'accelerazione angolare massima possibile.

buzione rispetto all'asse di rotazione. A parità di momento della forza si osserveranno accelerazioni angolari differenti a seconda che la massa sia concentrata lontano o vicino all'asse di rotazione. La grandezza rotazionale che descriverà come e quanta massa sia distribuita attorno all'asse di rotazione sarà il *momento d'inerzia*, talvolta chiamato *inerzia rotazionale*. A differenza della massa, il momento d'inerzia non è una proprietà intrinseca di un corpo ma dipende dalla scelta dell'asse di rotazione; più correttamente si dovrebbe usare la locuzione *momento d'inerzia relativo a un asse assegnato*. Il momento d'inerzia può essere pensato come la resistenza che un corpo offre all'accelerazione angolare, così come la massa rappresenta la resistenza offerta da un corpo all'accelerazione lineare. Il momento d'inerzia dei corpi rigidi verrà introdotto in modo preciso nel prossimo paragrafo; in questo paragrafo, invece, ci si limiterà a definire e studiare il momento torcente subito dal corpo per effetto delle forze ad esso applicate.

Un semplice esempio di moto puramente rotatorio è quello che compie una porta che venga aperta o chiusa. È esperienza comune che, a parità di intensità, una forza possa produrre accelerazioni angolari differenti a seconda di dove venga applicata e di come venga diretta (Figura 9.1). Una forza, come F_1, applicata sul bordo della porta lungo la porta stessa, ovvero lungo una retta passante per l'asse dei cardini, produce accelerazione angolare nulla; analogamente una forza, come F_2, applicata in un punto dell'asse dei cardini produce accelerazione angolare nulla. Una forza come F_3, invece, applicata ad angolo retto a un punto del bordo della porta produce l'accelerazione angolare massima possibile.

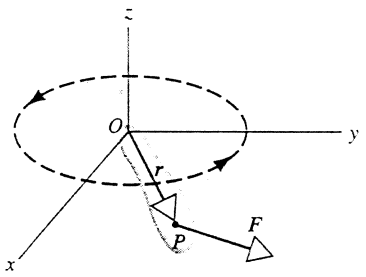


FIGURA 9.2 Corpo rigido libero di ruotare attorno all'asse z: la forza F è applicata all'elemento P del corpo a distanza r dall'asse di rotazione.

In Figura 9.2 è illustrato un corpo rigido libero di ruotare attorno all'asse z; la forza F è applicata all'elemento P del corpo a distanza r dall'asse di rotazione. In Figura 9.3a è riportata la sezione trasversa del corpo ottenuta intersecando quest'ultimo con il piano xy; il vettore r individua la posizione dell'elemento P rispetto all'origine del riferimento. attraverso cui passa l'asse di rotazione. Si suppone, inoltre, che la forza F sia parallela al piano xy in modo tale che le sue uniche componenti non nulle siano quelle lungo i due assi x e y. Questa ultima ipotesi non diminuisce la generalità del nostro studio dal momento che un'eventuale componente della forza F lungo l'asse z non avrebbe alcun effetto sul moto del corpo rigido, così come una forza verticale applicata alla porta in Figura 9.1 non produrrebbe alcuna accelerazione angolare attorno all'asse dei cardini.

In Figura 9.3b viene introdotto l'angolo θ individuato dai vettori F ed r. La forza F può essere scomposta nelle sue componenti radiale e tangenziale. La componente radiale, $F_R = F\cos\theta$, non ha alcun effetto sulla rotazione del corpo attorno all'asse z, così come la forza F_1 non era in grado di mettere in rotazione la porta illustrata nella Figura 9.1. È la sola componente tangenziale, $F_T = F\sin\theta$, ad agire sulla rotazione del corpo attorno all'asse z, così come la forza F_3 in Figura 9.1.

L'intensità dell'accelerazione angolare dipenderà non solo dal valore della componente tangenziale della forza F, ma anche dalla distanza dall'asse del punto di applicazione della forza. A parità di componente tangenziale l'accelerazione sarà tanto maggiore quanto più il punto di applicazione della forza sarà lontano dall'asse.

L'accelerazione angolare, quindi, dipende sia dalla componente tangenziale della forza sia dalla distanza dall'asse del punto di applicazione. La grandezza rotazionale che tiene conto di questi due fattori è il *momento torcente*, o momento della forza, τ, il cui modulo è definito come segue

$$\tau = rF\sin\theta. \qquad (9.1)$$

Le dimensioni del momento torcente sono quelle di una forza per una distanza; quindi come unità di misura del momento torcente si può usare, per esempio, il newton per metro (N · m) o anche la libbra per piede (lb · ft). Il N · m è anche l'unità di misura del lavoro. Ma il momento torcente e il lavoro sono in realtà due grandezze ben distinte, che non

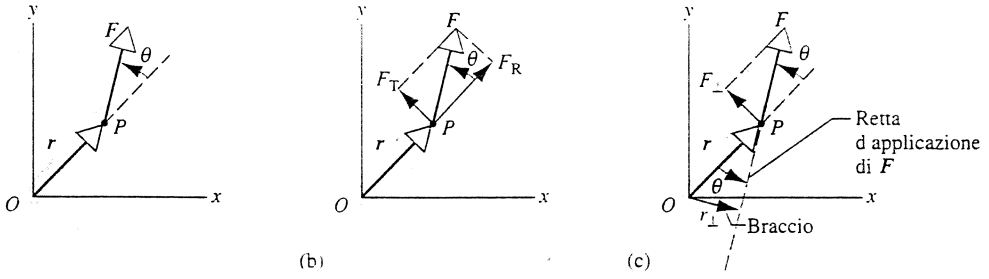


FIGURA 9.3 (a) Sezione trasversa del corpo in Figura 9.2 ottenuta intersecando il corpo con il piano xy. La forza $\boldsymbol{F}$ è parallela al piano xy. (b) Scomposizione della forza $\boldsymbol{F}$ nelle sue componenti radiale, F_R, e tangenziale F_T. (c) La componente di $\boldsymbol{F}$ perpendicolare a $\boldsymbol{r}$, già individuata come la componente tangenziale F_T, viene denotata anche con $F_\perp$. La componente di $\boldsymbol{r}$ perpendicolare a $\boldsymbol{F}$, ovvero perpendicolare alla retta d'azione della forza, è denotata con $r_\perp$.

devono essere confuse tra loro. Il lavoro si misura in joule ($1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m}$), ciò che si preferisce evitare nel caso del momento torcente, proprio per non creare equivoci.

Dall'Equazione 9.1 segue che il momento torcente è nullo nei casi seguenti: (1) $r = 0$, ovvero qualora la forza sia applicata a un punto dell'asse di rotazione; (2) $F = 0$, ovvero qualora la forza totale applicata sia nulla; (3) $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$, ovvero qualora la forza sia applicata lungo la direzione radiale in uno qualsiasi dei due versi possibili. In tutti i casi appena discussi la forza non produce accelerazione angolare attorno all'asse z.

Se si scegliesse un diverso asse di rotazione la medesima forza applicata al medesimo elemento P potrebbe dare origine a un diverso momento torcente perché i parametri r e θ potrebbero risultare diversi. Il momento torcente dovuto a una certa forza, quindi, dipende dalla scelta dell'asse di rotazione ovvero dalla scelta dell'origine del sistema di riferimento. Per evitare confusioni all'atto di calcolare un momento torcente, si dovrà sempre dichiarare rispetto a quale punto si sta effettuando il calcolo; l'Equazione 9.1, allora, rappresenta la definizione del momento torcente, o momento della forza, rispetto al punto O. Se avessimo calcolato il momento torcente rispetto a O', punto medio tra O e P, avremmo ottenuto un valore pari alla metà del momento torcente calcolato rispetto a O.

In Figura 9.3c viene proposta una lettura diversa della definizione di momento torcente di $\boldsymbol{F}$ rispetto a O: la componente della forza lungo la direzione perpendicolare al vettore $\boldsymbol{r}$ viene indicata con $F_\perp$ ed è uguale alla componente tangenziale della forza $F_T = F \sin\theta$ (Figura 9.3b). La componente di $\boldsymbol{r}$ lungo la direzione perpendicolare a $\boldsymbol{F}$ viene denotata con $r_\perp$ e vale $r \sin\theta$. L'Equazione 9.1 può essere riscritta nei due modi seguenti:

$$\tau = r(F \sin\theta) = rF_\perp, \tag{9.2a}$$

o anche

$$\tau = (r \sin\theta)F = r_\perp F. \tag{9.2b}$$

Nell'Equazione 9.2a il momento torcente è scritto in termini della componente della forza nella direzione perpendicolare al vettore $\boldsymbol{r}$; se questa componente è nulla il momento torcente vale zero. Nell'Equazione 9.2b, invece, il momento torcente è scritto in termini del cosiddetto *braccio* $r_\perp$ il quale, come illustrato in Figura 9.3c, è uguale alla distanza della retta d'azione di $\boldsymbol{F}$ – retta passante per il punto di applicazione e parallela alla direzione della forza – dall'origine O. Se il braccio è nullo, come nel caso della componente radiale della forza, allora il momento torcente rispetto a O risulta nullo.

Il vettore momento torcente

L'Equazione 9.1 costituisce, come si è già detto, la definizione del modulo del momento torcente (momento della forza) rispetto al polo O; al momento torcente, però, viene associata anche una direzione, che stabiliamo coincidente con l'asse attorno al quale la forza produce la rotazione (asse z nel caso in Figura 9.2). Se una grandezza è dotata di modulo, direzione e verso è lecito sospettare che si tratti di un vettore; per sincerarcene è necessario verificare che detta grandezza soddisfi le regole di trasformazione e di somma dei vettori. Il momento torcente soddisfa queste regole e quindi possiamo considerarlo un vettore.

Si vuole costruire, ora, il vettore momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ combinando opportunamente i due vettori $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{r}$. Un modo tipico di combinare due generici vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ per ottenere un terzo vettore $\boldsymbol{C}$ è quello di considerare il *prodotto vettoriale* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ (si legge comunemente "A vettor B"). Si ricorda che il prodotto vettoriale di $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ è uguale a un vettore $\boldsymbol{C}$ di modulo $C = AB \sin\theta$, ove A è il modulo di $\boldsymbol{A}$, B quello di $\boldsymbol{B}$ e θ è il minore tra i due angoli formati dai vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Questa definizione, $C = AB \sin\theta$, è nella stessa forma della definizione 9.1 del modulo del momento torcente; ciò lascia sospettare che il vettore momento torcente possa essere definito come il prodotto vettoriale tra i vettori $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{F}$.

Cosa si può dire della direzione e del verso del prodotto vettoriale? Il vettore $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ è perpendicolare al piano individuato dai due vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ e ha verso stabilito dalla regola della mano destra: si allineano le dita della mano destra con il primo dei due vettori, $\boldsymbol{A}$, e si ruotano le dita verso $\boldsymbol{B}$ in modo da percorrere il minore dei due angoli individuati dai due vettori; la direzione e il verso indicati dal pol-

 ISBN 88-408-1254-7

lice esteso sono quelli del vettore C. Si osserva che in virtù di tali definizioni il prodotto vettoriale $A \times B$ differisce da $B \times A$, più precisamente si ha $A \times B = -B \times A$. I due prodotti vettoriali hanno stesso modulo e stessa direzione, ma verso opposto. Per maggiori dettagli si rimanda all'Appendice H.

Il vettore momento torcente, quindi, viene definito come segue:

$$\tau = r \times F. \tag{9.3}$$

In base alle proprietà del prodotto vettoriale si ha che il modulo del vettore momento torcente definito dall'Equazione 9.3 è uguale a $rF \sin\theta$, in accordo con la definizione 9.1 del modulo del momento torcente. Per illustrare come applicare la regola della mano destra, in Figura 9.4 sono riportati i vettori r ed F introdotti in Figura 9.2, evitando, al fine di semplificare la figura, di disegnare il corpo rigido. Nel riquadro in alto a destra in Figura 9.4 è mostrato come le dita della mano destra vadano dapprima allineate con r e poi ruotate verso F in modo da spazzare l'angolo θ. Il pollice esteso, che individua la direzione e il verso del momento torcente, coincide con il verso positivo dell'asse z. Come dimostrato in Appendice H, introducendo le componenti dei vettori $r = xi + yj + zk$ ed $F = F_x i + F_y j + F_z k$, si ha

$$\tau = (yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k. \tag{9.4}$$

Il momento torcente rispetto all'origine O è ortogonale al piano individuato dai vettori r ed F, che nel caso illustrato nella Figura 9.4 coincide con il piano xy. Il momento torcente, quindi, è perpendicolare al piano xy e parallelo all'asse z. Il vettore momento torcente, però, non deve essere disegnato necessariamente lungo l'asse z, come è stato fatto in figura, ma, mantenendolo parallelo all'asse z, può essere collocato ovunque nello spazio.

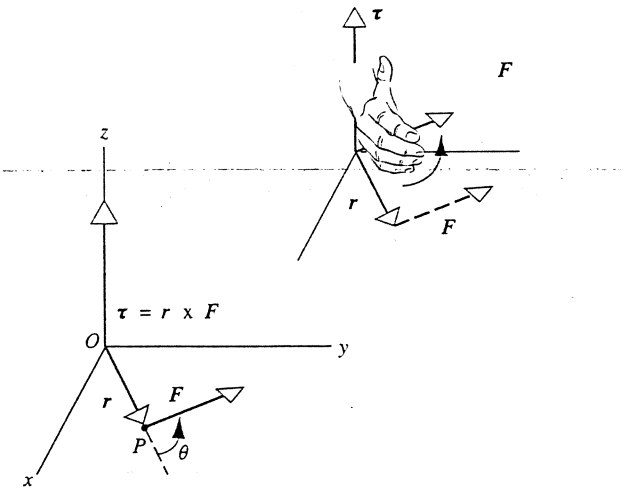


FIGURA 9.4 La forza F è applicata all'elemento P di un corpo rigido (non riportato in figura). Il momento della forza rispetto all'origine O è $\tau = r \times F$. Il vettore momento torcente è parallelo e concorde con l'asse z; potrebbe essere disegnato, mantenendolo parallelo all'asse z, in un qualsiasi punto dello spazio. Nel riquadro in alto a destra è illustrato come si applica la regola della mano destra. Il vettore che rappresenta la forza può essere traslato, per comodità, parallelamente fino a far coincidere uno dei suoi estremi con l'origine del vettore r.

Se la forza è applicata al corpo rigido come illustrato nella Figura 9.2, allora il vettore momento torcente ha la sola componente τ_z non nulla: tale componente risulta positiva. In questo caso, allora, l'Equazione 9.1 fornisce il modulo della quantità τ_z pur non dando informazioni sul suo segno. Sotto l'azione della forza applicata, la velocità angolare del corpo rigido crescerà nel verso riportato in Figura 9.2; in altri termini, in accordo con le definizioni date nel Paragrafo 8.3 per le direzioni dei vettori velocità e accelerazione angolare, il corpo rigido subirà un'accelerazione angolare parallela all'asse z e con componente z positiva. Si può concludere, pertanto, che un momento torcente con componente τ_z positiva produce un'accelerazione angolare con componente α_z positiva. Questo risultato è molto simile a quello espresso dalla forma lineare della seconda Equazione di Newton, dalla quale si deduce che un corpo acquista un'accelerazione in una certa direzione se viene sottoposto all'azione di una forza con componente non nulla lungo detta direzione.

È possibile stabilire il segno della componente del vettore momento torcente lungo un certo asse in questo modo: è positiva se tale componente genera una rotazione in verso antiorario rispetto all'orientazione positiva di tale asse e negativa in caso di rotazione in senso orario. Alternativamente si può procedere come segue: si allinea il pollice della mano destra nel verso positivo dell'asse fissato, per esempio l'asse z, e si sceglie τ_z positiva qualora essa, agendo da sola, induca una rotazione del corpo nello stesso verso delle dita della mano destra, negativa in caso contrario. Si osserva, infine, che l'Equazione 9.4, definendo il vettore momento torcente, fornisce il segno delle sue componenti lungo un qualsiasi asse.

PROBLEMA SVOLTO 9.1 Un pendolo è costituito da un corpo di massa $m = 0{,}17$ kg fissato a una delle due estremità di una sbarretta di lunghezza $L = 1{,}25$ m e di massa trascurabile (Figura 9.5). (a) Si determini il modulo del momento torcente relativo all'origine O dovuto alla forza di gravità quando il pendolo forma, come illustrato nella Figura 9.5a, un angolo $\theta = 10^\circ$ con l'asse verticale. (b) Si determini anche la direzione del vettore momento torcente e si dica se tale direzione dipende dall'essere il pendolo a destra o a sinistra rispetto all'asse verticale.

Soluzione (a) Per determinare il modulo del momento torcente si può usare l'Equazione 9.1 ponendo $r = L$ ed $F = mg$:

$$\tau = Lmg \sin\theta =$$

$$= (1{,}25 \text{ m})(0{,}17 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) \sin 10^\circ = 0{,}36 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

(b) Nel caso illustrato in Figura 9.5a il momento torcente relativo all'origine è entrante nel piano della pagina. È facile convincersi che, nel caso in cui il pendolo si trovi a destra rispetto all'asse verticale, il momento torcente risulta uscente dalla pagina. Come si vedrà in seguito l'effetto del momento torcente è quello di indurre un'accelerazione angolare parallela al momento torcente stesso. Nel primo dei due casi discussi in questo esempio, l'effetto del momento torcente è quello di generare un'accelerazione angolare

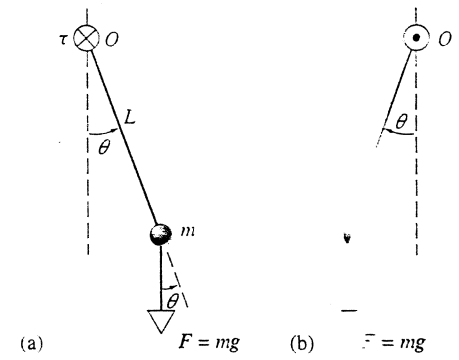


FIGURA 9.5 Problema svolto 9.1. Un pendolo è costituito da un corpo di massa m appeso all'estremità di una sbarretta di lunghezza L e di massa trascurabile. (a) Il momento torcente relativo all'origine O dovuto alla forza di gravità è entrante nella pagina ed è indicato dal simbolo ⊗ che ricorda la coda di una freccia. (b) Se il pendolo è spostato a sinistra rispetto all'asse verticale il momento torcente relativo all'origine O è uscente dalla pagina ed è indicato dal simbolo ⊙, che ricorda la punta di una freccia.

che tende a portare il pendolo verso la sua posizione di equilibrio; ciò si verifica anche nel secondo caso (Figura 9.5b), quando il pendolo viene spostato a destra rispetto all'asse verticale. Si suggerisce di ricavare autonomamente le osservazioni precedenti usando la regola della mano destra per mettere in relazione il verso della rotazione indotta dal momento torcente con la direzione dell'accelerazione angolare che viene assunta parallela al momento torcente stesso.

9.2 MOMENTO D'INERZIA E SECONDA LEGGE DI NEWTON

Si impugni una sbarretta come illustrato in Figura 9.6; flettendo opportunamente il polso è possibile porre in rotazione la sbarretta attorno ad assi differenti. L'esperienza dimostra che è considerevolmente meno faticoso porre in rotazione la sbarretta attorno al suo asse di simmetria, come illustrato nella Figura 9.6a, piuttosto che attorno a un asse ad essa perpendicolare come illustrato nella Figura 9.6b. Il motivo sta nel diverso valore del *momento d'inerzia* nei due casi. A differenza di quanto avviene per la massa (l'inerzia di traslazione), che è caratteristica univoca di un corpo, il momento d'inerzia (l'inerzia di rotazione) varia al variare dell'asse di rotazione. Come si mostrerà in seguito, il momento d'inerzia dipende da come è distribuita la massa del corpo rispetto all'asse di rotazione. Nel caso illustrato in Figura 9.6a la massa del corpo è molto vicina all'asse di rotazione, mentre nel caso di Figura 9.6b la massa è concentrata in media in regioni più lontane dall'asse di rotazione; per questa ragione nel secondo caso il corpo presenta una maggiore inerzia rotazionale, che viene rilevata dallo sperimentatore come una maggiore resistenza offerta dalla sbarretta al moto rotatorio. In questo paragrafo ci si occuperà del momento d'inerzia di particelle singole e di sistemi di particelle puntiformi; il momento d'inerzia dei corpi rigidi verrà introdotto nel paragrafo successivo.

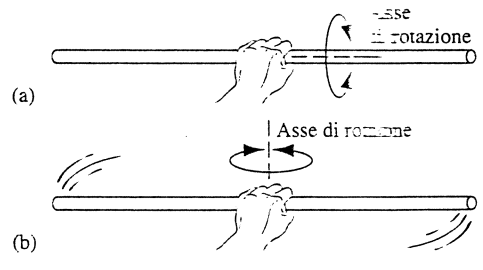


FIGURA 9.6 È considerevolmente meno faticoso porre in rotazione la sbarretta attorno al suo asse di simmetria, come illustrato in (a), piuttosto che attorno a un asse ad essa perpendicolare come illustrato in (b). Nel caso (a) gli elementi della sbarretta sono più vicini all'asse di rotazione rispetto a quanto avviene nel caso (b), e per tale ragione nel caso (a) il momento d'inerzia è minore.

Momento d'inerzia di una particella singola

In Figura 9.7 è illustrata una particella di massa m libera di ruotare attorno all'asse z cui è connessa mediante una sbarretta di lunghezza r e massa trascurabile. Sulla particella agisce la forza F che forma l'angolo θ con la sbarretta. Come si è visto nel Paragrafo 9.1, componenti della forza parallele all'asse di rotazione non hanno alcun effetto sul moto; senza perdita di generalità si può limitare la nostra discussione a forze parallele al piano xy.

La componente tangenziale di F è l'unica forza che agisce sulla particella nella direzione tangente alla traiettoria, di modo che la risultante delle forze tangenziali è $\sum F_T = F \sin\theta$. Proiettando la seconda legge di Newton nella direzione tangenziale si ha $\sum F_T = ma_T$; sostituendo, ora, $F \sin\theta$ alla risultante delle forze tangenziali e ponendo $a_T = \alpha_z r$ (Equazione 8.10) si ha

$$F \sin\theta = m\alpha_z r.$$

Se si moltiplicano ambo i membri dell'equazione precedente per il raggio r, al primo membro si ottiene $rF \sin\theta$, che, in accordo con l'Equazione 9.1, è la componente z del momento torcente relativo al polo O. In definitiva si può scrivere

$$\tau_z = mr^2\alpha_z. \qquad (9.5)$$

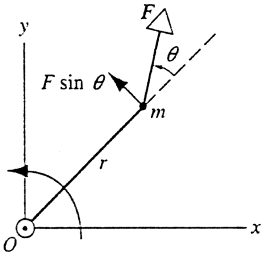


FIGURA 9.7 La forza F è applicata a una particella connessa all'asse z mediante una sbarretta di massa trascurabile libera di ruotare nel piano xy. Il momento della forza F rispetto all'origine O è diretto nel verso positivo dell'asse z (uscente dal piano della pagina), come indicato dal simbolo ⊙.

 ISBN 88-408-1254-7

L'equazione precedente mostra la proporzionalità tra la componente del momento torcente lungo l'asse z e quella dell'accelerazione angolare. L'Equazione 9.5 è simile alla seconda legge di Newton per i moti traslatori unidimensionali che, si ricorda, può essere scritta come $F_z = ma_z$; inoltre la quantità mr^2 svolge nell'Equazione 9.5 la parte della massa nell'equazione per il moto traslatorio. Questa quantità è detta *momento d'inerzia* della particella ed è denotata con I:

$$I = mr^2. \tag{9.6}$$

Si osserva che il momento d'inerzia dipende dalla massa della particella e dalla sua distanza dall'asse di rotazione; al crescere di tale distanza il momento d'inerzia cresce anche se la massa resta costante.

Il momento d'inerzia ha la dimensione di una massa per il quadrato di una lunghezza (ML^2) e, pertanto, come unità di misura si può usare il kg · m^2. Il momento d'inerzia cambia se si modifica la posizione o l'orientamento dell'asse di rotazione, ma non è possibile riassumere le sue proprietà introducendo un vettore momento d'inerzia, perché il suo carattere direzionale è più complesso. In ogni caso, se ci si limita a rotazioni attorno a un asse fisso, il momento di inerzia può essere trattato, in analogia con quanto si fa per la massa, come uno scalare.

Seconda legge di Newton per i moti rotatori

La relazione tra momento torcente e accelerazione angolare può essere discussa più approfonditamente alla luce della definizione di momento d'inerzia; ciò verrà fatto nel contesto più generale dei sistemi di particelle. Così come nel Capitolo 3 lo studio della relazione esistente tra forza e accelerazione lineare ha condotto alla formulazione della seconda legge di Newton per i moti traslatori, la discussione seguente condurrà in modo naturale alla formulazione della seconda legge di Newton per i moti rotatori.

In primo luogo si vuol definire il momento d'inerzia di un sistema di particelle; come prima, però, si supporrà che una singola forza agisca su una sola delle particelle del sistema. In Figura 9.8a, per esempio, è mostrato un sistema costituito da due particelle, di massa m_1 ed m_2, libere di ruotare attorno all'asse z mantenendosi nel piano xy. Le due particelle sono connesse all'asse di rotazione mediante sbarrette sottili di massa trascurabile e di lunghezza r_1 ed r_2, rispettivamente; le due particelle, inoltre, sono connesse tra loro mediante una terza sbarretta di massa trascurabile in modo da formare un corpo rigido. La forza P parallela al piano xy agisce sulla particella 1. Sulla particella i-esima, con $i = 1,2$, agisce, inoltre, la tensione T_i, dovuta alla sbarretta che la collega all'asse, e la tensione T_{ir} dovuta alla sbarretta che la connette alla seconda particella (Figura 9.8b). La forza T_{1r}, esercitata dalla sbarretta sulla particella 1, e la forza T_{r1}, esercitata dalla particella 1 sulla sbarretta, formano una coppia azione-reazione; analogamente anche T_{2r} e T_{r2} costituiscono una coppia di forze opposte. Se si osserva, inoltre, che la somma delle forze agenti sulla sbarretta, $T_{r1} + T_{r2}$ deve essere nulla, in quanto la sbarretta ha massa trascurabile, si deduce che $T_{1r} = -T_{2r}$.

Si osserva, ora, che la somma delle forze agenti sulla particella 1 è data da $\sum F_1 = P + T_1 + T_{1r}$ e quella delle forze agenti sulla particella 2 è data da $\sum F_2 = T_2 + T_{2r}$. Si considerano, ora, le componenti tangenziali e radiali delle forze e delle accelerazioni; in Figura 9.8c sono illustrate tali componenti per le risultanti delle forze appena calcolate. Dal momento che le particelle sono connesse all'asse di rotazione da sbarrette rigide, vi è assenza di moto lungo la direzione radiale. Si osserva, inoltre, che il momento torcente delle risultanti, $\sum F_1$ e $\sum F_2$, rispetto all'origine O è nullo dal momento che i bracci sono nulli; è la sola componente tangenziale delle risultanti che contribuisce al momento torcente relativo a O. Il momento torcente totale relativo a O per il sistema costituito dalle due particelle, infine, è dato dalla somma dei momenti torcenti agenti su ciascuna particella:

$$\begin{aligned} \sum \tau_z &= \sum \tau_{z1} + \sum \tau_{z2} = \\ &= \left(\sum F_{1T}\right) r_1 + \left(\sum F_{2T}\right) r_2. \end{aligned} \tag{9.7}$$

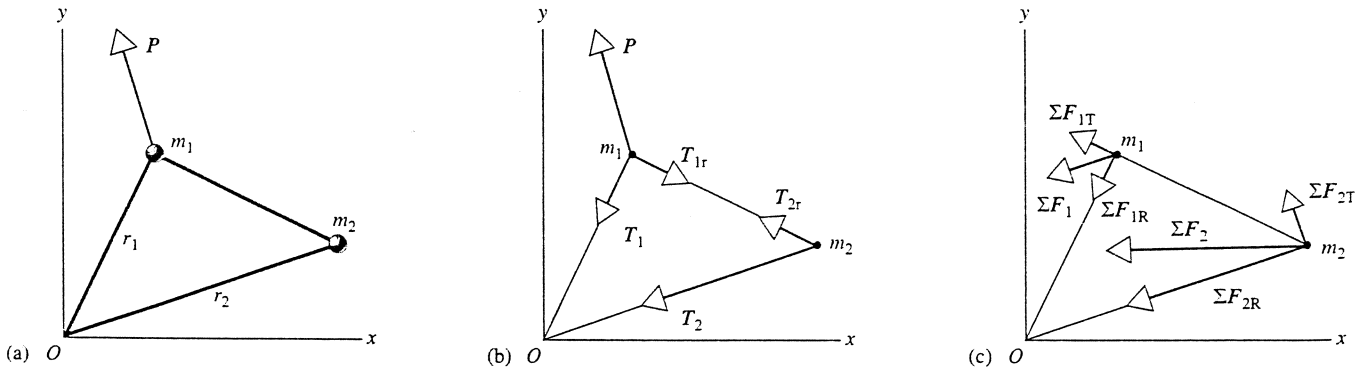


FIGURA 9.8 (a) La forza P è applicata a un corpo rigido costituito da due particelle connesse mutuamente e all'asse di rotazione z mediante sbarrette sottili di massa trascurabile. Il corpo rigido si muove nel piano xy. (b) Le forze agenti su ciascuna particella. (c) La risultante delle forze agenti su ciascuna particella con le sue componenti lungo le direzioni radiale e tangenziale.

Per ciascuna delle due particelle le componenti tangenziali della forza totale e dell'accelerazione sono legate dalla seconda legge di Newton, ovvero $\sum F_{1T} = m_1 a_{1T}$ e $\sum F_{2T} = m_2 a_{2T}$. Sostituendo queste espressioni nell'Equazione 9.7 si ha

$$\begin{aligned}\sum \tau_z &= \left(\sum F_{1T}\right) r_1 + \left(\sum F_{2T}\right) r_2 = \\ &= (m_1 a_{1T}) r_1 + (m_2 a_{2T}) r_2 = \\ &= (m_1 \alpha_z r_1) r_1 + (m_2 \alpha_z r_2) r_2 = \\ &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\alpha_z,\end{aligned} \tag{9.8}$$

ove il terzo passaggio deriva dall'Equazione 8.10 per le accelerazioni tangenziali ($a_{1T} = \alpha_z r_1$ e $a_{2T} = \alpha_z r_2$). L'accelerazione angolare α_z è la medesima per le due particelle perché esse costituiscono un corpo rigido.

Come nell'Equazione 9.6 la quantità $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$, che compare nell'Espressione 9.8, può essere interpretata come il momento *totale* d'inerzia I del sistema costituito dalla due particelle:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2. \tag{9.9}$$

Nel caso, quindi, di sistemi costituiti da due particelle in rotazione attorno a un medesimo asse, i momenti d'inerzia possono essere sommati algebricamente. L'estensione, ovvia, dell'Equazione 9.9 al caso di un sistema rigido costituito da N particelle in rotazione attorno a uno stesso asse è

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_N r_N^2 = \sum m_n r_n^2. \tag{9.10}$$

L'Equazione 9.8 può essere semplificata ulteriormente: si torni alla Figura 9.8b e si esaminino con maggiore attenzione i diversi termini che contribuiscono al momento torcente relativo all'origine O. Le tensioni T_1 e T_2 hanno momento torcente nullo rispetto a O perché le loro rette d'azione passano per l'origine. Le due tensioni T_{1r} e T_{2r}, inoltre, non contribuiscono al momento torcente complessivo perché esse sono uguali e opposte *e* hanno medesima retta d'azione. In definitiva l'unica forza che contribuisce al momento torcente complessivo relativo all'origine è la forza esterna P; la componente $\sum \tau_z$ può essere sostituita, nell'Equazione 9.8, dalla componente $\sum \tau_{ext,z}$ del momento della forza *esterna* rispetto al polo O. Con questa sostituzione e facendo uso dell'Equazione 9.9, la (9.8) risulta come segue:

$$\sum \tau_{ext,z} = I\alpha_z. \tag{9.11}$$

L'equazione precedente costituisce l'*espressione rotazionale della seconda legge di Newton*. Tale legge lega la componente lungo un certo asse – l'asse z nel caso qui discusso – del *momento totale delle forze esterne* con la componente lungo lo stesso asse dell'accelerazione angolare. Il momento d'inerzia I va, ovviamente, calcolato relativamente allo stesso asse.

L'Equazione 9.11 è molto simile in forma a quella che esprime la seconda legge di Newton per il moto traslatorio, $\sum F_x = ma_x$; tra le due equazioni, però, vi è una differenza fondamentale: l'equazione per il moto traslatorio è la proiezione dell'equazione vettoriale $\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ lungo la direzione del moto. L'equazione rotazionale, d'altro canto, non può essere interpretata in questo senso perché, in generale, calcolando il momento d'inerzia rispetto ai tre assi x, y e z si ottengono risultati differenti. Questa osservazione mette in evidenza il fatto che il momento d'inerzia sia in realtà una grandezza fisica più complicata del semplice scalare fin qui incontrato. Si ribadisce, comunque, che fintanto che ci si limita a studiare rotazioni attorno a un asse fisso, il momento d'inerzia I può essere trattato come uno scalare.

Nell'esempio discusso in precedenza si è supposto che la forza esterna agisse su una delle due particelle del sistema; in realtà l'Equazione 9.11 risulterebbe ancora valida, pur con valori diversi della componente $\sum \tau_{ext,z}$ del momento torcente, anche se la forza esterna agisse altrove, per esempio su un elemento di una delle tre sbarrette. Si osserva, infine, che l'Equazione 9.11 resta valida anche se sul sistema agiscono più forze esterne; in questo caso il primo membro sarà costituito dalla somma delle componenti lungo l'asse di rotazione dei momenti di tutte le forze esterne calcolati rispetto all'origine.

PROBLEMA SVOLTO 9.2 Tre particelle di masse $m_1 = 1{,}5$ kg, $m_2 = 3{,}2$ kg ed $m_3 = 1{,}5$ kg sono connesse rigidamente mediante sbarrette sottili di massa trascurabile in modo da occupare i vertici di un triangolo rettangolo di lati 3 m, 4 m e 5 m giacente sul piano xy (Figura 9.9). (a) Si determinino i momenti d'inerzia del sistema relativamente ai tre assi ortogonali al piano xy e passanti per i tre punti occupati dalle particelle. (b) La forza F di intensità pari a 4,5 N, parallela al piano xy e formante con l'asse orizzontale un angolo di 30°, è applicata alla particella di massa m_2. Si determini l'accelerazione angolare del sistema se questi è libero di ruotare attorno a un asse ortogonale al piano xy passante per il punto occupato dalla particella di massa m_3.

Soluzione Si consideri l'asse ortogonale al piano xy passante per il punto occupato dalla particella di massa m_1. La particella 1 è a distanza nulla dall'asse, $r_1 = 0$, e quindi non contribuisce al momento d'inerzia del sistema. Le distanze dall'asse delle particelle

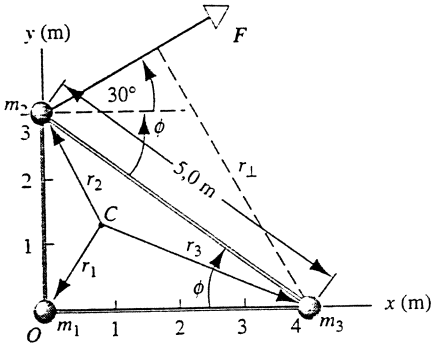


FIGURA 9.9 Il punto C individua la posizione del centro di massa del sistema costituito dalle tre particelle.

 ISBN 88-408-1254-7

m_2 ed m_3 sono, rispettivamente, $r_2 = 3{,}0$ m ed $r_3 = 4{,}0$ m. Usando l'Equazione 9.10 si ha che il momento d'inerzia rispetto all'asse considerato vale

$$I_1 = \sum m_n r_n^2 = (2{,}3\text{ kg})(0\text{ m})^2 + (3{,}2\text{ kg})(3{,}0\text{ m})^2 + \\ + (1{,}5\text{ kg})(4{,}0\text{ m})^2 = \\ = 53\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

In modo analogo si ragiona nel caso dell'asse passante per il punto occupato dalla particella m_2:

$$I_2 = \sum m_n r_n^2 = (2{,}3\text{ kg})(3{,}0\text{ m})^2 + (3{,}2\text{ kg})(0\text{ m})^2 + \\ + (1{,}5\text{ kg})(5{,}0\text{ m})^2 = \\ = 58\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Similmente nel caso dell'asse passante per il punto occupato dalla particella m_3:

$$I_3 = \sum m_n r_n^2 = (2{,}3\text{ kg})(4{,}0\text{ m})^2 + (3{,}2\text{ kg})(5{,}0\text{ m})^2 + \\ + (1{,}5\text{ kg})(0\text{ m})^2 = \\ = 117\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Supponendo fissata l'intensità del momento torcente, intorno a quale dei tre assi si ottiene la massima accelerazione angolare? E quella minima?

(b) Dal momento che il corpo rigido ruota attorno all'asse z è sufficiente calcolare la sola componente z del momento torcente. Si può usare l'Equazione 9.2b, $\tau_z = r_\perp F$; è necessario, quindi, calcolare il braccio $r_\perp$ illustrato in Figura 9.9. In base alle proprietà del triangolo i cui vertici sono occupati dalla particelle si ha che $\phi = \arcsin(3/5) = 37°$; l'angolo individuato dal vettore $\boldsymbol{F}$ e dal segmento congiungente le particelle m_3 ed m_2 è uguale a $30° + 37° = 67°$. Pertanto si ha $r_\perp = (5{,}0\text{ m})\sin 67° = 4{,}6$ m. L'intensità del momento torcente cercato è quindi

$$\tau_z = r_\perp F = (4{,}6\text{ m})(4{,}5\text{ N}) = 20{,}7\text{ N}\cdot\text{m}.$$

Dal momento che le Equazioni 9.1 e 9.2 forniscono il solo modulo del momento torcente, il segno della sua componente lungo l'asse z deve essere determinato in altro modo. Sotto l'azione della forza $\boldsymbol{F}$ il sistema illustrato in Figura 9.9 tende a ruotare in verso orario rispetto al verso positivo dell'asse z. Affinché le dita della mano destra ruotino concordemente con il corpo è necessario posizionare il pollice nel verso entrante nel foglio; da tale osservazione si deduce che la componente z del momento torcente è negativa. In definitiva si ha $\tau_z = -20{,}7\text{ N}\cdot\text{m}$.

Se si ricorda che $\boldsymbol{F}$ è la sola forza esterna agente sul corpo, si può determinare l'accelerazione angolare del corpo stesso mediante l'Equazione 9.11 e il valore del momento d'inerzia relativo all'asse passante per m_3 calcolato in precedenza al punto (a); si ha

$$\alpha_z = \frac{\sum \tau_{\text{ext},z}}{I_3} = \frac{-20{,}7\text{ N}\cdot\text{m}}{117\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = -0{,}18\text{ rad/s}^2.$$

Si sottolinea ancora una volta che il segno meno indica una rotazione in verso orario rispetto al verso positivo dell'asse z.

PROBLEMA SVOLTO 9.3 Si determini il momento d'inerzia del sistema di tre particelle illustrato in Figura 9.9 relativo all'asse perpendicolare al piano xy e passante per il centro di massa del sistema.

Soluzione In primo luogo è necessario determinare la posizione del centro di massa del sistema in Figura:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_n x_n}{\sum m_n} = \\ = \frac{(2{,}3\text{ kg})(0\text{ m}) + (3{,}2\text{ kg})(0\text{ m}) + (1{,}5\text{ kg})(4{,}0\text{ m})}{2{,}3\text{ kg} + 3{,}2\text{ kg} + 1{,}5\text{ kg}} = \\ = 0.86\text{ m},$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_n y_n}{\sum m_n} = \\ = \frac{(2{,}3\text{ kg})(0\text{ m}) + (3{,}2\text{ kg})(3.0\text{ m}) + (1{,}5\text{ kg})(0\text{ m})}{2{,}3\text{ kg} + 3{,}2\text{ kg} + 1{,}5\text{ kg}} = \\ = 1{,}37\text{ m}.$$

I quadrati delle distanze delle particelle dal centro di massa sono dati da

$$r_1^2 = x_{\text{cm}}^2 + y_{\text{cm}}^2 = (0{,}86\text{ m})^2 + (1{,}37\text{ m})^2 = 2{,}62\text{ m}^2,$$
$$r_2^2 = x_{\text{cm}}^2 + (y_2 - y_{\text{cm}})^2 = (0{,}86\text{ m})^2 + (3{,}0\text{ m} - 1{,}37\text{ m})^2 = \\ = 3{,}40\text{ m}^2,$$
$$r_3^2 = (x_3 - x_{\text{cm}})^2 + y_{\text{cm}}^2 = (4{,}0\text{ m} - 0{,}86\text{ m})^2 + (1{,}37\text{ m})^2 = \\ = 11{,}74\text{ m}^2.$$

Il momento d'inerzia cercato segue dall'Equazione 9.10:

$$I_{\text{cm}} = \sum m_n r_n^2 = (2.3\text{ kg})(2{,}62\text{ m}^2) + (3{,}2\text{ kg})(3{,}40\text{ m}^2) + \\ + (1{,}5\text{ kg})(11{,}74\text{ m}^2) = \\ = 35\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Si noti che il momento d'inerzia relativo al centro di massa (se ne confronti il valore con quelli determinati nel problema svolto precedente) è il più basso tra tutti quelli che sono stati calcolati per il nostro sistema. Questo risultato, come verrà dimostrato in seguito, vale in modo del tutto generale e può essere espresso dicendo che gli assi attorno ai quali è più facile porre in rotazione un corpo sono quelli passanti per il suo centro di massa.

Il teorema di Huygens-Steiner

I risultati discussi nell'ambito del Problema svolto 9.3 conducono alla formulazione del teorema di Huygens-Steiner, noto anche come teorema degli assi paralleli:

> *il momento d'inerzia di un corpo relativo a un asse qualsiasi è uguale alla somma del momento d'inerzia relativo all'asse parallelo al primo passante per il centro di massa e del prodotto della massa totale del corpo per il quadrato della distanza tra i due assi.*

In modo più sintetico il contenuto del teorema precedente può essere espresso come segue:

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2, \qquad (9.12)$$

ove I è il momento d'inerzia relativo all'asse dato, I_{cm} è il momento d'inerzia relativo a un asse parallelo all'asse dato e passante per il centro di massa, M è la massa totale del corpo e h è la distanza tra i due assi. Si sottolinea che il risultato non è valido se i due assi non sono paralleli.

Prima di dimostrare il teorema degli assi paralleli se ne illustra un'applicazione ottenendo in modo alternativo i risultati del Problema svolto 9.2. Nel Problema svolto 9.3 è stato calcolato il momento d'inerzia $I_{cm} = 35\ kg \cdot m^2$ relativo all'asse ortogonale al piano xy passante per il centro di massa. La distanza tra l'asse passante per il centro di massa e quello passante per il vertice occupato dalla particella di massa m_1 è uguale a r_1, il cui quadrato è stato calcolato nel Problema svolto 9.3. Allora, applicando il teorema di Huygens-Steiner, si ha

$$I_1 = I_{cm} + Mh^2 =$$
$$= 35\ kg \cdot m^2 + (2{,}3\ kg + 3{,}2\ kg + 1{,}5\ kg)(2{,}62\ m^2) =$$
$$= 53\ kg \cdot m^2,$$

in accordo con il risultato già determinato al punto (a) del Problema svolto 9.2. In modo analogo il lettore può ricalcolare i momenti d'inerzia I_2 e I_3.

Il teorema degli assi paralleli ha un importante corollario: dal momento che il termine Mh^2 è un numero positivo, si ha che il momento d'inerzia I_{cm} relativo a un asse passante per il centro di massa è il minimo tra i momenti d'inerzia relativi agli infiniti assi paralleli all'asse dato. In generale, però, tale momento d'inerzia non rappresenta il minimo *assoluto* tra tutti i momenti d'inerzia del corpo; infatti considerando direzioni differenti si potrebbero trovare assi passanti per il centro di massa rispetto ai quali il corpo ha un momento d'inerzia minore. In ogni caso, se ci si limita a considerare rotazioni di un corpo in un piano fissato, a parità di momento torcente applicato, la massima accelerazione angolare viene ottenuta in corrispondenza di rotazioni attorno all'asse passante per il centro di massa.

Dimostrazione del Teorema di Huygens-Steiner. In Figura 9.10 è illustrata una lamina sottile giacente sul piano xy di cui si vuole calcolare il momento d'inerzia relativo all'asse z, passante per l'origine O e ortogonale al piano della figura. La lamina può essere pensata come un insieme di elementi infinitesimi la cui massa è denotata con m_n e la cui posizione è individuata dalle coordinate x_n e y_n, nel riferimento con origine in O, e dalle coordinate x'_n e y'_n, nel riferimento con origine nel centro di massa C. Il momento d'inerzia relativo all'asse z è dato da

$$I = \sum m_n r_n^2 = \sum m_n (x_n^2 + y_n^2).$$

Se si designano con x_{cm} e y_{cm} le coordinate del centro di massa nel riferimento con origine in O, dalla Figura 9.10 si ottengono le seguenti relazioni tra le coordinate x_n, y_n e x'_n, y'_n: $x_n = x'_n + x_{cm}$ e $y_n = y'_n + y_{cm}$. Sostituendo queste espressioni nell'equazione che fornisce I si ha

$$I = \sum m_n [(x'_n + x_{cm})^2 + (y'_n + y_{cm})^2] =$$
$$= \sum m_n (x'^2_n + 2x'_n x_{em} + x_{cm}^2 + y'^2_n + 2y'_n y_{cm} + y_{cm}^2).$$

Riorganizzando i diversi termini presenti nella formula precedente si ottiene

$$I = \sum m_n (x'^2_n + y'^2_n) + 2x_{cm} \sum m_n x'_n +$$
$$+ 2y_{cm} \sum m_n y'_n + (x_{cm}^2 + y_{cm}^2) \sum m_n.$$

Il primo termine della somma è il momento d'inerzia $I_{cm} = \sum m_n r'^2_m$. I due termini successivi ricordano le espressioni (vedi Equazione 7.12) che forniscono le coordinate del centro di massa, ma, come suggerisce la Figura 9.10, tali espressioni sono scritte nel riferimento del centro di massa. Allora, $\sum m_n x'_n = M x'_{cm} = 0$ dal momento che $x'_{cm} = 0$ poiché il centro di massa è l'origine del riferimento del centro di massa; analogamente $\sum m_n y'_n = M y'_{cm} = 0$. Nell'ultimo termine, infine, se si denota con h la distanza tra la posizione occupata dal centro di massa e l'origine O si ha $h^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$. Se si pone, inoltre, $\sum m_n = M$, si ha che la formula precedente può essere riscritta come segue:

$$I = I_{cm} + Mh^2;$$

ciò completa la dimostrazione del Teorema di Huygens-Steiner.

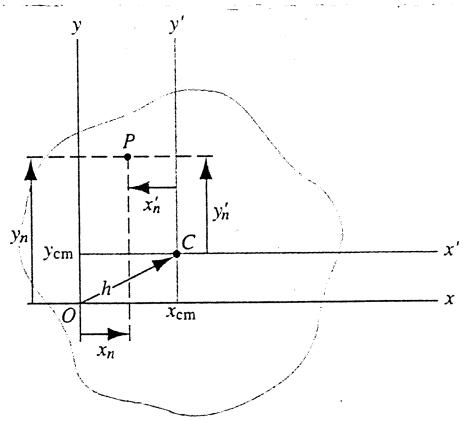


FIGURA 9.10 Una lamina sottile giacente sul piano xy può ruotare liberamente attorno all'asse z, passante per l'origine O e ortogonale al piano della Figura. Il punto C indica la posizione del centro di massa della lamina. L'elemento che occupa il punto P è individuato dalle coordinate x_n e y_n, nel riferimento con origine in O, e dalle coordinate x'_n e y'_n, nel riferimento con origine in C.

PROBLEMA SVOLTO 9.4 L'oggetto in Figura 9.11 è costituito da due particelle di masse m_1 ed m_2 collegate da una bacchetta rigida sottile di lunghezza L e di massa trascurabile. (a) Si determini il momento d'inerzia I del corpo rispetto a un asse ortogonale alla sbarretta e passante per il suo punto a distanza x dalla particella di massa m_1. (b) Si dimostri che I è minimo per $x = x_{cm}$.

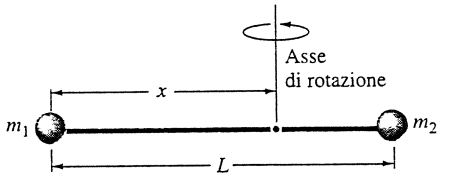


FIGURA 9.11 Problema svolto 9.4. L'oggetto è libero di ruotare attorno a un asse parallelo alla sbarretta e passante per un suo punto a distanza x dalla particella di massa m_1.

 ISBN 88-408-1254-7

Soluzione (a) Dall'Equazione 9.9 si ha

$$I = m_1 x^2 + m_2 (L - x)^2.$$

(b) Per determinare il valore minimo di I si pone uguale a zero la sua derivata calcolata rispetto a x:

$$\frac{dI}{dx} = 2m_1 x + 2m_2 (L - x)(-1) = 0.$$

Risolvendo l'equazione precedente si ha che il minimo è assunto in

$$x = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}.$$

Questa espressione è identica a quella che fornisce la posizione del centro di massa; si può, quindi, concludere che il valore minimo del momento d'inerzia è realizzato in corrispondenza di $x = x_{cm}$. Questo risultato è coerente con il corollario del teorema di Huygens-Steiner discusso in precedenza.

Si ricorda che i punti in cui si annulla la derivata prima di una funzione non sono necessariamente punti di minimo; per esempio potrebbe trattarsi di punti di massimo. Il lettore dimostri, studiando il comportamento della derivata *seconda*, che il punto determinato è davvero un punto di minimo della funzione $I = I(x)$.

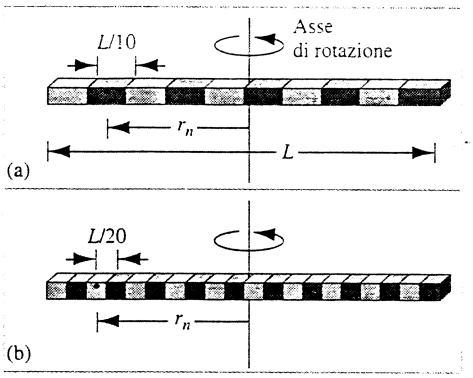


FIGURA 9.12 (a) Il momento d'inerzia di una sbarretta rigida e uniforme di lunghezza L, rispetto a un asse ad essa ortogonale e passante per il suo punto medio, può essere calcolata approssimativamente suddividendo la sbarretta in 10 pezzetti di lunghezza $L/10$. Ciascun pezzetto viene considerato come una particella puntiforme a distanza r_n dall'asse. (b) Un'approssimazione migliore del momento d'inerzia della sbarretta si può ottenere suddividendo la sbarretta stessa in 20 pezzetti.

9.3 MOMENTO D'INERZIA DEI CORPI RIGIDI

Un corpo rigido può essere pensato come un insieme di elementi discreti di massa molto piccola; con questa semplificazione il suo momento d'inerzia rispetto a un asse dato può essere calcolato mediante l'Equazione 9.10, ove la somma va ritenuta estesa all'insieme di tutti gli elementi del corpo. Se si pensa al corpo rigido come a una distribuzione continua di massa, il corpo può suddividersi in infiniti elementi di massa infinitesima δm_n, la cui distanza dall'asse rispetto al quale si vuole calcolare il momento si designa con r_n. Se ciascun elemento δm_n viene trattato come una particella puntiforme, il momento d'inerzia del corpo può essere calcolato come

$$I = \sum r_n^2 \, \delta m_n. \qquad (9.13)$$

Se nella formula precedente si considerasse il limite per δm_n tendente a zero, la somma ivi presente si trasformerebbe in un integrale. Per illustrare nel dettaglio questa operazione di passaggio al limite si consideri un esempio semplice: mediante l'Equazione 9.13 si voglia calcolare il momento d'inerzia di una sbarretta rigida uniforme rispetto a un asse ad essa perpendicolare e passante per il suo punto medio (Figura 9.12). Sia L la lunghezza della sbarretta ed M la sua massa; si suddivida la sbarretta in 10 pezzetti di lunghezza $L/10$ e massa $M/10$. I pezzi vengono numerati da $n = 1$ fino a $n = 10$ e si denota con r_n la distanza dell'n-esimo pezzo dall'asse; tali distanze vengono misurate dall'asse al punto medio di ciascun pezzetto. Allora i due pezzi più esterni distano dall'asse $r_1 = r_{10} = 0{,}45L$, i pezzetti loro adiacenti distano $r_2 = r_9 = 0{,}35L$, mentre i pezzetti adiacenti all'asse ne distano $r_5 = r_6 = 0{,}05L$. A questo punto siamo in grado, in accordo con l'Equazione 9.13, di calcolare la somma estesa ai dieci pezzetti in cui è stata suddivisa la sbarretta originaria:

$$\begin{aligned} I &= r_1^2 \delta m_1 + r_2^2 \delta m_2 + \cdots + r_{10}^2 \delta m_{10} = \\ &= (0{,}1M)(0{,}45L)^2 + (0{,}1M)(0{,}35L)^2 + \\ &\quad + (0{,}1M)(0{,}25L)^2 + (0{,}1M)(0{,}15L)^2 + \\ &\quad + (0{,}1M)(0{,}05L)^2 + \cdots, \end{aligned}$$

ove i cinque termini riportati nell'ultimo membro dell'equazione precedente si riferiscono ai cinque pezzetti a destra dell'asse e i puntini, $\cdots$, si riferiscono ad altri identici cinque termini relativi ai pezzetti a sinistra dell'asse. Eseguendo tutti i calcoli si ottiene

$$I = 0{,}0825ML^2 = \frac{1}{12{,}12}ML^2 \quad \text{(10 pezzi)}.$$

Il motivo per cui il risultato è stato scritto nella forma precedente sarà presto evidente.

Si supponga, ora, di suddividere la sbarretta in 20 pezzetti di lunghezza $L/20$ e di massa $M/20$ come illustrato in Figura 9.12b. Se si ripete il calcolo precedente si ottiene

$$I = 0{,}0831ML^2 = \frac{1}{12{,}03}ML^2 \quad \text{(20 pezzi)}.$$

È lecito chiedersi se al crescere del numero di pezzi in cui la sbarretta viene suddivisa il risultato di questo conto si avvicini a un limite che possa, quindi, essere considerato come il momento d'inerzia della sbarretta. Si ripete, allora, il calcolo precedente, come suggerito nell'Esercizio 21, per un numero arbitrario N di pezzetti e si ottiene

$$I = \frac{1}{12}ML^2\left(\frac{N^2 - 1}{N^2}\right) \quad (N\text{pezzi}). \qquad (9.14)$$

Quando $N \to \infty$ la funzione precedente tende al limite $ML^2/12$, che può essere interpretato come il momento d'i-

nerzia della sbarretta rispetto all'asse dato. Si osserva che i coefficienti 1/12.12) e (1/12.03) calcolati rispettivamente nei casi $N = 10$ e $N = 20$ lasciavano intuire il tendere a 1/12 del coefficiente numerico del momento d'inerzia al limite per $N \to \infty$.

Il procedimento algebrico seguito nel caso semplice della sbarretta permette il calcolo del momento d'inerzia di un corpo rigido in pochi casi elementari, ma fornisce un'idea intuitiva molto interessante di come, per mezzo del calcolo integrale, si suddivida un corpo continuo in pezzetti discreti di dimensione infinitesima. Nei casi in cui il procedimento algebrico risulta inefficace o inutilmente laborioso è preferibile usare direttamente i metodi del calcolo integrale. Si considera, quindi, il limite dell'Espressione 9.13 quando il numero di elementi in cui è suddiviso il corpo tende all'infinito, ovvero quando la loro massa elementare δm_n tende a zero, e si pone tale limite uguale al momento d'inerzia del corpo rigido:

$$I = \lim_{\delta m_n \to 0} \sum r_n^2 \, \delta m_n.$$

Con i soliti argomenti, nell'espressione precedente il limite della somma può essere sostituito con un integrale:

$$I = \int r^2 \, dm. \tag{9.15}$$

L'integrale è esteso all'intero volume del corpo, ma spesso particolari proprietà di simmetria permettono di ricondursi a integrali più semplici.

A titolo di esempio si esegue il calcolo del momento d'inerzia della sbarretta relativo a un asse passante per il suo centro di massa adottando il punto di vista del calcolo integrale. Il nuovo approccio è descritto in Figura 9.13. La distanza dall'asse dato di un generico elemento dm della sbarretta viene denotata con x e si usa tale variabile come variabile di integrazione. La massa di tale elemento è uguale alla massa volumica ρ, che si ricorda è definita come la massa per unità di volume, moltiplicata per il volume infinitesimo dV dell'elemento. Il volumetto è uguale alla sezione trasversa della sbarretta moltiplicata per lo spessore dx dell'elemento:

$$dV = A \, dx$$
$$dm = \rho \, dV = \rho A \, dx.$$

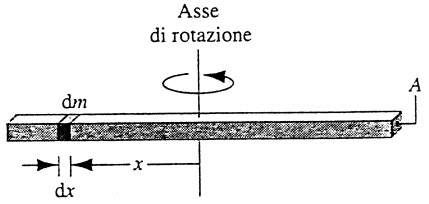


FIGURA 9.13 Si esegue il calcolo del momento d'inerzia della sbarretta relativo a un asse passante per il suo centro di massa adottando il metodo del calcolo integrale. La distanza dall'asse di un generico elemento della sbarretta dm viene denotata con x.

Nelle equazioni precedenti si è supposto che sia la sezione A che la massa volumica ρ della sbarretta siano uniformi. La massa volumica, inoltre, è uguale al rapporto tra la massa M della sbarretta e il suo volume AL, ovvero $\rho = M/V = M/(AL)$. Introducendo le espressioni appena determinate nell'Equazione 9.15 si ottiene

$$I = \int r^2 \, dm = \int x^2 \frac{M}{AL} A \, dx = \frac{M}{L} \int x^2 \, dx.$$

Se si sceglie l'origine coincidente con il punto medio della sbarretta, gli estremi di integrazione saranno $-L/2$ e $L/2$. Allora si ha

$$I = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \, dx = \left[\frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2. \tag{9.16}$$

Si è ottenuto, ovviamente, lo stesso risultato fornito dal procedimento algebrico discusso in precedenza.

Si vuole, ora, calcolare il momento d'inerzia della sbarretta relativo a un asse ad essa ortogonale e passante per uno dei suoi estremi. Il metodo più semplice consiste nell'applicare il teorema degli assi paralleli, ovvero nell'uso dell'Equazione 9.12: il momento d'inerzia I_{cm} è quello appena calcolato e la distanza h tra i due assi è uguale $L/2$, di modo che

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2.$$

Un procedimento di calcolo del momento d'inerzia, che risulta molto utile in numerose circostanze, si basa sull'idea di scomporre un corpo rigido in parti più semplici di cui si conosce il momento d'inerzia. Si supponga, per esempio, di voler calcolare il momento d'inerzia di una lamina rettangolare rigida e uniforme di lati a e b relativamente all'asse ortogonale alla lamina e passante per il suo centro di simmetria (Figura 9.14).

La lamina può essere suddivisa in strisce elementari ciascuna delle quali può essere assimilata a una sbarretta retti-

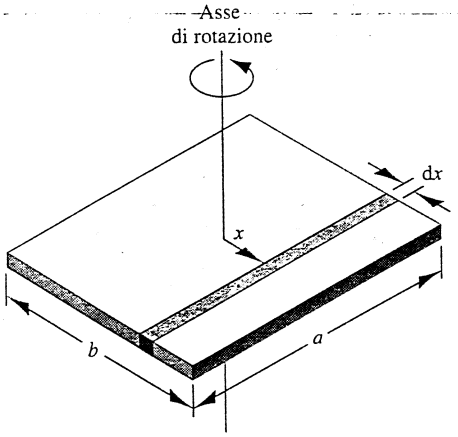


FIGURA 9.14 Si vuole calcolare il momento d'inerzia di una lamina rettangolare rigida e uniforme di lati a e b relativamente all'asse ortogonale alla lamina e passante per il suo centro. Si può suddividere la lamina in strisce elementari, ciascuna delle quali può essere assimilata a una sbarretta il cui momento d'inerzia si calcola con il teorema di Huygens-Steiner.

 ISBN 88-408-1254-7

linea. Si consideri la striscia di massa dm, lunghezza a e spessore dx mostrata in Figura 9.14. Il rapporto tra la massa dm della striscia e la massa totale della lamina è uguale al rapporto tra la superficie $a\,dx$ della striscia e la superficie totale ab della lamina:

$$\frac{dm}{M} = \frac{a\,dx}{ab} = \frac{dx}{b}$$
$$dm = \frac{M}{b}\,dx.$$

Per il calcolo del momento d'inerzia elementare dI della striscia relativo all'asse dato è utile il teorema di Huygens-Steiner, laddove il momento d'inerzia della striscia, pensata come una sbarretta, relativo a un asse passante per il suo centro di massa è dato da (Equazione 9.16) $dI_{cm} = (1/12)dm\,a^2$; quindi

$$dI = dI_{cm} + dm\,h^2 = \frac{1}{12}dm\,a^2 + dm\,x^2.$$

Sostituendo il valore di dm si ha

$$dI = \frac{Ma^2}{12b}\,dx + \frac{M}{b}x^2\,dx,$$

e integrando si ottiene il valore del momento d'inerzia:

$$I = \int dI = \frac{Ma^2}{12b}\int dx + \frac{M}{b}\int x^2\,dx.$$

I limiti di integrazione sono $-b/2$ e $+b/2$; eseguendo i calcoli si ottiene

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2). \qquad (9.17)$$

Si osserva che il risultato appena ottenuto è indipendente dallo spessore della lamina: lo stesso risultato vale sia per una pila di lamine rettangolari sia per un solido a forma di parallelepipedo con base coincidente con la lamina rettangolare ab. Si osserva infine che il momento d'inerzia dipende dai lati del rettangolo solo attraverso la combinazione $a^2 + b^2$; in altri termini, più che dipendere dai singoli lati, dipende dalla lunghezza della diagonale. Come si spiega questa osservazione?

Procedendo sulla falsa riga di quanto è stato appena fatto è possibile determinare il momento d'inerzia di quasi tutti i solidi regolari. In Figura 9.15 sono riportati alcuni solidi molto comuni e i relativi momenti d'inerzia. Sebbene per i solidi in figura sia abbastanza semplice eseguire direttamente gli integrali in dimensione due e tre, spesso può essere utile eseguire il calcolo suddividendo il corpo in parti semplici di momento d'inerzia noto. Nel Problema 16, per esempio, viene descritto il calcolo del momento d'inerzia per un corpo rigido di forma sferica.

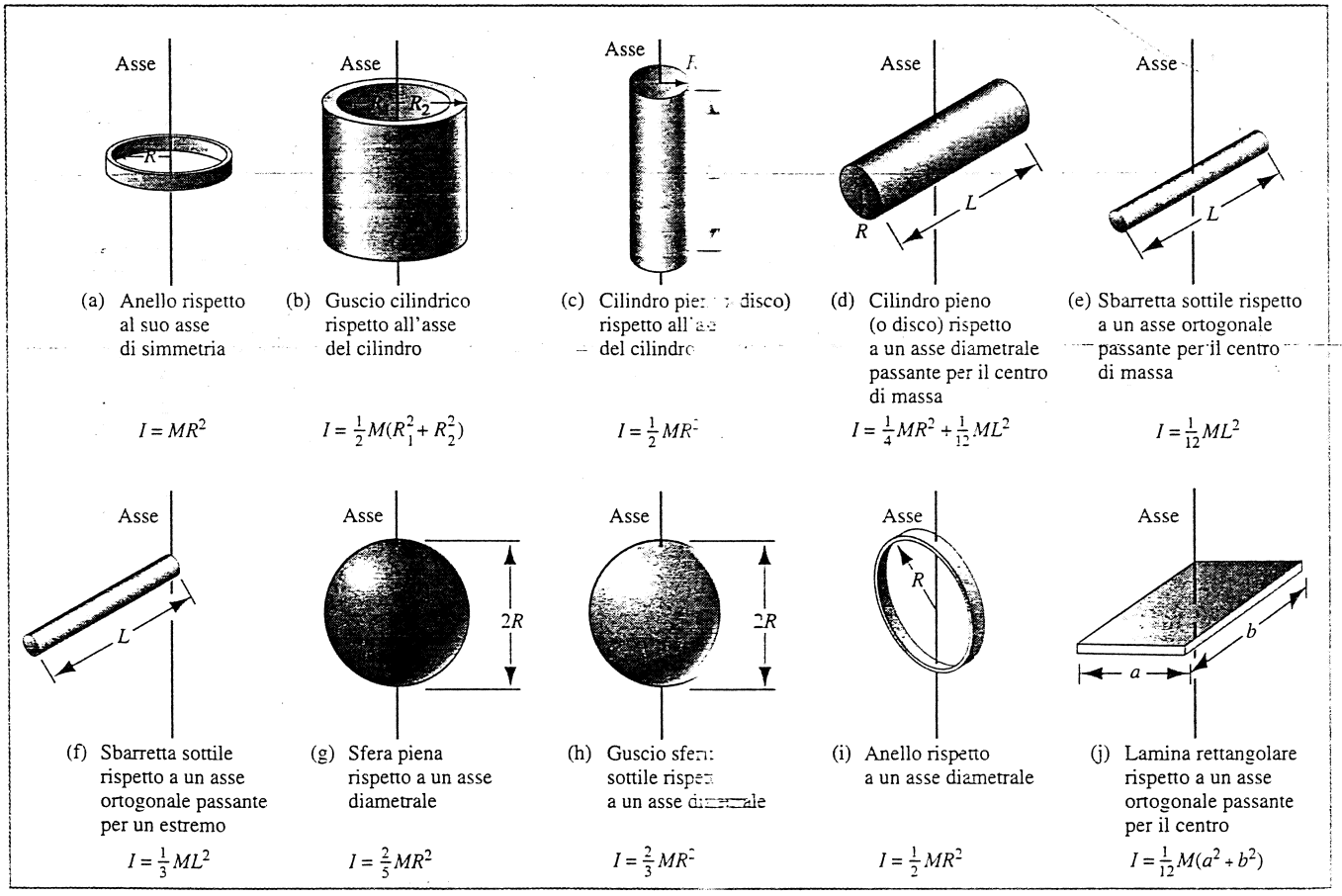


FIGURA 9.15 Momento d'inerzia di alcuni solidi rispetto ad alcuni assi particolari.

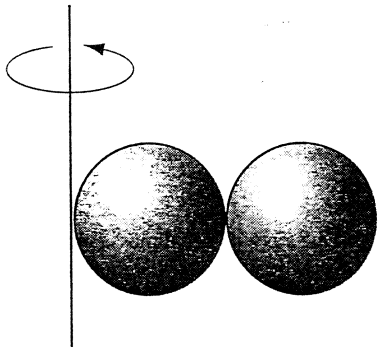


FIGURA 9.16 Problema svolto 9.5. Due sfere a contatto vengono poste in rotazione attorno a un asse.

PROBLEMA SVOLTO 9.5 Due sfere identiche di massa M e raggio R sono saldate assieme, come illustrato in Figura 9.16, e il corpo rigido così ottenuto è lasciato libero di ruotare attorno a un asse tangente a una delle due sfere e ortogonale alla retta che ne congiunge in centri. Si determini il momento d'inerzia del corpo relativo a tale asse.

Soluzione Così come le masse, anche i momenti di inerzia attorno a uno stesso asse si sommano come scalari. Allora il momento d'inerzia del corpo rigido è dato da $I = I_1 + I_2$. Usando il teorema degli assi paralleli il momento d'inerzia della sfera più vicina all'asse di rotazione è

$$I_1 = I_{cm} + Mh^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = 1{,}4MR^2,$$

mentre per la seconda sfera si ha

$$I_2 = I_{cm} + Mh^2 = \frac{2}{5}MR^2 + M(3R)^2 = 9{,}4MR^2.$$

Il momento d'inerzia del corpo è dunque

$$I = I_1 + I_2 = 10{,}8MR^2.$$

9.4 MOMENTO TORCENTE DOVUTO ALLA GRAVITÀ

La situazione fisica illustrata nella Figura 9.2 è caratterizzata dalla presenza di una singola forza esterna applicata a un elemento del corpo; per questo motivo è stato possibile usare l'Equazione 9.3 per calcolare il momento torcente esterno totale. Si supponga, ora, di sorreggere una delle due estremità di una lunga sbarra metallica libera di ruotare attorno a un asse orizzontale passante per la seconda estremità (Figura 9.17). Se lo sperimentatore lasciasse la sbarra al suo destino, questa inizierebbe a ruotare attorno all'asse fisso sotto l'azione della forza di gravità. Se si pensa alla sbarra come a un insieme di elementi infinitesimi, la forza di gravità, agendo verso il basso su ciascuno di questi elementi, esercita su di essi un momento torcente. L'intera sbarra, allora, è sottoposta a un momento torcente totale che potrebbe essere calcolato sommando i contributi dovuti ai diversi elementi, ma questo modo di procedere sembra decisamente troppo complicato.

Il problema, però, può essere notevolmente semplificato. La sollecitazione gravitazionale agente sulla sbarra, ovvero

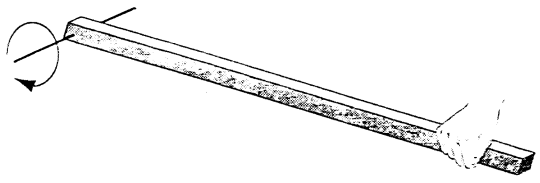


FIGURA 9.17 Lo sperimentatore sorregge una delle due estremità di una lunga sbarra metallica libera di ruotare attorno a un asse orizzontale passante per la seconda estremità.

l'insieme di tutte le forze di gravità elementari che agiscono su ciascun elemento della sbarra, può essere sostituito da una sola forza che (1) è uguale al prodotto della massa della sbarra per l'accelerazione di gravità e (2) è applicata in un punto detto *baricentro*. Come si vedrà nel seguito, nella maggior parte dei casi fisicamente interessanti, e comunque in tutti i casi discussi in questo libro, il baricentro di un corpo coincide con il suo centro di massa. Si vuole dimostrare ora che la forza equivalente alla sollecitazione gravitazionale presenta le due caratteristiche enunciate.

Si consideri un corpo (Figura 9.18) di massa M e si immagini di suddividerlo in un numero molto grande di elementi di massa m_n. La forza di gravità che la Terra esercita sull'n-esimo elemento è pari a $m_n g$ ed è diretta verso il basso lungo la retta passante per la posizione occupata dall'elemento e per il centro della Terra. La risultante delle forze di gravità che agiscono sugli infiniti elementi del corpo è la somma di tutte queste forze elementari:

$$\sum F = \sum m_n g. \tag{9.18}$$

Se assumiamo che il vettore g non dipenda dall'indice di sommatoria, ovvero che sia lo stesso per tutti gli elementi, è possibile portarlo fuori dal segno di somma; si ha, quindi,

$$\sum F = g \sum m_n = Mg. \tag{9.19}$$

Si è quindi dimostrata la prima delle affermazioni precedenti, ovvero che alla sollecitazione gravitazionale si può sostituire la forza Mg.

Si vuole calcolare, ora, la componente lungo un asse ortogonale al piano della Figura 9.18, del momento torcente totale relativo al polo O, dovuto alla forza gravitazionale. Il vettore r_n individua la posizione dell'elemento di massa m_n rispetto all'origine O. Il momento torcente totale relativo a questo punto, dovuto alla sollecitazione gravitazionale, è dato da

$$\sum \tau = \sum (r_n \times m_n g) = \sum (m_n r_n \times g). \tag{9.20}$$

ove nell'ultimo passaggio ci si è limitati a spostare il coefficiente scalare m_n sull'altro fattore, ciò che non modifica il prodotto vettoriale. Ancora una volta è possibile usare l'indipendenza di g dall'indice di sommatoria per portarlo fuori dalla somma stessa facendo attenzione, però, a non invertire l'ordine dei vettori r_n e g, nel qual caso cambierebbe il segno del prodotto vettoriale. In virtù dell'Equazione 7.11 la

 ISBN 88-408-1254-7

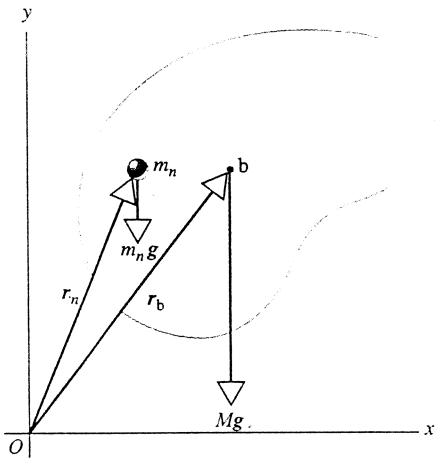


FIGURA 9.18 Un generico elemento di massa m_n di un corpo rigido è sottoposto all'azione della forza di gravità $m_n g$. L'intera sollecitazione gravitazionale, ovvero l'insieme delle singole forze di gravità elementari che agiscono sui diversi elementi che costituiscono il corpo, sebbene sia distribuita su tutto il corpo può essere sostituita con la singola forza Mg applicata al baricentro. Se il campo gravitazionale è uniforme, ovvero se l'accelerazione di gravità è la stessa per tutti gli elementi del corpo, il baricentro coincide con il centro di massa e quindi $r_b = r_{cm}$.

restante somma $\sum m_n r_n$ è uguale a Mr_{cm}, ove r_{cm} è il vettore che individua la posizione del centro di massa rispetto all'origine O. Procedendo in questo modo l'Equazione 9.20 può essere riscritta come segue:

$$\sum \tau = \left(\sum m_n r_n\right) \times g = Mr_{cm} \times g = \\ = r_{cm} \times Mg. \tag{9.21}$$

Il momento torcente totale relativo a O dovuto alla sollecitazione gravitazionale, quindi, è uguale al momento rispetto al polo O della singola forza Mg applicata al centro di massa del corpo. Si può quindi concludere che il baricentro del corpo coincide con il suo centro di massa, il che dimostra la seconda affermazione. Un utile corollario dell'Equazione 9.21 è il seguente: *il momento torcente totale relativo al centro di massa dovuto alla forza gravitazionale è nullo.*

Centro di massa e baricentro

Il centro di massa e il baricentro, pur coincidendo nel caso di campo gravitazionale uniforme, sono due concetti ben distinti. Il centro di massa è definito per un corpo del tutto generico e, con i metodi discussi nel Capitolo 7, può essere calcolato una volta nota la distribuzione della massa all'interno del corpo. Il baricentro di un dato corpo, invece, è un concetto che ha senso solo se il corpo è immerso in un campo gravitazionale. Al fine di calcolare la posizione del baricentro non è sufficiente conoscere la distribuzione di massa, ma è necessario sapere se e come varia il campo g all'interno del corpo. Se il campo g non è uniforme, ovvero se varia da punto a punto all'interno del corpo, il centro di massa e il baricentro occuperanno posizioni differenti; in

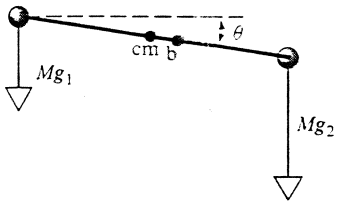


FIGURA 9.19 Due sfere di uguale massa unite mediante un'asticella rigida di massa trascurabile. Il centro di massa occupa il punto medio dell'asticella. Se l'accelerazione di gravità subita dalla sfera in basso è maggiore di quella subita dalla sfera in alto, la posizione occupata dal baricentro risulta più spostata, rispetto al centro di massa, verso la sfera in basso.

tale caso, infatti, il vettore g non può essere portato fuori dalle somme che compaiono nelle Equazioni 9.18 e 9.20.

Si consideri il manubrio da pesista illustrato nella Figura 9.19, costituito da due sfere di uguale massa connesse per mezzo di una sbarra rigida di massa trascurabile. La sbarra è inclinata rispetto all'orizzontale in modo da formare con questo un angolo θ non nullo. Il centro di massa occupa il punto medio della sbarra. Se il manubrio fosse in posizione orizzontale, il baricentro coinciderebbe con il centro di massa; ciò, però, non è vero nel caso in figura perché il campo gravitazionale varia leggermente con la distanza di un corpo dalla superficie terrestre. La sfera in basso, infatti, è sottoposta a una forza gravitazionale maggiore di quella cui è sottoposta la sfera in alto; per tale ragione il baricentro è situato un po' più in basso rispetto al centro di massa.

Se si variasse l'angolo θ o si spostasse il manubrio in una regione con diverso campo gravitazionale, la posizione del baricentro lungo la sbarretta cambierebbe, mentre quella del centro di massa resterebbe invariata. La posizione occupata dal baricentro, quindi, dipende da come un oggetto viene orientato e dal campo gravitazionale locale nella regione in cui si trova l'oggetto. Per un manubrio lungo 1 m inclinato di 45° rispetto al piano orizzontale e posto molto vicino alla superficie terrestre, la distanza tra centro di massa e baricentro è di circa 5.5 nm. Tale distanza è molto minore della precisione tipica che si usa nelle misure di lunghezza; pertanto a tutti gli effetti pratici il baricentro può essere considerato coincidente con il centro di massa.

Si consideri un corpo sospeso e si denoti con S il punto di sospensione. Nella posizione di equilibrio la somma delle forze esterne e il momento torcente totale esterno relativo all'asse di rotazione devono essere nulli. Dal momento che la somma delle forze esterne deve essere nulla, il dispositivo che realizza la sospensione deve esercitare in S una forza uguale e opposta alla risultante della sollecitazione gravitazionale. Poiché anche il momento torcente totale deve essere nullo, le due forze devono avere anche la medesima retta d'azione verticale.

La stessa condizione deve essere verificata quando si prova a tenere in equilibrio un bastoncino posto orizzontalmente sul proprio dito. Se il bastoncino si inclina, anche di poco, la forza di gravità, che agisce verso il basso, e la forza

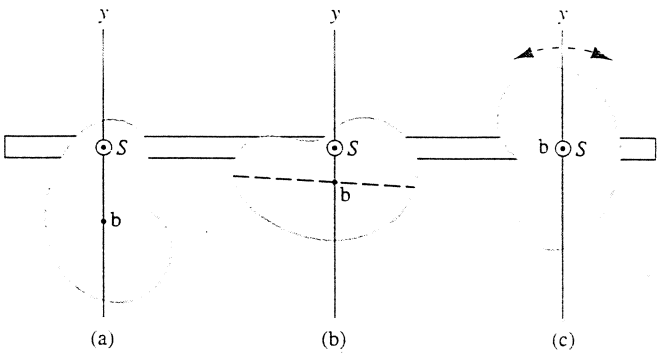


FIGURA 9.20 Un corpo è sospeso per il punto S. Come illustrato in (a) e (b) il corpo sarà in equilibrio se il baricentro b giace sulla retta verticale passante per il punto di sospensione. In (b) la linea tratteggiata è l'immagine di quella che in (a) era l'asse verticale: la posizione del baricentro può essere determinata sperimentalmente sospendendo successivamente un corpo per due punti differenti. (c) Un corpo sospeso per il suo baricentro è in equilibrio indipendentemente da come venga orientato.

di reazione, esercitata dal dito verso l'alto, non hanno la medesima retta d'azione, il momento torcente totale diventa non nullo e il bastoncino ruota fino a cadere al suolo. Per mantenere il bastoncino in equilibrio è necessario muovere in continuazione il dito in modo che la forza da questo esercitata sia sempre verticalmente allineata con il baricentro del bastoncino.

La condizione di equilibrio appena discussa può servire a determinare sperimentalmente la posizione del baricentro di un corpo rigido. Si consideri un corpo sospeso e si denoti con S il punto di sospensione come in Figura 9.20. Se il corpo è in equilibrio, il punto di sospensione e il baricentro del corpo devono giacere sulla medesima retta verticale. Se si marca, quindi, sul corpo la retta verticale passante per S si ottiene un segmento che tra i suoi punti comprende il baricentro. Si può ripetere lo stesso procedimento scegliendo un nuovo punto di sospensione S, come in Figura 9.20b, e si ottiene un secondo segmento che deve contenere il baricentro. La posizione del baricentro, quindi, può essere determinata come punto di intersezione di questi due segmenti.

Se si sospendesse il corpo per il suo baricentro, come in Figura 9.20c, il corpo resterebbe in equilibrio indipendentemente dalla sua orientazione. Ruotando il corpo a nostro piacimento, otterremmo sempre posizioni d'equilibrio. Questo fenomeno è conseguenza del corollario dell'Equazione 9.21: il momento torcente relativo al baricentro dovuto alla sollecitazione gravitazionale è nullo.

9.5 STATICA DEI CORPI RIGIDI CON ASSE FISSO

Vi sono situazioni in cui le forze esterne che agiscono su un corpo hanno risultante nulla ma momento totale diverso da zero: si pensi per esempio a una coppia costituita da due forze uguali e opposte, ma con diversa retta d'azione. Se un corpo fosse sottoposto a tale coppia esso acquisterebbe un'accelerazione angolare non nulla, pur avendo accelerazione lineare nulla. Analogamente è possibile considerare situazioni in cui la somma delle forze esterne è diversa da zero, ma il momento torcente totale rispetto a un certo polo è nullo: si pensi, per esempio, a un corpo rigido in caduta libera nel campo gravitazionale terrestre. In questo caso l'accelerazione lineare è diversa da zero, mentre quella angolare risulta uguale a zero. Affinché un corpo rigido stia in una posizione di equilibrio, sia l'accelerazione lineare sia quella angolare devono essere uguali a zero: quindi, condizione sufficiente perché un corpo sia in equilibrio è che *la risultante delle forze esterne e il momento torcente totale esterno siano nulli*. In base a questa definizione, però, il corpo potrebbe avere velocità lineare o angolare non nulle purché costanti; nel seguito, comunque, si considereranno sempre situazioni in cui il corpo è a riposo.

Le due condizioni di equilibrio, quindi, si possono scrivere nel modo seguente:

$$\sum F_{\text{ext}} = 0 \tag{9.22}$$

e

$$\sum \tau_{\text{ext}} = 0. \tag{9.23}$$

Queste due equazioni vettoriali possono essere proiettate lungo gli assi cartesiani per ottenere le corrispondenti equazioni scalari:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \tag{9.24}$$

e

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0, \tag{9.25}$$

ove è stato eliminato il pedice «ext» al fine di semplificare la notazione. In una posizione di equilibrio, allora, le componenti lungo gli assi cartesiani della somma delle forze esterne e del momento torcente totale esterno devono essere tutte nulle per una qualsiasi scelta degli assi.

La condizione di equilibrio relativa al momento torcente è indipendente dal polo rispetto al quale vengono calcolati i momenti; per dimostrare questa affermazione si consideri un corpo rigido e si supponga che su di esso agiscano più forze esterne. Si supponga inoltre che la forza $\boldsymbol{F}_1$ sia applicata al punto la cui posizione rispetto all'origine O è individuata dal vettore $\boldsymbol{r}_1$; che il punto di applicazione della forza $\boldsymbol{F}_2$ sia individuato dal vettore $\boldsymbol{r}_2$ e così via per tutte le altre forze esterne. Con queste notazioni il momento totale delle forze esterne rispetto al polo O risulta uguale a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_O &= \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \cdots + \boldsymbol{\tau}_N = \\ &= \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 + \cdots + \boldsymbol{r}_N \times \boldsymbol{F}_N. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Se il punto P è individuato, rispetto all'origine, dal vettore $\boldsymbol{r}_P$, come illustrato in Figura 9.21, allora la posizione del punto di applicazione della forza $\boldsymbol{F}_1$ rispetto a P è individuata dal vettore $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_P$. Il momento torcente totale rela-

 ISBN 88-408-1254-7

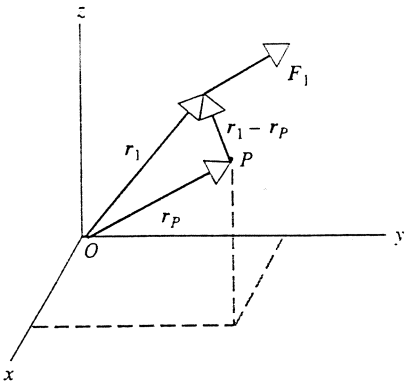


FIGURA 9.21 La forza F_1 è una delle N forze che agiscono su un corpo rigido; il corpo non è disegnato per chiarezza. Il vettore r_1 individua, rispetto all'origine O, la posizione del punto di applicazione della forza F_1 e interviene nel calcolo del momento di tale forza rispetto al polo O. Il vettore $r_1 - r_P$ interviene nel calcolo del momento della stessa forza rispetto al polo P.

tivo a P è quindi dato da

$$\begin{aligned}\tau_P &= (r_1 - r_P) \times F_1 + (r_2 - r_P) \times F_2 + \\ &+ \cdots + (r_N - r_P) \times F_N = \\ &= (r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + \cdots + r_N \times F_N) + \\ &- (r_P \times F_1 + r_P \times F_2 + \cdots + r_P \times F_N).\end{aligned}$$

In virtù dell'Equazione 9.26 la prima somma tra parentesi tonde è uguale al momento torcente τ_O; la seconda somma, invece, può essere riscritta raccogliendo r_P:

$$\begin{aligned}\tau_P &= \tau_O - r_P \times (F_1 + F_2 + \cdots + F_N) = \\ &= \tau_O - r_P \times \sum F_{\text{ext}} = \\ &= \tau_O,\end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio si è considerato che $\sum F_{\text{ext}} = 0$, perché il sistema è in condizioni di equilibrio traslatorio e quindi la somma delle forze esterne è nulla. In conclusione, se il corpo è in equilibrio traslatorio i momenti totali delle forze esterne relativi a due poli diversi e arbitrari sono uguali.

Nel seguito si tratteranno spesso problemi in cui tutte le forze esterne risultano parallele a un medesimo piano, per esempio il piano xy; in questo caso le sei Equazioni 9.24 e 9.25 si riducono a tre sole equazioni non banali. Dal momento che F_z è identicamente nulla, l'Equazione 9.24 fornisce le sole condizioni non banali

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0. \tag{9.27}$$

Inoltre, se si calcolano i momenti torcenti rispetto a un polo che giace nel piano xy, si hanno componenti x e y identicamente nulle, e allora l'unica condizione non banale che può discendere dalle Equazioni 9.25 è

$$\sum \tau_z = 0. \tag{9.28}$$

Ci limitiamo allo studio di problemi planari al solo scopo di semplificare i calcoli. Ciò non restringe il campo applicativo dei principi generali d'equilibrio.

Analisi delle posizioni d'equilibrio

In generale nei problemi di statica le incognite sono delle forze, che vanno determinate applicando la condizione necessaria e sufficiente per le posizioni di equilibrio. Diamo qui una sorta di ricetta da seguire:

1. *Scelta del contorno del sistema.* La scelta deve essere fatta in modo da separare con chiarezza ciò che si considera sistema e ciò che si considera ambiente esterno.

2. *Costruzione del diagramma delle forze in cui appaiano tutte le forze esterne e i relativi punti di applicazione.* Le forze esterne sono quelle che agiscono «attraverso» il contorno del sistema disegnato al punto precedente. Tipicamente sono la gravità, le forze d'attrito e tutte quelle forze esercitate da corde o sbarre che attraversano il contorno del sistema. Le forze interne, ovvero le forze che le diverse parti del sistema esercitano le une sulle altre, non devono comparire nel diagramma. Vi sono casi in cui non è possibile stabilire a priori il verso di una forza, per esempio quando si taglia una corda o si spezza una sbarra che attraversa il contorno. In questo caso si sceglie il verso in modo arbitrario e a posteriori sarà il segno ottenuto per la componente della forza lungo la sua retta di applicazione che permetterà di stabilire il verso corretto della forza.

3. *Scelta di un sistema di coordinate cartesiane.* Il sistema di coordinate verrà usato per scomporre lungo gli assi le forze in gioco.

4. *Scelta di un sistema di coordinate per il calcolo delle componenti del vettore momento torcente.* All'equilibrio le componenti del momento torcente devono annullarsi lungo un qualsiasi asse. A volte è conveniente scegliere come polo rispetto al quale calcolare i momenti un punto a cui siano applicate più forze esterne; in questo modo tali forze escono dal gioco perché il loro momento rispetto al polo scelto risulta nullo. Quando si sommano le componenti del momento torcente relative a forze esterne diverse si usa la solita convenzione sul segno: la componente è positiva se, in assenza di tutte le altre forze, il corpo tende a ruotare in verso antiorario rispetto al verso positivo scelto sull'asse. Altrimenti si può usare la regola della mano destra.

Dopo aver eseguito tutte le operazioni appena descritte si può procedere alla soluzione del problema mediante le Equazioni 9.22 e 9.23 oppure mediante le 9.27 e 9.28. Seguono, ora, alcuni esempi di applicazione del procedimento proposto.

PROBLEMA SVOLTO 9.6 Una tavola uniforme di massa $m = 1.8$ kg e di lunghezza L è posta a riposo con le estremità che poggiano su due bilance digitali (Figura 9.22a). Un corpo di massa $M = 2.7$ kg, anch'esso a riposo, è posto sulla tavola con centro di massa a distanza $L/4$ dall'estremità sinistra della tavola. Cosa si legge sulle due bilance?

Soluzione Come sistema si sceglie l'insieme costituito dalla tavola e dal corpo. Il diagramma delle forze per questo sistema è riportato in Figura 9.22b: nel diagramma appaiono tutte le forze esterne agenti sul sistema. La forza gravitazionale agente sulla tavola è rap-

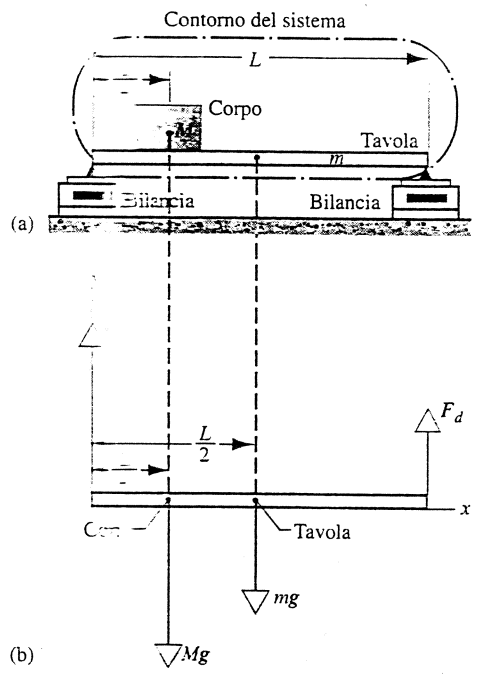


FIGURA 9.22 Problema svolto 9.6. (a) Un corpo di massa M è poggiato su una tavola di massa m. Le bilance indicano i moduli delle forze che esse stesse esercitano sugli estremi della tavola. (b) Diagramma delle forze esterne agenti sul sistema costituito dalla tavola e dal corpo.

presentata come un'unica forza mg, verticale e orientata verso il basso, applicata al centro di massa della tavola, che coincide con il suo centro geometrico grazie all'omogeneità della tavola stessa. Analogamente la forza peso Mg agente sul corpo è applicata al centro di massa del blocco ed è diretta verticalmente verso il basso. Le bilance esercitano sulla tavola due forze F_s ed F_d verticali e orientate verso l'alto. Il modulo di tali forze è proprio il valore che si può leggere sulle bilance; quindi tali moduli sono le incognite del nostro problema.

Il sistema è in equilibrio, quindi le Equazioni 9.27 e 9.28 devono essere soddisfatte. Dal momento che tutte le forze esterne hanno componente orizzontale nulla, l'equazione $\sum F_x = 0$ non fornisce alcuna informazione fisicamente rilevante. Calcolando le componenti lungo l'asse y si ha $\sum F_y = F_s + F_d - Mg - mg$ e, imponendo la condizione di equilibrio $\sum F_y = 0$, si ottiene

$$F_s + F_d - Mg - mg = 0. \tag{9.29}$$

Ulteriori informazioni relative alle forze incognite si possono ottenere usando la condizione di equilibrio (Equazione 9.28) relativa al momento torcente totale. Se si adotta come polo dei momenti l'estremo sinistro della tavola, risulta che la forza F_s ha momento torcente nullo; se si considera, inoltre, l'asse z uscente dal piano del disegno e passante per l'estremo sinistro della tavola si ha che il momento della forza F_d ha componente positiva lungo tale asse, mentre le due forze peso hanno componente negativa. La componente lungo l'asse z del momento totale delle forze esterne rispetto al polo scelto può essere calcolata moltiplicando le forze in gioco per il braccio relativo (in questo caso il braccio è uguale alla distanza del punto di applicazione dal polo dell'asse z); si ha $\sum \tau_z = (F_s)(0) + (F_d)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4)$. In virtù della condizione di equilibrio, $\sum \tau_z = 0$, si ha

$$F_d L - \frac{mgL}{2} - \frac{MgL}{4} = 0, \tag{9.30}$$

e quindi

$$F_d = \frac{g}{4}(M - 2m) =$$
$$= \frac{1}{4}(9.8\ \text{m/s}^2)(2{,}7\ \text{kg} + 2 \cdot 1{,}8\ \text{kg}) = 15\ \text{N}.$$

Si noti che, avendo scelto opportunamente il polo rispetto al quale sono stati calcolati i momenti, l'Equazione precedente non dipende da F_s e quindi è immediatamente risolvibile rispetto all'altra incognita F_d. Se si fosse scelto un polo diverso avremmo ottenuto un'equazione con entrambe le incognite che avrebbe costituito, assieme all'Equazione 9.29, un sistema di due equazioni in due incognite in grado di fornire la soluzione del nostro problema. La scelta sapiente del polo ha permesso di semplificare gli aspetti algebrici del problema, ma ovviamente non ne ha modificato la soluzione finale.

Risolvendo, ora, l'Equazione 9.29 rispetto a F_s e sostituendovi il valore appena determinato per l'altra incognita si ha

$$F_s = (M + m)g - F_d =$$
$$= (2{,}7\ \text{kg} + 1{,}8\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m/s}^2) - 15\ \text{N} = 29\ \text{N}.$$

Si osserva, infine, che la lunghezza della tavola e l'altezza del corpo non intervengono nella determinazione dei valori numerici delle due incognite. È un risultato fisicamente ragionevole?

Si provi a risolvere questo problema usando la sola condizione di equilibrio relativa al momento torcente. Si scriva tale condizione adottando come polo dei momenti una volta l'estremo sinistro e una volta quello destro. Questo metodo permette di scrivere due equazioni indipendenti che coinvolgono le due incognite cercate F_s e F_d.

PROBLEMA SVOLTO 9.7 Una scala di lunghezza $L = 12$ m e massa $m = 45$ kg è poggiata a riposo contro una parete. L'estremo superiore della scala è a distanza $h = 9{,}3$ m dal suolo (Figura 9.23a). Il centro di massa della scala dista $L/3$ dall'estremo a contatto con il suolo. Un pompiere di massa $M = 72$ kg è salito a metà della scala, nel senso che il suo centro di massa si trova a distanza $L/2$ dai due estremi della scala. Assumendo che la parete sia liscia e che il pavimento sia scabro, si calcolino le forze che queste superfici esercitano sulla scala.

Soluzione Il diagramma delle forze è riportato in Figura 9.23b. La parete esercita sulla scala la forza F_p orizzontale; tale forza non può avere componenti verticali perché si è supposto che la parete sia liscia. Il suolo esercita sulla scala una forza che ha componente orizzontale f, l'attrito, e componente verticale N, la reazione normale. Il sistema di riferimento viene scelto come illustrato in Figura con l'origine O nel punto in cui la scala tocca il suolo. La distanza a che intercorre tra il piede della scala e la parete può essere calcolata immediatamente ricorrendo al teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12\ \text{m})^2 - (9{,}3\ \text{m})^2} = 7{,}6\ \text{m}.$$

Le componenti x e y della somma delle forze esterne agenti sulla scala sono date da: $\sum F_x = F_p - f$ e $\sum F_y = N - Mg - mg$. Le Equazioni 9.27, $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$, che esprimono le condizioni di equilibrio, forniscono

$$F_p - f = 0 \quad \text{e} \quad N - Mg - mg = 0. \tag{9.31}$$

 ISBN 88-408-1254-7

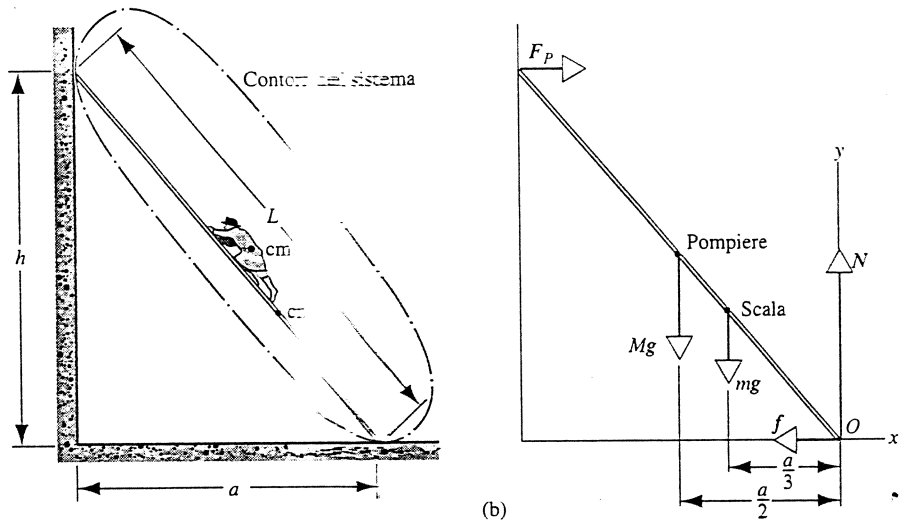


FIGURA 9.23 Problema svolto 9.7. (a) Un pompiere sale a metà una scala poggiata a una parete liscia. (b) Diagramma delle forze agenti sul sistema (le intensità sono disegnate in scala).

Dalla seconda equazione si ha

$$N = (M + m)g = (72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 1150 \text{ N}.$$

Si calcola, ora, il momento delle forze esterne rispetto al polo O e se ne considera la componente lungo l'asse z: il contributo di F_p è negativo, quello di Mg ed mg positivo, mentre quello di N ed f è nullo poiché la forza esercitata dal suolo sulla scala ha braccio nullo rispetto al polo O. Moltiplicando ciascuna forza per il braccio relativo si ha $\sum \tau_z = -(F_p)(h) - (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) + (N)(0) + (f)(0)$. Imponendo, infine, la condizione di equilibrio (Equazione 9.28), $\sum \tau_z = 0$, si ottiene

$$-F_p h + \frac{Mga}{2} + \frac{mga}{3} = 0. \qquad (9.32)$$

La scelta sapiente del polo rispetto al quale sono stati calcolati i momenti ha permesso di eliminare le due incognite N ed f dalla condizione d'equilibrio per il momento torcente. Risolvendo l'Equazione 9.32 rispetto a F_p si ha

$$F_p = \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} =$$

$$= \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)(7{,}6 \text{ m})[(72 \text{ kg})/2 + (45 \text{ kg})/3]}{9{,}3 \text{ m}} = 410 \text{ N}.$$

Dalla prima delle Equazioni 9.31 si ha, infine,

$$f = F_p = 410 \text{ N}.$$

PROBLEMA SVOLTO 9.8 Un puntone uniforme di lunghezza $L = 3{,}3$ m e massa $m = 8{,}5$ kg è incernierato a una parete come illustrato in Figura 9.24a. Una corda lega l'estremità libera del puntone alla parete in un punto a distanza $d = 2{,}1$ m dalla cerniera; la lunghezza della corda è tale che la sbarra forma con la direzione orizzontale l'angolo $\theta = 30°$. Un corpo di massa $M = 56$ kg è appeso all'estremità libera del puntone. Si determini la tensione della corda e la forza esercitata dalla cerniera sul puntone.

Soluzione Definiamo il contorno del sistema in modo che quest'ultimo sia costituito dal solo puntone e disegnamo il diagramma delle forze (Figura 9.24b). Poiché tutte le forze esterne sono verticali è conveniente scegliere il riferimento in modo che i due assi siano uno orizzontale e uno verticale. In figura la tensione della corda e la forza esercitata dalla cerniera sulla sbarra sono scomposte nelle loro componenti orizzontali e verticali.

Le componenti della somma delle forze esterne sono date da $\sum F_x = F_h - T_h$ e $\sum F_y = F_v - T_v - Mg - mg$. Imponendo le condizioni di equilibrio (Equazione 9.27) si ha

$$F_h - T_h = 0 \quad \text{e} \quad F_v + T_v - Mg - mg = 0. \qquad (9.33)$$

Per scrivere la condizione d'equilibrio relativa al momento torcente si sceglie come polo l'estremo libero della sbarra (perché?); moltiplicando ciascuna forza per il braccio relativo si ha $\sum \tau_z = -(F_v)(L\cos\theta) + (F_h)(L\sin\theta) + (mg)(\frac{1}{2}L\cos\theta) + (T_v)(0) + (T_h)(0) + (Mg)(0)$. Ponendo questa quantità uguale a

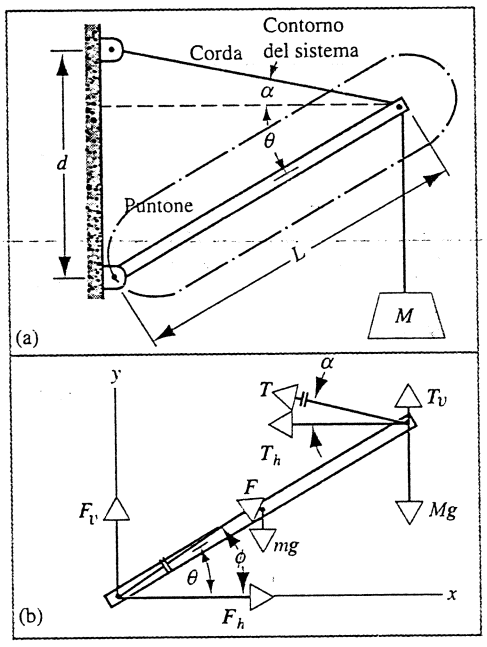


FIGURA 9.24 Problema svolto 9.8. (a) Un puntone è incernierato a una parete e la sua estremità libera è legata alla medesima parete per mezzo di una corda. Un oggetto di massa M è appeso all'estremità libera del puntone. (b) Diagramma delle forze per il puntone. Sul puntone agiscono, tra le altre, la forza F esercitata dalla cerniera e la forza T dovuta alla tensione della corda.

zero ed eseguendo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$F_t - F_h \tan\theta - mg/2 = 0. \tag{9.34}$$

Usando le condizioni di equilibrio abbiamo determinato tre equazioni che legano le quattro incognite F_v, F_h, T_v e T_h. Una quarta relazione può scriversi osservando che le due componenti T_h e T_v della tensione devono essere tali che il vettore tensione sia diretto lungo la corda; una corda tesa, infatti, non può esercitare forze che abbiano componenti non nulle lungo direzioni perpendicolari alla corda stessa (ciò è falso per le sbarre rigide). Da questa osservazione si ottiene la quarta equazione

$$T_v = T_h \tan\alpha, \tag{9.35}$$

con $\tan\alpha = (d - L\sin\theta)/(L\cos\theta)$.

Risolvendo il sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite F_v, F_h, T_v e T_h si ottiene

$$F_v = 506\ \text{N}, \quad F_h = 804\ \text{N}, \quad T_v = 126\ \text{N}, \quad T_h = 804\ \text{N}.$$

Il modulo della tensione esercitata dalla corda è dato da

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 814\ \text{N},$$

e il modulo della forza che la cerniera esercita sul puntone è dato da

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 950\ \text{N}.$$

È interessante osservare che sia F sia T sono considerevolmente più grandi della somma, 632 N, dei pesi del puntone e del corpo ad essa appeso.

Si può calcolare, infine, l'angolo che la forza $\boldsymbol{F}$ forma con la direzione orizzontale,

$$\phi = \arctan\frac{F_v}{F_h} = 32,2^\circ,$$

e osservare che la forza esercitata dalla cerniera sul puntone non è diretta lungo il puntone stesso.

Le situazioni fisiche studiate negli esempi precedenti sono state costruite ad hoc in modo che il numero di forze incognite risultasse uguale al numero di equazioni indipendenti ottenute a partire dalle condizioni di equilibrio. Nel caso di problemi planari si hanno tre sole equazioni indipendenti, due per l'equilibrio traslatorio e una per quello rotatorio. Spesso, però, si hanno più di quattro incognite; per esempio, se nel Problema svolto 9.7 si eliminasse l'ipotesi di assenza d'attrito nel contatto scala-parete si avrebbero, in totale, ben quattro incognite: le componenti verticali e orizzontali delle forze esercitate sulla scala dalla parete e dal suolo. In questo caso, quindi, il problema sarebbe irresolubile dal momento che si avrebbero tre sole equazioni per quattro incognite. In casi di questo tipo è necessario determinare altre equazioni indipendenti da quelle ottenute a partire dalle condizioni di equilibrio; nel Problema svolto 9.8, per esempio, l'ultima equazione è stata ottenuta sfruttando le proprietà fisiche di uno dei componenti del sistema (la corda). Si vuole osservare, infine, che non è possibile scrivere nuove equazioni indipendenti calcolando il momento torcente rispetto a un nuovo polo; così facendo, infatti, si otterrebbero combinazioni lineari delle equazioni già scritte.

Un altro esempio semplice di problema indeterminato è il seguente: si vogliono calcolare le forze che il suolo esercita sulle quattro ruote di un'automobile in sosta su una strada orizzontale. Se si assume che queste quattro forze siano ortogonali alla strada si hanno quattro incognite scalari. Le equazioni indipendenti che le legano, però, sono solo tre: una per l'equilibrio traslatorio nella direzione verticale e due per l'equilibrio rotatorio relativo a due assi paralleli al suolo e mutuamente ortogonali. Il problema, quindi, è indeterminato.

Dal punto di vista fisico, però, questi problemi devono ammettere una soluzione unica; è necessario capire quali considerazioni di tipo fisico vanno aggiunte alla nostra analisi per poter scrivere le equazioni indipendenti necessarie per chiudere il problema dal punto di vista matematico. Nei casi studiati in precedenza, per esempio, si può osservare che, al contrario di quanto fino ad ora supposto, i corpi non sono perfettamente rigidi, bensì possono deformarsi. Le ruote dell'automobile, il suolo, la scala, la parete sono tutti corpi soggetti a deformazioni. Le equazioni mancanti, allora, vengono determinate usando le leggi dell'elasticità e conoscendo le proprietà elastiche dei corpi in gioco. I problemi di statica che sono risultati indeterminati, quindi, possono essere risolti solo se alle leggi delle statica del corpo rigido si affiancano le leggi dell'elasticità.

9.6 DINAMICA DEI CORPI RIGIDI CON ASSE FISSO

In questo paragrafo si vuole studiare la dinamica dei moti rotatori. In sostanza si elimina il vincolo introdotto nel paragrafo precedente consistente nell'imposizione che l'accelerazione angolare fosse zero. Si considereranno, quindi, corpi che manifestano accelerazione angolare non nulla in conseguenza dell'azione di forze con momento torcente totale diverso da zero.

Nel caso dei moti traslatori unidimensionali il problema di calcolare la componente dell'accelerazione lungo uno degli assi coordinati dovuta all'azione di una forza parallela a tale asse, problema simile in spirito a quello che ci si propone di studiare in questo paragrafo, è stato affrontato grazie alla seconda legge di Newton, $\sum F_x = ma_x$. Per rendere più stringente l'analogia con il moto traslatorio unidimensionale ci limitiamo a considerare rotazioni di un corpo rigido attorno a un asse fisso. Lo strumento fondamentale della nostra analisi sarà la forma rotazionale della seconda legge di Newton, ovvero l'Equazione 9.11, $\sum \tau_z = I\alpha_z$, in cui è stato rimosso, al fine di semplificare la notazione, il pedice «ext». Riassumendo: in questo paragrafo ci si limiterà a considerare problemi in cui l'accelerazione angolare di un corpo vincolato a un asse varia sotto l'effetto di un momento torcente esterno non nullo.

Nel prossimo paragrafo si generalizzerà la discussione in modo da considerare corpi che, assieme alla rotazione, compiano un moto traslatorio in modo tale, però, che l'asse

 ISBN 88-408-1254-7

di rotazione non cambi direzione. Nel Capitolo 10, infine, si considererà la possibilità che l'asse di rotazione muti direzione.

PROBLEMA SVOLTO 9.9 Una giostra del tipo illustrato in Figura 9.25 viene posta in rotazione mediante l'applicazione della forza F di modulo 115 N al punto P del bordo esterno della giostra situato a distanza $r = 1,50$ m dall'asse di rotazione. La retta d'applicazione della forza forma un angolo di 32° con il piano orizzontale ed è orientata verso il basso; inoltre la sua componente orizzontale forma un angolo di 15° con la retta tangente al bordo in P ed è orientata verso l'interno della giostra. (a) Si calcoli il modulo del momento torcente in virtù del quale la giostra viene posta in moto. (b) Si calcoli l'accelerazione della giostra assumendo che essa possa essere schematizzata come un disco d'acciaio di raggio 1,5 m e spessore 0,40 cm, e che sulla giostra si trovi un solo bambino approssimabile a una particella puntiforme di massa 25 kg posta a distanza di 1,0 m dall'asse di rotazione.

Soluzione (a) La componente verticale del momento torcente è prodotta dalla componente orizzontale della forza F. La componente orizzontale della forza F è data da

$$F_h = F\cos 32^\circ = 97,5 \text{ N}.$$

La proiezione di F lungo la direzione orizzontale e ortogonale al bordo della giostra è

$$F_\perp = F_h \cos 15^\circ = 94,2 \text{ N}.$$

La componente verticale del momento della forza calcolato rispetto al centro del disco è data da

$$\tau = rF_\perp = (1,50 \text{ m})(94,2 \text{ N}) = 141 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

La componente radiale della forza, $F_h \sin 15^\circ$, non contribuisce al momento torcente, mentre la componente verticale della forza, $F \sin 32^\circ$ (dovuta al fatto che l'uomo spinge un po' verso il basso la giostra), genera una componente del momento torcente ortogonale all'asse di rotazione; tale componente squilibrerebbe l'assetto orizzontale della giostra se la sua azione non fosse compensata da un momento torcente opposto dovuto ai sostegni dell'asse.

(b) La giostra è schematizzata da un disco di raggio $R = 1,5$ m e spessore $d = 0,40$ cm; il suo volume è $\pi R^2 d = 2,83 \cdot 10^4$ cm^3. La massa volumica dell'acciaio vale 7.9 g/cm^3 e quindi la massa della giostra è $(2.8 \cdot 10^4 \text{ cm}^3)(7.9 \text{ g/cm}^3) = 2,23 \cdot 10^5 \text{g} = 223$ kg. L'espressione del momento d'inerzia di un disco rispetto al suo asse di simmetria può essere dedotta dalla Figura 9.15c, che dà

$$I_g = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(223 \text{ kg})(1.5 \text{ m})^2 = 251 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Il momento d'inerzia del bambino, che viene trattato come una particella puntiforme di massa $m = 25$ kg collocata a distanza $r = 1.0$ m dall'asse di rotazione, è dato da

$$I_b = mr^2 = (25 \text{ kg})(1,0 \text{ m})^2 = 25 \text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

Il momento d'inerzia del sistema complessivo vale $I_t = I_g + I_b = 251 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 25 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 = 276 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. L'accelerazione angolare può essere determinata, infine, tramite l'Equazione 9.11:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I_t} = \frac{141 \text{ N}\cdot\text{m}}{276 \text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 0,51 \text{ rad/s}^2.$$

Se si osserva in Figura 9.25 la direzione della forza esterna F, si deduce che sia il momento torcente sia l'accelerazione angolare hanno componenti, τ_z e α_z, positive lungo la direzione verticale ascendente.

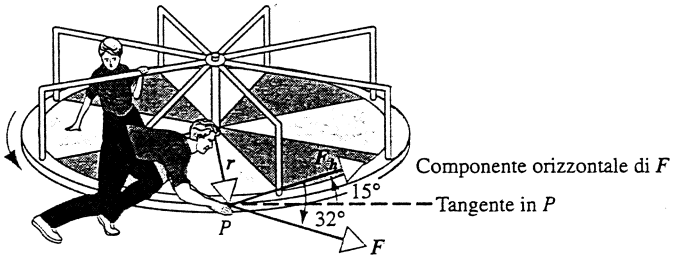


FIGURA 9.25 Problema svolto 9.9. Un uomo spinge una giostra del tipo in figura. L'uomo è chino in avanti e pertanto la forza che egli applica alla giostra ha una componente non nulla verso il basso. Dal momento che l'uomo occupa una posizione esterna alla giostra, la forza ha anche una componente non nulla verso l'interno della giostra stessa. La componente orizzontale F_h della forza F, ovvero la sua proiezione sul piano in cui ruota la giostra, forma un angolo di 15° con la retta tangente al bordo esterno della giostra nel punto P in cui è applicata la forza.

PROBLEMA SVOLTO 9.10 La puleggia di Figura 9.26a può essere schematizzata come un disco uniforme di massa $M = 2,5$ kg e raggio $R = 20$ cm in grado di ruotare senza attrito attorno a un asse orizzontale. Un corpo di massa $m = 1,2$ kg pende da una corda di massa trascurabile avvolta attorno alla puleggia. Si calcolino l'accelerazione con cui cade il corpo, la tensione della corda e l'accelerazione angolare del disco.

Soluzione Il diagramma delle forze per il corpo è riportato nella Figura 9.26b. Si ricorda che, se il problema comporta rotazioni, nei diagrammi delle forze assieme a queste ultime vanno riportati i loro punti di applicazione in modo da poter determinare la loro retta

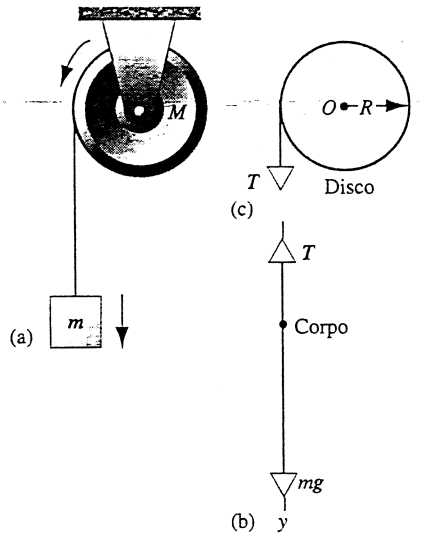


FIGURA 9.26 Problema svolto 9.10. (a) Per effetto della caduta del corpo il disco ruota attorno all'asse fisso. (b) Diagramma delle forze per il blocco. (c) Diagramma parziale delle forze per il disco; i versi ritenuti positivi sono rappresentati dalle frecce nel riquadro (a). L'asse z è uscente dalla pagina.

d'azione e, quindi, i loro momenti rispetto a un polo dato. Se si orienta l'asse y verso il basso, la componente lungo tale asse della somma delle forze agenti sul blocco è data da $\sum F_y = mg - T$; tale componente è positiva se il corpo si muove di moto accelerato verso il basso. In base alla seconda legge di Newton, o meglio alla sua proiezione $\sum F_y = ma_y$ lungo la direzione y, si ha

$$mg - T = ma_y.$$

Nella Figura 9.26c è stato disegnato un diagramma parziale delle forze agenti sul disco. Se si orienta l'asse z positivamente verso l'esterno della pagina, la componente z del momento totale delle forze agenti sul disco rispetto al polo O è data da $\sum \tau_z = TR$; infatti il peso del disco e la forza di reazione che l'asse fisso esercita sul disco non contribuiscono al momento torcente totale perché le loro rette d'azione passano per il polo O. Applicando la forma rotazionale della seconda legge di Newton data dall'Equazione 9.11, si ottiene $TR = I\alpha_z$, con α_z positiva per rotazioni in verso antiorario rispetto al verso positivo dell'asse z. Ricordando che $I = MR^2/2$ e $\alpha_z = a_T/R$ si ha $TR = (MR^2/2)(a_T/R)$, ovvero

$$T = \frac{1}{2}Ma_T.$$

Supponendo che la corda sia inestensibile e che non scivoli sul disco, l'accelerazione del corpo a_y deve essere uguale all'accelerazione tangenziale a_T di un elemento del bordo del disco. Con la condizione $a_y = a_T = a$ è possibile combinare le due equazioni appena determinate e ottenere

$$a = g\frac{2m}{M + 2m} =$$

$$= (9,8\text{m/s}^2)\frac{(2)(1,2\text{ kg})}{2,5\text{ kg} + (2)(1,2\text{ kg})} = 4,8\text{ m/s}^2$$

e

$$T = mg\frac{M}{M + 2m} =$$

$$= (1,2\text{ kg})(9,8\text{ m/s}^2)\frac{2,5\text{ kg}}{2,5\text{ kg} + (2)(1,2\text{ kg})} = 6,0\text{ N}.$$

Come era facile intuire l'accelerazione con cui cade il corpo è inferiore a g e la tensione della corda, $T = 6,0$ N, è minore della forza peso, $mg = 11,8$ N, agente sul corpo. Si osserva, inoltre, che l'accelerazione del corpo e la tensione della corda dipendono dalla massa del disco ma non dal suo raggio. A verifica dei risultati ottenuti si può osservare che nella situazione limite di massa del disco nulla ($M = 0$) si ottiene $a = g$ e $T = 0$. Questo è proprio ciò che ci si aspetta intuitivamente: il corpo cade liberamente e trascina la corda nel suo moto.

L'accelerazione angolare del disco, infine, può essere calcolata nel modo seguente:

$$\alpha_z = \frac{a}{R} = \frac{4,8\text{ m/s}^2}{0,20\text{ m}} = 24\text{ rad/s}^2 = 3,8\text{ giri/s}^2.$$

Il segno positivo dell'accelerazione angolare mostra che la rotazione del disco avviene nel verso indicato dalla freccia in Figura 9.26a.

Nel caso di un corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso le uniche componenti della velocità e dell'accelerazione angolare non nulle sono quelle lungo la direzione dell'asse di rotazione. In virtù della seconda legge di Newton, allora, l'unica componente del momento torcente responsabile del moto è quella relativa all'asse di rotazione. Le forze esterne, d'altro canto, possono essere applicate lungo direzioni tali che il loro momento torcente totale abbia una componente non nulla in direzione ortogonale all'asse di rotazione. Qual è l'effetto di tale componente trasversa?

Si consideri la ruota di bicicletta disegnata in Figura 9.27. Per mezzo di due supporti idonei l'albero della ruota viene tenuto fisso e coincidente con l'asse z. Si applica una forza $\boldsymbol{F}$ a un punto della ruota; il momento di detta forza rispetto al centro della ruota ha, in generale, componenti non nulle lungo i tre assi x, y e z, come illustrato in figura. Ciascuna componente del momento torcente tende a far girare la ruota attorno al suo asse corrispondente, ma per ipotesi la ruota è vincolata a ruotare attorno a z. Le componenti x e y del momento torcente non producono alcun moto. Per interpretare questo fenomeno è necessario ammettere che i supporti dell'albero esercitino sulla ruota delle forze tali che il loro momento torcente totale compensi esattamente le componenti x e y del momento torcente della forza $\boldsymbol{F}$. Quando si considera, quindi, il moto di un corpo rigido con un asse fisso si sta implicitamente assumendo che la sola componente del momento torcente esterno che influenza il moto sia quella parallela all'asse, mentre le altre componenti sono compensate da opportune forze di reazione esplicate dai sostegni che mantengono fisso l'asse di rotazione. Oltre al *necessario* momento torcente che bilancia le componenti x e y del momento torcente esterno, può accadere che i sostegni esplichino un momento torcente nella direzione dell'asse; ciò accade, per esempio, nel caso di supporti che esercitano forze d'attrito sull'asse della ruota. Si osserva, infine, che poiché il centro di massa della ruota è fermo, la somma delle forze esercitate dai supporti deve essere necessariamente uguale e opposta alla forza attiva totale agente sulla ruota.

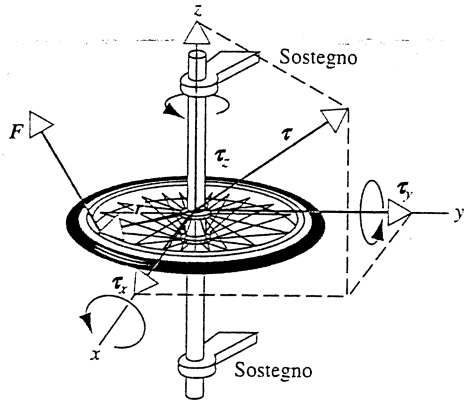


FIGURA 9.27 Una ruota di bicicletta è libera di ruotare attorno all'asse z. Una forza $\boldsymbol{F}$ del tutto generica può produrre un momento torcente con componenti non nulle lungo i tre assi coordinati, ma è la sola componente z che può indurre il moto nella ruota. Le componenti x e y tendono a modificare la direzione dell'asse di rotazione, ma grazie alla presenza dei sostegni un momento torcente opposto compensa l'effetto delle componenti trasverse all'asse.

 ISBN 88-408-1254-7

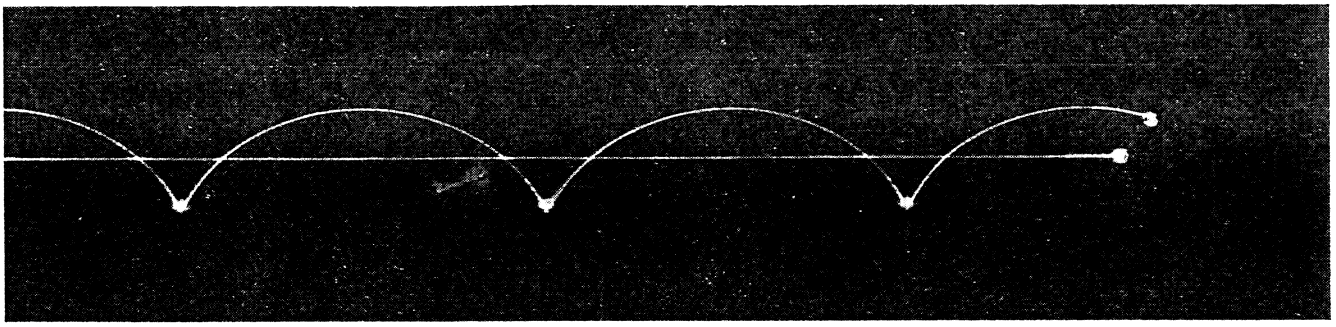


FIGURA 9.28 Questa è la fotografia, eseguita con un tempo di esposizione molto lungo, di una ruota che avanza. Due lampadine sono fissate rispettivamente nel centro e in un punto del bordo della ruota. Il punto sul bordo descrive una curva detta *cicloide*.

9.7 MOTI ROTOTRASLATORI

In Figura 9.28 è riportata una fotografia, eseguita con un tempo di esposizione molto lungo, di una ruota in moto su un piano orizzontale. La ruota compie un moto complicato che può essere pensato come combinazione di un moto rotatorio e di uno traslatorio.

Il moto rotatorio e quello traslatorio sono, in generale, indipendenti; si pensi, per esempio, al moto di un disco da hockey su una superficie piana ghiacciata: è possibile lanciare il disco in modo che il suo moto sia puramente traslatorio oppure porlo in rotazione su se stesso in modo che il suo centro risulti fermo in un punto della superficie. Ma si può anche fornire al disco una velocità lineare e una velocità angolare iniziali di valore qualunque, in modo che il disco simultaneamente ruoti su se stesso e trasli rispetto alla superficie. In quest'ultimo caso il centro di massa del disco si muove di moto rettilineo, anche in presenza di forze d'attrito, mentre tutti gli altri elementi del disco descrivono un moto che è una combinazione complicata di un moto rotatorio e di uno traslatorio, così come accade per il punto luminoso posto sul bordo della ruota riprodotta in Figura 9.28.

Come si intuisce dagli esempi del disco sulla superficie ghiacciata e della ruota, la nostra discussione si ridurrà a casi che soddisfino le due condizioni seguenti: (1) l'asse di rotazione passa per il centro di massa del corpo, che servirà da polo nel calcolo dei momenti, e (2) la direzione dell'asse di rotazione non varia nel tempo, ovvero due assi di rotazione relativi a istanti diversi sono tra loro paralleli. Sotto queste ipotesi il moto rotatorio può essere studiato tramite l'Equazione 9.11, ovvero $\sum \tau_z = I\alpha_z$, con il momento torcente calcolato a partire dalle sole forze *esterne*. Per lo studio del moto traslatorio, che come si è detto è indipendente da quello rotatorio, si usa l'Equazione 7.16, ovvero $\sum F = Ma_{cm}$ ove $\sum F$ è la somma delle forze *esterne*.

Il caso illustrato in Figura 9.28 della ruota in moto su un piano liscio è un esempio molto comune di moto che rientra nello schema appena presentato. È importante osservare che nei punti in cui la lampadina è a contatto con il suolo l'immagine registrata sulla lastra fotografica è particolarmente brillante; ciò si spiega perché in questi istanti la lampadina si muove molto lentamente e in realtà è istantaneamente a riposo. Questo tipo di moto in cui un oggetto rotola su una superficie in modo tale che non vi sia moto relativo tra l'elemento dell'oggetto che tocca la superficie e la superficie stessa è detto *rotolamento senza strisciamento* o anche *rotolamento puro*.

In Figura 9.29 è riportata un'altra foto di una ruota in rotolamento puro. Si osservi che i raggi della ruota in basso sono più a fuoco rispetto a quelli in alto, la cui immagine è decisamente meno netta. La parte superiore della ruota si muove più rapidamente di quella in basso! Nel caso di rotolamento puro è l'attrito tra i due oggetti che permette all'elemento del corpo a contatto con la superficie fissa di essere a riposo; nonostante la ruota sia in moto, è la forza d'attrito *statico* ad agire su tale elemento.

Il rotolamento puro non è l'unico moto possibile per un corpo che rotola su una superficie scabra. Si pensi, per esempio, a un'automobile che parte su una strada ghiacciata. Nei primi istanti le ruote gireranno sul posto: il loro moto, quindi, sarà puramente rotatorio. Se però viene frapposta della sabbia tra le ruote e il fondo ghiacciato, l'auto-

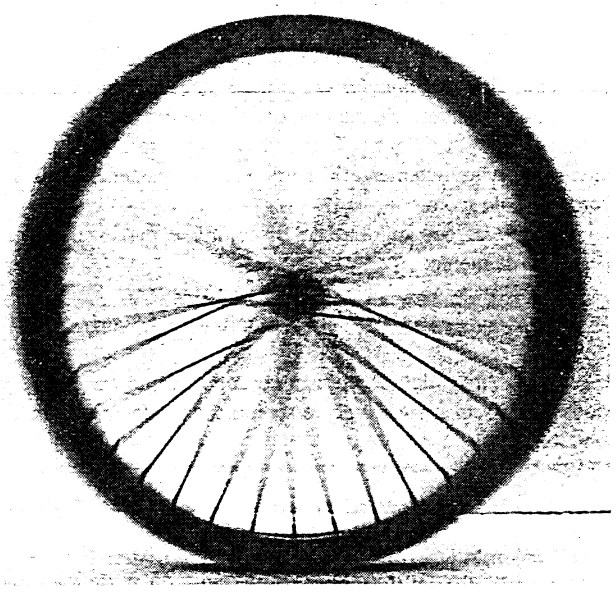


FIGURA 9.29 Immagine fotografica di una ruota che rotola senza strisciare. I raggi in alto sono più sfuocati di quelli in basso perché si muovono a velocità maggiore.

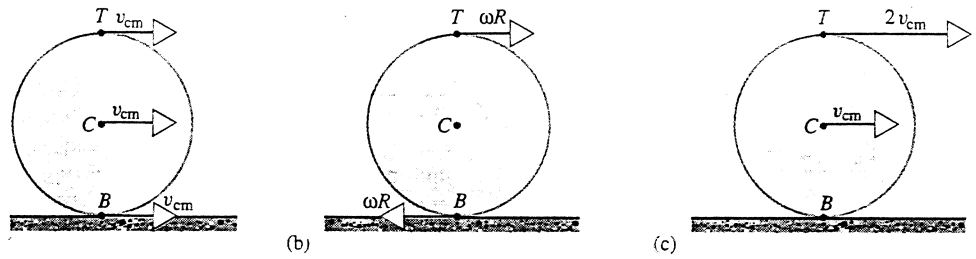


FIGURA 9.30 il moto di rotolamento può essere pensato come la sovrapposizione di un moto puramente rotatorio attorno al centro di massa e di uno puramente traslatorio. (a) Moto puramente traslatorio: tutti gli elementi della ruota hanno la medesima velocità vettoriale. (b) Moto puramente rotatorio: tutti gli elementi si muovono con la stessa velocità angolare attorno al centro di massa. (c) Combinazione dei moti rappresentati nei riquadri (a) e (b): la velocità degli elementi T, C e B è stata ottenuta sommando la velocità del moto traslatorio a quella del moto rotatorio.

mobile inizierà a muoversi lentamente nonostante le ruote continuino a slittare sul ghiaccio: l'automobile avrà, quindi, un certo moto traslatorio, le ruote uno di rotolamento, ma vi sarà ancora uno «strisciamento» tra le ruote e il ghiaccio. Se la sabbia è sufficiente, dopo un po' le ruote non strisceranno più sul ghiaccio e si instaureranno le condizioni di rotolamento puro.

La Figura 9.30 illustra come sia possibile analizzare il moto di rotolamento puro come una combinazione di moto rotatorio e traslatorio. In caso di moto puramente traslatorio (si veda la Figura 9.30a) il centro di massa si muove, assieme a tutti gli elementi del corpo, con velocità v_{cm}. In caso di moto puramente rotatorio attorno al centro di massa (si veda la Figura 9.30b) tutti gli elementi del bordo della ruota hanno velocità tangenziale ωR, ove ω è la velocità angolare. Se il moto della ruota è la combinazione di questi due moti, l'elemento B a contatto con la superficie avrà velocità $v_{cm} - \omega R$; ma nel caso di rotolamento puro l'elemento B deve avere velocità nulla e quindi si avrà $v_{cm} - \omega R = 0$, ovvero

$$v_{cm} = \omega R. \tag{9.36}$$

Dalla sovrapposizione del moto puramente traslatorio e di quello puramente rotatorio si ottiene la situazione illustrata nella Figura 9.30c. Si osservi che la velocità dell'elemento della ruota in cima, indicato con T in figura, è pari al doppio di quella del centro di massa.

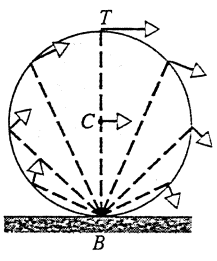


FIGURA 9.31 Un corpo che rotola su una superficie senza strisciare può essere pensato ad ogni istante in moto puramente rotatorio attorno all'asse passante per il punto che in quell'istante realizza il contatto con il suolo. I vettori rappresentano la velocità di alcuni punti all'istante considerato.

Si vuole sottolineare che l'uguaglianza 9.36 vale soltanto in assenza di strisciamento; per un generico moto di rotolamento, ovvero per una generica sovrapposizione di un moto rotatorio e di uno traslatorio, non è vero che la velocità v_{cm} del centro di massa sia uguale a ωR.

Vi è un secondo modo, molto istruttivo, di affrontare lo studio del moto di puro rotolamento: si considera l'asse ortogonale alla ruota passante per la posizione occupata dall'elemento di contatto B e si suppone che all'istante considerato tale asse sia quello attorno al quale ruota il corpo (Figura 9.31). Si dice che tale asse è l'asse istantaneo di rotazione. A istanti diversi cambia l'elemento a contatto e cambia l'asse istantaneo di rotazione, ma in ogni istante si suppone che il moto sia rotatorio attorno all'asse istantaneo. La velocità angolare della rotazione attorno a B è uguale alla velocità angolare ω della rotazione attorno al centro di massa. Se si osserva che la distanza di T da B è uguale al doppio di quella di C da B, si ha che la velocità lineare di T è uguale al doppio di quella di C.

PROBLEMA SVOLTO 9.11 Un cilindro pieno di massa M e raggio R a partire dalla posizione di riposo rotola senza strisciare su un piano inclinato di lunghezza L e altezza h (Figura 9.32). Si determini la velocità del centro di massa del cilindro quando questo giunge ai piedi del piano inclinato.

Soluzione Il diagramma delle forze in Figura 9.32b mostra le forze esterne agenti sul cilindro: il peso Mg, la reazione normale del piano N e l'attrito f. Con la scelta del sistema di riferimento in figura le componenti cartesiane della somma delle forze esterne sono $\sum F_x = Mg\sin\theta - f$ e $\sum F_y = N - Mg\cos\theta$. Applicando la seconda legge di Newton con $a_x = a_{cm}$ e $a_y = 0$ si hanno le due equazioni

$$Mg\sin\theta - f = Ma_{cm} \quad \text{e} \quad N - Mg\cos\theta = 0.$$

Al fine di calcolare il momento torcente totale esterno rispetto al centro di massa si osserva che le rette d'azione delle forze N ed Mg passano entrambe per il polo e quindi hanno braccio nullo. La sola forza che contribuisce al momento torcente totale è l'attrito; si ha, quindi, $\sum \tau_z = -fR$. Dalla seconda legge di Newton per i moti rotatori si ottiene

$$-fR = I_{cm}\alpha_z.$$

 ISBN 88-408-1254-7

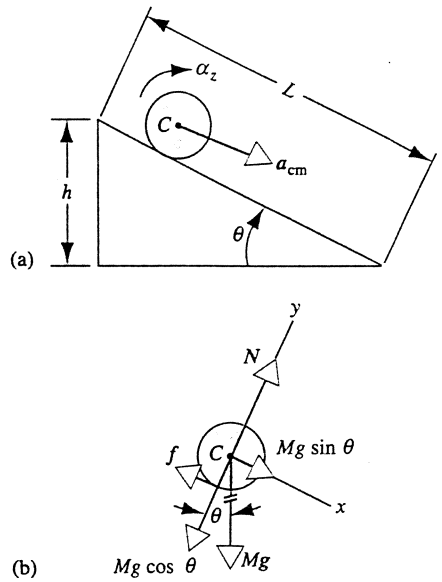


FIGURA 9.32 Problema svolto 9.11. (a) Un cilindro rotola senza strisciare su un piano inclinato. (b) Il diagramma delle forze per il cilindro.

In Figura 9.32 l'asse z è uscente dalla pagina e quindi α_z è negativa. La condizione che assicura il rotolamento senza strisciamento è $v_{cm} = \omega R$ che, una volta derivata rispetto al tempo, fornisce $a_{cm} = \alpha R$. Quest'ultima uguaglianza costituisce una relazione tra i moduli dell'accelerazione a_{cm} e dell'accelerazione angolare α. Sostituendo, infine, $\alpha_z = -a_{cm}/R$ e $I = MR^2/2$ (momento d'inerzia di un cilindro) nell'equazione precedente si ottiene

$$f = -\frac{I_{cm}\alpha_z}{R} = -\frac{(MR^2/2)(-a_{cm}/R)}{R} = \frac{1}{2}Ma_{cm}.$$

Dalla relazione appena ottenuta e dalla prima tra le equazioni relative al moto traslatorio si ha

$$a_{cm} = \frac{2}{3}g \sin\theta.$$

L'accelerazione del centro di massa, quindi, è minore del valore $g \sin\theta$, che esso avrebbe nel caso in cui il cilindro scivolasse senza rotolare sul piano inclinato. Questo risultato è vero in ogni istante, indipendentemente dalla distanza del cilindro dal piede del piano inclinato.

Dal momento che il moto del centro di massa è uniformemente accelerato il calcolo della sua velocità può essere eseguito per mezzo delle equazioni descritte nel Capitolo 2. Ponendo $v_{0x} = 0$ e $x - x_0 = L$, ove l'asse x è stato scelto parallelo al piano inclinato, le Equazioni 2.26 e 2.28 danno $v_{cm} = a_{cm}t$ ed $L = a_{cm}t^2/2$. Risolvendo la seconda equazione rispetto al tempo si ha $t = \sqrt{2L/a_{cm}}$ e sostituendo nella prima si ottiene la velocità cercata

$$v_{cm} = a_{cm}t = a_{cm}\sqrt{2L/a_{cm}} = \\ = \sqrt{2La_{cm}} = \sqrt{2L(2g \sin\theta)/3} = \sqrt{(4Lg \sin\theta)/3}.$$

Si può calcolare, infine, la forza d'attrito che il piano inclinato deve esercitare sul cilindro perché questo possa rotolare senza strisciare:

$$f = \frac{1}{2}Ma_{cm} = \left(\frac{1}{2}M\right)\left(\frac{2}{3}g \sin\theta\right) = \frac{1}{3}Mg \sin\theta.$$

Cosa accadrebbe se la forza d'attrito statico fosse inferiore a questo valore?

PROBLEMA SVOLTO 9.12 Un cilindro pieno uniforme di raggio $R = 12$ cm e massa $M = 3{,}2$ kg viene posto in rotazione uniforme in senso orario con velocità angolare $\omega_0 = 15$ giri/s. In seguito il cilindro viene posto a contatto con una superficie orizzontale (vedi Figura 9.33) con coefficiente d'attrito dinamico $\mu_k = 0{,}21$. Nella prima fase del moto il cilindro striscia sul piano, ma a partire dall'istante t si instaura il regime di puro rotolamento. (a) Si calcoli la velocità del centro di massa del cilindro all'istante t. (b) Si calcoli t.

Soluzione (a) Le forze agenti sul cilindro sono riportate in Figura 9.33b. Le componenti cartesiane della risultante delle forze esterne sono date da $\sum F_x = f$ e $\sum F_y = N - Mg$. Nella fase di strisciamento le forze agenti sul cilindro sono costanti e quindi anche l'accelerazione del centro di massa sarà costante; posto $v_{fx} = v_{cm}$ e $v_{ix} = 0$ si può scrivere

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t} = \frac{v_{cm} - 0}{t} = \frac{v_{cm}}{t}.$$

La proiezione lungo l'asse x della seconda legge di Newton fornisce, quindi,

$$f = Ma_x = \frac{Mv_{cm}}{t}.$$

Al momento totale delle forze esterne relativo al centro di massa contribuisce la sola forza d'attrito, così che $\sum \tau_z = fR$. Ponendo, ora, $\omega_i = -\omega_0$ e $\omega_f = -v_{cm}/R$, perché l'istante finale è quello in cui inizia il rotolamento senza strisciamento, si può scrivere l'accelerazione angolare nella forma

$$\alpha_z = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{-v_{cm}/R + \omega_0}{t}.$$

La seconda legge di Newton per il moto rotatorio impone che sia $fR = I_{cm}\alpha_z$; se in tale equazione si sostituiscono le espressioni di f e di α_z determinate a partire dalle equazioni precedenti, si ottiene,

$$\left(\frac{Mv_{cm}}{t}\right)R = \frac{(MR^2/2)(-v_{cm}/R + \omega_0)}{t},$$

ove si è sostituito $I_{cm} = MR^2/2$ (Figura 9.15). Con semplici passaggi algebrici si ottiene

$$v_{cm} = \frac{1}{3}\omega_0 R = \frac{1}{3}(15 \text{ giri/s})(2\pi \text{rad/giro})(0{,}12) = 3{,}8 \text{ m/s}.$$

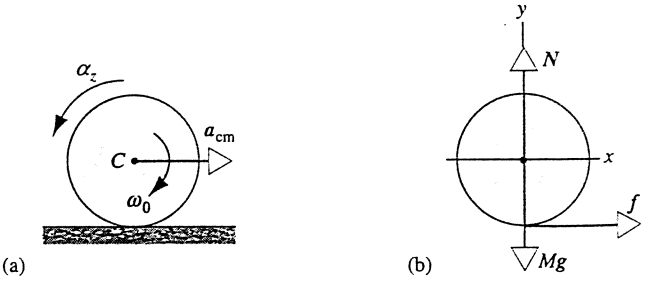


FIGURA 9.33 Problema svolto 9.12. (a) Inizialmente il cilindro ruota strisciando sulla superficie. (b) Il diagramma delle forze per il cilindro.

Si noti che v_{cm} non dipende da M, g e μ_k; cosa accadrebbe, però, se una di queste quantità fosse nulla?

(b) Si può eliminare f dal sistema di due equazioni $f = Mv_{cm}/t$ ed $f = \mu_k N = \mu_k Mg$ e risolvere rispetto a t:

$$t = \frac{v_{cm}}{\mu_k g} = \frac{3{,}8 \text{ m/s}}{(0{,}21)(9{,}80 \text{ m/s}^2)} = 1{,}8 \text{ s}.$$

PROBLEMA SVOLTO 9.13 Uno yo-yo avente massa $M = 0{,}24$ kg è costituito da due dischi di raggio $R = 2{,}8$ cm connessi mediante un asse sottile di raggio $R_0 = 0{,}25$ cm (Figura 9.34a). Una corda di lunghezza $L = 1{,}2$ m è arrotolata attorno all'asse. Si supponga di lasciar cadere lo yo-yo con velocità iniziale $v_0 = 1{,}4$ m/s e si calcoli la sua velocità angolare quando la corda è completamente srotolata.

Soluzione Il diagramma delle forze agenti sullo yo-yo è riportato in Figura 9.34b. Se si orienta l'asse y verticalmente verso il basso la relativa componente della somma delle forze esterne è $\sum F_y = Mg - T$; la componente lungo l'asse z, scelto uscente dalla pagina, del momento totale delle forze relativo al centro di massa è $\sum \tau_z = TR_0$. Le leggi di Newton per il moto traslatorio e rotatorio si riducono a

$$Mg - T = Ma_y \quad \text{e} \quad TR_0 = I\alpha_z.$$

Se si suppone che la corda abbia spessore trascurabile e che non scivoli sull'asse dello yo-yo, allora l'elemento della corda a contatto con l'asse è a riposo così come lo è l'elemento B nelle figure 9.30 e 9.31. Si ha allora, osservando che $v_{cm} = \omega R_0$, che $a_{cm} = \alpha R$; si sottolinea che la relazione precedente è un'uguaglianza scalare tra moduli di vettori. Con le nostre notazioni si ha $a_{cm} = a_y$ e $\alpha = \alpha_z$. Scrivendo, allora, $a_y = \alpha_z R_0$ e ricavando l'accelerazione angolare dalle due equazioni di Newton si ha

$$\alpha_z = \frac{g}{R_0} \frac{1}{1 + I/(MR_0^2)}.$$

Il problema è stato ricondotto al calcolo del momento d'inerzia dello yo-yo: si assume che il contributo dell'asse sottile sia trascurabile; l'ipotesi è lecita perché il raggio e la massa dell'asse sono molto piccoli rispetto a quelli dei due dischi. Con questa ipotesi si ha semplicemente $I = MR^2/2$. Allora

$$\alpha_z = \frac{g}{R_0} \frac{1}{1 + R^2/(2R_0^2)} =$$

$$= \frac{980 \text{ cm/s}^2}{0{,}25 \text{ cm} + (2{,}8 \text{ cm})^2/(2 \cdot 0{,}25 \text{ cm})} = 61{,}5 \text{ rad/s}^2.$$

Per il calcolo della velocità angolare finale si potrebbe usare l'Equazione 8.6, $\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$, se si conoscesse il tempo t impiegato dallo yo-yo per lo srotolamento completo della corda. A tale scopo si ricorda che $\phi = \phi_0 + \omega_{0z} t + \alpha_z t^2/2$ (Equazione 8.7), e si osserva che per il completo srotolamento lo yo-yo descrive un angolo $\phi - \phi_0 = L/R_0 = 480$ rad. La velocità angolare iniziale dello yo-yo inoltre è

$$\omega_{0z} = v_0/R_0 = (1{,}4 \text{ m/s})(0{,}0025 \text{ m}) = 560 \text{ rad/s}.$$

Inserendo questi dati nell'Equazione 8.7 si ha $(30{,}75 \text{ rad/s}^2)t^2 + (560 \text{ rad/s})t - 480 \text{ rad} = 0$, che fornisce $t = 0{,}82$ s e $t = -19$ s. Il risultato fisicamente significativo è quello positivo e quindi

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t =$$

$$= 560 \text{ rad/s} + (61{,}5 \text{ rad/s}^2)(0{,}82 \text{ s}) = 610 \text{ rad/s}.$$

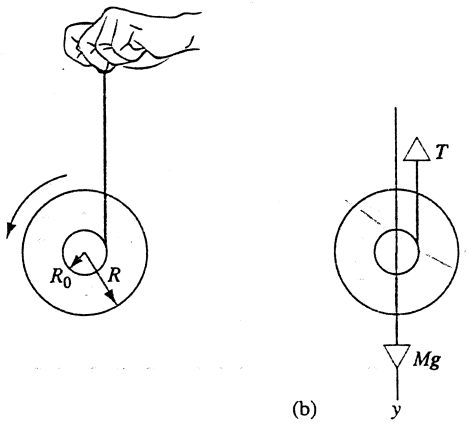


FIGURA 9.34 Problema svolto 9.13. (a) Uno yo-yo cade mentre la corda si srotola. (b) Il diagramma delle forze.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

9.1 Momento torcente

1. Si consideri l'oggetto in Figura 9.2 e si inverta il verso degli assi coordinati: $x \to -x$, $y \to -y$ e $z \to -z$. Ovviamente $r \to -r$. Cosa accade ai vettori τ ed F?
   (A) $\tau \to \tau$ e $F \to F$.
   (B) $\tau \to \tau$ e $F \to -F$.
   (C) $\tau \to -\tau$ e $F \to F$.
   (D) $\tau \to -\tau$ e $F \to -F$.
2. Una particella occupa la posizione individuata dal vettore $r = 0i + 3j + 0k$, con le componenti espresse in metri. A partire da un certo istante alla particella viene applicata la forza, $F = 0i + 0j + 4k$, con le componenti espresse in newton. Mentre la particella accelera sotto l'effetto di tale forza, il modulo del momento di F rispetto all'origine
   (A) cresce. (B) decresce.
   (C) resta costantemente nullo.
   (D) resta uguale a una costante non nulla.
3. In uno dei suoi numerosi film d'azione Jackie Chan si lancia dalla sommità di un palazzo arrotolandosi una corda attorno alla vita e lasciandola srotolare durante la caduta, più o meno come uno yo-yo. Assumendo la sua accelerazione uguale a una costante molto minore di g, si conclude che la tensione della corda
   (A) è quasi uguale al peso dell'attore.
   (B) è esattamente uguale al peso dell'attore.
   (C) è molto minore del peso dell'attore.
   (D) è nulla.

9.2 Momento d'inerzia e seconda legge di Newton

9.3 Momento d'inerzia dei corpi rigidi

4. Rispetto a quale asse è minimo il momento di inerzia di un cubo?
   (A) A un qualsiasi asse passante per il centro di massa del cubo e per il centro di una delle sue facce.

 ISBN 88-408-1254-7

(B) A un qualsiasi asse passante per il centro di massa del cubo e per il punto medio di uno dei suoi spigoli.
(C) A un qualsiasi asse passante per il centro di massa del cubo e per un suo vertice.
(D) Un cubo omogeneo ha lo stesso momento d'inerzia rispetto a tutti gli assi assi passanti per il suo centro di massa.

9.4 Momento torcente dovuto alla gravità

9.5 Statica dei corpi rigidi con asse fisso

5. Su una sbarra lunga e rettilinea agiscono più forze con diversi punti d'applicazione. Le forze sono tutte ortogonali alla sbarra che può trovarsi in equilibrio solo traslazionale, solo rotazionale, in equilibrio vero e proprio, oppure in una condizione di non equilibrio.

(a) Se il momento torcente totale relativo all'estremità sinistra della sbarra è nullo si può concludere che la sbarra
(A) è in equilibrio rotazionale.
(B) è in equilibrio rotazionale se e soltanto se anche la somma delle forze agenti su di essa è nulla.
(C) potrebbe non essere in equilibrio rotazionale anche se la somma delle forze agenti su di essa fosse nulla.
(D) potrebbe essere in equilibrio rotazionale anche se la somma delle forze agenti su di essa fosse diversa da zero.

(b) Se la somma delle forze esterne è nulla si può concludere che la sbarra
(A) è in equilibrio rotazionale.
(B) è in equilibrio rotazionale se e soltanto se anche il momento torcente relativo a tutti suoi punti è nullo.
(C) potrebbe essere in equilibrio rotazionale anche se il momento torcente relativo a tutti suoi punti fosse nullo.
(D) potrebbe essere in equilibrio rotazionale anche se il momento torcente relativo a tutti suoi punti fosse non nullo.

6. Un uomo spinge una giostra del tipo disegnato in Figura 9.25 esercitando una forza F tangente al bordo della giostra e tale che il suo momento torcente relativo al centro abbia modulo 240 N · m. La distanza tra il centro della giostra e il punto di applicazione della forza è di 1,6 m. Si suppone che i supporti non esercitino forze d'attrito sull'asse della giostra.

(a) La giostra è in equilibrio?
(A) Sì, sia rotazionale sia traslazionale.
(B) Solo traslazionale.
(C) Solo rotazionale.
(D) No, né traslazionale né rotazionale.

(b) Quanto vale il modulo della forza eventualmente esercitata dall'asse sulla giostra?
(A) 384 N. (B) 240 N.
(C) 150 N. (D) La forza è nulla.

7. Una scala è in equilibrio con la sua estremità superiore appoggiata a una parete verticale e la sua estremità inferiore a contatto con il suolo. Un operaio sale lungo la scala. In quel posizione è più facile che la scala possa scivolare al suolo?
(A) Prima che l'operaio vi salga.
(B) Quando l'operaio è sul piolo più basso.
(C) Quando l'operaio ha compiuto metà della salita.
(D) Quando l'operaio è sul piolo più alto.

9.6 Dinamica dei corpi rigidi con asse fisso

8. La seconda legge di Newton per il moto traslatorio nel piano xy si scrive $\sum F = ma$. La seconda legge di Newton per i moti rotatori si scrive $\sum \tau_z = I\alpha_z$. Si consideri il moto di una particella nel piano xy sotto l'azione di una singola forza.
(A) Per studiare il moto della particella si deve usare sia $\sum F = ma$ sia $\sum \tau_z = I\alpha_z$.
(B) Per studiare il moto della particella si può usare $\sum F = ma$ o $\sum \tau_z = I\alpha_z$.
(C) Per studiare il moto della particella è sufficiente usare $\sum F = ma$.
(D) Per studiare il moto della particella può essere usata solo $\sum \tau_z = I\alpha_z$.

9.7 Moti rototraslatori

9. Si considerano quattro sfere piene; la sfera (A) ha raggio r e massa m, la sfera (B) ha raggio $2r$ e massa m, la sfera (C) ha raggio r e massa $2m$, la sfera (D) ha raggio r e massa $3m$. Tali sfere possono essere poste in uno stesso punto di un piano inclinato a partire dal quale rotoleranno senza strisciare. Si può rispondere alle seguenti domande anche con (E) che vuol dire "tutte le sfere".
(a) Qual è la sfera con momento d'inerzia più elevato?
(b) Se le sfere vengono lasciate cadere a partire dalla posizione di riposo, su quale di esse agirà il momento torcente di modulo maggiore?
(c) Se le sfere vengono lasciate cadere a partire dalla posizione di riposo, quale di esse si muoverà con l'accelerazione lineare maggiore?
(d) Se le sfere vengono lasciate rotolare lungo il piano, quale di esse giungerà ai piedi del piano inclinato con la velocità maggiore?
(e) Se le sfere vengono lasciate rotolare lungo il piano, quale di esse giungerà ai piedi del piano inclinato in minor tempo?

10. Si considerino i seguenti quattro oggetti: (A) una sfera piena, (B) un guscio sferico, (C) un disco pieno, (D) un anello metallico. Tali oggetti hanno tutti medesimo raggio e stessa massa e possono essere posti in uno stesso punto di un piano inclinato a partire dal quale rotoleranno senza strisciare. Si può rispondere alle seguenti domande anche con (E) che vuol dire "tutti gli oggetti".
(a) Qual è l'oggetto con momento d'inerzia più elevato attorno al suo asse di simmetria?
(b) Se gli oggetti vengono lasciati cadere a partire dalla posizione di riposo, su quale di essi agirà il momento torcente di modulo maggiore?
(c) Se gli oggetti vengono lasciati cadere a partire dalla posizione di riposo, quale di essi si muoverà con l'accelerazione lineare maggiore?
(d) Se gli oggetti vengono lasciati rotolare lungo il piano, quale di essi giungerà ai piedi del piano inclinato con la velocità maggiore?
(e) Se gli oggetti vengono lasciati rotolare lungo il piano, quale di essi giungerà ai piedi del piano inclinato in minor tempo?

QUESITI

1. Si spieghi per quale ragione la ruota è stata un'invenzione fondamentale per il progresso umano.
2. Uno yo-yo, srotolata l'intera corda, riprende a muoversi verso l'alto. (a) Cambia il suo verso di rotazione? Si spieghi la risposta. (b) Cosa «spinge» lo yo-yo verso l'alto?
3. Uno yo-yo è posto a riposo su un piano orizzontale sul quale è libero di rotolare (Figura 9.35). Si determini il verso in cui rotolerà lo yo-yo se la corda viene tirata con la forza F_1. Cosa accade, invece, se viene applicata la forza F_2 tale che la sua retta d'azione passi per il punto di contatto tra lo yo-yo e il piano? Cosa accade, infine, se la corda viene tirata verso l'alto con la forza F_3?

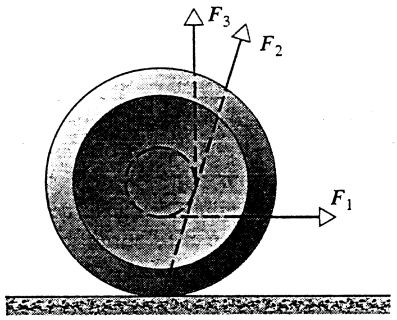


FIGURA 9.35 Quesito 3.

4. Il centro di massa e il baricentro di un palazzo sono coincidenti? E quelli di un lago? In che caso diventa significativa la differenza tra i due punti? Si citi un esempio.
5. Un corpo rigido viene lanciato con velocità angolare di rotazione nulla; se si trascura l'effetto dell'aria il moto del corpo risulta puramente traslatorio. Cosa si può dedurre da questo semplice risultato relativamente alla posizione occupata del baricentro?
6. La ginnasta Mary Lou Retton è stata protagonista di una performance strepitosa in un'edizione dei Giochi Olimpici. Si commenti la seguente affermazione: analizzando attentamente il filmato dell'esercizio della Retton alle parallele asimmetriche si osserva che, come previsto dalle leggi della fisica, il suo centro di massa è sempre sopra ai punti d'appoggio dell'atleta.
7. Ci si ponga in piedi lungo il bordo di una porta aperta con un piede da ciascun lato della porta. Si osserva che non è possibile sollevarsi sulla punta dei piedi. Perché?
8. Ci si segga su una sedia appoggiando la schiena alla spalliera perfettamente verticale e si provi ad alzarsi senza piegarsi in avanti. Si spieghi per quale ragione non ci si riesce.
9. Gli acrobati che camminano su un filo mantengono l'equilibrio con l'aiuto di una lunga asta rigida. Perché?
10. Esistono oggetti reali che sono dei corpi perfettamente rigidi? In caso di risposta affermativa se ne diano degli esempi. In caso di risposta negativa si spieghino le ragioni alla base della risposta.
11. Vi trovate al posto di guida di un'autovettura ferma in un parcheggio e vi informano che le forze esercitate in quel-l'istante dal suolo sulle quattro ruote sono uguali. Discutete criticamente questa affermazione ed elencate tutti gli elementi da considerare per stabilirne la veridicità.
12. Si consideri il Problema svolto 9.7 e si supponga che la parete non sia liscia. La legge empirica dell'attrito fornisce tutti gli elementi necessari a determinare la componente verticale della forza che la parete esercita sulla scala?
13. Al fine di calcolare il momento d'inerzia di un corpo è possibile considerare tutta la sua massa concentrata nel centro di massa? In caso di risposta affermativa si spieghi il perché. In caso di risposta negativa si costruiscano dei controesempi.
14. Rispetto a quale asse è minimo il vostro momento d'inerzia? Qual è l'asse passante per il centro di massa rispetto al quale il vostro momento d'inerzia è massimo?
15. Due dischi hanno la stessa massa e lo stesso spessore ma sono fatti di materiali con diversa massa volumica. Si dica quale dei due dischi ha momento d'inerzia maggiore rispetto all'asse di simmetria.
16. Si deve determinare il momento d'inerzia di un corpo di forma complicata. Il calcolo dell'integrale $\int r^2\,dm$ è troppo complesso. Si suggeriscano alcune strategie per la misura sperimentale del momento d'inerzia attorno a un asse fissato.
17. In Figura 9.36 sono riportate le sezioni trasversali di cinque oggetti solidi di stessa massa. Tali sezioni hanno uguale altezza e uguale larghezza massima. Quale tra questi oggetti ha il momento d'inerzia maggiore, e quale il minore, rispetto a un asse passante per il centro di massa e ortogonale alla pagina?



FIGURA 9.36 Quesito 17.

18. L'Equazione 9.17 è valida anche se la lamina non è sottile, ovvero se lo spessore è comparabile o maggiore rispetto ad a e b?
19. Ponendo un uovo in rotazione su un piano orizzontale è possibile stabilire se è crudo o sodo. Si spieghi in che modo. Si supponga, inoltre, di bloccare la rotazione di un uovo crudo esercitando una pressione dall'alto con le proprie dita e di mantenere tale pressione per un tempo molto breve; una volta libero l'uovo riprenderà a ruotare. Perché?
20. I volani vengono utilizzati per accumulare energia solare ed eolica. La quantità di energia che può essere immagazzinata in un volano dipende dalla massa volumica e dalla costante elastica del materiale di cui è fatto. A parità di massa e di resistenza meccanica è più conveniente usare materiali con massa volumica più bassa. Vi sembra ragionevole?
21. Per quale ragione le macchine sportive hanno ruote a raggi?
22. In Figura 9.37a è illustrato un bastoncino metà in legno e metà in acciaio, libero di ruotare attorno al punto O. Si ap-

 ISBN 88-08-1254-7

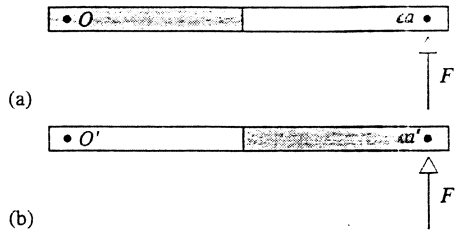


FIGURA 9.37 Quesito 22.

plica una forza all'estremità in acciaio a. In Figura 9.37b è illustrato lo stesso bastoncino libero di ruotare attorno all'estremità in acciaio O' e sul quale agisce la stessa forza F applicata all'estremità in legno a'. Si osserva in entrambi i casi la medesima accelerazione angolare? In caso di risposta negativa si dica in quale delle due situazioni la velocità angolare risulta più elevata.

23. Si descriva qualitativamente cosa accade al sistema in Figura 9.26 se al disco viene fornita un'accelerazione angolare iniziale in verso orario. Si ottiene una diversa accelerazione per il corpo? Una diversa accelerazione angolare del disco? Si rimanda al Problema svolto 9.10.
24. Una palla di cannone e una biglia rotolano senza strisciare lungo un piano inclinato. Quale dei due oggetti giunge prima ai piedi del piano inclinato?
25. Una lattina di manzo in scatola e una, identica, riempita di succo di mela rotolano senza strisciare su un piano inclinato. Si confrontino le accelerazioni angolari e quelle lineari. Si spieghino le differenze.
26. Un tronco d'albero cilindrico rotola su due diversi piani inclinati con stessa altezza ma diverso angolo di inclinazione. Il tronco giungerà al suolo con la stessa velocità in entrambi i casi? Il tempo impiegato per percorrere i due piani inclinati è lo stesso? Si giustifichino le risposte.
27. Un cilindro di ottone pieno ha la stessa massa e lo stesso raggio di un cilindro di legno pieno; quest'ultimo è più lungo del primo. I due cilindri vengono lasciati rotolare su un piano inclinato a partire dallo stesso punto; quale dei due cilindri giungerà prima ai piedi del piano inclinato? Si supponga ora che i due cilindri abbiano stesso raggio, stessa lunghezza e stessa massa; ciò è possibile se si pratica in modo opportuno un foro lungo l'asse del cilindro di ottone. Quale dei due cilindri, in questo caso, vincerà la corsa? Si giustifichino le risposte e si assuma che il rotolamento avvenga senza strisciare.
28. Si enuncino le tre leggi di Newton con il linguaggio dei moti rotatori.
29. Due dischi pesanti sono connessi mediante una sbarretta di raggio molto minore. L'oggetto viene posto su una rampa in modo che i dischi fuoriescano dalla rampa stessa come in Figura 9.38. L'oggetto rotola giù senza strisciare. (a) Quando i dischi giungono a contatto con il piano orizzontale il sistema balza in avanti con una velocità traslazionale molto elevata. Si spieghi il perché di tale fenomeno. (b) Se questo sistema fosse messo in competizione con un anello di raggio arbitrario, quale tra i due oggetti giungerebbe prima ai piedi della rampa?

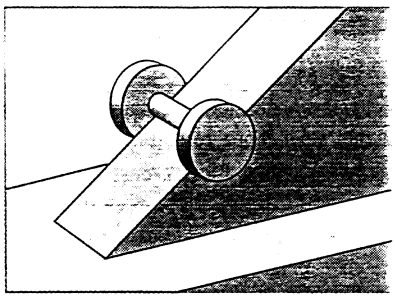


FIGURA 9.38 Quesito 29.

30. Un boscaiolo che voglia abbattere un albero deve praticare un taglio sul tronco dal lato da cui cadrà l'albero. Si spieghi perché. Ci si può ritenere al sicuro se ci si pone dietro l'albero dal lato opposto rispetto a quello da cui cadrà l'albero?
31. Si commentino le seguenti affermazioni relative alle gare di sci alpino. (a) Nella discesa libera conviene avere sci che non cambino direzione facilmente. (b) Nelle gare di slalom conviene avere sci che cambiano direzione facilmente. (c) Il momento d'inerzia degli sci da discesa, allora, deve essere maggiore di quello degli sci da slalom. (d) Considerando il fatto che l'attrito tra gli sci e la neve è molto basso si spieghi come faccia lo sciatore a esercitare il momento torcente necessario per ruotare gli sci e per opporsi a una rotazione non desiderata.
32. Si consideri un bastoncino in posizione verticale su una lastra di ghiaccio e si determini la traiettoria compiuta dal suo centro di massa in caso di caduta del bastoncino.
33. Si spieghi per quale ragione l'attrito statico non può rallentare il moto di puro rotolamento di una ruota su un piano orizzontale. Come si spiega, allora, il rallentamento della ruota?
34. Fausto e Gino percorrono un tratto di strada in bicicletta alla stessa velocità. Le ruote della bicicletta di Fausto hanno diametro leggermente più grande di quello delle ruote di Gino. Si confrontino le velocità angolari delle due ruote e le velocità delle parti superiori delle ruote.
35. Un uomo spinge un tamburo cilindrico per mezzo di un asse poggiato sulla parte superiore del tamburo sul quale non striscia, come illustrato in Figura 9.39; il cilindro percorre lo spazio $L/2$, pari alla metà della lunghezza dell'asta, rotolando sul suolo senza scivolare. Si determini la posizione finale dell'asse e si calcoli lo spazio percorso dall'uomo.

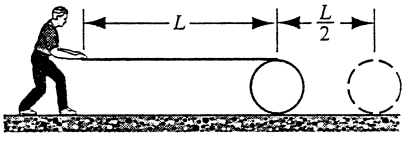


FIGURA 9.39 Quesito 35.

ESERCIZI

9.1 Momento torcente

1. Una particella occupa la posizione individuata dalle coordinate $x = 2{,}0$ m e $y = 3{,}0$ m. Si calcoli il modulo del momento torcente rispetto all'origine di una forza di modulo 5,0 N che agisce sulla particella (a) nel verso positivo dell'asse x, (b) nel verso positivo dell'asse y e (c) nel verso negativo dell'asse x.
2. In Figura 9.40 sono riportate le rette d'azione e i punti di applicazione di due forze parallele al piano della figura. Si supponga, ora, che queste forze agiscano su un corpo rigido libero di ruotare attorno a un asse ortogonale al piano della figura e passante per l'origine O. (a) Si calcoli il modulo del momento totale delle forze calcolato rispetto al polo O. (b) Si calcoli il valore numerico del modulo del momento di cui al punto (a) e la sua direzione supponendo che siano $r_1 = 1{,}30$ m, $r_2 = 2{,}15$ m, $F_1 = 4{,}20$ N, $F_2 = 4{,}90$ N, $\theta_1 = 75{,}0^\circ$ e $\theta_2 = 58{,}0^\circ$.

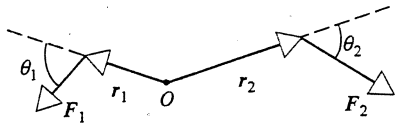


FIGURA 9.40 Esercizio 2.

3. Si disegni nuovamente la Figura 9.40 effettuando le trasformazioni seguenti: (a) $F_1 \to -F_1$, (b) $r_1 \to -r_1$, (c) $F_2 \to -F_2$ ed $r_2 \to -r_2$. In tutti i casi si indichi la nuova direzione del momento torcente totale.
4. L'oggetto in Figura 9.41 può ruotare attorno a un asse ortogonale al piano della figura e passante per O. Sul corpo agiscono tre forze le cui direzioni sono illustrate in figura e tali che $F_A = 10$ N è applicata in A distante 8,0 m da O, $F_B = 16$ N è applicata in B distante 4,0 m da O ed $F_C = 19$ N è applicata in C distante 3,0 m da O. Si determini il modulo e la direzione del momento totale delle forze calcolato rispetto al polo O.

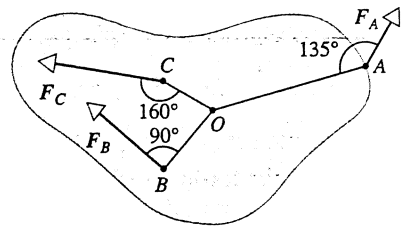


FIGURA 9.41 Esercizio 4.

5. I due vettori r ed s giacciono nel piano xy, hanno moduli $r = 4{,}5$ unità ed $s = 7{,}3$ unità, e formano rispettivamente gli angoli di 320° e 85°, misurati in verso antiorario, rispetto alla direzione positiva dell'asse x. Si determini il modulo e la direzione del vettore $r \times s$.
6. Il vettore a ha modulo 3,20 unità, giace nel piano yz, forma un angolo di 63,0° con la direzione positiva dell'asse y e ha componente positiva lungo l'asse z. Il vettore b ha modulo 1,40 unità, giace nel piano xz, forma un angolo di 48,0° con la direzione positiva dell'asse x e ha componente positiva lungo l'asse z. Si calcoli $a \times b$.
7. I vettori a e b giacciono nel piano xy e individuano un angolo ϕ minore di 90°. Sia $c = a \times (b \times a)$. Si determini il modulo di c e l'angolo individuato da b e c.
8. Siano $a = 2i - 3j + k$ e $b = 4i - 2j - 3k$. Si ponga $c = a \times b$. (a) Si esprima c in termini dei versori di base. (b) Si determini l'angolo individuato dai vettori a e b.
9. Si calcoli il momento torcente rispetto all'origine della forza $F = (3{,}5\text{ N})i - (2{,}4\text{ N})j + (4{,}3\text{ N})k$ agente su una particella che occupa la posizione individuata dalle coordinate $x = 1{,}5$ m, $y = -2{,}0$ m e $z = 1{,}6$ m. Si diano i risultati in termini dei versori.
10. Una particella occupa la posizione individuata dal vettore $r = (0{,}54\text{ m})i - (0{,}36\text{ m})j + (0{,}85\text{ m})k$. Si calcolino le componenti cartesiane del momento rispetto all'origine di una forza di modulo 2,6 N che agisce sulla particella (a) nel verso positivo dell'asse x e (c) nel verso negativo dell'asse z.

9.2 Momento d'inerzia e seconda legge di Newton

11. Una sferetta di piombo di massa 25 g è fissata all'origine per mezzo di una sbarretta di massa trascurabile lunga 74 cm. La sbarretta ruota nel piano xy attorno all'asse z. Una forza costante di 22 N agisce sulla sferetta nella direzione dell'asse y. (a) Si calcoli il momento d'inerzia della sferetta relativamente all'asse z trattandola come una particella puntiforme. (b) Si calcoli l'accelerazione angolare della sbarretta posizionata in modo da formare con la direzione positiva dell'asse x un angolo di 40°.
12. Tre particelle sono fissate a una sbarretta lunga 1,00 m e di massa trascurabile, libera di ruotare nel piano xy attorno all'origine. La particella 1 ha massa 52 g e dista 27 cm dall'origine, la particella 2 ha massa 35 g e dista 45 cm dall'origine, la particella 3 ha massa 24 g e dista 65 cm dall'origine. (a) Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse z. (b) Si calcoli il momento d'inerzia del sistema rispetto a un asse parallelo all'asse z e passante per il centro di massa del sistema.
13. Due sbarrette di massa trascurabile sono saldate a 90° in corrispondenza di un'estremità. Il corpo così ottenuto ruota nel piano xy con il vertice fisso nell'origine. Una particella di massa 75 g viene fissata a una delle due sbarrette alla distanza di 42 cm dall'origine; una seconda particella di massa 30 g viene fissata all'altra sbarretta alla distanza di 65 cm dall'origine. (a) Si calcoli il momento d'inerzia dell'intero sistema rispetto all'asse z. (b) Come cambierebbe il momento d'inerzia se entrambe le particelle venissero fissate alle stesse distanze ma su una medesima sbarretta.
14. Si consideri l'oggetto introdotto nell'Esercizio 13 e si supponga che la prima sbarretta giaccia lungo l'asse x e la seconda lungo l'asse y. Si calcoli l'accelerazione angolare raggiunta dal sistema se su entrambe le particelle viene applicata una forza $F = (3{,}6\text{ N})i + (2{,}5\text{ N})j$.

9.3 Momento d'inerzia dei corpi rigidi

15. La pala di un elicottero è lunga 7,80 m e pesa 110 kg. (a) Si calcoli la forza esercitata sul perno che connette la pala al rotore quando quest'ultimo ruota alla velocità angolare

 ISBN 88-408-1254-7

di 320 giri/min. (*Suggerimento*: per questo calcolo la pala si può considerare come una particella puntiforme che occupa la posizione del centro di massa. Perché?) (b) Si calcoli il momento torcente da applicare al rotore per portarlo dalla posizione di riposo alla velocità massima in 6,70 s. Si trascuri l'effetto dell'aria. (Per questo calcolo la pala non può essere trattata come particella nel centro di massa. Perché? Si assuma uniforme la distribuzione della massa nella pala.)

16. Le tre pale dell'elicottero illustrato in Figura 9.42 sono lunghe 5,20 m e hanno massa pari a 240 kg. Il rotore ha velocità angolare di 350 giri/min. Si calcoli il momento d'inerzia del complesso del rotore attorno all'asse di rotazione assumendo che le pale siano delle sbarre sottili.

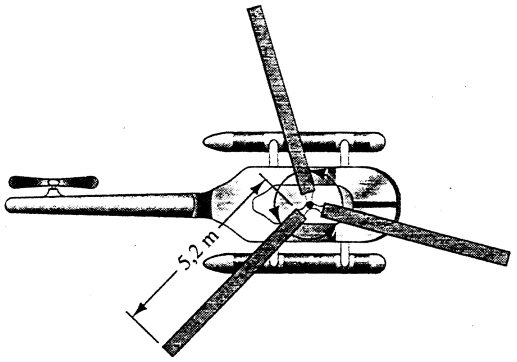


FIGURA 9.42 Esercizio 16.

17. In Figura 9.43 è disegnato un oggetto di massa M a forma di parallelepipedo rettangolare di spigoli a, b e c. Si calcoli il momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse perpendicolare alla faccia di superficie massima e passante per uno degli angoli di tale faccia. (*Suggerimento*: si confronti la Figura 9.15.)

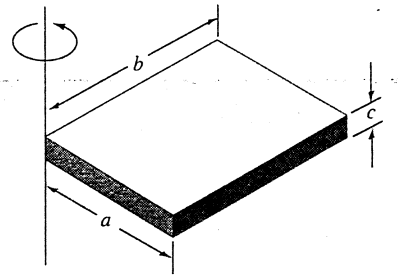


FIGURA 9.43 Esercizio 17.

18. Si calcoli il momento d'inerzia di un bastoncino lungo un metro e di massa pari a 0,56 kg rispetto a un asse ad esso perpendicolare e passante per un punto del bastoncino distante 20 cm da una delle due estremità.

19. Due particelle di massa m sono connesse l'una all'altra e a un asse fisso mediante due sbarrette di lunghezza L e massa M, come illustrato in Figura 9.44. L'oggetto ruota attorno all'asse fisso con velocità angolare ω. Si determini un'espressione algebrica per il momento d'inerzia dell'oggetto rispetto all'asse di rotazione.

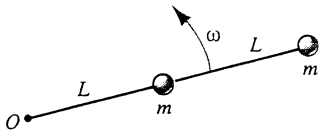


FIGURA 9.44 Esercizio 19.

20. (a) Si mostri che, per quel che riguarda le rotazioni attorno all'asse di simmetria, un cilindro pieno di raggio R e massa M si comporta come un anello sottile di massa M e raggio $R/\sqrt{2}$. (b) La distanza da un asse del punto nel quale si può concentrare tutta la massa di un corpo senza modificarne il momento d'inerzia è detto raggio di *girazione*. Si denoti con k tale raggio e si dimostri che

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}.$$

Questa espressione fornisce il raggio «dell'anello equivalente» per un corpo del tutto generico.

21. La sbarra solida considerata nel Paragrafo 9.3 è riportata in Figura 9.45. La sbarra viene suddivisa in un numero arbitrario N di porzioni. (a) Si calcoli la massa m_n di ciascuna porzione. (b) Si dimostri che la distanza dell'n-esima porzione dall'asse vale $r_n = (n-1)L/N + L/(2N) = (n-1/2)L/N$. (c) Usando l'Equazione 9.13 si calcoli il momento d'inerzia e si dimostri l'Equazione 9.14. Nel calcolo si dovranno introdurre le seguenti uguagliane notevoli:

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = N,$$

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2,$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = N(N+1)(2N+1)/6.$$

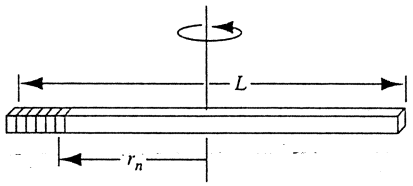


FIGURA 9.45 Esercizio 21.

9.4 Momento torcente dovuto alla gravità

9.5 Statica dei corpi rigidi con asse fisso

22. Per spaccare una noce è necessario esercitare su entrambi i suoi lati una forza di 46 N. Che forza F occorrerà applicare allo schiaccianoci di Figura 9.46?

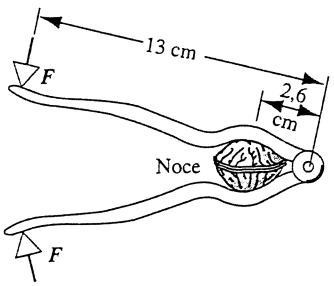


FIGURA 9.46 Esercizio 22.

23. La torre di Pisa (Figura 9.47) è alta 55 m e ha un diametro di 7,0 m. La sua cima è spostata di 4,5 m dall'asse verticale. Schematizzando la torre come un cilindro uniforme di base circolare (a) si calcoli l'ulteriore spostamento della cima che porterebbe la torre al limite del crollo, (b) l'angolo che in quella circostanza la torre formerebbe con l'asse verticale. (Prima delle recenti opere di consolidamento, concluse nel 2002, la cima della torre si muoveva in misura di 1 mm/a).

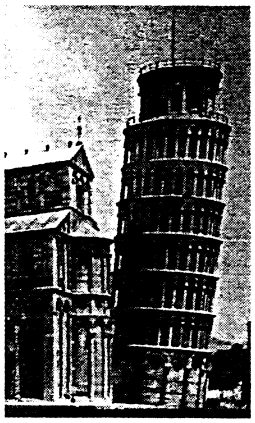


FIGURA 9.47 Esercizio 23.

24. Una piccola forza orizzontale viene applicata perpendicolarmente al punto medio di uno degli spigoli superiori di un cubo a riposo su un piano orizzontale. Supponiamo che l'intensità della forza cresca costantemente. Sapendo che il coefficiente di attrito statico tra le superfici vale 0,46, stabilire se il cubo scivolerà sul piano o si capovolgerà.

25. Nel Problema svolto 9.7 il coefficiente d'attrito statico tra la scala e il suolo vale 0,54. Fino a che altezza può salire il pompiere prima che la scala cada?

26. In un'automobile di massa 1360 kg l'asse anteriore dista 305 cm da quello posteriore. Il baricentro dell'automobile si trova a 178 cm dall'asse anteriore, spostato verso il retrotreno. L'autovettura è ferma parcheggiata su una strada orizzontale. Si determinino (a) le forze, assunte uguali, che il suolo esercita sulle due ruote anteriori e (b) sulle due ruote posteriori.

27. Un uomo che pesa 720 N cammina su un ponte orizzontale e si ferma in un punto che dista dall'estremità opposta 3/4 della lunghezza dell'intero ponte. Il ponte è uniforme e pesa 2700 N. Quali sono le forze che i supporti esercitano sulle estremità del ponte?

28. Un tuffatore del peso di 582 N è fermo all'estremità di un trampolino che pesa 142 N e che misura 4,48 m (Figura 9.48). Il trampolino è fissato al suolo per mezzo di due piedistalli a distanza di 1,55 m l'uno dall'altro. Si determini la tensione, o la compressione, cui sono sottoposti i due piedistalli.

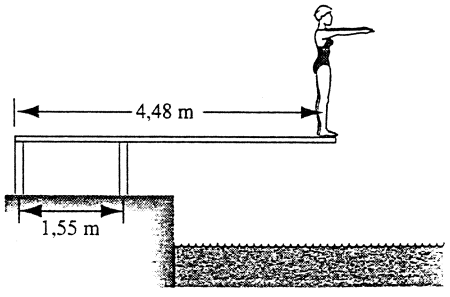


FIGURA 9.48 Esercizio 28.

29. Si calcoli la forza minima necessaria che si deve applicare alla ruota di Figura 9.49 perché questa possa superare un gradino di altezza h. Si denoti con r il raggio della ruota e con P il suo peso.

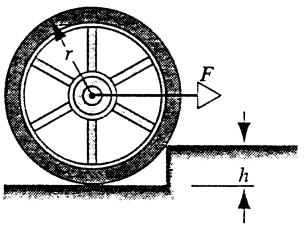


FIGURA 9.49 Esercizio 29.

30. Un'insegna stradale uniforme e quadrata di massa 52,3 kg e di 1,93 m di lato pende da una sbarra lunga 2,88 m e di massa trascurabile. Come illustrato in Figura 9.50, un cavo collega l'estremità libera della sbarra a un punto del muro posto 4,12 m al di sopra del punto d'innesto della sbarra. (a) Si calcoli la tensione del cavo. (b) Si calcolino le componenti orizzontale e verticale della forza che il muro esercita sulla sbarra.

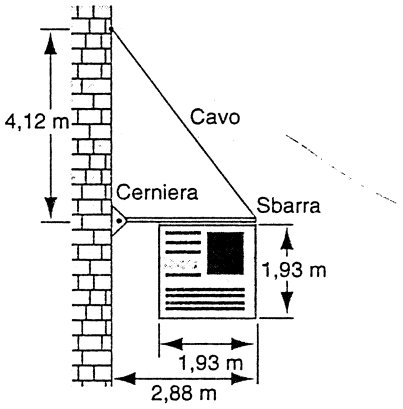


FIGURA 9.50 Esercizio 30.

31. Una delle due estremità di una trave uniforme, pesante 233 N e lunga 1,04 m, è vincolata a una parete mediante una cerniera. L'altra estremità è fissata alla parete con un cavo che, come illustrato nella Figura 9.51, forma angoli di 27,0° con la parete e con la trave stessa. (a) Si calcoli la

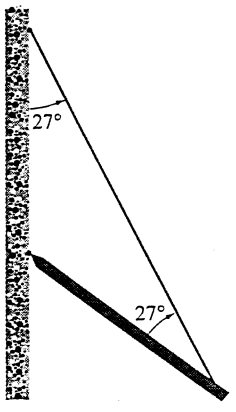


FIGURA 9.51 Esercizio 31.

 ISBN 88-408-1254-7

tensione del cavo. (b) Si calcolino le componenti orizzontale e verticale della forza esercitata dalla cerniera.

32. Una tavola di lunghezza $L = 6{,}23$ m, il cui peso vale 275 N, è poggiata al suolo e su un rullo privo d'attrito posto a una parete di altezza $h = 2{,}87$ m (Figura 9.52). Il baricentro della tavola coincide con il suo centro geometrico. La tavola permane in equilibrio per tutti gli angoli $\theta \geq 68{,}0°$, mentre scivola se $\theta < 68{,}0°$. Si calcoli il coefficiente d'attrito tra tavola e suolo.

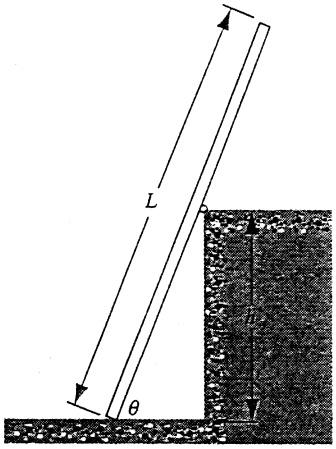


FIGURA 9.52 Esercizio 32.

9.6 Dinmica dei corpi rigidi con asse fisso

33. Un cilindro di massa pari a 1,92 kg è libero di ruotare attorno al suo asse di simmetria. Le forze applicate al cilindro sono riportate in Figura 9.53: $F_1 = 5{,}88$ N, $F_2 = 13$ N ed $F_3 = 2{,}12$ N. I raggi valgono $R_1 = 4{,}93$ cm ed $R_2 = 11{,}8$ cm. Si determinino il modulo e la direzione dell'accelerazione angolare del cilindro.

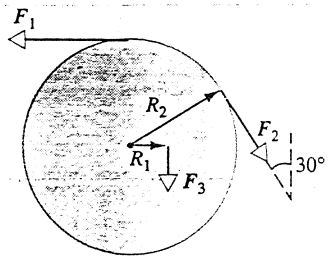


FIGURA 9.53 Esercizio 33.

34. A un sottile guscio sferico di raggio 1,88 m viene impartita l'accelerazione angolare di 6,23 rad/s^2 attorno a un asse passante per il suo centro, per effetto di un momento torcente di 960 N · m. Si calcoli (a) il momento d'inerzia del guscio rispetto all'asse di rotazione, (b) la massa del guscio.

35. Durante il salto dal trampolino la velocità angolare di un tuffatore passa da zero a 6,20 rad/s in 220 ms. Il momento d'inerzia del tuffatore vale 12,0 kg · m^2. (a) Si determini l'accelerazione angolare durante la fase di distacco dal trampolino. (b) Si calcoli il momento torcente esterno che agisce sul tuffatore durante la fase di distacco.

36. In Figura 9.54 è riportata la fotografia della pesante porta d'ingresso alle stanze per i test neutronici del Lawrence Livermore Laboratory; si tratta della porta più pesante al mondo montata su cerniere. La sua massa vale 44 000 kg, il suo momento d'inerzia rispetto all'asse delle cerniere è $8{,}7 \cdot 10^4$ kg · m^2 e la sua larghezza è 2,4 m. Si calcoli la forza costante da applicare al suo bordo esterno in direzione perpendicolare alla porta per farla ruotare, a partire dalla posizione di riposo, di 90° in 30 s.

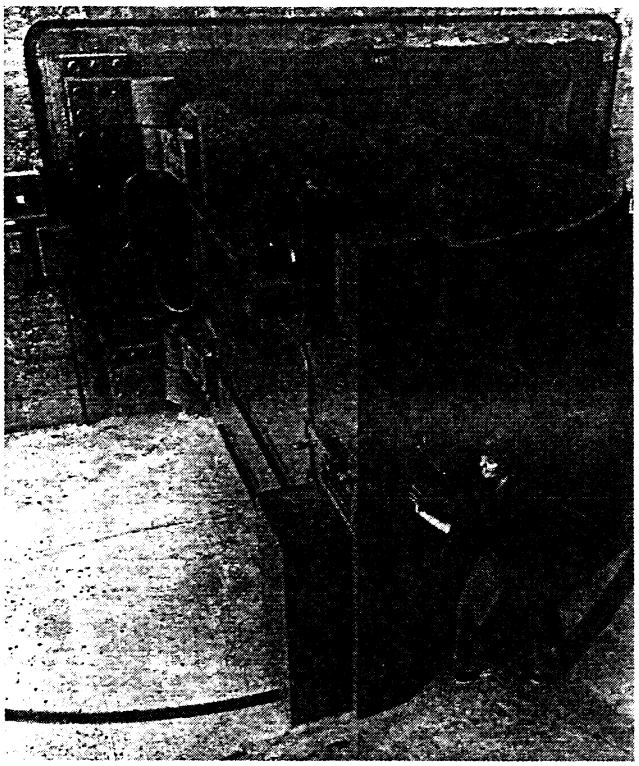


FIGURA 9.54 Esercizio 36.

37. Una puleggia, il cui momento d'inerzia rispetto all'asse di simmetria vale $1{,}14 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2 e il cui raggio è pari a 9,88 cm, è sottoposta all'azione di una forza applicata tangenzialmente a un elemento del suo bordo, il cui modulo vale $F = At + Bt^2$, ove $A = 0{,}496$ N/s, e $B = 0{,}305$ N/s^2. Si determini la velocità angolare dopo 3,60 s, supponendo che all'istante iniziale $t = 0$ la puleggia fosse a riposo.

38. Due corpi identici di massa M sono collegati per mezzo di una corda sottile che passa su una puleggia liscia di raggio R e momento d'inerzia I (Figura 9.55). La corda non scivola sulla puleggia, ma non è noto se vi sia attrito tra il corpo e il piano orizzontale. Quando il sistema viene lasciato libero di muoversi si osserva che la puleggia ruota di un angolo θ nel tempo t e che i blocchi si muovono con accelerazione costante. (a) Si calcoli l'accelerazione angolare della puleggia. (b) Si calcoli l'accelerazione dei due blocchi. (c) Si calcolino le tensioni nella corda distinguendo tra la parte orizzontale e quella verticale. Tutte le risposte vanno espresse in funzione dei parametri M, I, R, θ, g e t.

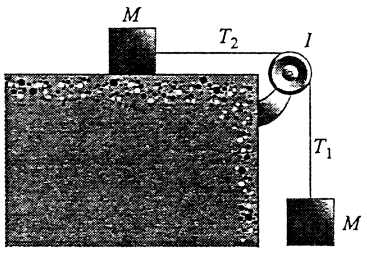


FIGURA 9.55 Esercizio 38.

39. In una macchina di Atwood un blocco ha massa 512 g e l'altro 463 g. La puleggia è montata su cuscinetti privi d'attrito e ha raggio di 4,90 cm. Quando il sistema viene lasciato libero di muoversi si osserva che il blocco più pesante cade di 76,5 cm in 5.11 s. Si calcoli il momento d'inerzia della puleggia.

40. Una ruota, costituita da una disco uniforme avente raggio di 23,0 cm e massa 1,40 kg, ruota alla velocità di 840 giri/min attorno al suo asse su cuscinetti privi d'attrito. Per arrestarne il moto, un pattino frenante agisce premendo sul bordo della ruota con una forza di 130 N diretta radialmente. La ruota compie 2,80 giri prima di arrestare il suo moto. Si determini il coefficiente d'attrito tra il bordo della ruota e il pattino frenante.

9.7 Moti rototraslatori

41. Una macchina che viaggia alla velocità di 78,3 km/h ha ruote di 77,0 cm di diametro. (a) Si calcoli la velocità angolare delle ruote attorno al loro asse. (b) Si supponga che l'automobile venga rallentata uniformemente fino a fermarsi in modo che le ruote non slittino sull'asfalto e che nella frenata compiano 28,6 giri. Si calcoli l'accelerazione angolare delle ruote in questa fase. (c) Si calcoli lo spostamento dell'automobile durante la frenata.

42. Uno yo-yo (si veda il Problema svolto 9.13) ha momento d'inerzia di 950 g · cm^2 e massa di 120 g. Il raggio del suo asse vale 3,20 mm e la sua corda è lunga 134 cm. Lo yo-yo rotola a partire dalla sua posizione di riposo fino allo srotolamento completo della corda. (a) Si calcoli la sua accelerazione. (b) Si calcoli il tempo necessario per lo srotolamento completo. (c) Se lo yo-yo giunto in fondo arrestasse il moto verticale e proseguisse in un moto puramente rotatorio, quale sarebbe la sua velocità angolare? Si esprima il risultato in giri/s. (d) Si ripeta il calcolo proposto al punto (c) supponendo che lo yo-yo sia stato lanciato verso il basso con velocità iniziale di 1,30 m/s.

43. La Figura 9.56 illustra un dispositivo per studiare lo slittamento dei pneumatici da automobile. La ruota è inizialmente a riposo ed è vincolata a un'asta che può ruotare liberamente sui perni A e B. La ruota ha momento d'inerzia attorno al suo asse di 0,750 kg · m^2, massa di 15,0 kg e raggio di 30,0 cm. Il pneumatico viene istantaneamente messo a contatto, in modo che AB risulti orizzontale, con un nastro scorrevole in moto alla velocità di 12,0 m/s. (a) Si calcoli il tempo impiegato dalla ruota per raggiungere la sua velocità angolare finale nel caso in cui il coefficiente d'attrito dinamico tra la ruota e il nastro valga 0,600. (b) Quanto sarà lunga la strisciata dovuta allo slittamento sul nastro mobile?

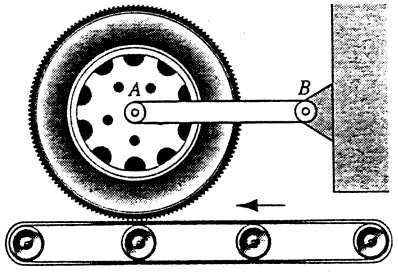


FIGURA 9.56 Esercizio 43.

PROBLEMI

1. Una cassa cubica il cui spigolo misura 1,12 m contiene un macchinario tale che il baricentro dell'intero sistema, cassa e contenuto posti in piano, si trovi 0,28 m verticalmente al di sopra del centro geometrico del cubo. La cassa viene collocata a riposo su una rampa che forma un angolo θ con la direzione orizzontale. Al crescere di θ si raggiunge una situazione limite in cui la cassa inizia a scivolare lungo la rampa oppure si ribalta. Quale delle due possibili situazioni si verificherà se il coefficiente d'attrito statico vale (a) 0,60 o (b) 0,70? In entrambi i casi si calcoli l'angolo limite.

2. Una catena flessibile di peso P è sospesa a due punti A e B posti alla stessa altezza (Figura 9.57). Si determini (a) la forza esercitata dalla catena sui due sostegni e (b) la tensione applicata al punto più basso della catena.

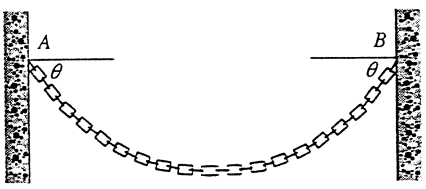


FIGURA 9.57 Problema 2.

3. Una sfera di raggio r e peso P pende da una corda attaccata a un punto di una parete verticale posto a distanza L dal punto di contatto tra la sfera e la parete (Figura 9.58). Si determini (a) la tensione della corda e (b) la forza esercitata dalla parete sulla sfera.

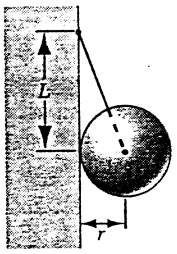


FIGURA 9.58 Problema 3.

4. Una trave viene trasportata da tre operai: uno ne sorregge un'estremità e gli altri due sorreggono la sbarra in un medesimo punto, per mezzo di una traversa, in modo tale che il peso complessivo sia suddiviso equamente tra i tre operai. Si determini la posizione della traversa trascurandone la massa.

 ISBN 88-408-1254-7

5. Un addetto alla pulizia delle finestre ha massa di 74,6 kg e fa uso di una scala di massa 10,3 kg lunga 5,12 m. L'uomo pone un'estremità della scala al suolo a 2,45 m dalla parete e la seconda estremità su una finestra incrinata. Quando l'uomo sale sulla scala per 3,10 m il vetro si rompe. Trascurando l'attrito tra la scala e la finestra e assumendo che l'estremità al suolo non scivoli, si calcoli (a) la forza che la scala esercita sulla finestra subito prima della sua rottura e (b) il modulo e la direzione della forza che il suolo esercita sulla scala subito prima che avvenga la rottura.

6. Due sfere identiche lisce di peso P sono a riposo in un recipiente rettangolare come illustrato in Figura 9.59. La congiungente i centri delle sfere forma l'angolo θ con la direzione orizzontale. Si determinino le forze esercitate sulle sfere (a) dal fondo del recipiente, (b) dalle pareti del recipiente, (c) da una sfera sull'altra.

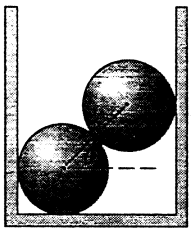


FIGURA 9.59 Problema 6.

7. Una sfera uniforme di peso P è a riposo incastrata tra due piani inclinati di angoli θ_1 e θ_2 rispetto al piano orizzontale (Figura 9.60). (a) Si assuma che tutte le superfici siano lisce e si determinino le forze, in modulo e direzione, che i due piani esercitano sulla sfera. (b) Cosa cambierebbe, in linea di principio, se l'effetto dell'attrito non fosse trascurabile?

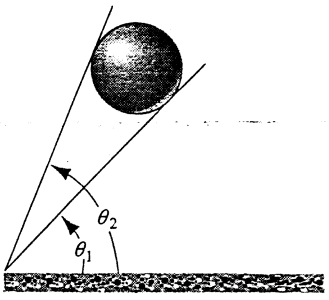


FIGURA 9.60 Problema 7.

8. L'estremo A di una sbarra orizzontale sottile, di massa trascurabile e di lunghezza L, è fissata a una parete per mezzo di un perno. L'altra estremità B è legata al punto C della parete tramite un filo sottile che forma l'angolo θ con la direzione orizzontale. Un oggetto di peso P è appoggiato sulla sbarra a distanza x dalla parete (Figura 9.61). (a) Si determini la tensione del filo in funzione di x. (b) Si determinino le componenti, verticale e orizzontale, della forza esercitata sulla sbarra dal perno in A. (c) Supponendo che il filo possa resistere alla massima tensione di 520 N, si determini il massimo valore di x ammesso per evitare la rottura del filo se $P = 315$ N, $L = 1{,}76$ m e $\theta = 32{,}0°$.

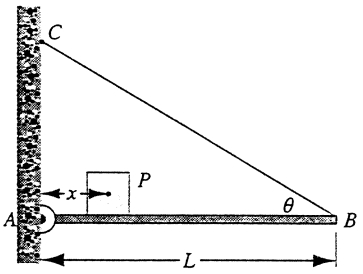


FIGURA 9.61 Problema 8.

9. Il seguente è un problema di meccanica ben noto (si veda, per esempio, *Scientific American*, Novembre 1964, pag. 128): mattoni di densità uniforme e tutti uguali tra loro vengono accatastati uno sull'altro in modo che ciascuno stia in equilibrio alla massima sporgenza rispetto al sottostante. A tale fine il baricentro del mattone in cima alla catasta deve essere posto esattamente sopra il bordo del mattone sottostante. Il baricentro del sistema costituito da questi due deve collocarsi verticalmente al di sopra del bordo del mattone che li sorregge, e così via fino in fondo. (a) Si spieghi per quale motivo questo criterio assicura la sporgenza complessiva massima e si calcoli la massima sporgenza per una struttura in equilibrio. (b) Si dimostri che con l'algoritmo precedente si può raggiungere una sporgenza comunque grande. (Nell'articolo citato Martin Gardner afferma che: "usando 52 carte da gioco con la prima carta posizionata sul bordo del tavolo, la massima sporgenza che si raggiunge è pari a poco meno di 2,25 volte la lunghezza di una carta ... .") (c) Si supponga ora di seguire un altro algoritmo: l'n-esimo mattone viene discostato dal sottostante di un tratto pari a $1/(nL)$ ove L è la lunghezza dei mattoni. Quanti mattoni si possono impilare prima che la struttura crolli? Si controlli la ragionevolezza del risultato generale (in funzione di n) studiando i casi $n = 1$, $n = 2$ ed $n = \infty$.

10. (a) Si dimostri che la somma dei momenti d'inerzia di un corpo rigido piano attorno a due assi mutuamente perpendicolari e giacenti sul piano del corpo è uguale al momento d'inerzia relativo a un asse ortogonale al corpo e passante per il punto d'intersezione dei due assi complanari. (b) Si applichi il risultato precedente per determinare il momento d'inerzia di un disco attorno a un asse diametrale.

11. Si dimostri che il momento d'inerzia di una lamina quadrata relativo a un asse passante per due vertici opposti è uguale al momento d'inerzia relativo a un asse passante per il centro del quadrato e per il punto medio di uno dei suoi lati. (*Suggerimento*: si veda il risultato del Problema 10.)

12. In una lamina quadrata sono praticati nove fori quadrati uguali, come illustrato nella Figura 9.62. Sia L la lunghezza del lato della lamina e a quella del lato dei fori. I fori hanno centro coincidente con il centro dei nove quadrati che si ottengono suddividendo i quattro lati della lamina in tre parti uguali. Si determini il momento d'inerzia relativo all'asse ortogonale alla lamina e passante per il suo centro.

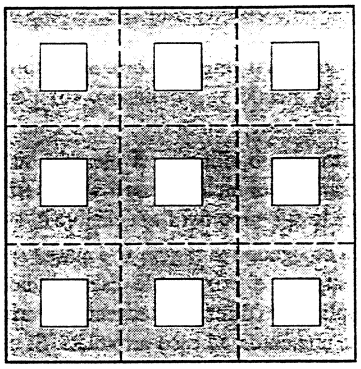


FIGURA 9.62 Problema 12.

13. Si dimostri che, per un generico corpo rigido, si ha

$$I_x + I_y + I_z = 2\int r^2\,dm,$$

ove r è la distanza dell'elemento dall'origine (non da un asse di rotazione). (b) Si può affermare che la quantità $I_x + I_y + I_z$ è invariante rispetto a eventuali rotazioni del sistema di riferimento?

14. Avvalendosi dei risultati del Problema 13 si dimostri che (a) il momento d'inerzia di un guscio sferico di raggio R e massa M è dato da $I = 2MR^2/3$ e che (b) il momento d'inerzia di una sfera piena di raggio R e massa M è dato da $I = 2MR^2/5$. (*Suggerimento*: la parte (a) non richiede calcoli di integrali; per la parte (b) si tenga presente che la relazione

$$\frac{dm}{4\pi r^2\,dr} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3}$$

può tornare utile.)

15. Scopo di questo problema è il calcolo del momento d'inerzia di un disco di massa M e raggio R relativamente all'asse ortogonale al disco passante per il centro di massa. Si consideri un elemento di massa dm che abbia la forma di un anello concentrico al disco, raggio r e spessore dr (Figura 9.63). (a) Si calcoli, come frazione della massa totale del disco, la massa dell'elemento considerato. (b) Si calcoli il momento d'inerzia elementare dI dell'anello. (c) Si integri il risultato ottenuto nella parte (b) in modo da calcolare il momento d'inerzia dell'intero disco.

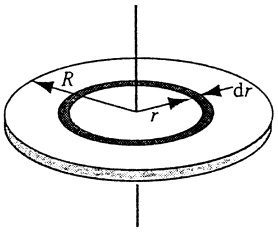


FIGURA 9.63 Problema 15.

16. Si vuole calcolare il momento d'inerzia di una sfera di massa M e raggio R attorno a un asse passante per il suo centro, partendo dal risultato del problema precedente riguardante il momento d'inerzia di un disco. Si consideri l'elemento dm costituito da un disco di spessore dz a distanza z dal centro della sfera (Figura 9.64). (a) Si calcoli, come frazione della massa totale della sfera, la massa dell'elemento considerato. (b) Si calcoli il momento d'inerzia elementare dI del disco. (c) Si integri il risultato del punto (b) in modo da calcolare il momento d'inerzia dell'intera sfera.

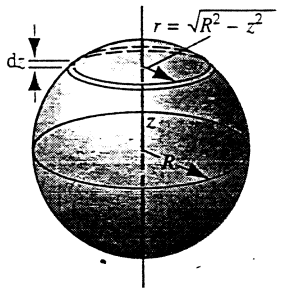


FIGURA 9.64 Problema 16.

17. In Figura 9.65 sono disegnati due blocchi di massa m appesi alle due estremità di una sbarra rigida di massa trascurabile e di lunghezza $L_1 + L_2$, con $L_1 = 20{,}0$ cm ed $L_2 = 80{,}0$ cm. La sbarra viene tenuta ferma nella posizione orizzontale mostrata in figura e a un certo punto viene lasciata libera di muoversi. Si calcoli l'accelerazione lineare dei due blocchi nell'istante in cui inizia il loro moto.

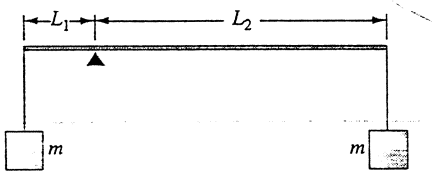


FIGURA 9.65 Problema 17.

18. Una ruota di massa M e raggio di girazione k (si veda l'Esercizio 20) ruota attorno a un albero orizzontale passante per il suo mozzo. Si assuma che il mozzo, di diametro leggermente maggiore dell'albero, strisci sull'asse, di raggio a, toccando soltanto il suo punto più alto e che il coefficiente d'attrito dinamico sia μ_k. Alla ruota viene impartita la velocità angolare iniziale ω_0. Si assuma, inoltre, che il rallentamento sia uniforme e si calcoli (a) il tempo che la ruota impiega a fermarsi e (b) il numero di giri compiuti dalla ruota prima di giungere nella posizione di riposo.

19. Un disco omogeneo di raggio R e massa M viene posto in rotazione con velocità angolare ω_0 su una superficie orizzontale con coefficiente d'attrito dinamico μ_k. (a) Si calcoli il momento torcente dovuto alla forza d'attrito. (b) Si determini il tempo necessario per l'arresto del disco.

20. Un anello rotola senza strisciare su un piano inclinato con angolo di inclinazione θ e procede di pari passo con un blocco che scivola sullo stesso piano. Si dimostri che il coefficiente d'attrito dinamico tra il blocco e il piano è dato da $\mu_k = (1/2)\tan\theta$.

 ISBN 88-408-1254-7

21. Una sfera omogenea rotola senza strisciare su un piano inclinato. (a) Si calcoli l'inclinazione del piano necessaria a conferire al centro di massa della sfera un'accelerazione lineare pari a 0,133 g. (b) Si calcoli, per questo angolo d'inclinazione, l'accelerazione con cui scivolerebbe un blocco in assenza d'attrito.

22. A un cilindro pieno di raggio R, peso P e lunghezza L sono arrotolate due corde, ognuna in vicinanza di un'estremità del cilindro; le corde sono fissate a due ganci sul soffitto. Il cilindro viene posto in posizione orizzontale con le due corde tese perfettamente verticali e poi viene lasciato libero di muoversi (Figura 9.66). Si calcoli (a) la tensione delle corde mentre si srotolano e (b) l'accelerazione lineare con cui cade il cilindro.

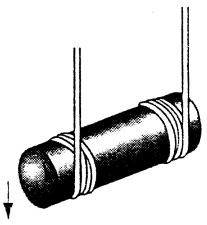


FIGURA 9.66 Problema 22.

23. Si dimostri che un cilindro scivolerebbe su un piano inclinato con angolo di inclinazione θ se il coefficiente d'attrito statico tra le due superfici fosse minore di $(1/3)\tan\theta$.

24. Un disco omogeneo di raggio R e massa M giace a riposo su una superficie orizzontale liscia. Una forza costante viene applicata in direzione tangente al perimetro del disco mediante una corda ad esso arrotolata. Si descriva il moto del disco.

25. Una sfera, un cilindro e un anello, tutti di massa M e raggio R, rotolano assieme, senza strisciare, su un medesimo piano inclinato. (a) Quale tra i tre corpi giunge per primo in fondo al piano inclinato? (b) La risposta dipende dalla massa e dal raggio dei tre corpi? Si giustifichi la risposta.

CAPITOLO 10

MOMENTO ANGOLARE

Nel Capitolo 9 abbiamo studiato gli aspetti dinamici del moto rotatorio di un corpo rigido attorno a un asse fisso rispetto a un sistema di riferimento inerziale. Si è mostrato che l'equazione scalare $\sum \tau_z = I\alpha_z$, *con il momento torcente calcolato per le sole forze esterne agenti sul corpo, è sufficiente per la descrizione del moto del corpo.*

In questo capitolo si proseguirà l'analisi dei moti rotatori considerando anche il caso in cui l'asse di rotazione non sia fisso nel sistema di riferimento inerziale. A tale scopo si ricaverà un'equazione vettoriale per la descrizione dei moti rotatori, analoga alla forma vettoriale della seconda equazione di Newton $\sum \boldsymbol{F} = \mathrm{d}\boldsymbol{P}/\mathrm{d}t$, *e si introdurrà il fondamentale concetto di* momento angolare *mostrando la sua importanza nel contesto dei moti rotatori. Nel Paragrafo 10.4, infine, si esporrà il principio di conservazione del momento angolare per sistemi in cui il momento torcente totale delle forze esterne è nullo.*

10.1 MOMENTO ANGOLARE DI UNA PARTICELLA

Nei capitoli precedenti si è messa in luce l'importanza che la quantità di moto di una particella, o di un sistema di particelle, riveste nello studio dei moti traslatori; si pensi, per esempio, all'uso che si è fatto della conservazione della quantità di moto nello studio degli urti tra particelle. La quantità di moto, detta anche momento lineare, di una particella di massa m in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ è stata definita nell'Equazione 6.1 come $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$; per un sistema di particelle di massa totale M il cui centro di massa si muove con velocità $\boldsymbol{v}_{cm}$, invece, la quantità di moto totale del sistema è stata definita nell'Equazione 7.21 come $\boldsymbol{P} = M\boldsymbol{v}_{cm}$. Nel contesto dei moti rotatori il ruolo della quantità di moto verrà svolto dal *momento angolare* (o *momento della quantità di moto*); in questo paragrafo se ne darà la definizione per una singola particella puntiforme. Il concetto di momento angolare verrà poi esteso al caso dei sistemi di particelle e si mostrerà, infine, come esso sia importante nello studio dei moti rotatori tanto quanto la quantità di moto lo è nello studio di quelli traslatori.

Si consideri una particella di massa m in moto con quantità di moto $\boldsymbol{p}$ e si supponga che a un certo istante essa occupi la posizione individuata, rispetto all'origine O, dal vettore $\boldsymbol{r}$. Senza perdita di generalità il sistema di riferimento cartesiano può essere scelto, come illustrato nella Figura 10.1, in modo che il piano xy coincida con il piano individuato dai vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$. Si definisce *momento angolare* (o *momento della quantità di moto*) della particella *rispetto all'origine O* il vettore

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}. \tag{10.1}$$

Si osservi che si è definito il momento angolare, così come il momento torcente, per mezzo dell'operazione di prodotto vettoriale (si rimanda all'Appendice H). Si noti, inoltre, che è necessario specificare il punto rispetto al quale calcolare il momento angolare in modo che il vettore $\boldsymbol{r}$, che individua la posizione occupata dalla particella all'istante considerato, sia definito univocamente.

 ISBN 88-408-1254-7

Poiché il momento angolare è un vettore, se ne possono riconoscere il modulo e la direzione; il modulo è dato da

$$l = rp\sin\theta, \tag{10.2}$$

ove θ è il minore tra i due angoli formati dai vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$. La direzione del momento angolare è ortogonale al piano individuato dai vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$ e il suo verso è dato dalla regola della mano destra: se si ruotano le dita della mano destra dal vettore $\boldsymbol{r}$ verso il vettore $\boldsymbol{p}$ in modo da descrivere l'angolo θ, il verso di $\boldsymbol{l}$ è indicato dal pollice esteso (nel caso illustrato in Figura 10.1 si ottiene il verso positivo dell'asse z).

Il modulo del momento angolare si può scrivere anche nelle due forme seguenti:

$$l = (r\sin\theta)p = r_\perp p \tag{10.3a}$$

e

$$l = r(p\sin\theta) = rp_\perp, \tag{10.3b}$$

ove $r_\perp = r\sin\theta$ è la componente del vettore $\boldsymbol{r}$ lungo la direzione ortogonale a $\boldsymbol{p}$, mentre $p_\perp = p\sin\theta$ è la componente del vettore $\boldsymbol{p}$ lungo la direzione ortogonale a $\boldsymbol{r}$. L'Equazione 10.3b mostra, tra l'altro, che al momento angolare contribuisce soltanto la componente di $\boldsymbol{p}$ ortogonale al vettore posizione $\boldsymbol{r}$. Se l'angolo θ formato da $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$ è uguale a 0° o 180°, allora la componente della quantità di moto ortogonale al vettore posizione è nulla, $p_\perp = p\sin\theta = 0$, e inoltre la retta d'azione di $\boldsymbol{p}$ passa per l'origine, quindi anche $r_\perp$ è uguale a zero; in questo caso, quindi, sia l'Equazione 10.3a sia l'Equazione 10.3b mostrano che il momento angolare è nullo.

Determiniamo ora, per il caso della particella puntiforme, la relazione che lega il momento angolare e il momento torcente totale delle forze applicate alla particella. Il primo passo consiste nel derivare l'Equazione 10.1:

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}). \tag{10.4}$$

La derivata del prodotto vettoriale si calcola con la normale regola di derivazione del prodotto di funzioni, facendo attenzione, però, a non scambiare l'ordine dei fattori; si ottiene, quindi,

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{p} + \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}.$$

Osservando che $d\boldsymbol{r}/dt$ è null'altro che la velocità $\boldsymbol{v}$ della particella e che la quantità di moto $\boldsymbol{p}$ è data da $m\boldsymbol{v}$, l'uguaglianza precedente diventa

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}. \tag{10.5}$$

Il prodotto vettoriale $\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}$ è uguale a zero perché è il prodotto vettoriale di due vettori mutuamente paralleli. Nel secondo termine, inoltre, la derivata $d\boldsymbol{p}/dt$ può essere sostituita con la somma delle forze agenti sulla particella; in definitiva si ottiene

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{r}\times\sum\boldsymbol{F}.$$

Il secondo membro dell'uguaglianza precedente è uguale al momento torcente totale $\sum\boldsymbol{\tau}$ delle forze agenti sulla particella. L'equazione precedente si riduce, pertanto, a

$$\sum\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{l}}{dt}, \tag{10.6}$$

che può essere letta nel modo seguente: *il momento torcente totale rispetto al polo O delle forze agenti sulla particella è uguale alla variazione temporale del momento angolare della particella calcolato rispetto allo stesso polo.* Si sottolinea che, per la validità dell'Equazione 10.6, il momento torcente e il momento angolare devono essere calcolati rispetto al medesimo polo. L'Equazione 10.6 è analoga all'Equazione 6.2, $\sum\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, che afferma l'uguaglianza tra la somma delle forze agenti su una particella e la variazione temporale della sua quantità di moto.

L'Equazione 10.6, infine, come tutte le equazioni vettoriali, può essere proiettata lungo gli assi cartesiani in modo da ottenere le tre equazioni scalari

$$\sum\tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \sum\tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \sum\tau_z = \frac{dl_z}{dt}. \tag{10.7}$$

La componente x del momento torcente totale, quindi, è uguale alla variazione temporale della componente lungo lo stesso asse del momento angolare della particella. Lo stesso risultato vale se si considerano gli assi y e z.

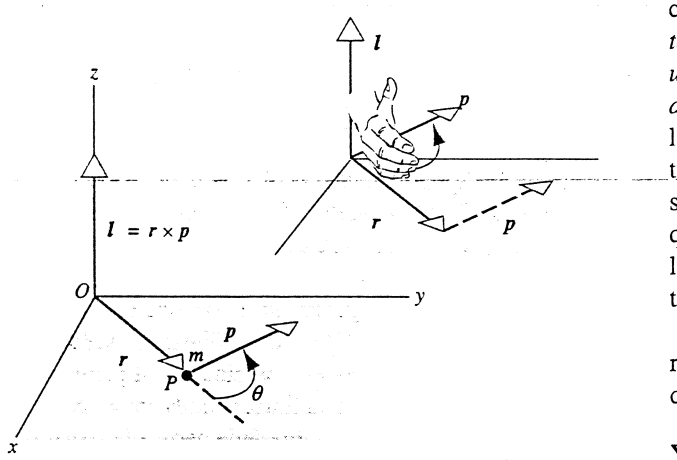


FIGURA 10.1 Una particella di massa m occupa la posizione P individuata dal vettore $\boldsymbol{r}$ e si muove con quantità di moto $\boldsymbol{p}$. Per semplicità il sistema di riferimento è stato scelto con il piano xy coincidente con il piano individuato dai vettori $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{p}$. Il momento angolare della particella rispetto all'origine O è il vettore parallelo all'asse z dato da $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$. Nel riquadro a destra è illustrata l'applicazione della regola della mano destra per determinare il verso di $\boldsymbol{l}$. Si osservi che a tale scopo, e solo a tale scopo, si può traslare $\boldsymbol{p}$ in modo da far coincidere il suo punto d'applicazione con quello di $\boldsymbol{r}$.

PROBLEMA SVOLTO 10.1 Una particella di massa m cade parallelamente all'asse y a partire dalla posizione di riposo P (Fi-

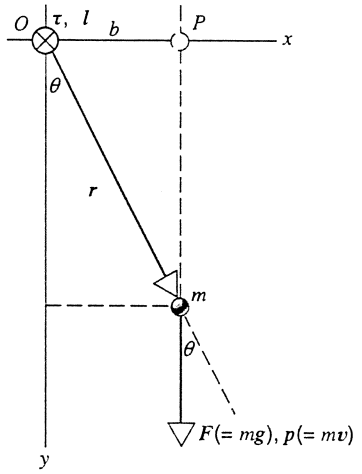


FIGURA 10.2 Problema svolto 10.1. Una particella di massa m cade parallelamente all'asse y a partire dalla posizione di riposo P. Il momento torcente τ e il momento angolare l rispetto all'origine, perpendicolari al piano della figura ed entranti, sono indicati dal simbolo $\otimes$ posto in O. Il verso positivo dell'asse z viene assunto anch'esso entrante.

gura 10.2). (a) Si determini il momento torcente rispetto a O che agisce sulla particella al generico istante di tempo t. (b) Si calcoli per ogni istante t il momento angolare della particella rispetto all'origine. (c) Si verifichi la validità dell'Equazione 10.6, $\sum \tau = dl/dt$.

Soluzione (a) Il momento torcente è dato da $\tau = r \times F$ e il suo modulo è uguale a

$$\tau = rF \sin\theta.$$

In questo esempio si ha $r \sin\theta = b$ ed $F = mg$; quindi

$$\tau = mgb$$

è costante. Si osservi che il modulo del momento torcente è uguale al modulo della forza mg per il braccio b. Applicando la regola della mano destra si deduce che il momento torcente è ortogonale al piano della figura e il suo verso è entrante, ovvero τ si rivolge nel verso positivo dell'asse coordinato z.

(b) Il momento angolare della particella è dato dall'Equazione 10.1, $l = r \times p$; il suo modulo, in virtù dell'Equazione 10.2, vale

$$l = rp \sin\theta.$$

Nell'esempio in esame $r \sin\theta = b$ e $p = mv = m(gt)$, quindi

$$l = mgbt.$$

Applicando la regola della mano destra si deduce che l è ortogonale al piano della figura e il suo verso è entrante, ovvero l è parallelo e concorde con τ. Il vettore l al variare del tempo cambia in modulo ma non in direzione e verso.

(c) Scrivendo l'Equazione 10.6 in termini delle componenti relative all'asse z si ha

$$\sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt}.$$

Sostituendo in tale uguaglianza le espressioni di τ_z e l_z ricavate rispettivamente ai punti (a) e (b) si ottiene l'identità

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb.$$

Resta quindi verificato che l'equazione $\sum \tau = dl/dt$ è soddisfatta nel caso in esame. Se, inoltre, si sostituisce gt con la quantità equivalente v_y e si semplifica nei primi due termini dell'identità precedente il fattore comune b, si ottiene

$$mg = \frac{d}{dt}(mv_y).$$

Dal momento che $mg = F_y$ ed $mv_y = p_y$ si ha che l'espressione precedente altro non è che la familiare $F_y = dp_y/dt$. Si può quindi concludere, come già ampiamente osservato nel corso dei capitoli precedenti, che espressioni del tipo $\tau = dl/dt$ per le particelle puntiformi, pur essendo di grande utilità nei problemi, non sono nuove leggi del moto, ma più che altro una riformulazione delle leggi di Newton nel caso del moto rotatorio.

Si osserva, infine, che il modulo del momento torcente e del momento angolare dipendono dalla scelta dell'origine, ovvero dal valore del braccio b. In particolare se fosse $b = 0$ si avrebbe $\tau = 0$ ed $l = 0$.

10.2 SISTEMI DI PARTICELLE

Nel paragrafo precedente è stato introdotto il momento angolare di una singola particella. Tale nozione può essere estesa ai sistemi di particelle; si definisce, quindi, il momento angolare L di un sistema di particelle rispetto al polo O come la somma dei momenti angolari rispetto allo stesso polo delle singole particelle che costituiscono il sistema. Per un sistema di N particelle si ha, allora, l'espressione

$$L = l_1 + l_2 + \cdots + l_N = \sum_{n=1}^{N} l_n, \qquad (10.8)$$

in cui la somma vettoriale è estesa alle particelle che costituiscono il sistema.

Il momento angolare del sistema L rispetto al polo O, che come nel caso del momento angolare l di una particella singola viene scelto come origine di un riferimento cartesiano, è in generale una funzione del tempo:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dl_1}{dt} + \frac{dl_2}{dt} + \cdots + \frac{dl_N}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \frac{dl_n}{dt}.$$

Per ciascuna particella, però, si ha $dl_n/dt = \tau_n$ che, sostituita nell'equazione precedente, conduce a

$$\frac{dL}{dt} = \sum \tau_n.$$

In altri termini la variazione temporale del momento angolare di un sistema di particelle è uguale al momento torcente totale dovuto alle forze che agiscono sulle particelle del sistema.

Il momento torcente totale è dovuto in parte alle forze interne che si scambiano le particelle del sistema e in parte alle forze esterne agenti sulle particelle. Se si assume la validità della terza legge di Newton nella sua formulazione

 ISBN 88-408-1254-7

più vincolante, le forze che due particelle isolate si scambiano sono uguali, opposte e dirette lungo la congiungente le posizioni da esse occupate, e quindi il momento torcente totale interno è nullo, perché è nullo il momento torcente associato a ogni coppia azione-reazione. Questo risultato è stato dimostrato in modo rigoroso nel Paragrafo 9.2 nel caso di un sistema costituito da due sole particelle: nel caso generale di un sistema costituito da N particelle la dimostrazione si svolge in modo analogo considerando le particelle coppia dopo coppia.

Il momento torcente dovuto alle forze interne, quindi, non contribuisce alla variazione del momento angolare L; l'unico contributo viene dalle forze esterne. Si può scrivere, pertanto,

$$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}, \qquad (10.9)$$

ove $\sum \tau_{ext}$ è il momento torcente totale dovuto a tutte le forze esterne agenti sul sistema. In altre parole, *il momento torcente totale dovuto alle forze esterne agenti su un sistema di particelle è uguale alla variazione temporale del momento angolare del sistema stesso.* Si sottolinea che il momento torcente e il momento angolare vanno calcolati rispetto a un medesimo polo fisso nel sistema di riferimento inerziale adottato per studiare il moto. Nel seguito, salvo in caso di bisogno, si ometterà il pedice «ext» nel simbolo τ_{ext}.

L'Equazione 10.9 è la generalizzazione della (10.6) al caso di un sistema di più particelle e vale tanto nel caso di un sistema costituito da particelle in moto relativo le une rispetto alle altre quanto nel caso di un corpo rigido.

Tale equazione, inoltre, può essere vista come la generalizzazione al caso dei moti rotatori dell'Equazione 7.23, $\sum F_{ext} = dP/dt$, con la quale si afferma che la somma delle forze esterne agenti su un sistema di particelle è uguale alla derivata temporale della quantità di moto totale del sistema.

Cerchiamo ora di approfondire l'analogia tra la forza che modifica la quantità di moto di un sistema e il momento torcente che modifica il momento angolare. Si supponga che la forza F agisca su una particella di quantità di moto p; si scomponga la forza nella componente $F_\parallel$ parallela alla direzione istantanea di p e in quella $F_\perp$ ortogonale a tale direzione (Figura 10.3). In un piccolo intervallo di tempo Δt la variazione di quantità di moto dovuta all'azione della forza si può calcolare a partire dall'equazione $F = \Delta p/\Delta t$. In primo luogo si osserva che la variazione di quantità di moto Δp è parallela alla forza F. La componente $F_\parallel$, allora, produrrà la variazione $\Delta p_\parallel$ della quantità di moto che, sommata al vettore iniziale p, ne modificherà il modulo ma non la direzione (Figura 10.3a). La componente $F_\perp$, invece, produrrà la variazione $\Delta p_\perp$ della quantità di moto che, sommata al vettore iniziale p, ne modificherà la direzione ma non il modulo, supposto, però, che l'intensità di $\Delta p_\perp$ sia piccola rispetto a quella di p (Figura 10.3b). Un esempio della situazione appena descritta si realizza nel caso del moto circolare uniforme di una particella soggetta all'azione di una forza centripeta, quindi sempre ortogonale al vettore velocità.

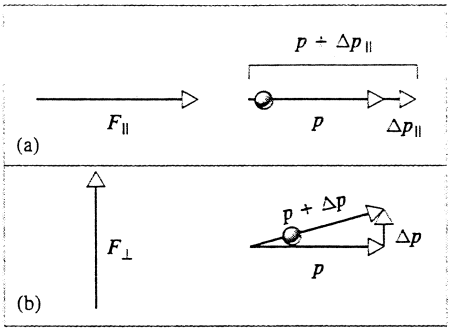


FIGURA 10.3 (a) La componente $F_\parallel$ parallela alla quantità di moto produce la variazione $\Delta p_\parallel$ della quantità di moto parallela al vettore p. (b) La componente $F_\perp$ ortogonale alla quantità di moto produce la variazione $\Delta p_\perp$ della quantità di moto ortogonale al vettore p. Per effetto di tale forza la particella si muove nella direzione del vettore $p + \Delta p_\perp$.

La stessa analisi vale per quel riguarda il modo in cui il momento torcente agisce sul momento angolare di un corpo (Figura 10.4). L'equazione di riferimento è $\tau = \Delta L/\Delta t$, dalla quale si deduce che la variazione di momento angolare è parallela al momento torcente. Come in precedenza il momento torcente τ viene scomposto nella sua componente $\tau_\parallel$ parallela al momento angolare L e in quella $\tau_\perp$ ad esso ortogonale. La componente $\tau_\parallel$ del momento torcente modifica il modulo ma non la direzione del momento angolare (Figura 10.4a), mentre la componente $\tau_\perp$ fornisce una piccola variazione ΔL al momento angolare L modificandone la direzione ma non il modulo (Figura 10.4b). Come verrà discusso nel Paragrafo 10.5 questa situazione si realizza nel caso del moto delle trottole e dei giroscopi. Dal confronto delle Figure 10.3 e 10.4 si comprende la profonda analogia esistente tra le leggi alla base dei moti traslatori e rotatori.

Nella Figura 10.5 è illustrato un esperimento in cui l'Equazione 10.9 può essere applicata per lo studio di un moto rotatorio. Una delle estremità dell'asse di una ruota di bici-

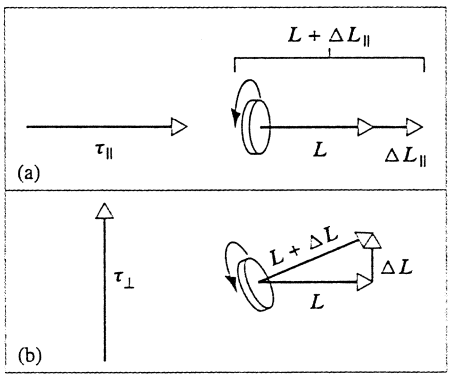


FIGURA 10.4 (a) La componente $\tau_\parallel$ parallela al momento angolare produce la variazione $\Delta L_\parallel$ del momento angolare parallelo al vettore L. (b) La componente $\tau_\perp$ ortogonale al momento angolare produce la variazione $\Delta L_\perp$ del momento angolare ortogonale al vettore L. Per effetto di tale momento torcente l'asse di rotazione diventa parallelo al vettore $L + \Delta L_\perp$.

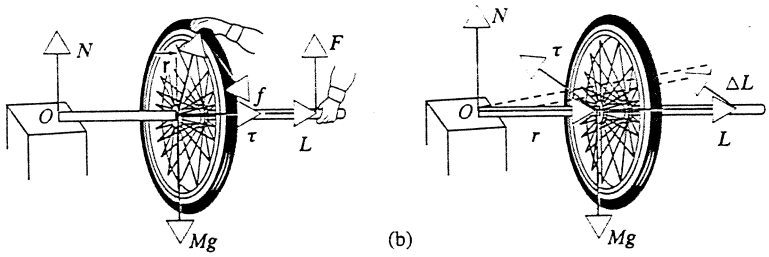


FIGURA 10.5 (a) una forza f tangente al bordo della ruota induce un momento torcente, relativo al centro di massa, parallelo all'asse di rotazione che accresce il modulo della velocità angolare, ma che non modifica la direzione dell'asse di rotazione. (b) Si suppone di lasciare libera una delle due estremità dell'asse; il momento torcente dovuto alla forza peso calcolato rispetto al punto di sostegno O è entrante nel piano della figura, ovvero è ortogonale all'asse di rotazione. Per effetto di tale momento torcente la direzione dell'asse di rotazione cambia e l'asse della ruota si muove verso la retta tratteggiata in figura.

cletta è fissata a un blocco rigido mentre la seconda estremità è sorretta da uno sperimentatore (Figura 10.5a). Lo sperimentatore accelera la rotazione della ruota in verso antiorario esercitando su un elemento del suo bordo un forza f tangente alla circonferenza esterna della ruota stessa. Il momento torcente relativo al centro della ruota della forza f è parallelo al vettore momento angolare L ed entrambi i vettori, τ ed L, sono orientati verso lo sperimentatore. L'effetto di tale momento torcente è quello di aumentare il modulo del momento angolare della ruota.

Come illustrato in Figura 10.5b a un certo punto l'estremità sorretta dallo sperimentatore viene lasciata libera. Il momento torcente delle forze esterne agenti sulla ruota viene, ora, calcolato rispetto al punto O dell'asse fissato al blocco. La reazione del supporto ha momento torcente nullo perché è applicata in O; la forza peso, invece, applicata al centro di massa della ruota e diretta verso il basso, induce un momento torcente ortogonale al momento angolare iniziale L che ha l'effetto di modificarne la direzione (Figura 10.4b). Se però si osserva che la direzione di L è anche quella dell'asse di rotazione*, si deduce che l'effetto complessivo della forza peso diretta verso il basso è quello di far ruotare l'asse di rotazione in un piano orizzontale. La ruota, in altri termini, si sposterà di lato attorno al supporto! Sarebbe utile che il lettore eseguisse l'esperimento appena descritto; in mancanza di una ruota di bicicletta montata su un asse lungo si suggerisce di utilizzare una trottola giocattolo.

L'Equazione 10.9 è stata ricavata con il momento della forza τ e il momento della quantità di moto L calcolati entrambi rispetto all'origine di un sistema di riferimento inerziale. Come polo per il calcolo dei momenti si potrebbe, però, scegliere un punto in moto nel riferimento fisso, per esempio la posizione occupata da una delle particelle del sistema. Con questa scelta l'Equazione 10.9 non sarebbe più valida; è abbastanza intuitivo, infatti, convincersi che come effetto del moto del sistema (rotazioni, traslazioni, cambi di configurazione) il moto del punto adottato come polo risulterebbe così complicato da inficiare la validità dell'Equazione 10.9. D'altro canto, se si sceglie come polo per il calcolo dei momenti proprio il punto occupato istante per istante dal centro di massa, la validità della 10.9 viene ripristinata (si rimanda all'Esercizio 7) anche se il centro di massa si muove di moto comunque complicato rispetto al riferimento inerziale. Questa è un'altra delle notevoli proprietà del centro di massa. Come conseguenza di queste osservazioni si può concludere che il moto di un generico sistema può essere ridotto al moto traslatorio del suo centro di massa (Equazione 7.23) e al moto rotatorio del sistema attorno al centro di massa (Equazione 10.9).

* Questa affermazione è valida se e soltanto se l'asse di rotazione è un asse di simmetria del corpo; si rimanda al Paragrafo 10.3 per maggiori dettagli.

10.3 MOMENTO E VELOCITÀ ANGOLARI

Il nostro obiettivo successivo è quello di introdurre e discutere casi in cui il moto di un corpo rigido non possa essere studiato prescindendo dalla natura vettoriale della velocità angolare, del momento torcente e del momento angolare. Come primo passo in questa direzione considereremo il caso semplice di una particella in moto rotatorio il cui momento angolare risulti essere non parallelo alla sua velocità angolare.

In Figura 10.6a è illustrato un sistema costituito da una particella di massa m connessa rigidamente a un albero rotante mediante un braccio di lunghezza r' ortogonale all'albero. L'albero e il braccio rigido hanno entrambi massa trascurabile. La traiettoria descritta dalla particella è una circonferenza di raggio r'; si assume che la velocità v della particella sia costante. Si suppone, inoltre, che l'esperimento venga condotto in assenza di gravità; di conseguenza l'unica forza agente sulla particella è quella centripeta esercitata su di essa dal braccio rigido che la connette all'albero.

L'albero è mantenuto sovrapposto a un asse fisso nel riferimento inerziale mediante due cuscinetti di supporto privi d'attrito; tale asse viene scelto come asse z e il punto in cui agisce il supporto inferiore come origine del riferimento cartesiano. Come sarà più chiaro dalla discussione seguente il supporto superiore è necessario per prevenire oscillazioni dell'albero attorno all'asse z, fenomeno che tipicamente avviene quando il momento angolare non è parallelo alla velocità angolare.

Come illustrato in Figura 10.6b la velocità angolare ω della particella è parallela e concorde all'asse z. Il vettore velocità angolare gode di questa proprietà indipendentemente da come venga scelta l'origine lungo l'asse z. Anche il suo modulo è indipendente dalla scelta di O e vale

 ISBN 88-408-1254-7

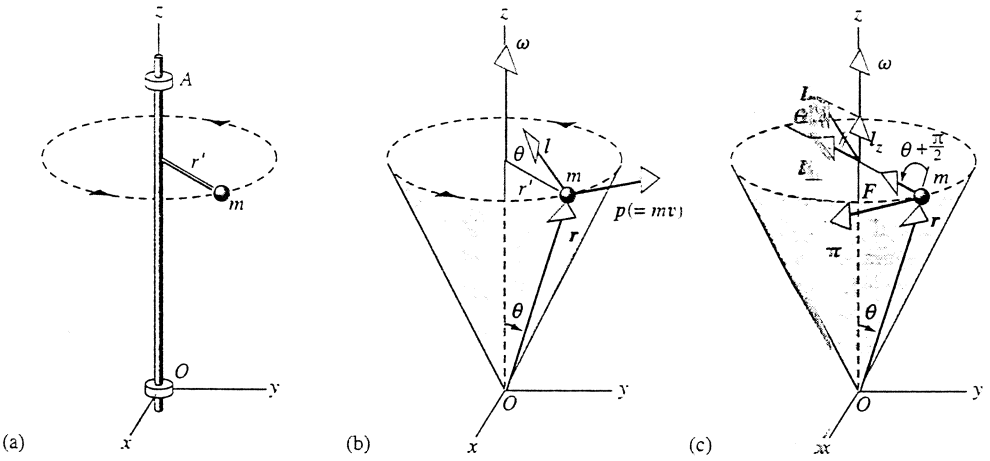


FIGURA 10.6 (a) Una particella di massa m è connessa a un albero rotante mediante un braccio di lunghezza r' ortogonale all'albero. L'albero è mantenuto sovrapposto all'asse z mediante due cuscinetti privi d'attrito. (b) La particella si muove di moto circolare uniforme con velocità v attorno all'asse z. In figura non sono stati riportati i supporti e la sbarretta per migliorare la chiarezza del disegno. È indicato il momento angolare $l = r \times p$ calcolato rispetto all'origine. (c) Affinché la particella si possa muovere lungo la circonferenza, su di essa deve agire una forza centripeta F come quella disegnata in figura. A tale forza è associato un momento torcente τ, calcolato rispetto all'origine O, diverso da zero. Il momento angolare e le sue componenti parallela e perpendicolare all'asse sono applicati per convenienza al centro della circonferenza.

$v/(r \sin\theta) = v/r'$, ove si è denotata con r la distanza della particella dall'origine.

Il momento angolare l della particella rispetto all'origine O del riferimento cartesiano è definito dall'Equazione 10.1

$$l = r \times p,$$

con r e p $(= mv)$ che rappresentano i vettori disegnati nella Figura 10.6b. Il vettore l è perpendicolare al piano individuato da r e p e quindi non è parallelo a ω. Si osservi che il vettore l può essere pensato come somma di una componente l_z parallela alla velocità angolare ω e una componente $l_\perp$ ad essa ortogonale (Figura 10.6c). Si è quindi costruito un esempio in cui fallisce l'analogia tra moto traslatorio e moto rotatorio: p è sempre parallelo a v, mentre in questo caso l e ω non sono paralleli. Il parallelismo tra i due vettori viene ripristinato se si sceglie come polo per il calcolo del momento angolare l il punto d'intersezione tra l'asse z e il piano del moto.

Si vuole indagare, ora, la relazione esistente tra la velocità angolare ω e la componente l_z del momento angolare nella direzione dell'asse z. Dalla Figura 10.6c, in cui il momento angolare è stato traslato per comodità nel centro della circonferenza descritta dalla particella, si ha

$$l_z = l \sin\theta = rp \sin\theta = r(mv) \sin\theta = r(mr'\omega) \sin\theta,$$

ove si è posto $v = r'\omega$, con ω il modulo del vettore ω. Se si sostituisce r', il raggio della circonferenza descritta dalla particella, al prodotto $r \sin\theta$, si ottiene

$$l_z = mr'^2\omega. \tag{10.10}$$

Ricordando che mr'^2 è il momento d'inerzia I della particella rispetto all'asse z si ha, infine, che

$$l_z = I\omega. \tag{10.11}$$

Si osservi che l'uguaglianza vettoriale $l = I\omega$, che costituirebbe l'analogo angolare della relazione $p = mv$, non è sempre valida in generale perché i vettori l e ω non sono sempre mutuamente paralleli.

È possibile determinare sotto quali ipotesi il momento e la velocità angolari sono paralleli? Per comprendere questo aspetto della dinamica dei moti rotatori si consideri lo stesso sistema precedente e vi si aggiunga una seconda particella di massa m, connessa rigidamente allo stesso punto dell'albero mediante un secondo braccio di lunghezza r' opposto al braccio connesso alla prima particella (Figura 10.7). La componente $l_\perp$ associata a questa seconda particella è uguale e opposta a quella della prima particella e la loro somma, quindi, è uguale a zero. I due vettori l_z, invece, sono concordi; la loro somma, quindi, è un vettore non nullo parallelo all'asse z e ad esso concorde. Quindi per questo sistema costituito da due particelle il momento angolare è parallelo alla velocità angolare.

Il risultato precedente può essere esteso al caso di un generico corpo rigido costituito da un numero arbitrariamente grande di particelle. Si dice che un corpo rigido è simmetrico attorno a un asse se e solo se per ciascun elemento di massa del corpo ne esiste un secondo di ugual massa posto alla stessa distanza dall'asse sulla retta ad esso ortogonale passante per il punto occupato dal primo elemento. In questo caso si dice anche che il corpo è dotato di *simmetria assiale*.

Un corpo siffatto posto in rotazione attorno al suo asse di simmetria può essere considerato come sovrapposizione di tante coppie di particelle come quelle di Figura 10.7; dal

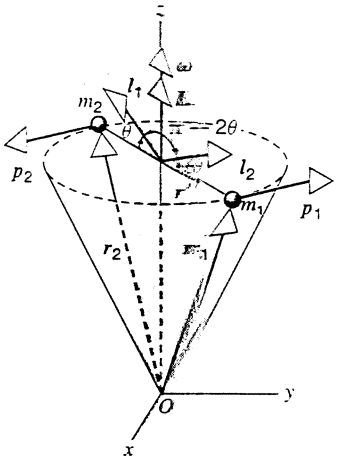


FIGURA 10.7 Due particelle di uguale massa m ruotano come in Figura 10.6 ma sono poste alle estremità opposte di un diametro della circonferenza da loro descritta. Il momento angolare totale L del sistema costituito dalle due particelle è parallelo alla velocità angolare ω.

momento che per ciascuna coppia il momento angolare L e la velocità angolare ω sono paralleli, si ha che questa proprietà vale anche per il momento angolare e la velocità angolare dell'intero corpo rigido.

In conclusione per un corpo rigido in rotazione attorno a un suo asse di simmetria si ha che il momento angolare L è parallelo alla velocità angolare ω; più precisamente:

$$L = I\omega, \tag{10.12}$$

ove I è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse di simmetria. Si sottolinea che l'Equazione 10.12 vale solo in caso di rotazioni attorno a un asse di simmetria perché L è il vettore momento angolare totale del corpo. L'analoga equazione per la componente L_z del momento angolare lungo l'asse di rotazione è valida, invece, per un *qualsiasi* corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso senza alcun vincolo sulle sue proprietà di simmetria.

Per corpi a simmetria assiale, come il sistema di due particelle in Figura 10.7, pur rimuovendo il supporto superiore del tipo illustrato nella Figura 10.6a il corpo persevera nella sua rotazione attorno all'asse z. Un verifica sperimentale immediata consiste nell'osservare con quanta facilità è possibile porre in rotazione un corpo a simmetria assiale, come una piccola trottola, reggendolo tra il pollice e l'indice di una mano. Anche una piccola asimmetria del corpo rende necessaria la presenza del secondo sostegno, il quale esercita un momento torcente sull'albero senza il quale il corpo descriverebbe delle oscillazioni attorno all'asse durante la sua rotazione. Per uno studio più approfondito di queste oscillazioni si rimanda alla fine di questo paragrafo; si vuole osservare, però, che il problema di queste oscillazioni è particolarmente serio quando si ha a che fare con sistemi rotanti ad alta velocità come i rotori delle turbine. Sebbene i corpi rotanti vengano progettati in modo da essere perfettamente simmetrici rispetto all'asse di rotazione, spesso accade che per piccoli errori di fabbricazione, per esempio nella fase di montaggio delle pale, si manifestino delle piccole asimmetrie. La simmetria richiesta dal progetto, però, può essere ripristinata con l'aggiunta o la rimozione di piccole quantità di massa in punti opportuni; questa operazione, di solito, viene fatta usando dispositivi particolari che permettono di dare una misura quantitativa delle oscillazioni dovute all'asimmetria e di calcolare esattamente la posizione e la quantità di massa da aggiungere al fine di annullare le oscillazioni. Per la stessa ragione sui cerchioni delle ruote delle automobili vengono posti dei pezzetti di piombo in modo da evitare oscillazioni in regime di alta velocità. L'operazione di «bilanciatura» di una ruota consiste, in ultima analisi, nella verifica del parallelismo tra i vettori velocità e momento angolari: sotto questa condizione, infatti, si riduce il momento torcente che la ruota esercita sui cuscinetti.

PROBLEMA SVOLTO 10.2 Si determini il massimo tra il modulo del momento angolare associato al moto di rotazione della Terra attorno al suo asse, calcolato rispetto al centro della Terra, e quello del momento angolare associato al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, calcolato rispetto al centro dell'orbita.

Soluzione Consideriamo la Terra come una sfera uniforme; il suo momento d'inerzia rispetto al suo asse è dato da $I = 2MR_T^2/5$. La velocità angolare è $\omega = 2\pi/T$, ove $T = 24\text{ h} = 8,64 \cdot 10^4$ s è il periodo di rotazione. Il modulo del momento angolare associato al moto di rotazione della Terra attorno al suo asse e calcolato rispetto al centro della Terra è dato da

$$L_{rot} = I\omega = \frac{2}{5}MR_T^2\frac{2\pi}{T} =$$
$$= \frac{2}{5}(5,98 \cdot 10^{24}\text{ kg})(6,37 \cdot 10^6\text{ m})^2\frac{2\pi}{8,64 \cdot 10^4\text{ s}} =$$
$$= 7,06 \cdot 10^{33}\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Al fine di calcolare il momento angolare orbitale è necessario calcolare il momento d'inerzia della Terra rispetto all'asse ortogonale al piano dell'orbita e passante per il centro del Sole. A tale scopo la Terra può essere assimilata a una particella puntiforme di momento angolare $L = R_{orb}p$, ove R_{orb} è il raggio dell'orbita considerata circolare e p è il modulo della quantità di moto della Terra. La velocità angolare è data ancora dall'espressione $\omega = 2\pi/T$ ove questa volta $T = 1\text{ a} = 3,16 \cdot 10^7$ s è il periodo del moto di rivoluzione. Il modulo del momento angolare associato al moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole e calcolato rispetto al centro dell'orbita è

$$L_{orb} = R_{orb}p = R_{orb}Mv =$$
$$= R_{orb}M(\omega R_{orb}) = MR_{orb}^2\frac{2\pi}{T} =$$
$$= (5,98 \cdot 10^{24}\text{ kg})(1,50 \cdot 10^{11}\text{ m})^2\frac{2\pi}{3,16 \cdot 10^7\text{ s}} =$$
$$= 2,667 \cdot 10^{40}\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}.$$

Il modulo del momento angolare orbitale è, quindi, di gran lunga maggiore di quello del momento angolare associato alla rotazione.

Il momento angolare orbitale è diretto ortogonalmente al piano dell'orbita terrestre (Figura 10.8); quello dovuto al moto di rotazione, invece, è inclinato rispetto a questa direzione di un angolo pari a 23,5°. Se si trascura il moto, molto lento, di precessione dell'asse di rotazione, i due momenti angolari restano costanti durante il moto della Terra.

 ISBN 88-408-1254-7

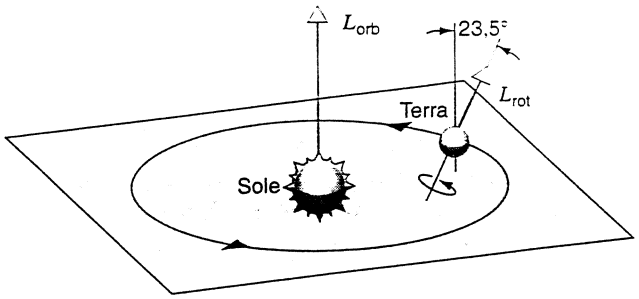


FIGURA 10.8 Problema svolto 10.2. La Terra compie il moto di rivoluzione attorno al Sole lungo un'orbita che in prima approssimazione può essere considerata circolare; simultaneamente la Terra ruota attorno al proprio asse. I momenti angolari associati ai due moti non sono paralleli perché l'asse della Terra è inclinato di 23, 5° rispetto alla direzione normale al piano dell'orbita. In figura la lunghezza dei vettori momento angolare non è in scala: L_{orb} dovrebbe essere $4 \cdot 10^6$ volte più lungo di L_{rot}.

PROBLEMA SVOLTO 10.3 Si determini l'accelerazione del corpo in caduta verticale nel Problema svolto 9.10 applicando direttamente l'Equazione 10.9.

Soluzione Il sistema disegnato in Figura 10.9 è costituito da una puleggia, assimilabile a un disco uniforme di raggio R e massa M, e da un corpo di massa m appeso tramite un filo arrotolato alla puleggia. Sul sistema agisce la forza di gravità mg applicata al corpo e la forza, verticale e orientata verso l'alto, che i sostegni esercitano sull'asse della puleggia. Il centro della puleggia viene scelto come origine del riferimento cartesiano. La tensione della corda va considerata, invece, come una forza interna al sistema costituito dal disco e dal corpo. La forza peso, al contrario della reazione dei sostegni, ha momento non nullo rispetto all'origine del riferimento; tale momento torcente ha modulo $(mg)R$ ed è parallelo e concorde con l'asse z come illustrato in figura. La componente z del momento angolare totale del sistema rispetto all'origine è data da

$$L_z = I\omega + (mv)R,$$

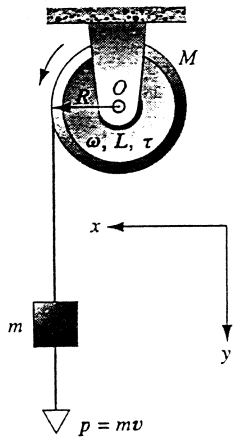


FIGURA 10.9 Problema svolto 10.3. La velocità angolare, il momento angolare e il momento torcente totale sono tutti vettori uscenti dal piano della figura come l'asse z; ciò viene indicato dal simbolo ⊙ posto in O.

ove $I\omega$ è il momento angolare del disco e $(mv)R$ è quello del corpo, calcolato moltiplicando la quantità di moto per il braccio. Entrambi questi contributi al momento angolare totale L hanno componente z positiva.

Se si applica, ora, l'equazione $\sum \tau_z = dL_z/dt$ si ottiene

$$(mg)R = \frac{d}{dt}(I\omega + mvR) = \\ = I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right) = I\alpha + mRa.$$

Ricordando che $a = \alpha R$ e $I = MR^2/2$ l'equazione precedente si riduce a

$$mgR = (MR^2/2)(a/R) + mRa,$$

da cui si ottiene

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

Come è giusto che sia, abbiamo ottenuto lo stesso risultato già ricavato nell'ambito del Problema svolto 9.10; le equazioni $\sum \tau_z = I\alpha_z$ e $\sum \tau_z = dL_z/dt$ che abbiamo usato nei due casi, infatti, non sono altro che due diverse formulazioni della seconda legge di Newton per i moti rotatori.

Momento torcente su una particella in moto circolare

Nello studio del semplice esempio illustrato nella Figura 10.6 si è verificato che il momento angolare l e la velocità angolare ω non sono necessariamente paralleli; questo risultato, a prima vista inaspettato, può creare disagi al lettore non attento. Va osservato, però, che il mancato parallelismo tra velocità e momento angolare è perfettamente coerente con l'equazione $\tau = dl/dt$ che regola i moti rotatori di una singola particella. Nell'esempio, infatti, il vettore l cambia in funzione di t in direzione ma non in modulo. Più precisamente, durante il moto della particella l_z si mantiene costante in modulo e direzione, mentre $l_\perp$, pur costante in modulo, cambia direzione. La variazione di $l_\perp$ può spiegarsi soltanto come conseguenza dell'azione di un momento torcente; quale forza è responsabile di questo momento torcente?

Affinché la particella si muova di moto rotatorio, su di essa deve agire una forza centripeta come quella illustrata in Figura 10.6c; tale forza viene esercitata dal braccio rigido che la connette all'albero rotante. Nella discussione che segue si trascurerà l'effetto di altre forze esterne come, per esempio, la gravità. La forza F produce un momento torcente non nullo,

$$\tau = r \times F,$$

tangente alla circonferenza descritta dalla particella, perché ortogonale al piano individuato da r ed F, e orientata nel verso illustrato in Figura 10.6c; la verifica di queste affermazioni per mezzo della regola della mano destra è immediata.

Si vuole verificare, ora, che il momento torcente appena calcolato soddisfa l'equazione $\tau = dl/dt$ che esprime la seconda legge di Newton per i moti rotatori. In Figura 10.10a

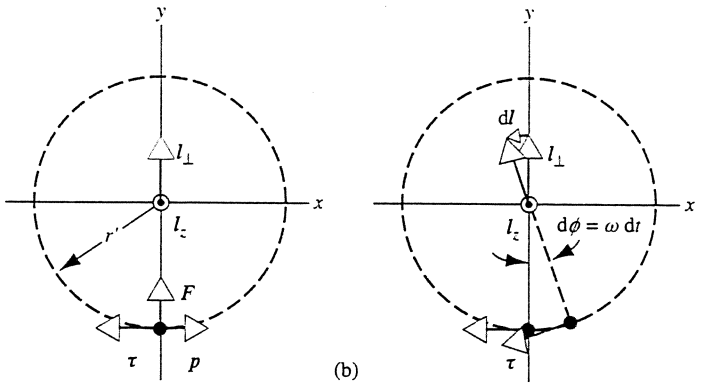


FIGURA 10.10 (a) Proiezione ortogonale sul piano xy del moto di rotazione della particella illustrata in Figura 10.6. La componente z del momento angolare della particella è uscente dal piano della figura. (b) Se la particella descrive l'angolo $d\phi$, la componente $l_\perp$ del momento angolare subisce l'incremento dl. I vettori dl e τ sono mutuamente paralleli.

è riportata la traiettoria descritta dalla particella così come viene vista dall'alto; se la particella descrive l'angolo elementare $d\phi = \omega\, dt$ (Figura 10.10b) il vettore $l_\perp$ subisce l'incremento infinitesimo dl. Dalla Figura 10.10b si vede che dl e τ sono paralleli, quindi le loro direzioni sono coerenti con l'equazione $\tau = dl/dt$. Si dimostra, ora, che anche i loro moduli soddisfano a questa equazione: il modulo del momento torcente relativo all'origine O (Figura 10.6c) è dato da

$$\tau = rF \sin(\pi/2 + \theta) = rF \cos\theta.$$

La forza F è una forza centripeta e il suo modulo vale $F = mv^2/r' = m\omega^2 r' = m\omega^2 r \sin\theta$, ove si è posto il raggio della traiettoria circolare della particella $r' = r \sin\theta$. In definitiva si ha

$$\tau = m\omega^2 r^2 \sin\theta \cos\theta. \qquad (10.13)$$

In base alla Figura 10.10b, $dl = l_\perp\, d\phi = l_\perp \omega\, dt$, da cui si deduce

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp.$$

Dato che $l = mvr$, ciò implica $l_\perp = mvr \cos\theta$ e, ricordando che la velocità v è data da $\omega r' = \omega r \sin\theta$, si può finalmente scrivere

$$l_\perp = m\omega r^2 \sin\theta \cos\theta,$$

e

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_\perp = m\omega^2 r^2 \sin\theta \cos\theta. \qquad (10.14)$$

Dal confronto delle Equazioni 10.13 e 10.14 si deduce che, come ci si aspettava, $\tau = dl/dt$.

Corpi simmetrici e asimmetrici (facoltativo)

Si vuole approfondire, ora, lo studio delle differenze che esistono tra il moto di corpi a simmetria assiale e quello di corpi che non godono di tale simmetria. Si consideri un sistema simile a quello illustrato nella Figura 10.7, ma tale che il braccio che connette le due particelle sia inclinato rispetto all'asse verticale di un angolo β. In Figura 10.11 sono disegnati la sbarretta che connette le particelle, l'albero centrale e i supporti privi d'attrito che mantengono l'albero lungo l'asse z. L'albero ruota a velocità angolare costante ω e quindi la velocità angolare ω del sistema è parallela all'asse z. L'esperienza insegna che il nostro sistema non è «bilanciato»: se la sbarretta non fosse connessa rigidamente all'albero rotante nel punto O, essa tenderebbe a ruotare fino a portarsi in direzione orizzontale, $\beta = 90°$, in modo da stabilire la simmetria mancante.

Nella configurazione riportata in Figura 10.11 la particella superiore ha velocità ortogonale ed entrante nel piano della figura, mentre quella inferiore ha velocità ortogonale e uscente dallo stesso piano. I due vettori quantità di moto e i due vettori che individuano la posizione rispetto all'origine delle due particelle sono uguali e opposti. Se si applica la regola della mano destra al prodotto vettoriale $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, si deduce che le due particelle hanno medesimo momento angolare l e che la somma dei due momenti angolari è uguale a un vettore $\boldsymbol{L}$ ortogonale alla sbarretta e giacente sul piano della Figura 10.11. All'istante considerato, quindi, i vettori $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{\omega}$ non sono mutuamente paralleli. Durante il moto del sistema il momento angolare totale, pur mantenendosi co-

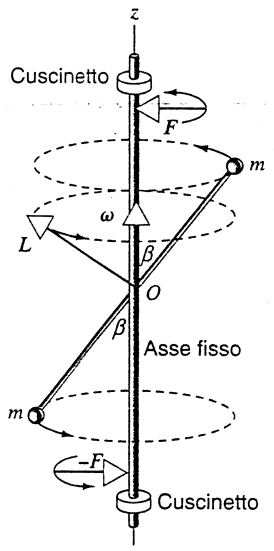


FIGURA 10.11 Sistema rotante simile a quello descritto in Figura 10.7, ma con l'asse di rotazione inclinato di un angolo β rispetto alla sbarretta che connette le due particelle. Il momento angolare $\boldsymbol{L}$ del sistema ruota attorno all'asse di rotazione assieme alle forze F e $-F$ agenti sulle particelle.

 ISBN 88-408-1254-7

stante in modulo, ruota attorno all'asse di rotazione. La rotazione del momento angolare totale intorno all'asse di rotazione è perfettamente coerente con l'equazione $\tau = dL/dt$.

Il momento torcente delle forze esterne è dovuto alle forze che i sostegni esercitano sull'albero: nella configurazione riportata in Figura 10.11 la particella in alto tende a muoversi verso destra; l'albero, quindi, viene tirato verso destra contro il sostegno superiore, che è costretto a esercitare una forza F verso sinistra. Analogamente la particella in basso tende a muoversi verso sinistra: l'albero, quindi, viene tirato verso sinistra contro il sostegno inferiore, che è costretto a esercitare la forza $-F$ verso destra. Il momento totale rispetto a O di queste due forze, quindi, è ortogonale e uscente dalla pagina, ovvero è perpendicolare al piano su cui giacciono i vettori L e ω e ha la direzione atta a spiegare la rotazione di L. (Si confronti questo risultato con quello descritto in Figura 10.6c in cui il momento torcente τ è perpendicolare al piano individuato dai vettori r e ω.) Si osservi che, avendo τ componente nulla nella direzione dell'asse z, anche la componente dell'accelerazione angolare α parallela a ω è nulla, quindi la velocità angolare si mantiene costante. In altri termini, in assenza d'attrito, il sistema ruota indefinitamente. Se i supporti non sono perfettamente lisci la forza d'attrito esercitata sull'asse ha momento parallelo all'asse e quindi produce un'accelerazione angolare parallela a ω e ne modifica il modulo.

Nella configurazione di Figura 10.11 le forze F e $-F$ giacciono nel piano della figura, ma affinché i cuscinetti del sistema ruotano con esso in modo tale che il momento torcente risultante τ si mantenga sempre ortogonale al piano individuato dai vettori L e ω. Le forze F e $-F$ causano delle vibrazioni dei sostegni che devono, quindi, essere sufficientemente resistenti. Se il sistema fosse simmetrico rispetto all'asse di rotazione, invece, l'albero ruoterebbe in modo regolare e non si osserverebbe alcuna vibrazione dei supporti.

10.4 CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

L'Equazione 10.9, $\sum \tau_{ext} = dL/dt$, afferma che per un sistema di particelle la variazione istantanea del momento angolare totale calcolato rispetto a un punto fisso del riferimento inerziale è uguale al momento torcente totale *esterno* agente sul sistema. Se il momento torcente totale è nullo si ha che il momento angolare totale del sistema è costante nel tempo, ovvero $dL/dt = 0$. In altri termini

$$L = \text{costante} \quad \text{ovvero} \quad L = L_0. \tag{10.15}$$

cioè il momento angolare iniziale è uguale al momento angolare finale. L'Equazione 10.15 è null'altro che la formulazione matematica del principio di *conservazione del momento angolare*:

> *se il momento totale delle forze (momento torcente) esterne agenti su un sistema di particelle è nullo, allora il momento angolare del sistema si conserva.*

Questa legge di conservazione, così come quella della quantità di moto, è un risultato di grande importanza e di validità del tutto generale. Queste leggi di conservazione, infatti, mantengono la loro validità anche nel contesto relativistico e in quello quantistico. Fino ad oggi non sono state mai osservate violazioni di questi due principi fondamentali.

Così come la conservazione della quantità di moto di un sistema sottoposto a forza esterna nulla, anche la conservazione del momento angolare si applica al momento angolare totale del sistema. Il momento angolare di una singola particella in generale varia in funzione del tempo a causa del momento torcente dovuto alle forze interne, così come la quantità di moto di una singola particella cambia per effetto delle forze interne, ma il momento angolare totale del sistema rimane costante.

Il momento angolare, come anche la quantità di moto, è una grandezza vettoriale, quindi all'Equazione 10.15 sono associate le tre equazioni scalari relative ai tre assi coordinati. La legge di conservazione del momento angolare, quindi, impone tre condizioni al moto del sistema: *se la componente del momento torcente totale esterno lungo un asse è nullo, allora la corrispondente componente del momento angolare totale è costante*. Può accadere, ovviamente, che solo una delle tre componenti cartesiane del momento torcente totale sia nulla: in questo caso si conserverà una sola componente del momento angolare totale, mentre le altre varieranno nel tempo.

Si consideri un corpo in rotazione con velocità angolare ω attorno a un asse fisso di un riferimento inerziale; se si sceglie l'asse z del riferimento cartesiano coincidente con l'asse di rotazione si ha

$$L_z = I\omega, \tag{10.16}$$

ove L_z è la componente del momento angolare del corpo relativa all'asse z e I è il suo momento d'inerzia relativo allo stesso asse. Si supponga che il momento torcente totale esterno sia nullo, allora L_z è una costante del moto. Se, in questa situazione, il momento d'inerzia del corpo variasse da un valore iniziale I_i a un valore finale I_f, per esempio a causa della variazione della distanza dall'asse di rotazione di alcune parti del corpo, la velocità angolare dovrebbe cambiare di conseguenza in modo da mantenere costante la componente L_z del momento angolare. Più precisamente la velocità angolare dovrebbe passare dal valore iniziale ω_i a quello finale ω_f in modo che

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f. \tag{10.17}$$

L'Equazione 10.17 vale non solo nel caso di rotazioni attorno a un asse fisso, ma anche nel caso di rotazioni attorno a un asse passante per il centro di massa in moto tale da restare sempre parallelo a se stesso (si rimanda al Paragrafo 9.7).

Il principio di conservazione del momento angolare è una legge generale che regola un'enorme varietà di fenomeni fisici, dal comportamento delle particelle subatomiche, al moto degli acrobati, dei tuffatori e dei ballerini, dall'implosione di una stella alla condensazione delle galassie. Si vogliono discutere, ora, alcune di queste interessanti applicazioni.

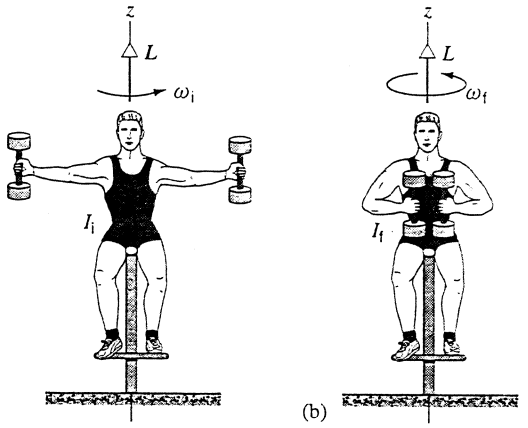


FIGURA 10.12 (a) In questa configurazione il sistema costituito dall'atleta e dai manubri ha momento d'inerzia grande e velocità angolare piccola. (b) Nella nuova configurazione l'atleta ha avvicinato al suo corpo i manubri: il momento d'inerzia del sistema è diminuito e quindi è aumentata la sua velocità angolare. In entrambi i casi il momento angolare totale $\boldsymbol{L}$ assume lo stesso valore.

La rotazione di una pattinatrice su ghiaccio

Una pattinatrice su ghiaccio serra le braccia al corpo per accelerare la sua rotazione e le allarga per rallentarla; questo comportamento è un'applicazione dell'Equazione 10.17. Un'applicazione simile della conservazione del momento angolare è illustrata in Figura 10.12: un atleta regge due manubri e siede su uno sgabello libero di ruotare attorno al suo asse verticale. L'atleta tiene le braccia larghe, come in Figura 10.12a, e viene messo in rotazione con velocità angolare ω_i. Il suo momento angolare totale $\boldsymbol{L}$ è diretto verticalmente, ovvero è parallelo all'asse z.

Il sistema costituito dallo sgabello, dall'atleta e dai manubri è un sistema isolato sul quale agiscono forze esterne il cui momento totale rispetto all'origine ha componente nulla lungo l'asse z. La componente verticale del momento angolare, allora, deve conservarsi.

Quando l'atleta, come in Figura 10.12b, avvicina le braccia e i pesi al suo petto, il momento d'inerzia del sistema relativo all'asse z si riduce da un valore iniziale I_i a un valore finale più piccolo I_f, perché nella nuova configurazione la massa del sistema è mediamente più vicina all'asse di rotazione. In accordo con l'Equazione 10.17, nella configurazione finale l'atleta ruoterà a una velocità angolare maggiore data da $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$. Per rallentare il suo moto rotatorio l'atleta deve limitarsi ad allargare nuovamente le braccia.

Il moto di una tuffatrice

In Figura 10.13a è illustrato il salto dal trampolino di una tuffatrice; durante il salto l'atleta si piega in avanti in modo da acquisire un piccola velocità di rotazione che le permette un perfetto ingresso di testa in acqua, dopo aver ruotato di mezzo giro.

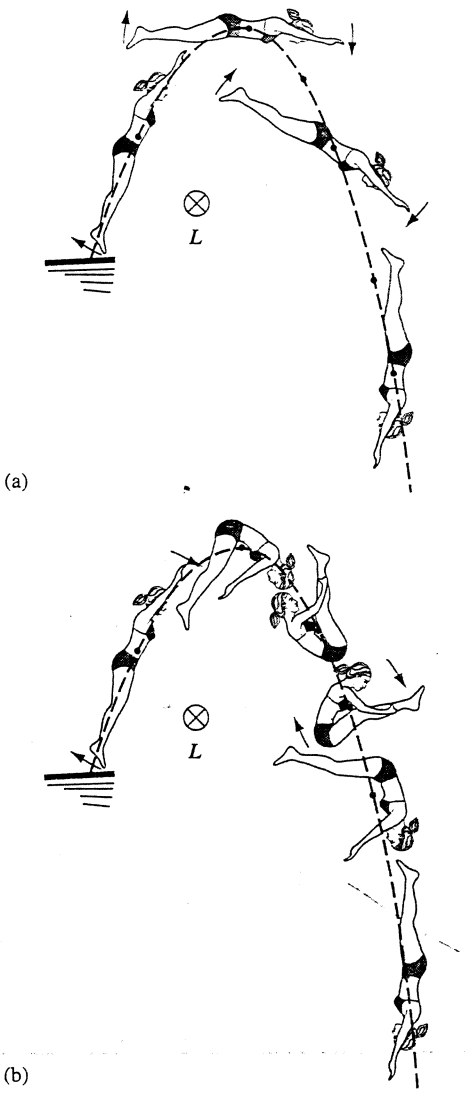


FIGURA 10.13 (a) Una tuffatrice salta dal trampolino in modo che questo le fornisca un momento angolare $\boldsymbol{L}$ grazie a questo, la tuffatrice compie mezza rotazione attorno al suo centro di massa, indicato da un punto in figura, prima dell'ingresso in acqua. (b) Ponendosi in posizione carpiata, la tuffatrice riduce il suo momento d'inerzia in modo da aumentare la sua velocità di rotazione e da compiere un giro e mezzo prima dell'ingresso in acqua. Le forze esterne che agiscono sulla tuffatrice sono le stesse nei casi (a) e (b) e quindi anche il momento angolare $\boldsymbol{L}$ è lo stesso.

Durante il tuffo l'unica forza esterna agente sul corpo della tuffatrice è quella gravitazionale che è applicata al centro di massa; quindi il suo momento torcente relativo a tale punto è nullo. Per questa ragione il momento angolare della tuffatrice rispetto al centro di massa si conserva. In questa discussione si trascura la resistenza dell'aria, che invece potrebbe indurre un momento torcente non nullo. Ponendosi in posizione *carpiata*, l'atleta diminuisce il suo momento d'inerzia e, in virtù dell'Equazione 10.17, aumenta la sua velocità angolare. Grazie alla maggiore velocità angolare l'atleta può completare un giro e mezzo prima dell'ingresso in acqua, mentre nella configurazione precedente aveva compiuto soltanto mezzo giro. Nella fase finale del tuffo

 ISBN 88-408-1254-7

l'atleta assume nuovamente la posizione distesa di massimo momento d'inerzia in modo da rallentare la rotazione e rendere più elegante la fase d'ingresso in acqua.

La ruota di bicicletta che gira

Una studentessa siede su uno sgabello libero di ruotare attorno al suo asse e regge verticalmente l'asse di una ruota di bicicletta in rotazione (Figura 10.14a). Se la studentessa capovolge l'asse della ruota come illustrato in Figura 10.14b, lo sgabello comincia a ruotare.

La componente verticale del momento torcente esterno totale agente sul sistema costituito dallo sgabello, dalla studentessa e dalla ruota è nulla, quindi la componente verticale del momento angolare del sistema è una costante del moto. Assumiamo verticale e ascendente l'asse z e denotiamo con L_r la componente lungo tale asse del momento angolare iniziale della ruota. Con queste notazioni la componente z del momento angolare totale iniziale vale $L_{iz} = L_r$. A un certo istante, per effetto di una forza *interna* al sistema, viene invertito il senso del momento angolare della ruota; la componente z finale del momento angolare può essere, quindi, scritta come $L_{fz} = L_s + (-L_r)$, ove L_s è l'eventuale componente del momento angolare della studentessa + sgabello. Dato che in assenza di momento torcente esterno il momento angolare totale si deve conservare, si ha che $L_{iz} = L_{fz}$, da cui si deduce che la studentessa assieme allo sgabello acquistano il momento angolare $L_s = +2L_r$.

Lo stesso problema può essere trattato da un punto di vista differente considerando due sistemi separati, uno costituito dalla ruota e l'altro costituito dalla studentessa e dallo sgabello. Nessuno dei due sistemi può, ora, essere considerato isolato, giacché la mano della studentessa li pone in interazione. Al fine di capovolgere la ruota, la studentessa deve applicare un momento torcente che ne modifichi il momento angolare; alla forza che induce tale momento torcente corrisponde una reazione esercitata dalla ruota sul sistema studentessa-sgabello. In definitiva la studentessa esercita un momento torcente per modificare il momento angolare della ruota, la quale «reagisce» con un momento torcente che modifica il momento angolare del sistema studentessa-sgabello. Nel caso in cui si considerava un unico sistema costituito dallo sgabello, dalla studentessa e dalla ruota, i momenti torcenti appena introdotti non intervenivano nella discussione perché erano da considerarsi interni al sistema. Il fatto che una forza o un momento torcente vadano considerati interni o esterni dipende da come viene definito il sistema.

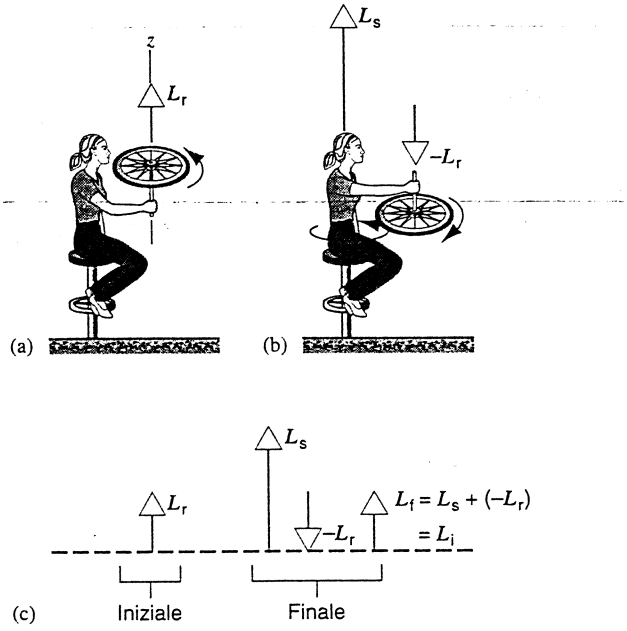


FIGURA 10.14 Una studentessa regge l'asse di una ruota di bicicletta in rotazione. Il momento angolare della ruota è dato da L_r. (b) Capovolgendo la ruota la studentessa si conferisce un moto rotatorio attorno all'asse dello sgabello. (c) Il momento angolare totale finale deve essere uguale a quello iniziale.

La stabilità dei corpi in rotazione

Si consideri nuovamente la situazione illustrata nella Figura 10.3b. Un oggetto in moto con quantità di moto $p = Mv$ è dotato di *stabilità direzionale*: una forza trasversale al moto produce una variazione $\Delta p_\perp$ della quantità di moto stessa e quindi modifica la direzione del moto di un angolo $\theta = \arctan(\Delta p_\perp / p)$. Quanto più grande è il modulo p della quantità di moto iniziale tanto minore è l'angolo θ; la stessa forza deviante, quindi, è meno efficace quando agisce su corpi dotati di quantità di moto elevata.

In modo abbastanza simile il momento angolare assicura ai corpi una sorta di *stabilità d'orientamento*: un oggetto in rotazione, come nella Figura 10.4b, è caratterizzato da un momento angolare L. Un momento torcente τ perpendicolare a L modifica la direzione del momento angolare, e di conseguenza quella dell'asse di rotazione, di un angolo $\theta = \arctan(\Delta L_\perp / L)$. Anche in questo caso, quanto più è grande il modulo del momento angolare tanto meno efficace è un ugual momento torcente nel modificare la direzione dell'asse di rotazione.

In conclusione, conferendo a un corpo un'elevata velocità angolare attorno a un suo asse di simmetria, si rende stabile la sua orientazione, nel senso che momenti torcenti esterni avranno difficoltà a modificare la direzione dell'asse di rotazione. Esistono numerosi esempi molto comuni in cui si manifesta questo effetto *giroscopico*: un ciclista che viene urtato lievemente in direzione trasversa al suo moto permane in equilibrio per un tratto più lungo di quello che ci si potrebbe aspettare. Questa stabilità è dovuta al momento angolare delle ruote in rapida rotazione. Imperfezioni del manto stradale, come fossi o buche, che piegherebbero facilmente un oggetto non in rotazione e poggiato su una base stretta come quella della ruota di una bicicletta, hanno effetti quasi trascurabili nel caso di una bicicletta in moto abbastanza rapido, per via della tendenza delle ruote a mantenere costante la direzione del proprio momento angolare.

Quando un giocatore di pallamano effettua un passaggio, pone la palla in rapida rotazione attorno al suo asse maggiore

ISBN 88-408-1254-7

e la lancia in modo che tale asse sia approssimativamente parallelo alla direzione della velocità del centro di massa della palla. La rapida rotazione stabilizza l'orientamento della palla ed evita che questa possa compiere moti incontrollati attorno al centro di massa. Con questa tecnica si fanno lanci più precisi, si rende più facile la presa da parte del compagno di squadra e si fa in modo che la palla offra all'aria sempre la sua sezione minima, riducendo così l'effetto della resistenza dell'aria e quindi aumentando la portata del proprio lancio.

Uno dei problemi della fisica aerospaziale è la stabilizzazione dell'orientamento di un satellite, soprattutto quando attiva i sui razzi direzionali per raggiungere una particolare posizione orbitale (Figura 10.15). I fattori che possono compromettere l'orientazione di un satellite sono molteplici: l'attrito dell'atmosfera residua, il vento solare (un fascio di particelle cariche proveniente dal Sole), o l'impatto con piccoli meteoriti. Per rendere minimi questi effetti la navicella viene posta in rapida rotazione attorno al suo asse di simmetria.

L'implosione di una stella

La maggior parte delle stelle ruota attorno a un proprio asse di simmetria, e così fa il Sole, con periodo di circa un mese. Il Sole, però, non può essere considerato un corpo rigido perché si tratta di una sfera gassosa le cui regioni prossime ai poli ruotano con periodo di 37 giorni, mentre quelle prossime all'equatore ruotano con periodo di 26 giorni. La stabilità del Sole è dovuta a una sorta di equilibrio tra forze centripete, che di per sé lo condurrebbero al collasso, e una *pressione di radiazione* centrifuga, dovuta agli urti della radiazione prodotta dalle reazioni nucleari con gli atomi dei gas solari, ciò che lo salva dall'implosione. Quando il Sole esaurirà il suo carburante, la pressione di radiazione verrà a mancare e il Sole imploderà fino a raggiungere lo stadio di *nana bianca*, in cui gli atomi sono impacchettati a distanze non ulteriormente riducibili.

Nelle stelle la cui massa supera di circa 1,4 volte quella solare, le forze implosive gravitazionali sono così intense che la struttura atomica viene distrutta e il collasso continua fino a quando gli stessi nuclei atomici si trovano a stretto contatto. In questo caso la stella diventa una sorta di nucleo atomico gigantesco e per questa ragione è chiamata *stella di neutroni*. Il raggio delle stelle di neutroni di massa dell'ordine di 1,5 volte la massa solare è approssimativamente uguale a 11 km.

Si consideri il collasso di una stella che, come il Sole, ruota su se stessa con periodo di un mese; le forze che agiscono durante il collasso sono chiaramente interne al sistema e quindi non ne possono modificare il momento angolare. Il valore del momento angolare finale, quindi, sarà legato alla velocità angolare iniziale dall'Equazione 10.17. Il rapporto tra i momenti d'inerzia è uguale al rapporto tra i quadrati dei raggi, iniziale e finale, ovvero $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. Se il raggio iniziale fosse approssimativamente uguale a quello del Sole (circa $7 \cdot 10^5$ km) si avrebbe

$$\frac{I_i}{I_f} = \frac{r_i^2}{r_f^2} = \frac{(7 \cdot 10^5 \text{ km})^2}{(11 \text{ km})^2} = 4 \cdot 10^9.$$

La velocità angolare della stella, quindi, passa da una rotazione al mese a $4 \cdot 10^9$ rotazioni al mese, ovvero più di 1000 giri al secondo.

Le stelle di neutroni si possono osservare dalla Terra perché possiedono un campo magnetico all'interno del quale vengono intrappolati elettroni liberi. Questi, accelerati dalla rotazione della stella, emettono radiazione elettromagnetica che vista dalla Terra somiglia al segnale luminoso prodotto da un faro. A causa di questi impulsi luminosi molto netti le stelle di neutroni sono state chiamate anche *pulsar*. Un esempio di segnale ricevuto da una pulsar è riportato in Figura 10.16.

Il principio di conservazione del momento angolare regola molti altri fenomeni astronomici. Per esempio, la rotazione della nostra galassia è figlia di una rotazione molto meno rapida della nuvola di gas da cui ha avuto origine. La rotazione del Sole e le orbite dei suoi pianeti, infine, hanno origine dalla rotazione dei gas che hanno prodotto il sistema solare.

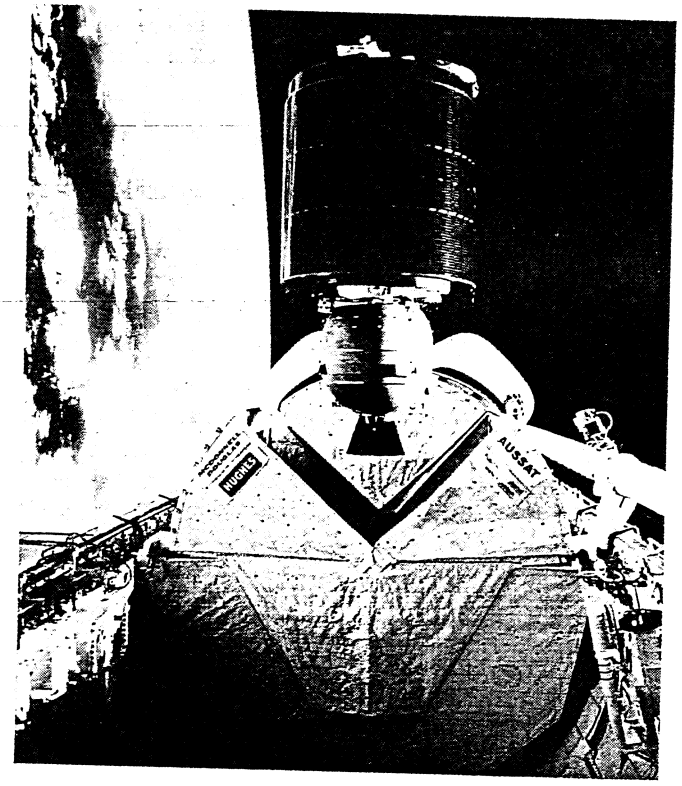


FIGURA 10.15 Uscita di un satellite per telecomunicazioni dalla stiva dello *space shuttle*. Il satellite viene posto in rapida rotazione attorno al suo asse di simmetria centrale (l'asse verticale nella foto), al fine di stabilizzarne l'orientazione.

PROBLEMA SVOLTO 10.4 Un astronauta di massa 120 kg fa una passeggiata spaziale legato alla navicella da una corda tesa lunga 180 m. Per un'operazione errata l'astronauta acquista una piccola velocità tangenziale di 2,5 m/s. Per tornare sulla navicella l'astronauta tira la corda lentamente e a ritmo costante. Con che

 ISBN 88-408-1254-7

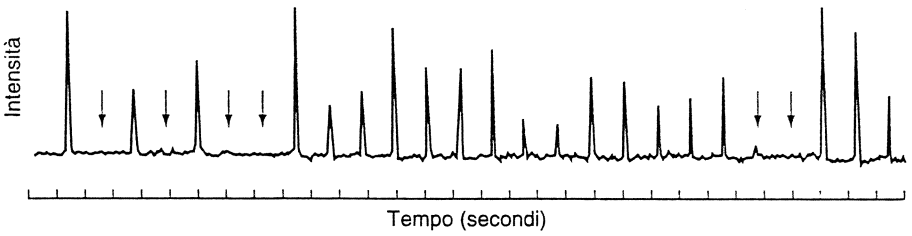


FIGURA 10.16 Segnale elettromagnetico proveniente da una stella di neutroni in rapida rotazione. Le frecce verticali indicano segnali troppo deboli per il sistema ricevente. L'intervallo tra impulsi successivi è costante ed è uguale a 1, 187911164 s.

forza l'astronauta tira la corda quando si trova a distanza (a) di 50 m e (b) di 5 m dalla navicella? Si calcoli anche la velocità tangenziale dell'uomo in questi due istanti.

Soluzione Sull'astronauta non agiscono momenti torcenti esterni e quindi il suo momento angolare si conserva. Il momento angolare iniziale calcolato rispetto alla navicella vale Mv_ir_i e tale momento deve essere uguale al momento angolare Mvr calcolato in un generico istante successivo. Ovvero

$$Mvr = Mv_ir_i,$$

da cui si ottiene

$$v = \frac{v_ir_i}{r}.$$

In ogni istante la forza centripeta è data da

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2r_i^2}{r^3}.$$

All'istante iniziale la forza centripeta richiesta vale

$$F = \frac{(120\text{ kg})(2{,}5\text{ m/s})^2}{180\text{ m}} = 4{,}2\text{ N}.$$

(a) Quando l'astronauta si trova a 50 m dalla navicella la sua velocità tangenziale vale

$$v = \frac{(2{,}5\text{ m/s})(180\text{ m})}{50\text{ m}} = 9{,}0\text{ m/s},$$

e la forza centripeta è

$$F = \frac{(120\text{ kg})(2{,}5\text{ m/s})^2(180\text{ m})^2}{(50\text{ m})^3} = 194\text{ N}.$$

(b) A 5 m dalla navicella la velocità cresce di un fattore 10 e vale 90 m/s, mentre la forza cresce di un fattore 10^3 e vale $1,94 \cdot 10^5$ N, ovvero il peso di 22 tonnellate! È evidente che l'astronauta non può esercitare una forza così elevata, inoltre, quand'anche l'uomo venisse tirato con un argano, la corda potrebbe non sopportare una tensione di queste proporzioni. A un certo punto la corda potrebbe rompersi e l'uomo inizierebbe un moto rettilineo uniforme con la velocità che aveva all'istante della rottura. Morale: gli astronauti che effettuano passeggiate spaziali devono evitare di acquistare velocità tangenziali. Cosa potrebbe fare l'astronauta per muoversi senza rischi verso la navicella?

PROBLEMA SVOLTO 10.5 Un tavolo girevole, costituito da un disco di massa 125 g e raggio 7,2 cm, ruota con velocità angolare 0,84 giri/s attorno a un asse verticale (Figura 10.17a). Un disco identico, inizialmente a riposo, viene posto all'improvviso sul primo e per effetto del mutuo attrito i due dischi finiscono per ruotare in modo solidale. Un terzo disco identico, inizialmente a riposo, viene posto all'improvviso sul sistema costituito dai primi due e per effetto del mutuo attrito i tre dischi alla fine ruotano in modo solidale (Figura 10.17b). Si calcoli la velocità angolare finale del sistema costituito dai tre dischi.

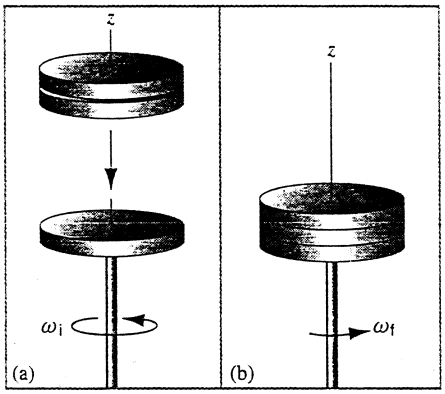


FIGURA 10.17 (a) Un disco ruota attorno al suo asse con velocità angolare ω_i. (b) Due dischi identici, inizialmente a riposo, vengono posti sul primo disco; il sistema così ottenuto ruota con velocità angolare ω_f.

Soluzione Questo problema è l'analogo rotazionale del problema discusso nel Paragrafo 6.5 in cui, per effetto di collisioni completamente anelastiche, più oggetti in moto si legano rigidamente gli uni agli altri. Grazie all'assenza di momento torcente verticale la componente z del momento angolare si conserva. Le forze d'attrito tra le superfici dei dischi sono forze interne al sistema che non possono modificare il valore del momento angolare totale. Applicando, quindi, l'Equazione 10.17 si ha

$$\omega_f = \omega_i\frac{I_i}{I_f}.$$

Senza fare conti espliciti, sapendo che i tre dischi sono identici, il momento d'inerzia del sistema finale è uguale a tre volte quello del singolo disco; allora $I_i/I_f = 1/3$. Inserendo questo valore nell'espressione precedente si ha

$$\omega_f = (0{,}84\text{ giri/s})(1/3) = 0{,}18\text{ giri/s}.$$

10.5 LA TROTTOLA

Una trottola in rapida rotazione attorno al suo asse di simmetria costituisce il più semplice tra gli esempi del fenomeno illustrato in Figura 10.4b: un momento torcente trasverso modifica la direzione del momento angolare ma ne lascia invariato il modulo. In Figura 10.18a è disegnata una

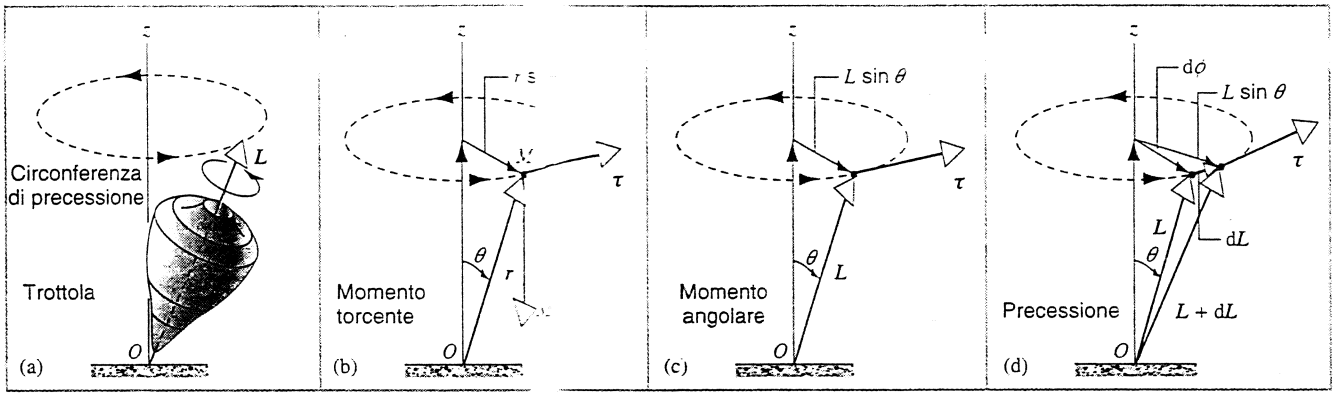


FIGURA 10.18 (a) Una trottola in rapida rotazione subisce precessione attorno all'asse verticale. (b) Il peso della trottola esercita un momento torcente rispetto al punto di contatto della trottola con il suolo. (c) Il momento torcente è perpendicolare al vettore momento angolare. (d) Il momento torcente modifica la direzione del momento angolare e causa la precessione.

trottola in rapida rotazione attorno al suo asse. Il punto di contatto tra la trottola e il suolo, assunto fisso in un riferimento inerziale, è stato scelto come l'origine O del riferimento cartesiano. L'esperienza ci insegna che l'asse di rotazione si muove lentamente attorno all'asse verticale: tale moto si chiama *precessione* ed è dovuto al fenomeno descritto in Figura 10.4b, ove il momento torcente esterno è originato dall'azione della gravità.

La Figura 10.18b è una rappresentazione semplificata della precedente in cui la trottola è stata sostituita da una particella puntiforme di massa M posta nel centro di massa della trottola. La forza di gravità ha momento rispetto all'origine O di modulo

$$\tau = Mgr \sin\theta. \tag{10.18}$$

Il momento torcente, essendo perpendicolare all'asse di rotazione e quindi al momento angolare $\boldsymbol{L}$ della trottola (Figura 10.18c), può modificarne la direzione ma non il modulo. La variazione del momento angolare $\boldsymbol{L}$ in un intervallino infinitesimo di tempo dt è data da

$$d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\tau}\, dt \tag{10.19}$$

ed è parallela al momento torcente $\boldsymbol{\tau}$, ovvero è perpendicolare a $\boldsymbol{L}$. L'effetto del momento torcente $\boldsymbol{\tau}$ è quindi quello di variare il momento angolare da $\boldsymbol{L}$ a $\boldsymbol{L} + d\boldsymbol{L}$; quest'ultimo è un vettore della stessa lunghezza di $\boldsymbol{L}$ ma con direzione leggermente diversa.

Se la trottola ha simmetria assiale e ruota ad alta velocità, allora il suo momento angolare è diretto come l'asse di rotazione. Quest'ultimo, quindi, seguirà il moto di cui l'estremo libero descrive una circonferenza attorno all'asse z (Figura 10.18a). Questo moto si chiama precessione.

Se si denota con $d\phi$ l'angolo di cui ruota il momento angolare nell'intervallino dt, si può definire la velocità angolare di precessione

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt}. \tag{10.20}$$

Dalla Figura 10.18d si ha che

$$d\phi = \frac{dL}{L\sin\theta} = \frac{\tau\, dt}{L\sin\theta}. \tag{10.21}$$

Quindi

$$\omega_P = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\tau}{L\sin\theta} = \frac{Mgr\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{Mgr}{L}. \tag{10.22}$$

La velocità angolare di precessione è inversamente proporzionale al momento angolare e quindi alla velocità angolare di rotazione attorno all'asse di simmetria. Quanto più rapidamente ruota su se stessa la trottola, tanto meno rapido sarà il suo moto di precessione. D'altro canto, poiché l'attrito rallenta la rotazione della trottola, al passare del tempo la velocità di precessione aumenta.

L'Equazione 10.22 è una relazione tra i moduli della velocità angolare di precessione ω_P, del momento angolare L e del momento torcente τ. Si può anche scrivere la relazione vettoriale

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\omega}_P \times \boldsymbol{L}. \tag{10.23}$$

Si lascia al lettore la verifica che tale relazione è coerente sia con l'Equazione 10.22 che lega i moduli, sia con le direzioni dei vettori riportate in Figura 10.18. Si osservi che nel caso di precessione attorno all'asse z la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_P$ di precessione è parallela a z.

I moti di precessione si osservano comunemente nelle trottole e nei giroscopi. La Terra stessa può essere considerata una trottola e l'attrazione gravitazionale del Sole e della Luna sulle protuberanze equatoriali dovute alle maree causa il moto di precessione, che in astronomia viene chiamato «precessione degli equinozi». L'asse di rotazione della Terra in un periodo di circa 26 000 anni descrive una superficie conica, come quella rappresentata in Figura 10.18, di semiapertura $\theta = 23{,}5°$.

Il momento angolare totale della trottola consta di un contributo rotazionale e di uno dovuto alla precessione. La somma di questi due termini fornisce un vettore che non giace lungo l'asse di simmetria della trottola. La nostra affermazione, quindi, che l'asse di rotazione segue la direzione del momento angolare, non è del tutto vera. Se, però, il modulo del momento angolare di precessione è molto più piccolo di quello del momento angolare di rotazione, allora la deviazione del momento angolare dall'asse di simmetria

 ISBN 88-408-1254-7

è piccolissima. Queste piccole deviazioni, dette *nutazioni*, comunque, causano delle leggere oscillazioni dell'asse della trottola in avanti e indietro trasversalmente rispetto alla traiettoria circolare descritta dall'asse nel suo moto di precessione.

10.6 RIASSUNTO DELLA DINAMICA DEI MOTI ROTATORI

Nello studio di un nuovo fenomeno fisico si procede spesso per analogia con fenomeni già appresi. Più avanti si vedrà, per esempio, che i fenomeni magnetici hanno molti aspetti in comune con quelli elettrici, quindi la conoscenza di questi ultimi fornirà elementi per lo studio dei primi.

Negli ultimi tre capitoli sono state introdotte numerose grandezze utili per lo studio del moto rotatorio e si è sempre messa in evidenza la loro analogia con alcune grandezze introdotte nello studio del moto traslatorio, senza dimenticare, però, di sottolineare le differenze tra queste grandezze e, talvolta, i limiti di applicabilità delle equazioni per il moto rotatorio. Per esempio certe relazioni hanno senso solo se ci si limita a considerare moti rotatori intorno a un asse fisso.

La Tabella 10.1 costituisce una tavola riassuntiva in cui vengono confrontate grandezze lineari e rotazionali.

TABELLA 10.1 Confronto riassuntivo tra grandezze lineari e rotazionali*

Grandezze lineari		*Numero equazione*	*Grandezze rotazionali*		*Numero equazione*
Velocità	$v = dr/dt$	2.9	Velocità angolare	$\omega = d\phi/dt$	8.3
Accelerazione	$a = dv/dt$	2.16	Accelerazione angolare	$\alpha = d\omega/dt$	8.5
Massa	m		Momento d'inerzia	$I = \sum mr^2$	9.10
Forza	F		Momento torcente	$\tau = r \times F$	9.3
Seconda legge di Newton	$\sum F_{ext} = ma$	4.3	Seconda legge di Newton per moti rotatori con asse fisso	$\sum \tau_{ext_z} = I\alpha_z$	9.11
Condizione di equilibrio	$\sum F_{ext} = 0$	9.22	Condizione di equilibrio	$\sum \tau_{ext} = 0$	9.23
Quantità di moto di di una parcicella	$P = mv$	6.1	Momento angolare di una particella	$l = r \times p$	10.1
Quantità di moto di un sistema particelle	$P = Mv_{cm}$	7.21	Momento angolare di un sistema di particelle	$L = I\omega$	10.12
Forma generale della seconda legge di Newton	$\sum F_{ext} = dP/dt$	7.23	Forma generale della seconda legge di Newton per i moti rotatori	$\sum \tau_{ext} = dL/dt$	10.9
Conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle per il quale $\sum F_{ext} = 0$	$P = \sum p_n =$ = costante	6.12	Conservazione del momento angolare di un sistema di particelle per il quale $\sum \tau_{ext} = 0$	$L = \sum l_n =$ = costante	10.15

* Alcune delle equazioni precedenti possono essere applicate soltanto sotto ipotesi opportune. È importante comprendere le ipotesi d'applicabilità di un'equazione perché se ne possa fare un uso corretto.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

10.1 Momento angolare di una particella

1. Una particella occupa all'istante t la posizione individuata dal vettore $r = 3ti + 4j$, con r misurato in metri e il tempo in secondi. In tutte le domande seguenti si consideri soltanto il caso $t > 0$.

(a) Il modulo della velocità lineare della particella
- (A) cresce con il tempo.
- (B) è costante.
- (C) diminuisce con il tempo.
- (D) non è definito.

(b) Il modulo della quantità di moto della particella
- (A) cresce con il tempo.
- (B) è costante.
- (C) diminuisce con il tempo.
- (D) non è definito.

(c) Il modulo della velocità angolare della particella rispetto all'origine
(A) cresce con il tempo.
(B) è costante.
(C) diminuisce con il tempo.
(D) non è definito.
(d) Il modulo del momento angolare della particella rispetto all'origine
(A) cresce con il tempo.
(B) è costante.
(C) diminuisce con il tempo.
(D) non è definito.

2. Una particella si muove con velocità costante v. Il momento angolare della particella rispetto all'origine vale zero
(A) sempre.
(B) solo in un istante particolare.
(C) solo se la traiettoria passa per l'origine.
(D) mai.

3. Una particella si muove con quantità di moto costante $p = (10\ \text{kg} \cdot \text{m/s})i$. La particella ha momento angolare relativo all'origine $l = (20\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})k$ quando $t = 0$.
(a) Il modulo del momento angolare della particella
(A) è decrescente.
(B) è costante.
(C) è crescente.
(D) può essere costante.
(b) La traiettoria della particella
(A) passa per l'origine.
(B) potrebbe passare per l'origine.
(C) non passa per l'origine, ma non è possibile stabilire quanto vi si avvicinerà.
(D) non passa per l'origine, ma si può calcolare esattamente quanto vi si avvicinerà.

10.2 Sistemi di particelle

4. I moduli del momento angolare rispetto all'origine di due particelle valgono, rispettivamente, $|l_1| = 30\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ e $|l_2| = 40\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$. La particella 1 si muove nel piano xy e la 2 nel piano yz e non vi sono momenti torcenti esterni agenti sul sistema. Il momento angolare totale è costante e il suo modulo vale
(A) $|L| = 10\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.
(B) $|L| = 50\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.
(C) $|L| = 70\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.
(D) $10\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s} \leq |L| \leq 50\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

5. Due particelle indipendenti si muovono con momenti angolari l_1 ed l_2 in una regione in cui non agiscono momenti torcenti esterni. Nell'intervallo di tempo Δt, però, il momento torcente esterno τ agisce sulla prima particella, ma non sulla seconda. A quanto ammonta la variazione del momento angolare totale del sistema?
(A) $\Delta L = l_1 - l_2$.
(B) $\Delta L = (l_1 + l_2)/2$.
(C) $\Delta L = \tau\, \Delta t$.
(D) ΔL non è ben definito per questo sistema perché le due particelle non sono connesse.

10.3 Momento e velocità angolari

6. La velocità di traslazione v e la quantità di moto p di un corpo
(A) sono sempre mutuamente parallele.
(B) non sono mai mutuamente parallele.
(C) sono mutuamente parallele solo se v è costante.
(D) sono mutuamente parallele solo se v assume alcune particolari direzioni che dipendono dal corpo.

7. La velocità angolare ω e il momento angolare l di un corpo a simmetria assiale
(A) sono sempre mutuamente paralleli.
(B) non sono mai mutuamente paralleli.
(C) sono mutuamente paralleli solo se ω è costante.
(D) sono mutuamente paralleli solo se ω assume alcune particolari direzioni che dipendono dal corpo.

8. Un corpo, non necessariamente rigido, ruota con velocità angolare di modulo ω_0 e ha momento angolare di modulo L_0. A causa di un evento improvviso la velocità angolare del corpo inizia a decrescere lentamente. In questa situazione
(A) L_0 decresce.
(B) L_0 può essere costante o decrescente, ma non può essere crescente.
(C) L_0 può essere costante, decrescente, o crescente.
(D) L_0 può essere costante o crescente, ma non può essere decrescente.

10.4 Conservazione del momento angolare

9. Un corpo rigido ruota liberamente in assenza di momenti torcenti esterni. In questo caso
(A) il momento angolare e la velocità angolare hanno direzione costante.
(B) la direzione del momento angolare è costante; quella della velocità angolare potrebbe non esserlo.
(C) la direzione della velocità angolare è costante; quella del momento angolare potrebbe non esserlo.
(D) né il momento angolare né la velocità angolare hanno necessariamente direzione costante.

10. Una professoressa di fisica siede su uno sgabello privo di attriti in rotazione a velocità angolare costante attorno al suo asse; le braccia della professoressa sono estese e le sue mani reggono due manubri. A un certo punto la professoressa avvicina le braccia al petto
(a) e la sua velocità angolare
(A) aumenta.
(B) resta costante.
(C) diminuisce.
(D) cambia, ma per stabilire se aumenta o diminuisce bisognerebbe sapere come le braccia sono state avvicinate.
(b) e il suo momento angolare
(A) aumenta.
(B) resta costante.
(C) diminuisce.
(D) cambia, ma per stabilire se aumenta o diminuisce bisognerebbe sapere come le braccia sono state avvicinate.

 ISBN 88-408-1254-7

10.5 La trottola

11. Una ruota di bicicletta è sospesa in un piano verticale, in cui può ruotare liberamente, mediante due fili agganciati agli estremi dell'asse. La ruota viene posta in rapida rotazione attorno al suo asse. Uno dei due fili viene tagliato; vista dalla prospettiva di questo filo la ruota gira in verso orario.
    (a) In che verso, visto dall'alto, l'asse della ruota subirà moto di precessione?
        (A) Orario.
        (B) Antiorario.
        (C) Non vi sarà precessione perché la ruota non è una trottola in rapida rotazione.
    (b) Subito prima del taglio la tensione di ciascun filo è $P/2$ con P il peso della ruota. Dopo il taglio, il modulo della tensione nel filo ancora attaccato alla ruota vale
        (A) $P/2$.
        (B) un po' più di $P/2$.
        (C) circa P.
        (D) esattamente P.

10.6 Riassunto della dinamica dei moti rotatori

QUESITI

1. Fino ad ora sono state introdotte numerose grandezze vettoriali, come la posizione, lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza, la quantità di moto e il momento angolare. Quali tra queste sono definite indipendentemente dalla scelta dell'origine del riferimento?
2. Un cilindro ruota con velocità angolare ω attorno a una asse fisso come illustrato in Figura 10.19. Si scelga un'origine del riferimento e si disegnino i vettori ω ed L. I due vettori sono mutuamente paralleli? È necessario tener presente alcune proprietà di simmetria del sistema?

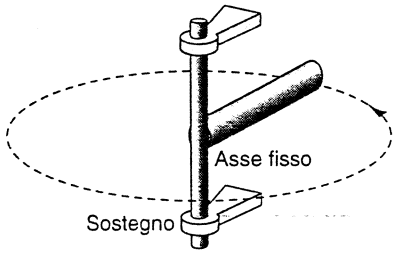


FIGURA 10.19 Quesito 2.

3. Vi sono sistemi il cui il momento angolare segue l'aumento della velocità angolare di un corpo e sistemi in cui ciò non accade. Si costruiscano degli esempi che illustrino entrambi i casi.
4. È possibile che un oggetto abbia momento angolare nullo pur avendo velocità angolare diversa da zero? È possibile il contrario? Si giustifichi la risposta.
5. Uno studente, in piedi su un tavolo libero di ruotare attorno al suo asse, con le braccia tese verso l'esterno regge due manubri e ruota con velocità angolare ω. A un certo istante lo studente lascia cadere i manubri. Si osserva una variazione della velocità angolare dello studente? Quale? Il momento angolare si conserva? Si giustifichino le risposte.
6. Un tavolo girevole ruota con velocità angolare costante attorno al suo asse verticale. Sul sistema non agiscono forze d'attrito né momenti torcenti esterni. Una vaschetta circolare, poggiata sul tavolo, ruota solidale con esso (Figura 10.20). Il fondo della vaschetta è coperto da uno strato di ghiaccio che, ovviamente, ruota assieme al sistema. Lentamente il ghiaccio si scioglie ma l'acqua resta tutta nella vaschetta. Si osservano variazioni della velocità angolare? Si giustifichi la risposta.

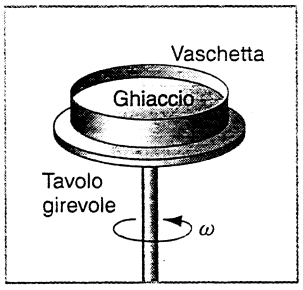


FIGURA 10.20 Quesito 6.

7. Un tavolino girevole circolare ruota liberamente attorno al suo asse verticale; sull'asse non agiscono forze d'attrito. (a) Un coleottero, inizialmente nel centro del tavolino, si muove verso l'esterno e, raggiunto un punto del bordo, vi si ferma. Di quanto è cambiato il momento angolare del sistema costituito dal coleottero e dal tavolino? Come è cambiata la velocità angolare? (b) Come cambierà la velocità angolare del tavolino se il coleottero cade a terra (senza effettuare un balzo di spinta)?
8. Il fisico R.W. Wood, famoso per i suoi scherzi scientifici, un giorno montò un volano in rapida rotazione all'interno di una valigia e la consegnò a un facchino chiedendogli di seguirlo da presso. Cosa accadde quando il facchino fu costretto a girare d'improvviso attorno a un angolo? Spiegate il fenomeno riferendovi all'equazione $\tau = dL/dt$.
9. Una freccia devia in volo in modo da restare sempre tangente alla sua traiettoria. Un pallone da calcio, calciato con una rotazione rapida attorno al suo asse, si comporta in modo diverso. Come si spiegano questi diversi comportamenti?
10. Una palla da rugby viene lanciata con una rotazione rapida attorno all'asse maggiore. Il suo momento angolare, sia pur approssimativamente, è costante? Si discutano i casi in cui l'asse della palla compie oscillazioni e quelli in cui resta fisso.
11. È possibile fornire una spiegazione semplice della stabilità della bicicletta durante il suo moto? Si spieghi, tra l'altro, per quale motivo è difficile restare in equilibrio su una bicicletta ferma.
12. Come mai gli acrobati si aiutano con lunghe aste per restare in equilibrio su un filo?

13. Si immagini di camminare su un binario molto stretto e di perdere l'equilibrio. In che modo bisogna ruotare il proprio corpo se si sta per cadere alla propria destra? Si giustifichi la risposta.
14. I bulloni che fissano il motore di un jet alla struttura portante dell'aeroplano sono progettati in modo da spezzarsi di netto se il motore, in rapidissima rotazione attorno al suo asse, si ingrippa a causa di un guasto improvviso. Come si spiega questo accorgimento strutturale?
15. Un elicottero prende il volo. Perché il corpo dell'elicottero non ruota nel verso opposto a quello delle pale?
16. Affinché un aeroplano con un solo motore voli in posizione orizzontale i suoi alettoni devono essere piegati uno verso l'alto e l'altro verso il basso. Perché?
17. L'elica di un aeroplano, visto dalla poppa, ruota in verso orario. Nella cabrata di ripresa successiva a una picchiata molto ripida il pilota deve posizionare il timone a sinistra per mantenere la sua rotta. Perché?
18. Molti fiumi con grossa portata scorrono verso l'equatore. Che effetto hanno sulla rotazione terrestre i sedimenti scaricati in mare?
19. Se l'intera popolazione mondiale si spostasse sul continente antartico, si osserverebbero effetti sensibili sulla durata di un giorno solare?
20. Nella Figura 10.21a vediamo un atleta spinto verso l'alto, con momento angolare nullo, da una pedana. È possibile che l'atleta, solo modificando la posizione del suo corpo, atterri come illustrato in Figura 10.21b? È interessante notare che il 38% di un campione di allenatori e il 34% di un campione di fisici ha dato la risposta sbagliata.

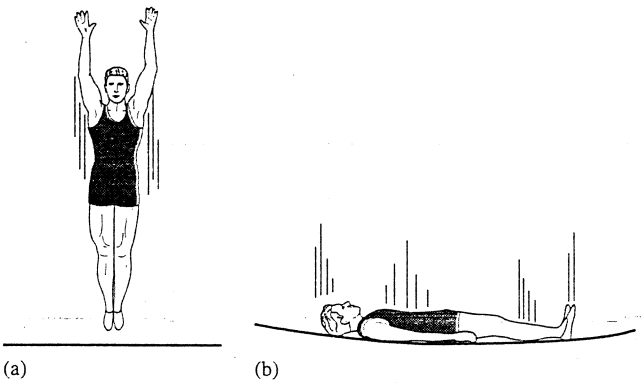


FIGURA 10.21 Quesito 20.

21. Si spieghi, in termini di momento angolare e momento d'inerzia, come un bambino seduto su un'altalena riesca ad accelerarne il moto.
22. È possibile accelerare un'altalena in modo da farle compiere un giro completo attorno al suo supporto? Si assuma che l'altalena sia connessa all'asse di rotazione mediante due sbarre rigide piuttosto che con le più usuali corde o catene. Si giustifichi la risposta.
23. Come fanno i gatti a toccare il suolo sulle proprie zampe anche se cadono partendo zampe all'aria?
24. Un volano molto pesante in rotazione può essere utile per stabilizzare un'imbarcazione. Si supponga che il volano venga montato con asse verticale e si spieghi il suo effetto contro il rollio e il beccheggio della nave.
25. La trottola di Figura 10.18 cade al suolo se non è posta in rotazione attorno al suo asse. Se il momento angolare è molto elevato, invece, la trottola precede attorno all'asse z malgrado venga sollecitata da un analogo momento torcente. Cosa accade nella situazione intermedia che si realizza quando la trottola ruota molto lenta e si sta fermando?
26. La trottola *tippy top* ha forma di calotta sferica (di raggio molto grande) in cui è innestato, normalmente alla faccia piana, una sorta di peduncolo con il quale è possibile porla in rotazione con due dita. A riposo la trottola poggia con la superficie sferica sul piano orizzontale; posta in rotazione si inclina in modo da avvicinare il peduncolo al piano e si ribalta. Si spieghi come mai. In mancanza di una tippy top si può fare lo stesso esperimento con un uovo sodo: per seguire meglio il moto dell'uovo conviene marcare l'estremità appuntita.
27. L'estremità dell'asse di una ruota di bicicletta in rapida rotazione su un piano verticale viene poggiata su un sostegno; in questa configurazione l'asse di rotazione subisce precessione. Cosa sorregge l'estremità libera dell'asse? In altre parole, per quale ragione la ruota non cade a terra?
28. Si consideri una sbarra uniforme a riposo in posizione verticale su una superficie priva d'attrito. L'estremità inferiore della sbarra viene colpita orizzontalmente. Si descriva il moto del centro di massa della sbarra e del suo estremo superiore

ESERCIZI

10.1 Momento angolare di una particella

1. Una particella di massa 13,7 g è in moto alla velocità costante di 380 m/s. La traiettoria rettilinea della particella passa a distanza di 12 cm dall'origine. Si calcoli il momento angolare della particella rispetto all'origine.
2. Facendo uso dell'Equazione 10.2 e noti i parametri r, p e θ è possibile calcolare il momento angolare di una particella. Vi sono casi, però, in cui è più facile misurare le componenti (x, y, z) di $\boldsymbol{r}$ e quelle (v_x, v_y, v_z) di $\boldsymbol{v}$. (a) Si dimostri che le componenti cartesiane di $\boldsymbol{l}$ sono date da

$$l_x = m(yv_z - zv_y),$$
$$l_y = m(zv_x - xv_z),$$
$$l_z = m(xv_y - yv_x).$$

(b) Si dimostri che, se la particella si muove nel piano xy, il suo momento angolare ha la sola componente z diversa da zero.

3. Si dimostri che il momento angolare di una particella in moto rettilineo uniforme è costante durante il moto.

4. (a) Usando i dati nelle appendici si calcoli il momento angolare dei pianeti dovuto al loro moto di rivoluzione attorno al Sole. (b) Quale frazione del momento angolare orbitale totale del sistema solare è dovuta a Giove?
5. Si calcoli, rispetto al centro della Terra, il momento angolare di una persona di massa 84,3 kg ferma in un punto dell'equatore terrestre.

10.2 Sistemi di particelle

6. Il momento angolare totale di un sistema di particelle relativo all'origine O di un riferimento inerziale è dato da $L = \sum(r_i \times p_i)$, ove i vettori p_i ed r_i sono misurati rispetto all'origine. (a) Si ricorra alle relazioni $r_i = r_{cm} + r'_i$ e $p_i = m_i v_{cm} + p'_i$ per esprimere L in funzione della posizione r'_i delle particelle e della loro quantità di moto p'_i rispetto al centro di massa. (b) In base alle definizioni di centro di massa e di momento angolare L' relativo al centro di massa, si dimostri che $L = L' + r_{cm} \times M v_{cm}$. (c) Si dimostri che è possibile rileggere questo risultato pensando al momento angolare totale come alla somma del momento angolare di rotazione (momento angolare relativo al centro di massa) e del momento angolare orbitale (momento angolare del moto del centro di massa, in cui si suppone concentrata tutta la massa del sistema, rispetto all'origine del riferimento).
7. Sia r_{cm} il vettore che individua la posizione del centro di massa C di un sistema di particelle rispetto all'origine O di un sistema di riferimento inerziale. Siano, inoltre, r'_i i vettori che individuano le posizioni delle particelle rispetto a C; dalla Figura 10.22 si ha $r_i = r_{cm} + r'_i$. Si definisce, ora, il momento angolare totale del sistema relativo al centro di massa: $L' = \sum(r'_i \times p'_i)$, ove $p'_i = m_i dr'_i/dt$. (a) Si dimostri che $p'_i = m_i dr_i/dt - m_i dr_{cm}/dt = p_i - m_i v_{cm}$. (b) Si dimostri che $dL'/dt = \sum(r'_i \times dp'_i/dt)$. (c) Si dimostri, valendosi dei risultati ricavati ai punti (a) e (b), della definizione di centro di massa e della terza legge di Newton, che $\tau'_{ext} = dL'/dt$, ove τ'_{ext} è la somma dei momenti delle forze esterne calcolati rispetto al centro di massa.

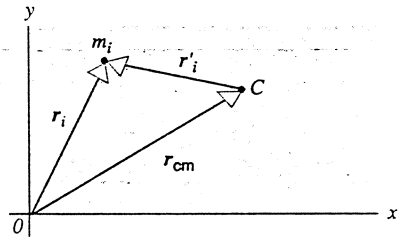


FIGURA 10.22 Esercizi 6 e 7.

10.3 Momento e velocità angolari

8. L'integrale nel tempo del momento torcente è detto impulso angolare. (a) Partendo dall'equazione $\tau = dL/dt$ si dimostri che l'impulso angolare relativo a un certo intervallo di tempo è uguale alla variazione di momento angolare nello stesso intervallo di tempo. Si tratta dell'analogo rotazionale del teorema dell'impulso. (b) Si dimostri che nel caso di rotazioni attorno a un asse fisso si ha

$$\int \tau \, dt = \overline{F} r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i),$$

ove r è il braccio della forza, $\overline{F}$ è la forza media nell'intervallo Δt e ω_i e ω_f sono le velocità angolari del corpo subito prima e subito dopo l'azione della forza.

9. Un disco abrasivo di momento d'inerzia $1{,}22 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot m^2$ è montato su un trapano elettrico sul quale il motore esercita un momento torcente di 15,8 N · m. Si determini (a) il momento angolare e (b) la velocità angolare del disco dopo 33,0 ms di funzionamento del motore.
10. Una ruota di raggio 24,7 cm con velocità iniziale 43,3 m/s rotola senza strisciare e si ferma dopo 225 m. Si calcoli (a) l'accelerazione lineare e (b) l'accelerazione angolare della ruota. (c) Supponendo che il momento d'inerzia della ruota valga $0{,}155\ kg \cdot m^2$, si calcoli il momento torcente esercitato sulla ruota durante la fase d'arresto.
11. Si dimostri che per il sistema di due particelle di Figura 10.7 vale l'uguaglianza $L = I\omega$.
12. In Figura 10.23 è rappresentato un corpo rigido simmetrico in rotazione attorno al suo asse fisso. Per comodità si sceglie l'origine del riferimento coincidente con il centro di massa del corpo. Sommando tutti i contributi dovuti agli elementi di massa infinitesima in cui può essere suddiviso il corpo, si dimostri che il momento angolare totale del corpo vale $L = I\omega$.

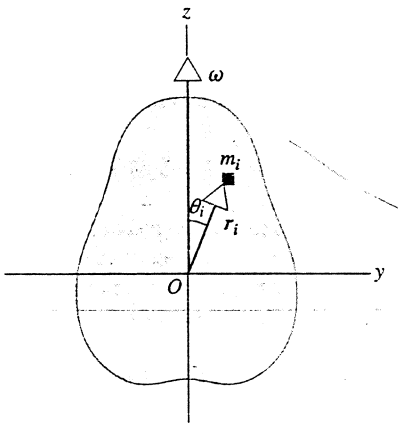


FIGURA 10.23 Esercizio 12.

13. Un bastone omogeneo di massa 4,42 kg e lunghezza 1,23 m è a riposo orizzontalmente su un piano liscio. Un disco da hockey lo colpisce ortogonalmente e gli fornisce un impulso orizzontale di 12,8 N · s in un punto posto a distanza di 46,4 cm dal centro di massa del bastone. Si descriva il moto del bastone.
14. Un cilindro rotola senza strisciare su un piano inclinato di inclinazione θ. Con l'ausilio dell'Equazione 10.9 si dimostri che l'accelerazione del centro di massa vale $(2/3)g \sin\theta$. Si confronti questo metodo con quello usato nel Problema svolto 9.11.
15. Due cilindri di raggio R_1 ed R_2 e di momento d'inerzia I_1 e I_2 sono montati con i loro assi di simmetria fissi e ortogonali al piano della Figura 10.24. Inizialmente il cilindro più grande ruota con velocità angolare ω_0; il secondo cilindro viene spostato verso destra fino al punto in cui le due superfici entrano in contatto. Per effetto delle forze d'attrito il secondo cilindro inizia a ruotare; a un certo punto si instaura il regime di rotolamento puro e i due cilindri ruo-

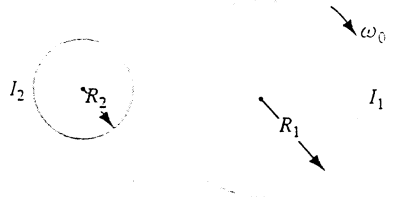


FIGURA 10.24 Esercizio 15.

tano in versi opposti con velocità angolare costante. Si determini la velocità angolare ω_2 del cilindro piccolo in funzione dei parametri I_1, I_2, R_1, R_2 e ω_0. (*Suggerimento*: il momento angolare totale non si conserva; si applichi a ciascun cilindro l'equazione dell'impulso angolare ricavata nell'Esercizio 8.)

10.4 Conservazione del momento angolare

16. Le osservazioni astronomiche hanno permesso di dimostrare che nel periodo che va dal 1870 al 1999 la durata del giorno solare è aumentata di circa $6,0 \cdot 10^{-3}$ s. (a) Qual è stata la corrispondente variazione percentuale della velocità angolare della Terra? (b) Si supponga che la causa di questa variazione sia stato lo spostamento di materiale fluido del nucleo terrestre. Qual è stata la variazione del momento d'inerzia della Terra?

17. Si supponga che per esaurimento del carburante nucleare il Sole collassi e si trasformi in una nana bianca con diametro uguale a quello terrestre. Se non vi è perdita di massa, quanto varrà il periodo di rotazione del Sole nello stato finale? Si ricorda che quello attuale è di circa 25 giorni e si trattino il Sole e la nana bianca come sfere uniformi.

18. Un trenino giocattolo viene montato su una ruota libera di ruotare senza attrito attorno al suo asse verticale (Figura 10.25). Sia m la massa del trenino inizialmente a riposo; a un certo punto si avvia il motore elettrico e il trenino aumenta la sua velocità fino a raggiungere una situazione stazionaria in cui la sua velocità rispetto al binario vale v. Si calcoli la velocità angolare della ruota supponendo che la sua massa valga M e il suo raggio R. (Si trascuri la massa dei raggi della ruota.)

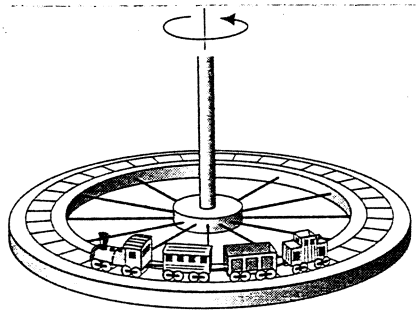


FIGURA 10.25 Esercizio 18.

19. Il rotore (cioè la parte mobile) di un motore elettrico ha momento d'inerzia $I_m = 2,47 \cdot 10^{-3}$ kg · m^2 rispetto al suo asse centrale. Il motore viene montato su una sonda spaziale, di momento d'inerzia $I_s = 12,6$ kg · m^2 rispetto al suo asse, in modo che gli assi dei due oggetti siano paralleli. Si calcoli li numero di giri che deve compiere il motore perché la sonda ruoti di $25,0°$ attorno al suo asse.

20. Un uomo, in piedi su una piattaforma liscia in moto rotatorio con velocità angolare 1,22 giri/s, ha le braccia stese e in ogni mano regge un peso. In questa situazione il momento d'inerzia totale del sistema costituito da piattaforma, uomo e pesi vale 6,13 kg · m^2. Si calcoli la velocità angolare della piattaforma se l'uomo, spostando la posizione delle sue braccia, riduce il momento d'inerzia del sistema al valore 1,97 kg · m^2.

21. Una ruota ha momento d'inerzia 1,27 kg · m^2 ed è posta in rotazione attorno a un albero, di momento d'inerzia trascurabile, con velocità angolare 824 giri/min. A un certo istante una seconda ruota, inizialmente a riposo, e con momento d'inerzia 4,85 kg · m^2 viene accoppiata allo stesso albero. Si determini la velocità angolare finale del sistema costituito dall'albero e dalle due ruote.

22. Si dimostri che, con riferimento alla Figura 10.6c, si ha $l_\perp = mvh$, ove h è la distanza da O, calcolata lungo l'asse z, del punto in cui il braccio radiale è saldato all'albero verticale.

23. Una ruota con raggio di 36,3 cm ha un bordo sottile di massa 3,66 kg e ha raggi e mozzo di massa trascurabile. La ruota, inoltre, può ruotare senza attrito attorno al suo asse. Un uomo regge sulla sua testa l'asse della ruota in posizione verticale mentre si trova in piedi su una piattaforma che può ruotare senza attrito attorno a un asse fisso. All'inizio dell'esperimento la ruota, vista dall'alto, gira con velocità angolare 57,7 rad/s in verso orario, mentre la piattaforma girevole è a riposo. Il momento d'inerzia del sistema costituito dalla piattaforma, dall'uomo e dalla ruota attorno all'asse comune di rotazione vale 2,88 kg · m^2. (a) Improvvisamente l'uomo blocca la rotazione della ruota rispetto alla piattaforma. Si determini il vettore velocità angolare del sistema. (b) L'esperimento viene ripetuto in presenza di attrito sull'asse della ruota. Per effetto dell'attrito la ruota, a partire dalla stessa velocità angolare iniziale, gradualmente diminuisce la sua velocità e si ferma rispetto alla piattaforma. Si descriva il moto del sistema anche in termini quantitativi laddove possibile.

24. Una ragazza di massa 50,6 kg si trova sul bordo di una giostra di massa 827 kg e raggio 3,72 m. La giostra è ferma. La ragazza scaglia in direzione orizzontale tangente al bordo della giostra una sasso di 1,13 kg alla velocità di 7,82 m/s rispetto al suolo. Si determini (a) la velocità angolare della giostra e (b) la velocità lineare della fanciulla. Si tratti la giostra come un disco uniforme.

25. In un parco giochi c'è una giostra di massa 176 kg, raggio 1,22 m e raggio di girazione (vedi l'Esercizio 9.20) 91,6 cm. Un bimbo di massa 44,3 kg corre tangenzialmente al bordo della giostra alla velocità di 2,92 m/s e vi salta su. Si determini la velocità angolare della giostra e del bambino trascurando l'attrito tra i sostegni e l'albero della giostra.

10.5 La trottola

26. Una trottola, avente massa di 492 g e momento d'inerzia di $5,12 \cdot 10^{-4}$ kg · m^2, ruota alla velocità di 28,6 giri/s attorno al suo asse, che forma un angolo di $34,0°$ con l'asse verticale. Il centro di massa si trova alla distanza 3,88 cm dal punto in cui la trottola tocca il suolo. Vista dall'alto la trottola ruota in verso orario. Si determini il modulo (espresso in giri/s) e la direzione della velocità angolare di precessione.

 ISBN 88-408-1254-7

27. Un giroscopio è costituito da un disco di raggio 48,7 cm fissato opportunamente al punto medio di un asse lungo 12,2 cm in modo da poter ruotare e oscillare liberamente. La sua velocità di rotazione è 975 giri/min. La massa del disco vale 1,14 kg e quella dell'asse 130 g. Si determini il tempo necessario per una precessione se l'asse è in posizione orizzontale con un estremo posto su un supporto fisso.

10.6 Riassunto della dinamica dei moti rotatori

PROBLEMI

1. Una particella P di massa 2,13 kg occupa la posizione r e si muove con velocità v (Figura 10.26). Sulla particella agisce la forza F che giace sul piano individuato da r e v. Si calcoli, rispetto all'origine, (a) il momento angolare della particella e (b) il momento torcente agente sulla particella. Di entrambi i vettori si determini sia il modulo sia la direzione. Si assuma $r = 2,91$ m, $v = 4,18$ m/s ed $F = 1,88$ N.

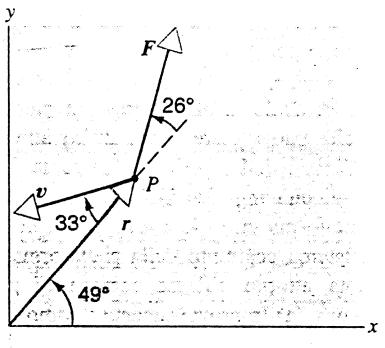


FIGURA 10.26 Problema 1.

2. Due particelle di massa m viaggiano in verso opposto e con velocità v su due rette parallele a distanza d. Si determini un'espressione per il momento angolare totale del sistema rispetto a qualunque origine.

3. Affinché il moto di una palla da biliardo di raggio R sia di puro rotolamento fin dall'istante iniziale, la stecca deve colpire la palla non al centro (a distanza R dal tavolo) ma in un punto più alto ad altezza $7R/5$ rispetto al tavolo. Si dimostri la validità di questa affermazione.

4. Il cilindro in Figura 10.27 ha asse fisso ed è inizialmente a riposo. La velocità iniziale con cui il blocco di massa M si muove senza attrito verso destra è v_1. Il blocco, passando sul cilindro, raggiunge la sua posizione finale tratteggiata in figura. Quando il blocco entra in contatto con il cilindro vi scivola sopra, ma l'attrito tra le due superfici è così elevato che prima del distacco si instaura il regime di rotolamento puro. Sapendo che il cilindro ha raggio R e momento d'inerzia I rispetto al suo asse si determini la velocità finale del blocco in funzione dei parametri v_1, M, I ed R. Il modo più semplice per risolvere questo problema consiste nell'usare la relazione tra impulso e variazione della quantità di moto.

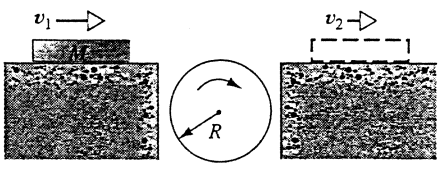


FIGURA 10.27 Problema 4.

5. Una palla da biliardo inizialmente a riposo viene colpita in modo deciso da una stecca tenuta orizzontale ad altezza h rispetto alla linea passante per il centro della palla (Figura 10.28). La palla parte con velocità iniziale v_0 e, a causa dell'«effetto» impartito, concorde con la direzione del moto, accelera fino a raggiungere la velocità $9v_0/7$. Si dimostri che $h = 4R/5$, ove R è il raggio della palla.

6. Si supponga che la forza F considerata nel Problema 5 venga applicata al di sotto della retta passante per il centro di massa. (a) Si dimostri che è impossibile, con l'«effetto» impartito in verso discorde al moto, ridurre a zero la velocità in avanti, senza quindi giungere al rotolamento, a meno che non sia $h = -R$. (b) Si dimostri che è impossibile invertire il senso del moto della palla a meno che la forza F non abbia componente non nulla verso il basso.

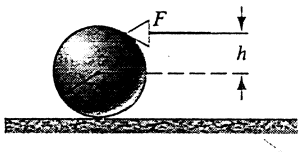


FIGURA 10.28 Problema 5.

7. Un giocatore di bowling lancia una palla di raggio $R = 11,0$ cm con velocità iniziale $v_0 = 8,50$ m/s. La palla, che nell'istante in cui tocca la pedana ha moto puramente traslatorio, striscia rotolando per un certo tempo prima di acquisire un rotolamento puro. È noto che il coefficiente di attrito dinamico tra la palla e la pedana vale 0,210. (a) Quanto dura l'intervallo di tempo in cui la palla striscia? (*Suggerimento*: durante lo strisciamento la velocità lineare della palla decresce, mentre cresce la sua velocità angolare.) Si calcoli (b) lo spazio percorso dalla palla e (c) il numero di giri compiuti dalla palla nella fase di moto con strisciamento. (d) Si calcoli la velocità della palla nell'istante in cui inizia il puro rotolamento.

8. Un disco uniforme di massa M e raggio R ruota con velocità angolare ω_0 attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro. (a) Si calcoli il momento angolare del disco. (b) Un frammento di massa m del disco si stacca e vola via verticalmente, come illustrato in Figura 10.29. Si calcoli l'altezza massima raggiunta dal frammento. (c) Si calcoli la velocità angolare di ciò che è rimasto del disco.

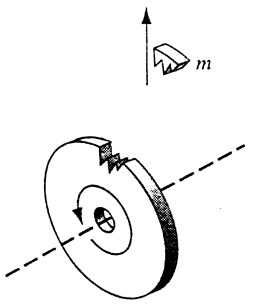


FIGURA 10.29 Problema 8.

9. Se i ghiacci polari continentali si sciogliessero completamente, il livello del mare crescerebbe di circa 30 m. Che effetto avrebbe questo fenomeno sulla rotazione terrestre? Si stimi la variazione della durata del giorno solare. (La discussione sulla possibilità che si sciolgano i ghiacci polari per effetto dell'inquinamento atmosferico è a tutt'oggi molto viva.)
10. Il pianeta Terra si è formato all'incirca 4,5 miliardi di anni fa, probabilmente come una sfera di massa volumica abbastanza uniforme. Il calore sprigionato dal decadimento degli elementi radioattivi ha fatto sì che buona parte della materia iniziale si sciogliesse. In questo modo le sostanze più pesanti si sono concentrate nel centro della Terra e ne hanno formato il nucleo. La Terra attuale può essere pensata come un oggetto costituito da un nucleo centrale di raggio 3570 km e massa volumica 10,3 g/cm^3 circondato da un mantello di massa volumica 4,50 g/cm^3 che si estende fin quasi alla superficie. Il raggio complessivo è all'incirca 6370 km. In questo modello si ignora la sottile parte più esterna, la crosta. Si determini la variazione percentuale della lunghezza di un giorno dovuta alla formazione del nucleo.
11. Uno scarabeo si muove in verso antiorario sul bordo di un disco di raggio R e momento d'inerzia I montato su un asse che viene tenuto verticale da supporti privi d'attrito. Rispetto alla Terra lo scarabeo si muove con velocità v e il disco ruota con velocità angolare ω. A un certo punto lo scarabeo trova una briciola di pane e ovviamente si ferma. Si determini la velocità angolare del disco nello stato finale.
12. Due pattinatori di massa 51,2 kg ciascuno si muovono l'uno verso l'altro lungo traiettorie rettilinee parallele distanti tra loro 2,92 m. I due pattinatori si muovono alla stessa velocità scalare di 1,38 m/s. Il primo pattinatore regge un'asta lunga 2,92 m la cui seconda estremità viene afferrata dal secondo pattinatore non appena ne ha la possibilità (Figura 10.30). Si assuma che il ghiaccio sia perfettamente liscio. (a) Si descriva quantitativamente il moto dei pattinatori nella configurazione finale. (b) Tirando l'asta i pattinatori riducono la loro mutua distanza a 0,940 m. Si calcoli la loro velocità angolare in questa ulteriore configurazione.

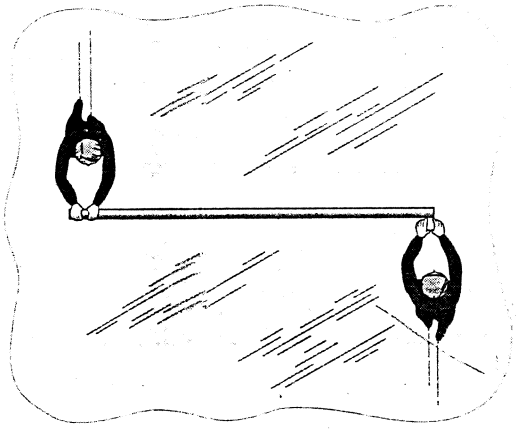


FIGURA 10.30 Problema 12.

CAPITOLO 11

ENERGIA 1: LAVORO ED ENERGIA CINETICA

Abbiamo visto quanto le leggi di Newton siano utili nella comprensione e nell'analisi di una vasta gamma di problemi di meccanica. Affronteremo ora gli stessi argomenti con un approccio diverso, basato su uno dei concetti più fondamentali esistenti in fisica: l'energia.

L'energia si manifesta sotto forme diverse. In questo capitolo restringeremo il campo a una sola di queste: l'energia cinetica, che è l'energia associata a qualunque corpo in movimento. Introdurremo anche il concetto di lavoro, legato all'energia cinetica da un teorema omonimo. Questo teorema dell'energia cinetica, ricavato dalle leggi di Newton, offre un nuovo modo di analizzare il comportamento dei sistemi meccanici. Nel prossimo capitolo presenteremo un'altra forma di energia, quella potenziale, ed enunceremo il principio di conservazione dell'energia. Nel Capitolo 13 amplieremo questi concetti e generalizzeremo il principio di conservazione, che è di massima utilità in fisica.

11.1 LAVORO ED ENERGIA

Nella Figura 11.1 vediamo un uomo che spinge in salita la sua carrozzella. Quando egli applica sulla ruota una forza $\boldsymbol{F}$, esercita indirettamente un momento torcente $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ rispetto al punto di contatto tra ruota e pavimento. Questo momento torcente fa procedere in avanti la ruota. Un altro modo di descrivere il fenomeno consiste nell'affermare che la ruota esercita sul pavimento una forza d'attrito f in risposta alla forza applicata dall'uomo; la forza di reazione $-f$, esercitata dal pavimento sulla ruota, spinge avanti la carrozzella. Un ciclista si comporta in modo simile.

Dopo un lungo sforzo i muscoli dell'uomo in carrozzella o del ciclista si stancano e non riescono a mantenere a lungo il moto in salita. Arrivano prima o poi al punto che, spossati, si arrestano. Potremmo analizzare le forze che intervengono in questo problema basandoci sulle leggi di Newton, ma queste non ci spiegherebbero perché le forze dei protagonisti alla fine vengono meno. Potremmo dire che con l'approccio newtoniano *non siamo in grado* di considerare i muscoli come «contenitori» di una certa capacità di esercitare forze, capacità che si consuma e si esaurisce con l'uso.

Per un esame di questo tipo dobbiamo introdurre i nuovi concetti di *lavoro* ed *energia*. Come per tanti altri vocaboli utilizzati in fisica per designare i concetti, occorre fare attenzione a non confondere il loro significato nel linguaggio comune con quello delle grandezze fisiche che essi individuano. Il concetto *fisico* di lavoro comporta l'esistenza di una forza esercitata mentre il suo punto di applicazione si sposta; per quanto riguarda l'energia, possiamo definirla, tra

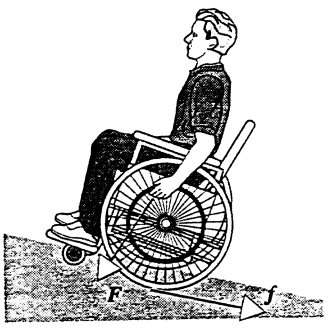


FIGURA 11.1 Un uomo spinge la sedia a rotelle in salita. La forza F esercitata sulle ruote dalle braccia applica un momento torcente rispetto al punto di contatto tra la ruota e il terreno.

 ISBN 88-408-1254-7

gli altri modi, come una misura della capacità di compiere lavoro. Nel caso dell'uomo in carrozzella, egli compie lavoro perché esercita una forza che si trasmette nel percorso di una certa distanza effettuato dalla carrozzella. Per svolgere questo lavoro egli deve spendere alcune delle sue riserve d'energia, nel caso specifico energia chimica contenuta nelle fibre muscolari, riserve che possono essere rifornite durante il riposo a spese di altre riserve immagazzinate nel suo corpo, le quali a loro volta sono alimentate, in ultima analisi, dal cibo che l'uomo ingerisce.

L'energia immagazzinata in un sistema può assumere varie forme: chimica, elettrica, gravitazionale, meccanica, ecc. In questo capitolo affronteremo lo studio dei rapporti che intercorrono tra il lavoro e un particolare genere di energia, l'energia legata al moto di un corpo, che chiamiamo *energia cinetica*.

11.2 LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA COSTANTE

La Figura 11.2a mostra un blocco di massa m che viene sollevato di un'altezza h mediante un verricello azionato da un motore. Il sollevamento del blocco avviene a velocità costante, ed essendo quindi la sua accelerazione nulla, in base alla seconda legge di Newton anche la forza risultante che agisce sul blocco dev'essere nulla. Ne consegue che il modulo della tensione T applicata dalla corda al blocco deve eguagliare la forza di gravità mg che su di esso esercita la Terra.

Nella Figura 11.2b vediamo invece un nastro trasportatore, azionato da un motore, che trascina un blocco identico al precedente per una distanza L su un piano inclinato di un angolo θ rispetto al piano orizzontale. Di nuovo, essendo la velocità costante, nulla dev'essere ancora la forza netta agente sul blocco; se ne deduce che il modulo della forza F applicata dalla superficie del nastro nella direzione parallela al piano deve uguagliare la componente della forza peso $mg \sin\theta$ nella medesima direzione.

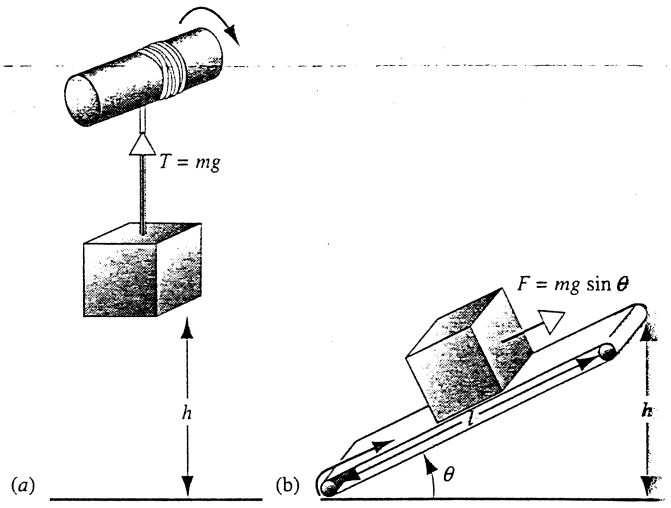


FIGURA 11.2 (a) Un verricello elettrico solleva un peso mg per un dislivello h. (b) Un nastro trasportatore eleva un peso identico lungo un piano inclinato fino a raggiungere un medesimo dislivello h.

In entrambi i casi otteniamo uno stesso risultato: il blocco viene sollevato di un'altezza h. Se lo lasciamo cadere, giungerà a terra con una determinata velocità v. Potremmo utilizzare questa caduta per piantare un picchetto nel terreno o per azionare una catapulta. Questo scopo verrebbe comunque raggiunto nella stessa misura, indipendentemente da come il blocco era stato inizialmente sollevato.

Se invece, una volta sollevato il blocco, fermiamo i motori e lo ancoriamo, resterà sospeso nella sua posizione. Ciò significa che consumiamo carburante o energia elettrica soltanto durante la fase di sollevamento, non per mantenerlo fermo in una data posizione. *L'investimento energetico si esplica nel sollevarlo, non nel reggerlo.*

Data una forza costante F che provoca lo spostamento s, nella stessa direzione, di un corpo, definiamo il lavoro svolto L come il prodotto delle loro intensità:

$$L = Fs \qquad \text{(forza costante, } F \| s\text{)}. \qquad (11.1)$$

Nella Figura 11.2a il motore esercita una forza costante di modulo $T = mg$ per sollevare il blocco lungo uno spostamento di modulo h. Dato che la forza è applicata nella stessa direzione dello spostamento, in base all'Equazione 11.1 il lavoro compiuto dal motore è dato da $L = Th = mgh$. Nella Figura 11.2b il motore esercita una forza costante di modulo $F = mg \sin\theta$ per spostare il blocco di una distanza di modulo l nella stessa direzione. Il lavoro svolto dal motore è dunque $L = (mg \sin\theta)(l) = mgh$ ove abbiamo sostituito $h = l \sin\theta$. Non è una coincidenza che il lavoro svolto dai due motori nei due casi sia identico: per entrambi i processi i motori hanno speso la medesima quantità di «sforzo» (lavoro), come ha messo in evidenza il risultato raggiunto: i due blocchi nei due casi possono svolgere, cadendo, il medesimo compito.

In entrambi i casi descritti dalla Figura 11.2 la forza è esercitata parallelamente allo spostamento del blocco. Supponiamo invece che un operaio, per spingere la cassa su per il piano inclinato, eserciti una forza F orizzontale, come illustrato in Figura 11.3. Ora la forza e lo spostamento hanno due diverse direzioni. Osserviamo però che la componente della forza parallela al piano e quindi al moto, $F \cos\theta$, è la sola a svolgere il lavoro di sollevamento, mentre la componente perpendicolare, $F \sin\theta$, non contribuisce minimamente all'azione di spostamento.

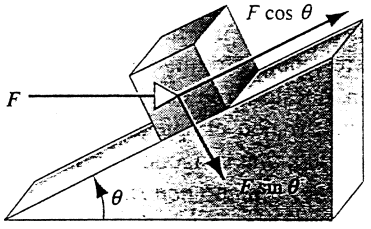


FIGURA 11.3 Esercitando una forza F orizzontale sul blocco lo si spinge su per il piano inclinato.

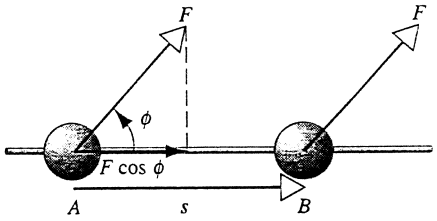


FIGURA 11.4 Una biglia scorre lungo una guida rettilinea dal punto A al punto B sotto l'effetto di una forza F inclinata di un angolo ϕ, che agisce costantemente lungo tutto il tragitto.

Consideriamo il caso generico illustrato nella Figura 11.4. Una biglia scorre senza attrito su su una guida orizzontale. Si muove dal punto A al punto B, tragitto rappresentato dal vettore spostamento s. Un agente esterno esercita sulla biglia una forza $\boldsymbol{F}$ costante, la cui direzione forma un angolo ϕ con quella della guida e quindi di s. Contribuisce a compiere lavoro solo la componente della forza parallela al vettore spostamento, $F\cos\phi$, di modo che il lavoro svolto dalla forza $\boldsymbol{F}$ è

$$L = (F\cos\phi)s = Fs\cos\phi \qquad \text{(forza costante).} \quad (11.2)$$

L'Equazione 11.2 si riferisce al lavoro svolto da una singola forza $\boldsymbol{F}$. Su un corpo possono essere molte le forze agenti; nell'esempio di Figura 11.3 c'è anche la forza normale N, la forza di gravità mg e la forza d'attrito f. Il lavoro va calcolato separatamente per ciascuna delle forze coinvolte.

Osserviamo alcune caratteristiche dell'Equazione 11.2:

1. A $F = 0$ corrisponde $L = 0$. Se vogliamo ottenere lavoro la forza non può essere nulla.
2. A $s = 0$ corrisponde $L = 0$. Se vogliamo ottenere lavoro il corpo soggetto alla forza deve muoversi di una distanza non nulla.
3. A $\phi = 90°$ corrisponde $L = 0$. Se vogliamo ottenere lavoro la forza applicata deve avere una componente non nulla nella direzione del moto. Una forza che agisce perpendicolarmente alla direzione dello spostamento non compie lavoro.
4. Per $\phi = 0°$, si ha $L = Fs$. Quando forza e spostamento sono paralleli, l'Equazione 11.2 si riduce alla (11.1).
5. Per $\phi = 180°$, si ha $L = -Fs$. Se forza e spostamento sono di verso discorde, e in questo particolare caso opposto, il lavoro svolto è *negativo*. Per esempio, nella Figura 11.2a la forza gravitazionale mg (non disegnata) agisce sul blocco rivolta verso il basso. Quando il blocco sale di una lunghezza h, il lavoro svolto su di esso da questa forza è negativo ed esattamente pari a $-mgh$.

Un'applicazione di questi concetti è illustrata nella Figura 11.5. Il blocco della Figura 11.5a scivola giù per un piano inclinato. La forza gravitazionale mg compie su di esso lavoro positivo, la forza d'attrito f compie lavoro negativo, mentre il lavoro svolto dalla forza normale N è nullo. Nell'esempio di Figura 11.5b la tensione $\boldsymbol{T}$ nella corda non è una forza costante, perché cambia continuamente di direzione anche se il suo modulo resta magari costante. Tuttavia, immaginando il percorso circolare come suddiviso in una serie di spostamenti infinitesimi, possiamo considerare $\boldsymbol{T}$ costante anche in direzione, limitatamente a ogni segmento infinitesimo tangente alla circonferenza, e osservare che questa forza di tensione è comunque sempre perpendicolare alla direzione del moto. Di conseguenza il lavoro svolto dalla tensione $\boldsymbol{T}$ è nullo.

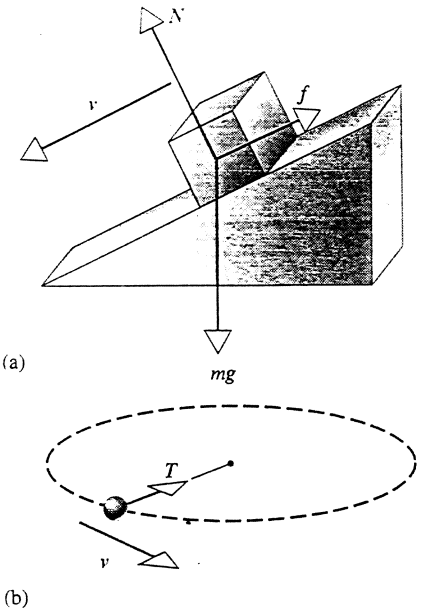


FIGURA 11.5 (a) Un blocco scivola giù per un piano inclinato. Su di esso agiscono tre forze: la gravità terrestre (mg), l'attrito con la superficie (f) e la forza normale esercitata dal piano (N). (b) Un corpo attaccato a una corda ruota su una circonferenza orizzontale sotto l'effetto della sola forza di tensione $\boldsymbol{T}$.

Da notare che possiamo scrivere l'Equazione 11.2 sia come $(F\cos\phi)(s)$ sia come $(F)(s\cos\phi)$. Possiamo cioè calcolare il lavoro in due modi differenti con il medesimo risultato: moltiplicare il modulo dello spostamento per la componente della forza parallela alla direzione dello spostamento, oppure moltiplicare il modulo della forza per la componente dello spostamento parallela alla direzione della forza. Questo ci aiuta anche a ricordare un'importante peculiarità nella definizione del lavoro: la componente di s nella direzione di $\boldsymbol{F}$ non dev'essere nulla, come non dev'essere nulla la componente di $\boldsymbol{F}$ nella direzione di s (Figura 11.6); altrimenti il lavoro è zero.

Il lavoro, come lo abbiamo definito con l'Equazione 11.2, promette di essere uno strumento utile in fisica. La definizione che abbiamo dato di *lavoro* non corrisponde al concetto che comunemente ci richiama il vocabolo nel linguaggio colloquiale di tutti i giorni. Ciò può portare confusione. Una persona che regge un peso in aria (Figura 11.7) deve sopportare anche molta fatica e svolgere un enorme «lavoro» nel senso fisiologico del termine, ma dal punto di vista fisico questa persona sul peso non compie assolutamente alcun lavoro. È una conseguenza del fatto che il peso sta fermo.

 ISBN 88-408-1254-7

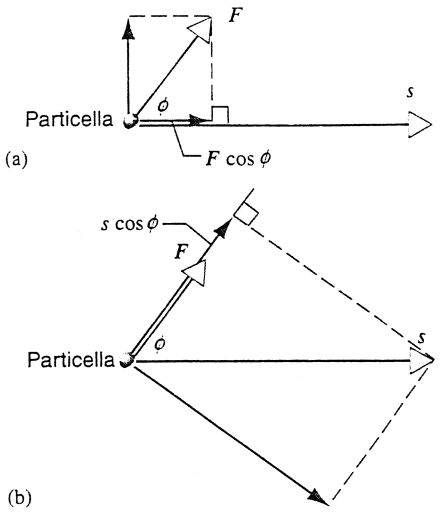


FIGURA 11.6 (a) Il lavoro svolto dalla forza F su una particella, interpretato come $L = (F\cos\phi)(s)$. (b) Il medesimo lavoro interpretato come $L = (F)(s\cos\phi)$.

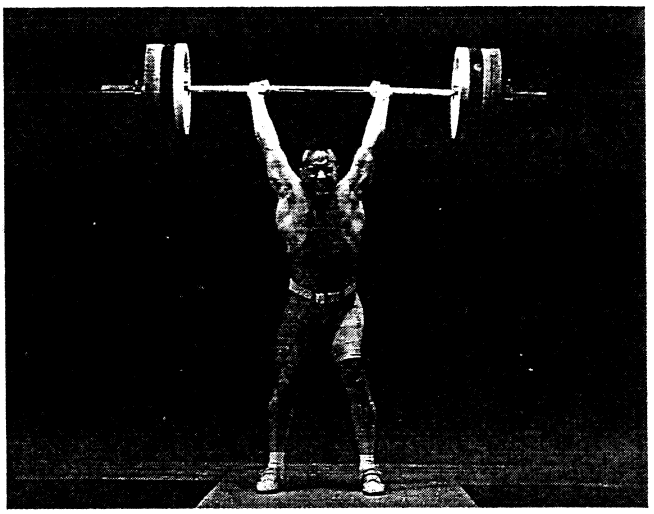


FIGURA 11.7 Un sollevatore di pesi sostiene il manubrio sopra la testa. In questa posizione egli non compie alcun lavoro, nel senso in cui l'abbiamo definito.

Perché mai allora il sollevatore di pesi si stanca rapidamente ed esaurisce in fretta la sua capacità di mantenere il peso sollevato? Esaminando la struttura muscolare da vicino ci accorgiamo che, anche se il peso non si muove, viene svolto lavoro su scala microscopica. Il muscolo non è un supporto rigido e non può reggere un carico in maniera statica. Per fare ciò le singole fibre muscolari si contraggono e si rilassano continuamente, compiendo lavoro ad ogni contrazione. Questo lavoro microscopico attinge alla riserva interna di energia determinandone un impoverimento che finisce per dare la sensazione di stanchezza e per raggiungere l'inabilità a mantenere la posizione di sostegno. In questo contesto non teniamo conto di tale forma «interna» di lavoro e usiamo il termine *lavoro* solo nel senso stretto definito dall'Equazione 11.2. La mancanza di movimento del corpo soggetto a una forza determina la mancanza di lavoro svolto da questa forza.

Si noti che il lavoro, a differenza di altre proprietà come la massa, il volume o la temperatura, non è una proprietà intrinseca di un corpo. Non possiamo dire per esempio che un dato corpo guadagna, perde o contiene una certa quantità di lavoro, quando si muove sotto l'effetto di una certa forza. Il lavoro è associato alla forza che agisce su un corpo.

L'unità di misura del lavoro si definisce in base al lavoro svolto da un'unità di forza nello spostare un corpo di un'unità di lunghezza lungo la direzione della forza. L'unità SI è quindi il newton · metro, che viene chiamato *joule* (abbreviato in J). Nel sistema CGS l'unità dina · centimetro prende il nome di *erg*. Facile verificare che $1\ \text{J} = 10^7$ erg.

Nel trattare particelle atomiche e subatomiche si trova conveniente utilizzare per il lavoro un'unità di misura particolare chiamata *elettronvolt* (abbreviata in eV). Il rapporto di conversione con l'unità SI è: $1\ \text{eV} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J. Il lavoro richiesto per rimuovere un elettrone dall'atomo cui appartiene è, in valore assoluto, dell'ordine di qualche eV. Il lavoro richiesto per strappare un protone o un neutrone dalla sua sede nucleare è dell'ordine di qualche MeV (10^6 eV). Il lavoro richiesto per accelerare un elettrone nell'acceleratore lineare di Stanford, lungo 3,2 km, è di parecchi GeV (10^9 eV). Il lavoro richiesto per accelerare un protone nell'acceleratore del CERN a Ginevra è dell'ordine di 1 TeV (10^{12} eV).

PROBLEMA SVOLTO 11.1 Un blocco di massa $m = 11{,}7$ kg viene spinto su lungo un piano inclinato per una lunghezza $s = 4{,}65$ m pari a un dislivello verticale $h = 2{,}86$ m (Figura 11.8a). Trascurando la forza d'attrito, calcolare il lavoro richiesto applicando una forza parallela al piano inclinato, che mantenga costante la velocità del blocco.

Soluzione La Figura 11.8b presenta il diagramma delle forze relativo al blocco. Dobbiamo trovare dapprima F, il modulo della forza che spinge il blocco. Dato che l'accelerazione è nulla (la velocità è stata imposta costante dal problema) la componente della forza netta parallela al piano dev'essere zero. Scegliamo l'asse x parallelo alla superficie inclinata orientato verso l'alto. La compo-

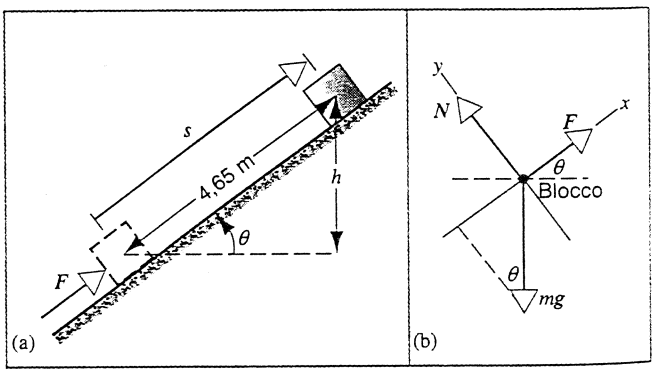


FIGURA 11.8 Problema svolto 11.1. (a) Una forza F sposta un blocco di una lunghezza s su un piano inclinato. (b) Diagramma delle forze per il blocco.

nente lungo l'asse x della forza netta è $\sum F_x = F - mg \sin\theta$. Se $a_x = 0$ per la seconda legge di Newton abbiamo $F - mg\sin\theta = 0$, ossia

$$F = mg \sin\theta = (11.7\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)\left(\frac{2{,}86\text{ m}}{4{,}65\text{ m}}\right) = 70{,}5\text{ N}.$$

Il lavoro svolto dalla forza F, ponendo $\phi = 0°$ nell'Equazione 11.2, è dato da

$$L = Fs\cos 0° = (70{,}5\text{ N})(4.65\text{ m}) = 328\text{ J}.$$

Osservate che l'angolo ϕ adottato (0°) è l'angolo tra la direzione della forza e quella dello spostamento, entrambe parallele al piano inclinato. L'angolo ϕ non va confuso con l'angolo θ d'inclinazione del piano.

Se avessimo dovuto sollevare il blocco verticalmente a velocità costante, il lavoro richiesto sarebbe risultato dal prodotto tra la componente verticale della forza esercitata sul blocco, pari a mg, e il dislivello verticale, pari ad h, ossia

$$L = mgh = (11.7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2{,}86\text{ m}) = 328\text{ J},$$

uguale al valore precedente. La sola differenza tra i due casi è la presenza del piano inclinato che permette di applicare una forza meno intensa (70,5 N) di quella necessaria senza l'ausilio del piano inclinato (115 N). Per contro però nel primo caso occorre far percorrere al blocco una distanza sul piano inclinato (4,65 m) maggiore di quella che percorrerebbe verticalmente (2,86 m).

PROBLEMA SVOLTO 11.2 Un bambino tira il suo slittino di massa 5,6 kg a velocità costante per una lunghezza s = 12 m su un piano orizzontale. Se la direzione della corda forma un angolo $\phi = 45°$ con il piano orizzontale e il coefficiente d'attrito dinamico è μ_k = 0,20, quanto lavoro compie il bambino sulla slitta?

Soluzione La Figura 11.9a illustra la scena e la Figura 11.9b riporta il diagramma delle forze relativo allo slittino. Chiamiamo F la forza applicata dal bambino, mg il peso dello slittino, f la forza d'attrito ed N la forza normale esercitata sulla slitta dalla superficie. Dapprima dobbiamo trovare il modulo di F. Assumendo le coordinate come nella Figura 11.9b, le componenti della forza netta sono $\sum F_x = F\cos\phi - f$ e $\sum F_y = F\sin\phi + N - mg$.

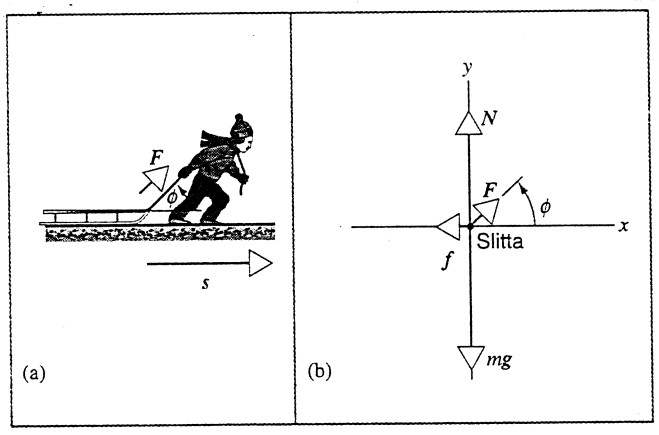


FIGURA 11.9 Problema svolto 11.2. (a) Un bambino tira una slitta per uno spostamento s applicando una forza F alla corda che forma un angolo ϕ con il piano orizzontale. (b) Diagramma delle forze per la slitta.

Ponendo nulla l'accelerazione per entrambe le componenti, in base alla seconda legge di Newton abbiamo

$$F\cos\phi - f = 0 \quad \text{e} \quad F\sin\phi + N - mg = 0.$$

Ma la forza d'attrito è legata alla forza normale dalla relazione $f = \mu_k N$ e, combinando queste tre equazioni per eliminare f ed N, troviamo l'espressione di F:

$$F = \frac{\mu_k mg}{\cos\phi + \mu_k \sin\phi}.$$

Ponendo $\mu_k = 0{,}20$, $mg = (5{,}6\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2) = 55\text{ N}$ e $\phi = 45°$, otteniamo

$$F = \frac{(0{,}20)(55\text{ N})}{\cos 45° + (0{,}20)(\sin 45°)} = 13\text{ N}.$$

Calcoliamo ora il lavoro compiuto dal bambino sulla slitta valendoci dell'Equazione 11.2, in cui s = 12 m:

$$L = Fs\cos\phi = (13\text{ N})(12\text{ m})(\cos 45°) = 110\text{ J}.$$

La componente verticale di F non compie lavoro sullo slittino. Tuttavia essa riduce la forza normale tra slittino e superficie d'appoggio ($N = mg - F\sin\phi$), diminuendo così la forza d'attrito ($f = \mu_k N$).

Se il bambino applicasse la forza F in direzione orizzontale anziché inclinata di 45°, compirebbe sullo slittino un lavoro maggiore, minore o uguale? C'è qualche altra forza che svolge lavoro sulla slitta?

Lavoro espresso mediante il prodotto scalare

Il lavoro è una grandezza scalare: è caratterizzato solo da un'intensità che può essere positiva o negativa. La sua espressione tuttavia è data dalla combinazione di due vettori (F ed s). Nei Capitoli dall'8 al 10 ci siamo trovati spesso nelle condizioni di moltiplicare fra loro due vettori, ciò che abbiamo visto in quei casi dar luogo a un *prodotto vettoriale* (per esempio, $\tau = r \times F$ oppure $l = r \times p$). In questo caso invece la moltiplicazione di due vettori ha per risultato uno scalare. Quest'altro tipo di moltiplicazione tra vettori prende il nome di *prodotto scalare*.

Consideriamo i due vettori A e B (Figura 11.10) le cui direzioni formano un angolo ϕ. Si definisce prodotto scalare dei vettori A e B la quantità scalare data da

$$A \cdot B = Ab\cos\phi, \qquad (11.3)$$

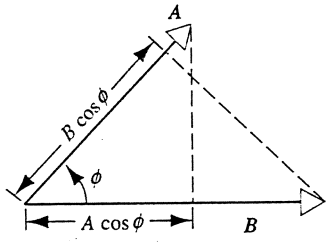


FIGURA 11.10 Il prodotto scalare di due vettori A e B può considerarsi come il prodotto tra il modulo del primo vettore e la componente del secondo nella direzione del primo.

 ISBN 88-408-1254-7

e di solito si legge in forma colloquiale "A scalar B". Possiamo scrivere questa espressione sia come $A(B\cos\phi)$ sia come $B(A\cos\phi)$, mettendo in evidenza che il prodotto scalare può considerarsi come il prodotto tra il modulo di un vettore e la componente del secondo lungo la direzione del primo, o viceversa. Si confronti il disegno di Figura 11.10. I moduli A e B sono sempre positivi, ma il prodotto scalare può essere anche negativo secondo il segno del fattore trigonometrico e quindi secondo il valore dell'angolo ϕ. Se A e B sono perpendicolari tra di loro ($\phi = 90°$) il prodotto scalare è nullo. A differenza di quanto succede con il prodotto vettoriale, nel prodotto scalare l'ordine fattoriale dei due vettori non ha importanza: $A \cdot B = B \cdot A$. Si osservi infine che il prodotto scalare di un vettore per se stesso equivale al quadrato del suo modulo: $A \cdot A = A^2$.

Queste proprietà del prodotto scalare coincidono esattamente con le proprietà della grandezza lavoro in relazione ai vettori che lo definiscono, F ed s. Di conseguenza possiamo scrivere l'Equazione 11.2 come

$$L = F \cdot s \qquad \text{(forza costante)}. \tag{11.4}$$

Esprimendo i vettori scomposti nelle loro componenti vettoriali ($A = A_x i + A_y j + A_z k$ e $B = B_x i + B_y j + B_z k$), il prodotto scalare si scrive

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z . \tag{11.5}$$

Lo si verifica calcolando i prodotti scalari dei vettori unitari in base all'Equazione 11.3: $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ e $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$. Se i vettori forza e spostamento giacciono entrambi sul piano xy, possiamo esprimere il lavoro nella forma espressa dall'Equazione 11.5, ponendo $F = F_x i + F_y j$ ed $s = \Delta x i + \Delta y j$:

$$L = F_x \Delta x + F_y \Delta y \qquad \text{(forza costante)}. \tag{11.6}$$

I due addendi a secondo membro non sono interpretabili come componenti del lavoro. Il lavoro è uno *scalare* e gli scalari *non presentano componenti*. Dalla (11.6) si potrebbe trarre l'impressione che il lavoro dipenda dalla scelta degli assi coordinati: non è così, come si deduce dall'Equazione 11.2. Il *prodotto scalare è indipendente dalla scelta degli assi coordinati*.

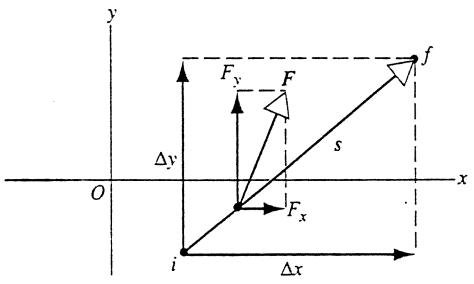


FIGURA 11.11 Per effetto della forza F una particella si muove dalla posizione iniziale i alla posizione finale f attraverso uno spostamento s. Assegnate ai vettori le due rispettive direzioni, in generale il lavoro svolto sulla particella si trova scomponendo i vettori nelle loro componenti lungo x e y.

Sebbene la forza F sia un'invariante (ha sempre lo stesso modulo, direzione e verso, in qualsiasi sistema di riferimento inerziale) lo spostamento s realizzato da una particella in un certo intervallo di tempo non è invariante. Osservatori di diversi sistemi inerziali misurano tutti la stessa forza F, ma in genere non concordano sul modulo e la direzione dello spostamento s. Ne consegue che il valore calcolato per il lavoro dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore. Osservatori diversi possono trovare che un certo lavoro è positivo, negativo o nullo. Ne discuteremo al Paragrafo 11.6.

11.3 POTENZA

Nella progettazione di sistemi meccanici è spesso importante sapere non solo quanto lavoro dovrà essere svolto, ma anche quanto rapidamente bisognerà svolgerlo. Per sollevare un corpo di una determinata altezza, che lo si faccia in un secondo oppure in un anno, il lavoro richiesto è sempre lo stesso, ma la *rapidità di svolgimento* del lavoro cambia parecchio nei due casi.

Chiamiamo potenza il rapporto temporale di svolgimento del lavoro. Per il momento ci riferiamo alla sola potenza meccanica, che riguarda il lavoro meccanico. Una definizione più generale, che considera la potenza come energia trasferita nell'unità di tempo, ci permetterà in seguito di estendere il concetto fino a comprendere la potenza connessa con il lavoro elettrico, o con qualsiasi altro tipo di energia, quale per pro esempio l'energia solare. Data una certa forza che compie il lavoro L su un corpo nel tempo t, la *potenza media* legata all'azione di quella forza è data da

$$\overline{P} = \frac{L}{t}. \tag{11.7}$$

La *potenza istantanea* P è invece definita come

$$P = \frac{dL}{dt}, \tag{11.8}$$

ove dL rappresenta la quantità elementare di lavoro svolto nel tempo infinitesimo dt. Se la potenza è costante, si ha $P = \overline{P}$ e quindi

$$L = Pt. \tag{11.9}$$

L'unità di misura della potenza nel SI è il joule/secondo, che prende il nome di *watt* (abbreviato in W):

$$1\ \text{W} = 1\ \text{J/s}.$$

Questo nome è un riconoscimento all'opera di James Watt (1736-1819), un ingegnere scozzese che diede il massimo contributo allo sviluppo delle macchine a vapore. Nel sistema inglese è definita l'unità *horsepower* (hp), definita come 550 piedi per libbre al secondo (ft · lb/s), che equivale a circa 746 W. Un'unità che ha avuto larga diffusione in passato, ma incoerente col Sistema Internazionale, è il cavallo-vapore (CV), definito come (75 kg)(9,8 m/s^2)(1 m)/(1 s) = 735 W, un valore vicino a quello di 1 hp.

Si può esprimere l'unità di lavoro come un'unità di potenza moltiplicata per un'unità di tempo. È questa l'origine dell'unità di lavoro o di energia *wattora* (Wh), di cui nel settore elettrico è molto usato il multiplo *kilowattora*. 1 kWh equivale a 3,6 MJ.

La potenza sviluppata su un corpo può considerarsi anche come il prodotto della velocità del corpo per la forza esercitata su di esso. Se in un tempo infinitesimo dt il corpo subisce lo spostamento ds sotto l'effetto della forza $\boldsymbol{F}$, si ha $dL = \boldsymbol{F} \cdot ds$ e l'Equazione 11.8 si può riscrivere come

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot ds}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \frac{ds}{dt},$$

che, sostituendo $v = ds/dt$, diventa

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{11.10}$$

Nel caso che i vettori $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{v}$ siano paralleli, l'equazione precedente si riduce a

$$P = Fv. \tag{11.11}$$

Si noti che la potenza può assumere valori negativi quando i vettori $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{v}$ sono discordi tra loro. Questa circostanza significa che il lavoro svolto è negativo: la forza esercitata sul corpo ha il verso discorde da quello dello spostamento subito dal corpo stesso.

PROBLEMA SVOLTO 11.3 Un ascensore ha la cabina che pesa, vuota, 5160 N. Può portare al massimo 20 persone e percorre l'intero tragitto fino al 25° piano in 18 s. Ipotizzando un peso medio per persona di 710 N, una distanza interpiano di 3,5 m e che l'ascensore sia privo di contrappeso (di modo che il lavoro del motore sia interamente speso per il sollevamento), calcolare la potenza media sviluppata dal motore.

Soluzione Assumiamo che il moto dell'ascensore avvenga a velocità costante ignorando le fasi di accelerazione e rallentamento. In tal situazione accelerazione e forza risultante sono nulle, e quindi la forza applicata dal motore verso l'alto eguaglia in modulo il peso complessivo dell'ascensore: $F = 5160\ \text{N} + 20(710)\ \text{N} = 19\,400\ \text{N}$. Il lavoro da compiere è dunque

$$L = Fs = (19\,400\ \text{N})(25 \cdot 3{,}5\ \text{m}) = 1{,}7 \cdot 10^6\ \text{J}.$$

La potenza media risulta quindi

$$\overline{P} = \frac{L}{t} = \frac{1{,}7 \cdot 10^6\ \text{J}}{18\ \text{s}} = 94\ \text{kW},$$

pressappoco la potenza erogata dal motore di una grossa automobile. In più nella pratica occorrerà aggiungere la potenza dissipata in forze d'attrito e altre inefficienze.

Di fatto gli ascensori sono normalmente dotati di un contrappeso, che scende durante la salita della cabina e viceversa. La gravità svolge lavoro *positivo* sul contrappeso che scende, mentre il lavoro che svolge sulla cabina in salita è *negativo*. Questo secondo lavoro in condizioni normali è, in modulo, superiore al primo, sicché complessivamente la gravità compie sul sistema globale un lavoro *netto* negativo di modulo molto minore di quello che compirebbe il peso della cabina da solo. Così facendo il lavoro richiesto al motore, uguale al modulo del lavoro netto svolto dalla gravità, risulta molto minore di quello qui calcolato.

11.4 LAVORO SVOLTO DA FORZE VARIABILI

Abbiamo finora considerato il lavoro svolto da una forza *costante*. Molte delle forze passate in rassegna, al muoversi del corpo su cui agiscono, non cambiano alcuno dei loro attributi vettoriali. La gravità in vicinanza della superficie terrestre costituisce un buon esempio. Molte altre forze purtroppo, al muoversi del corpo, si modificano in modulo e/o direzione; vediamo come analizzare il lavoro svolto da queste forze. Restiamo nel caso unidimensionale in cui la forza presenta solo la componente x non nulla e in cui il moto della particella si svolge lungo l'asse x. Dapprima esponiamo il procedimento generale per l'analisi del lavoro svolto da una forza variabile e poi l'applichiamo a un'importante classe di forze che non abbiamo ancora considerato, le forze elastiche esercitate dalle molle.

Supponiamo che il corpo si muova sull'asse x dal punto x_i al punto x_f mentre è soggetto a una forza $F_x(x)$. Con quest'ultima scrittura intendiamo dire che la forza varia in modulo e/o in direzione man mano che il corpo cambia la sua posizione. Suddividiamo l'intervallo tra x_i e x_f in un gran numero di intervalli più piccoli e supponiamo che entro ogni intervallo la forza possa considerarsi costante (anche se diversa da intervallo a intervallo). Per ogni intervallo saremo così in grado di calcolare il lavoro col metodo sviluppato nei paragrafi precedenti per forze costanti. Potremo poi stringere ulteriormente gli intervalli elementari fino a renderli infinitesimi e affrontare il calcolo con i metodi dell'analisi infinitesimale.

La curva tracciata nei diagrammi di Figura 11.12 descrive l'andamento di una forza generica $F_x(x)$ agente su un corpo al variare della sua posizione da x_i a x_f. Dividiamo lo spostamento totale in un certo numero N di intervallini uguali δx (Figura 11.12a). Osserviamo il primo, relativo a uno spostamento elementare da x_i a $x_i + \delta x$. L'intervallo spaziale è così piccolo che la forza assume entro questo intervallo un valore pressoché costante, pari a F_1. L'Equazione 11.6 ci dà il lavoro ΔL_1 compiuto dalla forza in quell'intervallo: $\delta L_1 = F_1 \delta x$. Similmente nel secondo intervallo tra $x_i + \delta x$ e $x_i + 2\delta x$, in cui la forza si assume costante di valore F_2, il lavoro svolto sarà $\delta L_2 = F_2 \delta x$. Ripetendo il calcolo per tutti gli N intervalli, potremo trovare il lavoro totale sommando i contributi di ogni singolo intervallo:

$$L = \delta L_1 + \delta L_2 + \delta L_3 + \cdots =$$
$$= F_1 \delta x + F_2 \delta x + F_3 \delta x + \cdots$$

ossia

$$L = \sum_{n=1}^{N} F_n \delta x. \tag{11.12}$$

Per migliorare l'approssimazione possiamo suddividere lo spostamento totale da x_i a x_f in un numero maggiore di intervalli elementari, come in Figura 11.12b, in modo da rendere ancor più piccola la lunghezza δx e quindi ancor minore l'escursione possibile del valore di $F_x(x)$ attorno al

 ISBN 88-408-1254-7

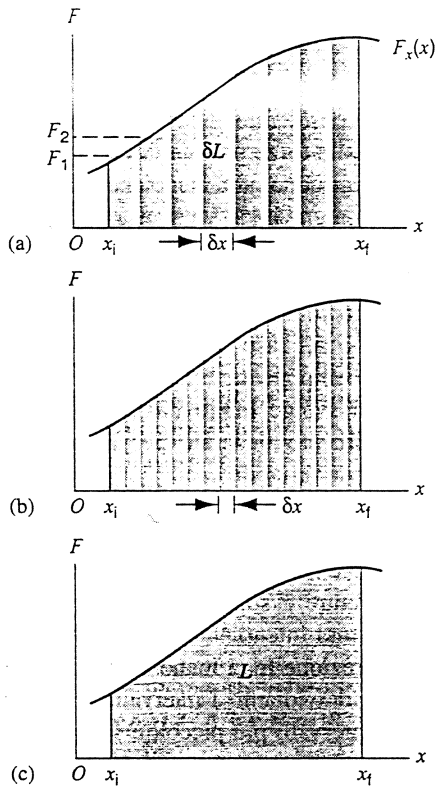


FIGURA 11.12 (a) L'area sottesa dalla curva che descrive l'andamento di una forza variabile unidimensionale $F_x(x)$ può essere approssimata dividendola, entro gli estremi x_i e x_f, in molti intervalli elementari di larghezza δx. La somma delle aree di tutte le strisce così ottenute è circa uguale all'area sottesa dalla curva. (b) Aumentando il numero delle strisce si migliora l'approssimazione. (c) Al limite in cui $\delta x \to 0$, si ottiene l'area esatta.

valore F_n rappresentativo per ogni intervallo. È chiaro che il miglioramento progredisce quanto più piccoli e numerosi diventano gli intervalli elementari, e che quindi otterremo un risultato esatto facendo tendere δx a zero ed N all'infinito:

$$L = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n \, \delta x. \tag{11.13}$$

Questa espressione equivale all'integrale di F_x rispetto a x esteso all'intervallo tra x_i e x_f:

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n \, \delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) \, dx.$$

Numericamente questa quantità equivale all'area sottesa tra la curva e l'asse x tra gli estremi x_i e x_f (Figura 11.12c). Un integrale può infatti interpretarsi graficamente come un'area. In definitiva possiamo esprimere il lavoro totale svolto dalla forza F_x nello spostamento del corpo da x_i a x_f come

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) \, dx. \tag{11.14}$$

Il segno di L nella (11.14) resta automaticamente determinato dal segno di F_x e dall'ordine degli estremi x_i e x_f. Per esempio, se F_x è sempre positiva e se la particella avanza concordemente all'asse x ($x_f > x_i$), L risulterà positivo.

Lavoro svolto da una forza elastica

Come esempio di forza variabile unidimensionale consideriamo la forza elastica esercitata da una molla allungata o compressa. La Figura 11.13 presenta un blocco attaccato a una molla. In mancanza di forze applicate la molla sta nella sua posizione di *riposo* e il blocco si trova nel punto che definiamo $x = 0$. Supponiamo ora che al corpo si applichi una forza $\boldsymbol{F}_{ext}$ che può allungare (Figura 11.13a) o comprimere (Figura 11.13b) la molla. La molla esercita allora una forza $\boldsymbol{F}_r$ che si oppone alla forza applicata. Questa forza $\boldsymbol{F}_r$ si chiama spesso *forza di richiamo* della molla, perché il suo verso è sempre orientato in modo da tendere a ripristinare lo

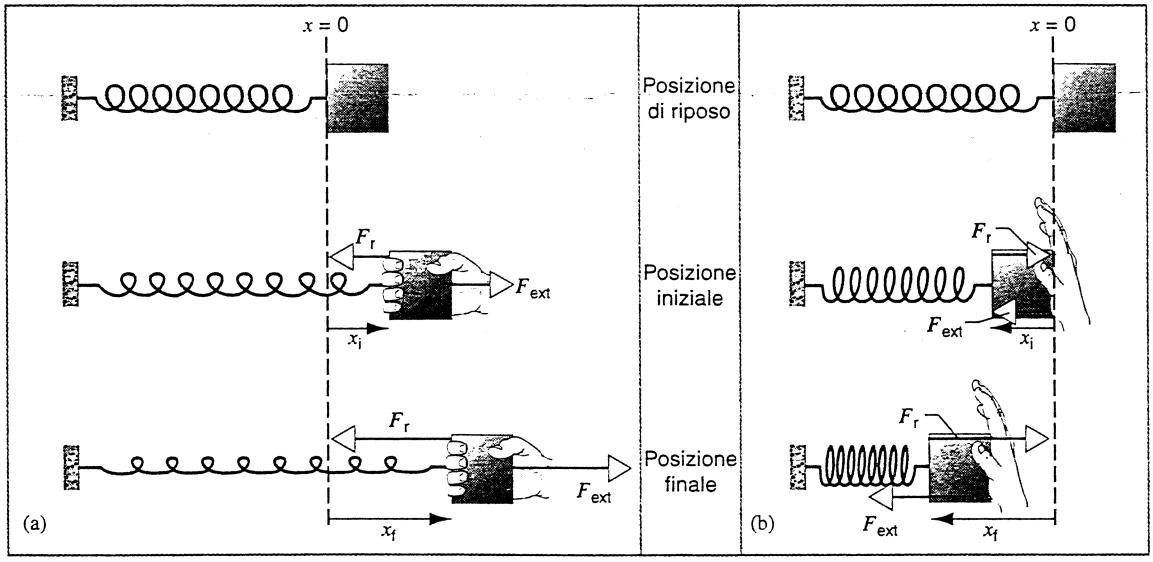


FIGURA 11.13 Un corpo attaccato a una molla si trova nella posizione $x = 0$ quando la molla è a riposo. Sotto l'azione di una forza esterna il blocco si muove da una posizione iniziale x_i a una posizione finale x_f. Si assume che l'asse x sia orientato verso destra. (a) Allungamento della molla. (b) Compressione della molla.

stato di riposo, cui corrisponde la posizione del blocco $x = 0$. Supponiamo che i movimenti siano lenti. in modo da poter ammettere che le forze siano sempre in equilibrio: $F_{ext} = -F_r$.

Quali sono le caratteristiche di questa forza di richiamo? Sperimentalmente ci accorgiamo che non è costante: quanto più il blocco è distante dalla posizione di riposo, tanto maggiore è la forza di richiamo; possiamo anche dire che la forza applicata per mantenere il blocco in equilibrio è tanto più intensa quanto maggiore è l'allungamento o la compressione della molla. Per esperienza sappiamo poi che, per la maggior parte delle molle, il modulo della forza di richiamo in buona approssimazione è *proporzionale* alla distanza del blocco dalla posizione di riposo. In forma unidimensionale possiamo scrivere la componente x della forza di richiamo agente sul blocco come

$$F_r = -kx\,, \tag{11.15}$$

relazione nota come *legge di Hooke*. La costante k che compare in questa equazione prende il nome di *costante elastica* della molla o *costante della molla*. La sua unità di misura SI è il newton al metro (N/m). Dà l'idea della forza necessaria per allungare o comprimere una molla di una data lunghezza: quanto più è elevato il valore di k, tanto maggiore è la rigidità della molla. La (11.15) è valida entro certi limiti di allungamento o compressione, oltre i quali si eccedono le proprietà elastiche della molla.

Il segno meno presente nell'Equazione 11.15 pone in evidenza il fatto che il verso assunto da F_r sia sempre opposto a quello dello spostamento del blocco dall'origine $x = 0$, cui corrisponde la posizione di riposo della molla. Adottando le coordinate di Figura 11.13, se la molla è allungata, $x > 0$ ed F_r risulta negativo, rivelando che la forza è orientata verso sinistra. Viceversa accade se la molla è compressa, come in Figura 11.13b.

L'Equazione 11.14 è utile a calcolare il lavoro svolto dalla forza di richiamo per il caso, per esempio, della Figura 11.13a. Allunghiamo la molla da una posizione iniziale x_i a una posizione finale x_f. Il lavoro svolto sul blocco dalla forza di richiamo durante questo spostamento è

$$L_r = \int_{x_i}^{x_f} F_r\,dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = -\tfrac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2). \tag{11.16}$$

Da questa equazione si vede che, quando $x_f > x_i$, il lavoro svolto dalla molla è negativo, come nel caso della Figura 11.13a; il verso di F_r è opposto a quello dello spostamento, ciò che dà luogo a un valore di L negativo, in accordo con le considerazioni a commento dell'Equazione 11.2.

Se invece la forza esterna agisce in compressione come nella Figura 11.13b, x_i e x_f sono entrambi negativi, ma $|x_f| > |x_i|$ e nuovamente troviamo dall'Equazione 11.16 un valore di lavoro negativo. L'Equazione 11.16 è valida quindi in tutti casi. Si noti che, in base a questa equazione, il lavoro risulta nullo quando il blocco si muove da un punto $+x$ a un punto $-x$ di ugual modulo. Riuscite a spiegare perché, con riferimento alla forza di richiamo?

Se l'allungamento o la compressione hanno inizio dalla posizione di riposo ($x = 0$), uno spostamento pari a x dà luogo a un lavoro

$$L_r = -\tfrac{1}{2}kx^2\,. \tag{11.17}$$

Considerato che x nell'Equazione 11.17 compare al quadrato, il lavoro svolto dalla forza di richiamo è il medesimo sia in modulo sia in segno per un allungamento o una compressione di una stessa distanza di modulo x.

Dato che $F_{ext} = -F_r$ il lavoro svolto sul blocco dalla forza esterna è positivo quando il lavoro della forza di richiamo è negativo, e viceversa. In entrambi casi di Figura 11.13 dunque risulta $L_{ext} > 0$.

La Figura 11.14 riporta un diagramma analogo a quello della Figura 11.12, ma relativo alla forza di richiamo. Le aree colorate rappresentano il lavoro negativo compiuto sul blocco dalla forza di richiamo per i due casi illustrati nella Figura 11.13. Con una valutazione geometrica dovreste essere in grado di verificare che queste aree corrispondono al lavoro calcolato con l'Equazione 11.16 e che i segni sono corretti.

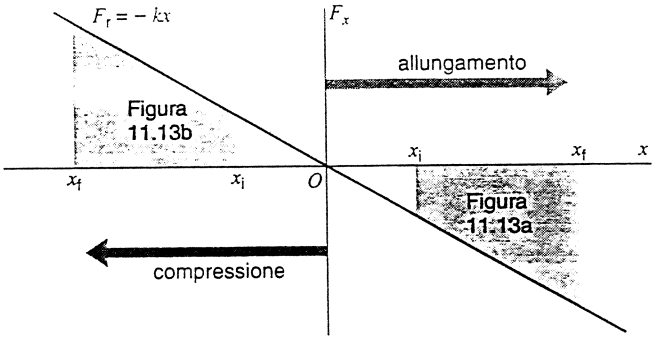


FIGURA 11.14 Il lavoro svolto dalla forza elastica di una molla su un corpo in moto da x_i a x_f è uguale all'area compresa tra l'asse delle ascisse e la funzione $F_r = -kx$, tra gli estremi x_i e x_f. Le aree colorate rappresentano il lavoro negativo svolto dalla molla nelle Figure 11.13a e 11.13b.

PROBLEMA SVOLTO 11.4 Una molla è appesa verticalmente al soffitto nel suo stato di riposo. Si aggancia alla molla un blocco di massa m = 6,40 kg, sostenendolo però inizialmente in modo che la molla non subisca allungamento, come illustrato in Figura 11.15. Ora la mano che lo sostiene viene abbassata lentamente in maniera che il blocco scenda a velocità costante fino a che si trovi nella posizione di equilibrio statico e il sostegno della mano possa essere rimosso. In questo stato la molla si è allungata di una distanza d = 0,124 m dalla posizione di riposo. Trovare il lavoro svolto sul blocco in tutto il processo (a) dalla forza di gravità, (b) dalla forza di richiamo della molla e (c) dalla forza applicata dalla mano.

Soluzione (a) La costante elastica della molla si può ricavare dalle condizioni di equilibrio. Fissato l'asse x lungo l'asse verticale rivolto verso l'alto, la componente y della forza risultante all'equilibrio è (Figura 11.15b) $\sum F_y = kd - mg$. Ma all'equilibrio questa forza è nulla e quindi $kd = mg$, ossia

$$k = mg/d = (6{,}40\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)/(0{,}124\text{ m}) = 506\text{ N/m}\,.$$

 ISBN 88-408-1254-7

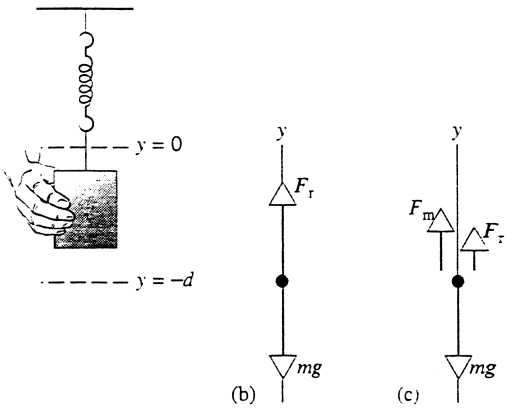


FIGURA 11.15 Problema svolto 11.4. (a) Una mano abbassa un blocco appeso a una molla. (b) Diagramma delle forze per il blocco nella posizione di equilibrio. (c) Diagramma delle forze per il blocco abbassato.

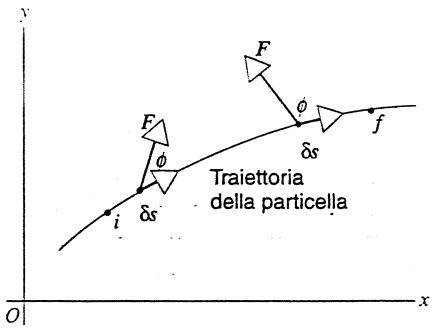


FIGURA 11.16 Una particella si muove dal punto i al punto f lungo la traiettoria disegnata. Durante il tragitto agisce su di essa una forza variabile sia in modulo sia in direzione. Il percorso è suddiviso in numerosi spostamenti elementari δs. Al tendere a zero di δs lo spostamento diventa infinitesimo e lo indichiamo con ds, che ha la direzione della velocità istantanea e quindi è tangente alla traiettoria.

Osservando che la gravità è una forza costante e che è diretta parallelamente al moto del blocco, per trovare il lavoro svolto da questa forza possiamo applicare l'Equazione 11.1:

$$L_g = Fs = mgd = (6{,}40\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(0{,}124\text{ m}) = +7.78\text{ J}.$$

È positivo perché la forza e lo spostamento sono concordi.

(b) Ponendo $x = -d$ nell'Equazione 11.17 possiamo trovare il lavoro di richiamo della molla:

$$L_r = -\tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}(506\text{ N/m})(0{,}124\text{ m})^2 = -3{,}89\text{ J}.$$

È negativo perché forza e spostamento hanno versi opposti.

(c) Venendo alla forza applicata dalla mano, non conosciamo il valore di questa forza F_m. Osserviamo però che il blocco viene abbassato a velocità costante, per cui $a_y = 0$. In base al diagramma delle forze rappresentato nella Figura 11.15c, la componente y della forza netta è data da $\sum F_y = F_r + F_m - mg$, da cui $F_m = mg - F_r$. Finché il blocco non raggiunge la posizione d'equilibrio, $mg > F_r$ e quindi $F_m > 0$, come è logico aspettarsi (F_m ha la componente y positiva perché è rivolta verso l'alto). Possiamo ora calcolare il lavoro svolto dalla mano mediante un'integrazione, come quella dell'Equazione 11.14, in cui poniamo $F_m = mg - (-ky)$:

$$L_m = \int_0^{-d} F_m(y)\,dy = \int_0^{-d} (mg + ky)\,dy = mg(-d) + \tfrac{1}{2}k(-d)^2 = -3{,}89\text{ J}.$$

Si osservi che $L_r + L_g + L_m = 0$. Sapete spiegare perché?

11.5 LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA VARIABILE IN DUE DIMENSIONI (facoltativo)

La forza F che agisce su una particella può cambiare in direzione oltreché in modulo; la particella inoltre può muoversi su un percorso curvilineo oltreché lineare. Il calcolo del lavoro per questo caso più generale richiede di suddividere il percorso in un gran numero di spostamenti elementari δs, ciascuno tangente alla traiettoria e orientato nella direzione del moto. La Figura 11.16 mette in evidenza due di questi spostamenti elementari di un caso specifico. Sono indicati la forza F e l'angolo ϕ compreso tra le direzioni di F e di δs per ciascuna posizione. Si può quindi trovare il lavoro elementare δL compiuto sulla particella durante lo spostamento δs

$$\delta L = F \cdot \delta s = F\cos\phi\,\delta s. \qquad (11.18)$$

Qui F rappresenta la forza esercitata in ciascuna posizione individuata dallo spostamento δs. Il lavoro totale svolto sulla particella dalla forza variabile F nel tragitto dal punto i al punto f si trova sommando i valori approssimati di lavoro elementare compiuto in ciascuno dei segmenti elementari che compongono l'intero percorso. Facendo tendere a zero la dimensione di questi segmenti, δs diventa una quantità infinitesima espressa dal differenziale ds e la sommatoria si trasforma in un integrale, come nell'Equazione 11.14. Il lavoro è quindi dato da

$$L = \int_i^f F \cdot ds = \int_i^f F\cos\phi\,ds. \qquad (11.19)$$

Non possiamo calcolare quest'integrale se non conosciamo con che legge variano F e ϕ lungo il percorso; entrambi sono variabili in funzione di x e y, le coordinate della particella di Figura 11.16.

Possiamo ottenere un'espressione equivalente alla (11.19) scrivendo F e ds scomposti nelle loro componenti. Pertanto $F = F_x i + F_y j$ e $ds = dx\,i + dy\,j$, di modo che $F \cdot ds = F_x\,dx + F_y\,dy$. Ricordate infatti che $i \cdot i = j \cdot j = 1$ e $i \cdot j = j \cdot i = 0$. Sostituendo nell'Equazione 11.19 si ha

$$L = \int_i^f (F_x\,dx + F_y\,dy). \qquad (11.20)$$

Il risultato è simile a quello dell'Equazione 11.6, ricavato per forze costanti. Difatti quando le forze sono costanti la (11.20) si riduce alla (11.6). Gli integrali come quelli delle

Equazioni 11.19 e 11.20 sono detti *integrali di linea*; per calcolarli occorre conoscere come F_x e F_y variano al muoversi della particella lungo la linea che costituisce il suo percorso, una funzione che ha la forma $y(x)$. L'Equazione 11.20 si può estendere in modo evidente a tre dimensioni.

PROBLEMA SVOLTO 11.5 Una sferetta di massa m è sospesa a una corda di lunghezza d. La sferetta viene tirata da una forza F costantemente orizzontale fino a che la corda forma un angolo massimo ϕ_m con l'asse verticale (Figura 11.17a). Lo spostamento avviene lentamente a velocità tangenziale costante. Trovare il lavoro compiuto da tutte le forze che agiscono sulla sferetta.

Soluzione Il moto si svolge lungo un arco di raggio d e lo spostamento ds ha sempre la direzione tangente a quest'arco. In un punto generico del percorso la corda forma un angolo ϕ con l'asse verticale. Ponendo $a_x = 0$ e $a_y = 0$, applichiamo la seconda legge di Newton riferendoci al diagramma delle forze di Figura 11.17b:

componente x: $F - T \sin\phi = 0$,

componente y: $T \cos\phi - mg = 0$.

Eliminando T dalla combinazione di queste due equazioni si ottiene

$$F = mg \tan\phi .$$

La forza F ha solo la componente x non nulla e pertanto $F_y = 0$. L'Equazione 11.20, ponendo $F_x = F$, diventa quindi

$$L_F = \int F\,dx = \int_0^{\phi_m} mg \tan\phi\,dx .$$

Per calcolare l'integrale occorre avere una sola variabile d'integrazione; esprimiamo perciò x in funzione di ϕ. In una generica posizione di ascissa x osserviamo che $x = d\sin\phi$ e quindi $dx = d\cos\phi\,d\phi$. Sostituendo a dx questa espressione possiamo elaborare l'integrazione:

$$L_F = \int_0^{\phi_m} mg \tan\phi (d\cos\phi\,d\phi) =$$

$$= mgd \int_0^{\phi_m} \sin\phi\,d\phi = \Big[mgd(-\cos\phi)\Big]_0^{\phi_m} =$$

$$= mgd(1 - \cos\phi_m).$$

Dalla Figura 11.17a si vede che $h = d(1 - \cos\phi_m)$, e quindi

$$L_F = mgh .$$

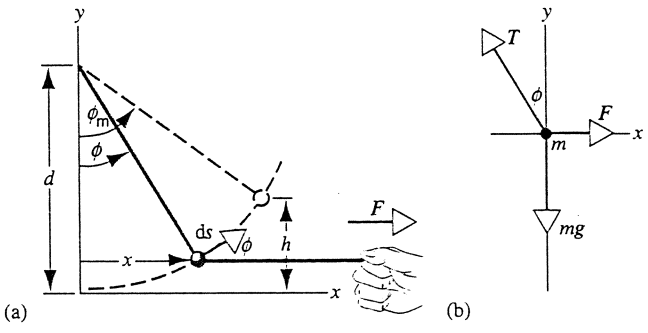


FIGURA 11.17 Problema svolto 11.5. (a) Una particella è sospesa a un filo di lunghezza d e viene tirata orizzontalmente da una forza F. Raggiunge un angolo massimo di deviazione ϕ_m. (b) Diagramma delle forze per la particella.

Il lavoro L_g svolto dalla forza gravitazionale (costante) mg si può calcolare con procedimento simile a quello dell'Equazione 11.20 (ponendo $F_x = 0$, $F_y = -mg$), per giungere al risultato $L_g = -mgh$ (vedi Esercizio 25). Il segno meno si giustifica perché il verso dello spostamento verticale è opposto a quello della forza di gravità. Il lavoro L_T svolto dalla forza di tensione nella corda è nullo perché T è sempre perpendicolare allo spostamento ds in qualsiasi punto del percorso. Appare ora chiaro che il lavoro totale L_{tot} vale zero: $L_{tot} = L_F + L_g + L_T = mgh - mgh + 0 = 0$. Perché?

Si noti che in questo problema il lavoro svolto dalla forza orizzontale F si elide con il lavoro (negativo) svolto dalla forza verticale mg. Ciò è reso possibile dal fatto che il lavoro è uno scalare: non è caratterizzato da una direzione e da un verso e non ha componenti. Il moto della particella dipende dal lavoro *totale* svolto su di essa, che è dato dalla somma scalare dei lavori associati ad ogni singola forza.

11.6 ENERGIA CINETICA E TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Sin dal Capitolo 3 abbiamo appreso che un corpo, soggetto a una forza esterna netta non nulla, accelera in conformità alla seconda legge di Newton. Applicando quella forza per un dato intervallo di tempo o di spazio, la velocità del corpo cambia da un valore iniziale v_i a un valore finale v_f.

Cercheremo ora di descrivere lo stesso fenomeno non più in funzione di forze e accelerazione, ma in termini di lavoro ed energia. Abbiamo già definito il lavoro ed esaminato come calcolarlo in un certo numero di casi. Completiamo questa analisi introducendo una nuova forma di energia, l'*energia cinetica*, ovvero l'energia legata al movimento dei corpi, mettendo in evidenza come l'energia cinetica posseduta da un corpo sia legata al lavoro svolto su di esso.

Finora abbiamo circoscritto la discussione al lavoro compiuto da una singola forza agente su un corpo. Allarghiamo l'argomento per comprendere l'effetto combinato di tutte le forze che agiscono su un corpo. Assumiamo per il momento che *tutte* le forze esercitate siano *costanti*, riservandoci di dimostrare alla fine che il risultato non cambia anche se le forze sono variabili.

Occorre dapprima trovare il lavoro *totale* o *netto* compiuto sul corpo. Possiamo farlo in due modi: (1) calcolare prima la forza risultante $\boldsymbol{F}_{net} = \sum \boldsymbol{F}$ e poi trovare il lavoro $L_{net} = \boldsymbol{F}_{net} \cdot \boldsymbol{s}$ svolto dalla risultante delle forze sul corpo che subisce lo spostamento $\boldsymbol{s}$; oppure (2) calcolare il lavoro compiuto da ogni forza ($L_1 = \boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{s}$, $L_2 = \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{s}$, ecc.), e poi sommare i contributi al lavoro totale così ottenuti: $L_{net} = L_1 + L_2 + \cdots$. I due metodi giungono al medesimo risultato e la scelta è dettata da pura convenienza.

In base alla seconda legge di Newton, $\boldsymbol{F}_{net} = m\boldsymbol{a}$, man mano che il corpo subisce lo spostamento $\boldsymbol{s}$, questa forza netta provoca la variazione della sua velocità da v_i a v_f. Se la forza è costante, lo è anche l'accelerazione e così possiamo servirci delle relazioni tra velocità e accelerazione date nel Paragrafo 4.1. Dall'Equazione 4.1 ricaviamo $a = (v_f - v_i)/\Delta t$, ove Δt rappresenta il tempo necessario al corpo per realizzare lo spostamento s. La combinazione

 ISBN 88-408-1254-7

delle Equazioni 4.1 e 4.2 dà $s = \frac{1}{2}(v_i + v_f)\Delta t$, ottenibile anche dall'Equazione 2.7 e dalla generalizzazione della (2.27), $\bar{v} = s/\Delta t = \frac{1}{2}(v_i + v_f)$. Il lavoro totale è dunque

$$L_{net} = F_{net} \cdot s = ma \cdot s = m\frac{(v_f - v_i)}{\Delta t} \cdot \frac{(v_i + v_f)\Delta t}{2}. \quad (11.21)$$

Eseguendo i prodotti scalari si ottiene $(v_f - v_i) \cdot (v_i + v_f) = v_f \cdot v_i + v_f \cdot v_f - v_i \cdot v_i - v_i \cdot v_f$. Per i prodotti scalari, a differenza di quelli vettoriali, l'ordine dei fattori non cambia il risultato; cioè $A \cdot B = B \cdot A$. Il primo e il quarto termine della somma di conseguenza sono uguali in valore assoluto ed essendo opposti si elidono. Inoltre il prodotto scalare di un vettore per se stesso equivale al quadrato del suo modulo, come si è visto con l'Equazione 11.3; ne consegue che $v_f \cdot v_f = v_f^2$ e $v_i \cdot v_i = v_i^2$. Con queste sostituzioni l'Equazione 11.21 diviene

$$L_{net} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2. \quad (11.22)$$

Definiamo la quantità $\frac{1}{2}mv^2$ come l'*energia cinetica* K di un corpo avente massa m e velocità di modulo v:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \quad (11.23)$$

L'energia cinetica ha le stesse dimensioni del lavoro e quindi la misuriamo con le stesse unità (joule, erg, elettronvolt). Come il lavoro, anche l'energia cinetica è una grandezza scalare e in effetti si può esprimere come il prodotto scalare di due vettori: $K = \frac{1}{2}mv \cdot v$, proprio come abbiamo rappresentato le grandezze scalari lavoro e potenza (Equazione 11.4 e 11.10). Con l'Equazione 11.5 possiamo anche scrivere il prodotto scalare in termini di componenti, ottenendo $K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$. I termini di destra però non rappresentano componenti vettoriali dell'energia cinetica. L'energia cinetica è uno scalare e quindi non ha una direzione e non possiede componenti vettoriali. Si osservi infine che, a differenza del lavoro, l'*energia cinetica non può assumere valori negativi.*

Definendo un'energia cinetica iniziale e una finale, $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$ e $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$, la (11.23) può scriversi come

$$L_{net} = \Delta K = K_f - K_i. \quad (11.24)$$

Quest'equazione è l'espressione matematica di un importante teorema, chiamato *teorema dell'energia cinetica*:

> *il lavoro totale svolto dalle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica.*

Sebbene ricavato per il caso di forze costanti, questo teorema è valido per qualsiasi forza, come dimostreremo alla fine del paragrafo. Come la seconda legge di Newton, dalla quale l'abbiamo ricavato, il teorema dell'energia cinetica si applica ai corpi puntiformi o che si comportano come tali. Commenteremo ampiamente questa restrizione al termine del paragrafo.

Il teorema dell'energia cinetica è di forma simile a quello dell'impulso, $J_{net} = \Delta p = p_f - p_i$, quantunque il primo abbia a che fare con grandezze scalari (lavoro L ed energia cinetica K) mentre il secondo tratti grandezze vettoriali (impulso J e quantità di moto p). Entrambi derivano dalla seconda legge di Newton ed entrambi sono modi di affermare che una proprietà di un corpo legata alla sua velocità (energia cinetica o quantità di moto) varia in funzione della forza netta che agisce su di esso. Entrambi portano a enunciare un'importante principio di conservazione: la quantità di moto di un sistema di particelle resta costante se l'impulso netto è nullo, così come l'energia cinetica di un sistema di particelle resta costante se il lavoro netto è nullo.

L'energia cinetica non è che una delle forme di energia associate a un corpo. Una forma di energia di solito si associa a uno stato o condizione di un corpo: il suo stato di moto, la sua posizione (per esempio la distanza dal centro della Terra), la sua temperatura, la corrente elettrica che vi scorre, ecc. Esamineremo in seguito questa ed altre forme di energia, assieme a un principio di conservazione dell'energia più generale di quello espresso dall'Equazione 11.24.

L'energia si può trasferire da un corpo all'altro o convertire da una forma all'altra. Un modo di trasferire o convertire energia consiste nel compiere lavoro. Svolgendo lavoro su un corpo possiamo aumentarne l'energia cinetica. Da dove proviene questa energia aggiuntiva? Se per esempio è stata conferita spingendo il corpo con la mano, viene dall'energia accumulata nel nostro organismo; l'energia meccanica sviluppata da un motore proviene dall'energia elettrica assorbita, che a sua volta deriva per esempio dal combustibile consumato nella centrale elettrica. Ecco dunque emergere una definizione alternativa del teorema dell'energia cinetica:

> *il lavoro è energia trasferita da un corpo all'altro per effetto delle forze che agiscono su di esso.*

Esiste un altro modo di trasferire energia da un corpo all'altro, legato alla differenza di temperatura tra di essi: questa forma di trasferimento di energia si chiama calore e ne parleremo nel Capitolo 13.

Mantenendo costante il modulo della velocità di un corpo, la sua energia cinetica non cambia e quindi la forza risultante non compie lavoro. Nel moto circolare uniforme, per esempio, la risultante delle forze è orientata verso il centro della circonferenza ed è sempre perpendicolare alla direzione del moto; una forza siffatta non compie lavoro sul corpo: modifica infatti la direzione della sua velocità ma non il suo modulo. Solo se la componente della forza risultante nella direzione del moto non è nulla, questa compie lavoro sul corpo e ne varia l'energia cinetica.

Il teorema dell'energia cinetica *non* rappresenta una nuova legge indipendente della meccanica classica. Dopo aver definito il lavoro e l'energia cinetica abbiamo *ricavato* questo teorema dalla seconda legge di Newton. Il teorema è tuttavia utile quando si può calcolare facilmente il lavoro totale svolto dalle forze esterne e siamo interessati a conoscere la velocità del corpo in una data posizione. Questo teorema è inoltre di grande interesse come punto di partenza per una più ampia generalizzazione del concetto di energia e per capire come l'energia si può accumulare o spartire tra varie parti di un sistema complesso. Il principio di conservazione dell'energia sarà l'oggetto dei prossimi due capitoli.

Dimostrazione generale del teorema dell'energia cinetica

Conduciamo la dimostrazione dell'Equazione 11.24 per il caso di una sola dimensione, supposta coincidente con quella dell'asse x, nel caso più generale in cui le forze coinvolte non siano costanti. La forza netta agente sul corpo è in questo caso $F_{\text{net},x}$. Il lavoro totale svolto sul corpo da tutte le forze esterne è $L_{\text{net}} = \int F_{\text{net},x}\,dx$. La velocità dipende dalla posizione x, che a sua volta dipende dal tempo, ed è quindi espressa da $dv_x/dt = (dv_x/dx)(dx/dt)$. La forza netta si esprime dunque come

$$F_{\text{net},x} = ma_x = m\frac{dv_x}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} =$$

$$= m\frac{dv_x}{dx}v_x = mv_x\frac{dv_x}{dx}.$$

Da qui abbiamo

$$L_{\text{net}} = \int F_{\text{net},x}\,dx = \int mv_x\frac{dv_x}{dx}\,dx = \int mv_x\,dv_x.$$

La variabile d'integrazione è ora v_x e integriamo dunque tra una velocità iniziale v_{ix} e una velocità finale v_{fx}:

$$L_{\text{net}} = \int_{v_{ix}}^{v_{fx}} mv_x\,dv_x = m\int_{v_{ix}}^{v_{fx}} v_x\,dv_x = \tfrac{1}{2}m(v_{fx}^2 - v_{ix}^2) =$$

$$= \tfrac{1}{2}mv_{fx}^2 - \tfrac{1}{2}mv_{ix}^2.$$

Quest'espressione è identica a quella data dalla (11.24) per moto unidimensionale e dimostra che il teorema dell'energia cinetica vale anche per forze variabili. Per i casi bidimensionale e tridimensionale si ricava immediatamente un analogo risultato per cui $L_{\text{net}} = \Delta K$.

PROBLEMA SVOLTO 11.6 Un metodo per determinare l'energia cinetica posseduta dai neutroni di un fascio, quale per esempio quello emesso in un reattore nucleare, consiste nel misurare quanto tempo impiega un neutrone nel coprire una distanza fissata. Questo metodo è chiamato tecnica del *tempo di volo*. Supponiamo che un neutrone percorra la distanza $d = 6{,}2$ m nel tempo $t = 160\ \mu$s. Sapendo che la massa del neutrone vale $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, quant'è la sua energia cinetica?

Soluzione La velocità è data da

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6{,}2\text{ m}}{160 \cdot 10^{-6}\text{ s}} = 3{,}88 \cdot 10^4\text{ m/s}.$$

L'energia cinetica si ricava con l'Equazione 11.23:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}67 \cdot 10^{-27}\text{ kg})(3{,}88 \cdot 10^4\text{ m/s})^2 =$$

$$= 1{,}26 \cdot 10^{-18}\text{ J} = 7{,}9\text{ eV}.$$

Nei reattori nucleari la fissione genera neutroni di energia cinetica tipica di qualche MeV. Questi neutroni hanno subìto lavoro negativo per effetto di un agente esterno (chiamato *moderatore*), che li ha rallentati e ne ha ridotto l'energia cinetica da qualche MeV a qualche eV.

PROBLEMA SVOLTO 11.7 Un corpo di massa $m = 4{,}5$ g viene lasciato cadere da fermo da un'altezza $h = 10{,}5$ m sopra la superficie terrestre. Trascurando la resistenza dell'aria, quale sarà la sua velocità all'impatto?

Soluzione Assumiamo di poter trattare il corpo come una particella. Potremmo risolvere il problema attraverso la seconda legge di Newton, come avremmo fatto nel Capitolo 3. Qui invece preferiamo risolverlo valendoci del teorema dell'energia cinetica. L'incremento di energia cinetica del corpo uguaglia il lavoro svolto su di esso dalla forza risultante, che in questo caso coincide con la sola forza di gravità. La forza è costante e parallela alla direzione del moto, per cui il lavoro compiuto dalla gravità è

$$L = \boldsymbol{F}\cdot s = mgh.$$

All'inizio la velocità è $v_0 = 0$ e alla fine assume il valore v. L'incremento di energia cinetica è dunque

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0.$$

Per il teorema dell'energia cinetica $L = \Delta K$, e quindi

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv^2.$$

La velocità finale del corpo è dunque

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}80\text{ m/s}^2)(10{,}5\text{ m})} = 14{,}3\text{ m/s}.$$

Si noti che il risultato è indipendente dalla massa del corpo, come sapevamo già dalle considerazioni fatte in base alle leggi di Newton.

PROBLEMA SVOLTO 11.8 Un blocco di massa $m = 3{,}63$ kg sta scivolando su una superficie orizzontale priva d'attrito con velocità $v = 1{,}22$ m/s. Incontra una molla e la comprime fino ad arrestarsi. Sapendo che la costante della molla vale $k = 135$ N/m, calcolare la distanza di compressione della molla.

Soluzione La variazione di energia cinetica del blocco è

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2.$$

Il lavoro L svolto su una molla quando questa viene compressa di un tratto d è dato dall'Equazione 11.17:

$$L = -\tfrac{1}{2}kd^2.$$

Dal teorema dell'energia cinetica, $L = \Delta K$, otteniamo

$$-\tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}mv^2,$$

ovvero

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1{,}22\text{ m/s})\sqrt{\frac{3{,}63\text{ kg}}{135\text{ N/m}}} = 0{,}200\text{ m} = 20{,}0\text{ cm}.$$

Teorema dell'energia cinetica e sistemi di riferimento

Le leggi di Newton valgono solo in sistemi di riferimento inerziali. La prima legge di Newton anzi rappresenta proprio lo strumento che ci consente di distinguere tra un sistema inerziale e un sistema non inerziale. Se troviamo che per un certo osservatore la seconda legge di Newton è soddisfatta, lo sarà anche in *tutti* gli altri riferimenti inerziali. Se due osservatori in due sistemi inerziali, che si muovono

 ISBN 88-408-1254-7

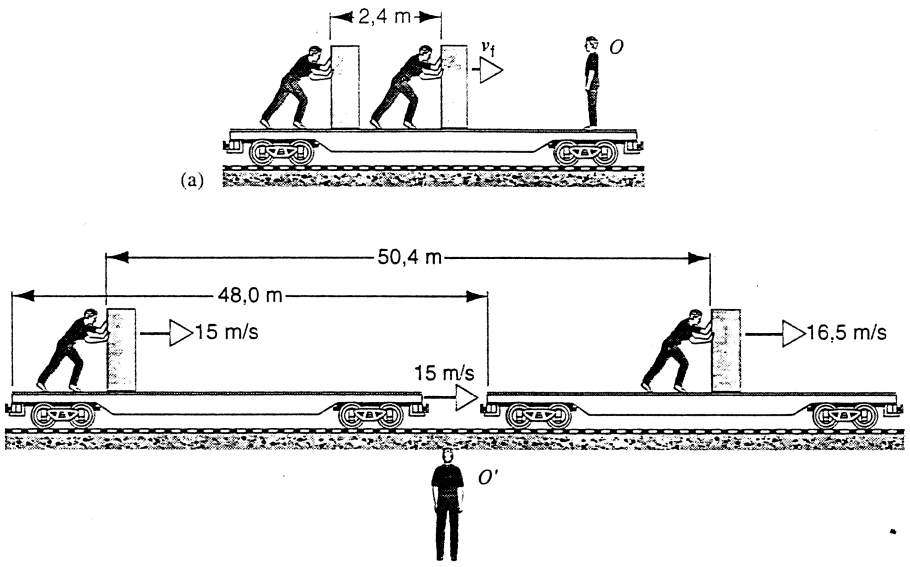


FIGURA 11.18 Problema svolto 11.9. Un operaio su un carro merci spinge in avanti una cassa, visto da (a) un osservatore O sul treno e (b) un osservatore O' a terra.

con velocità relativa v fra loro, osservano il medesimo esperimento, misurano valori identici per le masse, le accelerazioni e le forze, concordando quindi sulle loro analisi della seconda legge di Newton.

Dato che abbiamo ricavato il teorema dell'energia cinetica dalla seconda legge di Newton, saremmo magari indotti a ipotizzare che osservatori in riferimenti inerziali diversi concordino sui risultati nell'applicare il teorema dell'energia cinetica. Non dobbiamo però dimenticare che, a differenza delle forze e delle accelerazioni, gli spostamenti e le velocità misurati da osservatori inerziali diversi sono in generale differenti, e quindi questi osservatori giungono a conclusioni diverse negli esperimenti che coinvolgono il lavoro e l'energia cinetica.

Se tuttavia due diversi osservatori inerziali ottengono nei rispettivi sistemi di riferimento valori differenti per il lavoro e l'energia di un certo esperimento, essi concorderanno sul fatto che $L = \Delta K$. Il teorema dell'energia cinetica rappresenta un esempio di legge *invariante* in fisica. Una legge è invariante se ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. I valori misurati delle grandezze fisiche L e K possono essere diversi nei due sistemi; la legge che ne stabilisce la relazione è invece la stessa per entrambi gli osservatori, e per qualsiasi altro osservatore in qualunque sistema di riferimento inerziale.

PROBLEMA SVOLTO 11.7 Un operaio spinge, con una forza orizzontale di modulo $F = 5{,}63$ N, una cassa di massa $m = 12{,}0$ kg che si muove senza attrito su un carro merci orizzontale a pianale basso (Figura 11.18a). Il treno viaggia a velocità costante di 15,0 m/s nella stessa direzione e nello stesso verso della spinta F. Secondo un osservatore O a bordo del treno, la cassa parte da ferma e viene spinta per una distanza $s = 2{,}4$ m. (a) Trovare la velocità finale della cassa misurata da O. (b) Trovare il lavoro L' e la variazione di energia cinetica $\Delta K'$ misurati da un osservatore O' posto a terra. Dimostrare che il teorema dell'energia cinetica vale per entrambi gli osservatori.

Soluzione (a) Stabiliamo nella Figura 11.18 la direzione dell'asse x parallela a quella del moto, con verso positivo orientato a destra, tal che tutte le forze, le velocità e gli spostamenti risultano positivi. In base alle misurazioni di O, il lavoro svolto è $L = Fs = (5{,}63\text{ N})(2{,}4\text{ m}) = 13{,}5$ J quindi $K_f - K_i = L = 13{,}5$ J. Dato che $K_i = 0$, secondo O l'energia cinetica finale è $K_f = 13{,}5$ J, e quindi

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(13{,}5\text{ J})}{12{,}0\text{ kg}}} = 1{,}50\text{ m/s}.$$

(b) La situazione vista da O' è illustrata nella Figura 11.18b. Calcoliamo innanzitutto quanto è durata la spinta e la distanza percorsa dal treno in questo intervallo. Dal teorema dell'impulso (Equazione 6.5), come applicato da O, si ha

$$\Delta t = \frac{\Delta p_x}{F_x} = \frac{mv_x}{F_x} = \frac{(12{,}0\text{ kg})(1{,}50\text{ m/s})}{5{,}63\text{ N}} = 3{,}20\text{ s}.$$

Quest'intervallo di tempo è uguale per entrambi gli osservatori. Il treno nel tempo di 3,20 s percorre una distanza di $(15\text{ m/s})(3{,}20\text{ s}) = 48{,}0$ m, di modo che, secondo le misurazioni di O', la cassa percorre una lunghezza totale $s' = 48{,}0\text{ m} + 2{,}4\text{ m} = 50{,}4$ m. La forza esercitata dev'essere uguale per entrambi gli osservatori, di modo che il lavoro svolto secondo O' risulta

$$L' = F's' = (5{,}63\text{ N})(50{,}4\text{ m}) = 284\text{ J}.$$

L'osservatore O' trova che la velocità iniziale sia $v'_i = 15{,}0$ m/s (uguale alla velocità del treno) e quella finale sia invece $v'_f = 15{,}0\text{ m/s} + 1{,}5\text{ m/s} = 16{,}5$ m/s; pertanto secondo lui la variazione d'energia cinetica è

$$\begin{aligned}\Delta K' &= K'_f - K'_i = \tfrac{1}{2}mv'^2_f - \tfrac{1}{2}mv'^2_i = \\ &= \tfrac{1}{2}(12{,}0\text{ kg})(16{,}5\text{ m/s})^2 - \tfrac{1}{2}(12{,}0\text{ kg})(15{,}0\text{ m/s})^2 = \\ &= 284\text{ J}.\end{aligned}$$

In definitiva anche per O' vale la relazione $L' = \Delta K'$. Gli osservatori non sono d'accordo tra loro sui valori misurati di lavoro e variazione di energia cinetica, ma entrambi accertano che il lavoro è uguale alla variazione di energia cinetica. Per entrambi questi osservatori inerziali il teorema dell'energia cinetica ha la stessa forma.

Limiti del teorema dell'energia cinetica

Il teorema dell'energia cinetica (Equazione 11.24), è stato ricavato direttamente dalla seconda legge di Newton che, nella forma da noi definita, vale *solo per i corpi puntiformi.*

Il teorema dell'energia cinetica, come l'abbiamo qui presentato, si dovrebbe applicare quindi soltanto ai corpi puntiformi. A suo tempo abbiamo specificato che si possono assimilare ai corpi puntiformi tutti i corpi estesi rigidi che in ogni loro parte siano animati da un moto di uguali caratteristiche. Nell'applicazione del teorema dell'energia cinetica possiamo trattare come particelle quei corpi estesi che posseggono energia nella sola forma cinetica.

Consideriamo per esempio un modello d'automobile che affronta la prova d'impatto contro una pesante e rigida barriera di calcestruzzo. La sua energia cinetica certamente decresce mentre l'auto urta la barriera, si accartoccia e si arresta. In questo evento entrano in giuoco altre forme di energia oltre quella cinetica. Vi è un'energia interna associata con la piegatura delle lamiere, una parte della quale può apparire per esempio come un innalzamento della temperatura della carrozzeria ed essere trasferita sotto forma di calore all'ambiente esterno. Si noti che la barriera, anche se può esercitare una forza molto consistente nei confronti dell'auto, non compie lavoro su di essa, perché *il punto di applicazione di questa forza resta immobile.* Non si dimentichi infatti la definizione che abbiamo dato del lavoro (Equazione. 11.1 e Figura 11.1): affinché il lavoro non sia zero, occorre uno spostamento non nullo del corpo puntiforme su cui si applica la forza e quindi del punto di applicazione della forza. Pertanto nel caso qui considerato $\Delta K \neq 0$, ma $L = 0$; è chiaro che l'Equazione 11.24 non è soddisfatta. Ciò perché l'automobile *non* è assimilabile a una particella: è un oggetto esteso, le cui parti *non* si muovono tutte allo stesso modo.

Per un motivo analogo, ai fini del teorema dell'energia cinetica, non possiamo trattare come puntiforme un blocco soggetto alla forza d'attrito (anche se lo possiamo fare ai fini dell'applicazione della seconda legge di Newton, come nel Capitolo 5). La forza d'attrito, che abbiamo finora rappresentato come una forza costante f, è in realtà alquanto complicata e comporta la saldatura e dissaldatura di microscopiche parti (Paragrafo 5.3) che deformano le superfici e determinano una variazione della loro energia interna (che in parte si rivela con un innalzamento della temperatura superficiale).

A causa della difficoltà nel tener conto di queste altre forme d'energia e dell'impossibilità di considerare il corpo come una particella, normalmente non è corretto applicare il teorema dell'energia cinetica, nella sua forma per corpi puntiformi, laddove interviene una forza d'attrito.

In questi esempi dello scontro d'auto e del blocco strisciante non dobbiamo considerare i corpi come particelle, ma come un sistema costituito di un gran numero di particelle. Sarebbe certamente corretto applicare il teorema dell'energia cinetica a ciascuna particella, ma in pratica il metodo diverrebbe enormemente complicato. Nel Capitolo 13 svilupperemo un metodo più semplice per trattare sistemi complessi di corpi puntiformi, e vedremo come estendere il teorema dell'energia cinetica a tali sistemi.

11.7 LAVORO ED ENERGIA CINETICA NEL MOTO ROTATORIO

Finora in questo capitolo ci siamo occupati solo di casi di moto traslazionale. Allarghiamo ora i concetti di lavoro ed energia cinetica applicandoli ai corpi in rotazione.

Cominciamo con il calcolare il lavoro compiuto su un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso, come abbiamo fatto per il lavoro svolto nel moto unidimensionale. La Figura 11.19 mostra un corpo rigido qualsiasi, nel quale il punto P, distante r dall'asse di rotazione, è soggetto a una forza applicata F. Col ruotare del corpo attorno all'asse di un angolo infinitesimo $d\theta$, il punto P si sposta di una distanza $ds = r\,d\theta$. La componente della forza nella direzione del moto di P è data da $F \sin \phi$, e quindi il lavoro dL svolto dalla forza è

$$dL = (F \sin \phi)\,ds = (F \sin \phi)(r\,d\theta) = (rF \sin \phi)\,d\theta.$$

Osservando che $rF \sin \phi$ è la componente del momento torcente di F attorno all'asse z, possiamo scrivere $dL = \tau_z\,d\theta$ e per uno spostamento angolare da θ_i a θ_f il lavoro risulta

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z\,d\theta. \qquad (11.25)$$

Da notare che l'Equazione 11.25 rappresenta l'analogo angolare della (11.14), in cui la forza è sostituita dal momento torcente e la coordinata lineare da quella angolare.

Se durante la rotazione il momento torcente resta costante, il lavoro svolto da questo momento torcente è

$$L = \tau_z \theta\,, \qquad (11.26)$$

relazione analoga alla (11.1) per forze costanti.
La potenza istantanea sviluppata nel moto rotazionale si ottiene dall'Equazione 11.8:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{\tau_z d\theta}{dt} = \tau_z \omega_z, \qquad (11.27)$$

ove $\omega_z = d\theta/dt$ è la velocità angolare attorno all'asse z. La (11.27) è l'analogo rotazionale della (11.11). Si noti che nella geometria di Figura 11.19 τ e ω risultano paralleli (entrambi uscenti dalla pagina lungo l'asse z). L'Equazione 11.7 dà la potenza media del moto rotazionale associato

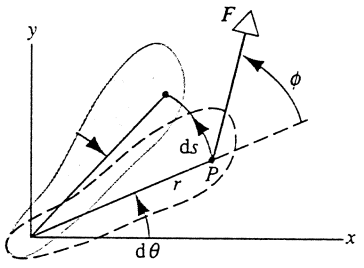


FIGURA 11.19 Un corpo rigido ruota in senso antiorario attorno a un asse perpendicolare al piano del disegno (asse z). La forza esterna F (sul piano della pagina) agisce sul punto P del corpo, situato a distanza r dall'asse di rotazione.

 ISBN 88-408-1254-7

allo svolgimento del lavoro L nell'intervallo di tempo t:

$$\overline{P} = L/t.$$

Si faccia attenzione che nelle Equazioni 11.25, 11.26 e 11.27, come in tutte le equazioni in cui coesistono grandezze lineari e grandezze angolari, *gli angoli devono essere espressi in radianti.*

Energia cinetica rotazionale

La Figura 11.20 mostra un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso con velocità angolare ω. Lo possiamo considerare come un insieme di N particelle di masse $m_1, m_2, \ldots$ animate da velocità tangenziali $v_1, v_2, \ldots$. Indicando con r_n la distanza della particella m_n dall'asse di rotazione, la sua velocità è $v_n = r_n\omega$ e la sua energia cinetica è $\frac{1}{2}m_n v_n^2 = \frac{1}{2}m_n r_n^2\omega^2$.

L'energia cinetica totale di tutto il corpo rotante è data dalla somma delle energie cinetiche delle N particelle che lo compongono:

$$K = \tfrac{1}{2}m_1 r_1^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m_2 r_2^2\omega^2 + \cdots = \tfrac{1}{2}\left(\sum m_n r_n^2\right)\omega^2, \quad (11.28)$$

ossia, introducendo il momento d'inerzia $I = \sum m_n r_n^2$,

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2. \quad (11.29)$$

Questa espressione dà l'energia cinetica di un corpo rigido avente momento d'inerzia I che ruota con velocità angolare ω attorno a un asse fisso: è l'analogo dell'Equazione 11.23 per l'energia cinetica traslazionale, $K = \frac{1}{2}mv^2$, ove il momento d'inerzia sostituisce la massa e la velocità angolare quella lineare.

L'energia cinetica rotazionale data dall'Equazione 11.29 non è un nuovo genere di energia cinetica. È semplicemente la somma delle energie cinetiche traslazionali di tutti i punti materiali che compongono il corpo rigido. Anche se il corpo nel suo insieme non è in moto traslazionale, ogni sua parte è caratterizzata da una velocità tangenziale e quindi da un'energia cinetica. La direzione della velocità di ogni elemento cambia al ruotare del corpo, ma l'energia cinetica dipende da v^2, una quantità scalare e quindi senza proprietà direzionali. È dunque appropriato sommare le energie cinetiche degli elementi rotanti e la formula $\frac{1}{2}I\omega^2$ è semplicemente un modo conveniente di esprimere questa somma, che rappresenta l'energia cinetica totale degli elementi che compongono il corpo rigido.

La forma rotazionale del teorema dell'energia cinetica è identica alla forma traslazionale: $L = \Delta K$, in cui il lavoro rotazionale è dato dalle (11.25) e (11.26), mentre l'energia cinetica rotazionale è data dalla (11.29). In generale un corpo può svolgere lavoro con moto sia traslazionale sia rotazionale. In questo caso L rappresenta il lavoro complessivo compiuto dal corpo e ΔK è la somma dei termini traslazionale e rotazionale. Nel Capitolo 12 affronteremo l'energia cinetica nel moto combinato traslazionale e rotazionale.

Nella Tabella 10.1 avevamo proposto un confronto tra le grandezze traslazionali e quelle rotazionali in cinematica e in dinamica. La Tabella 11.1 costituisce un aggiornamento analogo per il lavoro e l'energia.

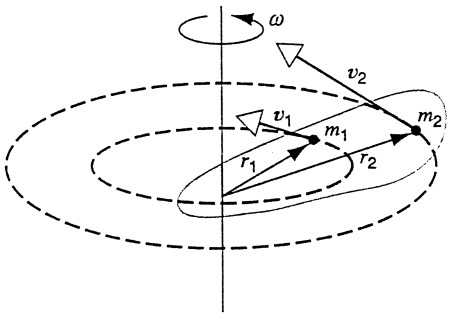


FIGURA 11.20 Un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso. Tutti i suoi elementi hanno medesima velocità angolare ω, ma la loro velocità tangenziale varia con la distanza r dell'elemento dall'asse di rotazione.

PROBLEMA SVOLTO 11.10 Una sonda spaziale, che naviga in una regione dello spazio in cui la gravità è trascurabile, ruota con velocità angolare di 2,4 giri/s attorno a un asse parallelo alla direzione del suo moto traslazionale (Figura 11.21). L'astronave ha la forma di un sottile guscio sferico di raggio R = 1,7 m e massa M = 245 kg. Occorre ridurre la velocità angolare al valore di 1,8 giri/s azionando i razzetti tangenziali posti attorno all'equatore della navicella. Che forza devono applicare per ottenere lo scopo mentre la sonda compie 3,0 giri? Si trascuri la massa di carburante consumato.

Soluzione Con l'aiuto della Figura 9.15 troviamo il momento d'inerzia di un guscio sferico rotante attorno all'asse centrale:

$$I = \tfrac{2}{3}MR^2 = \tfrac{2}{3}(245\text{ kg})(1{,}7\text{ m})^2 = 472\text{ kg}\cdot\text{m}^2.$$

La variazione di energia cinetica rotazionale è

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}(472\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\left[2\pi\frac{\text{radianti}}{\text{angolo giro}}(1{,}7\text{ giri/s})\right]^2 =$$

$$- \tfrac{1}{2}(472\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\left[2\pi\frac{\text{radianti}}{\text{angolo giro}}(2{,}4\text{ giri/s})\right]^2 =$$

$$= -2{,}67\cdot 10^4\text{ J}.$$

In base all'Equazione 11.26 il lavoro rotazionale associato a un momento torcente costante è $L = \tau_z\theta$ ove in questo caso τ_z vale $-RF$ dato che F è applicata tangenzialmente; il segno meno indica che il momento torcente è orientato nel verso negativo del-

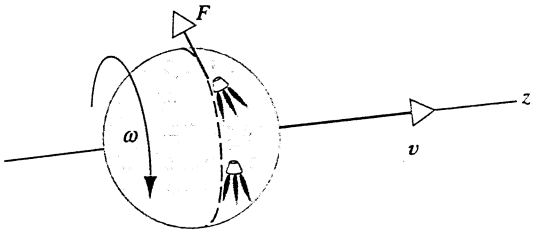


FIGURA 11.21 Problema svolto 11.10.

TABELLA 11.1 Confronto tra quantità traslazionali e rotazionali correlate all'energia

Quantità traslazionale		*Numero equazione*	*Quantità rotazionale*		*Numero equazione*
Lavoro*	$L = \int F_x \, dx$	11.14	Lavoro	$L = \int \tau_z \, d\theta$	11.25
Potenza*	$P = F_x v_x$	11.11	Potenza	$P = \tau_z \omega_z$	11.27
Energia cinetica	$K = \frac{1}{2} m v^2$	11.23	Energia cinetica rotazionale	$K = \frac{1}{2} I \omega^2$	11.29
Teorema dell'energia cinetica	$L = \Delta K$	11.24	Teorema dell'energia cinetica	$L = \Delta K$	11.24

* Per enfatizzare la simmetria tra quantità traslazionali e rotazionali, queste equazioni sono scritte in forma monodimensionale.

l'asse z. Ponendo nell'espressione del teorema dell'energia cinetica $L = -RF\theta$, risolviamola rispetto a F:

$$F = \frac{L}{-R\theta} = \frac{\Delta K}{-R\theta} = \frac{-2{,}67 \cdot 10^4 \text{ J}}{-(1{,}7 \text{ m})[(2\pi \frac{\text{radianti}}{\text{angolo giro}})(3{,}0 \text{ giri})]} =$$

$$= 833 \text{ N}.$$

Si poteva risolvere il problema anche usando le formule della cinematica rotazionale per trovare l'accelerazione angolare (costante) e ricavare poi la forza dall'espressione $\tau_z = I\alpha_z$.

11.8 ENERGIA CINETICA NEGLI URTI

Nel Capitolo 6 abbiamo analizzato gli urti tra due corpi applicando il principio di conservazione della quantità di moto. È altrettanto istruttivo considerare l'energia cinetica che interviene negli urti.

Consideriamo l'urto tra due corpi che si muovono lungo l'asse x. Nella prima riga della Figura 11.22a sono indicate le velocità prima dell'urto nel riferimento del laboratorio, mentre nella Figura 11.22b compare lo stesso urto visto dal riferimento del centro di massa.

Esaminiamo dapprima il caso dell'urto *elastico*, che abbiamo definito nel Paragrafo 6.5 come l'urto in cui le quantità di moto dei due corpi, nel riferimento del centro di massa, cambiano semplicemente i versi. Invertendosi le quantità di moto, si invertono necessariamente anche le velocità (Figura 11.22b, righe 1 e 2). Dato che i moduli delle velocità nell'evento di collisione rimangono entrambi invariati, è chiaro che nel riferimento del centro di massa dev'essere $K'_{1i} = K'_{1f}$ per m_1 e $K'_{2i} = K'_{2f}$ per m_2. In questo riferimento l'energia cinetica *totale* prima dell'urto, $K'_i = K'_{1i} = K'_{2i}$, è quindi uguale all'energia cinetica totale dopo l'urto, $K'_f = K'_{1f} = K'_{2f}$.

Nel riferimento del laboratorio le energie cinetiche dei due corpi *non* restano invariate; in generale dunque $v_{1i} \neq v_{1f}$ e quindi $K_{1i} \neq K_{1f}$; analogamente per la particella m_2. Cosa si può dire in questo riferimento riguardo all'energia cinetica *totale* dei due corpi? Prima dell'urto vale $K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2$, e dopo $K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$. Introducendo per le velocità le espressioni date dalle (6.24) e (6.25), risistemando, troviamo

$$K_i = K_f \qquad \text{(urto elastico).} \qquad (11.30)$$

Le energie cinetiche dei singoli corpi possono cambiare durante l'urto, cioè in generale $K_{1i} \neq K_{1f}$ e $K_{2i} \neq K_{2f}$, ma la loro somma rimane costante: $K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$. Ecco dunque una definizione alternativa dell'urto elastico:

nell'urto elastico l'energia cinetica totale dei due corpi rimane costante: l'energia cinetica totale prima dell'urto eguaglia l'energia cinetica totale dopo l'urto.

Abbiamo visto che in almeno due sistemi di riferimento (quello del centro di massa e quello del laboratorio) l'energia cinetica totale durante l'urto elastico di due corpi si conserva. Dato che però il riferimento di laboratorio è un sistema di riferimento inerziale scelto arbitrariamente, l'*ener-*

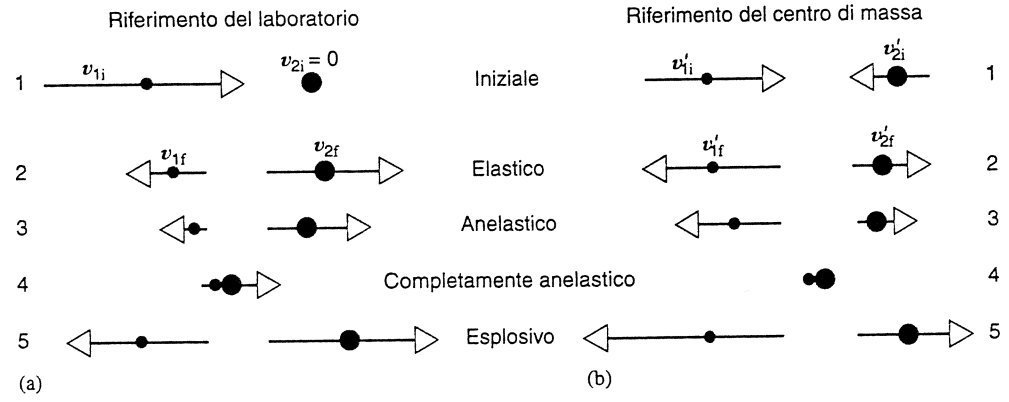


FIGURA 11.22 Un urto unidimensionale tra due corpi visto da (a) un riferimento solidale con il laboratorio e (b) un riferimento solidale con il centro di massa del sistema. Nel riferimento del laboratorio m_2 si trova inizialmente a riposo.

 ISBN 88-408-1254-7

gia cinetica totale rimane costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Possiamo renderci conto di questo risultato immaginando che fra i due corpi sia interposta una molla a riposo. I corpi avvicinandosi comprimono la molla e perdono energia cinetica compiendo lavoro su di essa. Quando poi la molla torna a espandersi, compie sui corpi la medesima quantità di lavoro, e i corpi riacquistano energia cinetica. Tornando la molla nella sua posizione di riposo, il lavoro netto compiuto sul sistema dei due corpi è nullo, e quindi l'energia cinetica *finale* del sistema deve eguagliare quella *iniziale*.

Ovvio che nell'urto tra corpi reali qualsiasi non ci sono molle; sono i due corpi stessi che, comportandosi elasticamente, svolgono la stessa funzione della molla. Le forze interatomiche sono elastiche; i corpi compiono lavoro uno sull'altro modificando vicendevolmente la loro energia cinetica, ma il lavoro totale svolto dall'intero sistema dei due corpi è nullo, e quindi parimenti nulla è la variazione di energia cinetica del sistema.

Provate a immaginare invece una molla interposta tra due corpi che incorrono in un urto anelastico (confrontate la riga 1 con la riga 3 della Figura 11.22b). La molla si comprime durante l'avvicinamento, ma poi non ritorna a espandersi interamente e non raggiunge il suo stato di riposo. I due corpi compiono lavoro sulla molla, ma questa non lo restituisce loro per intero, di modo che l'energia cinetica totale dopo l'urto risulta inferiore a quella prima dell'urto. Tutti gli osservatori, in qualunque sistema di riferimento inerziale, concorderanno nel ritenere che la molla rimanga in qualche modo parzialmente compressa dopo l'urto e che quindi parte dell'energia cinetica non venga riacquistata (in generale non concorderanno su quanta energia cinetica vada perduta). Sotto il profilo dell'energia cinetica possiamo dunque caratterizzare l'urto anelastico in questo modo:

in un urto anelastico l'energia cinetica totale finale è minore dell'energia cinetica totale iniziale.

E anche se l'energia cinetica totale diminuisce, la quantità di moto totale si conserva invariata.

Tutti gli urti tra corpi estesi sono in qualche misura anelastici. Se lasciate cadere una pallina da golf o una da tennis su una superficie rigida, esse nel rimbalzo non riguadagnano la medesima altezza da cui sono partite. Il dislivello tra la quota di partenza e quella di rimbalzo è una misura della perdita di energia cinetica nell'urto con la Terra.

Negli urti tra corpi reali dove finisce l'energia cinetica perduta? Può trasformarsi in lavoro svolto per deformare permanentemente i corpi, come nel caso della plastilina. I corpi reali non si comprimono come molle ideali: spesso intervengono forze dissipative simili all'attrito. Altra energia può convertirsi creando onde d'urto, oppure elevando la temperatura degli oggetti o altro ancora.

Quando i due corpi restano incollati insieme, abbiamo il caso di urto *completamente anelastico* (confrontare le righe 1 e 4 di Figura 11.22b). In questo caso l'energia cinetica viene persa nella misura massima compatibile con la conservazione della quantità di moto.

Immaginate ora un tipo d'urto in cui, prima della collisione, la molla si trova compressa e viene liberata a seguito dell'urto tra i due corpi. I corpi possono anche, eventualmente, comprimere oltre la molla, ma comunque dopo l'urto, quando questa si espande, conferisce ai corpi più energia cinetica di quanta ne avessero all'inizio. I due corpi possono anche compiere lavoro nel comprimere ulteriormente la molla, ma essa ne restituirà loro una quantità maggiore quando si espande fino al suo stato di riposo. Si tratta di un urto *esplosivo*.

Nell'urto di tipo esplosivo l'energia cinetica totale finale è maggiore dell'energia cinetica totale iniziale.

E anche in questo caso la quantità di moto si conserva inalterata anche se l'energia cinetica aumenta.

Gli urti di tipo esplosivo avvengono spesso nelle reazioni nucleari, quando l'energia interna immagazzinata nei nuclei in collisione si converte in energia cinetica. I nuclei prodotti dall'evento posseggono meno energia nucleare interna ma guadagnano energia cinetica totale rispetto ai nuclei originari.

PROBLEMA SVOLTO 11.11 Nei reattori nucleari i neutroni perdono energia cinetica nelle collisioni con i nuclei presenti nel nocciolo del reattore. Un neutrone di massa m_n ed energia cinetica iniziale di 5,0 MeV incorre in uno scontro frontale elastico con un nucleo. Quanta energia perde se il nucleo è di piombo ($m_{Pb} = 206m_n$), carbonio ($m_C = 12m_n$), o idrogeno ($m_H = m_n$)?

Soluzione Assumiamo che i nuclei colpiti siano inizialmente fermi (in realtà essi sono di solito in «agitazione termica», che conferisce loro una velocità trascurabile rispetto a quella del neutrone). La velocità finale del neutrone incidente dopo un urto frontale elastico con un nucleo fermo è data dall'Equazione 6.24, in cui poniamo $v_{2i} = 0$ e $v_{1f} = [(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)]v_{1i}$. L'energia cinetica finale del neutrone è dunque

$$K_{1f} = \tfrac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 = \tfrac{1}{2}m_1 \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_{1i}^2 = K_{1i}\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Nel caso che il nucleo sia di piombo, K assume il valore

$$K_{1f} = (5{,}0\,\text{MeV})\left(\frac{m_n - m_{Pb}}{m_n + m_{Pb}}\right)^2 =$$

$$= (5{,}0\,\text{MeV})\left(\frac{m_n - 206m_n}{m_n + 206m_n}\right)^2 = 4{,}9\,\text{MeV},$$

corrispondente a una perdita di 5,0 MeV − 4,9 MeV = 0,1 MeV. Analoghi calcoli danno per il carbonio $K_{1f} = 3{,}6$ MeV (perdita di 1,4 MeV) e per l'idrogeno $K_{1f} = 0$ (perdita di 5,0 MeV, tutta l'energia cinetica iniziale). Il neutrone perde dunque più energia cinetica nell'urto con il nucleo d'idrogeno, che ha la massa di valore più prossimo a quella del neutrone.

Questi risultati spiegano perché una sostanza ricca d'idrogeno, come l'acqua o la paraffina, è molto più efficiente degli elementi pesanti nel rallentare i neutroni ed essere quindi impiegata come «moderatore». Anche se noi abbiamo semplificato il problema ipotizzando che l'urto sia frontale e avvenga in una dimensione, giungiamo ad analoghe conclusioni anche se prendiamo in considera-

zione urti in due dimensioni: i neutroni perdono più energia cinetica nelle sostanze ricche d'idrogeno.

I neutroni prodotti dalla fissione dell'uranio hanno energie cinetiche tipiche dell'ordine di alcuni MeV. Per contro questi neutroni hanno la massima probabilità di innescare una nuova reazione nucleare quando la loro energia cinetica è molto minore, dell'ordine di alcuni eV. È per questo che nei reattori le barre combustibili di uranio vengono mescolate con sostanze più leggere che servono da moderatori.

PROBLEMA SVOLTO 11.12 Il pendolo balistico (Figura 11.23) è un dispositivo un tempo usato per misurare la velocità delle pallottole, prima dell'avvento dei cronometri elettronici. Consiste in un massiccio blocco di legno di massa M, appeso a due lunghe corde. Si spara un proiettile di massa m dentro al blocco in modo che il sistema blocco + proiettile oscilli e il suo centro di massa si elevi verticalmente di un'altezza h, condizione in cui il «pendolo» così costituito arriva al suo punto di arresto. Si assuma $M = 5{,}4$ kg, $m = 9{,}5$ g. (a) Qual è la velocità iniziale della pallottola se si misura $h = 6{,}3$ cm? (b) Che frazione dell'energia cinetica iniziale si perde nell'urto?

Soluzione (a) Dividiamo il problema in due parti. (1) Il proiettile con velocità iniziale v_i entra nel blocco e vi si conficca arrestandosi rispetto al blocco, dopo di che la combinazione blocco + proiettile possiede una velocità finale v_f. Assumiamo che questo processo avvenga molto rapidamente. (2) Il sistema con velocità v_f comincia a oscillare, elevandosi fino ad arrestarsi. La parte 1 è un fenomeno d'urto completamente anelastico, in cui i due corpi restano incastrati assieme dopo l'urto. Dato che la quantità di moto nell'urto si conserva, ponendo $v_{2i} = 0$ (il blocco è inizialmente fermo), l'Equazione 6.20 dà $mv_i = (m + M)v_f$. La parte 2 del problema si analizza ricorrendo al teorema dell'energia cinetica. Il lavoro netto svolto sul sistema blocco + proiettile è quello della gravità: $L_{net} = L_g = -(m + M)gh$. Dato che il sistema a un certo punto si arresta, la variazione della sua energia cinetica è $\Delta K = 0 - \frac{1}{2}(m + M)v_f^2$. Per il teorema dell'energia cinetica $L_{net} = \Delta K$, da cui

$$-(m + M)gh = -\tfrac{1}{2}(m + M)v_f^2 = -\tfrac{1}{2}(m + M)\left(\frac{mv_i}{m + M}\right)^2.$$

in cui l'ultimo passaggio si ottiene sostituendo a v_f l'espressione ottenuta nella parte 1. Risolvendo rispetto a v_i, troviamo

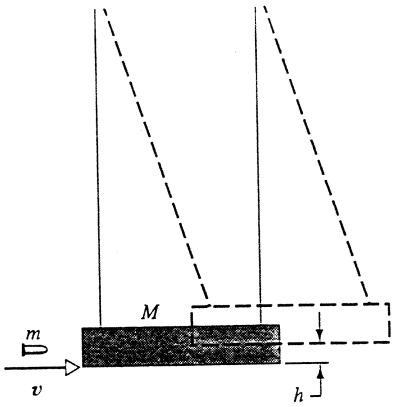


FIGURA 11.23 Problema svolto 11.12. Un pendolo balistico usato per la misura di velocità delle pallottole.

$$v_i = \left(\frac{M + m}{m}\right)\sqrt{2gh} =$$

$$= \left(\frac{5{,}4\text{ kg} + 0{,}0095\text{ kg}}{0.0095\text{ kg}}\right)\sqrt{(2)(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}063\text{ m})} =$$

$$= 630\text{m/s}.$$

Possiamo considerare il pendolo balistico come una sorta di convertitore, che trasforma l'alta velocità di un oggetto leggero (la pallottola) in una bassa velocità, quindi meglio misurabile, di un oggetto pesante (il blocco di legno).

(b) Scriviamo l'energia cinetica finale come

$$K_f = \tfrac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \tfrac{1}{2}(m+M)\left(\frac{mv_i}{m+M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv_i^2\left(\frac{m}{m+M}\right).$$

Il rapporto tra le energie cinetiche iniziale e finale è

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{m}{m+M} = \frac{9{,}5\text{ g}}{9{,}5\text{ g} + 5{,}4\text{ kg}} = 0{,}0018.$$

Dopo l'urto non resta che lo 0,18 % dell'energia cinetica iniziale. Il rimanente 99,82 % viene immagazzinato nel blocco di legno sotto forma di energia interna (manifestandosi in parte con un aumento di temperatura) o trasferito all'ambiente circostante sotto forma, per esempio, di calore e di onde acustiche.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

11.1 Lavoro ed energia

11.2 Lavoro svolto da una forza costante

1. Uno studente prende una scatola dal ripiano di un tavolo e l'appoggia per terra. Il lavoro compiuto sulla scatola sia L. Si può affermare:
(A) $L > 0$. (B) $L = 0$.
(C) $L < 0$. (D) nulla sul segno di L.

2. Un corpo di massa 2,0 kg è animato da moto circolare uniforme su un piano orizzontale privo d'attrito. Il raggio del cerchio è di 0,75 m e la forza centripeta vale 10,0 N.
(a) Il lavoro svolto sul corpo da questa forza durante mezzo giro è
(A) 0 J. (B) 3,75 J.
(C) 10,0 J. (D) 7,5π J.
(b) Il lavoro svolto sul corpo da questa forza durante un giro completo è
(A) 0 J. (B) 7,5 J.
(C) 20,0 J. (D) 15π J.

3. Quali delle seguenti grandezze non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento, pur inerziale?
(A) Velocità. (B) Accelerazione.
(C) Forza. (D) Lavoro.

4. I pezzi di artiglieria sulle navi sono talvolta classificati nell'unità di energia «tonnellata-peso per piede». A quanti joule equivale (approssimativamente)?
(A) $3 \cdot 10^1$ J. (B) $3 \cdot 10^2$ J.
(C) $3 \cdot 10^3$ J. (D) $3 \cdot 10^4$ J.

 ISBN 88-408-1254-7

11.3 Potenza

5. Un'automobile è azionata da un motore che eroga una potenza costante. Per affrontare una salita l'autista innesta una marcia «inferiore», che presenta cioè un maggior *rapporto di trasmissione* tra la velocità angolare del motore e quella delle ruote. Lo fa allo scopo di
   (A) aumentare la forza di spinta dell'auto.
   (B) aumentare la potenza sviluppata alle ruote.
   (C) entrambi i motivi (A) e (B).
   (D) nessuno dei due motivi (A) e (B).

6. Assumiamo che la forza di resistenza aerodinamica agente su un'automobile sia proporzionale alla sua velocità. Raddoppiando la potenza erogata dal motore, la velocità dell'auto
   (A) rimane invariata.
   (B) aumenta di un fattore $\sqrt{2}$.
   (C) raddoppia anch'essa.
   (D) aumenta di quattro volte.

7. Un ingegnere vuole migliorare le prestazioni di un ascensore. L'attuale motore eleva una massa di 1000 kg per un dislivello di 20 m in 30 s. Il nuovo motore dovrà sollevare 800 kg per un dislivello di 30 m in 20 s. Il nuovo motore, rispetto al vecchio,
   (A) dovrà esercitare la stessa forza, ma sviluppare una maggiore potenza.
   (B) dovrà esercitare una forza maggiore e sviluppare una potenza maggiore.
   (C) potrà esercitare una forza minore e sviluppare una potenza minore.
   (D) potrà esercitare una forza minore, ma svilupperà la stessa potenza.
   (E) potrà esercitare una forza minore, ma dovrà sviluppare una maggior potenza.

11.4 Lavoro svolto da forze variabili

8. La forza di compressione esercitata su una molla da un certo dispositivo è data da $F_x(x) = kx(x - L)$, con $0 \leq x \leq L$, dove L rappresenta la lunghezza massima di compressione e k è una costante.
   (a) La forza richiesta per comprimere la molla di una distanza d è massima quando
   (A) $d = 0$. (B) $d = L/4$.
   (C) $d = L/\sqrt{2}$. (D) $d = L/2$. (E) $d = L$.
   (b) Il lavoro richiesto per comprimerla di una distanza d è massimo quando
   (A) $d = 0$. (B) $d = L/4$.
   (C) $d = L/\sqrt{2}$. (D) $d = L/2$. (E) $d = L$.

11.5 Lavoro svolto da una forza variabile in due dimensioni

9. Una particella possiede energia cinetica costante. Quale altra grandezza dev'essere costante?
   (A) Posizione. (B) Velocità scalare .
   (C) Velocità vettoriale. (D) Quantità di moto.

10. Un disco da hockey di massa 0,20 kg scivola senza attrito con velocità di 10 m/s. Finisce contro una sponda morbida e s'arresta.
    (a) Il modulo dell'impulso subito dal disco è
    (A) 0 N · s. (B) 1 N · s.
    (C) 2 N · s. (D) 4 N · s.
    (b) Il lavoro netto svolto sul disco è
    (A) − 20 J. (B) − 10 J.
    (C) 0 J. (D) 20 J.

11. Un disco da hockey di massa 0,20 kg scivola senza attrito con velocità di 10 m/s. Finisce contro una sponda elastica e rimbalza indietro con velocità di modulo uguale e verso opposto.
    (a) Il modulo dell'impulso subito dal disco è
    (A) 0 N · s. (B) 1 N · s.
    (C) 2 N · s. (D) 4 N · s.
    (b) Il lavoro netto svolto sul disco è
    (A) − 20 J. (B) − 10 J.
    (C) 0 J. (D) 20 J.

12. Due macchine sono ferme affiancate al semaforo rosso. Al volgere del verde, l'auto di massa m parte con accelerazione a; l'altra, di massa $2m$, con accelerazione $a/2$. Quale dei due motori eroga maggior potenza?
    (A) Quello dell'auto più piccola.
    (B) Quello dell'auto più grande.
    (C) La potenza è uguale per entrambe.

11.6 Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica

11.7 Lavoro ed energia cinetica nel moto rotatorio

13. Quattro corpi solidi a simmetria centrale, tutti della stessa massa e dello stesso raggio, ruotano su se stessi con medesima velocità angolare. Quale di essi richiede il maggior lavoro per essere *arrestato*?
    (A) Una sfera piena omogenea rotante attorno a un suo diametro.
    (B) Un guscio sferico vuoto rotante attorno a un suo diametro.
    (C) Un disco pieno omogeneo rotante attorno al suo asse normale passante per il centro.
    (D) Un anello rotante attorno a un suo diametro.
    (E) Il lavoro è lo stesso per tutti i corpi succitati.

14. Quattro corpi solidi a simmetria centrale, tutti della stessa massa e dello stesso raggio, ruotano su se stessi con medesimo momento angolare. Quale di essi richiede il maggior lavoro per essere *arrestato*?
    (A) Una sfera piena omogenea rotante attorno a un suo diametro.
    (B) Un guscio sferico vuoto rotante attorno a un suo diametro.
    (C) Un disco pieno omogeneo rotante attorno al suo asse normale passante per il centro.
    (D) Un anello rotante attorno a un suo diametro.
    (E) Il lavoro è lo stesso per tutti i corpi succitati.

15. Quattro corpi solidi a simmetria centrale, tutti della stessa massa e dello stesso raggio, ruotano su se stessi con medesima velocità angolare e medesimo momento angolare. Quale di essi richiede il maggior lavoro per essere *arrestato*?
    (A) Una sfera piena omogenea rotante attorno a un suo diametro.
    (B) Un guscio sferico vuoto rotante attorno a un suo diametro.
    (C) Un disco pieno omogeneo rotante attorno al suo asse normale passante per il centro.
    (D) Un anello rotante attorno a un suo diametro.
    (E) Il lavoro è lo stesso per tutti i corpi succitati.

11.8 Energia cinetica negli urti

16. Nel pendolo balistico (vedi Problema svolto 11.12) si «perde» una considerevole frazione dell'energia cinetica.

Tenendo presente ciò, si può dedurre che

(A) la velocità calcolata del proiettile è probabilmente troppo bassa.

(B) la velocità calcolata del proiettile è probabilmente troppo alta.

(C) la velocità calcolata del proiettile è probabilmente corretta solo se l'urto è elastico.

(D) la velocità calcolata del proiettile è probabilmente corretta perché nell'urto si conserva la quantità di moto.

QUESITI

1. Pensate ad altri termini che, come il «lavoro», hanno nel linguaggio comune un significato alquanto diverso da quello definito nelle scienze.
2. Spiegate perché ci si stanca spingendo contro un muro senza muoverlo e quindi senza compiere alcun lavoro.
3. Supponete che un corpo, durante il suo spostamento da un punto a un altro, sia soggetto a tre forze costanti. Dimostrate che il lavoro svolto dalla risultante di queste tre forze equivale alla somma dei lavori compiuti da ciascuna di esse separatamente.
4. Il piano inclinato (vedi Problema svolto 11.1) è una «macchina» semplice che permette di compiere lavoro di sollevamento impegnando una forza minore di quella che sarebbe altrimenti necessaria. Altre macchine semplici analoghe sono il cuneo, la leva, la vite, gli ingranaggi, le pulegge composte (vedi Problema. 3), ecc. Non servono a risparmiare lavoro, ma a eseguirlo con minor forza, anche se in pratica richiedono una piccola quantità di lavoro in più rispetto a quello necessario senza il loro ausilio. Per qual motivo? E perché allora li usiamo?
5. In un tiro alla fune una squadra sta lentamente cedendo terreno all'altra. Che lavoro si sta compiendo, e da parte di chi?
6. Perché percorrere una distanza di qualche kilometro in piano ci richiede meno sforzo in bicicletta che di corsa? Osservate che il peso del vostro corpo, nonché la distanza, sono gli stessi; ed anzi, nel primo caso avete in più il peso della bicicletta e per giunta impiegate meno tempo!
7. Supponete che la Terra giri attorno al Sole in un'orbita circolare. Il Sole compie lavoro sulla Terra?
8. Lentamente sollevate un libro dal pavimento e lo posate sul tavolo. Sul libro agiscono due forze: il suo peso, di modulo mg, e la forza di sollevamento verso l'alto, di modulo uguale. La loro somma è zero e sembrerebbe potersi concludere che il lavoro svolto sul libro sia nullo, anche se sapete benissimo che così non è. Cosa non funziona nel ragionamento?
9. Perché un'automobile può agevolmente sorpassare in salita un autocarro a pieno carico? Il camion è più pesante, certo, ma il suo motore è più potente, non è vero? Quali considerazioni guidano la scelta di una certa potenza per il motore di un autocarro e per quello di un'autovettura?
10. La potenza richiesta per sollevare una cassa su una piattaforma dipende dal tempo richiesto per il sollevamento?
11. Nella vostra libreria trasferite alcuni libri da un ripiano a un ripiano più alto nel tempo Δt. Il lavoro che svolgete dipende forse (a) dalla massa dei libri, (b) dal peso dei libri, (c) dall'altezza del ripiano superiore rispetto al pavimento, (d) dal tempo Δt, (e) da come li sollevate, se verticalmente o con traiettoria inclinata?
12. Si parla molto della «crisi energetica». Sarebbe forse più appropriato parlare di «crisi di potenza»?
13. Tagliate una molla a metà. Che relazione c'è tra la costante elastica della molla originaria con quella di metà molla?
14. Le molle A e B sono identiche tranne che A è più rigida di B, cioè $k_A > k_B$. Su quale molla si svolge maggior lavoro per (a) stirarla di una medesima lunghezza e (b) stirarla con una medesima forza?
15. Sollevando un libro dal pavimento al tavolo si compie lavoro. La variazione di energia cinetica del libro tra prima e dopo l'evento è però nulla. Si tratta di una violazione del teorema dell'energia cinetica? Si giustifichi la risposta.
16. Se interviene una forza d'attrito, il teorema dell'energia cinetica resta comunque valido? Spiegare la risposta.
17. Il lavoro svolto su una particella dalla risultante delle forze uguaglia la variazione della sua energia cinetica. Può accadere che il lavoro svolto da una sola delle forze componenti sia maggiore della variazione di energia cinetica? In caso affermativo, datene un esempio.
18. Il primato mondiale di salto con l'asta è di quasi 6,0 m. Si potrebbe innalzare, diciamo, a 8,0 m con l'impiego di un'asta più lunga? Da che cosa dipende l'altezza raggiungibile da un atleta?
19. Un oggetto leggero e un altro pesante hanno uguale energia cinetica di traslazione. Quale ha quantità di moto maggiore?
20. Può un corpo possedere energia cinetica se la sua quantità di moto è zero? E il contrario?
21. Un corpo di massa m si muove con velocità iniziale v. Viene arrestato da una forza variabile, che agisce per un tempo t su una distanza d. Abbiamo due modi di calcolare il modulo della forza media:

$$\overline{F} = mv/t$$

oppure

$$\overline{F} = mv^2/(2d).$$

Sono equivalenti? In quali casi, se esistono, danno lo stesso risultato? Uno dei due procedimenti tende a fornire valori maggiori dell'altro? E se sì, quale?

22. Commentate le seguenti affermazioni. In uno scontro stradale la forza che un'auto esercita mentre viene fermata si può determinare sia attraverso la sua quantità di moto, sia attraverso la sua energia cinetica. Nel primo caso occorre conoscere il tempo d'arresto, nel secondo lo spazio d'arresto.
23. L'acciaio è più elastico della gomma. Spiegate il significato di questa affermazione.
24. Discutete la possibilità di considerare tutti gli urti come elastici, se solo fossero noti i moti interni di tutti gli atomi di un corpo.
25. Abbiamo visto che il principio di conservazione della quantità di moto vale indipendentemente dal fatto che l'energia cinetica sia conservata o meno. Vale anche il contrario?

 ISBN 88-408-1254-7

26. Da un elaborato d'esame: "L'urto tra due atomi di elio è perfettamente elastico, quindi la loro quantità di moto si conserva." Cosa ne pensate?
27. Due palline di stucco di ugual massa e velocità si scontrano frontalmente incollandosi l'una all'altra e arrestandosi. L'energia cinetica di certo non si conserva. Che sorte subisce dunque? E la quantità di moto?
28. Consideriamo un urto elastico unidimensionale tra un corpo in movimento A e un altro inizialmente fermo B. Che massa possiede B, in rapporto a quella di A, se B rincula con (a) la massima velocità possibile, (b) la massima quantità di moto possibile o (c) la massima energia cinetica possibile?
29. Commentando la mancata conservazione dell'energia cinetica in un urto completamente anelastico, uno studente ha osservato che l'energia cinetica non si conserva nemmeno in un'esplosione e che l'urto completamente anelastico è l'esatto contrario di un'esplosione. È un'osservazione utile e valida?
30. L'energia cinetica dipende dalla direzione del moto? Può essere negativa? Dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore?
31. Il lavoro svolto dalla risultante delle forze che agisce su una particella dipende dal sistema di riferimento (inerziale) dell'osservatore? E la variazione di energia cinetica? Se sì, proponetene un esempio.
32. Un barcaiolo, remando in un fiume controcorrente, si trova fermo rispetto alla riva. (a) Sta svolgendo lavoro? (b) Se cessa di remare e si lascia trasportare dalla corrente, si compie lavoro sulla barca?

ESERCIZI

11.1 Lavoro ed energia

11.2 Lavoro svolto da una forza costante

1. Un operaio, per spingere una cassa di massa 52 kg su un pavimento orizzontale, esercita una forza di modulo 190 N in direzione che forma un angolo di 22° verso il basso rispetto al piano orizzontale. Dopo che la cassa si è spostata di 3,3 m, quanto lavoro ha compiuto sulla cassa (a) l'operaio, (b) e a forza di gravità e (c) la forza normale esercitata dal pavimento?
2. Un oggetto di massa 106 kg ha velocità vettoriale costante di modulo 51,3 m/s. (a) Che forza è richiesta, che distanza percorre e quanto lavoro compie la forza, se si arresta sottoposto a un'accelerazione di 1,97 m/s^2? (b) Ripetete per un'accelerazione di 4,82 m/s^2.
3. Un operaio, per spingere una cassa di massa 25 kg su per un piano inclinato di 27° rispetto al piano orizzontale, esercita una forza di 120 N parallela al piano. Calcolare il lavoro svolto sulla cassa, dopo che questa ha strisciato per una lunghezza di 3,6 m, (a) dall'operaio, (b) dalla forza di gravità e (c) dalla forza normale esercitata dal piano.
4. Un operaio, per spingere a velocità costante una cassa di massa 26,6 kg su un pavimento orizzontale lungo una distanza di 9,54 m, esercita una forza nella direzione formante un angolo di 32,0° verso il basso rispetto al piano orizzontale. Il coefficiente d'attrito dinamico vale 0,21. Quanto lavoro compie l'operaio sulla cassa?
5. Un tronco di massa 52,3 kg viene spinto a velocità costante su per un piano inclinato di 28,0° rispetto al piano orizzontale da una forza orizzontale costante. Sapendo che il coefficiente d'attrito dinamico è di 0,19, si calcoli il lavoro svolto (a) dalla forza applicata e (b) dalla forza di gravità.
6. Un blocco di ghiaccio di massa 47,2 kg scivola giù per un piano inclinato lungo 1,62 m, che realizza un dislivello di 0,902 m. Una persona spinge in verso discorde a quello del moto applicando una forza parallela al piano, in modo che il blocco scenda a velocità costante. Il coefficiente d'attrito dinamico tra ghiaccio e superficie inclinata è 0,110. Trovare (a) la forza esercitata dalla persona, (b) il lavoro svolto sul blocco dalla persona e (c) il lavoro svolto sul blocco dalla gravità.
7. Mediante le Equazioni 11.3 e 11.5 calcolare l'angolo compreso tra i vettori $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.
8. L'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{a}$, di modulo 12 unità, e $\boldsymbol{b}$, di modulo 5,8 unità, vale 55°. Calcolare il prodotto scalare dei due vettori.
9. I vettori $\boldsymbol{r}$ ed $\boldsymbol{s}$ giacciono sul piano xy. Hanno modulo di 4,5 e 7,3 unità rispettivamente e le loro direzioni formano angoli rispetto al riferimento trigonometrico cartesiano pari a 320° e 85°. Quanto vale $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}$?
10. (a) Calcolare il valore di $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, ove $\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. (b) Calcolare l'angolo tra $\boldsymbol{r}$ e l'asse x. (c) Trovare l'angolo tra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

11.3 Potenza

11. Una ragazza di massa 57 kg sale una rampa di scale alta 4,5 m in 3,5 s. Che potenza sviluppa mediamente?
12. Una sciovia trasporta a velocità costante 100 persone di peso medio 667 N su un dislivello di 152 m in 55,0 s. Trascurando le perdite per attrito, si calcoli la potenza del motore.
13. Un nuotatore avanza in acqua alla velocità di 0,22 m/s. Se la resistenza idrodinamica oppone una forza di 110 N, che potenza sviluppa il nuotatore?
14. Il dirigibile *Hinderburg*, sostenuto da un pallone a idrogeno (Figura 11.24), coi suoi motori eroganti una potenza di 4800 hp volava alla velocità di 77 nodi. Si calcoli la forza di resistenza dell'aria esprimendola in newton. Per le necessarie conversioni di unità si veda l'appendice G.
15. Che potenza deve erogare il motore di un'automobile avente massa 1600 kg per viaggiare alla velocità di 26 m/s su una strada orizzontale, sapendo che le forze complessive d'attrito si oppongono con forza di 720 N?
16. Una pompa per il sollevamento dell'acqua ha un motore di potenza 4,9 kW. Da che profondità può pompare l'acqua con portata di 6,1 L/s?
17. Supponete che un'auto consumi in media 80 mL/km di benzina. (a) Quanta strada percorre dissipando 1 kWh di energia? (b) Alla velocità di 88 km/h che potenza media eroga il suo motore? L'energia ottenuta dalla combustione di 1 L di benzina è di 37 MJ.

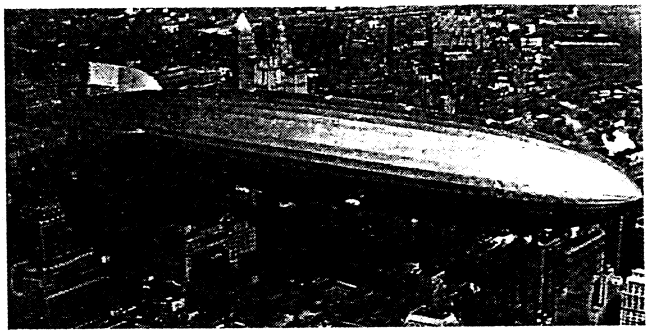


FIGURA 11.24 Esercizio 14.

18. Che potenza sviluppa una mola di raggio 20,7 cm con velocità angolare di 2,53 giri/min, se l'attrezzo da arrotare viene premuto contro la mola con una forza di 180 N? Si supponga che il coefficiente d'attrito tra attrezzo e mola valga 0,32.
19. Un montacarichi a pieno carico ha massa totale di 1220 kg, mentre il suo contrappeso ha massa di 1380 kg. Scende nel tempo di 43,0 s per un tratto di 54,5 m. Calcolare la potenza del motore ammettendo che si muova a velocità costante senza attriti.
20. Un aeroplano a reazione vola alla velocità di 184 m/s. Ogni secondo si immettono nel motore 70,2 kg di aria, che servono a bruciare 2,92 kg di carburante. L'energia prodotta è impiegata nella compressione dei gas combusti, che vengono espulsi dall'ugello alla velocità di 497 m/s rispetto all'aereo. Calcolare (a) la spinta impartita dal motore a getto e (b) la potenza erogata.

11.4 Lavoro svolto da forze variabili

21. Un corpo di massa 10 kg si muove in direzione dell'asse x con un'accelerazione che dipende dalla posizione secondo l'andamento di Figura 11.25. Calcolare il lavoro totale svolto sul corpo durante il suo tragitto da $x = 0$ a $x = 8{,}0$ m.

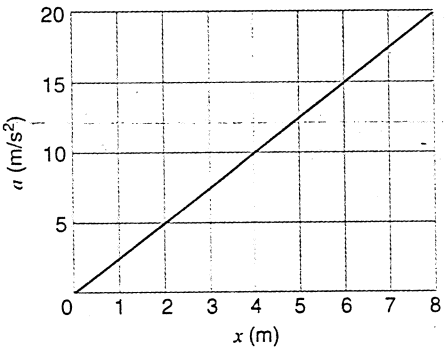


FIGURA 11.25 Esercizio 21.

22. Un blocco di massa 5,0 kg è in moto rettilineo su una superficie liscia orizzontale sottoposta a una forza il cui andamento varia con la posizione come riportato in Figura 11.26. Nel tratto tra l'origine e il punto d'ascissa 8,0 m quanto lavoro svolge la forza sul blocco?
23. La molla di Figura 11.27 porta agganciata all'estremità un indice scorrevole lungo una scala tarata in millimetri. Si prova ad attaccare alla molla tre pesi diversi in successione, di valore indicato in Figura. (a) Dove si dispone l'indice quando la molla è a riposo? (b) Quanto vale il peso P?

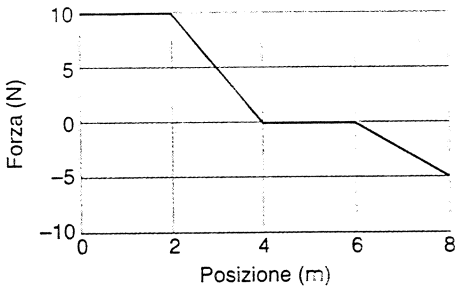


FIGURA 11.26 Esercizio 22.

24. La costante elastica di una certa molla è $k = 15{,}0$ N/cm. (a) Quanto lavoro è richiesto per ottenerne un'elongazione di 7,60 mm? (b) E quanto se ne richiede per raddoppiare questo valore?

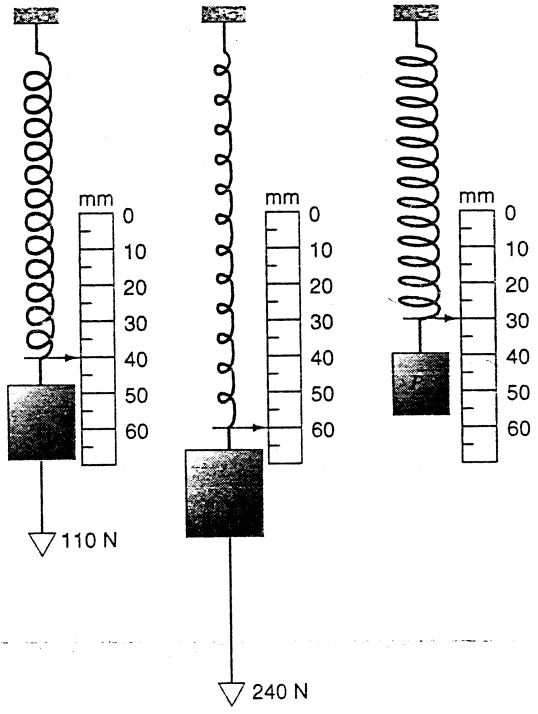


FIGURA 11.27 Esercizio 23.

11.5 Lavoro svolto da una forza variabile in due dimensioni

25. Con riferimento al Problema svolto 11.5, dimostrare, integrando lungo l'arco, che il lavoro svolto dalla gravità è uguale a $-mgh$.
26. Un oggetto di massa 0,675 kg è in moto circolare uniforme su un tavolo senza attrito, attaccato a un filo fissato sul tavolo al centro della circonferenza. (a) Calcolare la tensione nel filo per una velocità di 10,0 m/s e un raggio di 0,500 m. (b) Si osserva che, accorciando il filo di 0,200 m mentre l'oggetto è in moto, la tensione aumenta di un fattore 4,63. Calcolare il lavoro totale svolto dal filo sull'oggetto durante l'accorciamento.

 ISBN 88-408-1254-7

11.6 Energia cinetica e teorema dell'energia cinetica

27. Un elettrone libero di muoversi nel rame alla temperatura dello zero assoluto possiede un'energia cinetica di 4.2 eV. Che velocità ha l'elettrone?

28. Calcolate le energie cinetiche dei seguenti corpi alle velocità indicate: (a) un centrocampista di massa 110 kg che corre alla velocità di 8,1 m/s: (b) una pallottola di massa 4,2 g sparata alla velocità di 950 m/s; (c) una portaerei di massa 91 400 t alla velocità di 59 km/h.

29. In un acceleratore di particelle si lancia un protone (nucleo dell'atomo d'idrogeno). In un tratto rettilineo lungo 3,50 cm il protone subisce un'accelerazione di $3{,}60 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m/s^2}$. Se il protone entra con velocità iniziale di $2{,}40 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m/s}$, calcolare (a) la velocità d'uscita e (b) la variazione della sua energia cinetica in eV. La massa del protone è $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

30. Su una particella in moto rettilineo agisce una sola forza. La sua velocità in funzione del tempo è riprodotta nel grafico di Figura 11.28. Stabilite il segno del lavoro svolto in ciascuno degli intervalli *AB*, *BC*, *CD* e *DE*.

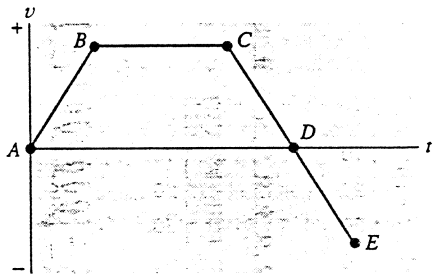


FIGURA 11.28 Esercizio 30.

31. La posizione in funzione del tempo di una particella di massa 2,80 kg soggetta a una forza è data da $x = (3{,}0\ \mathrm{m/s})t - (4{,}0\ \mathrm{m/s^2})t^2 + (1{,}0\ \mathrm{m/s^3})t^3$. (a) Trovare il lavoro compiuto dalla forza nei primi 4,0 s. (b) Che potenza istantanea sviluppa sulla particella all'istante $t = 3{,}0$ s?

32. La Terra compie una rivoluzione attorno al Sole in un anno. Quanto lavoro occorrerebbe svolgere per arrestarla rispetto al Sole? I dati necessari si trovano nell'appendice C. Trascurate la rotazione della Terra.

33. Un'automobile di massa 1660 kg parte da ferma e raggiunge su strada piana in 33 s una velocità di 72 km/h. (a) Quant'è l'energia cinetica acquisita dall'auto in quest'intervallo? (b) Quant'è la potenza media erogata dal motore durante l'intervallo? (c) Assumendo che l'accelerazione sia costante, quanto vale la potenza istantanea al termine dell'intervallo?

11.7 Lavoro ed energia cinetica nel moto rotatorio

34. Una molecola possiede un momento d'inerzia pari a $14\,000\ \mathrm{u \cdot pm^2}$ e ruota a velocità angolare costante di $4{,}30 \cdot 10^{12}$ rad/s. (a) Esprimete il momento d'inerzia in $\mathrm{kg \cdot m^2}$. (b) Calcolate l'energia cinetica rotazionale in eV.

35. La molecola di ossigeno ha una massa di $5{,}30 \cdot 10^{-26}$ kg e un momento d'inerzia di $1{,}94 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ attorno a un asse mediano normale alla congiungente dei due atomi. Supponete che si muova con velocità media di 500 m/s e che la sua energia cinetica rotazionale sia pari ai due terzi di quella traslazionale. Trovate la velocità angolare media.

36. Si sono sperimentati furgoni per consegne cittadine azionati dall'energia immagazzinata in un volano. Un motore elettrico carica il volano accelerandolo fino alla velocità angolare di 624 rad/s. Il volano è costituito da un cilindro omogeneo di massa 512 kg e raggio 97,6 cm. (a) Calcolare l'energia cinetica immagazzinata a piena carica. (b) Se la potenza media richiesta nell'impiego del furgone è di 8,13 kW, che autonomia ha in termini di tempo?

37. Una ruota di massa 31,4 kg avente il raggio di 1,21 m ruota a velocità angolare di 283 giri/min. Va arrestata in 14,8 s. Trovare la potenza media richiesta, assumendo che la ruota sia un anello sottile.

38. Due ruote, *A* e *B*, sono collegate con una cinghia di trasmissione come in Figura 11.29. Il raggio di *A* è il triplo del raggio di *B*. (a) Quale sarebbe il rapporto tra i momenti d'inerzia I_A/I_B, se le ruote avessero (a) ugual momento angolare o (b) uguale energia cinetica rotazionale? Supponente che la cinghia non slitti.

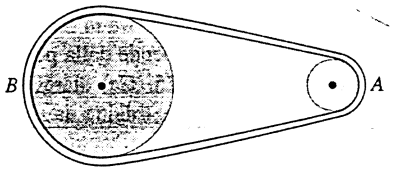


FIGURA 11.29 Esercizio 38.

39. Assumete che la Terra sia una sfera omogenea. (a) Calcolate la sua energia cinetica rotazionale. (b) Immaginate che possiamo convertire quest'energia per nostro uso e consumo. Per quanto tempo la Terra potrebbe fornire la potenza di 1,00 kW a ciascuno dei suoi $6{,}17 \cdot 10^{9}$ abitanti?

11.8 Energia cinetica negli urti

40. Un satellite artificiale sta viaggiando alla velocità di 7600 m/s. È composto di due parti agganciate: un razzo di massa 290,0 kg e una capsula di massa 150,0 kg. Allo sgancio una molla compressa li divide imprimendo loro una velocità relativa di 910,0 m/s. (a) Calcolare le velocità delle due parti dopo la separazione, supponendo che i moti si svolgano su una stessa direzione. (b) Calcolare l'energia cinetica totale prima e dopo lo sgancio, giustificando un'eventuale differenza.

ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMI

1. Per estrarre elettroni dai metalli si possono impiegare campi elettrici. Strappare un elettrone da una superficie di tungsteno richiede un lavoro di 4,5 eV. Supponete che la distanza per cui agisce il campo elettrico sia di 3,4 nm. Calcolate la forza minima esercitata dal campo sull'elettrone.
2. (a) Trovare il lavoro svolto da una corda per calare un blocco di massa M di un dislivello d ad accelerazione costante pari a $g/4$. (b) Trovare il lavoro svolto durante l'operazione dalla forza di gravità.
3. Nella Figura 11.30 vediamo una combinazione di pulegge progettata per sollevare carichi pesanti. Si trascurino gli attriti e si supponga che il peso totale delle pulegge sia di 90,0 N. Si vuole sollevare un peso di 3800 N per un dislivello di 4,00 m. (a) Qual è la forza minima capace di sollevare il carico? (b) Quanto lavoro occorre svolgere contro la forza di gravità? (c) Per che lunghezza deve agire la forza applicata durante il sollevamento? (d) Che lavoro deve svolgere questa forza?

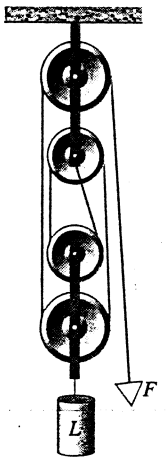


FIGURA 11.30 Problema 3.

4. Il sollevamento di un pacco di massa 75 kg dal pavimento a uno scaffale richiede un lavoro di 680 J. Se lo si esegue spingendolo su per uno scivolo senza attrito, la forza minima richiesta è di 320 N. Calcolare l'angolo d'inclinazione dello scivolo rispetto al piano orizzontale.
5. Un cavallo tira un carro alla velocità di 10,0 km/h applicandogli una forza di 190 N in direzione formante un angolo di 27° con il piano orizzontale. (a) In capo a 12 min, quanto lavoro ha compiuto? (b) Calcolare la potenza media che ha sviluppato, naturalmente in . . . cavalli-vapore.
6. Un verricello a motore trascina su per un piano inclinato alla velocità costante di 1,34 m/s un blocco di granito di massa 1380 kg (Figura 11.31). Il coefficiente d'attrito dinamico tra piano e granito è di 0,41. Che potenza sviluppa il verricello?
7. Dimostrare che, chiamando x la distanza percorsa da fermo, la velocità v raggiunta da un'auto di massa m su cui si sviluppa una potenza costante P è data dall'espressione

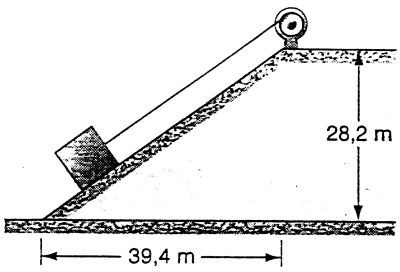


FIGURA 11.31 Problema 6.

$$v = (3xP/m)^{1/3}.$$

8. (a) Dimostrare che la potenza erogata dal motore di un aeroplano, che vola orizzontale a velocità costante v, è proporzionale a v^3. Si assuma che la resistenza aerodinamica sia $D = bv^2$. (b) Per aumentare la velocità del 25,0 %, di che fattore occorre incrementare la potenza?
9. Una scala mobile congiunge due piani con dislivello di 8,20 m. La scala è lunga 13,3 m e scorre alla velocità di 62,0 cm/s. (a) Per trasportare 100 persone al minuto di massa media 75,0 kg, che potenza occorre? (b) Un uomo di massa 83,5 kg risale la scala mobile in 9,50 s. Che lavoro ha svolto il motore su di lui? (c) Se l'uomo a metà scala si ferma e torna indietro scendendo in modo da restare sempre a quota costante, il motore compie lavoro su di lui? In caso affermativo, che potenza sviluppa su di lui? (d) Esiste una modalità di salita che consenta al motore di sviluppare una potenza nulla su chi sale?
10. La potenza erogata dal motore di un carrello elettrico è funzione della velocità e precisamente: $P(v) = av(b - v^2)$, dove a e b sono costanti e $P = 0$ per $v^2 > b$. (a) A che velocità si sviluppa la potenza massima? (b) A che velocità si ottiene la forza massima esercitata dal motore? (c) Per $v = 0$ la potenza erogata è nulla. Questo significa che il motore non è in grado di avviare il carrello? Si dia una spiegazione.
11. La forza esercitata su un corpo sia data dall'espressione $F = F_0(x/x_0 - 1)i$. Trovare il lavoro compiuto per spostare il corpo da $x = 0$ a $x = 3x_0$ (a) diagrammando la funzione $F_x(x)$ e calcolando l'area sottesa dalla curva; (b) calcolando analiticamente l'integrale.
12. (a) Stimate il lavoro svolto dalla forza rappresentata nella Figura 11.32 durante lo spostamento da $x = 1$ m a $x = 3$ m. Raffinate il vostro procedimento per verificare quanto riuscite ad approssimare la risposta esatta di 6 J. (b) Sa-

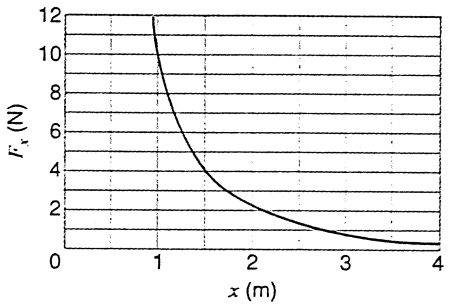


FIGURA 11.32 Problema 12.

 ISBN 88-408-1254-7

pendo ora che la curva descrive la funzione $F_x = A/x^2$, ove $A = 9\ \text{N} \cdot \text{m}^2$, mostrate come calcolare il lavoro mediante integrazione.

13. Una molla con comportamento anomalo presenta un andamento della forza di richiamo data dalla legge $F = -kx^3$. Il lavoro richiesto per estenderla dalla posizione di riposo $x = 0$ alla posizione $x = d$ è L_0. Quanto lavoro occorre per stirarla di un'ulteriore lunghezza d?

14. Due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 sono disposte come in Figura 11.33. (a) Calcolare il lavoro per spostare dall'equilibrio il loro punto di congiunzione di una distanza x normale all'asse delle molle. (b) Ponendo $x \ll l_0$ si faccia uso dello sviluppo in serie binomiale per trovare il primo termine finito nell'espressione del lavoro.

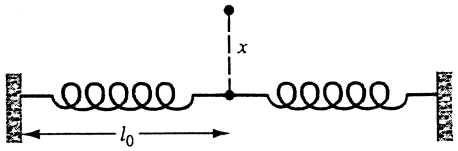


FIGURA 11.33 Problema 14.

15. Quattro molle di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0 sono disposte come in Figura 11.34. Le molle obbediscono alla legge di Hooke (Equazione 11.15). Dimostrare che, per spostare in linea retta il loro punto di congiunzione dall'equilibrio alla posizione x,y (con $x \ll l_0$ e $y \ll l_0$), si compie il lavoro $L = kd^2$, ove $d^2 = x^2 + y^2$.

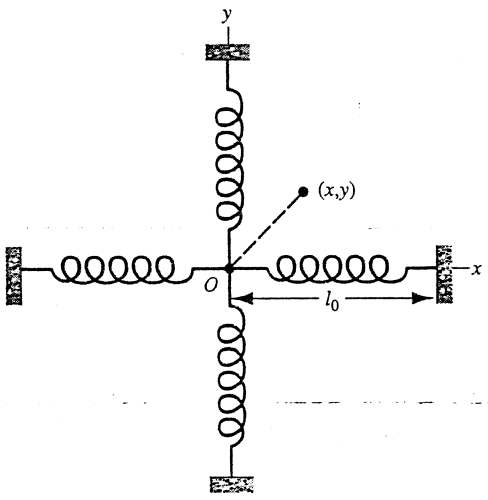


FIGURA 11.34 Problema 15.

16. Un'auto di massa 1100 kg viaggia su strada piana alla velocità di 46 km/h. Frenando, la sua energia cinetica diminuisce di 51 kJ. (a) Trovare la velocità finale dell'auto. (b) Quanta energia cinetica le resta ancora?

17. Un ragazzo in corsa ha un'energia cinetica doppia di quella posseduta da un uomo di massa doppia rispetto alla sua. L'uomo aumenta la sua velocità di 1,00 m/s raggiungendo la stessa energia cinetica del ragazzo. Quali erano le loro velocità iniziali?

18. Dall'alto di una rupe si spara un proiettile di massa 0,550 kg con energia cinetica iniziale di 1550 J. Esso raggiunge la massima altezza di 140 m sopra la quota di lancio. (a) Quanto vale la componente orizzontale della sua velocità in questo momento? (b) Quanto valeva la componente verticale della velocità all'istante del lancio? (c) A un certo istante la componente verticale della velocità vale 65,0 m/s. A che quota si trova ora il proiettile?

19. Una cometa di massa $8{,}38 \cdot 10^{11}$ kg investe la Terra con velocità relativa di 30 km/s. (a) Calcolare la sua energia cinetica prima dell'impatto in unità megaton di TNT (trinitrotoluene, detto *tritolo*); l'esplosione di 1 megaton di tritolo libera un'energia di $4{,}2 \cdot 10^{15}$ J. (b) Il diametro del cratere che si genera in un'esplosione è proporzionale alla radice terza dell'energia liberata; 1 megaton di TNT produce un cratere del diametro di circa 1 km. Quant'è il diametro del cratere scavato dalla cometa? Si ritiene che gli effetti atmosferici conseguenti a simili impatti nei tempi antichi abbia provocato l'estinzione di molte specie animali e vegetali, tra cui i dinosauri.

20. Come illustra la Figura 11.35, un blocchetto di massa 263 g cade verticalmente su una molla di costante elastica $k = 2{,}52$ N/cm. Il blocchetto rimane attaccato alla molla che si comprime di una distanza massima pari a 11,8 cm. Quanto lavoro compie nella compressione (a) la forza di gravità e (b) la molla? (c) Qual era la velocità del blocchetto all'istante dell'impatto? (d) Se questa velocità fosse stata doppia, quanto sarebbe stata la compressione massima della molla? Si ignori l'attrito.

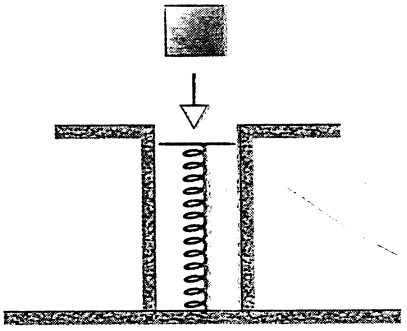


FIGURA 11.35 Problema 20.

21. Un oggetto di massa m nel tempo t_f accelera da fermo alla velocità v_f. (a) Dimostrare che il lavoro svolto sull'oggetto, in termini di v_f e t_f, è

$$L = \frac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2 .$$

(b) Qual è la potenza istantanea sviluppata sull'oggetto in funzione del tempo?

22. Due palline di massa 1,06 kg ciascuna sono fissate alle estremità di una barra d'acciaio lunga 1,20 m di massa 6,40 kg. La barra ruota su un piano orizzontale attorno al suo asse mediano verticale. A un certo istante la sua velocità angolare risulta di 39,0 giri/s. A causa degli attriti si ferma in 32,0 s. Assumendo che il momento torcente dovuto agli attriti sia costante, si calcoli (a) l'accelerazione angolare, (b) il momento torcente degli attriti, (c) l'energia cinetica perduta nella fase di arresto, (d) il numero di giri compiuti nell'intervallo di tempo necessario all'arresto. (e) Ora si supponga invece che il momento torcente applicato dagli attriti non sia costante. Senza ulteriori informazioni, quali delle quantità precedenti si può ancora determinare? Se ne esiste qualcuna, datene il valore.

23. Un'auto di massa 1040 kg ha quattro ruote uguali di massa complessiva 45,2 kg. Quale frazione dell'energia cinetica

totale della macchina è dovuta alla rotazione delle ruote attorno al loro asse? Si assuma che il loro momento d'inerzia sia pari a quello di un disco omogeneo di ugual massa e dimensione. Spiegate come mai non serve sapere il raggio delle ruote.

24. Un uomo sta in piedi su una piattaforma rotante senza attrito con velocità angolare di 1,22 giri/s. Tiene le braccia tese in avanti e con esse regge due pesi. In questa posizione il momento d'inerzia totale del sistema uomo + pesi + piattaforma vale 6,13 kg · m^2. Raccogliendo le braccia l'uomo riduce il momento d'inerzia al valore di 1,97 kg · m^2. (a) Quant'è ora la velocità angolare della piattaforma? (b) Qual è il rapporto tra le energie cinetiche successiva e precedente al movimento?

25. Nell'Esercizio 21 del Capitolo 10 si è trovata la velocità angolare dopo l'accoppiamento di due ruote. Che frazione dell'energia cinetica originaria si è persa a seguito dell'accoppiamento?

26. Nel Problema 11 del Capitolo 10 uno scarabeo che cammina su un disco rotante a un certo punto si ferma a mangiare una briciola di pane. Quanta energia cinetica perde?

27. Nel Problema 12 del Capitolo 10 due pattinatori tenendosi a un'asta (a) all'inizio pattinano lungo una circonferenza di diametro 2,92 m, poi (b) tirandosi con l'asta, riducono il diametro della traiettoria a 0,940 m. Calcolare le due energie cinetiche complessive per i due casi. Da dove deriva la variazione?

28. Una sonda spaziale senza equipaggio di massa 2500 kg è in moto rettilineo a velocità costante di 300 m/s. Il suo propulsore, che esercita una spinta di 3000 N, si accende per 65,0 s. Calcolare la variazione di energia cinetica se la direzione di spinta è parallela e discorde al moto, (b) parallela e concorde al moto, (c) perpendicolare al moto. Non si tenga conto della massa espulsa. Vedi anche l'Esercizio 13 del Capitolo 6.

29. Una forza esercita un impulso di modulo J su un corpo di massa m e ne varia la velocità da v_i a v_f. La forza ha la stessa direzione e verso del moto rettilineo del corpo. Dimostrare che il lavoro svolto dalla forza è $\frac{1}{2}J(v_i + v_f)$.

30. Supponiamo che le pale di un elicottero spingano verticalmente verso il basso la colonna d'aria che esse spazzano. La massa dell'elicottero è 1820 kg e la lunghezza delle pale è 4,88 m. Calcolare la potenza minima per tenere in aria l'elicottero. La massa volumica dell'aria sia 1,23 kg/m^3.

31. Come illustrato in Figura 11.36, una pallina di massa m viene scagliata con velocità v_i nella canna di un fucile a molla avente massa M e posato su una superficie senza attrito. La pallina rimane attaccata alla molla e non si perde energia in attriti. (a) Qual è la velocità di rinculo del fucile dopo l'evento? (b) Che frazione dell'energia cinetica iniziale della pallina si converte in lavoro svolto sulla molla?

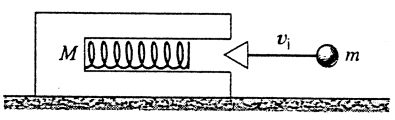


FIGURA 11.36 Problema 31.

32. Un blocco di massa $m_1 = 1{,}88$ kg scivola su un piano privo d'attrito alla velocità di 10,3 m/s. Davanti ad esso sulla sua stessa direzione si muove nello stesso verso un altro blocco di massa $m_2 = 4{,}92$ kg alla velocità di 3,27 m/s. Dietro a questo è attaccata, come si vede in Figura 11.37, una molla di massa trascurabile e costante elastica $k = 11{,}2$ N/cm. Quanto si comprime al massimo la molla a seguito dell'urto tra i due blocchi? (*Suggerimento*: al momento della massima compressione della molla i due blocchi si muovono solidali; l'urto è completamente anelastico.)

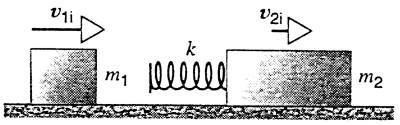


FIGURA 11.37 Problema 32.

33. Un oggetto A di massa 2,0 kg si scontra con un oggetto B di massa 3,0 kg. Le velocità iniziali sono $v_{iA} = (15 \text{ m/s})i + (30 \text{ m/s})j$ e $v_{iB} = (-10 \text{ m/s})i + (50 \text{ m/s})j$. Dopo l'urto si ha $v_{fA} = (-6{,}0 \text{ m/s})i + (30 \text{ m/s})j$. Quanta energia cinetica si è guadagnata o persa durante lo scontro? Vedi anche l'Esercizio 25 del Capitolo 6.

34. Consideriamo due osservatori, uno a terra e uno su un treno in moto rettilineo uniforme a velocità u rispetto al suolo. Ciascuno osserva che una particella di massa m, inizialmente ferma rispetto al treno, subisce un'accelerazione a per effetto di una forza costante applicata durante un tempo t nella stessa direzione e verso del treno. (a) Dimostrare che per entrambi il lavoro svolto dalla forza è uguale alla variazione di energia cinetica della particella, ma per uno l'energia cinetica è data da $\frac{1}{2}ma^2t^2$, mentre per l'altro è data da $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. (b) Si spieghi la differenza nel lavoro svolto dalla stessa forza in relazione alla distanza che ciascun osservatore misura per il percorso effettuato dalla particella nel tempo t. Si spieghi la differenza nell'energia cinetica finale misurata da ciascun osservatore in relazione al lavoro che la particella svolgerebbe se si fermasse rispetto a ciascuno dei due.

35. Una particella di massa m_1, a velocità v_{1i}, incorre in un urto frontale perfettamente elastico con una particella di massa m_2, inizialmente ferma. (a) Calcolare l'energia cinetica complessiva iniziale. (b) Calcolare l'energia cinetica complessiva finale. (c) Che frazione dell'energia cinetica originaria si perde nell'urto? (d) Sia v_{cm} la velocità del centro di massa del sistema. Considerate ora un sistema di riferimento solidale al centro di massa in modo che sia $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$ e $v_{2i} = -v_{cm}$. Rispondete nuovamente alle domande (a), (b) e (c) per un osservatore fisso in questo sistema di riferimento. L'energia cinetica persa è sempre la stessa? Motivate la risposta.

36. Considerate una situazione come quella proposta nel Problema 16 del Capitolo 6 (Figura 6.32). Gli urti però ora possono essere sia tutti elastici, sia tutti anelastici, sia un po' elastici e un po' anelastici. Le masse siano m, m' ed M. Dimostrate che il massimo trasferimento di energia cinetica da m a M si ottiene quando $m' = \sqrt{mM}$, cioè quando la massa intermedia ha il valor medio geometrico delle altre due.

 ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMA AL CALCOLATORE

1. La potenza del motorino elettrico di un'auto giocattolo di massa 2 kg dipende dalla sua velocità v secondo la funzione

$$P = v(5 - v)/3,$$

ove le costanti hanno dimensioni tali che P risulta misurato in W quando v è misurato in m/s. Assumete che l'auto parta da ferma e generate numericamente i grafici della posizione in funzione del tempo e della velocità in funzione del tempo.

CAPITOLO 12

ENERGIA 2: ENERGIA POTENZIALE

Abbiamo cominciato lo studio dell'energia nel capitolo precedente prendendo le mosse dal lavoro e dall'energia cinetica. Introduciamo ora un altro tipo di energia, quella potenziale: un genere di energia che si immagazzina in sistemi soggetti a certi tipi di forze.

Incontreremo poi il principio di conservazione dell'energia meccanica, che comprende sia l'energia cinetica sia l'energia potenziale: un approccio ai problemi che deriva ancora dalle leggi di Newton, ma che ci consente nuove e più promettenti analisi dei sistemi meccanici. Guidati da questo nuovo principio potremo riesaminare molte questioni riguardanti i moti traslatori e rotatori, che avevamo già risolto basandoci sulle leggi di Newton. Nel capitolo seguente allargheremo ulteriormente il concetto in un più ampio principio di conservazione dell'energia.

12.1 FORZE CONSERVATIVE

L'energia potenziale si può definire solo per una certa classe di forze, chiamate *forze conservative*. Prima di chiarire cosa intendiamo per forze conservative, consideriamo degli esempi di comportamento di tre diverse forze: la forza elastica di una molla, $F_x = -kx$; la forza di gravità, $F_y = mg$; la forza d'attrito, $f = \mu N$. Ci proponiamo di valutare il lavoro svolto da ciascuna di queste tre forze su una particella che segue un determinato percorso ritornando al punto di partenza.

1. *Forza elastica di una molla.* Nella Figura 12.1 è mostrato un blocco di massa m agganciato a una molla di costante elastica k; il blocco può scorrere senza attrito sul piano orizzontale. Inizialmente (Figura 12.1a) una forza esterna ha compresso la molla spostando il blocco nella posizione $x = +d$ rispetto alla posizione di riposo $x = 0$. All'istante $t = 0$, questa forza esterna viene meno e la molla comincia a compiere lavoro sul blocco. Muovendosi questo dal punto $x = +d$ al punto $x = 0$, la molla compie il lavoro $+\frac{1}{2}kd^2$ (Equazione 11.16). In conformità al teorema dell'energia cinetica questo lavoro si converte in energia cinetica del blocco.

Quando il blocco passa dalla posizione $x = 0$ (Figura 12.1b), la forza applicata dalla molla inverte la sua direzione, di modo che si inverte anche il segno dell'accelerazione e il blocco rallenta: la molla svolge ora lavoro *negativo*. Il blocco giunge ad arrestarsi nel punto $x = -d$, come illustrato nella Figura 12.1c, e il lavoro compiuto dalla molla in questo secondo tratto da $x = 0$ a $x = -d$ è $-\frac{1}{2}kd^2$. Procedendo in modo analogo, nel successivo tratto percorso dal blocco da $x = -d$ a $x = 0$ (Figura 12.1d), il lavoro compiuto dalla molla sarà $+\frac{1}{2}kd^2$, e per il tratto da $x = 0$ a $x = +d$, punto di partenza, il lavoro varrà nuovamente $-\frac{1}{2}kd^2$. Il blocco ha seguito un percorso completo di andata e ritorno nella medesima posizione iniziale (si confrontino le Figure 12.1a e 12.1e), e il lavoro complessivo svolto dalla molla è la somma del lavoro calcolato per ciascuna delle quattro tratte che costituiscono il ciclo completo, una somma chiaramente pari a zero.

2. *Forza di gravità.* La Figura 12.2 mostra un sistema consistente di un oggetto su cui agisce la forza gravitazionale terrestre. Una forza esterna inizialmente lancia l'oggetto (pensiamo a una palla) verso l'alto con velocità iniziale v_0 diretta verticalmente e quindi dotata di energia cinetica $\frac{1}{2}mv_0^2$. Man mano che la palla sale, la Terra compie

 ISBN 88-408-1254-7

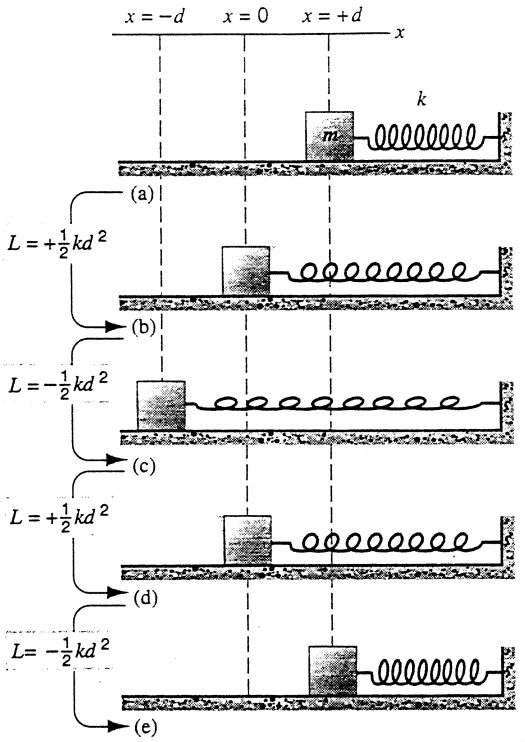


FIGURA 12.1 Un blocco si muove sotto l'azione della forza di richiamo di una molla da (a) $x = +d$ a (b) $x = 0$ fino a (c) $x = -d$ spostandosi a sinistra. E da qui a (d) $x = 0$ ed (e) $x = +d$, tornando verso destra. Il lavoro svolto dalla forza elastica di richiamo per passare da ciascuna posizione alla successiva è riportato nei riquadri a sinistra in corrispondenza di ciascun passaggio. Si noti che il lavoro complessivo per compiere il ciclo completo è nullo.

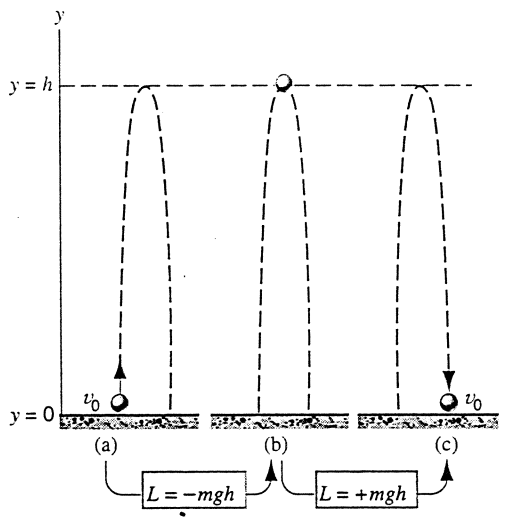


FIGURA 12.2 Una palla lanciata in alto sotto l'effetto della forza gravitazionale terrestre. In (a) è raffigurata mentre lascia la posizione di partenza, in (b) quando raggiunge il culmine della traiettoria e in (c) quando ricade a terra. Il lavoro svolto dalla forza gravitazionale per passare da ciascuna posizione alla successiva è riportato nei riquadri in basso in corrispondenza di ciascun passaggio. Si noti che il lavoro complessivo per compiere il ciclo completo è nullo.

lavoro su di essa fino ad arrestarla all'altezza $y = h$. Il lavoro svolto per questo tragitto da $y = 0$ a $y = h$ è $-mgh$ (la forza costante mg moltiplicata per la distanza h che, essendo di verso contrapposto alla forza, dà un risultato negativo). Poi la palla cade e il lavoro svolto dalla Terra nel tratto da $y = h$ a $y = 0$ vale $+mgh$. Il lavoro totale compiuto dalla Terra, per il percorso completo della palla di andata e ritorno nello stesso punto, vale zero.

3. *Forza d'attrito.* In questo terzo esempio consideriamo un disco di massa m fissato all'estremità di un'asticella rigida di lunghezza R, che gli consente di ruotare attorno all'altra estremità dell'asticella, come in Figura 12.3. Una forza esterna imprime una velocità iniziale v_0 al disco costringendolo a ruotare lungo una circonferenza di raggio R su un piano orizzontale che esercita un attrito sul disco. Venuta a cessare la forza esterna, l'unica forza che compie lavoro sul disco rimane quella d'attrito, esercitata *dalla* superficie *sulla* faccia inferiore del disco. Essa agisce nella stessa direzione e in verso opposto a quello di movimento del disco, di modo che il lavoro che essa svolge sia sempre negativo. Pertanto quando il disco, effettuato un giro, ritorna alla stessa posizione di partenza, il lavoro svolto su di esso non è sicuramente nullo: sarà di certo una quantità negativa finita.

Fissiamo subito l'attenzione sulle differenze tra questi tre esempi. Nei primi due (molla e gravità), dopo che il corpo ha eseguito un percorso chiuso tornando al punto di partenza, il lavoro svolto su di esso è nullo. Nel terzo caso (attrito), il percorso chiuso ha comportato lo svolgimento di un certo lavoro. È bene che classifichiamo dunque le forze in base a questo loro diverso comportamento.

> *Considerato il lavoro totale compiuto da una forza su un corpo puntiforme che percorre un cammino chiuso ritornando al punto iniziale, se questo lavoro è nullo, chiamiamo la forza conservativa. Se il lavoro totale non è nullo, la forza non è conservativa.*

La forza di richiamo della molla e la forza di gravità sono due esempi di forze conservative. L'attrito è un esempio di forza non conservativa.

Un altro modo per decidere se un certo tipo di forza è conservativa o no consiste nel confrontare il lavoro che essa svolge su un oggetto in moto da una posizione a un'altra attraverso differenti percorsi. Supponente per esempio di voler trasferire un pacco di massa m dal pian terreno al primo piano di un edificio, ove i piani sono tutti caratterizzati da un'altezza h. Se il pacco passa dal piano terreno al primo piano direttamente, la forza gravitazionale (conservativa) compie su di esso un lavoro $L_g = -mgh$. Se invece il pacco va prima al quinto piano ($L_g = -5mgh$) e poi ridiscende al primo ($L_g = +4mgh$), il lavoro totale svolto dalla forza di gravità è ancora $L_g = -mgh$, lo stesso svolto nel primo caso. Insomma, non importa per quanti piani il pacco vada su e giù anche più volte; se parte dal pian terreno e fi-

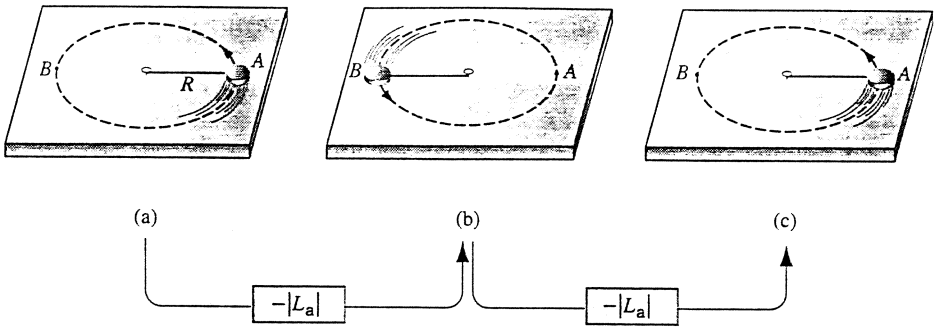


FIGURA 12.3 Un disco percorre con attrito una traiettoria circolare su un piano orizzontale. Le posizioni mostrate rappresentano (a) un arbitrario punto di partenza, (b) la posizione dopo mezzo giro e (c) il ritorno al punto di partenza dopo un giro completo. Il lavoro svolto dalla forza d'attrito per passare da ciascuna posizione alla successiva è riportato nei riquadri in basso in corrispondenza di ciascun passaggio. Si noti che il lavoro complessivo per compiere il ciclo completo non è nullo, ma è negativo e vale $-2|L_g|$.

nisce al primo piano, il lavoro complessivo svolto dalla forza gravitazionale tra la posizione iniziale e quella finale è sempre pari a $-mgh$.

Consideriamo d'altra parte il comportamento di una forza non conservativa, quale la forza d'attrito agente sul sistema di Figura 12.3, mentre agisce sul disco che va dal punto A al punto B attraverso due diversi percorsi possibili. In un caso compie mezzo giro da A a B, nel secondo caso compie un giro e mezzo partendo da A e arrivando ancora a B. Per quanto occorra adesso porre un po' d'attenzione nel calcolo del lavoro compiuto dalla forza d'attrito (Paragrafo 13.3), è subito evidente comunque che il modulo del lavoro (negativo) sarà maggiore nel secondo caso che nel primo, dato che il secondo percorso è più lungo. Quando abbiamo a che fare con forze non conservative come quella d'attrito, il lavoro che esse svolgono su un corpo dipende dal cammino che questo segue per andare dalla posizione iniziale a quella finale.

Ecco dunque un secondo modo di distinguere le forze conservative.

> *Considerato il lavoro totale svolto da una forza che agisce su un corpo puntiforme in moto da una posizione iniziale a una posizione finale lungo un qualsiasi cammino, se questo lavoro risulta uguale per tutti i percorsi, chiamiamo la forza conservativa. Se il lavoro totale è invece differente per cammini diversi, la forza non è conservativa.*

Con l'aiuto della Figura 12.4, è facile dimostrare che i due criteri esposti per identificare le forze conservative sono equivalenti. Nella Figura 12.4a una particella percorre un cammino chiuso da a a b e ritorno, attraverso i due percorsi 1 e 2. Se su di esso agisce la sola forza conservativa F, il lavoro complessivo che questa compie per l'intero ciclo è nullo:

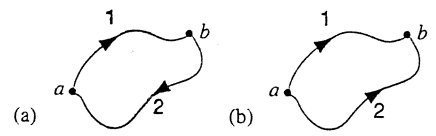


FIGURA 12.4 (a) Una particella sotto l'effetto di una forza conservativa percorre un cammino chiuso partendo dal punto a, passando dal punto b e tornando al punto a. (b) Una particella in partenza dal punto a può raggiungere il punto b per due percorsi diversi.

$$L_{ab.1} + L_{ba.2} = 0,$$

ossia

$$\underbrace{\int_a^b F \cdot ds}_{\text{percorso 1}} + \underbrace{\int_b^a F \cdot ds}_{\text{percorso 2}} = 0. \qquad (12.1)$$

L'Equazione 12.1 è l'espressione matematica corrispondente al *primo* criterio esposto per la classificazione delle forze conservative.

Cambiare il verso di percorrenza del cammino comporta l'inversione degli estremi d'integrazione e il cambio di segno del vettore spostamento: il lavoro svolto per andare da a a b è dunque in relazione con il lavoro svolto per il cammino in senso opposto come segue:

$$\int_a^b F \cdot ds = -\int_b^a F \cdot ds \qquad \text{(percorso qualunque)},$$

ovvero, nel caso del percorso 2,

$$L_{ab.2} = -L_{ba.2}. \qquad (12.2)$$

Combinando le equazioni 12.1 e 12.2 si ottiene

$$L_{ab.1} = L_{ab.2},$$

ossia

$$\underbrace{\int_a^b F \cdot ds}_{\text{percorso 1}} = \underbrace{\int_a^b F \cdot ds}_{\text{percorso 2}}. \qquad (12.3)$$

Questa è l'espressione matematica del *secondo* criterio per definire le forze conservative: il lavoro svolto da una forza conservativa è indipendente dal cammino. La prima definizione conduce quindi alla seconda, e da questa, con analoghi argomenti, si può dedurre la prima: le due definizioni sono equivalenti.

12.2 ENERGIA POTENZIALE

Nel paragrafo precedente abbiamo esaminato due sistemi soggetti a forze conservative. Essi hanno delle caratteristiche comuni: sono formati da almeno due corpi (il blocco e la molla, oppure la palla e la Terra), che interagiscono attra-

 ISBN 88-08-1254-7

verso una forza (elastica o gravitazionale), la quale compie lavoro trasferendo energia tra le parti del sistema quando queste si muovono l'una rispetto all'altra.

In situazioni come queste, in cui si ha una forza conservativa agente tra i diversi corpi di un sistema, è conveniente definire un altro tipo di energia: l'*energia potenziale*. L'energia potenziale U è energia associata alla *configurazione* di un sistema. Parlando di «configurazione» ci riferiamo al modo in cui le parti del sistema si collocano le une rispetto alle altre; per esempio la molla è più o meno compressa dal blocco, oppure la palla è più o meno distante dalla Terra.

Man mano che una forza conservativa compie lavoro in un sistema, la sua configurazione complessiva muta e così pure si assiste a una variazione di energia potenziale da un valore iniziale U_i a un valore finale U_f. Per definizione stabiliamo che questa variazione di energia potenziale sia

$$\Delta U = U_f - U_i = -L, \tag{12.4}$$

in cui L rappresenta il lavoro svolto dalla forza conservativa mentre il sistema passa dalla configurazione iniziale a quella finale.

È molto importante sottolineare che l'energia potenziale è un attributo del *sistema* e non di un singolo corpo contenuto nel sistema. Parleremo quindi, in modo appropriato, di "energia potenziale elastica del sistema blocco-molla" oppure di "energia potenziale gravitazionale del sistema palla-Terra". A rigore non è corretto dire semplicemente "energia potenziale elastica della molla" o "energia potenziale gravitazionale della palla." È vero tuttavia che la modifica di configurazione del sistema blocco-molla si manifesta nella compressione della molla, mentre il blocco, essendo rigido, non subisce mutamenti di forma o dimensioni; ci viene naturale quindi associare l'energia potenziale del sistema blocco-molla alla sola molla. Lo stesso dicasi quando cambia la configurazione del sistema palla-Terra: chi si muove in sostanza è la palla, anche se la Terra in realtà rincula al rimbalzo della palla; ma la massa della Terra è tale che lo spostamento della Terra sia del tutto trascurabile al confronto di quello della palla; ne consegue che spesso per brevità associamo l'energia potenziale di questo sistema alla sola palla.

Consideriamo il caso in cui basta tener conto del lavoro svolto su un solo corpo del sistema, che supponiamo muoversi nella sola direzione dell'asse x: la sua coordinata x è tutto quanto serve per specificare la configurazione del sistema. Introducendo l'Equazione 11.14, che esprime il lavoro compiuto da una forza unidimensionale, si ha

$$\Delta U = U(x_f) - U(x_i) = -L = -\int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx\,. \tag{12.5}$$

L'Equazione 12.5 ci dà modo di calcolare la differenza di energia potenziale tra le due posizioni x_i e x_f per una particella soggetta alla forza $F_x(x)$. Siamo talvolta interessati a conoscere l'energia potenziale associata a una certa configurazione o posizione x rispetto a una posizione di riferimento x_0:

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_x(x)\,dx. \tag{12.6}$$

Dato che sono le differenze o variazioni di energia potenziale ad avere significato fisico, siamo liberi di scegliere la posizione di riferimento come meglio ci conviene e quindi di fissare l'energia potenziale $U(x_0)$ al valore più opportuno. Sarà poi la funzione $U(x)$ a fornirci il valore dell'energia potenziale di qualsiasi configurazione del sistema, per esempio quella relativa alle posizioni x_1, x_2, ecc. Se scegliamo diversamente la posizione di riferimento e quindi fissiamo un altro valore per $U(x_0)$, entrambe le energie potenziali $U(x_1)$ e $U(x_2)$ cambieranno, ma la loro differenza $U(x_1) - U(x_2)$, che è la quantità fisicamente significativa, resterà immutata. L'analisi del comportamento dinamico rimane quindi indipendente dalla scelta di $U(x_0)$.

Può accadere che lo stato finale e quello iniziale del sistema coincidano, e cioè che la particella compia un cammino chiuso. Se dobbiamo rispettare il significato fisico che abbiamo attribuito alla differenza di energia potenziale, ne consegue che in un caso simile $\Delta U = U_f - U_i = 0$, dato che i valori finale e iniziale dell'energia potenziale sono riferiti a una stessa posizione. L'Equazione 12.4 impone in questi casi che il lavoro L sia nullo. Ciò è vero, l'abbiamo già visto, per le forze conservative. Ecco perché possiamo definire l'*energia potenziale solo in presenza di forze conservative*. In particolare alle forze d'attrito non è possibile associare un'energia potenziale, giacché il lavoro svolto da tali forze lungo un cammino chiuso è diverso da zero.

Derivando l'Equazione 12.6 possiamo ricavare la forza a partire dall'energia potenziale:

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}\,. \tag{12.7}$$

Ecco un'altra maniera di definire l'energia potenziale: l'*energia potenziale è una funzione della posizione che, derivata e cambiata di segno, equivale alla forza.*

Illustriamo ora il calcolo dell'energia potenziale per i due casi di forze conservative già trattati nel Paragrafo 12.1: il sistema blocco-molla e il sistema palla-Terra.

Forza elastica di richiamo

Riferendoci al sistema blocco-molla di Figura 12.1, scegliamo la posizione di riferimento x_0 in corrispondenza della posizione di riposo della molla ($x_0 = 0$); l'energia potenziale del sistema sarà dunque nulla quando il blocco si trova in questo punto [$U(x_0) = 0$]. Introducendo nell'Equazione 12.6 questo valore e l'espressione per la forza elastica $F_x(x) = -kx$, si ottiene

$$U(x) - 0 = -\int_0^x (-kx)\,dx,$$

ossia

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2\,. \tag{12.8}$$

Data una distanza x di cui si trova spostato il blocco rispetto

alla posizione di riferimento, l'energia potenziale del sistema in quella posizione vale $\frac{1}{2}kx^2$. Il verso dello spostamento non conta: che la molla sia estesa o compressa di una medesima lunghezza x, l'energia potenziale che immagazzina è la medesima.

Derivando l'Equazione 12.8 rispetto alla distanza, possiamo verificare l'Equazione 12.7:

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}kx^2) = -kx = F_x .$$

Forza gravitazionale

Nel caso del sistema palla-Terra rappresentiamo la coordinata verticale con y piuttosto che con x e fissiamo il verso positivo orientato in alto. Come posizione di riferimento $y_0 = 0$ assumiamo il livello del terreno: in tale punto quindi $U(y_0) = 0$. Con l'Equazione 12.6, posto $F_y(y) = -mg$, possiamo ora valutare l'energia potenziale $U(y)$ del sistema:

$$U(y) - 0 = -\int_0^y (-mg)\,dy$$

$$U(y) = mgy. \qquad (12.9)$$

È immediato verificare che anche l'Equazione 12.7 è soddisfatta: $-dU/dy = -mg = F_y$.

PROBLEMA SVOLTO 12.1 Un ascensore delle *Petronas Towers* di Kuala Lumpur, avente massa $m = 920$ kg, sale dal pian terreno alla quota $h = 412$ m sopra il livello del suolo. Qual è la variazione di energia potenziale del sistema ascensore-Terra?

Soluzione Dall'Equazione 12.9 otteniamo

$$\Delta U = mg\,\Delta y = mgh = (920\text{ kg})(9{,}80\text{ m/s}^2)(412\text{ m}) =$$
$$= 3{,}7 \cdot 10^6\text{ J} = 3{,}7\text{ MJ}.$$

Equivale quasi esattamente a 1 kWh, che in energia elettrica ha un costo dell'ordine di una decina di centesimi.

Dall'Equazione 12.4 possiamo vedere che la forza gravitazionale compie sulla cabina in salita un lavoro pari a –3,7 MJ. Il segno meno è giustificato dai versi discordi che presentano la forza di gravità e lo spostamento dell'ascensore.

PROBLEMA SVOLTO 12.2 In fondo a un binario morto sulla traversa di arresto è ancorato un respingente, dotato di una molla molto rigida avente costante $k = 1{,}25 \cdot 10^8$ N/m. Un treno in manovra finisce contro il respingente e ne comprime la molla per una distanza di 5,6 cm. Quant'è l'energia potenziale immagazzinata nella molla?

Soluzione Imponiamo $U = 0$ allo stato di riposo della molla ($x = 0$). L'Equazione 12.8 dà immediatamente

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}25 \cdot 10^8\text{ N/m})(0{,}056\text{ m})^2 = 1{,}96 \cdot 10^5\text{ J}.$$

12.3 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

Una volta introdotto il concetto di energia potenziale, lo possiamo combinare con quello di energia cinetica, per giungere a formulare il principio di *conservazione dell'energia meccanica*, un nuovo modo di affrontare i problemi di meccanica.

Consideriamo un sistema isolato. Per sistema *isolato* intendiamo un sistema su cui non agiscono forze *esterne*, oppure, in caso di loro presenza, esse non compiono lavoro sul sistema. Per esempio, due dischi da hockey legati da una molla e liberi di scivolare su una superficie orizzontale priva d'attrito costituiscono un sistema isolato. È vero infatti che su di essi agiscono la forza normale e la forza di gravità, entrambe forze esterne, ma queste non compiono lavoro sul sistema rappresentato dai due dischi e dalla molla.

Se da una parte eventuali forze esterne in un sistema isolato non compiono lavoro, dall'altra parte gli elementi che costituiscono il sistema possono esercitare forze su altri elementi del sistema. Queste, che chiamiamo forze *interne*, al variare della configurazione sono in grado di svolgere lavoro all'interno del sistema. Assumiamo che le forze interne siano conservative, ciò che ci permette di definire un'energia potenziale del sistema. Nel sistema isolato dischi-molla, per esempio, la molla esercita una forza (conservativa) su entrambi i dischi. Se la molla si comprime o si allunga durante il moto dei dischi, la sua forza elastica compie lavoro su ciascun disco e ne varia l'energia cinetica.

Per analizzare un caso semplice, consideriamo il sistema blocco-molla di Figura 12.1a, in cui il blocco si sposta dalla posizione $x = +d$ alla posizione $x = 0$. All'espandersi della molla corrisponde una variazione dell'energia cinetica del blocco pari a ΔK, che per il teorema dell'energia cinetica è data da

$$\Delta K = L, \qquad (12.10)$$

ove L rappresenta il lavoro positivo svolto sul blocco dalla forza di richiamo della molla. Contemporaneamente, all'espandersi della molla, l'energia potenziale del sistema blocco-molla varia di una quantità ΔU, che per definizione di energia potenziale (Equazione 12.4) è data da

$$\Delta U = -L. \qquad (12.11)$$

Risulta dunque che in questo sistema blocco-molla l'aumento di energia cinetica eguaglia la *diminuzione* di energia potenziale: $\Delta K = -\Delta U$.

Possiamo estendere questa conclusione al caso più generale di un sistema isolato conservativo costituito di molti punti materiali, che interagiscono anche con un gran numero di forze conservative, quali possono essere forze elastiche, gravitazionali o di natura elettromagnetica. La variazione *totale* di energia cinetica di tutte le particelle che costituiscono il sistema equivale in modulo ed è di segno opposto alla variazione di energia potenziale *totale* del sistema, ossia

$$\Delta K_{\text{totale}} = -\Delta U_{\text{totale}}.$$

 ISBN 88-408-1254-7

Possiamo riscrivere questa relazione in modo più incisivo come

$$\Delta K_{\text{totale}} + \Delta U_{\text{totale}} = 0. \qquad (12.12)$$

Dunque, in un sistema isolato ove agiscano solo forze conservative, qualsiasi variazione di energia cinetica complessiva del sistema deve essere bilanciata da un'uguale e opposta variazione di energia potenziale complessiva, in modo tale che la loro somma risulti costantemente nulla.

Possiamo anche interpretare l'Equazione 12.12 come $\Delta(K_{\text{totale}} + U_{\text{totale}}) = 0$. Equivale a dire che, quando ci troviamo in presenza di sole forze conservative, la variazione della quantità $K_{\text{totale}} + U_{\text{totale}}$ in un sistema isolato è nulla. Possiamo chiamare questa quantità *energia meccanica totale del sistema*, E_{totale}:

$$E_{\text{totale}} = K_{\text{totale}} + U_{\text{totale}}. \qquad (12.13)$$

Con questa definizione di energia meccanica la (12.12) diviene

$$\Delta(K_{\text{totale}} + U_{\text{totale}}) = \Delta E_{\text{totale}} = 0. \qquad (12.14)$$

Per brevità possiamo anche tralasciare i pedici «totale», sottintendendo che nell'applicazione della (12.14) ci riferiamo sempre all'energia *complessiva* del sistema.

Essendo nulla la variazione dell'energia meccanica nel sistema, significa che questa rimane costante, e dunque possiamo riscrivere l'Equazione 12.14 in questo modo:

$$E_i = E_f \quad \text{oppure} \quad K_i + U_i = K_f + U_f, \qquad (12.15)$$

in cui i pedici «i» ed «f» si riferiscono agli stati iniziale e finale del sistema.

L'Equazione 12.15 rappresenta l'espressione matematica del *principio di conservazione dell'energia meccanica*:

> *in un sistema isolato ove agiscono solo forze conservative l'energia meccanica totale resta costante.*

Le forze che agiscono in un tale sistema possono convertire l'energia cinetica in potenziale o l'energia potenziale in cinetica, o addirittura una forma di energia potenziale in un'altra, ma l'energia meccanica totale deve rimanere sempre costante. Nel caso dovessero intervenire forze non conservative, come la forza d'attrito, l'energia meccanica totale *non* resta costante; lo vedremo nel Capitolo 13.

Come esempio di conservazione dell'energia meccanica torniamo al sistema blocco-molla di Figura 12.1. In un istante qualunque la molla si trova compressa o allungata di una quantità x (rispetto alla posizione di riferimento $x = 0$). mentre nello stesso istante il blocco si muove con velocità v; l'energia meccanica totale è dunque $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. La molla, alla sua massima elongazione o compressione, occupa la posizione di modulo x_m, e si trova ferma. In questo stato l'energia cinetica del blocco è nulla e l'energia potenziale del sistema assume il valore massimo: l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}kx_m^2$ è interamente sotto forma di energia potenziale. Nel tornare allo stato di riposo la molla perde energia potenziale, mentre il blocco acquista energia cinetica; quando questo passa per il punto $x = 0$ corrispondente allo stato di riposo della molla, l'energia potenziale è nulla

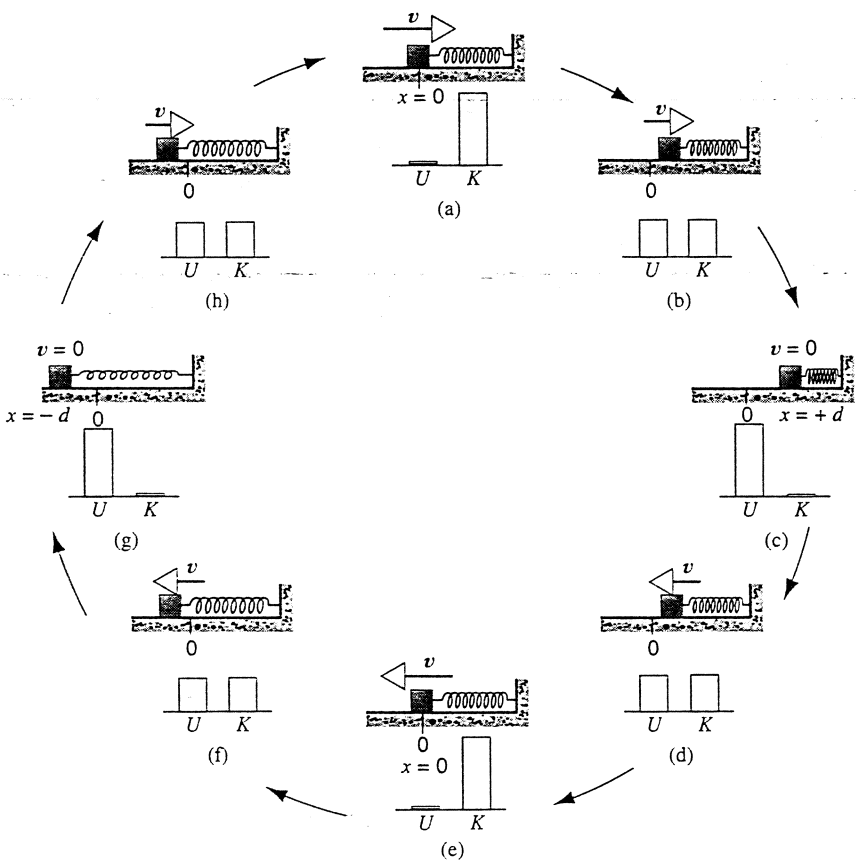


FIGURA 12.5 Un blocco attaccato a una molla oscilla avanti e indietro su un piano orizzontale privo d'attrito. L'energia meccanica E del sistema resta costante ma si ripartisce in modo diverso tra energia cinetica ed energia potenziale nelle varie fasi del moto. In certi istanti l'energia è interamente di tipo cinetico (a, e); in altri è interamente potenziale (c, g) e in alcuni è ripartita equamente tra le due forme (b, d, f, h).

e l'energia cinetica del blocco assume valore massimo: l'energia meccanica $E = \frac{1}{2}mv_m^2$ è interamente sotto forma di energia cinetica. Nella Figura 12.5 è illustrato questo processo ciclico, in cui ad ogni stadio del moto, la somma $K + U$ resta costante.

In modo analogo il sistema palla-Terra di Figura 12.2 accresce la sua energia potenziale di tipo gravitazionale man mano che la palla sale e, diminuendo la sua velocità, perde energia cinetica; l'energia meccanica resta tuttavia invariata. Fissando $U = 0$ al suolo, l'energia meccanica iniziale è $E = \frac{1}{2}mv_0^2$. Abbiamo già osservato infatti come il moto di rinculo della Terra sia trascurabile e come quindi l'energia cinetica sia in pratica connessa col solo moto della palla. A un'altezza qualunque y l'energia meccanica totale è data sempre dalla somma delle energie cinetica e potenziale: $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$. Al culmine della traiettoria, $y = h$, la velocità della palla è zero e quindi $E = mgh$. L'energia meccanica ha il medesimo valore in qualsiasi istante, per quanto possa ripartirsi in modo differente tra le forme cinetica e potenziale. Mentre la palla cade, il sistema perde energia potenziale e la palla guadagna energia cinetica: l'energia meccanica totale si conserva invariata.

PROBLEMA SVOLTO 12.3 In un fucile a molla, la molla è compressa di una distanza $d = 3{,}2$ cm rispetto allo stato di riposo e il fucile viene caricato con una pallottola di massa $m = 12$ g. Con che velocità viene sparato il proiettile? Si assuma una costante elastica $k = 7{,}5$ N/cm e una canna orizzontale priva d'attrito.

Soluzione Il sistema isolato consiste nella molla + proiettile, come in Figura 12.1. Nella configurazione iniziale il proiettile è fermo e la molla è compressa. Dunque $E_i = K_i + U_i = 0 + \frac{1}{2}kd^2$, come si evince dall'Equazione 12.8, in cui $x = d$. Quando la molla, espandendosi, raggiunge la sua posizione di riposo, la sua estremità, assieme alla pallottola, ha velocità massima v_m, velocità che la pallottola poi mantiene staccandosi dalla molla mentre quest'ultima si allunga ulteriormente diminuendo invece la velocità della propria estremità. All'istante di riposo della molla dunque $E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}mv_m^2 + 0$. Il principio di conservazione dell'energia impone che

$$\frac{1}{2}mv_m^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kd^2 .$$

Risolvendo quest'equazione rispetto a v_m si ottiene

$$v_m = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0{,}032\text{ m})\sqrt{\frac{750\text{ N/m}}{12 \times 10^{-3}\text{ kg}}} = 8{,}0\text{ m/s}.$$

PROBLEMA SVOLTO 12.4 Un vagoncino di una montagna russa viene sollevato coi suoi passeggeri fino a un'altezza $y = 25$ m, e da qui viene sganciato e lasciato libero di accelerare sotto l'azione della gravità. Se si trascura l'attrito, con che velocità giungerà al suolo?

Soluzione Il sistema è costituito dal vagoncino (passeggeri inclusi) e dalla Terra. Esso è isolato perché il binario (che non fa parte del sistema) non compie lavoro sul vagoncino: la forza normale che questo esercita è infatti sempre perpendicolare allo spostamento, e le forze d'attrito sono assenti per ipotesi. All'inizio del volo il vagoncino si trova fermo con energia meccanica iniziale

$$E_i = U_i + K_i = mgy + 0 ,$$

dove la quota $y = 0$ corrisponde a quella del suolo. Quando il vagoncino giunge in fondo alla pista l'energia meccanica finale è

$$E_f = U_f + K_f = 0 + \frac{1}{2}mv^2 ,$$

ove si è fissato $U = 0$ in corrispondenza di $y = 0$. Per il principio di conservazione dev'essere $E_i = E_f$ e quindi

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Risolvendo rispetto a v, si ottiene

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{(2)(9.8\text{ m/s}^2)(25\text{ m})} = 22\text{ m/s}.$$

Si tratta della stessa velocità con cui giungerebbe al suolo un corpo lasciato cadere verticalmente da un'altezza di 25 m in assenza d'attrito. La forza normale esercitata dal binario non influisce minimamente sul modulo della velocità; semplicemente ne muta la direzione. Si noti che il risultato non dipende dalla massa del vagoncino e quindi nemmeno dagli occupanti.

Durante il suo tragitto il vagoncino aumenta e diminuisce la sua velocità scalare passando dai dossi alle cunette e viceversa purché non incontri un dosso di altezza maggiore della quota di partenza: l'energia meccanica posseduta dal sistema è sufficiente a superare tutti i picchi intermedi di energia potenziale e a portare il



FIGURA 12.6 Una «macchina» che converte energia potenziale gravitazionale in energia cinetica.

 ISBN 88-408-1254-7

vagoncino al termine del percorso. In un problema di questo tipo potete apprezzare tutti i vantaggi offerti per risolverlo dall'approccio energetico. Perseguire la soluzione attraverso le leggi di Newton comporterebbe la conoscenza dell'esatta forma di tutto il percorso con la necessità di calcolare le componenti delle forze e l'accelerazione in ogni punto. Il procedimento sarebbe intollerabilmente complicato, anche se ci consentirebbe di ottenere maggiori informazioni rispetto alla semplice tecnica qui applicata; per esempio ci indicherebbe quant'è il tempo richiesto al vagoncino per completare il tragitto.

Applicazioni del principio di conservazione dell'energia meccanica

Abbiamo ricavato il principio di conservazione dell'energia meccanica dalla definizione di energia potenziale ($L = -\Delta U$) e dal teorema dell'energia cinetica ($L = \Delta K$), che a sua volta trae origine dalla seconda legge di Newton. È naturale quindi servirsi di questo principio per analizzare i sistemi conservativi già esaminati attraverso le leggi di Newton. Per illustrare l'utilità del principio di conservazione dell'energia meccanica riprendiamo in considerazione alcuni problemi che avevamo già risolto mediante le leggi di Newton. Limitiamoci a problemi lineari in cui le forze conservative che intervengono agiscono su corpi puntiformi.

PROBLEMA SVOLTO 12.5 Analizzare la macchina di Atwood (Problema svolto 5.5) valendosi dei principi energetici per calcolare la velocità e l'accelerazione dei blocchi dopo che essi hanno percorso una distanza y dalla posizione di riposo.

Soluzione Si riesamini il problema e in particolare il diagramma delle forze di Figura 5.9. Il sistema è formato dai due blocchi e dalla Terra. Assumiamo per semplicità che le posizioni iniziali dei due blocchi siano alla stessa quota y, che poniamo uguale a zero come punto di riferimento per l'energia potenziale. Di conseguenza l'energia potenziale iniziale è nulla. Essendo nulla anche l'energia cinetica iniziale, risulta che $E_i = 0$. Lasciati liberi i blocchi, il blocco 1 sale e il blocco 2 scende. Quando il primo occupa la posizione y e il secondo la posizione $-y$, la loro velocità scalare è v. L'energia meccanica finale è pertanto $\frac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy$ per il blocco 1 e $\frac{1}{2}m_2v^2 - m_2gy$ per il blocco 2. Il principio di conservazione dell'energia meccanica impone $E_f = E_i$, cioè

$$\tfrac{1}{2}m_1v^2 + m_1gy + \tfrac{1}{2}m_2v^2 - m_2gy = 0.$$

Risolvendo rispetto a v, si ottiene

$$v = \sqrt{2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}gy}.$$

Il blocco 1 quindi è in moto verso l'alto con velocità $v_y = +v$ e accelerazione $a_y = dv_y/dt$:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{2}\left(2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}gy\right)^{-1/2}\left(2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g\right)\frac{dy}{dt}.$$

Sostituendo a dy/dt l'espressione per v_y, con qualche passaggio si giunge a

$$a_y = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g.$$

È lo stesso risultato già ottenuto nel Problema svolto 5.5, ciò che dimostra che i due metodi sono equivalenti.

PROBLEMA SVOLTO 12.6 Con considerazioni di tipo energetico, trovare la velocità dei blocchi del Problema svolto 5.6 a una distanza L dal loro punto di partenza a riposo.

Soluzione Si riveda il Problema svolto 5.6. Il sistema è formato dai due blocchi più la Terra. Utilizzeremo la forma del principio di conservazione data dall'Equazione 12.12. L'energia cinetica iniziale è nulla. La variazione di energia cinetica è dunque $\Delta K = K_f = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2$ dove v è la velocità dei due blocchi dopo che hanno percorso la distanza L. Il blocco 1 si muove orizzontalmente, quindi ciò non comporta variazione dell'energia potenziale gravitazionale. La variazione totale di energia potenziale è quindi dovuta al moto verticale del solo blocco 2, ed è $\Delta U = m_2g\Delta y = m_2g(-L)$. Per il principio di conservazione dell'energia meccanica abbiamo

$$\Delta K + \Delta U = \tfrac{1}{2}m_1v^2 + \tfrac{1}{2}m_2v^2 - m_2gL = 0.$$

Risolvendo rispetto a v, si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2m_2gL}{m_1 + m_2}}.$$

Anche qui dovreste essere in grado di dimostrare che, derivando questa espressione rispetto al tempo, si ottiene l'accelerazione già trovata nella soluzione al Problema svolto 5.6.

12.4 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEL MOTO ROTATORIO

Come applicare i concetti di lavoro ed energia cinetica ai moti rotatori è stato illustrato nel Paragrafo 11.7. Ai sistemi che comprendono corpi in moto rotatorio è possibile estendere il principio di conservazione dell'energia meccanica. Non esistono princìpi *separati* per i moti traslatori e per i moti rotatori. L'energia cinetica che compare nell'Equazione 12.15 può comprendere sia termini traslatori sia termini rotatori.

PROBLEMA SVOLTO 12.7 Riconsideriamo il Problema svolto 9.10 per trovare, mediante ragionamenti di tipo energetico, la velocità del blocco dopo che è caduto da fermo per un'altezza di 0,56 m.

Soluzione Riguardate prima il problema e la Figura 9.26. Il sistema è composto dal blocco, dal disco e dalla Terra. Se il blocco parte da fermo, l'energia cinetica iniziale $K_i = 0$ è nulla sia per il blocco sia per il disco. La posizione iniziale del blocco sia $y = 0$, ove $U_i = 0$; dopo che è caduto raggiungendo la posizione $-y$, la sua energia potenziale è $U_f = mg(-y)$. L'energia cinetica finale del blocco in caduta vale $\frac{1}{2}mv^2$, mentre l'energia cinetica finale del disco è $\frac{1}{2}I\omega^2$. Dato che la corda non è elastica, la velocità v di caduta del blocco eguaglia la velocità tangenziale del bordo del disco, sicché $\omega = v/R$. Per il principio di conservazione dell'energia meccanica dev'essere $E_i = E_f$, e quindi

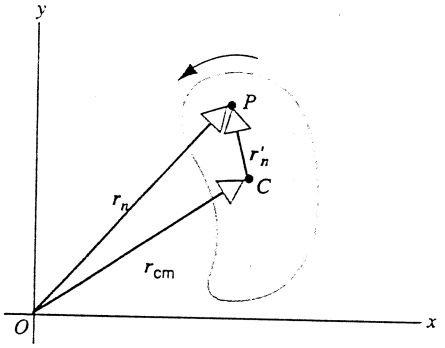


FIGURA 12.7 Il centro di massa C di un corpo in rotazione e in traslazione è individuato a un certo istante dalla posizione r_{cm}. Un generico punto P del corpo occupa la posizione r_n rispetto all'origine O delle coordinate e la posizione r'_n rispetto al centro di massa C.

$$0 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I(v/R)^2 - mgy,$$

che, risolta rispetto a v dopo aver posto $I = \frac{1}{2}MR^2$ (momento d'inerzia di un disco), dà

$$v = \sqrt{\frac{4mgy}{M+2m}} = \sqrt{\frac{4(1{,}2\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}56\text{ m})}{2{,}5\text{ kg} + 2(1{,}2\text{ kg})}} = 2{,}3\text{ m/s}.$$

Non vi sarà difficile dimostrare che l'accelerazione trovata risolvendo il Problema svolto 9.10 conduce a questo valore di velocità. Ancora una volta abbiamo verificato che i metodi basati sul principio di conservazione dell'energia equivalgono a quelli fondati sulle leggi di Newton.

Moto rototraslatorio

La combinazione dei moti traslatorio e rotatorio è stata trattata mediante le leggi di Newton nel Paragrafo 9.7. Rivediamola alla luce dei metodi energetici. Restringiamo la nostra analisi al caso di asse rotante fisso.

Dimostriamo dapprima che l'energia cinetica di un corpo generico per questo particolare ma importante caso di asse rotante fisso può scriversi come la somma dei termini indipendenti traslazionale e rotazionale. Nella Figura 12.7 si ha un corpo generico di massa M. Il suo centro di massa C è individuato in un certo istante dal vettore posizione r_{cm} rispetto all'origine del sistema di riferimento inerziale scelto. Un elemento puntiforme P di massa m_n si trova nella posizione r_n rispetto all'origine ed r'_n rispetto al centro di massa. Il suo moto traslatorio si svolge sul piano xy; ciò vale a dire che la componente z del vettore v_n che ne descrive il moto è costantemente nulla. Il corpo è anche in rotazione con velocità angolare istantanea ω attorno all'asse passante per il centro di massa e parallelo all'asse z. L'energia cinetica dell'elemento di massa m_n è data da $\frac{1}{2}m_n v_n^2$ e l'energia cinetica complessiva del corpo si trova mediante una somma estesa a tutti gli elementi del corpo:

$$K = \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_n v_n^2 . \qquad (12.16)$$

Dalla Figura 12.7 si riconosce che $r_n = r_{cm} + r'_n$. Derivando rispetto al tempo, troviamo la corrispondente relazione per le velocità: $v_n = v_{cm} + v'_n$, ove v_n è la velocità dell'elemento rispetto all'origine O, v_{cm} è la velocità del centro di massa e v'_n è la velocità dell'elemento relativa al centro di massa. Il moto, come osservato dal riferimento del centro di massa, è una rotazione pura attorno a un asse passante per il centro di massa e quindi il modulo di v'_n equivale a $\omega r'_n$.

La quantità v_n^2 che compare nell'Equazione 12.16 può esprimersi come $v_n \cdot v_n$, e quindi, in base alla relazione $v_n = v_{cm} + v'_n$, anche come $(v_{cm} + v'_n)\cdot(v_{cm} + v'_n) = v_{cm}\cdot v_{cm} + 2v_{cm}\cdot v'_n + v'_n \cdot v'_n$. L'Equazione 12.16 dell'energia cinetica diventa dunque

$$K = \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_n v_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \tfrac{1}{2}m_n(v_{cm}^2 + 2v_{cm}\cdot v'_n + v_n'^2) . \qquad (12.17)$$

Esaminiamo uno alla volta i tre addendi di questa sommatoria: (1) nel primo addendo l'unico fattore che dipende dall'indice di sommatoria è m_n, la cui somma è M, la massa totale del corpo; v_{cm} infatti può essere portato fuori dal simbolo di sommatoria perché non dipende da n. Questo primo termine diventa dunque $\sum \frac{1}{2}m_n v_{cm}^2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2$. (2) Il secondo addendo è $\sum \frac{1}{2}m_n(2v_{cm}\cdot v'_n) = m_n v_{cm}\cdot \sum m_n v'_n$. La quantità $\sum m_n v'_n$ corrisponde alla quantità di moto totale di tutti gli elementi del corpo misurata rispetto al centro di massa: $P' = \sum m_n v'_n$ che, in base all'Equazione 7.25 risulta nulla. (3) Il terzo addendo che compare nell'Equazione 12.17 si può semplificare rammentando che il moto del corpo nel riferimento del centro di massa è un moto puramente rotatorio, e che di conseguenza $v'_n = \omega r'_n$. Si ha dunque $\sum \frac{1}{2}m_n v_n'^2 = \sum \frac{1}{2}m_n r_n'^2 \omega^2$. Questa somma equivale al momento d'inerzia nel riferimento del centro di massa, $I_{cm} = \sum m_n r_n'^2$, e quindi $\sum \frac{1}{2}m_n v_n'^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$. Ritorniamo ora a sommare i tre addendi che compaiono nell'Equazione 12.17, di cui il secondo è nullo:

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 . \qquad (12.18)$$

L'Equazione 12.18 mostra chiaramente che l'energia cinetica di un corpo in movimento consiste di due termini, uno relativo al moto puramente traslatorio del centro di massa con velocità v_{cm}, l'altro associato al moto puramente rotatorio attorno a un asse passante per il centro di massa. I due termini sono indipendenti; si può avere rotazione anche in assenza di traslazione (per esempio quando il sistema di riferimento si muove a velocità v_{cm}). Le velocità v_{cm} e ω sono in genere indipendenti l'una dall'altra; i due termini che contribuiscono all'energia cinetica possono assumere qualunque valore indipendentemente l'uno dall'altro.

Rotolamento puro. Nel caso particolare di rotolamento puro, discusso nel Paragrafo 9.7, la velocità angolare e la velocità del centro di massa non sono indipendenti: per un oggetto di raggio R vale la relazione $v_{cm} = \omega R$. L'energia

 ISBN 88-408-1254-7

cinetica totale di conseguenza resta determinata completamente o dalla velocità lineare v_{cm} o da quella rotazionale ω, e le espressioni dell'energia cinetica per questo caso diventano

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}v_{cm}^2/R^2, \qquad (12.19a)$$

$$K = \tfrac{1}{2}M\omega^2R^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2. \qquad (12.19b)$$

Per entrambe è sufficiente determinare un parametro di velocità (v_{cm} o ω) per ottenere l'energia cinetica.

Quando un corpo rotola senza strisciare, una forza d'attrito si esercita nel punto di contatto tra il corpo e la superficie su cui rotola (vedi per esempio la Figura 9.33). Questa forza d'attrito tuttavia *non compie lavoro sul corpo in moto perché il punto d'applicazione della forza non si muove*. Si tratta di una forza d'attrito statico e questa semplicemente si applica a punti del corpo rotolante che cambiano continuamente. Una ruota ideale soggetta a una forza risultante nulla continua a rotolare (purché non strisci) mantenendo costanti le sue velocità traslazionale e rotazionale; se viceversa si compisse su di essa un lavoro esterno (per esempio per attrito), la sua energia cinetica varierebbe, ciò che non succede. Solo quando la ruota striscia sulla superficie si manifesta una forza d'attrito che svolge lavoro e modifica l'energia cinetica traslazionale e rotazionale.

PROBLEMA SVOLTO 12.8 Avvalendovi del principio di conservazione dell'energia meccanica, trovate la velocità finale del cilindro che rotola riprodotto nella Figura 9.32, nell'istante in cui raggiunge il fondo del piano inclinato.

Soluzione Nella stessa figura sono riportate le forze agenti sul cilindro. Assumiamo il sistema composto dal cilindro e dalla Terra. Una forza d'attrito è presente, però non compie lavoro e quindi non può influire sull'energia meccanica. L'energia cinetica iniziale è zero e l'energia potenziale iniziale è $Mgh = MgL \sin\theta$ misurata rispetto al valore zero fissato in corrispondenza del suolo. Quindi $E_i = K_i + U_i = 0 + MgL\sin\theta$. L'energia potenziale finale è nulla (perché coincide con quella di riferimento), mentre l'energia cinetica finale è data dall'Equazione 12.19a in funzione della velocità traslazionale finale del centro di massa: $E_f = K_f + U_f = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}v_{cm}^2/R^2 + 0$. Imponendo $E_f = E_i$, si ottiene

$$\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}v_{cm}^2/R^2 = MgL\sin\theta\,.$$

Posto il momento d'inerzia $I_{cm} = \tfrac{1}{2}MR^2$ possiamo risolvere quest'equazione rispetto a v_{cm} per giungere a

$$v_{cm} = \sqrt{\tfrac{4}{3}gL\sin\theta}\,,$$

in accordo con il risultato ottenuto nel Problema svolto 9.11.

PROBLEMA SVOLTO 12.9 In base al principio di conservazione dell'energia si trovi la velocità angolare finale dello yo-yo descritto nel Problema svolto 9.13.

Soluzione Il moto dello yo-yo che scende srotolandosi è un altro esempio di moto rototraslatorio. Il punto di contatto tra la corda e l'asse dello yo-yo svolge la stessa funzione del punto di contatto tra suolo e ruota che non striscia. Il sistema è costituito dallo yo-yo e dalla Terra. La velocità lineare dello yo-yo all'inizio ha modulo v_0 mentre la sua velocità angolare alla fine ha modulo ω, di modo che la variazione di energia cinetica, facendo uso di entrambe le Equazioni 12.19, risulta

$$\Delta K = K_f - K_i = (\tfrac{1}{2}M\omega^2R_0^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2) - \left(\tfrac{1}{2}Mv_0^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\frac{v_0^2}{R_0^2}\right).$$

Lo yo-yo cade dalla quota $y = 0$, ove $U_i = 0$. alla quota $-y$, ove $U_f = Mg(-y)$. La variazione di energia potenziale è dunque $\Delta U = -Mgy$. Ponendo $\Delta K + \Delta U = 0$ e risolvendo rispetto a ω, si ottiene

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{v_0}{R_0}\right)^2 + \frac{2gy}{R_0^2 + R^2/2}}.$$

Dovreste dimostrare che, derivando quest'equazione rispetto al tempo, si giunge all'espressione di α già ricavata nel Problema svolto 9.13 mediante le leggi di Newton.

12.5 SISTEMI CONSERVATIVI IN UNA DIMENSIONE: SOLUZIONE COMPLETA

Lo scopo delle analisi dei sistemi meccanici è sovente quello di descrivere il moto di una particella al passare del tempo. Nei Capitoli 3 e 4 lo abbiamo fatto avvalendoci delle leggi di Newton in una dimensione: questo ha permesso di prevedere la posizione e la velocità di una particella in qualunque istante voluto. In questo capitolo abbiamo già risolto molti degli stessi problemi ricorrendo al principio di conservazione dell'energia meccanica, che permette di trovare la velocità in una configurazione finale del sistema diversa da quella iniziale. I due approcci, quello dinamico e quello energetico, danno identici risultati, ma il secondo, come l'abbiamo applicato finora, non consente di conoscere la descrizione completa della posizione e della velocità in funzione del tempo. Vedremo ora come sia possibile estendere il metodo energetico fino a ottenere queste funzioni.

Restiamo nell'ambito unidimensionale e consideriamo una forza che dipende solo dalla posizione*. A questa forza è associata una funzione energia potenziale $U(x)$, che dipende pure dalla coordinata x. Dall'Equazione 12.13, definizione dell'energia meccanica, ricaviamo una relazione tra x e v_x:

$$U(x) + \tfrac{1}{2}mv_x^2 = E, \qquad (12.20)$$

che, risolta rispetto a v_x, dà

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}\,. \qquad (12.21)$$

*In una dimensione le forze che dipendono solo dalla posizione sono *sempre* conservative; non altrettanto dicasi per i casi bi- e tridimensionali, come vedremo nel prossimo paragrafo. La forza gravitazionale (costante) è conservativa anche se non dipende esplicitamente dalla posizione. La forza d'attrito invece (ancorché costante) *non* è conservativa, perché la sua direzione dipende dalla direzione del moto e non dalla posizione; è pertanto una forza che dipende dalla velocità.

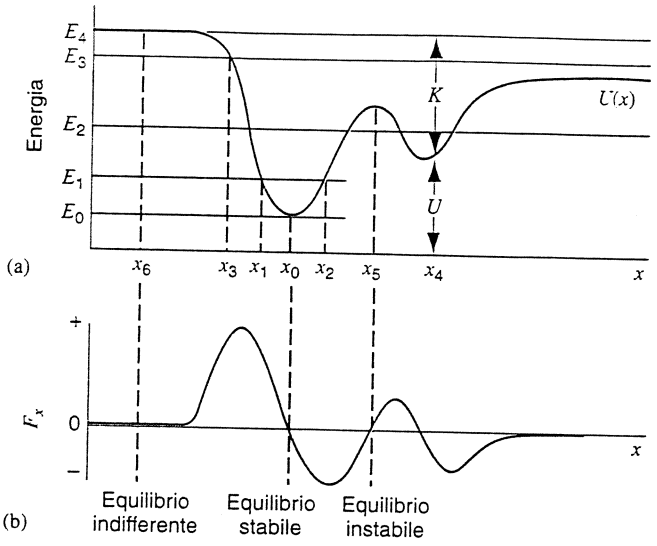


FIGURA 12.8 (a) Funzione energia potenziale $U(x)$. (b) Componente x della forza che corrisponde all'energia potenziale sopradescritta.

Da quest'espressione deduciamo che, dato un valore di E, il moto è limitato a quelle regioni dello spazio unidimensionale in cui $E > U(x)$, dato che non ammettiamo energie cinetiche negative o velocità immaginarie.

Riportando su grafico la funzione $U(x)$ otteniamo una buona descrizione qualitativa del moto, basata sull'Equazione 12.21. Consideriamo per esempio la funzione energia potenziale riprodotta in Figura 12.8a, che rappresenta l'energia potenziale di una particella in moto lungo l'asse x. La relazione tra l'energia potenziale e la forza è descritta dall'Equazione 12.7, $F_x = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$. La forza corrispondente all'energia potenziale è riportata nella Figura 12.8b. Ipotizziamo alcuni possibili valori per l'energia totale E. Dato uno di questi valori (per esempio E_4), l'energia cinetica in una certa posizione (per esempio x_4) si trova sottraendo dall'energia totale l'energia potenziale corrispondente a quella posizione. Se ne traggono le seguenti considerazioni qualitative.

$E = E_0$. Si tratta della minima energia che può possedere il sistema. Nella posizione x_0 in cui si verifica questa condizione, $E = U$, e di conseguenza $K = 0$. La particella dev'essere a riposo.

$E = E_1$. Se la particella è dotata di quest'energia totale, essa si può muovere solo nello spazio compreso tra x_1 e x_2. Dato che l'energia cinetica è sempre data dalla differenza tra l'energia totale e quella potenziale, la particella in questo caso assume l'energia cinetica massima, e quindi la velocità massima, in corrispondenza di x_0. Avvicinandosi a x_1 o a x_2, la sua velocità decresce. Quando giunge nei punti x_1 o x_2 la particella si ferma e non può che invertire il senso del suo moto. Per questo i due punti sono detti *punti d'inversione*.

$E = E_2$. Una particella dotata di energia totale E_2 presenta quattro punti d'inversione; essa può muoversi avanti e indietro nei due intervalli spaziali in cui l'energia potenziale è minore di E_2.

$E = E_3$. Questo livello di energia totale presenta un solo punto d'inversione, in corrispondenza di x_3. Una particella che vi giunga (inevitabilmente con velocità negativa) è costretta a tornare indietro con velocità positiva.

$E = E_4$. Energie totali al di sopra di questo valore non presentano punti d'inversione. La particella può spaziare sull'intero asse x e la sua velocità sarà data dall'Equazione 12.21.

Nel punto in cui $U(x)$ assume valore minimo, cioè in x_0, la pendenza della curva si annulla e quindi la forza è zero: $F_x(x_0) = -(\mathrm{d}U/\mathrm{d}x)_{x=x_0} = 0$. Una particella che si trovasse a riposo in questa posizione rimarrebbe ferma in posizione di equilibrio. Inoltre, se si spostasse da questa posizione in qualsiasi dei due versi, la forza $F_x(x) = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$, tenderebbe a riportarla ancora verso x_0 e quindi a oscillare attorno a questo punto di equilibrio. Pertanto questo punto è detto di *equilibrio stabile*. Infatti, muovendosi a sinistra, la forza agente sulla particella è positiva e quindi la spinge verso destra. Viceversa se si sposta a destra.

In un punto di massimo relativo per la funzione $U(x)$, come in x_5, di nuovo la forza è nulla e quindi una particella che si trovasse in x_5 a riposo, in tale stato rimarrebbe. Ma se si spostasse anche solo leggermente da questa posizione di equilibrio, la forza che agisce su di essa tenderebbe ad allontanarla ulteriormente da x_5. Per questo si dice che un tale punto è di *equilibrio instabile*. Infatti una particella che si muovesse da x_5 verso destra in Figura 12.8 sarebbe soggetta a una forza positiva che la accelera verso destra.

In un intervallo spaziale in cui $U(x)$ rimane costante, come nell'intorno di x_6, la forza è ancora nulla, ma un tal punto è detto di *equilibrio indifferente* perché una particella che se ne allontani non subisce forza né di richiamo né di ulteriore allontanamento.

Risulta ora chiaro come, avendo a disposizione la funzione energia potenziale per tutto l'intervallo di migrazione della particella, abbiamo in mano anche uno strumento efficace per conoscerne qualitativamente il comportamento.

PROBLEMA SVOLTO 12.10 La funzione energia potenziale relativa alla forza d'interazione tra i due atomi di una molecola biatomica è approssimativamente rappresentata dalla funzione

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6},$$

in cui a e b sono costanti positive di opportune dimensioni e x rappresenta la distanza tra gli atomi. Si trovi (a) la distanza d'equilibrio tra gli atomi, (b) l'espressione della forza agente tra gli atomi e (c) l'energia minima necessaria per spezzare il legame molecolare (cioè per allontanare gli atomi dalla distanza di equilibrio all'infinito).

Soluzione (a) La funzione $U(x)$ è riportata in Figura 12.9a. Si ha l'equilibrio stabile in corrispondenza dell'ascissa x_m, ove $U(x)$ assume valore minimo. Tale posizione è data da

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_m} = 0.$$

 ISBN 88-408-1254-7

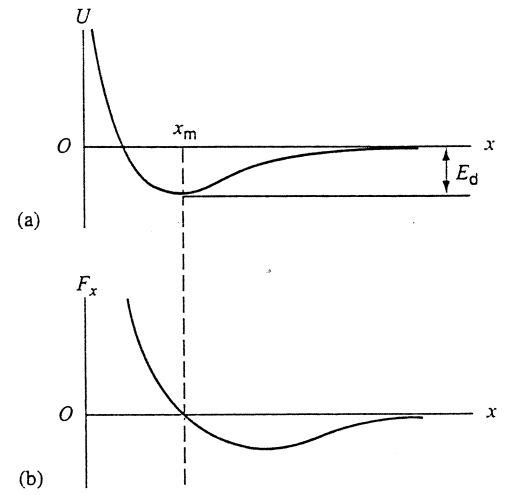


FIGURA 12.9 Problema svolto 12.10. (a) Energia potenziale e (b) forza relative a due atomi di una molecola biatomica, in funzione della distanza x che li separa. Si noti che l'energia potenziale è assunta nulla in corrispondenza di una distanza infinita.

Sostituendo si ottiene

$$\frac{-12a}{x_m^{13}} + \frac{6b}{x_m^7} = 0$$

da cui

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}.$$

(b) Con l'aiuto dell'Equazione 12.7 possiamo trovare la forza corrispondente all'energia potenziale:

$$F_x(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}\right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

Questa funzione è riportata nella Figura 12.9b. Quando la forza è positiva (da $x = 0$ a $x = x_m$), gli atomi si respingono (la forza è orientata verso destra in figura). Se la forza è negativa (accade in $x > x_m$), gli atomi si attraggono (la forza è orientata verso sinistra in figura). In corrispondenza di x_m la forza è nulla: si tratta di un punto di equilibrio e più precisamente di equilibrio stabile.

(c) L'energia minima occorrente per spezzare il legame molecolare e allontanare gli atomi che ne fanno parte si chiama *energia di dissociazione*, E_d. Dal grafico di Figura 12.9a si vede che è possibile allontanare gli atomi a distanza infinita, ove $U = 0$, quando $E \geq 0$. L'energia *minima* corrisponde quindi a $E = 0$, che significa $U = 0$ (atomi infinitamente distanti) e $K = 0$ (atomi a riposo). Allo stato di equilibrio l'energia della molecola è interamente di tipo potenziale e precisamente $E = U(x_m)$, una quantità negativa. L'energia di dissociazione è dunque l'energia che dobbiamo fornire alla molecola in stato di equilibrio per elevare la sua energia dal valore negativo suddetto al valore zero. Quindi

$$U(x_m) + E_d = 0,$$

ossia

$$E_d = -U(x_m) = -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^6}.$$

Sostituendo a x_m la sua espressione si ottiene

$$E_d = \frac{b^2}{4a}.$$

che è una quantità positiva come ci aspettavamo. Questa energia va somministrata compiendo lavoro sulla molecola con forze esterne, per esempio di tipo elettrico, oppure incrementando l'energia cinetica di un atomo rispetto all'altro.

Soluzione generale per la funzione $x(t)$

Potendo conoscere la funzione $x(t)$ potremmo prevedere ogni comportamento futuro della particella. Con le leggi di Newton potremmo arrivarci calcolando prima l'accelerazione. Vediamo come ottenere lo stesso risultato attraverso l'approccio energetico.

Partiamo dall'Equazione 12.21. Ponendo $v_x = dx/dt$, possiamo risolverla rispetto a dt e ottenere

$$dt = \frac{dx}{\pm\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}}. \qquad (12.22)$$

Le variabili in questa equazione sono separate: x appare solo a destra; t solo a sinistra.

Si supponga che all'istante $t = 0$ la particella si trovi nella posizione $x = x_0$ e all'istante t raggiunga la posizione x. Possiamo quindi integrare l'Equazione 12.22 ottenendo

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{(2/m)[E - U(x)]}}. \qquad (12.23)$$

Nell'applicare questa equazione scegliamo il segno + quando v_x è orientato concordemente all'asse x, e il segno – nel caso opposto. Se v_x dovesse cambiare verso durante il moto, occorre dividere l'integrale in due parti.

Operando l'integrazione della (12.23) si ottiene t in funzione di x. È normalmente possibile trovare questa funzione analiticamente oltre che con metodi numerici.

Per esemplificare il procedimento risolviamo l'Equazione 12.23 per il caso di una forza elastica esercitata da una molla, laddove $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. All'istante $t = 0$ la particella è in x_0 a riposo ($v_x = 0$). La sua energia meccanica in tale posizione vale $E = \frac{1}{2}kx_0^2$, quantità che resta costante in virtù del principio di conservazione dell'energia meccanica. L'Equazione 12.23 diventa dunque

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{(2/m)[\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx^2]}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}}.$$

L'integrale ha una forma facilmente risolvibile e si trova su qualsiasi tavola degli integrali; la soluzione ha la forma $-\arccos(x/x_0)$. Pertanto

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left[-\arccos\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]_{x_0}^{x} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left[-\arccos\left(\frac{x}{x_0}\right) + 0\right],$$

considerato che $\arccos(x_0/x_0) = \arccos 1 = 0$.

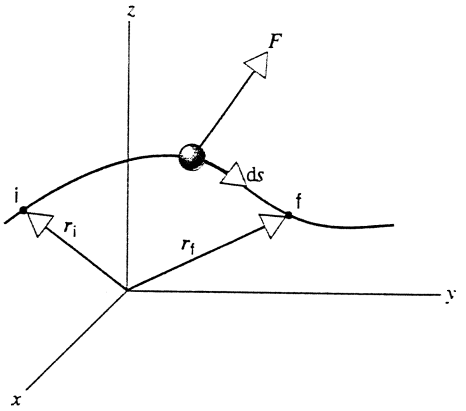


FIGURA 12.10 Una particella segue un cammino che la porta dal punto i al punto f. Su di essa agisce una forza conservativa $\boldsymbol{F}$.

Risolvendo rispetto a x, con qualche passaggio algebrico si giunge a

$$x(t) = x_0 \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Non sfugga che $\cos(\pm\theta) = \cos\theta$.

Il moto unidimensionale di una particella soggetta alla forza di richiamo di una molla è rappresentato da un'oscillazione sinusoidale. Arriveremo alla stessa conclusione attraverso le leggi di Newton nel Capitolo 17.

12.6 SISTEMI CONSERVATIVI IN TRE DIMENSIONI (facoltativo)

Abbiamo finora limitato le considerazioni sull'energia potenziale e sull'energia meccanica al caso unidimensionale. Possiamo agevolmente generalizzare questi concetti estendendoli ai sistemi tridimensionali in cui la forza e lo spostamento possono assumere direzioni qualunque.

Consideriamo un sistema entro il quale un corpo puntiforme segue un cammino (Figura 12.10) da una posizione iniziale $\boldsymbol{r}_i = x_i\boldsymbol{i} + y_i\boldsymbol{j} + z_i\boldsymbol{k}$ a una posizione finale $\boldsymbol{r}_f = x_f\boldsymbol{i} + y_f\boldsymbol{j} + z_f\boldsymbol{k}$. Il sistema esercita una forza conservativa $\boldsymbol{F}$ sulla particella. Per semplicità assumiamo che non si compia lavoro su altre parti del sistema in modo da poter focalizzare l'attenzione sulla sola particella. Alla forza è associata un'energia potenziale con funzione $U(x, y, z)$. La variazione di energia potenziale subita dalla particella durante il suo tragitto discende per analogia dall'Equazione 12.5:

$$\Delta U = U(x_f, y_f, z_f) - U(x_i, y_i, z_i) = \\ = -\int_i^f (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \qquad (12.24)$$

L'uso di questa equazione implicherebbe la conoscenza del percorso effettuato, cioè della relazione che intercorre tra dx, dy e dz. Tuttavia, dato che la forza è conservativa, la differenza di potenziale ΔU è la stessa per *qualsiasi* cammino tra il punto i e il punto f. Possiamo quindi ricorrere al principio di conservazione dell'energia meccanica in tre dimensioni, $E = K + U$ dove $U = U(x, y, z)$ e $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$.

Scrivendo l'Equazione 12.24 in forma vettoriale più compatta, abbiamo

$$\Delta U = -\int_i^f \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}, \qquad (12.25)$$

ove $d\boldsymbol{s} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}$ rappresenta il vettore spostamento tangente alla traiettoria. In quest'espressione $\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$, ove F_x, F_y e F_z potrebbero essere funzioni di x, y e z. Anche l'Equazione 12.25 discende direttamente dal teorema dell'energia cinetica, $L = \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ (Equazione 11.19), e dalla definizione di energia potenziale, $\Delta U = -L$ (Equazione 12.4).

L'Equazione 12.7 può essere scritta pure in forma tridimensionale:*

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k}. \qquad (12.26)$$

Nel linguaggio dell'analisi vettoriale diciamo che "la forza $\boldsymbol{F}$ (conservativa) è l'opposto del *gradiente* dell'energia potenziale $U(x, y, z)$". Se vincoliamo il moto al solo asse x, l'Equazione 12.26 si riduce alla (12.7).

PROBLEMA SVOLTO 12.11 In un sistema di particelle confinate a muoversi sul piano xy la forza ha la forma $\boldsymbol{F}(x, y) = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} = -ky\boldsymbol{i} - kx\boldsymbol{j}$, con k costante positiva di dimensioni opportune. Questa forza spinge una particella verso la linea diagonale $y = -x$. Verificatelo disegnando le componenti F_x e F_y della forza in vari punti del piano. (a) Dimostrare che il lavoro svolto dalla forza sulla particella nel suo spostamento dall'origine al punto (a, b) è uguale per i tre percorsi disegnati nella Figura 12.11. (b) Assumendo che questa forza sia conservativa, trovare l'espressione dell'energia potenziale $U(x, y)$ del sistema prendendo come posizione di riferimento l'origine e ponendo nullo il potenziale nell'origine.

Soluzione (a) Il lavoro compiuto lungo il percorso 1 si ottiene dividendo il percorso in due parti: il tratto 1a dall'origine al punto

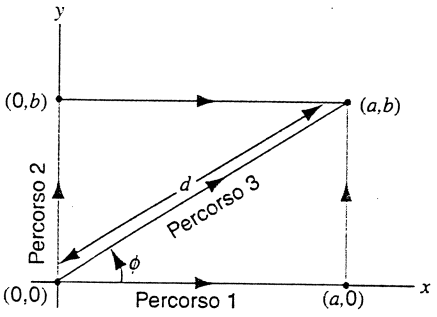


FIGURA 12.11 Problema svolto 12.11. Il lavoro per spostare una particella dall'origine (0,0) al punto (a, b), calcolato lungo tre diversi percorsi.

*Eseguire la *derivata parziale* $\partial U/\partial x$ significa operare la derivata di $U(x, y, z)$ rispetto a x considerando costanti y e z.

 ISBN 88-408-1254-7

$(a, 0)$ e il tratto $1b$ da questo punto al punto finale. Il lavoro relativo al tratto $1a$, per il quale $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i}$, è dato da

$$L_{1a} = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx = \int_{x=0}^{x=a} (-ky)dx = 0$$

perché nel tratto $1a$ è costantemente $y = 0$. Nel tratto $1b$ si ha $d\mathbf{s} = dy\mathbf{j}$ e $x = a$, per cui

$$L_{1b} = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)\, dy = (-ka) \int_0^b dy = -kab.$$

Il lavoro totale per il percorso 1 vale dunque

$$L_1 = L_{1a} + L_{1b} = -kab.$$

Procediamo in modo analogo per il percorso 2:

$$L_{2a} = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx)\, dy = 0$$

$$L_{2b} = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x=0}^{x=a} (-ky)\, dx = (-kb) \int_0^a dx = -kab.$$

Lungo il percorso 3 si ha $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ e quindi

$$L_3 = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_i^f (-ky\, dx - kx\, dy).$$

Introduciamo la variabile r, distanza radiale lungo la retta su cui giace il percorso 3. Dato che $y = r \sin \phi$, consegue che $dy = dr \sin \phi$, perché ϕ lungo la retta è costante. Similmente $x = r \cos \phi$ e $dx = dr \cos \phi$. Sostituiamo ora la variabile d'integrazione tra gli estremi $r = 0$ ed $r = d = (a^2 + b^2)^{1/2}$. L'integrale relativo al percorso 3 diventa allora

$$L_3 = \int_0^d [-k(r \sin \phi)(dr \cos \phi) - k(r \cos \phi)(dr \sin \phi)] =$$

$$= -2k \sin \phi \cos \phi \int_0^d r\, dr = -kd^2 \sin \phi \cos \phi.$$

Osservando che $\sin \phi = b/d$ e $\cos \phi = a/d$, quest'espressione si riduce a $L_3 = -kab$. È vero dunque che $L_1 = L_2 = L_3$. Ciò non prova che la forza $\mathbf{F}$ sia conservativa (dovremmo valutare tutti i percorsi possibili per poterlo concludere), ma certamente è un buon indizio per sospettare che lo sia.

(b) L'energia potenziale si trova con l'Equazione 12.24, che poi è quella che abbiamo già usato nel cercare il lavoro svolto lungo il percorso 3. L'estremo d'integrazione però non è lo specifico punto (a, b), ma una posizione generica (x, y). Con questa sostituzione otteniamo

$$\Delta U = U(x, y) - U(0, 0) = -L = kxy,$$

in cui l'energia potenziale all'origine delle coordinate è nulla. Dovreste essere in grado di dimostrare che, applicando l'Equazione 12.26 a questa funzione energia potenziale, si ottiene l'espressione della forza $\mathbf{F}(x, y)$

Se modificassimo la forza in questo modo, $\mathbf{F} = -k_1 y\mathbf{i} - k_2 x\mathbf{j}$, il procedimento adottato nella parte (a) della soluzione ci dimostrerebbe che questa forza non è conservativa e in generale non lo è quando $k_1 \neq k_2$ (Esercizio 33). Nemmeno con $k_1 = -k_2$, la forza è conservativa. Quest'ultima forza ha importanza applicativa nella focalizzazione magnetica di particelle elettricamente cariche, ma non si può rappresentare con una funzione energia potenziale proprio perché non è conservativa.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

12.1 Forze conservative

1. Quale delle seguenti forze *non* è conservativa?
(A) $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. (B) $\mathbf{F} = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$.
(C) $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$. (D) $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$.

2. Quale delle seguenti forze è conservativa?
(A) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. (B) $\mathbf{F} = yx\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$.
(C) $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. (D) $\mathbf{F} = yx\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

3. Due forze conservative, $\mathbf{F}_1$ ed $\mathbf{F}_2$, agiscono su un corpo. Che relazione sussiste tra

$$L_+ = \oint (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot d\mathbf{s}$$

e

$$L_- = \oint (\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2) \cdot d\mathbf{s}?$$

Il cerchietto sul segno d'integrale significa che l'integrale va calcolato su un cammino chiuso.
(A) $L_+ > L_-$. (B) $L_+ = L_- \neq 0$.
(C) $L_+ = L_- = 0$. (D) $L_+ < L_-$.

12.2 Energia potenziale

4. Quale o quali delle seguenti grandezze non possono essere mai negative?
(A) Massa. (B) Tempo. (C) Lavoro.
(D) Energia potenziale. (E) Energia cinetica.

12.3 Conservazione dell'energia meccanica

5. Due blocchi si trovano in cima a una rampa inclinata. Il blocco A scivola giù per la rampa senza apprezzabile attrito; il blocco B cade giù di fianco verticalmente senza attriti di sorta. I due blocchi partono insieme.

(a) Chi arriva per primo al suolo?
(A) Il blocco A. (B) Il blocco B.
(C) Arrivano insieme.
(D) Non si può rispondere per carenza di dati.

(b) Quale blocco arriva al suolo con maggiore velocità?
(A) Il blocco A. (B) Il blocco B.
(C) Arrivano con la stessa velocità.
(D) Non si può rispondere per carenza di dati.

(c) Quale subisce accelerazione maggiore?
(A) Il blocco A. (B) Il blocco B.
(C) L'accelerazione è uguale.
(D) Non si può rispondere per carenza di dati.

12.4 Conservazione dell'energia nel moto rotatorio

6. Tre corpi rotolano alla stessa velocità su una superficie piana orizzontale priva d'attrito, sotto l'azione della sola forza di gravità e della reazione normale. Si tratta di un cilindro pieno, una sfera piena e un guscio sferico. Tutti hanno stessa massa e stesso raggio. Incontrano simultanea-

mente una superficie inclinata e vi salgono senza slittare.

(a) Quale corpo raggiunge la quota più alta?
(A) Il cilindro pieno. (B) La sfera piena.
(C) Il guscio sferico.
(D) Tutti e tre alla stessa quota.

(b) Quale corpo percorre la distanza maggiore sulla superficie?
(A) Il cilindro pieno. (B) La sfera piena.
(C) Il guscio sferico.
(D) Tutti e tre la stessa distanza.

7. Tre corpi rotolano alla stessa velocità su una superficie piana orizzontale priva d'attrito, sotto l'azione della sola forza di gravità e della reazione normale. Si tratta di tre sfere piene. La sfera A ha raggio r e massa m; la sfera B ha raggio $2r$ e massa m; la sfera C ha raggio r e massa $2m$. Incontrano simultaneamente una superficie inclinata e vi salgono senza slittare.

(a) Quale sfera realizza il maggior dislivello (con riferimento ai rispettivi centri di massa)?
(A) La sfera A. (B) La sfera B.
(C) La sfera C. (D) Tutti e tre uguali.

(b) Quale sfera sale per una maggior distanza misurata sul piano inclinato?
(A) La sfera A. (B) La sfera B.
(C) La sfera C. (D) Tutti e tre uguali.

8. Un cilindro e un cubo si trovano in cima a una rampa inclinata. Il cilindro rotola giù per la rampa senza strisciare e senza attrito; il cubo cade giù di fianco verticalmente senza attriti di sorta. I due corpi partono insieme.

(a) Chi arriva per primo al suolo?
(A) Il cilindro. (B) Il cubo.
(C) Arrivano insieme.
(D) Non si può rispondere per carenza di dati.

(b) Quale giunge al suolo con velocità maggiore?
(A) Il cilindro. (B) Il cubo.
(C) Arrivano con la stessa velocità.
(D) Non si può rispondere per carenza di dati.

(c) Quale subisce una maggior accelerazione?
(A) Il cilindro. (B) Il cubo.
(C) L'accelerazione è uguale.
(D) Non si può rispondere per carenza di dati.

9. Un sfera piena di massa m e raggio r viene lanciata orizzontalmente senza moto rotatorio con velocità iniziale v_0. La sfera tocca terra su una superficie orizzontale, comincia a rotolare e per un po' striscia anche, finché il moto diventa di puro rotolamento.

(a) Per trovare la velocità finale della sfera si deve applicare
(A) il principio di conservazione dell'energia.
(B) il principio di conservazione della quantità di moto.
(C) il principio di conservazione del momento angolare.
(D) almeno due dei succitati principi.

(b) La velocità finale dipende da
(A) la massa. (B) il raggio.
(C) sia la massa sia il raggio.
(D) né la massa né il raggio.

12.5 Sistemi conservativi in una dimensione: soluzione completa

10. Una particella dotata di energia totale E si trova in moto unidimensionale in una regione dello spazio ove l'energia potenziale è $U(x)$.

(a) La sua velocità è nulla laddove
(A) $U(x) = E$. (B) $U(x) = 0$.
(C) $dU(x)/dx = 0$. (D) $d^2U(x)/dx^2 = 0$.

(b) La sua accelerazione è nulla laddove
(A) $U(x) = E$. (B) $U(x) = 0$.
(C) $dU(x)/dx = 0$. (D) $d^2U(x)/dx^2 = 0$.

12.6 Sistemi conservativi in tre dimensioni

QUESITI

1. Consideriamo la forza unidimensionale $\boldsymbol{F} = f(x)\boldsymbol{i}$, dove $f(x)$ è una funzione della sola variabile x. Senza altre informazioni è possibile decidere se si tratta di una forza conservativa oppure no? In caso affermativo, lo è?

2. Consideriamo la forza bidimensionale $\boldsymbol{F} = f(x, y)\boldsymbol{i} + g(x, y)\boldsymbol{j}$ dove $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono due funzioni delle sole variabili x e y. Senza altre informazioni è possibile decidere se si tratta di una forza conservativa oppure no? In caso affermativo, lo è? E nel caso che sia $f(x, y) = f(x)$ e $g(x, y) = g(y)$?

3. Lanciamo una palla in aria; quando raggiunge il culmine della traiettoria l'energia potenziale U assume valore massimo. La derivata di U in questa posizione è nulla? E in questo caso che cosa significa ciò a riguardo della forza agente sulla palla in questa posizione?

4. Le strade di montagna normalmente non salgono per la linea di massima pendenza. Perché?

5. Tenendo conto di come varia l'energia potenziale di due molecole identiche in funzione della loro distanza, spiegare perché un liquido disperso in uno strato sottile ha maggior energia potenziale della stessa quantità di liquido raccolto in una goccia.

6. La specialità atletica del salto con l'asta ha avuto un deciso impulso migliorativo all'epoca in cui le aste di legno furono sostituite da quelle in fibra di vetro. Se ne spieghi la ragione.

7. Lasciate cadere un oggetto a terra e osservate che rimbalza raggiungendo un'altezza pari a una volta e mezzo l'altezza da cui era caduta. Cosa concludete?

8. Da un terremoto si può sprigionare energia bastante a sconquassare una città. Un istante prima dell'evento dove risiede tutta questa energia?

9. L'energia meccanica totale di un sistema isolato di particelle si conserva. Se è costante anche l'energia cinetica di ogni singola particella, cosa si può dedurre sulle forze che agiscono sul sistema?

10. Nel Problema svolto 12.4 (Figura 12.6) siamo giunti alla conclusione che la velocità dei vagoncini in fondo alle

 ISBN 88-408-1254-7

montagne russe non dipende dalla forma del tracciato. La conclusione è vera anche in presenza di attrito?

11. Ricorrendo a considerazioni di tipo energetico, descrivete coma fa un bambino ad accelerare un'altalena.
12. Due dischi sono legati da una molla piuttosto rigida come in Figura 12.12. È possibile, premendo e poi rilasciando il disco superiore, far sì che la molla salti in alto fino a sollevare anche il disco inferiore? Si conserva l'energia meccanica in questo caso?

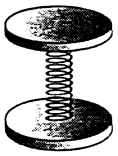


FIGURA 12.12 Quesito 12.

13. Discutete il significato del termine «conservazione dell'energia» nel senso (a) definito in questo capitolo di fisica e (b) che potrebbe attribuirgli una persona qualunque mentre conversa sul problema del risparmio energetico o quando raccomanda di "spegnere le luci".
14. L'energia cinetica traslazionale di un sistema può trasformarsi in energia cinetica rotazionale in assenza di forze esterne? In caso positivo, si faccia un esempio. Nel caso contrario se ne spieghi il motivo.
15. Una palla da bowling viene lanciata senza imprimerle alcuna rotazione; dal momento in cui tocca i birilli, rotola senza strisciare. L'energia meccanica totale è conservata?
16. Fate esempi di equilibrio instabile, indifferente e stabile.
17. Una biglia sta in equilibrio sul bordo di una scodella. Da qui può (1) rotolare dentro la scodella e cominciare a oscillare avanti e indietro al suo interno, oppure (2) rotolare fuori dal bordo, cadere a terra e magari rompersi. Era in equilibrio stabile o instabile?
18. Esistono condizioni in cui l'equilibrio è sia stabile sia instabile?

ESERCIZI

12.1 Forze conservative

12.2 Energia potenziale

1. Per il caso unidimensionale il modulo della forza di attrazione gravitazionale tra due particelle di massa m_1 ed m_2 è dato da

$$F_x(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2},$$

ove G è una costante e x rappresenta la distanza tra le particelle. (a) Che espressione ha la funzione energia potenziale $U(x)$? Si assuma che $U(x) \to 0$ per $x \to \infty$. (b) Quanto lavoro si richiede per incrementare la distanza da x a $x + d$?

2. Dimostrate che nell'esercizio 1 per $d \ll x_1$ risulta $L \propto d$. Vi ricorda qualcosa?
3. Una particella si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza conservativa descritta da

$$F = -\alpha x e^{-\beta x^2} i,$$

con α e β costanti di dimensioni coerenti. Trovare la funzione energia potenziale $U(x)$.

12.3 Conservazione dell'energia meccanica

4. Una cascata d'acqua alta 96,3 m ha una portata di 73 800 m^3/min. Assumendo che un generatore idroelettrico converta in elettricità il 58,0 % dell'energia cinetica che l'acqua acquista cadendo, calcolare la potenza erogata dal generatore (la massa volumica dell'acqua vale 1000 kg/m^3).
5. Per contrastare i missili balistici nella prima parte del loro volo sono stati proposti dei «cannoni a binario elettromagnetico», da installare su satelliti a bassa orbita terrestre. Questi cannoni potrebbero sparare proiettili di massa 2,38 kg alla velocità di 10,0 km/s. Il solo effetto prodotto dall'energia cinetica posseduta da questi proiettili sarebbe sufficiente a mettere fuori uso un missile, ancorché privo di esplosivo (si chiamano in questo caso armi «a energia cinetica»). L'accelerazione del proiettile è assicurata da forze di tipo elettromagnetico. Supponiamo invece di voler sparare un analogo proiettile di uguali caratteristiche con un dispositivo a molla. Di che ordine di grandezza dovrebbe essere la costante elastica necessaria per la molla, supponendo una lunghezza di compressione di 1,47 m?
6. Un uomo di massa 100 kg si getta dalla finestra in una rete da pompiere sistemata 12 m sotto di lui. La rete, per arrestarlo e farlo rimbalzare in aria, si abbassa di 1,4 m. Quale energia potenziale massima acquista la rete?
7. La Figura 12.13 illustra un cubetto di ghiaccio che scivola senza attrito dal bordo di una scodella emisferica di raggio 23,6 cm. Che velocità avrà quando passerà dal punto più basso?

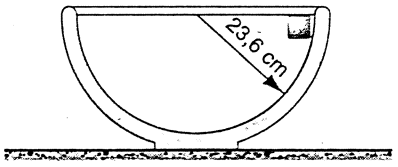


FIGURA 12.13 Esercizio 7.

8. Un proiettile di massa 2,40 kg viene sparato da una quota di 125 m sopra il suolo con velocità iniziale di 150 m/s in una direzione che forma con il piano orizzontale un angolo di 41,0°. Ignorando la resistenza dell'aria calcolare: (a) l'energia cinetica del proiettile allo sparo, (b) l'energia potenziale, (c) la velocità del proiettile al suo impatto a terra. Quali risposte dipendono dalla massa del proiettile?
9. Nella Figura 12.14 vediamo un carrellino di montagne russe che parte dal punto A con velocità v_0 su un binario privo d'attrito. Calcolare la velocità del carrellino (a) nel punto B, (b) nel punto C, (c) nel punto D.

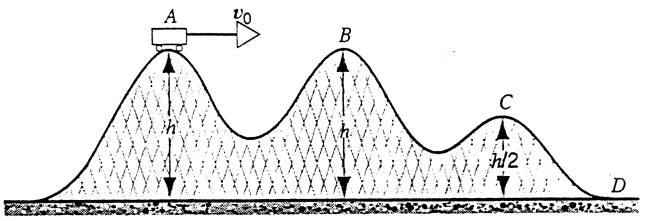


FIGURA 12.14 Esercizio 9.

10. La Figura 12.15 illustra l'andamento della forza in funzione dell'allungamento-compressione per la molla di un fucile giocattolo. La molla, compressa di 5,50 cm, spara un turacciolo di massa 3,80 g. (a) Che velocità assume il turacciolo se si distacca dalla molla nel punto che corrisponde alla sua posizione di riposo? (b) Supponete ora che il turacciolo sia leggermente incollato alla molla di modo che se ne distacchi quando la molla si è allungata di 1,50 cm dalla sua posizione di riposo. Quale velocità assume in questo caso il turacciolo?

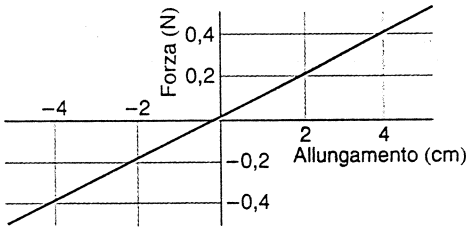


FIGURA 12.15 Esercizio 10.

11. La Figura 12.16 presenta una pietra di massa 7,94 kg sorretta da una molla, che si trova compressa di 10,2 cm. (a) Calcolare la costante elastica della molla. (b) Ora si spinge giù la pietra per altri 28,6 cm e poi la si lascia andare. Quanta energia potenziale si accumula nel sistema al punto di massima compressione?

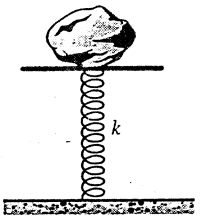


FIGURA 12.16 Esercizio 11.

12. La superficie dell'Italia è di circa $3{,}0 \cdot 10^5$ km^2 con un'altitudine media di circa 400 m. La piovosità media annuale è di circa 80 cm. Una buona metà di quest'acqua piovana ritorna all'atmosfera per evaporazione, ma il resto finisce nel mare. Se quest'ultima porzione potesse essere tutta convertita in energia elettrica, che potenza media si potrebbe erogare considerando un rendimento medio di conversione pari a 0,65?

13. Un corpo cade da fermo da un'altezza h. Esprimete l'energia cinetica del corpo e l'energia potenziale del sistema in funzione (a) del tempo e (b) della posizione verticale. Riportate le due funzioni su grafico e mostrate che la loro somma, cioè l'energia meccanica totale, è costante.

14. Alle Olimpiadi del 1996 l'atleta bulgara Stefka Kostadinova stabilì il primato mondiale di salto in alto femminile con la misura di 2,05 m (Figura 12.17). A parità di tutti gli altri parametri, quanto sarebbe valsa la sua prestazione sulla Luna, ove l'accelerazione di gravità al suolo è di 1,67 m/s^2? (*Suggerimento*: l'altezza che «conta» è la distanza verticale di cui si eleva il baricentro durante il salto. Si supponga che tale punto al momento dello stacco fosse all'altezza di 1,10 m e al culmine fosse pari all'altezza dell'asticella.)

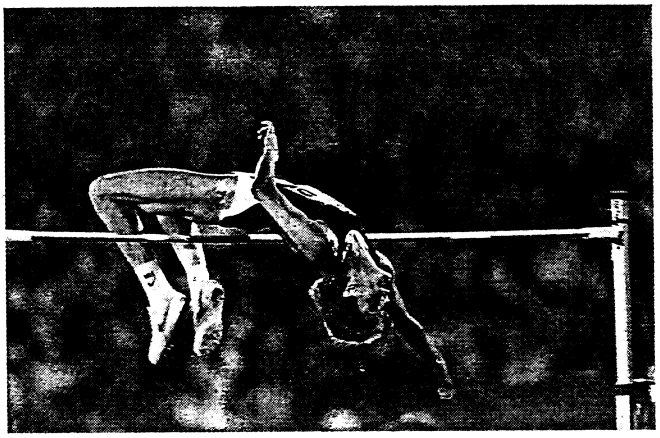


FIGURA 12.17 Esercizio 14.

15. Come illustra la Figura 12.18, un blocco di massa 1,93 kg preme una molla su una superficie liscia inclinata di 27,0° rispetto al piano orizzontale. La molla, di costante elastica pari a 20,8 N/cm, viene ulteriormente compressa di 18,7 cm e poi lasciata libera. Di quanto sale il blocco lungo il piano inclinato prima di arrestarsi?

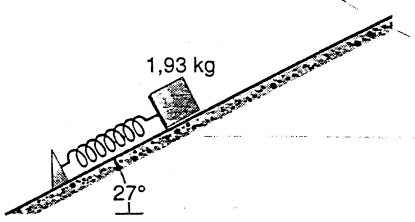


FIGURA 12.18 Esercizio 15.

16. Si costruisce un pendolo appendendo un sasso di massa 1,33 kg a una corda lunga 3,82 m. Si sposta il sasso in posizione tale che la corda formi un angolo di 58,0° con l'asse verticale. A questo punto lo si colpisce in direzione ortogonale alla corda verso l'alto. Si osserva che, quando torna alla quota minima, la sua velocità è di 8,12 m/s. (a) Calcolare la velocità che aveva dopo che è stata colpita. (b) Calcolare l'angolo massimo di deviazione raggiunto. (c) Ponendo uguale a zero l'energia potenziale nella posizione di quota minima, calcolare l'energia meccanica totale del sistema.

17. Si fissa l'estremità di una molla al soffitto. Si appende un peso all'altra estremità e lo si abbassa delicatamente fino alla posizione di equilibrio. Dimostrare che la perdita di energia potenziale gravitazionale del peso è pari alla metà dell'incremento di energia potenziale elastica della molla. Perché non sono uguali?

18. Come si vede dalla Figura 12.19, un blocco di massa 2,14 kg viene lasciato cadere da un'altezza di 43,6 cm su una molla di costante elastica 18,6 N/cm. Trovare la distanza a cui viene compressa al massimo la molla.

 ISBN 88-408-1254-7

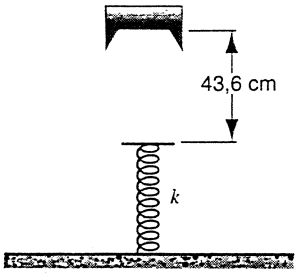


FIGURA 12.19 Esercizio 18.

19. Due ragazzini giocano a colpire una scatoletta con una biglia sparata da un fucile a molla fissato su un tavolo. La scatoletta si trova a una distanza orizzontale di 2,20 m dalla bocca del fucile (Figura 12.20). Barbara comprime la molla di 1,10 cm, ma il tiro risulta corto di 27,0 cm. Di quanto dovrà comprimerla Roberto per fare centro?

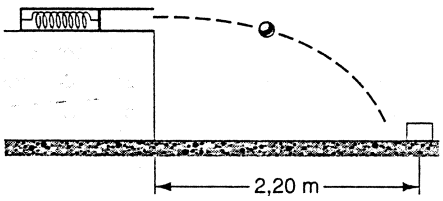


FIGURA 12.20 Esercizio 19.

20. Tarzan, che pesa 800 N, si lancia appeso a una liana lunga 17 m, come in Figura 12.21. Il dislivello tra la sua quota di partenza e la quota minima è di 2,8 m. Il carico di rottura della liana è di 1100 N. Si spezzerà?

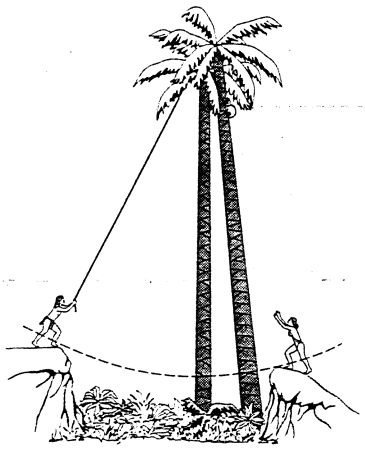


FIGURA 12.21 Esercizio 20.

21. Due pendoli di ugual lunghezza L sono inizialmente disposti come in Figura 12.22. Il primo pendolo viene lasciato andare da una quota d rispetto al secondo. Trascurando la massa dei fili e i fenomeni d'attrito, quale altezza massima raggiungerà il centro di massa del sistema dopo l'urto, nell'ipotesi che questo sia completamente anelastico?

12.4 Conservazione dell'energia nel moto rotatorio

22. Ponendo, nel Problema svolto 9.10, R = 12,3 cm, M = 396 g ed m = 48,7 g (Figura 9.26), trovate la velocità del blocco quando è sceso di 54,0 cm dalla sua posizione di partenza a riposo. Risolvete il problema in base ai principi di conservazione dell'energia.

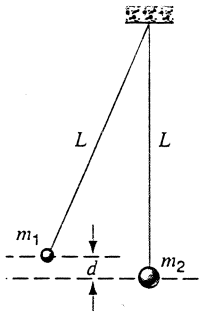


FIGURA 12.22 Esercizio 21.

23. Un guscio sferico omogeneo ruota attorno a un asse verticale su supporti privi d'attrito (Figura 12.23). Un filo è avvolto attorno al guscio, passa su una puleggia e regge un blocchetto libero di cadere per gravità. Che velocità assume il blocchetto dopo che è caduto di una distanza h partendo da fermo?

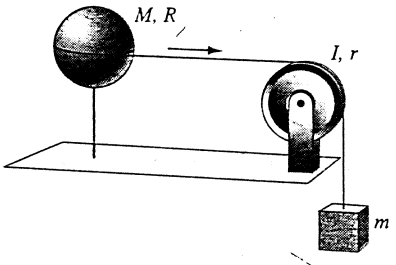


FIGURA 12.23 Esercizio 23.

24. Un'auto di massa totale 822 kg è equipaggiata con un volano per accumulare energia. Quando questo è innestato, a una velocità angolare del volano di 237 giri/s corrisponde una velocità della macchina di 86,5 km/h. Il volano, del peso di 194 N, è costituito da un disco omogeneo di 1,08 m di diametro. L'auto scende partendo da ferma per una strada lunga 1500 m e inclinata di 5,00° rispetto al piano orizzontale. Il volano è innestato e il motore spento. Trascurando gli attriti e la massa delle ruote, trovare alla fine della discesa quanto valgono (a) la velocità dell'auto, (b) l'accelerazione angolare del volano e (c) l'energia accumulata nel volano.

25. Una sfera piena di raggio 4,72 cm rotola su per un piano inclinato di 34,0° rispetto al piano orizzontale. All'inizio della salita il centro di massa della sfera aveva una velocità lineare di 5,18 m/s. (a) Di quanto sale al massimo sul piano inclinato? (b) Quanto tempo impiega per ritornare in fondo? (c) Quanti giri compie la sfera nel percorso di andata e ritorno?

26. Un corpo rotola senza strisciare dapprima orizzontalmente con velocità v e poi su per un piano inclinato fino a un'altezza massima h. Di che corpo geometrico si tratta se $h = 3v^2/(4g)$?

27. Un cannone spara orizzontalmente senza farla ruotare una sfera piena di raggio r e massa m a velocità iniziale v_0. La sfera cade subito su una superficie orizzontale ove dapprima scivola, poi comincia a rotolare fino ad assumere un moto di puro rotolamento. Trovare la velocità finale della sfera (vedi anche la Domanda a risposta multipla 9).

12.5 Sistemi conservativi in una dimensione: soluzione completa

28. Una particella si muove vincolata all'asse x in uno spazio in cui l'energia potenziale $U(x)$ varia come riportato in Figura 12.24. (a) Sulla stessa scala delle ascisse, riportate il grafico della forza $F_x(x)$ agente sulla particella. (b) Supponendo che la particella sia dotata di un'energia meccanica (costante) $E = 4.0$ J, diagrammate la sua energia cinetica $K(x)$ direttamente sullo stesso grafico.

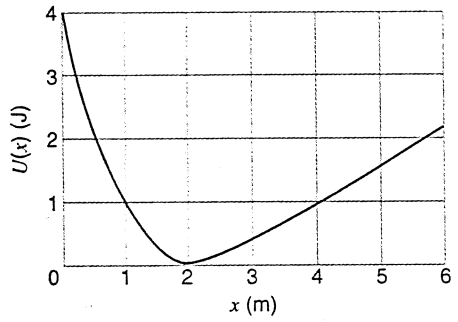


FIGURA 12.24 Esercizio 28.

29. Una particella si muove vincolata all'asse x in uno spazio in cui l'energia potenziale $U(x)$ varia come riportato in Figura 12.25, Quando la particella si trova nella posizione $x = 2{,}0$ m, la sua velocità vale $-2{,}0$ m/s. (a) Calcolare la forza esercitata sulla particella in questo punto. (b) Quali sono i valori estremi di x entro cui si svolge il moto? (c) Che velocità ha la particella nella posizione $x = 7{,}0$ m?

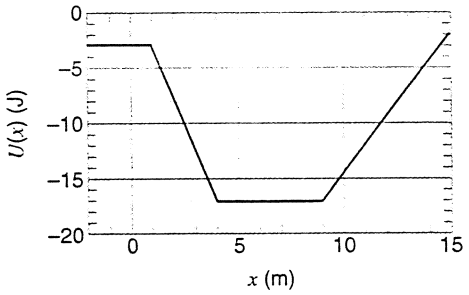


FIGURA 12.25 Esercizio 29.

12.6 Sistemi conservativi in tre dimensioni

30. Si dimostri che, in assenza di resistenza dell'aria, a parità di velocità iniziale v_0, la velocità v di un proiettile a una data quota è sempre la stessa indipendentemente dall'angolo di alzo.

31. L'energia potenziale associata a una certa forza bidimensionale è data da $U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$. (a) Ricavate F_x ed F_y e descrivete l'andamento del vettore forza in funzione delle coordinate cartesiane x e y. (b) Ricavate F_r ed F_θ e descrivete l'andamento del vettore forza in funzione delle coordinate polari r e θ. (c) Siete capaci di immaginare un modello fisico che presenti una tale forza?

32. L'energia potenziale associata a una certa forza tridimensionale è data da $U(x, y, z) = -k/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (a) Ricavate F_x, F_y ed F_z e descrivete l'andamento del vettore forza in funzione delle coordinate x, y e z. (b) Trasformate la funzione in coordinate polari e trovate F_r.

33. Integrando lungo gli stessi tre percorsi del Problema svolto 12.11, dimostrare che la forza $F = -k_1 y i - k_2 x j$ non è conservativa quando $k_1 \neq k_2$.

PROBLEMI

1. Su una particella in moto lungo l'asse z agisce una forza data da

$$F_z(z) = \frac{k}{(z+l)^2} - \frac{k}{(z-l)^2},$$

dove k ed l sono opportune costanti. Si assuma che $U(z) \to 0$ quando $z \to \infty$. (a) Si trovi l'espressione di $U(z)$ per $z > l$. (b) Si dimostri che, per $z \gg l$, sia ha $U(z) \propto l/z^2$.

2. All'estremità di un'asticella leggera è attaccata una pallina di massa m. L'altra estremità è fissa e la pallina è libera di ruotare su una circonferenza giacente su un piano verticale. L'asticella viene portata a sinistra fino ad assumere posizione orizzontale e poi spinta verso il basso come in Figura 12.26. La pallina rotea e si arresta dopo aver descritto un angolo di 270° esatti. Che velocità iniziale le era stata impartita?

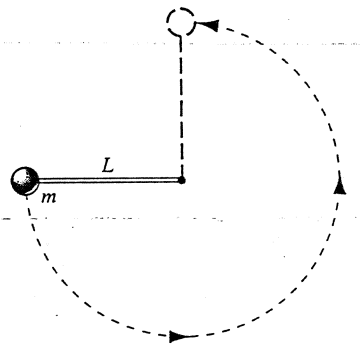


FIGURA 12.26 Problema 2.

3. Una molla ideale può essere compressa di 2,33 cm da una forza di 268 N. Un blocco di massa 3,18 kg, inizialmente fermo in cima al piano inclinato privo di attrito della Figura 12.27, che forma un angolo di 32,0° con il piano orizzontale, viene lasciato andare. Il blocco si arresta dopo aver compresso la molla di 5,48 cm. (a) In questo momento di quanto è sceso il blocco lungo il piano inclinato? (b) Qual è la velocità del blocco quando arriva a toccare la molla?

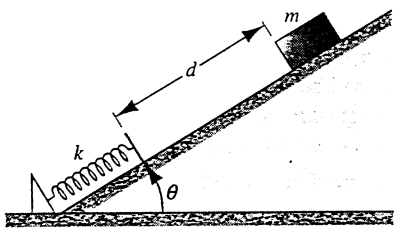


FIGURA 12.27 Problema 3.

 ISBN 88-408-1254-7

4. Una catena, come si vede nella Figura 12.28, è tenuta ferma su un tavolo privo di attrito mentre un quarto della sua lunghezza pende dal bordo del tavolo. Se la catena ha una lunghezza totale L e una massa m, quanto lavoro è richiesto per tirare indietro sul piano del tavolo la parte pendente?

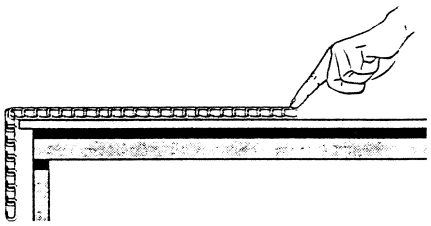


FIGURA 12.28. Problema 4.

5. Un blocchetto di massa m può scorrere lungo la pista liscia a spirale della Figura 12.29. (a) Se è lasciato cadere, da fermo, dal punto P, quale sarà la forza netta che agisce su di esso nel punto Q? (b) Da quale altezza sopra il punto più basso della spirale si dovrebbe lasciar cadere il blocchetto per far sì che stia per perder contatto con la pista nel punto più alto del «ricciolo»?

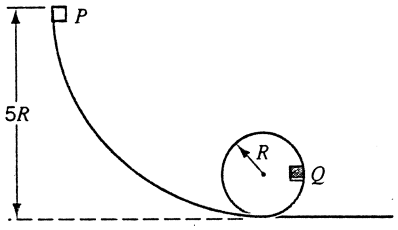


FIGURA 12.29 Problema 5.

6. Un blocco di massa m viene tenuto fermo sulla faccia inclinata di un cuneo di massa M a riposo su un piano orizzontale, come in Figura 12.30. Tutte le superfici sono prive d'attrito. Se il blocchetto viene liberato da un punto P posto ad altezza h sopra il piano, si trovi la velocità assunta dal cuneo nell'istante in cui il blocchetto giunge a toccare il piano.

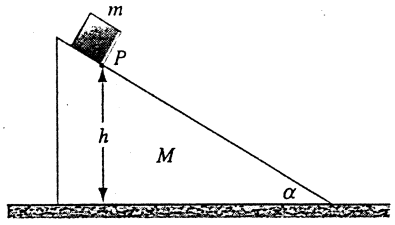


FIGURA 12.30 Problema 6.

7. Su un corpo di massa 1,18 kg agisce una forza netta conservativa data da $F_x = Ax + Bx^2$, ove $A = -3{,}00$ N/m e $B = -5{,}00$ N/m^2. (a) Si calcoli l'energia potenziale del sistema nel punto $x = 2{,}26$ m. Si assuma che sia $U(x) = 0$. (b) Il corpo nel punto $x = 4{,}91$ m ha velocità di –4,13 m/s. Trovare la velocità nella posizione $x = 1{,}77$ m.
8. La lunghezza del filo di Figura 12.31 è $L = 120$ cm, e la distanza d del piolo P è 75,0 cm. Quando la palla, inizialmente ferma, è lasciata libera, seguirà la traiettoria ad arco tratteggiata in figura. Che velocità avrà quando raggiungerà (a) il punto più basso e (b) il punto più alto, dopo che il filo sarà rimasto impigliato nel piolo?

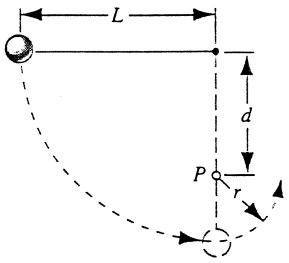


FIGURA 12.31 Problemi 8 e 9.

9. Riferendovi alla Figura 12.31, dimostrate che, se la palla compie un giro completo intorno al piolo fisso, dev'essere $d > 3L/5$. (*Suggerimento*: la palla deve avere velocità non nulla quando è nel punto più alto della sua rotazione, altrimenti il filo non rimane teso.)
10. Un blocco di massa m appeso a una corda rotea su una circonferenza verticale di raggio R sotto la sola azione della gravità e della tensione. Trovare la differenza tra l'intensità della tensione quando il blocco si trova alla quota minima e quella della tensione quando si trova alla quota massima, assumendo che la corda rimanga tesa.
11. Un ragazzino è seduto sulla cima del blocco di ghiaccio semisferico della Figura 12.32. Riceve una leggerissima spinta e comincia a scivolare in giù. Dimostrate che, se il ghiaccio è privo di attrito, egli si staccherà dal ghiaccio in un punto all'altezza $2R/3$ dal suolo. (*Suggerimento*: la forza normale scompare al distacco dal ghiaccio.)



FIGURA 12.32 Problema 11.

12. La particella di Figura 12.33 si muove senza attrito su un piano verticale entro un anello di raggio R. La velocità nella posizione inferiore è v_0. (a) Qual è il minimo valore di v_0, che chiamiamo v_m, per cui la particella ruota lungo tutta la circonferenza senza perdere contatto con la superficie interna dell'anello? (b) Si supponga ora che sia $v_0 = 0{,}775 v_m$. La particella si staccherà dall'anello in un punto P e proseguirà lungo la traiettoria approssimativamente indicata dal tratteggio in figura. Si calcoli la posizione angolare θ del punto P.

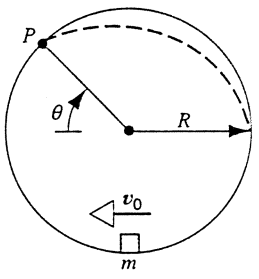


FIGURA 12.33 Problema 12.

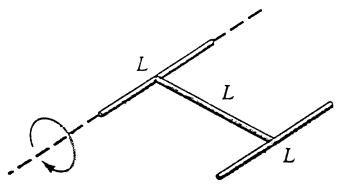


FIGURA 12.34 Problema 13.

13. Un corpo rigido è formato da tre asticelle sottili identiche, unite fra loro in modo da assumere la forma della lettera H, come nella Figura 12.34. L'insieme è libero di ruotare intorno a un asse orizzontale fisso, che coincide con una delle gambe dell'H. Partendo da una posizione di riposo in cui il piano dell'H è orizzontale, il sistema è lasciato libero di cadere. Qual è la velocità angolare del corpo quando il piano dell'H arriva in posizione verticale?

14. Una biglia omogenea di massa m e raggio r rotola senza strisciare lungo la pista della «gran volta» il cui profilo appare nella Figura 12.35, essendo partita da ferma da un punto del tratto diritto della pista di lancio. (a) Da quale altezza minima h deve partire per non staccarsi dalla pista alla sommità della gran volta? (Il raggio della gran volta è $R \gg r$.) (b) Se la si fa partire da un'altezza $h = 6R$, qual è la componente orizzontale della forza che agisce sulla biglia nel punto Q?

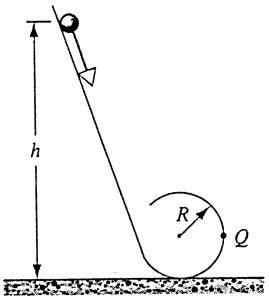


FIGURA 12.35 Problema 14.

15. Data la situazione illustrata in Figura 12.36, trovare la velocità iniziale v_0, in funzione del raggio r e della posizione angolare di partenza θ_0, che bisogna imprimere alla biglia per farle raggiungere, partendo da ferma, il bordo della superficie emisferica senza superarlo.

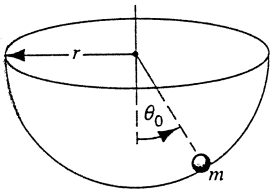


FIGURA 12.36 Problema 15.

16. La Figura 12.37a presenta un atomo di massa m a una distanza r da un altro atomo a riposo di massa $M \gg m$. Nella Figura 12.37b è riportato il grafico dell'energia potenziale $U(r)$ in funzione della distanza r. Si descriva il moto dell'atomo leggero quando (a) l'energia meccanica totale è positiva, come quando ha il valore E_1, e (b) quando è negativa, come quando ha il valore E_2. Ponendo $E_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-19}$ J ed $r = 0{,}30$ nm, trovare (c) l'energia potenziale, (d) l'energia cinetica e (e) la forza (modulo e direzione) relative all'atomo in moto.

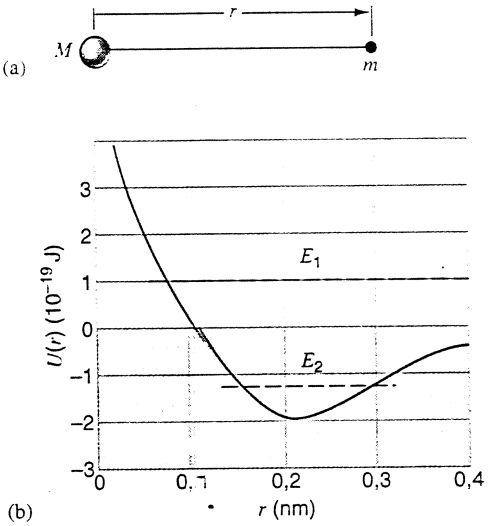


FIGURA 12.37 Problema 16.

17. Una particella alfa (nucleo di elio) è legata all'interno di un nucleo pesante da un'energia potenziale come quella riportata in Figura 12.38. (a) Si trovi una funzione di x che riproduca qualitativamente questa forma in cui si ha un minimo U_0 in $x = 0$ e due massimi U_1 in corrispondenza di $x = x_1$ e $x = -x_1$. (b) Esprimere la forza che agisce tra la particella alfa e il nucleo in funzione di x. (c) Descrivere i possibili moti.

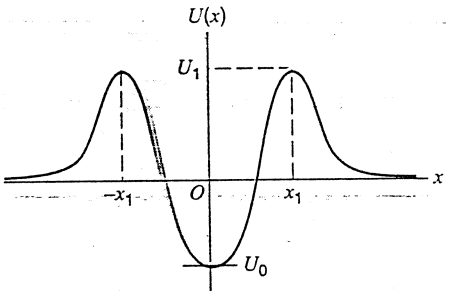


FIGURA 12.38 Problema 17.

18. La cosiddetta energia potenziale di Yukawa,

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0},$$

dà una descrizione abbastanza accurata dell'interazione tra nucleoni (protoni e neutroni, i costituenti del nucleo). La costante r_0 vale circa $1{,}5 \cdot 10^{-15}$ m, mentre la costante U_0 vale all'incirca 50 MeV. (a) Trovare la corrispondente espressione per la forza d'attrazione. (b) Per rendersi conto di quanto è piccolo il raggio d'azione di questa forza, calcolare di quanto è minore la forza alle distanze $r = 2r_0$, $4r_0$ e $10r_0$ rispetto al valore assunto alla distanza r_0.

 ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Una particella si muove lungo l'asse x sotto l'effetto di una forza descritta da

$$F = -\text{sign}(x)F_0(1 - e^{-\alpha x^2})i.$$

Fissiamo $F_0 = 1$ N e $\alpha = 1\ \text{m}^{-2}$. Costruire numericamente un grafico della funzione energia potenziale $U(x)$.

2. Una particella di massa 1,0 kg si muove in un campo di potenziale unidimensionale descritto da $U(x) = Ax^4$, in cui $A = 1\ \text{J/m}^4$. (a) La particella parte da ferma dalla posizione $x = 1$ m; con un metodo numerico si trovi quanto tempo impiega la particella per tornare al punto di partenza. (b) La particella parte da ferma dalla posizione $x = 2$ m; si trovi quanto tempo impiega la particella per tornare al punto di partenza. (c) Si costruisca un grafico che descriva questo tempo di ritorno in funzione della posizione di partenza tra $x = 0{,}1$ m e $x = 10$ m. Di che curva notevole si tratta?

3. Una particella di massa 1,0 kg si muove in un campo di potenziale unidimensionale descritto da $U(x, y) = A(x^4 + y^4 - 2\alpha x^2 y^2)$, con $A = 1{,}00\ \text{J/m}^4$ e α costante adimensionale compresa tra 0 e 1. La particella parte da ferma dal punto di coordinate $x = 1{,}00$ m e $y = 2{,}00$ m. (a) Calcolate numericamente la traiettoria della particella per $\alpha = 0$. Riportare la traiettoria su un grafico xy. (b) Ripetete il procedimento per $\alpha = 1$. Tracciate la traiettoria e confrontatela con la precedente. Questo è un tipico esempio di moto caotico.

CAPITOLO 13

ENERGIA 3: CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

La conservazione dell'energia è in fisica uno dei princìpi guida. Abbiamo imparato che nell'accumulare energia, nel convertirla o nel trasferirla entro sistemi meccanici non soggetti a forze esterne e governati da forze conservative, l'energia meccanica si conserva. Ora considereremo la variazione di energia che avviene in sistemi di particelle per opera di forze esterne, e tratteremo anche le forze d'attrito che agiscono tra gli elementi del sistema o tra questi e l'ambiente esterno. Questa estensione del principio di conservazione ci richiederà di introdurre un nuovo tipo di energia: l'energia interna.

Presenteremo infine un secondo metodo per modificare l'energia di un sistema, cioè il trasferimento di calore attraverso i suoi confini. Questo concetto ci condurrà a una forma più generale del principio di conservazione dell'energia: la prima legge della termodinamica.

13.1 LAVORO SVOLTO SU UN SISTEMA DA FORZE ESTERNE

Nel Paragrafo 12.3 abbiamo definito l'energia meccanica totale E come la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale, $K + U$. L'energia potenziale è associata alle forze che i vari elementi del sistema esercitano tra di loro, forze che abbiamo assunto essere conservative. In un sistema isolato di queste caratteristiche l'energia meccanica resta costante.

Ora ampliamo l'approccio in diversi modi: (1) esistono delle forze esterne che modificano l'energia meccanica totale; (2) si può accumulare energia internamente grazie a moti e interazioni reciproche tra gli atomi e le molecole costituenti il sistema; (3) possono essere presenti forze non conservative, in particolare quelle d'attrito; (4) l'energia si può trasferire sotto forma di calore. Per ciascuno di questi casi vedremo come allargare il concetto di energia e come estendere il principio della sua conservazione al fine di includere tali effetti. Questi argomenti ci forniranno ulteriori prove dell'importanza e dell'ampia applicabilità in fisica del principio di conservazione dell'energia.

Cominciamo con il discutere l'effetto prodotto dalle forze esterne che agiscono su un sistema. Abbiamo imparato che, nell'analisi di un problema, è spesso conveniente suddividere la realtà osservabile in due enti distinti: il sistema e il suo ambiente esterno. Quella porzione di osservabili che definiamo sistema viene da noi racchiusa idealmente con una superficie di contorno; entro questo contorno, cioè all'interno del sistema, possono esserci forze conservative esercitate da alcuni corpi su altri, che rappresentiamo mediante le loro energie potenziali. I corpi che invece sono al di fuori del contorno, quelli che appartengono cioè all'ambiente esterno, possono compiere un lavoro esterno L_{ext} sul sistema. La Figura 13.1 rappresenta questa situazione ideale, in cui il lavoro svolto da forze esterne esercitate da corpi appartenenti all'ambiente esterno al sistema può modificare l'energia meccanica totale $E = K + U$ del sistema stesso.

Possiamo pensare al lavoro svolto dall'esterno come a un modo di trasferire energia dall'ambiente al sistema o viceversa. Quando parliamo di lavoro *positivo* compiuto dall'ambiente sul sistema, intendiamo dire che una certa quantità di energia viene trasferita dall'ambiente al sistema, in-

 ISBN 88-408-1254-7

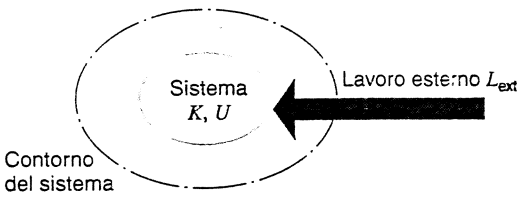


FIGURA 13.1 Un sistema chiuso entro i suoi confini possiede energia cinetica K ed energia potenziale U, che rappresentano solo le interazioni tra i componenti del sistema. L'ambiente attorno può scambiare energia con il sistema compiendo il lavoro esterno L_{ext} su di esso. La freccia indica l'energia trasferita verso l'interno del sistema grazie a questo lavoro esterno; lavoro ed energia sono scalari e quindi sono privi di direzione.

crementando così l'energia totale di quest'ultimo; se al contrario il lavoro svolto dall'ambiente sul sistema è *negativo* significa che una certa quantità di energia si trasferisce dal sistema al suo ambiente esterno, impoverendo di conseguenza l'energia totale del sistema.

Il lavoro compiuto dagli agenti esterni non crea né distrugge energia nel sistema, semplicemente la *trasferisce*. Quando diciamo per esempio che $L_{ext} = +100$ J, significa che il lavoro compiuto dall'esterno trasferisce 100 J di energia dall'ambiente al sistema. In questo processo il sistema vede aumentare la propria energia di 100 J, mentre l'ambiente ne perde un'uguale quantità: l'energia complessiva del sistema + ambiente resta invariata.

Più in dettaglio, consideriamo un sistema composto da numerosi oggetti, che trattiamo come corpi puntiformi. Il lavoro svolto su ciascuna particella del sistema può provenire da forze esercitate da altre particelle del sistema, oppure può provenire da forze esercitate da corpi esterni. Definiamo *lavoro interno* quello dovuto a forze esercitate da altre particelle appartenenti al sistema; continuiamo a supporre che queste forze siano conservative, per esempio forze gravitazionali, forze elastiche, forze elettriche, ecc. Il *lavoro esterno* è quello svolto da forze esterne esercitate da corpi che si trovano fuori dal sistema. Il lavoro totale L_{net} compiuto sulla n-esima particella è la somma dei contributi esterni ed interni: $L_{net,n} = L_{int,n} + L_{ext,n}$, e questo, per il teorema dell'energia cinetica (Equazione 11.24), è uguale alla variazione di energia cinetica posseduta dalla particella: $L_{net,n} = \Delta K_n$.

Consideriamo ora l'intero sistema composto di più particelle. La variazione totale di energia cinetica del sistema è semplicemente uguale alla somma delle variazioni relative a tutte le particelle: $\Delta K = \sum \Delta K_n$; similmente il lavoro esterno totale eseguito su tutte le particelle è uguale alla somma dei lavori esterni svolti su ciascuna di esse: $L_{ext} = \sum L_{ext,n}$. Essendo, come supposto, le forze interne conservative, possono essere rappresentate dalle funzioni energia potenziale; la variazione *totale* di energia potenziale del sistema si trova tramite l'Equazione 12.4 basata sul lavoro interno totale compiuto dalle particelle del sistema tra di loro: $\Delta U = -L_{int} = -\sum L_{int,n}$. Dato che, per la particella n, $L_{net,n} = L_{int,n} + L_{ext,n}$, per ottenere il lavoro relativo all'intero sistema sommiamo queste quantità per tutte le particelle ottenendo $\sum L_{net,n} = \sum L_{int,n} + \sum L_{ext,n}$, che, sostituendo gli ultimi due termini come sopra descritto, diventa $\Delta K = -\Delta U + L_{ext}$. Possiamo dunque scrivere

$$\Delta K + \Delta U = L_{ext}. \qquad (13.1)$$

L'Equazione 13.1 rappresenta l'espressione formale del concetto illustrato in Figura 13.1: il lavoro svolto dalle forze esterne modifica l'energia meccanica totale $K + U$ del sistema racchiuso entro il contorno. Si faccia ancora attenzione ai segni: se $L_{ext} > 0$, $\Delta(K + U) > 0$, e viceversa. Si noti anche che l'Equazione 12.12, $\Delta K + \Delta U = 0$, è un caso particolare della (13.1) che riguarda i sistemi isolati, quei sistemi cioè per cui $L_{ext} = 0$.

Come esempio consideriamo un blocco di massa m appeso a una molla in prossimità della superficie terrestre. Quando il blocco è libero di muoversi, rimane soggetto alla forza gravitazionale orientata verso il basso e alla forza di richiamo della molla orientata verso l'alto. Il contorno del sistema può essere scelto come si vuole: ne vediamo 4 esempi nella Figura 13.2.

1. *Sistema = blocco* (Figura 13.2a). Entrambe le forze citate risultano esterne; non vi sono forze interne e quindi nemmeno energia potenziale. L'energia cinetica del blocco varia in funzione del lavoro totale svolto dalle forze elastica e gravitazionale, che sono esterne. L'Equazione 13.1 diventa $\Delta K = L_{rich} + L_{grav}$.

2. *Sistema = blocco + molla* (Figura 13.2b). Ora anche la molla fa parte del sistema. La sua interazione con il blocco va quindi considerata sotto forma di energia potenziale. La gravità rimane una forza esterna, di modo che $\Delta K + \Delta U_{rich} = L_{grav}$.

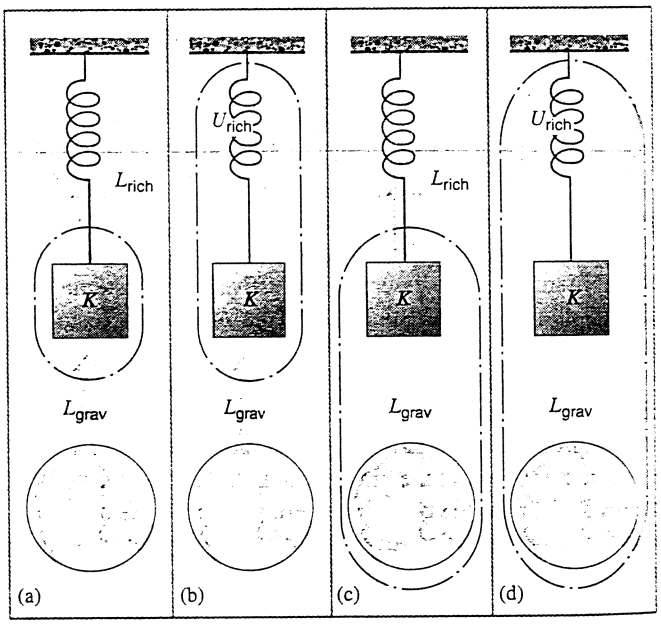


FIGURA 13.2 Un blocco, una molla e la Terra possono raggrupparsi in modi diversi per formare un sistema e il suo ambiente esterno.

3. *Sistema = blocco + Terra* (Figura 13.2c). La gravità è una forza interna, mentre la forza elastica di richiamo non lo è; di conseguenza l'Equazione 13.1 si scrive $\Delta K + \Delta U_{grav} = L_{rich}$.

4. *Sistema = blocco + molla + Terra* (Figura 13.2d). Non esistono forze esterne che compiono lavoro sul sistema; entrambe le forze presenti sono interne, di modo che $\Delta K + \Delta U_{rich} + \Delta U_{grav} = 0$, perché $L_{ext} = 0$.

Se per esempio avessimo avuto per obiettivo il calcolo della velocità del blocco in una sua certa posizione, tutti e tre i metodi avrebbero dato il medesimo risultato, dimostrando che la scelta del sistema è dettata solo da criteri di convenienza.

13.2 ENERGIA INTERNA IN UN SISTEMA DI PARTICELLE

Immaginate una pattinatrice che si allontana dal parapetto della pista di ghiaccio con una spinta all'indietro. Inizialmente è ferma, poi incomincia a scivolare sul ghiaccio estendendo le sue braccia e spingendole contro il parapetto.

Analizziamo questo esempio sotto l'aspetto della conservazione dell'energia meccanica, così come espressa dall'Equazione 13.1 ($\Delta K + \Delta U = L_{ext}$). Definiamo il sistema comprendendo la sola pattinatrice. Pertanto $\Delta U = 0$ perché non vi sono altri corpi nel sistema con cui scambiare forze conservative. Esistono invece forze esterne esercitate nei confronti della pattinatrice da corpi che fanno parte dell'ambiente. Tra queste, la gravità e la forza normale chiaramente non compiono lavoro su di lei (perché ortogonali al moto). Una terza forza agisce sulla pattinatrice per opera del parapetto; questa forza è uguale e opposta alla forza che la pattinatrice esercita nei confronti del parapetto. Ma anche questa forza non compie lavoro *perché il punto di applicazione della forza non si muove*. Essendo nulle tutte e tre le forze esterne, risulta $L_{ext} = 0$. Applicando la (13.1) dovremmo concludere che $\Delta K = 0$, in contrasto con l'osservazione sperimentale che vede la pattinatrice accelerare. Non manca qualcosa nel ragionamento? Da dove proviene l'energia cinetica che acquista la pattinatrice?

Quando una legge consolidata, come quella espressa dall'Equazione 13.1, già ritenuta valida e utile in molti casi, sembra cadere in difetto in altri casi, i fisici di solito, prima di abbandonare la legge, tentano piuttosto di estenderla. In una forma più ampia infatti questa legge può applicarsi egualmente bene sia ai casi già visti sia a nuovi casi, come quello ora descritto, che sembrerebbero in disaccordo con la teoria come precedentemente formulata. Come si attua questo ampliamento del principio di conservazione dell'energia meccanica per includere casi come quello della pattinatrice?

Abbiamo ricavato il principio di conservazione dell'energia meccanica dalle leggi di Newton espresse nella forma che si applica solo ai punti materiali. In tutti gli esempi del Capitolo 12 in cui l'abbiamo applicato, ogni corpo del sistema veniva trattato come fosse una particella. La pattinatrice invece *non* si può assimilare a un corpo puntiforme; una caratteristica essenziale che deve possedere un corpo esteso per essere trattato come puntiforme è che tutti i suoi elementi si devono muovere allo stesso modo con i medesimi parametri vettoriali di velocità e accelerazione. Mentre ella estende le braccia per spingersi, non tutte le particelle che la compongono sono caratterizzate dallo stesso moto, e quindi non si può assimilare il corpo della pattinatrice a un unico punto materiale. Va trattata di conseguenza come un *sistema* di punti materiali, dotato di una sua struttura interna; è evidente che all'interno di questo sistema sono avvenuti dei fenomeni che non potrebbero avvenire all'interno di una particella, essendo questa per definizione priva di struttura.

Il concetto di energia può estendersi postulando che un sistema costituito di molte particelle possa immagazzinare energia in una forma che chiamiamo energia interna E_{int}. Aggiungiamo quindi nell'Equazione 13.1 un termine che rappresenti questo tipo di energia:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = L_{ext}. \qquad (13.2)$$

Qual è la natura di questa energia interna? Spesso possiamo rappresentare l'energia interna come la somma delle energie cinetiche associate ai moti casuali degli atomi e delle molecole (ciò che normalmente determina la temperatura del corpo) e delle energie potenziali relative alle forze di interazione tra gli atomi e le molecole: $E_{int} = K_{int} + U_{int}$. Il più delle volte non abbiamo bisogno di considerare le forme che assume l'energia interna; semplicemente la classifichiamo nel suo insieme come un'altra forma di energia di cui è dotato il sistema.

Prendiamo per esempio una sferetta metallica che cade in un liquido viscoso come l'olio. Supponiamo di osservarla mentre percorre una certa distanza dopo che ha raggiunto la sua velocità limite, cosicché $\Delta K = 0$. Assumiamo come sistema la sferetta, l'olio col suo recipiente e la Terra. L'unica energia potenziale associata a forze agenti tra elementi del sistema è quella dovuta alla gravità, ΔU_{grav}. Sul sistema non agiscono forze esterne e dunque $L_{ext} = 0$. L'Equazione 13.2 diventa in questo caso $\Delta U_{grav} + \Delta E_{int} = 0$, ossia $\Delta E_{int} = -\Delta U_{grav}$. Al cadere della sferetta, ΔU_{grav} diminuisce e quindi l'energia interna cresce; la perdita di energia potenziale viene bilanciata da un guadagno in energia interna, di modo che l'energia totale del sistema resta costante. L'incremento di energia interna, associato a variazioni nel moto o nella configurazione del sistema di particelle che costituiscono la sfera o l'olio, potrebbe probabilmente manifestarsi attraverso un lieve aumento della temperatura di questi corpi.

Una spiegazione analoga ci fa capire come mai una pallina da tennis, lasciata cadere da ferma sul pavimento, non rimbalza fino all'altezza da cui è partita. Durante il tempo in cui la pallina resta a contatto con il terreno, la deformazione della sua struttura, che prima si comprime e poi si espande, accresce nel complesso la sua energia interna a spese della sua energia cinetica, facendo sì che la velocità scalare subito dopo il rimbalzo sia un poco minore di quella che aveva subito prima di toccare terra; come conseguenza, non risale per una distanza uguale a quella percorsa in discesa.

 ISBN 88-408-1254-7

Da questo esempio potete capire come siamo riusciti a salvare il principio originale di conservazione dell'energia. L'energia è stata trasformata dalla forma meccanica, $K + U$ in energia interna E_{int}, ma la somma totale non è cambiata.

Rivediamo il significato dei termini che compaiono nell'Equazione 13.2:

- K è l'energia cinetica associata al moto complessivo (lineare e rotazionale) di tutti gli elementi che fanno parte del sistema, misurata in un opportuno sistema di riferimento inerziale, usualmente quello del laboratorio.
- U è l'energia potenziale associata alle forze conservative che gli elementi del sistema esercitano tra di loro.
- E_{int} è l'energia interna del sistema, che comprende l'energia cinetica e potenziale relative a tutti gli atomi e molecole che compongono il sistema.
- L_{ext} è il lavoro totale compiuto sul sistema dalle forze esterne.

Esaminiamo ora come l'aggiunta del termine di energia interna ci permette di analizzare il moto della pattinatrice e di salvare la nozione di conservazione dell'energia. L'Equazione 13.2, in cui $L_{ext} = 0$ e $\Delta U = 0$, si riduce a

$$\Delta E_{int} = -\Delta K . \qquad (13.3)$$

Per la pattinatrice ΔK è positivo e quindi, in base alla precedente equazione, ΔE_{int} è negativo. Significa che l'incremento della sua energia cinetica va a spese di una diminuzione della sua energia interna, che deriva in ultima analisi dal cibo di cui ella si alimenta. Si noti che, sebbene il punto di applicazione della forza esercitata dal parapetto sulla pattinatrice non si muova a seguito della spinta, il centro di massa della ragazza invece *si muove* man mano che ella dispiega e allunga le braccia. Si richiede ora di esaminare il moto del centro di massa del sistema dal punto di vista energetico; lo faremo nel Paragrafo 13.5.

PROBLEMA SVOLTO 13.1 Si lascia cadere una pallina di massa 0,143 kg dalla cima del grattacielo *Sears Tower* di Chicago posto ad altezza h = 443 m sul livello del suolo. La pallina raggiunge la sua velocità limite v = 42 m/s (vedi Paragrafo 4.4). Trovare la variazione di energia interna della pallina e dell'aria circostante durante la caduta fino a terra.

Soluzione Adottiamo un sistema composto dalla pallina, dall'aria circostante e dalla Terra. Non esistono forze esterne che agiscono sul sistema; infatti sia la forza di gravità sia la resistenza dell'aria sono forze interne al sistema per come l'abbiamo definito. La variazione di energia potenziale del sistema è

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 - mgh =$$
$$= -(0{,}143\ \text{kg})(9{,}80\ \text{m/s}^2)(443\ \text{m}) = -621\ \text{J}.$$

La variazione di energia cinetica durante la caduta è data da

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv^2 - 0 = \tfrac{1}{2}(0{,}143\ \text{kg})(42\ \text{m/s})^2 = 126\ \text{J}.$$

Il moto della Terra conseguente all'attrazione gravitazionale esercitata dalla pallina viene trascurato. In base all'Equazione 13.2 possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia come $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0$, dato che il lavoro esterno è nullo. Risolvendo l'espressione rispetto all'energia interna abbiamo

$$\Delta E_{int} = -\Delta U - \Delta K = -(-621\ \text{J}) - 126\ \text{J} = 495\ \text{J}.$$

Questo incremento di energia interna può manifestarsi sotto forma di aumento di temperatura della pallina e dell'aria circostante, o anche sotto forma di energia cinetica legata al moto vorticoso dell'aria che forma la scia della pallina. La sola applicazione della (13.2) non ci consente di conoscere in che modo si suddivide l'energia totale tra le forme che la compongono. Se volessimo raggiungere questo scopo dovremmo considerare il sistema costituito dalla sola pallina o dalla sola aria e calcolare il lavoro svolto dalle forze esterne che vi agiscono. Ciò comporterebbe la conoscenza del coefficiente aerodinamico tra la pallina e l'aria, nonché i dettagli sul moto della pallina; troppo complicato da risolvere in questa sede.

13.3 LAVORO SVOLTO DALLE FORZE D'ATTRITO

Pensate a un blocco che sta scivolando su un tavolo orizzontale, rallenta costantemente e si ferma a causa dell'attrito. Se adottiamo come sistema l'insieme del blocco e del ripiano del tavolo, la forza d'attrito risulta interna e non vi sono altre forze esterne che compiono lavoro sul blocco. Applichiamo l'Equazione 13.2 a un caso siffatto:

$$\Delta K + \Delta E_{int\,blocco\,+\,tavolo} = 0. \qquad (13.4)$$

Al diminuire dell'energia cinetica del blocco si assiste a un corrispondente aumento dell'energia interna di blocco e ripiano. Lo si può probabilmente osservare sotto forma di crescita di temperatura di questi oggetti. È una cognizione molto comune l'aumento di temperatura dovuto all'attrito tra due superfici, come una lama affilata su una mola o i freni delle automobili e delle biciclette, ove sappiamo che si scaldano non solo i pattini di gomma ma anche i cerchioni. Anche sfregandosi le mani si ottiene lo stesso effetto.

Nel Paragrafo 5.3 abbiamo visto che il caso del blocco sul tavolo si analizza considerando l'intensità della forza d'attrito f costante come il prodotto del coefficiente d'attrito per il modulo della forza normale. Saremmo quindi tentati di esprimere il lavoro svolto dalla forza d'attrito come il prodotto della sua intensità per il modulo dello spostamento dell'oggetto: $|L_a| = fs$. Vedremo che questa conclusione *non* è corretta. L'errore, nel caso dei corpi che subiscono attrito, origina dall'essere tali corpi estesi, e quindi tutt'altro che puntiformi.

Supponiamo che il blocco sia ora trascinato sul ripiano del tavolo da una corda in modo da avanzare con vettore velocità costante. La corda esercita una tensione costante di intensità T (Figura 13.3). L'accelerazione del blocco è nulla e quindi la forza risultante agente su di esso dev'essere parimenti nulla. Ne consegue che il modulo f della forza d'attrito dev'essere uguale al modulo T della tensione. Applichiamo ora l'Equazione 13.2 al sistema costituito dal solo bloc-

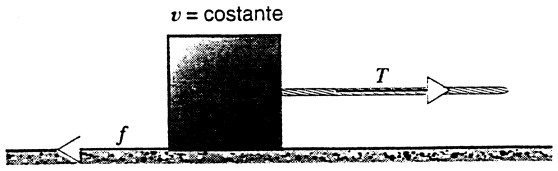


FIGURA 13.3 Un blocco tirato su una superficie orizzontale da una corda che esercita una tensione T.

co. La sua variazione di energia cinetica è zero e costantemente zero è anche la sua energia potenziale. Il lavoro compiuto sul blocco è legato all'azione di due forze: la tensione che svolge lavoro positivo L_T e l'attrito che compie lavoro negativo L_a. L'Equazione 13.2 diventa

$$\Delta E_{\text{int,blocco}} = L_T + L_a . \qquad (13.5)$$

Qui la quantità ΔE_{int}, a differenza dell'Equazione 13.4, è riferita al solo blocco.

Supponiamo che il blocco subisca uno spostamento di modulo s; si ha allora $L_T = Ts$ (positivo); introducendo questa uguaglianza nella (13.5) e risolvendola rispetto al lavoro, si ottiene

$$L_a = -Ts + \Delta E_{\text{int,blocco}} = -fs + \Delta E_{\text{int,blocco}} , \qquad (13.6)$$

dove ci siamo avvalsi dell'eguaglianza $T = f$ discussa poc'anzi. Risulta chiaro che $L_a \neq fs$ e che, essendo $\Delta E_{\text{int,blocco}}$ positiva, dev'essere $|L_a| < fs$. Il lavoro delle forze esterne consiste in energia che viene trasferita attraverso il contorno del sistema; l'Equazione 13.6 indica che il modulo dell'energia trasferita *fuori* dal contorno del sistema (che comprende il solo blocco) per azione della forza d'attrito è minore di fs, perché una parte del lavoro trasformato in energia rimane entro il sistema sotto forma di energia interna. Non disponendo di un modello più dettagliato sul comportamento della forza d'attrito, non possiamo sviluppare ulteriormente l'Equazione 13.6 alla ricerca del lavoro svolto da questa forza, dato che non sappiamo che porzione dell'energia resti all'interno del blocco come energia interna.

Se scegliessimo il tavolo come sistema, non miglioreremmo la situazione. L'Equazione 13.2 applicata al solo tavolo infatti dà $\Delta E_{\text{int,tavolo}} = L'_a$, ove $L'_a (= -L_a)$ rappresenta il lavoro svolto dalla forza d'attrito che il blocco esercita *sul* tavolo, un lavoro positivo. Il lavoro è positivo quando trasferisce energia dall'ambiente all'interno del sistema, incrementando così l'energia interna del tavolo, una quantità di energia che comunque non ci è dato conoscere.

Applichiamo invece il principio di conservazione dell'energia al sistema comprendente sia il tavolo sia il blocco. Ora l'attrito è una forza interna e non compare quindi in queste equazioni. L'unica forza esterna è la tensione della corda, che compie il lavoro L_T sul sistema. L'Equazione 13.2 si scrive dunque come

$$\Delta E_{\text{int, blocco + tavolo}} = L_T . \qquad (13.7)$$

Il lavoro compiuto dalla forza di tensione è in definitiva responsabile dell'aumento di energia interna (e quindi di temperatura) del blocco e del tavolo. Senza una descrizione molto dettagliata (e inevitabilmente complessa) delle proprietà delle due superfici, non siamo in grado di separare l'aumento di energia interna totale nei due termini che la compongono, $\Delta E_{\text{int,blocco}}$ e $\Delta E_{\text{int,tavolo}}$; l'Equazione 13.7 non ce ne dà che la somma. E senza conoscere $\Delta E_{\text{int,blocco}}$ non possiamo mediante la (13.6) ricavare il lavoro svolto dalla forza d'attrito.

Come è possibile che una forza d'attrito f, agendo su un corpo che subisce uno spostamento s, compia un lavoro di modulo minore di fs? La forza d'attrito che si esercita tra superfici in movimento non è in realtà una singola forza applicata a un solo punto, ma è il complesso di tante minuscole forze che agiscono in innumerevoli punti della superficie (si riveda la Figura 5.14 riguardo agli aspetti microscopici dell'attrito). Questa forza è quindi il risultato dell'effetto complessivo di tutte le microsaldature che si instaurano quando le piccolissime protuberanze della superficie del blocco vengono a contatto intimo con la superficie del ripiano, oppure viceversa. All'avanzare del blocco, solo le protuberanze appartenenti alla superficie mobile contribuiscono al lavoro, mentre quelle del ripiano non subiscono spostamento e perciò non compiono lavoro. Ecco dunque che una parte della forza d'attrito non contribuisce al lavoro ed ecco spiegato perché secondo questo modello $|L_a| < fs$.

Questo modello è tuttavia enormemente semplificato e sarebbe del resto un'impresa senza speranze il voler considerare tutti i fenomeni microscopici che intervengono quando un corpo striscia a contatto di un altro. Fortunatamente, seguendo il concetto di trasferimento dell'energia illustrato nella Figura 13.1, possiamo descrivere macroscopicamente il fenomeno dell'attrito come un trasferimento di energia tra corpi di un sistema, o tra il sistema e il suo ambiente esterno, secondo il modo in cui definiamo il contorno del sistema, fenomeno che in definitiva varia l'energia interna dei corpi in osservazione. Senza un modello microscopico resteremmo all'oscuro di come questo incremento di energia interna si ripartisca tra i diversi corpi del sistema e dell'ambiente, e di conseguenza non potremo calcolare il lavoro svolto dalla forza d'attrito responsabile di questa trasformazione.

PROBLEMA SVOLTO 13.2 Si spinge con un colpo su per un piano inclinato di 30° un blocco di massa 4,5 kg con velocità iniziale di 5,0 m/s. Dopo essere salito rallentando per una distanza d = 1,5 m lungo il piano, il blocco si arresta. (a) Quanta energia interna guadagna il sistema blocco + piano + Terra per effetto dell'attrito? (b) Il blocco poi ridiscende scivolando giù per il piano inclinato. Se il guadagno di energia interna è lo stesso del precedente, a che velocità il blocco transita per il punto di partenza?

Soluzione (a) Con la scelta del sistema che abbiamo fatto, l'energia potenziale gravitazionale va inclusa nel termine ΔU dell'Equazione 13.2. Come sempre, ignoriamo la variazione di energia cinetica della Terra e teniamo conto solamente di quella del blocco. La variazione di energia potenziale è

 ISBN 88-408-1254-7

$$\Delta U = U_f - U_i = mgh - 0 = mgd \sin 30° =$$
$$= (4.5\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2)(1.5\ \text{m})(\sin 30°) = 33\ \text{J}.$$

La variazione di energia cinetica del blocco nel tratto in salita è

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \tfrac{1}{2}mv^2 = -\tfrac{1}{2}(4.5\ \text{kg})(5.0\ \text{m/s})^2 = -56\ \text{J}.$$

La variazione di energia meccanica del sistema risulta quindi

$$\Delta U + \Delta K = 33\ \text{J} + (-56\ \text{J}) = -23\ \text{J}.$$

Il sistema dunque perde 23 J di energia meccanica. Dato che $L_{ext} = 0$ (attrito e gravità sono forze interne), l'Equazione 13.2 diventa $\Delta E_{int} = -(\Delta U + \Delta K) = +23$ J. L'energia interna del sistema si arricchisce di 23 J. che si può rivelare nel riscaldamento del blocco e del piano inclinato.

(b) Veniamo all'intero percorso di andata e ritorno del blocco. Abbiamo appena visto che l'incremento di energia interna del sistema nel tratto di andata è di 23 J. Avendo stabilito per ipotesi che nel tratto di ritorno la variazione di energia interna è la stessa, la variazione totale relativa all'intero percorso è di 46 J. Inoltre $\Delta U = 0$, perché la quota di partenza coincide con quella di arrivo. Ne consegue che, in totale, si avrà $\Delta K = -\Delta E_{int} = -46$ J. Ponendo $\Delta K = K_f - K_i$, abbiamo

$$K_f = \Delta K + K_i = -46\ \text{J} + 56\ \text{J} = 10\ \text{J}.$$

La velocità finale richiesta è dunque

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(10\ \text{J})}{4{,}5\ \text{kg}}} = 2{,}1\ \text{m/s}.$$

13.4 CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA IN UN SISTEMA DI PARTICELLE

Nel nostro programma di estensione del principio di conservazione dell'energia *meccanica* di un sistema isolato (Equazione 12.15) a un principio più generale di conservazione dell'energia abbiamo fatto un primo passo con l'Equazione 13.2. Il membro sinistro di questa espressione rappresenta la variazione di energia totale del sistema, che comprende l'energia cinetica, l'energia potenziale e l'energia interna. Mano a mano che incontriamo nuove forme sotto cui può manifestarsi l'energia, possiamo aggiungere ulteriori termini a sinistra in questa equazione, come per esempio l'energia elettrostatica o l'energia magnetica. Il membro di destra indica uno dei modi in cui è possibile variare l'energia del sistema: compiendo lavoro esterno su di esso. Al termine del capitolo accenneremo a un secondo modo di ottenere lo stesso scopo: la trasmissione di calore.

La prima formulazione del principio di conservazione dell'energia (Paragrafo 12.3) era ristretta ai sistemi isolati (la risultante delle forze esterne non compie lavoro), e inoltre comprendeva solo l'energia meccanica $K + U$. Richiedeva infatti che l'energia meccanica totale rimanesse costante pur consentendole di distribuirsi in modo variabile tra le sue due forme, cinetica e potenziale.

Abbiamo ora esteso questo concetto comprendendo altre forme di energia, come la già discussa energia interna, e accettando che nel sistema agiscano anche forze non conservative, come l'effetto dell'attrito; abbiamo anche rinunciato a imporre che il lavoro esterno svolto sul sistema sia nullo. Sintetizziamo dunque quanto detto.

L'energia entro un sistema può trasformarsi da una forma all'altra. Se il sistema è isolato, l'energia totale rimane costante. Se sul sistema si compie lavoro esterno, questo corrisponde a un trasferimento di energia che varia l'energia totale del sistema.

Il principio di conservazione dell'energia, al pari di quelli della quantità di moto e del momento angolare, è un principio di cui non si è mai riscontrata contraddizione in alcuna osservazione o esperimento di laboratorio.

La definizione del sistema è arbitraria e dettata da ragioni di opportunità. Una volta stabilito il contorno del sistema, si considerano tutte le forme di energia che possono assumere i corpi racchiusi: cinetica, potenziale o interna. Le interazioni tra i corpi interni al sistema possono cambiarne l'energia da una forma all'altra, ma non possono cambiarne la somma. Per sapere se l'energia totale del sistema è suscettibile di variazione, rivolgiamo la nostra attenzione ai corpi esterni al sistema, che costituiscono il suo ambiente, alla ricerca di eventuale lavoro che essi possono svolgere sul sistema.

Illustriamo ancora questi principi considerando la combinazione blocco-molla della Figura 13.4. Poniamo che la molla venga inizialmente compressa e poi liberata. Tra il blocco e la superficie del tavolo agisce una forza d'attrito. È istruttivo definire il sistema in modi diversi, come suggeriscono i tre diversi contorni disegnati nella Figura 13.4. I tra-

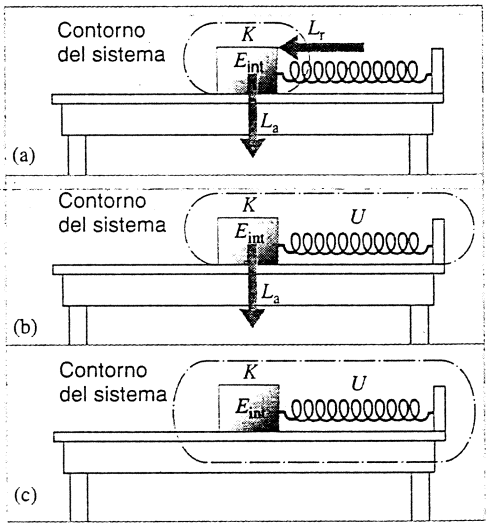


FIGURA 13.4 Un blocco sotto l'azione di una molla scivola su un tavolo che esercita una forza d'attrito. (a) Il sistema consiste del solo blocco; la forza elastica e quella d'attrito compiono lavoro sul sistema variandone l'energia. (b) Il sistema è composto ora dal blocco e dalla molla; possiede sia energia cinetica sia energia potenziale. (c) Il sistema ora include anche il tavolo. La forza d'attrito è quindi una forza interna e contribuisce all'energia interna del sistema.

sferimenti di energia che avvengono attraverso il contorno del sistema sono disegnati con le frecce. Il verso della freccia indica il senso del trasferimento, entrante o uscente dal sistema; non ha invece significato la direzione della retta su cui è disegnata la freccia, essendo il lavoro uno scalare.

1. *Sistema = blocco.* Prendiamo il blocco come unico costituente del sistema (Figura 13.4a). Nella figura sono disegnati due trasferimenti di energia attraverso il contorno del sistema: il lavoro positivo L_r effettuato dalla forza di richiamo sul blocco e il lavoro negativo L_a svolto dall'attrito sul blocco. Il principio di conservazione dell'energia (Equazione 13.2) può allora scriversi come

$$\Delta K + \Delta E_{int} = L_r + L_a . \qquad (13.8)$$

Abbiamo considerato $\Delta U = 0$, perché il corpo contenuto nel sistema non è soggetto a variazione di energia potenziale. La molla infatti sta nell'ambiente esterno e di conseguenza il lavoro ch'essa svolge sul blocco rientra in L_{ext}. Peso e forza normale, pur agendo sul sistema, non compiono lavoro e non sono quindi contemplati nel calcolo. Il verso delle frecce di Figura 13.4a indica il senso di trasferimento dell'energia; anche l'Equazione 13.8 conferma che il lavoro positivo svolto dalla forza di richiamo della molla tende ad aumentare l'energia del blocco, mentre il lavoro negativo svolto dalla forza d'attrito della superficie tende a diminuirla.

2. *Sistema = blocco + molla.* Sia ora il sistema composto dal blocco e dalla molla (Figura 13.4b). L'energia potenziale del sistema è $\Delta U = -L_r$ (associata con la forza di richiamo della molla). La forza d'attrito è l'unica forza esterna che compia lavoro sul sistema. Il principio di conservazione dell'energia si esprime dunque così:

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = L_a . \qquad (13.9)$$

L'energia del sistema è ora $U + K + E_{int}$; gli scambi energetici tra blocco e molla non rientrano nel calcolo. La forza di richiamo è una forza *interna* che può trasformare l'energia entro il sistema da una forma a un'altra ($U \leftrightarrow K$), ma non può modificarne il valore *totale*. Il lavoro negativo dovuto all'attrito può invece diminuire l'energia interna del sistema.

3. *Sistema = blocco + molla + tavolo.* Includiamo ora nel sistema anche il tavolo (Figura 13.4c). Non esistono in questo caso forze esterne che provochino trasferimenti di energia attraverso i confini del sistema. Il lavoro esterno è dunque nullo e pertanto

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0 . \qquad (13.10)$$

La forza d'attrito adesso è all'interno, come la forza di richiamo. Ora entro il sistema può avvenire anche uno scambio tra energia meccanica ($K + U$) ed energia interna di blocco e tavolo, ma l'energia totale (meccanica + interna) non cambia. Supponiamo per esempio di liberare il blocco da fermo quando la molla è compressa. Il blocco oscilla scivolando avanti e indietro finché si ferma. Dato che $v_f = v_i$ risulta $\Delta K = 0$ e quindi $\Delta E_{int} = -\Delta U$. L'energia potenziale immagazzinata inizialmente nella molla si trasforma in energia interna del sistema; il segno meno specifica che questa aumenta al diminuire dell'energia potenziale. Da questa analisi non emerge la ripartizione dell'energia interna tra i vari elementi del sistema: ci dà solo la loro somma.

Concludiamo che, per l'applicazione del principio di conservazione dell'energia, la scelta del sistema, messa in evidenza nei disegni di Figura 13.4, è a nostro libero arbitrio. Secondo il tipo di problema alcune scelte possono risultare più utili di altre. Una volta fatta la scelta, occorre attenervisi durante tutta l'analisi avendo ben chiaro quali forze e quale lavoro sono esterni al sistema.

La forza d'attrito è un esempio di forza non conservativa, detta anche *dissipativa*. In un sistema meccanico chiuso come quelli qui considerati, la forza d'attrito trasforma energia meccanica in energia interna. L'energia meccanica pertanto in questo caso *non* si conserva, e la sua perdita è compensata da un pari guadagno di energia interna.

13.5 ENERGIA ASSOCIATA AL CENTRO DI MASSA

La Figura 13.5 rappresenta la pattinatrice di cui abbiamo già parlato in questo capitolo. Ella esercita una forza sul parapetto, il quale per la terza legge di Newton esercita a sua volta un'altra forza uguale e contraria sulla pattinatrice. Quest'ultima forza, indicata in figura con F_{ext}, accelera la ragazza da ferma fino alla velocità finale v_{cm}.

Cosa ci può insegnare al riguardo il principio di conservazione dell'energia? Adottiamo come sistema la sola pattinatrice. Non c'è variazione di energia potenziale, perciò $\Delta U = 0$. Non c'è neppure lavoro svolto da forze esterne (si suppone che la superficie ghiacciata sia priva d'attrito). Nemmeno il parapetto compie lavoro sulla ragazza perché *il punto di applicazione della forza resta fermo.* Non esiste dunque alcun trasferimento di energia attraverso il contorno del sistema. L'Equazione 13.2, posto $L_{ext} = 0$, dà

$$\Delta K + \Delta E_{int} = 0 . \qquad (13.11$$

Per una pattinatrice di massa M che parte da ferma la variazione di energia cinetica è $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ (positiva), di modo che ΔE_{int} risulta negativa. Dunque, l'energia cinetica che acquista la ragazza spingendosi indietro va a spese di una diminuzione dell'energia interna ch'ella mantiene accumulata nel suo organismo, e non a spese di una fonte esterna.

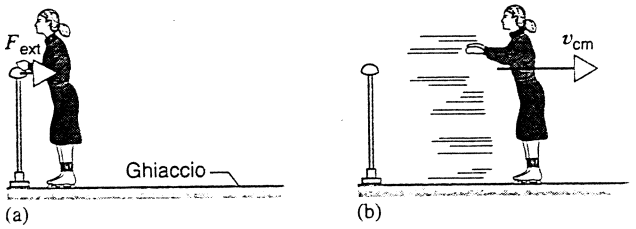


FIGURA 13.5 (a) Una pattinatrice si dà una spinta indietro contro il parapetto. Quest'ultimo esercita una forza F_{ext} sulla pattinatrice. (b) Terminata la spinta, la pattinatrice si muove con velocità v_{cm}.

 ISBN 88-408-1254-7

In un caso piuttosto complesso come questo il principio di conservazione dell'energia è di scarsa utilità. Per esempio, la forza esterna non viene contemplata (perché non compie lavoro) e quindi l'Equazione 13.2 non permette di calcolarla.

La complessità deriva anche dal fatto che la pattinatrice non è un corpo puntiforme: un corpo esteso si comporta come una particella se tutte le sue parti si muovono allo stesso modo; non è così per la ragazza, le cui braccia seguono un moto diverso da quello del busto.

Nel Paragrafo 7.3 abbiamo analizzato sistemi complessi composti da numerose particelle. L'Equazione 7.16 in particolare, $\sum F_{ext} = Ma_{cm}$, sintetizza la relazione tra la forza risultante esterna che agisce su un sistema e il moto del suo centro di massa. Limitiamoci al semplice caso unidimensionale lungo l'asse x ed omettiamo per brevità anche i pedici x. Supponendo che agisca una sola forza, l'Equazione 7.16 diventa $F_{ext} = Ma_{cm}$. Chiamiamo dx_{cm} lo spostamento infinitesimo del centro di massa e moltiplichiamolo per entrambi i membri dell'Equazione 7.16:

$$F_{ext}\,dx_{cm} = Ma_{cm}\,dx_{cm} = M\frac{dv_{cm}}{dt}v_{cm}\,dt,$$

ove $a_{cm} = dv_{cm}/dt$ e $dx_{cm} = v_{cm}\,dt$. Semplificando si ottiene

$$F_{ext}\,dx_{cm} = Mv_{cm}\,dv_{cm}. \qquad (13.12)$$

Se il centro di massa si muove da x_i a x_f e la sua velocità varia da $v_{cm,i}$ a $v_{cm,f}$, integriamo entrambi i membri della (13.12) tra questi estremi:

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext}\,dx_{cm} = \int_{v_{cm,i}}^{v_{cm,f}} Mv_{cm}\,dv_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm,f}^2 - \tfrac{1}{2}Mv_{cm,i}^2. \qquad (13.13)$$

I termini a destra rappresentano l'energia cinetica K_{cm} della particella di massa M in moto alla velocità del centro di massa e pertanto

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext}\,dx_{cm} = K_{cm,f} - K_{cm,i} = \Delta K_{cm}. \qquad (13.14)$$

In molti casi la forza esterna è costante e pertanto può essere portata fuori dal segno d'integrale, che a questo punto si riduce semplicemente allo spostamento $s_{cm}(= x_f - x_i)$ del centro di massa. In tal caso l'Equazione 13.14 diventa

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm}. \qquad (13.15)$$

Le Equazioni 13.14 e 13.15 ricordano il teorema dell'energia cinetica per un punto materiale. È importante notare che, sebbene le grandezze che compaiono a sinistra sembrino a prima vista quelle del lavoro (e le dimensioni sono effettivamente quelle del lavoro), esse non rappresentano il lavoro come l'abbiamo definito, perché dx_{cm} ed s_{cm} non sono lo spostamento del punto di applicazione della forza esterna*. Nella Figura 13.5 per esempio lo spostamento del punto di applicazione della forza esterna è nullo, ma s_{cm} non lo è di certo.

Le Equazioni 13.14 e 13.15 *non* sono espressioni del principio di conservazione dell'energia. L'energia cinetica traslazionale relativa al moto del centro di massa è l'unica forma di energia che vi compare. Altre forme, come il lavoro, l'energia cinetica rotazionale, quella potenziale e quella interna, non vi compaiono.

Ci riferiremo quindi alla (13.14) e alla (13.15) come all'equazione dell'*energia del centro di massa* (ECM) e alla (13.2) come all'equazione di *conservazione dell'energia* (CDE). Si osservi che l'equazione ECM deriva direttamente dalla seconda legge di Newton e che quindi, per quanto utile, non descrive un nuovo principio indipendente.

Gli esempi che seguono illustrano le differenza e la complementarietà delle due equazioni.

1. *Il blocco che striscia.* Un blocco striscia su un tavolo orizzontale con velocità iniziale v_{cm} e, rallentando, si arresta per effetto della forza d'attrito. Il centro di massa realizza uno spostamento s_{cm}. Le due equazioni per l'energia in questo caso sono:

$$\text{ECM (Eq. 13.15):} \quad -fs_{cm} = -\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \qquad (13.16a)$$

$$\text{CDE (Eq. 13.2):} \quad L_f = -\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \Delta E_{int,blocco}. \qquad (13.16b)$$

L'equazione ECM *sembra* l'espressione del teorema dell'energia cinetica, ma non lo è perché, come abbiamo visto, fs_{cm} non è il modulo del lavoro svolto dalla forza d'attrito. In questa occasione e negli esempi che seguiranno immediatamente scriviamo l'equazione CDE (Equazione 13.2) nella forma $L_{ext} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int}$, in modo da renderla più immediatamente confrontabile con l'equazione ECM.

2. *Spinta di un righello.* Nella Figura 13.6 è illustrato ciò che succede spingendo un righello, inizialmente fermo, su una superficie priva d'attrito. La forza esterna è applicata a un punto corrispondente a un quarto della sua lunghezza. Questo punto percorre una distanza s mentre il centro di massa percorre una distanza s_{cm} (minore di s). Il righello

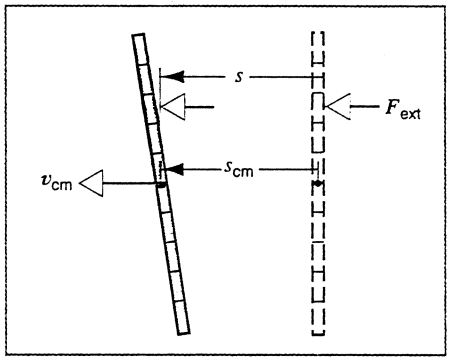


FIGURA 13.6 Un righello viene sospinto su un piano orizzontale privo d'attrito da una forza F_{ext} applicata nel punto corrispondente a un quarto della lunghezza del righello. Il righello ruota e trasla nello stesso tempo e quindi non si comporta come un punto materiale. La distanza s percorsa dal punto di applicazione della forza è maggiore della distanza s_{cm} percorsa dal centro di massa.

*Alcuni autori lo chiamano *pseudolavoro*. Preferiamo *non* introdurre questo termine, che si accosta al lavoro, per descrivere una grandezza che nulla ha a che fare col lavoro definito nel modo che abbiamo adottato e che è universalmente accettato.

acquisisce una velocità del centro di massa di modulo v_{cm} e una velocità angolare di modulo ω. Le equazioni dell'energia sono in questo caso

$$\text{ECM} \qquad F_{ext}s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \qquad (13.17a)$$

$$\text{CDE} \qquad F_{ext}s = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2. \qquad (13.17b)$$

Nell'equazione CDE compare realmente il lavoro $F_{ext}s$ svolto dalle forze esterne.

3. *Sfera che rotola per un piano inclinato.* Si veda la Figura 13.7. La sfera rotola senza strisciare (Paragrafo 9.7), parte da ferma e il centro di massa acquista una velocità pari a v_{cm} nel momento in cui giunge al suolo. Valgono le equazioni

$$\text{ECM} \qquad (Mg\sin\theta - f)s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \qquad (13.18a)$$

$$\text{CDE} \qquad Mgs_{cm}\sin\theta = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2. \qquad (13.18b)$$

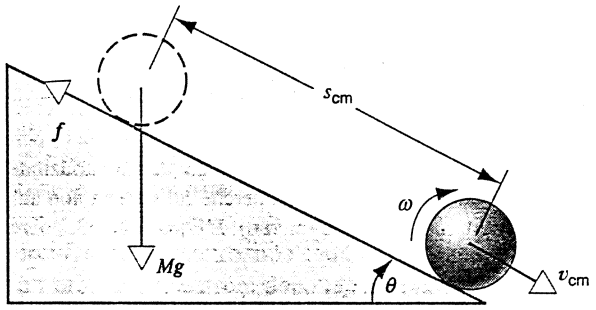


FIGURA 13.7 Una sfera rotola giù per un piano inclinato. Nell'istantaneo punto di contatto tra piano e sfera agisce una forza d'attrito f. Dopo che la sfera ha percorso un tragitto s_{cm}, la sua velocità è v_{cm} e la sua velocità angolare ha modulo ω.

L'equazione CDE si riferisce al sistema composto della sola sfera, sicché il lavoro svolto dalla gravità risulta esterno. La forza esterna netta esercitata sulla sfera nell'equazione ECM è $Mg\sin\theta - f$. Si noti che f compare in quest'equazione malgrado non compia lavoro (e per questo non compare nell'altra equazione). Si osservi anche che, se la sfera strisciasse oltre a rotolare, l'equazione ECM resterebbe inalterata mentre l'equazione CDE includerebbe a sinistra il lavoro svolto dalla forza d'attrito e a destra l'energia interna.

4. *L'atleta che salta.* La Figura 13.8 mostra un'atleta che prima si accuccia e poi salta in alto estendendo le sua gambe. Per semplicità ammetteremo che in questa fase di slancio la forza F da lei esercitata sul pavimento sia costante, di modo che la forza normale esercitata dal pavimento abbia modulo pari a $N = F + Mg$. Il dislivello realizzato dal centro di massa tra la posizione più bassa e la posizione di stacco da terra è s_{cm} e la sua velocità allo stacco è v_{cm}. Le equazioni pertanto diventano

$$\text{ECM:} \qquad (N - Mg)s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \qquad (13.19a)$$

$$\text{CDE:} \qquad -Mgs_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \Delta E_{int}. \qquad (13.19b)$$

L'equazione CDE è applicata al sistema comprendente la sola atleta. La forza normale non compie lavoro, e quindi non compare nell'equazione CDE. Il termine ΔE_{int} tiene conto di tutte le variazioni di energia interna dell'atleta, quali potrebbero essere un contributo negativo dovuto al consumo di energia accumulata nel suo organismo e un contributo positivo dovuto all'incremento di temperatura delle sue gambe. Sottraendo l'equazione CDE dalla ECM si verifica immediatamente che la somma di questi contributi dev'essere negativa.

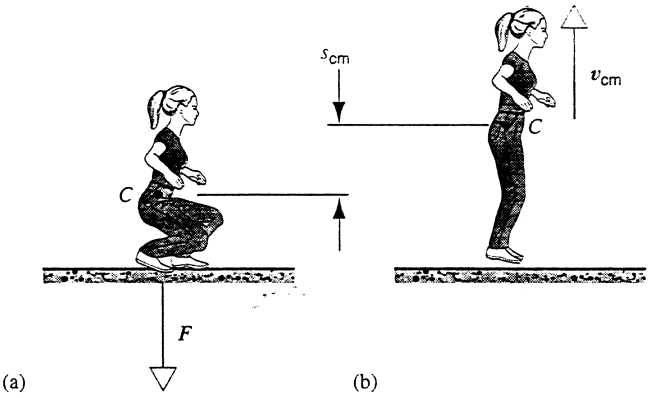


FIGURA 13.8 (a) Un'atleta accucciata pronta per il salto. Estendendo le gambe per saltare esercita sul pavimento una forza di spinta F (b) Nel momento in cui i suoi piedi si staccano dal suolo la ragazza si sta alzando con velocità v_{cm} verso l'alto e il suo centro di massa C si è sollevato di un dislivello s_{cm}.

PROBLEMA SVOLTO 13.3 La pattinatrice di Figura 13.5, di massa 50 kg, si spinge esercitando una forza costante $F = 55$ N. Il suo centro di massa percorre una distanza $s_{cm} = 32$ cm prima che la ragazza perda contatto con il parapetto. (a) Che velocità ha il centro di massa della pattinatrice quando perde contatto con il parapetto? (b) Di quanto varia l'energia interna della ragazza durante questo processo? Si consideri il ghiaccio privo d'attrito.

Soluzione (a) Adottiamo come sistema la sola pattinatrice. Per la terza legge di Newton il parapetto esercita su di lei una forza di 55 N diretta verso destra in Figura 13.5. Si tratta dell'unica forza esterna da considerare. L'equazione ECM dà

$$F_{ext}s_{cm} = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 - 0,$$

ossia

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{ N})(0{,}32\text{ m})}{50\text{ kg}}} = 0{,}84\text{ m/s}.$$

Ora applichiamo l'equazione CDE, che, posti $\Delta U = 0$ e $L_{ext} = 0$, prende la forma

$$\Delta E_{int} = -\Delta K = -\tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 =$$
$$= -\tfrac{1}{2}(50\text{ kg})(0{,}84\text{ m/s})^2 = -17{,}6\text{ J},$$

una quantità di energia rifornibile con meno di 1 mg di zucchero.

L'analisi esposta in questo problema svolto si potrebbe applicare anche a un'auto che accelera da ferma. La forza esterna in questo caso, esercitata dall'asfalto sulla superficie dei pneumatici, non compie lavoro perché il suo punto di applicazione non si muove; il punto di contatto di una ruota che rotola senza strisciare è infatti a riposo. La variazione di energia interna del sistema si manifesta nel consumo di benzina.

 ISBN 88-408-1254-7

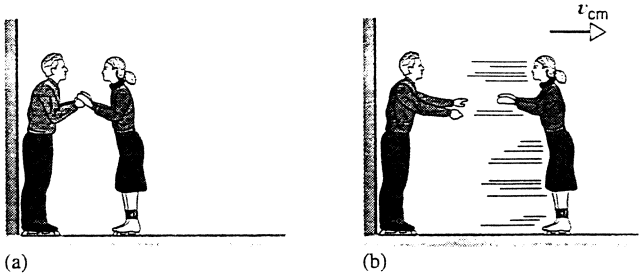


FIGURA 13.9 Problema svolto 13.4. (a) Una pattinatrice (Giovanna) e il suo compagno (Giacomo) si preparano a esercitare forze vicendevoli estendendo le loro braccia. Giacomo sta con le spalle contro un muro e quindi non si muove. (b) Dopo che, dispiegate le braccia, i pattinatori si sono divisi, Giovanna si muove con velocità v_{cm}.

PROBLEMA SVOLTO 13.4 Giovanna, di massa 50 kg, sui pattini da ghiaccio si dà una spinta indietro allontanandosi da Giacomo, di massa 72 kg, che sta con le spalle contro un muro, come illustra la Figura 13.9a. Entrambi inizialmente hanno le braccia raccolte e poi le estendono fino a perdere contatto (Figura 13.9b). Giacomo esercita una forza costante $F_{ext} = 55$ N per una distanza $s = 32$ cm, pari all'effettivo allontanamento delle sue mani. Nell'istante in cui perdono contatto il centro di massa di Giovanna è arretrato di un distanza totale $s_{cm} = 58$ cm, come risultato dell'estensione delle braccia di *entrambi*. (a) Che velocità ha Giovanna all'istante della perdita di contatto? (b) Di quanto variano le energie interne dei due pattinatori durante questo processo? Si ignori l'attrito sul ghiaccio.

Soluzione (a) Giovanna costituisce il nostro sistema. Esiste di conseguenza un lavoro esterno svolto sul sistema e un trasferimento di energia attraverso il contorno del sistema. L'equazione ECM è

$$\Delta K_{cm} = \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 = F_{ext} s_{cm} = (55\text{ N})(0{,}58\text{ m}) = 31{,}9\text{ J},$$

e quindi

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2\Delta K_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(31{,}9\text{ J})}{50\text{ kg}}} = 1{,}13\text{ m/s}.$$

(b) Applicando l'equazione CDE a Giovanna otteniamo

$$\Delta K + \Delta E_{int.Giov} = L_{ext},$$

ove $L_{ext} (= F_{ext} s)$ è il lavoro esterno eseguito da Giacomo su Giovanna. Risolvendo l'equazione rispetto alla variazione di energia interna e introducendo $\Delta K = \Delta K_{cm} = F_{ext} s_{cm}$, otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta E_{int.Giov} &= L_{ext} - \Delta K = F_{ext} s - F_{ext} s_{cm} = \\ &= (55\text{ N})(0{,}32\text{ m}) - (55\text{ N})(0{,}58\text{ m}) = \\ &= +17{,}6\text{ J} - 31{,}9\text{ J} = -14{,}3\text{ J}.\end{aligned}$$

Applicando l'equazione CDE al sistema costituito da Giacomo solamente otteniamo

$$\Delta E_{int.Giac} = L_{ext}.$$

Nel caso di Giacomo, L_{ext} è negativo. La forza esterna agente su di lui è applicata da Giovanna, come reazione alla forza di allontanamento ch'egli le applica. Dato che la forza agente su Giacomo e lo spostamento delle sue mani sono discordi, il lavoro esterno effettuato su Giacomo è negativo. In questo caso L_{ext} esporta energia dal sistema. Per Giacomo dunque

$$\Delta E_{int.Giac} = L_{ext} = -(55\text{ N})(0{,}32\text{ m}) = -17{,}6\text{ J}.$$

Così, per ottenere la voluta energia cinetica finale, Giovanna deve fornire 14,3 J di energia presa dalla propria riserva interna ed usufruisce del contributo di Giacomo per 17,6 J, che egli preleva ovviamente dalla propria riserva. Se Giacomo non fosse presente e Giovanna acquisisse la medesima energia cinetica spingendosi da sola contro il muro, dovrebbe accollarsi l'intero onere di 14,3 J + 17,6 J = 31,9 J, a proprie spese.

PROBLEMA SVOLTO 13.5 Un blocco di massa 5,2 kg viene lanciato su una superficie orizzontale con velocità iniziale di 0,65 m/s. Il blocco scivolando rallenta e infine si ferma. Il coefficiente d'attrito dinamico tra blocco e superficie è 0,12. (a) Calcolare la variazione di energia cinetica del sistema blocco + superficie. (b) Che distanza percorre il blocco prima di arrestarsi?

Soluzione (a) Per applicare il principio di conservazione dell'energia è più conveniente adottare come sistema l'insieme del blocco e della superficie. Nell'equazione imponiamo $\Delta U = 0$, perché sulla superficie orizzontale non si assiste ad alcuna variazione di energia potenziale. Inoltre $L_{ext} = 0$, perché sul sistema non agisce alcuna forza esterna (l'attrito è interno). L'Equazione 13.2 diventa dunque

$$\Delta E_{int} = -\Delta K,$$

in cui $\Delta K = K_f - K_i$ è una quantità negativa, ciò che denota una perdita di energia cinetica. Introducendo i valori numerici otteniamo

$$\begin{aligned}\Delta E_{int} &= -(0 - \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2) = +\tfrac{1}{2}(5{,}2\text{ kg})(0{,}65\text{ m/s})^2 = \\ &= +1{,}1\text{ J}.\end{aligned}$$

L'aumento di energia interna si rivela come aumento di temperatura del blocco e della superficie; in quali proporzioni tra i due corpi è assai difficile calcolare. Proprio per evitare questa difficoltà abbiamo preferito scegliere come sistema l'insieme dei due corpi, piuttosto che uno solo dei due.

(b) Per questo scopo scegliamo invece come sistema il solo blocco. Non possiamo trattare il blocco come puntiforme perché sono coinvolti trasferimenti di energia diversi da quella cinetica (in particolare, energia interna). Applicando l'Equazione 13.15 si ottiene

$$F_{ext} s_{cm} = \Delta K_{cm},$$

ove F_{ext} è la forza d'attrito esterna agente sul blocco, data da $-\mu Mg$, se si adotta come positivo il verso del moto; s_{cm} è lo spostamento del centro di massa. Si ha quindi

$$(-\mu Mg)(s_{cm}) = 0 - \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2,$$

ovvero

$$s_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2\mu g} = \frac{(0{,}65\text{ m/s})^2}{2(0{,}12)(9{,}8\text{ m/s}^2)} = 0.18\text{ m}.$$

Anche questo tipo di analisi si può applicare al problema dell'auto che frena e si arresta. In questo caso l'aumento di energia interna riguarderebbe i freni, che si scaldano.

ISBN 88-408-1254-7

13.6 REAZIONI E DECADIMENTI

Il principio di conservazione dell'energia trova applicazione in un gran numero di processi di reazione e di decadimento, che vanno dalle dimensioni molecolari (reazioni chimiche, formazioni molecolari) a quelle del nucleo (fusione nucleare, decadimento radioattivo), fino alle particelle elementari (alte energie). Nel Capitolo 6 l'analisi degli urti era stata condotta alla luce del principio di conservazione della quantità di moto, ciò che ci ha permesso di classificare gli urti in elastici, anelastici ed esplosivi. Nel Capitolo 11 questa stessa classificazione è stata ripresa analizzando la variazione di energia cinetica. Ora discutiamo nuovamente di questi processi sotto la prospettiva del principio di conservazione dell'energia.

Grazie alla maggior generalità di questo principio possiamo anche considerare processi d'urto in cui gli enti coinvolti cambiano identità. Pensiamo per esempio alla reazione nucleare rappresentata da $n + {}^6Li \rightarrow {}^4He + {}^3H$, in cui un neutrone urta un nucleo di litio che ha numero di massa (numero di nucleoni) 6, pari alla somma di tre protoni + tre neutroni. Dopo la reazione si osservano un nucleo di elio-4 (due protoni e due neutroni) e un nucleo di idrogeno-3 (un protone e due neutroni). Si noti che il numero totale dei protoni, che rimangono sempre tre, e il numero totale dei neutroni, sempre quattro, non cambiano durante la reazione. Però i protoni e i neutroni dopo la reazione risultano risistemati in maniera diversa. Le interazioni tra di loro sono presumibilmente diverse dopo la risistemazione e quindi deve ritenersi che le energie interne dei gruppi che li accolgono durante la reazione variano.

Analizziamo una generica reazione $A + B \rightarrow C + D$ scegliendo un sistema che comprenda gli oggetti A e B prima della collisione, quando essi sono ancora abbastanza lontani da poter trascurare la loro interazione e quindi da poter considerare nulla l'energia potenziale. A e B possono avere ciascuno una propria energia potenziale *interna*, ma l'energia potenziale dovuta all'interazione tra di loro è inizialmente nulla. L'energia cinetica iniziale di questo sistema è $K_i = K_A + K_B$; inoltre il sistema possiede un'energia interna totale $E_{int,i}$. La reazione può provocare risistemazioni interne tali che i prodotti C e D siano diversi dagli oggetti iniziali, ma gli oggetti finali C e D sono comunque compresi nel contorno del sistema e quindi costituiscono insieme il sistema stesso dopo la reazione. La loro energia interna totale è $E_{int,f}$, e l'energia cinetica finale complessiva è $K_f = K_C + K_D$; anche qui facciamo la stessa assunzione iniziale: gli oggetti si sono allontanati tanto che l'energia potenziale dovuta alla loro interazione debba considerarsi nulla. La Figura 13.10 presenta uno schema del processo di collisione. Assumiamo che non vi siano corpi esterni che interferiscano durante la reazione, e che quindi $L_{ext} = 0$.

Applicando ora il principio generale di conservazione dell'energia, Equazione 13.2, abbiamo

$$\Delta K + \Delta E_{int} = 0, \tag{13.20}$$

ossia

$$K_f - K_i = -(E_{int,f} - E_{int,i}) = E_{int,i} - E_{int,f}. \tag{13.21}$$

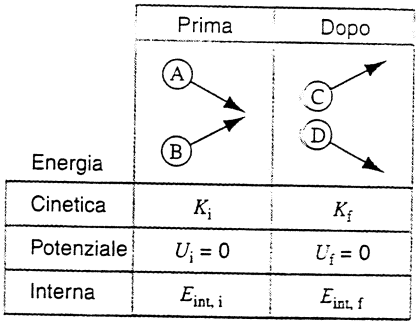


FIGURA 13.10 Variazioni di energia nella reazione $A + B \rightarrow C + D$.

Se $E_{int,i} > E_{int,f}$, l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale, vale a dire che durante la reazione una certa quantità di energia interna complessiva si trasforma in energia cinetica. Queste reazioni si chiamano *esoenergetiche* (che liberano energia) e sono analoghe agli urti che abbiamo definito esplosivi. Se viceversa $E_{int,i} < E_{int,f}$, l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale, giacché una porzione di energia cinetica si è convertita in energia interna dei prodotti. Queste reazioni si chiamano *endoenergetiche* (che assorbono energia), e sono analoghe agli urti che abbiamo definito anelastici. In analogia agli urti elastici, in cui non varia l'energia cinetica, abbiamo reazioni in cui $E_{int,i} = E_{int,f}$; sono in pratica reazioni in cui, rimanendo uguale l'energia interna, non si ha risistemazione interna dei costituenti e quindi non si ha variazione di identità degli oggetti reagenti: $A + B \rightarrow A + B$.

Processi di decadimento

Alcuni nuclei e alcune particelle elementari non sono stabili e decadono spontaneamente trasformandosi in due o più particelle di altro tipo. Per esempio nel decadimento alfa rappresentato da ${}^{235}U \rightarrow {}^{231}Th + {}^4He$, un nucleo di uranio avente numero di massa 235 si spezza in un nucleo di torio con numero di massa 231 e in un nucleo di elio avente numero di massa 4. Quest'ultima particella è comunemente chiamata *alfa*.

Assumiamo che la particella iniziale A sia a riposo ($K_i = 0$); la sua quantità di moto è nulla e quindi, per conservarsi, è necessario che la quantità di moto totale dei prodotti sia zero. Se i prodotti sono solo due, B e C, le loro quantità di moto non possono essere che uguali in modulo e direzione, ma di versi opposti, cioè $m_B v_B = -m_C v_C$, da cui $m_B^2 v_B^2 = m_C^2 v_C^2$ o $m_B(2K_B) = m_C(2K_C)$, ossia

$$K_B/K_C = m_C/m_B. \tag{13.22}$$

L'energia cinetica finale K_f, che è l'energia cinetica complessiva di B e C, proviene dalla trasformazione di energia interna. Ponendo nulle le energie potenziali come nel caso precedente, l'Equazione 13.21 mantiene la sua validità e si scrive, ricordando che $K_i = 0$ e $K_f = K_B + K_C$:

$$K_B + K_C = E_{int,i} - E_{int,f}. \tag{13.23}$$

 ISBN 88-408-1254-7

Chiaramente, considerato che $K_f (= K_B + K_C)$ dev'essere positiva, il decadimento avverrà solo se $E_{int,i} > E_{int,f}$. L'energia interna cioè si converte in energia cinetica.

Nel caso che la reazione dia luogo a due soli prodotti, si possono combinare le Equazioni 13.22 e 13.23 per trovare le due energie cinetiche K_B e K_C. Se i prodotti sono in numero maggiore, queste equazioni, che esprimo i principi di conservazione, non danno informazioni sufficienti a determinare il valore di energia cinetica per ogni prodotto. La loro somma, comunque stabilita dall'Equazione 13.23, si può distribuire in maniera variabile tra le diverse particelle prodotte.

PROBLEMA SVOLTO 13.6 La reazione di fusione $^2H + {}^2H \rightarrow {}^1H + {}^3H$, detta anche reazione d-d, cioè deuterone-deuterone (deuterone è il nome comune di ^2H, un nucleo d'idrogeno con numero di massa 2) è importante per l'energia nucleare che essa libera. L'energia interna delle particelle reagenti supera l'energia interna di quelle finali di 4,03 MeV. Un fascio di ^2H aventi energia cinetica di 1,50 MeV incide su un bersaglio di ^2H a riposo. Come prodotto si osserva un protone (^1H) avente energia cinetica di 3,39 MeV e diretto perpendicolarmente alla direzione del fascio incidente di ^2H (Figura 3.11). Trovare l'energia e la direzione dell'altro prodotto di reazione, ^3H. I valori di massa sono i seguenti: per ^1H, 1,01 u; per ^2H, 2,01 u; per ^3H, 3,02 u.

Soluzione L'energia cinetica finale si trova con l'Equazione 13.21:

$$K_f = -\Delta E_{int} + K_i = 4{,}03 \text{ MeV} + 1{,}50 \text{ MeV} = 5{,}53 \text{ MeV}.$$

Dato che $K_f = K_1 + K_3$, ove K_1 è l'energia cinetica di ^2H e K_3 è l'energia cinetica di ^3H, abbiamo

$$K_3 = K_f - K_1 = 5{,}53 \text{ MeV} - 3{,}39 \text{ MeV} = 2{,}14 \text{ MeV}.$$

Per il principio di conservazione della quantità di moto, la quantità di moto di ^2H incidente deve eguagliare la componente x della quantità di moto di ^3H, ossia $m_2 v_2 = m_2 v_3 \cos\phi$. Ponendo $v = \sqrt{2K/m}$ si ottiene

$$\cos\phi = \frac{m_2 v_2}{m_3 v_3} = \sqrt{\frac{m_2 K_2}{m_3 K_3}} = \sqrt{\frac{(2.01 \text{ u})(1{,}50 \text{ MeV})}{(3.02 \text{ u})(2{,}14 \text{ MeV})}} = 0{,}683,$$

ovvero $\phi = 46{,}9°$.

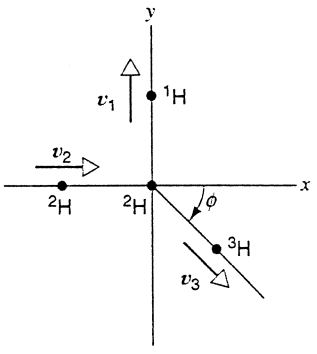


FIGURA 13.11 Problema svolto 13.6. La particella incidente ^2H colpisce la particella ferma ^2H, generando le particelle ^1H e ^3H che si allontanano.

PROBLEMA SVOLTO 13.7 Nel processo di decadimento alfa rappresentato da $^{226}Ra \rightarrow {}^{222}Rn + {}^4He$, il radio, elemento radioattivo presente in natura, decade nell'elemento gassoso radon. Durante la reazione si ha una perdita di energia cinetica pari a 4,87 MeV. Se il radio inizialmente è fermo, quali saranno le energie cinetiche del radon e della particella alfa (^4He)? Ecco i valori delle masse: per ^{226}Ra, 226,0 u; per ^{222}Rn, 222,0 u; per ^4He, 4,00 u.

Soluzione Con l'Equazione 13.22 si trova il rapporto tra le energie cinetiche dei prodotti di decadimento:

$$\frac{K_{Rn}}{K_{He}} = \frac{m_{He}}{m_{Rn}} = \frac{4{,}00 \text{ u}}{222{,}0 \text{ u}} = 0{,}0180.$$

L'energia cinetica totale dei prodotti è data dall'Equazione 13.23:

$$K_f = K_{Rn} + K_{He} = E_{int,i} - E_{int,f} = 4{,}87 \text{ MeV}.$$

Ponendo a sistema queste due equazioni si trova $K_{Rn} = 0.086$ MeV e $K_{He} = 4{,}78$ MeV. La più leggera particella alfa acquisisce il 98 % dell'energia disponibile, coerentemente con il principio di conservazione della quantità di moto.

13.7 TRASFERIMENTO DI ENERGIA SOTTO FORMA DI CALORE

La Figura 13.1 ci ricorda che il lavoro svolto su un sistema dal suo ambiente esterno può modificare l'energia del sistema. Il lavoro è una delle due forme in cui è possibile scambiare energia tra un sistema e il suo ambiente. L'altra forma è il *calore*.

Avevamo fatto notare nel Paragrafo 11.1 come il termine «lavoro» definito in fisica differisca notevolmente dal significato comune della parola. La stessa cosa succede per il termine «calore». La definizione fisica di calore è la seguente:

> *il calore è una forma di trasferimento di energia tra un sistema e il suo ambiente esterno, che si realizza quando tra di essi vi è una differenza di temperatura.*

Rappresentiamo il calore con il simbolo Q. Si tratta di una forma di energia e perciò viene misurato in unità di energia (joule, per esempio). Tra calore e lavoro esistono due importanti analogie:

1. *Il calore è energia trasferita.* Come non parliamo mai di «lavoro contenuto in un corpo», così non dovremmo mai parlare di «calore contenuto in un corpo». Quando trasferiamo calore dal sistema A al sistema B è inopportuno e, a rigore, scorretto dire che il sistema A «possiede meno calore». Può essere vero invece che il sistema A possiede meno energia, perché un po' della sua energia si è consumata per trasferire il calore a B. Proprio come quando il sistema A compie lavoro sul sistema B: non si è mai sentito dire che il sistema A ora «possiede meno lavoro»; diciamo piuttosto che il sistema A «ha perso energia» alludendo al fatto che l'ha ceduta per compiere lavoro su B.

2. *La quantità di calore trasferita in un processo dipende da come si svolge il processo.* Abbiamo visto casi in cui un sistema si evolve da uno stato iniziale a uno stato finale seguendo più cammini differenti. Quando sul sistema agi-

scono forze non conservative (come l'attrito), il lavoro che esse svolgono sarà in generale diverso secondo il cammino percorso per passare da uno stesso stato iniziale a un stesso stato finale. E in effetti questo è anche un modo di definire le forze non conservative, già visto nel Capitolo 12. Sotto questo aspetto il calore assomiglia al lavoro svolto da forze non conservative: per trasformare un sistema da uno stato iniziale a uno finale il calore richiesto è in generale diverso in funzione del percorso seguito.

Calore e temperatura

Talvolta nel linguaggio colloquiale di tutti i giorni diciamo «calore» quando invece dovremmo dire «temperatura» e ancor più spesso diciamo «calore» quando invece intendiamo quello che in fisica è definito come «energia interna». Quando scaldiamo una pietanza in forno a una certa temperatura, le conferiamo energia sotto forma di calore (con la pietanza immersa in un ambiente a temperatura maggiore) fino a che la pietanza raggiunge la temperatura desiderata. Quando togliamo la pietanza dal forno e la serviamo in tavola, la pietanza trasferisce calore al nuovo ambiente, ora più freddo di essa.

Così come abbiamo fatto per il lavoro e il calore, affinché la temperatura sia una grandezza fisica utilizzabile senza equivoci, dovremmo darne una definizione altrettanto precisa. Rimandiamo questa definizione formale al Capitolo 21, ma ne anticipiamo qui un accenno per poter discutere ora di temperatura in relazione ai sistemi meccanici.

Una variazione di temperatura di un corpo è accompagnata da una variazione dell'energia cinetica traslazionale media dei suoi atomi e molecole. Accrescendo l'energia interna di un corpo i suoi costituenti microscopici possono acquisire energia in vari modi; citiamo l'incremento di energia cinetica traslazionale, di quella rotazionale e di energia potenziale legata a un cambiamento di configurazione (come a un allontanamento spaziale tra i costituenti). Solo la frazione che corrisponde a un aumento di energia cinetica traslazionale prende le sembianze di aumento di temperatura.

Un altro approccio per comprendere il significato di temperatura, consiste nel considerarla un indicatore della capacità di due corpi a contatto di scambiarsi calore. Se le loro temperature sono uguali, essi non si scambiano calore, ovvero non trasferiscono energia sotto forma di calore dall'uno all'altro. Si noti che, se uno dei due corpi è più grande dell'altro, il primo possederà maggior energia interna del secondo, ma nemmeno in questo caso trasferirà calore al secondo, perché come abbiamo ipotizzato i due corpi sono alla stessa temperatura. Un modo di trasferire calore è rappresentato dagli urti che avvengono tra le molecole dei due corpi alla loro superficie di contatto. Se due corpi a contatto hanno diversa temperatura, questi urti alla superficie di separazione tra i due trasferiranno energia cinetica dal corpo le cui particelle hanno energia cinetica traslazionale maggiore a quello con particelle di energia cinetica traslazionale minore.

Non confondete i concetti di calore e temperatura. Il calore è sempre energia in transito da un corpo a un altro; la temperatura è una misura di un certo tipo di energia interna di un corpo. Possiamo accrescere la temperatura di un corpo senza cedergli calore, per esempio compiendo lavoro su di esso, così come possiamo trasferire calore da un corpo a temperatura maggiore a un altro a temperatura minore, senza variare le loro temperature, per esempio nei processi di fusione o di evaporazione.

Prima legge della termodinamica

Il principio di conservazione dell'energia di cui abbiamo parlato fin qui (Equazione 13.2) non comprendeva uno dei metodi di trasferimento energetico: il calore. La Figura 13.12 presenta un modello più completo degli scambi di energia che può operare un sistema. L'energia posseduta da un sistema all'interno del suo contorno può variare sia per effetto di uno scambio di calore con l'ambiente esterno, sia per effetto di un lavoro svolto o subìto nei confronti di questo ambiente. Volendo includere nell'Equazione 13.2 anche il calore, scriveremo

$$\Delta E_{\text{tot}} = Q + L. \tag{13.24}$$

In questa equazione E_{tot} rappresenta tutte le forme di energia contenute entro i confini del sistema: cinetica, potenziale, interna e, volendo, altre forme. Abbiamo omesso il pedice «ext» da L per brevità, ma si intende che il lavoro sul sistema sia svolto da forze esterne. Adottiamo per Q una convenzione sul segno analoga a quella per L: $Q > 0$ significa che il calore viene trasferito *verso* il sistema, cioè che il sistema *assorbe* calore e vede la sua energia *aumentare*; $Q < 0$ significa invece che il calore viene trasferito *fuori dal* sistema, cioè che il sistema *cede* calore e vede la sua energia *diminuire**.

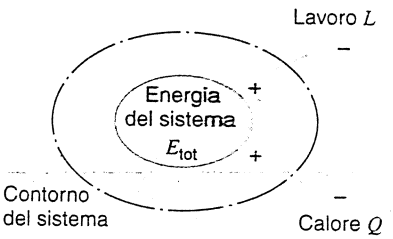


FIGURA 13.12 L'energia di un sistema può variare in due modi: mediante il lavoro che il sistema scambia con l'ambiente esterno o mediante lo scambio di calore attraverso il contorno del sistema. Sono qui indicate le convenzioni sui segni di L e Q che adottiamo. Sono positivi il lavoro svolto *sul* sistema e il calore trasferito *verso* il sistema: entrambi incrementano l'energia del sistema.

*È bene ricordare che L rappresenta il lavoro esterno svolto sul sistema. Potreste incontrare altrove l'Equazione 13.24 scritta come $\Delta E = Q - W$, in cui L rappresenta il lavoro svolto dal sistema sull'ambiente esterno (segni invertiti nella freccia di Figura 13.12 per il lavoro). Dato che il lavoro compiuto da un sistema A su un sistema B è l'opposto del lavoro compiuto dal sistema B sul sistema A, entrambe le forme dell'equazione sono corrette una volta stabilite le rispettive convenzioni sui segni. Abbiamo scelto la convenzione qui adottata in cui il lavoro rappresenta sempre il lavoro svolto *sul* sistema. Altrimenti è necessario definire il lavoro termodinamico come l'opposto di quello meccanico. Preferiamo mettere in luce i legami tra meccanica e termodinamica scegliendo per il lavoro una convenzione valida per entrambi.

 ISBN 88-408-1254-7

L'Equazione 13.24 rappresenta la forma più generale possibile del principio di conservazione dell'energia in un sistema. Questa forma è spesso citata come *prima legge della termodinamica*. Nel seguito del testo prenderemo in considerazione applicazioni più dettagliate di questa legge a un particolare sistema termodinamico: un gas in un recipiente chiuso. Ora limitiamoci ad alcune applicazioni di meccanica.

1. *Il blocco che striscia su un piano orizzontale.* Un blocco striscia con attrito su un tavolo. Ha velocità iniziale v e dopo un po' si ferma. Dapprima assumiamo il sistema comprendente il solo blocco. L'Equazione 13.24 dà

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int,blocco}} = L_a + Q . \qquad (13.25)$$

Qui $\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}Mv^2$ e $\Delta E_{\text{int,blocco}}$ è l'aumento di energia interna del blocco (misurato come aumento di temperatura); L_a è il lavoro (negativo) svolto sul blocco dalla forza d'attrito applicata dal tavolo e Q è il calore (negativo) ceduto dal blocco. Trascuriamo il calore che il blocco cede all'aria circostante e assumiamo che il calore venga trasferito solo alla porzione di tavolo più vicina alla superficie di contatto.

Applicando invece la prima legge della termodinamica al sistema blocco + tavolo abbiamo

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int,blocco}} + \Delta E_{\text{int,tavolo}} = 0 . \qquad (13.26)$$

Qui il lavoro non compare perché è interno al sistema. Lo stesso dicasi di Q (lo scambio termico con l'aria è trascurato per ipotesi). Le Equazioni 13.25 e 13.26 combinate danno

$$\Delta E_{\text{int,tavolo}} = -L_a - Q . \qquad (13.27)$$

Sia L_a sia Q sono negativi e quindi entrambi contribuiscono ad *aumentare* l'energia interna (temperatura) del tavolo; la quantità $-L_a$ (positiva) rappresenta il lavoro svolto per effetto della forza d'attrito applicata dal blocco sul tavolo; la quantità $-Q$ (positiva) rappresenta il calore trasferito dal blocco al tavolo.

2. *Esperienza di Joule.* Nel XIX secolo non era ancora chiaro che il calore è una forma di energia. Il calore quindi, considerato una grandezza a sé stante, aveva proprie unità di misura. Tra queste la caloria (cal) e l'unità termica britannica (Btu, dal corrispondente acronimo inglese). La loro corrispondenza con l'unità SI è

$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J} \quad \text{e} \quad 1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J} .$$

Oggi si fa un uso comune della caloria solo parlando del contenuto energetico dei cibi; in tale ambito è usata anche la Caloria (Cal, con la C maiuscola) definita in modo analogo alla caloria ma con un fattore tale che 1 Cal = 1000 cal = 1 Kcal. Troverete forse ancor oggi la Btu solo nel settore merceologico del condizionamento d'aria.

La caloria è definita come la quantità di calore Q da trasferire a 1 g di acqua per accrescerne la temperatura da 14,5 °C a 15,5 °C in un processo che ne aumenti l'energia interna di ΔE_{int}. Non svolgendo lavoro esterno in questo processo, l'Equazione 13.24 si riduce a

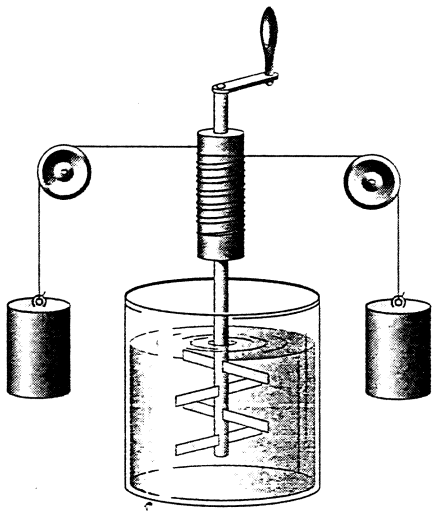


FIGURA 13.13 Dispositivo approntato da Joule per misurare l'equivalente meccanico della caloria. I pesi in caduta fanno ruotare le palette immerse nell'acqua, elevandone la temperatura.

$$\Delta E_{\text{int}} = Q . \qquad (13.28)$$

L'esperimento di Joule mirava ad innalzare la temperatura di un campione di acqua svolgendo lavoro si di esso, anziché somministrandogli calore. L'apparato utilizzato è illustrato nella Figura 13.13. I pesi in caduta, attraverso un sistema di fili avvolti all'asse di rotazione, fanno ruotare delle palette immerse nel recipiente d'acqua. Il complesso trasforma il lavoro L_g associato all'energia potenziale gravitazionale dei pesi, in energia interna dell'acqua. Assumiamo il sistema comprensivo dell'intero apparato sperimentale; lasciamo cadere i pesi per una distanza nota al termine della quale si arrestano, e lasciamo che le palette esauriscano la loro energia cinetica rotazionale trasferendola interamente all'acqua. Assumendo che il sistema di trazione non dissipi energia e che il contenitore non consenta scambi termici, l'Equazione 13.24 si può scrivere come

$$\Delta E_{\text{int}} = L_g . \qquad (13.29)$$

Trasferendo l'esatta quantità di energia interna richiesta dalla (13.28), e quindi ottenendo il corrispondente aumento di temperatura, Joule fu in grado di trovare l'equivalenza tra una certa quantità di lavoro (espressa, in unità odierne, in joule) e la corrispondente quantità di calore (misurata in calorie). Per questo la relazione trovata prende il nome di *equivalente meccanico della caloria*: 1 cal = 4,186 J. Oggigiorno misuriamo il calore in joule, riconoscendo che si tratta di una forma di energia, e quindi tale relazione ha perso tutta l'importanza che aveva invece ai tempi di Joule. Fu tuttavia proprio l'esperienza di Joule, eseguita la prima volta nel 1850, a dare un primo contributo alla comprensione dei fenomeni termici visti sotto la veste di trasferimenti di energia, al pari del lavoro.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

13.1 Lavoro svolto su un sistema da forze esterne

1. Si lascia cadere una palla dall'alto di un grattacielo. Quale o quali di queste affermazioni sono corrette?
   (A) La gravità compie lavoro sulla palla mentre cade.
   (B) L'energia potenziale gravitazionale della palla diminuisce durante la caduta.
   (C) L'energia potenziale gravitazionale della Terra diminuisce durante la caduta.
   (D) L'energia potenziale gravitazionale del sistema palla + Terra diminuisce durante la caduta.
2. Si supponga che per il blocco di Figura 13.2 sia $\Delta K = +10$ J. Quale delle seguenti scritture rappresenta correttamente i trasferimenti di energia?
   (A) $L_{rich} = +5$ J, $L_{grav} = +15$ J.
   (B) $\Delta U_{rich} = +5$ J, $L_{grav} = -15$ J.
   (C) $L_{rich} = -5$ J, $\Delta U_{grav} = -15$ J.
   (D) $\Delta U_{rich} = -5$ J, $\Delta U_{grav} = -15$ J.
3. Un blocco di legno di massa 2,0 kg cade da un trampolino in una piscina entrando in acqua alla velocità di 10 m/s. Scende fino alla profondità di 3,0 m prima di arrestarsi e risalire in superficie. Quanto lavoro compie l'acqua sul blocco nella fase di discesa?
   (A) − 159 J. (B) − 100 J.
   (C) − 59 J. (D) − 41 J.

13.2 Energia interna in un sistema di particelle

4. Una palla di massa 2,0 kg cade da un'altezza di 5,0 m. Rimbalza sul pavimento e risale fino a un'altezza di 3,0 m. Che cosa si può dire riguardo a $\Delta E_{int,palla}$ tra gli stati iniziale e finale della palla?
   (A) $\Delta E_{int,palla} > 39{,}2$ J. (B) $\Delta E_{int,palla} = 39{,}2$ J.
   (C) $\Delta E_{int,palla} < 39{,}2$ J.
5. In questo paragrafo abbiamo parlato di una sorta di «energia mancante» che i corpi possono immagazzinare sotto forma di energia interna. Si possono formulare concetti simili per una «quantità di moto mancante» e per una «quantità di moto interna»?
   (A) Sì, ma gli effetti sono molto più piccoli perché la quantità di moto è proporzionale alla velocità mentre l'energia lo è al quadrato della velocità.
   (B) Sì, ma l'effetto si può trascurare perché siamo interessati solo ai sistemi in cui la quantità di moto si conserva.
   (C) No, perché la quantità di moto è un vettore, mentre l'energia è uno scalare.
   (D) No, dal momento che non si è introdotta una «quantità di moto potenziale».

13.3 Lavoro svolto dalle forze d'attrito

6. Un cubo di metallo di lato 10 cm è ancorato al pavimento. Un secondo cubo uguale al primo viene trascinato sulla faccia superiore del primo a velocità costante da una forza costante di 10 N, come in Figura 13.14.
   (a) La forza d'attrito tra i cubi
   (A) è minore di 10 N.
   (B) è uguale a 10 N.
   (C) è maggiore di 10 N.
   (D) non si può determinare senza una dettagliata descrizione delle superfici.
   (b) Che relazione c'è tra la variazione di energia interna del cubo in moto, $\Delta E_{int,moto}$, e la variazione di energia interna del cubo fisso, $\Delta E_{int,fisso}$?
   (A) $\Delta E_{int,moto} > \Delta E_{int,fisso}$.
   (B) $\Delta E_{int,moto} = \Delta E_{int,fisso}$.
   (C) $\Delta E_{int,moto} < \Delta E_{int,fisso}$.
7. Un metodo per determinare la velocità di una pallottola consiste nello spararla in un blocco di legno e misurare la distanza per cui questo scivola su una superficie prima d'arrestarsi (Problema 3). Se si assume (scorrettamente) che il modulo del lavoro svolto dalla forza d'attrito è uguale alla forza per lo spostamento del blocco, il valore calcolato per la velocità risulterà
   (A) minore del valore reale, perché esiste anche una variazione di energia interna del blocco e della superficie.
   (B) maggiore del valore reale, perché esiste anche una variazione di energia interna del blocco e della superficie.
   (C) corretto, perché gli errori causati dall'ignorare la variazione di energia interna sono compensati dall'assunzione circa il lavoro svolto dalla forza d'attrito.
   (D) errato, perché l'attrito invalida anche la conservazione della quantità di moto.

13.4 Conservazione dell'energia in un sistema di particelle

8. (a) Un blocco da fermo scivola giù con attrito lungo il piano inclinato di un cuneo formante un angolo θ con il piano orizzontale. Quando giunge in fondo la sua energia cinetica vale 3 J e la gravità ha compiuto sul blocco una lavoro di 10 J. Quale delle seguenti affermazioni descrive il trasferimento di energia in questo sistema?
   (A) $\Delta E_{int,blocco} < +7$ J.
   (B) Lavoro della forza d'attrito agente sul blocco $= -7$ J.
   (C) Lavoro della forza d'attrito agente sul cuneo $= +7$ J.
   (D) $\Delta E_{int,blocco} = +7$ J.
   (b) Supponiamo ora che il cuneo sia libero di muoversi senza attrito su una superficie orizzontale, ma che rimanga attrito tra blocco e cuneo. Il blocco parte di nuovo da fermo e raggiunge il fondo con un'energia cinetica K dopo che la gravità ha compiuto il lavoro L_g sul blocco. Conoscendo le masse del blocco e del cuneo, è possibile calcolare la velocità finale del cuneo?
   (A) Sì, applicando il principio di conservazione della quantità di moto in direzione orizzontale.
   (B) No, perché non si conosce quanta energia meccanica si perde per attrito.
   (C) No, perché in presenza di forze d'attrito il principio di conservazione della quantità di moto non vale.
   (D) No, perché la forza esterna netta agente sul sistema non è nulla.

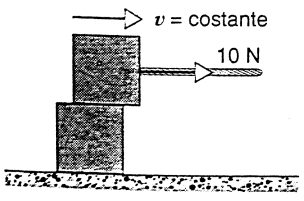


FIGURA 13.14 Domanda a risposta multipla 6.

 ISBN 88-408-1254-7

13.5 Energia associata al centro di massa

9. Due particelle subiscono urto elastico. Nel riferimento di laboratorio una delle due era inizialmente ferma.

(a) In quale riferimento l'energia cinetica totale è minima?
(A) In quello di laboratorio.
(B) In quello del centro di massa.
(C) È la stessa in entrambi i riferimenti.
(D) Non si può rispondere senza ulteriori informazioni.

(b) In quale riferimento il modulo della quantità di moto totale è minimo?
(A) In quello di laboratorio.
(B) In quello del centro di massa.
(C) È lo stesso in entrambi i riferimenti.
(D) Non si può rispondere senza ulteriori informazioni.

10. L'energia cinetica rotazionale fa parte dell'energia cinetica del centro di massa o dell'energia interna?
(A) Dell'energia cinetica del centro di massa.
(B) Dell'energia interna.
(C) Dipende da come si definisce il sistema.
(D) Può essere l'una o l'altra, perché si può sempre trovare un sistema di riferimento inerziale nel quale il corpo non ruota.
(E) Di nessuna delle due.

13.6 Reazioni e decadimenti

11. Consideriamo il decadimento $A \rightarrow B + C + D$ in cui A è inizialmente a riposo. Si conoscono tutte le masse e l'energia ΔE_{int} liberata nella reazione. Si vorrebbe trovare la velocità e la direzione di tutte e tre le particelle prodotte. Con un esperimento si misurano velocità e direzione di B. Qual è il numero minimo di dati ancora necessari per ottenere lo scopo?
(A) Non occorrono altri dati.
(B) La velocità e la direzione di C.
(C) O la velocità o la direzione di C.
(D) Le velocità di C e D.

12. L'energia cinetica di una particella dipende dal sistema di riferimento dell'osservatore. In una reazione esoenergetica l'energia cinetica totale finale è maggiore di quella iniziale. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?
(A) Una reazione esoenergetica rimane tale in qualsiasi riferimento inerziale.
(B) È possibile trovare un riferimento in cui la reazione esoenergetica risulti endoenergetica.
(C) È possibile trovare un riferimento in cui la reazione esoenergetica risulti elastica.
(D) La variazione netta di energia cinetica ha lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali.

13.7 Trasferimento di energia sotto forma di calore

13. Se comprendessimo anche il calore, come si modificherebbe la discussione sul blocco di Figura 13.3?
(A) L'energia si trasferirebbe tra il blocco e il tavolo sotto forma di calore, modificando sia $E_{int,blocco}$ sia $E_{int,tavolo}$ ma lasciando inalterata $E_{int,blocco+tavolo}$.
(B) L'energia si trasferirebbe dal blocco e dal tavolo all'ambiente, presumibilmente più freddo, diminuendo sia $E_{int,blocco}$ sia $E_{int,tavolo}$.
(C) Possono intervenire entrambi i processi descritti sopra, portando quindi a una diminuzione netta di $E_{int,blocco + tavolo}$.

QUESITI

1. Una palla lanciata verticalmente in alto al culmine della traiettoria ha energia cinetica nulla. Che destinazione ha preso la sua energia cinetica? Sulla palla è stato svolto lavoro esterno? L'energia si trova sotto forma potenziale immagazzinata nella palla? O immagazzinata nella Terra?

2. Cosa accade all'energia potenziale perduta da un ascensore che scende dall'ultimo piano a pian terreno e si ferma?

3. La Figura 13.15 mostra un tubo di vetro chiuso ad anello, appeso verticalmente. È pieno di acqua con una bolla d'aria che al momento si trova a riposo nel punto più basso del tubo. Discutete il successivo movimento della bolla con riferimento ai trasferimenti di energia, sia trascurando le forze viscose e d'attrito, sia considerandole presenti.

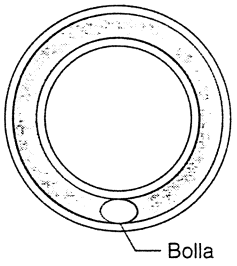


FIGURA 13.15 Quesito 3.

4. Quando la pattinatrice del Paragrafo 13.2 si spinge allontanandosi dal parapetto, la sua energia interna diminuisce. Cosa accade invece alla sua energia interna quando si dirige pattinando verso il parapetto e si arresta ammortizzando lo slancio con le braccia?

5. L'energia interna è in un certo senso una forma particolare di energia potenziale? Giustificate la risposta.

6. L'energia potenziale è in un certo senso una forma particolare di energia interna? Giustificate la risposta.

7. Un'automobile sta correndo su un'autostrada. L'autista frena bruscamente bloccando le ruote e l'auto slitta fino ad arrestarsi. In che forma si converte l'energia cinetica persa dall'auto?

8. L'autista del quesito precedente ora frena l'auto più dolcemente in modo che le ruote non slittino. In che forma si converte in questo caso l'energia cinetica persa dall'auto?

9. Una macchina accelera da ferma alla velocità v senza far slittare le ruote. Da dove proviene l'energia meccanica acquistata dall'auto? È vero forse che viene fornita dalla forza d'attrito (statico) esercitata dall'asfalto sui pneumatici?

10. L_a nell'Equazione 13.6 rappresenta l'energia trasferita dal blocco al tavolo. È vero che $L_a = -\Delta E_{int,tavolo}$? Si spieghi. Si può concludere che $fs = \Delta E_{int}$ ogniqualvolta che f è una forza interna? Se no, fate un controesempio.

11. Nel caso di lavoro svolto contro le forze d'attrito, la variazione di energia interna è indipendente dalla velocità (o dal sistema di riferimento inerziale) dell'osservatore; come dire che osservatori inerziali diversi misurano una stessa quantità di energia meccanica trasformata in energia interna a causa dell'attrito. Come si spiega questo fatto, considerando che tali osservatori misurano valori diversi per il lavoro totale svolto e valori diversi per le variazioni di energia cinetica?
12. Nell'articolo *Energy and the Automobile* apparso nel numero di ottobre 1980 sulla rivista «The Physics Teacher» (pag. 494), l'autore Gene Waring afferma: "È interessante notare che tutta l'energia del carburante bruciato alla fine si trasforma in energia termica dispersa lungo tutto il percorso dell'auto." Analizzate i vari meccanismi con cui avviene questo fenomeno. Considerate per esempio l'attrito sull'asfalto, la resistenza dell'aria, i freni, l'autoradio, i fari, la batteria, le perdite del motore e del sistema di trazione, il claxon, e via di seguito. Si assuma la strada orizzontale.
13. La rete elettrica di una cittadina è alimentata da una centrale idroelettrica sul fiume vicino. Se spegnete una lampadina in questo sistema isolato, il principio di conservazione dell'energia richiede che un'ugual quantità di energia, magari anche in altra forma, si manifesti da qualche altra parte nel sistema. Dove e in che forma?
14. Gli *air bag* sulle automobili riducono di molto il rischio dovuto agli incidenti. Descrivete in che modo, riferendovi ai trasferimenti di energia.
15. Una palla lasciata cadere per terra da ferma non può rimbalzare raggiungendo una quota maggiore di quella da cui era partita. Gli spruzzi dal fondo di una cascata possono invece raggiungere un'altezza maggiore del livello di caduta dell'acqua. Perché?
16. Un pendolo libero prima o poi si arresta. Si tratta di una violazione del principio di conservazione dell'energia meccanica?
17. In un articolo scientifico sull'energia nella locomozione (V.A. Tucker, *The Energetic Cost of Moving About*, «American Scientist», Lug-Ago 1975, pag. 413) si asserisce che il camminare e il correre sono metodi di locomozione assai poco efficienti, e che ottengono rendimenti molto migliori gli uccelli, i pesci e i ciclisti. Sapete darne una spiegazione?
18. Comprimiamo una molla e poi la manteniamo in tale stato legandone gli estremi. Indi la immergiamo in un acido dove a poco a poco si dissolve. Dove va a finire l'energia potenziale immagazzinata nella molla?
19. Dato che i termini di sinistra nelle Equazioni 13.14 e 13.15 assomigliano così tanto alla definizione di lavoro data dalle Equazioni 11.1 e 11.14, perché non chiamare lavoro i primi e comportarsi di conseguenza? Che vantaggio c'è nel definire il lavoro come abbiamo fatto? Otterremmo gli stessi risultati numerici indipendentemente dalla definizione?
20. Una forza esterna che non compie lavoro (perché il punto di applicazione resta fermo) provoca una variazione dell'energia cinetica *rotazionale* del sistema?
21. Sotto quali condizioni, se necessarie, è corretto dire che il decadimento $A \rightarrow B + C$ è l'esatto rovescio dell'urto anelastico $B + C \rightarrow A$?
22. Uno studente dichiara di aver costruito semplici biglie di vetro che nell'urto si comportano in modo perfettamente elastico. Ne fa una dimostrazione sparando una biglia contro l'altra; udite lo schiocco dell'urto e poi vedete le biglie che si allontanano. Misurate più volte e concludete che, entro l'errore sperimentale degli apparecchi di misura, gli urti sono sempre elastici. Sono effettivamente elastici? Giustificate la risposta.
23. Ripercorrete la storia geologica di tutte le fonti energetiche che conoscete fino a risalire al Sole. Ne conoscete qualcuna che non si riporti al Sole?
24. Abbiamo più volte detto che un'auto non viene accelerata da forze interne, ma da forze esterne che la strada esercita su di essa. E perché mai allora l'auto necessita di un motore?
25. Il lavoro svolto da forze interne può diminuire l'energia cinetica di un corpo? E aumentarla?
26. (a) Svolgendo lavoro su un sistema, questo acquisisce necessariamente energia cinetica? (b) Se un sistema acquisisce energia cinetica, questa proviene necessariamente da lavoro esterno svolto su di esso? Proponete degli esempi. Tenete conto che per «energia cinetica» qui intendiamo energia cinetica associata con il moto del centro di massa.
27. Nel Problema svolto 13.3 abbiamo incontrato il caso di una pattinatrice che acquista energia cinetica senza che venga svolto lavoro esterno su di lei. Consideriamo il caso opposto. Tenete la lama di un cacciavite premuta contro una mola rotante. Si compie lavoro esterno ma l'energia cinetica del cacciavite non cambia. Spiegate l'apparente contraddizione.
28. Un giocatore di hockey innervosito scaglia la sua mazza sulla pista di ghiaccio. La mazza ruota attorno al suo centro di massa mentre questo contemporaneamente slitta con moto lineare. Alla fine la mazza si ferma per attrito arrestando entrambi i suoi moti simultaneamente. Perché simultaneamente?

ESERCIZI

13.1 Lavoro svolto su un sistema da forze esterne

1. Un proiettile di massa 9,4 kg viene sparato verticalmente in alto. Nel tratto in salita dissipa, per effetto della resistenza dell'aria, 68 kJ di energia meccanica. Di quanto salirebbe in più in assenza di aria?
2. Un'automobile di massa 1700 kg sta viaggiando in piano a velocità costante di 15 m/s mentre il suo motore eroga una potenza di 16 kW per vincere le resistenze di attriti, dell'aria, ecc. (a) Che potenza dovrebbe sviluppare il motore se l'auto, a parità di tutte le altre condizioni, dovesse anche salire per una strada avente pendenza dell'8,0 %? (b) Che pendenza in discesa occorrerebbe per ottenere la medesima velocità costante a motore spento?

 ISBN 88-408-1254-7

3. Con riferimento alla Figura 13.2, il blocco di massa 1,25 kg viene liberato quando la molla, di costante k = 262 N/m, si trova nella sua posizione di riposo. Che velocità ha il blocco quando è caduto di 8,4 cm?
4. Un'automobile pesa 16 400 N e sale per una pendenza di 10° con velocità iniziale di 113 km/h, quando incomincia a frenare. Si arresta dopo 225 m. Calcolare il lavoro svolto dai freni trascurando gli altri trasferimenti di energia sotto forma di calore ed energia interna.

13.2 Energia interna di un sistema di particelle

5. Una sferetta di massa 12,2 g viene lasciata cadere da ferma da un'altezza di 76 cm sopra il livello superiore di un barile d'olio profondo 55 cm. La sferetta raggiunge il fondo del barile con velocità di 1,48 m/s. (a) Trascurando la resistenza dell'aria, si calcoli la velocità della sferetta quando si tuffa nell'olio. (b) Calcolare la variazione di energia interna del sistema sferetta + olio.

13.3 Lavoro svolto dalle forze d'attrito

6. Un orsacchiotto di massa 25,3 kg scivola giù per un dislivello di 12,2 m lungo un ramo inclinato di un albero, giungendo in fondo alla velocità di 5,56 m/s. (a) Quant'è l'energia potenziale iniziale associata all'orso? (b) Quant'è la sua energia cinetica finale? (c) Trascurando altri eventuali trasferimenti di energia, calcolare la variazione di energia interna del sistema ramo + orso.
7. Quando lo *Space Shuttle*, di massa 79 000 kg, ritorna a Terra, entra nell'atmosfera a un'altitudine di circa 160 km con una velocità di 29 000 km/h, che viene gradatamente ridotta fino alla velocità di atterraggio di 350 km/h (Figura 13.16). Qual è la sua energia totale (a) all'ingresso in atmosfera e (b) all'atterraggio? (c) Che destinazione prende l'energia «persa»?

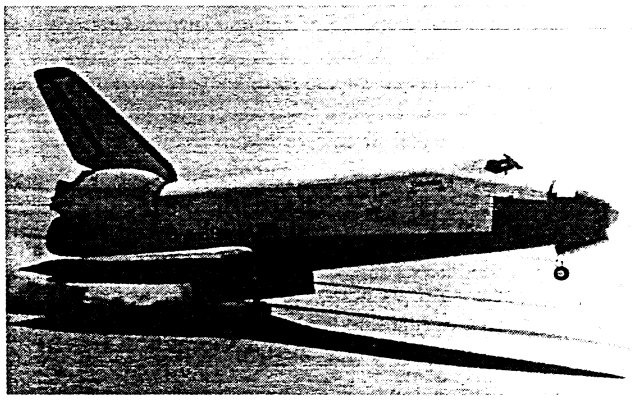


FIGURA 13.16 Esercizio 7.

8. Un paracadutista di massa 68 kg in caduta raggiunge la velocità limite di 59 m/s. Con che rapporto temporale aumenta l'energia interna del paracadutista e dell'aria circostante?
9. Un fiume scende attraverso una rapida per un dislivello di 15 m. L'acqua si getta nella rapida alla velocità di 3,2 m/s e ne fuoriesce alla velocità di 13 m/s. Che percentuale dell'energia potenziale persa nella discesa si trasforma in energia cinetica? E il resto dell'energia dove finisce?
10. Durante una frana, un masso avente la massa di 524 kg scivola da fermo giù lungo un pendio lungo 488 m per un dislivello di 292 m. La velocità del masso quando giunge in fondo è di 62,6 m/s. Quanta energia meccanica perde il masso a causa dell'attrito?

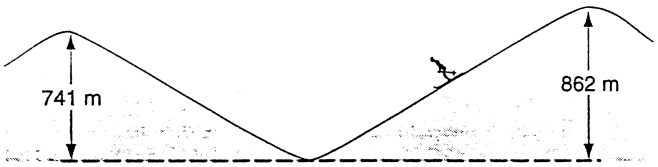


FIGURA 13.17 Esercizio 12.

11. Un blocco di massa 4,26 kg viene lanciato su per un piano inclinato di 33,0° con velocità iniziale di 7,81 m/s. Se perde in attrito 34,6 J di energia meccanica, fino a che altezza sale?
12. Due cime innevate sovrastano di 862 m e 741 m il fondovalle intermedio. Una pista da sci scende dalla vetta più alta e risale fino in cima all'altra, come si vede nella Figura 13.17. (a) Uno sciatore parte da fermo dalla cima più alta. A che velocità raggiungerà l'altra se scende senza aiutarsi con i bastoncini? L'attrito si consideri trascurabile perché il fondo è ghiacciato. (b) Dopo una nevicata un altro sciatore di massa 54,4 kg ripete lo stesso percorso arrivando sulla seconda vetta esattamente a velocità nulla. Di quanto è cresciuta l'energia interna degli sci e della neve lungo il percorso?

13.4 Conservazione dell'energia in un sistema di particelle

13. Una palla, rimbalzando su un pavimento, perde il 15,0 % della sua energia cinetica. Con che velocità dovrete lanciarla verticalmente in basso da un'altezza di 12,4 m per vederla rimbalzare alla stessa altezza? Si trascuri la resistenza dell'aria.
14. Una palla di gomma cade da ferma da un'altezza di 2 m. Rimbalza ripetutamente sul pavimento perdendo ogni volta il 10 % della sua energia cinetica. Dopo quanti rimbalzi raggiungerà la quota culminante di 1 m?
15. Una palla d'acciaio con massa 0,514 kg, attaccata a un filo di lunghezza 68,7 cm fissato all'altra estremità, è lasciata libera partendo da una posizione in cui il filo è orizzontale. Come mostra la Figura 13.18, nel punto più basso della sua corsa la palla colpisce un blocco d'acciaio di 2,63 kg fermo su un piano privo di attrito. Nell'urto metà dell'energia meccanica si converte in energia interna e in energia acustica. Calcolare le velocità finali del blocco e della palla dopo l'urto.

13.5 Energia associata al centro di massa

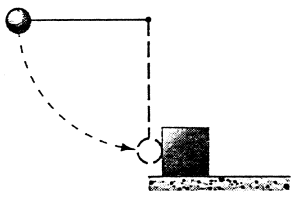


FIGURA 13.18 Esercizio 15.

16. Vi accucciate dalla posizione eretta abbassando il vostro centro di massa di 18,0 cm. Poi saltate in alto. La forza che il pavimento esercita su di voi durante il salto vale tre volte il vostro peso. Che velocità avete quando vi staccate da terra e il vostro centro di massa passa dalla posizione in

cui era all'inizio?

17. Una ragazza di massa 55,0 kg salta in alto da una posizione accucciata in cui il suo centro di massa è 40,0 cm sotto il livello che ha nella posizione eretta. Quando si stacca da terra il suo centro di massa si trova a una quota sul terreno di 90,0 cm e raggiunge la quota di 120 cm al culmine del salto. (a) Che forza verso l'alto esercita su di lei il pavimento, assunta costante? (b) Che velocità massima raggiunge?
18. Un giocatore di hockey avente massa di 116 kg si dirige scivolando sui pattini con velocità di 3,24 m/s verso il parapetto ai margini del campo, ove si arresta puntandosi a braccia tese. Durante il processo di frenata il suo centro di massa avanza di 34,0 cm. (a) Calcolare la forza media che deve esercitare sul parapetto. (b) Quanta energia interna perde?
19. Nel laboratorio della Motorizzazione Civile si esegue un test d'impatto su un nuovo modello d'automobile. Il veicolo di massa 2340 kg viene lanciato alla velocità di 12,6 km/h contro un apposito bersaglio, che si comprime per una distanza di 8,30 cm. Nel processo di collisione il centro di massa dell'auto avanza di 64,0 cm. Trascurando l'attrito tra le ruote e il fondo stradale, (a) calcolare la forza, assunta costante, esercitata sull'auto dal bersaglio. (b) Di quanto cresce l'energia interna dell'auto?
20. L'energia totale di un sistema di N particelle in un sistema di riferimento arbitrario viene misurato come $K = \sum \frac{1}{2} m_n v_n^2$. Nel riferimento del centro di massa le velocità sono $v_n' = v_n - v_{cm}$ ove v_{cm} è la velocità del centro di massa relativa al sistema di riferimento originario. Ricordando che $v_n^2 = v_n \cdot v_n$ dimostrare che l'energia cinetica può scriversi come

$$K = K_{int} + K_{cm},$$

dove $K_{int} = \sum \frac{1}{2} m_n v_n'^2$ e $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$. Questo dimostra che l'energia cinetica di un sistema di particelle si può dividere in un termine interno e un termine relativo al centro di massa. L'energia cinetica interna è misurata in un sistema di riferimento in cui il centro di massa è fermo; per esempio, i moti casuali delle molecole di un gas confinato in un recipiente a riposo sono responsabili della sua energia cinetica traslazionale interna.

13.6 Reazioni e decadimenti

21. Un elettrone di massa m collide frontalmente con un atomo di massa M inizialmente stazionario. Come risultato dell'urto, all'interno dell'atomo si ritrova immagazzinata una quantità E caratteristica di energia. Qual è la minima velocità iniziale v_0 che deve possedere l'elettrone? (*Suggerimento*: i principi di conservazione portano a un'equazione di secondo grado per la velocità finale v dell'elettrone e a un'altra equazione di secondo grado per la velocità finale V dell'atomo. Il valore minimo v_0 si trova imponendo che le soluzioni delle radici per v e V siano reali.

13.7 Trasferimento di energia sotto forma di calore

PROBLEMI

1. Una pietra di peso w è scagliata in aria verticalmente con velocità iniziale v_0. Supponendo che una forza costante f dovuta alla resistenza dell'aria agisca sulla pietra lungo tutta la sua traiettoria, (a) dimostrate che la massima altezza raggiunta dalla pietra vale

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}.$$

(b) Dimostrate che la velocità della pietra al momento dell'impatto col terreno è

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}.$$

2. Un corpo puntiforme di massa m = 234 g scivola sulla pista visibile in sezione nella Figura 13.19, con le estremità innalzate rispetto alla parte centrale, che è in piano e ha lunghezza L = 2,16 m. Le due parti curve sono prive di attrito, mentre nella parte in piano il corpo perde per attrito 688 mJ di energia meccanica. Il corpo è lasciato libero in A, all'altezza h = 1,05 m rispetto al tratto piano. Dove va a fermarsi?

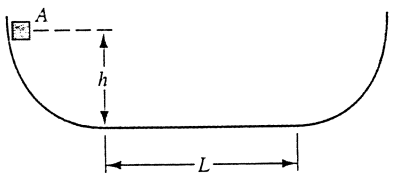


FIGURA 13.19 Problema 2.

3. Si spara orizzontalmente una pallottola di massa 4,54 g in un blocco di legno di massa 2,41 kg inizialmente a riposo su una superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico tra blocco e superficie vale 0,210. La pallottola si conficca nel blocco che avanza di 1,83 m prima di arrestarsi. Si assuma che il lavoro svolto sul blocco dalle forze d'attrito sia l'83 % di tutta l'energia dissipata per attrito. (a) Qual è la velocità del blocco subito dopo che la pallottola vi si è arrestata? (b) Qual è la velocità iniziale delle pallottola?
4. Un blocco di massa 1,34 kg scivolando su una superficie orizzontale urta una molla di costante 1,93 N/cm, che si comprime per una lunghezza di 4,16 cm. L'attrito tra il blocco e la superficie dissipa 117 mJ di energia meccanica per arrestare il blocco. Trovare la velocità del blocco all'istante della collisione.
5. Il modulo della forza attrattiva tra il protone (carico positivamente) e l'elettrone (carico negativamente) di un atomo d'idrogeno è dato da

$$F = k \frac{e^2}{r^2},$$

ove e rappresenta la carica elettrica dell'elettrone, k è una costante ed r è la distanza che separa l'elettrone dal protone. Assumiamo che il protone sia a riposo e che l'elettrone inizialmente ruoti su un'orbita circolare di raggio r_1 attorno al protone. A un certo punto l'elettrone salta improvvisamente su un'orbita circolare di raggio r_2 minore di r_1 (Figura 13.20). (a) Calcolare la variazione di energia cine-

 ISBN 88-408-1254-7

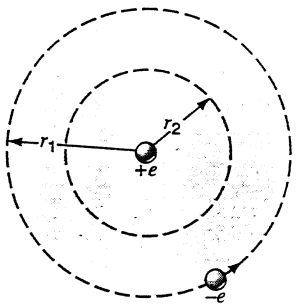


FIGURA 13.20 Problema 5.

tica dell'elettrone in base alla seconda legge di Newton. (b) Calcolare la variazione di energia potenziale dell'atomo in base alla relazione tra la forza e l'energia potenziale. (c) Di quanto è variata l'energia totale dell'atomo durante l'evento? (Questa energia spesso viene emessa sotto forma di radiazione elettromagnetica.)

6. Il cavo dell'ascensore di massa 2000 kg della Figura 13.21 si spezza quando la cabina si trova ferma al primo piano, a una distanza d = 3,7 m al disopra di una molla ammortizzatrice avente costante elastica k = 0,15 MN/m. Un dispositivo di sicurezza agisce da freno sulle guide in modo da far loro sviluppare in caso di emergenza una forza d'attrito costante pari a 4,4 kN, che si oppone al moto dell'ascensore. (a) Calcolate la velocità dell'ascensore prima che urti la molla. (b) Trovate di quale lunghezza x verrà compressa la molla. (c) Trovate di quale lunghezza rimbalzerà l'ascensore lungo le guide. (d) Applicando la legge di conservazione dell'energia calcolate la distanza approssimativa per-

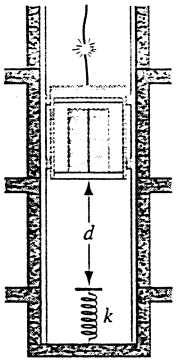


FIGURA 13.21 Problema 6.

corsa dall'ascensore fino al punto d'arresto inferiore. Perché non si può dare una risposta esatta?

7. Un blocco di massa 10,0 kg è inizialmente fermo su un piano privo d'attrito. Sopra di esso si appoggia un altro blocco di massa 2,5 kg che, soggetto a una forza di 11,0 N che lo tira, percorre 30,0 cm; i blocchi sono liberi di muoversi e il coefficiente d'attrito dinamico tra di loro vale 0,35. Calcolare la variazione di energia interna dei due blocchi (a) tra il momento iniziale in cui i due blocchi sono fermi e il momento in cui cessa l'azione della forza; (b) tra quest'ultimo istante e l'istante in cui i blocchi divengono fermi tra di loro.
8. Si consideri la reazione $A + B \rightarrow C + D$. Si dimostri che l'urto può essere elastico solo se i corpi in gioco non cambiano identità.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Un blocchetto di massa m è inizialmente fermo sul bordo di una scodella emisferica di raggio R, nella posizione angolare individuata da $\theta = \pi/2$. Il blocchetto cade dentro scivolando con attrito e comincia a oscillare all'interno della scodella. Tracciare numericamente un grafico della posizione angolare del blocco in funzione del tempo. (a) In prima approssimazione si risolva il problema ipotizzando che l'energia dissipata sia proporzionale alla *lunghezza* totale percorsa dal blocchetto: $\Delta E_{\text{diss}} \propto \Delta\theta$. (b) Poi si raffini il risultato assumendo che l'energia dissipata durante il processo dipenda anche dall'angolo: $\Delta E_{\text{diss}} \propto \cos\theta\,\Delta\theta$.
2. Supponiamo che in un cubo di spigolo 1,0 m siano contenute 100 particelle identiche di massa 10,0 g ciascuna. Con un programma generatore di numeri casuali assegnate le coordinate x, y, z della posizione e le componenti v_x, v_y, v_z della velocità (comprese tra –10 m/s e +10 m/s) a ciascuna delle 100 particelle. (a) Calcolate la posizione del centro di massa delle particelle, l'energia cinetica traslazionale relativa al centro di massa, l'energia cinetica rotazionale attorno al centro di massa e l'energia cinetica totale del sistema. (b) Ripetete il procedimento con una nuova serie di numeri casuali e costruite un istogramma per ciascuna delle tre energie cinetiche. In media che frazione dell'energia interna risulta per un sistema di questo tipo?

CAPITOLO 14

LA GRAVITAZIONE

Finora in questo libro abbiamo parlato di diversi tipi di forze: di tensione e di compressione, elastiche, di attrito, e di altre forze che agiscono quando i corpi entrano in contatto tra di loro. In questo capitolo studieremo le proprietà di un'importantissima forza non di contatto, la gravitazione, *che è una delle forze fondamentali e (crediamo) universali della Natura. La legge che descrive le forze gravitazionali agenti fra due corpi è stata scoperta da Newton nel 1665 ed ha avuto uno strepitoso successo nel formulare teorie non soltanto sul comportamento delle forze gravitazionali agenti sulla Terra, ma anche sul moto dei pianeti nel sistema solare. Una moderna teoria della gravitazione, la teoria di Einstein della relatività generale, si è resa necessaria per il caso di campi gravitazionali molto intensi.*

Nel corso di questo capitolo noterete che molti dei concetti fondamentali della dinamica studiati nei capitoli precedenti trovano qui applicazione, in particolare le leggi di Newton, la dinamica dei moti circolari, l'energia potenziale e la conservazione dell'energia e del momento angolare.

14.1 LE ORIGINI DELLA LEGGE DI GRAVITAZIONE

Già al tempo della Grecia antica due problemi preoccupavano i filosofi: (1) la caduta degli oggetti lasciati liberi in vicinanza della superficie terrestre e (2) il moto dei pianeti. Anche se a quell'epoca non vi era alcuna ragione di metterli in collegamento fra loro, dobbiamo oggi riconoscere che i due fenomeni sono l'effetto di una stessa forza: la gravitazione. Che è poi la stessa forza che determina il moto del sistema solare nella nostra galassia, la Via Lattea, di questa nel nostro Gruppo Locale di galassie, e di questo nel Superammasso Locale, e così via per tutto l'Universo. In breve, la forza di gravità, e la legge che la descrive, controlla la struttura, lo sviluppo e il destino dell'Universo.

Il primo serio tentativo di spiegare il moto dei pianeti risale a Claudio Tolomeo (II secolo dell'era cristiana), che elaborò un modello del sistema solare in cui tutti i pianeti, compreso il Sole e la Luna, ruotavano intorno alla Terra. Purtroppo però, per giustificare le orbite complicate dei diversi corpi celesti in questo sistema di riferimento geocentrico, Tolomeo fu costretto a introdurre gli epicicli, orbite complesse nelle quali i pianeti si muovono su piccole circonferenze i cui centri a loro volta girano su circonferenze più grandi centrate sulla Terra. Oggi ovviamente questo modello non può essere accettato, perché viola la legge secondo cui ogni moto accelerato deve essere causato da una forza esercitata da un corpo opportunamente collocato nelle sue vicinanze: non esiste alcun corpo posto al centro degli epicicli che possa fornire la forza necessaria per l'accelerazione centripeta.

Fu soltanto nel XVI secolo che Nicola Copernico (1473-1543) propose uno schema eliocentrico, ossia centrato sul Sole, nel quale la Terra e gli altri pianeti si muovono intorno al Sole. Al pari di quello di Tolomeo, il sistema solare di Copernico era ancora basato su criteri geometrici, visto che la nozione di forza non era stata ancora introdotta. Il sistema copernicano rappresentava tuttavia un significativo pas-

 ISBN 88-408-1254-7

so in avanti perché adottava il sistema di riferimento idoneo a far maturare la nostra attuale interpretazione del sistema solare.

Basandosi su un'accurata analisi dei dati rilevati nell'osservazione dei pianeti, Giovanni Keplero (1571-1630) propose le tre leggi, che esamineremo nel Paragrafo 14.7, che ne governano il moto. Queste leggi erano però soltanto empiriche, descrivendo i movimenti dei pianeti senza indagare sulle loro cause. Più tardi, nel XVII secolo, fu un grande trionfo per i cultori della meccanica – un campo si studi appena inaugurato – quando Isaac Newton riuscì a dedurre le leggi di Keplero dalle proprie leggi della meccanica e dalla teoria della gravitazione da lui stesso proposta. Grazie a queste stupefacenti scoperte, Newton fu in grado di descrivere con lo stesso procedimento il moto dei pianeti e la caduta dei corpi sulla superficie terrestre.

Nel 1665, all'età di 23 anni, Newton lasciò l'università di Cambridge perché l'istituto fu chiuso a causa della peste. Più tardi egli scrisse: "Cominciai a pensare che la forza di gravità potesse estendersi all'orbita della Luna... e confrontando la forza necessaria per mantenere la Luna sulla sua orbita con la forza di gravità esistente sulla superficie della Terra constatai che coincidevano con buona approssimazione." Il suo amico William Stukeley scrisse che mentre prendevano insieme il tè in giardino sotto i meli, Newton ricordò come gli fosse venuta l'idea della forza di gravità: "Fu suscitata dalla caduta di una mela mentre stava in meditazione... e così a poco a poco egli venne ad applicare questa proprietà della gravitazione al movimento della Terra e dei corpi celesti...".

Avvalendoci di quanto oggi sappiamo, esaminiamo come Newton potrebbe aver concepito questa somiglianza. Nella Figura 14.1 vediamo che la Luna, in moto su un'orbita circolare intorno alla Terra, e una mela, che cade in vicinanza della superficie terrestre, subiscono entrambe un'accelerazione verso il centro della Terra. L'accelerazione centripeta della Luna ($a_L = v^2/r_L$) può essere ricavata dalla sua velocità tangenziale $v = 2\pi r_L/T$, ove T è la durata di una rivoluzione (27,3 d). Introducendo il valore attuale per il raggio dell'orbita della Luna (circa 380 000 km) si trova $a_L = 0{,}0027\ \text{m/s}^2$. Ed essendo l'accelerazione a_m della mela nient'altro che l'accelerazione g di caduta libera dei gravi sulla superficie terrestre, il rapporto tra queste due accelerazioni risulta

$$a_L/a_m = (0{,}0027\ \text{m/s}^2)/(9{,}8\ \text{m/s}^2) = 2.8 \cdot 10^{-4}\,.$$

Guidato dalle leggi di Keplero, Newton cercò di giustificare questa differenza ammettendo che la forza di gravità agente su questi due oggetti sia inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza dal centro della Terra. Usando per il raggio della Terra il valore attuale ($r_m \approx r_T = 6400$ km), Newton previde per il rapporto tra le due accelerazioni proprio il valore

$$a_L/a_m = r_m^2/r_L^2 = (6400\ \text{km})^2/(380\,000\ \text{km})^2 = \\ = 2{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

Nelle parole di Newton, i due valori "coincidevano con buona approssimazione", suggerendo la conclusione che la forza responsabile della caduta di una mela sulla Terra e la forza che mantiene la Luna sulla sua orbita intorno alla Terra abbiano la stessa origine – la forza di gravità della Terra.

Per fare questi calcoli, Newton dovette ammettere che la forza di gravità terrestre agisca come se tutta la massa della Terra fosse concentrata nel suo centro, così che r_L ed r_m siano misurate rispetto al centro della Terra (Figura 14.1). In effetti questa ipotesi può essere rigorosamente confermata (vedi Paragrafo 14.5) ammettendo che la Terra sia sferica (ciò che è approssimativamente vero) e che la distribuzione della sua massa possa variare con la distanza dal centro ma non con le coordinate angolari (anche questo abbastanza vicino al vero, come dimostrato nel Paragrafo 14.4).

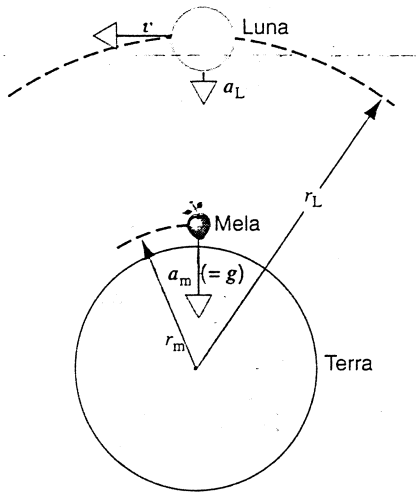


FIGURA 14.1 Sia la Luna sia la mela sono accelerate verso il centro della Terra. La differenza tra i loro moti deriva dal fatto che la Luna ha velocità tangenziale v sufficiente a conservare un'orbita tangenziale.

14.2 LA LEGGE DI NEWTON DELLA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Come abbiamo visto nel Paragrafo 5.1, la forza di gravità, che agisce fra i corpi soltanto per effetto delle loro masse, è una delle quattro forze fondamentali della fisica. È attiva in tutto l'Universo: fra corpi sulla Terra, dove (come vedremo) è debole e quindi difficile da misurare; fra la Terra e i corpi nelle sue vicinanze, dove ha funzione di controllo sulle nostre stesse vite, e fra le stelle e le galassie, di cui controlla la struttura e l'evoluzione.

Newton fu il primo a proporre una legge della gravitazione, che si può enunciare nella forma seguente.

Ogni particella nell'Universo attrae ogni altra particella con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle rispettive masse e inversamente proporzionale al quadrato della loro reciproca distanza. La forza è diretta lungo la linea congiungente le due particelle.

L'intensità della forza gravitazionale che due particelle di massa m_1 ed m_2 separate da una distanza r esercitano una sull'altra è

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (14.1)$$

ove G, la cosiddetta *costante gravitazionale*, ha il valore, determinato sperimentalmente,

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}.$$

G è una costante universale, che ha lo stesso valore per qualsiasi coppia di particelle in tutto l'Universo. Non deve essere confusa con g, il valore dell'accelerazione di gravità sulla Terra, che non è universale e ha dimensioni differenti.

La costante gravitazionale ha un valore numerico molto piccolo, ciò che spiega perché non possiamo di solito accorgerci dell'effetto gravitazionale fra gli oggetti che ci circondano. Per esempio, la forza di attrazione fra due particelle di massa 1 kg alla distanza di 0,1 m è dell'ordine di 10^{-8} N, il peso di un granello di polvere! Tuttavia, usando strumenti molto sensibili, i fisici sono in grado di misurare queste piccolissime forze di attrazione fra oggetti ordinari. Solo però quando almeno uno dei corpi interagenti è di grandi dimensioni (un pianeta), gli effetti della forza di gravità cominciano a manifestarsi visibilmente.

L'Equazione 14.1 esprime la legge della gravitazione nella forma dell'*inverso del quadrato*, perché la forza dipende dall'inverso del quadrato della distanza. Anche le forze elettromagnetiche hanno la forma di leggi dell'*inverso del quadrato*.

L'Equazione 14.1 non definisce alcuna delle tre grandezze fondamentali – la forza, la massa e la distanza – che vi compaiono: la forza e la massa sono state definite nel Capitolo 3. La forza di gravità non è che un tipo di forza che si manifesta come interazione di una particella con altre particelle nelle sue vicinanze. Come vedremo più avanti, una volta che G sia stata determinata sperimentalmente per una coppia di corpi, il valore trovato può essere impiegato per calcolare la forza interagente in qualsiasi altra coppia di corpi.

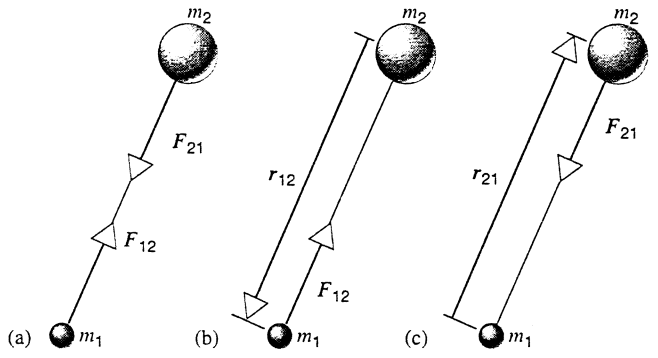


FIGURA 14.2 (a) La forza gravitazionale fra due particelle, che forma una coppia azione-reazione. (b) La forza gravitazionale F_{12} esercitata su m_1 da m_2 e il vettore posizione r_{12} di m_2 rispetto a m_1. (c) La forza gravitazionale F_{21} esercitata su m_2 da m_1 e il vettore posizione r_{21} di m_1 rispetto a m_2.

Il vettore forza

La Figura 14.2a rappresenta la forza gravitazionale esercitata reciprocamente da due particelle, che forma una coppia azione-reazione in accordo con la terza legge di Newton. La prima particella esercita una forza di attrazione F_{21} sulla seconda particella lungo la linea congiungente. e analogamente la seconda esercita sulla prima una forza F_{12}. Queste forze sono orientate in verso opposto e sono sempre di uguale intensità, anche se le due masse sono diverse.

Si può esprimere la legge della gravitazione universale in forma vettoriale, introducendo nell'Equazione 14.1 un fattore direzionale opportuno. Affinché il membro a sinistra della (14.1), che rappresenta una forza, assuma i connotati di un vettore. è necessario che nel membro destro compaia pure una grandezza vettoriale. I fattori di destra nella (14.1) sono tutte quantità scalari ed occorre quindi moltiplicare tali fattori per un vettore di modulo unitario che conferisca al prodotto il carattere direzionale, con direzione uguale a quella del vettore forza gravitazionale.

Indichiamo con r_{12} il vettore che individua la posizione della particella m_1 rispetto a m_2 e analogamente con r_{21} il vettore che individua la posizione della particella m_2 rispetto a m_1 (Figura 14.2). Essi hanno proprio la direzione della forza gravitazionale che si esercita tra le particelle. Allo scopo di rendere unitario il modulo di questi vettori, introdurremo nell'Equazione 14.1 il loro rapporto con i rispettivi moduli, di modo che

$$|r_{12}/r_{12}| = 1 \quad \text{e} \quad |r_{21}/r_{21}| = 1. \qquad (14.2)$$

Introducendo questi versori, le forze gravitazionali possono essere così rappresentate:

$$F_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{r_{12}}{r_{12}} \quad \text{e} \quad F_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\frac{r_{21}}{r_{21}}, \qquad (14.3)$$

coerentemente con quanto risulta anche dalle Figure 14.2b e 14.2c. Il segno negativo infatti nella (14.3) indica che, per esempio, F_{12} ha verso opposto a r_{12}. Dal confronto fra le Figure 14.2b e 14.2c si vede chiaramente che $r_{21} = -r_{12}$, e quindi le Equazioni 14.3 confermano che $F_{12} = -F_{21}$, formando così una coppia azione-reazione.

Spesso ci troviamo a dover calcolare le forze gravitazionali quando interessano più di due corpi, come per esempio la forza esercitata sulla Terra dal Sole e dalla Luna. In simili casi il metodo consiste nel calcolare le intensità e le direzioni delle forze esercitate su uno dei corpi da ciascuno degli altri usando le Equazioni 14.3, e operare infine la somma vettoriale per trovare la forza totale che agisce su quel corpo. La Figura 14.3 si riferisce al momento di una particolare posizione relativa di Terra, Sole e Luna. Calcoliamo la forza Terra-Sole F_{TS} come se la Luna non esistesse, e la forza Terra-Luna F_{TL} come se il Sole non esistesse, e quindi sommiamo queste due forze come vettori componenti per trovare la forza risultante sulla Terra. Questo metodo segue il *principio di sovrapposizione*, in base al quale possiamo scrivere la forza netta esercitata sul corpo X da N altri corpi come

 ISBN 88-408-1254-7

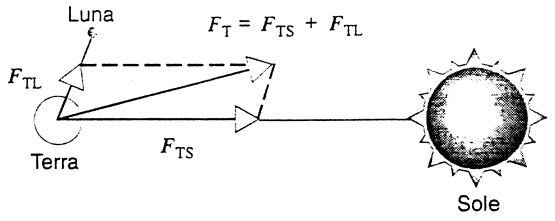


FIGURA 14.3 La forza gravitazionale esercitata sulla Terra da parte del Sole e della Luna in una particolare configurazione. Le distanze non sono in scala, e neanche i vettori delle forze: in realtà F_{TS} è 175 volte maggiore di F_{TL}.

$$F_X = F_{X1} + F_{X2} + \cdots + F_{XN} = \sum_{n=1}^{N} F_{Xn} . \quad (14.4)$$

La Terra, il Sole e la Luna, nel calcolare le forze interagenti, possono essere considerati come particelle con buona approssimazione, visto che le loro dimensioni sono piccole rispetto alle distanze che li separano. Se però vogliamo calcolare la forza di gravità esercitata dalla Terra su un satellite in orbita alla distanza di 300 km dalla superficie terrestre, non è certo lecito considerare la Terra come una particella. Calcolare la forza esercitata sul satellite da ogni elemento della Terra ed eseguirne la sommatoria secondo l'Equazione 14.4 sarebbe un compito di insuperabile complessità. Per fortuna non è indispensabile ricorrere a questo metodo. Avvalendosi dell'analisi matematica, che Newton sviluppò anche a questo scopo, si può dimostrare che, nel caso di un corpo simmetricamente sferico, si può calcolare la forza di gravità come se l'intera sua massa fosse concentrata in una particella collocata nel suo centro. Accade spesso di usare questa importante proprietà, che dimostreremo nel Paragrafo 14.5.

PROBLEMA SVOLTO 14.1 Calcolare l'intensità della forza gravitazionale esercitata su un cocomero, di massa $m_c = 1{,}00$ kg e situato sulla superficie terrestre, da parte (a) della Terra, (b) della Luna e (c) del Sole.

Soluzione (a) La forza di gravità esercitata dalla Terra sul cocomero è rappresentata semplicemente dal suo peso:

$$F_{cT} = m_c g = (1{,}00 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2) = 9{,}8 \text{ N} .$$

(b) Per trovare la forza esercitata dalla Luna, usiamo la (14.1):

$$F_{cL} = G\frac{m_c m_L}{r_L^2} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1{,}00 \text{ kg})(7{,}36 \cdot 10^{22} \text{ kg})}{(3{,}82 \cdot 10^{8} \text{ m})^2} = 3{,}36 \cdot 10^{-5} \text{ N} .$$

(c) Ancora tramite la (14.1) troviamo

$$F_{cS} = G\frac{m_c m_S}{r_S^2} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1{,}00 \text{ kg})(1{,}99 \cdot 10^{30} \text{ kg})}{(1{,}50 \cdot 10^{11} \text{ m})^2} = 5{,}90 \cdot 10^{-3} \text{ N} .$$

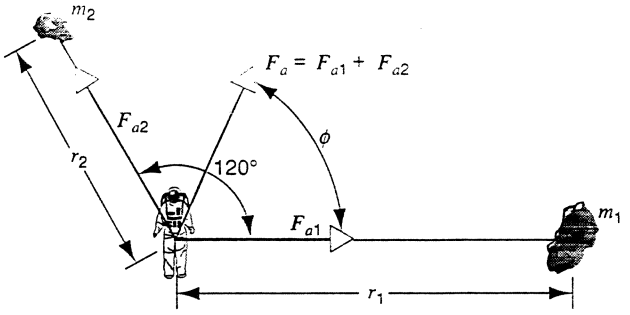


FIGURA 14.4 Problema svolto 14.2.

È chiaro che l'influenza dominante della Terra condiziona il comportamento degli oggetti sulla sua superficie. La forza dovuta al Sole è in generale più intensa di quella dovuta alla Luna. Malgrado ciò il fenomeno delle maree di origine lunare è più marcato di quello dovuto al Sole. Nel Problema 5 se ne può trovare una spiegazione.

PROBLEMA SVOLTO 14.2 Un astronauta adeguatamente equipaggiato ($m_a = 105$ kg) sta navigando senza mezzi di propulsione nella fascia degli asteroidi in missione mineraria. A un certo istante si trova nelle vicinanze di due asteroidi avente massa $m_1 = 346$ kg ($r_1 = 215$ m) ed $m_2 = 184$ kg ($r_2 = 142$ m), come mostra la Figura 14.4. Le rette che lo congiungono ai due asteroidi formano fra loro un angolo di 120°. Qual è, in questo istante, l'intensità e la direzione della forza gravitazionale esercitata sull'astronauta dai due asteroidi? Ammettiamo che astronauta e asteroidi possano essere equiparati a particelle.

Soluzione L'Equazione 14.1 dà le intensità delle due forze:

$$F_{a1} = G\frac{m_a m_1}{r_1^2} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(105 \text{ kg})(346 \text{ kg})}{(215 \text{ m})^2} = 5{,}24 \cdot 10^{-11} \text{ N} = 52{,}4 \text{ pN} ,$$

$$F_{a2} = G\frac{m_a m_2}{r_2^2} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(105 \text{ kg})(184 \text{ kg})}{(142 \text{ m})^2} = 6{,}39 \cdot 10^{-11} \text{ N} = 63{,}9 \text{ pN},$$

che sono rappresentate nella Figura 14.4. Tramite il metodo delle componenti o del parallelogramma possiamo sommare questi due vettori per ottenere l'intensità della forza totale che agisce sull'astronauta:

$$F_a = 5{,}80 \cdot 10^{-11} \text{ N} = 58{,}9 \text{ pN},$$

mentre la sua direzione appare nella Figura 14.4 ($\phi = 69{,}7°$).

14.3 LA COSTANTE GRAVITAZIONALE *G*

La determinazione del valore di G può sembrare un'operazione semplice: basta misurare la forza di gravità F esercitata da un corpo di massa nota m_1 su un secondo corpo di

massa nota m_2 separati da una distanza nota r, e poi calcolare G dalla (14.1).

Un sistema di grandi dimensioni come la Terra e la Luna o la Terra e il Sole non può servire a trovare il valore di G. È vero che le distanze sono tali che i due corpi possano essere considerati come masse puntiformi, ma le masse di questi corpi celesti non sono note in modo indipendente: infatti, come mostreremo tra poco, sono determinate proprio grazie alla conoscenza di G.

Dobbiamo invece ricorrere a misure su piccola scala, su una coppia di oggetti di massa nota e misurare la forza fra loro esercitata. Questa forza è però molto debole, e i due corpi debbono essere collocati molto vicini fra loro affinché sviluppino la forza più intensa possibile. Così facendo, però, non potremo considerare le masse come particelle puntiformi, e l'Equazione 14.1 diventa inapplicabile. Esiste tuttavia un caso particolare in cui è consentito applicare la (14.1) a oggetti di grandi dimensioni; come dimostreremo nel Paragrafo 14.5, corpi aventi una distribuzione sferica uniforme della massa possono essere considerati come masse puntiformi concentrate al loro centro. *Non* si tratta di un'approssimazione: si tratta di una esatta identità.

La prima determinazione sperimentale del valore di G tramite misura della forza di attrazione fra due masse sferiche a distanza ravvicinata fu condotta da Henry Cavendish nel 1798. Usò un metodo basato sulla bilancia di torsione, illustrata in Figura 14.5. Due sfere di piombo, ciascuna di massa m, sono fissate alle estremità di un'asta molto leggera. L'asta orizzontale è appesa per il suo centro a una fibra molto sottile di quarzo. Due grandi sfere di piombo, ciascuna di massa M, sono collocate in vicinanza delle estremità dell'asta. Quando si trovano nella posizione AA, attraggono le masse più piccole secondo la legge della gravitazione, esercitando sull'asta una coppia di momenti torcenti che la fa ruotare in senso antiorario, visto dall'alto; la rotazione si arresta al raggiungimento di una posizione di equilibrio fra il momento torcente dovuto all'attrazione gravitazionale delle masse M ed m e il momento torcente di richiamo esercitato dalla fibra elastica della bilancia di torsione. Spostando le masse M nella posizione BB, l'asta ruota in senso orario fino a raggiungere una nuova posizione di equilibrio: l'angolo 2θ, di cui il sistema è ruotato in seguito allo spostamento delle due sfere grandi da AA a BB, è misurato leggendo la deflessione di un raggio di luce riflesso da uno specchietto fissato al centro dell'asta. Conoscendo il valore della costante di torsione della fibra di quarzo (determinata misurando il periodo di oscillazione della bilancia, vedi Paragrafo 17.5), dal valore di θ si ricava il momento torcente e quindi il valore della forza gravitazionale. Il valore di G segue una volta note M, m e la loro distanza.

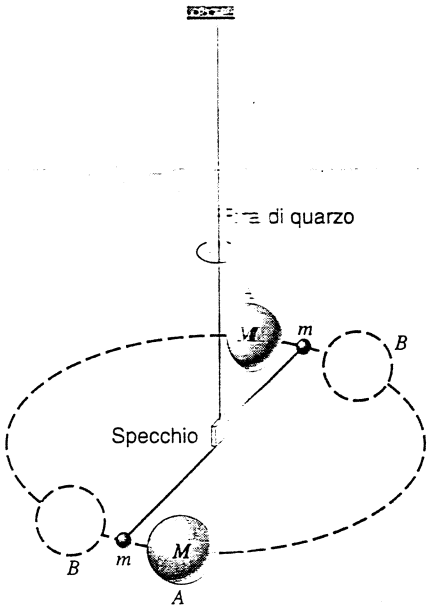


FIGURA 14.5 Vista schematica del dispositivo utilizzato nel 1798 da Henry Cavendish per misurare la costante gravitazionale G. Le due grandi sfere di massa M che appaiono in posizione AA possono essere spostate in BB.

Dai dati misurati da Cavendish si otteneva un valore $G = 6{,}75 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$. Durante i due secoli successivi la misurazione con la bilancia di torsione è stata ripetuta molte volte e si è giunti per G al valore oggi accettato

$$G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2},$$

con l'errore di $\pm 0{,}010 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$, ossia $\pm 0{,}15\,\%$. Questo grado di approssimazione, rispetto a quanto ottenuto nella valutazione di altre costanti fisiche, appare piuttosto scarso: la massa dell'elettrone, per esempio, è stata misurata con un'approssimazione di $\pm 0{,}000008\,\%$. Sembra assai difficile migliorare sensibilmente l'accuratezza nella valutazione di G, dato il valore assai ridotto di G stessa e quindi della forza che agisce fra i due oggetti nell'esperimento di laboratorio. Si pensi che, impiegando due sfere di piombo del diametro di 10 cm (e massa di circa 6 kg), la massima forza di attrazione, ottenuta avvicinandole il più possibile, è circa $2 \cdot 10^{-7}$ N, il peso di un capello sottile.

Questa difficoltà di valutazione di G è piuttosto spiacevole, data l'importanza della forza di gravità nelle teorie sull'origine e la struttura dell'Universo. Per esempio gradiremmo accertare se G sia realmente una costante; è forse variabile nel tempo? Dipende dallo stato chimico o fisico delle masse, o dalla loro temperatura? Nonostante le molte indagini sperimentali condotte, non è stata finora rigorosamente confermata alcuna variazione del valore di G, ma le misurazioni continuano a essere ripetute con metodi sempre più raffinati.*

La massa della Terra si può ricavare dalla legge della gravitazione universale, con il valore di G calcolato con l'esperienza di Cavendish. Per questa ragione è stato detto che Cavendish sia stato il primo a pesare la Terra. In effetti, il titolo del rapporto scritto da Cavendish per illustrare il suo esperimento non si riferisce alla misurazione di G ma alla determinazione della massa volumica della Terra dedotta dalla sua massa e dal suo volume. Consideriamo la Terra, di

*Per un'ampia trattazione della misura di G vedi: G.T. Gillies, *The Newtonian Gravitation Constant: Recent Measurements and Related Studies*, «Reports on Progress in Physics», vol. 60, 1997, pp. 151-225.

 ISBN 88-408-1254-7

massa M_T, e un oggetto sulla sua superficie di massa m. La forza di attrazione è data sia da

$$F = mg_0 \quad \text{sia da} \quad F = \frac{GmM_T}{R_T^2}$$

Qui R_T è il raggio della Terra, che rappresenta la distanza fra i due corpi, e g_0 è l'accelerazione gravitazionale alla superficie della Terra, dovuta alla sola forza di gravità terrestre (si veda il prossimo paragrafo). Combinando queste due equazioni si ha

$$M_T = \frac{g_0 R_T^2}{G} = \frac{(9{,}83\ \text{m/s}^2)(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} =$$

$$= 5{,}98 \cdot 10^{24}\ kg.$$

14.4 LA GRAVITAZIONE VICINO ALLA SUPERFICIE TERRESTRE

Ammettiamo, per il momento, che la Terra sia sferica e che la sua massa volumica dipenda soltanto dalla distanza radiale dal centro. L'intensità della forza agente su una particella di massa m collocata in un punto esterno a distanza r dal centro della Terra vale, secondo l'Equazione 14.1,

$$F = G\frac{M_T m}{r^2},$$

ove M_T è la massa della Terra; questa forza si può anche scrivere, in base alla seconda legge di Newton,

$$F = mg_0,$$

ove g_0 è l'accelerazione gravitazionale dovuta alla sola attrazione gravitazionale da parte della Terra. Combinando queste due equazioni si ottiene

$$g_0 = \frac{GM_T}{r^2}. \qquad (14.5)$$

La Tabella 14.1 presenta alcuni valori di g_0 a diverse altitudini sopra la superficie della Terra, calcolati mediante questa equazione. Da notare che, contrariamente all'impressione che l'effetto della forza gravitazionale si annulli all'altezza di un satellite in orbita, a quote tipiche delle navette in orbita troviamo $g_0 = 8{,}7\ \text{m/s}^2$.

Il valore reale dell'accelerazione con cui cadono liberamente i corpi, che abbiamo chiamato *accelerazione di gravità* e designato con g nel Capitolo 2, differisce dal valore g_0 del nostro modello per tre caratteristiche significative della Terra.

TABELLA 14.1 Variazioni di g_0 in funzione dell'altitudine

Altitudine (km)	*Posizione*	g_0 (m/s^2)
0	Superficie terrestre	9,83
10	Quota di volo degli aerei commerciali	9,80
100	Alta atmosfera	9,53
400	Orbita delle navette spaziali	8,70
35 700	Orbita dei satelliti per le comunicazioni	0,225
380 000	Orbita della Luna	0,0027

1. *La crosta terrestre non è uniforme.* Si trovano ovunque variazioni locali di massa volumica. Una precisa misurazione di queste variazioni locali dell'accelerazione di gravità fornisce preziose informazioni, per esempio, per la ricerca petrolifera.

2. *La Terra non è una sfera*, ma è all'incirca un ellissoide, schiacciato ai poli e rigonfio all'equatore. Il raggio all'equatore supera quello ai poli di circa 21 km. Perciò ai poli un punto sulla superficie terrestre è più vicino al nucleo centrale della Terra, di massima densità, rispetto a un punto posto sull'equatore. C'è quindi da aspettarsi che l'accelerazione di gravità aumenti se ci si sposta, a livello del mare, dall'equatore verso i poli: ciò che appunto è confermato dal grafico della Figura 14.6, che comprende però anche le variazioni dovute alla rotazione della Terra.

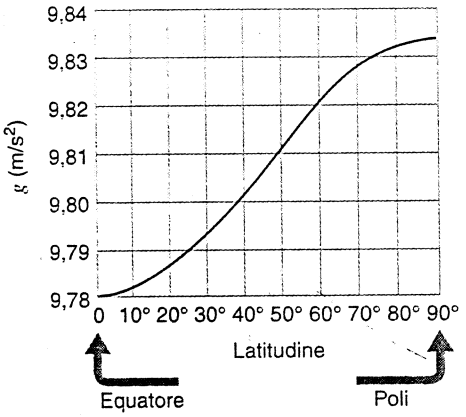


FIGURA 14.6 Variazione di g con la latitudine a livello del mare. Per circa il 65 % è dovuta alla rotazione della Terra, mentre il restante 35 % è dovuto alla forma leggermente schiacciata della Terra.

3. *La Terra gira.* Nel Paragrafo 3.7 abbiamo definito il peso come la misura della forza di gravità esercitata della Terra su un corpo, e abbiamo visto come il peso di un corpo possa essere determinato dall'indicazione di una bilancia a piattaforma su cui il corpo sia collocato. La lettura della bilancia rappresenterebbe esattamente l'intensità della forza gravitazionale terrestre *soltanto* se la superficie della Terra rappresentasse un sistema di riferimento inerziale, ciò che non corrisponde esattamente alla realtà dato che la Terra ruota su se stessa. Nel seguito del paragrafo vediamo qual è l'effetto di questa rotazione sull'indicazione della bilancia.

La Figura 14.7a mostra la Terra che gira in un sistema di riferimento inerziale collocato nello spazio sopra il polo nord. Una cassa di massa m sta su una bilancia all'equatore. Un osservatore locale ritiene che l'indicazione della bilancia rappresenti il peso del corpo mg, ove g è il valore dell'accelerazione di gravità misurato localmente.

A causa della rotazione terrestre la cassa è in moto circolare uniforme su un raggio R_T con periodo di rotazione T

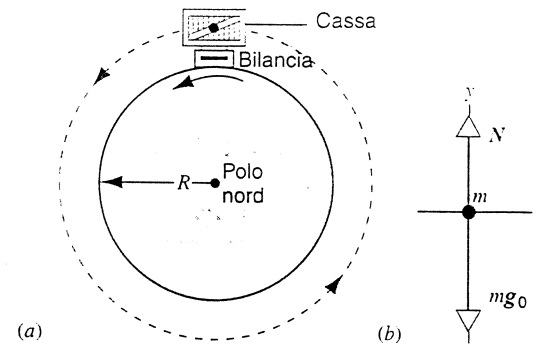


FIGURA 14.7 (a) Una cassa appoggiata sulla piattaforma di una bilancia all'equatore mentre la Terra ruota. È vista da un punto posto sul prolungamento dell'asse terrestre oltre il polo nord. (b) Diagramma delle forze per la cassa. La cassa è in moto circolare uniforme ed è perciò accelerata verso il centro della Terra.

(= 24 ore). Come abbiamo visto nel Paragrafo 4.5, affinché un corpo possa essere in moto circolare uniforme su un raggio r a velocità tangenziale v, la sua accelerazione netta (centripeta) deve avere un'intensità $a_c = v^2/r$.

La Figura 14.7b mostra il diagramma delle forze agenti sulla cassa. Abbiamo una forza N diretta verso l'alto, esercitata dalla piattaforma della bilancia (di intensità uguale alla lettura della bilancia mg), e una forza gravitazionale mg_0 diretta verso il basso. Assumiamo come verso positivo dell'asse y quello diretto verso l'alto (intendendosi così il verso opposto a quello localmente orientato verso il centro della Terra), per cui $\sum F_y = N - mg_0$. Dalla seconda legge di Newton, osservando che per la scelta degli assi che abbiamo adottato l'accelerazione verso il centro del cerchio ha segno negativo, si ha

$$N - mg_0 = -ma_c = -mv^2/R_T = -m\omega^2 R_T ,$$

ove $\omega = v/R_T = 2\pi/T$ è la velocità angolare di rotazione della Terra. L'espressione si può anche scrivere

$$N = m(g_0 - \omega^2 R_T) . \qquad (14.6)$$

Posto che l'intensità della forza normale N esercitata dalla bilancia rappresenta il peso mg dell'oggetto, troviamo

$$g_0 - g = \omega^2 R_T = 0{,}034 \text{ m/s}^2 .$$

Ciò significa che l'accelerazione g di gravità di un oggetto all'equatore è minore dell'accelerazione gravitazionale g_0 che si avrebbe se la Terra non ruotasse, soltanto di $0{,}034/9{,}8 \approx 0{,}35\,\%$. Ciò equivale a dire che mg (il peso dell'oggetto) è minore di mg_0 (la forza gravitazionale esercitata dalla Terra sull'oggetto) di una quantità uguale a $m\omega^2 R_T$. Questo effetto diminuisce come ci si allontana dall'equatore verso i poli, dove svanisce del tutto.

Come vedremo più avanti in questo capitolo, per un satellite in orbita a un'altitudine h sopra la superficie della Terra e quindi a una distanza $r = R_T + h$ dal centro della Terra, ω ed r sono legati dalla relazione $\omega^2 r = GM_T/r^2$, che altro non è che g_0 secondo l'Equazione 14.5. Dalla (14.6) si ha allora $N = 0$, che giustifica l'abituale espressione «assenza di peso» per tutto ciò che è in orbita intorno alla Terra, sebbene per gli astronauti g_0 sia ben diverso da zero, poiché l'attrazione terrestre continua ad agire su di loro.

PROBLEMA SVOLTO 14.3 (a) Una stella di neutroni è una stella di altissima densità che ha subito un collasso. La *pulsar* lampeggiante nella nebulosa del Granchio ne è l'esempio più noto. Consideriamo una stella di neutroni di massa M uguale alla massa del Sole, $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, e raggio R di 12 km. Quale sarebbe l'accelerazione di gravità sulla sua superficie? Si può ignorare l'effetto della rotazione. (b) L'asteroide Cerere ha massa di $1.2 \cdot 10^{21}$ kg e raggio 470 km. Qual è l'accelerazione di gravità sulla sua superficie?

Soluzione Dall'Equazione 14.5 otteniamo

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg})}{(12\,000\ \text{m})^2} =$$

$$= 9.2 \cdot 10^{11}\ \text{m/s}^2 .$$

Sebbene la rotazione delle pulsar sia estremamente rapida, la sua influenza sul valore di g è molto modesta, date le piccole dimensioni di questi corpi.

(b) Per l'asteroide Cerere troviamo

$$g_0 = \frac{GM}{R^2} = \frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1{,}2 \cdot 10^{21}\ \text{kg})}{(4{,}7 \cdot 10^5\ \text{m})^2} =$$

$$= 0{,}36\ \text{m/s}^2 .$$

C'è una certa differenza tra le forze gravitazionali sulla superficie di questi due corpi celesti!

14.5 I DUE TEOREMI DEI GUSCI

Sarebbe estremamente complicato, nel calcolare la forza gravitazionale esercitata da un corpo come la Terra o il Sole su un altro corpo, tener conto delle interazioni tra ogni coppia di particelle dei due corpi. Fortunatamente, per semplificare le cose, possiamo in certi casi ricorrere ai due *teoremi dei gusci*.

Consideriamo soltanto corpi in cui la distribuzione della massa abbia *simmetria sferica*, ossia corpi la cui massa volumica possa variare in funzione del raggio, ma sia uniforme, per un certo raggio, su un sottile strato sferico all'interno del corpo. Con ottima approssimazione si può ritenere che la Terra e il Sole rispondano a questa condizione. In entrambi la massa volumica è molto elevata vicino al centro e diminuisce verso la superficie. Gusci sottili vicino al centro sono formati da materiali di maggior massa volumica rispetto a quelli più esterni, ma ciascun guscio è formato da materiali di massa volumica uniforme.

Usando la sua legge della gravitazione universale e le nuove tecniche di calcolo da lui elaborate, Newton enunciò due teoremi che si applicano alla forza gravitazionale esercitata da sottili gusci sferici di massa volumica uniforme.

Primo teorema dei gusci

Un guscio sferico di massa volumica uniforme attrae una particella esterna come se tutta la massa del guscio fosse concentrata al suo centro.

 ISBN 88-408-1254-7

Secondo teorema dei gusci

Un guscio sferico di massa volumica uniforme non esercita alcuna forza gravitazionale su una particella collocata in un punto qualsiasi al suo interno.

Un corpo a simmetria sferica come la Terra può essere considerato come se fosse formato da una serie di sottili gusci sferici concentrici di massa volumica uniforme. Nel calcolare la forza agente su una particella esterna alla superficie terrestre ciascuno di questi strati può essere sostituito da una massa equivalente posta al centro della Terra, e quindi la Terra intera si comporta come se fosse una massa puntiforme collocata al suo centro. Un corollario del primo teorema dei gusci è il seguente: *un corpo a simmetria sferica attrae particelle ad esso esterne come se la sua massa fosse concentrata al suo centro.*

L'importanza del secondo teorema dei gusci può essere apprezzata immaginando una galleria scavata lungo un diametro della Terra. Mentre scendiamo nella galleria le porzioni della Terra esterne alla sfera di raggio uguale alla distanza che ci separa dal centro non esercitano su di noi alcuna attrazione gravitazionale. Come dire che sentiamo soltanto l'influenza della forza gravitazionale esercitata dalla porzione di massa della Terra che si trova all'interno della sfera di raggio uguale alla distanza che ci separa dal centro della Terra. Il Problema svolto 14.4 esamina questa conseguenza del secondo teorema dei gusci.

Il teorema dei gusci è valido soltanto per una forza dipendente dall'*inverso del quadrato*. Se la forza di gravità dipendesse da una potenza della distanza r diversa da -2, i teoremi dei gusci non sarebbero validi, e non sarebbe quindi consentito sostituire a un corpo a simmetria sferica un'equivalente massa puntiforme. Il secondo teorema dei gusci fornisce un modo elegante di provare la legge dell'*inverso del quadrato*: basta collocare una piccola massa di prova in diversi punti all'interno di un guscio sferico e verificare se la forza gravitazionale dovuta al guscio sferico è nulla in qualsiasi punto all'interno. Simili misure condotte con estrema precisione non hanno rivelato alcuna deviazione dalla legge di Newton. Se scriviamo l'espressione della dipendenza della forza d'attrazione dalla distanza fra le masse nella forma $1/r^{2+\delta}$, ove $\delta = 0$ nella teoria di Newton, troviamo che le prove danno per δ un valore massimo di 10^{-4}. Inoltre, esperimenti di questo tipo intesi a dimostrare la validità della legge dell'inverso del quadrato per le forze elettriche danno per δ un valore massimo di 10^{-16}.

Dimostrazione dei teoremi dei gusci (facoltativo)

Per dimostrare i teoremi dei gusci si deve ricorrere al calcolo differenziale. Per calcolare la forza esercitata da un sottile guscio sferico di massa volumica uniforme su una massa puntiforme collocata al suo interno o all'esterno immaginiamo che lo strato sferico sia suddiviso in sottilissimi anelli. Trovata la forza esercitata sull'oggetto da un anello qualsiasi faremo la somma (per integrazione) di tutte le forze elementari per trovare la forza totale agente sulla massa puntiforme.

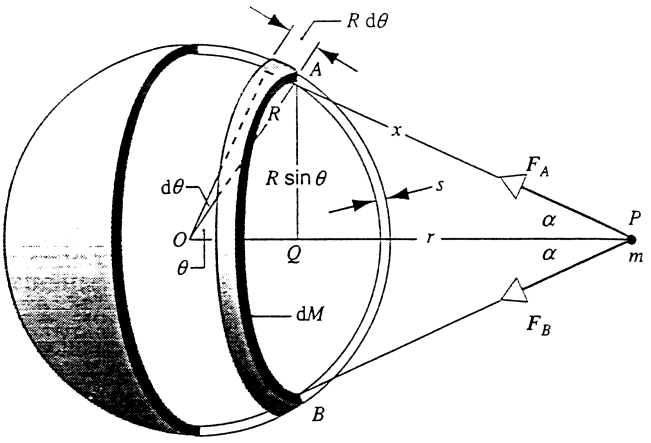


FIGURA 14.8 Attrazione gravitazionale esercitata da una sezione di un guscio sferico su una particella di massa m collocata in P.

Nella Figura 14.8 vediamo un guscio sottile suddiviso in anelli elementari. Lo strato ha massa M, spessore s e massa volumica (massa per unità di volume) uniforme ρ. Una massa puntiforme m è collocata nel punto P a distanza r dal centro O del guscio. Dobbiamo trovare la forza esercitata su m dall'anello e poi dall'intero strato.

Se l'anello è molto sottile, tutte le sue particelle sono alla stessa distanza x da m. La particella nel punto A esercita su m una forza $\boldsymbol{F}_A$ mentre una particella di uguale massa in B, dalla parte opposta dell'anello, esercita la forza $\boldsymbol{F}_B$. Le due forze hanno uguale intensità e la loro risultante giace sulla linea PO. Ciò sarà vero anche per qualsiasi altra coppia di particelle opposte dell'anello, e quindi anche la risultante delle forze elementari esercitate sulla massa puntiforme dall'anello giace sulla retta PO, asse di simmetria dello strato.

Consideriamo un elemento di massa $\mathrm{d}m_A$ nel punto A. La componente assiale (lungo PO) della forza esercitata su m da questo elemento di massa vale

$$\mathrm{d}F_A = G\frac{m\,\mathrm{d}m_A}{x^2}\cos\alpha,$$

ove il fattore $\cos\alpha$ individua la componente assiale della forza. La somma dei contributi di ogni elemento di massa dell'anello costituisce la forza totale $\mathrm{d}F$ esercitata dall'anello su m:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}F_A + \mathrm{d}F_B + \cdots = \frac{Gm}{x^2}(\cos\alpha)(\mathrm{d}m_A + \mathrm{d}m_B + \cdots),$$

ovverosia

$$\mathrm{d}F = \frac{Gm\,\mathrm{d}M}{x^2}\cos\alpha, \qquad (14.7)$$

ove $\mathrm{d}M\ (= \mathrm{d}m_A + \mathrm{d}m_B + \cdots)$ è la massa totale dell'anello.

Dobbiamo ora esprimere $\mathrm{d}M$ in termini delle dimensioni geometriche dell'anello. Troviamo anzitutto il suo volume $\mathrm{d}V$. Immaginiamo di tagliare l'anello e distenderlo in modo da formare un parallelepipedo solido di altezza s (lo spessore), larghezza $R\,\mathrm{d}\theta$, e lunghezza $2\pi(R\sin\theta)$. Il volume è

quindi $dV = s(R\,d\theta)(2\pi R \sin\theta)$. La massa dell'anello è $dM = \rho\,dV$, ossia

$$dM = 2\pi s\rho R^2 \sin\theta\,d\theta. \qquad (14.8)$$

Dobbiamo infine scegliere una delle tre variabili della Figura 14.8 (x, α e θ); eliminando α e θ integreremo secondo x. Dalla figura vediamo che $PQ = x\cos\alpha$ e anche che $PQ = r - R\cos\theta$, da cui

$$\cos\alpha = \frac{r - R\cos\theta}{x}. \qquad (14.9)$$

Applicando al triangolo AOP il teorema trigonometrico del coseno, $x^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\theta$, scriviamo

$$R\cos\theta = \frac{r^2 + R^2 - x^2}{2r}. \qquad (14.10)$$

Inseriamo ora la (14.10) nella (14.9) e quindi nella (14.7) sostituiamo a $\cos\alpha$ il suo valore così ricavato. Nella (14.7) dobbiamo ora eliminare la variabile θ, dalla quale dipende dM come ci indica la (14.8): a questo scopo differenziamo la (14.10), ottenendo

$$\sin\theta\,d\theta = \frac{x}{rR}dx. \qquad (14.11)$$

Possiamo ora introdurre la (14.11) per eliminare θ dalla (14.8) e quindi sostituire il valore di dM nella (14.7). Il risultato è

$$dF = \frac{\pi G s\rho m R}{r^2}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx. \qquad (14.12)$$

È questa la forza dF esercitata dall'anello circolare di massa dM sulla particella m situata in P.

Per avere la forza totale esercitata su m dall'intero guscio dobbiamo sommare gli effetti di tutti gli anelli in cui immaginiamo di averlo suddiviso. Ciò richiede di integrare dF secondo x da $r - R$ a $r + R$:

$$F = \int dF = \frac{\pi G s\rho m R}{r^2}\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1\right)dx.$$

La soluzione dell'integrale è immediata, e dà il valore $4R$. La forza diventa quindi

$$F = \frac{\pi G s\rho m R}{r^2}(4R) = G\frac{mM}{r^2}, \qquad (14.13)$$

ove $M = 4\pi R^2 s\rho$ è la massa totale del guscio sferico. L'Equazione 14.13 rappresenta proprio l'espressione della forza che una particella puntiforme di massa M posta al centro del guscio sferico eserciterebbe su una particella di massa m collocata in P. È questa la dimostrazione del primo teorema.

La dimostrazione del secondo teorema si basa sulla geometria della Figura 14.9, in cui il punto P sta all'interno del guscio sferico. Fino all'ultimo passaggio lo sviluppo è esattamente uguale al precedente, ma l'estremo inferiore dell'integrale diventa $R - r$ in luogo di $r - R$. Questa modifica causa l'azzeramento del valore dell'integrale, e quindi di F, come affermato dal secondo teorema. (Il Problema 17 propone una via alternativa per la dimostrazione del secondo teorema dei gusci.)

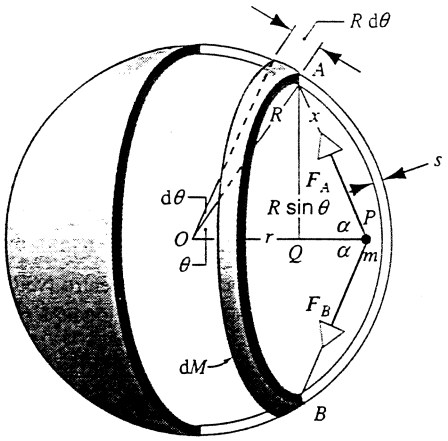


FIGURA 14.9 Attrazione gravitazionale esercitata da una sezione di un guscio sferico su una particella di massa m collocata in P all'interno del guscio sferico.

Ricordiamo che queste dimostrazioni presuppongono una geometria sferica e una massa volumica uniforme dell'intero guscio. I teoremi sono validi anche per una sfera solida in cui la massa volumica varia da un guscio all'altro, purché in ogni guscio rimanga uniforme.

PROBLEMA SVOLTO 14.4 Supponiamo che si possa scavare una galleria da una parte all'altra della Terra lungo un diametro, come in Figura 14.10. Una particella di massa m, inizialmente a riposo sulla superficie, sia lasciata cadere nella galleria. (a) Qual è la forza agente sulla particella quando si trova a distanza r dal centro della Terra? (b) E qual è la sua velocità in quel punto? Calcolate la velocità per $r = 0$. Ignorate gli attriti e supponete che la Terra abbia massa volumica uniforme.

Soluzione (a) Dal secondo teorema dei gusci si deduce che la forza gravitazionale sulla particella è dovuta soltanto a quella parte della Terra che si trova all'interno della sfera di raggio r, e il primo teorema afferma che la massa di questa sfera si può considerare tutta concentrata al centro della Terra. Chiamiamo M la massa del-

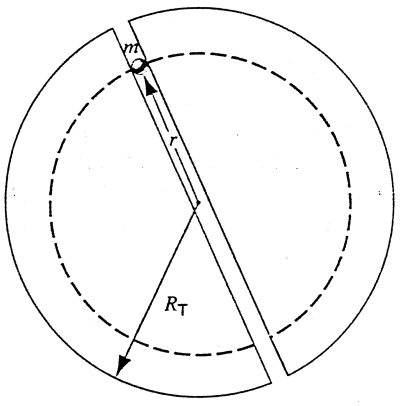


FIGURA 14.10 Problema svolto 14.4. Una particella in moto in una galleria che attraversa la Terra.

 ISBN 88-408-1254-7

la sfera di raggio r, e chiamiamo M_T la massa totale della Terra, di raggio R_T. Allora la frazione di M_T all'interno della sfera di raggio r è uguale alla frazione del volume della Terra che occupa l'interno della sfera di raggio r (ciò che è vero soltanto se la massa volumica della Terra è uniforme, come abbiamo supposto). Si ha allora

$$\frac{M}{M_T} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \quad \text{o} \quad M = M_T \frac{r^3}{R_T^3}.$$

Considerando questa massa concentrata al centro, vediamo che la forza gravitazionale sulla massa m è proporzionale a r:

$$F = G\frac{mM}{r^2} = g\frac{mM_T r^3}{r^2 R_T^3} = \frac{GmM_T}{R_T^3} r.$$

Chiamando $\mathbf{r}$ il vettore dal centro della Terra a m, dall'Equazione 14.13 vediamo che la forza $\mathbf{F}$ agente sulla particella è opposta a $\mathbf{r}$, e la forma vettoriale della forza diventa $\mathbf{F} = -(GmM_T/R_T^3)\mathbf{r}$. Con questo segno meno, la forma dell'espressione della forza diventa molto simile a quella della forza di richiamo della molla, $F = -kx$.

(b) Data la somiglianza formale con la forza di richiamo della molla, possiamo esprimere l'energia potenziale U del sistema costituito dalla Terra e dalla particella che cade come $\frac{1}{2}kr^2$, posto $U = 0$ al centro della Terra. Qui k rappresenta la costante che compare nella legge della forza: $k = GmM_T/R_T^3$. Applicando il principio di conservazione dell'energia prima sulla superficie e poi in r, si ha $K_S + U_S = K_r + U_r$ ossia $0 + \frac{1}{2}kR_T^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2$, e, risolvendo rispetto a v,

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(R_T^2 - r^2)} = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T^3}(R_T^2 - r^2)},$$

che al centro, con $r = 0$, assume il valore

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} =$$
$$= \sqrt{\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}{(6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})}} =$$
$$= 7{,}91 \cdot 10^3\ \text{m/s}.$$

14.6 ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Nell'analisi del moto dei pianeti e dei satelliti è spesso più agevole e più istruttivo parlare di energia anziché di forza. In questo paragrafo valuteremo l'energia potenziale di un sistema costituito da due corpi che interagiscono per effetto della forza di gravità. Nel Capitolo 12 abbiamo calcolato la variazione di energia potenziale gravitazionale per un corpo che si muove in altezza vicino alla superficie della Terra: $\Delta U = mgy$ (Equazione 12.9). Ciò è valido però soltanto in vicinanza della superficie terrestre, dove, per variazioni di quota piccole rispetto alla distanza dal centro della Terra, la forza di gravità può considerarsi praticamente costante. Il nostro scopo attuale è trovare un'espressione generale che sia valida dovunque, come per esempio alla quota di un satellite in orbita.

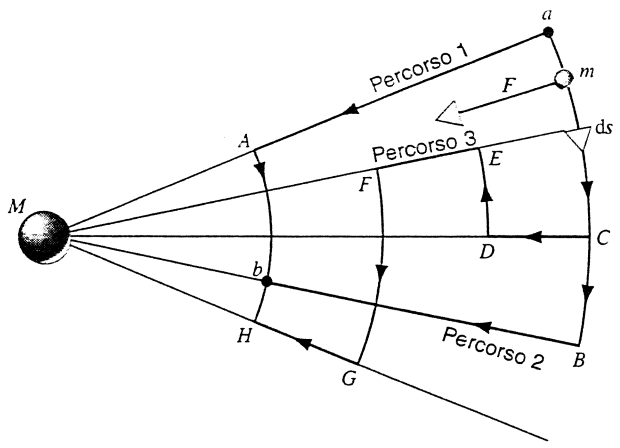


FIGURA 14.11 Una particella di massa m si sposta da a a b seguendo tre differenti percorsi. Una forza gravitazionale $\mathbf{F}$ è esercitata su m da una particella di massa M.

La variazione di energia potenziale si può ricavare dall'Equazione 12.4: $\Delta U = U_b - U_a = -L_{ab}$ dove L_{ab} è il lavoro sviluppato dalla forza quando il sistema passa dalla configurazione a alla b. Ma questa equazione è valida *soltanto* per forze conservative. E la forza gravitazionale è conservativa?

Nella Figura 14.11 vediamo una particella di massa m che si sposta in una regione dove su di essa si esercita una forza gravitazionale dovuta a una particella di massa M. La particella m si sposta da a a b seguendo alcuni diversi percorsi: cammino 1 (aAb), cammino 2 (aBb) e cammino 3 ($aCDEFGHb$). Ogni percorso consiste di segmenti rettilinei lungo i raggi e di tratti curvi lungo archi di circonferenza con centro in M. Lungo i tratti curvi come aC, per piccoli spostamenti $d\mathbf{s}$ si ha $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, perché $\mathbf{F}$ è normale a $d\mathbf{s}$. Calcoliamo dunque, per il lavoro compiuto dalla forza di gravità lungo il cammino 1

$$L_1 = L_{aA} + L_{Ab} = L_{aA} = \int_{r_a}^{r_A} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto del fatto che $r_A = r_b$. Analogamente

$$L_2 = L_{aB} + L_{Bb} = L_{Bb} = \int_{r_B}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

con $r_B = r_a$. E infine, per il cammino 3,

$$L_3 = L_{aC} + L_{CD} + L_{DE} + L_{EF} + L_{FG} + L_{GH} + L_{Hb} =$$
$$= L_{CD} + L_{EF} + L_{GH} =$$
$$= \int_{r_C}^{r_D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{r_E}^{r_F} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{r_G}^{r_H} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} =$$
$$= \int_{r_a}^{r_D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{r_D}^{r_F} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{r_F}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{r_a}^{r_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

dove abbiamo usato le regole del calcolo integrale per combinare integrali aventi estremi superiori e inferiori coincidenti.

È chiaro da questi calcoli che $L_1 = L_2 = L_3$, ed è ovvio che *qualsiasi* percorso da a a b può essere rappresentato da

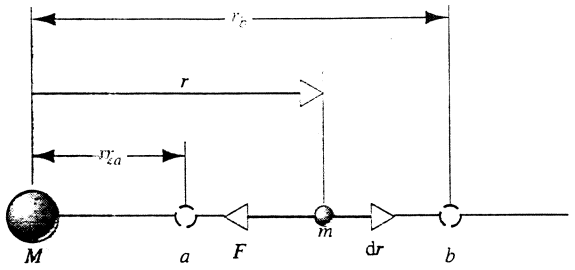


FIGURA 14.12 Una particella di massa M esercita una forza gravitazionale F su una particella di massa m che si sposta da a a b.

una serie di segmenti radiali e archi di circonferenza, e darà quindi lo stesso valore per il lavoro: questo è dunque indipendente dal percorso, e la forza è conservativa.

Come calcolare l'energia potenziale

Avendo stabilito che la forza gravitazionale è conservativa, possiamo calcolarne l'energia potenziale. In Figura 14.12 vediamo una particella di massa m che si sposta da a a b lungo un percorso radiale. Una particella di massa M, che supponiamo a riposo nell'origine, esercita una forza gravitazionale su m. Il vettore $\boldsymbol{r}$ in ogni istante localizza m rispetto a M. Come m si sposta da a a b, il lavoro esercitato su di esso dalla forza gravitazionale è

$$\begin{aligned} L_{ab} &= \int_{ra}^{rb} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_a^b F\,\mathrm{d}r = \\ &= -\int_{ra}^{rb} \frac{GMm}{r^2}\,\mathrm{d}r = -GMm\int_{ra}^{rb}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &= -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{ra}^{rb} = GMm\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right). \end{aligned} \qquad (14.14)$$

Il segno negativo sta a indicare che la forza (di attrazione) F e il vettore radiale infinitesimo $\mathrm{d}r$ hanno versi opposti. L'Equazione 14.14 indica che, per $r_b > r_a$ (come nella Figura 14.12) il lavoro L_{ab} è negativo, com'era da aspettarsi. Ma si può anche dimostrare che la (14.14) è valida anche se m si sposta verso l'interno dal punto a a un punto b, ossia quando $r_a > r_b$: forza e spostamento sono concordi e il lavoro risulta positivo, in accordo con l'Equazione 14.14.

Applicando l'Equazione 12.14 ($\Delta U = -L_{ab}$), possiamo calcolare la variazione di energia potenziale del sistema quando m si sposta da a in b:

$$\Delta U = U_b - U_a = -L_{ab} = GMm\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right). \qquad (14.15)$$

Se m si allontana da a verso b la variazione di energia potenziale è positiva ($U_b > U_a$). Ossia, se la particella passa per il punto a con una certa energia cinetica K_a, mentre si sposta verso b la sua energia potenziale gravitazionale *aumenta* mentre la sua energia cinetica *diminuisce* ($K_b < K_a$). Al contrario, se la particella si muove verso l'interno, la sua energia potenziale diminuisce e la sua energia cinetica aumenta.

In luogo delle *variazioni* di energia potenziale, se definiamo una posizione di riferimento, possiamo considerare il valore dell'energia potenziale per ogni dato punto. Scegliamo come configurazione di riferimento una distanza infinita fra le particelle, e stabiliamo che in queste condizioni l'energia potenziale è zero. Valutiamo l'Equazione 14.15 per $r_b = \infty$ e $U_b = 0$. Se a rappresenta un punto qualsiasi per il quale la distanza fra le particelle sia r, l'Equazione 14.15 diventa

$$U(\infty) - U(r) = GMm\left(\frac{1}{r}-0\right), \qquad (14.16)$$

ossia

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}. \qquad (14.17)$$

L'Equazione 14.17 indica che, con questa scelta della configurazione di riferimento, l'energia potenziale è negativa per qualsiasi distanza finita, e cresce verso lo zero all'aumentare della distanza (d'accordo con quanto abbiamo stabilito per il segno di ΔU a commento dell'Equazione 14.15). Ciò dipende dal carattere attrattivo della forza gravitazionale: quando m si sposta verso l'esterno da una distanza r all'infinito, il lavoro svolto su m dalla forza di gravità è negativo, $\Delta U = U(\infty) - U(r)$ è positivo, e così $U(r)$ è negativo in accordo con l'Equazione 14.17.

Questa equazione dimostra che l'energia potenziale è una proprietà del sistema costituito dalle due particelle M ed m piuttosto che di ciascuno dei due corpi. L'energia potenziale varia sia che si sposti M sia che si sposti m: su ciascuna particella agisce la forza gravitazionale dell'altra. Inoltre non ha senso ripartire l'energia potenziale assegnandone una parte a ciascun corpo. Spesso però ci troviamo a parlare dell'energia potenziale di un corpo m (per esempio, un pianeta o una pietra) su cui agisce la forza gravitazionale di un altro corpo di massa M molto maggiore (rispettivamente, il Sole o la Terra). Il motivo per cui si usa esprimersi come se l'energia potenziale appartenesse soltanto al pianeta o alla pietra è che quando l'energia potenziale di un sistema di due corpi si trasforma in energia cinetica, il corpo più leggero acquisisce la maggior parte dell'energia cinetica. Così il Sole è molto più grande dei pianeti che non riceve praticamente niente della variazione di energia cinetica, e lo stesso si può dire per il sistema Terra–pietra.

Possiamo capovolgere il procedimento ora seguito e dedurre la forza gravitazionale dall'energia potenziale. Per funzioni energia potenziale a simmetria sferica, l'espressione $F = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}r$ (Equazione 12.7) esprime la componente radiale della forza. Combinandola con la (14.17) troviamo

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}. \qquad (14.18)$$

Anche qui il segno meno indica che la forza è attrattiva, orientata verso l'interno lungo un raggio.

Si può dimostrare che, per piccole variazioni della quota y vicino alla superficie della Terra, l'energia potenziale definita secondo la (14.15) conduce alla familiare formula mgy. Calcoliamo con la (14.15) la variazione di energia potenzia-

 ISBN 88-48-1254-7

le tra un punto a quota y sopra la superficie terrestre (ossia $r_b = R_T + y$, ove R_T è il raggio della Terra) e la superficie stessa $r_a = R_T$:

$$\Delta U = U(R_T + y) - U(R_T) = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + y}\right) = \\ = \frac{GM_T m}{R_T}\left(1 - \frac{1}{1 + y/R_T}\right).$$

Per $y \ll R_T$, come avviene per piccoli spostamenti di corpi in vicinanza della superficie terrestre, possiamo ricorrere allo sviluppo in serie binomiale per trovare un'espressione approssimata che sostituisca l'ultimo termine, ossia $(1+x)^{-1} = 1 - x + \cdots \approx 1 - x$, ottenendo

$$\Delta U \approx \frac{GM_T m}{R_T}\left[1 - \left(1 - \frac{y}{R_T}\right)\right] = \frac{GM_T m y}{R_T^2} = mgy,$$

ove l'Equazione 14.5 è servita a sostituire GM_T/R_T^2 con g. Ciò conferma che, in vicinanza della superficie terrestre per variazioni di energia potenziale fra due punti a diversa altezza, a qualsiasi distanza R dal centro della Terra possiamo affidarci alla formula $\Delta U = mgy$ purché sia $y \ll R$ utilizzando il valore di g corrispondente a R quale desunto dalla Tabella 14.1.

PROBLEMA SVOLTO 14.5 Un satellite in orbita alla quota di 2 raggi terrestri sopra la superficie della Terra lancia una cassetta di attrezzi di massa m alla velocità $v_i = 525$ m/s in direzione del centro della Terra. A che velocità v_f entrerà nell'atmosfera terrestre, a un'altezza h di 100 km sopra la superficie terrestre?

Soluzione Adottiamo per questo caso il metodo della conservazione dell'energia. Al lancio la cassetta ha un'energia cinetica $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$ e un'energia potenziale $U_i = -GM_T m/r_i$ ove $r_i = 3R_T$. Quando entra in atmosfera l'energia cinetica è $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ e l'energia potenziale è $U_f = -GM_T m/r_f$ ove $r_f = R_T + h$. Essendo $K_i + U_i = K_f + U_f$, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_T m}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GM_T m}{r_f},$$

che, risolta rispetto a v_f^2, sostituendo $r_i = 3R_T$ ed $r_f = R_T + h$, diventa

$$v_f^2 = v_i^2 - 2GM_T\left(\frac{1}{3R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right) = \\ = (525\text{ m/s})^2 - 2(6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24}\text{ kg}) \cdot \\ \cdot \left(\frac{1}{3(6{,}37 \cdot 10^6\text{ m})} - \frac{1}{6{,}47 \cdot 10^6\text{ m}}\right) = \\ = 8{,}18 \cdot 10^7\text{ m}^2/\text{s}^2,$$

per cui $v_f = 9{,}05 \cdot 10^3$ m/s. Si noti che questo valore è indipendente dalla massa m dell'oggetto e dal percorso da esso seguito.

PROBLEMA SVOLTO 14.6 Su un percorso rettilineo dalla Terra alla Luna l'energia potenziale (negativa) di un proiettile di massa m aumenta al crescere della distanza dalla Terra fino a raggiungere un massimo in un punto X situato in una certa posizione fra i due corpi, per poi diminuire nuovamente mentre si avvicina alla superficie della Luna. (a) Trovare la distanza del punto X dal centro della Terra. (b) Con quale energia cinetica minima dobbiamo lanciare dalla superficie della Luna un proiettile di massa 1 kg affinché possa raggiungere la Terra?

Soluzione (a) Chiamiamo D la distanza dal centro della Terra al centro della Luna (il raggio orbitale della Luna). Quando il proiettile si trova alla distanza x dal centro della Terra (e $D - x$ dal centro della Luna), la sua energia potenziale vale

$$U(x) = -\frac{GmM_T}{x} - \frac{GmM_L}{D - x}.$$

Per trovare la posizione in cui si verifica il valore massimo, poniamo uguale a zero la derivata dU/dx:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{GmM_T}{x^2} - \frac{GmM_L}{(D-x)^2} = 0.$$

Risolvendo troviamo $x = D(1 + \sqrt{M_L/M_T})^{-1}$, da cui risulta $x = 3{,}44 \cdot 10^8$ m, ossia una distanza circa uguale al 90% del percorso dalla Terra alla Luna.

(b) Quando il proiettile lascia la Luna la sua energia cinetica diminuisce fino a che raggiunge il punto X, per poi aumentare mentre «scende» sulla Terra. La minima energia cinetica necessaria è quella che consente al proiettile di arrivare al punto X con energia cinetica zero. Applichiamo il principio di conservazione dell'energia nella forma $K_i + U_i = K_X + U_X$, ove il pedice «i» indica la superficie della Luna. Ponendo, per la condizione di minimo, $K_X = 0$ troviamo

$$K_i = U_X - U_i = \left(-\frac{GmM_T}{x} - \frac{GmM_L}{D-x}\right) - \left(-\frac{GmM_T}{r_i} - \frac{GmM_L}{r_i}\right),$$

che tradotto in cifre dà $K_i = 1{,}53 \cdot 10^6$ J, corrispondente a una velocità di circa 1750 m/s.

Velocità di fuga

Un proiettile sparato verticalmente verso l'alto dalla superficie della Terra di solito rallenta, si ferma e quindi discende sulla Terra. Esiste tuttavia una certa velocità iniziale per cui continuerà a salire a velocità gradualmente decrescente fino a raggiungere la velocità zero a una distanza infinita dalla Terra. La velocità iniziale *minima* che consente di allontanarsi definitivamente dalla Terra è chiamata *velocità di fuga*.

Possiamo trovare la velocità di fuga dalla Terra (o da qualsiasi altro corpo da cui potrebbe essere sparato un proiettile) ricorrendo al principio di conservazione dell'energia. Il proiettile, di massa m, lascia la superficie del corpo, di massa M e raggio R, con un'energia cinetica $K_i = \frac{1}{2}mv^2$ e un'energia potenziale $U_i = -GMm/R$. Quando il proiettile arriva a distanza infinita ha energia potenziale zero ed energia cinetica zero (se la velocità iniziale era la minima necessaria per la fuga). Posto $U_f = 0$ e $K_f = 0$, ricordando che $K_i + U_i = K_f + U_f$ si ha

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{-GMm}{R}\right) = 0,$$

che, risolta rispetta a v, diventa

TABELLA 14.2 Alcune velocità di fuga

Corpo celeste	*Massa* (kg)	*Raggio* (m)	*Velocità di fuga* (km/s)
Cerere[a]	$1{,}17 \cdot 10^{21}$	$3{,}8 \cdot 10^{5}$	0,64
Luna	$7{,}36 \cdot 10^{22}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$	2,38
Terra	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	11,2
Giove	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$7{,}15 \cdot 10^{7}$	59.5
Sole	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$6{,}96 \cdot 10^{8}$	618
Sirio B[b]	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^{7}$	5200
Stella di neutroni	$2 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^{4}$	$2 \cdot 10^{5}$

[a]L'asteroide noto di massa maggiore.
[b]Una nana bianca, la compagna di Sirio, la stella più brillante visibile dalla Terra.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{14.19}$$

La Tabella 14.2 riporta le velocità di fuga da alcuni corpi celesti.

La velocità di fuga non dipende dalla direzione in cui il proiettile è sparato. La rotazione della Terra – di cui in questi calcoli non abbiamo tenuto conto – ha però un'influenza non trascurabile. Sparando verso est si ha il vantaggio che la velocità tangenziale della superficie terrestre, che a Cape Canaveral è di 0,46 km/s, fornisce una parte dell'energia cinetica necessaria per abbandonare la Terra, riducendo la spinta di lancio richiesta ai razzi motori dei veicoli spaziali.

Energia potenziale di sistemi multicorpo

Esaminiamo ora un'altra interpretazione della funzione $U(r)$. Consideriamo due corpi puntiformi di massa m ed M separati da una distanza infinita e a riposo. Ne prendiamo uno (per esempio m) e lo spostiamo lentamente e a velocità costante verso l'altro, fino a che la distanza fra le due particelle non sia r. Perché la particella si muova a velocità costante il lavoro totale applicato alla particella dev'essere zero: $L_{\text{net}} = L_{\text{ext}} + L_{\text{grav}} = 0$, ove L_{ext} è il lavoro sviluppato dalla nostra mano e L_{grav} il lavoro svolto dalla forza gravitazionale.

In base all'Equazione 14.14 il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale mentre l'oggetto si sposta dall'infinito alla distanza r vale $L_{\text{grav}} = L_{\infty r} = GMm/r$. Il lavoro svolto dalla mano sarà allora $L_{\text{ext}} = -L_{\text{grav}} = -GMm/r$. Osservando che questa espressione è uguale a $U(r)$ come nell'Equazione 14.17, si può interpretare l'energia potenziale in un altro modo:

> *l'energia potenziale di un sistema di particelle è uguale al lavoro svolto da un agente esterno per costituire il sistema partendo dalla configurazione di riferimento.*

Per «configurazione di riferimento» s'intende qui che le particelle sono inizialmente a riposo a distanza infinita. Come abbiamo visto, è inoltre specificato che il sistema finale costituito è a riposo nello stesso sistema di riferimento nel quale le particelle sono a riposo nel loro stato iniziale.

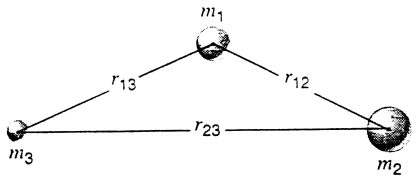


FIGURA 14.13 Tre masse portate vicine una all'altra e tenute ferme da forze non gravitazionali.

Simili considerazioni sono valide anche per sistemi che contengono più di due particelle. Consideriamo tre corpi aventi masse m_1, m_2 ed m_3, inizialmente a riposo e a distanze infinite le une dalle altre. Il problema consiste nel calcolare il lavoro svolto da un agente esterno per portarle nelle posizioni indicate nella Figura 14.13. Cominciamo portando m_1 dall'infinito alla sua posizione finale e ivi tenendola ferma. La gravitazione o l'agente esterno non devono fare alcun lavoro perché le distanze fra le tre particelle rimangono infinite. Portiamo ora m_2 verso m_1 da distanza infinita a distanza r_{12} e ivi tratteniamola. Il lavoro svolto dall'agente esterno per opporsi alla forza gravitazionale esercitata da m_1 su m_2 è Gm_1m_2/r_{12}. Portiamo infine m_3 da distanza infinita alla distanza r_{13} da m_1 ed r_{23} da m_2. Il lavoro svolto dall'agente esterno per opporsi alla forza gravitazionale esercitata da m_1 su m_3 è $-Gm_1m_3/r_{13}$, e il lavoro svolto contro la forza gravitazionale di m_2 su m_3 è $-Gm_2m_3/r_{23}$. L'energia potenziale complessiva del sistema è uguale al lavoro totale compiuto dall'agente esterno per costituire il sistema:

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right). \tag{14.20}$$

Si noti che, poiché il lavoro è uno scalare, questo procedimento non richiede alcun calcolo vettoriale.

In qualunque modo si costituisca il sistema – cioè, in qualunque ordine si proceda al posizionamento delle particelle – troveremo sempre lo stesso valore totale per il lavoro richiesto per portare i corpi da distanza infinita alla configurazione di Figura 14.13. L'energia potenziale deve quindi essere associata al sistema piuttosto che ai singoli corpi componenti. Se vogliamo ancora una volta dividere il sistema in tre masse isolate, dobbiamo fornire una quantità di energia pari a

$$E = +\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

Questa energia è chiamata *energia di legame* perché tiene insieme le particelle nella configurazione indicata.

Questi stessi concetti si presentano anche quando si tratta di forze di natura elettrica o magnetica, o anche di natura nucleare. La loro applicazione è abbastanza ampia in fisica. Un vantaggio del metodo energetico su quello dinamico è che usa quantità e operatori scalari anziché vettoriali. Quando non si conoscono le forze effettive, come spesso accade in fisica nucleare, ricorrere all'approccio energetico diventa indispensabile.

 ISBN 88-408-1254-7

14.7 MOTO DEI PIANETI E DEI SATELLITI

Attraverso le leggi di Newton del moto e della gravitazione universale possiamo capire e analizzare il comportamento di tutti i corpi del sistema solare: le orbite dei pianeti e delle comete intorno al Sole e quelle dei satelliti naturali e artificiali intorno ai loro pianeti. Per facilitare i ragionamenti accettiamo due semplificazioni: (1) consideriamo la forza gravitazionale soltanto fra un corpo orbitante (per esempio, la Terra) e il corpo centrale (per esempio, il Sole), ignorando gli effetti distorsivi dovuti alla presenza degli altri corpi orbitanti (quali gli altri pianeti); (2) ammettiamo che il corpo centrale abbia una massa tanto maggiore del corpo orbitante da poter ignorare i suoi movimenti dovuti alla reciproca interazione. In realtà entrambi gli oggetti orbitano intorno al loro comune centro di massa, ma se uno dei due ha massa molto più grande dell'altro il centro della massa complessiva è situato praticamente al centro del corpo più grande.

La base empirica per la comprensione del moto dei pianeti è costituita da tre leggi ricavate da Keplero (1571-1630, molto prima di Newton) dall'osservazione del moto del pianeta Marte. Dimostreremo ora come le leggi di Keplero possano essere dedotte dalle leggi di Newton del moto e della gravitazione universale.

1. *Legge delle orbite. Tutti i pianeti si muovono su orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.* Newton fu il primo a capire che vi è una relazione diretta fra forze dipendenti dall'inverso del quadrato della distanza e orbite ellittiche. Nella Figura 14.14 vediamo una tipica orbita ellittica. L'origine delle coordinate coincide con il corpo centrale, e il corpo in orbita è localizzato dalle coordinate polari r e θ. L'orbita è definita da due parametri: il semiasse maggiore a e l'eccentricità e. La distanza dal centro dell'ellisse a ciascuno dei fuochi vale ea. L'orbita circolare è un caso particolare dell'orbita ellittica in cui $e = 0$, talché i due fuochi vengono a coincidere in un unico punto al centro del circolo. Per la Terra e per la maggior parte degli altri pianeti del sistema solare l'eccentricità è molto piccola e le orbite sono quasi circolari, come risulta dall'Appendice C.

La distanza massima R_a del corpo orbitante dal corpo centrale viene indicata col prefisso greco apo-, come in *afelio* (massima distanza dal Sole) e in *apogeo* (massima distanza dalla Terra. La minima distanza R_p del corpo orbitante dal corpo centrale viene indicata dal prefisso peri-, come in *perielio* e *perigeo*. Dalla Figura 14.4 si può vedere che $R_a = a(1 + e)$ e $R_p = a(1 - e)$. Se l'orbita è circolare, $R_a = R_p = a$

2. *Legge delle aree. Il segmento che unisce il pianeta al Sole descrive aree uguali in tempi uguali.* La Figura 14.15 illustra questa legge; in pratica dice che un corpo orbitante si muove più rapidamente quando è più vicino al corpo centrale che quando me è più lontano. Dimostreremo ora che la legge delle aree è identica alla legge della conservazione del momento angolare.

Consideriamo il piccolo incremento ΔA dell'area descritta nell'intervallo di tempo Δt, come illustrato nella Figura 14.15b. L'area di questo cuneo approssimativamente triangolare vale la metà del prodotto della sua base, $r\Delta\theta$, per la sua altezza r. Il rapporto temporale con cui quest'area viene descritta è $\Delta A/\Delta t = \frac{1}{2}(r\Delta\theta)(r)/\Delta t$ che, al limite per $\Delta t \to 0$, diventa

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \tfrac{1}{2} r^2 \omega .$$

Ammettendo di poter considerare immobile il corpo più

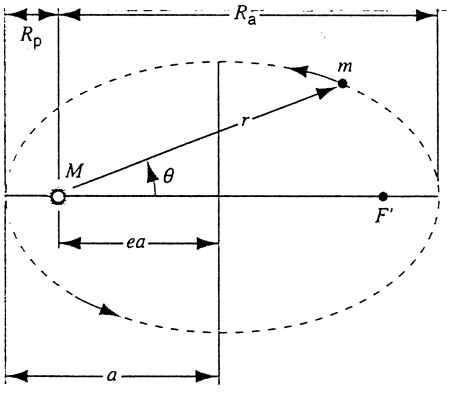


FIGURA 14.14 Un pianeta di massa m si muove su un'orbita ellittica intorno al Sole, di massa M, che occupa uno dei fuochi; l'altro fuoco F' è «vuoto». Sono indicati il semiasse maggiore a dell'ellisse, la distanza al perielio R_p, e quella all'afelio R_a. La distanza ea localizza i due fuochi, ed e rappresenta l'eccentricità dell'ellisse.

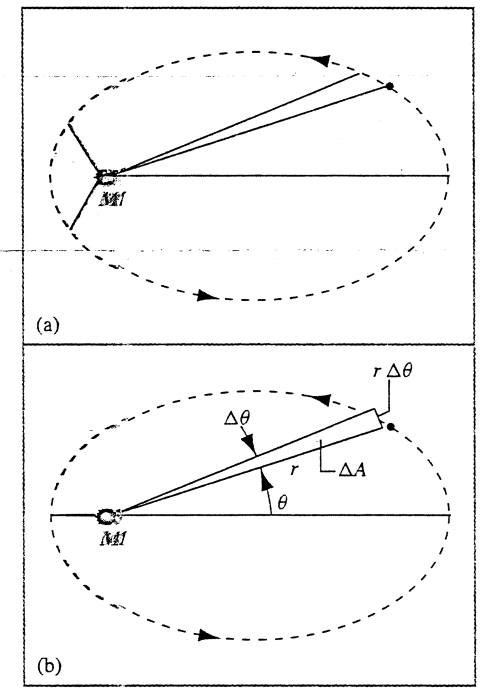


FIGURA 14.15 (a) Le aree uguali ombreggiate sono descritte in tempi uguali da una linea che collega il pianeta al Sole, a dimostrazione della legge delle aree. (b) L'area ΔA è descritta in un tempo Δt, durante il quale la linea ruota di un angolo $\Delta\theta$.

grande M, il momento angolare del corpo orbitante m rispetto al corpo centrale, posto all'origine degli assi, in base all'Equazione 10.12 vale $L_z = I\omega = mr^2\omega$ (l'asse z è perpendicolare al piano dell'orbita), e quindi

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_z}{2m}. \qquad (14.21)$$

Se il sistema composto da M ed m è isolato, nel senso che il momento torcente netto esterno che agisce su di esso è nullo, allora, secondo la (10.9), L_z è costante, e così lo è pure, nella (14.21), dA/dt. Ciò significa che in ogni intervallo di tempo dt il segmento che congiunge m con M descrive un'uguale area dA, come previsto dalla legge di Keplero. L'accelerazione cui è sottoposta una cometa quando passa vicino al Sole è un esempio di questo effetto e una diretta conseguenza del principio di conservazione del momento angolare.

3. *Legge dei periodi. Il quadrato del periodo di rivoluzione è proporzionale al cubo della distanza media del pianeta dal Sole.* Dimostriamo questa legge per un'orbita circolare. La forza gravitazionale fornisce l'accelerazione centripeta necessaria a mantenere il moto circolare:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}. \qquad (14.22)$$

Sostituendo alla velocità v la sua espressione $2\pi r/T$, ove T è il periodo di rivoluzione, ossia il tempo impiegato per un giro completo dell'orbita, otteniamo

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3. \qquad (14.23)$$

Analogo risultato si ottiene per le orbite ellittiche, sostituendo al raggio r il semiasse maggiore a.*

Il rapporto fra T^2 e a^3 dovrebbe risultare dall'espressione $4\pi^2/GM$. Per tutti i pianeti in orbita intorno al Sole il rapporto T^2/a^3 dovrebbe essere costante: la Tabella 14.3 mostra che ciò è vero con ottima approssimazione. Se siamo in grado di misurare T e a per un corpo in orbita possiamo determinare la massa del corpo centrale; ma questo metodo di calcolo è indipendente dalla massa del corpo orbitante, che non può quindi essere ricavata per questa via.

PROBLEMA SVOLTO 14.7 (a) Calcolare la massa del Sole conoscendo il periodo di rivoluzione e il raggio dell'orbita terrestre. (b) Calcolare la massa di Giove conoscendo il periodo di rivoluzione (1,77 d) e il raggio dell'orbita ($4{,}22 \cdot 10^5$ km) di Io, la sua seconda luna più vicina.

Soluzione (a) Dall'Equazione 14.23 ricaviamo

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(1{,}50 \cdot 10^{11}\text{m})^3}{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3{,}15 \cdot 10^7\ \text{s})^2} =$$
$$= 2{,}01 \cdot 10^{30}\ \text{kg}.$$

*Vedi, per esempio, A.P. French, *Newtonian Mechanics*, Norton, 1971, pp. 585-591.

TABELLA 14.3 Legge dei periodi di Keplero per il sistema solare

Pianeta	*Semiasse maggiore* a (10^{10} m)	*Periodo* T (a)	T^2/a^3 (10^{-34} a^2/m^3)
Mercurio	5,79	0,241	2,99
Venere	10,8	0,615	3,00
Terra	15,0	1,00	2,96
Marte	22,8	1,88	2,98
Giove	77,8	11,9	3,01
Saturno	143	29,5	2,98
Urano	287	84,0	2,98
Nettuno	450	165	2,99
Plutone	590	248	2,99

(b)
$$M = \frac{4\pi^2(4{,}22 \cdot 10^8\text{m})^3}{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(1{.}53 \cdot 10^5\ \text{s})^2} =$$
$$= 1{,}90 \cdot 10^{27}\ \text{kg}.$$

Si noti che la massa di Giove non si può ottenere dai parametri della sua orbita intorno al Sole: per calcolare la massa di un oggetto per mezzo della terza legge di Keplero bisogna conoscere periodo e semiasse maggiore di un altro corpo che gli orbita intorno.

PROBLEMA SVOLTO 14.8 Si deve immettere in orbita un satellite per telecomunicazioni in modo che resti stazionario sopra un certo punto dell'equatore terrestre. Quale deve essere l'altezza della sua orbita sopra la superficie della Terra?

Soluzione Per rimanere fisso sopra un certo punto dell'equatore terrestre, il satellite deve ruotare alla stessa velocità angolare della Terra. Il suo periodo deve quindi essere di 24 h o 86 400 s. Il raggio della sua orbita dev'essere

$$r = \left(\frac{GT^2 M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} =$$
$$= \left(\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(86\,400\ \text{s})^2(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}{4\pi^2}\right)^{1/3} =$$
$$= 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m},$$

e l'altezza h rispetto alla superficie della Terra sarà

$$h = r - R_T = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} =$$
$$= 3{,}58 \cdot 10^7\ \text{m} = 35\,800\ \text{km}.$$

Questa orbita è chiamata *geosincrona*. L'impiego di satelliti *geostazionari* fu proposta anche da Arthur C. Clarke nel 1948, ben noto come autore di molti racconti e romanzi di fantascienza, fra cui *2001 - Odissea nello spazio*.

PROBLEMA SVOLTO 14.9 La Cometa di Halley (Figura 14.16) ha un periodo di 76 anni. Nel 1986 il suo passaggio più vicino al Sole (perielio) avvenne alla distanza di $8{,}8 \cdot 10^{10}$ m, fra le orbite di Mercurio e di Venere. Calcolare l'afelio, la sua massima distanza dal Sole, e l'eccentricità della sua orbita.

Soluzione Dall'Equazione 14.23, ove M è la massa del Sole, si trova il semiasse maggiore a:

 ISBN 88-408-1254-7

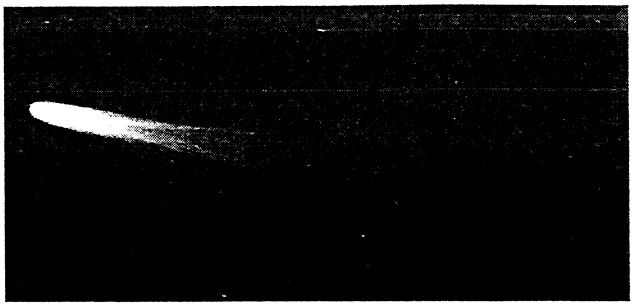


FIGURA 14.16 La cometa di Halley fotografata nel 1986 durante il passaggio vicino al Sole.

$$a = \left(\frac{GT^2M}{4\pi^2}\right)^{1/3} =$$

$$= \left(\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(2{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{s})^2(2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg})}{4\pi^2}\right)^{1/3} =$$

$$= 2{,}7 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}.$$

In base alla Figura 14.14, essendo $R_p + R_a = 2a$, risulta

$$R_a = 2a - R_p = 2(2{.}7 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}) - 8{,}8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} =$$

$$= 5{,}3 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m},$$

una distanza compresa fra le orbite di Nettuno e di Plutone. Inoltre ricaviamo anche $R_p = a - ea = a(1 - e)$, da cui

$$e = 1 - \frac{R_p}{a} = 1 - \frac{8{,}88 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}}{2{,}7 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}} = 0{,}97.$$

Un'eccentricità così grande (il valore massimo di e è 1) corrisponde a un'ellisse sottile e molto allungata.

Considerazioni sull'energia nel moto dei pianeti e dei satelliti

Ritorniamo ancora al moto di un corpo di massa m (un pianeta o un satellite) che ruota intorno a un corpo di dimensioni molto maggiori avente massa M (il Sole o la Terra, per esempio). Poniamo che M sia a riposo in un sistema di riferimento inerziale, e che m gli ruoti intorno su un'orbita circolare con velocità tangenziale v e velocità angolare ω. L'energia potenziale del sistema è

$$U(r) = -\frac{GMm}{r},$$

ove r è il raggio dell'orbita circolare. L'energia cinetica del sistema vale

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

essendo il Sole a riposo. Dall'Equazione 14.22 si ottiene

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM}{r},$$

per cui, essendo $v = \omega r$,

$$K = \frac{GMm}{2r}. \qquad (14.24)$$

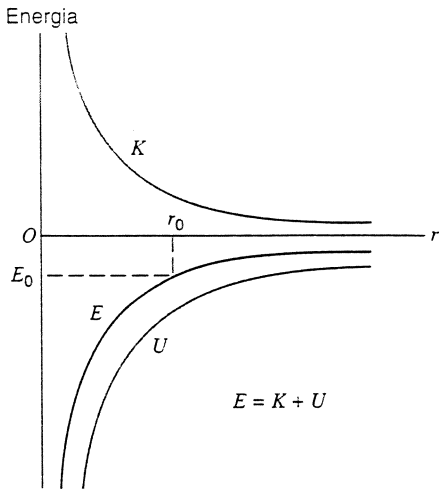


FIGURA 14.17 L'energia cinetica K, l'energia potenziale U e l'energia totale $E = K + U$ di un corpo in moto planetario circolare. Un pianeta con energia totale $E_0 < 0$ rimarrà su un'orbita di raggio r_0 e la sua energia totale E sarà maggiore (ossia meno negativa) quanto maggiore sarà la distanza dal Sole. Per sfuggire al centro di forza e avere ancora energia cinetica all'infinito il pianeta dovrebbe avere energia totale positiva.

L'energia meccanica totale è

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}, \qquad (14.25)$$

un'energia costante e negativa. L'energia cinetica non può mai essere negativa, ma dall'Equazione 14.24 sappiamo che essa deve annullarsi quando la distanza diventa infinita. L'energia potenziale è sempre negativa salvo quando diventa zero a distanza infinita. Il fatto che l'energia totale sia negativa significa che si tratta di un sistema chiuso, e il pianeta m subisce l'eterna attrazione del Sole posto al centro del sistema, che non riuscirà mai ad abbandonare (Figura 14.17).

Si può dimostrare* che l'Equazione 14.25 è valida anche per orbite ellittiche ove si sostituisca al raggio r il semiasse maggiore a. L'energia totale è ancora negativa, ed è inoltre costante perché le forze gravitazionali sono conservative. Nel moto dei pianeti dunque sia l'energia totale sia il momento angolare totale sono costanti: queste due grandezze sono spesso chiamate *costanti del moto*.

Poiché l'energia totale non dipende dall'eccentricità dell'orbita, tutte le orbite con il medesimo semiasse maggiore a, come quelle rappresentate nella Figura 14.18, hanno la stessa energia totale.

Se forniamo adeguate quantità di energia cinetica possiamo fare in modo che l'energia totale sia zero o anche positiva, ottenendo così orbite non ellittiche: infatti per $E = 0$ esse sono paraboliche, e per $E > 0$ iperboliche. Ciò si verifica spesso nella diffusione di particelle emesse da un nucleo, ove la forza elettrostatica varia anch'essa secondo $1/r^2$. Alla sonda spaziale *Pioneer 10* fu fornita un'energia cinetica ini-

*Vedi la nota a pag. 327.

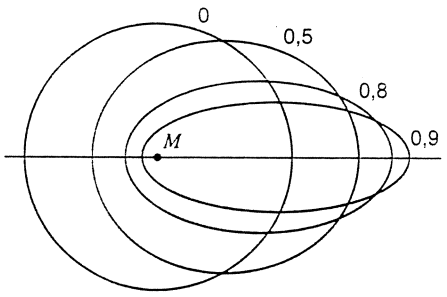


FIGURA 14.18 Tutte e quattro queste orbite hanno lo stesso semiasse maggiore a e hanno quindi la stessa energia totale. Sono indicate le rispettive eccentricità.

ziale sufficiente a consentirle di evadere dal sistema solare: lanciata il 3 marzo 1972, ha oltrepassato il 14 giugno 1983 l'orbita di Plutone, il pianeta più esterno del sistema solare, e viaggia ora nello spazio su una rotta iperbolica.

L'Equazione 14.25 dimostra che non è possibile cambiare la velocità di un satellite in orbita senza variare contemporaneamente il raggio della sua orbita. Supponiamo per esempio che due satelliti si inseguano su una stessa orbita circolare. Se quello che sta dietro tenta di raggiungere il primo aumentando la velocità, e aumentando così la propria energia cinetica, l'energia totale diventa meno negativa e il raggio dell'orbita aumenta. Agganciare due veicoli spaziali non è un semplice esercizio di avvicinamento come con i treni! Infatti, come dimostra il Problema svolto 14.10 qui di seguito, la manovra corretta per sorpassare un altro veicolo spaziale consiste spesso nel rallentare anziché accelerare.

PROBLEMA SVOLTO 14.10 Due veicoli spaziali identici, ciascuno avente una massa di 3250 kg, viaggiano su una stessa orbita circolare a un'altezza di 270 km sopra la superficie terrestre. Il veicolo A precede il veicolo B di 105 s; ciò significa che A passa in un punto qualsiasi dell'orbita 105 s prima di B. In un certo punto P (Figura 14.19) il pilota di B accende per breve tempo un razzo diretto in avanti riducendo la velocità di B dello 0,95 %. Trovare i parametri orbitali (energia, periodo, semiasse maggiore) di B prima e dopo la correzione di velocità, e stabilire in quale successione i due veicoli passeranno nuovamente per il punto P.

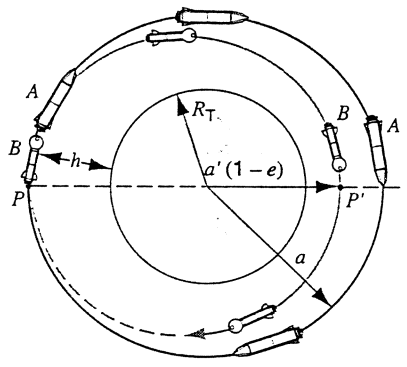


FIGURA 14.19 Problema svolto 14.10. Sono disegnate le orbite dei veicoli spaziali A e B. Da notare che B sorpassa A portandosi su un'orbita non circolare ad altezza minore sulla superficie terrestre. Le dimensioni della Terra e delle orbite non sono in scala.

Soluzione Per $h = 270$ km, $r = R_T + h = 6370\,\text{km} + 270\,\text{km} = 6640$ km. Perciò, prima dell'accensione del motore, dalla (14.25) si ha

$$E = -\frac{GmM_T}{2a} = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3250\ \text{kg})(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}{2(6{,}64 \cdot 10^6\ \text{m})} = -9{,}76 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

Il periodo si ricava dalla (14.23):

$$T = \left(\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2(6{,}64 \cdot 10^6\ \text{m})^3}{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}\right)^{1/2} = 5380\ \text{s}.$$

Dalle Equazioni 14.24 e 14.25 risulta che (soltanto per orbite circolari!) l'energia cinetica è numericamente uguale all'opposto dell'energia totale, per cui $K = +9{,}76 \cdot 10^{10}$ J e pertanto

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2(9{,}76 \cdot 10^{10}\ \text{J})}{3250\ \text{kg}}} = 7{,}75 \cdot 10^3\ \text{m/s}.$$

Dopo la correzione, la velocità diminuisce dello 0,95 %, passando a $v' = (1 - 0{,}0095)v = 7{,}68 \cdot 10^3$ m/s, e la nuova energia cinetica vale

$$K' = \tfrac{1}{2}(3250\ \text{kg})(7{,}68 \cdot 10^3\ \text{m/s})^2 = 9{,}58 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

L'energia potenziale di B nel punto P, subito dopo la correzione, non è variata, essendo uguale al suo valore iniziale $E - K$ ossia $2E$, in base alla (14.25). L'energia totale E' di B dopo la correzione sarà quindi

$$E' = K' + U' = 9{,}58 \cdot 10^{10}\ J + 2(-9{,}76 \cdot 10^{10}\ J) = -9{,}94 \cdot 10^{10}\ \text{J},$$

e il nuovo semiasse maggiore, sempre per la (14.25), sarà

$$a' = -\frac{GmM_T}{2E'} = -\frac{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3250\ \text{kg})(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}{2(-9{,}94 \cdot 10^{10}\ \text{J})} = 6{,}52 \cdot 10^6\ \text{m} = 6250\ \text{km},$$

con una diminuzione dell'1,8 % rispetto al valore dell'orbita iniziale. Il periodo corrispondente risulta

$$T' = \left(\frac{4\pi^2 a'^3}{GM_T}\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2(6{,}52 \cdot 10^6\ \text{m}^3}{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg})}\right)^{1/2} = 5240\ \text{s},$$

diminuito di 140 s rispetto a quello iniziale. Perciò B, che era passato per P con un ritardo di 105 s rispetto ad A, lo precederà al passaggio successivo di 35 s. Se ora B, al nuovo passaggio per P, esegue un'accensione identica per durata e intensità, ma *all'indietro*, ritornerà alla velocità e all'orbita iniziale ma *precedendo* A di 35 s. La Figura 14.19 mostra le posizioni relative di A e B sulle rispettive orbite dopo la prima correzione: si noti che B è passato a

 ISBN 88-408-1254-7

un'orbita ellittica inferiore a quella circolare iniziale, sorpassando così A senza pericolo di collisione.

L'Esercizio 38 aiuterà a capire come B, riducendo la propria velocità in P, riesca a rimanere poi davanti ad A.

14.8 IL CAMPO GRAVITAZIONALE (facoltativo)

Una fondamentale caratteristica della gravitazione è il fatto che due particelle esercitino fra loro una forza di attrazione reciproca. Volendo, possiamo concepire che esista fra le due particelle un'interazione diretta. Questa interpretazione è chiamata *azione a distanza*: le due particelle interagiscono pur non essendo a diretto contatto. Un altro punto di vista implica il concetto di *campo*, secondo il quale una particella condizionerebbe in qualche modo lo spazio circostante creando un *campo gravitazionale*. Questo campo, la cui intensità dipende dalla massa della particella, agisce su ogni altra particella esercitando su di essa la forza di attrazione gravitazionale. Il campo dunque svolge una funzione d'intermediazione attraverso la quale ogni particella agisce sulle altre.

Secondo questo punto di vista il nostro problema si sviluppa in due fasi. Dobbiamo prima determinare il campo gravitazionale creato da una certa distribuzione di particelle, e poi calcolare la forza gravitazionale che questo campo verrà a esercitare su una nuova particella in esso introdotta.

Useremo questo stesso tipo di approccio più avanti per l'elettromagnetismo, ove ogni particella dotata di carica elettrica crea un campo *elettrico*, e la forza esercitata su ogni altra particella è determinata dalla forza del campo elettrico nel punto in cui questa si trova.

Consideriamo la Terra come una particella isolata, ignorando l'effetto della rotazione e di ogni altra causa di natura non gravitazionale: sarà dunque $g = g_0$. Usiamo come sonda esploratrice del campo gravitazionale un piccolo oggetto di massa m_0 collocato in diversi punti in prossimità della superficie terrestre. Ad ogni punto, dove la forza ha intensità $m_0 g$, sarà associato un vettore $\boldsymbol{g}$ diretto verso il centro della Terra che rappresenta l'accelerazione di gravità in quel punto. Definiamo *intensità del campo gravitazionale* in un punto la *forza gravitazionale per unità di massa* supposta concentrata in quel punto. Per la massa esploratrice si avrà

$$g = \frac{F}{m_0}. \tag{14.26}$$

Spostando la massa esploratrice in posizioni diverse potremo tracciare una mappa del campo gravitazionale in ogni punto dello spazio. Per trovare la forza agente su una particella di massa m basterà moltiplicare questa massa per il vettore $\boldsymbol{g}$ relativo al punto in cui si trova la particella: $F = mg$. La Figura 14.20 presenta due esempi di campo gravitazionale.

Il campo gravitazionale è un esempio di *campo vettoriale*, in cui a ogni punto è associato un vettore; esistono anche *campi scalari*, come il campo delle temperature all'interno di un solido conduttore termico. Un campo gravitazionale legato a una distribuzione fissa di materia è un *campo statico*, poiché non varia nel tempo.

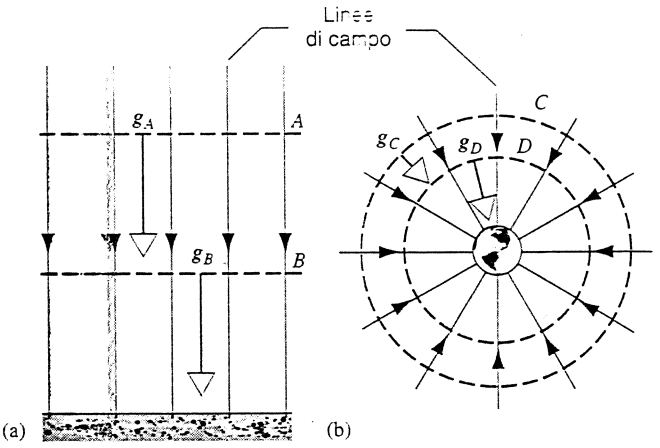


FIGURA 14.20 Esempi di diagrammi delle linee di forza di un campo gravitazionale. Le direzioni delle linee di campo, o delle loro tangenti se sono curve, danno la direzione del campo in ogni punto, e la densità delle linee di campo (numero di linee che attraversano un'area unitaria normale alla loro direzione) indica le intensità relative del campo. (a) Il campo uniforme alla superficie della Terra. Il campo ha ovunque la stessa intensità e direzione. Il numero di linee per area unitaria sulla superficie piana A parallela alla superficie terrestre è uguale a quello sulla superficie piana B, ciò che indica che i campi hanno uguale intensità ($|g_A| = |g_B|$). (b) Il campo della Terra, o di qualsiasi altro corpo sferico isolato. Il campo è orientato radialmente verso l'interno e la densità di campo, ossia il numero di linee per area unitaria, sulla superficie sferica C è minore di quella sulla superficie D ($|g_C| < |g_D|$).

Il concetto di campo è molto utile per studiare le forze elettromagnetiche che interagiscono fra cariche elettriche in movimento. Rispetto al concetto dell'azione a distanza presenta parecchi vantaggi, sia concettuali sia pratici, soprattutto nello studio del comportamento delle onde elettromagnetiche: la luce, le radiotrasmissioni, ecc. L'azione a distanza implica che delle forze possano instaurarsi istantaneamente a qualunque distanza, mentre nel campo le forze si trasmettono a velocità finita, al massimo uguale alla velocità della luce nel vuoto. E le onde gravitazionali, previste dalla teoria ma finora mai rilevate sperimentalmente, non sarebbero facilmente concepibili in una teoria di azione a distanza. Il concetto di campo, che al tempo di Newton non era ancora stato ideato, fu sviluppato molto più tardi da Faraday per l'elettromagnetismo, prima di essere applicato alla gravitazione soprattutto nel quadro della teoria generale della relatività. Tutte le attuali teorie riguardanti la natura intima della materia e le interazioni fra particelle fondamentali non possono prescindere dal concetto di campo.

14.9 MODERNI SVILUPPI DELLA TEORIA DELLA GRAVITAZIONE (facoltativo)

La teoria della gravitazione di Newton aprì la strada per la comprensione di molteplici osservazioni terrestri e astronomiche. Nel secolo ventesimo, tuttavia, alcune scoperte han-

no rivelato punti deboli di quella teoria. Per esempio, in zone dove le forze gravitazionali sono molto intense, come vicino a stelle di neutroni (molto compatte) o a buchi neri, la legge di Newton fornisce risultati errati e richiede una diversa impostazione, la *teoria della relatività generale*, sviluppata da Albert Einstein nel 1916. Perfino nel nostro sistema solare il pianeta Mercurio ruota tanto vicino al Sole da risentire degli effetti di una enorme forza gravitazionale capace di provocare piccolissime ma facilmente misurabili deviazioni della sua orbita rispetto a quanto previsto dalla legge di Newton. Ove la forza di gravità è meno intensa, però, i risultati dei calcoli di Einstein vengono a coincidere con quelli di Newton. È quindi possibile applicare la teoria di Newton allo studio delle orbite dei pianeti meno vicini al Sole e calcolare con incredibile precisione le traiettorie di sonde spaziali dirette ai pianeti più lontani. Vedremo ora diverse situazioni per le quali la teoria di Newton si rivela errata o incompleta.

La materia oscura

Nella Figura 14.21 sono riprodotte galassie la cui struttura a spirale è molto simile a quella della nostra Via Lattea. Esse contengono un numero di stelle dell'ordine di 10^{11}, e sono caratterizzate da una regione centrale molto luminosa dalla quale si diramano bracci a spirale che formano un disco piatto. L'intera struttura ruota intorno a un asse perpendicolare al disco. Il nostro Sole si trova su uno di questi bracci a circa 2/3 della sua estensione dal centro della galassia, e ruota a una velocità tangenziale di 220 km/s, che corrisponde a un periodo di rivoluzione di 240 milioni di anni.

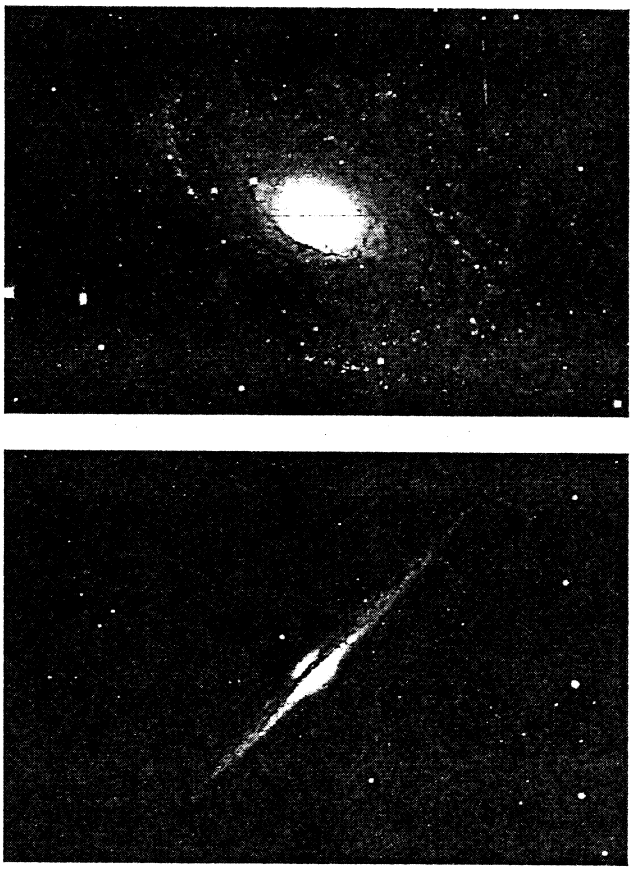


FIGURA 14.21 Tipiche galassie a spirale simili alla nostra Via Lattea in due prospettive differenti, una normale al piano della galassia e l'altra da un punto del piano.

La parte centrale brillante contiene la maggior parte della massa della galassia. Applicando la terza legge di Keplero alla rotazione di una stella come il Sole posta a una distanza r dal centro, dall'Equazione 14.22 troviamo l'espressione della velocità tangenziale v:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \tag{14.27}$$

ove M rappresenta tutta la massa della porzione di galassia contenuta nella sfera di raggio r. Entro i termini in cui possiamo ignorare l'azione di stelle presenti a distanze maggiori di r, c'è da aspettarsi che v diminuisca al crescere di r in ragione di $r^{-1/2}$. La Figura 14.22 riporta il grafico di questa espressione, e indica molti casi in cui i dati osservati se ne discostano sensibilmente per distanze r maggiori di quella del Sole. La velocità tende addirittura ad aumentare al crescere della distanza r. E anche per altre galassie sono state osservate analoghe discrepanze.

Una possibile spiegazione è che la legge di Newton non sia valida per queste enormi distanze, perché la legge dovrebbe comprendere termini addizionali la cui influenza sarebbe trascurabile per le distanze usuali, del laboratorio o del sistema solare, che consentono misurazioni di estrema precisione, ma diventerebbe importante per distanze molto maggiori. Nel corso degli anni sono state studiate altre divergenze di minore importanza, ma non vi è alcuna prova che ci si debba scostare eccessivamente dalla regola dell'inverso del quadrato. Un'altra ipotesi è basata sulla presunta esistenza di

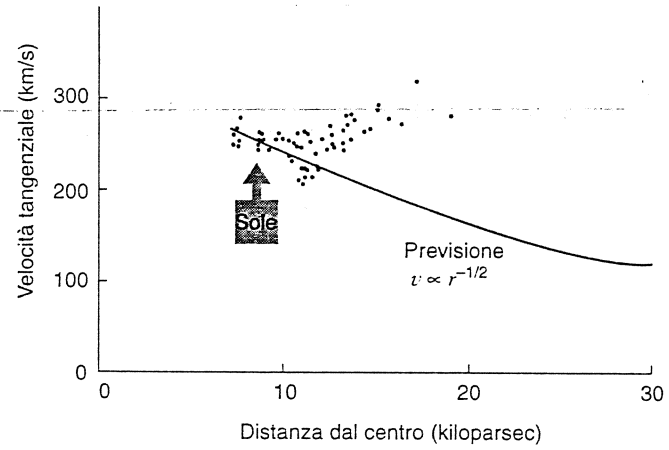


FIGURA 14.22 Velocità tangenziali di stelle nella nostra galassia. La linea continua rappresenta la dipendenza di v da r data dall'Equazione 14.27 e calcolata in base alla legge dei periodi di Keplero, nell'ipotesi che le stelle siano soggette soltanto alla forza gravitazionale della grande massa centrale della galassia. La discrepanza fra i punti misurati e la curva suggerisce l'ipotesi che nella regione esterna della galassia vi sia della materia invisibile che attira le stelle.

 ISBN 88-408-1254-7

materia supplementare nelle galassie che non è visibile per noi ma è in grado di sviluppare la forza gravitazionale che provoca le distorsioni registrate nella Figura 14.22. Diverse forme sono state proposte per questa cosiddetta *materia oscura*: residui di stelle spente, oggetti delle dimensioni di Giove o particelle elementari libere; non è comunque finora stata dimostrata l'esistenza di questa materia sconosciuta in quantità tali da giustificare le distorsioni osservate. È comunque significativo che la nostra fiducia nella validità della teoria di Newton sia tale da farci preferire l'idea di un nuovo tipo sconosciuto di materia all'idea del suo fallimento.

Un'ulteriore prova dell'esistenza della materia oscura verrebbe dalla natura del raggruppamento delle galassie in ammassi e superammassi. Alcuni astronomi ritengono che la materia oscura, la cui esistenza è rivelata soltanto dai suoi effetti gravitazionali, costituisca il 90 % di tutta la materia presente nell'Universo. A questo proposito l'astronomo di S.M. Britannica, Sir Martin Rees, ha scritto: "Le entità osservate dagli astronomi con i mezzi convenzionali e da essi chiamate galassie altro non sono che tracce di residui imprigionati all'interno di smisurati ammassi di oggetti invisibili di struttura assolutamente ignota. La forza gravitazionale di questi oggetti tiene insieme le galassie e ne modella le strutture."

Massa inerziale e massa gravitazionale

Nel Capitolo 3 abbiamo studiato un metodo per attribuire alla massa di un oggetto un certo valore confrontando la sua risposta a una forza data (ossia l'accelerazione che gli viene impressa da quella forza) con la risposta di una massa campione. Il confronto si basa sulla seconda legge di Newton, e la massa che compare nell'espressione $F = ma$ è detta *massa inerziale*. Ma per misurare la massa di un oggetto possiamo ricorrere anche alla legge di Newton sulla gravitazione. Proviamo a misurare la forza che agisce su un kilogrammo campione nel campo gravitazionale della Terra (ossia il suo peso), e misuriamo allo stesso modo la forza che agisce sulla massa ignota. Secondo l'Equazione 14.1 il rapporto di queste due forze dev'essere uguale al rapporto fra le due masse. Otteniamo così un secondo metodo di misura della massa, col quale misuriamo la massa *gravitazionale*.

A questo punto sembra ragionevole chiedersi se queste due masse coincidono. La massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale? Nella struttura logica della dinamica di Newton non pare necessario che esse siano uguali. Nel quadro della teoria di Newton questa uguaglianza dev'essere considerata una stupefacente coincidenza, ma come vedremo essa risulta ovvia nella teoria della relatività generale di Einstein. Newton fu il primo a provare sperimentalmente l'identità delle masse inerziale e gravitazionale usando un pendolo fatto a forma di scatola. Riempiva il pendolo con diverse quantità di materiali e misurava il periodo del pendolo, che come vedremo dipende dal rapporto fra massa inerziale e gravitazionale del materiale nella scatola. Egli giunse così alla conclusione che le due masse sono uguali a meno di $1/10^3$.

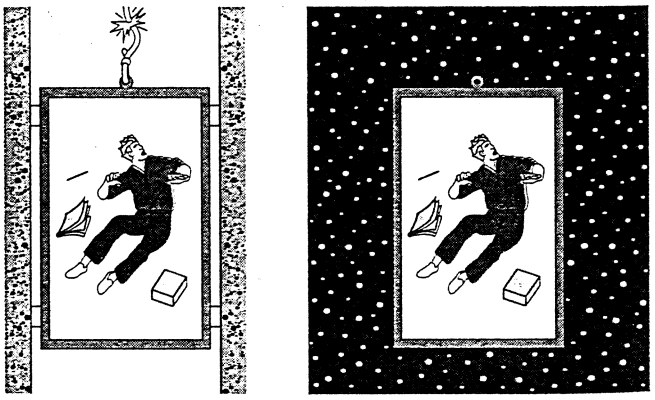
Nel 1909 Eötvös apportò notevoli miglioramenti all'esperimento. Usando una bilancia di torsione con differenti materiali alle due estremità, confrontò per ogni materiale la massa gravitazionale (il peso) con la massa inerziale, determinata dalla forza centrifuga inerziale dovuta alla rotazione della Terra. Qualsiasi differenza fra massa inerziale e gravitazionale dei due materiali sarebbe stata rivelata da una rotazione della bilancia di torsione. Eötvös concluse che la massa inerziale e la massa gravitazionale sono uguali a meno di $1/10^9$. Successivi esperimenti di Dicke nel 1964 e di Braginsky nel 1972 estesero al limite di $1/10^{11}$ o $1/10^{12}$ la precisione di questi esperimenti che usavano la stessa bilancia di torsione, ma riferendosi all'attrazione gravitazionale del Sole e alla forza d'inerzia centrifuga dell'orbita della Terra intorno al Sole. Questi esperimenti di estrema precisione portano a concludere che non vi sia alcuna differenza fra la massa inerziale e la massa gravitazionale, e ci inducono a riesaminare le nostre leggi della dinamica per rendere conto di questa uguaglianza in apparenza puramente accidentale.*

Il principio di equivalenza

Ecco come venne l'idea ad Einstein: "Stavo seduto su una sedia nell'ufficio brevetti a Berna quando improvvisamente mi capitò di pensare: se una persona è in caduta libera non sente il proprio peso. Rimasi di stucco. Questo semplice pensiero mi fece una profonda impressione. E mi spinse a cercare una teoria della gravitazione."

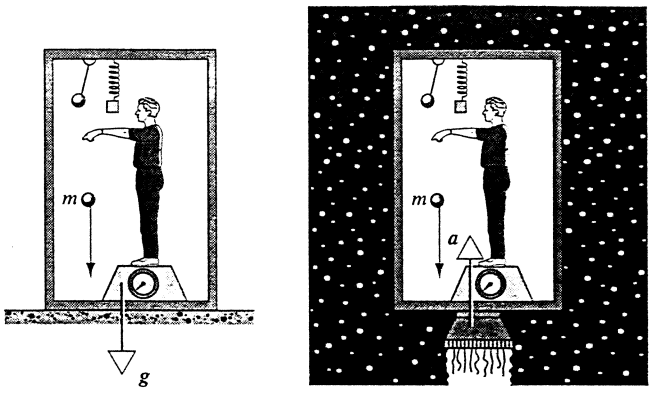
Nella Figura 14.23a vediamo una persona in una cabina isolata in caduta libera nel campo gravitazionale terrestre, e nella Figura 14.23b la stessa persona nella stessa cabina che galleggia liberamente nello spazio interstellare dove il cam-

*Vedi J. Boslough, *Searching for the Secrets of Gravity*, «National Geographic», maggio 1989, p. 563.



(a) (b)

FIGURA 14.23 Gli effetti (a) della caduta libera nella gravità terrestre sono identici a quelli (b) di chi «galleggia» liberamente negli spazi intersiderali. Nessun esperimento condotto all'interno della cabina chiusa potrebbe rivelare la differenza.



(a) (b)

FIGURA 14.24 Gli effetti (a) di chi sta fermo in un campo gravitazionale $\boldsymbol{g}$ sono identici a quelli (b) di chi subisce un'accelerazione $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{g}$ nello spazio interstellare. Nessun esperimento condotto all'interno della cabina chiusa potrebbe rivelare la differenza. Ciò illustra il principio di equivalenza di Einstein.

po gravitazionale è di entità trascurabile. Nessuno strumento che funzioni esclusivamente all'interno della cabina sarebbe in grado di distinguere fra le due situazioni.

Einstein andò ancora avanti un passo, come si vede nella Figura 14.24. Supponiamo che la persona stia nella cabina ferma sulla superficie terrestre (Figura 14.24a). Si vede una palla che cade con un'accelerazione di 9,8 m/s^2, un pendolo semplice di una certa lunghezza che oscilla con un certo periodo e una massa appesa a una molla che la allunga di un certo tratto. Il pavimento esercita una certa forza sui corpi che vi sono appoggiati.

Supponiamo ora che la cabina sia installata su un'astronave a razzo negli spazi interstellari, e che i motori imprimano un'accelerazione di 9,8 m/s^2 esatti (Figura 14.24b). Il nostro viaggiatore lascia cadere una palla e la osserva mentre cade sul fondo della cabina esattamente con quella accelerazione. Il pendolo oscilla regolarmente, la palla tira la molla per la stessa lunghezza, e il fondo della cabina esercita la stessa forza normale. In breve, nessun esperimento che si svolga interamente all'interno della cabina può distinguere fra la situazione (a) di riposo in un sistema di riferimento inerziale immerso in un campo gravitazionale $\boldsymbol{g}$ e la situazione (b) di accelerazione $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{g}$ relativa a un sistema di riferimento inerziale situato in una regione dello spazio soggetta a una gravitazione trascurabile. È questo il *principio di equivalenza.*

L'eguaglianza fra i due tipi di massa discussi sopra discende direttamente dal principio di equivalenza. Supponiamo che un oggetto sia a riposo sulla pedana di una bilancia a molla appoggiata sul fondo della cabina. Quando la cabina è accelerata dal razzo, il suo fondo viene a esercitare una forza verso l'alto $m_i a$ per accelerare l'oggetto; m_i è la massa inerziale, e la bilancia legge la forza di reazione esercitata dall'oggetto, anch'essa uguale a $m_i a$. D'altra parte quando la cabina è ferma in un campo gravitazionale la bilancia legge il peso dell'oggetto, pari a $m_g g$, che dipende dalla massa gravitazionale m_g. Nel nostro esperimento si fa in modo che l'accelerazione a sia uguale a g, e se le letture della bilancia sono uguali, come avviene per il principio di equivalenza, ecco che anche la massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale.

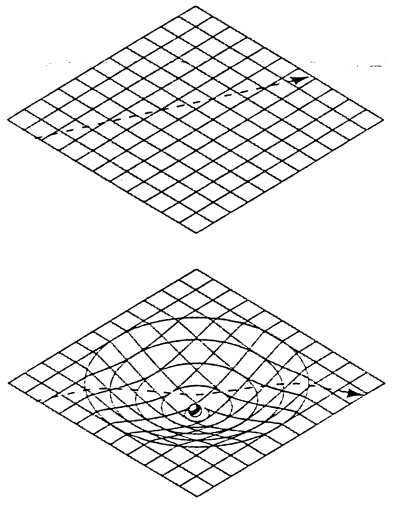
La teoria della relatività generale

La relatività generale è essenzialmente una teoria geometrica. Fornisce un metodo per costruire un sistema di coordinate la cui forma dipende dalla presenza di massa ed energia. Nella teoria di Einstein la massa deforma o incurva lo spazio: il nostro familiare sistema di coordinate ortogonali non è più strettamente valido in presenza di materia. L'effetto di una massa che gravita su un'altra non è altro che lo spostamento di quest'ultima nella geometria deformata creata dalla prima.

Questo modo di vedere è analogo a quello del concetto di campo studiato in questo capitolo. Nella teoria dei campi, una massa stabilisce un campo gravitazionale e la seconda massa interagisce con il campo, anziché direttamente con la prima massa, come vorrebbe la teoria *dell'azione a distanza.*

Nella Figura 14.25 vediamo un modello bidimensionale della deformazione o curvatura dello spazio. Immaginate un foglio di gomma sul quale è tracciato un sistema di coordinate cartesiano. Qualsiasi movimento si svolge su questo sistema di coordinate. Ora immaginiamo di distorcere il foglio di gomma. La distanza più breve fra due punti non è più una linea retta: in realtà in questa geometria dobbiamo ridefinire che cosa intendiamo esattamente per «linea retta».

La relazione fra massa e geometria nella relatività generale è stata così riassunta: "La geometria dice alla massa come deve muoversi, e la massa dice alla geometria come deve deformarsi". Le formule della relatività generale danno la curvatura per qualsiasi distribuzione di materia ed ener-



(a)

(b)

FIGURA 14.25 Un'analogia della curvatura dello spazio, che risulta dalla presenza di massa gravitazionale secondo la teoria della relatività generale. La massa distorce la griglia delle coordinate e modifica la geometria stessa.

 ISBN 88-408-1254-7

gia, e indicano la conseguente deviazione dei raggi di luce o di particelle.

Sono state condotte molte prove sperimentali per studiare le divergenze fra la teoria gravitazionale di Newton e quella di Einstein. Le differenze diventano evidenti soltanto in campi gravitazionali molto forti, e perciò le misure debbono essere eseguite in vicinanza del Sole o di un altro corpo di enorme massa. Citiamo alcune fra le esperienze più significative:

1. *Precessione del perielio di Mercurio.* L'orbita di Mercurio non è esattamente un'ellisse chiusa: l'asse dell'ellisse ruota leggermente, ossia subisce precessione, a ogni rivoluzione. La maggior parte di questo effetto può essere attribuito alla gravitazione newtoniana (l'influenza di altri pianeti, per esempio), ma per una piccola frazione (ciò che è noto sin dal 1859) non è in accordo con quella teoria. Questa divergenza, che consiste in una rotazione dell'asse dell'ellisse di 43 secondi di arco al secolo, è perfettamente in accordo con la teoria di Einstein.

2. *Deviazione della luce.* Un fascio di luce che passa vicino a un oggetto di massa molto grande non segue un percorso rettilineo a causa della curvatura dello spazio, come è illustrato nella Figura 14.25b. Questo effetto, osservato per la prima volta in occasione di un'eclissi solare nel 1919, consiste in uno spostamento, di circa 1,75 secondi di arco, nella posizione apparente di stelle la cui luce passa in vicinanza del Sole. Altri effetti osservati sono riconducibili a *lenti gravitazionali*, quando la luce diretta sulla Terra proveniente da una remota galassia passa presumibilmente vicino a un oggetto di massa enorme, come un buco nero o un'altra galassia, e la curvatura del raggio di luce intorno a quell'oggetto ci rende due immagini di quella stessa galassia.

3. *Ritardi di echi radar.* Dato che un oggetto di massa molto grande *stira* la «trama» che costituisce il «tessuto» dello spazio *e* del tempo, un segnale radar che viaggia dalla Terra verso un altro pianeta subirà un leggero ritardo passando in vicinanza del Sole. Il ritardo previsto per un segnale fra la Terra e Venere è soltanto di 10^{-4} s, ma è stato verificato con la precisione dello 0,1% circa.

Molti sforzi sono stati dedicati a queste prove sperimentali della relatività generale*, e altre prove significative sono in corso, compresa la ricerca delle *onde gravitazionali* e la misurazione della deviazione dell'asse di un giroscopio in orbita terrestre. Fino ad ora le previsioni della teoria della relatività generale sono state sempre confermate. Molti di questi effetti sono piccolissimi, ma esiste un'applicazione della relatività generale che è di grandissima importanza: il GPS, o Sistema Globale di Posizionamento che, tramite una rete di satelliti, è in grado di determinare le posizioni sulla Terra entro un raggio di pochi metri, una precisione che può raggiungere soltanto grazie alla relatività generale.

*Per un resoconto elementare e di piacevole lettura di queste misurazioni vedi "*Was Einstein right?*" di Clifford M. Will, Basic Books, 1986.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

14.1 Le origini della legge di gravitazione

14.2 La legge di Newton della gravitazione universale

1. L'intensità della forza gravitazionale fra due oggetti identici è data da F_0. Se si raddoppia la massa dei due oggetti ma si dimezza la distanza, la nuova forza gravitazionale fra i due oggetti sarà
(A) $16F_0$. (B) $4F_0$.
(C) F_0. (D) $F_0/2$.

2. L'intensità della forza gravitazionale fra due oggetti identici è data da F_0. Se si raddoppia la massa dei due oggetti e si raddoppia anche la distanza, la nuova forza gravitazionale fra i due oggetti sarà
(A) $4F_0$. (B) $2F_0$.
(C) F_0. (D) $F_0/2$.

3. Gli oggetti A e B sono a distanza r. L'intensità della forza gravitazionale esercitata su A da B è data da F_{AB}, mentre l'intensità della forza di gravità esercitata su B da A è data da F_{BA}.
(a) Se la massa di A raddoppia mentre quella di B rimane invariata, allora
(A) F_{AB} raddoppia mentre F_{BA} rimane invariata.
(B) F_{AB} rimane invariata mentre F_{BA} raddoppia.
(C) Sia F_{AB} sia F_{BA} raddoppiano.
(D) Sia F_{AB} sia F_{BA} restano invariate.
(b) Se invece la massa di A raddoppia mentre quella di B si dimezza, allora
(A) F_{AB} raddoppia mentre F_{BA} rimane invariata.
(B) F_{AB} rimane invariata mentre F_{BA} raddoppia.
(C) Sia F_{AB} sia F_{BA} raddoppiano.
(D) Sia F_{AB} sia F_{BA} restano invariate.

14.3 La costante gravitazionale G

4. Le dimensioni di G sono equivalenti a
(A) energia/(quantità di moto)^2.
(B) velocità^4/forza .
(C) lunghezza^3/forza^2.
(D) velocità^3/(momento angolare).

14.4 La gravitazione vicino alla superficie terrestre

5. Supposto che la Terra sia una sfera uniforme di raggio R_T, la variazione locale dell'accelerazione gravitazionale g_0 in funzione dell'altitudine sopra la superficie terrestre è all'incirca
(A) $g_0 = g_{rif}$, nessuna variazione.
(B) $g_0 = g_{rif}(1 - h/R_T)$.
(C) $g_0 = g_{rif}(1 - 2h/R_T)$.
(D) $g_0 = g_{rif}(1 - 3h/R_T)$.

14.5 I due teoremi dei gusci

6. Un corpo a simmetria sferica non rotante ha una massa volumica che varia in modo apprezzabile con la distanza radiale dal centro. Al centro del corpo l'accelerazione gravitazionale è

(A) decisamente maggiore di zero.
(B) probabilmente maggiore di zero.
(C) certamente uguale a zero.

7. L'accelerazione dovuta alla gravità in un foro scavato in un corpo disuniforme a simmetria sferica
   (A) aumenterà con la profondità, arrivando al massimo al centro.
   (B) aumenterà con la profondità, ma a un certo punto raggiungerà un massimo per poi diminuire fino al centro.
   (C) può aumentare o diminuire con la profondità.
   (D) deve diminuire con la profondità.

14.6 Energia potenziale gravitazionale

8. Immaginiamo un pianeta a simmetria sferica la cui massa volumica varia in funzione della distanza dal centro. L'intensità dell'energia potenziale gravitazionale del sistema formato dal pianeta e da una massa di prova sarà
   (A) zero al centro, e il valore massimo si avrà alla superficie del pianeta.
   (B) diversa da zero al centro, e il valore massimo si avrà alla superficie del pianeta.
   (C) diversa da zero al centro, e il valore massimo si avrà in un punto sotto la superficie ma lontano dal centro.
   (D) diversa da zero al centro, dove si avrà il valore massimo.

14.7 Moto dei pianeti e dei satelliti

9. Il progetto *Starshine* era un satellite poco costoso destinato a interessare i bambini all'osservazione delle orbite. Poiché il satellite era soggetto ad attrito per la resistenza dell'aria, il raggio della sua orbita quasi circolare andò lentamente diminuendo per un periodo di molti mesi.
   (a) Al diminuire del raggio dell'orbita, l'energia totale del satellite
   (A) aumentò. (B) rimase uguale.
   (C) diminuì.
   (b) Al diminuire del raggio dell'orbita, l'energia cinetica del satellite
   (A) aumentò. (B) rimase uguale.
   (C) diminuì.
   (c) Al diminuire del raggio dell'orbita, la velocità media del satellite
   (A) aumentò. (B) rimase uguale.
   (C) diminuì.

10. Nella Figura 14.26 vediamo diverse possibili orbite ellittiche di un satellite.
    (a) Qual è l'orbita che ha il massimo momento angolare?
    (b) Qual è l'orbita che ha la massima energia totale?
    (c) Su quale orbita si raggiunge la massima velocità?

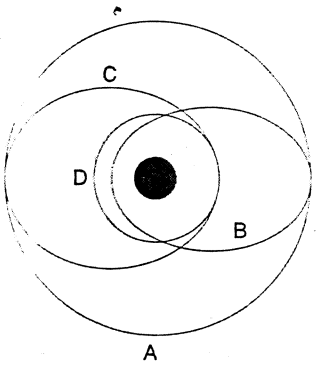


FIGURA 14.26 Domanda a risposta multipla 10.

14.8 Il campo gravitazionale

14.9 Moderni sviluppi della teoria della gravitazione

QUESITI

1. I moderni osservatòri astronomici e le procedure di navigazione fanno uso del sistema di riferimento geocentrico, o Tolemaico, adottando la «sfera celeste» rotante. È sbagliato? Se non lo è, con quale criterio si sceglie il sistema da adottare, Tolemaico o Copernicano? E quando conviene usare quello eliocentrico, o Copernicano?
2. Due pianeti del sistema solare, salvo che ad alte latitudini, non sono mai visibili a mezzanotte. Quali sono, e perché? Questo fatto si può considerare una prova a favore del sistema eliocentrico?
3. Se la forza di gravità agisce su tutti i corpi in proporzione alla loro massa, perché un corpo più pesante non cade più rapidamente di uno più leggero?
4. Come cambia il peso di una sonda spaziale in rotta dalla Terra verso la Luna? Cambia anche la sua massa?
5. È facile calcolare il rapporto fra la massa della Terra e la massa del Sole conoscendo soltanto i periodi di rivoluzione e i raggi delle orbite della Luna intorno alla Terra e della Terra intorno al Sole. È possibile calcolare G soltanto da osservazioni astronomiche? Spiegare.
6. La nostra analisi dell'esperimento di Cavendish (Figura 14.5) considerava l'attrazione di ogni sfera più grande soltanto sulla sfera piccola più vicina. Ma ciascuna attrae anche la sfera piccola all'altro estremo dell'asta sospesa. Qual è l'effetto di questa attrazione sulla misurazione di G?
7. L'attrazione gravitazionale reciproca in una coppia di oggetti è influenzata dalla natura del mezzo interposto? Dalla loro temperatura? Dal loro orientamento? Come è possibile verificare sperimentalmente questi effetti?
8. Poiché la Terra è rigonfia all'equatore, la sorgente del fiume Mississippi (situata circa a 50° di latitudine nord) è di circa 5 km più vicina al centro della Terra rispetto alla sua foce, situata a circa 30° di latitudine nord. Come può il fiume «risalire» mentre scorre verso sud?
9. Avremo più zucchero comprandone 10 N al polo o all'equatore? E comprandone 1 kg?
10. Come si può determinare la massa della Luna?
11. Un orologio è governato da un bilanciere a molla oscillante, un altro da un pendolo. Entrambi sono portati su Marte. Manterranno lo stesso ritmo che scandivano sulla Terra?

 ISBN 88-408-1254-7

Andranno d'accordo fra di loro? Spiegate. Marte ha massa uguale circa a un decimo di quella della Terra, e raggio circa uguale alla metà di quello terrestre.

12. Alla superficie della Terra un oggetto fermo su un piano orizzontale senza attrito riceve da una mazza un colpo diretto orizzontalmente. Viene quindi portato sulla Luna, appoggiato allo stesso modo e riceve un uguale colpo dalla stessa mazza. Per quanto ne sappiamo, quale sarà la velocità che acquisisce sulla Luna rispetto a quella sulla Terra?
13. La forza gravitazionale esercitata dal Sole sulla Luna è circa il doppio di quella esercitata dalla Terra. Perché allora la Luna non «evade» dalla Terra?
14. Spiegate l'errore di questo ragionamento: "Il Sole attrae tutti i corpi presenti sulla Terra. A mezzanotte, quando il Sole è al disotto dei nostri piedi, attira un oggetto nella stessa direzione dell'attrazione esercitata dalla Terra. Perciò tutti gli oggetti dovrebbero essere più pesanti a mezzanotte (o di notte) che a mezzogiorno (o di giorno)".
15. L'attrazione gravitazionale del Sole e della Luna sulla Terra provoca le maree. L'influenza del Sole sulle maree è circa la metà di quella della Luna. La forza di attrazione del Sole sulla Terra è circa 175 volte quella della Luna. Perché allora è la Luna a causare le più ampie maree?
16. A primavera si registrano maree particolarmente alte a luna piena o a luna nuova, quando Sole, Luna e Terra si trovano nelle posizioni relative indicate nella Figura 14.27. Da questi schemi si potrebbe trarre la conclusione (errata!) che gli effetti del Sole e della Luna tendano a sommarsi a luna piena e a sottrarsi a luna nuova. Viceversa si sommano in tutti e due i casi. Si pieghi perché.

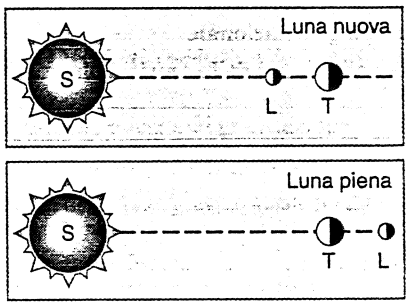


FIGURA 14.27 Quesito 16.

17. Se le maree lunari, a causa dell'attrito, tendono a rallentare la rotazione terrestre, il momento angolare della Terra va diminuendo. Che cosa succede al moto della Luna per effetto della conservazione del momento angolare? E il Sole e le maree solari hanno influenza su questo fenomeno? Vedi P. Goldreich *Le maree e il sistema Terra-Luna*, «Le Scienze», luglio 1972, p. 32.
18. Dalla seconda legge di Keplero e dalle osservazioni del moto del Sole eseguite sulla Terra come possiamo dedurre che la Terra durante l'inverno boreale è più vicina al Sole che in estate? E perché d'estate non fa più freddo che in inverno?
19. Quali sarebbero le differenze dei valori della forza di gravità e della velocità alla distanza r ottenuti nel Problema svolto 4.14 se la massa volumica della Terra non fosse uniforme, ma al crescere di r (a) diminuisse, o (b) aumentasse?
20. Perché possiamo imparare di più sulla forma della Terra studiando il moto di un satellite artificiale piuttosto che il moto della Luna?
21. Un satellite in orbita intorno alla Terra subisce una piccola forza di resistenza aerodinamica quando entra nell'atmosfera. Che cosa accade alla sua velocità? (Attenzione!)
22. Ci si può aspettare che l'energia totale del sistema solare sia costante? E il momento angolare totale? Spiegate le vostre risposte.
23. Un razzo deve sempre raggiungere la velocità di fuga di 11,2 km/s per evadere dalla Terra? Se non è così, che cosa significa veramente «velocità di fuga»?
24. Gli oggetti fermi sulla superficie terrestre si muovono su percorsi circolari con periodo di 24 ore. Sono «in orbita», nel senso in cui è in orbita un satellite terrestre? E perché no? Quale dovrebbe essere il loro periodo di rotazione affinché essi fossero veramente in orbita?
25. Trascurando la resistenza dell'aria e le difficoltà tecniche, è possibile mettere in orbita un satellite sparandolo da un enorme cannone sulla superficie della Terra? Si spieghi la ragione della risposta.
26. Quale vantaggio ha la Sicilia rispetto al Trentino per lanciare satelliti dall'Italia?
27. Può un satellite terrestre girare su un'orbita giacente in un piano che non passa per il centro della Terra?
28. Per un osservatore sulla Terra vi sarebbe qualche differenza fra i periodi di due satelliti che girano ciascuno sulla stessa orbita circolare in un piano equatoriale ma uno in direzione est e l'altro in direzione ovest?
29. I satelliti in orbita talvolta si disintegrano per l'alta temperatura durante la discesa sulla Terra, ma mai durante la salita in orbita. Come mai?
30. Un satellite artificiale ruota su un'orbita circolare intorno alla Terra. Come cambierà la sua orbita se uno dei suoi razzi è momentaneamente diretto (a) verso la Terra, (b) in senso contrario, (c) in avanti, (d) all'indietro e (e) normalmente al piano dell'orbita?
31. Quali difficoltà si presentano per camminare, saltare o bere in un'astronave?
32. Tutti abbiamo visto trasmissioni in TV girate su navette in orbita, con oggetti che svolazzano in giro come in assenza di gravità. Supponiamo che un astronauta, puntellandosi contro le pareti, tiri un calcio a una boccia da bowling galleggiante a mezz'aria. Si farà male all'alluce? Si spieghi la risposta.
33. Se un pianeta di una certa densità viene ingrandito dall'aggiunta di materiale proveniente dallo spazio, la forza di attrazione su un oggetto alla sua superficie aumenterà per l'aumento della sua massa o diminuirà per l'aumento della distanza dal centro del pianeta? Quale effetto sarà dominante?
34. Le orbite dei satelliti intorno alla Terra sono ellittiche (o circolari), mentre nel Capitolo 4 abbiamo affermato che i proiettili lanciati dalla Terra seguono traiettorie paraboliche. Qual è la verità?
35. I satelliti artificiali lanciati dalla Terra possono rilevare con grande precisione il livello medio del mare. Ma sopra rocce che contengono petrolio il livello del mare può essere fino a 1 m più alto che sopra rocce che non lo contengono (perché sono di solito più dense). Spiegarne la ragione.

36. (a) Spiegate la ragione per cui, affinché due osservatori in qualsiasi coppia di località situate lungo l'equatore terrestre possano tenersi in comunicazione radio tramite satelliti in orbita geosincrona, debbono avere a disposizione almeno tre satelliti di questo tipo. (b) Trovate la massima distanza angolare di ciascuna coppia di questi satelliti.
37. Una pietra è lasciata cadere al centro del pozzo verticale di una miniera. Trascurando la resistenza dell'aria, ma tenendo conto della rotazione della Terra, ritenete che la pietra continuerà a cadere lungo l'asse centrale del pozzo? In caso contrario, descrivete il suo moto.
38. Perché sulla Luna non esiste praticamente atmosfera?
39. La legge di gravitazione universale richiede che le orbite dei pianeti del sistema solare siano quelle sulle quali effettivamente si trovano? E i pianeti di un'altra stella simile al nostro Sole avrebbero le stesse orbite? Proponete dei fattori che possono aver determinato le particolari orbite che noi conosciamo.
40. Per sfuggire alla gravità terrestre è importante la direzione in cui viene lanciato un razzo? Supponete, ovviamente, che il razzo sia puntato sopra l'orizzonte e trascurate la resistenza dell'aria.
41. Per una missione su Marte un razzo è puntato nella direzione in cui la Terra si muove sulla sua orbita, mentre per una missione su Venere è puntato nella direzione opposta. Se ne spieghi la ragione.
42. Saturno è circa sei volte più lontano dal Sole che Marte. Quale dei due pianeti ha (a) il periodo di rivoluzione più lungo, (b) la maggiore velocità media orbitale e (c) la maggiore velocità angolare media orbitale?
43. Che cosa rappresenta il grafico della Figura 14.28? Indicate sui due assi le unità e le scale dei valori.
44. Come può il comandante di un'astronave diretta verso un pianeta sconosciuto sapere il valore di g alla superficie del pianeta?
45. Un cubo di ferro è piazzato vicino a una sfera di ferro in una zona fuori dell'influenza della gravità terrestre. Che cosa si può dire circa la posizione del baricentro del cubo? E della sfera? In generale, la posizione del baricentro di un oggetto dipende dalla natura del campo gravitazionale in cui è immerso?

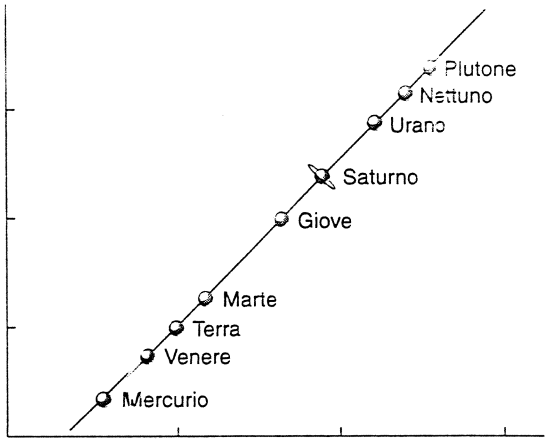


FIGURA 14.28 Quesito 43.

46. Come si può determinare se due oggetti hanno la stessa (a) massa gravitazionale, (b) massa inerziale, e se hanno (c) lo stesso peso?
47. Per un satellite artificiale su un'orbita circolare intorno alla Terra mostrate come variano in funzione del raggio r dell'orbita i seguenti suoi parametri: (a) il periodo; (b) l'energia cinetica; (c) il momento angolare e (d) la velocità.
48. Siete a bordo della nave spaziale *Arthur C. Clarke*, il primo veicolo spaziale interstellare. Essa ruota intorno a un asse centrale per simulare la gravità terrestre. Se vi trovate in una cabina chiusa come potete capire che non siete sulla Terra?
49. Si può considerare la gravità come una forza «fittizia» dovuta all'accelerazione del sistema di riferimento rispetto a un sistema inerziale, piuttosto che come una forza «reale»?
50. La teoria dell'*azione a distanza* implica che la forza gravitazionale agisca istantaneamente. Le odierne teorie della fisica, però, suppongono che la forza gravitazionale si propaghi a una velocità finita e di ciò si tiene conto nelle variazioni apportate alla fisica classica dalla teoria della relatività generale. Che cosa accadrebbe delle deduzioni della fisica classica se si ammettesse che l'azione della gravità non è istantanea?

ESERCIZI

14.1 Le origini della legge di gravitazione

14.2 La legge di Newton della gravitazione universale

1. Il Sole e la Terra esercitano entrambi una forza gravitazionale sulla Luna. Calcolare il rapporto F_S/F_T di queste due forze. (La distanza media del Sole dalla Luna è uguale a quella dalla Terra.)
2. A che distanza dalla Terra deve arrivare una sonda sulla rotta verso il Sole perché l'attrazione gravitazionale del Sole sia uguale a quella della Terra?
3. Uno dei satelliti *Echo* era costituito da un pallone d'alluminio gonfiato, di 30 m di diametro e di 20 kg di massa. Un meteorite di massa 7,0 kg passa a 3,0 m di distanza dalla sua superficie. Se ignoriamo gli effetti di tutti gli altri corpi quale forza gravitazionale subisce il meteorite alla distanza minima dal satellite?

14.3 La costante gravitazionale G

4. Nella bilancia di torsione di Cavendish (Figura 14.5) poniamo $M = 12{,}7$ kg ed $m = 9{,}85$ g. la lunghezza dell'asticciola che regge le due sfere piccole sia 52,4 cm. Per una distanza fra i centri delle sfere grandi e piccole di 10,8 cm trovare (a) la forza gravitazionale fra una sfera grande e la piccola adiacente e (b) il momento torcente totale che agisce sull'asticciola.

14.4 La gravitazione vicino alla superficie terrestre

5. Una persona di massa 54,4 kg a livello del marciapiedi sotto la *Sears Tower* di Chicago sale da questo livello alla ci-

 ISBN 88-408-1254-7

ma della torre alta 412 m. Di quanto diminuisce il suo peso per il leggero aumento della sua distanza dal centro della Terra?

6. A che altezza sulla superficie della Terra l'accelerazione di gravità si riduce a 7,35 m/s^2 (75 % del suo valore sulla superficie)?
7. Una tipica stella di neutroni può avere una massa uguale a quella del Sole ma un raggio di soli 10,0 km. (a) Quale sarebbe l'accelerazione gravitazionale alla sua superficie? (b) Che velocità raggiungerebbe un oggetto che da fermo cadesse su questa stella da un'altezza di 1,20 m?
8. (a) Calcolare g_0 sulla superficie della Luna con i valori di massa e raggio della Luna indicati nell'appendice C. (b) Quale sarà sulla superficie della Luna il peso di un oggetto che sulla Terra pesa 100 N? (c) A quanti raggi terrestri di distanza dalla superficie terrestre dovrà salire questo oggetto affinché il suo peso sia uguale a quello sulla Luna?
9. Per trovare il valore di g lasciando cadere un oggetto per una distanza di 10 m esatti, con quanta precisione dovrà essere misurato il tempo per ottenere un'approssimazione dello 0,1%? Calcolare l'errore percentuale e l'errore assoluto in millisecondi.

14.5 I due teoremi dei gusci

10. Due gusci concentrici di massa volumica uniforme aventi masse M_1 ed M_2 sono collocati come in Figura 14.29. Trovare la forza su una particella di massa m posta a distanza dal centro (a) $r = a$, (b) $r = b$, e (c) $r = c$. La distanza r è misurata dal centro dei gusci.

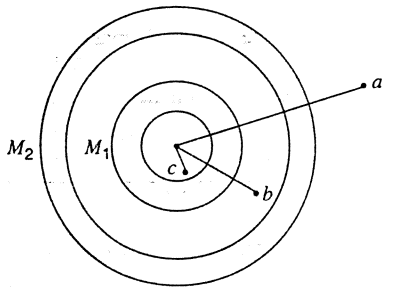


FIGURA 14.29 Esercizio 10.

11. Dimostrare che sul fondo del pozzo verticale di una miniera di profondità D il valore misurato di g risulta

$$g = g_s\left(1 - \frac{D}{R}\right),$$

ove g_s è il valore alla superficie. Si ammette che la Terra sia una sfera omogenea di raggio R.

14.6 Energia potenziale gravitazionale

12. Si ipotizza che una stella «estinta» possa collassare su se stessa fino ad arrivare al *raggio gravitazionale*, definito come il raggio per cui il lavoro richiesto per rimuovere un oggetto di massa m dalla superficie della stella all'infinito è uguale all'energia a riposo dell'oggetto, mc^2. Dimostrare che il raggio gravitazionale del Sole sarebbe GM_S/c^2 e determinare il suo valore in funzione del raggio attuale del Sole.
13. Un'astronave è parcheggiata ai confini della Via Lattea a 80 000 anni-luce di distanza dal suo centro. Che velocità minima deve acquisire per sfuggire all'attrazione gravitazionale della galassia, che ha una massa $1{,}4 \cdot 10^{11}$ volte quella del nostro Sole? Supponiamo, per semplicità, che nella galassia la materia sia distribuita secondo una simmetria sferica.
14. Dimostrare che la velocità di fuga dal Sole a una distanza pari a quella della Terra è $\sqrt{2}$ volte la velocità orbitale media della Terra. (Questo è un caso particolare di un'espressione valida per tutte le orbite circolari: $v_{fuga} = \sqrt{2}v_{orb}$.)
15. Un razzo è accelerato fino a una velocità $v = 2\sqrt{gR_T}$ ed è quindi lasciato libero mentre si dirige verso l'alto. (a) Dimostrare che sfuggirà alla gravità terrestre. (b) Dimostrare che a grande distanza dalla Terra la sua velocità sarà $v = \sqrt{2gR_T}$.
16. Il Sole, di massa $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, gira intorno al centro della Via Lattea che dista $2{,}2 \cdot 10^{20}$ m, compiendo una rivoluzione ogni $2{,}5 \cdot 10^8$ anni. Stimate il numero di stelle della Via Lattea. (*Suggerimento*: supponete per semplicità che le stelle siano distribuite secondo una simmetria sferica intorno al centro e che il nostro Sole si trovi ai confini della galassia.)
17. Un proiettile viene sparato verticalmente dalla superficie della Terra con una velocità iniziale di 9,42 km/s. Trascurando la resistenza dell'aria, a che altezza sopra la superficie terrestre riuscirà ad arrivare?
18. (a) Calcolare la velocità di fuga da Europa, un satellite di Giove, che ha un raggio di 1569 km e un'accelerazione di gravità alla superficie di 1,30 m/s^2. (b) A che altezza arriverà una particella che lascia la sua superficie con una velocità verticale di 1,01 km/s? (c) A che velocità colpirà il suolo del satellite un oggetto lasciato cadere dall'altezza di 1000 km? (d) Calcolare la massa di Europa.
19. Due stelle di neutroni uguali fra loro sono a una distanza fra i centri di 93,4 km. Ciascuna ha massa $1{,}56 \cdot 10^{30}$ kg e raggio 12,6 km. Sono inizialmente ferme una rispetto all'altra. (a) A che velocità andranno quando la distanza sarà scesa alla metà del suo valore iniziale? (b) A che velocità andranno subito prima di scontrarsi? Si ignorino gli effetti relativistici.
20. Due particelle di massa m ed M sono inizialmente a riposo, separate da una distanza infinita. Dimostrare che ad ogni istante la loro velocità relativa di avvicinamento attribuibile all'attrazione gravitazionale è $v = \sqrt{2G(M+m)/d}$ ove d è la loro distanza istantanea.
21. Due particelle puntiformi, ciascuna di massa m, sono inizialmente distanti d e viaggiano in versi opposti alla velocità v. Quale è il massimo valore di v per il quale le particelle potranno ancora tornare indietro fino a riunirsi sotto l'influenza della reciproca attrazione gravitazionale?

14.7 Moto dei pianeti e dei satelliti

22. La distanza media di Marte dal Sole è 1,52 volte quella della Terra. Da questo dato calcolate il periodo di rivoluzione di Marte, e confrontate la risposta con il valore dato dall'Appendice C.
23. Il pianeta Marte ha un satellite, Fobo, che viaggia su un'orbita di raggio 9400 km con un periodo di 7h 39min. Da questo dato ricavate la massa di Marte, tenendo presente che la massa di Fobo è trascurabile rispetto a quella di Marte.
24. Dati il periodo T e il raggio r dell'orbita della Luna intorno alla Terra, calcolate la massa di quest'ultima: $T = 27{,}3$ d ed $r = 3{,}82 \cdot 10^5$ km.

25. Un satellite è collocato su un'orbita circolare di raggio uguale alla metà di quello della Luna. Qual è il suo periodo di rivoluzione in mesi lunari? (Il mese lunare è il periodo di rivoluzione della Luna.)

26. Alcuni satelliti spia sono in orbita geosincrona intorno all'equatore terrestre. A quale massima latitudine L (Figura 14.30) questi satelliti sono visibili dalla superficie terrestre?

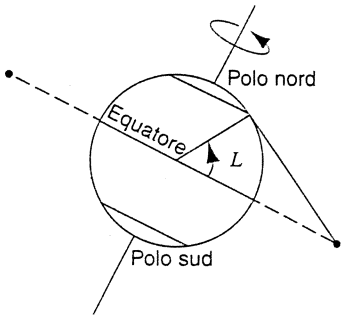


FIGURA 14.30 Esercizio 26.

27. Un veicolo spaziale da ricognizione gira intorno alla Luna a un'altitudine molto bassa. Dai dati sulla Luna riportati nell'Appendice C calcolare (a) la sua velocità e (b) il suo periodo di rivoluzione.

28. Usando il principio della conservazione dell'energia e l'Equazione 14.25 per l'energia totale, dimostrare che la velocità v di un corpo su un'orbita ellittica soddisfa la relazione

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

ove r è la distanza del corpo in orbita dal corpo centrale di massa M.

29. Una cometa che si muove su un'orbita avente un'eccentricità di 0,880 ha una velocità di 3,72 km/s quando è alla massima distanza dal Sole. Trovare la sua velocità nel punto più vicino al Sole.

30. (a) Esprimere il valore della costante universale di gravitazione G che figura nella legge della gravitazione di Newton usando per la lunghezza l'unità astronomica UA, per la massa la massa del Sole M_S e per il tempo l'anno. (1 UA = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m, 1 $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, 1 a = $3{,}156 \cdot 10^7$ s.) (b) Che forma prende in queste unità l'Equazione 14.23 della terza legge di Keplero?

31. Dimostrare come, guidato dalla terza legge di Keplero, Newton poté dedurre che la forza che trattiene la Luna sulla sua orbita, supposta circolare, deve essere inversamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal centro della Terra.

32. Come si vede nella Figura 14.31, due corpi di massa m ed M che interagiscono secondo la loro forza di reciproca attrazione gravitazionale descrivono un'orbita con la stessa velocità angolare ω rispetto al loro centro di massa C. (a) Dimostrare come in questo caso la legge dei periodi di Keplero dell'Equazione 14.23 diventi

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \left(1 + \frac{R}{r}\right)^2.$$

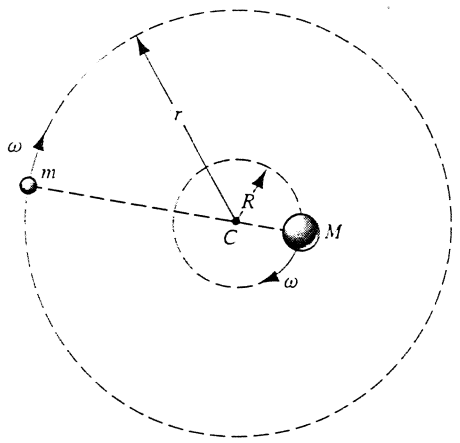


FIGURA 14.31 Esercizi 32 e 33.

(b) Calcolare il fattore di correzione $(1 + R/r)^2$ per il moto della Terra e del Sole e anche per il moto della Luna e della Terra, ignorando in entrambi i casi l'influenza degli altri corpi del sistema solare.

33. Una coppia di stelle ruota intorno al comune centro di massa, come in Figura 14.31. La massa M della stella più grande è doppia della massa m dell'altra: $M = 2m$. I loro centri sono a una distanza d molto grande rispetto alle dimensioni dei due astri. (a) Ricavate un'espressione del loro periodo di rivoluzione intorno al centro di massa in funzione di d, m e G. (b) Confrontate i momenti angolari delle due stelle intorno al comune centro di massa calcolando il rapporto L_m/L_M. (c) Confrontate le energie cinetiche delle due stelle calcolando il rapporto K_m/K_M.

34. (a) Richiede più energia portare un satellite a quota 1600 km sopra la superficie terrestre o metterlo in orbita una volta che è arrivato lassù? (b) E a 3200 km? (c) E magari a 4800 km? Ponete il raggio della Terra uguale a 6400 km.

35. L'asteroide Eros, uno dei molti pianetini che orbitano intorno al Sole nella fascia fra Marte e Giove, ha un raggio di 7,0 km e una massa di $5{,}0 \cdot 10^{15}$ kg. (a) Se vi trovaste su Eros, potreste sollevare un carrogru di massa 2000 kg? (b) Potreste correre tanto veloci da mettervi in orbita? Trascurate gli effetti della rotazione dell'asteroide. (Nota: i primati olimpionici dei 400 m piani corrispondono a velocità di 9,1 m/s per gli uomini e di 8,2 m/s per le donne.)

36. L'orbita della Terra intorno al Sole è praticamente circolare. Le distanze minima e massima sono $1{,}47 \cdot 10^8$ km e $1{,}52 \cdot 10^8$ km. Determinate le massime variazioni di (a) energia potenziale, (b) energia cinetica, (c) energia totale e (d) velocità orbitale dovute alla variazione della distanza Sole-Terra nel corso di un anno. (*Suggerimento*: ricorrete alla conservazione dell'energia e del momento angolare.)

37. Supponiamo che un satellite di comunicazioni su un'orbita geosincrona si trovi alla longitudine di Catania. Vi trovate a Catania e volete ricevere i suoi segnali. In che direzione dovrete puntare l'asse della vostra antenna parabolica? La latitudine di Catania è 37.5° N.

38. A partire dai dati del Problema svolto 14.10 calcolare (a) la velocità del veicolo spaziale B al passaggio per il punto P', e (b) la velocità orbitale media del veicolo spaziale B dopo la correzione di velocità.

 ISBN 88-408-1254-7

39. Il *Progetto Starshine* era un satellite poco costoso (di massa 39 kg) destinato a incoraggiare la partecipazione dei bambini di tutto il mondo alla misurazione delle orbite dei satelliti. La Figura 14.32 riporta i dati di alcune orbite. Al volgere dell'anno 1999-2000 (a) qual era il periodo orbitale del satellite? E (b) quanta energia perdeva nell'unità di tempo?

14.8 Il campo gravitazionale

14.9 Moderni sviluppi della teoria della gravitazione

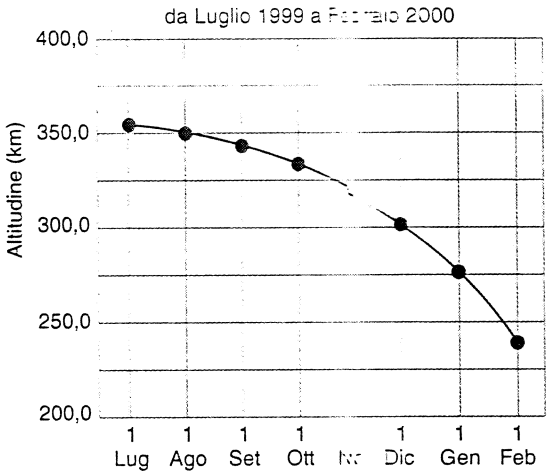


FIGURA 14.32 Esercizio 39.

PROBLEMI

1. Due oggetti puntiformi, ciascuno di massa m, collegati da una fune priva di massa di lunghezza l, sono appesi verticalmente, uno sotto l'altro, vicino alla superficie della Terra. A un certo punto vengono lasciati liberi. Dimostrare che la tensione nella fune è

$$T = \frac{GMml}{R^3},$$

ove M è la massa della terra ed R il suo raggio.

2. Dimostrare che su un ipotetico pianeta avente diametro uguale alla metà di quello della Terra ma massa volumica doppia, l'accelerazione gravitazionale sarebbe la stessa della Terra.

3. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale la cui origine è fissata al centro di massa di un sistema Terra + oggetto in caduta. (a) Dimostrare che l'accelerazione di ciascuno dei corpi diretta al centro di massa è indipendente dalla sua massa. (b) Dimostrare che l'accelerazione reciproca, o relativa, dei due corpi dipende dalla somma delle loro masse. Commentare quindi il significato dell'affermazione secondo cui l'accelerazione di caduta del corpo sulla Terra è indipendente dalla sua massa.

4. Due oggetti, ciascuno di massa m, appesi a fili di diversa lunghezza pendono da una bilancia alla superficie della Terra, come in Figura 14.33. Se i due fili hanno massa trascurabile e lunghezze che differiscono di h, (a) dimostrare che l'errore di pesatura dipendente dal fatto che P' è più vicino al centro della Terra di P, è dato da $P' - P = 8\pi G\rho mh/3$, ove ρ è la massa volumica media della Terra (5,5 g/cm^3). (b) Trovare la differenza in lunghezza che darebbe un errore di una parte su un milione.

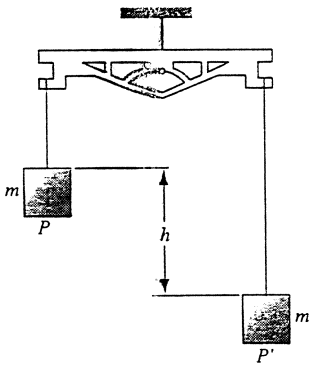


FIGURA 14.33 Problema 4.

5. (a) Scrivere un'espressione della forza esercitata dalla Luna (massa M), su una particella d'acqua di massa m che si trova in A sulla superficie della Terra dalla parte più vicina alla Luna, come appare nella Figura 14.34. R è il raggio della Terra ed r la distanza Terra-Luna da centro a centro. (b) Supponiamo che la particella d'acqua si trovi al centro della Terra. Che forza eserciterebbe su di essa la Luna? (c) Dimostrare che la differenza fra queste due forze è data da

$$F_M = \frac{2GMmR}{r^3},$$

che rappresenta la *forza di marea*, la forza esercitata sull'acqua rispetto alla Terra. Qual è la direzione della forza di marea? (d) Ripetere per un particella d'acqua che si trovi in B dalla parte opposta della Terra rispetto alla Luna. (e) Spiegare come vi siano due rigonfiamenze di marea negli oceani (e nella terraferma), una diretta verso la Luna e l'altra dalla parte opposta.

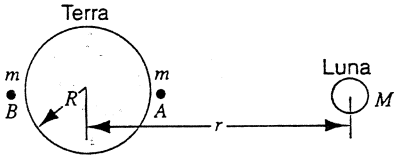


FIGURA 14.34 Problema 5.

6. Un oggetto è appeso a una bilancia a molla su un veliero che naviga lungo l'equatore a velocità v. Dimostrate che la lettura della bilancia sarà molto vicino a $P_0(1 \pm 2\omega v/g)$, ove ω è la velocità angolare della Terra e P_0 la lettura della bilancia quando la nave è in porto. Spiegate il motivo del segno $\pm$.

7. In *3001: l'Odissea finale* Arthur C. Clarke scrive di una torre che si spinge fuori dall'atmosfera terrestre fino all'or-

bita geosincrona. (a) L'eroe, Frank Poole, si trova nella torre e stima che l'accelerazione di gravità a quella quota sia $g/2$. Tenendo conto del moto rotatorio, a che quota si trova Poole? (b) Si calcoli il lavoro necessario per sollevare una massa di 100 kg dalla superficie della Terra fino alla quota geosincrona. Si confronti questo risultato con il consumo di energia di un razzo che può fare oggi la stessa cosa. (*Suggerimento*: si ammetta che la correzione per la rotazione sia modesta, e si risolva per successive approssimazioni.)

8. La massima velocità di rotazione possibile di un pianeta è quella per cui la forza gravitazionale sulla materia che si trova all'equatore è appena sufficiente a fornire la forza centripeta che consenta la rotazione. (Perché?) (a) Dimostrare che il minimo periodo di rotazione corrispondente è dato da

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}},$$

ove ρ è la massa volumica del pianeta, supposto omogeneo. (b) Calcolare il periodo di rotazione per una massa volumica di 3,0 g/cm^3, tipica di molti pianeti, satelliti e asteroidi. Non è stato osservato alcun oggetto di questo tipo che ruotasse con un periodo minore di quello risultante da questa analisi.

9. Per scoprire la presenza di depositi rocciosi poco sotto la superficie della Terra di massa volumica significativamente maggiore o minore di quella delle rocce circostanti si possono utilizzare misuratori molto sensibili dell'accelerazione locale di gravità. Si riesce anche a individuare caverne o pozzi di miniere abbandonate. (a) Dimostrare che la componente verticale di g a una distanza x da un punto direttamente sopra il centro di una cavità sferica (Figura 14.35) è minore di quanto sarebbe da aspettarsi, supponendo una distribuzione uniforme di rocce di massa volumica ρ, di una quantità

$$\Delta g = \frac{4\pi}{3} R^3 G\rho \frac{d}{(d^2 + x^2)^{3/2}}.$$

ove R è il raggio della cavità e d la profondità del suo centro. (b) Questi valori di Δg, chiamati anomalie gravimetriche, sono di solito molto piccoli ed espressi in milligal, essendo 1 gal = 1 cm/s^2. I ricercatori di petrolio che eseguono rilevamenti gravimetrici individuano Δg compresi fra 10,0 e 14,0 milligal a una distanza di 150 m. Supposto che la massima anomalia sia stata rilevata direttamente sopra il centro di una caverna sferica la cui presenza era nota, si trovi il suo raggio e la profondità del soffitto della caverna in quel punto, sapendo che le rocce circostanti hanno una massa volumica di 2.80 g/cm^3. (c) Supponiamo che la caverna non sia vuota, ma sia completamente inondata d'acqua. Come si modificheranno i calcoli gravimetrici per il raggio e la profondità del soffitto della caverna?

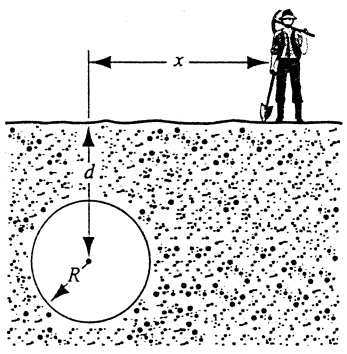


FIGURA 14.35 Problema 9.

10. Dimostrate che l'accelerazione di gravità in un pozzo verticale di una miniera è indipendente dalla profondità se la massa volumica locale ρ della Terra in quel punto è 2/3 della media. Supponiamo che la Terra sia un corpo non rotante a simmetria sferica.

11. Problema proposto all'esame di ammissione *Olimpic* dell'Università statale di Mosca nel 1946. In una sfera di piombo di raggio R è stata creata una cavità sferica di diametro uguale a R compresa fra il centro e la superficie esterna della sfera di piombo, come nella Figura 14.36. La massa della sfera prima della foratura era M. Con quale forza, secondo la legge della gravitazione universale, la sfera cava attirerà una sferetta di massa m collocata a distanza d dal suo centro sulla retta che passa per il centro della sfera cava e il centro della cavità.

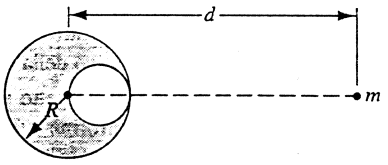


FIGURA 14.36 Problema 11.

12. (a) Quanto tempo impiegherà la particella del Problema svolto 14.4 per cadere dalla superficie della Terra al suo centro? (*Suggerimento*: si veda l'espressione di $v(r) = dr/dt$ data nella soluzione del problema svolto per trovare un'espressione integrabile che fornisca t in funzione di r. Vedi anche il Paragrafo 12.5.) (b) Dopo aver raggiunto il centro, quanto tempo impiega la particella per risalire alla superficie della Terra? Quant'è il tempo totale necessario alla particella per fare un completo viaggio di andata e ritorno fino al punto di partenza? (c) Confrontate il tempo totale del viaggio di andata e ritorno con il tempo impiegato per un giro completo di un satellite su un'orbita rasente alla superficie della Terra, e spiegate la somiglianza di questi due valori.

13. Nella Figura 14.37 vediamo una sezione fuori scala dell'interno della Terra. Anziché essere ovunque uniforme, la

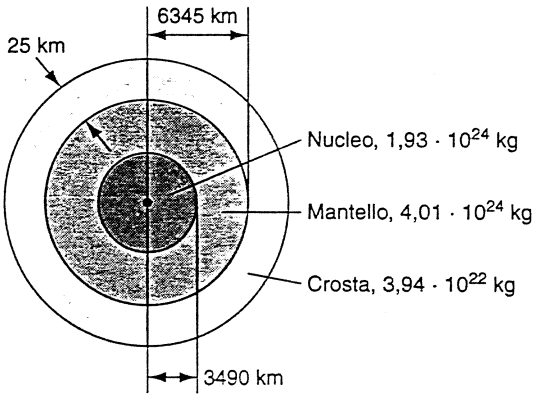


FIGURA 14.37 Problemi 13 e 14.

 ISBN 88-408-1254-7

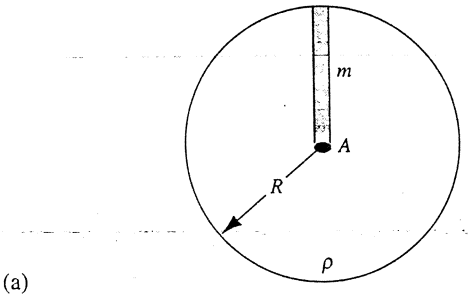
Terra si divide in tre fasce: una crosta esterna, un mantello e un nucleo centrale, delle quali sono indicate nella figura le dimensioni e le masse. La Terra ha una massa totale di $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg e un raggio di 6370 km. Ignoriamo la rotazione della Terra e si supponga che sia sferica. (a) Si calcoli g alla superficie. (b) Supponiamo di trivellare un foro fino all'interfaccia fra la crosta e il mantello, la cosiddetta *discontinuità Moho*: quale sarebbe il valore di g in fondo al foro? (c) Supponendo che la Terra sia una sfera uniforme avente la stessa massa totale e le stesse dimensioni, quale sarebbe il valore di g alla profondità di 25 km? Si utilizzi il risultato dell'Esercizio 11. Misurazioni di precisione di g forniscono indizi significativi sulla struttura interna della Terra, anche se i risultati possono essere distorti da locali variazioni della massa volumica e dalla mancanza di un valore esatto di G.

14. Usando il modello della Terra mostrato in Figura 14.37 esaminiamo le variazioni di g all'interno della Terra in funzione della profondità. (a) Trovare il valore di g all'interfaccia fra nucleo e mantello. Come varia g da questa zona al centro della Terra? (b) Dimostrare che la funzione g passa per un valore minimo in una zona all'interno del mantello, calcolando tale valore e la distanza dal centro del punto di minimo. (c) Tracciare un grafico indicativo della variazione di g.

15. (a) Nella Figura 14.38a si vede un oggetto proveniente da un pianeta di massa volumica uniforme ρ e raggio R. Dimostrare che in vicinanza del centro lo sforzo di compressione S, definito come la forza per unità di area della sezione normale al raggio, è dato da

$$S = \frac{2}{3}\pi G\rho^2 R^2 .$$

(Suggerimento: immaginiamo una stretta colonna avente sezione normale di area A che vada dal centro alla superficie del pianeta. Il peso della materia contenuta nella colonna sarà mg_m, ove m è la massa del materiale e g_m è l'accelerazione di gravità a metà distanza dal centro alla superficie.) (b) Nel nostro sistema solare gli oggetti di dimensioni minori di 600 km (asteroidi, comete, piccoli satelliti), possono avere forme molto irregolari, come Iperone, un piccolo satellite di Saturno che si vede nella Figura 14.38b, mentre quelli di maggiori dimensioni sono sferici. Sapendo che un corpo può conservare una forma non sferica soltanto se è costituito da rocce di durezza sufficiente a resistere allo sforzo dovuto alla gravità, calcolate il massimo sforzo di compressione sopportabile dal materiale che compone un asteroide avente massa volumica di 4000 kg/m^3. (c) Quali sono le massime dimensioni (lineari) di un satellite di calcestruzzo soggetto alla propria forza di gravità? Il calcestruzzo abbia massa volumica $\rho = 3000$ kg/m^3 e resistenza a compressione $S = 4{,}0 \cdot 10^7$ N/m^2.



(a)



(b)

FIGURA 14.38 Problema 15.

16. Una particella di massa m si trova a una distanza y da una sottile asticella di lunghezza infinita avente massa lineica λ. Dimostrare che la forza gravitazionale fra la particella e l'asticella è $F = 2Gm\lambda/y$, diretta perpendicolarmente all'asticella. [*Suggerimento*: stabilire l'origine sull'asticella al piede della normale diretta alla particella. Considerare quindi due incrementi della massa $dm = \lambda\, dx$ a distanza $\pm x$ lungo l'asticella. Calcolare la forza totale dF (in modulo e direzione) esercitata sulla particella da queste due masse elementari. Quindi integrare secondo x da zero all'infinito.]

17. Consideriamo una particella posta in un punto P qualsiasi all'interno di un guscio sferico di materia avente spessore e densità uniformi. Costruire un sottile doppio cono con il vertice in P che intercetti le aree dA_1 e dA_2, sul guscio, come in Figura 14.39. (a) Dimostrare che la forza gravitazionale esercitata sulla particella in P dalle masse intercettate è nulla. (b) Dimostrare allora che la risultante della forza gravitazionale esercitata da tutto il guscio su qualsiasi particella al suo interno è nulla. (Questo è il metodo ideato da Newton.)

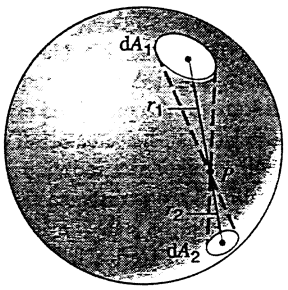


FIGURA 14.39 Problema 17.

18. Una sfera piena avente massa M e raggio a contiene una cavità concentrica di raggio b, come in Figura 14.40. (a) Tracciare un diagramma indicativo della forza gravitazionale F esercitata dalla sfera su una particella di massa m a distanza r dal suo centro per $0 \le r \le \infty$. Esaminare in particolare i punti $r = 0$, b, a e ∞. (b) Tracciare le curve corrispondenti per l'energia potenziale $U(r)$ del sistema. (c) Da questi grafici come si può ottenere il diagramma della forza gravitazionale esercitata dalla sfera.

19. Due sfere di masse 2.53 kg e 7,16 kg sono fissate a una distanza di 1,56 m fra i rispettivi centri. Una sfera di massa 212 g è collocata sulla linea congiungente le due sfere a

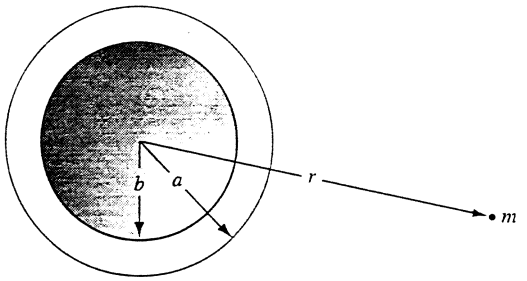


FIGURA 14.40 Problema 18.

42,0 cm di distanza dal centro della sfera più grande. Quanto lavoro deve sviluppare un agente esterno per spostare la sfera di 212 g lungo quella linea fino alla distanza di 42,0 cm dalla sfera più piccola?

20. Un razzo spegne i motori a un'altezza h sopra la superficie della Terra. La sua velocità v_0 in questo istante è maggiore della velocità di fuga v_f corrispondente all'altezza h. Dimostrare che la velocità v del razzo a grande distanza dalla Terra sarà

$$v = (v_0^2 - v_f^2)^{1/2}.$$

21. In un certo sistema binario due stelle di uguale massa pari a $3.22 \cdot 10^{30}$ kg ruotano intorno al comune centro di massa, distante $1{,}12 \cdot 10^{11}$ m da ciascuna. (a) Calcolare il periodo di rivoluzione del sistema in anni (vedi Esercizio 32). (b) Supponiamo che un meteoroide (un piccolo corpo solido vagante nello spazio) passi attraverso il centro di massa su una rotta diretta normalmente al piano dell'orbita delle due stelle. Quale deve essere la sua velocità minima per consentirgli di sfuggire al campo gravitazionale del sistema binario?

22. Molti pianeti (i giganti gassosi Giove, Saturno, Urano e Nettuno) sono circondati da anelli quasi circolari costituiti da materia che probabilmente non è riuscita a formare un satellite. Anche molte galassie possiedono strutture anulari. Consideriamo un anello solido omogeneo di massa M e raggio R. (a) Trovare un'espressione della forza gravitazionale esercitata dall'anello su una particella di massa m posta a distanza x sull'asse dell'anello, come in Figura 14.41. (b) Supponiamo che la particella cada dalla posizione di riposo per effetto dell'attrazione da parte dell'anello. Trovare l'espressione della velocità con cui attraversa il centro dell'anello.

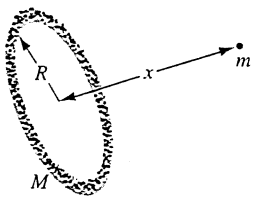


FIGURA 14.41 Problema 22.

23. Nove particelle di uguale massa m sono sistemate a intervalli regolari su un anello di raggio R. (a) Calcolare la forza gravitazionale netta esercitata su ciascuna particella dalle altre otto. (b) Trovare il periodo di rotazione che deve avere l'anello per evitare di collassare per l'attrazione reciproca delle nove particelle.

24. Due corpi puntiformi di uguale massa m sono inizialmente a riposo a una distanza d. Dimostrare che il tempo t_{inc} impiegato per incontrarsi per effetto della forza gravitazionale è dato da

$$t_{inc} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{d^3}{Gm}}.$$

25. Due satelliti A e B di uguale massa m ruotano sulla stessa orbita circolare ma in versi opposti, come in Figura 14.42, e sono quindi in rotta di collisione. (a) In funzione di G, M_T, m ed r scrivere l'espressione dell'energia meccanica totale del sistema $A + B$ + Terra. (b) Supposto che l'urto sia completamente anelastico, per cui ne esce soltanto un unico groviglio di rottami, trovare l'energia meccanica totale del sistema immediatamente dopo l'urto. (c) Descrivere il moto del blocco dopo l'urto.

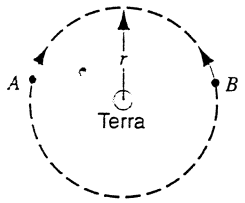


FIGURA 14.42 Problema 25.

26. Il centro del Sole si trova in uno dei fuochi dell'orbita terrestre. Quanto dista dall'altro fuoco? Esprimere la risposta in funzione del raggio del Sole che è $R_S = 6{,}96 \cdot 10^8$ m, dell'eccentricità dell'orbita $e = 0{,}0167$ e del semiasse maggiore $a = 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m.

27. Nel 1610 Galileo fabbricò un telescopio, lo puntò su Giove e scoprì quattro lune molto ben visibili. I loro raggi orbitali medi a e i periodi T sono indicati in Tabella.

Nome	$a(10^8$ m)	T (d)
Io	4,22	1,77
Europa	6,71	3,55
Ganimede	10,7	7,16
Callisto	18,8	16,7

(a) Tracciate il grafico di log a (asse y) in funzione di log T (asse x) e dimostrate che è una linea retta. (b) Misurate la sua pendenza e confrontatela con il valore dato dalla legge dei periodi di Keplero. (c) Trovate la massa di Giove a partire dall'intercetta di questa linea con l'asse y. (*Nota*: si può anche usare carta millimetrata bilogaritmica.)

28. Un certo sistema di stella tripla consiste di due stelle di uguale massa m che ruotano intorno a una stella centrale di massa M su una stessa orbita circolare di raggio r, stando opposte agli estremi di uno stesso diametro come appare in Figura 14.43. Scrivete un'espressione del periodo di rivoluzione delle due stelle.

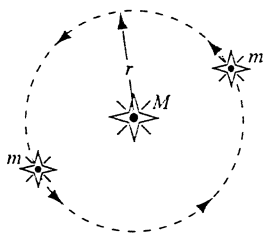


FIGURA 14.43 Problema 28.

 ISBN 88-408-1254-7

29. Un satellite di massa 220 kg ruota inizialmente su un'orbita quasi circolare a un'altezza di 640 km sopra la superficie della Terra. Trovate (a) la sua velocità e (b) il suo periodo di rivoluzione. (c) Per varie ragioni il satellite perde energia meccanica mediamente al ritmo di $1{,}40 \cdot 10^5$ J per ogni giro completo dell'orbita. Adottando la regola di approssimazione secondo cui la sua traiettoria può essere assimilata a una circonferenza il cui raggio diminuisce lentamente, determinate la distanza dalla superficie della Terra, la velocità e il periodo del satellite al termine della sua 1500ª rivoluzione. (d) Qual è l'intensità media della forza ritardante? Il momento angolare si conserva?

30. Un satellite è in orbita ad altitudine geosincrona, ma il piano della sua orbita è inclinato di 10° rispetto al piano equatoriale. Descrivete il moto del satellite rispetto alle stelle fisse dal punto di vista di un osservatore sull'equatore.

31. Tre stelle identiche di massa M stanno ai vertici di un triangolo equilatero di lato L. Che velocità devono avere se si muovono tutte sotto la reciproca influenza della gravitazione su un'orbita circolare che circoscrive, mantenendolo sempre uguale, il triangolo equilatero?

32. Quanto tempo impiegherà la cometa della Figura 14.44 a passare dal punto A di minima distanza dal Sole al punto B, posto a distanza angolare di 90° da A rispetto al Sole? Prendiamo come distanza minima dal Sole il raggio dell'orbita terrestre, supposta circolare.

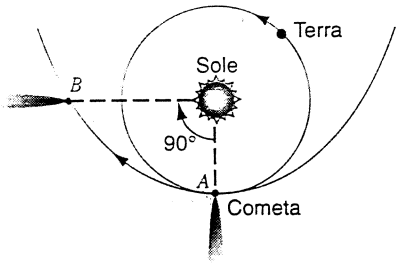


FIGURA 14.44 Problema 32.

33. Immaginiamo un pianeta di massa M con una piccola luna di massa m che gira su un'orbita di raggio a mantenendo sempre la stessa faccia rivolta verso di esso. Se ora si avvicina al pianeta arriverà a una distanza critica dal centro del pianeta alla quale il materiale incoerente giacente sulla sua superficie sarà asportato. Dimostrare che questa distanza critica vale $r_c = a(3M/m)^{1/3}$. Tale parametro è chiamato *limite di Roche*.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Larry Niven ha scritto una serie di libri di fantascienza su *Ringworld*, un anello artificiale metallico disabitato che circonda una stella. Immaginiamo un anello solido uniforme di massa M e raggio R, infinitamente sottile. In funzione di G, M ed R calcolare (a) l'energia potenziale gravitazionale in un punto giacente sul piano dell'anello a distanza $r = R/2$ dal centro e (b) l'intensità e la direzione della forza di gravità che agisce su una massa di 1 kg situata nello stesso punto. (c) Ripetere (a) e (b) per un punto a distanza $r = 3R/2$ nel piano dell'anello.

2. Ripetete il Problema 23 per 19 particelle, 29 particelle, 39 particelle ecc. fino a 99 particelle. Tracciate il grafico dei periodi di rotazione in funzione del numero delle particelle. Al crescere del numero di particelle il risultato converge a un valore limite? Se sì, qual è questo limite? Si può risolvere il problema per via analitica?

CAPITOLO 15

STATICA DEI FLUIDI

Gran parte della materia può essere classificata descrivendo in quale fase *essa si trovi:* solida, liquida *o* gassosa. *Solidi e liquidi (chiamati anche materia condensata) hanno in comune un certo numero di proprietà: sono per esempio relativamente incomprimibili, e la loro massa volumica si mantiene relativamente costante al variare della temperatura (tenendo costanti altri parametri, quali la pressione). I gas, al contrario, sono facilmente comprimibili e la loro massa volumica, a pressione costante, subisce grandi variazioni al variare della temperatura.*

Da un altro punto di vista si possono raggruppare gas e liquidi sotto la denominazione comune di fluidi. *Essi infatti possono scorrere, per esempio, fino a prendere la forma di qualsiasi recipiente entro il quale siano versati, proprietà che i solidi non hanno. In questo capitolo esamineremo le proprietà dei* fluidi in quiete *e le leggi che li governano; nel prossimo, affronteremo le proprietà dinamiche dei fluidi in movimento.*

15.1 FLUIDI E SOLIDI

Se applichiamo una forza alla superficie di un materiale – per esempio, un cubo di rame – il materiale esercita una forza di reazione secondo la terza legge di Newton. Applicando la forza normalmente alla sua superficie il cubo può comprimersi (se la forza applicata «spinge verso» la superficie) oppure espandersi (se la forza «tira verso l'esterno» la superficie) di una piccola quantità tale da permettere alle ingenti forze intermolecolari, che si comportano all'incirca come molle, di sviluppare una forza di reazione adeguata a equilibrare la forza applicata. Lo stesso accade se la forza è applicata parallelamente alla superficie, ed è quindi chiamata forza di taglio o forza tangenziale: il materiale può deformarsi leggermente per la variazione di configurazione delle molecole che provvede la reazione adeguata. Gli oggetti che classifichiamo come *solidi* possono normalmente restare in equilibrio all'applicazione di forze di compressione, tensione o taglio, con minimi cambiamenti di dimensioni o di forma.

Un liquido come l'acqua, invece, non è in grado di produrre forze di reazione contro forze applicate in qualsiasi direzione. La maggior parte dei liquidi sono praticamente incomprimibili, e sono quindi in grado di fornire una reazione adeguata a forze di compressione con variazioni impercettibili nella disposizione delle loro molecole. (I sistemi idraulici che studieremo in questo stesso capitolo sono basati proprio su questa proprietà dei liquidi.) Entro limiti ristretti i liquidi sono in grado di sopportare anche sforzi di tensione, ma possono derivarne vistosi cambiamenti: basta pensare a quando si soffia in una bolla di sapone, che si gonfia a dismisura al crescere della pressione interna estendendo la pellicola superficiale, che diventa sempre più sottile fino a esplodere quando non riesce più a reggere lo sforzo di tensione). I liquidi non sopportano sforzi di taglio, che provocano lo scorrimento delle molecole nel senso della forza.

Un terzo stato della materia, costituito dai gas, meglio chiamati *aeriformi*, non sopporta forze applicate né di compressione, né di tensione né di taglio. Le forze di compressione provocano cambiamenti sostanziali nello stato del gas, e gli sforzi di taglio, come nei liquidi, provocano lo scorrimento delle molecole nel senso della forza.

Liquidi e gas insieme sono classificati come *fluidi*. Essi possono facilmente scorrere sotto l'azione di forze di taglio.

 ISBN 88-408-1254-7

Si osserva normalmente questo fenomeno quando un fluido si adatta alla forma del recipiente in cui viene a trovarsi. Anche materiali che apparentemente sembrano solidi, come la pece, fatta di catrame «solido», o i ghiacciai, fatti di ghiaccio «solido», possono fluire sotto l'azione di forze abbastanza intense. Barre di metallo solido possono essere trasformate in fili sottili forzandole a passare attraverso i fori di una trafila. E in molti luoghi dove il terreno è stato scavato per realizzare grandi opere edili, dalla conformazione degli strati rocciosi si può riconoscere che la «solida» roccia fluisce sotto altissime pressioni.

Le differenze di comportamento fra un fluido e un solido dipendono dalle forze che agiscono fra le loro molecole. Possiamo raffigurare un solido come una griglia tridimensionale in cui ogni molecola è vincolata a tutte quelle adiacenti da ingenti forze che agiscono come delle molle. Un solido è pertanto in grado di sviluppare forze di reazione contro forze applicate in qualsiasi direzione. In un liquido le forze intermolecolari sono relativamente deboli, e i liquidi non dispongono dell'ordine su larga scala che conferisce ai solidi la loro stabilità. Nei gas le forze intermolecolari sono estremamente deboli, e le distanze fra le molecole sono maggiori che nei liquidi o nei solidi. Perciò si può far scorrere sia i liquidi sia i gas esercitando forze relativamente modeste.

I metodi della meccanica classica, che abbiamo finora applicato alle particelle, potrebbero essere utili per studiare il comportamento dei fluidi, ma sarebbero poco convenienti dato il grande numero di particelle che interagiscono e la difficoltà di specificare tutte le forze presenti nonché la posizione e la velocità delle singole particelle. Per analizzare i fluidi è perciò più consigliabile ricorrere a leggi che considerino il comportamento statistico delle particelle oppure grandezze medie o complessive come la pressione, la massa volumica e la temperatura. L'approccio alla meccanica dei fluidi parte dalle leggi di Newton, ma sviluppa speciali formulazioni di queste leggi che si applichino a fluidi in quiete o in movimento.

15.2 PRESSIONE E MASSA VOLUMICA

Pressione

Data la sua tendenza a scorrere, un fluido non è in grado di sopportare una forza diretta parallelamente alla sua superficie. In condizioni statiche, l'unica componente di una forza che può sussistere è quella che agisce *normalmente* ossia *perpendicolarmente* alla superficie del fluido. Qualunque sia la forma del fluido, le forze fra l'interno e l'esterno del fluido agiscono ovunque formando un angolo retto rispetto alle superfici di contorno del fluido.

L'intensità della forza normale per unità di superficie è chiamata *pressione*. È una quantità scalare, che non ha proprietà direzionali. Quando nuotate sott'acqua, per esempio, l'acqua preme sul corpo da tutte le direzioni. Sebbene la forza coinvolta sia un vettore ed abbia quindi proprietà direzionali, la pressione in sé è uno scalare.

Su scala microscopica, la pressione esercitata da un fluido su una superficie con cui è in contatto è causata dagli urti delle molecole del fluido contro la superficie stessa. Come conseguenza di un urto, la componente normale alla superficie della quantità di moto di una molecola si inverte. La superficie esercita sulla molecola una forza impulsiva, e per la terza legge di Newton la molecola viene a esercitare una forza uguale e opposta, normalmente alla superficie. La risultante delle forze di reazione esercitate da molte molecole genera la pressione sulla superficie. Nel Capitolo 22 questo fenomeno sarà analizzato quantitativamente per il caso dei gas.

Un fluido sotto pressione esercita una forza diretta verso l'esterno su qualsiasi superficie di contatto. Consideriamo una superficie chiusa che racchiude un fluido, come nella Figura 15.1. Il fluido all'interno spinge verso l'esterno contro l'ambiente circostante. Si può rappresentare un piccolo elemento di area superficiale con il vettore $\Delta \boldsymbol{A}$, di valore numericamente uguale all'area elementare e avente direzione orientata *per convenzione* normalmente alla superficie *verso l'esterno*. La forza $\Delta \boldsymbol{F}$ esercitata dal fluido contro questa superficie è legata alla pressione p dalla relazione

$$\Delta F = p\,\Delta A. \tag{15.1}$$

Poiché i vettori che rappresentano la forza e l'area sono paralleli, possiamo scrivere la pressione in termini di un rapporto scalare:

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \tag{15.2}$$

Consideriamo un elemento ΔA tanto piccolo che la pressione p definita secondo l'Equazione 15.2 sia indipendente dalle sue dimensioni: in generale la pressione può variare da punto a punto sulla superficie.

La pressione ha le dimensioni di una forza divisa per un'area, e la sua unità di misura è dunque il N/m^2, che nel sistema SI prende il nome di *pascal* (simbolo Pa: $1\ Pa = 1\ N/m^2$). Sono comunemente in uso parecchie altre unità. Negli USA, per esempio, la scala dei manometri per misurare la pressione dei pneumatici è tarata in lb/in^2. La pressione standard esercitata dall'atmosfera terrestre a livello del mare è definita come 1 atmosfera, simbolo atm:

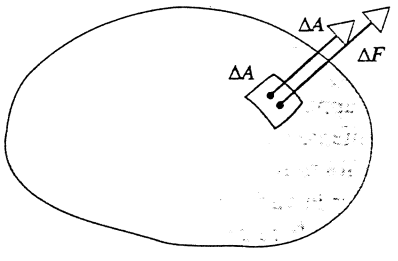


FIGURA 15.1 Un elemento di superficie ΔA si può rappresentare con un vettore ΔA di lunghezza proporzionale all'area dell'elemento, diretto perpendicolarmente alla superficie verso l'esterno. Il fluido racchiuso dalla superficie esercita una forza ΔF contro l'elemento. La forza è perpendicolare all'elemento e quindi parallela a ΔA.

TABELLA 15.1 Alcuni valori di pressione

Sistema	*Pressione* (Pa)
Centro del Sole	$2 \cdot 10^{16}$
Centro della Terra	$4 \cdot 10^{11}$
Massima pressione di laboratorio non transitoria	$1.5 \cdot 10^{10}$
Fondale oceanico più profondo	$1.1 \cdot 10^{8}$
Tacchi a spillo sul pavimento di una sala da ballo	$2 \cdot 10^{7}$
Pneumatico d'auto (pressione relativa)	$2 \cdot 10^{5}$
Atmosfera a livello del mare	$1.0 \cdot 10^{5}$
Pressione sanguigna normale (relativa)[a]	$1.6 \cdot 10^{4}$
Massimo suono tollerabile (pressione relativa)[b]	30
Suono più debole percepibile (pressione relativa)[b]	$3 \cdot 10^{-5}$
Massimo vuoto di laboratorio	10^{-12}

[a] Il picco sistolico, corrispondente a 120 mmHg sullo sfigmomanometro.
[b] Frequenza di 1000 Hz sul timpano dell'orecchio.

TABELLA 15.2 Alcuni valori di massa volumica

Materiale o oggetto	*Massa volumica* (kg/m^3)
Spazio interstellare	10^{-20}
Massimo vuoto di laboratorio	10^{-17}
Aria: 20 °C e 1 atm	1,21
20 °C e 50 atm	60,5
Polistirene espanso	$1 \cdot 10^{2}$
Ghiaccio	$0{,}917 \cdot 10^{3}$
Acqua: 20 °C e 1 atm	$0{,}998 \cdot 10^{3}$
20 °C e 50 atm	$1{,}000 \cdot 10^{3}$
Acqua di mare: 20 °C e 1 atm	$1{,}024 \cdot 10^{3}$
Sangue	$1{,}060 \cdot 10^{3}$
Ferro	$7{,}8 \cdot 10^{3}$
Mercurio	$13{,}6 \cdot 10^{3}$
La Terra: valore medio	$5{,}5 \cdot 10^{3}$
nucleo	$9{,}5 \cdot 10^{3}$
crosta	$2{,}8 \cdot 10^{3}$
Il Sole: valore medio	$1{,}4 \cdot 10^{3}$
nucleo	$1{,}6 \cdot 10^{5}$
Nucleo di una nana bianca	10^{10}
Nucleo dell'uranio	$3 \cdot 10^{17}$
Nucleo di una stella di neutroni	10^{18}
Buco nero (1 massa solare)	10^{19}

1 atm = 14,7 lb/in^2 = $1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa, quantità esatta per convenzione. E poiché il pascal è un'unità molto piccola (1 Pa $\approx 10^{-5}$ atm), nelle previsioni del tempo per indicare la pressione atmosferica è spesso usato il suo multiplo chiamato bar: 1 bar = 10^5 Pa, molto prossimo a 1 atm. Il bar è dunque un'unità coerente con il Sistema Internazionale. Più avanti, nel Paragrafo 15.5, vedremo altre unità per la misura della pressione.

La Tabella 15.1 elenca alcune pressioni caratteristiche espresse in pascal. In essa il termine «pressione relativa» indica un valore di pressione espresso come differenza rispetto alla pressione atmosferica standard. È interessante notare che in laboratorio si può produrre una gamma di pressioni che si estende su 22 ordini di grandezza. Nell'Appendice G sono indicati i fattori di conversione della pressione da uno a un altro sistema di unità di misura.

Massa volumica

La massa volumica ρ di un piccolo elemento di qualsiasi sostanza è data dal rapporto fra la sua massa Δm e il suo volume ΔV:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{15.3}$$

La massa volumica, che molto spesso è ancora chiamata *densità*, può essere riferita a un punto di dimensioni infinitesime e in questo caso è data dal limite del rapporto citato per $\Delta V \to 0$. La massa volumica è uno scalare privo di proprietà direzionali.

Se la massa volumica di un oggetto ha lo stesso valore in ogni punto, essa è uguale alla sua massa divisa per il suo volume:

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{15.4}$$

La Tabella 15.2 indica alcuni valori caratteristici di massa volumica, che possono variare di circa 21 ordini di grandezza in laboratorio, e nell'Universo fino quasi a 40, a partire dagli oggetti più densi – un ipotetico buco nero – al quasi vuoto degli spazi interstellari.

La massa volumica di una sostanza dipende in generale anche da fattori ambientali, temperatura e pressione comprese. Per i liquidi e i solidi la variazione della massa volumica è molto modesta per un grande intervallo di variazione della temperatura e della pressione.

Aumentando la pressione su un corpo di una quantità Δp, anche la sua massa volumica aumenterà. La variazione relativa del suo volume sarà $\Delta V/V$, che è negativo se il volume diminuisce. Il rapporto B fra queste quantità è chiamato *modulo di comprimibilità*:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}. \tag{15.5}$$

Il segno meno è introdotto allo scopo di rendere B una quantità positiva, dato che Δp e ΔV sono di segno opposto. Ossia, un *aumento* della pressione ($\Delta p > 0$) provoca una *diminuzione* del volume ($\Delta V < 0$). Si noti che B ha le stesse dimensioni di una pressione, dato che $\Delta V/V$ è un numero puro.

Se il modulo B di un materiale è grande, in base all'Equazione 15.5 una grande variazione di pressione produce soltanto un piccolissimo cambiamento del volume dell'oggetto. Si può in questo caso considerare il materiale praticamente incomprimibile. Per esempio, il modulo B dell'acqua è $2{,}2 \cdot 10^9$ N/m^2: alla pressione che regna nel punto più profondo dell'oceano Pacifico ($4{,}0 \cdot 10^7$ N/m^2, circa 400 bar), la variazione relativa dovuta alla sola pressione è soltanto dell'1,8 %. Dati i più stretti accoppiamenti fra i loro atomi, i solidi hanno in generale un modulo B maggiore che non i liquidi. Una stessa pressione produce dunque una minore va-

 ISBN 88-408-1254-7

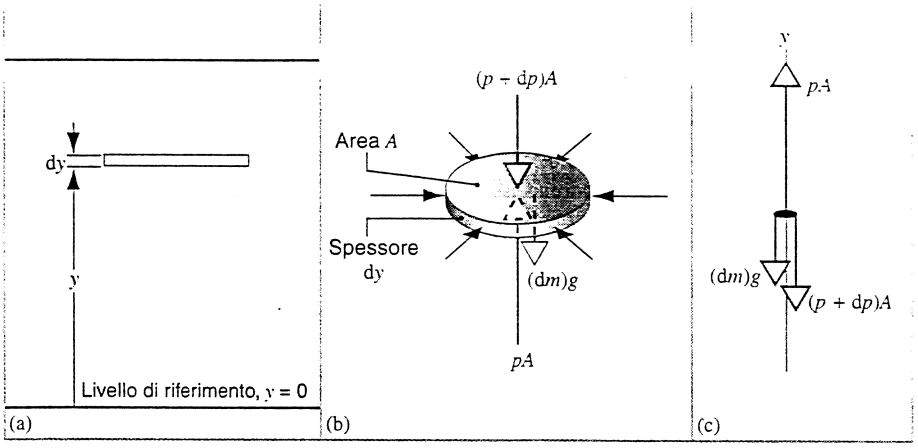


FIGURA 15.2 (a) Un piccolo elemento di volume del fluido a riposo. (b) Le forze che agiscono sull'elemento. (c) Un diagramma delle forze agenti sull'elemento.

riazione di volume in un solido che in un liquido. In condizioni normali possiamo comunque considerare sia i solidi sia i liquidi come praticamente incomprimibili: la loro massa volumica non cambia al variare della pressione.

Se invece il modulo B è piccolo, il volume può variare notevolmente con un modesto cambiamento della pressione, e la sostanza è definita comprimibile. I gas hanno moduli B tipici intorno a 10^5 N/m^2. Un piccolo cambiamento di 0,1 bar varia il volume di un gas del 10 %: i gas sono facilmente comprimibili.

15.3 VARIAZIONE DELLA PRESSIONE IN UN FLUIDO A RIPOSO

Se un fluido è in equilibrio, in tale stato dev'essere ogni sua parte. Ciò significa che sia la forza netta sia il momento torcente netto agenti su ciascun elemento del fluido devono essere nulli. Consideriamo un piccolo elemento di volume immerso nel fluido. Supponiamo che abbia la forma di un disco sottile e sia a un'altezza y sopra un livello di riferimento, come in Figura 15.2a. Lo spessore del disco è dy e ciascuna faccia ha area A. La massa dell'elemento è $dm = \rho\, dV = \rho A\, dy$, e il suo peso $(dm)g = \rho g A\, dy$. Le forze esercitate sull'elemento dal fluido che lo circonda sono perpendicolari in ogni punto alla sua superficie (Figura 15.2b).

La risultante delle forze orizzontali è zero, perché l'elemento ha un'accelerazione orizzontale nulla. Le forze orizzontali sono dovute soltanto alla pressione del fluido, e per simmetria la pressione dev'essere la stessa in tutti i punti del piano orizzontale a quota y.

Anche l'accelerazione verticale dell'elemento è nulla, e quindi la forza verticale netta è zero. La Figura 15.2c riporta il diagramma delle forze sull'elemento. Le forze verticali sono dovute non soltanto alla pressione del fluido circostante, ma anche al peso dell'elemento. Se p è la pressione sulla faccia inferiore e $p + dp$ su quella superiore, la forza verso l'alto esercitata sulla faccia inferiore è pA mentre le forze verso il basso sono $(p + dp)A$, esercitata sulla faccia superiore e il peso $(dm)g = \rho g A\, dy$ dell'elemento. Per l'equilibrio verticale si richiede dunque

$$\sum F_y = pA - (p + dp)A - \rho g A\, dy = 0,$$

da cui si ottiene

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \tag{15.6}$$

Quest'equazione esprime la variazione di pressione in funzione dell'altezza sopra un certo livello di riferimento in un fluido in equilibrio statico. Al crescere della quota ($dy > 0$), la pressione diminuisce ($dp < 0$). La causa della variazione di pressione è il peso per unità di area della sezione normale dello strato di fluido compreso fra i punti dei quali si sta misurando la differenza di pressione.

La quantità ρg è spesso chiamata peso specifico del fluido: è il peso di 1 unità di volume del fluido. Per l'acqua vale circa 9800 N/m^3.

Se p_1 è la pressione all'altezza y_1 e p_2 è la pressione all'altezza y_2 sopra un determinato livello di riferimento, integrando l'Equazione 15.6 otteniamo

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy,$$

ossia

$$p_2 - p_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy. \tag{15.7}$$

Per i liquidi, pressoché incomprimibili, ρ è in pratica costante e le differenze di livello sono difficilmente tanto grandi da dover considerare variazioni di g. Considerando ρ e g costanti si ha, per un liquido omogeneo,

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1). \tag{15.8}$$

Se un liquido ha una superficie libera, è questo il livello di riferimento naturale dal quale misurare l'altezza (Figura 15.3). Sia y_2 l'altezza della superficie libera rispetto al fondo del recipiente e p_2 la pressione corrispondente, che è di solito uguale alla pressione atmosferica p_0. Chiamiamo y_1

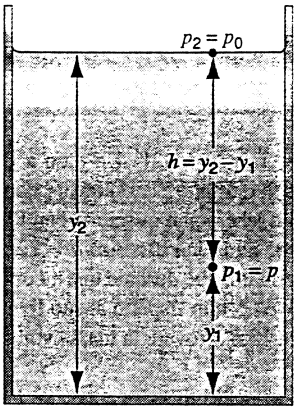


FIGURA 15.3 Un recipiente contiene una certa quantità di liquido la cui superficie superiore è aperta all'atmosfera. La pressione in qualsiasi punto del liquido dipende dalla profondità h.

l'altezza di un punto generico del fluido, e p la pressione in quel punto. Si ha allora

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1).$$

Ma $y_2 - y_1$ è la profondità h sotto il livello ove la pressione vale p_0 (Figura 15.3), e quindi

$$p = p_0 + \rho g h. \tag{15.9}$$

Ciò dimostra chiaramente che in un liquido omogeneo e incomprimibile la pressione cresce con la profondità, ma è uguale in tutti i punti alla stessa profondità. Il secondo membro della (15.9) indica, per ogni punto del fluido, il contributo fornito alla pressione p dal peso della colonna di fluido sovrastante di altezza h.

L'Equazione 15.8 esprime la relazione esistente fra i valori della pressione nei diversi punti di un fluido, indipendentemente dalla forma del recipiente; qualunque sia la forma, infatti, due punti di un fluido possono essere collegati da una linea spezzata formata da tratti orizzontali e verticali. Per esempio, consideriamo i punti A e B nel liquido omogeneo contenuto nel tubo a U della Figura 15.4a. Nel percorso a zig-zag da A a B si avrà una differenza di pressione $\rho g\ \Delta y$ in ogni segmento verticale di lunghezza Δy, mentre lungo ogni segmento orizzontale la pressione non presenterà variazioni. Perciò la differenza di pressione è uguale al prodotto di ρg per la somma algebrica dei segmenti verticali da A a B, ossia $\rho g(y_2 - y_1)$.

Se il tubo a U contiene diversi liquidi non miscibili – diciamo, un liquido più denso nel tubo a destra e meno denso a sinistra, come in Figura 15.4b – la pressione può essere diversa allo stesso livello nei punti A e B sui due lati. Il liquido sotto la linea CC è in equilibrio: perciò la forza esercitata sopra il livello di C dalla colonna di sinistra dev'essere uguale a quella esercitata dalla colonna di destra sopra lo stesso livello. La pressione in CC è uguale da entrambe le parti, ma la pressione da C ad A diminuisce di una quantità minore che da C a B, perché il liquido a sinistra è meno denso di quello a destra: la pressione in A è quindi maggiore che in B.

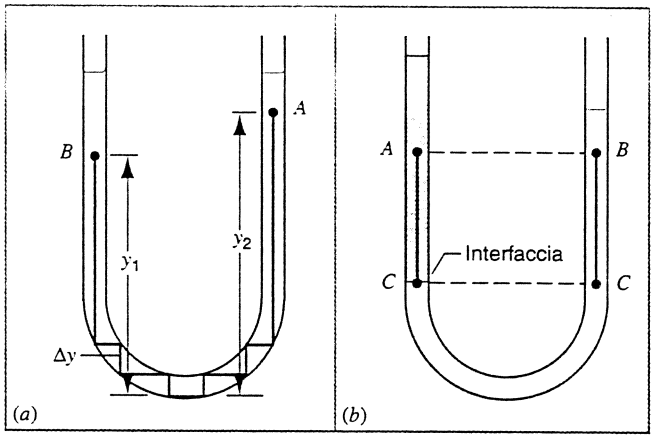


FIGURA 15.4 (a) La differenza di pressione fra due punti A e B di un liquido omogeneo dipende soltanto dalla loro differenza di quota $y_2 - y_1$. (b) Due punti A e B alla stessa altezza possono avere pressioni diverse se le masse volumiche nei due punti sono differenti.

Variazione della pressione atmosferica

Per i gas, ρ è relativamente piccola e la differenza di pressione fra due punti vicini è in generale trascurabile (vedi Equazione 15.7). In un recipiente di non grandi dimensioni contenente un gas si può ritenere che la pressione sia uguale in tutti i punti. Ma ciò non è più vero se $y_2 - y_1$ è molto grande. Nell'atmosfera la pressione dell'aria varia molto se si sale a grandi altitudini. Inoltre, essendo i gas comprimibili, la variazione di pressione provoca una variazione della massa volumica ρ del gas con l'altitudine, per cui prima di integrare la (15.7) dobbiamo esprimere ρ in funzione di y.

Possiamo farci una prima idea della legge di variazione della massa volumica con l'altitudine nell'atmosfera terrestre supponendo che ρ sia proporzionale alla pressione. Ciò sarebbe abbastanza vicino al vero, secondo la legge dei gas perfetti che vedremo nel Capitolo 22, se la temperatura dell'aria rimanesse costante a tutte le altitudini. Accettando questa condizione, e trascurando anche la variazione di g, possiamo trovare la pressione p in funzione dell'altezza y sul livello del mare.

L'Equazione 15.6 dà

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\rho g\,.$$

Assumendo ρ proporzionale a p si ha

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}\,, \tag{15.10}$$

ove ρ_0 e p_0 sono i valori della massa volumica e della pressione a livello del mare. Allora

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0}\,,$$

da cui

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0}\mathrm{d}y\,. \tag{15.11}$$

 ISBN 88-408-1254-7

Integrando quest'equazione tra la pressione p_0 relativa alla quota y_0 (livello del mare) e la pressione p relativa alla quota h, otteniamo

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{g\rho_0}{p_0} dy,$$

che diventa

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0} h,$$

ossia

$$p = p_0 e^{-h(g\rho_0/p_0)}, \qquad (15.12)$$

che si può anche scrivere

$$p = p_0 e^{-h/a}, \qquad (15.13)$$

ove

$$a = \frac{p_0}{g\rho_0}.$$

Introducendo i valori $g = 9{,}80\ \text{m/s}^2$, $\rho_0 = 1{,}21\ \text{kg/m}^3$ (a 20 °C) e $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, otteniamo $a = 8{,}55$ km. La costante a rappresenta la quota alla quale la pressione si riduce di un fattore pari a $e = 2{,}718\ldots$ Visto in altri termini, la pressione atmosferica cala di 10 volte salendo di un'altezza $a \ln 10 = 2{,}30a = 20$ km. A quota $h = 20$ km sul livello del mare la pressione atmosferica sarà dunque circa 0,1 bar, e a quota $h = 40$ km scenderà a 0,01 bar. La Figura 15.5 mette a confronto la variazione di pressione in funzione dell'altitudine secondo l'Equazione 15.13, con i valori misurati nell'atmosfera terrestre.

Per gas a temperatura uniforme la massa volumica ρ di uno strato è proporzionale alla pressione su quello strato. I liquidi, al contrario, sono praticamente incomprimibili, per cui gli strati inferiori non sono sensibilmente compressi dal peso di quelli sovrastanti, e la massa volumica ρ rimane praticamente costante a qualsiasi profondità. Per un gas la variazione di pressione in funzione della distanza dal fondo del recipiente è dunque diversa rispetto a un liquido, come risulta dalle Equazioni 15.9 per i liquidi e 15.13 per i gas.

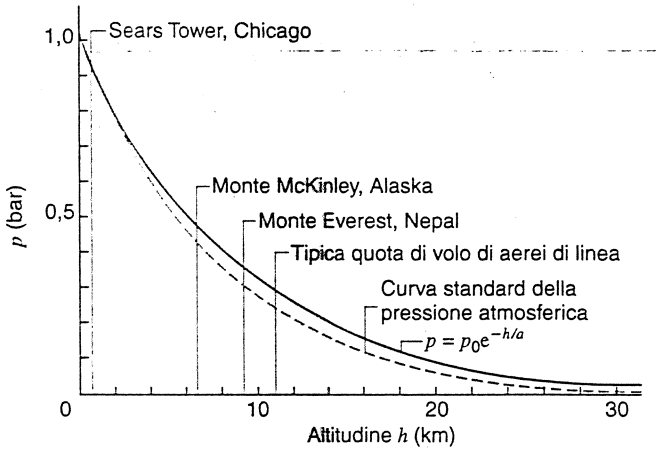


FIGURA 15.5 Confronto fra la curva standard della pressione atmosferica (linea tratteggiata) e quella tracciata secondo l'Equazione 15.13 (linea piena). Le due curve sono differenti perché nei nostri calcoli abbiamo ignorato la variazione di massa volumica dell'aria in funzione della temperatura al variare della quota.

PROBLEMA SVOLTO 15.1 Un tubo a U, avente entrambe le estremità aperte, è riempito parzialmente con acqua. In uno dei lati si versa dell'olio, che non è miscibile con l'acqua, fino a che la sua superficie libera sia a una distanza $d = 12{,}3$ mm sopra quella dell'acqua nell'altro lato, che durante questa operazione si è alzata di una distanza $a = 67{,}5$ mm rispetto al suo livello originale, come si vede nella Figura 15.6. Trovare la massa volumica dell'olio.

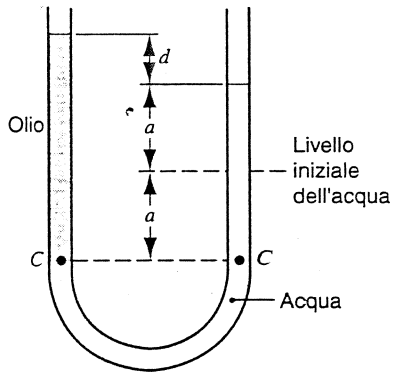


FIGURA 15.6 Problema svolto 15.1. Un tubo a U è riempito in parte con acqua e in parte con olio di massa volumica ignota.

Soluzione Nella Figura 15.6 i punti C sono alla stessa pressione. (Se così non fosse, la porzione di fluido al di sotto del livello CC sarebbe soggetta a uno squilibrio netto di forze e sarebbe quindi accelerata, contro l'ipotesi di staticità assunta nel problema.) La caduta di pressione da C alla superficie del lato acqua è $\rho_a g 2a$, ove ρ_a è la massa volumica dell'acqua e $2a$ l'altezza della colonna d'acqua sopra il livello C. Sull'altro lato la caduta di pressione da C alla superficie libera dell'olio sarà $\rho g(2a + d)$, ove ρ è la massa volumica ignota dell'olio. Uguagliando i valori di p sui due lati si ha

$$p_0 + \rho_a g 2a = p_0 + \rho g(2a + d),$$

da cui

$$\rho = \rho_a \frac{2a}{(2a + d)} =$$

$$= (1{,}000 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3) \frac{2(67{,}5\ \text{mm})}{2(67{,}5\ \text{mm}) + 12{,}3\ \text{mm}} =$$

$$= 916\ \text{kg/m}^3.$$

Il rapporto tra la massa volumica di una sostanza e la massa volumica dell'acqua è chiamato *peso specifico relativo* della sostanza. Nel nostro caso il peso specifico relativo dell'olio risulta 0,916.

Si noti che, nel risolvere questo problema, abbiamo ammesso che la pressione si trasmetta con continuità attraverso l'interfaccia olio/acqua in C sul lato sinistro del tubo. Se così non fosse e le pressioni fossero differenti, la forza esercitata dal fluido su una faccia sarebbe diversa da quella dell'altra parte, e per effetto di questo squilibrio si manifesterebbe un'accelerazione, in contrasto con l'ipotesi di staticità assunta nel problema. Quando si versa l'o-

lio nel tubo potrà esservi una temporanea differenza di pressione che provocherà uno spostamento dei fluidi, ma il sistema raggiungerà alla fine la situazione statica rappresentata nella Figura 15.6.

15.4 IL PRINCIPIO DI PASCAL E IL PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Quando si spreme un tubetto di dentifricio, questo fluisce fuori dall'estremità aperta del contenitore. Si tratta di una dimostrazione del *principio di Pascal*. Quando si applica una pressione sul tubetto, qualunque sia il punto su cui si agisce, questa si fa sentire in tutto il recipiente, e spinge fuori il dentifricio. È questa l'affermazione del principio di Pascal, enunciato per la prima volta da Blaise Pascal nel 1652:

> *la pressione applicata a un fluido racchiuso in un recipiente si trasmette invariata a ogni parte del fluido e alle pareti del recipiente.*

Ossia, se in qualsiasi punto di un fluido si aumenta la pressione esterna di una quantità Δp, lo stesso aumento si potrà rilevare ovunque nel fluido.

Il principio di Pascal sta alla base del funzionamento di tutti i sistemi idraulici di trasmissione di forza, impiegati nelle macchine di movimentazione di terra o nei freni delle automobili. Ci consente di amplificare una forza relativamente piccola per sollevare un peso molto più grande, come nel martinetto dell'automobile o nella poltrona del dentista, e di trasmettere forze a grandi distanze o in località difficilmente accessibili, come nei meccanismi di controllo degli alettoni degli aeroplani.

Dimostreremo il principio di Pascal per un liquido incomprimibile. La Figura 15.7 rappresenta un liquido contenuto in un cilindro chiuso superiormente da un pistone. Applicando al pistone una forza esterna, per esempio il peso di alcuni oggetti sovrapposti, la forza esterna esercita una pressione p_{ext} sul fluido immediatamente sottostante al pistone. Se il liquido ha massa volumica ρ, dalla (15.9) ricaviamo la pressione in un punto qualsiasi all'interno del fluido a una profondità h:

$$p = p_{ext} + \rho g h. \tag{15.14}$$

Supponiamo ora che la pressione esterna aumenti di una quantità uguale a Δp_{ext}, magari per aggiunta di pesi sopra il pistone. Come cambierà di conseguenza la pressione p nel fluido? La (15.14) esprime la variazione di pressione all'interno del fluido incomprimibile:

$$\Delta p = \Delta p_{ext} + \Delta(\rho g h), \tag{15.15}$$

ove il secondo addendo al secondo membro è nullo perché, essendo il liquido incomprimibile, la sua massa volumica ρ rimane costante; si ha quindi

$$\Delta p = \Delta p_{ext}. \tag{15.16}$$

La variazione di pressione all'interno del fluido è dunque uguale alla variazione della pressione applicata esternamente. Ciò viene a confermare il principio di Pascal, che non è un principio indipendente, ma una diretta conseguenza della nostra formulazione della statica dei fluidi.

Pur avendo finora trattato fluidi incomprimibili, i risultati trovati si applicano a tutti i fluidi reali (comprimibili), sia gas sia liquidi. La variazione della pressione esterna può provocare una variazione di massa volumica che si diffonde istantaneamente in tutto il fluido, ma una volta che la perturbazione si è estinta e si è stabilito un nuovo equilibrio, si constata che il principio di Pascal rimane valido.

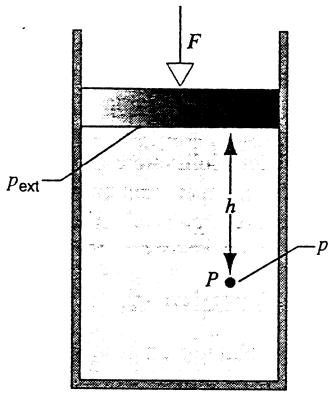


FIGURA 15.7 Un fluido è contenuto in un cilindro munito di un pistone mobile. La pressione in ogni punto P è dovuta non soltanto al peso del fluido sovrastante a P, ma anche alla forza esercitata dal pistone.

La leva idraulica

La Figura 15.8 presenta un dispositivo spesso adottato per sollevare oggetti pesanti, come per esempio un'automobile. Su un pistone di area A_i è applicata una forza esterna F_i, mentre l'oggetto da sollevare esercita una forza di intensità Mg sul pistone più largo di area A_o. In condizioni di equilibrio il valore della forza F_o diretta verso l'alto, esercitata dal fluido sul pistone maggiore, deve essere uguale e contrario a quello Mg dovuto al peso dell'oggetto, trascurando il peso del pistone stesso. Vogliamo trovare la relazione esistente fra la forza applicata F_i e la forza risultante F_o esercitata dal sistema sul pistone maggiore.

La pressione trasmessa al fluido dalla forza esterna applicata al pistone minore vale $p_i = F_i/A_i$. Per il principio di

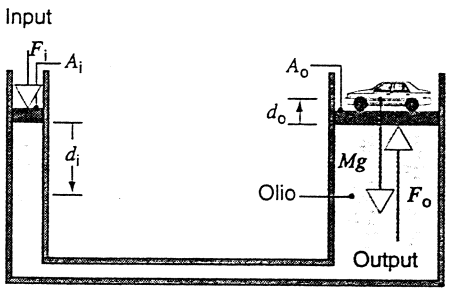


FIGURA 15.8 Leva idraulica. Una forza F_i applicata al pistone minore può generare una forza F_o molto più intensa sul pistone maggiore destinato a sollevare un peso Mg.

 ISBN 88-408-1254-7

Pascal, questa pressione «in input» dev'essere uguale alla pressione «in output» $p_o = F_o/A_o$ esercitata *dal* fluido *sul* pistone maggiore. Essendo dunque $p_i = p_o$, si avrà

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o},$$

ossia

$$F_i = F_o\frac{A_i}{A_o} = Mg\frac{A_i}{A_o}. \qquad (15.17)$$

Il rapporto A_i/A_o è in genere molto minore di 1, e quindi la forza applicata F_i può essere molto minore del peso sollevato Mg.

Il movimento verso il basso del pistone minore per un tratto d_i sposta un volume di fluido $V = d_iA_i$. Se il fluido è incomprimibile questo volume dev'essere uguale a quello spostato per alzare il pistone maggiore:

$$V = d_iA_i = d_oA_o,$$

ossia

$$d_o = d_i\frac{A_i}{A_o}. \qquad (15.18)$$

Se A_i/A_o è un numero piccolo, lo spostamento del pistone maggiore è molto più piccolo di quanto la forza applicata sposti il pistone minore. Il prezzo pagato per riuscire a sollevare un grande carico, quindi, consiste nell'impossibilità di sollevarlo per un lungo tratto.

Combinando la (15.17) e la (15.18) osserviamo che $F_id_i = F_od_o$, ciò che dimostra che il lavoro svolto dalla forza esterna sul pistone minore è uguale al lavoro svolto dal fluido sul pistone maggiore. Perciò, trascurando gli attriti e le altre forze dissipative, questo sistema idraulico non genera alcun guadagno (o perdita) di energia.

PROBLEMA SVOLTO 15.2 Nella Figura 15.9 vediamo lo schema del martinetto idraulico per sollevare un'automobile. Il fluido è olio minerale di massa volumica 812 kg/m^3; si usa una pompa a mano che esercita una forza F_i sul pistone minore, di diametro 2,2 cm, quando si applica manualmente una forza F_m all'estremità del manico della pompa. La massa complessiva dell'auto e della piattaforma è M = 1980 kg, e il pistone maggiore ha diametro di 16,4 cm. La lunghezza L del manico della pompa è 36 cm, e la distanza x dal fulcro all'asta del pistone è 9,4 cm. (a) Qual è la forza F_m da applicare per sollevare l'auto? (b) Di quanto si solleva l'auto a ogni corsa della pompa, sapendo che la mano si sposta verticalmente di 28 cm?

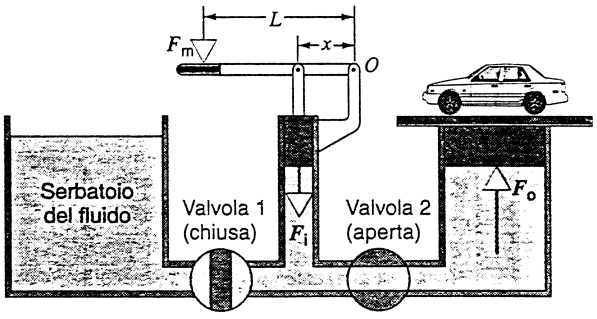


FIGURA 15.9 Problema svolto 15.2. Si solleva un'auto con una pompa idraulica. Durante la corsa attiva la valvola 1 è chiusa e la valvola 2 aperta; nella corsa di ritorno la valvola 1 è aperta e la valvola 2 chiusa, permettendo così l'ingresso di altro fluido nella camera in pressione.

Soluzione (a) Dall'Equazione 15.17 abbiamo

$$F_i = Mg\frac{A_i}{A_o} = (1980\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)\frac{\pi(1{,}1\text{ cm})^2}{\pi(8{,}2\text{ cm})^2} = 349\text{ N}.$$

Chiamando τ l'intensità del momento torcente applicato al manico della pompa intorno a un asse perpendicolare al foglio passante per il punto O, e trascurando la massa e le piccole accelerazioni delle parti mobili, si ha

$$\sum\tau = F_mL - F_ix = 0,$$

ove ricorriamo alla terza legge di Newton per esprimere l'uguaglianza della forza F_i esercitata *dal* manico della pompa *sul* pistone con la forza di reazione $-F_i$ esercitata *dal* pistone *sul* manico della pompa. Ricaviamo così F_m:

$$F_m = F_i\frac{x}{L} = (349\text{ N})\frac{9{,}4\text{ cm}}{36\text{ cm}} = 91\text{ N},$$

forza che si può agevolmente esercitare a mano.

(b) Quando la mano si abbassa verticalmente per un tratto h, il pistone minore scende di una lunghezza d_i data da

$$d_i = h\frac{x}{L} = (28\text{ cm})\frac{9{,}4\text{ cm}}{36\text{ cm}} = 7{,}3\text{ cm}.$$

Dall'Equazione 15.18 ricaviamo lo spostamento del pistone maggiore:

$$d_o = d_i\frac{A_i}{A_o} = (7{,}3\text{ cm})\frac{\pi(1{,}1\text{ cm})^2}{\pi(8{,}2\text{ cm})^2} = 0{,}13\text{ cm} = 1{,}3\text{ mm}.$$

La piccolissima distanza di sollevamento verticale che otteniamo per ogni corsa della pompa è il prezzo che paghiamo per il risparmio di forza applicata manualmente. Ovviamente per sollevare l'auto a un'altezza utile occorre fare un gran numero di manovre successive. Per fare entrare a ogni colpo la quantità di olio spinta nel cilindro sollevatore, l'apparecchio è munito di un sistema di valvole regolate automaticamente che consentono l'afflusso dell'olio al cilindro maggiore soltanto durante la corsa attiva (verso il basso) della pompa, e fanno entrare l'olio da un serbatoio esterno durante la risalita del pistone della pompa. La Figura 15.9 mostra la posizione delle valvole durante la corsa attiva, mentre l'auto sale di un'altezza d_o. Durante la corsa di ritorno la valvola 2 si chiude, trattenendo il fluido nel cilindro di destra e mantenendo l'auto all'altezza raggiunta, mentre la valvola 1 si apre e consente l'afflusso di una quantità di olio, aspirato dal serbatoio esterno, uguale a quella spinta nel cilindro sollevatore durante la corsa attiva. Per riabbassare l'auto vengono aperte entrambe le valvole consentendo all'olio di ritornare direttamente al serbatoio esterno.

Il principio di Archimede

Nella Figura 15.10a vediamo un sacchetto di plastica, contenente un certo volume di acqua, a sua volta immerso nell'acqua. L'acqua entro il sacchetto è in equilibrio statico: ciò significa che il suo peso deve essere bilanciato da una forza di uguale valore diretta verso l'alto, forza che è la somma vettoriale di tutte le forze esercitate dal fluido circostante dirette

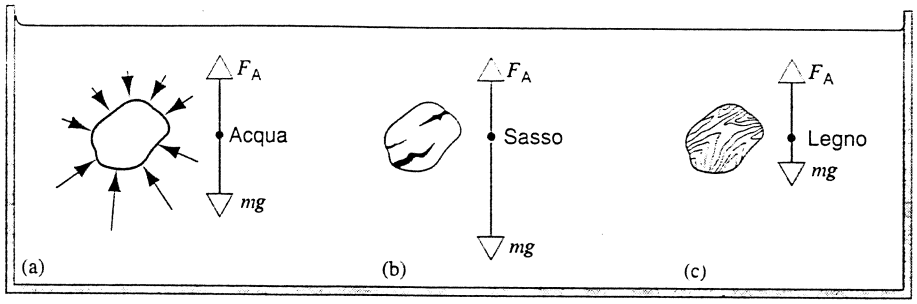


FIGURA 15.10 (a) Un sacchetto di plastica sottile pieno d'acqua è sommerso in equilibrio. L'acqua circostante esercita forze di pressione sul sacchetto, la cui risultante è una forza di galleggiamento (di Archimede) F_A che tende a far galleggiare il sacchetto. (b) Per un sasso di volume uguale a quello del sacchetto la forza di galleggiamento è la stessa, ma il peso della pietra è maggiore della forza e la pietra va a fondo. (c) Per un pezzo di legno di ugual volume, il peso è minore della spinta di Archimede.

verso l'interno del sacchetto, rappresentate dalle frecce di Figura 15.10a. Si noti che le forze dirette verso l'alto agenti sul fondo del sacchetto sono maggiori di quelle dirette verso il basso che agiscono sulla parte superiore, dato che la pressione aumenta con la profondità. La forza risultante F_A diretta verso l'alto è chiamata *forza di galleggiamento* o *spinta di Archimede*.

La pressione esercitata dal fluido circostante su un corpo sommerso non può certamente dipendere dalla sostanza di cui è costituito il corpo. Se perciò sostituiamo al sacchetto d'acqua un pezzo di legno avente esattamente la stessa forma e le stesse dimensioni, la spinta verso l'alto rimarrà uguale. La forza verso l'alto rimane uguale al peso dell'originario volume di acqua. Questo è appunto ciò che afferma il principio di Archimede:

> *un corpo totalmente o parzialmente immerso in un fluido è spinto verso l'alto da una forza di modulo uguale al peso del fluido spostato dal corpo.*

Un oggetto avente massa volumica maggiore dell'acqua (Figura 15.10b) occupa un volume d'acqua il cui peso è minore di quello dell'oggetto. Di conseguenza sprofonda nell'acqua, perché la spinta di Archimede è minore del peso dell'oggetto. Se l'oggetto sommerso fosse appoggiato su una bilancia a molla sul fondo della vasca, la bilancia indicherebbe la forza che agisce verso l'alto, di valore uguale a $mg - F_A$: è così che gli oggetti sommersi sembrano pesare meno di quanto pesano normalmente in aria. Gli astronauti si preparano alle spedizioni allenandosi a eseguire operazioni sott'acqua in grandi bacini, per simulare le condizioni di mancanza di peso che troveranno nello spazio.

Un oggetto sommerso avente massa volumica minore di quella dell'acqua (Figura 15.10c) subisce una forza risultante diretta verso l'alto perché il peso dell'acqua spostata è maggiore del suo peso. Esso sale quindi fino a raggiungere la superficie libera del liquido, e ne emerge parzialmente fino a che il peso del volume d'acqua pari alla parte sommersa è uguale al peso totale dell'oggetto. In questa posizione l'oggetto galleggia in equilibrio.

La spinta di galleggiamento si può considerare applicata al baricentro del fluido spostato dalla parte sommersa di un oggetto galleggiante, punto che è definito *centro di galleggiamento* o *centro di spinta*, mentre il peso dell'oggetto è applicato al baricentro di quest'ultimo. Questi due punti in generale non coincidono, salvo che per un corpo omogeneo completamente sommerso (Figura 15.11a). Se essi giacciono sulla stessa linea verticale, l'oggetto galleggia in equilibrio, perché la risultante delle forze applicate e il loro mo-

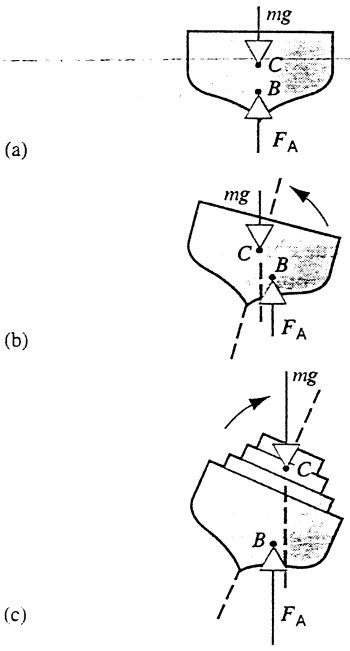


FIGURA 15.11 (a) Sezione trasversale di una nave che galleggia diritta. La forza di galleggiamento F_A agisce sul centro di spinta B, mentre il peso è applicato al baricentro C. La nave è in equilibrio sotto l'azione di queste due forze. (b) Quando la nave rolla, il centro di spinta non viene più a trovarsi sull'asse verticale passante per il baricentro, e la nave è soggetta a un momento torcente uguale al prodotto della forza di galleggiamento F_A per la distanza del centro di spinta B dall'asse verticale passante per il baricentro C. In questo caso il momento torcente è applicato in verso concorde a quello necessario per raddrizzare la nave. (c) Qui l'altezza del baricentro rispetto al centro di spinta è maggiore, e il momento torcente dovuto alla spinta agisce nel senso discorde a quello di riequilibrio della nave, facendola ribaltare.

 ISBN 88-408-1254-7

mento torcente totale sono nulli. Ma se l'oggetto viene mosso leggermente dalla sua posizione di equilibrio, in generale la forma del volume di fluido spostato varia e il centro di spinta trasla rispetto al baricentro dell'oggetto galleggiante. Il momento torcente totale in questo caso non è più nullo e, applicato all'oggetto, può riportarlo indietro alla sua posizione di equilibrio (Figura 15.11b) oppure agire in senso contrario fino a capovolgerlo (Figura 15.11c).

PROBLEMA SVOLTO 15.3 Quale frazione del volume totale di un iceberg emerge dall'acqua?

Soluzione Il peso P_i dell'iceberg è

$$P_i = \rho_i V_i g ,$$

ove ρ_i è la massa volumica e V_i il volume totale dell'iceberg. La forza di galleggiamento F_A è uguale al peso P_{am} del volume V_{am} di acqua di mare, di massa volumica ρ_{am}, spostato dalla parte sommersa dell'iceberg:

$$F_A = P_{am} = \rho_{am} V_{am} g .$$

Ma per la condizione di equilibrio F_A è uguale a P_i, e perciò

$$\rho_{am} V_{am} g = \rho_i V_i g .$$

Introducendo i valori di massa volumica indicati nella Tabella 15.2 otteniamo

$$\frac{V_{am}}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_{am}} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1027 \text{ kg/m}^3} = 0{,}896 = 89{,}6\,\% .$$

Il volume sommerso, uguale al volume di acqua di mare spostato V_{am}, è l'89,6 % del volume totale dell'iceberg V_i e la parte emersa è pari al rimanente 10,4 %.

15.5 MISURAZIONE DELLA PRESSIONE

La pressione esercitata da un fluido si può misurare con metodo statico o dinamico. I metodi dinamici, esaminati nel Capitolo 16, si basano sulla velocità di un fluido in movimento; vedremo qui i metodi statici per la misurazione della pressione.

La maggior parte dei manometri fissa la pressione atmosferica come livello di riferimento e indica quindi la differenza fra la pressione effettiva del fluido e la pressione atmosferica, chiamata *pressione relativa*. La pressione effettiva in un punto di un fluido è detta *pressione assoluta*, ed è uguale alla somma della pressione atmosferica e della pressione relativa. La pressione assoluta è sempre soltanto positiva e può essere maggiore o minore della pressione atmosferica. Di conseguenza la pressione relativa può assumere valore positivo o negativo.

Il barometro a mercurio è costituito da un lungo tubo di vetro (chiuso a un'estremità) che viene riempito di mercurio e quindi rovesciato e immerso in una vaschetta di mercurio, come nella Figura 15.12. Lo spazio che rimane al di sopra della colonna di mercurio è in pratica vuoto, contenendo soltanto vapore di mercurio, che alla temperatura ordinaria

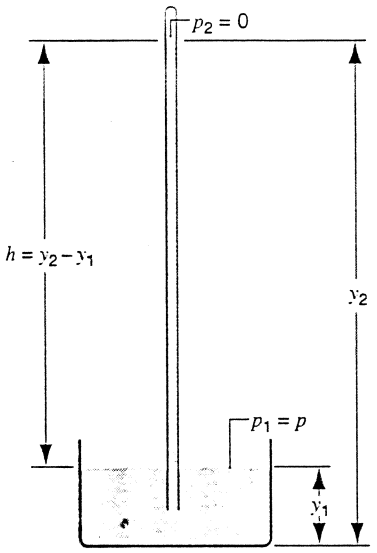


FIGURA 15.12 Barometro a mercurio. Il mercurio nella vaschetta è in equilibrio, sotto l'influenza della pressione atmosferica e del peso del mercurio contenuto nella colonna verticale.

ha una pressione p_2 tanto piccola da poter essere trascurata. La pressione p_1 alla superficie libera della vaschetta di mercurio è la pressione incognita p che vogliamo misurare. Dall'Equazione 15.8 abbiamo

$$p_2 - p_1 = 0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho g h ,$$

ossia

$$p = \rho g h . \qquad (15.19)$$

Misurando l'altezza della colonna rispetto alla superficie del mercurio si ottiene la pressione (assoluta).

Il barometro a mercurio è spesso usato per misurare la pressione atmosferica p_0. Secondo l'Equazione 15.19, l'altezza h di una colonna di mercurio alla pressione atmosferica normale (1 atm = $1{,}01325 \cdot 10^5$ Pa) è

$$h = \frac{p_0}{\rho g} = \frac{1{,}01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{(13{,}5955 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)(9{,}80665 \text{ m/s}^2)} =$$
$$= 0{,}7600 \text{ m} = 760{,}0 \text{ mm} ,$$

ove abbiamo introdotto il valore standard per g e la massa volumica del mercurio a 0 °C. Si usa spesso dire che 1 atm è uguale a 760 mm di Hg, o in modo equivalente, 1 mmHg = 1/760 atm. La pressione esercitata da una colonna di mercurio alta 1 mm (sempre a 0 °C e per il valore standard di g) è chiamata torr, e quindi

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg} = 133{,}322 \text{ Pa}.$$

Possiamo chiederci perché sia stato adottato un liquido così pesante per la misura della pressione. Un liquido di minore massa volumica avrebbe richiesto una colonna proporzionalmente più alta: per misurare la pressione atmosferica un barometro ad acqua richiederebbe una colonna di oltre 10 metri d'altezza!

La pressione standard di 1 atm equivale all'incirca a 1 bar, pari a un peso di 10^5 N esercitato sull'area di 1 m^2.

Questo significa che, a livello del mare, la colonna d'aria atmosferica di sezione 1 m^2 pesa 10^5 N.

Il barometro a mercurio è stato inventato dall'italiano Evangelista Torricelli (1608–1647), dal quale ha preso il nome l'unità «torr». Pascal, pochi anni più tardi, fu il primo a utilizzare il barometro per dimostrare che la pressione atmosferica varia con l'altitudine. Questi esperimenti furono molto importanti perché per la prima volta dimostrarono la possibilità di creare il vuoto, in questo caso nel piccolo volume in cima al tubo verticale. Si arrivò così verso la fine del XVII secolo a costruire pompe a «vuoto», capaci cioè di creare in recipienti chiusi pressioni inferiori a quella atmosferica.

Il manometro a tubo aperto (Figura 15.13) misura pressioni relative. Consiste in un tubo a U contenente un liquido, che ha un'estremità aperta in comunicazione con l'atmosfera e l'altra collegata al sistema (serbatoio) del quale vogliamo misurare la pressione p. Dalla (15.9) abbiamo

$$p - p_0 = \rho g h .$$

La pressione relativa $p - p_0$ è proporzionale alla differenza tra le altezze delle colonne liquide nei due rami del tubo a U. Onde contenere l'altezza nel tubo aperto entro valori ragionevoli, se il recipiente contiene un gas ad alta pressione, bisogna impiegare un liquido molto denso come il mercurio, mentre per gas a bassa pressione si può usare acqua o altri liquidi di minore massa volumica.

PROBLEMA SVOLTO 15.4 La colonna di mercurio in un barometro ha un'altezza h misurata di 740,35 mm. La temperatura è −5,0 °C, alla quale la massa volumica del mercurio vale $1{,}3608 \cdot 10^4$ kg/m^3. L'accelerazione di gravità nel sito è 9,7835 m/s^2. Qual è la pressione atmosferica?

Soluzione Dall'Equazione 15.19 si ha

$$p_0 = \rho g h =$$
$$= (1.3608 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3)(9{,}7835 \text{ m/s}^2)(0.74035 \text{ m}) =$$
$$= 9.8566 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 739{,}31 \text{ torr}.$$

Si noti che il valore della pressione in torr (739,31 torr) è numericamente molto prossimo al valore dell'altezza h della colonna di mercurio espresso in mm (740,35 mm). I due valori sarebbero identici se il barometro si trovasse in un luogo dove g avesse il valore standard e la temperatura del mercurio fosse 0 °C.

Lo stesso risultato sarebbe più probabilmente diffuso da una stazione meteorologica come $p = 0,98566$ bar ovvero 985,66 millibar, essendo 1 bar = 10^5 Pa.

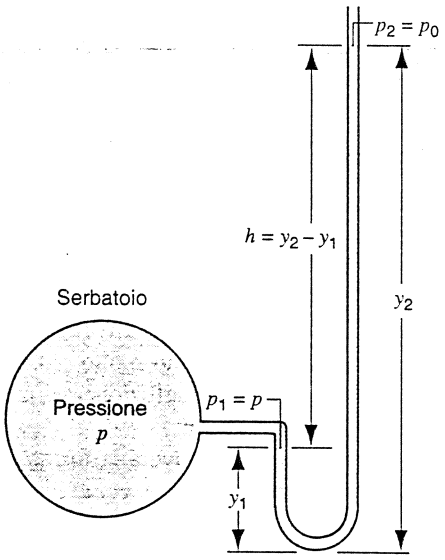


FIGURA 15.13 Un manometro a tubo aperto, utilizzabile per misurare la pressione di un fluido in un serbatoio.

15.6 TENSIONE SUPERFICIALE (facoltativo)

Spesso si possono vedere piccoli oggetti, come foglie e insetti, che galleggiano sulla *superficie* di uno specchio d'acqua senza essere parzialmente sommersi, e quindi *non* sostenuti per effetto del principio di Archimede.

Essi sono sostenuti dalla *tensione superficiale* del liquido. Si può mettere in evidenza questo fenomeno appoggiando cautamente un ago di acciaio o una lametta di rasoio sulla superficie dell'acqua (Figura 15.14a). Per il principio di Archimede un oggetto d'acciaio non potrebbe mai galleg-

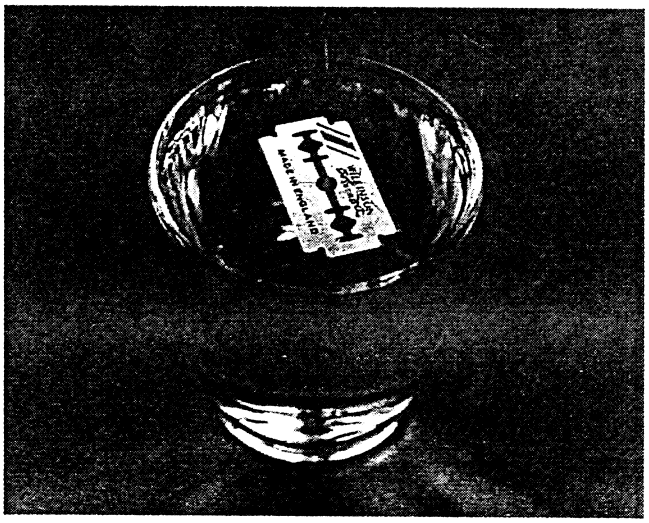


FIGURA 15.14 (a) Una lametta di rasoio galleggia sulla superficie dell'acqua, sostenuta soltanto dalla tensione superficiale. (b) La superficie è deformata dall'oggetto galleggiante, tenuto a galla dalle componenti verticali della forza di superficie F_s.

 ISBN 88-408-1254-7

giare, avendo una massa volumica circa otto volte maggiore di quella dell'acqua. Se l'ago o la lametta vengono immersi sotto il pelo dell'acqua, essi vanno a fondo come prevede il principio di Archimede. Possono galleggiare soltanto se sono completamente fuori, al di sopra della superficie libera. Se si aggiunge all'acqua un prodotto chimico appartenente alla categoria dei cosiddetti agenti tensioattivi o imbibenti, che diminuiscono la tensione superficiale riducendo la forza di coesione fra le molecole di superficie, sostenere gli oggetti in questo modo diventerà più difficile. I detersivi sono i più comuni imbibenti. Introducendo lentamente un detersivo nell'acqua su cui sta galleggiando una lametta di rasoio, a un certo istante la tensione superficiale diminuirà bruscamente e la lametta andrà rapidamente a fondo.

Un oggetto galleggiante come quello di Figura 15.14a comprime leggermente lo strato superficiale del fluido e tende così ad aumentare la sua energia potenziale. Come se fosse un trampolino, questo strato superficiale esercita una forza di ricupero la cui componente verticale riesce a equilibrare il peso dell'oggetto sovrastante. Vedremo però che questa analogia di comportamento dello strato superficiale non è del tutto corretta.

La Figura 15.15 suggerisce un modo di misurare la tensione superficiale di un liquido. Un filo sottile è piegato in modo da formare tre lati di un rettangolo che, al posto del quarto lato, presenta un tratto di filo scorrevole. Se si produce una pellicola di liquido all'interno del rettangolo, eventualmente immergendolo verticalmente in un recipiente, la tensione superficiale tenderà a trascinare verso il basso il filo scorrevole. Per mantenerlo in equilibrio dovremo applicare una forza diretta verso l'alto, di valore uguale alla somma del peso del filo e della forza F dovuta alla tensione superficiale.

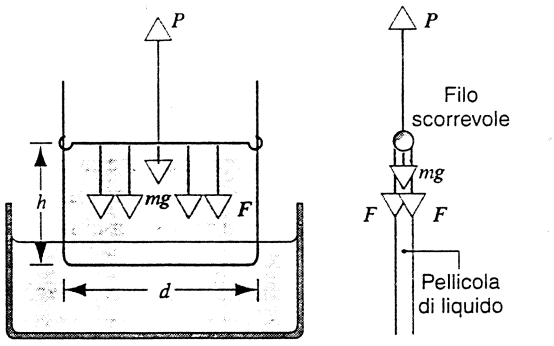
L'esperienza dimostra che questa forza dipende dalla lunghezza d del filo scorrevole ma non dall'altezza h del rettangolo. Anche se si è indotti a considerare la tensione superficiale come una specie di foglio elastico teso sopra il liquido, questo esperimento prova che tale interpretazione non è corretta. Immaginiamo che la pellicola di Figura 15.15 sia divisa verticalmente in un gran numero N di strisce strette aventi lunghezza h e larghezza $\Delta d = d/N$. Se la pellicola si comportasse come un foglio elastico, ogni striscia sarebbe simile a una molla, e la forza totale dipenderebbe dal numero totale delle strisce, e quindi da d, e dalla lunghezza h delle strisce. Ma poiché si è osservato che la tensione superficiale è funzione soltanto di d e non di h, la similitudine con il foglio elastico non regge.

La tensione superficiale γ è definita come il modulo della *forza superficiale F per unità di lunghezza L su cui agisce*, ossia

$$\gamma = \frac{F}{L}. \tag{15.20}$$

Si noti che γ non è una forza ma una forza per unità di lunghezza: mentre finora con il termine *tensione* avevamo indicato una forza, qui esso è usato in un'accezione ben differente.

Per la pellicola di Figura 15.15 la forza agisce su una lunghezza $L = 2d$, perché vi sono due facce superficiali



(a) (b) Sezione trasversale

FIGURA 15.15 (a) Diagramma schematico di un esperimento per misurare la tensione superficiale di un liquido. Una pellicola del liquido è sostenuta nell'area verticale interna alla cornice rettangolare il cui lato superiore è costituito da un filo che può scorrere verticalmente. Una forza esterna bilancia il peso del filo scorrevole e la forza F diretta verso il basso dovuta alla tensione della pellicola di liquido. (b) Una sezione trasversale della pellicola, che mostra come la tensione superficiale agisca su entrambe le superfici.

ciascuna di lunghezza d: in questa sistemazione si ha quindi $\gamma = F/2d$.

Si può anche considerare la tensione superficiale con riferimento all'energia invece che alla forza. Supponiamo di spostare verso l'alto il filo scorrevole di Figura 15.15 di un tratto di lunghezza Δx. Il lavoro compiuto dalla forza diretta verso il basso sarà $L = -F\,\Delta x$, e potremo associare il lavoro di questa forza conservativa con una variazione di energia potenziale $\Delta U = -L = F\,\Delta x$. Spostando il filo verso l'alto, l'area della superficie aumenta di $\Delta A = L\,\Delta x$, e la (15.20) diventa

$$\gamma = \frac{F}{L} = \frac{F\,\Delta x}{L\,\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta A}. \tag{15.21}$$

In base all'Equazione 15.21 la tensione superficiale γ si può considerare anche come l'*energia potenziale superficiale per unità di area della superficie*.

Per l'acqua a temperatura ambiente il valore della tensione superficiale è $\gamma = 0{,}073$ N/m. L'aggiunta di sapone la riduce a 0,025 N/m. I liquidi organici e le soluzioni acquose hanno tensioni superficiali di valore simile. La tensione superficiale dei metalli liquidi è normalmente maggiore di un ordine di grandezza rispetto a quella dell'acqua. Il mercurio, liquido a temperatura ambiente, ha una tensione superficiale di 0,487 N/m. Questo maggior valore della tensione superficiale è dovuto al fatto che nei metalli le forze di coesione fra le molecole sono molto più intense: per questa stessa ragione i punti di ebollizione dei metalli sono molto più alti di quello dell'acqua.

Alla tensione superficiale è dovuta la forma sferica che assumono le gocce di liquido sospese, come illustra la Figura 15.16. Per una goccia di una certa massa o di un certo volume l'energia legata alla tensione superficiale, uguale a γ moltiplicato per la superficie libera, è tanto minore quanto minore è l'area della superficie; la sfera, come noto, pre-



FIGURA 15.16 Gocce di liquido liberamente sospese in un'astronave assumono spontaneamente forma sferica. Vediamo qui l'astronauta Dr. Joseph P. Allen, in orbita terrestre sulla navetta spaziale *Columbia*, che osserva una bolla di succo d'arancia che ha creato servendosi del distributore di bibite.

senta il minimo rapporto superficie/volume rispetto a qualsiasi altra forma geometrica. Se sulla goccia non agiscono altre forze, essa verrà automaticamente ad assumere la forma sferica. In situazione di equilibrio la tensione superficiale crea su ogni elemento di superficie una forza netta diretta verso l'interno, che è equilibrata da un'uguale forza verso l'esterno dovuta alla pressione del liquido. In una bolla di sapone, che ha due superfici e quindi una tensione superficiale doppia di una goccia di uguale volume, la pressione relativa del gas confinato nella bolla fornisce la forza diretta verso l'esterno che assicura l'equilibrio.

Dato che protoni e neutroni all'interno del nucleo sono soggetti a forze aventi un raggio d'azione molto corto, analoghe a quelle intermolecolari di un liquido, un nucleo presenta una tensione superficiale simile a quella di una goccia di liquido. Per molti nuclei la forma è determinata dall'equilibrio fra la forza diretta verso l'esterno dovuta alla repulsione elettrica fra i protoni e la forza della tensione superficiale diretta verso l'interno: per essi la forma preferenziale è normalmente quella sferica, come per la goccia di liquido. Assimilare il nucleo a una goccia d'acqua carica elettricamente si è rivelato molto proficuo per interpretare la fissione nucleare, fenomeno in cui il nucleo si spacca in due parti di dimensioni circa uguali.

PROBLEMA SVOLTO 15.5 In un esperimento simile a quello di Figura 15.15a è risultato che il filo scorrevole è in equilibrio quando la forza verso l'alto è $P = 3{,}45 \cdot 10^{-3}$ N. Il filo ha lunghezza $d = 4{,}85$ cm e massa lineica $\mu = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ kg/m. Trovare la tensione superficiale del liquido.

Soluzione Per la condizione di equilibrio illustrata nella Figura 15.15b si ha

$$\sum F_y = P - F - mg = 0,$$

ossia

$$F = P - mg.$$

Essendo $F = 2d\gamma$ per il doppio strato di lunghezza d ed essendo $m = \mu d$, si ottiene

$$2d\gamma = P - \mu dg,$$

ossia

$$\gamma = \frac{P - \mu dg}{2d} =$$

$$= \frac{3{,}45 \cdot 10^{-3}\ \text{N} - (1{,}75 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/m})(0{,}0485\ \text{m})(9{,}80/\text{s}^2)}{2(0{,}0485\ \text{m})} =$$

$$= 0{,}027\ \text{N/m}.$$

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

15.1 Fluidi e solidi

1. Quali dei seguenti tipi di forze: (A) di compressione, (B) di tensione o (C) di taglio possono essere sopportati da
   (a) un solido? (b) un liquido?

15.2 Pressione e massa volumica

2. L'oggetto B ha massa volumica doppia e metà massa rispetto all'oggetto A. Il rapporto tra il volume di A e quello di B è
   (A) 4. (B) 2. (C) 1.
   (D) 1/2. (E) 1/4.
3. Una ventosa è applicata sotto una lamiera liscia. Il massimo peso sostenibile dalla ventosa dipende
   (A) dalla sua area di contatto con la lamiera.
   (B) dalla pressione dell'aria esterna.
   (C) sia da (A) sia da (B).
   (D) né da (A) né da (B).

15.3 Variazione della pressione in un fluido a riposo

4. La superficie superiore di un liquido incomprimibile è libera. La pressione alla profondità h_1 è p_1. Quale sarà il rapporto tra p_2 alla profondità $h_2 = 2h_1$ e p_1?
   (A) $p_2 > 2p_1$. (B) $p_2 = 2p_1$. (C) $p_2 < 2p_1$.

15.4 Il principio di Pascal e il principio di Archimede

5. Un grande masso è legato a un pallone pieno d'aria. Entrambi sono immersi in un lago. Mentre il pallone affonda (a) la pressione dell'aria all'interno del pallone
   (A) aumenta. (B) rimane costante.
   (C) diminuisce. (D) varia in modo imprevedibile.

 ISBN 88-408-1254-7

(b) la massa volumica media del sistema pallone + aria + masso
(A) aumenta. (B) rimane costante.
(C) diminuisce. (D) varia in modo imprevedibile.
(c) l'intensità della forza netta sul sistema pallone + aria + masso
(A) aumenta. (B) rimane costante.
(C) diminuisce. (D) varia in modo imprevedibile.

6. Il corpo umano (medio) galleggia nell'acqua. I sommozzatori portano dei pesi e un giubbetto salvagente che può essere gonfiato con una quantità variabile d'aria per ottenere condizioni di equilibrio statico. Se un sommozzatore ha stabilito queste condizioni, volendo raggiungere la stessa condizione di equilibrio statico a una profondità inferiore dovrà
(A) espellere dal giubbetto una parte dell'aria.
(B) immettere aria nel giubbetto.
(C) non far nulla, perché l'equilibrio di galleggiamento è già esistente.

7. Un pneumatico d'auto completamente pieno d'acqua è montato su un asse orizzontale. Come varia la pressione interna quando (a) non si applica alcuna forza aggiuntiva; (b) alla parte più bassa del pneumatico si applica una forza molto intensa diretta verso l'alto; (c) alla parte più alta del pneumatico si applica una forza molto intensa diretta verso il basso?
(A) La pressione in alto è sensibilmente maggiore.
(B) La pressione è all'incirca uguale in ogni punto.
(C) La pressione in basso è sensibilmente maggiore.
(D) La variazione di pressione non può essere valutata in assenza di ulteriori informazioni.

8. Un blocco di legno galleggia nell'acqua entro un recipiente stagno. Quando il recipiente è a riposo, il 25 % del blocco rimane fuori dell'acqua. Esaminate questi cinque casi: (a) si sposta il recipiente verso l'alto a velocità costante; (b) si sposta il recipiente verso il basso a velocità costante; (c) si sposta il recipiente verso l'alto a velocità crescente; (d) si sposta il recipiente verso il basso a velocità decrescente; (e) si aumenta la pressione dell'aria all'interno del recipiente. Che cosa accade in ciascuno dei casi?
(A) Il blocco galleggia emergendo maggiormente dall'acqua.
(B) Il blocco galleggia alla stessa altezza fuori dell'acqua.
(C) Il blocco galleggia più immerso nell'acqua.
(D) Le informazioni fornite non consentono di valutare quale frazione del volume del blocco rimanga fuori dell'acqua.

9. Un secchiello *A* contiene soltanto acqua. Un identico secchiello *B* contiene oltre all'acqua un oggetto solido immerso. Esaminate queste quattro situazioni: (a) l'oggetto galleggia nel secchiello *B*, e l'acqua nei due secchielli si trova allo stesso livello; (b) l'oggetto galleggia nel secchiello *B*, e i due secchielli contengono lo stesso volume d'acqua; (c) l'oggetto è sommerso completamente nel secchiello *B*, e l'acqua nei due secchielli si trova allo stesso livello; (d) l'oggetto è sommerso completamente nel secchiello *B*, e i due secchielli contengono lo stesso volume d'acqua. In ciascuna di queste situazioni quale dei due secchielli ha il maggiore peso totale?
(A) Il secchiello *A*.
(B) Il secchiello *B*.
(C) I due secchielli hanno lo stesso peso.
(D) In mancanza di ulteriori informazioni non è possibile decidere.

15.5 Misurazione della pressione

15.6 Tensione superficiale

10. Una bolla di sapone sferica ha un raggio r, una tensione superficiale γ e contiene aria a pressione p. Nella bolla viene soffiata altra aria fino a raddoppiare il raggio.
(a) La tensione superficiale della bolla di sapone è ora
(A) poco minore di γ. (B) rimasta uguale a γ.
(C) poco maggiore di γ. (D) raddoppiata.
(b) La pressione dell'aria nella bolla così gonfiata è
(A) poco minore di p. (B) rimasta uguale a p.
(C) poco maggiore di p. (D) raddoppiata.

QUESITI

1. Spiegate come la pressione, che è una quantità scalare, possa dar luogo a forze, che sono vettoriali.
2. Provate a stimare la massa volumica media del vostro corpo. Spiegate come potreste ottenere un valore attendibile partendo dalle idee esposte in questo capitolo.
3. Nel Capitolo 19 vedremo come una sovrapressione al timpano di soli 20 Pa rappresenti la soglia del dolore per eccesso di rumore. Un nuotatore subacqueo, tuttavia, a soli 2 metri di profondità subisce una pressione (quanto grande?) molto maggiore di questa senza sentire dolore. Come mai?
4. Una persona costretta a letto ha un rischio minore di piaghe da decubito usando un materasso ad acqua in luogo di uno normale. Perché?
5. Come ci si può stendere su un letto di chiodi senza soffrire?
6. Spiegate l'affermazione: "l'acqua trova sempre il proprio livello".
7. Nella Figura 15.17 vediamo tre recipienti di forma diversa ma aventi la stessa area di base, che sono stati riempiti d'acqua fino allo stesso livello. Poiché la pressione sul fondo di ciascuno è la stessa, anche la forza esercitata sulla base di ogni recipiente sarà la stessa. Perché allora, messi su una bilancia, ciascuno di essi avrà un peso diverso? Questo risultato apparentemente contraddittorio è noto come *paradosso idrostatico*.

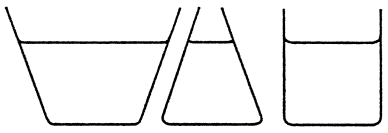


FIGURA 15.17 Quesito 7.

8. Il principio di Archimede è valido anche in un recipiente in caduta libera? E in un satellite in moto su un'orbita circolare?

9. Un oggetto sferico di sughero galleggia semisommerso in una teiera ferma sulla Terra. Galleggerà o andrà a fondo su un'astronave (a) che va liberamente alla deriva nello spazio oppure (b) ferma sulla superficie di Marte?
10. Come funziona una ventosa?
11. La forza di galleggiamento su un sommergibile immerso è uguale a tutte le profondità?
12. Spiegate come fa un sommergibile a salire, scendere o mantenere una profondità fissa. I pesci operano sullo stesso principio?
13. Un blocco di legno galleggia in un secchio d'acqua in un ascensore. Quando la cabina parte e accelera scendendo, il blocco si solleva nel secchio?
14. Due secchielli identici sono pieni d'acqua fino all'orlo, ma in uno dei due un blocco di legno galleggia nell'acqua. Quale dei due è, eventualmente, più pesante?
15. Stimate attentamente quale può essere la forza di galleggiamento esercitata dall'aria sul vostro corpo.
16. In base al risultato del Problema svolto 15.3, l'89.6 % di un iceberg è sommerso. Talvolta però, gli iceberg capovolgono, con effetti disastrosi sui natanti nelle vicinanze. Come può succedere, dato che una parte tanto grande della loro massa è sotto il livello del mare?
17. Si può far affondare una nave di ferro riversando dentro di essa acqua di mare?
18. Ai sommozzatori si raccomanda di non trattenere il fiato mentre risalgono. Perché?
19. Un bicchiere è pieno fino all'orlo di acqua liquida al punto di congelamento e ha un cubetto di ghiaccio che galleggia, anch'esso al punto di fusione. Mentre il cubo si scioglie, che cosa succede al livello dell'acqua in questi tre casi: (a) il cubo è di ghiaccio compatto; (b) il cubo contiene alcuni granelli di sabbia; e (c) il cubo contiene delle bolle d'aria?
20. Benché i paracadute abbiano lo scopo di rallentare la caduta, spesso presentano un foro alla sommità. Spiegatene la ragione.
21. Una palla galleggia sulla superficie dell'acqua in un recipiente aperto in atmosfera. La palla rimarrà immersa alla stessa profondità, salirà o scenderà se (a) si chiude il recipiente e si toglie l'aria oppure (b) si chiude il recipiente e si comprime l'aria?
22. Spiegate perché un pallone gonfiato, quando comincia a salire, arriva soltanto fino a una certa altezza dove si ferma, mentre un sommergibile, quando comincia a scendere, se non intervengono cambiamenti, non si ferma fino a che non raggiunge il fondo marino.
23. Perché un pallone ha lo stesso peso quando è vuoto e quando è gonfiato con aria a pressione atmosferica? I pesi sarebbero gli stessi se si operasse nel vuoto?
24. I recipienti contenenti liquidi tendono a perdere se portati a grande altezza in aeroplano. Perché? Ha influenza il fatto che siano messi ritti o capovolti? O che siano inizialmente completamente pieni?
25. Durante la seconda guerra mondiale un mercantile silurato che riusciva a malapena a stare a galla nel Mare del Nord si rifugiò nell'estuario del Tamigi cercando di raggiungere i moli di Londra. Ma affondò prima di riuscire a raggiungerli. Perché?
26. È vero che un oggetto galleggiante è in equilibrio stabile soltanto se il centro di galleggiamento si trova al di sopra del suo baricentro? Spiegate con esempi.
27. Dei tronchi immersi verticalmente nell'acqua non rimangono ritti, ma galleggiano «coricati», semisommersi nell'acqua. Se ne dia una spiegazione.
28. Perché una nave che sta affondando spesso si capovolge immergendosi nell'acqua?
29. Una chiatta carica di rottame di ferro entra in una chiusa. Che cosa succede al livello dell'acqua nella chiusa se si butta il rottame fuori bordo? E se viene scaricato sulla riva fuori della chiusa?
30. Un secchio d'acqua è appeso a una bilancia a molla. La lettura della bilancia varia se si immerge nell'acqua un pezzo di ferro appeso a una corda? E se si mette nell'acqua un pezzo di sughero?
31. Se si attacca un peso sufficiente di ferro o un blocco di legno omogeneo all'estremità di un bastone, questo galleggerà in posizione verticale anziché orizzontale come nel Quesito 27. Spiegate perché.
32. Anche se con qualche difficoltà pratica, è teoricamente possibile far galleggiare un transatlantico in pochi litri d'acqua. Come riuscireste nell'intento?
33. Un secchio d'acqua aperto sta su un piano privo di attrito inclinato di un angolo α sul piano orizzontale. Trovate la pendenza di equilibrio sul piano orizzontale del livello dell'acqua (a) se il secchio è tenuto fermo; (b) se è lasciato scivolare giù a velocità costante ($a = 0$, $v =$ costante) e (c) se scivola giù liberamente ($a =$ costante). E che cosa avviene se il piano è incurvato talché $a \neq$ costante?
34. In un barometro, che importanza ha il fatto che il diametro interno del tubo sia uniforme? E che esso sia perfettamente verticale?
35. Un manometro a tubo aperto ha un tubo di diametro doppio dell'altro. Spiegate come ciò possa influenzarne il funzionamento. È importante sapere quale dei due tubi sia collegato al recipiente in prova?
36. Abbiamo finora considerato liquidi sottoposti a compressione. Si può applicare una tensione a un liquido? Se sì, si strapperà come farebbe un solido? (Vedi R.E. Apfel, *La resistenza a trazione dei liquidi*, «Le Scienze», mar. 1973, p. 16.)
37. Spiegate perché sia difficile separare due lastre di vetro unite da un sottile strato di liquido tirando direttamente per allontanarle, mentre si riesce facilmente facendole scivolare una rispetto all'altra.
38. Date una spiegazione basata sulla teoria molecolare della ragione per cui la tensione superficiale diminuisce al crescere della temperatura.
39. Le pellicole di acqua saponata sono molto più stabili di quelle d'acqua. Perché? (Considerate come reagisce allo stiramento la tensione superficiale.)
40. Spiegate perché una pellicola di acqua saponata si distrugge se vi si forma un forellino.
41. Commentate queste constatazioni: (a) l'acqua forma goccioline su un piatto unto di grasso ma non su uno pulito; (b) le bollicine sulla superficie dell'acqua tendono a raggrupparsi.
42. Se il sapone riduce la tensione superficiale dell'acqua, perché soffiamo bolle di sapone invece che di acqua?

 ISBN 88-408-1254-7

43. Alcuni insetti acquatici possono camminare sull'acqua. Provate a valutare il peso massimo che può avere un insetto per essere sostenuto in questo modo.
44. Qual è la fonte di energia che consente a un fluido di salire in un capillare (come per esempio un sottilissimo tubo di vetro)?
45. Che cosa significa dire che certi liquidi possono esercitare una debole pressione negativa?

ESERCIZI

15.1 Fluidi e solidi

15.2 Pressione e massa volumica

1. Calcolare l'aumento di pressione del fluido in una siringa quando l'infermiere applica una forza di 42.3 N al pistone di diametro 1,12 cm della siringa.
2. Si versano tre liquidi non miscibili in un recipiente cilindrico. I loro volumi e le loro masse volumiche sono i seguenti: 0,50 L, 2.6 g/cm^3; 0,25 L, 1,0 g/cm^3; 0,40 L, 0,80 g/cm^3. Trovare la forza totale esercitata sul fondo del recipiente, ignorando il contributo dell'atmosfera. Ha qualche influenza il fatto che i tre liquidi si mescolino fra loro?
3. La finestra di un ufficio ha dimensioni 3,43 m · 2,08 m. In seguito al passaggio di un uragano, la pressione esterna scende a 0,962 bar, mentre all'interno si mantiene a 1,00 bar. Quale forza netta spinge in fuori la finestra?
4. Un cubo di rame pieno ha il lato di 85,5 cm. Che pressione bisogna applicargli per ridurre la lunghezza del lato a 85,0 cm? Il modulo di comprimibilità del rame è 140 GPa.
5. Da una scatola stagna la cui apertura ha un'area di 77,4 cm^2 è parzialmente aspirata l'aria. Se per togliere il coperchio occorre una forza di 480,4 N e la pressione atmosferica esterna è di 10,34 N/cm^2, qual era la pressione all'interno della scatola?

15.3 Variazione di pressione in un fluido a riposo

6. I polmoni umani possono funzionare sotto una pressione differenziale minore di 0,050 bar. A quale profondità sotto il livello dell'acqua può nuotare una persona respirando attraverso un boccaglio?
7. Calcolare la differenza di pressione idrostatica del sangue fra il cervello e i piedi in una persona alta 1,83 m.
8. Trovare la pressione totale, in pascal, a 118 m di profondità sotto la superficie del mare. La massa volumica dell'acqua marina è di 1,024 kg/cm^3 e la pressione atmosferica a livello del mare è 1,013 · 10^5 Pa.
9. Lo scarico fognario di una casa costruita su un terreno in pendenza è 8,16 m sotto il livello stradale. Se la fognatura passa 2,08 m sotto il livello stradale calcolate la differenza di pressione che deve superare la pompa di sentina per trasferirvi liquame di massa volumica media 926 kg/m^3.
10. Secondo il modello a temperatura costante dell'atmosfera terrestre (a) qual è la pressione in bar a un'altitudine di 5,00 km, e (b) a che altezza la pressione è uguale a 0,500 bar? Confrontate i risultati con i dati di Figura 15.5.
11. Un semplice tubo a U contiene mercurio. Se nel ramo di destra versiamo 11,2 cm d'acqua di quanto sale il mercurio nell'altro ramo rispetto al suo livello iniziale?
12. Una piscina ha dimensioni 24 m · 9 m · 2,4 m. (a) Quando è piena d'acqua, quanto vale la forza esercitata sul fondo dalla sola acqua? Alle estremità? Sui lati? (b) Se si teme che le pareti in calcestruzzo non reggano, è giusto considerare anche la pressione atmosferica?
13. Quale sarebbe l'altezza dell'atmosfera se la massa volumica dell'aria (a) fosse costante e (b) diminuisse linearmente fino a zero con l'altitudine? La massa volumica dell'aria a livello del mare sia 1,21 kg/m^3.
14. I membri dell'equipaggio tentano di salvarsi da un sommergibile in avaria a 112 m di profondità. Quanta forza devono applicare a un portellone di emergenza di area 1,22 m · 0,590 m per aprirlo?
15. La superficie di contatto fra due fluidi non miscibili di masse volumiche differenti, a riposo, è orizzontale. Dimostrate l'esattezza di questa affermazione partendo dal fatto (a) che l'energia potenziale di un sistema in equilibrio stabile dev'essere minima; e (b) che in entrambi i fluidi le pressioni in ogni coppia di punti di un piano orizzontale sono uguali.
16. Due recipienti cilindrici identici con le basi, di area A, allo stesso livello contengono uno stesso liquido di massa volumica ρ. In uno dei due recipienti l'altezza del liquido è h_1, nell'altro h_2. Calcolate il lavoro svolto dalla forza di gravità per rendere uguali i livelli quando i due recipienti sono messi in comunicazione.

15.4 Il principio di Pascal e il principio di Archimede

17. La tensione in una corda che tiene immerso un blocco massiccio di massa volumica uniforme in un liquido avente massa volumica maggiore del blocco è T_0 quando il recipiente è a riposo (vedi Figura 15.18). Dimostrare che quando il recipiente ha un'accelerazione verticale a diretta verso l'alto, la tensione T assume il valore $T_0(1 + a/g)$.

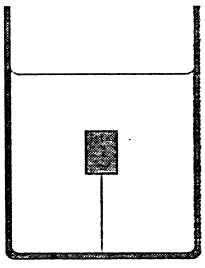


FIGURA 15.18 Esercizio 17.

18. (a) Se il pistone minore di una leva idraulica ha diametro pari a 3,72 cm e il maggiore ha diametro pari a 51,3 cm, quale peso sul pistone minore terrà in equilibrio un peso di 18,6 kN (per esempio, un'automobile) sul pistone maggiore? (b) Per quale distanza dovrà scorrere il pistone minore per sollevare l'auto di 1,65 m?

19. Una barca galleggiante in acqua dolce sposta 35,6 kN d'acqua. Quale peso d'acqua sposterebbe se galleggiasse in acqua salata di massa volumica 1024 kg/m^3? (b) Varierebbe il volume d'acqua spostato? Se sì, di quanto?
20. Un blocco di legno galleggia nell'acqua con il 64,6 % del suo volume sommerso. Nell'olio il volume sommerso sarebbe 91,8 %. Calcolare la massa volumica (a) del legno e (b) dell'olio.
21. Una lattina ha un volume totale di 1200 cm^3 e una massa di 130 g. Quanti grammi di pallini di piombo potrebbe contenere senza affondare? (La massa volumica del piombo è di 11,4 g/cm^3.)
22. Circa un terzo del corpo di un uomo che nuotasse nel Mar Morto rimarrebbe fuori della superficie dell'acqua. Sapendo che la massa volumica del corpo umano è 0,98 g/cm^3 calcolate la massa volumica dell'acqua del Mar Morto. Perché è tanto maggiore di 1,0 g/cm^3?
23. Sapendo che la massa volumica dei pesi di ottone è 8,0 g/cm^3 e quella dell'aria 0,0012 g/cm^3, quale errore relativo si commette trascurando la spinta di Archimede dell'aria quando si pesa un oggetto di massa volumica 3,4 g/cm^3 su una bilancia a braccia?
24. Una fusione in ghisa contenente parecchie cavità pesa 6130 N in aria e 3970 N in acqua. Qual è il volume delle cavità all'interno della fusione? La massa volumica del ferro è di 7870 kg/m^3.
25. Un oggetto cubico di lato L = 0,608 m e peso nel vuoto P = 4450 N è immerso sospeso a un filo in un liquido di massa volumica ρ = 944 kg/m^3, come in Figura 15.19. (a) Calcolare la forza netta diretta verso il basso esercitata sulla parte superiore dell'oggetto dal liquido e dall'atmosfera. (b) Calcolare la forza netta diretta verso l'alto esercitata dal liquido sulla parte inferiore dell'oggetto. (c) Calcolare la tensione nel filo. (d) Calcolare la forza di galleggiamento applicata all'oggetto secondo il principio di Archimede. Quali relazioni esistono fra tutte queste quantità?

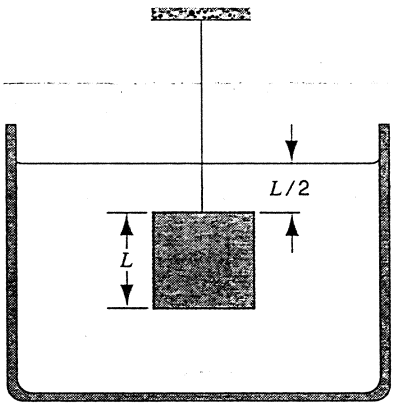


FIGURA 15.19 Esercizio 25.

26. I pesci controllano la profondità a cui nuotano regolando il contenuto di aria nelle apposite sacche d'aria per mantenere la loro massa volumica media uguale a quella dell'acqua. Supponiamo che con le sacche d'aria vuote e schiacciate la massa volumica media di un pesce sia 1,08 g/cm^3. A quale frazione del volume del suo corpo deve portare il volume delle sacche per ridurre la massa volumica media del corpo al valore di quella dell'acqua? La massa volumica media dell'aria sia 0,00121 g/cm^3.

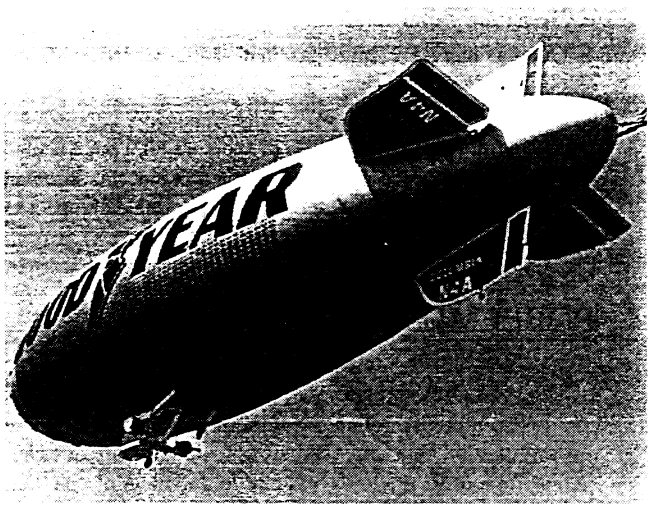


FIGURA 15.20 Esercizio 28.

27. È stato proposto di trasportare il gas dai giacimenti del Mare del Nord in enormi dirigibili, usando il gas stesso per mantenerli in quota. Calcolare la forza occorrente per ancorare una di queste aeronavi carica con 1,17 · 10^6 m^3 di gas avente massa volumica 0,796 kg/m^3. La massa volumica dell'aria sia 1,21 kg/m^3. Il peso del dirigibile è trascurabile.
28. Il pallone Columbia della Goodyear (Figura 15.20) incrocia lentamente a bassa quota, gonfio come sempre di elio. Il suo massimo carico utile è di 1280 kg. Che massa in più potrebbe portare se si sostituisse l'idrogeno all'elio? Perché non si fa più? Il volume del serbatoio d'elio è 5000 m^3. La massa volumica dell'elio è di 0,160 kg/m^3 e quella dell'idrogeno è di 0,0810 kg/m^3.
29. Tre bambini aventi la stessa massa di 37 kg si fabbricano una zattera di tronchi di diametro 32 cm e lunghezza 1,75 m. Quanti tronchi occorreranno perché la zattera ne sostenga il peso? La massa volumica del legno sia 755 kg/m^3.
30. (a) Qual è l'area minima di un blocco di ghiaccio dello spessore di 0,305 m galleggiante sull'acqua che possa sostenere un'automobile di massa 1120 kg? (b) È importante sapere in quale punto del blocco sia collocata l'auto? La massa volumica del ghiaccio è 917 kg/m^3.

15.5 Misurazione della pressione

31. Uno studente costruisce un barometro ad acqua usando un tubo lungo 15 m. Egli vuole misurare la pressione dell'aria a livello del mare alla temperatura di 25 °C. Valutate l'errore relativo nella misura della pressione per aver trascurato di considerare la pressione del vapor d'acqua.
32. Calcolate la massa volumica del vino rosso, usato da Pascal nel barometro lungo 14 m, supponendo che riempisse completamente il tubo.
33. La pressione alla superficie del pianeta Venere è 90 bar, ossia 90 volte la pressione dell'atmosfera terrestre. Quanto dovrebbe esser lungo un barometro a mercurio per misurare quella pressione, alla temperatura di 0 °C?

15.6 Tensione superficiale

34. Quanta energia è immagazzinata sulla superficie di una bolla di sapone di raggio 2,1 cm se la sua tensione superficiale è di $4{,}5 \cdot 10^{-2}$ N/m?
35. Una sottile pellicola d'acqua di spessore 80,0 pm è schiacciata fra due lastre di vetro e forma una macchia circolare di raggio 12,0 cm. Calcolare la forza normale che occorre per separare le due lastre essendo la tensione superficiale dell'acqua 0,072 N/m.
36. Usando una soluzione di sapone avente tensione superficiale 0,025 N/m, un bambino soffia una bolla di raggio 1,40 cm. Quanta energia si spende per stirare la superficie di acqua saponata?

PROBLEMI

1. Nel 1654 Otto von Guericke, borgomastro di Magdeburgo e inventore della pompa a vuoto, diede una dimostrazione davanti alla Dieta imperiale di come due squadre di cavalli non fossero in grado di separare le due metà di una sfera cava di ottone dalla quale era stata aspirata aria. (a) Dimostrare che la forza F occorrente per separare i due emisferi è $F = \pi R^2 \Delta p$, ove R è il raggio (esterno) degli emisferi e Δp la differenza di pressione fra l'esterno e l'interno della sfera (Figura 15.21). (b) Posto R = 0,305 m e la pressione interna 0,100 bar, che forza avrebbero dovuto sviluppare i cavalli per separare i due emisferi? (c) Perché furono usate due squadre di cavalli? Una sola non sarebbe stata sufficiente?

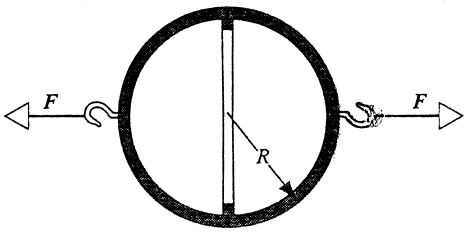


FIGURA 15.21 Problema 1.

2. Nella Figura 15.22 vediamo il *diagramma di fase* del carbonio, ossia la curva dei valori temperatura/pressione che separa i campi di cristallizzazione del carbonio sotto forma di grafite o di diamante. Qual è la minima profondità alla quale può formarsi il diamante alla temperatura di 1000 °C se le rocce in superficie hanno massa volumica di 3,1 g/cm^3? Ammettiamo che, come per i fluidi, la pressione sia dovuta al peso del materiale sovrastante.
3. Davanti al paramento verticale a monte di una diga l'acqua ha una profondità H, come nella Figura 15.23. Sia L la larghezza della diga. (a) Trovare la risultante delle forze orizzontali esercitate sulla diga dovute alla pressione relativa dell'acqua e (b) il momento torcente totale esercitato dalla pressione relativa rispetto a un asse parallelo alla diga passante per O. (c) Dov'è la linea d'azione della forza risultante equivalente?

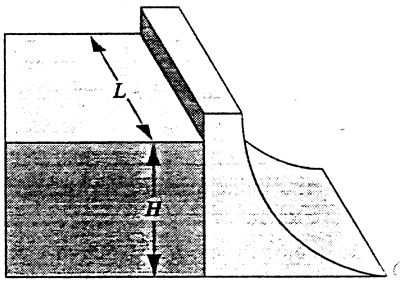


FIGURA 15.23 Problema 3.

4. Al centro del coperchio di un barile cilindrico avente le dimensioni indicate nella Figura 15.24 è inserito un tubicino verticale. Il recipiente è riempito d'acqua fino alla sommità del tubicino. Calcolate il rapporto fra la forza idrostatica esercitata sul fondo del barile e il peso dell'acqua. Perché questo rapporto non è uguale a uno? (Ignorate la presenza dell'atmosfera).
5. Analizzando certe formazioni geologiche terrestri è spesso conveniente supporre che la pressione a un certo livello orizzontale di *compensazione*, nelle profondità del mantello, sia la stessa su una grande area geografica sia uguale a quella esercitata dal peso del materiale sovrastante. Ossia la pressione al livello di compensazione si può calcolare con la formula della pressione idrostatica (per fluidi). Ciò implica, per esempio, che le montagne abbiano fondamen-

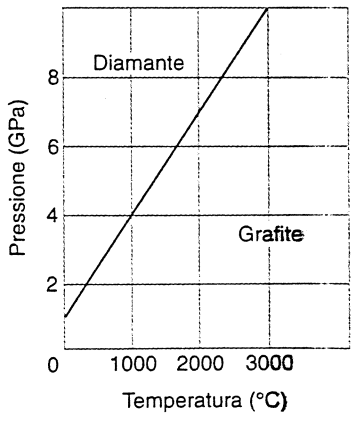


FIGURA 15.22 Problema 2.

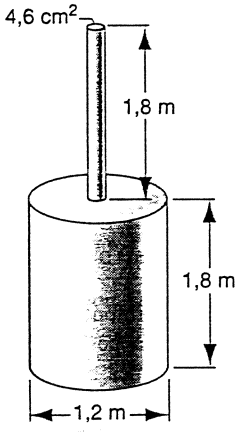


FIGURA 15.24 Problema 4.

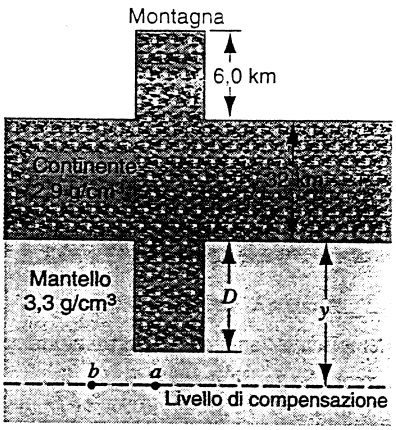


FIGURA 15.25 Problema 5.

ta di bassa massa volumica: vedi la Figura 15.25. Immaginiamo una montagna alta 6,00 km. Le rocce continentali abbiano una massa volumica di 2,90 g/cm^3 e il mantello sottostante di 3,30 g/cm^3. Calcolare la profondità D delle fondamenta. (*Suggerimento*: si ponga uguale la pressione nei punti a e b: scomparirà la profondità y del livello di compensazione.)

6. (a) Dimostrare che nel mare il rapporto fra la massa volumica ρ dell'acqua alla profondità y e la massa volumica ρ_s alla superficie è

$$\rho \approx \rho_s[1 + (\rho_s g/B)y],$$

dove $B = 2{,}2$ GPa è il modulo di comprimibilità dell'acqua. (b) In quale rapporto la massa volumica dell'acqua alla profondità di 4200 m è maggiore della massa volumica alla superficie?

7. (a) Dimostrare che l'Equazione 15.13, espressione della variazione di pressione atmosferica in funzione dell'altitudine, a temperatura supposta costante si può scrivere in termini di massa volumica nel seguente modo:

$$\rho = \rho_0 e^{-h/a},$$

ove ρ_0 è la massa volumica al suolo ($h = 0$). (b) Supponete che la forza di resistenza del mezzo D dovuta alla presenza dell'aria per un oggetto che avanza alla velocità v sia data dalla formula $D = CA\rho v^2$ ove C è una costante, A è l'area della sezione normale alla direzione del moto e ρ la massa volumica dell'aria nel punto considerato. Calcolare l'altitudine alla quale D è massima per un razzo lanciato verticalmente sottoposto ad accelerazione costante a_r.

8. (a) Immaginiamo un recipiente contenente un fluido soggetto a un'accelerazione a costante verso l'alto. Dimostrare che la variazione di pressione del fluido in funzione della profondità è data da

$$p = \rho h(g + a),$$

ove h è la profondità e ρ la massa volumica. (b) Dimostrare inoltre che, se il fluido nel suo complesso subisce un'accelerazione a diretta verso il basso, la pressione alla profondità h risulta

$$p = \rho h(g - a).$$

(c) Cosa succede se si trova in caduta libera?

9. (a) Consideriamo l'accelerazione orizzontale di una massa di liquido in un serbatoio aperto. La superficie del liquido si abbassa nella parte anteriore e si alza sul retro. Dimostrare che la superficie del liquido si inclina di un angolo pari a $\theta = \arctan(a/g)$, rispetto al piano orizzontale, ove a è l'accelerazione orizzontale. (b) Come varia la pressione in funzione di h, la profondità misurata verticalmente rispetto alla superficie?

10. Ricavare l'espressione della pressione in funzione della distanza radiale dal centro di un pianeta sferico di raggio R e massa volumica uniforme ρ.

11. Dimostrare che la variazione di pressione con l'altitudine, a temperatura costante, nell'atmosfera di un pianeta è data da

$$p = p_0 e^{k(1/r - 1/R)},$$

ove si suppone che sia $g = 1/r^2$ (r = distanza dal centro del pianeta), p_0 la pressione alla superficie, R il raggio del pianeta e k una costante. Controllate che questa espressione coincida con l'Equazione 15.12 per luoghi vicino alla superficie.

12. (a) Un fluido ruota a velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale di un contenitore cilindrico. Dimostrare che la variazione di pressione in direzione radiale è data da

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r.$$

(b) Posto $p = p_c$ sull'asse di rotazione ($r = 0$), dimostrare che la pressione p in un punto qualsiasi a distanza r dall'asse è

$$p = p_c + \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

(c) Dimostrare che la superficie liquida ha forma di paraboloide (Figura 15.26), ossia che l'intersezione diametrale di questa superficie con un piano verticale è data dalla curva $y = \omega^2 r^2/(2g)$. (d) Dimostrare che la variazione della pressione con la profondità è $p = \rho g h$.

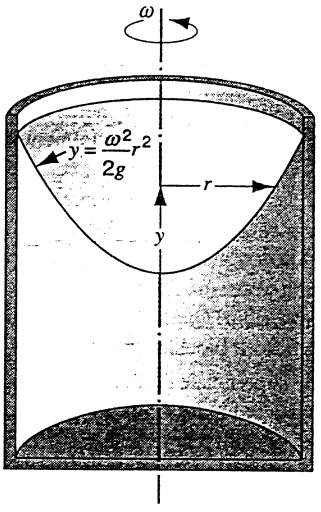


FIGURA 15.26 Problema 12.

13. Una sfera cava di ferro (Figura 15.27) galleggia a pelo d'acqua. Sapendo che il diametro esterno è 58,7 cm e la massa volumica del ferro è 7,87 g/cm^3, calcolare il diametro interno della sfera.

14. Un blocco di legno ha massa di 3,67 kg e massa volumica di 594 kg/m^3. Deve essere appesantito con piombo in modo che galleggi nell'acqua con l'88,3 % del suo volume immerso. Che massa di piombo occorre aggiungere (a) se

 ISBN 88-408-1254-7

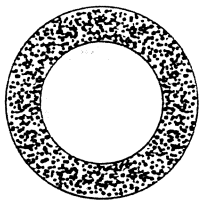


FIGURA 15.27 Problema 13.

il piombo è collocato sopra il blocco e (b) se è attaccato sotto? La massa volumica del piombo è $1{,}14 \cdot 10^4$ kg/m^3.

15. Un oggetto galleggia nel mercurio con un quarto del suo volume immerso. Se si aggiunge tanta acqua da coprire l'oggetto, che parte del suo volume resterà immersa nel mercurio?

16. Un'automobile ha una massa totale di 1820 kg. Il volume dell'abitacolo è di 4,87 m^3. Il volume del vano motore è di 0,750 m^3 e il volume del vano posteriore è di 0,810 m^3; questi vani sono a tenuta stagna. L'auto è parcheggiata su un pendio: il cavo del freno a mano si spezza e il veicolo scende entrando in un lago. (a) In un primo tempo nell'abitacolo non entra acqua. Di quanti metri cubi è immersa nell'acqua l'auto che galleggia come in Figura 15.28? (b) Mentre l'acqua entra, l'auto affonda lentamente, rimanendo orizzontale grazie a un carico pesante nel portabagagli. Quanti metri cubi d'acqua si trovano nell'abitacolo quando scompare sotto la superficie dell'acqua?

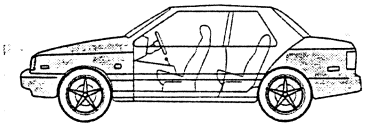


FIGURA 15.28 Problema 16.

17. Come nella Figura 15.29, si mette un bicchiere di massa 390 g e capacità 500 cm^3, parzialmente pieno d'acqua, in una bacinella. Si comincia poi a versare acqua nella bacinella e si constata, sperimentalmente, che se il bicchiere è a metà pieno d'acqua galleggia, ma se contiene una quantità d'acqua maggiore della metà del suo volume, rimane appoggiato sul fondo fino a che l'acqua arriva al suo orlo superiore. Qual è la massa volumica del materiale di cui è fatto il bicchiere?

18. La tensione superficiale dell'elio ^{4}He liquido è 0,35 mN/m e la sua massa volumica è 145 kg/m^3. Valutate (a) il numero di atomi/m^2 sulla superficie e (b) l'energia per legame, in eV, a questa temperatura. La massa dell'atomo di elio è $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg. Immaginate che ogni atomo sia un cubo e che interagisca soltanto con i quattro atomi adiacenti.

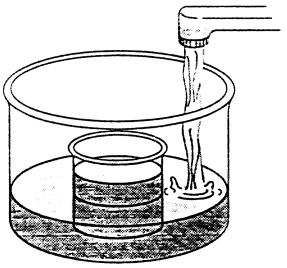


FIGURA 15.29 Problema 17.

19. Dimostrare che la differenza di pressione fra l'interno e l'esterno di una bolla di raggio r è $4\gamma/r$, dove γ è la tensione superficiale del liquido di cui è composta la bolla.

20. Una bolla di sapone sospesa sotto una campana a vuoto ha un raggio di 1,0 mm quando la pressione sotto la campana è 100 kPa. Si avvia la pompa a vuoto per un breve tempo e la bolla si gonfia fino a raggiungere un raggio di 1,0 cm. Trovare la nuova pressione nel recipiente. Si ammette pV costante essendo p la pressione interna e V il volume della bolla.

21. Una bacchetta di vetro di raggio r = 1,3 cm è collocata coassialmente in un cilindro di vetro di raggio interno R = 1,7 cm. Le estremità inferiori di entrambi, che sono su uno stesso piano orizzontale, appoggiano sulla superficie libera dell'acqua di un recipiente aperto, come in Figura 15.30. A che altezza y salirà l'acqua nella zona fra la bacchetta e il cilindro di vetro? L'angolo di contatto è 0° e la tensione superficiale dell'acqua è 72,8 mN/m.

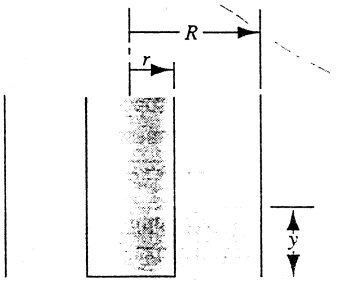


FIGURA 15.30 Problema 21.

22. Una bolla di sapone in aria ha un raggio di 3,20 cm. Viene gonfiata fino a un raggio di 5,80 cm. La sua tensione superficiale (costante) è di 26,0 mN/m. Qual è la differenza di pressione sulla pellicola di acqua saponata (a) all'inizio e (b) dopo l'aumento del raggio? (c) Quanto lavoro si è compiuto sull'atmosfera per gonfiare la bolla? (d) Quanto lavoro si è compiuto per stirare la pellicola?

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. (a) Dimostrare che le equazioni che governano la pressione in funzione della distanza radiale dal centro di un pianeta sferico gassoso, in cui la massa volumica è proporzionale alla pressione ($\rho = kp$), sono date da $dp/dr = -(Gm/r^2)kp$ e $dm/dr = 4\pi r^2 kp$, ove m è la massa contenuta nella sfera di raggio r. (b) Integrare con metodo numerico questo sistema di equazioni tra il punto r_0 e un punto più esterno r, ponendo $r_0 = 10^3$ m, $p_0 = 2 \cdot 10^{16}$ Pa, $m_0 = 7 \cdot 10^{14}$ kg. Si supponga che la costante k valga $8 \cdot 10^{-12}$ s^2/m^2. Tracciare un grafico della pressione in funzione del raggio. (c) A quale distanza la pressione è minore di quella atmosferica?

CAPITOLO 16

DINAMICA DEI FLUIDI

Passiamo ora dalla statica alla dinamica dei fluidi in movimento. Ricorreremo a concetti ormai familiari, quali le leggi di Newton e il principio di conservazione dell'energia utilizzando le variabili pressione e massa volumica già introdotte nel capitolo precedente.

Partiremo da un modello semplificato di flusso nel quale sono ignorate le forze dissipative, con criterio analogo a quello adottato nel Capitolo 12 nei confronti dell'attrito per lo studio della dinamica delle particelle, criterio che anche allora ci ha consentito di sfruttare il principio di conservazione dell'energia meccanica. Alla fine di questo capitolo daremo un breve saggio degli effetti interessanti e imprevisti che intervengono nei fluidi reali ove siano presenti forze dissipative, chiamate forze viscose.

16.1 CONCETTI GENERALI SUL MOTO DEI FLUIDI

Un modo di descrivere il moto di un fluido consiste nel dividerlo in elementi infinitesimali di volume che possiamo chiamare *particelle fluide*, e seguire gli spostamenti di ogni singola particella. Se conoscessimo le forze che agiscono su ogni particella fluida potremmo esprimere posizione e velocità di ognuna in funzione del tempo. Questo procedimento, che è una diretta generalizzazione della meccanica del punto materiale, è stato sviluppato per primo da Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Poiché il numero delle particelle in un fluido è di solito assai grande, tuttavia, questo metodo presenta difficoltà insuperabili.

Esiste però un diverso modo di procedere, sviluppato da Leonhard Euler (1707-1783), che nella maggior parte dei casi risulta più conveniente. Esso rinuncia a seguire la storia di ogni particella di fluido per definire invece la massa volumica e la velocità del fluido in ogni punto dello spazio e in ogni istante. È questo il metodo che noi seguiremo. Per descrivere il moto del fluido definiamo la massa volumica o densità $\rho(x, y, z, t)$ e la velocità $v\ (x, y, z, t)$ nel punto (x, y, z) all'istante t. Concentriamo così la nostra attenzione su ciò che avviene in un certo punto dello spazio in un certo istante invece che sul comportamento di ogni singola particella del fluido. Ogni grandezza usata per descrivere lo stato del fluido – per esempio, la pressione p – dovrà avere, in ogni istante, un valore ben definito in ogni punto dello spazio. Sebbene questo metodo concentri l'attenzione su ogni punto dello spazio piuttosto che su ogni singola particella, non possiamo evitare completamente di seguire il comportamento delle particelle stesse, per lo meno durante brevi intervalli di tempo dt. Dopotutto le leggi della meccanica si applicano a particelle e non a punti dello spazio.

Esaminiamo anzitutto alcune caratteristiche generali del moto di scorrimento di un fluido, cui ci riferiamo per lo più con l'accezione di *flusso*.

1. *Il regime di flusso può essere stazionario o turbolento.* Descriviamo il flusso in base ai valori di grandezze variabili quali la pressione, la massa volumica e la velocità di spostamento in ogni punto del fluido. Se queste variabili sono costanti nel tempo si può dire che il regime di flusso è *stazionario*. I valori possono variare da punto a punto, ma non cambiano nel tempo in ogni singolo punto. Questa condizione si può spesso realizzare a basse velocità di scorrimento, come per esempio in un fiume che scorre lentamente. In regime variabile di flusso, invece, come in un'onda di marea, le velocità v sono funzioni del tempo. Nel caso di un regime *turbolento*, come in una rapida o in una cascata, in ogni istante le velocità variano in modo imprevedibile sia da punto a punto sia da un istante all'altro.

2. *Il fluido in moto può essere comprimibile o incomprimibile.* Se la massa volumica ρ di un fluido è costante rispetto a x, y, z e t, esso è definito *incomprimibile*. Un liquido si può in generale ritenere incomprimibile. Anche per gas largamente comprimibili, tuttavia, le variazioni di massa volumica possono risultare insignificanti, tanto che in queste condizioni tali gas si possono ritenere incomprimibili. Così per un aereo che vola a velocità molto inferiore rispetto a quella del suono nell'aria, condizione studiata dall'aerodinamica subsonica, l'aria che fluisce sulle ali è praticamente incomprimibile.

3. *Il fluido in moto può essere viscoso o non viscoso.* La viscosità nel moto di un fluido agisce come l'attrito nel moto dei solidi: l'energia cinetica associata con il flusso può trasformarsi in energia interna per effetto di forze *viscose*. Quanto maggiore è la viscosità, tanto più intensa è la forza esterna o la pressione da applicare per mantenere il flusso: a pari condizioni, il miele o l'olio lubrificante sono più viscosi dell'acqua o dell'aria. La viscosità di un fluido dipende dalla temperatura: gli oli lubrificanti, per esempio, sono classificati non soltanto per la loro viscosità ma anche per la variazione di questa con la temperatura. Benché la viscosità sia presente in qualsiasi fluido in moto, in molti casi la sua influenza, come accade per l'attrito nella meccanica dei solidi, può essere trascurabile, così che il fluido si può considerare *non viscoso*.

4. *Il fluido in moto può essere rotazionale o irrotazionale.* Immaginate un minuscolo oggetto, quale potrebbe essere un insetto, trascinato da una corrente d'acqua. Se muovendosi con la corrente non ruota intorno a un asse passante per il suo centro di massa, il fluido è *irrotazionale*, altrimenti è *rotazionale*. Un elemento di un fluido può muoversi su un percorso circolare ed avere ugualmente caratteristiche irrotazionali: per esempio, il vortice che si forma quando l'acqua esce dallo scarico di una vasca da bagno. Un'analogia meccanica è rappresentata dal moto dei passeggeri su una ruota panoramica: la ruota gira, ma i passeggeri nelle cabine non ruotano intorno al proprio asse: se fossero particelle fluide, li classificheremmo come irrotazionali.

Considereremo principalmente il moto di fluidi ideali, che si qualificano tali quando sono incomprimibili, non viscosi, irrotazionali e in regime stazionario. Ciò semplifica enormemente la trattazione matematica della dinamica dei fluidi e rappresenta spesso una buona approssimazione al comportamento dei fluidi reali. Tuttavia, come nel caso dell'attrito nella dinamica dei solidi, in ogni applicazione dobbiamo preoccuparci di verificare la validità di queste assunzioni e le conseguenze prevedibili qualora risultassero insostenibili.

16.2 LINEE DI FLUSSO ED EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

In un flusso stazionario la velocità v in un dato punto rimane costante nel tempo. Nella Figura 16.1 consideriamo un punto P all'interno del fluido: poiché la velocità v in P non varia nel tempo, qualsiasi particella del fluido che passa per P avrà la stessa velocità e la stessa direzione. Il moto di ogni particella che passa per P segue dunque uno stesso percorso, chiamato *linea di flusso*, e dovrà in seguito passare per altri punti sulla stessa linea di flusso, come Q ed R nella Figura 16.1. Inoltre ogni particella che passi per R dovrà essere prima passata per P e Q.

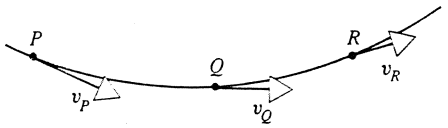


FIGURA 16.1 In un flusso stazionario una particella di fluido che passa per P traccia una linea di flusso, che toccherà poi i punti Q ed R più a valle. Ogni altra particella che passi per P dovrà seguire questo percorso.

Il modulo del vettore velocità della particella di fluido potrà in generale cambiare mentre si sposta lungo il percorso, e la direzione del vettore stesso sarà sempre tangente alla linea di flusso.

Due linee di flusso non possono incrociarsi fra loro, perché altrimenti ogni particella che arriva nel punto d'incrocio potrebbe proseguire lungo una o l'altra delle due linee, e il flusso non sarebbe più stazionario. In un flusso stazionario i percorsi delle linee di flusso non cambiano nel tempo. Nella Figura 16.2 vediamo un esempio di linee di flusso evidenziate nella corrente di un fluido.

Possiamo immaginare di tracciare una linea di flusso per ogni punto del fluido. Se il flusso è stazionario, possiamo raggruppare un certo numero di linee di flusso per formare un fascio, come nella Figura 16.3, che costituisce un *tubo di flusso*. I bordi di un tubo sono a loro volta linee di flusso, e perciò nessuna linea di flusso può attraversare i confini di un tubo di flusso, che si comporta come se fosse una reale conduttura. La quantità di fluido che entra da un'estremità deve uscire dall'altra. Il tubo deve essere di diametro tanto piccolo che la velocità del fluido si possa ritenere costante in una sua sezione trasversale.



FIGURA 16.2 In una galleria del vento si possono valutare le caratteristiche aerodinamiche di un veicolo esaminando le linee di flusso dell'aria, rese visibili dall'immissione di fumo nella corrente d'aria.

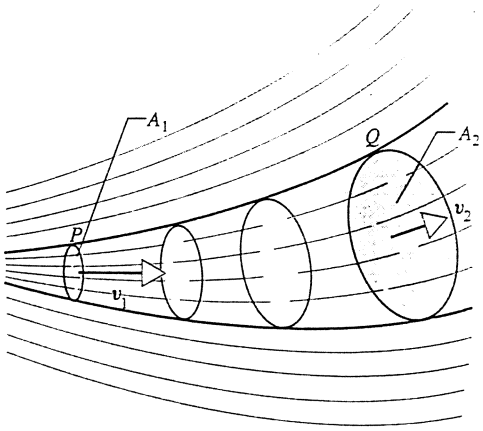


FIGURA 16.3 Un fascio di linee di flusso forma un tubo di flusso, che ha sezioni trasversali di area A_1 in P e area A_2 in Q.

Esaminiamo da vicino il flusso che percorre il tratto di tubo virtuale della Figura 16.3. Esso entra in P dove l'area della sezione trasversale è A_1 ed esce attraverso Q, dove l'area è A_2. Se la velocità è v_1 per le particelle che passano attraverso P e v_2 per quelle passanti attraverso Q, nell'intervallo di tempo δt ogni elemento di fluido percorre un tratto di lunghezza circa uguale a $v\,\delta t$. In questo intervallo di tempo il volume di fluido che attraversa la sezione A_1 è δV_1, ossia circa $A_1 v_1\,\delta t$, e la sua massa δm_1 $(= \rho_1\,\delta V_1)$ vale approssimativamente

$$\delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1\,\delta t.$$

La *portata massica*, ossia la massa di fluido che passa nell'unità di tempo attraverso qualsiasi sezione trasversale, è pertanto, in P, $\delta m_1/\delta t = \rho_1 A_1 v_1$. Prendiamo δt tanto piccolo che durante tale intervallo né v né A possano variare di una quantità apprezzabile lungo la distanza percorsa dal fluido. Al limite per $\delta t \to 0$, si ottiene il risultato esatto

$$\text{portata massica in } P = \rho_1 A_1 v_1\,,$$

e in modo analogo

$$\text{portata massica in } Q = \rho_2 A_2 v_2,$$

ove ρ_2, A_2 e v_2 rappresentano rispettivamente la massa volumica, l'area della sezione normale e la velocità del flusso in Q.

Abbiamo supposto che il fluido entri nel tubo soltanto attraverso P e ne esca soltanto attraverso Q, ossia che fra P e Q non esistano altre «immissioni» né «fuoriuscite» di fluido. Inoltre, essendo il flusso stazionario, la massa volumica del fluido fra le sezioni P e Q non cambia nel tempo, anche se può cambiare da un punto all'altro del percorso. In queste condizioni la massa di fluido che entra nel tubo in P nell'unità di tempo è uguale a quella che ne esce simultaneamente da Q. La portata massica in P dev'essere uguale alla portata massica in Q:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2\,, \qquad (16.1)$$

o in termini più generali, riferendosi a un punto qualsiasi del tubo di flusso,

$$\rho A v = \text{costante}. \qquad (16.2)$$

Questo risultato esprime *il principio di conservazione della massa* nella dinamica dei fluidi.

Se il fluido è incomprimibile, come supporremo d'ora in poi, è $\rho_1 = \rho_2$, e l'Equazione 16.1 assume la forma più semplice

$$A_1 v_1 = A_2 v_2\,, \qquad (16.3)$$

o anche, chiamando R la *portata volumica* Av,

$$R = Av = \text{costante}. \qquad (16.4)$$

L'unità SI di R è il m^3/s. L'Equazione 16.3 afferma che per un fluido incomprimibile in regime stazionario la velocità di scorrimento varia inversamente alla sezione trasversale, crescendo cioè laddove la sezione del tubo si restringe.

Le Equazioni 16.2 e 16.4 sono esempi di espressioni matematiche note come *equazioni di continuità*, che sono in sostanza leggi di conservazione della massa. L'equazione di continuità afferma che, se all'interno di un determinato elemento di volume dello *spazio* (*non* di volume del fluido) non esistono *immissioni* o *sorgenti* (mediante le quali dall'esterno possa essere introdotta nel flusso ulteriore sostanza fluida) né *fuoriuscite* o *pozzi* (mediante le quali parte del fluido possa abbandonare il flusso), la massa totale contenuta in quell'elemento di volume deve rimanere costante. In forma più generale, se sono presenti immissioni o fuoriuscite, l'equazione di continuità esprime in termini matematici l'ovvia affermazione che la quantità di materia che entra o esce in un certo intervallo di tempo è uguale al valore della variazione, intervenuta nello stesso tempo, della massa contenuta nell'elemento di volume. In fisica le equazioni di continuità si presentano ogni volta che si considerano dei flussi, per esempio in elettrologia per la conservazione della carica elettrica.

La portata volumica costante lungo un tubo di flusso conferisce alle linee di flusso una particolare interpretazione grafica, come mostra la Figura 16.4. Quando il tubo si restringe, le linee di flusso si addensano e, diminuendo la distanza fra le linee, aumenta la velocità del fluido. La maggiore o minore distanza fra le linee indica una velocità rispettivamente minore o maggiore.

Sempre dalla Figura 16.4 si può ricavare un'altra osservazione interessante applicando la seconda legge di Newton

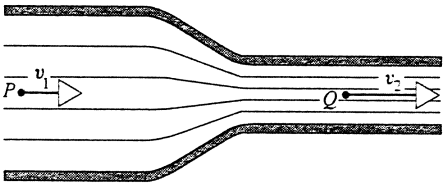


FIGURA 16.4 Al ridursi dell'area della sezione trasversale di un tubo orizzontale la velocità del flusso deve crescere. Se sul fluido non agisce alcun'altra forza, la pressione in P deve essere maggiore di quella in Q, così che si sviluppi una forza in direzione PQ che fornisca l'accelerazione necessaria.

 ISBN 00-000-0000-0

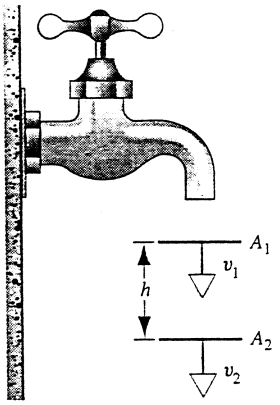


FIGURA 16.5 Problema svolto 16.1. La velocità dell'acqua che cade uscendo dall'estremità di un tubo verticale aumenta. Dovendo essere costante la portata che passa attraverso tutte le sezioni, il getto deve diventare più sottile. Si trascurano gli eventuali effetti dovuti alla tensione superficiale.

fra P e Q. Una particella di fluido che in P ha velocità v_1 deve essere accelerata nella direzione del moto per avere in Q la velocità v_2. Ma questa accelerazione può essere indotta soltanto da una forza esercitata nella direzione PQ e, in assenza di altre forze quali per esempio la gravità, questa forza deve provenire da una variazione di pressione all'interno del fluido. In questo caso la pressione in P dev'essere maggiore che in Q. Se ne deduce che, in assenza di altre cause di accelerazione, nelle regioni di maggiore velocità del fluido si dovrà avere una minore pressione. Questa conclusione preliminare circa la dinamica dei fluidi sarà espressa in modo più rigoroso nel seguito di questo capitolo.

PROBLEMA SVOLTO 16.1 Nella Figura 16.5 vediamo come il getto d'acqua che esce da un rubinetto si restringa mentre cade. L'area della sezione trasversale A_1 è 1,2 cm^2 e quella di A_2 è 0,35 cm^2. I due livelli sono separati da una distanza verticale $h = 45$ mm. Qual è la portata volumica del getto?

Soluzione Essendo la portata costante (Equazione 16.3), abbiamo

$$A_1 v_1 = A_2 v_2,$$

ove v_1 e v_2 sono le velocità dell'acqua ai due livelli. Applicando il principio di conservazione dell'energia nella forma dell'Equazione 12.15 a un elemento di fluido di massa m, troviamo $K_2 + U_2 = K_1 + U_1$, ossia $\frac{1}{2}mv_2^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh$, da cui

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh\,.$$

Eliminando v_2 fra queste due equazioni e ricavando v_1 si ottiene

$$v_1 = \sqrt{\frac{2ghA_2^2}{A_1^2 - A_2^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(0{,}045\ \text{m})(0.35\ \text{cm}^2)^2}{(1{,}2\ \text{cm}^2)^2 - (0{,}35\ \text{cm}^2)^2}} =$$

$$= 0{,}286\ \text{m/s} = 28{,}6\ \text{cm/s}\,.$$

La portata volumica R è quindi

$$R = A_1 v_1 = (1{,}2\ \text{cm}^2)(28{,}6\ \text{cm/s}) = 34\ \text{cm}^3/\text{s}\,.$$

Con questo flusso occorrono circa 3 s per riempire un flacone di volume 100 mL.

16.3 L'EQUAZIONE DI BERNOULLI*

Quando un fluido ideale scorre in una conduttura, o in un tubo di flusso, le sue condizioni possono cambiare in diversi modi: (1) può variare l'area della sezione trasversale del tubo; (2) ingresso e uscita del tubo possono trovarsi a quote diverse; (3) le pressioni di entrata e di uscita possono essere differenti. Abbiamo già visto che l'Equazione di continuità 16.4 mette in relazione le variazioni di area con le variazioni di velocità. Ma poiché sia una differenza di pressione sia una differenza di quota possono causare l'accelerazione di un elemento di fluido che scorre all'interno di un tubo, dobbiamo aspettarci che si verifichino variazioni di velocità anche in funzione della pressione e della quota. I cambiamenti di tipo 1, 2 e 3 non sono fra loro indipendenti. Studieremo ora le relazioni esistenti fra questi cambiamenti.

La nostra analisi parte dall'applicazione della legge di conservazione dell'energia, Equazione 13.1, $\Delta K + \Delta U = L_{\text{ext}}$, al flusso di un fluido che abbiamo supposto ideale secondo la definizione del Capitolo 16.1, e cioè stazionario, incomprimibile, non viscoso e irrotazionale. La Figura 16.6 rappresenta un tubo di flusso di questo fluido. Nel tratto di

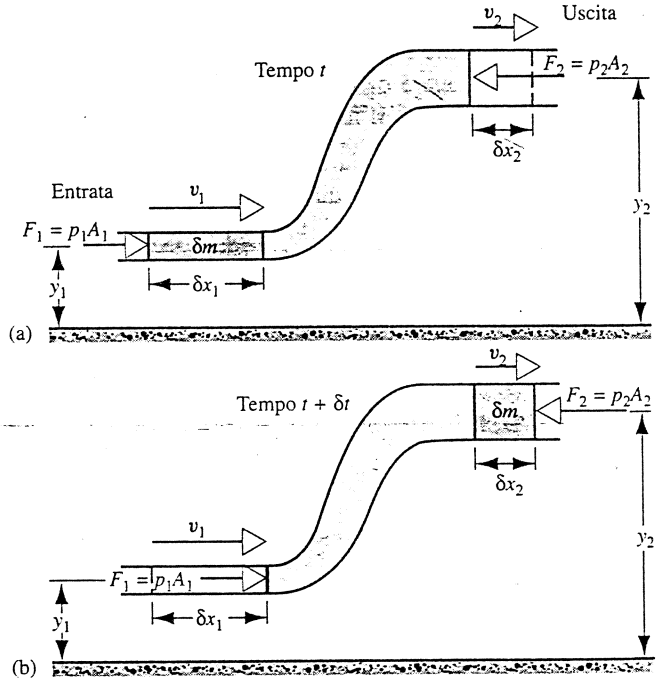


FIGURA 16.6 Un fluido scorre in un tubo in regime stazionario. Durante l'intervallo di tempo fra gli istanti (a) e (b) l'effetto complessivo prodotto dal flusso è il trasferimento dell'elemento di fluido di colore più scuro dall'estremità di ingresso del tubo a quella di uscita.

* Daniel Bernoulli (1700-1782), matematico svizzero, fisico e medico, diede un contributo determinante allo sviluppo non solo della fluidodinamica, ma anche dell'astronomia, della fisiologia e della geologia. Suo padre e suo zio erano pure eminenti matematici.

entrata (a sinistra in basso) il tubo presenta una sezione uniforme A_1 ed è a una quota costante y_1 rispetto a un certo livello di riferimento. Il tubo gradualmente si allarga e sale verso destra, e nel tratto di uscita (a destra in alto) ha area A_2 e quota y_2 costanti. Alla variazione di area corrisponde una variazione di velocità da v_1 all'entrata a v_2 all'uscita.

Applichiamo la legge di conservazione dell'energia al sistema comprendente tutta la zona colorata fra l'entrata e l'uscita del tubo in un certo istante. Una pressione p_1 (esercitata, a titolo di esempio, dal fluido contenuto in un serbatoio in cui pesca il tubo) agisce sul fluido all'entrata con una forza $F_1 = p_1 A_1$ che spinge verso destra. All'uscita si ha una pressione p_2, che può essere dovuta al fluido contenuto in un altro serbatoio posto a destra nel quale versa il tubo; p_2 genera una forza $F_2 = p_2 A_2$ che spinge verso sinistra il fluido uscente dal tubo.

Per l'effetto combinato delle due forze di pressione e della gravità supponiamo che il sistema si muova verso destra. La Figura 16.6a rappresenta il sistema all'istante t, e la Figura 16.6b a un istante immediatamente successivo $t + \delta t$. Durante questo brevissimo intervallo la parte a sinistra si è spostata di una distanza δx_1 verso destra, mentre l'estremità destra si è spostata di δx_2. Queste distanze sono diverse fra loro, perché l'area della sezione del tubo è variata e il fluido è incomprimibile.

L'effetto complessivo equivale semplicemente a uno spostamento dell'elemento δm, ombreggiato in figura, dall'estremo sinistro all'estremo destro del tubo, mentre la parte di fluido non ombreggiata è rimasta invariata.

Il lavoro esterno totale che ha agito sul sistema è la somma di tre contributi: (1) all'ingresso, la forza di pressione compie il lavoro $L_1 = F_1 \delta x_1 = p_1 A_1 \delta x_1$ (quantità positiva, perché forza e spostamento hanno lo stesso verso); (2) all'uscita, la forza di pressione compie il lavoro $L_2 = -F_2 \delta x_2 = -p_2 A_2 \delta x_2$ (quantità negativa, perché forza e spostamento hanno versi opposti); (3) il lavoro della forza di gravità dovuto allo spostamento della massa δm dalla quota y_1 alla quota più elevata y_2 vale $L_g = -\delta m g(y_2 - y_1)$ anch'esso negativo per la stessa ragione. Secondo l'Equazione 13.1 che esprime il principio di conservazione dell'energia, ΔU rappresenta l'energia potenziale dovuta alle forze conservative che agiscono fra gli oggetti all'interno del sistema. Ammettendo che non esistano forze di questo tipo, $\Delta U = 0$.

Il lavoro esterno risultante sviluppato sul sistema sarà dunque

$$L_{ext} = L_1 + L_2 + L_g = \\ = p_1 A_1 \delta x_1 + (-p_2 A_2 \delta x_2) + [-\delta m\, g(y_2 - y_1)]. \quad (16.5)$$

Il volume δV del piccolo elemento di fluido, di colore più scuro in figura, si può esprimere come $\delta V = A_1 \delta x_1$ o anche come $\delta V = A_2 \delta x_2$, dato che il fluido è incomprimibile. Ed essendo uniforme e costante la massa volumica ρ del fluido, è anche $\delta V = \delta m/\rho$. Sostituendo nella (16.5) otteniamo

$$L_{ext} = (p_1 - p_2)(\delta m/\rho) - \delta m\, g(y_2 - y_1). \quad (16.6)$$

La variazione di energia cinetica di questo elemento di volume, di colore più scuro in figura, è

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}\delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\delta m\, v_1^2. \quad (16.7)$$

Infine, applicando il principio di conservazione dell'energia nella forma $\Delta K + \Delta U = L_{ext}$ con $\Delta U = 0$, si ottiene

$$\tfrac{1}{2}\delta m\, v_2^2 - \tfrac{1}{2}\delta m\, v_1^2 = (p_1 - p_2)(\delta m/\rho) - (\delta m) g(y_2 - y_1),$$

che, riordinando i termini ed eliminando δm, diventa

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (16.8)$$

Poiché gli indici 1 e 2 rappresentano posizioni scelte arbitrariamente, si possono omettere scrivendo

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{costante}. \quad (16.9)$$

Questa è l'*equazione di Bernoulli* per flussi laminari, incomprimibili, non viscosi e irrotazionali. Strettamente parlando, i punti ai quali si applica l'equazione dovrebbero giacere sulla stessa linea di flusso. Se però il fluido è irrotazionale, il valore della costante è lo stesso per *tutte* le linee di flusso in un tubo, per cui l'equazione di Bernoulli è applicabile a qualsiasi coppia di punti del flusso.

Abbiamo acquisito due validi strumenti di analisi dei flussi: l'Equazione di continuità 16.4, che è in realtà un'espressione del principio di conservazione della massa, e la (16.9) di Bernoulli, che esprime il principio di conservazione dell'energia. Li utilizzeremo fra poco per risolvere diversi problemi reali. Per il momento consideriamo alcuni aspetti dell'equazione di Bernoulli.

1. *Pressione statica.* Proprio come per le particelle la statica è un caso particolare della dinamica, così la statica dei fluidi è un caso particolare della dinamica. Vediamo cosa succede per l'Equazione 16.8 se il fluido non scorre ($v_1 = v_2 = 0$):

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2$$

ossia

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

espressione identica alla (15.8). La pressione $p + \rho g y$, presente nel fluido anche quando $v = 0$, è la cosiddetta *pressione statica*.

2. *Pressione dinamica.* Supponiamo che il fluido scorra orizzontalmente, così che la gravità non abbia influenza sul fenomeno. L'Equazione 16.8, per $y_1 = y_2$, diventa

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (16.10)$$

Da qui si vede come a una velocità elevata corrisponda una pressione debole, e viceversa, confermando le conclusioni tratte al termine del Paragrafo 16.2 con riferimento alla Figura 16.4. Il termine $\frac{1}{2}\rho v^2$, che ha le dimensioni di una pressione, rappresenta la *pressione dinamica*.

3. *Fluido comprimibile o viscoso.* Se il fluido è comprimibile, la sua energia potenziale interna ΔU_{int} può variare per effetto dell'avvicinamento o dell'allontanamento delle molecole. Se il fluido è viscoso, l'energia cinetica interna

 ISBN 00-000-0000-0

ΔK_{int} delle molecole del fluido può variare allo stesso modo in cui le forze di attrito fra oggetti possono aumentare le loro energie cinetiche interne. Una completa analisi dei fluidi basata sulla conservazione dell'energia deve quindi considerare anche un termine di energia interna $\Delta E_{\text{int}} = \Delta U_{\text{int}} + \Delta K_{\text{int}}$ che tenga conto di questi due contributi: $\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = L_{\text{ext}}$, è dunque l'espressione generale del principio di conservazione dell'energia, secondo l'Equazione 13.2 ove $\Delta U = 0$. Qualora occorra, si può modificare l'equazione di Bernoulli per comprendere anche queste altre trasformazioni di energia. Se invece il fluido è praticamente incomprimibile e non viscoso, queste correzioni sono assolutamente trascurabili.

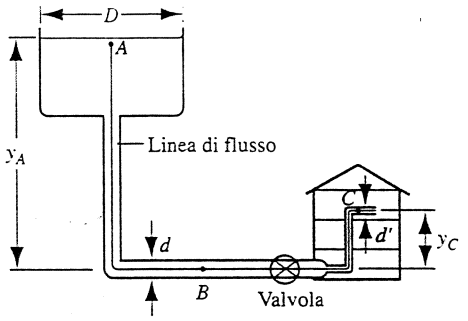


FIGURA 16.7 Problema svolto 16.2.

PROBLEMA SVOLTO 16.2 Una torre cisterna di altezza $h = 32$ m e diametro $D = 3{,}0$ m fornisce acqua all'impianto domestico di una casa (Figura 16.7). Una tubazione orizzontale di diametro interno $d = 2{,}54$ cm (= 1 in, che gli idraulici chiamano "1 pollice gas") dalla base della torre deve essere in grado di alimentare la casa con una portata volumica $R = 0{,}0025\ \text{m}^3/\text{s}$. (a) Alla portata massima, quale sarà la pressione nel tratto orizzontale del tubo? (b) Un tubo più piccolo, di diametro interno $d' = 1{,}27$ cm, rifornisce il terzo piano della casa, a 7,2 m di altezza dal suolo. Quali sono la velocità e la pressione in questo tubo? La viscosità dell'acqua è trascurabile.

Soluzione (a) Applichiamo l'equazione di Bernoulli lungo la linea di flusso ABC della Figura 16.7. Nei punti A e B si ha

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_B + \tfrac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g y_B\,.$$

In A la pressione equivale a quella atmosferica p_0. Per $y_A = h$ e $y_B = 0$ troviamo la pressione incognita in B:

$$p_B = p_0 + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)\,.$$

Ricaviamo v_A e v_B dall'equazione di continuità 16.4:

$$v_A A_A = v_B A_B = R,$$

ove R è la portata volumica costante. Quindi

$$v_A = \frac{R}{A_A} = \frac{0{,}0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(1{,}5\ \text{m})^2} = 3{,}5\cdot 10^{-4}\ \text{m/s}\,,$$

$$v_B = \frac{R}{A_B} = \frac{0{,}0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}0127\ \text{m})^2} = 4{,}9\ \text{m/s}.$$

Da notare che il termine $\frac{1}{2}\rho v_A^2$ nell'espressione di p_B è trascurabile rispetto al termine $\frac{1}{2}\rho v_B^2$: la velocità del flusso in cima alla torre è molto piccola data la grande area della sezione trasversale. Possiamo ora trovare la pressione nel tubo:

$$\begin{aligned} p_B &= p_0 + \rho g h - \tfrac{1}{2}\rho v_B^2 = \\ &= 1{,}01\cdot 10^5\ \text{Pa} + (1{,}0\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(32\ \text{m}) - \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(1{,}0\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3)(4{,}9\ \text{m/s})^2 = \\ &= 1{,}01\cdot 10^5\ \text{Pa} + 3{,}14\cdot 10^5\ \text{Pa} - 0{,}12\cdot 10^5\ \text{Pa} = \\ &= 4{,}03\cdot 10^5\ \text{Pa} \approx 4\ \text{bar}. \end{aligned}$$

Se si arresta il flusso nel tubo orizzontale (chiudendo la valvola), la pressione *statica* in B, formata soltanto dai primi due termini, vale $4{,}15\cdot 10^5$ Pa. Ad acqua fluente la pressione scende sotto il valore statico per effetto della componente dinamica.

(b) Se il tubo minore al terzo piano ha la stessa portata volumica R, la velocità in C deve valere

$$v_C = \frac{R}{A_C} = \frac{0{,}0025\ \text{m}^3/\text{s}}{\pi(0{,}00635\ \text{m})^2} = 19{,}7\ \text{m/s}\,,$$

ossia quattro volte il valore in B. L'equazione di Bernoulli dà

$$p_A + \tfrac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g y_A = p_C + \tfrac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g y_C\,,$$

cioè

$$\begin{aligned} p_C &= p_0 + \tfrac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g(y_A - y_C) = \\ &= 1{,}01\cdot 10^5\ \text{Pa} - \tfrac{1}{2}(1{,}0\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3)(19{,}7\ \text{m/s})^2 + \\ &\quad + (1{,}0\cdot 10^3\ \text{kg/m}^3)(9{,}8\ \text{m/s}^2)(32\ \text{m} - 7{,}2\ \text{m}) = \\ &= 1{,}01\cdot 10^5\ \text{Pa} - 1{,}95\cdot 10^5\ \text{Pa} + 2{,}43\cdot 10^5\ \text{Pa} = \\ &= 1{,}49\cdot 10^5\ \text{Pa} \approx 1{,}5\ \text{bar}. \end{aligned}$$

Data la maggiore velocità del flusso nel tubo minore, il contributo dinamico alla pressione è molto maggiore in C rispetto a quello in B. Sia l'effetto statico sia quello dinamico tendono a ridurre la pressione in questo punto rispetto al precedente.

16.4 APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI BERNOULLI E DELL'EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Esaminiamo ora alcune applicazioni dell'equazione di Bernoulli che ne dimostrano la versatilità.

Il venturimetro

Si tratta di un dispositivo per misurare la velocità del flusso (Figura 16.8) in una conduttura. Un fluido di massa volumica ρ scorre in un tubo avente sezione trasversale A_1, che si riduce ad A_2 in corrispondenza di una strozzatura dove è inserito l'attacco del tubo a U di un manometro differenziale contenente un liquido, diciamo mercurio, di massa volumica ρ'. L'altro estremo del manometro è collegato in un punto a monte lungo un tratto del tubo a sezione costante A_1. Applicando l'equazione di Bernoulli e ponendo uguale la portata volumica nei punti 1 e 2, troviamo (vedi Pro-

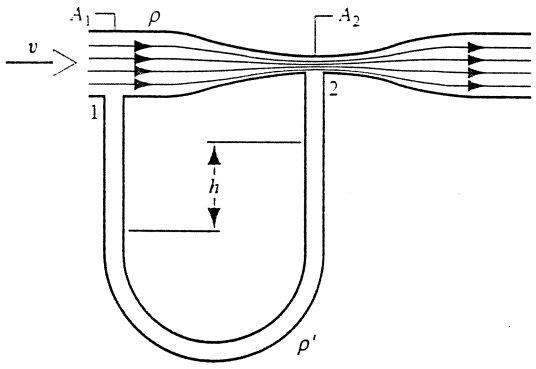


FIGURA 16.8 Un venturimetro, strumento usato per misurare la velocità della corrente di un fluido in un tubo.

blema 8) la velocità incognita al punto 1:

$$v = A_2\sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}. \qquad (16.11)$$

Il tubo di Pitot

Questo apparecchio (Figura 16.9) è destinato a misurare la velocità di un flusso di gas. Il gas – per esempio, aria – fluisce con massa volumica ρ e con velocità v_1 parallela ai piani di una serie di piccole aperture che indichiamo collettivamente come punto 1. La pressione nel ramo di sinistra di un tubo a U che funge da manometro differenziale, collegato a queste aperture, è soggetto alla pressione statica p_1 del flusso di gas. Il ramo di destra del manometro è collegato attraverso un tubicino a un'apertura giacente su un piano perpendicolare alla direzione del flusso: qui (punto 2), la velocità del gas è ridotta a zero, e l'equazione di Bernoulli fra i punti 1 e 2 diventa

$$p_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 .$$

Sostituendo alla lettura del manometro $\rho' gh$ la differenza di pressione $p_2 - p_1$, ricaviamo v_1 ottenendo

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}}. \qquad (16.12)$$

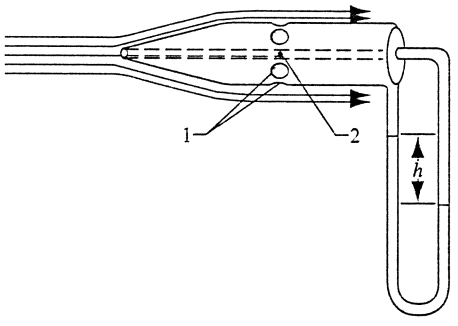


FIGURA 16.9 Un tubo di Pitot, usato per misurare la velocità della corrente di un gas.

La scala dello strumento può essere tarata in modo da indicare direttamente v_1. Tubi di Pitot sporgenti dalle ali consentono ai piloti di leggere direttamente sul cruscotto la velocità dell'aereo rispetto all'aria.

La portanza

La portanza, o forza di sollevamento dinamico, è la forza diretta verso l'alto che agisce su un corpo, come l'ala di un aeroplano, un aliscafo o il rotore di un elicottero, per effetto del suo spostamento in un fluido. Non è da confondere con la spinta, o forza di galleggiamento statico, che può agire su un pallone aerostatico o su un iceberg secondo il principio di Archimede (Paragrafo 15.4).

Quando si lancia una palla da tennis, da baseball o da golf imprimendole una certa rotazione, essa segue una traiettoria diversa da quella parabolica che percorrerebbe nel vuoto, perché la spinta dinamica prodotta dalla rotazione della palla fa sì che la traiettoria si incurvi, e risulti più alta o più bassa di quella teorica. Dato che il fluido (per esempio l'aria) ha una certa viscosità, la palla incontra una certa resistenza d'attrito, e tende a trascinare in aderenza un sottilissimo strato di fluido, chiamato *strato limite*. Nel sistema di riferimento di una palla che non ruota su se stessa, la velocità del fluido cala dal suo valore fuori dello strato limite (uguale alla velocità della palla rispetto al fluido) a zero sulla superficie della palla.

Nella Figura 16.10a, nel sistema di riferimento solidale con la palla non rotante, vediamo l'aria scorrere con flusso costante a velocità abbastanza modeste da evitare turbolenze. Nella Figura 16.10b vediamo le linee di flusso dell'aria trascinata in rotazione pura intorno alla palla dallo strato limite, dovuto alla viscosità dell'aria, in assenza della quale non avrebbe luogo il trascinamento dello strato limite, responsabile della portanza che fa deviare la palla dalla traiettoria teorica. Le palle da golf e da tennis sono intenzionalmente rugose per favorire il trascinamento e quindi la portanza. Allo stesso scopo le palle da baseball sono talvolta rese ruvide artificiosamente (e contro i regolamenti) dai lanciatori.

La Figura 16.10c mostra l'effetto combinato del trascinamento dovuto alla rotazione della palla e del moto della palla a flusso stazionario, legato al suo percorso traslatorio. Nel caso in esame le due velocità si sommano sopra la palla e si sottraggono al di sotto: e anche il restringersi delle linee di flusso superiori indica che la velocità (relativa) dell'aria è maggiore rispetto alla parte inferiore. Dall'equazione di Bernoulli si deduce che la pressione risultante è diretta verso l'alto, generando una portanza.

Se la Figura 16.10 rappresenta la vista dall'alto di una palla da baseball che vola diretta verso il battitore, la portanza agisce orizzontalmente deviando la palla verso sinistra o verso destra. Se rappresenta invece una vista laterale, la palla è lanciata con un effetto di rotazione all'indietro e riceve una spinta verso l'alto che la fa innalzare rispetto alla traiettoria parabolica.

 ISBN 00-000-0000-0

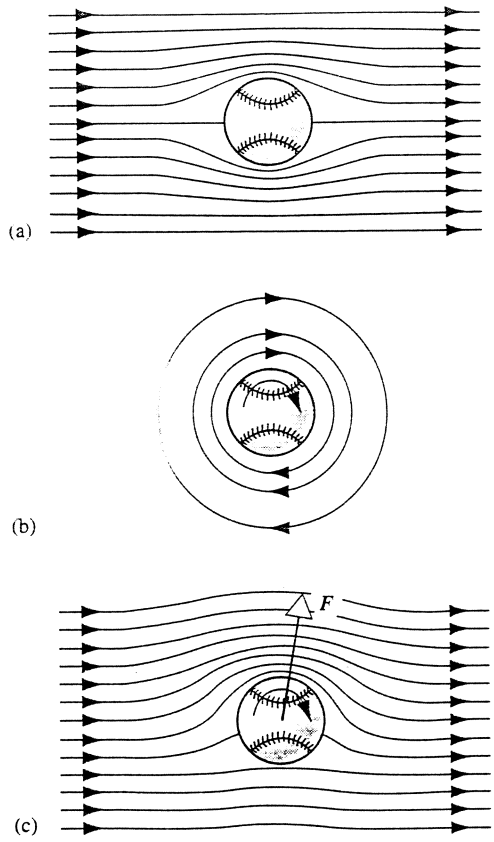


FIGURA 16.10 (a) Linee di flusso intorno a una palla che non ruota su se stessa. (b) Effetto di trascinamento dell'aria causata dallo strato limite intorno a una palla che ruota su se stessa. (c) L'effetto combinato dei due movimenti. Dall'equazione di Bernoulli risulta che una forza di sollevamento dinamico (portanza) agisce sulla palla verso l'alto. Il fluido esercita sulla palla una forza risultante $\boldsymbol{F}$ che ha una componente trasversale al flusso (portanza) e una parallela (resistenza aerodinamica).

La portanza che agisce sull'ala di un aeroplano funziona in modo analogo. La Figura 16.11 mostra, in sezione, le linee di flusso che circondano un profilo alare, che assumiamo come sistema di riferimento fisso, ad esempio in una galleria del vento in cui l'aria scorra da sinistra a destra. Si noti la somiglianza fra questa figura e la precedente 16.10c: la portanza sull'ala di un aeroplano deriva da un effetto di trascinamento allo strato limite analogo a quello della Figura 16.10b.

Anche nella Figura 16.11 le linee di flusso sono ravvicinate lungo la superficie superiore dell'ala, e così la velocità è maggiore e quindi la pressione è minore rispetto alla faccia inferiore: la differenza di pressione *contribuisce* pertanto alla portanza, ma non ne è in questo caso l'unica causa. Come mostra la Figura 16.11, la portanza è attribuibile anche a un'altra causa: l'ala è disegnata e collocata in modo che l'aria che scorre lungo di essa sia deviata verso il basso, e la spinta verso l'alto è dovuta, per la terza legge di Newton, alla forza di reazione a questa spinta verso il basso esercitata sull'aria dall'ala. Entrambi questi effetti giustificano la portanza su un'ala di aeroplano.

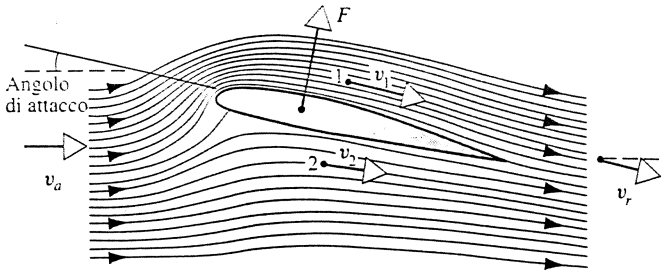


FIGURA 16.11 Linee di flusso intorno a una lamina sottile o un'ala di aeroplano. La velocità v_a dell'aria in avvicinamento è orizzontale, mentre l'aria che abbandona il profilo ha una minore velocità v_r con una componente verso il basso. L'ala esercita così sull'aria una forza verso il basso, e deve perciò ricevere, per la terza legge di Newton, una reazione di spinta verso l'alto, qui rappresentata dalla portanza $\boldsymbol{F}$.

La spinta di un razzo

Come ultimo esempio proviamo a calcolare la spinta su un razzo prodotta dall'emissione dei gas di scarico. Immaginiamo una camera cilindrica chiusa (Figura 16.12) con sezione trasversale di area A contenente un gas di massa volumica ρ alla pressione p, avente al fondo un piccolo orifizio di sezione A_0. Vogliamo trovare la velocità v_0 alla quale il gas fuoriesce dall'orifizio.

Scriviamo l'equazione di Bernoulli (Equazione 16.18) in questa forma:

$$p - p_0 = \rho g(y_0 - y) + \tfrac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

ove p_0 è la pressione atmosferica immediatamente fuori dell'orifizio. La massa volumica di un gas è tanto piccola che possiamo tranquillamente ignorare la variazione della pressione in funzione dell'altezza della camera; abbiamo così

$$p - p_0 = \tfrac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

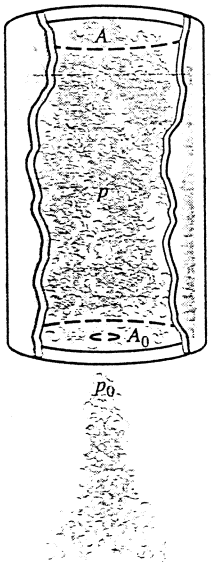


FIGURA 16.12 Fluido che fuoriesce da un recipiente, quale potrebbe essere la camera di scarico di un razzo.

ossia

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \qquad (16.13)$$

in cui v è la velocità del gas che scorre all'interno della camera e v_0 la velocità del gas attraverso l'orifizio. Anche se il gas è comprimibile e il flusso può diventare turbolento, possiamo trattare il flusso come stazionario e incomprimibile se la pressione e la velocità di uscita non sono eccessive.

Ammettendo che vi sia continuità di flusso (nel motore di un razzo ciò avviene a regime, quando la massa del gas di scarico è uguale alla massa del gas prodotto dalla combustione del propellente) e che la massa volumica del gas sia costante, si avrà

$$Av = A_0 v_0 .$$

Se l'orifizio è molto piccolo, tal che sia $A_0 \ll A$, sarà $v_0 \gg v$, e nella (16.13) si può ignorare v^2 rispetto a v_0^2. La velocità allo scarico è allora

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}} . \qquad (16.14)$$

Se si tratta della camera di scarico di un razzo, la spinta (Paragrafo 7.6) vale $F = v_0 \mathrm{d}M/\mathrm{d}t$. La massa del gas scaricato nel tempo $\mathrm{d}t$ sarà $\mathrm{d}M = \rho A_0 v_0 \, \mathrm{d}t$, e perciò

$$F = v_0 \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = v_0(\rho A_0 v_0) = \rho A_0 v_0^2 ;$$

combinando questa con la (16.14) la spinta F assume la forma:

$$F = 2A_0(p - p_0) . \qquad (16.15)$$

16.5 CAMPI DI FLUSSO (facoltativo)

Nel Paragrafo 14.8 abbiamo visto come lo spazio nelle vicinanze di una massa possa essere rappresentato da un campo gravitazionale. A ogni punto dello spazio è associato un vettore $\boldsymbol{g}$, che rappresenta la forza gravitazionale per unità di massa in quel punto. Possiamo darne una rappresentazione grafica tracciando linee nella direzione del campo, assiepate più o meno densamente in funzione dell'intensità del campo (linee più fitte indicano una maggiore intensità di campo).

Nella dinamica dei fluidi possiamo adottare un analogo criterio per rappresentare graficamente il moto del fluido con un campo vettoriale, in cui le linee del campo indicano la velocità del flusso $\boldsymbol{v}$ in ogni punto. Per un flusso stazionario, il vettore velocità in ogni singolo punto non varia nel tempo, e quindi il tracciato delle linee del campo rimane invariato con il trascorrere del tempo.

Mentre le linee del campo indicano la direzione del moto, la distanza fra le linee è indicativa della velocità: per ogni unità di area misurata perpendicolarmente alla direzione del flusso si disegna un numero di linee proporzionale alla velocità locale del flusso. A linee molto vicine corrispondono maggiori velocità, e viceversa.

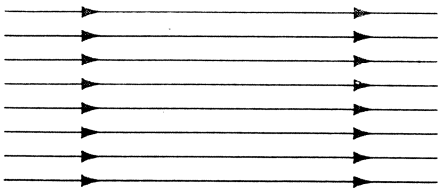


FIGURA 16.13 Linee di flusso (orizzontali) di un campo di flusso omogeneo non viscoso.

Esaminiamo diversi esempi di impiego di questi diagrammi bidimensionali di campo, per ciascuno dei quali la velocità è la stessa su ogni linea perpendicolare al piano in ogni punto.

Nella Figura 16.13 vediamo un campo di flusso uniforme come potrebbe formarsi per il moto stazionario di un fluido non viscoso all'interno di un tubo dalle pareti perfettamente lisce. Le linee di flusso sono rette parallele, e l'uguaglianza delle distanze fra le linee indica che la velocità del fluido è identica ovunque.

La Figura 16.14 mostra il campo per un *flusso uniforme rotazionale*, come si potrebbe ottenere facendo girare un secchio d'acqua su una piattaforma girevole (Problema 12 del Capitolo 15). In questo caso v è proporzionale a r, perché la velocità angolare ω è costante. Nella Figura 16.15 in-

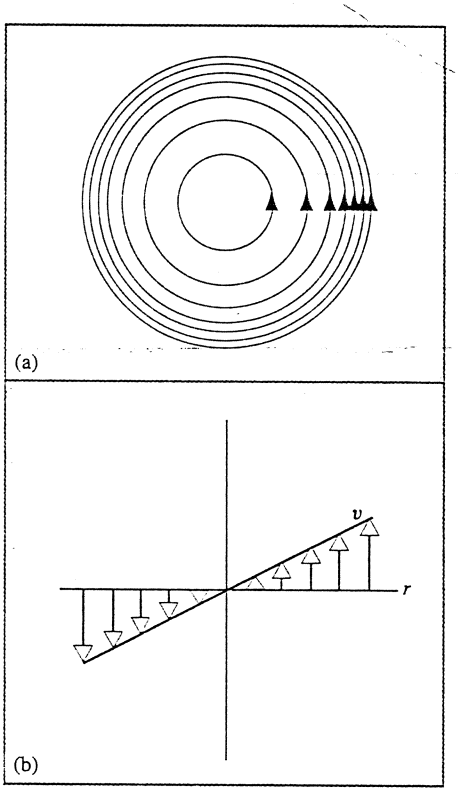


FIGURA 16.14 (a) Campo di flusso uniforme rotazionale. (b) Andamento crescente della velocità in funzione della distanza dal centro, suggerito in (a) dall'intervallo decrescente fra le linee di flusso.

 ISBN 00-000-0000-0

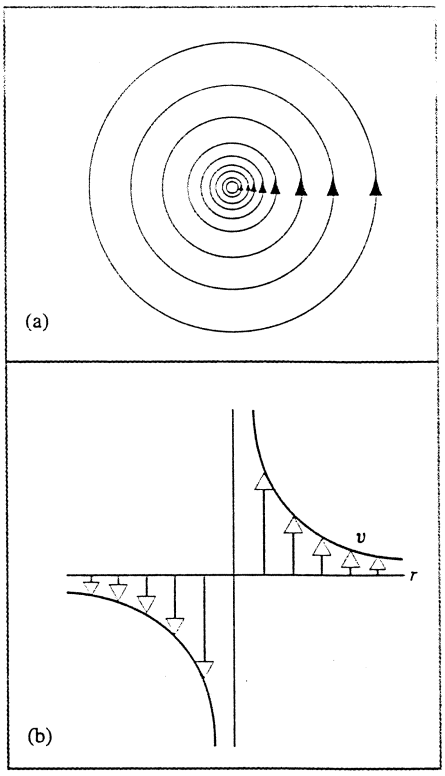


FIGURA 16.15 (a) Campo di flusso di un vortice. (b) Variazione radiale della velocità del fluido nel vortice.

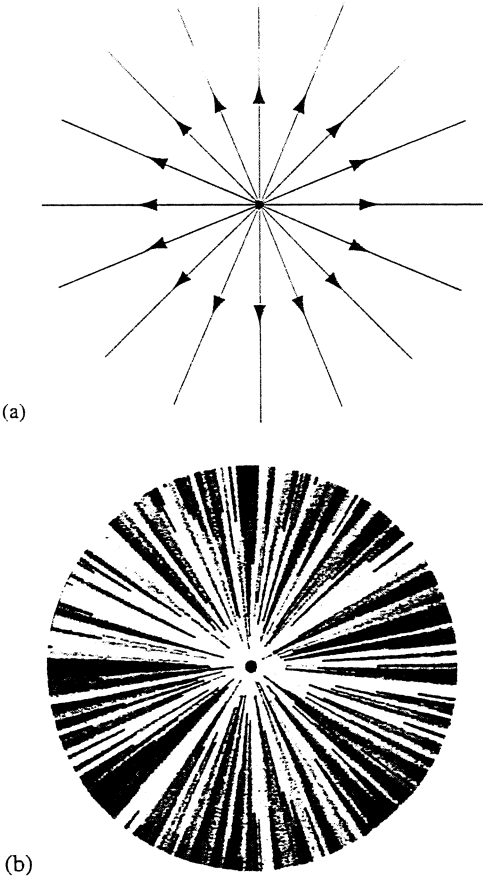


FIGURA 16.16 (a) Flusso che si dirama da una sorgente. (b) Immagine del fluido che scaturisce da una sorgente. L'acqua uscente da un foro nel centro scorre verso il bordo nello spazio fra due dischi, uno superiore di vetro e l'altro inferiore di gesso. Per rendere visibile la direzione del flusso, il gesso è cosparso di cristalli di permanganato di potassio che, sciogliendosi nell'acqua, la colorano di rosso. L'immagine è stata preparata e fotografata dal professor A. D. Moore dell'università del Michigan.

vece è tracciato il campo di un *vortice*, quale si può ottenere estraendo il tappo dello scarico di una vasca da bagno piena d'acqua. Qui v è inversamente proporzionale a r, perché il momento angolare $L = mvr$ è costante e il flusso è irrotazionale (Problema 11). Si noti che sia il moto di rotazione uniforme sia il vortice, pur essendo tipi di flusso totalmente differenti, sono rappresentati da linee di flusso circolari: la forma delle linee di flusso dà soltanto un'informazione parziale; per una conoscenza più completa occorre avere a disposizione anche la loro spaziatura.

Nella Figura 16.16 si vede il campo di flusso generato da una sorgente. Tutte le linee di flusso sono dirette radialmente verso l'esterno. E il campo di flusso che rappresenta un pozzetto di scarico è identico, salvo il verso delle linee radiali che sono dirette verso il centro.

Se una sorgente e un pozzetto di scarico di uguali portate sono situati poco distanti fra loro, assistiamo a un campo combinato chiamato dipolo (Figura 16.17).

Come vedremo più avanti, il campo elettrostatico, il campo magnetico e il campo di flusso per una corrente elettrica sono anch'essi campi vettoriali. A questo proposito osserviamo che il campo omogeneo della Figura 16.13 corrisponde a quello, in sezione, di un condensatore elettrico a piastre piane e parallele, il campo della sorgente o del pozzetto di scarico della Figura 16.16 corrisponde al campo, in sezione, di una carica elettrostatica rispettivamente positiva o negativa, mentre il campo del dipolo di Figura 16.17 può rappresentare anche il campo elettrico, in sezione, creato da due cariche puntiformi di segno opposto collocate a una breve distanza l'una dall'altra.

Il campo omogeneo della Figura 16.13 può anche rappresentare, in sezione, il campo magnetico all'interno di un solenoide, e il vortice della Figura 16.15 corrisponde al campo magnetico, in sezione, intorno a un filo rettilineo percorso da corrente elettrica. Quest'ultimo è un esempio di campo rotazionale (intorno all'asse del vortice).

Grazie a queste analogie fra fluidi e grandezze elettromagnetiche possiamo spesso determinare in laboratorio le caratteristiche di un campo di flusso, che sarebbe arduo calcolare con gli attuali metodi matematici, per mezzo di misurazioni su circuiti elettrici appositamente predisposti.

In questo capitolo ci siamo resi conto del fatto che i concetti fondamentali sui campi e sui principi di conservazione trovano applicazione in molti rami della fisica, come constateremo ancora più avanti.

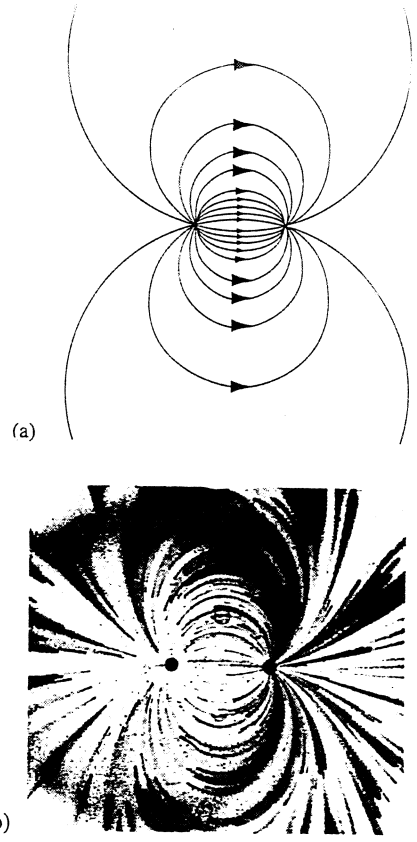


FIGURA 16.17 (a) Flusso di dipolo. La sorgente è a sinistra e il pozzetto di scarico a destra. (b) Immagine del flusso di un dipolo, preparata come descritto nella figura precedente.

16.6 VISCOSITÀ, TURBOLENZA E FLUSSO CAOTICO (facoltativo)

La viscosità nello scorrimento di un fluido è simile all'attrito nel moto dei corpi solidi. Quando facciamo strisciare un corpo solido contro un altro dobbiamo fornire una forza esterna F per vincere la forza di attrito f, se vogliamo tenere in moto il corpo a velocità costante. Nel caso del moto dei fluidi, immaginiamo un fluido collocato fra due lastre orizzontali parallele, come in Figura 16.18, e applichiamo alla lastra superiore una forza F che la tenga in moto a velocità costante v rispetto alla lastra inferiore, che supponiamo sia ferma. Per mantenere in moto la lastra superiore a velocità costante, la forza F deve essere applicata in verso opposto a quello in cui agisce la viscosità.

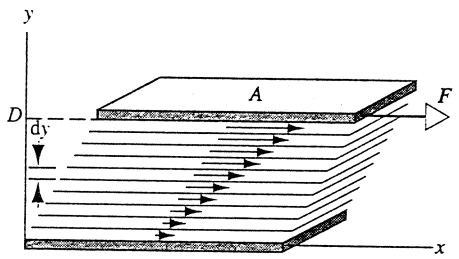


FIGURA 16.18 Un fluido viscoso riempie lo spazio fra due lastre piane separate da una distanza D. La lastra inferiore è ferma e la superiore è trascinata verso destra da una forza costante F. La velocità di ciascuno strato di fluido diminuisce uniformemente dalla lastra superiore all'inferiore.

Questa agisce non soltanto fra la lastra e il fluido che le sta a immediato contatto, ma anche all'interno della massa fluida, fra ogni strato e lo strato adiacente. La velocità di ogni strato differisce di una quantità dv da quella dello strato immediatamente al di sotto. Un flusso nel quale la velocità varia di strato in strato è chiamato *flusso laminare*. In questa trattazione ammettiamo che lo strato superiore del fluido abbia la stessa velocità (ossia v) della lastra superiore, e lo stesso avvenga per lo strato adiacente alla lastra inferiore, a velocità zero.

L'intensità della forza esterna F che si deve applicare per realizzare nel fluido un flusso laminare risulta direttamente proporzionale all'area A della lastra: quanto più grande è la superficie della lastra, tanto maggiore è il trascinamento viscoso e la forza necessaria per vincerlo. Quest'ultima è anche proporzionale alla variazione di velocità dv che si manifesta a cavallo di ogni strato di spessore dy: ciò significa che, se le lastre sono molto vicine fra loro, occorre una forza molto grande per tenere la piastra superiore a una certa velocità costante. (Immaginiamo un flusso laminare fra due piastre costituito soltanto da due strati, uno fermo a contatto con la lastra inferiore e l'altro trascinato a velocità v dalla lastra superiore. L'energia dissipata dipenderà dalla velocità relativa dei due strati, che è molto grande. Se invece vi sono molti strati, le velocità relative fra due strati adiacenti saranno minori, ciò che significa minore dissipazione di energia e minore forza necessaria per mantenere il moto a velocità costante.) Abbiamo dunque $F \propto A\, dv/dy$ ossia, introducendo una costante η di proporzionalità,

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}. \tag{16.16}$$

La costante η è chiamata *coefficiente di viscosità* (o brevemente *viscosità*) *dinamica* del fluido. La sua unità nel sistema SI è il Pa · s. L'equivalente unità nel sistema CGS è la dina · s/cm^2, chiamata poise*. Confrontando le unità nei due sistemi constatiamo che 1 poise = 0,1 Pa · s.

La viscosità η è elevata nei fluidi che presentano una grande resistenza al moto e modesta per i fluidi che scorrono facilmente. La Tabella 16.1 elenca alcuni valori di viscosità per diversi fluidi: è da notare che essa dipende dalla temperatura.

Nel caso delle lastre rettangolari della Figura 16.18 il *gradiente di velocità* dv/dy è costante per tutti gli strati, dato che la velocità varia della stessa quantità dv a cavallo di ogni strato di spessore dy. Posto $dv/dy = v/D$, ove D è la distanza fra le lastre, la (16.16) diventa

$$F = \eta A \frac{v}{D}. \tag{16.17}$$

* Dal nome del medico francese Jean Louis Marie Poiseuille (1799-1869) che fu il primo a studiare il flusso di un liquido viscoso attraverso un tubo per comprendere il funzionamento della circolazione sanguigna.

 ISBN 00-000-0000-0

TABELLA 16.1 Viscosità di alcuni fluidi

Fluido	η (Pa · s)
Glicerina (20 °C)	1,5
Olio lubrificante[a] (0 °C)	0,11
Olio lubrificante[a] (20 °C)	0,03
Sangue (37 °C)	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$
Acqua (20 °C)	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$
Acqua (90 °C)	$0{,}32 \cdot 10^{-3}$
Benzina (20 °C)	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$
Aria (20 °C)	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$
CO_2 (20 °C)	$1{,}5 \cdot 10^{-5}$

[a] Mediamente denso (S.A.E. 30)

Un'applicazione pratica della viscosità si verifica nello scorrimento di un fluido in un tubo a sezione circolare. Il flusso è ancora laminare, ma in questo caso gli strati di fluido sono cilindri a pareti molto sottili di raggio variabile. La velocità del flusso varia con il raggio: il massimo valore si ha lungo l'asse del tubo e il valore minimo, che supponiamo sia zero, lungo le pareti del tubo (Figura 16.19). In ogni sezione del tubo la variazione della velocità in funzione della distanza dall'asse non è lineare. Ammettendo sempre che la velocità lungo la parete del tubo sia zero, si dimostra (Problema 14) che la velocità nello strato circolare di raggio r vale

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2), \qquad (16.18)$$

che dipende dalla differenza di pressione Δp su un tratto del tubo di lunghezza L. La velocità sull'asse del tubo vale

$$v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}. \qquad (16.19)$$

Considerando il flusso lungo ciascuno dei sottili strati cilindrici, si trova (Problema 15) che la portata massica totale dm/dt (massa di fluido che scorre nel tubo nell'unità di tempo) vale

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8\eta L}. \qquad (16.20)$$

Questo risultato è noto come *legge di Poiseuille*. Conoscendo il coefficiente di viscosità del fluido possiamo determinare la differenza di pressione che deve essere fornita da un agente esterno (come una pompa) per mantenere in un tubo una desiderata portata massica. E inversamente, se facciamo passare un fluido attraverso un tubo sotto una certa differenza di pressione, misurando la portata massica possiamo ricavare il coefficiente di viscosità del fluido.

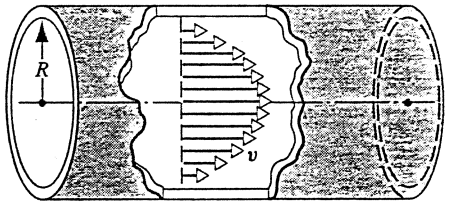


FIGURA 16.19 Un fluido scorre in un tubo cilindrico di raggio R. I vettori mettono in evidenza la variazione di velocità dalla parete al centro del tubo.

La viscosità dei liquidi è dovuta alle forze di coesione fra le molecole. Al crescere della temperatura la viscosità di un liquido diminuisce perché l'aumento di energia cinetica delle molecole indebolisce l'effetto delle forze intermolecolari. Nei gas invece la viscosità aumenta con la temperatura perché le singole molecole possono spostarsi da uno strato all'altro, e a temperature più alte si ha una maggiore agitazione delle molecole e quindi gli strati si mescolano maggiormente. Si noti peraltro che in un tubo vi sono sempre più molecole lente alla periferia che molecole veloci presso l'asse del tubo, per cui una maggiore agitazione implica sempre un maggior numero di molecole lente che invadono la zona centrale ostacolando il moto delle più veloci: un effetto simile a quello dei veicoli lenti che si immettono in un'autostrada sulla corsia di accelerazione obbligando a rallentare il traffico nelle corsie di transito.

PROBLEMA SVOLTO 16.3 Dell'olio di ricino, di massa volumica $0{,}96 \cdot 10^3$ kg/m^3 a temperatura ambiente, è spinto da una pompa alla pressione relativa di 950 Pa attraverso un tubo di diametro 2,6 cm e di lunghezza 65 cm. L'olio uscente alla pressione atmosferica è raccolto in un recipiente. In 90 s la massa della quantità totale raccolta è 1,23 kg. Qual è il coefficiente di viscosità dell'olio di ricino a questa temperatura?

Soluzione La portata massica vale

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1{,}23 \text{ kg}}{90 \text{ s}} = 0{,}0137 \text{ kg/s}.$$

Dall'Equazione 16.20 si ricava direttamente η:

$$\eta = \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8(dm/dt)L} = \frac{(0{,}96 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)\pi(0{,}013 \text{ m})^4(950 \text{ Pa})}{8(0{,}0137 \text{ kg/s})(0{,}65 \text{ m})} =$$

$$= 1{,}15 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

Gli oli pesanti hanno viscosità di questo ordine di grandezza.

Turbolenza

Dopo essere salito verticalmente per un breve tratto, il fumo della sigaretta si dirada ramificandosi secondo un disegno irregolare e in apparenza casuale (Figura 16.20). Analogamente, una corrente di fluido che supera un ostacolo si infrange formando mulinelli e vortici (Figura 16.21) che imprimono al flusso componenti irregolari di velocità trasversali alla direzione del flusso. Un esempio è lo sbattere di una bandiera in un vento leggero: se il flusso d'aria fosse laminare, la bandiera occuperebbe una posizione fissa fra le linee di flusso, ma l'asta rompe il flusso in un intrico di tracce simili a quelle di Figura 16.21, che sono causa dello sventolio irregolare del drappo. Ecco due esempi di regime *turbolento* del moto di un fluido. Altri esempi possono essere le scie spumeggianti lasciate in mare da navi in movimento e, nell'aria, le onde e gli urti di pressione causati da auto o aeroplani in moto. Il suono pro-

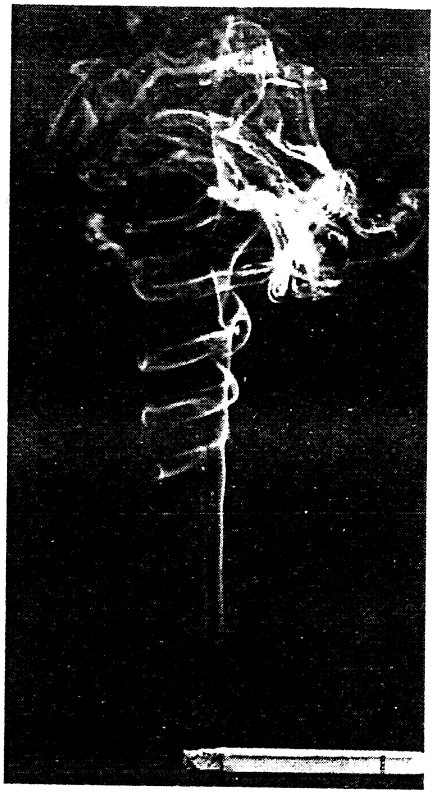


FIGURA 16.20 Il fumo sale dapprima in regime laminare, ma ben presto diventa turbolento.

dotto da un fischietto o dagli strumenti a fiato è dovuto a un moto turbolento d'aria.

In un fluido viscoso un flusso a bassa velocità si può ritenere laminare, con strati che slittano senza ostacoli l'uno sull'altro. Quando la velocità aumenta oltre un certo limite il moto diventa disordinato e irregolare: il flusso è turbolento. Un'analogia con la meccanica è rappresentata da un blocco sospinto su una superficie ruvida. Se l'attrito è modesto il blocco slitta quando la forza applicata F è almeno uguale alla forza d'attrito statico f. Ma se la forza d'attrito è maggiore, la forza applicata F deve essere più intensa, e la forza d'attrito può raggiungere un valore tale che la forza applicata rovescia il blocco anziché trascinarlo. Il rovesciamento del blocco corrisponde al passaggio da flusso laminare a turbolento.

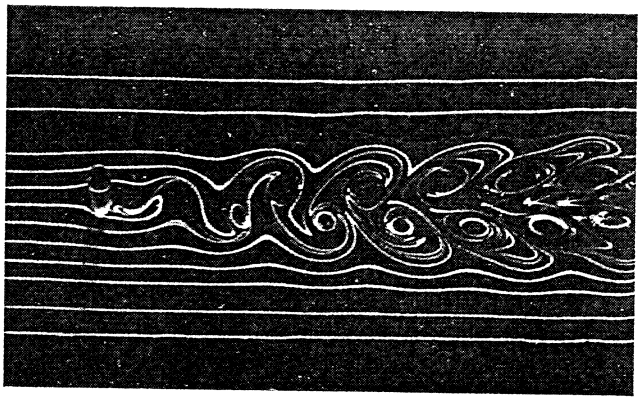


FIGURA 16.21 Il fluido che scorre da sinistra a destra incontrando un ostacolo cilindrico passa chiaramente da un regime laminare a un regime turbolento. Notare i vortici e mulinelli che si formano a valle dell'ostacolo.

Si può determinare il valore critico della velocità per cui il flusso diventa turbolento per mezzo dell'analisi dimensionale. Chiamiamo v_c la velocità critica, che supponiamo sia la velocità media nel tubo, poiché sappiamo, come dimostra la Figura 16.19, che la velocità varia da punto a punto della sezione del tubo. Prevediamo che questa velocità critica dipenda dalla viscosità η e dalla massa volumica ρ del fluido, nonché dal diametro D del tubo. Applicando la tecnica ordinaria di analisi dimensionale (Paragrafo 1.7) scriviamo

$$v_c \propto \eta^a \rho^b D^c$$
$$[v_c] = [\eta^a][\rho^b][D^c]$$
$$\mathrm{LT}^{-1} = (\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1})^a (\mathrm{ML}^{-3})^b (\mathrm{L})^c ,$$

ove le dimensioni della viscosità risultano dalla sua unità Pa · s. Risolvendo, otteniamo

$$a = 1 , \qquad b = -1 , \qquad c = -1 .$$

La velocità critica si può dunque scrivere come

$$v_c \propto \frac{\eta}{\rho D} ,$$

e, introducendo una costante di proporzionalità Re,

$$v_c = (\mathrm{Re})\frac{\eta}{\rho D} . \qquad (16.21)$$

La costante adimensionale Re prende il nome di *numero di Reynolds*. Risolvendo l'Equazione 16.21 rispetto a Re, troviamo il valore di Re per *qualsiasi* velocità del flusso v:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho D v}{\eta} . \qquad (16.22)$$

Con questa interpretazione, il numero di Reynolds è utile a caratterizzare qualsiasi tipo di flusso, e possiamo determinare sperimentalmente il valore di Re per il quale un flusso diventa turbolento.

Per tubi cilindrici il numero di Reynolds corrispondente alla velocità critica è circa 2000. Così ad esempio per un tubo avente diametro interno 2 cm – una comune canna da giardinaggio – la velocità critica data dalla (16.21) risulta

$$v_c = 2000\frac{1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s}}{(10^3\ \mathrm{kg/m^3})(0.02\ \mathrm{m})} = 0.1\ \mathrm{m/s} = 10\ \mathrm{cm/s} .$$

Si tratta di una velocità piuttosto modesta: i valori che si riscontrano più usualmente nella pratica sono intorno a 1 m/s, per cui si deduce che il regime di flusso dell'acqua negli impianti idraulici domestici è quasi sempre turbolento.

Dall'Equazione 16.21 risulta che la velocità critica aumenta con la viscosità del fluido: ciò significa che la probabilità di ottenere un flusso stazionario è tanto più elevata quanto maggiore è la viscosità del fluido.

 ISBN 00-000-0000-0

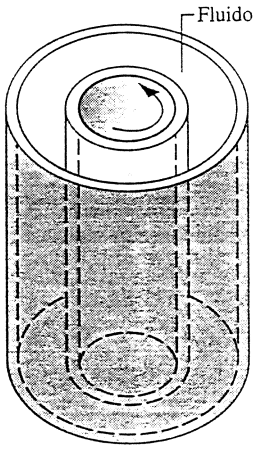


FIGURA 16.22 Dispositivo sperimentale per misurare la viscosità di un fluido. Il fluido riempie lo spazio fra due cilindri concentrici, l'esterno fisso e l'interno messo in rotazione a velocità angolare ω. Il momento torcente necessario per mantenere questa velocità di rotazione dipende dalla viscosità del fluido.

Flusso caotico

La geometria della Figura 16.18 non si presta a una facile misurazione della viscosità: la Figura 16.22 mostra una soluzione più vantaggiosa. Lo spazio fra i due cilindri coassiali è riempito col fluido in esame. Il cilindro interno ruota intorno al proprio asse, mentre l'esterno è fisso. Si può ricavare il valore della viscosità del fluido a partire dalla misura del momento torcente necessario a mantenere in rotazione il cilindro interno a velocità angolare costante.

Per basse velocità di rotazione il flusso nella Figura 16.22 rimane stazionario e laminare. Aumentando gradualmente la velocità di rotazione, a un certo momento il flusso diventa turbolento. Si può osservare che la transizione da laminare a turbolento avviene con passaggi ben definiti. Nella Figura 16.23 si vedono due stadi intermedi. Il fluido forma inizialmente dei vortici toroidali simili a una pila di ciambelle e sviluppa in seguito un sistema di onde di frequenza ben definita che si sovrappongono ai vortici. Al crescere della velocità di rotazione variano le frequenze delle onde. Si può immaginare che il flusso turbolento derivi dalla sovrapposizione di un numero tanto grande di frequenze differenti da farlo apparire completamente disordinato e capriccioso, qualcosa come il rumore elettronico. Può tuttavia esistere una struttura periodica occulta, che è però troppo complessa per poter essere rilevata.

La teoria del caos cui abbiamo accennato nel Paragrafo 5.7 adotta un approccio differente per spiegare l'insorgere della turbolenza, che sarebbe un moto realmente *aperiodico*, non una semplice combinazione di un gran numero di moti periodici. Fra queste due interpretazioni c'è una sostanziale divergenza. Se la transizione da regime laminare a turbolento avviene per una successione, sia pure assai complessa, ma costituita soltanto di moti periodici, due particelle di fluido che nella fase laminare si comportavano in modo analogo continueranno a rimanere in stretto rapporto nella transizione al moto turbolento. Se invece durante la transizione il moto diventa caotico si perde qualsiasi possibilità di prevederne gli sviluppi, e le due particelle potranno assumere comportamenti fra loro del tutto indipendenti. La teoria del caos, che è applicabile a una grande varietà di sistemi fisici, fornisce una base teorica alternativa per l'interpretazione di fenomeni complessi quali il moto turbolento.

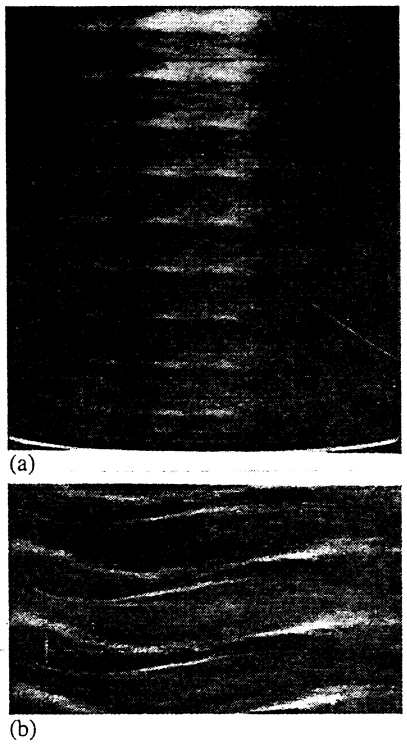


FIGURA 16.23 Nel viscosimetro della figura precedente, quando la velocità del fluido supera la velocità critica il flusso diventa instabile e si rompe (a) in vortici toroidali e (b) in onde sovrapposte ai vortici.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

16.1 Concetti generali sul moto dei fluidi

16.2 Linee di flusso ed equazione di continuità

1. La portata massica di un fluido che entra da un lato di un serbatoio è 3,0 kg/s; quella uscente dal lato opposto è 2,0 kg/s. Supponendo che il serbatoio sia pieno e che non vi siano altre vie di entrata o di uscita, si conclude che

(A) il passaggio di entrata ha una sezione maggiore dell'uscita.
(B) la velocità di entrata è maggiore di quella di uscita.
(C) la massa volumica del fluido deve aumentare all'interno del serbatoio.
(D) il fluido è incomprimibile.

2. Il raggio di un lungo tubo rettilineo a sezione circolare varia lungo il percorso. Nel tubo si ha un flusso costante, senza immissioni né fuoriuscite. In un punto P_1 il raggio della sezione è r_1 e la portata massica costante è Q_1. Più avanti nel tubo, nel punto P_2 il raggio è $r_2 = r_1/3$.
   (a) Chiamando Q_2 la portata massica in P_2, quanto vale Q_2/Q_1?
   (A) 9. (B) 3. (C) 1. (D) 1/9.
   (E) Dipende dalla massa volumica del fluido in P_1 e P_2.
   (b) Il rapporto delle velocità v_2/v_1 vale
   (A) 9. (B) 3. (C) 1. (D) 1/9.
   (E) Dipende dalla massa volumica del fluido in P_1 e P_2.
3. Una corrente costante d'acqua (incomprimibile) cade in verticale da un tubo. Alle distanze d_1 e d_2 sotto l'uscita dal tubo le velocità dell'acqua sono rispettivamente 1,0 m/s e 2,0 m/s. Qual è il rapporto tra le aree delle sezioni normali del getto alle distanze d_1 e d_2?
   (A) 4/1 (B) 2/1 (C) 1/2 (D) 1/4

16.3 L'equazione di Bernoulli

4. Un recipiente cubico di vino ha un piccolo rubinetto di scarico in un angolo del fondo. Quando il recipiente è pieno e appoggiato su un piano orizzontale con rubinetto completamente aperto come nella Figura 16.24a ne esce un getto di vino a velocità v_0.

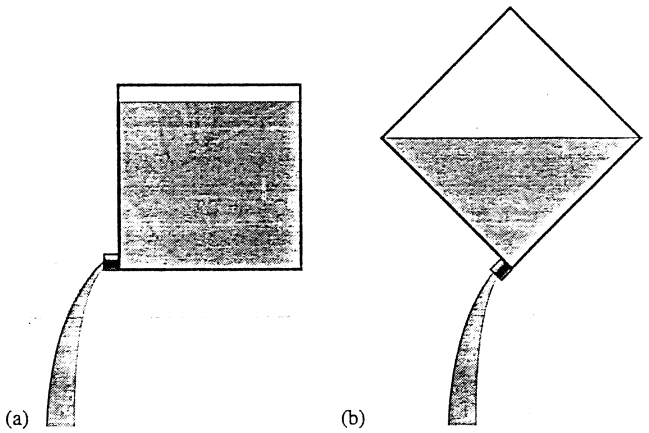


FIGURA 16.24 Domanda a risposta multipla 4.

   (a) Il recipiente, sempre nella stessa posizione, è pieno a metà. A rubinetto completamente aperto la velocità di uscita sarà
   (A) v_0. (B) $v_0/2$. (C) $v_0/\sqrt{2}$. (D) $v_0/\sqrt[4]{2}$.
   (b) Il recipiente è ancora pieno a metà, ma ora viene inclinato di 45° come nella Figura 16.24b e il rubinetto viene a trovarsi nel punto più basso. Aprendo il rubinetto la velocità di uscita del vino sarà
   (A) v_0. (B) $v_0/2$. (C) $v_0/\sqrt{2}$. (D) $v_0/\sqrt[4]{2}$.
5. Una corrente costante d'acqua (incomprimibile) cade in verticale da un tubo come nella Figura 16.5. Come varia nel getto la pressione in funzione dell'altezza?
   (A) La pressione è maggiore nei punti inferiori.
   (B) La pressione è minore nei punti inferiori.
   (C) La pressione è sempre la stessa.
6. Un fluido incomprimibile scorre in un tubo orizzontale. In un certo punto si misura una pressione p_1 e una velocità v_1. Più a valle la pressione è p_2 e la velocità $2v_1$. Che cosa si può dedurre circa le pressioni p_1 e p_2?
   (A) $p_1 = 4p_2$. (B) $p_1 = 3p_2$ (C) $p_1 = 2p_2$.
   (D) Soltanto che $p_1 > p_2$.
7. Un fluido incomprimibile scorre in un tubo orizzontale. In un certo punto la pressione è p_1. Più a valle la pressione è $p_2 > p_1$. Che cosa si può dedurre circa le aree delle sezioni normali del tubo A_1 nel punto 1 e A_2 nel punto 2?
   (A) $A_1 > A_2$. (B) $A_1 < A_2$.
   (C) Nessuna deduzione è possibile circa la relazione esistente fra A_1 e A_2.

16.4 Applicazioni dell'equazione di Bernoulli e dell'equazione di continuità

16.5 Campi di flusso

16.6 Viscosità, turbolenza e flusso caotico

8. Una pompa è in grado di mantenere una certa caduta di pressione per unità di lunghezza in un tubo cilindrico di raggio R_1 con una portata massica Q_0. Si vuole sostituire al tubo unico una coppia di tubi più piccoli ognuno di raggio R_2, tale che la pompa continui a mantenere nei due tubi la stessa caduta di pressione e la stessa portata totale Q_0. Quale deve essere il rapporto R_1/R_2?
   (A) 2. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\sqrt[4]{2}$. (D) 4.

QUESITI

1. Spiegate brevemente, anche con esempi, che cosa significhino le seguenti definizioni: (a) regime di flusso stazionario; (b) regime di flusso turbolento; (c) flusso di fluido rotazionale; (d) flusso di fluido irrotazionale; (e) flusso di fluido comprimibile; (f) flusso di fluido incomprimibile; (g) flusso di fluido viscoso; (h) flusso di fluido non viscoso.
2. In un flusso stazionario il vettore velocità in ogni punto è costante. Può allora esserci moto accelerato delle particelle fluide? Si spieghi.
3. Descrivere le forze agenti su un elemento di fluido che scorre in un tubo di sezione non uniforme.
4. La tensione superficiale potrebbe avere un effetto, ed eventualmente quale, sulla soluzione del Problema svolto 16.1?
5. Illustrare le variazioni di pressione del sangue mentre circola nel corpo.
6. Spiegate come il medico misura la pressione sanguigna.
7. In una dimostrazione didattica una pallina da ping-pong è sostenuta in aria da un getto d'aria verticale. Spiegate se si tratta di equilibrio stabile, instabile o indifferente.

8. L'altezza del liquido nelle colonne manometriche di Figura 16.25 indica una caduta di pressione lungo il canale, nonostante che esso abbia sezione uniforme e il liquido che scorre sia incomprimibile. Spiegate come mai.

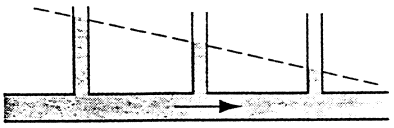


FIGURA 16.25 Quesito 8.

9. Spiegate perché una canna fumaria più alta migliori il tiraggio per la fuoruscita del fumo di un caminetto. Perché il fumo non si riversa nella stanza del caminetto?
10. (a) Spiegate come un lanciatore di baseball riesca a far curvare la palla a destra o a sinistra. Si giustifica l'applicazione della legge di Bernoulli a questa palla rotante? (b) Perché è più facile un tiro curvo con una palla da tennis che con una da baseball?
11. Non soltanto con una palla rugosa, ma anche con una liscia si può eseguire un tiro curvo, ma le due palle devieranno in direzioni opposte. Perché?
12. Due barche a remi che navigano parallele fra loro tendono a convergere l'una contro l'altra. Lo stesso fenomeno avviene anche fra due automobili che viaggiano parallele. Spiegate questo fenomeno sulla base dell'Equazione di Bernoulli.
13. Nel costruire grattacieli quali forze prodotte dal movimento dell'aria bisogna contrastare? E come si fa? (Vedi C.W. Condit, *Il controventamento dei fabbricati*, «Le Scienze», maggio 1974, p. 76.)
14. A partire dall'equazione di Bernoulli spiegate l'azione frenante di un paracadute in caduta libera.
15. Perché un getto d'acqua uscente da un rubinetto si assottiglia nel cadere?
16. Sapete spiegare perché l'acqua discende in un flusso compatto in un tubo verticale, mentre si divide in gocce quando cade liberamente?
17. Come funziona lo sciacquone del gabinetto? Seriamente. (Vedi W. Reybum, *Flushed with Pride. The Story of Thomas Crapper*, Prentice-Hall, 1969.)
18. Certe persone estraggono una lettera dalla busta tagliandone una striscia su un lato corto, tenendo ferma la busta e soffiandovi contro. Spiegate, con l'aiuto dell'Equazione di Bernoulli, come possa aver successo questo modo d'agire.
19. Per un aeroplano in decollo è meglio disporsi contro vento o con il vento in poppa? E in atterraggio?
20. Spiegate come la differenza di pressione fra la faccia inferiore e la superiore dell'ala dipenda dall'altitudine dell'aeroplano.
21. Spiegate come la formazione di ghiaccio sull'ala di un aeroplano possa ridurne enormemente la portanza. (Il peso del ghiaccio non è determinante.)
22. Come può un aeroplano sostentarsi in volo rovescio?
23. "La caratteristica forma a banana della maggior parte dei boomerang non ha niente a che fare con la loro capacità di ritornare... Il fattore essenziale è la forma della sezione dei due lati, che deve essere più convessa su una faccia che sull'altra, come l'ala di un aeroplano." (Da F. Hess *L'aerodinamica del boomerang*, «Le Scienze», aprile 1969, p. 36). Commentate.
24. Quale forza consente il volo verticale degli uccelli?
25. Perché nell'Equazione 16.15 compare il fattore 2, invece che 1? Ci si potrebbe aspettare al contrario che la spinta sia semplicemente il prodotto dell'area per la differenza di pressione: $A_0(p - p_0)$. Perché no?
26. Spiegate perché l'effetto distruttore di una tromba d'aria sia maggiore vicino al centro della perturbazione che alla periferia.
27. Quando si estrae il tappo da un lavandino pieno, l'acqua scaricandosi forma un piccolo vortice. La velocità angolare di un elemento fluido rispetto all'asse verticale dell'orifizio sembra maggiore in vicinanza di esso. Si dia una spiegazione.
28. È vero che nello scarico di una vasca da bagno nell'emisfero boreale l'acqua tende a ruotare in senso antiorario e nell'emisfero australe in senso orario? Se è così, spiegate come ciò avvenga e dite che cosa succede all'equatore.
29. Spiegate perché non si può rimuovere il filtro dall'imbuto di Figura 16.26 soffiando nell'estremità minore.

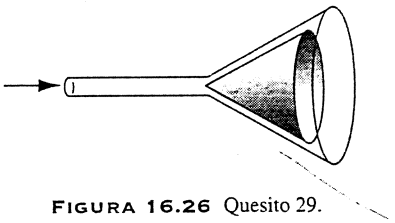


FIGURA 16.26 Quesito 29.

30. Secondo l'Equazione di Bernoulli un aumento di velocità è accompagnato da una diminuzione della pressione. Però, se mettete una mano fuori da un'auto in corsa, aumentando così la velocità relativa dell'aria, avete la sensazione di un aumento di pressione. Perché ciò non costituisce una violazione dell'Equazione di Bernoulli?
31. Per quale ragione la presenza dell'atmosfera riduce la gittata massima ottenibile con alcuni oggetti (palle da tennis), ma la aumenta per altri (*frisbee*, palle da golf)?
32. In presenza di un vento che soffia alla velocità di 50 km/h, si può lanciare un disco più lontano controvento che concordemente al vento. Perché? (*Suggerimento*: si pensi alla portanza e alla resistenza dell'aria.)
33. Spiegate perché le palle da golf sono butterate.
34. Un surfista andrà tanto più lontano quanto più lunga è la tavola e più basso il fondale. Si spieghi.
35. Si spieghi perché il tè versato da una teiera ha la tendenza a scorrere aderente al profilo inferiore del beccuccio.
36. I cani della prateria vivono in colonie molto popolose in complicati sistemi di gallerie, col problema di assicurare un sufficiente ricambio d'aria per evitare di rimanere soffocati. Lo risolvono costruendo delle montagnole coniche di terra sopra alcune delle numerose uscite delle loro tane. Secondo l'Equazione di Bernoulli, come funziona questo sistema di condizionamento d'aria? Si tenga presente che a causa della viscosità dell'aria la velocità del

ISBN 88-408-1254-7

vento a livello del terreno è molto minore rispetto a quella che si può misurare appena qualche centimetro più in alto.

37. La viscosità è un esempio di fenomeno di trasporto. Quale proprietà è trasportata? Provate a pensare a qualche altro fenomeno di trasporto e alla proprietà corrispondente.

38. Perché molti fabbricanti di automobili raccomandano l'uso di olio lubrificante «multigrado» nei mesi freddi?

39. Perché è più importante tener conto della viscosità in canali di modesta sezione che in vie d'acqua prive di sponde artificiali?

40. La viscosità può ritardare l'insorgere di turbolenza in un fluido, per cui tende a stabilizzare il flusso. Confrontate per esempio uno sciroppo e l'acqua e date una spiegazione verosimile.

ESERCIZI

16.1 Concetti generali sul moto dei fluidi

16.2 Linee di flusso ed equazione di continuità

1. Un tubo di diametro 34,5 cm conduce acqua che avanza con velocità di 2,62 m/s. Quanto impiegherà a scaricare 1600 m^3 d'acqua?

2. Una canna da giardinaggio con diametro interno 1,9 cm è collegata a un dispositivo di innaffiamento consistente in un cilindro con 24 fori di diametro 0,13 cm. Se l'acqua nella canna ha una velocità di 9,0 cm/s, a che velocità uscirà dai fori?

3. La Figura 16.27 mostra la confluenza di due corsi d'acqua che formano un fiume. Supponendo tutte le misure costanti, un affluente ha larghezza 8,2 m, profondità 3,4 m e velocità 2,3 m/s, l'altro misura rispettivamente 6,8 m, 3,2 m e ha una velocità di 2,6 m/s. La larghezza del fiume è 10,7 m e la velocità dell'acqua 2,9 m/s. Qual è la sua profondità?

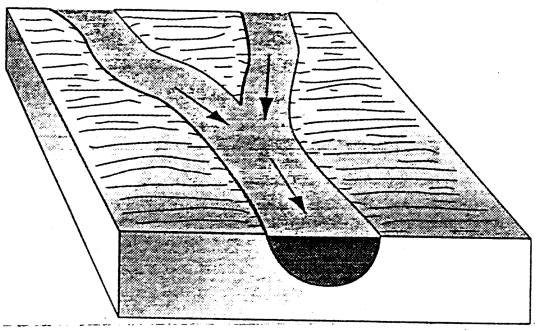


FIGURA 16.27 Esercizio 3.

4. Da una cantina allagata si drena l'acqua alla velocità di 5,30 m/s attraverso una manichetta di sezione uniforme e raggio 9,70 mm, che esce da una finestra all'altezza di 2,90 m sopra il livello dell'acqua. Se si ignorano i fattori dissipativi, qual è la potenza fornita dalla pompa?

5. Un fiume largo 21 m e profondo 4,3 m raccoglie le piogge da un bacino di area di 8500 km^2, ove le precipitazioni medie annue ammontano a 48 cm, un quarto delle quali sono restituite all'atmosfera per evaporazione, mentre le restanti sono smaltite per drenaggio dal fiume. Qual è la velocità media della corrente nel fiume?

16.3 L'equazione di Bernoulli

6. Quanto lavoro deve compiere la forza di pressione per far passare 1,4 m^3 d'acqua attraverso un tubo di diametro interno 13 mm con una differenza di pressione fra le due estremità pari a 1,2 bar?

7. L'area della sezione della presa d'acqua dal bacino di accumulo di una centrale idroelettrica (Figura 16.28) è di 0,69 m^2. L'acqua entra alla velocità di 0,40 m/s, ed esce, 172 m più in basso, alla velocità di 9,33 m/s. (a) Trovare la differenza di pressione fra ingresso e uscita. (b) Trovare l'area della sezione del tubo all'uscita.

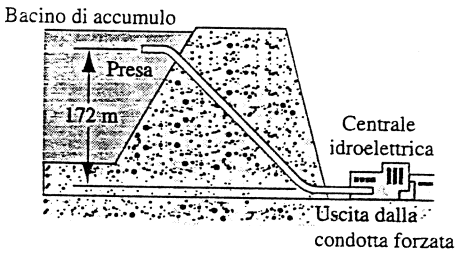


FIGURA 16.28 Esercizio 7.

8. I modelli di siluro si collaudano talvolta in un tubo orizzontale di acqua fluente, analogamente a quanto si fa nelle gallerie del vento per i modelli di aeroplani. Supponiamo di sistemare un modello di siluro di diametro 4,80 cm nell'asse di un tubo cilindrico di diametro 25,5 cm, e di fare una prova con acqua fluente alla velocità di 2,76 m/s. (a) Che velocità deve avere l'acqua nel tratto libero del tubo? (b) Si calcoli la differenza di pressione fra il tratto libero e il tratto di prova del tubo.

9. È stata installata una cisterna che raccoglie tutta l'acqua che cade su una superficie di 100 m^2, con un foro di scarico di area a praticato ad altezza $h = 2$ m sotto la superficie dell'acqua. (a) Supponendo una piovosità annua di 1,6 m distribuita uniformemente nel corso dell'anno, calcolare il massimo valore di a che può garantire il mantenimento di un livello costante nella cisterna. (b) Trovare la quantità di acqua in litri al giorno che la cisterna può erogare. (c) A quante persone può garantire il fabbisogno di acqua questa cisterna?

10. Attraverso un tubo di sezione 4,20 cm^2 scorre acqua alla velocità di 5,18 m/s. L'acqua scende gradatamente di 9,66 m mentre l'area del tubo aumenta fino a 7,60 cm^2. (a) Qual è la velocità del flusso al livello più basso? (b) Sapendo che la pressione al livello superiore è di 152 kPa, si trovi la pressione al livello inferiore.

11. Durante un uragano l'aria (di massa volumica 1,2 kg/m^3) investe la superficie superiore di un tetto alla velocità di 110 km/h. (a) Qual è la differenza di pressione fra interno ed esterno che tende a sollevare il tetto? (b) Quale sarebbe la forza di sollevamento per un tetto avente area di 93 m^2?

12. Un grattacielo ha le finestre che misurano 4,26 m · 5,26 m. In un giorno di tempesta il vento soffia alla velocità di 28,0 m/s su una finestra al 53° piano. Calcolare la forza totale agente sulla finestra. La massa volumica dell'aria è 1,23 kg/m^3.
13. Un liquido scorre in un tubo orizzontale di raggio interno 2,52 cm. Il tubo è piegato verso l'alto per un'altezza di 11,5 m dove si allarga ed è collegato a un altro tubo orizzontale di raggio interno 6,14 cm. Quale sarà la portata volumica per cui la pressione nei due tubi orizzontali è la stessa?
14. Nella Figura 16.29 è rappresentato un grande serbatoio, aperto in alto, dal quale si scarica un liquido attraverso un ugello a profondità h sotto il livello libero. (a) Si applichi l'Equazione di Bernoulli a una linea di flusso che passa per i punti 1, 2 e 3 e si dimostri che la velocità di uscita è

$$v = \sqrt{2gh}\,.$$

Questa equazione esprime la *legge di Torricelli*. (b) Se l'ugello fosse curvato in modo da dirigere il getto verticalmente verso l'alto, fino a che altezza risalirebbe il getto? (c) Come influirebbero su questa analisi la viscosità o la turbolenza?

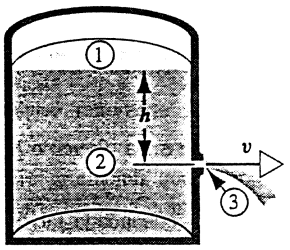


FIGURA 16.29 Esercizio 14.

15. In un sommergibile alla profondità di 200 m si manifesta una perdita relativamente modesta. A che velocità entra l'acqua nello scafo? Supponiamo che la pressione dell'aria all'interno sia uguale alla pressione a livello del mare.
16. Un cecchino spara una fucilata contro un serbatoio di benzina che fa un buco a 53,0 m sotto la superficie libera della benzina. Il serbatoio (Figura 16.30) è stagno ed è mantenuto sotto una pressione assoluta di 3,10 bar. A che velocità la benzina, che ha una densità di 660 kg/m^3, comincia a schizzare fuori dal buco?

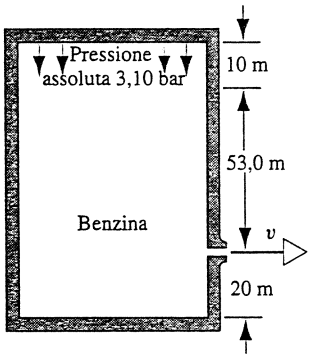


FIGURA 16.30 Esercizio 16.

17. Supponiamo che un tubo a U di sezione uniforme (Figura 16.31) abbia al fondo un diaframma separatore e sia riempito con un liquido ad altezza differente nei due rami. Immaginiamo ora che il diaframma sia forato e il liquido scorra da sinistra verso destra. (a) Dimostrare che l'applicazione del teorema di Bernoulli ai punti 1 e 3 conduce a una contraddizione. (b) Spiegare perché l'equazione di Bernoulli non è applicabile in questo caso. (*Suggerimento*: si tratta di un flusso stazionario?)

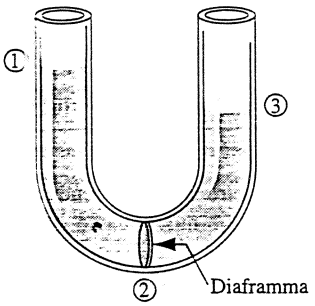


FIGURA 16.31 Esercizio 17.

18. Se soffiate dell'aria alla velocità di 15,0 m/s sopra all'estremità di un tubo a U contenente dell'acqua, quale sarà la differenza di livello fra i due rami del tubo? La massa volumica dell'aria è 1,20 kg/m^3.
19. La profondità dell'acqua a monte di una diga è 15,2 m. Un tubo orizzontale di diametro 4,30 cm attraversa la diga 6,15 m sotto la superficie dell'acqua, come in Figura 16.32. Un tappo chiude l'uscita del tubo. (a) Trovare la forza di attrito fra il tappo e la parete del tubo. (b) Togliendo il tappo, che volume d'acqua esce dal tubo in 3,00 h?

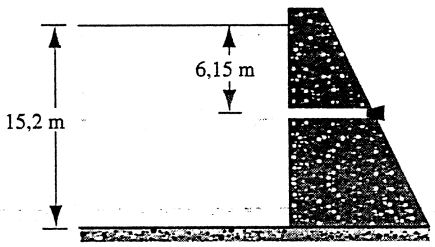


FIGURA 16.32 Esercizio 19.

16.4 Applicazioni dell'equazione di Bernoulli e dell'equazione di continuità

20. Un tubo di Pitot è montato sull'ala di un aeroplano per misurare la velocità relativa dell'aria, che ha una massa volumica di 1,03 kg/m^3. Il tubo, contenente alcool (massa volumica 810 kg/m^3), segna una differenza di livello di 26,2 cm. Qual è la velocità dell'aeroplano rispetto all'aria?
21. Un tratto di tubo verticale ha un disco DD fissato all'estremità inferiore, come nella Figura 16.33. Quando si soffia nel tubo dell'aria di massa volumica ρ il disco attira il foglio di carta CC, di peso trascurabile. Sia A l'area del foglio e v la velocità media dell'aria fra il disco e il foglio. Calcolare la forza risultante diretta verso l'alto che agisce su CC. La velocità nel tubo è $v_0 \ll v$, ove v_0 è la velocità dell'aria nel tubo.

ISBN 88-408-1254-7

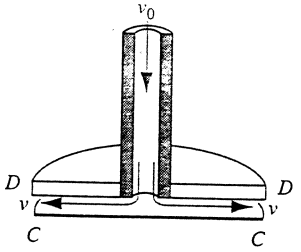


FIGURA 16.33 Esercizio 21.

22. Una piastra quadrata di lato 9,10 cm e massa 488 g è incernierata lungo un lato e giace orizzontalmente. Se si soffia dell'aria che lambisce unicamente la superficie superiore, che velocità deve avere per mantenere orizzontale la piastra? La massa volumica dell'aria è di 1,21 kg m^3.

23. L'aria scorre sulla faccia superiore dell'ala di un aeroplano, di area A, alla velocità v_s e sull'inferiore alla velocità v_i. Dimostrare che, in base all'equazione di Bernoulli, la portanza P sarà

$$P = \tfrac{1}{2}\rho A(v_s^2 - v_i^2),$$

ove ρ è la massa volumica dell'aria. (*Suggerimento*: si applichi l'equazione di Bernoulli a una linea di flusso che lambisce la faccia superiore dell'ala e a un'altra che lambisce la faccia inferiore. Si può ammettere che le costanti per le due linee di flusso siano uguali?)

24. Un aeroplano ha la superficie alare di 12,5 m^2 per ciascuna ala. Per una certa velocità dell'aria, questa scorre lungo la faccia superiore alla velocità di 48,9 m/s e sull'inferiore alla velocità di 38,2 m/s. (a) Trovare la massa dell'aeroplano. Supponiamo che esso voli a velocità costante e che la portanza della fusoliera e della coda sia trascurabile. Determinare la portanza per il caso che l'aereo, a pari velocità relativa dell'aria, (b) sia in volo orizzontale, (c) stia cabrando con angolo d'inclinazione 15° e (d) stia picchiando con la stessa inclinazione di 15°. La massa volumica dell'aria è 1,17 kg/m^3. Vedi il precedente Esercizio 23.

25. Un venturimetro ha diametro maggiore di 25,4 cm e diametro minore di 11,3 cm. La pressione dell'acqua nel tubo è 57,1 kPa e nella strozzatura 32,6 kPa. Calcolare la portata di acqua nel tubo.

16.5 Campi di flusso

26. Dimostrare che la costante nell'equazione di Bernoulli è la stessa per tutte le linee di flusso nel caso di flusso stazionario irrotazionale della Figura 16.13.

27. Prima che Newton proponesse la sua teoria della gravitazione, un modello del moto dei pianeti formulato da Cartesio era stato accolto molto favorevolmente. In questo modello i pianeti erano catturati e trascinati da un vortice di particelle dell'etere centrato sul Sole. Newton osservò che questo schema del vortice contraddiceva le osservazioni perché: (a) nel vortice la velocità di una particella dell'etere varia inversamente alla sua distanza dal Sole; (b) il periodo di rivoluzione di una simile particella varia proporzionalmente al quadrato della sua distanza dal Sole, e (c) questo risultato è in contrasto con la terza legge di Keplero. Dimostrare (a), (b) e (c).

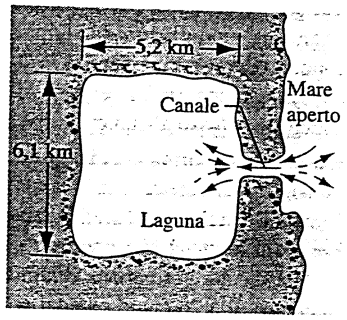
16.6 Viscosità, turbolenza e flusso caotico

28. Calcolare la massima velocità alla quale il sangue, alla temperatura di 37 °C, può fluire in un'arteria di diametro 3,8 mm mantenendo il flusso laminare.

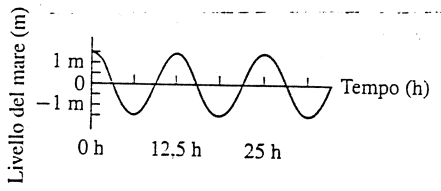
29. Del mercurio liquido (viscosità = $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Pa · s) scorre in un tubo orizzontale di raggio interno 1,88 cm e lunghezza 1,26 m. La sua portata volumica è di $5{,}35 \cdot 10^{-2}$ L/min. (a) Dimostrare che il flusso è laminare. (b) Calcolare la differenza di pressione fra le due estremità del tubo.

PROBLEMI

1. Le correnti di marea in canali stretti che collegano certe lagune con l'oceano possono essere molto veloci: l'acqua deve fluire nella laguna quando la marea cresce e uscirne quando cala. Consideriamo la laguna rettangolare della Figura 16.34a, collegata al mare da un canale largo 190 m e profondo 6,5 m sotto il livello medio del mare. Il grafico di Figura 16.34b mostra la variazione giornaliera del livello dell'acqua nella laguna. Calcolare la velocità media della corrente di marea nel canale.



(a)



(b)

FIGURA 16.34 Problema 1.

2. Supponiamo che due serbatoi, 1 e 2, ciascuno con una larga apertura in alto, contengano liquidi differenti. Sulla parete di ciascuno dei due serbatoi è praticato un piccolo foro alla stessa profondità h rispetto alla superficie del liquido, ma il foro del serbatoio 1 ha sezione pari alla metà di quello del serbatoio 2. (a) Quale sarà il rapporto ρ_1/ρ_2 delle masse volumiche dei due liquidi se si osserva che le portate massiche attraverso i due fori sono uguali? (b) Qual è il rapporto tra le portate volumiche? (c) Si vuole

rendere uguali le portate volumiche aggiungendo o estraendo liquido del serbatoio 2. Quale dovrà essere la nuova altezza del livello rispetto al foro nel serbatoio 1 per ottenere l'uguaglianza dei flussi?

3. Un serbatoio è riempito d'acqua fino all'altezza H. In una parete è praticato un foro a una profondità h sotto la superficie libera dell'acqua (Figura 16.35). (a) Dimostrare che la distanza x dal piede della parete alla quale il getto colpisce il terreno è data da $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (b) Sarebbe possibile fare un altro foro a una profondità diversa, tale che il getto arrivi al suolo alla medesima distanza? (c) A che profondità dovrebbe trovarsi il foro per ottenere la massima distanza possibile? E quanto vale questa distanza?

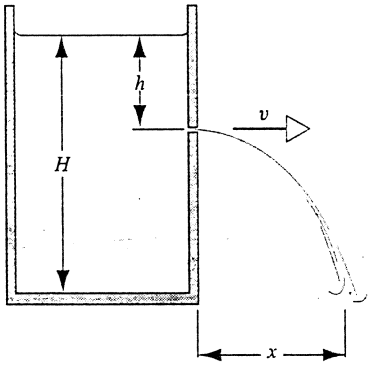


FIGURA 16.35 Problema 3.

4. Un sifone è un dispositivo che serve a estrarre un liquido da un recipiente senza inclinarlo. Come si vede nella Figura 16.36, il tubo deve essere inizialmente riempito di liquido, che poi si scaricherà fino a che il livello del liquido scenda al di sotto dell'estremità A che pesca nel serbatoio. Il liquido ha massa volumica ρ e viscosità trascurabile. (a) A che velocità uscirà il liquido da C? (b) Qual è la pressione del liquido nel punto più alto B? (c) Qual è la massima altezza h_{max} alla quale un sifone può far salire il liquido?

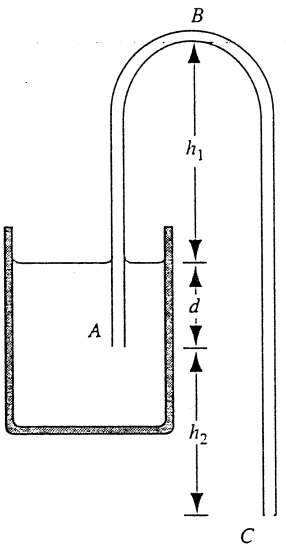


FIGURA 16.36 Problema 4.

5. (a) Consideriamo una corrente di un fluido di massa volumica ρ a velocità v_1 che passa bruscamente da un tubo cilindrico avente area di sezione retta a_1 in un tubo cilindrico di sezione molto più grande a_2 come in Figura 16.37. Il getto si mescolerà con il fluido circostante e, una volta mescolato, procederà con moto quasi uniforme alla velocità media v_2. Senza entrare in dettagli circa la fase di miscelazione, si spieghi intuitivamente come l'aumento in pressione dovuto alla miscelazione sia circa

$$p_2 - p_1 = \rho v_2(v_1 - v_2)\,.$$

(b) Dimostrare con l'equazione di Bernoulli che in un tubo che si allarga gradualmente si avrebbe

$$p_2 - p_1 = \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)\,.$$

(c) Calcolare la perdita di pressione dovuta al brusco allargamento della sezione. Sapete trovare un'analogia con gli urti elastici e anelastici nella meccanica dei punti materiali?

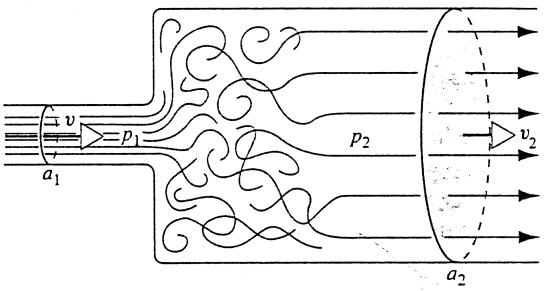


FIGURA 16.37 Problema 5.

6. Un distributore di bibite contiene 15 bicchieri di aranciata. Aprendo il rubinetto sul fondo si riempie un bicchiere in 12,0 secondi. Se si lascia aperto il rubinetto, quanto tempo si impiega per riempire gli altri 14 bicchieri?
7. Consideriamo l'aria stagnante davanti al bordo di attacco di un'ala e quella che corre sulla faccia superiore a velocità v. Ammesso che la pressione sul bordo di attacco sia uguale alla pressione atmosferica e che l'aria, avente massa volumica 1,2 kg/m^3, sia incomprimibile, calcoliamo con l'equazione di Bernoulli il massimo valore possibile per la velocità v in un flusso laminare. In quale relazione si trova con la velocità del suono in queste condizioni (340 m/s)? Sapete spiegare la differenza? E per quale ragione deve esservi una relazione fra queste quantità?
8. Consideriamo il venturimetro di Figura 16.8. Applicando l'equazione di Bernoulli ai punti 1 e 2 e l'equazione di continuità (Equazione 16.3), verificate l'Equazione 16.11 per la velocità del flusso al punto 1.
9. Consideriamo il venturimetro di Figura 16.8, contenente acqua, senza il manometro. Sia $A_1 = 4{,}75A_2$, e la pressione al punto 1 sia 2,14 bar. (a) Calcolare i valori di v_1 al punto 1 e v_2 al punto 2 che azzerano la pressione p_2 al punto 2. (b) Calcolare la portata volumica corrispondente per un diametro di 5,20 cm al punto 1. Il fenomeno che si

ISBN 88-408-1254-7

verifica al punto 2 in cui la pressione p_2 si annulla è detto *cavitazione*; in tale situazione l'acqua vaporizza in bollicine.

10. Un campo di forza è conservativo se $\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$. Il simbolo $\oint$ indica che l'integrazione va operata lungo una linea chiusa all'interno del campo. Un flusso si dice di potenziale, ed è quindi irrotazionale, se $\oint \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$ per ogni cammino chiuso all'interno del campo. Usando questo criterio, si dimostri che i campi di (a) Figura 16.13 e (b) Figura 16.16 sono campi di flusso di potenziale.

11. In flussi che curvano bruscamente sono apprezzabili degli effetti centrifughi. Consideriamo un elemento di fluido che si muova alla velocità v lungo una linea di flusso incurvata in un piano orizzontale, come in Figura 16.38. (a) Si dimostri che $dp/dr = \rho v^2/r$, e che quindi la pressione aumenta di una quantità $\rho v^2/r$ per unità di distanza perpendicolare alla linea di flusso passando dalla parte concava a quella convessa della linea stessa. (b) Si applichi quindi questo risultato all'equazione di Bernoulli per dimostrare che vr è costante, per cui la velocità aumenta avvicinandosi al centro di curvatura. Le linee di flusso, che erano parallele ed equidistanti nel tratto rettilineo, incurvandosi diventeranno più vicine fra loro verso l'interno della curva, e più spaziate verso l'esterno. Questo problema va confrontato con il Problema 12 del Capitolo 15, dove il moto curvilineo era prodotto dalla rotazione di un recipiente. La velocità variava in quel caso proporzionalmente alla distanza r dal centro, mentre qui varia inversamente. (c) Si dimostri che questo flusso è irrotazionale.

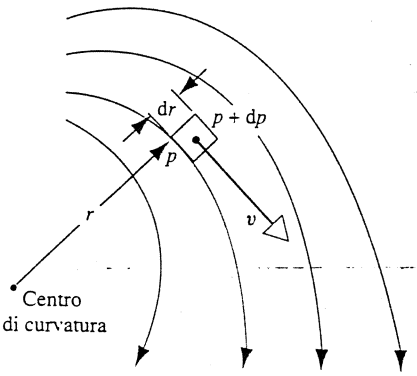


FIGURA 16.38 Problema 11.

12. Nella Figura 16.39 è schematizzata una sezione degli strati superiori della crosta terrestre. La superficie della Terra è divisa in parecchi blocchi rigidi, chiamati placche, che scivolano (lentamente!) sopra uno strato inferiore «melmoso» chiamato astenosfera. Supponiamo che la velocità di scorrimento della placca rigida sia $v_0 = 48$ mm/a rispetto all'astenosfera supposta immobile. Calcolare lo sforzo di taglio (forza tangenziale per unità di area) sulla base della placca. La viscosità del materiale componente l'astenosfera è $4.0 \cdot 10^{19}$ Pa · s. Si ignori la curvatura della superficie terrestre.

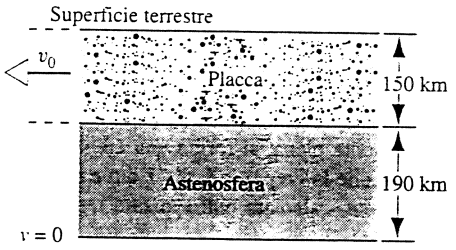


FIGURA 16.39 Problema 12.

13. La Figura 16.40 mostra le linee di flusso di un tipico campo di flusso in regime di Poiseuille. La spaziatura delle linee indica che, sebbene il moto sia rettilineo, si manifesta un gradiente di velocità trasversalmente al flusso. Dimostrare che il flusso di Poiseuille è rotazionale.

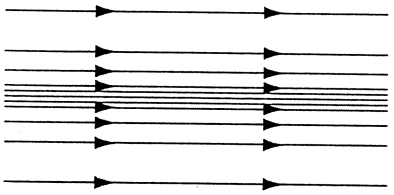


FIGURA 16.40 Problema 13.

14. Un fluido di viscosità η scorre uniformemente in un tubo cilindrico orizzontale di raggio R e lunghezza L, come nella Figura 16.41. (a) Dimostrare che, per un qualsiasi cilindro di fluido di raggio r, la forza viscosa F dovuta agli strati adiacenti è $F = -\eta(2\pi rL)dv/dr$. (b) Dimostrare che la forza F' che spinge avanti nel tubo questo cilindro di fluido è $F' = (\pi r^2)\Delta p$. (c) Applicare la condizione di equilibrio per ricavare dv in funzione di dr. Integrare questa espressione per ottenere l'Equazione 16.18.

15. Con riferimento al problema 14 e alla Figura 16.41, si trovi un'espressione per la portata massica che attraversa una sezione anulare fra i raggi r ed $r + dr$, e poi si integri per trovare la portata massica totale nel tubo, così da verificare l'Equazione 16.20.

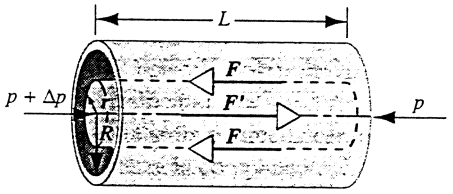


FIGURA 16.41 Problemi 14 e 15.

16. Una bolla di sapone di raggio 38,2 mm è gonfiata all'estremità di un tubicino di diametro 1,08 mm, lungo 11,2 cm. L'altra estremità del tubo è quindi esposta alla pressione atmosferica. Ammettendo che nel tubicino si stabilisca un regime di Poiseuille, trovate il tempo impiegato dalla bolla per ridursi al raggio di 21.6 mm. La tensione superficiale della bolla sia $2.50 \cdot 10^{-2}$ N/m, e la viscosità dell'aria sia $1.80 \cdot 10^{-5}$ Pa · s.

 ISBN 00-000-0000-0

PROBLEMI AL CALCOLATORE

Nella parete di una cisterna cilindrica, di raggio 2 m e altezza 1,5 m, completamente piena, si forma una crepa dalla quale esce l'acqua. Supposto che la crepa sia larga 1 cm e si estenda su tutta l'altezza della parete, calcolare entro quanto tempo la cisterna si svuota totalmente. (*Suggerimento*: si supponga che la crepa sia formata da tanti fori sovrapposti di 1 cm^2 ciascuno, e si risolva il problema numericamente.)

CAPITOLO 17

FENOMENI OSCILLATORI

Nella vita di tutti i giorni entriamo a contatto con numerosi esempi di moto oscillatorio sia a livello macroscopico, – oscillazioni del pendolo di un orologio, di un tuffatore su un trampolino o, ancora, di una corda di una chitarra – sia a livello microscopico – vibrazioni degli atomi di un cristallo di quarzo in un orologio digitale o delle molecole di aria durante la trasmissione di un suono. Assieme a questi fenomeni di natura meccanica se ne possono citare anche alcuni di natura elettrica, per esempio le oscillazioni di un elettrone all'interno dei circuiti atti a ricevere e trasmettere i segnali radio o televisivi. Tutti i fenomeni oscillatori, indipendentemente dalla loro natura meccanica o elettrica, possono essere descritti per mezzo di un medesimo formalismo matematico. In questo capitolo ci si occuperà delle oscillazioni di sistemi meccanici; quelle di grandezze elettriche verranno discusse, attraverso la stessa struttura matematica, più avanti.

17.1 SISTEMI OSCILLANTI

I sistemi meccanici oscillanti possono essere di diversi tipi; si pensi, per esempio, al pendolo di un orologio o a un corpo sospeso a una molla. In questo paragrafo si vogliono individuare le caratteristiche peculiari delle forze che generano moti oscillatori.

Se un pendolo viene spostato dalla sua posizione di equilibrio la forza peso tende a riportarlo nella posizione iniziale. Se il pendolo viene spostato nella direzione opposta, nuovamente la forza peso tenderà a riportare l'oggetto nella posizione di equilibrio. *Indipendentemente dal verso in cui il pendolo viene spostato, la forza peso tende a riportarlo nella posizione di equilibrio.* Forze di questo tipo sono dette *di richiamo*. Ai sensi delle definizioni introdotte nel Capitolo 12, la posizione di equilibrio inferiore di un pendolo è *stabile*; infatti, se sottoposto a piccole perturbazioni, il sistema tende a ritornare all'equilibrio.

Si discute, ora, un esempio molto semplice: un particella di massa m è vincolata a muoversi lungo l'asse x ed è sottoposta all'azione di una forza la cui componente lungo x vale $+F_m > 0$ per $x < 0$ e $-F_m < 0$ per $x > 0$ (Figura 17.1a). La forza, il cui grafico è riportato nella Figura 17.1b, è simile a quelle discusse nel Capitolo 2 e per le quali si è dimostrato che il moto risultante ha accelerazione costante.

All'istante iniziale la particella viene posta nella posizione $x = +x_m$ e quindi su di essa agisce la forza $-F_m$ che la mette in moto con accelerazione costante la cui componente lungo l'asse x vale $-a_m = -F_m/m < 0$. La particella, quindi, si muove verso la posizione di equilibrio $x = 0$, che raggiunge con velocità $v_x = -v_m$. Appena superata l'origine, la forza agente sulla particella cambia segno e diventa $+F_m$; di conseguenza la componente x dell'accelerazione della particella diventa $+a_m = F_m/m$. La particella continua il suo moto nel verso negativo dell'asse x, ma la sua velocità decresce in modulo fino ad annullarsi quando la particella giunge nella posizione $x = -x_m$; a questo punto la particella cambia verso del moto e inizia a muoversi verso l'origine fino a raggiungere il punto $x = +x_m$. In assenza di attrito e di altre forze dissipative, il ciclo appena descritto si ripete indefinitamente.

Il moto della particella viene descritto in Figura 17.2 con la tecnica introdotta nel Capitolo 2: il grafico della funzione $x(t)$, che rappresenta la posizione della particella al-

 ISBN 88-408-1254-7

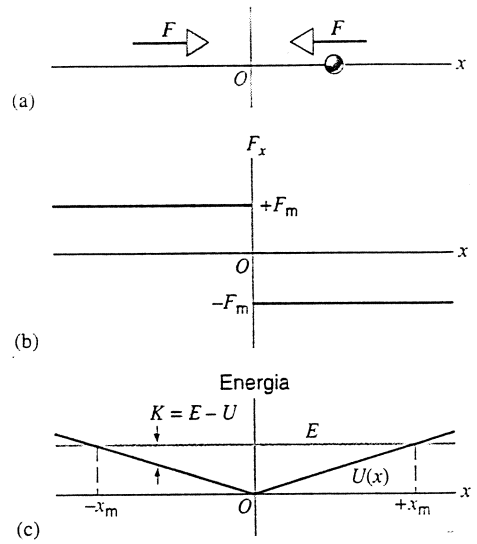


FIGURA 17.1 (a) Su una particella agisce la forza F diretta verso l'origine. (b) Grafico della componente lungo l'asse x della forza F: tale componente vale $+F_m$ per $x < 0$ e $-F_m$ per $x > 0$. Le forze reali con queste caratteristiche devono essere descritte mediante funzioni continue anche nei casi in cui la loro pendenza nell'origine risulti eccezionalmente elevata. (c) Energia potenziale associata alla forza F. Se la particella ha energia meccanica totale E, la differenza $E - U$ fornisce l'energia cinetica.

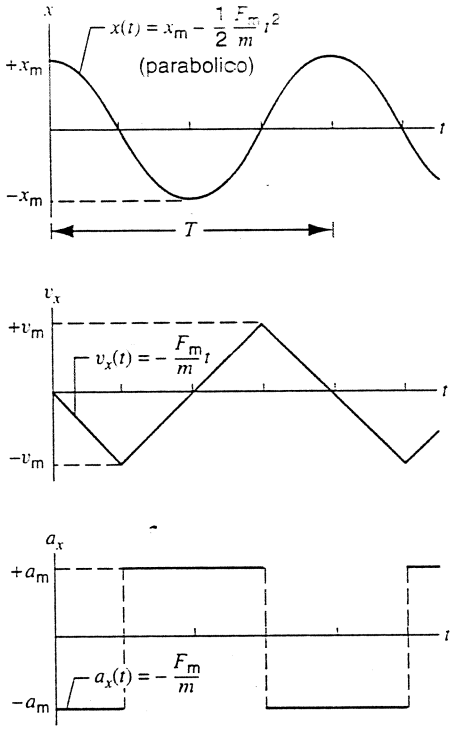


FIGURA 17.2 Grafico in funzione del tempo della posizione, della velocità e dell'accelerazione della particella introdotta in Figura 17.1. Il grafico dell'accelerazione è costituito da segmenti orizzontali la cui altezza vale alternativamente $+F_m/m$ e $-F_m/m$. Il grafico della velocità è costituito da segmenti di retta la cui pendenza vale alternativamente $+F_m/m$ e $-F_m/m$. Il grafico della posizione, infine, è costituito da porzioni di parabola raccordate in modo continuo. Nelle situazioni reali la funzione $F_x(x)$ è una funzione continua, pertanto anche l'accelerazione $a_x(t)$ di una particella reale risulta continua; nel caso reale, inoltre, i vertici presenti nel grafico di $v_x(t)$ risultano smussati. I grafici riportati in figura costituiscono in ogni caso un'ottima approssimazione del comportamenteo di una particella reale se la forza agente sulla particella passa da $+F_m$ a $-F_m$ in intervalli di tempo abbastanza brevi.

l'istante t, è costituito da una sequenza di archi di parabola raccordati in modo continuo. La particella oscilla avanti e indietro tra le posizioni $+x_m$ e $-x_m$. Il massimo valore del modulo della distanza della particella dalla posizione di equilibrio è detto *ampiezza* o *elongazione massima* delle oscillazioni. Il tempo T impiegato dalla particella per compiere un ciclo completo è detto *periodo* (Figura 17.2); il numero ν di oscillazioni (cicli) compiute per unità di tempo è detto *frequenza*. Il periodo e la frequenza sono l'uno l'inverso dell'altro, ovvero

$$\nu = 1/T. \qquad (17.1)$$

Il periodo ha la dimensione del tempo e viene misurato in secondi; nel sistema di unità di misura SI la frequenza viene misurata in hertz (Hz)*: 1 Hz = 1 ciclo/s. Per esempio un'oscillazione di periodo $T = 5$ s ha frequenza $\nu = 0{,}2$ Hz.

Fino ad ora la descrizione delle oscillazioni è stata condotta sulla base di argomentazioni puramente dinamiche; spesso, però, è utile darne una interpretazione in termini energetici.

In Figura 17.1c è riportata l'energia potenziale associata alla forza illustrata in Figura 17.1b; si ricorda che la forza è uguale all'opposto della pendenza del grafico dell'energia potenziale $U(x)$, più precisamente $F = -dU/dx$. L'energia meccanica totale $E = U + K$ si conserva in un sistema isolato, quindi in ogni istante la differenza $E - U$ fornisce il valore dell'energia cinetica della particella in quell'istante.

Fissata l'energia meccanica totale E, a patto di disegnare il grafico dell'energia potenziale su un intervallo abbastanza ampio, si raggiungono punti in cui $E = U$ e quindi $K = 0$. In questi punti, come illustrato nella Figura 17.2, la velocità è nulla e la posizione è $\pm x_m$. Questi punti sono detti *punti d'inversione* del moto.

Le Figure 17.1b e 17.1c sintetizzano due modi equivalenti per esprimere la condizione necessaria per l'esistenza delle oscillazioni: la forza deve agire sempre in modo da riportare la particella verso la posizione di equilibrio e l'energia potenziale deve avere un minimo relativo proprio in corrispondenza della posizione di equilibrio.

Il caso semplice appena descritto, pur essendo puramente ideale, ha il pregio di richiedere strumenti matematici molto semplici, grazie alla costanza dell'accelerazione, e di non essere un'approssimazione troppo rozza delle forze reali. In Figura 17.3a è illustrato un esempio più realistico di una forza che genera un moto oscillatorio: forze di questo tipo descrivono il legame all'interno di una molecola biato-

* L'unità di misura della frequenza deriva il suo nome dal fisico Heinrich Hertz (1857-1894), che ottenne la prima conferma sperimentale dell'esistenza delle onde elettromagnetiche.

ISBN 88-408-1254-7

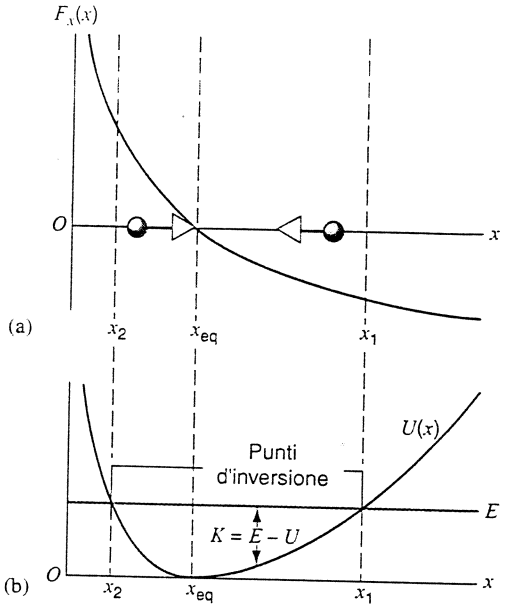


FIGURA 17.3 (a) Forza agente su una particella oscillante tra gli estremi x_1 e x_2. Si osservi che la forza spinge sempre la particella verso la posizione di equilibrio (Figura 17.1). Forze di questo tipo agiscono sugli atomi di una molecola. (b) Energia potenziale associata a tale forza.

mica. La forza cresce molto rapidamente quando i due atomi si avvicinano e questa componente repulsiva impedisce il collasso della molecola; d'altro canto se i due atomi si allontanano troppo la forza tende a riavvicinarli e previene la scissione della molecola. La componente attrattiva potrebbe essere interpretata come un'attrazione elettrostatica tra cariche opposte ma la realtà è più complessa: questa forza dipende dalla distribuzione spaziale delle orbite elettroniche attorno ai due atomi.

L'energia potenziale $U(x)$ associata alla forza appena discussa è illustrata in Figura 17.3b; si osservi che, così come nel caso descritto in Figura 17.1, la forza cambia segno nella posizione di equilibrio e in tale punto l'energia potenziale esibisce un minimo relativo proprio. Si osservi, inoltre, che in questo caso i punti di inversione del moto x_1 e x_2 non sono simmetrici rispetto alla posizione di equilibrio. Se la molecola venisse allungata di un po' rispetto alla sua configurazione di equilibrio (fenomeno che si realizza quando la molecola assorbe radiazione infrarossa) e poi lasciata al suo moto, la molecola acquisirebbe un moto oscillatorio attorno alla sua configurazione d'equilibrio simile a quello descritto in precedenza, anche se un po' più complicato dal punto di vista matematico. Come si vedrà nel Paragrafo 17.9, lo studio di queste oscillazioni è un metodo di fondamentale importanza nell'analisi della struttura molecolare.

17.2 L'OSCILLATORE ARMONICO

Il moto di una particella all'interno di un sistema oscillante complesso, come per esempio la molecola vibrante descritta nel paragrafo precedente, può essere studiato in modo più

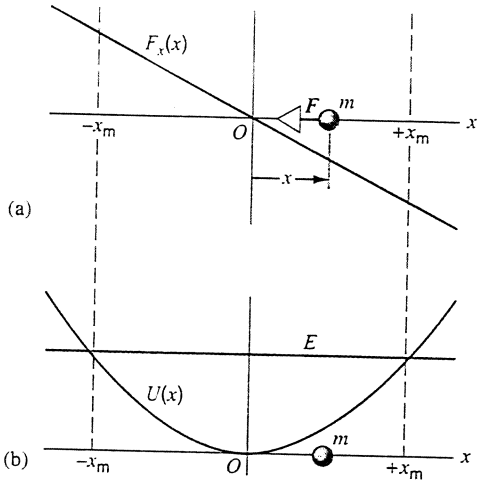


FIGURA 17.4 (a) Forza e (b) energia potenziale di un oscillatore armonico. Si osservino le analogie e le differenze con la Figura 17.3.

agevole se viene pensato come la sovrapposizione di singole oscillazioni *armoniche*, ciascuna delle quali è rappresentata da una funzione trigonometrica di tipo seno o coseno.

Si consideri un sistema oscillante unidimensionale costituito da una particella di massa m sottoposta all'azione della forza

$$F_x(x) = -kx, \tag{17.2}$$

ove k è una costante positiva e x rappresenta lo spostamento della particella dalla sua posizione di equilibrio. Un sistema di questo tipo è detto *oscillatore armonico* e il suo moto è detto *moto armonico semplice*. L'energia potenziale associata a questa forza è data da

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \tag{17.3}$$

e, come al solito, è legata alla forza dalla relazione $F_x(x) = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$. Come illustrato in Figura 17.4a, la forza $F_x(x)$ è proporzionale alla distanza della particella dalla posizione di equilibrio e agisce in modo da riportare la particella all'equilibrio. L'Equazione 17.3, infine, mostra che l'energia potenziale dipende in modo quadratico dallo spostamento della particella e il suo grafico, riportato in Figura 17.4b, è quindi una parabola.

Si riconosce che le Equazioni 17.2 e 17.3 rappresentano la forza e l'energia potenziale di una molla «ideale» di costante k compressa o allungata di una quantità x rispetto alla sua lunghezza a riposo (Paragrafo 11.4). Si può quindi concludere che *un corpo di massa m sottoposto all'azione di una molla ideale di costante k e libero di muoversi senza attrito su un piano orizzontale è un esempio di oscillatore armonico* (Figura 17.5). Si osservi che esiste una posizione particolare, la posizione di equilibrio illustrata in Figura 17.5b, in cui la forza esercitata dalla molla sul corpo è nulla. Se il corpo viene spostato verso destra, come nella Figura 17.5a, la forza esercitata dalla molla punta verso sinistra; viceversa, se il corpo viene spostato verso sinistra, come nella Figura 17.5c, la forza esercitata dalla molla è orientata verso destra. La forza che la molla esercita sul corpo, quin-

 ISBN 88-408-1254-7

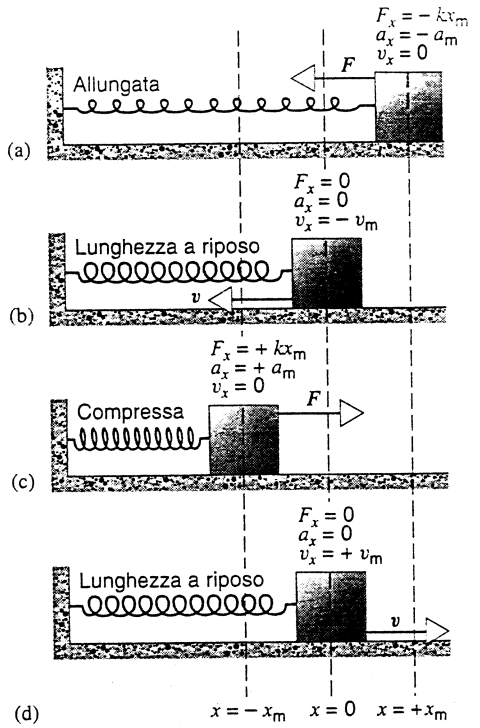


FIGURA 17.5 Oscillatore armonico costituito da una molla agente su un corpo libero di strisciare senza attrito su un piano orizzontale. In (a) la molla è allungata e il corpo si trova alla massima distanza dalla posizione di equilibrio. In (c) la molla è nella posizione di massima compressione. In (b) e (d) il corpo passa per la posizione di equilibrio: la sua velocità è massima e la molla raggiunge la sua lunghezza a riposo.

di, è una forza di richiamo. In particolare si tratta di una forza di richiamo *lineare* nel senso che il suo modulo è direttamente proporzionale alla distanza del corpo dalla posizione di equilibrio.

L'equazione del moto descritto in Figura 17.5 può essere scritta facendo uso della seconda legge di Newton $\sum F_x = ma_x$: a $\sum F_x$ va sostituito $-kx$, mentre all'accelerazione va sostituita la derivata seconda d^2x/dt^2 $(= dv_x/dt)$. Si ha, quindi,

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

ovvero

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (17.4)$$

L'Equazione differenziale 17.4 è detta *equazione del moto armonico semplice*; la sua soluzione, che verrà determinata nel prossimo paragrafo, è la funzione $x(t)$ che rappresenta la posizione occupata dalla particella all'istante t (Figura 17.2a).

Gli oscillatori armonici costituiscono un argomento di fondamentale importanza nello studio della meccanica: in primo luogo va osservato che vi sono numerosi sistemi fisicamente rilevanti che si comportano come un oscillatore armonico o una sovrapposizione di più oscillatori armonici, per vibrazioni di piccola ampiezza. In altri termini il grafico di una forza di richiamo (Figura 17.3a) in un intorno piccolo del punto di equilibrio può essere ben approssimato con una retta, caratteristica dell'oscillatore armonico (Figura 17.4a), e il grafico dell'energia potenziale (Figura 17.3b) con un arco di parabola.

In secondo luogo lo studio dell'equazione del moto armonico è di grande rilevanza perché in numerosi campi della fisica, come l'acustica, l'ottica, la meccanica, l'elettromagnetismo e finanche la fisica atomica, vi sono problemi la cui analisi può essere ricondotta alla soluzione di equazioni nella forma 17.4. L'oscillatore armonico, quindi, ha peculiarità comuni a numerosi fenomeni fisici.

17.3 MOTO ARMONICO SEMPLICE

Si procede, ora, alla soluzione dell'equazione del moto armonico semplice

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \qquad (17.4)$$

cui ci si è ricondotti nello studio del moto di una particella di massa m sottoposta all'azione della forza elastica $F_x = -kx$, ove k è la costante elastica della molla. In seguito si mostreranno fenomeni fisici di diversa natura il cui studio condurrà alla medesima Equazione 17.4, con la costante k che avrà una diversa interpretazione fisica. In altri termini il sistema oscillante corpo-molla è un prototipo per numerosi problemi.

L'Equazione differenziale 17.4 fornisce una relazione tra la funzione del tempo $x(t)$ e la sua derivata seconda d^2x/dt^2. Il nostro obiettivo è la determinazione di una funzione $x(t)$ che soddisfi questa relazione. In primo luogo si osserva che l'Equazione 17.4 può essere riscritta come segue

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \qquad (17.5)$$

La funzione incognita $x(t)$, quindi, deve essere tale che la sua derivata seconda, a meno del fattore k/m, risulti uguale all'opposto della funzione stessa. L'analisi matematica insegna che le funzioni seno e coseno godono di questa proprietà, infatti

$$\frac{d}{dt}\cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t)$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) = \frac{d}{dt}[\omega \sin(\omega t)] = -\omega^2 \cos(\omega t).$$

La derivata seconda del coseno, oppure anche del seno, è uguale alla funzione stessa moltiplicata per il fattore $-\omega^2$. Ovviamente questa proprietà continua a valere anche se si moltiplica il coseno per una costante fissata; se si sceglie tale costante uguale a x_m si avrà che il valore massimo della coordinata x, l'ampiezza delle oscillazioni, sarà uguale a x_m. Le osservazioni precedenti suggeriscono la forma

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) \qquad (17.6)$$

ISBN 88-408-1254-7

come possibile soluzione dell'Equazione 17.5. Si osserva che

$$x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos\phi \cos(\omega t) - x_m \sin\phi \sin(\omega t) = \\ = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

ove si è posto $A = x_m \cos\phi$ e $B = -x_m \sin\phi$; scegliendo opportunamente la costante arbitraria ϕ si ottiene una qualsiasi combinazione delle funzioni seno e coseno.

La Funzione 17.6, con le costanti x_m, ω e ϕ arbitrarie, costituisce la forma più generale di una soluzione dell'Equazione differenziale 17.5. Al fine di determinare le costanti in modo che la funzione $x(t)$ sia effettivamente una soluzione dell'Equazione 17.5 è sufficiente sostituire $x(t)$ nella (17.5); calcolando le derivate si ha

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Sostituendo questa espressione nell'Equazione del moto armonico 17.5 si ottiene

$$-\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\frac{k}{m} x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Affinché quest'ultima uguaglianza sia un'identità, ovvero sia soddisfatta per ogni istante t, si deve scegliere la costante ω in modo che

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{17.7}$$

Con questa scelta, infine, la Funzione 17.6 è una soluzione dell'equazione del moto dell'oscillatore armonico.

Le costanti x_m e ϕ sono ancora indeterminate, ovvero restano del tutto arbitrarie; comunque si scelgano queste due costanti, quindi, la Funzione 17.5 è soluzione dell'equazione del moto armonico. L'Equazione 17.5, allora, costituisce un'intera famiglia di possibili moti armonici, tutti caratterizzati dallo stesso valore di ω, ma con parametri x_m e ϕ differenti. Per individuare un particolare moto armonico, ovvero per fissare il valore di x_m e ϕ, è necessario stabilire le condizioni iniziali, cioè è necessario scegliere la posizione e la velocità con cui inizia il moto.

Si vuole approfondire, ora, il significato fisico della costante ω. Si considerino due istanti successivi ottenuti incrementando la variabile temporale della quantità $2\pi/\omega$ e si calcoli il corrispondente valore assunto in tali istanti dalla funzione $x(t)$:

$$x = x_m \cos[\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi] = \\ = x_m \cos(\omega t + 2\pi + \phi) = \\ = x_m \cos(\omega t + \phi).$$

La funzione $x(t)$ assume valori uguali in istanti di tempo distanziati di $2\pi/\omega$; quindi $2\pi/\omega$ è il periodo T del moto. Ricordando che $\omega^2 = k/m$ si ha

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{17.8}$$

Tutti i moti descritti dall'Equazione 17.5 hanno lo stesso periodo di oscillazione e tale periodo dipende solo dalla massa del corpo e dalla costante della molla; in particolare non dipende dalle condizioni iniziali del moto. La frequenza del moto, che si ricorda è uguale al numero di oscillazioni per unità di tempo, è data da

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{17.9}$$

Si ha, anche,

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{17.10}$$

La costante ω, detta *pulsazione* o *frequenza angolare*, differisce dalla frequenza per il fattore 2π. La sua dimensione è l'inverso del tempo e si misura in radianti/secondo. Nel Paragrafo 17.6 si darà un'interpretazione geometrica della pulsazione.

L'interpretazione fisica del parametro x_m è semplice e immediata: la funzione coseno assume valori nell'intervallo $[-1, +1]$; quindi in virtù dell'Equazione 17.6 il valore massimo della distanza che il corpo può raggiungere dalla posizione di equilibrio $x = 0$ è uguale a $+x_m$. Il parametro x_m è quindi l'*ampiezza* del moto; dal momento che x_m è arbitrario, l'oscillatore armonico può assumere moti con diversa ampiezza, ma tutti con lo stesso periodo e la stessa frequenza. *La frequenza di un moto armonico è indipendente dalla sua ampiezza.*

La quantità $\omega t + \phi$ è detta *fase* del moto e la costante ϕ è detta *costante di fase*. Due moti armonici possono avere medesima ampiezza e medesima frequenza, ma possono differire nella fase; si supponga, per esempio, che sia $\phi = -\pi/2 = -90°$; allora

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos(\omega t - 90°) = \\ = x_m \sin(\omega t)$$

e il corpo occupa la posizione di equilibrio $x = 0$ all'istante iniziale. Se $\phi = 0$, invece, la legge oraria è data da $x(t) = x_m \cos(\omega t)$ e all'istante iniziale il corpo occupa la posizione $x = x_m$, ovvero è alla sua massima distanza dalla posizione di equilibrio. A diverse posizioni iniziali, ovviamente, corrisponderanno diverse costanti di fase. Si rimanda al Problema svolto 17.3 per la discussione dei metodi che permettono di dedurre le costanti arbitrarie x_m e ϕ a partire dalla posizione e dalla velocità iniziale dell'oscillatore armonico.

L'ampiezza x_m e la costante di fase ϕ vengono determinati in modo univoco a partire dalla posizione e dalla velocità iniziale del corpo (la costante ϕ è ovviamente determinata a meno di una costante additiva multipla di 2π). A partire dall'istante iniziale, se non entrano in gioco ulteriori forze, il corpo compirà le sue oscillazioni con ampiezza, costante di fase e frequenza fissati.

In Figura 17.6 viene riportato il grafico della funzione $x(t)$ per alcuni moti armonici descritti dall'Equazione 17.6; in particolare si esegue il confronto tra tre situazioni possibili. In Figura 17.6a i due moti armonici semplici hanno

 ISBN 88-408-1254-7

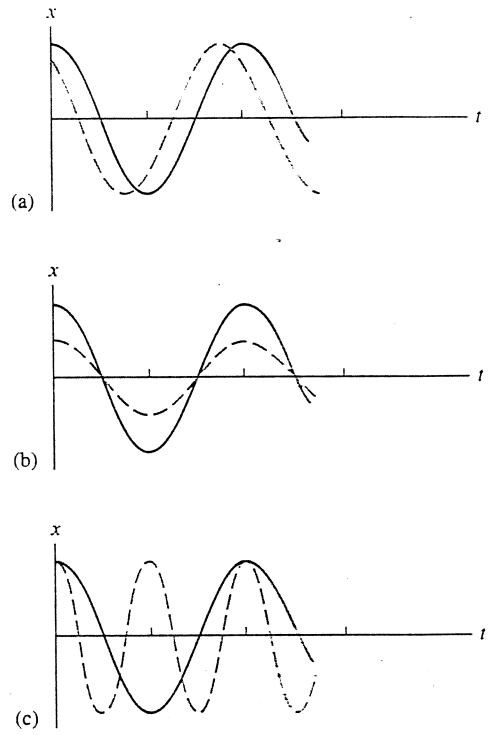


FIGURA 17.6 (a) Confronto tra due moti armonici semplici di stessa ampiezza, stessa frequenza, ma sfasati di 45°. Se l'equazione del moto è data dall'Espressione 17.6, la linea continua si riferisce al caso $\phi = 0°$ e quella tratteggiata al caso $\phi = 45°$. (b) Confronto tra due moti armonici semplici in fase e con stessa frequenza, ma di ampiezze differenti per un fattore due. (c) Confronto tra due moti armonici semplici in fase e con stessa ampiezza, ma di frequenze differenti per un fattore due. La curva continua ha *periodo* pari al doppio di quello della curva tratteggiata e la sua *frequenza* è ovviamente uguale alla metà di quella della curva tratteggiata.

stessa ampiezza e stessa frequenza, ma sono sfasati di $\pi/4 = 45°$. In Figura 17.6b i due moti armonici semplici hanno stessa costante di fase e stessa frequenza, ma le ampiezze differiscono per un fattore due. In Figura 17.6c i due moti armonici semplici hanno stessa costante di fase e stessa ampiezza, ma le loro frequenze differiscono per un fattore 2 oppure 1/2. È utile che lo studente studi con attenzione le diverse curve al fine di fare proprio il linguaggio usato nell'analisi dei moti armonici.

Un altro aspetto molto interessante dei moti armonici è la particolare relazione che lega la legge oraria $x(t)$, la velocità $v_x(t) = dx/dt$ e l'accelerazione $a_x(t) = dv_x/dt = d^2x/dt^2$ della particella oscillante. Al fine di confrontare queste tre funzioni del tempo, se ne disegnano separatamente i grafici in Figura 17.7. Le espressioni analitiche sono

$$\begin{aligned} x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi), \\ v_x(t) &= \frac{dx}{dt}(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi). \\ a_x(t) &= \frac{dv_x}{dt}(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \qquad (17.11)$$

In figura si è scelto $\phi = 0$ e si sono omesse le scale e le unità di misura per agevolare il confronto tra le tre funzioni. La legge oraria, la velocità e l'accelerazione oscillano tutte e tre armonicamente con la stessa frequenza. Si osservi che il massimo valore della posizione è x_m (ampiezza del moto), il massimo valore della velocità è ωx_m (ampiezza della velocità) e il massimo valore dell'accelerazione è $\omega^2 x_m$ (ampiezza dell'accelerazione).

Quando la posizione raggiunge uno dei suoi valori massimi la velocità è nulla, perché il moto deve invertire il suo verso, e l'accelerazione è massima, così come la forza di richiamo, ma è orientata in verso opposto a quello in cui la particella è spostata rispetto all'origine. Quando il corpo passa per la posizione di equilibrio, $x = 0$, la velocità in modulo è massima, mentre l'accelerazione e la forza di richiamo sono nulle. Il modulo della velocità cresce quando la particella si muove verso la posizione di equilibrio e decresce altrimenti. È un utile esercizio confrontare le Figure 17.7 e 17.2 osservandone differenze e analogie.

PROBLEMA SVOLTO 17.1 Una molla, sospesa verticalmente, si allunga di 7,33 cm per sorreggere un corpo di massa $M = 1,65$ kg. La medesima molla viene montata su un piano orizzontale e le viene attaccato un corpo di massa $m = 2,43$ kg. Il corpo è libero di muoversi sul piano liscio illustrato in Figura 17.5. (a) Si determini la costante k della molla. (b) Si calcoli il modulo della forza orizzontale necessaria per allungare la molla di 11,6 cm. (c) Si calcoli il periodo delle oscillazioni del blocco se la molla viene allungata di 11,6 cm e poi lasciata al suo moto.

Soluzione (a) Per calcolare la costante k si osserva che la molla, quando il corpo è nella posizione $y = -7,33$ cm, esercita sul cor-

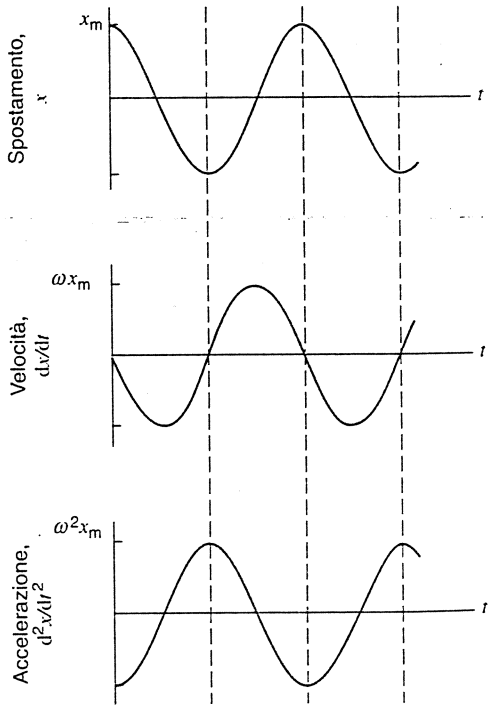


FIGURA 17.7 Grafico delle Funzioni 17.11. Spostamento, velocità e accelerazione di un corpo in moto armonico semplice.

po una forza che compensa esattamente la forza peso Mg. Se il corpo in sospensione è in equilibrio si deve avere $\sum F_y = 0$; dal momento che la componente verticale della somma delle forze agenti sul corpo è $\sum F_y = -ky - Mg$, si ha che $ky = -Mg$, ovvero

$$k = -Mg/y = -(1.65\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)/(-0.0733\ \text{m}) = \\ = 221\ \text{N/m}.$$

(b) Per calcolare la forza necessaria per allungare la molla di 11.6 cm si usa la legge di Hooke (Equazione 17.2), ove per la costante k si usa il valore determinato al punto (a):

$$F = kx = (221\text{N/m})(0.116\text{m}) = 25.6\ \text{N}.$$

(c) Il periodo delle oscillazioni non dipende dall'ampiezza, ma dalla massa del corpo e dalla costante elastica della molla. In virtù dell'Equazione 17.8 si ha

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.43\ \text{kg}}{221\ \text{N/m}}} = 0.6589\ \text{s} = 659\ \text{ms}.$$

Per il valore del periodo si sono usate quattro cifre significative, più di quanto sia giustificato dai dati del problema, perché questo risultato verrà utilizzato nel Problema svolto 17.2. Per evitare errori di arrotondamento nelle fasi intermedie della risoluzione di un problema è utile tenere memoria di un numero superiore di cifre significative. Il risultato finale, però, deve essere arrotondato opportunamente.

17.4 ENERGIA DI UNA PARTICELLA IN MOTO ARMONICO SEMPLICE

In assenza di forze dissipative è noto che l'energia meccanica totale E $(= K + U)$ si conserva; tale risultato vale anche nel caso del moto armonico semplice; in questo paragrafo se ne discutono alcuni aspetti peculiari.

L'energia potenziale istantanea U associata alla forza di richiamo è data da

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi), \qquad (17.12)$$

ove si è usata l'espressione 17.6 per la legge oraria $x(t)$. L'energia potenziale del corpo, quindi, oscilla al variare del tempo e assume valore massimo $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante il moto l'energia potenziale varia tra zero e questo valore massimo, come illustrato nelle Figure 17.8a e 17.8b.

L'energia cinetica K del corpo è data da $\frac{1}{2}mv_x^2$ e, introducendo l'Equazione 17.11 per $v_x(t)$ e l'Equazione 17.7 per ω^2, si ha

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \\ = \frac{1}{2}m\omega^2x_m^2\sin^2(\omega t + \phi) = \qquad (17.13) \\ = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t + \phi).$$

Così come l'energia potenziale, anche quella cinetica oscilla in funzione del tempo e assume valore massimo $\frac{1}{2}kx_m^2$.

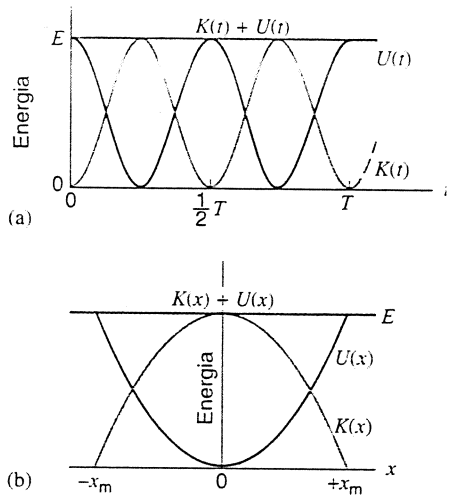


FIGURA 17.8 L'energia potenziale U, l'energia cinetica K e l'energia meccanica totale E di una particella in moto armonico semplice sono riportate in funzione del tempo in (a) e in funzione della posizione in (b). Si osservi in (a) che sia l'energia potenziale sia l'energia cinetica raggiungono per due volte il loro valore massimo durante ogni periodo del moto. Si veda la Figura 12.5.

Durante il moto l'energia cinetica varia tra zero e questo valore massimo come illustrato nelle Figure 17.8a e 17.8b. Si osservi che l'energia potenziale e quella cinetica oscillano con frequenza doppia rispetto alla legge oraria dell'oscillatore armonico; si provi a spiegare la ragione alla base di questo effetto.

L'energia meccanica totale è uguale alla somma dell'energia cinetica e di quella potenziale; usando le Equazioni 17.12 e 17.13 si ottiene

$$E = K + U = \\ = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi) = \qquad (17.14) \\ = \frac{1}{2}kx_m^2.$$

Come ci si aspettava risulta che l'energia meccanica totale è costante e vale $\frac{1}{2}kx_m^2$. Quando il corpo è a distanza massima dalla posizione di equilibrio l'energia cinetica è nulla mentre quella potenziale raggiunge il valore $\frac{1}{2}kx_m^2$. Quando il corpo attraversa la posizione di equilibrio, invece, l'energia potenziale si annulla mentre quella cinetica raggiunge il valore $\frac{1}{2}kx_m^2$. In tutti gli altri istanti l'energia potenziale e quella cinetica assumono valori intermedi tra zero e il loro massimo; la loro somma, però, sarà sempre uguale a $\frac{1}{2}kx_m^2$. Questo valore costante, che è proporzionale al quadrato dell'ampiezza delle oscillazioni, è riportato nelle Figure 17.8a e 17.8b. Si dimostra (vedi il Problema 14), che il valor medio dell'energia potenziale e dell'energia cinetica durante un'oscillazione è uguale alla metà del loro valore massimo.

L'Equazione 17.14, che esprime la conservazione dell'energia meccanica, può essere riscritta nel modo seguente

$$K + U = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2. \qquad (17.15)$$

 ISBN 88-408-1254-7

Questa equazione permette di ricavare la velocità dell'oscillatore $v_x^2 = (k/m)(x_m^2 - x^2)$ quando attraversa la posizione x; da qui otteniamo

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)}. \qquad (17.16)$$

L'Equazione 17.16 mostra chiaramente che il modulo della velocità del corpo raggiunge il suo valore massimo quando il corpo si trova nell'origine ($x = 0$) e si annulla quando il corpo è alla sua distanza massima dalla posizione di equilibrio ($x = \pm x_m$). Si vuole osservare, infine, che partendo dall'Equazione 17.15 e integrando l'Equazione 17.16 si potrebbe ricavare la legge oraria così come si è fatto nel Paragrafo 12.5, ove si è determinato un risultato simile all'Equazione 17.6 con $\phi = 0$.

PROBLEMA SVOLTO 17.2 L'oscillatore armonico introdotto nell'ambito del Problema svolto 17.1 viene allungato nella direzione positiva dell'asse x fino a raggiungere l'elongazione di 11,6 cm e poi viene abbandonato al suo moto. (a) Si calcoli l'energia totale immagazzinata nel sistema. (b) Si calcoli in modulo la velocità massima che viene raggiunta dal corpo durante il suo moto. (c) Si calcoli in modulo l'accelerazione massima che viene raggiunta dal corpo durante il suo moto. (d) Assumendo che l'istante in cui inizia il moto sia $t = 0$ si determini la posizione, la velocità e l'accelerazione del corpo all'istante $t = 0{,}215$ s.

Soluzione (a) L'ampiezza del moto è $x_m = 0{,}116$ m e l'energia totale è data dall'Equazione 17.14:

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}(221\ \text{N/m})(0{,}116\ \text{m})^2 = 1.49\ \text{J}.$$

(b) L'energia cinetica massima è uguale al valore dell'energia totale; infatti quando $U = 0$ si ha $K = K_{max} = E$. Allora il modulo della velocità massima è dato da

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2K_{max}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1{,}49\ \text{J})}{2{,}43\ \text{kg}}} = 1{,}11\ \text{m/s}.$$

(c) L'accelerazione massima si verifica nell'istante in cui il corpo viene abbandonato al suo moto in corrispondenza del valore massimo della forza di richiamo:

$$a_{max} = \frac{F_{max}}{m} = \frac{kx_m}{m} = \frac{(221\ \text{N/m})(0{,}116\ \text{m})}{2{,}43\ \text{kg}} = 10{,}6\ \text{m/s}^2.$$

(d) A partire dal periodo determinato nel Problema svolto 17.1 è possibile calcolare la pulsazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}6589\ \text{s}} = 9{,}536\ \text{rad/s}.$$

Dal momento che il corpo è nella posizione di allungamento massimo x_m all'istante iniziale, la sua legge oraria è data dalla funzione coseno

$$x(t) = x_m \cos(\omega t),$$

come si ottiene ponendo $\phi = 0$ nell'Equazione 17.6. All'istante $t = 0{,}215$ s si ha

$$x = (0{,}116\ \text{m})\cos[(9{,}536\ \text{rad/s})(0{,}215\ \text{s})] =$$
$$= -0{,}0535\ \text{m}.$$

Si osservi che l'angolo ωt è stato espresso in radianti. La velocità dell'oscillatore può essere calcolata ponendo $\phi = 0$ nell'Equazione 17.11: si ottiene $v_x(t) = -\omega x_m \sin(\omega t)$. Valutando questa espressione all'istante desiderato si ha

$$v_x = -(9{,}536\ \text{rad/s})(0{,}116\ \text{m})\sin(9{,}536\ \text{rad/s})(0{,}215\ \text{s}) =$$
$$= -0{,}981\ \text{m/s}.$$

Per calcolare l'accelerazione si usa nuovamente l'Equazione 17.11 e si osserva che $a_x = -\omega^2 x$ in ogni istante; quindi

$$a_x = -(9.536\ \text{rad/s})^2(-0.0535\ \text{m}) = +4.87\ \text{m/s}^2.$$

Si vuole, infine, discutere qualitativamente i risultati appena ottenuti. L'istante $t = 0{,}215$ s è compreso tra $T/4 = 0{,}165$ s e $T/2 = 0{,}330$ s. Se il corpo inizia il suo moto nella posizione $x = x_m = +0{,}116$ m, esso attraverserà la posizione di equilibrio $x = 0$ all'istante $T/4$, quindi è ragionevole che all'istante t la sua ascissa sia negativa. Anche la sua velocità deve risultare negativa perché all'istante considerato il corpo è in moto verso la posizione $-x_m$. Va anche osservato, però, che il modulo della velocità ha raggiunto il suo valore massimo nell'origine e quindi sta decrescendo all'istante t; per questa ragione l'accelerazione deve essere positiva. Il valore trovato per l'accelerazione può esser controllato, infine, tramite la relazione $a_x = kx/m$, mentre i valori della velocità e dell'elongazione possono essere controllati usando la Relazione 17.16.

PROBLEMA SVOLTO 17.3 All'oscillatore armonico introdotto nel Problema svolto 17.1, a riposo nella posizione di equilibrio, viene applicata una forza nel verso positivo dell'asse x. All'istante iniziale l'oscillatore si trova nel punto di ascissa $x = +0{,}0624$ m con velocità $v_x = +0{,}847$ m/s e la forza esterna viene rimossa. Si determini la legge oraria $x(t)$ del moto conseguente.

Soluzione Dal momento che l'oscillatore ha la stessa massa e la stessa costante della molla, la pulsazione sarà uguale a quella calcolata nel problema svolto precedente. L'espressione più generale per la legge oraria cercata è data dall'Equazione 17.6

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

con le costanti di integrazione x_m e ϕ da determinare a partire dalle condizioni iniziali. Al fine di calcolare x_m si può procedere calcolando l'energia meccanica totale all'istante $t = 0$:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(2{,}43\ \text{kg})(0{,}847\ \text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(221\ \text{N/m})(0{,}0624\ \text{m})^2 =$$
$$= 0{,}872\ \text{J} + 0{,}430\ \text{J} = 1{,}302\ \text{J}.$$

Ricordando che l'energia meccanica totale si conserva e vale $\frac{1}{2}kx_m^2$ si ha che

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1{,}302\ \text{J})}{221\ \text{N/m}}} = 0{,}1085\ \text{m}.$$

Per determinare la costante di fase ϕ si procede come segue:

$$x(0) = x_m \cos\phi$$
$$\cos\phi = \frac{x(0)}{x_m} = \frac{+0{,}0624\ \text{m}}{0{,}1085\ \text{m}} = +0{,}5751.$$

Nell'intervallo $[0.2\pi]$ vi sono due valori di ϕ corrispondenti al valore del coseno appena determinato: $\phi = 54.9^\circ$ e $\phi = 305.1^\circ$. En-

trambi forniscono il valore corretto per la posizione iniziale del corpo, ma uno solo dei due dà il valore giusto della velocità:

$$\begin{aligned} v_x(0) &= -\omega x_m \sin\phi = \\ &= -(9.536\ \text{rad/s})(0,1085\ \text{m})\sin\phi = \\ &= -(1,035\ \text{m/s})\sin\phi = \\ &= -0,847\ \text{m/s} \quad \text{per } \phi = 54,9^\circ \\ &= +0,847\ \text{m/s} \quad \text{per } \phi = 305,1^\circ. \end{aligned}$$

Si ha quindi che $\phi = 305,1^\circ = 5,33$ rad. Si può scrivere, infine, la legge oraria

$$x(t) = (0,109\ \text{m})\cos[(9,54\ \text{rad/s})t + 5,33\ \text{rad}].$$

Per le relazioni generali che legano le costanti di integrazione x_m e ϕ alle condizioni iniziali $x(0)$ e $v_x(0)$ si rimanda al Problema 9.

17.5 APPLICAZIONI DEL MOTO ARMONICO SEMPLICE

In questo paragrafo sono raccolti alcuni esempi di sistemi meccanici il cui moto è armonico semplice.

Bilancia di torsione

In Figura 17.9 è illustrato un disco sospeso per mezzo di un filo verticale attaccato al suo centro di massa e a un morsetto fisso. Viene tracciato sul disco a riposo un segmento di retta che congiunge il centro con un punto P del bordo. Il filo si torce quando il disco viene ruotato nel piano xy in modo che il segmento OP si sposti nella posizione OQ. Il filo torto esercita sul disco un momento torcente di richiamo che tende a riportare il segmento OP nella sua posizione iniziale. Per rotazioni abbastanza piccole il momento torcente risulta proporzionale allo spostamento angolare (legge di Hooke), ovvero

$$\tau_z = -\kappa\theta. \tag{17.17}$$

La costante κ (kappa greca) dipende dalle proprietà fisiche del filo ed è detta *costante di torsione* del filo. Il segno meno mette in evidenza che la torsione è di richiamo e da ciò si deduce che il moto del disco è un *moto armonico angolare semplice*.

L'equazione del moto del disco si può scrivere anche attraverso la forma angolare della legge di Newton,

$$\sum \tau_z = I\alpha_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{17.18}$$

con I il momento d'inerzia del disco relativo all'asse z. Dalle Equazioni 17.17 e 17.18 si ottiene

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

ovvero

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta. \tag{17.19}$$

Si osservi l'analogia che esiste tra l'Equazione 17.19 del moto armonico angolare semplice e l'Equazione 17.5 del moto armonico semplice. Dal punto di vista matematico queste due equazioni sono di forma perfettamente identica. Così come si è già visto nel Capitolo 8 l'equazione angolare può essere desunta a partire da quella lineare sostituendo lo spostamento angolare θ allo spostamento x, il momento d'inerzia I alla massa m e la costante di torsione del filo κ alla costante elastica k. Con queste sostituzioni si ha che la soluzione generale dell'Equazione 17.19,

$$\theta = \theta_m\cos(\omega t + \phi), \tag{17.20}$$

è un moto armonico semplice nelle variabili angolari con ampiezza θ_m e pulsazione (o frequenza angolare) ω. Si sottolinea che nell'Equazione 17.20 il simbolo ω non ha il significato di velocità angolare, ovvero $\omega \neq d\theta/dt$.

Nella Figura 17.9 sono illustrate le oscillazioni del disco attorno alla posizione di equilibrio $\theta = 0$; l'angolo massimo descritto durante le oscillazioni è $2\theta_m$, corrispondente alla corsa del segmento OP dalla posizione OQ alla posizione OR. In analogia con il caso lineare, il periodo delle oscillazioni vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \tag{17.21}$$

Una volta nota la costante di torsione del filo κ, misurando con precisione il periodo di tali oscillazioni si può risalire al momento di inerzia di un corpo rigido attorno a un asse; d'altro canto, se è noto il momento d'inerzia del corpo, per mezzo della misura di T si può risalire al valore della costante di torsione del filo κ.

La bilancia di torsione in Figura 17.9 è chiamata anche *pendolo di torsione*; la bilancia di Cavendish che ha permesso la misura sperimentale della costante di gravitazione universale (Capitolo 14) è null'altro che un pendolo di torsione. Così come il pendolo semplice, anche il pendolo di

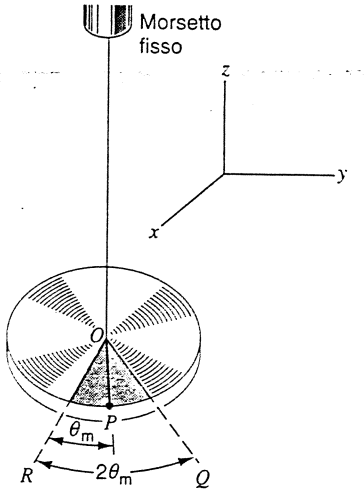


FIGURA 17.9 Bilancia di torsione. Il segmento congiungente l'origine O con il punto P oscilla tra le posizioni OQ e OR descrivendo l'angolo $2\theta_m$, ove θ_m è l'ampiezza angolare del moto. Le oscillazioni avvengono nel piano xy mentre il filo verticale si mantiene costantemente coicidente con l'asse z.

 ISBN 88-408-1254-7

torsione viene usato per la misurazione di intervalli di tempo; un esempio molto diffuso è il bilanciere degli orologi meccanici, in cui il momento torcente di richiamo viene esercitato da una molla a spirale.

Il pendolo semplice

Il pendolo semplice è un oggetto ideale costituito da una particella di massa m sospesa per mezzo di un filo inestensibile e di massa nulla. Se viene spostato dalla sua posizione di equilibrio il pendolo inizia delle oscillazioni in un piano verticale sotto l'effetto della forza peso. Il moto è oscillatorio e uno dei nostri obiettivi è la determinazione del periodo delle oscillazioni.

In Figura 17.10 è illustrato un pendolo di massa m e lunghezza L in un istante in cui la corda forma l'angolo θ con la verticale. Sulla particella agiscono la forza peso mg e la tensione T della corda. Il moto della particella avverrà lungo la circonferenza di raggio L centrata nel punto di sospensione e giacente nel piano verticale passante per il punto di sospensione; per questa ragione si usa un riferimento i cui due assi sono rispettivamente tangente e ortogonale alla circonferenza nel punto occupato dalla particella all'istante considerato. La forza peso può essere scomposta nella sua componente radiale $mg\cos\theta$ e in quella tangenziale $mg\sin\theta$. La componente radiale della somma delle forze fornisce alla particella l'accelerazione centripeta che le permette il moto lungo la circonferenza; la componente tangenziale della forza peso, invece, costituisce la forza di richiamo che tende a far muovere la particella sempre verso la sua posizione di equilibrio. La forza di richiamo, quindi, vale

$$F_x = -mg\sin\theta, \qquad (17.22)$$

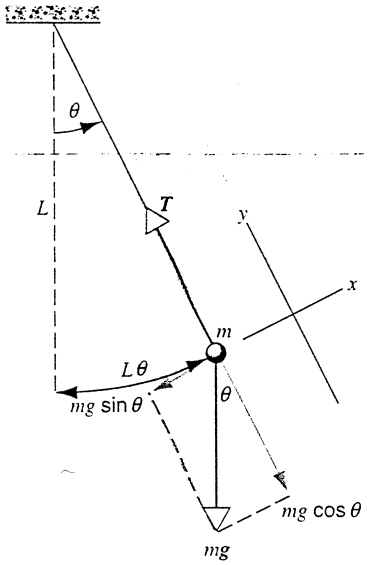


FIGURA 17.10 Pendolo semplice. Le forze che agiscono sul pendolo sono la tensione T e la forza peso mg; quest'ultima viene scomposta nelle sue componenti radiale e tangenziale. In ciascun istante l'asse x viene scelto lungo la direzione tangenziale e quello y lungo la direzione radiale.

ove il segno meno indica che tale forza agisce nel verso opposto a quello di θ crescente.

Si osservi che la forza di richiamo non è proporzionale allo spostamento angolare θ, ma al suo seno $\sin\theta$; il moto risultante, quindi, non è un moto armonico semplice. Ciononostante, se ci si limita a considerare piccoli valori dell'angolo θ, risulta che il valore di $\sin\theta$ è molto vicino al valore di θ espresso in radianti: per esempio per $\theta = 5^\circ = 0.0873$ rad si ha $\sin\theta = 0.0872$, che differisce da θ per lo 0.1%. Lo spostamento x della particella, allora, è molto ben approssimato dalla lunghezza dell'arco spazzato $L\theta$. Assumendo, quindi, $\sin\theta \approx \theta$ si ottiene

$$F_x = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x. \qquad (17.23)$$

Per *spostamenti piccoli* dalla posizione di equilibrio, allora, la forza di richiamo è proporzionale allo spostamento e opposta rispetto al suo verso. Il criterio generale alla base del moto armonico semplice è quindi soddisfatto, inoltre l'Espressione 17.23 ha la stessa forma dell'Equazione 17.2, $F_x = -kx$, ove la costante della molla k è sostituita dalla quantità mg/L. Si lascia al lettore verificare che k ha le stesse dimensioni di mg/L. In conclusione il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo può essere determinato sostituendo a k la quantità mg/L nell'Equazione 17.8:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}},$$

ovvero

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (17.24)$$

Si noti che il periodo del pendolo non dipende dalla massa della particella.

Nel caso in cui le oscillazioni non siano piccole si dimostra che il periodo di oscillazione del pendolo è dato da*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{3^2}{2^2 4^2}\sin^4\frac{\theta_m}{2} + \cdots\right). \qquad (17.25)$$

ove θ_m è l'ampiezza angolare delle oscillazioni. Si osservi che il periodo T cresce al crescere dell'ampiezza. I termini successivi della serie, però, diventano via via più piccoli, la serie è convergente e il periodo può essere calcolato con precisione comunque piccola. Nel caso $\theta_m = 15^\circ$ il vero periodo del pendolo semplice differisce da quello approssimato fornito dall'Equazione 17.24 per meno dello 0,5 %.

Per tre secoli in passato il pendolo è stato l'orologio più affidabile; soltanto nell'ultimo secolo ha dovuto cedere il passo agli orologi basati sulla periodicità delle oscillazioni atomiche o elettroniche. Perché un pendolo reale possa fun-

* L'espressione del periodo del pendolo è dimostrata in numerosi testi intermedi di meccanica. Per esempio si veda *Classical Dynamics of Particles and Systems*, di J.B. Marion e K.T. Thornton, terza edizione (Harcourt Brace Jovanovich, 1988), Paragrafo 3.13.

gere da orologio è necessario che l'ampiezza delle sue oscillazioni venga mantenuta costante nonostante l'inevitabile presenza di forze dissipative tenda a rallentarne il moto. Il problema è molto delicato perché anche una piccola variazione dell'ampiezza (per esempio da 5° a 4°) indurrebbe una variazione così elevata nella durata delle oscillazioni del pendolo (0,25 minuti al giorno nell'esempio) da rendere l'orologio inaffidabile anche per semplici usi domestici. Per rendere costante la durata delle oscillazioni si adottano accorgimenti meccanici, per esempio molle, che compensano l'effetto delle forze dissipative e restituiscono al sistema oscillante l'energia sottratta da queste ultime. Il primo a introdurre questi sistemi di compensazione è stato Christian Huygens (1629-1695).

Il pendolo semplice fornisce anche una tecnica molto elementare per la misura dell'accelerazione di gravità g. Con strumenti molto semplici è possibile misurare L e T con precisione dell'ordine dello 0,1% e quindi per mezzo dell'Equazione 17.24 si può risalire al valore di g approssimativamente con la stessa precisione. Con apparati sperimentali raffinati si può raggiungere la precisione dello 0,0001%.

Il pendolo fisico

Il *pendolo fisico* è costituito da un corpo rigido incernierato in modo da poter ruotare in un piano verticale attorno a un asse fisso. È una generalizzazione del pendolo semplice costituito da una sola particella sospesa per mezzo di una corda inestensibile e priva di massa. Tutti i pendoli reali sono in realtà dei pendoli fisici.

In Figura 17.11 è illustrato un corpo rigido libero di ruotare attorno a un asse fisso orizzontale passante per P e spostato dalla sua posizione di equilibrio dell'angolo θ. La posizione di equilibrio del corpo è quella in cui l'asse verticale passante per P attraversa il baricentro del corpo. La distanza del baricentro da P viene denotata con d, il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse di rotazione con I e la massa del corpo con M. In corrispondenza dello spostamento angolare θ il momento torcente di richiamo, dovuto alla componente tangenziale della forza peso, vale

$$\tau_z = -Mgd \sin\theta. \tag{17.26}$$

Dal momento che il momento torcente di richiamo non è proporzionale allo spostamento angolare θ, ma a $\sin\theta$, la condizione sufficiente per il moto armonico semplice non è soddisfatta. Se ci si limita a considerare, però, piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, si ha che, così come nel caso del pendolo semplice, l'uguaglianza $\sin\theta \approx \theta$ vale con ottima approssimazione e quindi il momento torcente di richiamo si riduce a

$$\tau_z \cong -Mgd\theta. \tag{17.27}$$

Si ottiene così la stessa forma dell'Equazione 17.17 e il periodo si può calcolare immediatamente sostituendo nell'Equazione 17.21 la costante κ con Mgd. In definitiva si ottiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \tag{17.28}$$

È interessante osservare che dall'equazione precedente si può ricavare il momento d'inerzia del corpo rigido

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}; \tag{17.29}$$

tutte le grandezze che entrano nell'espressione precedente sono facilmente misurabili; quindi studiando le oscillazioni di un corpo rigido attorno a un asse orizzontale non passante per il suo baricentro si può misurare indirettamente il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse di sospensione.

Il pendolo semplice è un caso particolare del pendolo fisico; nel caso di un pendolo semplice, infatti, $I = ML^2$ e $d = L$ e quindi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{L/g},$$

che è proprio il periodo del pendolo semplice.

Se la massa del pendolo fisico fosse tutta concentrata a una distanza L opportuna dall'asse di rotazione, il pendolo semplice così ottenuto avrebbe lo stesso periodo di oscillazione del pendolo fisico di partenza. Per determinare questo particolare valore di L è sufficiente richiedere che

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}},$$

da cui si ottiene

$$L = \frac{I}{Md}. \tag{17.30}$$

Per quanto riguarda, quindi, il periodo delle oscillazioni di un pendolo fisico, la sua massa può essere considerata concentrata in un punto a distanza $L = I/(Md)$ dall'asse di rotazione. Questo punto è detto *centro di oscillazione* del pen-

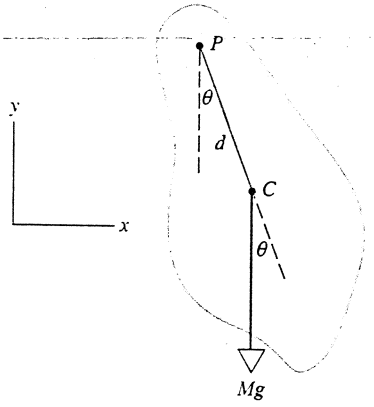


FIGURA 17.11 Pendolo fisico. Il centro di massa viene indicato con C e il perno con P. Il pendolo viene ruotato dell'angolo θ rispetto alla sua posizione di equilibrio, che si realizza quando il centro di massa giace sulla verticale passante per il perno. Il momento torcente di richiamo è dovuto alla forza peso Mg. Le oscillazioni avvengono nel piano xy; l'asse z è uscente dal piano della figura.

 ISBN 88-408-1254-7

dolo fisico e dipende dalla scelta dell'asse di rotazione. Si osserva, infine, che, fissato l'asse di rotazione e determinato il relativo centro di oscillazione, se si sospendesse il corpo a un asse orizzontale passante per tale centro si otterrebbe un pendolo con lo stesso periodo di oscillazione.

Il centro di oscillazione gode di un'ulteriore notevole proprietà: forze impulsive parallele al piano in cui avvengono le oscillazioni e applicate al centro d'oscillazione non hanno effetti sull'asse di rotazione. Per la dimostrazione di questa affermazione si rimanda al Problema 24. Per questa ragione il centro d'oscillazione è detto anche *centro di percussione*. Se il battitore colpisce la palla da baseball al centro di percussione della sua mazza, la mano che regge la mazza non risentirà dell'urto. Un fenomeno analogo avviene nel gioco del tennis: colpendo la palla in un punto particolare della racchetta, detto «sweet spot», il tennista può eliminare le reazioni sulla sua mano dovute all'urto della racchetta con la palla.

PROBLEMA SVOLTO 17.4 Una sbarretta sottile e uniforme di massa $M = 0{,}112$ kg e lunghezza $L = 0{,}096$ m è sospesa per mezzo di un filo verticale passante per il suo centro di massa e ad essa ortogonale. La sbarretta viene posta in oscillazione con periodo di 2,14 s. Un corpo piatto e uniforme che ha la forma di un triangolo equilatero viene sospeso in modo analogo allo stesso filo al posto della sbarretta; il periodo delle oscillazioni viene trovato uguale a 5,83 s. Si determini il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse di rotazione.

Soluzione Il momento d'inerzia della sbarretta attorno a un asse baricentrale ad essa ortogonale vale

$$I = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{(0{,}112\text{ kg})(0{,}096\text{ m})^2}{12} = \\ = 8{,}60 \cdot 10^{-5}\text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Dall'Equazione 17.21 si ha

$$\frac{T_{\text{sbarretta}}}{T_{\text{triangolo}}} = \left(\frac{I_{\text{sbarretta}}}{I_{\text{triangolo}}}\right)^{1/2},$$

ovvero

$$I_{\text{triangolo}} = I_{\text{sbarretta}}\left(\frac{T_{\text{triangolo}}}{T_{\text{sbarretta}}}\right)^2,$$

e quindi

$$I_{\text{triangolo}} = (8{,}60 \cdot 10^{-5}\text{ kg} \cdot \text{m}^2)\left(\frac{5{,}83\text{ s}}{2{,}14\text{ s}}\right)^2 = \\ = 6{,}38 \cdot 10^{-4}\text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Nei due casi considerati l'ampiezza delle oscillazioni ha effetti sul valore del periodo?

PROBLEMA SVOLTO 17.5 Un disco uniforme ruota in un piano verticale attorno a un punto del suo bordo (Figura 17.12). Si determini il periodo delle sue piccole oscillazioni e la lunghezza del pendolo semplice equivalente.

Soluzione Il momento d'inerzia di un disco di raggio R e massa M relativo a un asse ortogonale al disco e passante per il suo centro vale $\frac{1}{2}MR^2$. Grazie al teorema degli assi paralleli (teorema di Huygens-Steiner) si ottiene il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione:

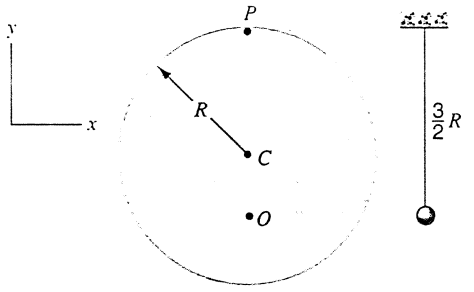


FIGURA 17.12 Problema svolto 17.5. Un disco ruota attorno a un perno a cui è fissato un punto del suo bordo e oscilla come un pendolo fisico. A destra è illustrato un pendolo semplice con lo stesso periodo del pendolo fisico.

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2.$$

Il periodo del pendolo fisico è dato dall'Equazione 17.28 con $d = R$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}};$$

il risultato non dipende dalla massa del disco.

Il pendolo semplice con stesso periodo dovrebbe avere lunghezza

$$L = \frac{I}{MR} = \frac{3}{2}R,$$

ove si è usata l'Equazione 17.30. Il centro di oscillazione del disco fissato in P è quindi il punto O a distanza $3R/2$ da P. Il pendolo semplice equivalente deve avere una massa particolare?

Se il disco viene posto in oscillazione attorno a O si ha che $I = MR^2/2 + M(R/2)^2 = 3MR^2/4$ e $d = R/2$. Il periodo del nuovo pendolo fisico vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{3MR^2/4}{MgR/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}.$$

È stata quindi verificata l'equivalenza tra i pendoli fisici posti in rotazione attorno a P e O.

Quanto varrebbe il periodo di oscillazione del disco se l'asse di rotazione orizzontale passasse per il suo centro?

PROBLEMA SVOLTO 17.6 Un pendolo fisico è costituito da un disco omogeneo di raggio 10,2 cm posto in rotazione attorno a un asse orizzontale passante per un punto del suo bordo e ortogonale al disco. Il periodo delle oscillazioni vale 0,784 s. Si determini il valore dell'accelerazione di gravità g.

Soluzione Nel Problema svolto 17.5 si è calcolato

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}},$$

che risolta rispetto a g fornisce

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2}.$$

Inserendo i dati del problema si ha

$$g = \frac{6\pi^2(0{,}102\text{ m})}{(0.748\text{ s})^2} = 9.83\text{ m/s}^2.$$

17.6 MOTO ARMONICO SEMPLICE E MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Nel 1610 Galileo, per mezzo del telescopio da lui inventato, eseguì ripetute osservazioni del moto delle lune di Giove. Raccogliendo i dati delle sue osservazioni notturne Galileo notò che le lune si muovevano avanti e indietro in un moto simile a un moto armonico semplice. In Figura 17.13 sono riportati i dati originali di Galileo relativi al moto della luna Callisto; dal grafico risulta evidente che il moto della luna è un moto armonico semplice.

In realtà Callisto non si muove avanti e indietro lungo una retta, ma descrive un'orbita con ottima approssimazione circolare attorno al pianeta Giove; ciò che è stato osservato da Galileo è la proiezione di un moto circolare uniforme su un asse diametrale. Dal momento che ciò che si osserva è un moto armonico semplice, si può concludere quanto segue:

il moto armonico semplice può essere pensato come la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro del cerchio.

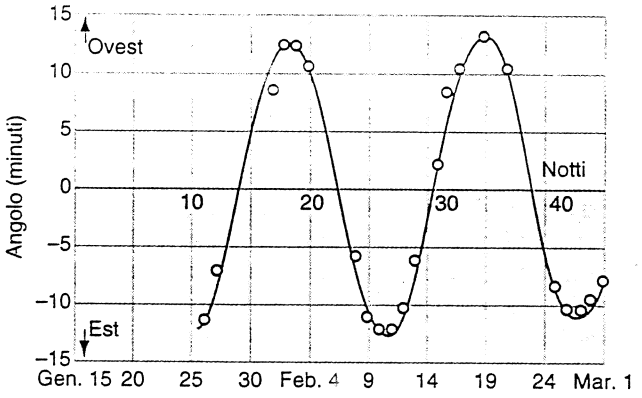


FIGURA 17.13 Posizione angolare di Callisto, una delle lune del pianeta Giove, misurata dalla Terra. I cerchi individuano le posizioni misurate da Galileo nel 1610 e la curva continua rappresenta la migliore interpolazione dei dati sperimentali. Tale interpolazione suggerisce un moto di tipo armonico semplice. Dopo circa 400 anni dalla scomparsa di Galileo il moto delle lune di Giove è ancora uno dei fenomeni di maggiore interesse per gli astronomi dilettanti. Ogni mese la rivista «Sky and Telescope» riporta i dati relativi al loro moto con grafici simili a quello in figura.

Si vuole ora dimostrare in modo rigoroso la veridicità di questa affermazione. In Figura 17.14 è illustrato il moto circolare uniforme di una particella P lungo una circonferenza di raggio r e con velocità angolare ω. All'istante t (Figura 17.14a) il vettore $\boldsymbol{r}$, che individua la posizione di P rispetto all'origine O, forma con il semiasse positivo dell'asse x l'angolo $\omega t + \phi$; la componente lungo l'asse x del vettore $\boldsymbol{r}$ è

$$x(t) = r\cos(\omega t + \phi). \tag{17.31}$$

Questa espressione è identica alla legge oraria di un moto armonico semplice (Equazione 17.6) con ampiezza del moto x_m data dal raggio r della circonferenza. Detta P' la proiezione di P sull'asse x si ha che P' si muove di moto armonico semplice.

Nel moto circolare uniforme la velocità tangenziale è costante e vale ωr; il vettore velocità all'istante t è rappresentato in Figura 17.14b. La sua componente lungo l'asse x, che coincide con la velocità del punto P', è

$$v_x(t) = -\omega r\sin(\omega t + \phi). \tag{17.32}$$

L'accelerazione dell'elemento in moto circolare uniforme è centripeta e il suo modulo vale $\omega^2 r$ (Figura 17.14c); la sua componente lungo l'asse x vale

$$a_x(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t + \phi). \tag{17.33}$$

Le Equazioni 17.32 e 17.33 coincidono con le Espressioni 17.11 della velocità e dell'accelerazione di un moto armonico semplice ove l'elongazione massima x_m viene sostituita dal raggio r della circonferenza. In conclusione la legge

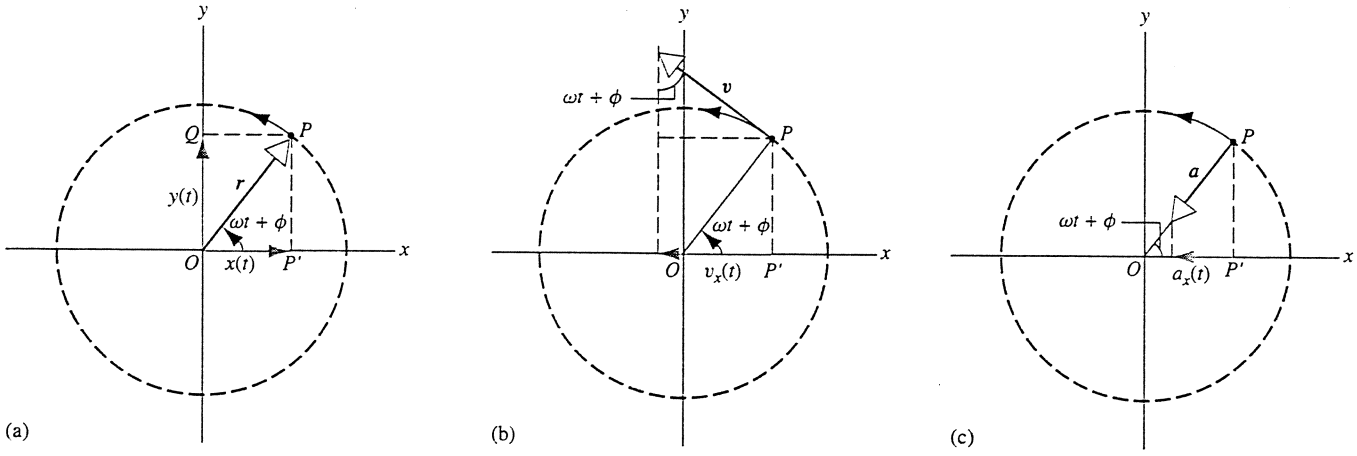


FIGURA 17.14 (a) Il punto P si muove in verso antiorario e a velocità costante lungo una circonferenza di raggio r. Il vettore $\boldsymbol{r}$ forma l'angolo $\omega t + \phi$ con l'asse x. La proiezione P' del punto P sull'asse x si muove di moto armonico semplice. (b) La velocità del punto P e la sua componente orizzontale; quest'ultima è la velocità della proiezione P'. (c) L'accelerazione di P e la sua componente orizzontale.

 ISBN 88-408-1254-7

oraria, la velocità e l'accelerazione del moto della proiezione P' coincidono con quelle di un moto armonico semplice.

L'argomento appena esposto può essere ripercorso al contrario; più precisamente si può affermare che l'Equazione 17.31 è sufficiente a descrivere la componente orizzontale del vettore che individua la posizione di un elemento in moto a velocità di modulo costante lungo una circonferenza centrata nell'origine. Se si potesse descrivere in modo analogo anche la componente verticale del vettore posizione si avrebbe una descrizione completa del moto. La componente lungo l'asse y è mostrata in Figura 17.14c e vale

$$y(t) = r \sin(\omega t + \phi). \qquad (17.34)$$

Anche la proiezione lungo l'asse y del moto circolare uniforme fornisce un moto armonico semplice; lo stesso risultato lo si ottiene lungo un qualsiasi asse diametrale. Si osserva, inoltre, che, come ci si aspetta visto che il moto è circolare, si ha $x^2(t) + y^2(t) = r^2$ per ogni valore della variabile temporale t. Il lettore dovrebbe essere in grado di determinare le componenti lungo l'asse y del vettore velocità e del vettore accelerazione e dimostrare che $v_x^2(t) + v_y^2(t) = \omega^2 r^2$ e $a_x^2(t) + a_y^2(t) = \omega^4 r^2$ per ogni valore di t.

Grazie all'identità trigonometrica $\sin\theta = \cos(\theta - \pi/2)$ si può riscrivere l'Equazione 17.34 nel modo seguente:

$$y(t) = r \cos(\omega t + \phi - \pi/2). \qquad (17.35)$$

Si può quindi concludere che il moto circolare uniforme può essere pensato come la combinazione di due moti armonici semplici lungo rette mutuamente ortogonali, con stessa ampiezza, stessa frequenza, ma costanti di fase che differiscono di $\pi/2$. Altri moti più complicati possono essere interpretati come composizioni di moti armonici di ampiezza, frequenza e costanti di fase opportune (si rimanda agli Esercizi 41 e 42).

PROBLEMA SVOLTO 17.7 Una particella si muove di moto armonico semplice con legge oraria

$$x(t) = (0{,}35 \text{ m}) \cos[(8{,}3 \text{ rad/s})t],$$

ove x è misurato in metri e t in secondi. Questo moto può essere pensato come la proiezione di un moto circolare uniforme sull'asse diametrale orizzontale. (a) Si caratterizzi il moto circolare uniforme. (b) Studiando il moto circolare fittizio si determini il tempo che l'elemento impiega, a partire dalla posizione iniziale, per coprire metà del percorso che lo separa dal centro del moto.

Soluzione (a) La componente lungo l'asse x del moto circolare uniforme è

$$x(t) = r \cos(\omega t + \phi).$$

Allora la circonferenza ha raggio $r = 0{,}35$ m, la fase iniziale è $\phi = 0$ e la velocità angolare è $\omega = 8{,}3$ rad/s.

(b) In corrispondenza dello spostamento dell'elemento il punto fittizio che si muove sulla circonferenza descrive l'angolo $\omega t = \pi/3$ (Figura 17.15). Usando il valore appena determinato per la velocità angolare si ha:

$$t = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{8{,}3 \text{ rad/s}} = 0{,}13 \text{ s}.$$

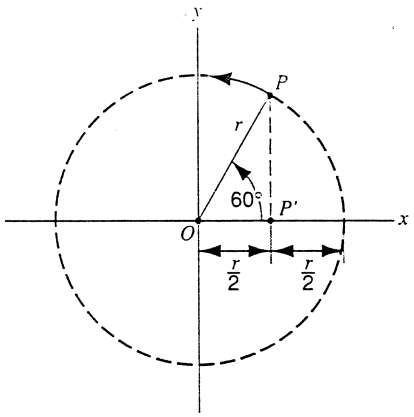


FIGURA 17.15 Problema svolto 17.7. Il raggio OP, individuato all'istante iniziale $t = 0$ dall'angolo $\phi = 0$, raggiunge all'istante t la posizione $\omega t = 60°$. La sua proiezione P' si muove, di conseguenza, da $x = r$ a $x = r/2$.

17.7 MOTO ARMONICO SMORZATO

Il moto armonico semplice è stato fin qui studiato sotto l'ipotesi, talvolta tacita, di assenza di forze d'attrito. Se questa ipotesi fosse verificata dai sistemi reali, le molle e i pendoli oscillerebbero indefinitamente senza perdita di energia e diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni. Nella realtà questi fenomeni vengono osservati e quindi l'ipotesi di assenza di forze dissipative non è verificata dai sistemi reali, sebbene in taluni casi possa essere ritenuta valida con ottima approssimazione. Per fortuna il periodo dipende debolmente dall'ampiezza delle oscillazioni, quindi la diminuzione dell'ampiezza indotta dalla dissipazione di energia genera modifiche spesso trascurabili del periodo di oscillazione.

La diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni è un fenomeno noto come *attenuazione* o *smorzamento* delle oscillazioni; il moto armonico in presenza di attenuazione è detto *moto armonico smorzato*. Le cause alla base dello smorzamento sono numerose, per esempio l'attrito, la resistenza dell'aria o le forze interne al sistema.

In Figura 17.16 vengono confrontati un moto armonico semplice e un moto armonico smorzato. L'effetto delle forze dissipative è trascurabile sulla frequenza del moto ma non sull'ampiezza, che gradualmente tende a zero. In molti casi si può tener conto dello smorzamento moltiplicando la legge oraria data dalla (17.6) dell'oscillatore armonico per un fattore esponenziale opportuno il cui grafico è la linea tratteggiata in Figura 17.16b:

$$x(t) = x_m e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi). \qquad (17.36)$$

ove il coefficiente τ è detto *costante temporale di smorzamento* delle oscillazioni. Il tempo τ è definito come il tempo necessario perché l'ampiezza si riduca del fattore $1/e$ (Figu-

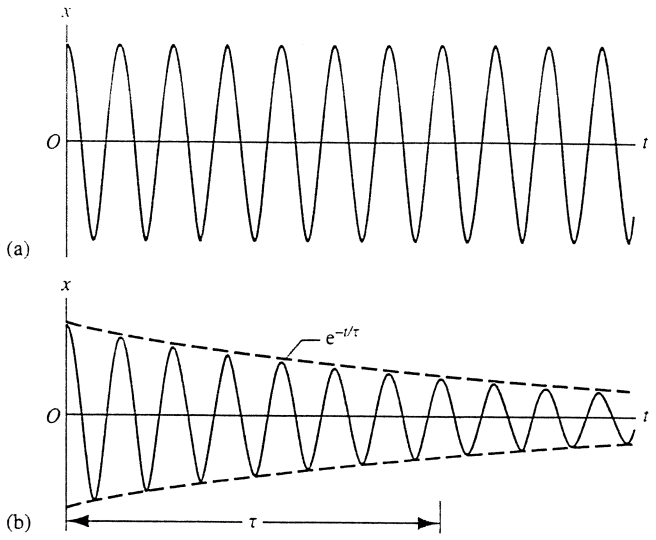


FIGURA 17.16. (a) Oscillazioni non smorzate disegnate nel caso in cui la fase vale zero. (b) Oscillazioni smorzate con la stessa frequenza di quelle disegnate in (a). La costante temporale di smorzamento τ delle oscillazioni è definita come il tempo necessario perché l'ampiezza si riduca del fattore $1/e = 0,368$.

ra 17.16b). La curva continua in Figura 17.16b è il grafico della funzione riportata nell'Equazione 17.36.

I «picchi» del grafico in Figura 17.16b si verificano negli istanti in cui $\cos(\omega t + \phi) = 1$. Nei casi in cui il decadimento esponenziale sia lento rispetto alla variazione del coseno, più precisamente quando il tempo τ è grande rispetto al periodo $2\pi/\omega$ delle oscillazioni, i picchi corrispondono a istanti di inversione del moto, in cui la particella ha velocità nulla. In questi istanti l'energia meccanica dell'oscillatore è puramente potenziale e quindi

$$E(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-2t/\tau}. \qquad (17.37)$$

L'Equazione 17.37 mostra che l'energia meccanica dell'oscillatore decresce esponenzialmente con il tempo, ma due volte più rapidamente di quanto faccia l'ampiezza: l'energia E si riduce del fattore $1/e$ nel tempo $\tau/2$. L'energia meccanica dissipata si può manifestare in modi diversi a seconda del particolare sistema fisico, per esempio può andare a incremetare l'energia cinetica media, e quindi la temperatura, del mezzo che circonda l'oscillatore e che gli oppone resistenza, oppure può incrementare l'energia interna della molla sotto forma di deformazioni.

Aspetti matematici (facoltativo)

Lo studio degli aspetti matematici delle oscillazioni smorzate può essere condotto mediante la legge di Newton se si suppone una forma particolare della forza dissipativa. In Figura 17.17 è illustrato un modello molto semplice di oscillatore smorzato: a un corpo oscillante su un piano liscio è attaccata una pala di massa trascurabile la cui estremità libera si muove all'interno di un fluido che esercita su di essa una forza resistiva. L'effetto del fluido sulla pala può essere descritto così come si è fatto nel caso del proiettile studiato nel Paragrafo 4.4: $F_x = -bv_x$, ove b è una costante positiva chiamata *coefficiente di smorzamento*, che dipende sia dalle proprietà chimico-fisiche del fluido sia dalle dimensioni e forma della pala e del recipiente. La forza totale agente sul sistema è $\sum F_x = -kx - bv_x$ e quindi la seconda legge di Newton conduce all'equazione

$$-kx - bv_x = ma_x,$$

ovvero

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \qquad (17.38)$$

ove $v_x = dx/dt$ e $a_x = d^2x/dt^2$. La soluzione di questa equazione differenziale è

$$x(t) = x_m e^{-bt/(2m)} \cos(\omega' t + \phi), \qquad (17.39)$$

ove x_m e ϕ sono due costanti arbitrarie di integrazione e la pulsazione ω' è data da

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \qquad (17.40)$$

Questa affermazione può essere verificata sostituendo l'Espressione 17.39 nell'Equazione differenziale 17.38 (Esercizio 45). Questa soluzione è corretta sotto l'ipotesi che il coefficiente di smorzamento sia piccolo abbastanza da rendere positivo il termine sotto radice nell'Equazione 17.40.

Si osservi che la Funzione 17.39 ha la stessa forma della (17.36), con costante temporale di smorzamento $\tau = 2m/b$. Al crescere del coefficiente di smorzamento b l'ampiezza delle oscillazioni decresce più rapidamente; quando b tende a zero, invece, la costante temporale di dimezzamento diverge e l'ampiezza resta costante.

In presenza di smorzamento la frequenza delle oscillazioni è più piccola e quindi il periodo è più grande; come suggerisce l'intuito, i termini dissipativi rallentano il moto. Se $b = 0$, invece, si ha $\omega' = \sqrt{k/m}$, ovvero si ritrova la pulsazione dell'oscillatore non perturbato. In presenza di smorzamento si è detto che ω' è più piccola di ω, ma nella maggior parte dei casi pratici b è così piccolo che si può considerare $\omega' \approx \omega$. Nel caso di Figura 17.16b, per esempio, ove l'ampiezza si dimezza in cinque cicli, $\omega' = 0,9998\omega$; ai fini della figura ha perfettamente senso considerare la pulsazione invariata.

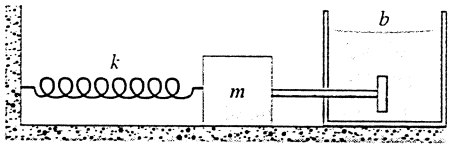


FIGURA 17.17 Esempio di moto oscillatorio smorzato. A un corpo oscillante di massa m è attaccata una pala di massa trascurabile la cui estremità libera si muove all'interno di un fluido che esercita su di essa la forza resistiva $-bv_x$. Si suppone che il piano sia liscio.

 ISBN 88-408-1254-7

Nel caso limite in cui $b = 2\sqrt{km}$, dall'Equazione 17.40 si ha $\omega' = 0$ e quindi la legge oraria decade esponenzialmente a zero senza manifestare oscillazioni. In questo caso la costante temporale di smorzamento (Equazione 17.36) raggiunge il più piccolo valore possibile $1/\omega$; questa situazione particolare è chiamata *smorzamento critico*. Nei casi in cui sistemi meccanici possono esibire oscillazioni non desiderate, la condizione di smorzamento critico è l'obiettivo cui tendono gli ingegneri, in modo da assicurarsi l'annullarsi delle oscillazioni nel tempo più rapido possibile.

PROBLEMA SVOLTO 17.8 Si consideri l'oscillatore smorzato illustrato in Figura 17.17 con $m = 250$ g, $k = 85$ N/m e $b = 0{,}070$ kg/s. Dopo quanto tempo, misurato in numero di periodi, l'energia meccanica dell'oscillatore si ridurrà di un fattore due?

Soluzione Per piccoli valori del coefficiente di smorzamento si ha $\omega' \approx \omega$ e quindi il periodo è dato da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25\text{ kg}}{85\text{ N/m}}} = 0{,}34\text{ s}.$$

All'istante $t = 0$ l'energia meccanica vale $kx_m^2/2$; dall'Equazione 17.37 segue che l'energia meccanica risulterà dimezzata all'istante t tale che

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}kx_m^2\right) = \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-2t/\tau}.$$

Risolvendo rispetto a t e ricordando che $\tau = 2m/b$ si ottiene

$$t = \frac{1}{2}\tau \ln 2 = \frac{m \ln 2}{b} = \frac{(0{,}25\text{ kg})(\ln 2)}{0{,}070\text{ kg/s}} = 2.5\text{ s}.$$

Il tempo t vale $7{,}4T$ circa; sono quindi necessari 7,4 cicli perché l'ampiezza decada di un fattore due.

17.8 OSCILLAZIONI FORZATE E RISONANZA

Come si è visto nei paragrafi precedenti un oscillatore armonico non perturbato ripete indefinitamente il suo moto oscillatorio con una *frequenza naturale* (propria) ω seguendo le leggi descritte nelle Equazioni 17.9 e 17.10. In presenza di deboli forze dissipative l'ampiezza delle oscillazioni decresce, ma la loro frequenza resta pressoché immutata.

Un altro caso molto interessante è quello di un oscillatore armonico perturbato per mezzo di una forza esterna periodica di tipo sinusoidale. Situazioni di questo tipo si realizzano, per esempio, quando il timpano di un orecchio umano viene investito da un'onda sonora o quando una molecola assorbe un'onda elettromagnetica. Le oscillazioni indotte da questo tipo di perturbazione sono dette *oscillazioni forzate* e sono molto diffuse in numerosi campi della fisica, come l'acustica, l'elettromagnetismo e la fisica atomica.

Le oscillazioni forzate indotte nel sistema saranno caratterizzate dalla frequenza della perturbazione esterna forzante e non dalla frequenza naturale dell'oscillatore. L'ampiezza di tali oscillazioni, però, dipende fortemente dalla relazione che esiste tra la frequenza forzante e quella naturale del sistema. Se la perturbazione forzante ha la «giusta» frequenza, anche una successione di piccoli impulsi può produrre oscillazioni di ampiezza enorme. Un esempio molto comune di questo effetto si ha quando si spinge un bambino su un'altalena: piccole spinte, ma assestate con il ritmo giusto, possono far aumentare di molto l'arco delle oscillazioni compiute dall'altalena.

Si consideri un oscillatore reale in presenza di forze dissipative; nel caso ideale l'energia fornita dalla forzante sinusoidale si accumulerebbe e tenderebbe a far divergere in ogni caso l'ampiezza delle oscillazioni. Per fissare le idee si consideri l'oscillatore smorzato il cui moto è illustrato in Figura 17.16b; tale grafico è stato riprodotto anche in Figura 17.18a. La pulsazione naturale dell'oscillatore viene denotata con ω e si suppone che lo smorzamento sia sufficientemente piccolo in modo che la pulsazione possa ritenersi invariata. All'oscillatore viene applicata la forza esterna sinusoidale $F_x(t) = F_m \sin \omega'' t$ di ampiezza costante F_m.

I primi istanti del moto sono dominati da un regime transitorio costituito dalle oscillazioni smorzate che scompaiono in un tempo dell'ordine della costante temporale di smorzamento τ. Dopo questo transitorio si realizzerà una situazione stazionaria in cui l'effetto dominante sarà quello dovuto alla perturbazione forzante. In Figura 17.18b è illustrato questo stato stazionario nell'ipotesi che la frequenza naturale del sistema sia doppia rispetto a quella forzante. Il moto è essen-

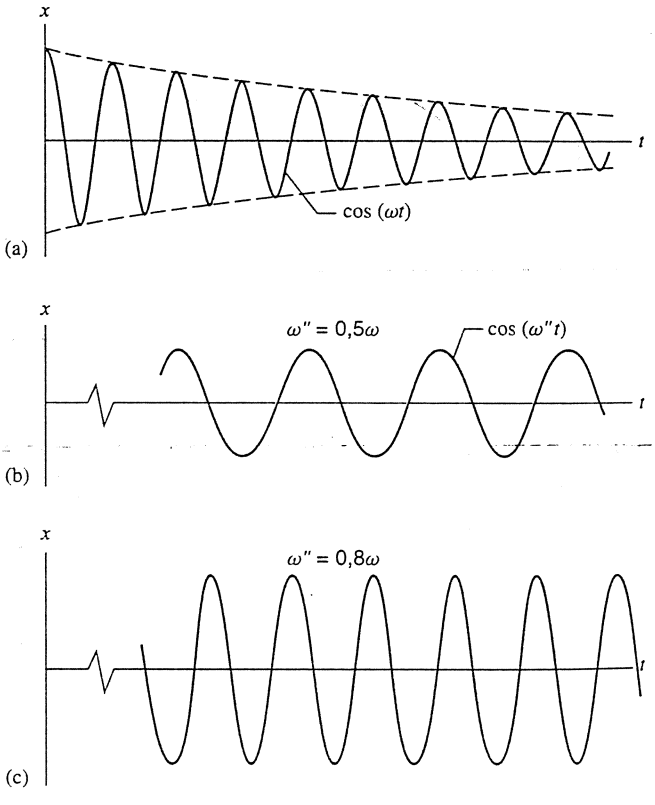


FIGURA 17.18 (a) Oscillatore smorzato identico a quello illustrato in Figura 17.16b. (b) Medesimo oscillatore sottoposto all'azione di una forza di pulsazione $\omega'' = 0{,}5\omega$. (c) Forzante di pulsazione $\omega'' = 0{,}8\omega$. Nonostante la forzante abbia la stessa ampiezza in (b) e (c), in quest'ultimo caso l'ampiezza delle oscillazioni è maggiore perché la frequenza forzante è più vicina alla frequenza di risonanza.

zialmente un'oscillazione sinusoidale di pulsazione uguale a quella della perturbazione forzante ω''. In Figura 17.18c è illustrato il moto stazionario nel caso in cui la pulsazione forzante valga $\omega'' = 0{,}8\omega$; in questo caso l'ampiezza delle oscillazioni è all'incirca pari al doppio di quella delle oscillazioni di Figura 17.18b. Se a parità di ampiezza F_m si considerano perturbazioni esterne con pulsazione ω'' sempre più vicina a quella propria del sistema ω, l'ampiezza delle oscillazioni stazionarie risulterà sempre più elevata. Nel caso $\omega'' = 0{,}9\omega$ l'ampiezza delle oscillazioni risulta uguale a circa quattro volte quella delle oscillazioni di Figura 17.18b e questo rapporto si avvicina a 40 nel caso $\omega'' = 0{,}99\omega$.

Nel caso di smorzamento debole il massimo valore dell'ampiezza delle oscillazioni stazionarie si raggiunge quando la frequenza forzante è uguale a quella naturale del sistema. Questa condizione è nota come *condizione di risonanza* e il corrispondente valore della pulsazione ω'' è detto *pulsazione risonante*:

$$\omega'' = \omega \quad \text{(condizione di risonanza).} \qquad (17.41)$$

In certi contesti particolari vengono adottate definizioni diverse per il concetto di risonanza: frequenza alla quale viene trasmessa la massima potenza al sistema oscillante, oppure frequenza alla quale è massima la velocità dell'oscillatore. Queste definizioni in generale non sono equivalenti; nel Capitolo 36 verrà discussa la risonanza nei circuiti elettrici che viene di solito definita in termini dell'ampiezza della corrente: si vedrà che questa definizione è simile a quella data in termini della velocità per i sistemi meccanici.

Come mostrato nelle Figure 17.18b e 17.18c, nello stato stazionario il sistema oscilla alla frequenza del sistema forzante con ampiezza costante; ciò avviene in presenza di smorzamento, quindi in una situazione in cui le forze dissipative dovrebbero indurre una diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni. In realtà l'ampiezza resta costante perché è la sollecitazione esterna forzante che fornisce l'energia necessaria per compensare la perdita dovuta alle forze dissipative. Nello stato stazionario la perturbazione forzante cede energia al sistema esattamente con la stessa potenza alla quale le forze dissipative la consumano; nel complesso l'oscillatore allo stato stazionario si limita a trasferire energia dalla sorgente forzante al mezzo smorzante che lo circonda, mantenendo costante l'energia immagazzinata nel suo moto. Si osserva, in particolare, che anche in condizione di risonanza l'ampiezza delle oscillazioni non diverge col tempo, ma raggiunge un valore stazionario costante.

In Figura 17.19 è mostrata la variazione dell'ampiezza delle oscillazioni forzate stazionarie in funzione della frequenza forzante, per diversi valori del coefficiente di smorzamento. Per piccoli valori di tale coefficiente l'ampiezza stazionaria cresce rapidamente con l'avvicinarsi di ω'' alla pulsazione naturale ω e raggiunge il suo valore massimo proprio in condizione di risonanza, $\omega'' = \omega$. Per valori più alti del coefficiente di smorzamento la crescita dell'ampiezza con l'avvicinarsi di ω'' alla frequenza naturale è più contenuta; per valori molto alti del coefficiente di smorzamento, infine, la crescita è ancora più debole e la frequenza di risonanza risulta addirittura diversa dalla frequenza propria del sistema.

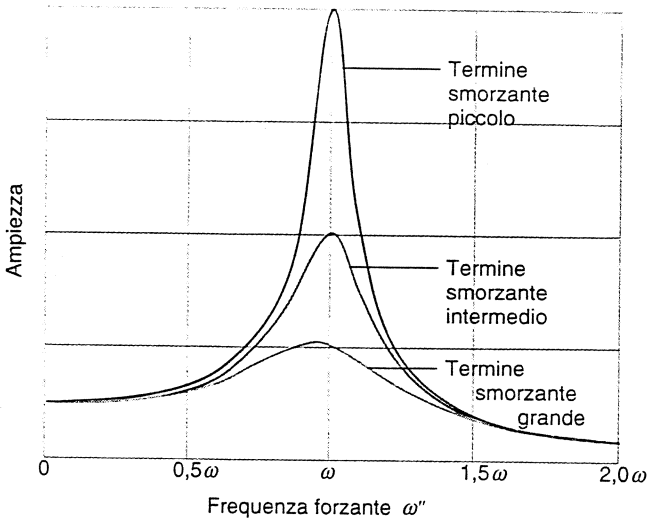


FIGURA 17.19 Ampiezza di un oscillatore forzato in funzione della frequenza forzante ω''. Le tre curve si riferiscono a tre diversi valori del termine smorzante: piccolo, intermedio (pari a due volte quello piccolo) e grande (pari a quattro volte quello piccolo). Il profilo di risonanza più netto viene osservato in corrispondenza del valore più piccolo dello smorzamento.

Tutti i sistemi meccanici, per esempio i palazzi, i ponti o gli aeroplani, hanno una specifica frequenza naturale di oscillazione o anche più d'una frequenza naturale. Se tali strutture vengono sottoposte all'azione di perturbazioni risonanti, anche di ampiezza piccola, gli effetti possono essere disastrosi. Una verifica divertente di questo effetto è la rottura di un bicchiere di vetro per mezzo di onde sonore risonanti con una delle frequenze proprie del vetro; evidenze più disastrose sono i crolli di strutture come i ponti per effetto di scosse telluriche.

Un esempio spettacolare del fenomeno appena discusso è stato il crollo del Tacoma Narrows Bridge nello stato di Washington (USA) nel 1940. Il vento che spirava nei pressi del ponte si rompeva in vortici che finivano per eccitare una delle frequenze naturali della struttura. Il risultato era una specie di rollio del ponte, rollio che circa cinque mesi dopo l'inaugurazione, si trasformò in violente oscillazioni torsionali che finirono per distruggere la struttura (Figura 17.20). L'instaurarsi di tali oscillazioni non può essere descritto in termini dei semplici modelli di oscillatori forzati fin qui illustrati, ma fu dovuto a complicati effetti di non linearità legati alla presenza di raffiche di vento molto intense.

Aspetti matematici (facoltativo)

Come modello di oscillatore smorzato si considera quello già studiato in precedenza; la novità è costituita dalla presenza della perturbazione forzante $F_m \cos(\omega'' t)$. Il dispositivo sperimentale potrebbe essere simile a quello descritto in Figura 17.17 con la parete fissa sostituita da un supporto mobile collegato a un motore in rotazione con velocità angolare ω''. La forza totale agente sul sistema è data dall'espressione $\sum F_x = -kx - bv_x + F_m \cos(\omega'' t)$ e quindi la seconda legge di Newton conduce all'equazione

 ISBN 88-408-1254-7

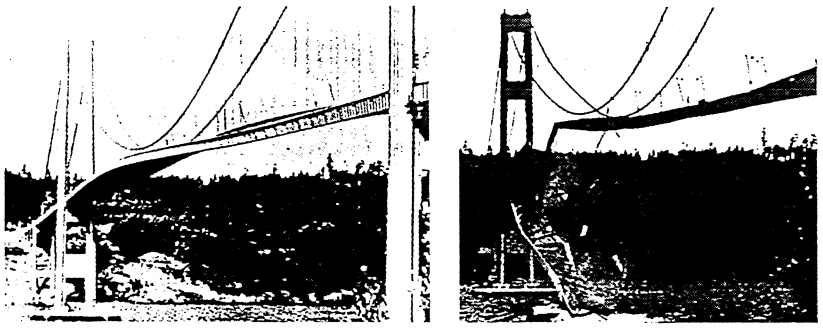


FIGURA 17.20 Il Tacoma Narrows Bridge sul Puget Sound, stato di Washington (USA). Il ponte fu completato e aperto al traffico nel luglio del 1940: per effetto della risonanza la struttura fu sottoposta a oscillazioni di torsione così violente (riquadro a sinistra) che causarono la rottura della campata principale e la conseguente caduta della carreggiata (riquadro a destra) nell'acqua sottostante.

$$-kx - bv_x + F_m \cos(\omega'' t) = ma_x.$$

ovvero

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos(\omega'' t). \qquad (17.42)$$

ove $v_x = dx/dt$ e $a_x = d^2x/dt^2$. Dopo un tempo sufficiente ad annullare l'effetto del transitorio, la soluzione del problema sarà data dall'equazione

$$x(t) = \frac{F_m}{G}\cos(\omega'' t - \beta), \qquad (17.43)$$

ove

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2} \qquad (17.44)$$

e

$$\beta = \arccos\frac{b\omega''}{G}. \qquad (17.45)$$

Il lettore verifichi che l'Equazione 17.43 è soluzione dell'Equazione differenziale 17.42, calcolando la derivata prima e seconda della funzione $x(t)$ e sostituendo il risultato nell'equazione.

Si osserva, infine, che per piccoli valori del coefficiente di smorzamento b la quantità G risulta minima per $\omega'' = \omega$ e quindi l'ampiezza delle oscillazioni, che è data da F_m/G, risulta massima. Questa è la ragione matematica alla base del picco di risonanza presente nelle curve di Figura 17.19; tali curve, infatti, altro non sono che il rapporto F_m/G disegnato in funzione di ω'' per tre diversi valori del coefficiente di smorzamento b.

17.9 OSCILLAZIONI IN UN SISTEMA DI DUE CORPI (facoltativo)

In Figura 17.21a è illustrato un sistema costituito da due corpi liberi di muoversi su un piano orizzontale e collegati per mezzo di una molla: se i due corpi vengono allontanati e lasciati al loro moto, essi esibiranno entrambi un moto oscillatorio. Il sistema appena descritto è un modello semplice per studiare le *collisioni* (*urti*) *tra due corpi*. Sistemi di questo tipo sono molto diffusi in natura; basti pensare alle molecole biatomiche in cui i due atomi sono tenuti assieme da una forza del tipo di Figura 17.3. Se la molecola si mantiene vicina alla posizione di equilibrio, l'energia potenziale associata all'interazione può essere ben approssimata da un andamento parabolico e il sistema si comporterà come un oscillatore armonico. L'emissione e l'assorbimento della radiazione elettromagnetica da parte di una molecola biatomica può essere capita a fondo a partire dallo studio di queste vibrazioni armoniche.

Fenomeni analoghi avvengono anche nei nuclei atomici, nei quali sono possibili moti in cui i protoni e i neutroni oscillano come i due corpi di Figura 17.21a ed emettono e assorbono radiazione elettromagnetica come le molecole biatomiche. Lo studio del sistema in Figura 17.21a è abbastanza complicato, ma il problema può essere semplificato con un opportuno cambiamento di coordinate; assieme alle ascisse x_1 e x_2 dei due corpi, infatti, si considerano l'ascissa del centro di massa x_{cm} e la posizione relativa dei corpi $x_1 - x_2$. In assenza di forze esterne il centro di massa si muoverà di moto rettilineo uniforme e quindi il suo moto non avrà influenza sulle oscillazioni; queste ultime, invece, potranno essere descritte in termini della coordinata relativa.

La lunghezza della molla è uguale alla distanza $x_1 - x_2$ tra i due corpi; se L è la lunghezza della molla a riposo allora la quantità $x = (x_1 - x_2) - L$ rappresenta la variazione della lunghezza della molla e, quindi, la forza che quest'ultima eserciterà su ciascuna delle due particelle sarà $F = kx$. Come illustrato in Figura 17.21a, se $-F$ è la forza esercitata sulla particella di massa m_1, allora la forza esercitata dalla molla sulla particella di massa m_2 sarà uguale a $+F$.

Se si scrive separatamente la legge di Newton per i due corpi si ottiene il sistema

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx,$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = +kx.$$

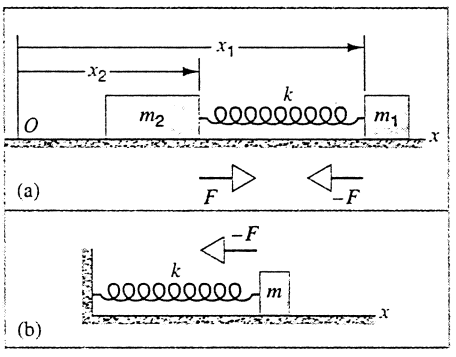


FIGURA 17.21 (a) Sistema costituito da due corpi di masse m_1 ed m_2 connessi da una molla. (b) Il moto relativo può essere descritto come il moto oscillatorio di un corpo di massa ridotta m.

Moltiplicando la prima equazione per m_2, la seconda per m_1 e sottraendo membro a membro si ottiene

$$m_1 m_2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -m_2 kx - m_1 kx,$$

che, a sua volta, può essere posta nella forma

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -kx. \qquad (17.46)$$

La quantità che moltiplica la derivata seconda ha la dimensione della massa ed è nota come *massa ridotta* del sistema; si pone, quindi,

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (17.47)$$

La lunghezza a riposo L della molla è un parametro indipendente dal tempo, quindi le derivate rispetto al tempo della variabile x coincidono con quelle della differenza $x_1 - x_2$; più precisamente:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = \frac{d}{dt}(x + L) = \frac{dx}{dt}.$$

In virtù di questa osservazione è possibile riscrivere l'Equazione 17.46 come segue

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0.$$

In conclusione si è dimostrato che il sistema può essere studiato come un sistema costituito da una sola particella di massa uguale alla massa ridotta e con posizione individuata dalla coordinata x (Figura 17.21b). Per tale sistema, inoltre, si è mostrato che l'equazione del moto è esattamente l'equazione dell'oscillatore armonico; in definitiva il sistema di partenza compirà delle oscillazioni la cui frequenza è data dall'Equazione 17.9, in cui il ruolo della massa è svolto dalla massa ridotta del sistema.

L'analisi dettagliata del moto del sistema può essere condotta scrivendo la forma esplicita 17.11 delle funzioni $x(t)$, $v_x(t)$ e $a_x(t)$; va tenuto presente, però, che la coordinata x è l'ascissa di uno dei due corpi misurata relativamente al secondo corpo e quindi v_x e a_x sono la velocità *relativa* $v_{1x} - v_{2x}$ e l'accelerazione *relativa* $a_{1x} - a_{2x}$.

Si osserva, infine, che la massa ridotta è sempre minore di ciascuna delle due masse del sistema. In particolare, se una delle due masse è molto più piccola dell'altra, la massa ridotta è circa uguale alla massa minore; se, invece, le due masse sono uguali, la massa ridotta è uguale alla metà della massa delle singole particelle.

PROBLEMA SVOLTO 17.9 In natura il cloro si presenta sotto forma dei due isotopi ^{35}Cl, di massa atomica 34,968853 u e abbondanza relativa 76 %, e ^{37}Cl, di massa atomica 34,965903 u e abbondanza relativa 24 %. (a) Si calcoli la massa ridotta della molecola HCl nei due casi ^{35}Cl e ^{37}Cl. (b) La frequenza di vibrazione della molecola HCl vale $8.5 \cdot 10^{13}$ Hz. Si calcoli la costante k assumendo che la molecola si comporti come il semplice oscillatore proposto in Figura 17.21.

Soluzione (a) Ricordando che la massa atomica dell'atomo H vale 1,007825 u, tramite l'Equazione 17.47 si calcola la massa ridotta della molecola HCl nel caso dell'isotopo ^{35}Cl:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1{,}007825 \text{ u})(34.968853 \text{ u})}{(1{,}007825 \text{ u}) + (34{,}968853 \text{ u})} =$$
$$= 0{,}979593 \text{ u}.$$

Analogamente nel caso dell'isotopo ^{37}Cl si ha

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1{,}007825 \text{ u})(34{,}965903 \text{ u})}{(1{,}007825 \text{ u}) + (34{,}965903 \text{ u})} =$$
$$= 0{,}981077 \text{ u}.$$

(b) Risolvendo l'Equazione 17.9 rispetto alla costante k si ha

$$k = 4\pi^2 \nu^2 m =$$
$$= 4\pi^2 (8{,}5 \cdot 10^{13} \text{ Hz})^2 (0{,}98 \text{ u})(1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg/u}) =$$
$$= 460 \text{ N/m}.$$

È interessante osservare che si ottiene l'ordine di grandezza tipico delle costanti delle molle ordinarie (si vedano i dati del Problema svolto 17.1). È possibile darne una spiegazione intuitiva?

Le molecole possono assorbire ed emettere radiazione elettromagnetica modificando il loro stato di vibrazione; lo studio dell'interazione tra la radiazione elettromagnetica e le molecole è uno degli strumenti principali che permettono di indagarne la struttura interna. In Figura 17.22 è riportato lo spettro di assorbimento dell'HCl nella regione dell'infrarosso. Ogni picco corrisponde a una variazione dello stato vibrazionale della molecola dovuto all'assorbimento di radiazioni alla frequenza del picco. La struttura fine di ciascun picco, che ne evidenzia due componenti, è dovuta alla presenza dei due isotopi di cloro: la differenza tra le loro masse conduce a diverse masse ridotte, come è stato esplicitamente calcolato al punto (a), e quindi a diverse frequenze di vibrazione.

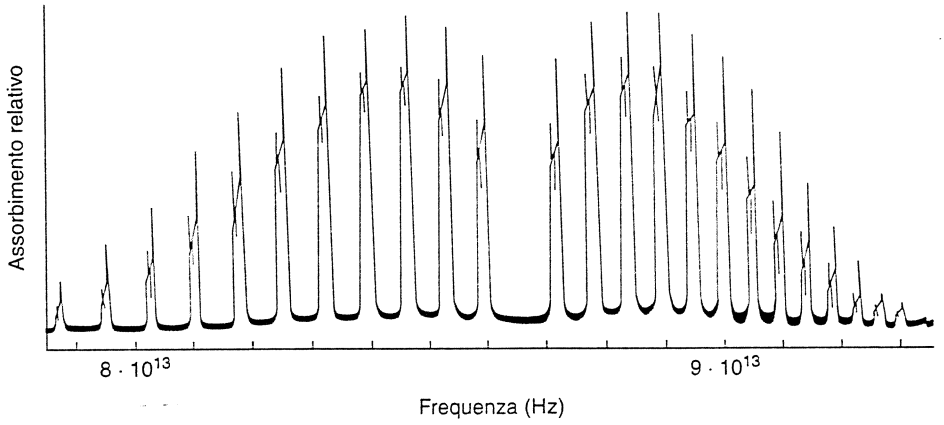


FIGURA 17.22 Spettro d'assorbimento della radiazione infrarossa da parte della molecola HCl. Ogni picco corrisponde alla variazione dello stato vibrazionale delle molecole. Le coppie di picchi ravvicinate sono dovute ai due isotopi del Cl.

 ISBN 88-408-1254-7

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

17.1 Sistemi oscillanti

1. Una particella oscilla attorno alla posizione di equilibrio x_0 per effetto di una forza cui è associata l'energia potenziale $U(x)$. Si dica quali, tra le affermazioni seguenti, corrispondono a verità.

(A) $U(x)$ deve essere simmetrica rispetto a x_0.

(B) $U(x)$ deve avere un minimo in x_0.

(C) $U(x)$ deve avere un massimo in x_0.

(D) $U(x)$ deve essere positiva in un intorno di x_0.

2. La posizione di equilibrio di un sistema oscillante è sempre tale che

(A) $x = 0$. (B) $v_x = 0$.

(C) $a_x = 0$. (D) $p_x = 0$.

17.2 L'oscillatore armonico

17.3 Moto armonico semplice

3. Un corpo saldato all'estremità di una molla si muove di moto armonico semplice. Se la massa del corpo e l'ampiezza delle oscillazioni vengono raddoppiate

(a) il periodo delle oscillazioni varierà di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

(b) il modulo della velocità massima del corpo varierà di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

(c) il modulo dell'accelerazione massima del corpo varierà di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

4. Un corpo saldato all'estremità di una molla si muove di moto armonico semplice e passa per la posizione di equilibrio con velocità di modulo v. In un secondo momento lo stesso sistema viene posto in oscillazione in modo che la velocità nella posizione di equilibrio sia di modulo $2v$.

(a) La frequenza delle oscillazioni cambia di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

(b) L'elongazione massima cambia di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

(c) Il modulo dell'accelerazione massima del corpo varia di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

17.4 Energia di una particella in moto armonico semplice

5. Un corpo saldato all'estremità libera di una molla si muove di moto armonico semplice; la posizione di ascissa $x = x_{max}/2$ viene attraversata con velocità

(A) $v_x = v_{max}$. (B) $v_x = \sqrt{3}v_{max}/2$.

(C) $v_x = \sqrt{2}v_{max}/2$. (D) $v_x = v_{max}/2$.

6. Un corpo saldato all'estremità libera di una molla si muove di moto armonico semplice; se l'energia totale della particella viene raddoppiata allora

(a) il periodo dell'oscillazione varierà di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

(b) il modulo della velocità massima del corpo varierà di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

(c) il modulo dell'accelerazione massima del corpo varierà di un fattore

(A) 4. (B) $\sqrt{8}$.

(C) 2. (D) $\sqrt{2}$.

(E) 1 (non subisce modifiche).

17.5 Applicazioni del moto armonico semplice

7. Un anello di metallo è sospeso per un suo punto e può oscillare sia nel suo piano che in un piano ad esso perpendicolare passante per il punto fisso. A quale dei due modi di oscillazione corrisponderà la frequenza più elevata

(A) Oscillazioni nel piano dell'anello.

(B) Oscillazioni nel piano ortogonale all'anello.

(C) La frequenza dei due modi di oscillazione è la stessa.

8. Qual è l'unità di misura della costante κ introdotta nell'Equazione 17.17?

(A) $N/(m \cdot rad)$.

(B) $N \cdot m/rad$.

(C) $kg/(rad \cdot s^2)$.

(D) $kg \cdot rad^2/s^2$.

17.6 Moto armonico semplice e moto circolare uniforme

9. Un elemento di massa m si muove di moto circolare uniforme con velocità di modulo v lungo una circonferenza di raggio R nel piano xy. Il moto componente relativo all'asse x è il moto armonico semplice di legge oraria $x(t) = R\cos(\omega t + \phi)$.

(a) La pulsazione ω vale

(A) v/R. (B) m^2R.

(C) R/v. (D) $v/[R\sin(\omega t)]$.

(b) La costante ϕ di fase vale

(A) 0. (B) vt/ω. (C) π.

(D) ϕ non può essere determinata in base ai dati del problema.

17.7 Moto armonico smorzato

10. Siano ω' e ω le pulsazioni di un oscillatore armonico smorzato e dello stesso sistema imperturbato. Si avrà $\omega' = \omega/2$ se

ISBN 88-408-1254-7

(A) $b = m\omega$. (B) $b = \sqrt{2}m\omega$.
(C) $b = \sqrt{3}m\omega$. (D) $b = 2m\omega$.

17.8 Oscillazioni forzate e risonanza

11. Un oscillatore smorzato e forzato dopo il periodo transitorio oscillerà
    (A) alla frequenza della sollecitazione forzante.
    (B) alla frequenza dell'oscillatore smorzato ma non forzato.
    (C) alla frequenza dell'oscillatore libero.
    (D) a una qualsiasi delle frequenza precedenti dal momento che sono tutte uguali.
12. La frequenza di risonanza di un oscillatore smorzato e forzato è uguale
    (A) alla frequenza forzante.
    (B) alla frequenza dell'oscillatore smorzato ma non forzato.
    (C) alla frequenza dell'oscillatore libero.
    (D) a una qualsiasi delle frequenze precedenti dal momento che sono tutte uguali.

17.9 Oscillazioni in un sistema di due corpi

13. Una molecola biatomica può essere schematizzata come un sistema costituito da due particelle legate da una molla ideale. Il sistema può oscillare con pulsazione ω, ma sono possibili anche rotazioni attorno al centro di massa. In presenza di rotazione
    (a) la distanza d'equilibrio x_{eq} tra le molecole
    (A) diminuisce.
    (B) resta costante.
    (C) aumenta.
    (b) la pulsazione ω delle oscillazioni
    (A) diminuisce.
    (B) resta costante.
    (C) aumenta.

QUESITI

1. Si diano alcuni esempi di sistemi il cui moto è con ottima approssimazione armonico semplice. Si spieghi per quale ragione moti perfettamente armonici sono rari in natura.
2. Le molle chiudiporta a battente chiuso sono sottoposte a tensione in modo da opporsi a deboli tentativi di apertura. Per tali molle vale la legge di Hooke?
3. Le piattaforme per i tuffi obbediscono alla legge di Hooke? E i trampolini? E le molle fatte con un filo di piombo attorcigliato?
4. Cosa accadrebbe a un oscillatore armonico se venisse invertito il segno della forza $-kx$?
5. Un oggetto di massa m è sospeso a una molla di costante k. La molla viene successivamente divisa in due e il medesimo oggetto viene sospeso a una delle due metà. Si determini la relazione esistente tra le frequenze di oscillazione nei due casi.
6. Una molla a riposo ha costante elastica k. Alla molla viene sospeso un corpo e, nonostante l'aumento della sua lunghezza, la molla resta nel suo intervallo di elasticità. La costante della molla è variata?
7. Un blocco di massa non nota viene sospeso a una molla di costante sconosciuta. Si mostri come sia possibile determinare il periodo delle oscillazioni a partire dall'allungamento della molla a riposo.
8. Si spieghi qualitativamente come la massa delle molle reali modifichi il periodo di oscillazione di un sistema corpo-molla rispetto a quello delle molle ideali equivalenti.
9. Si possono avere oscillatori che esibiscono piccole oscillazioni non armoniche? In altri termini è possibile che la forza di richiamo sia non lineare anche per valori piccolissimi dell'ampiezza?
10. Si spieghi cosa accade al periodo delle oscillazioni, alla costante della molla, all'energia meccanica totale, alla velocità massima e all'accelerazione massima se si raddoppia l'ampiezza delle oscillazioni di un sistema corpo-molla.
11. Cosa cambia nel moto di un oscillatore armonico se viene raddoppiata la sua velocità massima?
12. Una persona sale su una bilancia pesapersone posta su una piattaforma sospesa mediante una molla. Il sistema viene posto in moto armonico semplice nella direzione verticale. Si descriva che cosa indica la bilancia durante il moto.
13. È possibile costruire un vero pendolo semplice? Si giustifichi la risposta.
14. È possibile basare le definizioni di unità di massa, tempo e lunghezza sulle proprietà del pendolo?
15. Si spieghi, tenendo conto degli aspetti elastici e dinamici, per quale ragione nelle oscillazioni verticali di un corpo sospeso a un molla il periodo dipenda dalla massa del corpo ma non dall'accelerazione di gravità, mentre nelle oscillazioni di un pendolo semplice accade esattamente il contrario.
16. Si stabilisca, sulla base di argomenti intuitivi, se il periodo di un pendolo che compie ampie oscillazioni è maggiore o minore di quando compie piccole oscillazioni. Si considerino i casi estremi.
17. Dal momento che l'ampiezza θ_m nell'Equazione 17.25 tende al valore limite di 180°, che cosa ci si aspetta per il valore limite del periodo? Si spieghi la risposta con argomenti euristici.
18. Che cosa accade alla frequenza di un'altalena mentre le sue oscillazioni diminuiscono progressivamente di ampiezza?
19. Si dica come cambia il periodo di un pendolo quando il suo punto di sospensione viene (a) mosso orizzontalmente nel piano delle oscillazioni con accelerazione costante a; (b) mosso verticalmente verso l'alto con accelerazione costante a; (c) mosso verticalmente verso il basso con accelerazione costante $a < g$ oppure $a > g$. Quale di questi casi si applica a quello di un pendolo montato su un carrello che scivola su un piano inclinato?
20. Perché si è escluso il caso di un asse passante per il centro di massa quando si è usata l'Equazione 17.29 per calcolare il momento d'inerzia I? Questa equazione è valida per un asse così scelto? Come si può determinare il momento d'inerzia relativo a un asse passante per il centro di massa usando i metodi visti per i pendoli fisici?

 ISBN 88-408-1254-7

21. Una sfera cava viene riempita d'acqua e sospesa mediante una lunga sbarretta sottile. Durante le oscillazioni l'acqua fuoriesce attraverso un foro presente sulla superficie e si osserva che il periodo dapprima cresce e poi decresce. Si spieghi questo fenomeno.
22. (a) Se si tiene in considerazione l'effetto della massa m della corda mediante la quale è sospeso un pendolo semplice si ottiene un periodo più elevato rispetto al caso $m = 0$. Si spieghi questa osservazione. (b) Nonostante l'osservazione fatta al punto (a), una corda di lunghezza L cui è attaccato un corpo di massa M oscilla con periodo più elevato rispetto alla medesima corda cui si attacca un corpo di massa nulla. Si spieghi questa osservazione.
23. Come cambia il periodo di una pendolo di torsione se viene portato sulla Luna? E quello di un pendolo semplice? E quello di un sistema corpo-molla? E quello di un pendolo fisico?
24. È possibile usare un pendolo per tracciare una curva sinusoidale?
25. Che relazione esiste tra il grafico della forza intermolecolare in funzione della distanza tra gli atomi e il grafico della forza esplicata da una molla e la sua elongazione? Si giustifichi la risposta.
26. (a) In quale circostanza la massa ridotta di un sistema costituito da due corpi è uguale alla massa di uno dei due corpi? (b) Quanto vale la massa ridotta se i due corpi hanno la medesima massa? (c) I valori relativi ai casi (a) e (b) sono i valori limite della massa ridotta?
27. Per quale ragione il cestello di una lavabiancheria è spesso retto da un sistema di molle?
28. Per quale ragione in diversi dispositivi si usano dei meccanismi di smorzamento? Si discutano alcuni esempi.
29. Si discutano alcuni esempi comuni in cui il fenomeno della risonanza gioca un ruolo importante.
30. Negli oceani gli effetti di marea dovuti alla Luna sono molto più intensi di quelli dovuti al Sole. Per quanto riguarda le maree dell'atmosfera terrestre vale il contrario. Si spieghi questo fenomeno alla luce del concetto di risonanza e si ricordi che il periodo di oscillazione dell'atmosfera terrestre è di circa 12 ore.
31. Si dica qual è il limite cui tende l'ampiezza delle oscillazioni forzate illustrate in Figura 17.19 quando la pulsazione ω tende (a) a zero e (b) all'infinito.
32. Palazzi di altezze diverse subiscono danni diversi durante i terremoti. Si spieghi questo fenomeno.
33. Un cantante che riesca a tenere una nota alla sua giusta frequenza per un tempo abbastanza lungo può rompere bicchieri di cristallo sufficientemente puri. Questo non accade per bicchieri di bassa qualità. Perché?

ESERCIZI

17.1 Sistemi oscillanti
17.2 L'oscillatore armonico
17.3 Moto armonico semplice

1. Un corpo di massa 3,94 kg viene sospeso a una molla e nella nuova posizione di equilibrio si misura l'allungamento di 15,7 cm. Successivamente alla molla viene sospeso un corpo di massa 0,520 kg; si determini il periodo delle oscillazioni.
2. Un oscillatore è costituito da una molla e da un corpo di massa 512 g. Il sistema è posto in oscillazione con ampiezza 34,7 cm e si nota che il moto si ripete ogni 0,484 s. Si determini (a) il periodo, (b) la frequenza, (c) la pulsazione, (d) la costante della molla, (e) il modulo della velocità massima ed (f) la forza massima che la molla esercita sul corpo.
3. In un altoparlante il suono viene generato da una membrana oscillante. Sapendo che l'ampiezza massima delle oscillazioni vale $1,20 \cdot 10^{-3}$ mm, si calcoli la frequenza emessa se la membrana subisce un'accelerazione superiore a g.
4. Un corpo di massa pari a 5,22 kg viene sospeso all'estremo libero di una molla verticale posto in vibrazione. Sapendo che il corpo oscilla con periodo di 645 ms e ha la velocità massima di 15,3 cm/s, si calcoli (a) la costante della molla, (b) l'elongazione massima e (c) la frequenza delle oscillazioni.
5. In un rasoio elettrico le lame percorrono avanti e indietro uno spazio di 2,00 mm. Il moto è armonico semplice con frequenza 120 Hz. Si calcoli (a) l'ampiezza, (b) la velocità massima e (c) l'accelerazione massima delle lame.
6. Per l'analisi delle vibrazioni verticali di un'autovettura si può supporre che questa sia montata su quattro molle. Si supponga che un'automobile di massa pari a 1460 kg presenti oscillazioni verticali di frequenza 2,95 Hz. (a) Assumendo che le quattro molle siano identiche se ne calcoli la costante elastica. (b) Si calcoli la nuova frequenza di oscillazione se salgono a bordo cinque persone di massa media pari a 73,2 kg.
7. Un corpo si muove di moto armonico semplice con legge oraria

$$x(t) = (6,12 \text{ m}) \cos[(8,38 \text{ rad/s})t + 1,92 \text{ rad}].$$

Si calcoli (a) l'elongazione, (b) la velocità e (c) l'accelerazione del corpo all'istante $t = 1,90$ s. Si determinino anche (d) la frequenza ed (e) il periodo delle oscillazioni.

8. La scala di una bilancia a molla, lunga 10,0 cm, va da 0 a 25 kg. Un corpo sospeso alla bilancia oscilla con frequenza 2,00 Hz. Si determini il peso del corpo.
9. Il pistone di un cilindro di una locomotiva ha una corsa di 76,5 cm. Si calcoli la velocità massima del cilindro se il volano compie 193 giri/min e il pistone si muove di moto armonico semplice.
10. Un corpo di 2,14 kg viene sospeso a una molla; se a tale corpo viene appeso un oggetto di 325 g si osserva l'ulteriore allungamento di 1,80 cm. Il secondo oggetto viene rimosso e il sistema viene posto in moto. Si determini il periodo delle oscillazioni.
11. In un porto sull'oceano per effetto delle maree il livello del mare oscilla armonicamente con periodo di 12,5 h. Si calcoli il tempo necessario perché, a partire dal livello massimo rispetto al valore medio di equilibrio, l'altezza della superficie dell'acqua si dimezzi.

ISBN 88-408-1254-7

12. Un corpo viene posto su un pistone in moto armonico semplice verticale. (a) Supponendo che il periodo delle oscillazioni valga 1.18 s, si determini il valore dell'elongazione del pistone nell'istante in cui il corpo si stacca dal pistone stesso. (b) Supponendo, ora, che l'ampiezza delle oscillazioni valga 5.12 cm, si determini il valore massimo della frequenza in corrispondenza del quale il corpo non si stacca dal pistone.

13. Un oscillatore è costituito da un corpo attaccato all'estremo libero di una molla di costante $k = 456$ N/m. A un certo istante la posizione, la velocità e l'accelerazione del corpo valgono rispettivamente $x = 0.112$ m, $v_x = -13.6$ m/s e $a_x = -123$ m/s^2. Si calcoli (a) la frequenza, (b) la massa del corpo e (c) l'ampiezza delle oscillazioni.

14. Due particelle si muovono di moto armonico alla stessa frequenza e con medesima ampiezza lungo la stessa retta. Le particelle si incontrano in moto in verso opposto quando la loro posizione è pari alla metà dell'ampiezza delle oscillazioni. Si calcoli la differenza di fase tra i due moti.

15. Tre vagoncini di massa 10 000 kg ciascuno sono tenuti a riposo su un piano inclinato di 26.0° rispetto al piano orizzontale mediante un cavo parallelo al piano inclinato (Figura 17.23). Subito prima che il primo dei tre vagoni si sganci si osserva che il cavo si è allungato di 14,2 cm. Si calcolino (a) la frequenza e (b) l'ampiezza delle oscillazioni del sistema costituito dai due vagoni restanti.

16. Un tubo a U viene riempito di un liquido omogeneo e il livello di una delle due superfici viene abbassato per mezzo di un pistone. Rimosso il pistone, il livello del liquido oscilla in entrambi i tubi. Si dimostri che il periodo vale $\pi\sqrt{2L/g}$ ove L è la lunghezza della porzione di tubo occupata dal liquido.

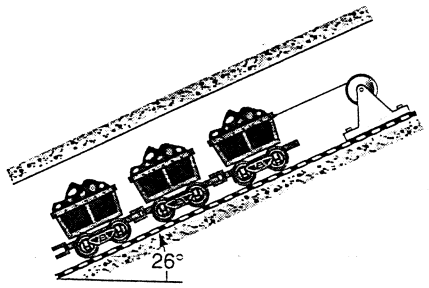


FIGURA 17.23 Esercizio 15.

17. Un cilindro di legno cavo ha un'estremità riempita di piombo; posto in acqua, l'oggetto galleggia come illustrato nella Figura 17.24. La porzione immersa misura 2,56 m. Si supponga di porre l'oggetto in oscillazione verticale. (a) Si dimostri che il moto è armonico semplice. (b) Si calcoli il periodo delle oscillazioni. Si trascuri l'effetto di smorzamento dovuto alla presenza del fluido.

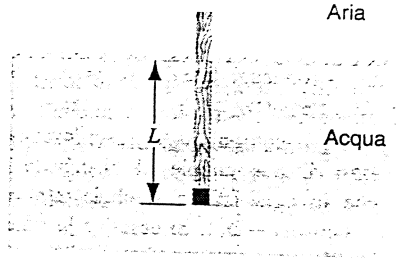


FIGURA 17.24 Esercizio 17.

17.4 Energia di una particella in moto armonico semplice

18. Un sistema corpo-molla oscilla con energia meccanica totale 1,18 J, ampiezza 9.84 cm e velocità massima 1,22 m/s. Si determini (a) la costante elastica della molla, (b) la massa del corpo e (c) la frequenza delle oscillazioni.

19. Una fionda allungata di 1.53 m scaglia un proiettile di massa 130 g alla velocità (11.2 km/s) di fuga dal pianeta Terra (ovviamente si tratta di un esperimento ideale). (a) Si calcoli la costante elastica della fionda supponendo che tutta l'energia potenziale venga convertita in energia cinetica. (b) Assumendo che una persona possa esercitare, in media, una forza di 220 N si calcoli il numero di persone necessario per armare la fionda.

20. (a) Si calcoli la frazione di energia cinetica e quella di energia potenziale nell'istante in cui un oscillatore armonico ha elongazione pari alla metà dell'ampiezza delle oscillazioni. (b) Si determini in corrispondenza di quale posizione l'energia cinetica è uguale all'energia potenziale.

21. Una particella di massa 12,3 kg si muove di moto armonico semplice di ampiezza 1.86 mm. L'accelerazione massima della particella vale 7,93 km/s^2. Si calcoli (a) il periodo delle oscillazioni, (b) la velocità massima della particella e (c) l'energia meccanica totale.

22. Un oggetto di 5,13 kg si muove su un piano liscio sotto l'azione di una molla di costante 9,88 N/cm. L'oggetto viene spostato di 53,5 cm dalla sua posizione di equilibrio e viene lanciato verso di essa con velocità iniziale 11,2 m/s. Si calcoli (a) la frequenza del moto risultante, (b) l'energia potenziale iniziale del sistema, (c) l'energia cinetica iniziale e (d) l'ampiezza delle oscillazioni.

23. Un oggetto di 1,26 kg connesso a una molla di costante elastica 5,38 N/m viene posto in oscillazione allungando la molla di 26,3 cm e fornendo al corpo la velocità iniziale di 3,72 m/s verso la posizione di equilibrio. Dai risultati del Problema 9 si calcoli (a) l'ampiezza e (b) la costante di fase del moto risultante.

24. Un corpo di massa 4,00 kg viene sospeso a una molla di costante elastica 5,00 N/cm. Un proiettile di massa 50,0 g, sparato verticalmente dal basso verso l'alto alla velocità di 150 m/s, si conficca nel corpo. (a) Si determini l'ampiezza del moto armonico semplice risultante. (b) Si calcoli la frazione di energia cinetica del proiettile che si converte in energia meccanica dell'oscillatore.

17.5 Applicazioni del moto armonico semplice

25. Si calcoli la lunghezza di un pendolo semplice di periodo 1,00 s supponendo che l'accelerazione di gravità abbia valore $g = 9.82$ m/s^2.

26. Un pendolo semplice di lunghezza 1.53 m compie 72,0 oscillazioni in 180 s. Si calcoli l'accelerazione di gravità.

27. Il periodo del pendolo semplice è dato dalla serie contenuta nell'Equazione 17.25. (a) Per quale valore di θ_m il secondo termine vale 0,02? (b) Si calcoli il valore del terzo termine in corrispondenza di questo valore dell'ampiezza.

28. Un pendolo semplice ha periodo 1.00 s all'equatore; si determini il suo periodo al polo sud. Si usino i dati di Figura 14.6.

29. La variazione dell'accelerazione di gravità sulla superficie

 ISBN 88-408-1254-7

terrestre fu osservata nel 1672 da Jean Richer il quale notò che il periodo di un pendolo trasportato da Parigi a Cayenne, nella Guiana Francese, ritardava di 2,5 min/giorno. Sapendo che $g = 9.81\ \text{m/s}^2$ a Parigi si calcoli il valore di g a Cayenne.

30. Si stabilisca con quale precisione si debba misurare il tempo impiegato da un pendolo di lunghezza 10 m per compiere 100 oscillazioni complete, al fine di misurare con precisione dello 0.1 % l'accelerazione di gravità. Si esprimano l'errore percentuale e quello assoluto in millisecondi. Si confrontino i risultati con quelli discussi nell'Esercizio 9 del Capitolo 14.

31. Un sfera da demolizioni ha massa di 2500 kg e oscilla dalla sommità di una gru come illustrato in Figura 17.25. Il cavo di sostegno è lungo 17,3 m. Assumendo che il sistema possa essere trattato come un pendolo semplice, si calcoli il periodo delle oscillazioni.

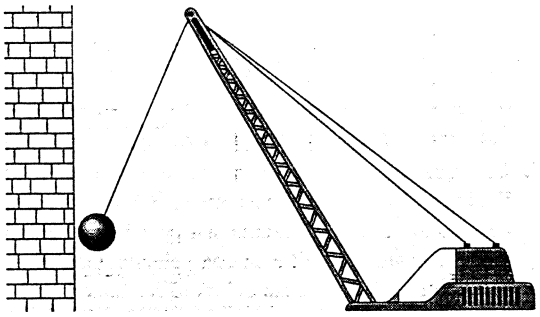


FIGURE 17.25. Esercizio 31.

32. Esiste un legame molto interessante tra il moto del sistema blocco-molla e quello del pendolo semplice. Si sospende un corpo di massa M a una molla verticale di costante k; nella posizione di equilibrio la molla risulta allungata di h. Si dimostri che le oscillazioni risultanti hanno la stessa frequenza delle oscillazioni di un pendolo semplice di lunghezza h, qualunque sia la massa m del pendolo (Figura 17.26).

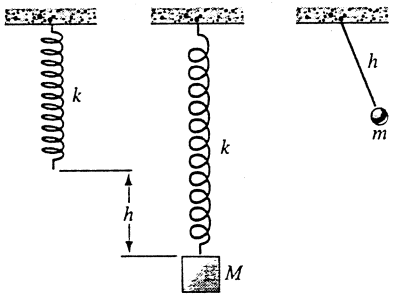


FIGURA 17.26 Esercizio 32.

33. Un anello di raggio 65,3 cm e massa 2,16 kg viene appeso a un chiodo orizzontale. (a) Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni. (b) Si calcoli la lunghezza del pendolo semplice equivalente.

34. Un ingegnere vuole misurare il momento d'inerzia di un corpo di forma irregolare rispetto a un asse passante per il suo centro di massa. Il corpo ha massa di 11,3 kg. L'oggetto viene sospeso mediante un filo passante per il centro di massa e diretto lungo l'asse rispetto al quale si vuole misurare il momento d'inerzia. La costante di torsione del filo vale $\kappa = 0.513\ \text{N} \cdot \text{m}$. L'ingegnere osserva che il pendolo impiega 48,7 s per compiere 20.0 cicli. Quanto vale il momento d'inerzia cercato?

35. Una sfera rigida di massa 95,2 kg e di raggio 14,8 cm viene appesa al soffitto mediante un filo; per ruotare la sfera di 0.850 rad è necessario esercitare un momento torcente di $0.192\ \text{N} \cdot \text{m}$. Si determini il periodo delle oscillazioni.

36. Un pendolo fisico è costituito da una sbarretta di un metro che ruota attorno a un punto fisso a distanza x dal punto medio della sbarretta. Si determini il valore di x sapendo che il pendolo oscilla con periodo 2,50 s.

37. Una sbarretta di un metro, sospesa in un estremo, oscilla con frequenza ν_0. Si determini con quale frequenza oscillerebbe la medesima sbarretta se venisse segato il terzo inferiore.

38. In Figura 17.27 è illustrato un pendolo fisico ottenuto con due sezioni di un tubo di raggio interno 10,2 cm e spessore 6.40 mm. (a) Si calcoli il periodo delle oscillazioni attorno al perno illustrato in figura. (b) Si consideri un nuovo pendolo fisico ottenuto ruotando la sezione inferiore di 90° attorno a un asse verticale passante per il suo centro. Si dimostri che il periodo di oscillazione diminuisce del 2 % circa.

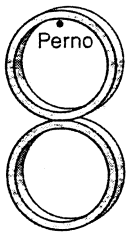


FIGURA 17.27 Esercizio 38.

39. Un pendolo il cui estremo superiore sia vincolato in modo che il pendolo possa oscillare in una qualsiasi direzione permette di ripetere il famoso esperimento condotto da Foucault nel 1851 a Parigi. Se il pendolo viene posto in oscillazione si osserverà la rotazione del piano di oscillazione, rispetto a una linea tracciata sul suolo, nonostante la tensione e la forza peso siano dirette lungo un medesimo piano verticale. (a) Si dimostri che questo effetto è dovuto alla non inerzialità del riferimento terrestre. (b) Si dimostri che un pendolo di Foucault alla latitudine θ ha periodo di rotazione $(24\text{h}) \sin\theta$. (c) Si spieghi in modo euristico il risultato alle latitudini estreme $\theta = 0^\circ$ (equatore) e $\theta = 90^\circ$ (poli).

17.6 Moto armonico semplice e moto circolare uniforme

40. Si tracci la traiettoria descritta da una particella in moto sul piano xy con leggi date da $x(t) = x_m \cos(\omega t - \pi/2)$ e $y(t) = 2x_m \cos(\omega t)$.

41. Il moto degli elettroni in un oscilloscopio è regolato, per mezzo di due coppie di placchette deflettrici, in modo che in ogni istante si abbia $x(t) = A\cos(\omega t)$ e $y(t) = A\cos(\omega t + \phi_y)$. Si descriva la traiettoria e se ne determini l'equazione cartesiana nei casi (a) $\phi_y = 0^\circ$, (b) $\phi_y = 30^\circ$, (c) $\phi_y = 90^\circ$.

ISBN 88-408-1254-7

42. La traiettoria di una particella di massa m è descritta dal raggio vettore $r = iA\cos(\omega t) - jA\cos(3\omega t)$. (a) Si disegni la traiettoria della particella. (b) Si calcoli la forza agente sulla particella. Si determini, inoltre, (c) l'energia potenziale e (d) l'energia totale in funzione del tempo. (e) Si dica se il moto è periodico e in caso affermativo se ne determini il periodo.

43. Se si proietta il moto che la Luna compie attorno alla Terra su un asse diametrale si ottiene un moto armonico semplice. Si calcoli la costante elastica effettiva k per questo moto.

17.7 Moto armonico smorzato

44. Si consideri il sistema di Figura 17.17 e si supponga che il blocco abbia massa 1,52 kg e la molla abbia costante elastica 8,13 N/m. Sia, inoltre, $f = -b(dx/dt)$, con $b = 227$ g/s, la forza d'attrito. Si supponga di spostare il corpo di 12,5 cm e di abbandonarlo al suo moto. (a) Si calcoli il tempo necessario perché l'ampiezza si riduca a un terzo del suo valore iniziale. (b) Si calcoli il numero di oscillazioni compiute in questo intervallo di tempo.

45. Si verifichi, calcolando esplicitamente le derivate della legge oraria, che la Funzione 17.39 è soluzione dell'Equazione 17.38 del moto armonico smorzato, purché la pulsazione ω' sia quella data dall'Espressione 17.40.

46. Un oscillatore armonico smorzato è costituito da una molla di costante 12,6 N/m e da un corpo di massa 1,91 kg su cui agisce la forza resistiva $F = -bv_x$. L'ampiezza iniziale delle oscillazioni vale 26,2 cm, ma si riduce a tre quarti di questo valore dopo quattro cicli completi. (a) Si calcoli il valore di b e (b) l'energia dissipata durante i primi quattro cicli.

17.8 Oscillazioni forzate e risonanza

47. Si considerino le oscillazioni forzate di un sistema corpo-molla smorzato. Si dimostri che in condizioni di risonanza (a) l'ampiezza vale $x_m = F_m/(b\omega)$ e (b) la velocità massima vale $v_m = F_m/b$.

48. Si verifichi per sostituzione che la Funzione 17.43 è una soluzione dell'Equazione 17.42.

49. Si verifichi che la Funzione 17.43 è la forma più generale della soluzione stazionaria dell'oscillatore forzato descritto dall'Equazione 17.42. Si ponga

$$x(t) = \frac{F_m}{G}\cos(\omega''' t - \beta),$$

e si dimostri che ω''' deve essere uguale a ω''.

50. (a) Si dimostri che la soluzione data dalla (17.39) dell'equazione del moto dell'oscillatore smorzato è anche una soluzione dell'Equazione 17.42 del moto dell'oscillatore forzato. (b) Si spieghi il significato fisico di questa soluzione.

51. Un'autovettura di massa 1000 kg trasporta un carico di massa 90 kg lungo una strada ondulata con cunette a distanza di 4,0 m l'una dall'altra. Alla velocità di 16 km/h l'automobile compie le oscillazioni di ampiezza massima. Si calcoli di quanto aumenta l'altezza dell'automobile se, a riposo, viene liberata dal suo carico.

52. Si determini la velocità dell'oscillatore forzato usando l'Espressione 17.43; in particolare si dimostri che la velocità massima vale

$$v_m = \frac{F_m}{[(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}}.$$

Le equazioni discusse nel Paragrafo 17.8 sono identiche a quelle che descrivono il funzionamento di un circuito elettrico formato da una resistenza R, un'induttanza L e una capacità C disposti in serie, sottoposto alla forza elettromotrice $V = V_m\cos(\omega'' t)$. Le costanti b, m, k ed F_m vanno sostituite con R, L, $1/C$ e V_m rispettivamente, mentre la parte di x e v è svolta rispettivamente dalla carica elettrica q e dalla corrente i. Nel caso dei circuiti elettrici la condizione di risonanza viene definita tramite il valore massimo della corrente i_m, che è l'analogo elettrico del valore massimo v_m della velocità.

17.9 Oscillazioni in un sistema di due corpi

53. Si consideri il sistema in Figura 17.21a con $k = 252$ N/m, $m_1 = 1{,}13$ kg ed $m_2 = 3{,}24$ kg. Si calcoli il periodo delle oscillazioni del sistema.

54. (a) Si calcoli la massa ridotta delle seguenti molecole biatomiche: O_2, HF e CO. Si esprima il risultato in unità di massa atomica ricordando che la massa dell'atomo di idrogeno vale 1,01 u. (b) È noto che la molecola HF vibra alla frequenza $\nu = 8{,}7 \cdot 10^{13}$ Hz. Si determini la costante elastica effettiva k per la forza d'interazione interatomica. Secondo l'esperienza comune con le molle macroscopiche, il valore trovato per k corrisponde a un molla debole?

55. Si dimostri che l'energia cinetica dell'oscillatore di Figura 17.21a vale $K = mv_x^2/2$ ove m rappresenta la massa ridotta e $v_x = v_{1x} - v_{2x}$ la velocità relativa. Può essere utile osservare che durante le oscillazioni la quantità di moto totale del sistema si conserva.

PROBLEMI

1. A temperatura ambiente all'interno dei solidi gli atomi vibrano con frequenze dell'ordine di 10,0 THz. Si immagini che gli atomi siano connessi l'uno agli altri con molle e si supponga che un singolo atomo di argento venga posto in oscillazione a questa frequenza mentre tutti gli altri sono a riposo. Si calcoli la costante elastica efficace. Si ricordi che una mole di argento ha massa pari a 108 g e contiene $6{,}02 \cdot 10^{23}$ atomi.

2. In Figura 17.28 è mostrata la foto di un'astronauta su un dispositivo per la misura della massa corporea progettato per effettuare tale misura su navicelle spaziali in assenza di gravità. Il dispositivo è null'altro che una sedia montata su molle: l'astronauta misura la frequenza delle sue oscillazioni e da questa deduce la sua massa. (a) Sia M la massa dell'astronauta ed m quella della porzione del dispositivo che oscilla assieme all'uomo; si dimostri che

$$M = \left(\frac{k}{4\pi^2}\right)T^2 - m,$$

ove T è il periodo delle oscillazioni e k la costante elasti-

 ISBN 88-408-1254-7

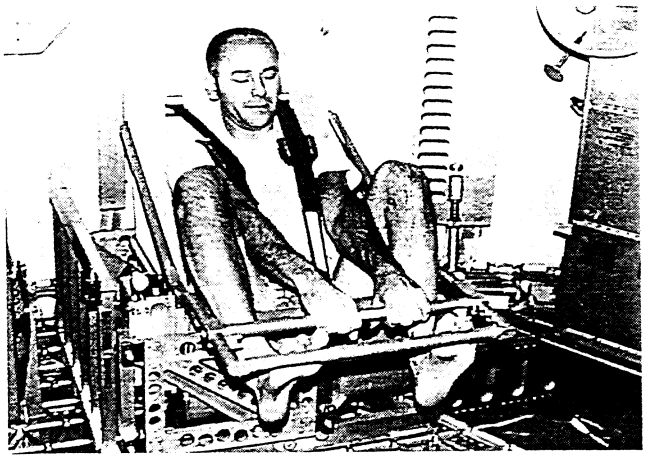


FIGURA 17.28 Problema 2.

ca. (b) Si calcoli m sapendo che $k = 605.6$ N/m e che a vuoto la sedia compie oscillazioni di periodo 0.90149 s. (c) Si calcoli la massa dell'astronauta sapendo che il periodo diventa 2.08832 s quando l'uomo monta sulla sedia.

3. Due blocchi, di massa $m = 1.22$ kg ed $M = 8.73$ kg rispettivamente, e una molla di costante $k = 344$ N/m sono disposti come in Figura 17.29 su un piano liscio. Il coefficiente di attrito statico tra i blocchi vale 0.42. Si trovi la massima ampiezza delle oscillazioni armoniche in corrispondenza delle quali i due corpi non scivolano l'uno rispetto all'altro.

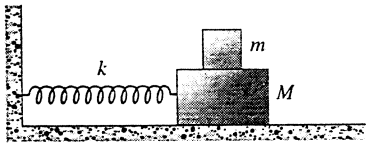


FIGURA 17.29 Problema 3.

4. In una molecola biatomica la forza interatomica può essere scritta come $F = -a/r^2 + b/r^3$ ove a e b sono costanti positive ed r è la distanza tra i due atomi. Si disegni il grafico di F in funzione di r. Si dimostri (a) che la distanza di equilibrio vale b/a e (b) che per piccole oscillazioni attorno all'equilibrio la costante elastica equivalente vale a^4/b^3. (c) Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni.

5. Due molle sono connesse, come illustrato in Figura 17.30, a un blocco di massa m libero di scivolare su un piano liscio. Si dimostri che la frequenza di oscillazione vale

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2},$$

ove ν_1 e ν_2 sono le frequenze alle quali oscillerebbe il corpo se collegato a una sola delle due molle. Si osserva che l'analogo elettrico di questo sistema è un circuito costituito da due condensatori in serie.

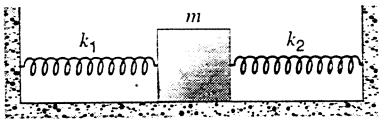


FIGURA 17.30 Problema 5.

6. Due molle sono connesse, come illustrato in Figura 17.31, a un blocco di massa m libero di scivolare su un piano liscio. Le due molle hanno costante elastica k_1 e k_2 rispettivamente. Si dimostri che la frequenza di oscillazione vale

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}},$$

ove ν_1 e ν_2 sono le frequenze alle quali oscillerebbe il corpo se collegato a una sola delle due molle. Si osserva che l'analogo elettrico di questo sistema è un circuito costituito da due condensatori in serie.

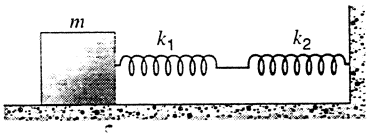


FIGURA 17.31 Problema 6.

7. Una molla ideale di costante 3,60 N/cm è tagliata in due parti uguali. (a) Quanto vale la costante elastica di ciascuna metà? (b) Le due metà vengono usate per sospendere un corpo come illustrato nella Figura 17.32. Il sistema vibra alla frequenza di 2,87 Hz. Si determini il valore di M.

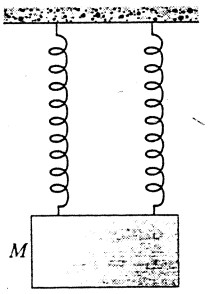


FIGURA 17.32 Problema 7.

8. Si dimostri che se la massa di una molla m_s, pur non essendo trascurabile, è piccola rispetto alla massa m del corpo ad essa sospeso, allora il periodo delle oscillazioni vale $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$. (*Suggerimento*: la condizione $m_s \ll m$ equivale a ipotizzare che l'allungamento della molla è proporzionale lungo la sua estensione.

9. Si dimostri che le relazioni generali che legano la posizione $x(0)$ e la velocità $v_x(0)$ all'ampiezza x_m e alla costante di fase ϕ dell'oscillatore armonico descritto dall'Equazione 17.6 sono le seguenti:

$$x_m = \sqrt{[x(0)]^2 + [v_x(0)/\omega]^2} \quad \text{e} \quad \tan\phi = -\frac{v_x(0)}{\omega x(0)}.$$

10. Si risolva rispetto a dt l'Equazione 17.16 che esprime la conservazione dell'energia e si integri il risultato. Si assuma $x = x_m$ all'istante $t = 0$ e si ricavi l'Equazione 17.6 con $\phi = 0$.

11. Un corpo di massa M a riposo su un piano liscio orizzontale è attaccato a un supporto fisso mediante una molla di costante elastica k. Un proiettile di massa m e velocità v colpisce il corpo, come illustrato nella Figura 17.33, e vi si conficca. Si determini l'ampiezza del moto armonico semplice risultante.

ISBN 88-408-1254-7

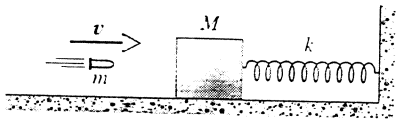


FIGURA 17.33 Problema 11.

12. (a) Si mostri che se $x = 0$ è la posizione di equilibrio della molla libera, in presenza del corpo la nuova posizione di equilibrio è individuata dalla coordinata $x = mg/k$ (Figura 17.34). (b) Si dimostri che l'equazione del moto del sistema è

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg,$$

e che la sua soluzione è $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi) + mg/k$, ove $\omega = \sqrt{k/m}$. (c) Si dimostri, quindi, che in presenza del campo gravitazionale uniforme la molla ha gli stessi valori di ω, v, a, v e T che ha in assenza di campo. L'unica differenza sta nella posizione di equilibrio che risulta spostata della quantità mg/k. (d) Si consideri l'energia meccanica del sistema $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2 + mg(h - x) = \text{cost}$, e si mostri che derivando l'equazione precedente rispetto al tempo si ritrova l'equazione del moto. (e) Si dimostri che, quando il corpo si muove dalla posizione $x = 0$ alla posizione di equilibrio, il decremento nell'energia potenziale gravitazionale contribuisce per metà all'aumento di energia cinetica e per metà all'aumento di energia potenziale elastica. (f) Si calcoli separatamente la variazione di energia potenziale elastica e di quella gravitazionale quando il corpo si sposta di x_m verso l'alto e verso il basso. Si osservi che in entrambi i casi la variazione di energia potenziale totale è la stessa e vale $\frac{1}{2}kx_m^2$. In accordo con i risultati (c) ed (f) si può concludere che nell'analisi di questo problema l'effetto del campo gravitazionale può essere ignorato purché si sposti la posizione di equilibrio da $x = 0$ a $x_0 = x - mg/k = 0$. La nuova funzione energia potenziale, $U(x_0) = kx_0^2/2 + \text{cost}$, ha la stessa forma parabolica dell'energia potenziale $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ dell'oscillatore in assenza di gravità.

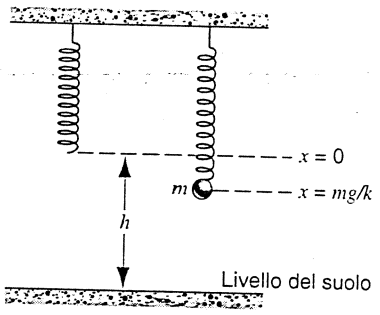


FIGURA 17.34 Problema 12.

13. Un cilindro pieno, sotto l'effetto di una molla ideale di costante elastica $k = 2.94$ N/m, può rotolare senza strisciare su una superficie orizzontale (Figura 17.35). Il sistema viene abbandonato al suo moto a partire dalla posizione iniziale in cui la molla risulta allungata di 23.9 cm. Si determini (a) l'energia cinetica associata al moto traslatorio e (b) l'energia cinetica associata al moto rotatorio negli istanti in cui il cilindro attraversa la posizione di equilibrio. (c) Si dimostri che il centro di massa del cilindro si

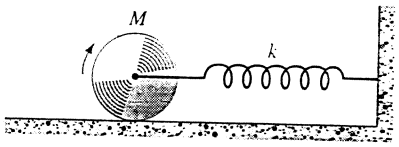


FIGURA 17.35 Problema 13.

muove di moto armonico semplice con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{3M/(2k)},$$

con M la massa del cilindro.

14. (a) Si dimostri che in un moto armonico semplice il valore medio dell'energia cinetica è uguale al valore medio dell'energia potenziale e che entrambi sono uguali a $\frac{1}{4}kx_m^2$ (la media va calcolata rispetto al tempo su un intero periodo). (b) Si dimostri, inoltre, che se la media viene calcolata sempre su un intero ciclo, ma rispetto alla posizione, allora il valor medio dell'energia cinetica vale $\frac{1}{3}kx_m^2$, mentre quello rispetto all'energia potenziale vale $\frac{1}{6}kx_m^2$. (c) Si spieghi la ragione fisica della differenza tra i risultati ottenuti ai punti (a) e (b).

15. Un pendolo fisico è costituito da un disco omogeneo di raggio $R = 14{,}4$ cm e massa $M = 563$ g che ruota attorno a un perno a distanza $d = 10{,}2$ cm (Figura 17.36). Si determini il periodo delle piccole oscillazioni.

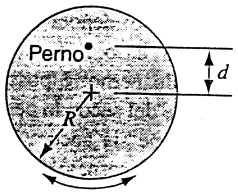


FIGURA 17.36 Problema 15.

16. Un pendolo fisico è costituito da un disco omogeneo di raggio 10,3 cm e massa 488 g sostenuto da una sbarretta sottile uniforme di massa 272 g e lunghezza 52,4 cm (Figura 17.37). (a) Si calcoli il momento d'inerzia del pendolo rispetto al perno. (b) Si calcoli la distanza tra il perno e il centro di massa del pendolo. (c) Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni.

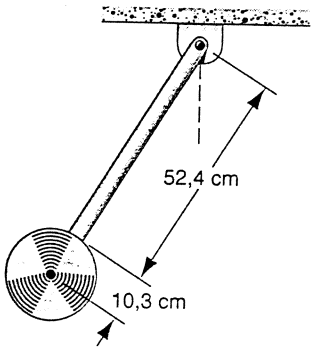


FIGURA 17.37 Problema 16.

17. Una sbarretta omogenea di lunghezza L e massa m è libera di ruotare attorno a un suo punto fisso a distanza d dal suo centro di massa. (a) Si determini il periodo delle piccole oscillazioni del pendolo e (b) si mostri che tale periodo è minimo quando $d = L/\sqrt{12} = 0.289L$.

 ISBN 88-408-1254-7

18. Una ruota è libera di ruotare attorno al suo asse e uno dei suoi raggi è attaccato a una molla, di costante k, a distanza r dall'asse (Figura 17.38). Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni di questo sistema supponendo che la ruota sia un anello di massa massa M e raggio R. Si discutano, in particolare, i casi $r = R$ ed $r = 0$.

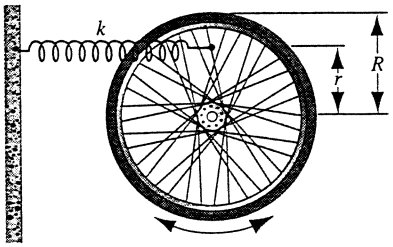


FIGURA 17.38 Problema 18.

19. Una particella viene abbandonata al suo moto a partire dal punto P della superficie interna di una semisfera cava di raggio R. (a) Supponendo che la superficie interna della sfera sia liscia, si dimostri che se P è vicino al fondo della sfera, allora il moto della particella è armonico semplice. (b) Si calcoli la lunghezza del pendolo semplice equivalente.

20. Un pendolo fisico può ruotare attorno a due diversi perni; uno è fisso, mentre l'altro può essere spostato come illustrato in Figura 17.39. Si denota con T il periodo del pendolo sospeso al perno fisso. Il pendolo viene poi capovolto e sospeso al secondo perno: è possibile determinare una particolare posizione del secondo perno in modo tale che il periodo di oscillazione sia ancora T. Detta L la distanza tra i due perni in questo caso, si dimostri che

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}.$$

Si osserva che con questo metodo è possibile misurare g senza conoscere il momento d'inerzia del pendolo.

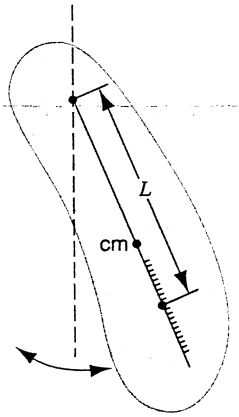


FIGURA 17.39 Problema 20.

21. Un disco di massa 2,50 kg e diametro 42,0 cm è sospeso per mezzo di una sbarretta leggera di lunghezza 76,0 cm (Figura 17.40). (a) Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni quando la molla di torsione illustrata in figura non è connessa alla sbarretta. (b) La molla viene applicata alla sbarretta in modo che la posizione d'equilibrio sia ancora verticale. Si calcoli il valore della costante di torsione della molla se il nuovo periodo è più piccolo del precedente di 500 ms.

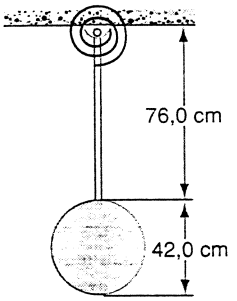


FIGURA 17.40 Problema 21.

22. Un pendolo semplice di massa m e lunghezza L è sospeso all'interno di un'autovettura che si muove a velocità costante v lungo una circonferenza di raggio R. Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni del pendolo in direzione radiale rispetto alla circonferenza descritta dall'automobile.

23. Si consideri una galassia in cui le stelle sono distribuite tutte in modo uniforme lungo un anello di raggio R, eccezion fatta per una sola stella di massa m che occupa il centro dell'anello; sia M la massa totale della galassia. (a) Si supponga che la stella centrale si sposti a distanza z dal piano dell'anello lungo l'asse di simmetria. Si dimostri che la forza di attrazione gravitazionale che l'anello esercita sulla stella è dato dalla relazione $F_z = GMmz/(R^2 + z^2)^{3/2}$. (b) Si assuma $z \ll R$ e si calcoli il periodo di oscillazione della stella se viene spostata di z e poi abbandonata al suo moto. (c) Si stimi la frequenza di oscillazione nel caso di una galassia di raggio e massa uguali a quelli della Via Lattea.

24. Si supponga che sul sistema illustrato in Figura 17.12 agisca orizzontalmente verso destra una forza impulsiva applicata al punto O (centro di oscillazione). Si assuma che il pendolo sia inizialmente a riposo. (a) Si dimostri che combinando il moto rotatorio e quello traslatorio l'accelerazione di una particella posta nel punto P è nulla. (b) Che cosa si può dire a proposito degli effetti di F in P? A causa di questo effetto il centro di oscillazione è detto anche centro di percussione.

25. Le sospensioni progettate per un'automobile di massa 2000 kg si contraggono di 10 cm per effetto del peso dell'autovettura. Inoltre l'ampiezza delle oscillazioni si riduce del 50 % durante un'oscillazione completa. Si stimino i valori di k e b per le molle e per il sistema di assorbimento degli urti di ciascuna ruota. Si assuma che ciascuna ruota sorregga il peso di 500 kg.

26. Gli oscillatori forzati non lineari non oscillano necessariamente alla frequenza della forzante. Si consideri l'oscillatore quartico (vedi Problema al calcolatore 2)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx^3 = F\cos(\omega_d t),$$

con m, k, F e ω_d costanti reali. Si dimostri che la funzione $x(t) = A\cos(\omega t)$ è soluzione di tale equazione se (1) $\omega = \omega_d/3$ e (2) $F = a\omega_d^3$ con a costante arbitraria.

27. (a) Si dimostri che, se nell'Equazione 17.46 $m_2 \to \infty$, allora $m \to m_1$. (b) Si dimostri che l'effetto di una parete

ISBN 88-408-1254-7

non infinita ($m_2 < \infty$) sulle oscillazioni della particella di massa m_1 è quello di ridurre il periodo rispetto al caso (a). (c) Si dimostri che nel caso $m_1 = m_2$ si ha una situazione analoga a quella che si avrebbe se la molla venisse tagliata in due, ossia le due particelle compiono oscillazioni indipendenti.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Si consideri un sistema costituito da due oggetti vincolati a muoversi lungo l'asse x. Il primo oggetto è attaccato a una molla con l'altro estremo fisso nell'origine, il secondo oggetto, invece, è legato al primo mediante una seconda molla. I due corpi hanno massa 0,10 kg e le due molle hanno costante elastica 1,0 N/m. (a) Si simuli numericamente il moto dei due corpi supponendo che all'istante iniziale il secondo oggetto venga spostato di 1,0 cm dalla sua posizione di equilibrio e poi abbandonato al suo moto. Si costruisca il grafico della legge oraria del moto dei due corpi. (b) Si ricorra alla trasformata di Fourier veloce, disponibile nei programmi per tabulazioni numeriche e diagrammature, per verificare che il moto ha due frequenze caratteristiche. Si determinino le due frequenze.
2. Un corpo di massa m si muove sotto l'azione di una forza la cui energia potenziale vale $U(x) = \frac{1}{4}kx^4$. Questo tipo di moto è detto *oscillatore quartico*. Si osserva che in questo sistema la frequenza di oscillazione dipende dall'ampiezza. Si assuma $m = 0,10$ kg e $k = 100$ N/m^3 e si simuli il moto del sistema per diverse ampiezze. Si discutano i risultati mediante la costruzione di alcuni grafici e si determini la relazione che lega la frequenza all'ampiezza.

CAPITOLO 18

FENOMENI ONDULATORI

In tutti i campi della fisica si incontrano fenomeni di natura ondulatoria; si pensi alle onde che si propagano sulla superficie libera dell'acqua, oppure alle onde sonore e a quelle luminose che, raccolte e analizzate da opportuni sistemi di ricezione quali sono le orecchie e gli occhi, costituiscono per l'uomo le principali fonti di informazione sull'ambiente che lo circonda. Un altro esempio importante è quello delle onde radio, il cui uso ha subito un impulso enorme durante il secolo scorso. Tutti i fenomeni ondulatori, qualunque sia la loro natura fisica, vengono descritti con i medesimi principi fisici e con lo stesso apparato matematico; per questa ragione tali fenomeni rappresentano un fattore unificante delle diverse branche della fisica.

In questo capitolo e nel successivo verranno introdotti e sviluppati i concetti fisici e il formalismo matematico che permette la descrizione dei fenomeni ondulatori; nella discussione si farà sempre riferimento a esempi di natura meccanica *soltanto perché le leggi della meccanica sono state, fino ad ora, il nostro oggetto di studio. In seguito si discuteranno le leggi che regolano altri fenomeni ondulatori come la propagazione della luce e di tutte le altre onde elettromagnetiche. Per semplicità lo studio verrà ristretto alle onde armoniche, ovvero alle onde che possono essere descritte in termini delle funzioni trigonometriche seno e coseno; la discussione, tuttavia, non perderà di generalità, perché tutti gli argomenti introdotti si potranno applicare anche a forme d'onda più complesse.*

18.1 ONDE MECCANICHE

I fenomeni ondulatori sono molto comuni nell'ambiente che ci circonda; siamo, infatti, costantemente investiti da onde sonore, o luminose o di altra natura, che vengono utilizzate per lo scambio di energia e di informazioni tra punti lontani.

Tutte le onde vengono descritte con lo stesso formalismo matematico; per questa ragione studiando in profondità un particolare tipo di onde si possono apprendere concetti importanti comuni a tutti i fenomeni ondulatori. In questo capitolo si discuteranno le *onde meccaniche*, tra le quali vanno ricordate le onde sonore e quelle che si propagano sulla superficie libera dei fluidi. In particolare si studierà quel particolare tipo di onda meccanica che si osserva quando si perturba lo stato di quiete di una corda tesa, per esempio una corda di chitarra.

Le onde meccaniche viaggiano in mezzi elastici e vengono prodotte perturbando un punto del mezzo; a causa delle proprietà elastiche la perturbazione iniziale si propaga in tutto il mezzo.

Dal punto di vista microscopico le forze responsabili della propagazione della perturbazione sono quelle interatomiche: ogni atomo, interagendo con i suoi vicini, trasmette loro il suo moto. Le particelle del mezzo, però, non subiscono uno spostamento netto nella direzione di propagazione dell'onda; il loro moto, infatti, si limita a oscillazioni avanti e indietro attorno alle rispettive posizioni di equilibrio.

Si pensi, per esempio, a una foglia che galleggia sulla superficie di un lago e che viene investita da un'onda: al suo passaggio la foglia si muoverà in su e in giù, ma, passata l'onda, si troverà a occupare una posizione molto vicina a quella iniziale. Analogamente le onde sonore si propagano nell'aria ma non causano uno spostamento netto delle mole-

 ISBN 88-408-1254-7

cole d'aria nella direzione di propagazione dell'onda. In definitiva le onde trasportano energia e quantità di moto da un punto a un altro senza che nessuna particella compia uno spostamento netto dalla posizione iniziale a una finale. Già nel XV secolo Leonardo da Vinci osservò che "sovente le onde, al contrario dell'acqua, si allontanano dal punto in cui sono state create e che similmente accade per le onde che il vento genera nei campi di grano: l'onda si propaga nonostante le spighe restino tutte al loro posto."

18.2 CLASSIFICAZIONE DELLE ONDE

I fenomeni ondulatori possono essere classificati in base alle caratteristiche fisiche dei fenomeni coinvolti, per esempio si può distinguere tra onde superficiali in un liquido, onde luminose e onde sonore. In questo paragrafo vengono discusse altre possibili classificazioni effettuate in base a proprietà intrinseche della propagazione ondulatoria.

1. *Direzione del moto delle particelle.* Le onde meccaniche possono essere classificate badando alla mutua relazione tra la direzione di propagazione dell'onda e la direzione lungo cui si svolge il moto locale delle particelle del mezzo. Un'onda si dirà *trasversale* se le particelle del mezzo si muovono lungo una direzione ortogonale a quella in cui si propaga l'onda. Un esempio di onda trasversale è quella che si propaga lungo una corda tesa posta in oscillazione; la perturbazione si propaga lungo la corda, ma i suoi costituenti elementari si muovono in direzione ortogonale (Figura 18.1a). Le onde luminose, ancorché non siano di natura meccanica, costituiscono un altro esempio importante di onde trasversali.

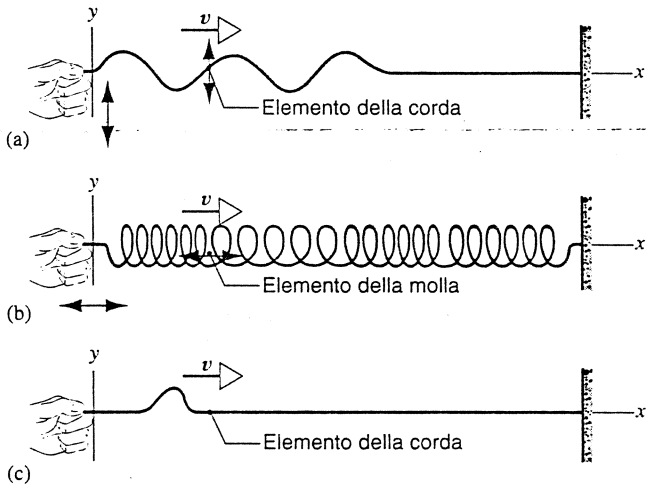


FIGURA 18.1 (a) Onda trasversale in una corda tesa. Ciascun elemento della corda vibra ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda. (b) Onda longitudinale in una molla. Ciascun elemento della molla vibra parallelamente alla direzione di propagazione dell'onda. (c) Singolo impulso trasversale in una corda tesa.

Un'onda meccanica si dice *longitudinale* se il moto degli elementi del mezzo avviene avanti e indietro lungo la direzione di propagazione dell'onda. Un esempio di onda longitudinale è quella che si propaga lungo una molla posta in oscillazione; le spire si muovono avanti e indietro nella stessa direzione in cui si propaga la perturbazione (Figura 18.1b). Le onde sonore sono un esempio importante di onde longitudinali; tali onde verranno studiate in dettaglio nel capitolo seguente.

Vi sono, infine, onde che non sono né puramente longitudinali né puramente trasversali, per esempio quelle che si propagano sulla superficie libera di un liquido; le particelle del liquido si muovono sia su e giù che avanti e indietro, descrivendo, così, una sorta di orbita ellittica.

2. *Dimensioni.* Una seconda maniera per classificare le onde consiste nell'osservare in quante dimensioni avviene la propagazione. Le onde che viaggiano lungo una corda tesa o lungo una molla (Figura 18.1) sono unidimensionali. Le onde che si osservano sulla superficie di un lago quando si lascia cadere in acqua un sasso, invece, sono bidimensionali (Figura 18.2). Le onde sonore e quelle luminose che si propagano radialmente a partire da una sorgente puntiforme, infine, sono tridimensionali.

3. *Periodicità.* Le onde possono essere classificate anche in base alla legge con cui le particelle del mezzo si muovono al trascorrere del tempo. Per esempio con un singolo colpetto trasversale inferto a una corda tesa si produce un *impulso* che viaggia lungo la corda (Figura 18.1c). Ciascuna particella della corda permane a riposo fino a quando viene raggiunta dall'impulso; dopo un moto di breve durata la particella ritornerà nel suo stato di riposo. Se, invece, l'estremo libero della corda viene fatto oscillare su e giù per un tempo lungo, allora lungo la corda si osserverà la propagazione di un *treno d'onde* (Figura 18.1a). Se il moto dell'estremo è periodico si produrrà un *treno d'onde periodico*, ovvero su ciascun elemento della corda verrà indotto un moto oscillatorio periodico. Il caso più semplice di onda periodica è quello dell'*onda armonica*, in cui tutte le particelle della corda subiscono un moto armonico semplice.

4. *Forma del fronte d'onda.* Si immagini di lanciare una pietra in un lago; sulla superficie dell'acqua si osserverà il moto di increspature circolari a partire dal punto in cui il sasso è entrato in acqua (Figura 18.2). Le molecole d'acqua che giacciono sulla stessa increspatura circolare hanno tutte lo stesso stato di moto; l'insieme di questi punti definisce una superficie che è detta *fronte d'onda*. Se il mezzo ha massa volumica uniforme i fronti risultano ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda; una linea ortogonale a un fronte in un suo punto è detta *raggio* e indica la direzione in cui viaggia l'onda.

I fronti d'onda possono avere le forme più disparate. Una sorgente puntiforme produce, sulla superficie di un liquido, onde bidimensionali dal fronte circolare che si irradiano verso l'esterno a partire dalla sorgente (Figura 18.2). D'altra parte se si lanciasse in acqua un bastoncino orizzontale, le onde prodotte nei pressi del punto medio del bastoncino avrebbero per fronte una linea retta e per raggi delle

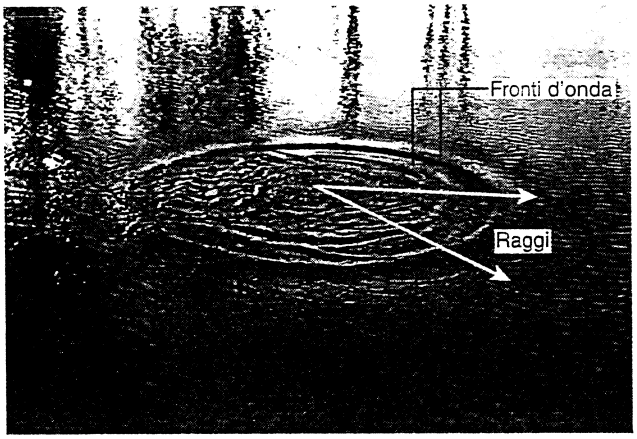


FIGURA 18.2 Onde sulla superficie di un lago. I fronti d'onda sono costituiti dalle increspature circolari della superficie; i raggi rappresentano la direzione di propagazione dell'onda.

rette ortogonali al bastoncino. L'analogo tridimensionale di una perturbazione che viaggia in una direzione sono *le onde piane*. In ogni istante tutti gli elementi su un piano ortogonale alla direzione di propagazione hanno lo stesso stato di moto; i fronti sono, quindi, piani e i raggi sono rette mutuamente parallele e ortogonali al fronte (Figura 18.3a). L'analogo tridimensionale delle onde circolari, invece, è costituito dalle *onde sferiche*. La perturbazione si propaga in tutte le direzioni a partire dalla sorgente puntiforme; i fronti sono superfici sferiche e i raggi si propagano nelle direzioni radiali a partire dalla sorgente (Figura 18.3b). A grande distanza dalla sorgente le onde sferiche hanno curvatura molto piccola e quindi piccole porzioni del fronte possono essere ben approssimate da superfici piane. Si osserva, per concludere, che gli esempi discussi non esauriscono l'insieme di tutti i possibili fronti d'onda.

18.3 ONDE IN MOTO

Un esempio semplice di onde meccaniche è costituito dalle onde trasversali che si propagano lungo una corda tesa. Si considera il caso di una corda «ideale», in cui l'onda, sia che si tratti di un treno sia che si tratti di un singolo impulso, conserva la sua forma durante la propagazione. Affinché ciò sia possibile è necessario supporre che siano trascurabili

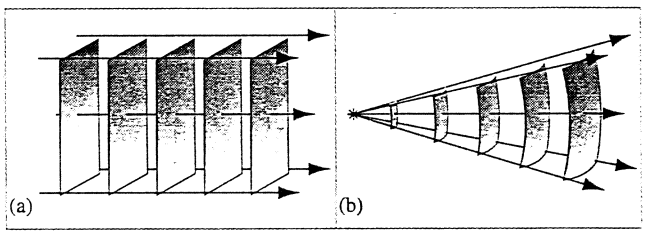


FIGURA 18.3 (a) Un'onda piana. I piani sono fronti d'onda separati da una lunghezza d'onda e le frecce rappresentano i raggi. (b) Un'onda sferica. I fronti sono superfici sferiche separate da una lunghezza d'onda e i raggi sono diretti radialmente.

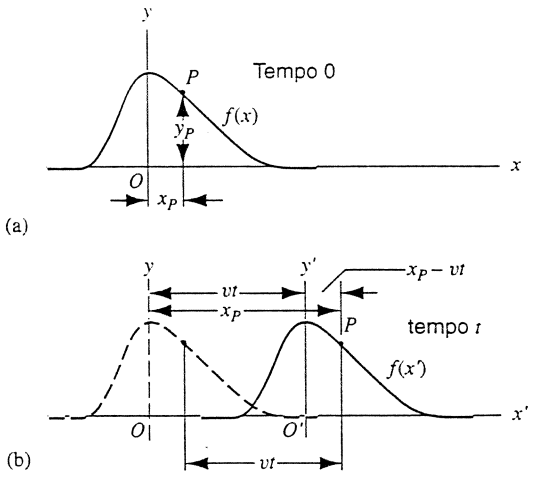


FIGURA 18.4 (a) Impulso trasversale illustrato come un'istantanea al tempo $t = 0$. Il punto P non rappresenta un elemento del mezzo, per esempio della corda, ma un punto corrispondente a un particolare valore della fase dell'impulso. (b) All'istante $t > 0$ l'impulso risulta avanzato della quantità vt nel verso positivo dell'asse x. Anche il punto P è avanzato di vt. La posizione del picco individua l'origine del riferimento x'.

tutti gli effetti dissipativi, come l'attrito della corda con l'ambiente che la circonda. Nella discussione che segue si assume che l'onda si propaghi lungo l'asse x e che le oscillazioni degli elementi della corda avvengano nel piano xy.

In Figura 18.4a è illustrata una forma d'onda del tutto arbitraria all'istante $t = 0$; si può supporre che la figura sia un'istantanea dell'impulso rappresentato nella Figura 18.1c. Se si denota con v la velocità alla quale l'impulso viaggia nel verso positivo dell'asse x, allora all'istante t, come illustrato nella Figura 18.4b, l'impulso avrà raggiunto la posizione vt. Si osservi che la forma d'onda a ogni istante è uguale a quella all'istante $t = 0$.

Si denota con la coordinata y lo scostamento del generico elemento della corda rispetto alla posizione di equilibrio; tale scostamento dipende sia dall'ascissa dell'elemento considerato sia dal tempo, ovvero $y = y(x, t)$.

La forma d'onda rappresentata nella Figura 18.4a può essere descritta mediante la funzione

$$y(x, 0) = f(x), \tag{18.1}$$

ove f è una funzione che descrive la forma dell'impulso all'istante $t = 0$. All'istante t la forma d'onda deve essere descritta dalla stessa funzione f, perché si è assunto che durante la propagazione la forma si mantenga uguale a se stessa. Nel riferimento di origine O solidale con l'impulso, allora, la forma d'onda è descritta dalla funzione $f(x')$, come illustrato nella Figura 18.4b. Dalla stessa figura si deduce che le due coordinate x e x' sono legate dalla relazione $x' = x - vt$. Allora all'istante t l'onda sarà descritta dalla funzione

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt). \tag{18.2}$$

In altri termini all'istante t la funzione $f(x - vt)$ (pensata come una funzione di x con il parametro t fissato) ha, ri-

 ISBN 88-408-1254-7

spetto al punto di ascissa vt. lo stesso grafico della funzione $f(x)$ rispetto all'origine O.

La descrizione completa dell'onda passa per la scelta della funzione f; nel seguito si considereranno onde armoniche, per le quali la funzione f assume la forma sinusoidale o cosinusoidale.

Le Equazioni 18.1 e 18.2. però, mostrano che si può ottenere un'onda usando una funzione $f(x)$ arbitraria, purché alla variabile indipendente x si sostituisca la combinazione $x - vt$. Per esempio alla funzione $f(x) = x^2$ si può associare l'onda $f(x - vt) = (x - vt)^2$. Un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse x, infine, deve dipendere da x e t soltanto tramite la combinazione $x - vt$: la funzione $x^2 - (vt)^2$, per esempio, non rappresenta un'onda.

Si vuole studiare, ora, il moto di un punto particolare della forma d'onda; per esempio si consideri il punto P di Figura 18.4. Dal momento che la forma dell'onda resta invariata, l'ordinata y_P del punto P non deve cambiare durante la propagazione. Dall'Equazione 18.2 segue che ciò accade se e soltanto se l'ascissa x_P del punto P cresce con il tempo in modo tale che la quantità $x_P - vt$ resti costante. In altri termini la quantità $x_P - vt$ deve avere lo stesso valore nei due casi illustrati nelle Figure 18.4a e 18.4b. Questo argomento conserva la sua validità per un qualsiasi punto della forma d'onda e per ogni istante; in altre parole un qualsiasi punto della forma d'onda ha ascissa x tale che

$$x - vt = \text{costante}. \tag{18.3}$$

A conferma che l'Equazione 18.3 caratterizza il moto di un qualsiasi punto della forma d'onda è sufficiente calcolare la derivata prima e osservare che

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{dx}{dt} = v. \tag{18.4}$$

Un particolare punto della forma d'onda viene detto anche una *fase* dell'onda; per questa ragione la velocità dx/dt è detta *velocità di fase*. Si assume che v sia una costante positiva indipendente da tutte le altre grandezze che caratterizzano l'onda, ma eventualmente dipendente dalle proprietà fisiche del mezzo di trasmissione.

Nel caso in cui l'onda si propaghi nel verso negativo dell'asse x la descrizione matematica procede in modo analogo sostituendo, però, v con $-v$. Si ottiene, quindi,

$$y(x, t) = f(x + vt), \tag{18.5}$$

con $f(x)$ che rappresenta anche questa volta la forma d'onda all'istante $t = 0$. Sostituendo $x + vt$ a x nella funzione $f(x)$ si ottiene un'onda che in Figura 18.4 si muoverebbe verso sinistra. Il moto di un punto della forma d'onda è caratterizzato dall'equazione $x + vt =$ costante e, in analogia con l'Equazione 18.4, l'equazione $dx/dt = -v$ indica che in questo caso la velocità di fase è negativa.

La funzione $y(x, t)$ contiene tutte le informazioni relative alla forma dell'onda e al suo moto. A un particolare istante t_1, la funzione $y(x, t_1)$ è una funzione della sola variabile x che descrive la forma della corda all'istante considerato; tale funzione può essere pensata come una fotografia «istantanea»



FIGURA 18.5 A causa del passaggio dell'impulso di Figura 18.4, un osservatore fisso in un punto dell'asse x misura, in funzione del tempo, lo scostamento riportato in figura. La forma della funzione appare simile a quella dell'impulso, ma invertita; nei primi istanti dell'osservazione, infatti, l'osservatore viene raggiunto dalla porzione più bassa dell'impulso, mentre il picco lo raggiunge solo successivamente.

dell'onda. Se si vuole studiare, invece, il moto di un elemento particolare della corda in funzione del tempo, si dovrà considerare la sua ascissa x_1 e la funzione $y(x_1, t)$ che ne dà l'ordinata in funzione del tempo. In Figura 18.5 è illustrato il moto di un particolare elemento della corda in funzione del tempo, quando viene investito dall'impulso di Figura 18.4 in moto lungo la corda nel verso positivo dell'asse x. Ai primi istanti (t circa zero), l'elemento è in quiete; con il passare del tempo l'elemento inizierà a muoversi gradualmente fino a raggiungere il suo scostamento massimo in corrispondenza del passaggio del picco dell'impulso. Dopo il passaggio del picco lo scostamento dell'elemento della corda decresce rapidamente a zero.

Onde sinusoidali

La discussione precedente ha valore del tutto generale, prescinde dalla particolare scelta della forma d'onda f, e vale tanto per le onde trasversali quanto per quelle longitudinali. D'altro canto in fisica risultano di notevole importanza le onde trasversali armoniche in cui la forma d'onda è sinusoidale. Si supponga che all'istante $t = 0$ sulla corda si instauri un treno d'onda sinusoidale come quello illustrato in Figura 18.6 e descritto dalla funzione

$$y(x, 0) = y_m \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right). \tag{18.6}$$

Lo scostamento massimo y_m degli elementi della corda è detto *ampiezza* dell'onda. Il valore dello scostamento y è lo stesso per gli elementi di ascissa x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ e così via di seguito. La quantità λ si chiama *lunghezza d'onda* e indica la distanza tra elementi successivi della corda che hanno la stessa fase. Se l'onda si propaga con velocità di fase v nel verso positivo dell'asse x si scrive

$$y(x, t) = y_m \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]. \tag{18.7}$$

Si osservi che la Funzione 18.7 ha la forma $f(x - vt)$ richiesta dall'Equazione 18.2.

Il *periodo* T dell'onda è definito come il tempo che un generico elemento della corda impiega per compiere un'oscillazione completa del suo moto trasversale. Durante il

ISBN 88-408-1254-7

tempo T l'onda percorre la distanza Tv che deve corrispondere esattamente a una lunghezza d'onda, ovvero

$$\lambda = vT. \tag{18.8}$$

L'inverso del periodo è chiamato *frequenza* e viene denotato con la lettera greca ν; si ha quindi $\nu = 1/T$. La frequenza si misura in cicli al secondo ovvero in Hertz (Hz). Le nozioni di periodo e frequenza sono state introdotte e discusse già nel Capitolo 17.

Inserendo l'Equazione 18.8 nella 18.7 si ottiene una forma equivalente dell'espressione che descrive l'onda sinusoidale:

$$y(x, t) = y_m \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]. \tag{18.9}$$

Da questa espressione è particolarmente chiaro che a un certo istante t lo scostamento y assume lo stesso valore per gli elementi della corda di ascissa x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ e così via di seguito; inoltre si osserva che per un particolare elemento di ascissa x, lo scostamento assume lo stesso valore negli istanti t, $t + T$, $t + 2T$ e così via.

L'Equazione 18.9 può essere scritta in forma più compatta se si introducono il *numero d'onda angolare* k e la *pulsazione* (o *frequenza angolare*) ω, che sono definiti come segue

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{18.10}$$

Il numero d'onda angolare k, così come la pulsazione ω, è una grandezza di natura angolare e quindi la sua unità di misura contiene l'unità radiante. Più precisamente, per k e per ω si usano rispettivamente le unità di misura rad/m e rad/s. Introducendo queste grandezze, l'espressione dell'onda sinusoidale in moto nel verso positivo dell'asse x (verso destra in Figura 18.6) assume la forma semplice

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t). \tag{18.11}$$

L'espressione dell'onda sinusoidale in moto nel verso negativo dell'asse x (verso sinistra in Figura 18.6) assume, invece, la forma

$$y(x, t) = y_m \sin(kx + \omega t). \tag{18.12}$$

Dal confronto delle Equazioni 18.8 e 18.10 si deduce che la velocità di fase v dell'onda, che talvolta viene chiamata semplicemente velocità dell'onda, è legata alle altre grandezze mediante le espressioni

$$v = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \tag{18.13}$$

Velocità trasversale di una particella

Il moto delle particelle investite da un'onda trasversale come quella illustrata nella Figura 18.6 si svolge in direzione parallela all'asse y. La velocità di fase dell'onda descrive la velocità alla quale si propaga il segnale, ma è *diversa* dalla velocità alla quale si muovono le particelle investite dal segnale.

Al fine di calcolare la velocità degli elementi della corda è necessario studiare la variazione in funzione del tempo

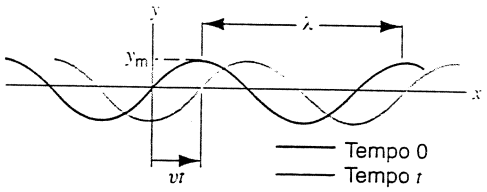


FIGURA 18.6 All'istante $t = 0$ (curva scura) la corda ha profilo sinusoidale $y = y_m \sin(2\pi x/\lambda)$. All'istante $t > 0$ (curva chiara) il profilo della corda risulta traslato verso destra della quantità $x = vt$ ed è descritto dalla funzione $y = y_m \sin[2\pi(x - vt)/\lambda]$.

dell'ordinata y di tali elementi. Focalizziamo la nostra attenzione su un particolare elemento della corda individuato dall'ascissa x. Dal punto di vista matematico bisogna calcolare la derivata della funzione del tempo y mantenendo costante il parametro x; questa operazione si chiama *derivata parziale* della funzione $y(x, t)$ rispetto alla variabile t e si indica con la simbologia $\partial y/\partial t$. La velocità dell'elemento sarà una funzione del tempo t e della sua ascissa x, motivo per cui viene indicata con il simbolo $u_y(x, t)$; nel caso dell'onda sinusoidale descritta dall'Equazione 18.11 si ha

$$u_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}[y_m \sin(kx - \omega t)] = \\ = -y_m\omega \cos(kx - \omega t). \tag{18.14}$$

L'Equazione 18.14 stabilisce che la velocità trasversale degli elementi della corda varia tra $-y_m\omega$ e $y_m\omega$.

In modo analogo si può determinare l'accelerazione degli elementi della corda in funzione della loro ascissa x e del tempo t; si ha

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = -y_m\omega^2 \sin(kx - \omega t) = \\ = -\omega^2 y. \tag{18.15}$$

L'Equazione 18.15 ha la stessa forma dell'Equazione 17.5: l'accelerazione trasversale degli elementi della corda è proporzionale al loro scostamento ma ha verso opposto. Si può quindi concludere che per effetto del passaggio di un'onda trasversale armonica gli elementi della corda sono posti in moto armonico semplice.

Si vogliono discutere in maggior dettaglio, infine, i concetti di velocità di fase v dell'onda e di velocità trasversale u_y degli elementi della corda. La velocità v descrive una proprietà che è comune all'intera onda: tutti i punti dell'onda si muovono nello stesso verso e con la medesima velocità v. La velocità trasversale u_y degli elementi della corda, invece, dipende dall'ascissa dell'elemento considerato e dal tempo. A un certo istante vi sono elementi della corda che hanno velocità nulla ed elementi che si muovono con la massima velocità possibile $y_m\omega$. A un istante diverso i ruoli possono essersi addirittura scambiati. Si vuole osservare, inoltre, che, come si mostrerà nel paragrafo seguente, la velocità di fase dipende dalle proprietà fisiche del mezzo di trasmissione, ma non dagli altri parametri dell'onda. La velocità trasversale degli elementi del mezzo, invece, dipende dalle proprietà dell'onda come l'ampiezza e la frequenza (si veda l'Equazione 18.14), ma non dalle caratteristiche fisiche del mezzo.

 ISBN 88-408-1254-7

Fase e costante di fase

Le onde descritte dalle Equazioni 18.11 e 18.12 sono tali che l'elemento di ascissa $x = 0$ abbia scostamento nullo all'istante $t = 0$; in casi particolari può accadere che ciò sia vero, ma non sempre. L'espressione più generale per un'onda trasversale sinusoidale va quindi scritta nel modo seguente

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi). \qquad (18.16)$$

La quantità $kx - \omega t - \phi$ che appare come argomento della funzione seno è detta *fase* dell'onda. Due onde che hanno la medesima fase, oppure tali che le loro fasi differiscano per un multiplo intero di 2π, sono dette *in fase*; due onde in fase inducono esattamente lo stesso moto sugli elementi del mezzo di trasmissione.

L'angolo ϕ è detto *costante di fase*; variando tale parametro non si modifica la forma dell'onda, ma si trasla l'onda stessa in avanti o indietro sia nello spazio che nel tempo. Per comprendere meglio questo aspetto è utile scrivere l'Equazione 18.16 in due forme equivalenti:

$$y(x, t) = y_m \sin\left[k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right] \qquad (18.17a)$$

e

$$y(x, t) = y_m \sin\left[kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right]. \qquad (18.17b)$$

In Figura 18.7a è riportata un'istantanea scattata all'istante t delle due onde rappresentate dalle Equazioni 18.11 (in cui $\phi = 0$), e 18.16. Si osservi che un punto particolare descritto dall'Equazione 18.17a, per esempio un picco, precede di ϕ/k il punto corrispondente dell'onda descritta dall'Equazione 18.11.

In modo del tutto analogo, se si volesse disegnare in funzione del tempo la posizione dell'elemento di ascissa x nei due casi descritti dalle Equazioni 18.11 e 18.16, si otterrebbe il grafico riportato nella Figura 18.7b. L'onda descritta dall'Equazione 18.17b è in anticipo rispetto a quella con $\phi = 0$ di un intervallo temporale ϕ/ω.

Quando la costante di fase è positiva l'onda corrispondente è avanti all'onda con $\phi = 0$; questo è il motivo per cui la costante di fase è stata introdotta con il segno meno nell'Equazione 18.16. Quando un'onda si trova avanti a un'altra onda si dice che la «precede» o che «è in anticipo»; in caso contrario (costante di fase negativa) si dice che la «segue» o che «è in ritardo».

Fissando l'attenzione su un elemento particolare della corda, per esempio quello di ascissa x_1, il suo scostamento può essere scritto nella forma

$$y(t) = -y_m \sin(\omega t + \phi'),$$

ove si è introdotta la nuova costante di fase $\phi' = \phi - kx_1$. L'espressione precedente è del tutto simile all'Equazione 17.6; gli elementi della corda si muovono, quindi, di moto armonico semplice per effetto della propagazione del treno d'onda sinusoidale.

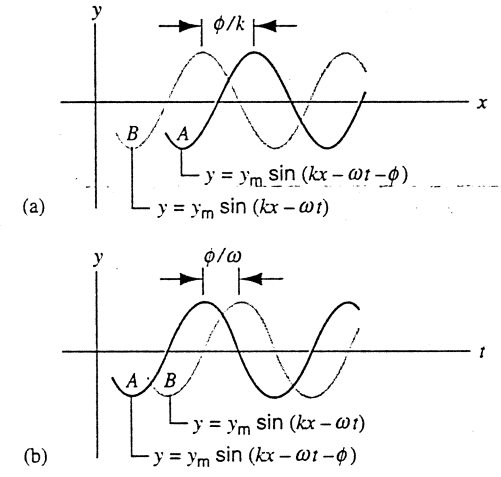


FIGURA 18.7 (a) Istantanea di due onde sinusoidali che avanzano nel verso positivo dell'asse x. L'onda A ha costante di fase ϕ, mentre l'onda B ha costante di fase 0. L'onda A precede l'onda B di ϕ/k. (b) Andamento temporale del moto di uno stesso punto per effetto delle due onde in (a). L'onda A è in anticipo di ϕ/ω sull'onda B. Si noti che, sotto l'ipotesi che l'onda avanzi nel verso positivo dell'asse x, nel grafico di y in funzione di t «avanti a» significa «alla sinistra di», mentre nel grafico di y in funzione di x «avanti a» significa «alla destra di».

PROBLEMA SVOLTO 18.1 Un'onda trasversale sinusoidale viene generata a un capo di una lunga corda orizzontale per mezzo di una sbarretta che compie oscillazioni verticali per uno scostamento totale di 1,30 cm. Il moto della sbarretta è continuo e viene ripetuto 125 volte al secondo. (a) Supponendo che picchi consecutivi distino tra loro 15,6 cm, si calcoli l'ampiezza, la frequenza, la velocità di fase e la lunghezza d'onda. (b) Si scriva la funzione che descrive l'onda supponendo che la propagazione avvenga nel verso positivo dell'asse x e che all'istante $t = 0$ l'elemento di ascissa $x = 0$ si trovi nella posizione di equilibrio $y = 0$ e abbia velocità diretta verso il basso.

Soluzione (a) Dal momento che la sbarretta compie escursioni di 1,30 cm, il capo libero della corda si muoverà di una lunghezza $(\frac{1}{2})(1{,}30\text{ cm}) = 0{,}65$ cm in basso e in alto rispetto alla posizione di equilibrio; quindi l'ampiezza dell'onda sarà $y_m = 0{,}65$ cm.

La sbarretta ripete il suo moto 125 volte in un secondo, quindi l'onda avrà frequenza $\nu = 125$ Hz.

La distanza tra due picchi successivi, come illustrato nella Figura 18.6, è null'altro che la lunghezza d'onda, che vale quindi $\lambda = 15{,}6\text{ cm} = 0{,}156$ m. La velocità di fase, infine, è data dall'Equazione 18.13:

$$v = \lambda\nu = (0{,}156\text{ m})(125\text{ s}^{-1}) = 19{,}5\text{ m/s}.$$

(b) L'espressione generale di un'onda sinusoidale trasversale che viaggia nel verso positivo dell'asse x è data dall'Equazione 18.16:

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi).$$

Imponendo la condizione iniziale $y = 0$ e $\partial y/\partial t < 0$ per $x = 0$ e $t = 0$ si ha

$$y_m \sin(-\phi) = 0 \quad \text{e} \quad -y_m\omega\cos(-\phi) < 0,$$

da cui $\phi = 0$ (a meno di costanti additive multiple di 2π). L'onda è descritta dalla funzione

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t),$$

e, introducendo i valori appena calcolati,

$$y_m = 0{,}65 \text{ cm},$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0{,}156 \text{ m}} = 40{,}3 \text{ rad/m},$$
$$\omega = vk = (19{,}5 \text{ m/s})(40{,}3 \text{ rad/m}) = 786 \text{ rad/s},$$

si ottiene

$$y(x.t) = (0{,}65 \text{ cm}) \sin[(40{,}3 \text{ rad/m})x - (786 \text{ rad/s})t].$$

PROBLEMA SVOLTO 18.2 Per effetto dell'onda studiata nel Problema svolto 18.1 gli elementi della corda si muovono ortogonalmente alla direzione di propagazione dell'onda stessa. (a) Si calcoli la velocità e l'accelerazione dell'elemento P della corda di ascissa $x_P = 0{,}245$ m. (b) Si valuti lo scostamento, la velocità e l'accelerazione di P all'istante $t = 15{,}0$ ms.

Soluzione (a) Dall'Equazione 18.14 e dai risultati del Problema svolto 18.1 si ottiene

$$u_y(x_P, t) = -(0{,}65 \text{ cm})(786 \text{ rad/s}) \cdot$$
$$\cdot \cos[(40,3 \text{ rad/m})(0{,}245 \text{ m}) - (786 \text{ rad/s})t] =$$
$$= -(511 \text{ cm/s}) \cos[9{,}87 \text{ rad} - (786 \text{ rad/s})t].$$

In modo analogo mediante l'Equazione 18.15 si può calcolare il valore massimo dell'accelerazione $\omega^2 y_m = 4{,}02 \cdot 10^5$ cm/s^2 e quindi

$$a_y(x_P, t) = -(4{,}02 \cdot 10^5 \text{ cm/s}^2) \sin[9{,}87 \text{ rad} - (786 \text{ rad/s})t].$$

(b) Valutando le espressioni appena determinate, all'istante $t = 15{,}0$ ms si ha

$$y = -0{,}61 \text{ cm}, \quad u_y = +173 \text{ cm/s}, \quad a_y = +3{,}8 \cdot 10^5 \text{ cm/s}^2.$$

L'elemento, quindi, è vicino al suo massimo scostamento negativo, si muove in direzione positiva (si allontana dal massimo) e accelera nella direzione positiva (la sua velocità aumenta in modulo quando l'elemento si muove verso la posizione di equilibrio).

18.4 VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE LUNGO UNA CORDA TESA

Nei paragrafi precedenti abbiamo ottenuto la forma generale di un'onda trasversale sinusoidale (Equazione 18.16) e mostrato che la velocità di fase è legata alle altre grandezze che caratterizzano l'onda tramite le uguaglianze $v = \lambda\nu = \omega/k$. Queste equazioni, però, non costituiscono una definizione della velocità di fase, ma si limitano a mostrare come la frequenza possa essere messa in relazione con la lunghezza d'onda per mezzo della costante v detta velocità di fase.

Per determinare la velocità di fase dell'onda è necessario conoscere le proprietà meccaniche del mezzo di trasmissione. In questo paragrafo si ricava la velocità di fase nel caso della propagazione lungo una corda tesa facendo uso delle equazioni di Newton. In casi più complicati, come la propagazione delle onde sonore nei gas, si può procedere in modo analogo.

Si assume quindi che la velocità di fase dipenda dalle proprietà del mezzo di trasmissione e non dalla frequenza e dalla lunghezza d'onda. Nei casi in cui ciò non è vero si dice che il mezzo è *dispersivo*; questi aspetti della propagazione ondosa verranno discussi più avanti in questo paragrafo. Ogni elemento della corda esercita sugli elementi vicini una forza pari alla tensione della corda stessa; quanto maggiore è la tensione, tanto più rapidamente la perturbazione si propagherà lungo la corda. Ci si aspetta, quindi, che la velocità di fase cresca con la tensione.

Per quanto riguarda, invece, l'inerzia degli elementi della corda, il suo effetto sarà quello di rallentare la propagazione della perturbazione. A parità di tensione, quindi, la velocità di fase sarà inferiore in corde con maggiore *massa lineica* (o *densità lineare*) μ, che individua la massa posseduta da un'unità di lunghezza della corda considerata. La massa di un elemento infinitesimo di corda può essere espresso in termini di μ, che nel caso di corde omogenee è uguale alla massa totale divisa per la lunghezza. Sulla base di questi argomenti del tutto generali ci si aspetta che

$$v \propto \frac{F^a}{\mu^b},$$

con a e b esponenti positivi da determinare.

I due esponenti incogniti possono essere ottenuti in base a una semplice analisi dimensionale; richiedendo, infatti, che il secondo membro abbia la dimensione fisica di una velocità, si deduce (vedi l'Esercizio 5) che $a = b = \frac{1}{2}$. Si ha, quindi $v \propto \sqrt{F/\mu}$ che, introducendo un'opportuna costante di proporzionalità, diventa $v = C\sqrt{F/\mu}$. Come si vedrà in seguito, applicando la legge di Newton si dimostra che $C = 1$.

Analisi meccanica

Si vuole determinare la velocità di fase di un impulso che viaggia su una corda tesa per mezzo di un'analisi meccanica che si basi sulle leggi di Newton. In Figura 18.8 è riportata un'istantanea di un impulso in moto da sinistra verso destra con velocità v. In modo alternativo la propagazione può essere descritta immaginando di tirare verso sinistra la corda in modo da lasciare fissa la forma dell'impulso, per esempio facendo scorrere la corda attraverso una guida liscia di forma opportuna. Dal punto di vista matematico questa descrizione corrisponde a considerare come riferimento del moto un sistema solidale con l'impulso piuttosto che un riferimento solidale con le pareti cui è vincolata la corda. In questo sistema di riferimento è possibile applicare senza problemi le leggi di Newton perché si tratta di un riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento terrestre, che ai fini della descrizione del moto della corda può essere considerato inerziale. Come si evincerà dalla discussione seguente, in questo nuovo sistema di riferimento lo studio del moto della corda è più semplice.

Si consideri la piccola porzione δl dell'impulso illustrata in Figura 18.8. Questa porzione di corda ha approssimativamente la forma di un arco di circonferenza di raggio R e ha massa pari a $\delta m = \mu\,\delta l$, ove μ è la massa lineica della corda. La tensione agisce tirando gli estremi dell'archetto in direzione tangenziale; le componenti orizzontali di F si eli-

 ISBN 88-408-1254-7

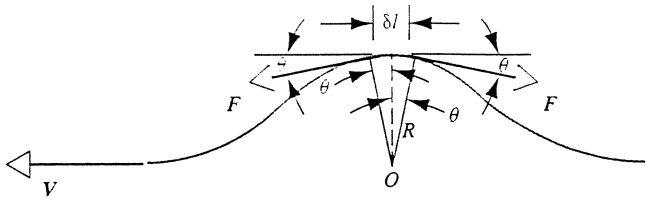


FIGURA 18.8 Un impulso che si muove verso destra su una corda stazionaria è equivalente a un impulso in posizione fissa su una corda che si muove verso sinistra. In figura sono illustrate le forze di tensione su un tratto δl dell'impulso «fisso».

dono mentre quelle verticali valgono entrambe $F \sin\theta$. In conclusione sull'archetto considerato agisce la forza totale $F_y = 2F \sin\theta \approx 2F\theta$, ove l'ultima uguaglianza si giustifica osservando che l'angolo θ è molto piccolo. Dalla Figura 18.8 si ha $2\theta = \delta l/R$ e quindi

$$F_y = 2F \sin\theta \approx 2F\theta = F\frac{\delta l}{R}. \qquad (18.18)$$

La forza appena calcolata giustifica l'accelerazione centripeta degli elementi della corda di modulo v^2/R diretta verso O. Si osservi che la velocità dell'elemento di massa considerato è orizzontale, diretta verso sinistra e di modulo uguale a v. Applicando la seconda legge di Newton all'elemento δm si ha $\sum F_y = \delta m\, a_y$; introducendo, ora, l'Equazione 18.18 si ottiene

$$F\frac{\delta l}{R} = \delta m\, a_y = \delta m\frac{v^2}{R} = \mu\,\delta l\frac{v^2}{R},$$

ove si è posto $a_y = v^2/R$ per l'accelerazione centripeta e $\delta m = \mu\,\delta l$ per la massa dell'elemento. Uguagliando il primo e l'ultimo membro si ha

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}, \qquad (18.19)$$

da cui si desume che la costante C introdotta in precedenza vale 1.

Il risultato appena ottenuto vale sotto l'ipotesi che le oscillazioni della corda attorno alla posizione di equilibrio siano piccole. In caso contrario, infatti, l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$ non sarebbe stata giustificata e non sarebbe stato lecito scegliere la tensione nella corda in presenza dell'impulso uguale alla tensione F nella corda non perturbata. L'approssimazione di piccola oscillazione non è una grave limitazione perché risulta largamente applicabile nella maggior parte dei casi di interesse pratico.

La propagazione di un'onda periodica in un mezzo di trasmissione è dovuta, di solito, alla presenza di una perturbazione periodica in un punto del mezzo. L'onda risultante, quindi, ha la stessa frequenza della perturbazione esterna. D'altro canto la velocità di fase dell'onda è determinata dalle proprietà fisiche del mezzo e quindi la lunghezza d'onda è univocamente determinata dalla relazione 18.13, ovvero $\lambda = v/\nu$. Un problema interessante è l'attraversamento, da parte di un'onda, di una superficie di separazione tra due mezzi con caratteristiche fisiche diverse e quindi con velocità di propagazione diverse. Si pensi per esempio a due corde di diversa massa lineica saldate assieme in un punto. L'onda incidente sulla superficie di separazione e quella trasmessa devono avere la stessa frequenza; nel caso delle due corde, se le frequenze fossero diverse, ci sarebbe una discontinuità dell'onda nel punto di giunzione. Le lunghezze d'onda, invece, risulteranno diverse. La relazione tra le due lunghezze d'onda si può determinare facilmente ponendo $\nu_1 = \nu_2$; si ha, infatti,

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}. \qquad (18.20)$$

Velocità di gruppo e dispersione (facoltativo)

Le onde sinusoidali sono un utile strumento matematico che facilita la comprensione dei diversi aspetti dei fenomeni ondulatori; in pratica, però, si usano anche onde di forma diversa, alcune periodiche e non sinusoidali, come l'onda quadra e quella a «dente di sega», altre addirittura non periodiche come l'impulso di Figura 18.4.

Nei paragrafi precedenti il concetto di velocità di fase è stato introdotto per descrivere il moto delle onde sinusoidali (Figura 18.16) e degli impulsi la cui forma non viene distorta durante la propagazione (Figura 18.4). In altri casi la velocità alla quale un segnale trasporta energia o informazioni è descritta meglio dalla nozione di *velocità di gruppo*.

In Figura 18.9 è mostrato un impulso la cui forma cambia durante la propagazione nel mezzo di trasmissione; in particolare l'impulso si allarga. Questo fenomeno è noto come *dispersione*. È importante osservare che dispersione di un impulso non vuol dire necessariamente dissipazione del contenuto energetico; può accadere che la quantità totale di energia trasportata dall'impulso resti costante nonostante si osservi dispersione. In questo paragrafo assumeremo che il mezzo sia *dispersivo* ma non *dissipativo*. Come si vedrà nel Paragrafo 18.7, qualunque onda periodica può essere interpretata come sovrapposizione di infinite componenti sinusoidali di ampiezze e frequenze diverse. La frequenza, l'ampiezza e la fase di ciascuna componente deve essere scelta accuratamente, in accordo con la procedura matematica nota

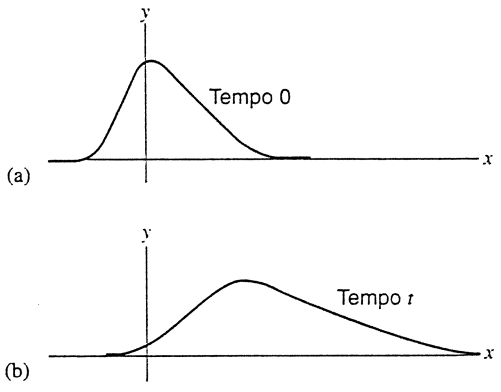


FIGURA 18.9 In un mezzo dispersivo la forma dell'onda cambia durante la propagazione.

come *analisi di Fourier*. in modo che la somma delle componenti restituisca la forma ondulatoria desiderata.

I mezzi reali di propagazione sono tipicamente dispersivi, ciò che implica una velocità di fase dipendente dalla frequenza dell'onda; in questo caso ogni componente che costituisce il *pacchetto* viaggerà con la sua velocità di fase, la relazione tra le diverse fasi delle diverse componenti cambierà in funzione del tempo e la sovrapposizione delle infinite componenti non darà più la forma d'onda di partenza. La ragione alla base della dispersione di un pacchetto è quindi la differenza tra le velocità con cui si propagano le diverse componenti di un impulso. Non esiste una relazione semplice tra la velocità delle diverse componenti e la velocità di gruppo dell'intero pacchetto; questa relazione dipende dal tipo di dispersione che si realizza nel mezzo.

Nella realtà esistono numerosi mezzi che sono con ottima approssimazione non dispersivi; in questo caso tutte le componenti di un segnale viaggiano alla stessa velocità di fase e la forma di un impulso resta invariata durante la sua propagazione. Un esempio semplice è dato dalla propagazione delle onde acustiche in aria: se l'aria fosse fortemente dispersiva la conversazione sarebbe impossibile, perché la forma d'onda emessa da un interlocutore giungerebbe alle orecchie dell'altro completamente distorta. La cura che gli strumentisti di un'orchestra impiegano per suonare all'unisono, inoltre, sarebbe del tutto inutile, perché le note di alta frequenza viaggerebbero a velocità diversa da quelle a bassa frequenza e quindi giungerebbero in istanti diversi all'orecchio dell'ascoltatore. Per fortuna tutto ciò non accade per le onde sonore. Un altro esempio di mezzo non dispersivo è il vuoto per la radiazione luminosa; gli effetti di dispersione dei mezzi nella propagazione delle onde luminose sono responsabili di effetti come lo spettro di colori dell'iride.

Nei mezzi non dispersivi tutte le componenti di un impulso viaggiano con la medesima velocità di fase e la velocità di gruppo del pacchetto risulta uguale alla velocità di fase delle singole componenti. Solo in questo caso è lecito parlare di velocità di fase dell'intera forma d'onda. Nel seguito di questo capitolo si assumerà sempre che il mezzo elastico in cui si propagano le onde meccaniche non sia dispersivo.

18.5 EQUAZIONE DELLE ONDE (facoltativo)

Il Capitolo 17 è stato dedicato allo studio dei fenomeni oscillatori. Tali fenomeni sono di grande rilevanza in fisica perché descritti dall'Equazione 17.6, $x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, che è soluzione dell'Equazione 17.5,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x,$$

che è a sua volta un'equazione di validità molto generale alla quale ci si può ricondurre nello studio di una gran varietà di fenomeni fisici, alcuni dei quali sono stati discussi a fondo nel Paragrafo 17.5.

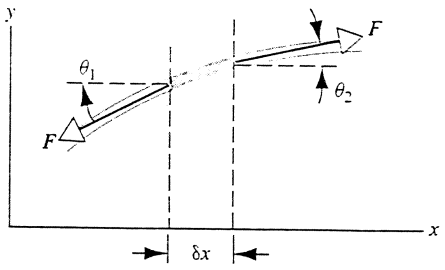


FIGURA 18.10 Elemento δx di una corda lunga sottoposta alla tensione F. La figura illustra un'istantanea dell'elemento presa durante il passaggio di un'onda.

Nello studio dei fenomeni ondulatori ritroviamo una situazione del tutto simile: l'analisi meccanica conduce a un'equazione che descrive numerosi fenomeni fisici e la cui soluzione si sviluppa nella forma della (18.2) o della (18.5).

In Figura 18.10 è illustrato un elemento di lunghezza δx di una corda sottoposta alla tensione F. Per effetto del passaggio di un'onda, l'elemento si discosta dalla sua posizione di equilibrio $y = 0$; si può studiare il suo moto attraverso la seconda legge di Newton.

Sull'elemento agiscono le due forze esercitate dalla porzione di corda alla sua destra e da quella alla sua sinistra; le due forze hanno stesso modulo, perché la tensione è uniforme lungo la corda, ma direzioni differenti, perché la tensione agisce in direzione tangenziale. La componente lungo l'asse y della somma delle forze che agiscono sull'elemento è data da

$$\sum F_y = F \sin\theta_2 - F \sin\theta_1.$$

Se ci si limita a considerare piccoli scostamenti dalla posizione di equilibrio, i due angoli θ_1 e θ_2 risultano piccoli e quindi è possibile approssimare il loro seno con la loro tangente. Allora

$$\sum F_y \approx F \tan\theta_2 - F \tan\theta_1 = F\delta(\tan\theta), \quad (18.21)$$

ove si è posto $\delta(\tan\theta) = \tan\theta_2 - \tan\theta_1$. Se si trascura l'effetto delle forze di attrito o di altre sollecitazioni dissipative, la somma appena calcolata deve essere uguale alla massa $\delta m = \mu\,\delta x$ dell'elemento moltiplicata per la componente lungo l'asse y della sua accelerazione. In altri termini, dalla seconda legge di Newton si ha

$$\sum F_y = \delta m\, a_y$$
$$F\,\delta(\tan\theta) = \mu\,\delta x\, a_y$$
$$\frac{\delta(\tan\theta)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} a_y.$$

Osservando che la componente a_y dell'accelerazione dell'elemento coincide con l'accelerazione trasversale $\partial^2 y/\partial t^2$ degli elementi della corda e che $\tan\theta$ è uguale alla pendenza della corda $\partial y/\partial x$, si ottiene

$$\frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (18.22)$$

 ISBN 88-408-1254-7

Passando, infine, al limite in cui la massa dell'elemento diventa infinitesima, il primo membro dell'equazione precedente diventa

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta(\partial y/\partial x)}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

e quindi l'Equazione 18.22 si trasforma in

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (18.23)$$

Ricordando l'Equazione 18.19 si ha $\mu/F = 1/v^2$ e quindi

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \qquad (18.24)$$

La (18.24), detta *equazione delle onde*, è la forma generale dell'equazione che descrive i fenomeni ondulatori: la derivata seconda della perturbazione y rispetto alla coordinata spaziale x è uguale alla derivata seconda della perturbazione rispetto alla coordinata temporale t divisa per la velocità di fase v al quadrato. Questa equazione è stata ricavata per il caso particolare di un'onda meccanica che si propaga lungo una corda, ma la stessa forma emerge nei più disparati settori della fisica. Per esempio, come si vedrà nel Capitolo 38, nell'ambito della teoria dell'elettromagnetismo si otterrà la medesima equazione con la perturbazione y a rappresentare l'intensità del campo elettromagnetico piuttosto che lo scostamento degli elementi di una corda tesa. In quel caso la velocità di fase v sarà uguale alla velocità della luce nel vuoto c.

Si vuole sottolineare, infine, che l'espressione generale $y(x, t) = f(x \pm vt)$ per un segnale ondulatorio è soluzione dell'equazione delle onde 18.24. Per dimostrarlo si effettua la sostituzione $z = x \pm vt$ e si usa ripetutamente la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm v\frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d}{dz}\left(\pm v\frac{df}{dz}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = (\pm v)^2\frac{d^2 f}{dz^2} = v^2\frac{d^2 f}{dz^2}.$$

Da cui si ha

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

e quindi l'Equazione 18.24 è soddisfatta. È possibile dimostrare che solo funzioni che dipendono da x e t mediante la combinazione $x \pm vt$ sono soluzione dell'equazione delle onde; per questa ragione si può concludere che le espressioni 18.2 e 18.5 costituiscono la forma più generale di un'onda in moto.

I risultati appena ottenuti possono essere riletti in modo alternativo. L'Equazione 18.23, dedotta per mezzo delle leggi di Newton, indica che le perturbazioni si propagano in modo ondulatorio lungo una corda tesa e la loro velocità di fase vale $\sqrt{F/\mu}$. Questa discussione, quindi, fornisce una deduzione indipendente dell'Equazione 18.19 per la velocità di fase lungo una corda tesa.

18.6 ENERGIA TRASPORTATA DA UN'ONDA

Un modo per indurre la propagazione di un'onda in una corda tesa consiste nel far oscillare il suo estremo libero come illustrato in Figura 18.1. Con questa operazione si compie un lavoro sulla corda e quindi le si fornisce energia. L'energia così ceduta alla corda si propaga assieme all'onda lungo la corda stessa e, eventualmente, può essere utilizzata all'altro capo della corda. La capacità da parte di un'onda di trasportare energia è uno degli aspetti più interessanti dei fenomeni ondulatori; in questo paragrafo si discuterà questo tema nel caso della corda tesa.

Nella Figura 18.11a è riportato il profilo dell'onda agli istanti t_1 e $t_2 = t_1 + T/4$, ove T è il periodo dell'onda. Si considerano due elementi della corda di lunghezza dx: all'istante t_1 l'elemento A si trova sul picco e all'istante t_2 si trova nella posizione di equilibrio sull'asse x. L'elemento B, invece, si trova sull'asse x al primo istante e sul picco al secondo.

All'istante t_1 l'elemento A ha velocità nulla, mentre la sua velocità è massima all'istante t_2; nell'intervallo di tempo con-

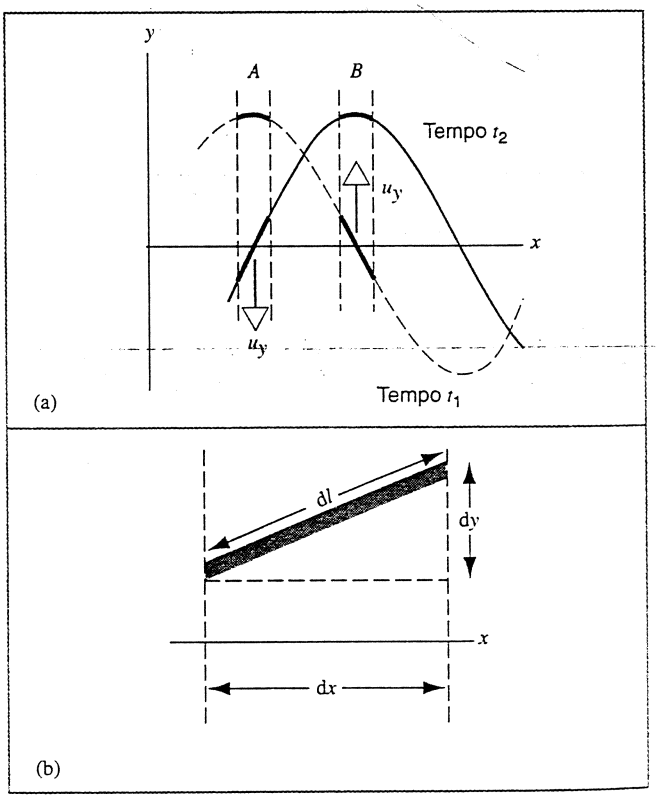


FIGURA 18.11 (a) I due elementi A e B di una corda sono illustrati agli istanti t_1 e t_2 separati da un quarto di ciclo. L'onda si propaga verso destra, ovvero nel verso positivo dell'asse x. (b) Ingrandimento di un elemento della corda a un istante generico.

siderato, quindi, l'elemento A acquista energia cinetica. D'altro canto la lunghezza dell'elemento A all'istante t_1 è con ottima approssimazione uguale alla sua lunghezza a riposo dx, mentre all'istante t_2 la sua lunghezza è aumentata a causa della tensione esercitata su di esso dal resto della corda. In definitiva nell'intervallo di tempo considerato l'elemento A acquista anche energia potenziale. Se si ripete la stessa analisi per quel che riguarda l'elemento B ci si convince facilmente che tale elemento nell'intervallo $[t_1, t_2]$ perde sia energia cinetica che energia potenziale. La propagazione dell'onda lungo la corda, quindi, può essere interpretata come variazione di energia cinetica e potenziale dei diversi elementi della corda; calcolando la variazione di energia in funzione del tempo si può stimare la potenza trasportata dall'onda.

In Figura 18.11b è mostrata un'immagine più dettagliata di un generico elemento della corda a un istante arbitrario. L'elemento, di lunghezza a riposo dx, all'istante considerato misura dl; l'elemento ha massa $dm = \mu\, dx$ e velocità u_y data dall'Equazione 18.14; pertanto la sua energia cinetica vale

$$dK = \frac{1}{2} dm\, u_y^2 = \frac{1}{2}(\mu\, dx)[-y_m \omega \cos(kx - \omega t)]^2. \quad (18.25)$$

L'elemento subisce la variazione dK di energia cinetica nell'intervallo di tempo $dt = dx/v$ in cui l'onda percorre una distanza pari alla componente orizzontale della lunghezza dell'elemento. L'onda, quindi, trasporta energia cinetica con il rapporto temporale dK/dt dato da

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 \frac{dx}{dt} \cos^2(kx - \omega t) = \\ &= \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (18.26)$$

Al fine di calcolare l'energia potenziale immagazzinata nell'elemento considerato, è necessario calcolare il lavoro che la tensione compie sull'elemento per portare la sua lunghezza dal valore a riposo dx al valore allungato dl; in altri termini $dU = F(dl - dx)$. Approssimando dl con la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo mostrato in Figura 18.11b, si ha

$$\begin{aligned} dU &= F\left[\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx\right] = \\ &= F\, dx\left[\sqrt{1 + (\partial y/\partial x)^2} - 1\right]. \end{aligned} \quad (18.27)$$

Ricordando che $\partial y/\partial x$ rappresenta la pendenza del profilo della corda e che, limitandosi a trattare piccole oscillazioni della corda, la radice quadrata può essere ben approssimata con i primi due termini dello sviluppo in serie binomiale $(1 + z)^n = 1 + nz + \cdots$ della funzione potenza. Allora

$$\begin{aligned} dU &= F\, dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 1\right] = \\ &= \frac{1}{2} F\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \end{aligned} \quad (18.28)$$

Sostituendo nella formula 18.28 appena ricavata l'espressione $\partial y/\partial x = -y_m k \cos(kx - \omega t)$ si ottiene il rapporto temporale con il quale l'onda trasporta energia potenziale:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{1}{2} F \frac{dx}{dt}[-y_m k \cos(kx - \omega t)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} F v y_m^2 k^2 \cos^2(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (18.29)$$

In base alle Equazioni 18.13 e 18.19 si può scrivere $F = v^2\mu = (\omega/k)^2\mu$; sostituendo questa espressione nella (18.29) e confrontando il risultato con l'Equazione 18.26 si ricava $dU/dt = dK/dt$.

Si vuole osservare, infine, che dK e dU sono entrambi nulli quando l'elemento si trova al suo scostamento massimo (elemento A all'istante t_1) e assumono il loro valore massimo quando l'elemento passa per la posizione di equilibrio sull'asse x (elemento A all'istante t_2). Sebbene vi siano grandi analogie tra il moto di un elemento della corda tesa e l'oscillatore armonico semplice, va sottolineato che esistono anche importanti differenze: l'energia meccanica totale $dE = dK + dU$ di un elemento della corda non è costante; più precisamente varia dal valore zero, assunto nelle creste e nelle valli, al valore massimo, assunto quando l'elemento attraversa la posizione di equilibrio. Il fatto che l'energia totale dell'elemento non si conservi non è sorprendente e non viola alcun principio, perché l'elemento non è un sistema isolato, anzi il suo moto risente dell'azione che su di esso viene esercitata dal resto della corda.

Potenza e intensità

L'uguaglianza $dU/dt = dK/dt$ dimostrata in precedenza ha delle implicazioni interessanti; in primo luogo si può osservare che

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = 2\frac{dU}{dt} = \mu\omega^2 y_m^2 v \cos^2(kx - \omega t). \quad (18.30)$$

Il ritmo al quale l'onda trasporta l'energia meccanica totale è detto potenza trasportata dall'onda e viene denotato con $P = dE/dt$. La potenza dipende sia dalla posizione lungo la corda sia dal tempo. Molto spesso è più utile considerare la potenza media $\overline{P}$ definita come segue

$$\overline{P} = \overline{\left(\frac{dE}{dt}\right)} = \mu\omega^2 y_m^2 v \overline{[\cos^2(kx - \omega t)]}. \quad (18.31)$$

Spesso, infatti, l'onda viene osservata per un tempo molto lungo rispetto al suo periodo, quindi la potenza misurata è quella ottenuta mediando su un grande numero di cicli. Il valore medio di $\cos^2$ su molti cicli vale $\frac{1}{2}$ e quindi

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_m^2 v. \quad (18.32)$$

La dipendenza della potenza trasportata dal *quadrato* dell'ampiezza e dal *quadrato* della frequenza è una proprietà generale delle onde.

Il calcolo che abbiamo eseguito si basa sull'assunto che non vi siano perdite di energia meccanica per effetto di forze d'attrito o di altre sollecitazioni dissipative. L'energia meccanica dell'onda, quindi, non viene né trasformata in energia interna della corda né ceduta all'ambiente circostante sotto forma di calore.

 ISBN 88-408-1254-7

Il risultato della (18.32) si basa anche sull'ipotesi che l'ampiezza dell'onda si mantenga costante durante la propagazione: questa ipotesi è verificata nel caso della corda ideale e nel caso delle onde piane (Figura 18.3a); nel caso delle onde sferiche, invece, il contenuto energetico di ciascun fronte resta costante, ma tutta l'energia si distribuisce su una superficie via via maggiore. Per questa ragione è utile introdurre la nozione di *intensità* I definita come *la potenza media trasportata dall'onda per unità di superficie attraverso una superficie piana di area A ortogonale alla direzione di propagazione*; più semplicemente

$$I = \frac{\overline{P}}{A}. \tag{18.33}$$

Questa intensità, che per le onde elettromagnetiche prende spesso il nome di *irradianza*, si misura in watt al metro quadrato (W/m^2).

Così come la potenza, anche l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Nel caso, però, di onde circolari e sferiche l'ampiezza non è costante durante la propagazione. Per un'onda sferica, come un'onda sonora o luminosa emessa da una sorgente puntiforme, la superficie del fronte d'onda a distanza r dalla sorgente vale $4\pi r^2$ e quindi l'intensità è proporzionale a $1/r^2$. Raddoppiando la distanza dalla sorgente l'intensità dell'onda si riduce di un fattore quattro e l'ampiezza di un fattore due.

18.7 PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

In numerose circostanze accade che due o più onde viaggino simultaneamente e indipendentemente nello stesso mezzo di trasmissione. Si pensi per esempio al suono prodotto da un orchestra: l'insieme è senza dubbio complicato ma un buon orecchio può distinguere tra i suoni emessi dai diversi strumenti. Un altro esempio interessante è quello degli elettroni di un'antenna per la ricezione di segnali radiotelevisivi: il moto degli elettroni è dovuto alla ricezione simultanea del segnale di diverse emittenti; ciononostante è possibile estrarre un unico segnale e sintonizzare l'apparecchio su una particolare stazione trasmittente; in linea di principio il segnale così osservato è lo stesso che si otterrebbe se l'emittente selezionata fosse l'unica ricevuta dall'antenna.

Gli esempi appena menzionati illustrano efficacemente il cosiddetto *principio di sovrapposizione*: quando più onde si combinano in un punto del mezzo di trasmissione, lo scostamento risultante delle particelle del mezzo è la somma degli scostamenti che si osserverebbero se ciascuna onda viaggiasse da sola. Si supponga, per esempio, che due onde si propaghino simultaneamente lungo la medesima corda tesa e si denotino con $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ gli scostamenti che si osserverebbero in presenza della sola onda 1 e della sola onda 2. Lo scostamento della corda in presenza delle due onde è dato da

$$y(x, t) = y_1(x_1, t) + y_2(x_1, t). \tag{18.34}$$

Nel caso delle onde meccaniche il principio di sovrapposizione vale se la forza di richiamo che agisce nel mezzo elastico varia linearmente con lo scostamento dalla posizione di equilibrio.

In Figura 18.12 è riportata una sequenza di istantanee di due impulsi che si propagano in versi opposti sulla medesima corda tesa. Negli istanti in cui i due impulsi si sovrappongono, anche parzialmente, lo scostamento della corda è dato dalla somma algebrica degli scostamenti che si osserverebbero in presenza dei due impulsi presi separatamente. In altri termini i due impulsi si compenetrano e ciascuno di essi si muove liberamente come se l'altro non fosse presente.

Il lettore potrebbe pensare che il principio di sovrapposizione sia un risultato del tutto banale e di validità del tutto generale; non è così, vi sono molti casi in cui non vale. Si supponga, per esempio, che uno dei due impulsi considerati in precedenza abbia ampiezza così elevata che la corda non si trovi più in regime di elasticità. In questo caso la forza di richiamo non è proporzionale allo scostamento e allora, indipendentemente dal valore dell'ampiezza del secondo impulso, il suo effetto in un punto della corda non sarà più proporzionale alla sua ampiezza. La forma del secondo impulso verrà modificata durante l'attraversamento della regione di non-linearità e quindi il suo comportamento successivo risulterà alterato. Situazioni di questo tipo sono per fortuna abbastanza rare e quindi nei casi di interesse pratico il principio di sovrapposizione può essere considerato valido; la nostra trattazione si limiterà a questo caso.

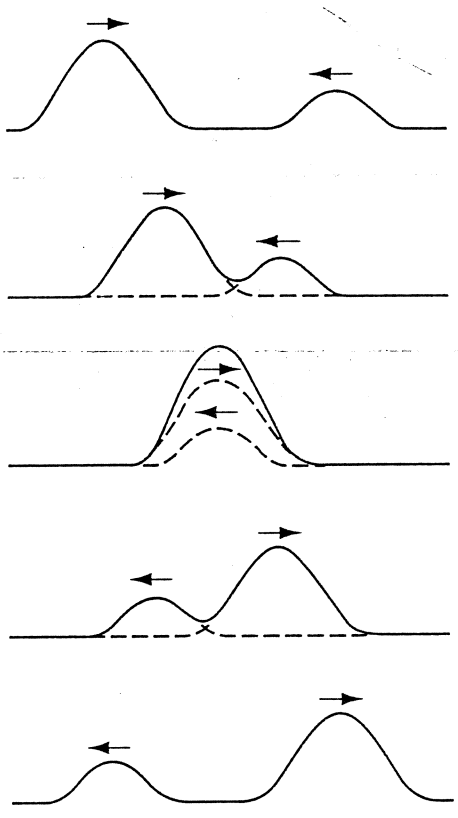


FIGURA 18.12 Due impulsi che si propagano in versi opposti lungo una corda tesa. È possibile applicare il principio di sovrapposizione anche negli istanti in cui i due impulsi si sovrappongono.

Analisi di Fourier (facoltativo)

Uno degli aspetti più interessanti del principio di sovrapposizione è la possibilità di considerare un segnale ondulatorio, comunque complicato, come una combinazione di onde semplici. Il matematico francese J. Fourier (1768-1830), infatti, dimostrò che forme d'onda periodiche comunque complicate possono essere scritte in termini di forme d'onda armoniche. In altre parole il risultato di Fourier si può enunciare affermando che un qualsiasi moto periodico può essere scomposto in una somma di moti armonici semplici. Si supponga, per esempio, che la funzione periodica $y(x)$ rappresenti la forma d'onda di un segnale di lunghezza d'onda λ a un certo istante; allora si può sviluppare nella cosiddetta serie di Fourier:

$$y(x) = A_0 + A_1 \sin(kx) + A_2 \sin(2kx) + \\ + A_3 \sin(3kx) + \cdots + B_1 \cos(kx) + \\ + B_2 \cos(2kx) + B_3 \cos(3kx) + \cdots , \qquad (18.35)$$

ove $k = 2\pi/\lambda$. I coefficienti di Fourier A_n e B_n hanno un valore ben definito che dipende dalla funzione $y(x)$. Per esempio, nel caso del dente di sega illustrato in Figura 18.13a si ha

$$y(x) = -\frac{1}{\pi}\sin(kx) - \frac{1}{2\pi}\sin(2kx) - \frac{1}{3\pi}\sin(3kx) - \cdots .$$

Nel caso in cui il segnale non sia periodico, la serie di Fourier viene sostituita da uno sviluppo detto *integrale di Fourier*. Si può quindi concludere che qualunque sia il segnale prodotto dalla sorgente, continuo o impulsivo, la forma d'onda che si propaga nel mezzo di trasmissione può essere ricondotta a una somma di componenti armoniche. Ancora una volta emerge la grande importanza che i moti e i segnali periodici rivestono in fisica.

Come si è discusso in precedenza le onde mantengono invariata la loro forma soltanto nei mezzi non dispersivi. Nel caso dispersivo, invece, accade che tutte le componenti armoniche del segnale preservino la loro forma ma si muovano con velocità di fase diversa. Per questo motivo la forma d'onda risultante varia nel tempo perché cambia la relazione di fase tra le sue infinite componenti sinusoidali. Un altro effetto che può alterare la forma del segnale durante la propagazione è la perdita di energia causata da sollecitazioni dissipative come la resistenza dell'aria, la viscosità o l'attrito interno al mezzo. Nella maggior parte dei casi le forze dissipative dipendono dalla velocità delle particelle e quindi le componenti di Fourier più colpite da tali forze sono quelle cui corrisponde una maggiore velocità delle particelle del mezzo, ovvero quelle a frequenza più elevata (Equazione 18.14). Anche in questo caso, quindi, la forma dell'impulso può cambiare perché l'ampiezza delle componenti a frequenza più alta si riduce notevolmente. Un esempio di questo fenomeno è il decadimento del suono prodotto dalle corde di un pianoforte: le vibrazioni di una corda di pianoforte, subito dopo il colpo del martelletto, sono caratterizzate da numerose frequenze che forniscono al suono emesso il suo *timbro* caratteristico. Le componenti a frequenza più alta, però, perdono energia più rapidamente e quindi le caratteristiche del suono cambiano con il tempo.

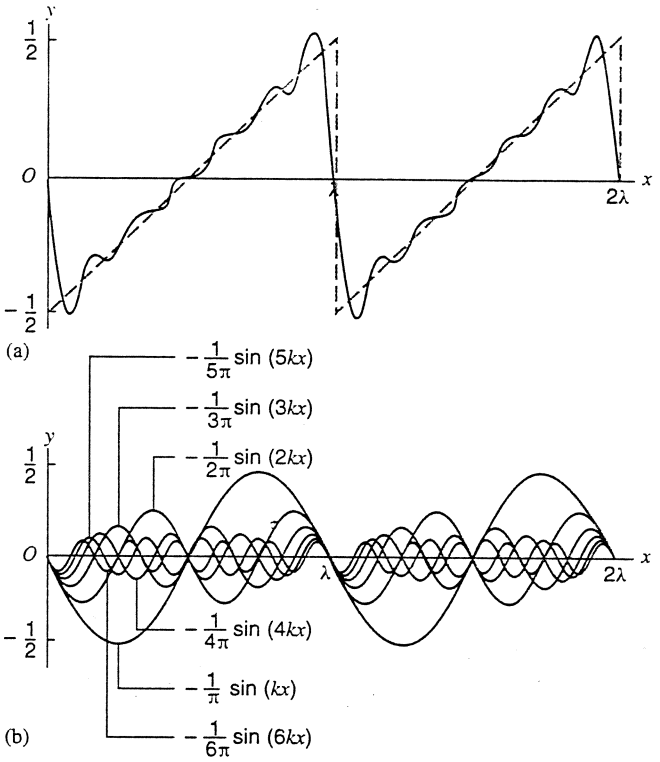


FIGURA 18.13 (a) La linea tratteggiata rappresenta il grafico di un segnale molto comune in elettronica detto «dente di sega». È possibile sviluppare questa funzione nella serie di Fourier dei soli seni. (b) Grafico dei primi sei termini dello sviluppo di Fourier; la loro somma è rappresentata dalla linea continua in (a). Al crescere del numero di termini considerati la somma parziale approssima sempre meglio la funzione desiderata.

18.8 INTERFERENZA

Il fenomeno dell'*interferenza* si verifica quando due o più onde si sovrappongono in una certa regione del mezzo di trasmissione; si dice anche che le due onde *interferiscono*. La forma d'onda risultante dipende fortemente dalla relazione tra le fasi delle due onde interferenti; nella Figura 18.14 è riportata una fotografia che mostra l'interferenza tra due onde sulla superficie di un lago.

Si considerino, in prima battuta, due onde sinusoidali di stessa ampiezza e stessa lunghezza d'onda che viaggiano alla stessa velocità nella direzione positiva dell'asse x. La costante di fase di una delle due onde viene scelta uguale a zero, mentre quella della seconda onda viene scelta uguale a ϕ. In Figura 18.15 sono riportate le onde componenti e la loro somma nel caso in cui ϕ è vicino a zero (le onde sono quasi in concordanza di fase) e nel caso in cui ϕ è vicino a 180° (le onde sono quasi in opposizione di fase). Sommando i due contributi elemento per elemento si vede facilmente che nel primo caso c'è un rafforzamento quasi totale del segnale e l'ampiezza risultante è vicina al doppio delle am-

 ISBN 88-408-1254-7



FIGURA 18.14 Due treni d'onda di fronte circolare interferiscono quando le increspature della superficie del liquido si sovrappongono. Lo scostamento di ciascun punto è dato dalla somma dei due contributi dovuti alle due onde considerate separatamente.

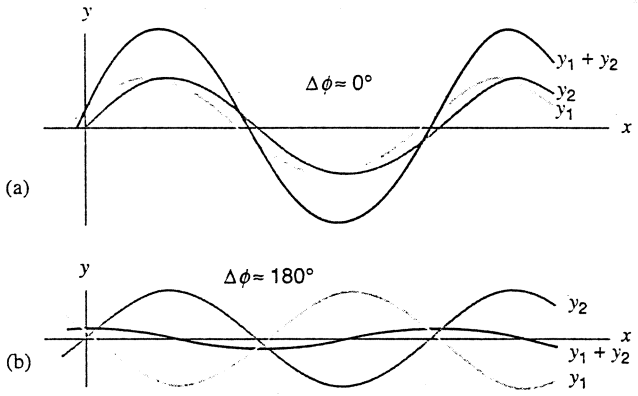


FIGURA 18.15 (a) La sovrapposizione di due onde di stessa lunghezza, stessa ampiezza e di fasi pressoché uguali risulta in un'onda di ampiezza approssimativamente uguale al doppio di quella delle onde componenti. (b) La sovrapposizione di due onde di stessa lunghezza, stessa ampiezza e di fasi che differiscono di quasi 180° risulta in un'onda di ampiezza quasi nulla.

piezze originali, mentre nel secondo caso si verifica una cancellazione quasi totale e l'ampiezza risultante è prossima a zero. Questi due casi sono noti rispettivamente come *interferenza costruttiva* e *interferenza distruttiva.*

Si vuole spiegare ora il fenomeno dal punto di vista matematico mediante le equazioni che descrivono le onde. Si consideri il caso in cui le costanti di fase siano ϕ_1 e ϕ_2. Le due onde sono descritte dalle funzioni

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi_1) \qquad (18.36)$$

e

$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi_2). \qquad (18.37)$$

In base al principio di sovrapposizione si può descrivere l'onda risultante sommando i due contributi, della (18.36) e della (18.37):

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \\ = y_m[\sin(kx - \omega t - \phi_1) + \sin(kx - \omega t - \phi_2)]. \qquad (18.38)$$

Grazie all'identità trigonometrica

$$\sin B + \sin C = 2 \sin \frac{1}{2}(B + C) \cos \frac{1}{2}(B - C), \qquad (18.39)$$

eseguendo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$y(x,t) = [2y_m \cos(\Delta\phi/2)] \sin(kx - \omega t - \phi'), \qquad (18.40)$$

ove $\phi' = (\phi_1 + \phi_2)/2$ e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ è la *differenza di fase*, o *sfasamento*, tra le due onde interferenti.

L'onda risultante ha la stessa frequenza delle componenti ma ampiezza $2y_m|\cos(\Delta\phi/2)|$. Se la differenza di fase $\Delta\phi$ è vicina a zero allora l'ampiezza vale circa $2y_m$ (Figura 18.15a). Quando $\Delta\phi \doteq 0$ le due onde si sovrappongono perfettamente: i picchi dell'una coincidono con i picchi dell'altra e così anche le rispettive valli; per questo motivo si osserva l'interferenza costruttiva. Nel caso in cui la differenza di fase valga circa 180° l'ampiezza risultante vale circa zero (Figura 18.15b). Quando $\Delta\phi = 180°$ i picchi di una delle due onde corrispondono alle valli dell'altra e ciò spiega l'interferenza distruttiva.

Si osservi che l'Equazione 18.40 individua sempre un'onda sinusoidale; indipendentemente dallo sfasamento, quindi, l'interferenza di due onde sinusoidali di stessa ampiezza e stessa lunghezza d'onda produce una terza onda sinusoidale. Con calcoli analoghi, ma un po' più complicati, si dimostra anche che la somma di due onde sinusoidali di stessa lunghezza d'onda e diversa ampiezza produce ancora un'onda sinusoidale di medesima lunghezza, ma con ampiezza data da un'espressione più complicata di quella che appare nella (18.40). Si supponga che le due ampiezze valgano y_{1m} e y_{2m}; se le due onde sono in fase ($\Delta\phi = 0$), l'ampiezza risultante vale $y_{1m} + y_{2m}$ (Figura 18.16a); se le due onde sono in opposizione di fase ($\Delta\phi = 180°$) l'ampiezza

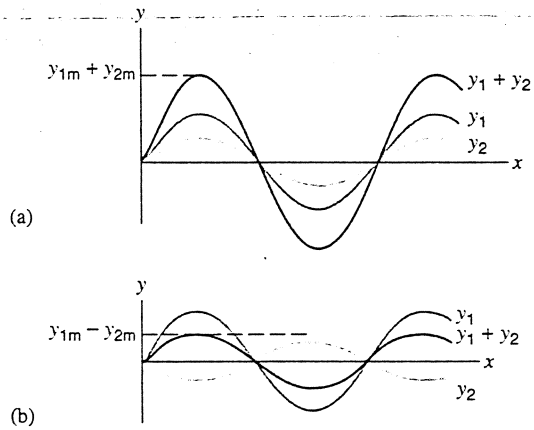


FIGURA 18.16 La somma di due onde di stessa lunghezza e stessa fase ma di ampiezze diverse (curve chiare) fornisce un'onda di stessa lunghezza e stessa fase. (a) Le ampiezze si sommano se le onde sono in fase e (b) si sottraggono se le onde sono in *opposizione di fase.*

risultante vale $|y_{1m} - y_{2m}|$ (Figura 18.16b). In questo caso l'interferenza non può essere completamente distruttiva.

PROBLEMA SVOLTO 18.3 Due onde identiche di ampiezza 9,7 mm e sfasate di 110° si propagano concordemente lungo una stessa corda. (a) Si determini l'ampiezza dell'onda dovuta all'interferenza delle due onde originarie. (b) Si determini quanto dovrebbe valere la differenza di fase affinché l'ampiezza della risultante fosse uguale a quella delle componenti.

Soluzione (a) L'ampiezza dell'onda risultante è data dall'Equazione 18.40:

$$2y_m|\cos(\Delta\phi/2)| = 2(9{,}7\text{ mm})|\cos(110^\circ/2)| = 11{,}1\text{ mm}.$$

(b) La quantità $2y_m|\cos(\Delta\phi/2)|$ risulta uguale a y_m se

$$2\,|\cos(\Delta\phi/2)| = 1,$$

ovvero

$$\Delta\phi = 2\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 120^\circ \text{ oppure } -120^\circ.$$

Una delle due onde deve precedere l'altra di 120° per ottenere l'effetto desiderato.

18.9 ONDE STAZIONARIE

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato la sovrapposizione di due onde sinusoidali di stessa ampiezza e stessa frequenza in moto nello stesso verso; in questo paragrafo si vuole discutere cosa accade quando le due onde si propagano in versi opposti.

Una rappresentazione grafica del fenomeno è fornita in Figura 18.17; le due forme d'onda in figura si muovono l'una verso destra e l'altra verso sinistra. Le istantanee mostrano le due onde componenti e l'onda risultante a istanti separati da un quarto di periodo.

Un primo aspetto interessante è la presenza di punti della corda, detti *nodi*, per i quali lo scostamento è sempre uguale a zero. Anche in Figura 18.16 vi sono elementi con scostamento nullo, ma i grafici di quella figura rappresentano istantanee di un'onda a particolari istanti. Se si rappresentasse la forma d'onda in un momento successivo si osserverebbe scostamento non nullo per gli elementi che nella prima immagine occupavano posizioni sull'asse x. I punti, invece, che hanno scostamento nullo in Figura 18.17c godono di questa proprietà in qualsiasi istante. Dalla Figura 18.17c si deduce anche che fra due nodi successivi vi è un punto che oscilla con ampiezza massima; tali punti sono detti *ventri* o *antinodi*. Onde del tipo illustrato in Figura 18.17c e caratterizzate da una sequenza di nodi e ventri sono note come *onde stazionarie*.

Al fine di analizzare il fenomeno delle onde stazionarie dal punto di vista matematico si considerano le due funzioni

$$y_1(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t),$$
$$y_2(x,t) = y_m \sin(kx + \omega t).$$

La risultante può essere scritta come

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = \\ = y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t), \qquad (18.41)$$

e con l'identità trigonometrica 18.39 si ottiene

$$y(x,t) = [2y_m \sin kx]\cos(\omega t). \qquad (18.42)$$

L'Equazione 18.42 è nota come equazione delle onde stazionarie; tale funzione non può rappresentare un'onda che si propaga lungo l'asse x perché la variabile temporale t e quella spaziale x non compaiono nella combinazione $x \pm vt$.

Si osserva che ciascun elemento della corda, qualunque sia la sua ascissa x, vibra di moto armonico semplice con pulsazione ω, ma *l'ampiezza di tali oscillazioni dipende dall'ascissa* x. Ciò differenzia notevolmente le onde stazionarie da quelle studiate in precedenza, in cui tutti gli elementi hanno moto armonico con medesima ampiezza. Si noti, per esempio, che l'ampiezza $2y_m|\sin kx|$ assume il valore massimo $2y_m$ nei punti di ascissa x tali che $kx = \pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$, ... Più precisamente l'ascissa x del generico ventre è tale che

$$kx = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e quindi

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (18.43)$$

I ventri, quindi, sono distanziati di mezza lunghezza d'onda.

L'ampiezza $2y_m|\sin kx|$, invece, assume il valore minimo pari a zero nei punti di ascissa x dati dalla relazione $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Più precisamente l'ascissa x del generico nodo è tale che

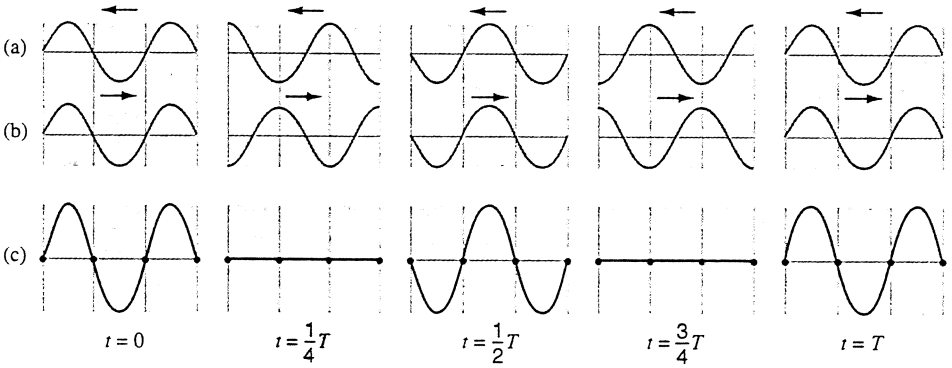


FIGURA 18.17 (a,b) Due onde di stessa ampiezza e stessa lunghezza che viaggiano in versi opposti. (c) Sovrapposizione delle due onde in diversi istanti. I nodi dell'onda stazionaria sono indicati da punti; si osservi che le onde componenti non hanno nodi.

 ISBN 88-408-1254-7

$$kx = n\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

e quindi

$$x = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (18.44)$$

I nodi, così come i ventri, sono distanziati di mezza lunghezza d'onda. Un nodo e un ventre ad esso adiacente sono distanziati di un quarto di lunghezza d'onda.

È abbastanza evidente che le onde stazionarie non trasportano energia lungo la corda; infatti l'energia non può essere portata al di là dei nodi, perché questi sono permanentemente a riposo. L'energia, quindi, «staziona» lungo la corda e si trasforma da cinetica a potenziale elastica e viceversa. Quando i ventri sono nella posizione di massimo scostamento l'energia meccanica è tutta potenziale, quando tutti gli elementi della corda si trovano sull'asse x l'energia meccanica è tutta cinetica (seconda e quarta istantanea della Figura 18.17c). Il modo in cui l'energia si trasforma da cinetica a potenziale e viceversa durante un ciclo dell'oscillazione dell'onda stazionaria è descritto in maggiore dettaglio nella Figura 18.18. Si confronti la Figura 18.18 con la Figura 12.5 relativa all'oscillatore blocco-molla e ci si soffermi sulle analogie tra i comportamenti dei due sistemi fisici.

Il moto della corda in presenza di un'onda stazionaria può essere pensato come un moto oscillatorio in cui ogni elemento compie oscillazioni armoniche di pulsazione ω e di ampiezza che dipende dalla sua posizione. Ogni porzione elementare della corda ha la sua inerzia e la sua elasticità e quindi l'intera corda può essere vista come una collezione di infiniti oscillatori armonici accoppiati. In linea di principio, quindi, la corda vibrante si comporta come il sistema blocco-molla, solo che quest'ultimo ha un'unica frequenza propria, mentre la corda ha infinite frequenze naturali (si rimanda al Paragrafo 18.10).

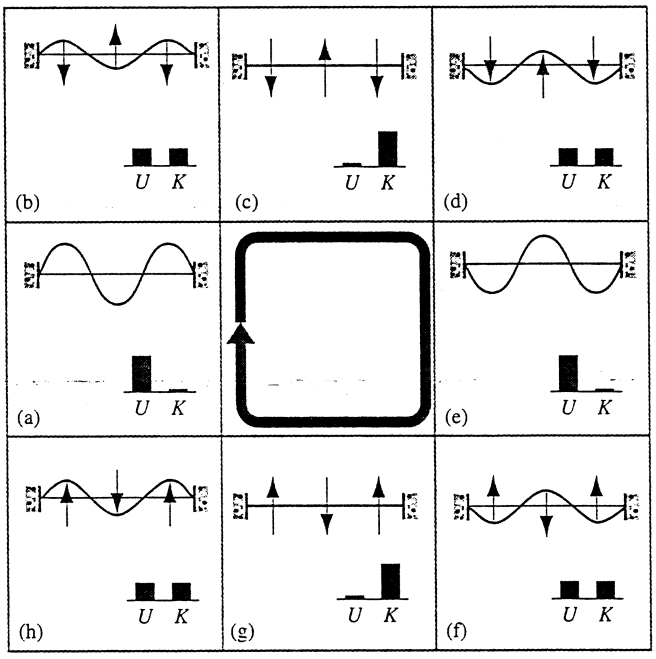


FIGURA 18.18 Un ciclo dell'oscillazione di un'onda stazionaria in una corda tesa. (a) Corda istantaneamente a riposo con ventri nella posizione di massimo scostamento. L'energia della corda è tutta potenziale. (b) Dopo un ottavo di ciclo lo scostamento si è parzialmente ridotto e la corda ha acquistato un po' di energia cinetica. Le frecce indicano la velocità di alcuni elementi della corda. (c) Lo scostamento è nullo, l'energia è tutta cinetica e la velocità degli elementi della corda è massima. (d-h) L'oscillazione prosegue la sua evoluzione con l'energia potenziale che si trasforma continuamente in energia cinetica e viceversa.

Riflessione all'estremità

Per instaurare un'oscillazione stazionaria bisogna sovrapporre due onde opportune che si propagano in verso opposto. Un modo di realizzare lo scopo consiste nel generare un'onda e farla interferire con l'onda riflessa alla sua estremità. Il fenomeno della riflessione all'estremità è l'argomento di questo paragrafo.

Per ragioni espositive si discute il caso di un impulso piuttosto che quello di un treno d'onde sinusoidali. Si consideri, quindi, un impulso che viaggia lungo una corda tesa con un estremo fisso come illustrato nella Figura 18.19a. Quando l'impulso giunge all'estremità (punto fisso) il supporto risentirà di una forza diretta verso l'alto; il supporto fisso non si muove e per la terza legge di Newton esercita sulla corda una forza di uguale intensità, ma diretta verso il basso. Nel caso illustrato in Figura 18.19a la forza di rea-

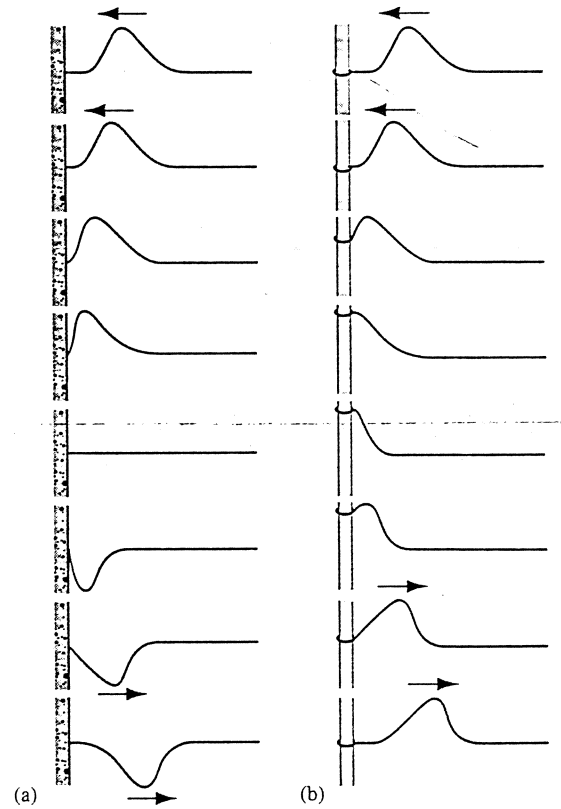


FIGURA 18.19 (a) Impulso trasversale incidente da destra su una parete fissa. Si osservi che l'impulso riflesso ha fase invertita rispetto a quello incidente, ovvero è sfasato di 180°. (b) L'estremità della corda può muoversi liberamente, infatti è connessa a un anello libero di scorrere lungo un'asta verticale. La fase dell'impulso riflesso non si modifica.

zione fa sì che lungo la corda si propaghi un secondo impulso verso l'estremo libero. L'interferenza tra l'impulso incidente e quello riflesso deve essere tale che l'elemento della corda che occupa l'estremo fisso rimanga fermo; si realizza, quindi, una situazione di interferenza distruttiva e quindi i due impulsi devono essere in opposizione di fase. *Un'onda trasversale subisce uno sfasamento di* 180° *quando viene riflessa da un punto fisso.*

La riflessione di un impulso nel caso in cui l'estremità consista di un elemento libero di muoversi nella direzione verticale è illustrato nella Figura 18.19b. L'estremo vincolato della corda è connesso a un anello libero di scorrere senza attrito lungo un'asta ortogonale alla direzione di propagazione dell'impulso incidente. Quando l'impulso giunge sul bordo, l'elemento della corda connesso all'anello risente di una forza che lo accelera e, come nel caso del pendolo, gli fa abbandonare la sua posizione di equilibrio. Durante il suo moto l'anello esercita una forza di reazione sull'estremo della corda e produce un impulso che viaggia in verso opposto a quello incidente. Anche in questo caso, quindi, si osserva la propagazione di un impulso riflesso; l'estremo connesso all'anello, però, subisce il massimo scostamento possibile e quindi l'impulso incidente e quello riflesso devono interferire costruttivamente, cioè devono essere in fase. In conclusione, *nel caso di riflessione da parte dell'estremità libera, l'onda incidente e quella riflessa sono in fase.*

Nella nostra discussione abbiamo implicitamente assunto che l'onda riflessa abbia la medesima intensità di quella incidente; in realtà quando un segnale attraversa la superficie di separazione tra due diversi mezzi di trasmissione, si osserva sempre un segnale riflesso e uno trasmesso. Si pensi per esempio a cosa succede quando ci si pone di fronte a una finestra: parte della luce che incide su di essa viene riflessa all'indietro e parte trasmessa in avanti. Questo problema può essere discusso nel caso semplificato della corda tesa immaginando di saldare due spezzoni di corda di diversa massa lineica. Quando un impulso che viaggia lungo la corda così ottenuta raggiunge il punto di congiunzione, parte della sua energia viene riflessa e parte viene trasmessa. L'ampiezza del segnale incidente sarà maggiore di quella del segnale riflesso, perché parte della sua energia viene ceduta all'onda trasmessa.

Se il secondo spezzone di corda è più denso (maggior massa lineica) di quello lungo cui viaggia il segnale incidente, l'onda riflessa subirà uno sfasamento di 180°, ma il punto di giunzione non è un nodo perché l'ampiezza riflessa è minore di quella incidente. Quindi vi è un effettivo trasferimento di energia dal primo spezzone di corda al secondo. Nel caso in cui la seconda parte della corda sia meno densa, il segnale riflesso è in fase con quello incidente, e ciononostante si osserva un trasferimento di energia attraverso la giunzione. In altri termini il modo migliore per realizzare un'estremità libera consiste nel saldare la corda oggetto di studio a una seconda corda avente massa lineica molto minore. In questo caso l'energia trasmessa alla giunzione è del tutto trascurabile e quindi l'unico effetto della seconda corda è quello di mantenere in tensione la prima.

È importante osservare che la velocità di fase del segnale trasmesso è diversa dalla velocità di fase dei segnali incidente e riflesso; tale velocità, infatti, dipende dalla massa lineica della corda secondo la relazione $v = \sqrt{F/\mu}$. La tensione è la stessa nei due spezzoni di corda, ma la massa lineica è diversa; i segnali più veloci saranno quelli che si propagano nello spezzone meno denso. Va sottolineato, però, che la frequenza dei segnali è la stessa nelle due parti della corda; se così non fosse si osserverebbe una discontinuità alla giunzione. Le onde che hanno stessa frequenza e diversa velocità di fase hanno anche diversa lunghezza d'onda; ricordando la relazione $\lambda = v/\nu$ e che nel mezzo più denso la velocità di fase è più bassa, si può concludere che in tale mezzo il segnale ha lunghezza d'onda minore. Il fenomeno appena descritto, ovvero la variazione della lunghezza d'onda al passaggio di un segnale attraverso la superficie di separazione tra due mezzi, svolgerà una funzione importante nella discussione dei segnali luminosi. Questo fenomeno si osserva anche nel caso delle onde sonore: la corda di una chitarra vibra con una certa lunghezza d'onda, ma l'onda sonora prodotta avrà diversa lunghezza perché la velocità di fase dell'onda meccanica in aria è diversa da quella lungo la corda.

18.10 ONDE STAZIONARIE E RISONANZA

Si consideri una corda di lunghezza L con estremi fissi; si pensi, per esempio, alla corda di una chitarra o di un violino. Pizzicando la corda nel suo punto medio ci si aspetta di osservare un moto del tipo illustrato nella Figura 18.20a. Si instaura nella corda un'oscillazione stazionaria con due nodi negli estremi e un ventre al centro.

Come si spiega questa formazione di un'onda stazionaria? Il profilo iniziale della corda, quello che si osserva subito prima che le nostre dita l'abbandonino al suo moto, potrebbe essere di forma triangolare; tale profilo può essere pensato come la somma degli infiniti contributi sinusoidali

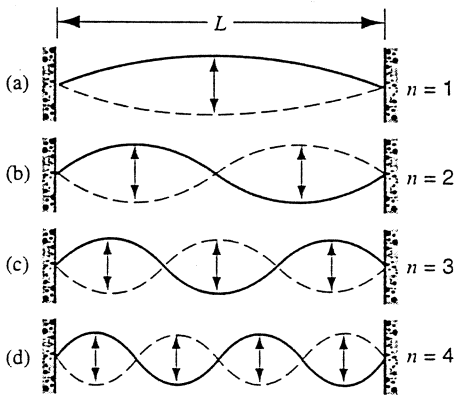


FIGURA 18.20 Rappresentazione di un'onda stazionaria in una corda tesa di lunghezza L con estremi fissi. In figura sono illustratati quattro diversi schemi di oscillazione, differenti per lunghezza d'onda e frequenza.

 ISBN 88-408-1254-7

che si ottengono con l'analisi di Fourier discussa nel Paragrafo 18.7. Ciascuna componente armonica viaggia lungo la corda, viene riflessa agli estremi e interferisce con le altre infinite componenti. Le frequenze più elevate si smorzano rapidamente e quindi sulla corda si instaura l'onda stazionaria di frequenza più bassa possibile (Figura 18.20a). Ricordando che la distanza tra nodi adiacenti vale mezza lunghezza d'onda, lo schema illustrato in Figura 18.20a è tale che $L = \lambda/2$.

È possibile eccitare nella corda un diverso schema di onda stazionaria appoggiando dolcemente un dito sul suo punto centrale, in modo da impedirne il moto, e pizzicando la corda in un punto distante $L/4$ da uno dei suoi estremi. Con questa procedura si ottiene lo schema illustrato nella Figura 18.20b e caratterizzato dalla lunghezza d'onda $\lambda = L$. Seguendo lo stesso procedimento, ma scegliendo opportunamente il punto in cui si tocca la corda e quello in cui la si pizzica, si possono eccitare gli schemi di oscillazione illustrati nelle Figure 18.20c e 18.20d per i quali si ha rispettivamente $L = 3\lambda/2$ ed $L = 2\lambda$.

È facile verificare che in una corda di lunghezza L si possono instaurare modi stazionari di lunghezza d'onda λ tale che

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

ovvero

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18.45}$$

Si osservi che n è il numero di «lobi» che appaiono nei grafici di Figura 18.20. Ricordando che $v = \lambda\nu$ (Equazione 18.13), partendo dall'Equazione 18.45 si riconosce che gli infiniti schemi di oscillazione stazionaria osservabili nella corda hanno frequenze

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{18.46}$$

Tali frequenze sono dette anche modi o schemi normali di oscillazione della corda tesa.

Soffermandosi sull'analogia tra la corda vibrante e l'oscillatore blocco-molla è naturale chiedersi per quale ragione il primo sistema abbia infinite frequenze naturali di oscillazione mentre il secondo ne ha una sola. La differenza fondamentale tra i due sistemi è questa: nella corda tesa la massa è distribuita lungo tutto il sistema, mentre nell'oscillatore blocco-molla la massa è concentrata in un solo elemento. Analogamente, nel caso dell'oscillatore gli effetti elastici sono concentrati nella molla, mentre nel caso della corda sono distribuiti in tutto il sistema. In altri termini il sistema blocco-molla ha un solo modo per immagazzinare energia potenziale ed energia cinetica, mentre la corda tesa ha infiniti modi diversi di farlo.

In generale un sistema oscillante costituito da N elementi ha N diverse frequenze naturali di oscillazione; in Figura 18.21 è illustrato un sistema a masse concentrate con uno, due e tre elementi. Nel limite di N che tende all'infinito il sistema a masse concentrate tende alla corda tesa con i suoi infiniti schemi normali di oscillazione.

Risonanza in una corda tesa

La Figura 18.22 presenta uno studente che pone in oscillazione una corda tesa con un estremo fisso. Nella corda si osservano schemi stazionari come quelli illustrati nella Figura 18.20. Studiando attentamente il fenomeno si nota che la mano dello studente compie oscillazioni di piccola ampiezza avanti e indietro a una delle frequenze date dall'Equazione 18.46. Tali frequenze possono essere pensate come le frequenze naturali di oscillazione del sistema e la mano dello studente è l'agente che esercita l'azione esterna che forza le oscillazioni del sistema. Quando la sollecitazione esterna ha frequenza coincidente con una delle frequenze naturali del sistema, le oscillazioni indotte hanno ampiezza elevata; questa interpretazione dell'esperimento ricorda da vicino il fenomeno della risonanza delle oscillazioni forzate descritto nel Paragrafo 17.8.

Lo studente, facendo oscillare l'estremo libero della corda, compie un lavoro su tale elemento e quindi cede energia al sistema vibrante. Parte di questa energia viene dissipata per attrito con l'aria circostante o viene convertita in energia interna della corda. Così come nel caso dell'oscillatore forzato, però, può accadere che si arrivi a una situazione stazionaria in cui il lavoro compiuto dallo studente permette di bilanciare esattamente l'energia dissipata dal sistema oscillante.

Se lo studente muove la corda a una frequenza diversa da una naturale, l'onda riflessa dall'estremo fisso non raggiun-

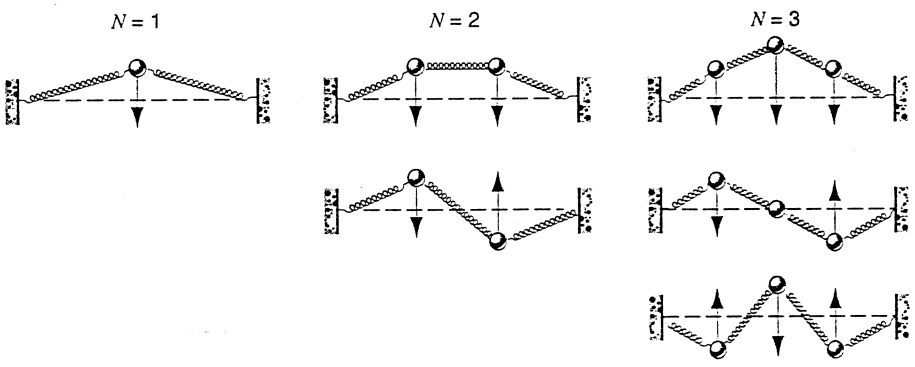


FIGURA 18.21 Alcuni schemi di oscillazione di un oscillatore con masse concentrate costituito da alcuni elementi connessi mediante molle di massa trascurabile. Ogni modo di oscillazione è caratterizzato da una sua frequenza; il numero di modi di oscillazione è uguale al numero di corpi da cui è costituito l'oscillatore.

ISBN 88-408-1254-7

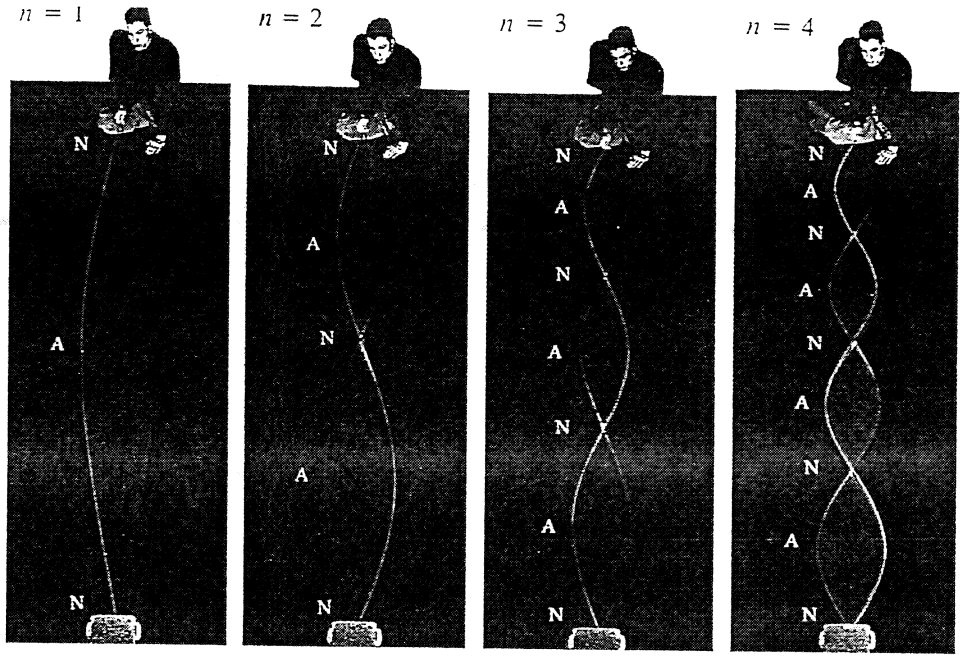


FIGURA 18.22 Uno studente pone in oscillazione una corda tesa, più precisamente un tubo di gomma, a quattro diverse frequenze di risonanza, eccitando, così, quattro diversi modi di oscillazione. Le lettere *N* e *A* indicano rispettivamente i nodi e gli antinodi.

gerà la mano dello studente in fase con il suo moto. In questo caso la corda compierà un lavoro sulla mano e non si produrrà un modo di oscillazione stazionario; le oscillazioni della corda saranno di piccola ampiezza e differiranno poco dal moto della mano dello studente. In questo caso il moto della corda somiglia a quello di un'altalena spinta con frequenza diversa dalla sua frequenza propria. In condizione di risonanza, invece, il moto della mano dello studente è in fase con quello della corda e non vi sono perdite di energia a causa del lavoro compiuto da quest'ultima sulla mano dello studente.

Nella realtà il moto della corda è solo un'ottima approssimazione di un modo stazionario; la frequenza di risonanza non è esattamente uguale a una frequenza normale del sistema, pur essendole molto vicina. Quelli che sembrano dei nodi, infatti, non possono essere dei veri e propri nodi perché dell'energia deve essere trasportata attraverso di essi in modo da compensare le perdite dovute alle sollecitazioni dissipative. In assenza di dissipazione la frequenza di risonanza coinciderebbe esattamente con una frequenza normale e l'ampiezza crescerebbe senza alcun limite all'aumentare dell'energia introdotta dallo studente nel sistema oscillante. A un certo punto si potrebbe addirittura superare il limite di elasticità della corda, che potrebbe spezzarsi.

Se si potesse sollecitare la corda con più frequenze simultaneamente, la corda stessa selezionerebbe quelle coincidenti con le sue frequenze naturali. Le oscillazioni a queste frequenze risulterebbero via via rafforzate, mentre le frequenze spurie verrebbero smorzate. Come si vedrà nel prossimo capitolo, questo principio è alla base del funzionamento degli strumenti musicali.

PROBLEMA SVOLTO 18.4 L'apparato sperimentale illustrato in Figura 18.23 viene realizzato con una corda di lunghezza $L = 1,2$ m e massa lineica di 1,6 g/m. Il motore pone in oscillazione la corda con frequenza di 120 Hz. A quale valore è necessario regolare la tensione, agendo sulla massa del corpo in sospensione, per ottenere uno schema stazionario a quattro lobi?

Soluzione La tensione può essere determinata introducendo l'Equazione 18.19 nell'Equazione 18.46:

$$F = \frac{4L^2\nu_n^2\mu}{n^2}.$$

In corrispondenza di $n = 4$ (quattro lobi) si ha

$$F = \frac{4(1,2\text{ m})^2(120\text{ Hz})^2(0,0016\text{ kg/m})}{4^2} = 8,3\text{ N}.$$

Questo valore della tensione si ottiene sospendendo alla corda un corpo di massa pari a circa 0,85 kg.

PROBLEMA SVOLTO 18.5 Una corda di violino di lunghezza 0,34 m viene accordata sul La fondamentale (440 Hz). (a) Si calcolino le tre lunghezze d'onda risonanti più elevate della corda. (b) Si calcolino le tre corrispondenti lunghezze d'onda che giungono all'orecchio dell'ascoltatore.

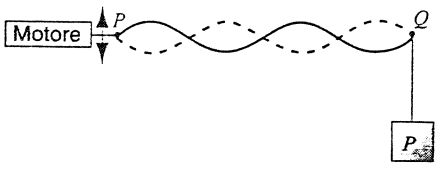


FIGURA 18.23 Problema svolto 18.4. Una corda tesa è connessa a un vibratore; fissata la frequenza del vibratore si otterranno diversi modi di oscillazione a seconda della tensione della corda.

 ISBN 88-408-1254-7

Soluzione (a) Le tre lunghezze d'onda risonanti si possono calcolare tramite l'Equazione 18.45:

$$\lambda_1 = 2L/1 = 2(0{,}34\text{ m}) = 0{,}68\text{ m}.$$
$$\lambda_2 = 2L/2 = 0{,}34\text{ m}.$$
$$\lambda_3 = 2L/3 = 0{,}23\text{ m}.$$

(b) Quando un'onda cambia mezzo di trasmissione la sua frequenza resta invariata, mentre la sua lunghezza d'onda varia in accordo con l'Equazione 18.20. Nel caso in esame nel modo di risonanza più basso si ha $\nu = 440$ Hz e $\lambda = 0,68$ m, quindi la velocità di fase lungo la corda risulta

$$v = \nu\lambda = (440\text{ Hz})(0.68\text{ m}) = 299\text{ m/s}.$$

In aria la velocità di propagazione del suono vale 343 m/s; dall'Equazione 18.20 si ottiene dunque

$$\lambda_{\text{aria}} = \lambda_{\text{corda}}\frac{v_{\text{aria}}}{v_{\text{corda}}} = \lambda_{\text{corda}}\frac{343\text{ m/s}}{299\text{ m/s}} = 1.15\,\lambda_{\text{corda}}.$$

Le tre lunghezze d'onda cercate, infine, valgono

$$\lambda_1 = 0,78\text{ m}, \quad \lambda_2 = 0,39\text{ m} \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 0.26\text{ m}.$$

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

18.1 Onde meccaniche

18.2 Classificazione delle onde

18.3 Onde in moto

1. La funzione

$$y(x,t) = (e^{-(x/b)^2}e^{2xt/b}e^{-t^2})^a$$

(A) non rappresenta un'onda.
(B) rappresenta un'onda con velocità di fase $v = a$.
(C) rappresenta un'onda con velocità di fase $v = a/b$.
(D) rappresenta un'onda con velocità di fase $v = b$.

2. L'onda

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + B\sin(kx - \omega t)$$

può essere posta anche nella forma

$$y(x,t) = D\sin(kx - \omega t - \phi),$$

ove

(A) $D = A + B$ (B) $D = |A| + |B|$
(C) $D^2 = A^2 + B^2$ (D) $D = A - B$

e

(A) $\phi = \arctan(A/B)$. (B) $\phi = \arctan(B/A)$.
(C) $\phi = \arctan(-A/B)$. (D) $\phi = 0$.

3. Si consideri la massima velocità trasversale $u_{\max}$ di una particella investita da un'onda e la velocità di fase v. Quale tra le seguenti affermazioni è vera?

(A) $u_{\max}$ è sempre maggiore di v.
(B) $u_{\max}$ è sempre uguale a v.
(C) $u_{\max}$ è sempre minore di v.
(D) $u_{\max}$ non è correlata a v.

18.4 Velocità di propagazione lungo una corda tesa

4. Una corda viene legata a un gancio fisso e tesa orizzontalmente facendola passare su una puleggia liscia e attaccando all'estremo libero un corpo di massa m. La tensione della corda è T_0 e la velocità di propagazione lungo la corda vale v_0. Una seconda corda viene ora connessa allo stesso gancio, fatta passare sulla medesima puleggia e legata allo stesso corpo di massa m. Si supponga che le due corde sorreggano equamente il corpo m.

(a) La tensione nella prima corda ora vale

(A) $T_0/2$. (B) T_0. (C) $2T_0$.

(b) La velocità di propagazione lungo la prima corda ora vale

(A) $\sqrt{v_0/2}$. (B) $v_0/\sqrt{2}$. (C) $v_0/2$.
(D) v_0. (E) $\sqrt{2}v_0$.

Le due corde vengono poi attorcigliate in una sola corda ottenendo così una massa lineica doppia. La nuova corda viene legata al gancio e al corpo come descritto in precedenza.

(c) La velocità di propagazione lungo la nuova corda vale

(A) $\sqrt{v_0/2}$. (B) $v_0/\sqrt{2}$. (C) $v_0/2$.
(D) v_0. (E) $\sqrt{2}v_0$.

5. Durante la propagazione di un impulso in un mezzo si ha dispersione perché

(A) le componenti di frequenza diversa perdono energia a ritmo differente.
(B) le componenti d'ampiezza diversa perdono energia a ritmo differente.
(C) le componenti di frequenza diversa si propagano nel mezzo con velocità differenti.
(D) le componenti d'ampiezza diversa si propagano nel mezzo con velocità differenti.

18.5 Equazione delle onde

6. Si dica quali tra le funzioni seguenti non sono soluzioni dell'equazione delle onde 18.24.

(A) $y = \sin x\cos t$. (B) $y = \tan(x + t)$.
(C) $y = x^3 - 6x^2t + 12xt^2 - 8t^3$.
(D) $y = \sin(x + t)\cos(x - t)$.

7. Si dica quali tra le funzioni seguenti sono soluzioni dell'equazione delle onde 18.24.

(A) $y = x^2 - t^2$. (B) $y = \sin x^2\sin t$.
(C) $y = \log(x^2 - t^2) - \log(x - t)$.
(D) $y = e^x\sin t$.

18.6 Energia trasportata da un'onda

8. Un'onda di ampiezza A_0 e frequenza ν_0 si propaga lungo una corda e trasporta energia con potenza media P_0. Se l'ampiezza e la frequenza venissero entrambe raddoppiate, la potenza media trasportata sarebbe

(A) P_0. (B) $4P_0$. (C) π^2P_0.
(D) $4\pi^2P_0$. (E) $16P_0$.

9. Un'onda attraversa la posizione $x = 0$ con ampiezza A_0, pulsazione ω_0 e con potenza media P_0. Durante la propagazione lungo la corda l'onda perde energia e quando giunge nel punto $x = l$ la sua potenza media si è ridotta a

$P_0/2$.

(a) Nel punto $x = l$ la pulsazione dell'onda

(A) vale ancora ω_0.

(B) può valere meno di ω_0 ma è sicuramente maggiore di $\omega_0/\sqrt{2}$.

(C) può valere meno di ω_0 ma è sicuramente maggiore di $\omega_0/2$.

(D) è uguale a $\omega_0/\sqrt{2}$.

(E) è uguale a $\omega_0/2$.

(b) Nel punto $x = l$ l'ampiezza dell'onda

(A) vale ancora A_0.

(B) può valere meno di A_0 ma è sicuramente maggiore di $A_0/\sqrt{2}$.

(C) può valere meno di A_0 ma è sicuramente maggiore di $A_0/2$.

(D) è uguale ad $A_0/\sqrt{2}$.

(E) è uguale ad $A_0/2$.

18.7 Principio di sovrapposizione

18.8 Interferenza

10. Due onde viaggiano lungo la medesima corda con stessa velocità di fase, stessa frequenza ν_0, stessa lunghezza d'onda, ma diversa costante di fase ($\phi_1 > \phi_2$) e diversa ampiezza ($A_1 > A_2$).

(a) In virtù del principio di sovrapposizione l'onda risultante ha ampiezza A tale che

(A) $A = A_1 + A_2$. (B) $A = A_1 - A_2$.

(C) $A_2 \leq A \leq A_1$. (D) $A_1 - A_2 \leq A \leq A_1 + A_2$.

(b) In virtù del principio di sovrapposizione l'onda risultante ha frequenza ν tale che

(A) $\nu = \nu_0$. (B) $\nu_0/2 < \nu < \nu_0$.

(C) $0 < \nu < \nu_0$. (D) $\nu = 2\nu_0$.

11. Le due onde date dalle espressioni $y_1 = 2\sin(kx - \omega t + 0)$ e $y_2 = 2\sin(kx - \omega t + 2\pi)$ si propagano lungo la medesima corda. L'onda risultante ha ampiezza

(A) 0. (B) 2. (C) $2\sqrt{2}$. (D) 4.

18.9 Onde stazionarie

12. Si chiarisca il significato fisico del rapporto ω/k nell'equazione delle onde stazionarie 18.42.

(A) Rappresenta la velocità trasversa delle particelle della corda.

(B) Rappresenta la velocità di fase delle due onde componenti.

(C) Rappresenta la velocità dell'onda stazionaria.

(D) Rappresenta una quantità indipendente dalle proprietà fisiche della corda.

13. In una corda si osserva un'onda stazionaria quando lungo la corda si propagano in verso opposto due onde di medesima ampiezza, frequenza e lunghezza d'onda. Se si dimezza la lunghezza d'onda delle componenti, mentre non si modifica la loro velocità di fase, la pulsazione della nuova onda stazionaria risulterà

(A) dimezzata. (B) invariata. (C) raddoppiata.

14. Si supponga che una delle due componenti dell'onda stazionaria descritta dall'Equazione 18.41 abbia un ulteriore fattore di fase costante $\Delta\phi$. Come risulterà modificata l'onda stazionaria?

(A) L'onda stazionaria avrà diversa frequenza.

(B) L'onda stazionaria avrà diversa ampiezza.

(C) La distanza mutua tra i nodi dell'onda stazionaria sarà differente.

(D) Non si verificherà alcuno dei fenomeni descritti in (A), (B) e (C).

15. In un'onda stazionaria la mutua distanza tra i nodi vale Δx. A frequenza fissata si raddoppia la tensione della corda. La separazione tra i nodi diventa

(A) $2\,\Delta x$. (B) $\sqrt{2}\,\Delta x$.

(C) $\Delta x/2$. (D) $\Delta x/\sqrt{2}$.

18.10 Onde stazionarie e risonanza

16. Una corda tesa tra due ganci ha massa lineica μ, lunghezza L e tensione F. La corda vibra alla frequenza più bassa possibile.

(a) La velocità di fase dipende da

(A) μ. (B) F. (C) L.

(D) μ ed F. (E) μ, F ed L.

(b) Il valore della minima frequenza dell'onda stazionaria dipende da

(A) μ. (B) F. (C) L.

(D) μ ed F. (E) μ, F ed L.

(c) Il valore minimo di lunghezza dell'onda stazionaria dipende da

(A) μ. (B) F. (C) L.

(D) μ ed F. (E) μ, F ed L.

17. Un striscia di gomma di 10 cm obbedisce alla legge di Hooke. Se la striscia viene allungata fino a 12 cm si osserva che la minima frequenza di risonanza vale ν_0. Se la striscia viene allungata fino a 13 cm, invece, la minima frequenza di risonanza

(A) risulta maggiore di ν_0.

(B) risulta uguale a ν_0.

(C) risulta minore di ν_0.

(D) cambia, ma non è possibile stabilire come, non conoscendo la costante elastica della gomma e la tensione originale.

QUESITI

1. È possibile verificare sperimentalmente che le onde trasportano energia?

2. L'energia può essere trasportata sia dalle particelle sia dalle onde. Come è possibile distinguere sperimentalmente questi due casi?

3. È possibile generare un moto ondulatorio in cui le particelle del mezzo si muovano di moto armonico semplice? In caso di risposta affermativa si faccia un esempio e si de-

 ISBN 88-408-1254-7

scriva l'onda prodotta.

4. Nello studio della propagazione delle onde nei mezzi elastici si trascura la struttura molecolare del mezzo. Si dica in quali casi questa approssimazione è giustificata.
5. Come variano l'ampiezza e l'intensità nelle onde che si propagano sulla superficie dell'acqua all'aumentare della distanza del fronte dalla sorgente?
6. Come si possono produrre onde piane? Come si possono produrre onde sferiche?
7. Una barca a motore produce una scia che genera onde che giungono a riva a intervalli sempre più brevi. Come si spiega questo fenomeno?
8. Le funzioni elencate di seguito sono tutte nella forma $y = f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt), \qquad y = A\sqrt{x - vt},$$
$$y = A(x + vt)^2, \qquad y = A\log(x + vt),$$

ove A è una costante reale. Si spieghi per quale ragione tali funzioni non sono utili nella descrizione dei fenomeni ondulatori.

9. È possibile produrre una forma d'onda discontinua, per esempio con un angolo netto, che si propaga lungo una corda? Si motivi la risposta.
10. Si spieghi per quale ragione l'intensità delle onde sonore non decade esattamente come l'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente.
11. Quando due onde interferiscono la propagazione dell'una viene alterata dalla presenza dell'altra?
12. Vi è perdita di energia quando due o più onde interferiscono? Si motivi la risposta.
13. Per quale ragione non si osserva interferenza tra le onde sonore emesse da due violini e tra quelle luminose emesse da due lampade?
14. Come illustrato in Figura 18.17, durante il ciclo di un'onda stazionaria una corda tesa si trova per due volte a occupare la posizione orizzontale che assumerebbe a riposo. Si discuta questo aspetto del problema dal punto di vista della conservazione dell'energia.
15. Si supponga che lungo una corda si propaghino due onde di medesima frequenza e medesima ampiezza. A un certo istante la corda appare in posizione orizzontale. Le due onde si propagano necessariamente nello stesso verso? Che relazione esiste tra le fasi delle due onde?
16. Due onde differiscono soltanto in ampiezza e si propagano nello stesso mezzo in versi opposti; in questa situazione si osserva necessariamente un'onda stazionaria? Vi è un trasporto netto di energia? Si osservano nodi?
17. La riflessione parziale di energia dovuta alla presenza di discontinuità nel mezzo di trasmissione è, di solito, un fenomeno indesiderato che può essere controllato per mezzo di «adattatori d'impedenza» posti in corrispondenza delle discontinuità. Per esempio un megafono permette di adattare la colonna d'aria interna alla gola e alla bocca con l'aria esterna. Si forniscano altri esempi e in ciascun caso si spieghi come il dispositivo realizza l'adattamento in impedenza.
18. Si consideri un'onda stazionaria in una corda dovuta alla sovrapposizione di due onde che viaggiano in verso opposto. Si spieghi, usando il principio di sovrapposizione e gli effetti di smorzamento, che nella corda risonante (Figura 18.23) non esistono veri nodi nemmeno nelle estremità fisse.
19. Le onde stazionarie possono essere studiate con l'apparato sperimentale illustrato in Figura 18.23 illuminando la corda con luce fluorescente alimentata dallo stesso generatore connesso al vibratore. La corda mostrerà una variazione di colore molto peculiare nella direzione trasversa. Si spieghi questo fenomeno.
20. Nella discussione relativa alle onde trasversali ci si è occupati del caso in cui lo scostamento delle particelle avviene in un piano, che è stato assunto coincidente con il piano xy. In questo caso l'onda viene detta polarizzata piana. È possibile combinare due onde polarizzate piane su due piani distinti? In caso di risposta affermativa si descriva l'onda risultante.
21. Come si è osservato, le onde trasportano energia. Le onde possono trasportare quantità di moto e momento angolare?
22. Nella zona di Città del Messico colpita dal terremoto del 19 Settembre 1985 aree molto danneggiate si alternarono ad aree con danni lievi. Inoltre, risultarono maggiormente colpiti i palazzi la cui altezza variava tra i cinque e i quindici piani. Si discutano questi fenomeni dal punto di vista delle onde stazionarie e della risonanza.

ESERCIZI

18.1 Onde meccaniche

18.2 Classificazione delle onde

18.3 Onde in moto

1. Un'onda ha velocità di fase 243 m/s e lunghezza d'onda di 3,27 cm. Si calcoli (a) la frequenza e (b) il periodo dell'onda.
2. Facendo dondolare una barca si generano onde sulla superficie di un lago. Si osserva che la barca compie 12 oscillazioni in 30 s e che la cresta di un'onda raggiunge la riva, distante 15 m dalla barca, in 5,0 s. Si determini (a) la frequenza, (b) la velocità di fase e (c) la lunghezza d'onda delle onde.
3. Un'onda sinusoidale di lunghezza d'onda 1,38 m si propaga lungo una corda; il tempo impiegato da un elemento della corda per passare dal suo scostamento massimo alla posizione di equilibrio è pari a 178 ms. Si determini (a) il periodo, (b) la frequenza e (c) la velocità di fase dell'onda.
4. Si scriva la funzione che descrive un'onda trasversale propagantesi lungo una corda nel verso positivo dell'asse x, con lunghezza d'onda 11,4 cm, frequenza 385 Hz e ampiezza 2,13 cm.

18.4 Velocità di propagazione lungo una corda tesa

5. Si assuma che la velocità di fase di un'onda che si propaga lungo una corda tesa sia direttamente proporzionale al rap-

porto F^a/μ^b, ove F è la tensione della corda e μ la massa lineica. Si dimostri, eseguendo un'analisi dimensionale, che $a = 1/2$ e $b = 1/2$.

6. Un'onda trasversale che si propaga lungo una corda è descritta dalla funzione

$$y = (2.30\text{ mm})\sin[(1822\text{ rad/m})x - (588\text{ rad/s})t].$$

Si determini (a) l'ampiezza, (b) la frequenza, (c) la velocità e (d) la lunghezza d'onda. (e) Si calcoli la velocità massima trasversale degli elementi della corda.

7. Un'onda trasversale che si propaga lungo una corda è descritta dalla funzione

$$y = (6.0\text{ cm})\sin[(2.0\pi\text{ rad/m})x + (4.0\pi\text{ rad/s})t].$$

Si determini (a) l'ampiezza, (b) la lunghezza d'onda, (c) la frequenza, (d) la velocità ed (e) il verso di propagazione dell'onda. (f) Si calcoli la velocità massima trasversale degli elementi della corda.

8. Si calcoli la velocità di fase di un'onda trasversale che viaggia lungo una corda tesa di lunghezza 2,15 m e massa 62,5 g, sottoposta alla tensione di 487 N.

9. In una corda sottoposta alla tensione di 123 N un'onda trasversale si propaga con velocità di 172 m/s. Quanto deve valere la tensione affinché la velocità dell'onda risulti di 180 m/s?

10. Un'onda trasversale che si propaga lungo una corda sottoposta alla tensione di 16,3 N è descritta dalla funzione

$$y = (1.8\text{ mm})\sin[(23.8\text{ rad/m})x + (317\text{ rad/s})t].$$

Si determini la massa lineica della corda.

11. Un'onda trasversale armonica viaggia lungo una corda nel verso negativo dell'asse x. In Figura 18.24 è riportato il grafico dello scostamento in funzione della posizione all'istante $t = 0$. La corda è sottoposta alla tensione di 3,6 N e ha massa lineica di 25 g/m. Si determini (a) l'ampiezza, (b) la lunghezza d'onda, (c) la velocità di fase e (d) il periodo dell'onda. (e) Si calcoli, inoltre, la massima velocità trasversale degli elementi della corda. (f) Si scriva, infine, la funzione che descrive l'onda.

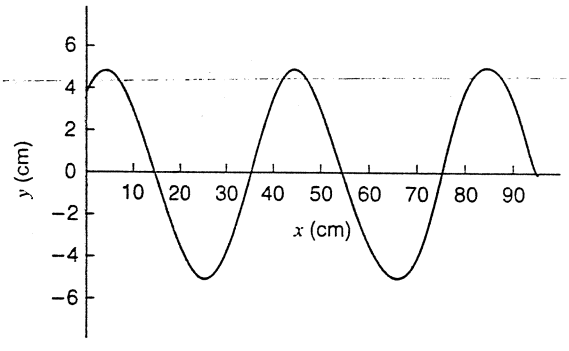


FIGURA 18.24 Esercizio 11.

12. La corda 1 in Figura 18.25a ha massa lineica di 3,31 g/m e la corda 2 ha massa lineica di 4,87 g/m. Le due corde sono sottoposte alla tensione impartita dal corpo di massa $M = 511$ g. (a) Si calcoli la velocità di fase in ciascuna delle due corde. (b) Il corpo viene suddiviso in due parti di masse M_1 ed M_2 tali che $M_1 + M_2 = M$. Le corde e i corpi vengono collegati come illustrato in Figura 18.12b. Si calcoli il valore delle due masse M_1 ed M_2 in corrispondenza del quale la velocità di propagazione nelle due corde resta invariata.

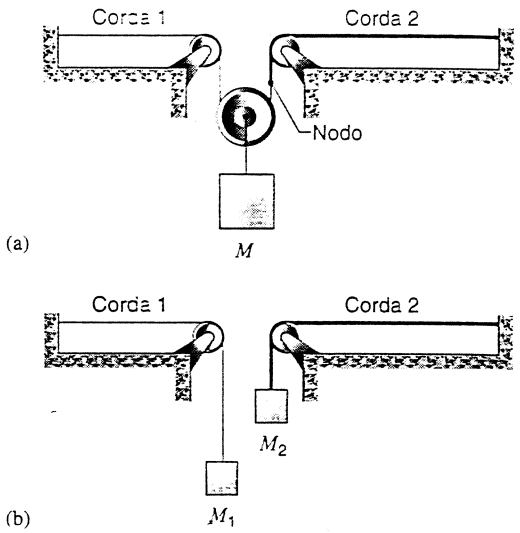


FIGURA 18.25 Esercizio 12.

13. Un filo di lunghezza 10,3 m e massa 97,8 g viene sottoposto alla tensione di 248 N. Si determini in quale punto del filo si incontreranno due impulsi generati agli estremi opposti del filo e separati da un intervallo di 29,6 ms.

18.5 Equazione delle onde

14. In un sistema a simmetria sferica l'equazione di propagazione delle onde si scrive nella forma seguente

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial y}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

(a) Si dimostri che

$$y(r,t) = \frac{A}{r}\sin(kr - \omega t)$$

è una soluzione dell'equazione precedente. (b) Si determinino le dimensioni fisiche della costante A.

18.6 Energia trasportata da un'onda

15. Una corda di 2,72 m ha massa di 263 g ed è sottoposta alla tensione di 36,1 N. Si determini la frequenza di un'onda di ampiezza di 7,70 mm che si propaga lungo la corda e trasferisce la potenza media di 85,5 W.

16. Una sorgente lineare emette un'onda cilindrica. Assumendo che il mezzo non assorba energia si determini come (a) l'intensità e (b) l'ampiezza dell'onda dipendono dalla distanza della sorgente.

17. In un punto a distanza ignota dalla sorgente di un'onda sferica un osservatore misura l'intensità di 1.13 W/m^2. L'osservatore si avvicina di 5,30 m alla sorgente e misura l'intensità di 2.41 W/m^2. Si calcoli la potenza emessa dalla sorgente.

18. (a) Si dimostri che l'intensità I di un'onda è uguale al prodotto della densità di energia u (energia per unità di volume) per la velocità di fase v dell'onda; in altri termini si dimostri che $I = uv$. (b) Si calcoli l'intensità di un'onda sonora emessa da una sorgente di potenza 47,5 kW a distanza 4,82 km da essa. Si assuma che le onde sonore siano sferiche, che la propagazione sia isotropa, che non vi sia assorbimento da parte dell'atmosfera e che la velocità del suono sia 343 m/s.

 ISBN 88-408-1254-7

18.7 Principio di sovrapposizione

18.8 Interferenza

19. determini la differenza di fase tra due onde identiche, che si propagano nello stesso verso lungo una corda tesa, sapendo che la loro somma ha ampiezza uguale a quella delle onde componenti moltiplicata per 1,65. Si esprima la risposta sia in gradi sia in radianti.

20. Due onde sinusoidali viaggiano nello stesso verso, hanno medesima frequenza e sono sfasate di $\pi/2$; le loro ampiezze sono uguali rispettivamente a 3,20 cm e 4,19 cm. Si calcoli l'ampiezza della loro somma.

21. Si dimostri che nel caso in cui le due onde componenti dell'Equazione 18.38 abbiano ampiezze y_{m1} e y_{m2}, la quantità che compare tra parentesi quadre nell'Equazione 18.40 diventa $[y_{m1}^2 + y_{m2}^2 + 2y_{m1}y_{m2}\cos\Delta\phi]^{1/2}$ e la costante di fase diventa

$$\phi = \arcsin\left[\frac{y_{m1}\sin\phi_1 + y_{m2}\sin\phi_2}{(y_{m1}^2 + y_{m2}^2 + 2y_{m1}y_{m2}\cos\Delta\phi)^{1/2}}\right].$$

Si controlli che le espressioni precedenti si riducano alle formule note nel caso in cui $y_{m1} = y_{m2} = y_m$.

22. Due impulsi viaggiano lungo la medesima corda in versi opposti come illustrato nella Figura 18.26. (a) Sapendo che i due pacchetti hanno velocità di fase 2,0 m/s e nell'immagine in Figura distano 6,0 cm, si disegnino i due impulsi dopo 5,0 ms, 10 ms, 15 ms, 20 ms e 25 ms. (b) Cosa accade all'energia nell'istante $t = 15$ ms?

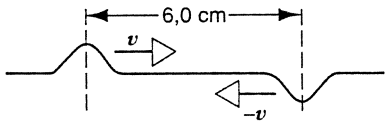


FIGURA 18.26 Esercizio 22.

23. Tre onde sinusoidali viaggiano nel verso positivo dell'asse x lungo la medesima corda tesa. Le tre onde hanno stessa frequenza, ampiezze nei rapporti 1 : (1/2) : (1/3) e le loro costanti di fase sono 0, $\pi/2$ e π. Si disegni il grafico della somma delle tre onde e si discuta il suo comportamento al variare del tempo t.

24. Quattro onde sinusoidali viaggiano nel verso positivo dell'asse x lungo la medesima corda tesa. Le loro frequenze stanno nei rapporti 1 : 2 : 3 : 4 e le loro ampiezze nei rapporti 1 : (1/2) : (1/3) : (1/4). All'istante $t = 0$ e nella posizione $x = 0$ la prima e la terza sono sfasate di 180° rispetto alla seconda e alla quarta. Si disegni il grafico dell'onda risultante all'istante $t = 0$ e si discuta il suo comportamento al crescere di t.

18.9 Onde stazionarie

25. Una corda di lunghezza 8,36 m e massa 122 g viene fissata agli estremi in modo che sia sottoposta alla tensione di 96,7 N. La corda viene posta in vibrazione. (a) Si determini la velocità delle onde lungo la corda. (b) Si determini la lunghezza d'onda e (c) la frequenza della più lunga onda stazionaria.

26. Una corda di nylon di una chitarra ha massa lineica di 7,16 g/m ed è sottoposta alla tensione di 152 N. I supporti fissi distano 89,4 cm. La corda vibra con lo schema di oscillazione illustrato in Figura 18.27. Si calcoli (a) la velocità, (b) la lunghezza d'onda e (c) la frequenza delle componenti che danno origine all'onda stazionaria.

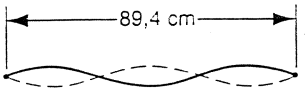


FIGURA 18.27 Esercizio 26.

27. Un'onda trasversale si propaga lungo una corda tesa con legge

$$y = (0{,}15\text{ m})\sin[(0.79\text{ rad/m})x - (13\text{ rad/s})t].$$

(a) Quanto vale lo scostamento dell'elemento di ascissa $x = 2{,}3$ m all'istante $t = 0.16$ s? (b) Si scriva l'equazione di un'onda che sommata alla precedente dia origine a un'onda stazionaria. (c) Si calcoli lo scostamento, per l'onda stazionaria risultante, dell'elemento di ascissa $x = 2.3$ m all'istante $t = 0.16$ s.

28. Un'onda trasversale vibra lungo una corda tesa con legge

$$y = (0{,}520\text{ cm})\sin[(1.14\text{ rad/cm})x]\cos[(137\text{ rad/s})t].$$

(a) Si determinino l'ampiezza e la velocità delle onde che compongono quest'onda risultante. (b) Si determini la distanza tra i nodi. (c) Si calcoli la velocità dell'elemento della corda di ascissa $x = 1{,}47$ cm all'istante $t = 1{,}36$ s.

29. Le vibrazioni di frequenza 622 Hz di un diapason inducono un'onda stazionaria in una corda con estremi fissi. Le onde si propagano lungo la corda con velocità di fase di 388 m/s. L'onda stazionaria ha quattro lobi e ampiezza di 1,90 mm. (a) Si calcoli la lunghezza della corda e (b) si scriva lo scostamento del generico elemento della corda in funzione del tempo e della posizione.

18.10 Onde stazionarie e risonanza

30. Una corda di violino lunga 15 cm vibra nel suo modo normale con $n = 1$. La velocità delle onde lungo la corda vale 250 m/s e quella del suono in aria vale 348 m/s. Si calcoli (a) la frequenza e (b) la lunghezza d'onda delle onde sonore emesse dalla corda.

31. Si calcolino le tre frequenze più basse per le onde stazionarie in un filo di lunghezza 9,88 m e massa 0,107 kg, sottoposto alla tensione di 236 N.

32. Un filo di lunghezza 1,48 m e massa 8,62 g viene teso sottoponendolo alla tensione di 122 N. Gli estremi del filo vengono fissati e il sistema viene posto in oscillazione. Si calcoli (a) la velocità di fase delle onde lungo il filo, (b) la lunghezza d'onda e (c) la frequenza delle onde che generano onde stazionarie con uno o due lobi.

33. Una corda di lunghezza 120 cm ha un estremo fisso e uno attaccato a un anello che può scorrere senza attrito lungo un'asta verticale (Figura 18.28). Si determini la lunghezza d'onda delle tre onde stazionarie più lunghe e si disegnino tali onde.

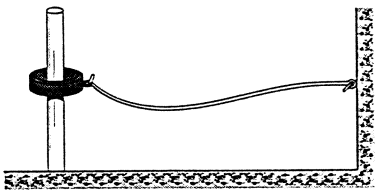


FIGURA 18.28 Esercizio 33.

34. Una corda di 75.6 cm viene tesa tra due supporti fissi: la corda non può eseguire oscillazioni stazionarie con frequenza compresa tra le due frequenze di risonanza 420 Hz e 315 Hz. (a) Si determini la più bassa frequenza di risonanza della corda. (b) Si calcoli la velocità di propagazione delle onde lungo la corda.

PROBLEMI

1. Un'onda ha frequenza 493 Hz e velocità di fase 353 m/s. (a) Si calcoli la distanza tra due punti in cui allo stesso istante l'onda differisce in fase di 55,0°. (b) Si calcoli la differenza di fase nei medesimi punti in istanti di tempo separati da 1,12 ms.

2. Si scriva la funzione che descrive un'onda che viaggia nel verso negativo dell'asse x con ampiezza 1,12 cm, frequenza 548 Hz e velocità 326 m/s.

3. Lo sforzo S all'interno di un filo teso è definito come la tensione cui è sottoposto il filo per unità di superficie della sezione trasversa. (a) Si dimostri che le onde si propagano lungo il filo con velocità di fase $v = (S/\rho)^{1/2}$, ove ρ è la massa volumica del filo. (b) Lo sforzo massimo cui si possono sottoporre i cavi d'acciaio è di 720 MPa. Ricordando che l'acciaio ha massa volumica di 7,8 g/cm^3, si calcoli la massima velocità alla quale si possono propagare le onde trasversali lungo cavi d'acciaio.

4. Un'onda sinusoidale si propaga lungo una corda di massa lineica 3,86 g/cm alla velocità di 82,6 cm/s. Lo scostamento dell'elemento della corda di ascissa $x =$ 9,60 cm varia con il tempo in accordo con la legge $y = (5{,}12\text{ cm})\sin[(1{,}16\text{ rad}) - (4{,}08\text{ rad/s})t]$. Si determini (a) la frequenza e (b) la lunghezza d'onda. (c) Si scriva la legge che regola lo scostamento del generico elemento della corda in funzione della sua posizione e del tempo. (d) Si calcoli la tensione cui è sottoposta la corda.

5. Si dimostri che il valore della pendenza di una corda in un suo qualsiasi punto è uguale al rapporto tra la velocità dell'elemento della corda nel punto considerato e la velocità di fase dell'onda che si propaga lungo la corda stessa.

6. Si consideri un'onda trasversale che viaggia lungo una corda tesa e si calcoli il rapporto tra la velocità massima di un generico elemento della corda e la velocità di fase dell'onda. Si stabilisca se questo rapporto, fissata la frequenza e l'ampiezza dell'onda, dipende dalle caratteristiche fisiche del materiale di cui è costituita la corda.

7. Il tipo di gomma che viene usata nelle palle da baseball e da golf obbedisce alla legge di Hooke per allungamenti variabili in un ampio intervallo. Si consideri un pezzo di questo materiale di lunghezza a riposo L e massa m, che per effetto di una forza F si allunga di ΔL. (a) Si calcoli la velocità di fase delle onde trasversali in questa striscia di materiale in funzione dei parametri m e ΔL e della costante elastica k. (b) Attraverso il risultato ottenuto al punto precedente si dimostri che un impulso trasversale percorre l'intera striscia in un tempo proporzionale a $1/\Delta L$ se $\Delta L \ll L$, ovvero in un tempo costante se $\Delta L \gg L$.

8. Una fune omogenea pende da un gancio infisso nel soffitto. (a) Si dimostri che la velocità di fase delle onde trasversali dipende dalla distanza y del fronte dall'estremo libero della corda secondo la legge $v = \sqrt{gy}$. (b) Si dimostri che il tempo impiegato da un impulso per percorrere l'intera fune vale $t = 2\sqrt{L/g}$. (c) Si stabilisca se i risultati appena ottenuti dipendono dalla massa totale della fune.

9. Un filo non uniforme di lunghezza L e massa M ha massa lineica che varia secondo la legge $\mu = kx$, ove k è una costante reale e x è la distanza misurata lungo il filo a partire da una delle sue estremità. (a) Si dimostri che $M = kL^2/2$. (b) Si dimostri che un impulso generato a una delle due estremità del filo impiega il tempo $t = \sqrt{8ML/(9T)}$, ove T è la tensione, per percorrere l'intero filo.

10. Un anello circolare uniforme, ottenuto piegando una corda, ruota in verso orario in assenza di gravità con velocità tangenziale v (Figura 18.29). Si determini la velocità di fase delle onde trasversali lungo l'anello in funzione del raggio dell'anello stesso e della massa lineica della corda.

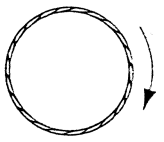


FIGURA 18.29 Problema 10.

11. All'epoca di Handel i violini erano costruiti in modo da suonare un «La» alla frequenza di 422,5 Hz. (Come lo sappiamo?) Nelle orchestre moderne, invece, il «La» corrisponde alla frequenza di 440 Hz. Assumendo che non vi siano altre differenze si calcoli di quanto occorre aumentare la tensione delle corde di un violino di epoca handeliana affinché risulti intonato con un'orchestra dei giorni nostri.

12. Un'onda trasversale sinusoidale viene generata a un capo di una lunga corda orizzontale, di massa lineica 117 g/m e sottoposta alla tensione di 91,4 N, per mezzo di una sbarretta che compie oscillazioni verticali coprendo la distanza di 1,12 cm. Il moto della sbarretta è continuo e viene ripetuto 120 volte al secondo. Si trovi (a) il valore massimo del modulo della velocità trasversale degli elementi della corda e (b) il valore massimo della componente trasversale della tensione. (c) Si dimostri che i due massimi appena calcolati vengono assunti in corrispondenza dello stesso valore della fase dell'onda. Si determini lo scostamento della corda per questo valore della fase. (d) Si calcoli la potenza massima trasportata dall'onda e (e) il corrispondente scostamento y della corda. (f) Si calcoli la potenza minima trasportata dall'onda e (g) il corrispondente scostamento y della corda.

13. Si considerino due sorgenti puntiformi, illustrate nella Figura 18.30, che emettono onde alla stessa frequenza v e con la medesima ampiezza A. Le onde sono inizialmente in fase e questa relazione di fase si mantiene durante tutta la loro propagazione. Si consideri infine un punto P tale

 ISBN 88-408-1254-7

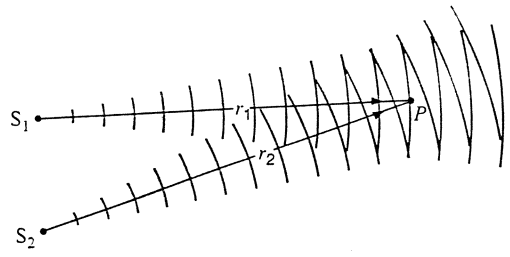


FIGURA 18.30 Problema 13.

che r_1 sia approssimativamente uguale a r_2. (a) Si dimostri che, con ottima approssimazione, come risultato dell'interferenza si ottiene un'onda la cui ampiezza varia con la posizione di P in accordo con la legge

$$y_m = \frac{2A}{r}\cos\left[\frac{k}{2}(r_1 - r_2)\right],$$

ove $r = (r_1 + r_2)/2$. (b) Si dimostri che le due onde si cancellano perfettamente nei punti P tali che $r_1 - r_2 = (n + 1/2)\lambda$, ove n è un numero intero arbitrario. Si dimostri, inoltre, che le onde si sommano perfettamente nei punti P tali che $r_1 - r_2 = n\lambda$, ove n è un numero intero arbitrario. Si ricorda che il luogo geometrico dei punti tali che la differenza delle rispettive distanze da due punti fissi, detti *fuochi*, sia costante, costituisce un'*iperbole*. Allora per ogni valore di n si ha un'iperbole costituita da punti in cui avviene interferenza distruttiva e una seconda iperbole costituita da punti in cui avviene interferenza costruttiva. Nei punti in cui r_1 ed r_2 differiscono sensibilmente, per esempio nei pressi delle sorgenti, le ampiezze delle onde non sono uguali e le cancellazioni sono solo parziali. (Il fenomeno appena descritto è alla base del sistema di navigazione OMEGA.)

14. Una sorgente S e un ricevitore D di segnali ad alta frequenza distano tra loro d. Un'onda riflessa da una superficie piana ad altezza H rispetto al suolo giunge in fase sul ricevitore con l'onda proveniente direttamente dalla sorgente (Figura 18.31). Si ricorda che l'onda incidente e l'onda riflessa formano angoli uguali con la superficie riflettente. Se tale superficie viene spostata all'altezza $H + h$, sul ricevitore D non si osserva alcun segnale. Si determini la relazione che lega i parametri d, h e H alla lunghezza d'onda λ dell'onda emessa dalla sorgente.

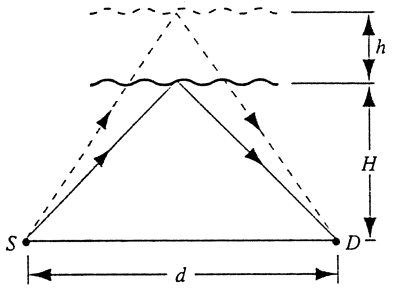


FIGURA 18.31 Problemi 14 e 15.

15. Con riferimento al Problema 14 e alla Figura 18.31, si supponga che le onde emesse dalla sorgente siano onde radio di frequenza 13,0 MHz ($v = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s) e che sia $d = 230$ km e $H = 510$ km. Sapendo che sul ricevitore D il segnale varia dal suo valore massimo a zero per sei volte in un minuto, si determini la velocità con cui si muove la superficie riflettente in direzione verticale. Si osservi a posteriori che la velocità della parete riflettente è così bassa che la distanza percorsa in un minuto è piccola rispetto ad H e d.

16. Si consideri un'onda stazionaria dovuta a due onde identiche che viaggiano in versi opposti. Si dimostri che l'energia cinetica massima raggiunta in ciascun lobo dell'onda vale $2\pi^2\mu y_m^2 v v$.

17. Un'onda di ampiezza A_i viene riflessa parzialmente da una parete; la componente riflessa ha ampiezza A_r. La sovrapposizione tra la componente incidente e quella riflessa dà origine a un modo stazionario il cui inviluppo è illustrato in Figura 18.32. Si definisce il rapporto S d'onda stazionaria come $S = (A_i + A_r)/(A_i - A_r) = A_{max}/A_{min}$ e il rapporto ρ di riflessione come il rapporto tra la potenza media dell'onda riflessa e la potenza media dell'onda incidente. (a) Si verifichi che, se il rapporto di riflessione è uguale a 1, allora $S = \infty$ e che in assenza di riflessione si ha $S = 1$. (b) Si dimostri che a partire dalla misura di S subito prima della parete si può risalire al rapporto di riflessione mediante la formula

$$\rho = \left[\frac{(S-1)^2}{(S+1)^2}\right].$$

18. Si stimi (a) S e (b) ρ per il modo stazionario illustrato in Figura 18.32.

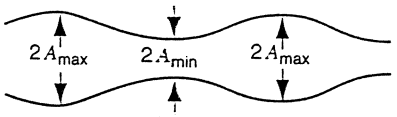


FIGURA 18.32 Problemi 17 e 18.

19. Due corde di massa lineica μ_1 e μ_2 vengono legate assieme nel punto di ascissa $x = 0$ e vengono sottoposte alla tensione T. L'onda $y = A\sin[k_1(x - v_1 t)]$ si propaga lungo la corda 1 e raggiunge la giunzione ove si suddivide in una componente trasmessa e una riflessa. Queste due componenti sono descritte rispettivamente mediante le funzioni $B\sin[k_2(x - v_2 t)]$ e $C\sin[k_1(x + v_1 t)]$. (a) Assumendo che sia $k_1 v_1 = k_2 v_2 = \omega$ e che lo scostamento della giunzione dovuto alle onde incidente e riflessa sia uguale a quello dovuto alla componente trasmessa, si dimostri che $A = B + C$. (b) Assumendo che le corde abbiano sulla giunzione la medesima pendenza (perché quest'ipotesi è ragionevole?), ovvero assumendo che alla giunzione, dy/dx dell'onda 1 sia uguale a dy/dx dell'onda 2, si verifichi che

$$C = A\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} = A\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}.$$

In quali condizioni C risulta negativo?

20. Il fenomeno dell'interferenza si osserva anche per onde di diversa frequenza. (a) Si dimostri che il risultato dell'interferenza tra le due onde

$$y_1(x, t) = y_m\sin(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$y_2(x, t) = y_m\sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

può essere scritto nella forma

$$y(x, t) = 2y_m\cos\left[\frac{1}{2}(\Delta k\, x - \Delta\omega\, t)\right]\sin(k' x - \omega' t).$$

(b) Quanto vale il rapporto ω'/k'? (c) Si descriva qualitativamente il comportamento dell'onda risultante.

21. Si esegue un esperimento sulle onde stazionarie collegando una corda di lunghezza 92,4 cm e massa 44,2 g a uno dei due rebbi di un diapason che vibra perpendicolarmente alla corda con frequenza di 60,0 Hz. Si calcoli la tensione cui deve essere sottoposta la corda affinché l'onda stazionaria indotta abbia quattro lobi.

22. Un filo d'alluminio di lunghezza $L = 60{,}0$ cm e di sezione trasversa $1{,}00 \cdot 10^{-2}$ cm^2 viene saldato a un filo d'acciaio di medesima sezione. Il filo così ottenuto viene sottoposto a un carico di 10,0 kg, come illustrato nella Figura 18.33, in modo che la distanza dalla giunzione alla puleggia sia $L_2 = 86{,}6$ cm. (a) Si determini la frequenza

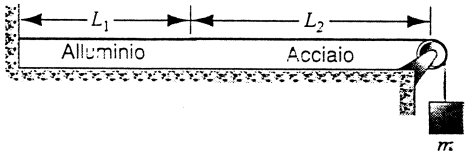


FIGURA 18.33 Problema 22.

minima alla quale una sollecitazione esterna induce onde stazionarie nel filo con un nodo in corrispondenza della giunzione. (b) Si calcoli, alla frequenza determinata in (a), il numero di nodi che si osservano nel filo escludendo dal computo i due estremi fissi. La massa volumica dell'alluminio è di 2,60 g/cm^3 e quella dell'acciaio è di 7,80 g/cm^3.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Si consideri la funzione $y(x) = x(\pi - x)$ definita nell'intervallo $0 < x < \pi$. Si vuole approssimare tale funzione mediante la somma $y(x) = a_1 \sin x + a_3 \sin(3x) + a_5 \sin(5x) + \ldots$ (a) Si ricorra a un programma che permette di tracciare i grafici delle funzioni e si stimi il valore dei coefficienti a_1, a_3 e a_5. (b) Si usi un programma che esegue il calcolo algebrico (per esempio Maple o Mathematica) per valutare gli integrali

$$I_n = \int_0^\pi \sin^2(nx)\,dx$$

e

$$I_0 = \int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,dx,$$

ove n ed m sono due arbitrari numeri interi diversi tra loro. (c) Si calcoli il valore esatto dei coefficienti a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 mediante la formula

$$a_n = \frac{1}{I_n}\int_0^\pi x(\pi - x)\sin(nx)\,dx.$$

Si spieghi per quale motivo con questi numeri l'approssimazione risulta molto buona. Si confrontino i risultati così ottenuti con la stima effettuata «a occhio» al punto (a).

CAPITOLO 19

ONDE ACUSTICHE

Nel Capitolo 18 si sono studiate le onde meccaniche trasversali, per esempio quelle che si propagano lungo una corda tesa; in questo capitolo si passerà all'analisi di quelle longitudinali, in particolare si approfondirà lo studio delle onde acustiche. Ciò che comunemente viene chiamato suono altro non è che una vibrazione meccanica longitudinale di frequenza compresa tra 20 Hz e 20 000 Hz, ovvero compresa nell'intervallo di udibilità dell'orecchio umano. Le vibrazioni longitudinali di frequenza più elevata, dette ultrasuoni, vengono utilizzate nella diagnostica medica e nelle tecniche di localizzazione degli oggetti sottomarini. Le onde longitudinali, ma anche trasversali, di frequenza più bassa sono dette infrasuoni e, per esempio, vengono prodotte durante i terremoti sotto forma di onde sismiche. In questo capitolo verranno discussi la propagazione, le proprietà e i metodi di produzione delle onde acustiche.

19.1 PROPRIETÀ DELLE ONDE ACUSTICHE

Le onde acustiche, che comprendono i suoni e i rumori, sono onde di natura meccanica, così come le onde trasversali che si propagano lungo una corda tesa: in esse la perturbazione si propaga grazie all'azione delle forze elastiche tra le particelle del mezzo. Le onde meccaniche si propagano in qualsiasi mezzo materiale, indipendentemente dal suo stato di aggregazione (solido, liquido o gassoso). Nei solidi le onde possono essere sia trasversali che longitudinali, mentre nei fluidi sono possibili le sole onde longitudinali, perché il mezzo non può esercitare sforzi trasversali rispetto alla direzione di propagazione della perturbazione.

A rigore con le parole suono e rumore si indicano soltanto le onde meccaniche longitudinali con frequenza compresa nell'intervallo di udibilità dell'orecchio umano, ovvero compresa tra 20 Hz e 20 000 Hz. Ciononostante la disciplina che si occupa dello studio del suono e del rumore, l'*acustica*, comprende lo studio delle onde meccaniche di qualsiasi frequenza e di direzione di oscillazione longitudinale, e anche trasversale nel caso dei solidi. In questo capitolo ci si concentrerà essenzialmente sullo studio delle onde acustiche in aria, le quali sono necessariamente longitudinali.

Sebbene una sorgente piccola in una regione libera generi onde di natura tridimensionale, in prima approssimazione, per semplificare il prioblema, si considererà il caso di onde unidimensionali. In Figura 19.1 è illustrato un metodo per la produzione di onde meccaniche longitudinali unidimensio-

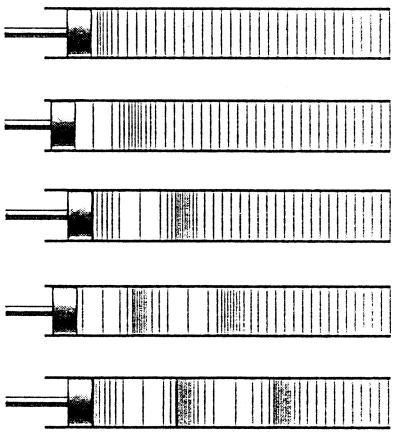


FIGURA 19.1 Onde acustiche generate in un tubo per mezzo di un pistone mobile, che svolge la funzione della membrana semovente degli altoparlanti. Le linee verticali suddividono il mezzo comprimibile in regioni di uguali masse.

 ISBN 88-408-1254-7

nali all'interno di un tubo pieno d'aria. A una delle estremità del tubo viene introdotto un pistone, che svolge la funzione della membrana mobile di un altoparlante e che, muovendosi avanti e indietro, comprime ed espande l'aria ad esso vicina con un ritmo regolare. Questa perturbazione viaggia lungo il tubo e costituisce un'onda acustica. Le particelle d'aria investite dall'onda esibiranno un moto oscillatorio attorno alla loro posizione di equilibrio nella direzione di propagazione dell'onda.

Come si vedrà nel seguito, l'onda acustica può essere descritta sia in termini di variazione della pressione locale lungo il tubo, sia in termini dello spostamento delle particelle d'aria attorno alla loro posizione di equilibrio. Queste due descrizioni hanno lo stesso contenuto di informazione, ma una formulazione matematica differente.

19.2 ONDE ACUSTICHE IN MOTO

Le oscillazioni del pistone illustrato in Figura 19.1 inducono variazioni di massa volumica dell'aria nel tubo da istante a istante e da punto a punto. Le regioni con elevata massa volumica sono dette *compressioni*, mentre quelle a minor massa volumica sono dette *rarefazioni*. Le compressioni e le rarefazioni viaggiano assieme all'onda lungo il tubo.

La massa volumica dell'aria nel tubo può essere pensata come una funzione $\rho(x, t)$ della posizione e del tempo; se il tubo non viene perturbato, tale funzione è identicamente uguale a un valore costante ρ_0; il passaggio dell'onda acustica causa fluttuazioni di massa volumica $\Delta\rho(x, t)$ molto piccole rispetto a ρ_0. Si ha, quindi, $\rho(x, t) = \rho_0 + \Delta\rho(x, t)$, con $\Delta\rho(x, t)$ che può assumere valori sia positivi sia negativi, ma tali che sia sempre $|\Delta\rho(x, t)| \ll \rho_0$.

La propagazione dell'onda può essere descritta anche in termini della variazione di pressione locale dell'aria nel tubo; le variazioni di pressione sono in fase con quelle di massa volumica: se in un certo punto del tubo a un certo istante si ha un massimo della massa volumica, si dovrà avere anche un massimo della pressione dell'aria. La pressione costante all'interno del tubo non perturbato viene denotata con p_0; le variazioni di pressione $\Delta p(x, t)$ dovute al passaggio dell'onda acustica possono essere sia positive sia negative, ma in ogni caso di modulo piccolo rispetto a p_0. La pressione dell'aria nel punto di ascissa x all'istante t è data da $p(x, t) = p_0 + \Delta p(x, t)$.

Supponiamo che il moto del pistone sia descritto da una funzione trigonometrica di tipo seno o coseno; anche la variazione di massa volumica e di pressione sarà descritta da una funzione sinusoidale. In Figura 19.2a è illustrata un'istantanea della massa volumica dell'aria nel tubo a un certo istante; le Figure 19.2b e 19.2c, invece, mostrano l'andamento della massa volumica e della pressione allo stesso istante in funzione della coordinata spaziale x. La massa volumica fluttua con ampiezza $\Delta\rho_m$ attorno al valore imperturbato ρ_0 e la pressione fluttua con ampiezza Δp_m attorno al valore imperturbato p_0. Nel caso sinusoidale, dimenti-

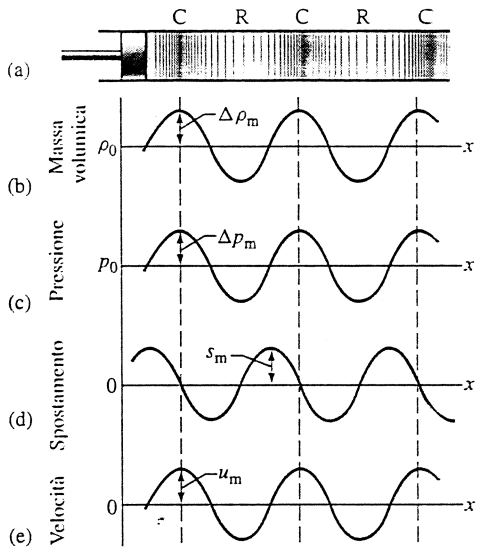


FIGURA 19.2 (a) Compressioni C e rarefazioni R dell'aria, prodotte da un'onda acustica che si propaga in un tubo. (b) Istantanea della massa volumica che oscilla con ampiezza $\Delta\rho_m$ attorno al valore ρ_0. (c) Istantanea della pressione che oscilla con ampiezza Δp_m attorno al valore p_0. (d) Spostamento orizzontale dalla posizione di equilibrio di un volumetto d'aria individuato dall'ascissa x. (e) Velocità longitudinale dei volumetti d'aria.

cando per il momento le costanti di fase, si può scrivere

$$\Delta\rho(x, t) = \Delta\rho_m \sin(kx - \omega t) \tag{19.1}$$

e, analogamente per la pressione,

$$\Delta p(x, t) = \Delta p_m \sin(kx - \omega t). \tag{19.2}$$

Di solito la descrizione più conveniente ai fini pratici è quella espressa in termini della variazione di pressione locale.

La relazione tra l'ampiezza di pressione Δp_m e quella di massa volumica $\Delta\rho_m$ dipende dalle proprietà meccaniche del mezzo considerato. Nell'Equazione 15.5 è stata introdotta la nozione di modulo di comprimibilità $B = -\Delta p/(\Delta V/V)$, che lega la variazione relativa di volume di un fluido alla sua variazione di pressione. Ponendo $\rho = m/V$ si ha $d\rho = -(m/V)^2\, dV = -(\rho/V)\, dV$. Sostituendo ai differenziali le differenze finite si ha $\Delta\rho = -\rho(\Delta V/V)$ e tramite l'Equazione 15.5 si può sostituire $\Delta V/V$ con $-\Delta p/B$. Rimpiazzando, infine, la massa volumica ρ con il suo valore imperturbato ρ_0, cosa lecita se si ricorda che nel caso delle onde acustiche le fluttuazioni di massa volumica sono molto minori della massa volumica a riposo, si ha che

$$\Delta\rho = -\rho\frac{\Delta V}{V} = -\rho_0\frac{-\Delta p}{B} = \Delta p\frac{\rho_0}{B}$$

e quindi, in termini delle ampiezze di massa volumica e di pressione,

$$\Delta\rho_m = \Delta p_m\frac{\rho_0}{B}. \tag{19.3}$$

Dal momento che l'Equazione 15.5 vale per tutti i fluidi, e non soltanto per l'aria, anche l'Equazione 19.3 è valida per le onde acustiche in un fluido qualsivoglia.

L'uso dell'Equazione 19.3 richiede un minimo di cautela: quando un'onda acustica si propaga lungo il tubo, piccole porzioni di aria vengono alternativamente compresse ed espanse. È noto che per comprimere il volume di un fluido è necessario compiere su di esso un lavoro, quindi la sua energia interna e la sua temperatura aumentano. Nei fluidi, però, la quantità di calore che può migrare da un elemento a uno adiacente è molto piccola e quindi l'energia interna immagazzinata in un elemento compresso non ha tempo sufficiente, a causa della frequenza elevata delle onde acustiche, per essere trasferita a un elemento adiacente più freddo investito da una rarefazione. Un regime di questo tipo è detto *adiabatico*, perché non vi sono coinvolti trasferimenti di calore. Nell'Equazione 19.3, quindi, bisogna necessariamente usare il modulo di comprimibilità adiabatico. In caso contrario, cioè se vi fosse tempo sufficiente per osservare un flusso di calore tra regioni adiacenti, si dovrebbe usare il modulo di comprimibilità *isotermo* (a temperatura costante). Nel caso di un gas come l'aria, il modulo di comprimibilità adiabatico è 1,4 volte maggiore di quello isotermo; i processi isotermi e adiabatici verranno studiati in dettaglio nel Capitolo 23.

Il suono come onda di spostamento

Nel Capitolo 18 è risultato molto istruttivo studiare lo spostamento e la velocità delle particelle del mezzo nel quale si propaga un'onda meccanica trasversale; analogamente è di grande utilità e interesse effettuare lo stesso studio nel caso delle onde longitudinali. In questo caso con l'espressione «particelle» del mezzo ci si riferirà a elementi di volume del fluido.

Nella Figura 19.3 è illustrato un elemento di volume del gas che si trova all'interno del tubo in cui si propaga l'onda acustica; con δm si denota la massa totale dell'elemento, con x l'ascissa della posizione da esso occupata quando il gas è imperturbato, con δx il suo spessore e con A l'area della sezione trasversale del tubo. La massa volumica a riposo del gas può essere espressa come

$$\rho_0 = \frac{\delta m}{A\,\delta x}. \tag{19.4}$$

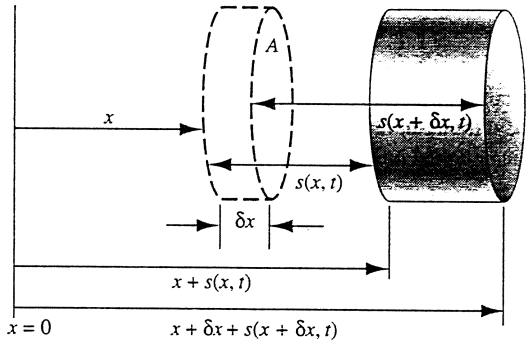


FIGURA 19.3 Volumetto d'aria di larghezza δx e sezione trasversale A la cui posizione iniziale era individuata dall'ascissa x. Lo spostamento dell'elemento dovuto all'onda acustica vale $s(x, t)$.

A causa del passaggio dell'onda acustica l'elemento di volume considerato oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio; queste oscillazioni possono essere descritte mediante una funzione $s(x, t)$. Il valore di $s(x, t)$ dipende sia dalla coordinata spaziale sia da quella temporale perché lo spostamento degli elementi di volume varia da punto a punto e da istante a istante poiché elementi di volume differenti subiscono spostamenti differenti per effetto del passaggio dell'onda acustica. La funzione $s(x, t)$ ricorda la funzione $y(x, t)$ introdotta nella discussione delle onde trasversali, ma con una differenza importante: lo spostamento s è misurato lungo la direzione di propagazione della perturbazione, mentre lo spostamento y viene misurato in una direzione ad essa ortogonale.

Per effetto dell'onda acustica la base sinistra dell'elemento di volume sotto esame si sposta dalla posizione di equilibrio x alla posizione $x + s(x, t)$ (Figura 19.3). La base destra, invece, si sposta dalla sua posizione di equilibrio $x + \delta x$ alla posizione $x + \delta x + s(x + \delta x, t)$. L'elemento di volume, quindi, si sposta e modifica la sua geometria; il suo spessore, infatti, passa da δx a $[x + \delta x + s(x + \delta x, t)] - [x + s(x, t)] = \delta x + s(x + \delta x, t) - s(x, t)$, che può essere riscritto come

$$\delta x \left[1 + \frac{s(x + \delta x, t) - s(x, t)}{\delta x}\right].$$

Nel limite di elementi di volume di spessore infinitesimo, ovvero nel limite in cui $\delta x \to 0$, il rapporto presente nell'espressione precedente tende alla derivata parziale $\partial s/\partial x$ della funzione $s(x, t)$ calcolata rispetto alla coordinata spaziale x; lo spessore può essere, quindi, scritto come $\delta x[1 + \partial s/\partial x]$. La massa volumica dell'elemento di fluido considerato vale

$$\rho = \frac{\delta m}{A\,\delta x(1 + \partial s/\partial x)} = \frac{\rho_0}{1 + \partial s/\partial x}, \tag{19.5}$$

ove si è introdotta l'Equazione 19.4 per la massa volumica a riposo ρ_0. Ricordando che ci si limita a considerare casi in cui la variazione di massa volumica è piccola, si ha che $\partial s/\partial x \ll 1$ e quindi lo sviluppo in serie $(1 + z)^{-1} = 1 - z + \cdots$, ricordato nell'Appendice I, è applicabile in questo caso troncandolo al primo ordine. In definitiva si ottiene $\rho = \rho_0(1 - \partial s/\partial x)$. La variazione di massa volumica $\Delta\rho(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0$ è data, quindi, dall'espressione

$$\Delta\rho(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{19.6}$$

Nel caso di onde sinusoidali, per la variazione di massa volumica $\Delta\rho(x, t)$ è lecito usare l'Espressione 19.1; si ottiene

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\Delta\rho(x, t)}{\rho_0} = -\frac{\Delta\rho_m}{\rho_0}\sin(kx - \omega t).$$

 ISBN 88-408-1254-7

Integrando l'uguaglianza precedente rispetto alla variabile spaziale si calcola lo spostamento

$$s(x,t) = \frac{\Delta\rho_m}{k\rho_0}\cos(kx - \omega t) = s_m \cos(kx - \omega t), \quad (19.7)$$

ove è stato introdotto lo spostamento massimo

$$s_m = \frac{\Delta\rho_m}{k\rho_0} = \frac{\Delta p_m}{kB}. \quad (19.8)$$

Nell'ultima uguaglianza si è introdotta l'Equazione 19.3 che lega l'ampiezza di pressione Δp_m all'ampiezza di massa volumica $\Delta\rho_m$.

È interessante osservare che lo spostamento è espresso mediante un coseno mentre la massa volumica e la pressione sono espresse in termini di una funzione seno; si può quindi concludere che l'onda di spostamento è sfasata di 90° rispetto alle onde di pressione e di massa volumica. In Figura 19.2d è riportato lo spostamento in funzione della coordinata spaziale x a un istante fissato. Nei punti in cui la pressione e la massa volumica del fluido hanno valore massimo o minimo, lo spostamento dell'elemento di volume del fluido è nullo; lo spostamento è a sua volta massimo o minimo per quegli elementi che allo stesso istante hanno massa volumica e pressione uguali ai corrispondenti valori a riposo. In una compressione, per esempio, elementi di fluido a sinistra hanno spostamento positivo, mentre elementi a destra hanno spostamento negativo; ciò è coerente con il fatto che l'elemento centrale della compressione ha spostamento nullo. La velocità longitudinale alla quale un elemento di volume oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio si può calcolare facilmente derivando parzialmente la funzione spostamento rispetto alla variabile temporale; si ha, infatti,

$$u_x(x,t) = \frac{\partial s}{\partial t} = \omega s_m \sin(kx - \omega t) = \\ = u_m \sin(kx - \omega t), \quad (19.9)$$

ove è stata introdotta la velocità longitudinale massima

$$u_m = \omega s_m = \omega\frac{\Delta p_m}{kB} = v\frac{\Delta p_m}{B}. \quad (19.10)$$

Si osservi che negli ultimi due passaggi sono state usate le Equazioni 19.8 e 18.13 ($v = \omega/k$). Non è superfluo osservare ancora una volta che la velocità appena calcolata è una velocità longitudinale, ovvero relativa allo spostamento delle particelle lungo la direzione di propagazione della perturbazione, che coincide con l'asse del tubo. Come illustrato nella Figura 19.2e la velocità longitudinale varia in fase con la pressione e la massa volumica del gas nel tubo.

Sebbene abbiamo descritto un'onda acustica come un'onda di spostamento o una di pressione, va osservato che le due descrizioni non sono del tutto equivalenti. In realtà è possibile passare da una descrizione all'altra soltanto nel caso in cui si consideri una sola onda longitudinale unidimensionale. La descrizione in termini di onda di spostamento condurrebbe a conclusioni profondamente sbagliate se si studiasse la riflessione di un'onda acustica a una delle estremità di un tubo oppure se si volesse analizzare la sovrapposizione di due onde acustiche in un punto del mezzo di trasmissione. Si considerino due onde acustiche unidimensionali provenienti da due diverse sorgenti, per esempio due diversi altoparlanti, che viaggiano nello stesso mezzo lungo due diverse direzioni e che, sovrapponendosi in un punto, inducono in un suo intorno le variazioni di pressione Δp e $-\Delta p$. Sulla base della descrizione dell'onda in termini di onda di pressione è facile concludere, ricordando il carattere scalare della pressione, che l'interferenza tra le due componenti risulterà completamente distruttiva. I due spostamenti dell'elemento di volume, però, essendo diretti lungo direzioni differenti avranno, in virtù del loro carattere vettoriale, somma non nulla. Al fine di evitare difficoltà di questa natura *è preferibile descrivere le onde acustiche in termini di onde di pressione*. Come si vedrà nel prossimo paragrafo, infine, va osservato che l'orecchio umano e i microfoni sono sensibili alle variazioni di pressione piuttosto che agli spostamenti delle particelle d'aria.

PROBLEMA SVOLTO 19.1 La massima variazione di pressione Δp_m che l'orecchio umano può tollerare è di 28 Pa alla frequenza di 1000 Hz. Il suono più debole che può essere percepito alla frequenza di 1000 Hz ha ampiezza di pressione $2{,}8 \cdot 10^{-5}$ Pa. Si determini la massa volumica e lo spostamento massimo corrispondenti. In condizioni standard il modulo di comprimibilità dell'aria vale $1.4 \cdot 10^5$Pa e la velocità del suono nell'aria vale 343 m/s.

Soluzione Il numero d'onda angolare è dato da

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi \cdot 10^3\text{Hz}}{343\text{ m/s}} = 18{,}3\text{ rad/m}.$$

In queste condizioni la massa volumica dell'aria vale 1,21 kg/m^3 e quindi, introducendo l'Equazione 19.3, per $\Delta p_m = 28$ Pa si ha

$$\Delta\rho_m = \Delta p_m\frac{\rho_0}{B} = (28\text{ Pa})\frac{1{,}21\text{ kg/m}^3}{1{,}4 \cdot 10^5\text{ Pa}} = \\ = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\text{ kg/m}^3$$

e con l'Equazione 19.8 si ottiene anche

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{kB} = \frac{28\text{ Pa}}{(18{,}3\text{ rad/m})(1{,}4 \cdot 10^5\text{ Pa})} = \\ = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\text{ m}.$$

Lo spostamento corrispondente ai suoni più forti è dell'ordine di 10^{-5} m; si tratta, in realtà, di uno spostamento molto piccolo. Per i suoni più deboli si ha, analogamente,

$$\Delta\rho_m = (2{,}8 \cdot 10^{-5}\text{ Pa})\frac{1{,}21\text{ kg/m}^3}{1{,}4 \cdot 10^5\text{ Pa}} = \\ = 2{,}4 \cdot 10^{-10}\text{ kg/m}^3$$

e

$$s_m = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-5}\text{ Pa}}{(18.3\text{ rad/m})(1{,}4 \cdot 10^5\text{ Pa})} = \\ = 1{,}1 \cdot 10^{-11}\text{ m}.$$

ISBN 88-408-1254-7

In questo caso l'ordine di grandezza dello spostamento è pari a un decimo delle dimensioni atomiche; questo risultato fa riflettere sulla grande sensibilità dell'orecchio umano.

19.3 VELOCITÀ DEL SUONO

La velocità di fase delle onde meccaniche longitudinali, così come quella delle onde trasversali, è proporzionale al rapporto tra una proprietà elastica del mezzo e una legata alla sua inerzia. Una quantità che esprime l'inerzia del mezzo è sicuramente la massa volumica a riposo ρ_0; una sua caratteristica elastica è, invece, la pressione a riposo p_0. In analogia con la discussione effettuata nel Paragrafo 18.4 si può immaginare che la velocità di fase v sia legata a queste due quantità dalla relazione

$$v \propto \frac{p_0^a}{\rho_0^b}.$$

Una semplice analisi dimensionale, inoltre, permette di ricavare i due esponenti incogniti: $a = b = 1/2$. In questo caso, però, la fortuna non è dalla nostra parte; infatti l'espressione $v = \sqrt{p_0/\rho_0}$ non è corretta; per esempio nell'aria alla temperatura di 20 °C la formula precedente fornirebbe il valore $v = 289$ m/s che non è in buon accordo con il valore sperimentale $v = 343$ m/s. L'analisi dimensionale, infatti, può tutt'al più fornire la dipendenza funzionale della velocità v dal rapporto p_0/ρ_0, ma sicuramente non ci permette di determinare il valore di una qualsiasi costante adimensionale che rientri in qualche modo nell'equazione. È evidente che in questo caso la nostra analisi fallisce perché non siamo in grado di trovare il valore di una costante non trascurabile.

Un risultato preciso può essere ottenuto soltanto mediante l'analisi meccanica della propagazione dell'onda acustica; piuttosto che un'onda sinusoidale è conveniente pensare alla propagazione di un singolo impulso di compressione lungo il tubo riempito di gas. La velocità dell'impulso sarà la velocità di fase dell'onda. All'interno dell'impulso, che si suppone avere larghezza L, vi sarà un aumento di pressione che si denota con Δp.

In Figura 19.4a è illustrato l'impulso all'istante $t = 0$ subito prima di penetrare all'interno di un elemento di fluido di larghezza L_0, sezione trasversale A e pressione a riposo p_0. All'istante $t > 0$ il fronte anteriore dell'impulso avrà raggiunto la seconda estremità dell'elemento di fluido la cui larghezza è stata compressa al valore L (Figura 19.4b).

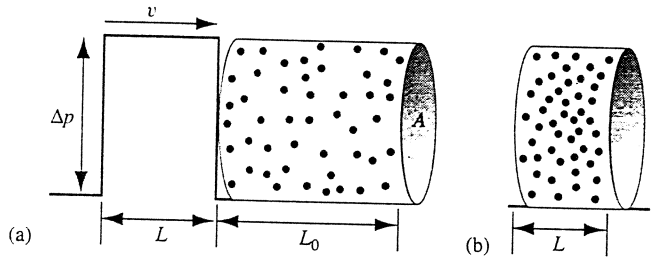


FIGURA 19.4 (a) Impulso di compressione sul punto di penetrare in una colonna di fluido di lunghezza a riposo L_0. (b) All'istante t l'impulso ha raggiunto l'estremità destra della colonna di fluido e ne ha modificato la lunghezza al valore L.

Durante l'intervallo di tempo considerato, sul nostro elemento agiscono due forze: l'impulso di compressione esercita la forza di modulo $(p_0 + \Delta p)A$ diretta verso destra, mentre la parte restante del fluido, non rappresentata in figura, esercita sull'elemento la forza di modulo $p_0 A$ diretta verso sinistra. La somma di questi due contributi è uguale a una forza di modulo $\Delta p A$ diretta verso destra.

All'elemento di fluido non si può applicare la seconda legge di Newton nella sua formulazione valida per le particelle; infatti l'elemento di fluido è costituito da numerosi punti materiali, ognuno dei quali ha il suo moto particolare. È possibile, però, applicare la seconda legge di Newton per i sistemi di particelle, ovvero l'Equazione 7.17 che ha la forma $\sum F_{\text{ext},x} = M a_{\text{cm},x}$. Se si fissa come origine dell'asse x la posizione dell'estremità destra dell'elemento di fluido, il suo centro di massa si muove, nell'intervallo di tempo considerato, dalla posizione di ascissa $-L_0/2$ alla posizione $-L/2$. Dall'Equazione 2.28 nella forma $x - x_0 = a_x t^2/2$ si ha che l'accelerazione del centro di massa è data da

$$a_{\text{cm},x} = \frac{2(x - x_0)}{t^2} = \frac{2[(-L/2) - (-L_0/2)]}{t^2} = \\ = -\frac{\Delta L}{t^2}, \tag{19.11}$$

ove si è introdotta la variazione di larghezza dell'elemento $\Delta L = L - L_0$. Osservando che la massa totale dell'elemento di fluido è $M = \rho_0 A L_0$ e applicando la seconda legge di Newton si ha

$$A\,\Delta p = (\rho_0 A L_0)(-\Delta L/t^2). \tag{19.12}$$

Se l'impulso si muove a velocità costante v, allora il tempo necessario ad attraversare l'intero elemento di fluido è $t = L_0/v$; sostituendo questa espressione nella (19.12) ed eseguendo alcuni passaggi algebrici si ottiene

$$v^2 = \frac{1}{\rho_0}\frac{-\Delta p}{A\,\Delta L/(AL_0)}. \tag{19.13}$$

La quantità $A\,\Delta L$ è proprio la variazione di volume ΔV dell'elemento di fluido e AL_0 è il suo volume originario V. Inserendo queste espressioni nella (19.13) si ha che il secondo fattore presente al secondo membro diventa $-\Delta p/(\Delta V/V)$, che è proprio il modulo di comprimibilità del fluido. Calcolando la radice quadrata dei due membri dell'Equazione 19.13 si ha, infine,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}. \tag{19.14}$$

L'Equazione 19.14 esprime la velocità di fase alla quale si propaga un'onda acustica all'interno di un fluido in funzione del suo modulo di comprimibilità e della sua massa volumica a riposo. È importante osservare che, così come nel caso delle onde trasversali che viaggiano lungo una

 ISBN 88-408-1254-7

corda tesa, anche quelle acustiche hanno velocità di fase dipendente soltanto dalle caratteristiche del mezzo e non da quelle dell'onda, come, per esempio, la sua frequenza o la sua lunghezza d'onda.

Nei gas il modulo di comprimibilità assume la forma $B = \gamma p_0$, ove γ è il *rapporto dei calori specifici* (vedi Capitolo 23) il cui valore dipende dal tipo di gas e tipicamente è compreso tra 1,3 e 1,7. Per l'aria si ha $\gamma = 1{,}4$; a questo numero è dovuta la discrepanza tra il valore sperimentale della velocità del suono nell'aria e quello ottenuto all'inizio di questo paragrafo sulla base di una semplice analisi dimensionale.

L'Equazione 19.14 si applica alla propagazione delle onde acustiche nei fluidi (gas e liquidi), ma non nei solidi; in questi ultimi, infatti, la presenza di moduli di taglio e di compressione rende l'analisi assai più complessa; in particolare non ci si può ridurre al semplice caso unidimensionale studiato in questo paragrafo.

Alcuni valori della velocità di propagazione del suono in diverse sostanze sono riportati nella Tabella 19.1.

In questo paragrafo il fluido è stato trattato come un mezzo continuo. Nel caso dei gas tale ipotesi non è giustificata, dal momento che gli spazi vuoti tra le molecole del gas sono molto più grandi delle dimensioni tipiche delle molecole stesse, le quali si muovono più o meno indipendentemente seguendo un moto di agitazione termica. Le oscillazioni prodotte dal passaggio dell'onda acustica, quindi, si sovrappongono al moto caotico delle molecole; l'impulso fornito a una certa molecola viene trasferito a una seconda molecola solo dopo che la prima ha percorso lo spazio vuoto che la separa dalla seconda. Da queste osservazioni emerge che vi è una stretta relazione tra la velocità di propagazione del suono nel gas e la velocità media del moto di agitazione termica delle molecole. In particolare se si aumenta la temperatura del gas si osserva un aumento della velocità molecolare media e, con la stessa legge, si osserva un aumento della velocità di fase del suono.

TABELLA 19.1 Velocità del suono[a]

Mezzo	*Velocità* (m/s)
Gas	
Aria (0 °C)	331
Aria (20 °C)	343
Elio	965
Idrogeno	1284
Liquidi	
Acqua (0 °C)	1402
Acqua (20 °C)	1482
Acqua marina[b]	1522
Solidi[c]	
Alluminio	6420
Acciaio	5941
Granito	6000

[a] In assenza di indicazione esplicita si sottintende la temperatura di 0 °C e la pressione di 1 bar.

[b] Temperatura di 20 °C e salinità del 2,5 %.

[c] Onde longitudinali; la velocità delle onde trasversali è approssimativamente uguale alla metà di quella delle onde longitudinali.

19.4 POTENZA E INTENSITÀ DELLE ONDE ACUSTICHE

Nel Paragrafo 18.6 è stata calcolata l'intensità delle onde meccaniche trasversali sommando l'energia potenziale e quella cinetica associate al moto delle particelle del mezzo. Nel caso delle onde longitudinali si potrebbe ripetere un argomento analogo considerando l'energia cinetica dovuta alle oscillazioni di ogni singolo elemento di fluido e l'energia interna in esso immagazzinata; l'energia interna giocherebbe nel caso longitudinale il ruolo ricoperto da quella potenziale nel caso trasversale. Il calcolo dell'energia interna, però, richiede una conoscenza approfondita di alcuni dettagli della dinamica dei gas che verranno studiati soltanto nel Capitolo 23; per questa ragione in questo paragrafo si userà un argomento diverso per determinare l'intensità delle onde longitudinali.

A causa del passaggio dell'onda acustica ogni elemento del fluido esercita una forza sugli elementi ad esso adiacenti; se la sua variazione di pressione è Δp, la forza esercitata sarà $F_x = A\,\Delta p$, ove A è l'area della sezione trasversale dell'elemento. Dall'Equazione 19.2 ricaviamo che la forza esercitata nel caso di un'onda sinusoidale vale

$$F_x = A\,\Delta p_m \sin(kx - \omega t). \tag{19.15}$$

Dall'espressione per la velocità dell'elemento sottile di fluido (Equazione 19.9) deduciamo che la potenza trasferita vale

$$P = u_x F_x = A\,\Delta p_m u_m \sin^2(kx - \omega t). \tag{19.16}$$

In virtù dell'Equazione 19.10 la formula precedente può essere riscritta nel modo seguente:

$$P = \frac{Av(\Delta p_m)^2}{B} \sin^2(kx - \omega t). \tag{19.17}$$

Come si è fatto nel Paragrafo 18.6, si suppone di osservare l'onda per un tempo lungo rispetto al suo periodo; ricordando che il valor medio del seno al quadrato su un grande numero di cicli vale $\frac{1}{2}$, si ottiene la potenza media trasferita:

$$\overline{P} = \frac{Av(\Delta p_m)^2}{2B} = \frac{A(\Delta p_m)^2}{2\rho_0 v}, \tag{19.18}$$

ove nell'ultimo passaggio è intervenuta la (19.14) per sostituire B con $\rho_0 v^2$.

È interessante sottolineare che la potenza media, così come accade per le onde trasversali, è direttamente proporzionale al *quadrato* dell'ampiezza, in questo caso al quadrato dell'ampiezza di pressione. Si osservi, inoltre, che nell'Espressione 19.18 non compare la frequenza dell'onda; avvalendosi, invece, della descrizione in termini di onda di spostamento si otterrebbe, per la potenza media, un'espressione dipendente dallo spostamento massimo e dalla pulsazione dell'onda. Da questa osservazione si deduce che, conoscendo l'ampiezza di pressione di due onde di frequenza diversa è possibile stabilire il rapporto tra le relative intensità; questa è la ragione per cui è preferibile condurre l'inda-

gine sperimentale delle onde acustiche per mezzo di strumenti che misurino le variazioni di pressione piuttosto che gli spostamenti degli elementi di fluido del mezzo. Per completare questa discussione sui vantaggi della descrizione in termini di pressione va ricordato che, come si è appreso dal Problema svolto 19.1, gli spostamenti associati alle onde acustiche molto deboli sono troppo piccoli per essere misurati in maniera efficace.

Per confrontare diverse onde acustiche è utile introdurre l'*intensità* definita come potenza media per unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. In virtù dell'Equazione 19.18 si ha

$$I = \frac{\overline{P}}{A} = \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v}. \qquad (19.19)$$

La risposta dell'orecchio umano a suoni di intensità crescente è con ottima approssimazione logaritmica; per questa ragione è utile introdurre la scala logaritmica del *livello sonoro*:

$$L = \log_{10} \frac{I}{I_0}. \qquad (19.20)$$

Il livello sonoro L viene definito rispetto all'intensità di riferimento $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 che è considerato il valore di soglia tipico dell'orecchio umano. Per il livello sonoro si adotta come unità di misura il *bel* (B), di cui largamente usato è il sottomultiplo *decibel* (dB); un suono di intensità I_0 ha livello sonoro di 0 B, mentre un suono all'estremo superiore dell'intervallo di udibilità dell'orecchio umano, detto soglia del dolore, ha intensità di 1 W/m^2 e livello sonoro di 12 B. Moltiplicare l'intensità per 10 corrisponde ad aumentare di 1 B il livello sonoro.

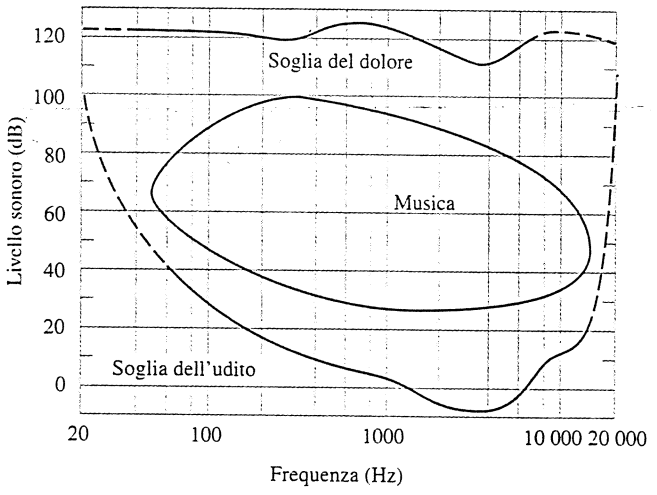


FIGURA 19.5 Livelli sonori per l'orecchio umano. Si osservi che i livelli di soglia dipendono dalla frequenza del suono. Un suono appena udibile a 100 Hz deve avere potenza 1000 volte maggiore (livello acustico 30 dB più elevato) di un suono appena udibile a 1000 Hz; questa differenza è dovuta alla minor sensibilità dell'orecchio umano a 100 Hz.

TABELLA 19.2 Alcuni valori di intensità e di livello sonoro.

Suono	*Intensità I* (W/m^2)	*Livello sonoro* (dB)
Soglia dell'udito	$1 \cdot 10^{-12}$	0
Fruscio di foglie	$1 \cdot 10^{-11}$	10
Bisbiglio (a 1 m)	$1 \cdot 10^{-10}$	20
Rumore di fondo in città in assenza di traffico	$1 \cdot 10^{-9}$	30
Rumore di fondo in ufficio	$1 \cdot 10^{-7}$	50
Conversazione normale (a 1 m)	$1 \cdot 10^{-6}$	60
Martello pneumatico (a 1 m)	$1 \cdot 10^{-3}$	90
Gruppo rock	$1 \cdot 10^{-1}$	110
Soglia del dolore	1	120
Motore di un jet (a 50 m)	10	130
Motore dello Space Shuttle (a 50 m)	$1 \cdot 10^{8}$	200

Questa scala può essere usata anche per confrontare due suoni tra loro piuttosto che confrontare ciascuno con l'intensità di riferimento; più precisamente, se si considerano due suoni di intensità I_1 e I_2, si può scrivere:

$$L_1 - L_2 = \log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0} = \log \frac{I_1}{I_2}. \qquad (19.21)$$

Per esempio, due suoni di intensità l'una doppia dell'altra hanno livelli sonori che differiscono di una quantità pari a $\log 2 = 0{,}3$ B $= 3$ dB.

La sensibilità dell'orecchio umano dipende dalla frequenza delle onde acustiche; per le frequenze intermedie, dell'ordine di 1000 Hz, la soglia di udibilità vale all'incirca 10^{-12} W/m^2; a frequenze elevate, dell'ordine di 10 kHz, la soglia sale a 10 dB (10^{-11} W/m^2), mentre a basse frequenze, dell'ordine di 100 Hz, la soglia è di 30 dB (10^{-9} W/m^2). A 100 Hz è necessaria un'intensità 1000 volte superiore a quella necessaria a 1000 Hz per produrre gli stessi effetti fisiologici. La dipendenza della soglia di udibilità e di quella del dolore dalla frequenza è illustrata nella Figura 19.5; nella Tabella 19.2 sono riportati alcuni utili livelli sonori e le corrispondenti intensità.

PROBLEMA SVOLTO 19.2 Una sorgente puntiforme di potenza P pari a 25 W emette onde acustiche sferiche uniformemente in tutte le direzioni. Si calcoli l'intensità e il livello sonoro dell'onda a distanza $r = 2{,}5$ m dalla sorgente.

Soluzione Tutta la potenza irradiata attraversa una sfera centrata nella sorgente e di raggio r; allora

$$I = \frac{P}{4\pi r^2},$$

da cui risulta che l'intensità dell'onda acustica decade con l'inverso del quadrato della distanza dalla sorgente. Sostituendo si ha

$$I = \frac{25 \text{ W}}{(4\pi)(2.5 \text{ m})^2} = 0{,}32 \text{ W/m}^2$$

 ISBN 88-408-1254-7

e

$$L = \log \frac{I}{I_0} = \\ = \log \frac{0{,}32 \text{ W/m}^2}{10^{-12} \text{ W/m}^2} = 11{,}5 \text{ B} = 115 \text{ dB}.$$

Confrontando questo risultato con quelli in Tabella 19.2 si deduce che questo livello sonoro è pericoloso per l'orecchio umano.

19.5 INTERFERENZA DI ONDE ACUSTICHE

Nel Paragrafo 18.8 si sono studiati i fenomeni legati all'interferenza di due onde che investono la medesima regione del mezzo di trasmissione. La validità del principio di sovrapposizione, usato per lo studio dell'interferenza delle onde trasversali, viene postulata anche nel caso delle onde acustiche.

In Figura 19.6 sono illustrati due altoparlanti collegati alla medesima sorgente; la variazione di pressione misurata nel punto P e dovuta al primo altoparlante viene indicata con Δp_1, quella relativa al secondo con Δp_2. Le onde acustiche in questione sono sferiche e quindi non sono descritte dall'Equazione 19.2; in particolare l'ampiezza di pressione non è costante, ma decresce come l'inverso della distanza dalla sorgente. In virtù del principio di sovrapposizione la variazione totale di pressione in P è data dall'espressione $\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2$.

Il tipo di interferenza che si osserva nel punto P dipende dalla *differenza di fase* $\Delta\phi$, che, diversamente da quanto detto nel Paragrafo 18.8 per le onde trasversali, non dipende soltanto dalle costanti di fase delle due onde, ma anche dal percorso che hanno seguito per giungere in P. Più precisamente, la differenza di fase dipende dalla differenza $\Delta L = |r_1 - r_2|$ tra i cammini che le onde hanno percorso per giungere dagli altoparlanti al punto P: si ha, infatti,

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\Delta L}{\lambda}. \qquad (19.22)$$

La differenza di fase di π, per esempio, corrisponde alla differenza di cammino $\lambda/2$, mentre quella di 2π corrisponde a λ, e così via di seguito.

In alcuni punti P le due onde giungono in fase ($\Delta\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$), e l'interferenza è costruttiva; in altri punti, invece, le due onde giungono in opposizione di fase ($\Delta\phi = \pi, 3\pi, 5\pi \ldots$), e l'interferenza risulta distruttiva. In virtù della condizione di interferenza costruttiva $\Delta\phi = m(2\pi)$, con $m = 0, 1, 2, \ldots$, dall'Equazione 19.22 si deduce che le differenze di cammino che assicurano interferenza costruttiva sono date dall'equazione

$$\Delta L = m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (19.23)$$

L'intensità, quindi, raggiunge il valore massimo in punti in cui $|r_1 - r_2| = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$. Se i due altoparlanti sono collegati a sorgenti in fase, allora, in tutti i punti da essi equidistanti, ovvero lungo la linea AB in figura, l'interferenza è costruttiva.

L'interferenza distruttiva viene osservata per differenze di fase $\Delta\phi = 2\pi(m + 1/2)$, con $m = 0, 1, 2, \ldots$, e quindi per differenze di cammino

$$\Delta L = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (19.24)$$

L'intensità, quindi, raggiunge il valore minimo, non necessariamente uguale a zero (giacché le due onde possono giungere in P con ampiezze diverse), in punti in cui $|r_1 - r_2| = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2 \ldots$. I punti in cui l'interferenza è distruttiva sono «zone d'ombra» dell'ambiente che circonda l'impianto di emissione.

In generale gli altoparlanti emettono un suono costituito da una miscela di diverse frequenze; può quindi accadere che in un punto P si osservi interferenza costruttiva per una particolare lunghezza d'onda e distruttiva per un'altra.

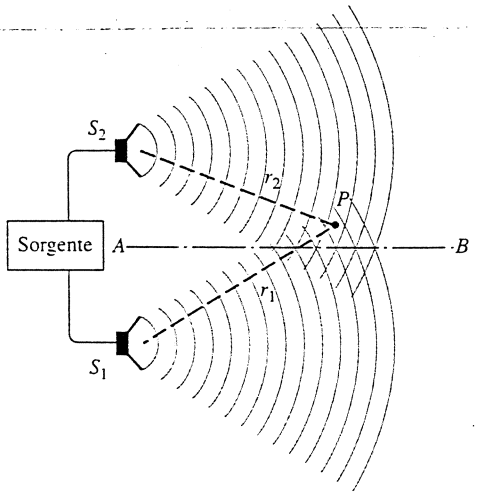


FIGURA 19.6 I due altoparlanti S_1 ed S_2, alimentati dalla stessa sorgente, emettono segnali acustici che interferiscono nel punto P.

PROBLEMA SVOLTO 19.3 Un ascoltatore è seduto di fronte a un altoparlante, a distanza 1,2 m da esso (Figura 19.6). I due altoparlanti, che distano $D = 2{,}3$ m l'uno dall'altro, emettono un segnale acustico di lunghezza d'onda λ. Le onde vengono emesse in fase; per quale valore della lunghezza d'onda l'ascoltatore rileverà il segnale della minima intensità possibile?

Soluzione Il segnale sarà minimo se l'interferenza, in accordo con il criterio stabilito dall'Equazione 19.24, è distruttiva. Se l'ascoltatore si trova di fronte all'altoparlante S_2, allora $r_2 = 1{,}2$ m ed r_1 può essere calcolato mediante il teorema di Pitagora:

$$r_1 = \sqrt{r_2^2 + D^2} = \sqrt{(1{,}2 \text{ m})^2 + (2{,}3 \text{ m})^2} = 2{,}6 \text{ m}.$$

Si ha, allora, che $r_1 - r_2 = 2{,}6 \text{ m} - 1{,}2 \text{ m} = 1{,}4$ m e, in virtù dell'Equazione 19.24,

$$1{,}4 \text{ m} = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2 \ldots;$$

in conclusione

$$\lambda = 2{,}8 \text{ m}, 0{,}93 \text{ m}, 0{,}56 \text{ m}, \ldots .$$

L'interferenza non è completamente distruttiva perché le due onde, emesse con medesima ampiezza, giungono all'ascoltatore con ampiezze differenti.

19.6 ONDE STAZIONARIE LONGITUDINALI

In questo paragrafo si discutono i fenomeni che si osservano quando un'onda come quella illustrata nella Figura 19.1 raggiunge l'estremità del tubo: in analogia con quanto visto nel caso delle onde trasversali (Figura 18.19), all'estremità si osserva una riflessione e la componente riflessa si propaga all'indietro nel tubo. Il comportamento dell'onda all'estremità cambia a seconda che questa sia aperta o chiusa.

Si consideri, in prima istanza, il caso dell'estremità chiusa. L'onda, giunta alla fine del tubo, può comprimere lo strato d'aria sulla parete fissa, quindi la pressione può variare dal suo valore minimo al valore massimo: in conclusione *l'estremità fissa è un ventre* o *antinodo*. L'onda di pressione, quindi, viene riflessa dall'estremità chiusa come un'onda trasversale dall'estremità libera di una corda tesa (Figura 18.19b); una compressione, per esempio, viene riflessa come compressione. In analogia con il gergo introdotto per le onde trasversali si può dire che un'*onda di pressione longitudinale viene riflessa senza variazioni di fase da un'estremità chiusa*. Lo stesso fenomeno si osserva quando un'onda longitudinale viene riflessa dall'estremità fissa di una molla: una compressione viene riflessa come compressione.

Si consideri, ora, il caso dell'estremità aperta: nella parte finale del tubo la pressione è uguale a quella esterna p_0. Non è possibile modificare la pressione all'estremità aperta del tubo a meno che non si sia disposti a cambiare la pressione dell'ambiente circostante, per esempio la pressione dell'aria nella stanza in cui si trova il tubo. All'estremità aperta, quindi, la pressione è costantemente uguale a p_0 e quindi *l'estremità aperta è un nodo dell'onda di pressione*. La situazione è analoga a quella illustrata nella Figura 18.19a per la riflessione di un'onda da parte dell'estremità fissa di una corda tesa. Il tentativo dell'onda incidente di comprimere l'aria nei pressi dell'estremità aperta produce una rarefazione che si muove all'indietro lungo il tubo; quindi un'*onda di pressione longitudinale viene riflessa da parte di un'estremità aperta con uno sfasamento di* 180°. Lo stesso effetto viene osservato in una molla a spirale: una compressione viene riflessa come rarefazione.

Si supponga, ora, di avere un treno d'onde sinusoidale che si propaga lungo il tubo; le onde vengono riflesse dall'estremità ove si osserva un nodo, se l'estremità è aperta, o un ventre, se l'estremità è chiusa. Si può pensare che la sorgente del treno d'onde sia un altoparlante collocato all'estremità opposta del tubo. Il moto dell'altoparlante produce un'onda di pressione nel tubo che, sovrapponendosi all'onda riflessa, fa sì che nel tubo si instauri uno schema stazionario di oscillazione longitudinale; il fenomeno è del tutto analogo a quello studiato nel caso delle onde trasversali che si propagano lungo una corda tesa.

Nel tubo, quindi, si osserverà una successione di nodi e di ventri di pressione; a differenza di quanto accade nel caso della corda tesa, però, nel tubo i nodi e i ventri non sono punti ma piani. In analogia con il fenomeno illustrato nella Figura 18.20, se l'onda di pressione ha frequenza, ovvero lunghezza d'onda, opportuna, nel tubo si stabilisce uno schema stazionario longitudinale. Se all'estremità ove si trova l'altoparlante si osserva un nodo di pressione, allora l'energia restituita dall'onda all'altoparlante è molto piccola e, quindi, si stabilisce una sorta di condizione di risonanza. La frequenza forzante deve essere uguale a una delle frequenze naturali del tubo, il cui valore dipende dalla lunghezza del tubo stesso.

In Figura 19.7a è illustrato un tubo all'interno del quale si propaga un'onda di pressione prodotta da un altoparlante posto a una delle sue estremità; la seconda estremità è aperta. Come si è detto in precedenza, l'estremità con la sorgente è un nodo e anche quella aperta si comporta con ottima approssimazione come un nodo. In Figura 19.7a sono illustrate le variazioni di pressione che si osservano quando si instaura un modo stazionario. I diversi modi stazionari ricordano da vicino quelli illustrati in Figura 18.20; nel primo modo la lunghezza L del tubo è uguale a $\lambda/2$, ove λ è la lunghezza d'onda emessa dall'altoparlante. Si ha,

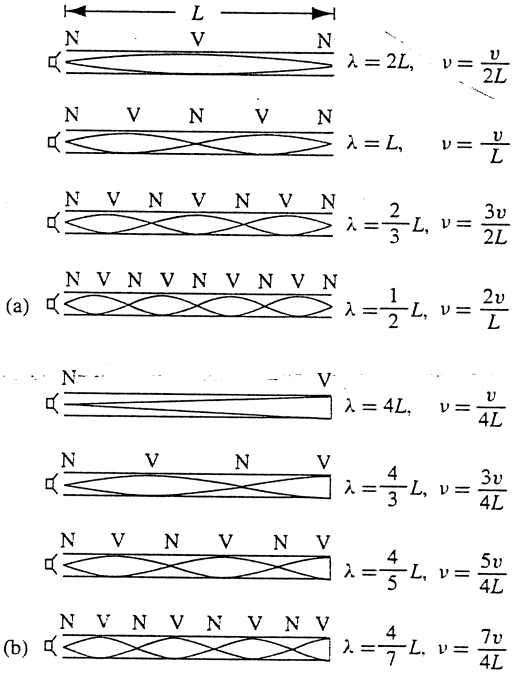


FIGURA 19.7 (a) Onde di pressione relative ai primi quattro schemi risonanti in un tubo forzato da un altoparlante e aperto alla seconda estremità. Le estremità sono nodi N; tra nodi adiacenti vi è un ventre V. Le curve suggeriscono una variazione sinusoidale della pressione nel tubo. (b) Onde di pressione relative ai primi quattro modi risonanti in un tubo forzato da un altoparlante e chiuso alla seconda estremità. L'estremità chiusa è un ventre. Si osservino con attenzione le differenze tra i modi stazionari e le lunghezze d'onda nei casi di estremità aperta e chiusa.

 ISBN 88-408-1254-7

quindi, che la lunghezza d'onda è uguale a $2L$ e quindi la frequenza vale $\nu = v/\lambda = v/(2L)$. Le altre risonanze illustrate nella Figura 19.7a corrispondono alle lunghezze d'onda via via più piccole date da

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots . \tag{19.25}$$

Dall'uguaglianza $\nu = v/\lambda$ si ottengono le frequenze corrispondenti:

$$\nu_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots . \quad \text{(tubo aperto).} \tag{19.26}$$

Nelle equazioni precedenti v è la velocità di propagazione del suono nel fluido di cui è riempito il tubo, per esempio l'aria.

Nella Figura 19.7b sono illustrati i modi stazionari per un tubo con la seconda estremità chiusa; tale estremità è un ventre. Nel primo modo stazionario la lunghezza del tubo è uguale a $\lambda/4$ e quindi l'altoparlante deve emettere un segnale di lunghezza d'onda uguale a $4L$. Nel secondo modo, invece, la lunghezza L è uguale a $3\lambda/4$ e quindi $\lambda = 4L/3$. In generale le lunghezze d'onda dei modi risonanti valgono

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots . \tag{19.27}$$

Si osservi che in questo caso il numero intero n è dispari. Le corrispondenti frequenze risonanti sono date da

$$\nu_n = n\frac{v}{4L} \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \quad \text{(tubo chiuso).} \tag{19.28}$$

Come si vedrà nel prossimo paragrafo, le frequenze risonanti date dalle Equazioni 19.26 e 19.28 determinano le note prodotte dagli strumenti a fiato.

La posizione effettiva del nodo di pressione estremo di un tubo aperto non coincide esattamente con l'estremità del tubo; in realtà l'onda si estende un po' anche nel mezzo di trasmissione circostante e quindi l'effettiva lunghezza del tubo risulta leggermente maggiore e la corrispondente frequenza stazionaria leggermente più bassa del valore teorico. Nel caso di tubi cilindrici stretti la correzione è approssimativamente uguale a $0{,}6R$, ove R è il raggio del tubo. Nel caso di un tubo aperto a entrambe le estremità la correzione va applicata due volte. Per un tubo lungo 0,6 m e di raggio 1 cm, situazione tipica degli strumenti a fiato di piccola dimensione come il clarinetto e il flauto, la frequenza teorica più bassa vale 286 Hz nel caso aperto e 143 Hz nel caso chiuso. Se si tiene presente la correzione al bordo, le due frequenze diventano 280 Hz e 142 Hz rispettivamente; le correzioni sono piccole, ma non trascurabili.

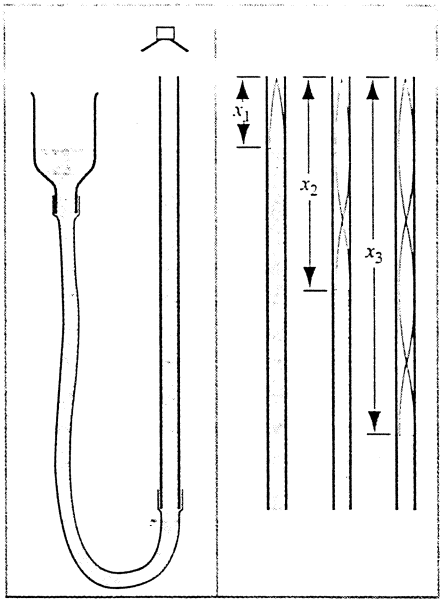


FIGURA 19.8 Problema svolto 19.4. Apparato sperimentale che permette la misura della velocità del suono nell'aria. Il livello dell'acqua nel tubo può essere regolato muovendo il contenitore sulla sinistra. Nella figura di destra sono illustrati i primi tre modi risonanti corrispondenti a una fissata lunghezza d'onda.

PROBLEMA SVOLTO 19.4 L'apparato sperimentale illustrato nella Figura 19.8 può essere usato per misurare la velocità di propagazione del suono nell'aria. Un piccolo altoparlante viene posto sopra il tubo di destra parzialmente riempito d'acqua, il cui livello viene modificato fino a quando un improvviso aumento dell'intensità sonora segnala che la colonna d'aria sovrastante è in condizione di risonanza. Si esegue un esperimento con l'altoparlante che emette un suono di frequenza 1080 Hz e si osserva risonanza quando il pelo libero dell'acqua dista dalla sommità del tubo di $x_1 = 6{,}5$ cm, $x_2 = 22{,}2$ cm e $x_3 = 37{,}7$ cm. Si determini la velocità di propagazione del suono.

Soluzione La colonna d'aria si comporta come un tubo di lunghezza variabile con un'estremità aperta. L'onda di pressione stazionaria ha un nodo in corrispondenza dell'altoparlante e un ventre sulla superficie dell'acqua. Dal momento che non si conosce il termine di correzione al bordo, non è possibile usare direttamente i dati misurati e l'Equazione 19.28. Si può osservare, però, che dalla condizione di risonanza illustrata nella Figura 19.7b, la distanza tra nodi adiacenti dell'onda di pressione vale $\lambda/2$; lo stesso risultato vale per ventri adiacenti. Dai dati sperimentali relativi alle prime due risonanze si può concludere che

$$\frac{1}{2}\lambda = x_2 - x_1 = 22{,}2 \text{ cm} - 6{,}5 \text{ cm} = 15{,}7 \text{ cm},$$

e analogamente, introducendo i dati relativi alla seconda e alla terza risonanza,

$$\frac{1}{2}\lambda = x_3 - x_2 = 37{,}7 \text{ cm} - 22{,}2 \text{ cm} = 15{,}5 \text{ cm}.$$

La media tra questi due valori può essere assunta come la miglior stima della mezza lunghezza d'onda; quindi $\lambda/2 = 15{,}6$ cm e $\lambda = 2(15.6 \text{ cm}) = 31{,}2 \text{ cm} = 0{,}312$ m. Si calcola, infine, la velocità del suono:

$$v = \lambda\nu = (0.312 \text{ m})(1080 \text{ Hz}) = 337 \text{ m/s}.$$

Quali sono gli altri fattori fisici, oltre la correzione al bordo, che possono influenzare la nostra misura della velocità del suono?

19.7 SISTEMI VIBRANTI E SORGENTI SONORE*

Il principio fisico che spiega la voce umana e la produzione del suono da parte di uno strumento musicale è molto semplice: un sistema vibrante produce un'onda di pressione che si propaga nell'aria e raggiunge, eventualmente, l'orecchio di un ascoltatore. La propagazione del suono è stata l'argomento dei paragrafi precedenti; per completare lo studio della natura del suono è quindi sufficiente occuparsi dei sistemi vibranti che lo producono.

Come si è detto nel Paragrafo 18.10 a proposito delle corde vibranti e nel paragrafo precedente a proposito delle colonne d'aria, i sistemi a massa distribuita hanno infinite frequenze naturali di vibrazione. Queste frequenze costituiscono l'insieme di tutte le possibili frequenze alle quali il sistema può vibrare; a seconda di come il sistema venga posto in vibrazione, il moto risultante esibirà una o più frequenze possibili.

Si supponga che il sistema possa vibrare alle frequenze $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ e che tali frequenze siano ordinate in modo crescente, ovvero $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \cdots$. La frequenza più bassa è detta *fondamentale* e il modo corrispondente è detto *armonica fondamentale* o *tono*. Le altre frequenze sono dette *ipertoni*; ν_2 è il primo ipertono, ν_3 è il secondo e così via.

In alcuni sistemi gli ipertoni sono multipli interi dell'armonica fondamentale:

$$\nu_n = n\nu_1, \tag{19.29}$$

ove n è un numero intero arbitrario. In questo caso gli ipertoni sono detti anche *armoniche superiori*. Il primo elemento di una sequenza di armoniche è il tono, il secondo è il primo ipertono e così via.

Per quale motivo alcuni sistemi vibranti producono un suono piacevole e altri uno stridente o dissonante? Quando l'orecchio umano ascolta più frequenze simultaneamente, la sensazione risulta piacevole se le diverse componenti hanno frequenze in rapporti di piccoli numeri interi, per esempio 3:2 oppure 5:4. Se un sistema produce ipertoni che sono armoniche, l'intero suono conterrà frequenze che rispettano questa regola e quindi il suono risulterà gradevole. Se gli ipertoni non sono armoniche, invece, con grande probabilità il suono risultante sarà dissonante. Il problema maggiore nella progettazione di strumenti musicali è la sequenza di ipertoni: questa sequenza deve essere armonica. Alcuni strumenti, per esempio quelli a corda, producono automaticamente ipertoni che sono armoniche, purché le vibrazioni della corda siano di piccola ampiezza. In altri casi, per esempio per le campane, la forma dello strumento deve essere progettata con molta accuratezza per assicurare una sequenza di armoniche. Le armoniche che uno strumento è in grado di produrre determinano la ricchezza e il timbro del suono emesso dallo strumento: in altri termini ne determinano la bellezza particolare. Se tutti gli strumenti producessero la sola armonica fondamentale, emetterebbero tutti esattamente lo stesso suono.

Gli strumenti musicali vengono usualmente suddivisi in tre classi: strumenti basati su corde vibranti, strumenti basati su colonne d'aria vibranti e strumenti più complessi con piatti, sbarre o membrane vibranti.

Corde vibranti

Gli strumenti a corda sono a loro volta di diversi tipi, a seconda del modo in cui le corde vengono messe in vibrazione. Nel caso del violino, per esempio, la corda viene fatta vibrare con un archetto, nel caso della chitarra e dell'arpa viene pizzicata e nel caso del pianoforte viene percossa dal martelletto.

Qualunque sia la modalità con la quale vengono eccitate le vibrazioni della corda, si genera un'onda trasversale che, riflessa dalle estremità fisse della corda, darà origine a uno schema di vibrazione stazionario. Queste vibrazioni stazionarie della corda ecciteranno a loro volta le vibrazioni dell'aria circostante che, propagandosi, giungeranno fino all'orecchio dell'ascoltatore.

Nel Paragrafo 18.10 si è visto che una corda di lunghezza L con estremi fissi può risuonare alle frequenze date dall'Equazione 18.46 e di seguito riportate:

$$\nu_n = n\frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{19.30}$$

ove v $(= \sqrt{F/\mu})$ è la velocità di propagazione delle vibrazioni lungo la corda tesa che non dipende dalla frequenza della perturbazione. Si osservi che v non è la velocità del suono nell'aria. Il lettore non deve lasciarsi ingannare dalla somiglianza tra le equazioni 19.30 e 19.26; in queste equazioni il simbolo v rappresenta grandezze fisiche diverse. In corrispondenza delle frequenze ν_n la corda esibisce n lobi

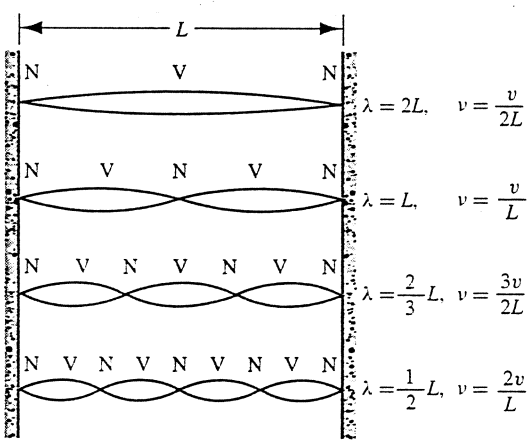


FIGURA 19.9 I primi quattro modi di vibrazione risonanti di una corda con estremi fissi. I nodi e i ventri sono indicati rispettivamente con N e V.

* Per un'ampia bibliografia relativa alla fisica degli strumenti musicali si rimanda a "Fisica nella musica" di A. Frova, *ediz. Zanichelli*, 1999.

 ISBN 88-408-1254-7

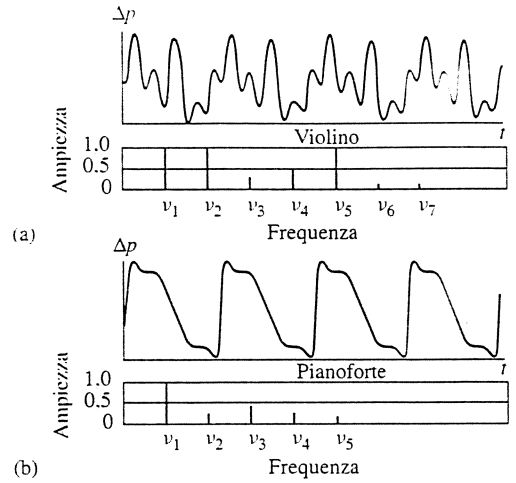


FIGURA 19.10 Forme d'onda e spettri sonori per due strumenti a corda, (a) violino e (b) pianoforte, che suonano la nota (La) di frequenza fondamentale $\nu_1 = 440$ Hz. Lo spettro sonoro riportato sotto la forma d'onda mostra le armoniche presenti nel tono e le loro ampiezze relative.

tra i due nodi posti alle sue estremità fisse; inoltre tra gli estremi cadono altri $n - 1$ nodi supplementari (Figura 19.9).

Se all'istante iniziale la corda venisse deformata in modo da coincidere perfettamente con *una qualsiasi delle* possibili frequenze naturali, allora le sue vibrazioni successive avverrebbero soltanto alla frequenza dell'armonica selezionata. Il profilo iniziale, però, dipende da come viene messa in vibrazione la corda e in generale accade che nelle oscillazioni successive non si osservi la sola armonica fondamentale, ma anche numerose armoniche superiori. Si ha, quindi, una sovrapposizione di diversi modi stazionari e lo spostamento effettivo della corda è il risultato della sovrapposizione di tutte queste componenti armoniche di frequenza e di ampiezza diversa. Il segnale che dalla corda viene inviato attraverso l'aria giunge all'orecchio e al cervello umano e dà origine a un effetto particolare che dipende dalle peculiarità dello strumento suonato. La qualità e il timbro di una nota di una particolare frequenza suonata da uno strumento musicale dipendono dal numero di armoniche presenti nel suono e dalle loro ampiezze. In Figura 19.10 sono illustrati gli spettri sonori e le corrispondenti forme d'onda per il violino e per il pianoforte.

Colonne d'aria vibranti

La canna di un organo è un esempio di strumento che produce un suono grazie alle vibrazioni di una colonna d'aria. Se le due estremità della canna sono aperte è possibile indurre in essa un modo stazionario soffiandovi aria all'interno attraverso una delle due aperture; la colonna d'aria vibra alle frequenze naturali date dall'Equazione 19.26. Così come nel caso della corda pizzicata, anche nel caso della canna d'organo verranno indotte oscillazioni armoniche superiori assieme alla fondamentale. Nel caso di una canna con un'estremità chiusa, la fondamentale avrà frequenza pari alla metà di quella osservata per il caso di estremità aperte e le sole armoniche prodotte saranno quelle dispari; il timbro del suono risultante sarà quindi diverso. In altri termini una canna d'organo aperta di lunghezza L produce lo stesso suono fondamentale prodotto da una canna di lunghezza $L/2$ con una estremità chiusa, ma a causa della differenza tra le miscele di armoniche, nei due casi si otterranno suoni di diversa qualità.

Negli strumenti ad ancia, come il clarinetto, il metodo di produzione del suono è diverso. L'aria viene soffiata attraverso una stretta fessura ottenuta mediante un'ancia di legno molto elastica. In virtù della legge di Bernoulli, a causa dell'alta velocità dell'aria introdotta nello strumento, nel bocchino si realizza localmente una regione di bassa pressione. La pressione esterna, maggiore di quella interna, spinge l'ancia verso la parte superiore del bocchino, il bocchino si chiude e il flusso d'aria entrante viene interrotto. A questo punto la depressione locale scompare, l'ancia torna nella posizione iniziale e il flusso d'aria riprende. Queste interruzioni del flusso d'aria entrante fanno sì che nel bocchino si osservino rapide variazioni di pressione e quindi questa estremità dello strumento finisce per comportarsi come un ventre di un'onda di pressione. In un clarinetto la seconda estremità è aperta e quindi le frequenze naturali sono date dall'Equazione 19.28 valida nel caso di un tubo con una sola estremità chiusa. Altri strumenti a fiato, come il flauto, hanno un principio di funzionamento simile a quello delle canne d'organo; in questo caso il bocchino si comporta come un'estremità aperta e le frequenze risonanti sono date dall'Equazione 19.26. Altri strumenti a fiato, come l'oboe e il sassofono, pur essendo ad ancia hanno il tubo conico invece che cilindrico; gli ipertoni di tali strumenti sono con buona approssimazione armonici e sono sia pari sia dispari. Vi sono ottoni, infine, come la tromba e il trombone, in cui la funzione dell'ancia viene svolta dalla lingua del musicista; anche per questi strumenti il tubo è affusolato in modo tale che gli ipertoni contengano tutte le armoniche. In Figura 19.11 sono riportate le forme d'onda di alcuni strumenti a fiato.

Altri sistemi vibranti

Il suono può essere prodotto ancora con altri sistemi vibranti, per esempio aste, piatti e membrane tese. Si pensi alla membrana flessibile di un tamburo; se si percuote la membrana, un'onda bidimensionale si propaga lungo la superficie e viene riflessa dal bordo fisso della membrana stessa. Se un punto della membrana viene fatto vibrare in modo periodico, da esso si dipanerà una sorta di treno d'onde superficiali che, interferendo con il treno riflesso dal bordo, può dare origine, così come accade nel caso unidimensionale, a modi stazionari di vibrazione della membrana bidimensionale. Ognuno dei modi di vibrazione è ca-

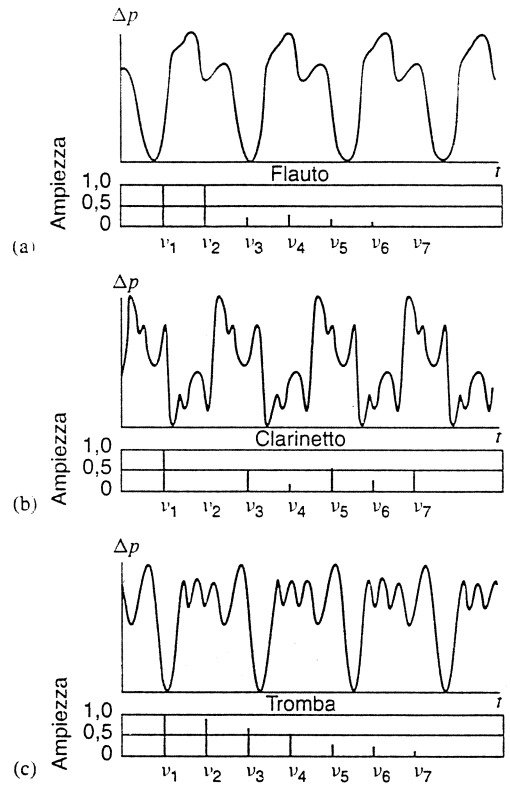
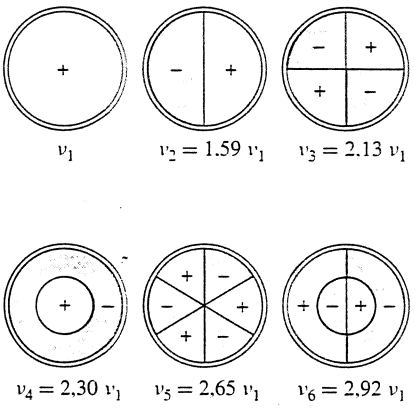
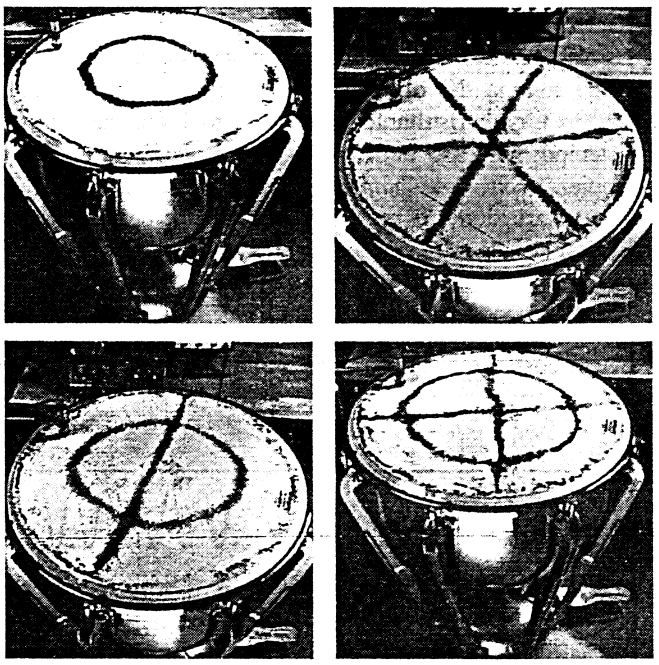


FIGURA 19.11 Forme d'onda e spettri sonori di alcuni strumenti a fiato, (a) flauto, (b) clarinetto e (c) tromba, riportati per la stessa nota descritta in Figura 19.10. Si osservi che nello spettro del clarinetto sono presenti solo le armoniche dispari, mentre nello spettro del flauto e della tromba le armoniche pari coesistono con quelle dispari.

ratterizzato da una frequenza naturale tipica della membrana usata; la frequenza più bassa viene chiamata armonica fondamentale e le successive ipertoni. In generale, quando si pone in vibrazione una membrana, il suo moto presenta vari ipertoni assieme all'oscillazione fondamentale. Queste vibrazioni originano onde sonore nell'aria circostante.

I nodi delle membrane vibranti sono linee, che svolgono la parte dei punti nodali della corda vibrante e dei piani nodali delle colonne d'aria vibranti. Dal momento che il bordo della membrana è fisso, una linea nodale deve coincidere con il bordo. In Figura 19.12 sono riportati alcuni schemi di vibrazione di una membrana circolare e le relative frequenze di oscillazione; le frequenze degli ipertoni sono date in funzione della fondamentale ν_1. Gli ipertoni non sono armonici; infatti la loro frequenza non è un multiplo intero della fondamentale; anche le aste vibranti sono caratterizzate da sequenze di ipertoni non armonici. È questo il motivo per cui i piatti e le aste hanno un uso molto limitato negli strumenti musicali; lo xilofono e il marimba sono strumenti musicali in cui tavolette di metallo o di legno vengono poste in vibrazione per mezzo di bacchette. Le tavolette sono più sottili al centro e più spesse ai bordi; questa forma particolare fa sì che gli ipertoni siano almeno approssimativamente armonici.





(b)

FIGURA 19.12 (a) I sei schemi vibrazionali risonanti più bassi di una membrana circolare con bordo fisso. Le linee rappresentano i nodi; il bordo è una linea nodale. I segni + e − indicano che all'istante considerato quella porzione di membrana si muove verso l'esterno o verso l'interno della pagina. In questo caso gli ipertoni non sono multipli interi della frequenza fondamentale e quindi non sono armoniche. (b) Vibrazioni di un timpano relative agli schemi 4, 5, e 6 e a uno schema non illustrato in figura (a). Le linee nodali vengono messe in evidenza spargendo polvere scura sulla membrana e ponendo il timpano in vibrazione in modo opportuno. Durante il moto della membrana la polvere viene scossa e alla fine si concentra intorno alle linee nodali ove le oscillazioni sono minime.

 ISBN 88-408-1254-7

19.8 BATTIMENTI

Nei paragrafi precedenti si è visto che l'interferenza di onde della stessa frequenza può originare una situazione in cui alcune regioni dello spazio presentano perturbazione di intensità massima e altre di intensità minima (addirittura uguale a zero); questo tipo di interferenza è detta, talvolta, *spaziale*.

Si può applicare lo stesso principio allo studio di un altro tipo di interferenza, detta *temporale*, in cui si osserva in un medesimo punto, ma a istanti diversi, l'effetto della sovrapposizione di due onde. In generale si ottengono forme d'onda molto complicate, ma la descrizione del fenomeno diventa abbastanza semplice se ci si limita a considerare la sovrapposizione di due onde con frequenze molto vicine tra loro. Questa situazione si realizza, per esempio, quando si cerca di accordare due strumenti o anche due corde di una stessa chitarra.

Si fissi l'attenzione su un punto del mezzo di trasmissione investito da due onde acustiche; in Figura 19.13a è mostrata, in funzione del tempo, la variazione di pressione nel punto considerato dovuta alle due onde prese separatamente. Per semplicità si suppone che le due onde abbiano medesima ampiezza: questa ipotesi, però, non è necessaria. La variazione di pressione osservata nel punto, ottenuta come somma dei due contributi, è mostrata nella Figura 19.13b. L'onda risultante, quindi, ha ampiezza che varia con il tempo; nel caso delle onde sonore queste variazioni di ampiezza sono dette *battimenti*.

La variazione di pressione in funzione del tempo (a x fissata) dovuta a una delle due onde può essere scritta nella forma

$$\Delta p_1(t) = \Delta p_m \sin(\omega_1 t),$$

ove la costante di fase è stata scelta in modo tale da poter scrivere l'onda nella semplice forma precedente. La variazione di pressione nello stesso punto dovuta alla seconda onda si può scrivere nella forma

$$\Delta p_2(t) = \Delta p_m \sin(\omega_2 t).$$

In virtù del principio di sovrapposizione abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta p(t) &= \Delta p_1(t) + \Delta p_2(t) = \\ &= \Delta p_m[(\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)]. \end{aligned} \tag{19.31}$$

Grazie all'identità trigonometrica

$$\sin A + \sin B = 2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2},$$

l'Equazione 19.31 si riscrive nel modo seguente

$$\Delta p(t) = \left\{2\Delta p_m \cos\left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]\right\}\sin\left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]. \tag{19.32}$$

L'Equazione 19.32 è stata dedotta senza introdurre l'ipotesi che le due frequenze siano molto prossime, ma, se questo è il caso, è possibile eseguire delle semplificazioni scrivendo il secondo fattore in funzione della frequenza media

$$\overline{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}. \tag{19.33}$$

Il fattore in parentesi graffe che compare nell'Equazione 19.32 è l'ampiezza dipendente dal tempo dell'oscillazione determinata dal secondo fattore; questa ampiezza varia con pulsazione

$$\omega_{amp} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2}. \tag{19.34}$$

Introducendo le definizioni delle due pulsazioni $\overline{\omega}$ e ω_{amp} l'Equazione 19.32 diventa

$$\Delta p(t) = [2\Delta p_m \cos(\omega_{amp} t)]\sin(\overline{\omega} t). \tag{19.35}$$

Se ω_1 è circa uguale a ω_2, la frequenza $\overline{\omega}_{amp}$ con cui varia l'ampiezza è molto piccola, quindi l'ampiezza compie oscillazioni molto lente. Il grafico in Figura 19.13b è in accordo con l'Equazione 19.32; si osservi che nel caso di componenti di frequenza molto vicina, l'onda risultante oscilla con una frequenza che con ottima approssimazione è uguale a quella delle due onde interferenti. L'ampiezza della risultante varia con pulsazione ω_{amp} e definisce una sorta di «inviluppo» all'interno del quale si realizzano le oscillazioni di piccolo periodo. Questo fenomeno è un esempio di *modulazione d'ampiezza* che ricorda le comunicazioni radio AM.

Nel caso illustrato in Figura 19.13b l'orecchio umano ascolta un tono di frequenza $\overline{\nu} = \overline{\omega}/(2\pi)$ che è molto simile ai due suoni originari di frequenza $\nu_1 = \omega_1/(2\pi)$ e $\nu_2 = \omega_2/(2\pi)$. L'intensità del suono, però, cresce e decresce seguendo le oscillazioni dell'ampiezza dell'onda risultante.

Ricordando che l'intensità di un'onda acustica è propor-

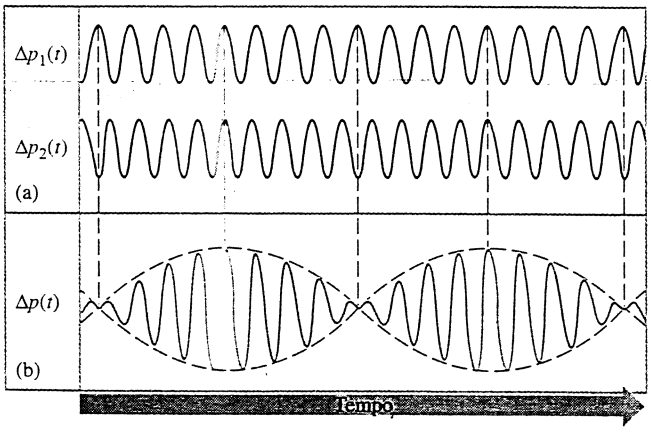


FIGURA 19.13 (a) Due forme d'onda sinusoidali con frequenze quasi uguali. (b) Sovrapposizione delle due forme d'onda. Si osservi che le due forme d'onda illustrate in (a) hanno regioni quasi in fase, che causerebbero interferenza costruttiva, e regioni quasi in opposizione di fase, ove si dovrebbe osservare interferenza distruttiva. La curva tratteggiata mostra la variazione sinusoidale con pulsazione ω_{amp} della curva d'inviluppo.

zionale al quadrato della sua ampiezza, si ha che i battimenti, ovvero i massimi di intensità, si osservano quando $\cos(\omega_{amp}t)$ risulta uguale a 1 o a -1. Ognuno di questi due valori viene assunto dal coseno una volta durante ogni ciclo (Figura 19.13b) e quindi il numero di battimenti al secondo è uguale al doppio del numero di cicli al secondo dell'onda d'inviluppo. La pulsazione dei battimenti è data da

$$\omega_{bat} = 2\omega_{amp} = |\omega_1 - \omega_2|. \tag{19.36}$$

In base alla relazione $\omega = 2\pi\nu$ che lega la frequenza alla pulsazione, si può calcolare la frequenza dei battimenti

$$\nu_{bat} = |\nu_1 - \nu_2|. \tag{19.37}$$

In conclusione *il numero di battimenti per unità di tempo è uguale al modulo della differenza tra le frequenze delle due onde componenti*. I battimenti tra due note possono essere percepiti dall'orecchio umano fino alla frequenza di circa 15 Hz; a frequenze più elevate l'orecchio umano non riesce a distinguere i singoli battimenti di un suono. I musicisti usano accordare i loro strumenti ascoltando i battimenti; gli strumenti vengono regolati in modo da far decrescere la loro frequenza di battimento fino a ridurla a zero.

PROBLEMA SVOLTO 19.5 Una corda di violino è stata accordata in modo da suonare il La di frequenza 440 Hz. Ma l'accordatura non è perfetta e, suonando la corda nel suo modo fondamentale assieme a un diapason, si rilevano tre battimenti al secondo. (a) Quali sono i possibili valori della frequenza fondamentale della corda? (b) Si supponga di eccitare la prima armonica della corda e di suonare contemporaneamente un diapason che genera un La di un'ottava superiore (880 Hz). Quanti battimenti al secondo si rilevano? (c) Se si aumenta leggermente la tensione della corda il numero di battimenti al secondo nel modo fondamentale cresce. Quanto vale la frequenza del modo fondamentale originale?

Soluzione (a) L'Equazione 19.37 implica che il modulo della differenza tra la frequenza fondamentale ν_1 della corda e la frequenza del diapason $\nu_2 = 440$ Hz sia uguale alla frequenza dei battimenti. I dati in nostro possesso, però, non ci permettono di dire se la frequenza della corda è maggiore o minore di quella del diapason; allora

$$\nu_1 = 440 \text{ Hz} \pm 3\text{Hz} = 443 \text{ Hz} \text{ oppure } 437 \text{ Hz}.$$

(b) La frequenza della prima armonica è doppia rispetto alla fondamentale, quindi vale 886 Hz oppure 874 Hz. La differenza con la frequenza 880 Hz del diapason è uguale a 6 Hz e quindi si assiste a sei battimenti al secondo.

(c) L'aumento della tensione induce un aumento della velocità di fase e quindi, in virtù dell'Equazione 19.30, una crescita della frequenza fondamentale. Dal momento che, come conseguenza dell'aumento di tensione, si assiste a un aumento della frequenza dei battimenti, si deduce che la frequenza della fondamentale doveva essere maggiore di 440 Hz. Si può quindi concludere che $\nu_1 = 443$ Hz e che per ottenere l'accordatura perfetta è necessario ridurre la tensione della corda.

19.9 EFFETTO DOPPLER

Un ascoltatore in moto verso una sorgente sonora ferma, rispetto al mezzo di trasmissione, riceve un suono di frequenza maggiore rispetto a quello che ascolterebbe se anche lui fosse a riposo. La frequenza ricevuta è, invece, minore se l'ascoltatore si allontana dalla sorgente. Fenomeni analoghi si manifestano se la sorgente si muove rispetto al mezzo di trasmissione mentre l'ascoltatore resta fermo. Si pensi, ad esempio, al tono del fischio di un treno o della sirena di un'ambulanza: il suono che recepiamo quando il veicolo ci si avvicina è più acuto di quello che riceviamo non appena il veicolo ci sorpassa e inizia ad allontanarsi.

In una pubblicazione del 1842 l'austriaco Christian Johann Doppler (1803-1853) affermò che un corpo luminoso deve cambiare colore quando viene posto in moto rispetto all'osservatore. Questo effetto è noto come *effetto Doppler* è si osserva per tutte le onde indipendentemente dalla loro natura fisica: lo stesso Doppler intuì la possibilità di applicare il suo principio alle onde acustiche. La verifica sperimentale dell'effetto Doppler nel caso delle onde acustiche è dovuta all'olandese Buys Ballot, che nel 1845 realizzò un esperimento "usando una locomotiva con un carro scoperto sul quale viaggiavano alcuni trombettieri."

Osservatore in moto e sorgente a riposo

Si consideri una sorgente di onde acustiche S e un osservatore O; si fissi un riferimento solidale con il mezzo di trasmissione delle onde acustiche e si supponga che S e O possano muoversi lungo la loro congiungente. Nella Figura 19.14 viene illustrato il caso in cui la sorgente è ferma ri-

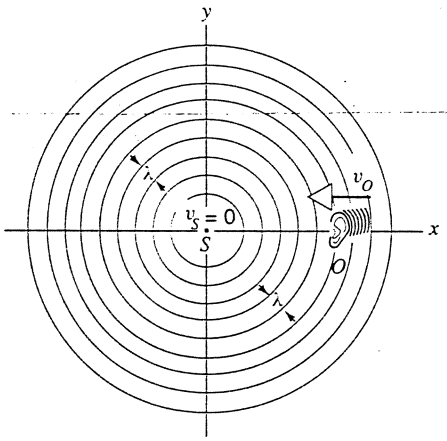


FIGURA 19.14 Fronti d'onda separati di una lunghezza d'onda emessi da una sorgente acustica puntiforme S. Un osservatore O, rappresentato da un orecchio, si muove verso la sorgente con velocità v_0. L'osservatore in moto riceve più fronti d'onda nell'unità di tempo rispetto a un osservatore a riposo e quindi misura una frequenza più elevata. L'osservatore misurerebbe una frequenza inferiore a quella della sorgente se il suo moto avvenisse in verso opposto.

 ISBN 88-408-1254-7

spetto al riferimento scelto e l'osservatore gli si avvicina a velocità costante v_O. Le circonferenze rappresentano fronti d'onda separati da una lunghezza d'onda: se l'osservatore O fosse a riposo, in un intervallo di tempo di durata t riceverebbe vt/λ fronti, ove v è la velocità di propagazione del suono nel mezzo considerato e λ la lunghezza d'onda dei segnali emessi dalla sorgente. A causa del suo moto di avvicinamento alla sorgente, nel medesimo intervallo t, l'osservatore riceve ulteriori $v_O t/\lambda$ fronti d'onda. La frequenza ν' effettiva rilevata dall'osservatore è uguale al numero di fronti ricevuti nell'unità di tempo, ovvero

$$\nu' = \frac{vt/\lambda + v_O t/\lambda}{t} = \frac{v + v_O}{\lambda} = \frac{v + v_O}{v/\nu}.$$

E quindi

$$\nu' = \nu \frac{v + v_O}{v} = \nu \left(1 + \frac{v_O}{v}\right). \tag{19.38}$$

La frequenza ν' ricevuta dall'osservatore è uguale alla somma della frequenza ν emessa dalla sorgente e del termine correttivo $\nu v_O/v$ dovuto al suo moto rispetto al mezzo di trasmissione. Se l'osservatore si allontana dalla sorgente a velocità costante v_O, allora vi saranno dei fronti che non giungono a destinazione e la frequenza ricevuta sarà minore di quella emessa del termine $\nu v_O/v$. Più precisamente in questo caso si ha

$$\nu' = \nu \frac{v - v_O}{v} = \nu \left(1 - \frac{v_O}{v}\right). \tag{19.39}$$

Si può quindi concludere: quando la *sorgente è a riposo* rispetto al mezzo di trasmissione e *l'osservatore si muove* con velocità v_O, la frequenza ricevuta vale

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_O}{v}. \tag{19.40}$$

con il segno più se l'osservatore si muove verso la sorgente e quello meno se se ne allontana. Si vuole sottolineare che l'accresciuta o diminuita frequenza causata dal moto dell'osservatore rispetto al mezzo di trasmissione è legata al maggiore o minor numero di fronti d'onda nell'unità di tempo ricevuti dall'osservatore O.

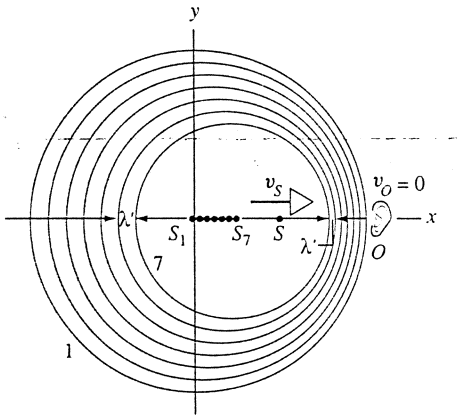


FIGURA 19.15 Osservatore a riposo e sorgente in moto verso O con velocità v_S. Il fronte d'onda 1 è stato emesso dalla sorgente in posizione S_1; il fronte d'onda 7 è stato emesso dalla sorgente in posizione S_7, e così per tutti gli altri fronti. Il disegno si riferisce all'istante in cui la sorgente occupa la posizione S. L'osservatore misura una lunghezza d'onda inferiore a causa dell'"infittirsi" dei fronti d'onda. Un osservatore posto sul semiasse negativo dell'asse x avrebbe misurato una lunghezza d'onda maggiore di quella emessa dalla sorgente.

Sorgente in moto e osservatore a riposo

Si consideri, ora, il caso illustrato nella Figura 19.15, in cui l'osservatore O è a riposo rispetto al mezzo di trasmissione e la sorgente gli si avvicina con velocità costante v_S. Dal momento che la sorgente segue il moto dei fronti d'onda, questi risultano più vicini di quanto sarebbero se la sorgente fosse ferma; in altri termini la lunghezza d'onda dell'onda ricevuta risulta minore di quella dell'onda emessa. Sia ν la frequenza dell'onda emessa dalla sorgente; durante un ciclo S percorre lo spazio v_S/ν e quindi la lunghezza d'onda si riduce esattamente di questa quantità. In definitiva l'osservatore riceve la lunghezza d'onda $\lambda' = v/\nu - v_S/\nu$, invece di $\lambda = v/\nu$, e la frequenza

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_S)/\nu} = \nu \frac{v}{v - v_S} \tag{19.41}$$

risulta maggiore della frequenza ν emessa dalla sorgente. Se la sorgente si allontana dall'osservatore, la lunghezza d'onda ricevuta sarà uguale a λ più il termine correttivo v_S/ν, e quindi la frequenza ricevuta sarà

$$\nu' = \frac{v}{(v + v_S)/\nu} = \nu \frac{v}{v + v_S}, \tag{19.42}$$

che risulta minore della frequenza ν emessa dalla sorgente. Si può quindi concludere: quando l'*osservatore è a riposo* rispetto al mezzo di trasmissione e la *sorgente si muove* con velocità v_S, la frequenza ricevuta vale

$$\nu' = \nu \frac{v}{v \pm v_S}, \tag{19.43}$$

con il segno meno se la sorgente si muove verso l'osservatore e quello più se se ne allontana. Si vuole sottolineare che in questo caso si osserva aumento o diminuzione della lunghezza d'onda ricevuta a causa del moto della sorgente rispetto al mezzo di trasmissione.

Il lettore dimostri che, nel caso in cui *sia l'osservatore sia la sorgente si muovono lungo la retta congiungente*, la frequenza ricevuta dall'osservatore è

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_O}{v \mp v_S}, \tag{19.44}$$

con il segno in alto ($+$ al numeratore e $-$ al denominatore) se l'osservatore e la sorgente si muovono l'uno verso l'altro e con quello in basso se ognuno dei due tende ad allontanarsi dall'altro. Come si vedrà nel Problema svolto 19.6, la

Formula 19.44 incorpora i quattro casi possibili: si osservi, infine, che l'Equazione 19.44 si riduce, come è giusto che sia, alla (19.40) se $v_S = 0$ e alla (19.43) se $v_O = 0$.

Se una sorgente di onde acustiche si allontana dall'osservatore muovendosi verso una parete fissa, l'osservatore udirà due diverse frequenze: una più bassa di quella emessa, dovuta all'onda che lo raggiunge direttamente, e una più alta, dovuta all'onda riflessa dalla parete. Quest'ultima, infatti, comportandosi come un osservatore a riposo rispetto al mezzo di trasmissione, riflette un'onda di frequenza maggiore rispetto a quella emessa dalla sorgente. La sovrapposizione di queste due onde ricevute dall'osservatore produce battimenti. Un effetto del tutto simile si osserva quando un'onda emessa da una sorgente a riposo viene riflessa da un ostacolo in moto rispetto al mezzo di trasmissione. La frequenza dei battimenti può essere utile per risalire alla velocità dell'ostacolo. Questo fenomeno è il principio di funzionamento dei sistemi radar.

La discussione dell'effetto Doppler è stata condotta per il caso delle onde acustiche, ma tutti i concetti esposti e le formule dimostrate si applicano a qualunque altra onda di natura meccanica. Nel caso della radiazione elettromagnetica, invece, la discussione qualitativa e i risultati quantitativi sono diversi perché in quel caso non vi è mezzo di trasmissione. Si rimanda al Capitolo 39 per lo studio dell'effetto Doppler per la radiazione luminosa.

PROBLEMA SVOLTO 19.6 La sirena della polizia emette un suono di frequenza 1125 Hz. Si determini la frequenza che si ascolta nei seguenti casi: (a) in una macchina ferma con l'auto della polizia che si avvicina alla velocità di 29 m/s; (b) in un'automobile che si muove verso l'auto della polizia, supposta ferma, alla velocità di 29 m/s; (c) nel caso in cui l'auto dell'osservatore e quella della polizia si muovono entrambe, l'una verso l'altra, alla velocità di 14,5 m/s; (d) nel caso in cui l'auto dell'osservatore si muove alla velocità di 9 m/s ed è inseguita dall'auto della polizia in moto alla velocità di 38 m/s.

Soluzione Il problema viene risolto applicando l'Equazione 19.44 e il valore $v = 343$ m/s per la velocità di propagazione del suono. (a) In questo caso $v_O = 0$ (osservatore a riposo) e $v_S = 29$ m/s. Al denominatore si sceglie il segno superiore (meno) perché l'automobile della polizia si muove verso l'osservatore. Si ha

$$\nu' = \nu\frac{v}{v - v_S} = (1125\text{ Hz})\frac{343\text{ m/s}}{343\text{ m/s} - 29\text{ m/s}} = 1229\text{ Hz}.$$

(b) In questo caso $v_S = 0$ (auto della polizia a riposo) e $v_O = 29$ m/s. Al numeratore si sceglie il segno superiore (più) perché l'automobile dell'osservatore si muove verso l'auto della polizia. Si ha

$$\nu' = \nu\frac{v + v_O}{v} = (1125\text{ Hz})\frac{343\text{ m/s} + 29\text{ m/s}}{343\text{ m/s}} = 1220\text{ Hz}.$$

(c) In questo caso $v_S = 14{,}5$ m/s e $v_O = 14{,}5$ m/s. Al numeratore e al denominatore si sceglie il segno superiore perché l'automobile dell'osservatore e quella della polizia si muovono l'una verso l'altra. Si ha

$$\nu' = \nu\frac{v + v_O}{v - v_S} = (1125\text{ Hz})\frac{343\text{ m/s} + 14.5\text{ m/s}}{343\text{ m/s} - 14.5\text{ m/s}} = 1224\text{ Hz}.$$

(d) In questo caso $v_S = 38$ m/s e $v_O = 9$ m/s. Al numeratore si sceglie il segno inferiore (meno) perché l'osservatore tende ad allontanarsi dalla sorgente, mentre al denominatore si sceglie il segno superiore (meno) perché la sorgente tende ad avvicinarsi all'osservatore. Si ha

$$\nu' = \nu\frac{v - v_O}{v - v_S} = (1125\text{ Hz})\frac{343\text{ m/s} - 9\text{ m/s}}{343\text{ m/s} - 38\text{ m/s}} = 1232\text{ Hz}.$$

Si osservi che in tutti i casi considerati la velocità relativa tra osservatore e sorgente è sempre di 29 m/s, ciononostante la frequenza misurata dall'osservatore è diversa. La variazione di frequenza dovuta all'effetto Doppler dipende non solo dalla velocità relativa tra osservatore e sorgente, ma anche dalle loro velocità rispetto al mezzo che trasporta il segnale sonoro.

Effetti dovuti all'alta velocità (facoltativo)

I risultati appena ottenuti valgono se le velocità v_O e v_S sono piccole rispetto alla velocità di propagazione del suono v; in caso contrario, infatti, l'ipotesi di dipendenza lineare della forza di richiamo dallo spostamento delle particelle del mezzo non è più applicabile. In questo caso, quindi, il segnale si propaga a una velocità diversa da quella di fase e la forma dell'onda cambia in funzione del tempo. Inoltre, anche le componenti del moto ortogonali alla retta che congiunge la sorgente all'osservatore influiscono sull'effetto Doppler. La non validità delle formule ricavate in precedenza per l'effetto Doppler è ancora più evidente quando si considera il caso in cui le velocità v_O e v_S sono maggiori di v. Se $v_S > v$ la sorgente supera i fronti dell'onda da essa stessa emessa; se l'osservatore si muove verso la sorgente con velocità $v_O > v$, l'onda non lo raggiunge mai.

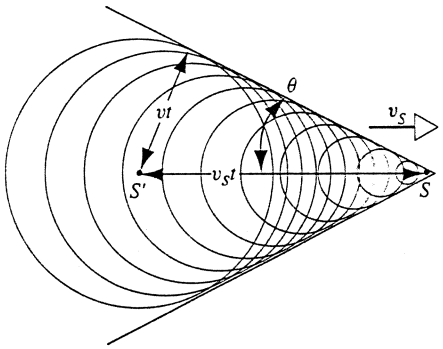
Vi sono molte situazioni in cui la sorgente si muove a velocità maggiore della velocità di fase dell'onda nel mezzo; in questi casi il fronte d'onda diventa un cono con vertice nella sorgente. Si pensi, per esempio, all'onda prodotta da un'imbarcazione veloce oppure all'onda d'urto prodotta da un proiettile o da un aeroplano in moto a velocità supersonica. Un altro esempio importante è la radiazione Čerenkov emessa da una particella carica in moto in un mezzo a velocità maggiore della velocità della luce nel mezzo; la luminescenza azzurrognola che talvolta si osserva nell'acqua che circonda il nucleo di un reattore nucleare è un esempio di questa radiazione.

Nella Figura 19.16a le circonferenze rappresentano la posizione all'istante t dei fronti delle onde sferiche emesse dalla sorgente nei diversi punti occupati durante il suo moto. Il raggio di ciascuna circonferenza è uguale al prodotto tra la velocità di fase v dell'onda e il tempo trascorso dall'istante della sua emissione avvenuta quando la sorgente ne occupava il centro. L'inviluppo di tali fronti è un cono la cui direttrice forma l'angolo θ con la direzione del moto della sorgente data dall'equazione

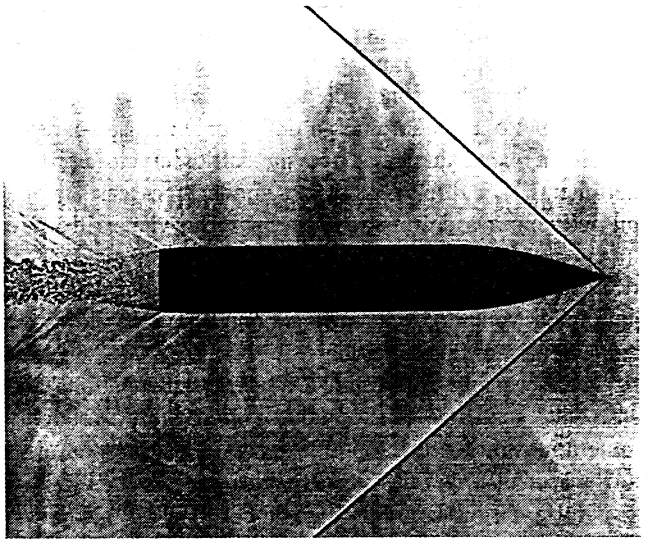
$$\sin\theta = \frac{v}{v_S}. \qquad (19.45)$$

 ISBN 88-408-1254-7

Nel caso di onde superficiali il cono si riduce a due rette che si intersecano nel punto occupato dalla sorgente. In aerodinamica il rapporto v_S/v è detto *numero di Mach*: un aereo in moto a velocità supersonica genera un *cono di Mach* simile a quello illustrato in Figura 19.16. Quando il cono di Mach giunge al suolo produce il cosiddetto «bang» supersonico che, contrariamente alla credenza comune, non è dovuto al "superamento della *barriera* del suono." Il bang è dovuto, in realtà, alla concentrazione in una sola direzione di tutta l'energia acustica emessa dall'aeroplano, che invece verrebbe irradiata isotropicamente in tutte le direzioni se la velocità fosse inferiore a quella del suono. Come si mette in evidenza dalla Figura 19.16b, si potrebbero udire addirittura due bang supersonici, uno dovuto al cono anteriore e uno dovuto a quello posteriore; si osservi, infine, che il cono di Mach non interseca l'aeroplano; per questa ragione i passeggeri non sentono il bang.



(a)



(b)

FIGURA 19.16 (a) Fronte d'onda di una sorgente in moto supersonico. I fronti d'onda sono sferici e il loro inviluppo è un cono. Si confronti questa figura con la Figura 19.15. (b) Foto di un proiettile sparato da una pistola alla velocità di Mach 2. Si osservi il cono di Mach.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

19.1 Proprietà delle onde acustiche

19.2 Onde acustiche in moto

1. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sulla mutua relazione tra variazione relativa di massa volumica $\Delta\rho_m/\rho_0$ e variazione relativa di pressione $\Delta p_m/p_0$ è vera.
   (A) $\Delta\rho_m/\rho_0 > \Delta p_m/p_0$ sempre.
   (B) $\Delta\rho_m/\rho_0 = \Delta p_m/p_0$ sempre.
   (C) $\Delta\rho_m/\rho_0 < \Delta p_m/p_0$ sempre.
   (D) La mutua relazione tra le due grandezze dipende dalla pressione e dal modulo di comprimibilità.

19.3 Velocità del suono

2. Una sottile sbarra di acciaio di lunghezza 12 km è sospesa all'interno di un tubo liscio. Uno sperimentatore colpisce dolcemente con un martelletto una delle due estremità della sbarretta. Il suo collega posto alla seconda estremità del tubo sente il colpo
   (A) simultaneamente.
   (B) quasi nello stesso istante.
   (C) dopo 2 secondi.
   (D) dopo 30 secondi.
   (E) 1 o 2 minuti più tardi.

3. Si dica quali tra le seguenti affermazioni sulla mutua relazione tra la velocità di fase v di un'onda acustica e la massima velocità u_m di oscillazione delle particelle del mezzo è vera.
   (A) $v > u_m$.
   (B) $v = u_m$.
   (C) $v < u_m$.
   (D) Non vi è alcuna relazione tra le due velocità.

19.4 Potenza e intensità delle onde acustiche

4. Le onde sferiche vengono emesse da una sorgente puntiforme in modo isotropo in tutte le direzioni. Il livello sonoro L dipende dalla distanza r dalla sorgente nel modo seguente:
   (A) $L = -b \log r^a$.
   (B) $L = a - b(\log r)^2$.
   (C) $L = a - b \log r$.
   (D) $L = a - b/r^2$.
   ove a e b sono due numeri reali positivi.

5. La potenza media $\overline{P}$ trasportata da un'onda acustica dipende dallo spostamento massimo s_m e dalla frequenza ν nel modo seguente:
   (A) $\overline{P} \propto \nu^2 s_m^2$. (B) $\overline{P} \propto \nu s_m^2$.
   (C) $\overline{P} \propto \nu^{-1} s_m^2$. (D) $\overline{P} \propto \nu^{-2} s_m^2$.

19.5 Interferenza di onde acustiche

6. Le prestazioni di un altoparlante per i toni bassi possono essere migliorate ponendo alle spalle degli altoparlanti un tubo ricurvo che ritorni sul fronte in modo da favorire l'interferenza costruttiva tra le onde provenienti dalla parte posteriore e quelle provenienti dalla parte anteriore (Figura

19.17). Se λ è la lunghezza d'onda media delle onde emesse dagli altoparlanti, la lunghezza del tubo deve valere

(A) $\lambda/4$. (B) $\lambda/2$. (C) $3\lambda/4$. (D) λ.

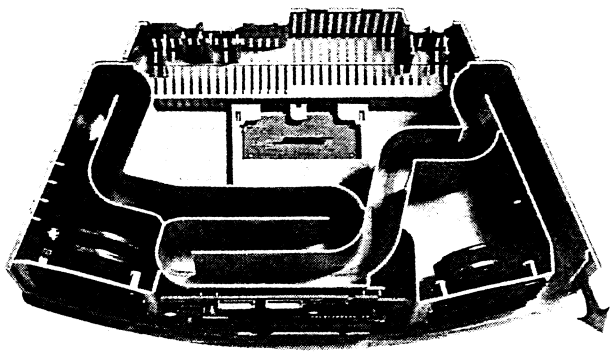


FIGURA 19.17 Domanda a risposta multipla 6.

19.6 Onde stazionarie longitudinali

7. Si determinino le frequenze risonanti per un tubo con estremità chiuse.
   (A) Stesse frequenze del tubo con estremità aperte $\nu_n = nv/(2L)$ con $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$.
   (B) Stesse frequenze del tubo con una sola estremità chiusa $\nu_n = nv/(4L)$ con $n = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots$.
   (C) $\nu_n = nv/(8L)$ con $n = 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$.
   (D) Un tubo con le due estremità chiuse non ha frequenze risonanti.

19.7 Sistemi vibranti e sorgenti sonore

8. La chiave portavoce di un clarinetto forza il modo risonante della prima armonica superiore. Premendo il portavoce si apre un forellino praticato sul lato opposto dello strumento. Si dica come è posizionato questo forellino.
   (A) Nei pressi di un nodo di pressione di una fondamentale tipica.
   (B) Nei pressi di un ventre di pressione di una fondamentale tipica.
   (C) Nei pressi di un nodo di pressione di una prima armonica tipica.
   (D) Nei pressi di un ventre di pressione di una prima armonica tipica.

9. Una corda di violino di lunghezza L emette un suono costituito dalla fondamentale e dalle prime tre armoniche. Si stabilisca a quale distanza dall'estremità della corda va posizionato un microfono perché trasmetta tutti i toni emessi.
   (A) $L/2$. (B) $L/3$. (C) $L/4$. (D) $L/8$.

19.8 Battimenti

10. Si hanno a disposizione tre diapason simili ma non perfettamente uguali. Colpendo simultaneamente A e B si rilevano battimenti di frequenza ν_{AB}; colpendo simultaneamente A e C si rilevano battimenti di frequenza ν_{AC}. Si osserva che $\nu_{AB} < \nu_{AC}$.
   (a) Quale tra i tre diapason ha frequenza naturale più elevata?
   (A) A. (B) B. (C) C.
   (D) Non è possibile rispondere alla domanda sulla base dei dati del problema.
   (b) Quale tra i tre diapason ha frequenza naturale intermedia?
   (A) A. (B) B. (C) C.
   (D) Non è possibile rispondere alla domanda sulla base dei dati del problema.
   (c) Si supponga di colpire simultaneamente B e C. Quale sarà la frequenza dei battimenti?
   (A) $|\nu_{AB} + \nu_{BC}|$. (B) $|\nu_{AB} - \nu_{BC}|$.
   (C) Si rileverà o $|\nu_{AB} + \nu_{BC}|$ o $|\nu_{AB} - \nu_{BC}|$.
   (D) Si rileverà sia $|\nu_{AB} + \nu_{BC}|$ sia $|\nu_{AB} - \nu_{BC}|$.

19.9 Effetto Doppler

11. Una sorgente di onde acustiche si muove verso un osservatore e sorpassa una sorgente identica a riposo. L'osservatore può sentire il suono emesso da entrambe le sorgenti.
   (a) Prima che la sorgente in moto sorpassi quella a riposo l'osservatore sente
   (A) un suono più acuto proveniente dalla sorgente mobile.
   (B) un suono più acuto proveniente dalla sorgente fissa.
   (C) lo stesso suono più acuto proveniente dalle due sorgenti.
   (b) Nell'istante in cui la sorgente mobile affianca quella a riposo l'osservatore sente
   (A) un suono più acuto proveniente dalla sorgente mobile.
   (B) un suono più acuto proveniente dalla sorgente fissa.
   (C) lo stesso suono più acuto proveniente dalle due sorgenti.
   (c) Dopo che la sorgente mobile ha sorpassato quella a riposo l'osservatore sente
   (A) un suono più acuto proveniente dalla sorgente mobile.
   (B) un suono più acuto proveniente dalla sorgente fissa.
   (C) lo stesso suono più acuto proveniente dalle due sorgenti.

12. Tre musicisti compiono esperimenti sull'effetto Doppler. Il musicista A si allontana a velocità u dal musicista B, che è fermo. Il musicista C si avvicina alla stessa velocità u al musicista B (Figura 19.18). Il musicista A suona una nota di frequenza ν_A con la sua tromba; B ascolta questa nota e la suona a sua volta. Il musicista C ascolta soltanto la nota suonata da B.
   (a) Si assuma che i tre musicisti si trovino sempre su una stessa linea retta; in confronto alla nota suonata originariamente da A, quella ascoltata da C è
   (A) alla stessa frequenza. (B) più acuta.
   (C) più grave.
   (b) Si assuma che A si allontani da B muovendosi verso nord e che C si avvicini a B muovendosi verso ovest. In confronto alla nota suonata originariamente da A, quella ascoltata da C è
   (A) alla stessa frequenza. (B) più acuta.
   (C) più grave.

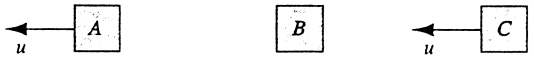


FIGURA 19.18 Domanda a risposta multipla 12.

 ISBN 88-408-1254-7

QUESITI

1. Per quale ragione il suono non si propaga nel vuoto?
2. Si elenchino alcune sorgenti di infrasuoni e alcune sorgenti di ultrasuoni.
3. Le onde ultrasoniche possono essere impiegate per studiare la struttura interna dei materiali. Per esempio tali onde distinguono i liquidi dal tessuto umano molle molto meglio di quanto facciano i raggi X. Perché? E allora a cosa servono i raggi X?
4. Quali prove sperimentali permettono di concludere che la velocità di propagazione delle onde acustiche in aria non dipende dalla loro frequenza?
5. Si spieghi qualitativamente perché la velocità del suono nel piombo è minore di quella nel rame.
6. Le onde trasversali che si propagano lungo una corda tesa possono avere polarizzazione piana. È possibile polarizzare le onde acustiche?
7. Il suono di una campana risulta molto spesso meno piacevole di quello di un violino o di un pianoforte. Perché?
8. Un campanella viene fatta suonare in una scuola per un breve intervallo di tempo. Dopo un po' il suo suono non è più udibile. Si faccia uno schizzo dell'onda acustica e dell'energia da essa trasportata in questo intervallo di tempo.
9. Nella fase di accordatura di un'orchestra la frequenza degli strumenti a fiato aumenta, mentre quella degli strumenti a corda diminuisce. Si spieghi perché.
10. Si spieghi come si accorda uno strumento a corda.
11. Il fenomeno della risonanza è positivo per tutti gli strumenti musicali? Si diano alcuni esempi.
12. Se si percuote un rebbio di un diapason il secondo rebbio inizierà a vibrare anche se la base del diapason viene tenuta fissa con una morsa. Perché? In altri termini chi «informa» il secondo rebbio che qualcuno ha colpito il suo gemello?
13. Come è possibile che un'onda acustica possa propagarsi verso il basso lungo una canna d'organo ed essere riflessa dalla sua estremità aperta? A prima vista sembra che non vi sia nulla che possa rifletterla.
14. Come è possibile individuare sperimentalmente la posizione dei nodi e dei ventri di una corda, di una colonna d'aria e di una superficie vibrante?
15. Si spieghi perché viene emessa una nota quando si soffia sull'apertura di una provetta. Che effetto si otterrebbe se si soffiasse con maggiore violenza? E se si riscaldasse l'aria nella provetta?
16. Come si può ridurre il rumore di fondo in un'officina meccanica?
17. Per quale ragione le sirene da nebbia emettono un suono di bassa frequenza?
18. Le onde longitudinali che si propagano nell'aria sono sempre udibili indipendentemente dalla loro frequenza e dalla loro intensità? A quale frequenza l'orecchio umano ha la maggiore sensibilità, la maggiore tolleranza e il maggiore intervallo di udibilità?
19. Qual è la funzione comune dei tasti di un corno e della coulisse di un trombone? Il corno da caccia non ha tasti eppure può emettere note diverse; come si spiega? A quali note è limitato il corno da caccia? Si giustifichino le risposte.
20. Perché l'archetto fa vibrare le corde del violino?
21. Cosa vuol dire zero decibel? Sarebbe possibile scegliere l'intensità di riferimento per le onde udibili in modo che avessero senso valori negativi del livello sonoro? Si giustifichi la risposta.
22. Si discutano i fattori che determinano l'intervallo di frequenza della propria voce e la sua qualità.
23. Si spieghi come viene prodotto un fischio.
24. Quali proprietà fisiche delle onde acustiche corrispondono alle sensazioni umane di altezza, intensità e qualità (timbro)?
25. Che differenza c'è tra una nota emessa da un violino e la medesima nota emessa da un cantante? Come mai l'orecchio umano riesce a distinguere questi due suoni?
26. È vero che si canta meglio sotto la doccia? Si giustifichi la risposta.
27. Si spieghi per quale motivo viene emesso un suono quando si accarezza il bordo di un calice da vino con un dito inumidito.
28. Una corda di violino oscillerebbe più o meno a lungo se non ci fosse la cassa di risonanza? Si giustifichi la risposta.
29. Un corda di violino suonata con un archetto è un esempio di oscillatore armonico forzato e smorzato? Che suono produrrebbe la corda in assenza di smorzamento?
30. Un tubo può agire da filtro acustico perché può essere attraversato soltanto da frequenze in risonanza con le sue frequenze naturali. Un esempio è la marmitta di un'automobile. (a) Si spieghi il funzionamento di questo filtro. (b) Come è possibile determinare la frequenza di taglio al di sotto della quale il suono non viene trasmesso?
31. Si discutano i fattori che migliorano l'acustica di una sala da concerto.
32. Si spieghi per quale motivo con un megafono oppure unendo le proprie mani a coppa davanti alla bocca si riesce a comunicare a distanza maggiore.
33. Un fulmine dissipa una quantità enorme di energia ed è praticamente istantaneo. Come viene trasferita parte di quest'energia alle onde acustiche del tuono?
34. Si spieghi come sia possibile usare le onde acustiche per misurare la velocità alla quale fluisce il sangue nelle vene e nelle arterie.
35. Si supponga che Giorgio fischi e che Gloria percepisca il fischio. La frequenza percepita da Gloria è più alta di quella emessa da Giorgio se la ragazza corre verso Giorgio o viceversa? Se i ragazzi corrono alla stessa velocità la frequenza percepita nei due casi è la stessa?
36. Si supponga che la sorgente di un segnale acustico e il dispositivo ricevente siano a riposo in un sistema di riferimento rispetto al quale il mezzo di trasmissione si muove con una certa velocità fissata. In questo caso si verifica la variazione di frequenza, o di lunghezza d'onda, dovuta all'effetto Doppler?
37. Un osservatore è fermo al centro di una strada e un autobus gli si avvicina a velocità costante suonando il clacson.

ISBN 88-408-1254-7

La frequenza del suono percepito dall'osservatore aumenta o diminuisce a causa dell'effetto Doppler?

38. Come è possibile avvalersi dell'effetto Doppler per studiare il battito cardiaco di un feto? (Queste misure sono ormai pura routine; si suggerisce la lettura di "Ultrasound in Medical Diagnosis," di Gilbert B. Devey e Peter N.T. Wells, *Scientific American*, Maggio 1978, p. 98.)

39. I pipistrelli, a partire dalle componenti riflesse dei segnali ad alta frequenza da loro stessi emessi, ricostruiscono diverse caratteristiche degli oggetti che li circondano, per esempio la forma, la distanza, l'orientamento e il moto. Si discuta qualitativamente come le proprietà menzionate possano influire sulle caratteristiche del segnale riflesso.

40. Si supponga che sia possibile individuare la presenza di un oggetto facendo rimbalzare su di esso onde di lunghezza minore delle dimensioni dell'oggetto stesso (principio di funzionamento del radar e del sonar). Si sa che i pipistrelli e le focene emettono segnali di frequenza 100 kHz; i pipistrelli, però, possono individuare la presenza degli insetti, mentre le focene rilevano al massimo la presenza di piccoli pesci. Come si spiega questa differenza?

41. La tromba in Do è un ottone privo di tasti che può emettere soltanto le note Do_4, Sol_4, Do_5, Mi_5, Sol_5, $Si_5^{\flat}$, Do_6,.... Questa sequenza è caratteristica di una canna con estremità entrambe aperte oppure di una canna con una delle due estremità chiuse? A quale categoria appartiene in realtà la tromba? Si spieghi la risposta.

42. Si osserva effetto Doppler quando l'osservatore o la sorgente si muovono perpendicolarmente rispetto alla direzione che li congiunge? È possibile calcolare la variazione di frequenza dovuta all'effetto Doppler quando vi è una componente della velocità ortogonale alla retta congiungente la sorgente e l'osservatore all'istante iniziale?

43. Due battelli ormeggiati in porto emettono un fischio della medesima frequenza. Ci si aspetta interferenza tra i due segnali con distribuzione di massimi e di minimi di intensità? Si giustifichi la risposta.

ESERCIZI

Negli esercizi seguenti, se non viene specificato altrimenti, si usi il valore 343 m/s per la velocità del suono nell'aria e il valore 1,21 kg/m^3 per la massa volumica dell'aria.

19.1 Proprietà delle onde acustiche

19.2 Onde acustiche in moto

1. Un meccanismo oscillante induce un'onda longitudinale sinusoidale in una molla a spirale. La frequenza della sorgente è di 25 Hz e la distanza tra rarefazioni successive nella molla vale 24 cm. (a) Si determini la velocità di propagazione dell'onda. (b) Si scriva la funzione che descrive l'onda supponendo che la propagazione avvenga nel verso negativo dell'asse x e che lo spostamento massimo degli elementi della molla valga 0.30 cm. Si supponga, inoltre, che la posizione occupata dalla sorgente sia individuata dall'ascissa $x = 0$ e che lo spostamento alla sorgente valga $s = 0$ all'istante $t = 0$.

2. In una particolare onda acustica la pressione è data dall'Equazione

$$\Delta p = (1{,}48\ \text{Pa}) \sin[(1{,}07\pi\ \text{rad/m})x - (334\pi\ \text{rad/s})t].$$

Si determini (a) l'ampiezza di pressione, (b) la frequenza, (c) la lunghezza d'onda e (d) la velocità dell'onda.

19.3 Velocità del suono

3. Nella diagnostica dei tumori del tessuto molle si usano ultrasuoni di frequenza 4,50 MHz. (a) Quanto vale la lunghezza d'onda in aria di tali segnali acustici? (b) Si calcoli la loro lunghezza d'onda nel tessuto sapendo che si propagano alla velocità di 1500 m/s.

4. Un segnale acustico si può propagare in un gas se la sua lunghezza d'onda è almeno 10 volte più grande del cammino libero medio delle molecole del gas. In condizioni standard il cammino libero medio nell'aria è di circa 0.1 pm; si calcoli la massima frequenza possibile per le onde acustiche.

5. In Figura 19.19 è riportata l'immagine di un transistor ottenuta con un microscopio acustico. Le onde acustiche impiegate nel microscopio hanno frequenza di 4,2 GHz e nell'elio liquido in cui è immerso il campione si propagano con velocità di fase di 240 m/s. (a) Si calcoli la lunghezza d'onda di tali segnali acustici ultra-alti. (b) I conduttori a nastro visibili in figura sono larghi 2 pm circa. A quante lunghezze d'onda corrisponde la larghezza dei conduttori?

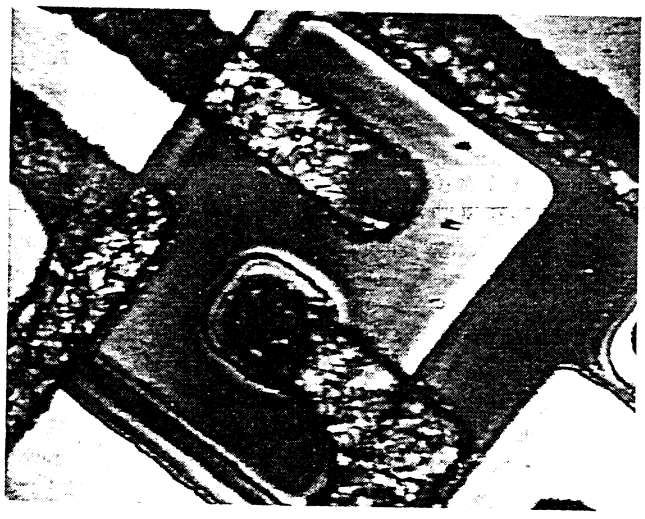


FIGURA 19.19 Esercizio 5.

6. (a) Una regola semplice che permette di stimare a quanti kilometri di distanza sia caduto un fulmine consiste nel contare i secondi che separano la saetta dal tuono e dividere il risultato per 3. Si giustifichi fisicamente questa regola e si calcoli l'errore che si commette se la temperatura è di 0 °C e la pressione di 1 bar. (b) Si determini una regola simile che fornisca la distanza in miglia marine.

 ISBN 88-408-1254-7

7. Una colonna di soldati marcia alla velocità di 120 passi al minuto e mantiene il ritmo della musica suonata dalla banda in testa alla colonna. Quando i soldati in coda sollevano il piede sinistro quelli in testa avanzano con il destro. Si stimi la lunghezza della colonna.
8. Un ascoltatore assiste a un concerto all'aperto e occupa un posto a 300 m di distanza dal palcoscenico su cui si trovano i microfoni. Lo stesso concerto viene trasmesso in diretta mondovisione via satellite. Si dica se la musica giunge prima al nostro ascoltatore oppure a un secondo ascoltatore via radio a 5000 km di distanza. Si calcoli l'intervallo di tempo che separa i due istanti in cui una medesima nota giunge ai due ascoltatori.
9. I terremoti generano onde acustiche sulla superficie terrestre; nei solidi le onde acustiche possono essere sia trasversali (S) sia longitudinali (P). La velocità tipica delle onde S è di 4,5 km/sec, mentre quella delle onde P è di 8,2 km/s. Un sismografo registra onde di tipo P e di tipo S; le prime giungono in un certo luogo 3 minuti prima delle seconde (Figura 19.20). Si stimi la distanza tra l'epicentro del terremoto e il luogo considerato.

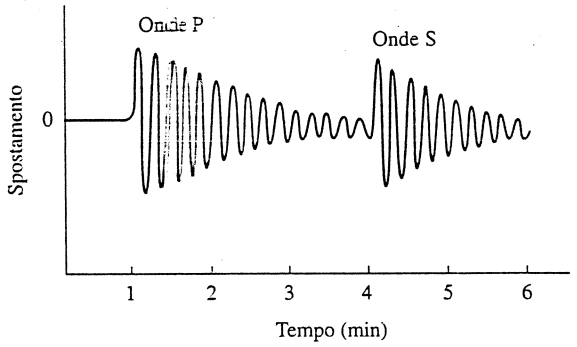


FIGURA 19.20 Esercizio 9.

19.4 Potenza e intensità delle onde acustiche

10. Si dimostri che l'intensità I di un'onda acustica è data da

$$I = 2\pi^2 \rho v \nu^2 s_m^2,$$

ove ν è la frequenza dell'onda ed s_m è lo spostamento massimo delle particelle del mezzo.

11. Una sorgente emette onde sferiche isotrope, ovvero di uguale intensità in tutte le direzioni. A distanza di 42,5 m dalla sorgente si misura un'intensità di 197 $\mu W/m^2$. Si calcoli la potenza emessa dalla sorgente.
12. Un'onda acustica di frequenza 313 Hz ha intensità 1,13 $\mu W/m^2$. Si calcoli l'ampiezza delle oscillazioni delle molecole d'aria dovute al passaggio dell'onda.
13. Un'onda acustica di intensità di 1,60 $\mu W/m^2$ attraversa una superficie la cui area vale 4,70 cm^2. Si calcoli l'energia che attraversa la superficie in 1 h.
14. Si determini il rapporto tra le intensità di due suoni i cui livelli sonori differiscono di 1,00 dB.
15. Il livello sonoro di un segnale viene aumentato di 30 dB; si dimostri che (a) la sua intensità è aumentata di un fattore 1000 e (b) la sua ampiezza di pressione è aumentata di un fattore 32.
16. Un rivenditore di impianti hi-fi sostiene che un impianto ha potenza acustica di 110 W; l'acquirente verifica tale affermazione con un dispositivo a più altoparlanti che gli permette di simulare una sorgente puntiforme. L'acquirente può avvicinarsi fino a 1,3 m dalla sorgente prima che il suono gli provochi dolore all'udito. È possibile stabilire se il rivenditore ha affermato il falso?
17. Si calcoli la densità d'energia delle onde acustiche alla distanza di 4,82 km da una sirena di potenza 5,20 kW; si assuma che la propagazione sia sferica e che non vi sia assorbimento da parte dell'atmosfera.
18. Un osservatore a distanza D da una sorgente di onde acustiche sferiche isotrope osserva che l'intensità del segnale ricevuto raddoppia avvicinandosi di 51,4 m alla sorgente; si calcoli la distanza D.
19. Si stimi il massimo livello sonoro che può essere raggiunto da un'onda acustica che si propaga nell'aria. (*Suggerimento*: si ponga l'ampiezza di pressione uguale a 1 bar.
20. Si supponga che durante una conversazione la voce umana abbia livello sonoro medio di 65 dB. Quante persone sono necessarie per raggiungere il livello sonoro di 80 dB?
21. Si supponga che lo stormire di una foglia abbia livello sonoro di 8,4 dB. Si determini il livello sonoro del fruscio prodotto da un albero sul quale vi siano $2{,}71 \cdot 10^5$ foglie.
22. Un jet subsonico vola ad altitudine di 115 m sopra la superficie terrestre; quando il jet passa sulla verticale dell'osservatore questi misura, al suolo, il livello sonoro di 150 dB. A quale altezza dovrebbe volare il jet in modo che la soglia del dolore di 120 dB non venga superata? Si ignori il tempo impiegato dal suono per giungere al suolo.

19.5 Interferenza di onde acustiche

23. Un'onda acustica di lunghezza d'onda 42,0 cm penetra nel tubo illustrato nella Figura 19.21. Si dica per quale valore del raggio r il ricevitore misura il segnale minimo possibile.

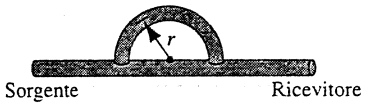


FIGURA 19.21 Esercizio 23.

24. Due altoparlanti di un sistema stereofonico distano 2,12 m ed emettono onde sonore che giungono con medesima ampiezza all'ascoltatore posto di fronte a uno dei due altoparlanti alla distanza di 3,75 m da esso (Figura 19.22). Si determini per quale valore della frequenza nella regione dell'udibile (20 - 20 000 Hz) il segnale avrà ampiezza (a) minima e (b) massima.

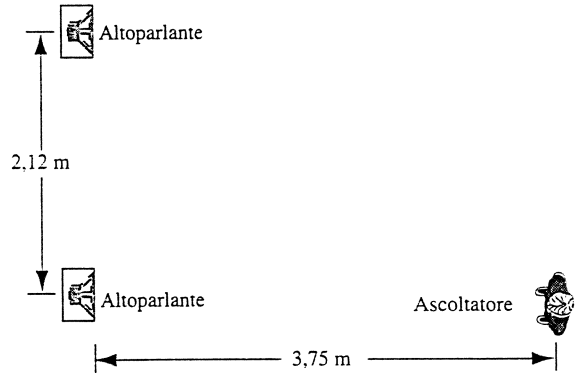


FIGURA 19.22 Esercizio 24.

ISBN 88-408-1254-7

25. Una sorgente puntiforme di onde acustiche sferiche occupa la posizione P_1 in Figura 19.23 in prossimità della parete riflettente AB; un microfono è collocato in P_2. La frequenza della sorgente può esser variata; si determini le due frequenze più basse in corrispondenza delle quali il microfono in P_2 rileva un massimo. Nella riflessione non vi è variazione di fase e l'angolo di riflessione risulta uguale a quello di incidenza.

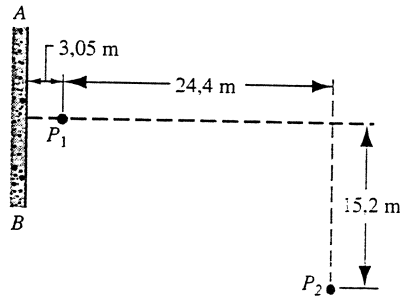


FIGURA 19.23 Esercizio 25.

26. Due sorgenti di onde acustiche distanti 5.00 m emettono segnali di medesima ampiezza, stessa frequenza, 300 Hz, e sfasati di 180°. Si determini in quale punto della retta congiungente le due sorgenti l'intensità osservata sarà massima.

19.6 Onde stazionarie longitudinali

27. Sia L la lunghezza delle corde di un violoncello. (a) Si determini il valore ΔL di cui deve essere accorciata la corda dall'esecutore per ottenere un suono in rapporto r con la frequenza naturale della corda. (b) Si calcoli ΔL nei casi $L = 80{,}0$ cm ed $r = 6/5,\ 5/4,\ 4/3,\ 3/2$.

28. Un'onda acustica si propaga con velocità di fase 1520 m/s in un mezzo fluido e, riflessa da una barriera, dà origine a uno schema stazionario. Si calcoli la frequenza dell'onda sapendo che la distanza tra nodi successivi è 3,84 cm.

29. Un pozzo con pareti verticali e acqua nel fondo ha frequenza minima di risonanza 7,20 Hz. L'aria nel pozzo ha massa volumica 1,21 kg/m^3 e modulo di comprimibilità $1{,}41 \cdot 10^5$ Pa. Si calcoli la profondità del pozzo.

30. L'altoparlante S illustrato in Figura 19.24 è collegato a un oscillatore e a un amplificatore la cui frequenza può essere variata da 1000 a 2000 Hz. Il tubo D ha pareti metalliche, ha le due estremità aperte ed è lungo 45.7 cm. (a) A quale frequenza il tubo risuonerà se viene spazzato l'intero intervallo da 1000 a 2000 Hz? (b) Si disegni la distribuzione dei nodi per ciascuna frequenza risonante. Si trascurino gli effetti di bordo.

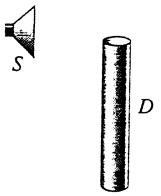


FIGURA 19.24 Esercizio 30.

31. I gradini di un anfiteatro di Los Angeles sono larghi 0,914 m (Figura 19.25). Un attore al centro del palcoscenico batte un colpo con le sue mani; quanto vale la frequenza dell'onda riflessa dalla gradinata?

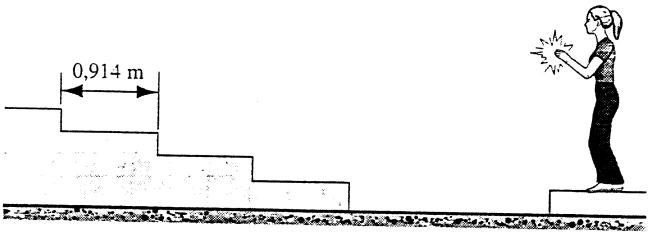


FIGURA 19.25 Esercizio 31.

32. Una galleria rettilinea, che attraversa una collina, amplifica le onde acustiche di frequenza 135 Hz e 138 Hz. Si determini la minima lunghezza possibile della galleria.

19.7 Sistemi vibranti e sorgenti sonore

33. (a) Si calcoli la velocità di propagazione delle onde lungo una corda di violino di 820 mg e lunga 22,0 cm, sapendo che l'armonica fondamentale ha frequenza 920 Hz. (b) Si calcoli la tensione della corda.

34. Una corda di violino viene accordata per produrre una certa nota; si calcoli di quale fattore deve essere aumentata la tensione della corda affinché la nota emessa abbia frequenza doppia rispetto a quella originaria (salto di un'ottava).

35. Un corda di violino di massa 2,0 g e di lunghezza 30 cm emette il La di frequenza 440 Hz. Quale punto della tastiera va premuto perché la corda emetta il Do di frequenza 528 Hz?

36. Una canna d'organo aperta agli estremi ha frequenza fondamentale 291 Hz. La prima armonica ($n = 3$) di una canna d'organo con estremità chiuse ha frequenza uguale a quella della seconda armonica della canna aperta. Si determini la lunghezza delle due canne.

19.8 Battimenti

37. Un diapason di frequenza ignota produce tre battimenti al secondo se suonato assieme a un diapason standard di frequenza 384 Hz. La frequenza dei battimenti decresce se si applica un piccolo pezzo di cera a uno dei due rebbi del primo diapason; quanto vale la frequenza ignota?

38. La corda di La di un violino è troppo tesa e produce quattro battimenti al secondo se suonata assieme a un diapason di frequenza 440 Hz. Si determini il periodo delle vibrazioni della corda del violino.

39. Uno sperimentatore ha a sua disposizione quattro diapason e sa che quello di frequenza minima compie 500 oscillazioni al secondo. Facendo vibrare due diapason alla volta lo sperimentatore osserva le seguenti frequenze di battimento: 1, 2, 3, 5, 7 e 8 Hz. Si determinino le possibili frequenze degli altri tre diapason.

19.9 Effetto Doppler

40. Una sorgente S produce onde circolari sulla superficie di un lago come illustrato in Figura 19.26. Le onde si propagano alla velocità di 5,5 m/s e la distanza tra creste successive è di 2,3 m. Un osservatore è situato in una barca che si muove, rispetto alla riva, alla velocità di 3,3 m/s verso la sorgente. Quanto vale la frequenza delle onde misurata dall'osservatore?

 ISBN 88-408-1254-7

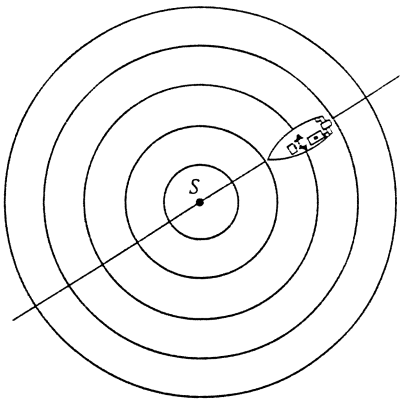


FIGURA 19.26 Esercizio 40.

41. Le turbine dei motori a reazione di un aeromobile in volo alla velocità di 193 m/s emettono un sibilo di frequenza 15.8 kHz; quale sarà la frequenza ricevuta dal pilota di un secondo aereo che sta per sorpassare il primo alla velocità di 246 m/s?

42. La sirena di un'ambulanza emette un sibilo di frequenza 1602 Hz; l'autoambulanza affianca un ciclista che pedala alla velocità di 2,63 m/s e che, una volta sorpassato, riceve il sibilo alla frequenza di 1590 Hz. Si calcoli la velocità dell'ambulanza.

43. Un fischietto, che produce un suono di frequenza 538 Hz, viene tenuto in moto lungo una circonferenza di raggio 71,2 cm con velocità angolare 14,7 rad/s. Si determinino la frequenza (a) più bassa e (b) più alta ricevuta da un ascoltatore lontano e a riposo rispetto al centro della circonferenza.

44. Nel 1845 Buys Ballot eseguì l'esperimento seguente al fine di studiare l'effetto Doppler per le onde acustiche: due trombettieri, uno su un carro ferroviario trainato da una locomotiva e uno fermo nei pressi dei binari, suonavano la medesima nota a 440 Hz. Gli sperimentatori ascoltarono quattro battimenti al secondo; quale velocità della locomotiva giustifica questo risultato sperimentale?

45. Si stimi la velocità del proiettile di Figura 19.16b. Si assuma che nel mezzo in cui si muove il proiettile il suono si propaghi alla velocità di 380 m/s.

46. Un sonar posto su un'auto della polizia invia un segnale acustico di frequenza 148 kHz: il segnale viene riflesso da un camion che si avvicina alla velocità di 44,7 m/s. Si calcoli la frequenza della componente riflessa ricevuta dal sonar.

47. Una sirena antifurto emette segnali acustici alla frequenza di 28,3 kHz. Si calcoli la frequenza di battimento osservata nel caso in cui il segnale venga riflesso da uno scassinatore che si muove verso la sorgente alla velocità di 0,95 m/s.

48. Un sirena, che emette segnali acustici alla frequenza di 1000 Hz, si allontana dall'osservatore alla velocità di 10,0 m/s e si avvicina a una scogliera. (a) Si calcoli la frequenza del segnale che giunge direttamente all'osservatore. (b) Si determini la frequenza del segnale che, riflesso dalla scogliera, giunge all'osservatore. (c) Si calcoli la frequenza dei battimenti. L'osservatore percepisce i battimenti? Si assuma che la velocità del suono nell'aria sia 330 m/s.

49. Un trombettista, in un'automobile che si muove verso un muro alla velocità di 19,3 m/s, suona una nota di frequenza 438 Hz. Si calcoli (a) la frequenza della nota ascoltata da un osservatore solidale con il muro e (b) la frequenza dell'onda riflessa ricevuta dal musicista.

50. In uno studio sull'impiego dell'effetto Doppler dei segnali ultrasonici nella diagnosi medica, l'autore afferma: "In corrispondenza di moti alla velocità di un millimetro al secondo di una qualsiasi struttura interna al corpo umano, si osserva una variazione di frequenza pari a 1,3 Hz/MHz." A partire da questa affermazione si calcoli la velocità alla quale le onde ultrasoniche viaggiano all'interno del tessuto umano.

51. Un pipistrello volteggia in una caverna orientandosi per mezzo di brevi segnali ultrasonici di durata inferiore a un millisecondo e ripetuti varie volte in un secondo. Si assuma che i segnali emessi abbiano frequenza pari a 39,2 kHz e che il pipistrello si muova verso una parete verticale piana alla velocità di 8,58 m/s. Si calcoli la frequenza del segnale riflesso ricevuto dall'apparato uditivo dell'animale.

PROBLEMI

1. Un'estremità di una sbarra di metallo di lunghezza L, in cui il suono si propaga alla velocità v, viene percossa violentemente. Un osservatore posto alla seconda estremità della sbarra riceve sia l'onda acustica che si è propagata nella sbarra sia quella propagatasi in aria. (a) Se si denota con v_{aria} la velocità di propagazione del suono in aria si calcoli il ritardo nella ricezione dell'onda più lenta. (b) Una delle due estremità di una lunga sbarra di alluminio viene percossa con un martello. Un osservatore posto alla seconda estremità della sbarra riceve due onde acustiche separate di 120 ms. Si calcoli la lunghezza della sbarra.

2. Una pietra viene lanciata in un pozzo e dopo 3,00 s si riceve il rumore causato dall'urto della pietra con la superficie dell'acqua. Si calcoli la profondità del pozzo.

3. Un altoparlante emette segnali acustici isotropi di frequenza 2,09 kHz; un osservatore posto alla distanza di 6,11 m dalla sorgente misura l'intensità 962 $\mu W/m^2$. Supponendo che le onde emesse dall'altoparlante non vengano riflesse, si calcoli (a) la loro intensità alla distanza di 28,5 m dalla sorgente, (b) lo spostamento massimo delle particelle del mezzo e (c) l'ampiezza di pressione alla distanza di 6,11 m dalla sorgente.

4. (a) Due onde acustiche, che si propagano rispettivamente in acqua e in aria, hanno medesima intensità. Si calcoli il rapporto tra l'ampiezza di pressione dell'onda in acqua e quella dell'onda in aria. (b) Si calcoli il rapporto tra le intensità supponendo uguali le ampiezze di pressione. Si assuma che la temperatura dell'acqua sia di 20 °C.

ISBN 88-408-1254-7

5. Una sorgente lineare, per esempio un lungo treno merci in moto su un binario rettilineo, emette un'onda cilindrica. Si assuma che l'aria non assorba energia e si determini come (a) l'intensità e (b) l'ampiezza dell'onda dipendono dalla distanza della sorgente. Si ignorino eventuali riflessioni e si considerino punti nei pressi della regione centrale del treno.
6. In Figura 19.27 è illustrato un interferometro acustico, costituito da un tubo pieno d'aria, che può essere utilizzato per studiare il fenomeno dell'interferenza tra onde acustiche. Nella figura S rappresenta una sorgente, per esempio un altoparlante, e D un sistema ricevente, per esempio un orecchio umano o un microfono. La lunghezza del percorso SBD può essere modificata, mentre quella del percorso SAD è fissa. Si osserva che per una certa posizione di B l'intensità raggiunge il valore minimo 10 $\mu W/cm^2$ e che, spostando B in una nuovo posizione distante 1,65 cm dalla precedente, l'intensità cresce con continuità fino a raggiungere il valore massimo di 90 $\mu W/cm^2$. Si determini (a) la frequenza dell'onda emessa dalla sorgente e (b) le ampiezze che giungono al sistema ricevente per le due posizioni di B considerate. (c) Come si spiega che queste due onde hanno diversa ampiezza pur essendo state prodotte dalla stessa sorgente?

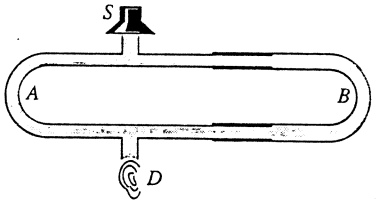


FIGURA 19.27 Problema 6.

7. A 194 m di distanza da un altoparlante di 31,6 W di potenza, viene posto un microfono di sezione efficace 75,2 mm^2; con ottima approssimazione l'altoparlante può essere considerato una sorgente puntiforme. Si calcoli (a) l'intensità del segnale ricevuto dal microfono, (b) la potenza incidente sul microfono e (c) la quantità totale di energia ricevuta dal microfono in 25,0 min.
8. Il *tempo di riverberazione* di una sala da concerto è il tempo che l'intensità di un segnale sonoro impiega per ridursi di un fattore 10^6. Il tempo di riverberazione dipende dalla frequenza del segnale. Si supponga che in una sala da concerto il tempo di riverberazione per una nota particolare valga 2,6 s. Tale nota viene suonata con livello sonoro 87 dB; si calcoli dopo quanto tempo il suo livello sonoro si riduce a 0 dB, ovvero raggiunge la soglia di udibilità umana.
9. Un riflettore parabolico di apertura circolare di raggio pari a 0,50 m viene usato per focalizzare un segnale acustico. Il suono viene trasferito dal fuoco del paraboloide all'orecchio del detective in ascolto mediante un tubo di diametro pari a 1,0 cm e con efficienza del 12 %. A quale distanza può essere ascoltata una conversazione bisbigliata? Si assuma che il livello sonoro di un bisbiglio sia 20 dB a 1,0 m dalla sorgente puntiforme e si ricordi che la soglia di udibilità è 0 dB.
10. Il periodo di una stella variabile può essere stimato supponendo che la stella esegua delle pulsazioni radiali nel suo modo stazionario fondamentale, ovvero supponendo che il raggio vari periodicamente con un ventre sulla superficie. (a) Ci si attende che il centro della stella sia un nodo oppure un ventre? (b) In analogia con quanto detto a proposito delle canne d'organo si dimostri che il periodo vale

$$T = \frac{4R}{v_s},$$

ove R è il raggio all'equilibrio e v_s è la velocità media del suono nella stella. (c) Le nane bianche, il cui raggio è dell'ordine di 0.009 raggi solari, sono costituite di materia il cui modulo di comprimibilità vale $1{,}33 \cdot 10^{22}$ Pa e la cui massa volumica è dell'ordine di $1{,}0 \cdot 10^{10}$ kg/m^3. Si stimi il periodo di pulsazione di una nana bianca.
11. La sbarra R illustrata in Figura 19.28 è fissata al suo centro; il disco D saldato all'estremità della sbarra è posto in un tubo di vetro all'interno del quale sono stati sparpagliati trucioli di sughero. L'altra estremità del tubo è chiusa dallo stantuffo P. Nella sbarra vengono eccitate oscillazioni longitudinali e lo stantuffo viene spostato fino a quando i trucioli di sughero non evidenziano in modo netto una sequenza di nodi e ventri. Se è nota la frequenza ν delle vibrazioni longitudinali, misurando la distanza d tra antinodi successivi è possibile risalire alla velocità di propagazione v del suono nel gas del tubo. Si dimostri che

$$v = 2\nu d.$$

Il metodo appena descritto per la determinazione della velocità del suono nei gas si chiama metodo di Kundt.

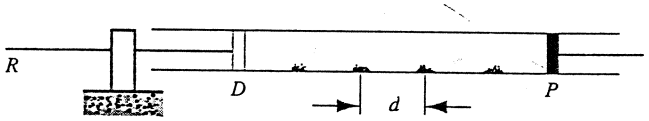


FIGURA 19.28 Problema 11.

12. All'estremità aperta di un tubo di 1,18 m di lunghezza viene avvicinata una corda tesa. La corda, di massa 9,57 g e lunghezza 33,2 cm, ha le due estremità fisse e vibra nel suo modo fondamentale. Per risonanza l'aria nel tubo si pone in vibrazione alla sua frequenza fondamentale. Si determini (a) la frequenza di oscillazione della colonna d'aria e (b) la tensione del filo.
13. Una corda di violino di 30,0 cm e massa lineica 0,652 g/m viene avvicinata a un altoparlante alimentato da un oscillatore a frequenza variabile. Si osserva che, variando con continuità la frequenza dell'oscillatore nell'intervallo 500-1500 Hz, si eccitano le oscillazioni nella corda soltanto per le frequenze di 880 Hz e 1320 Hz. Si calcoli la tensione della corda.
14. Uno sperimentatore ha a disposizione cinque diapason di frequenze diverse. Usando due diapason alla volta (a) quante diverse frequenze di battimento si possono trovare? (b) Qual è il valore minimo del numero di frequenze di battimento che si possono ottenere?
15. Nell'acqua la luce si propaga alla velocità di $2{,}25 \cdot 10^8$ m/s. Un fascio elettronico ad alta velocità emette radiazione Čerenkov nell'acqua con fronte d'onda costituito da un cono con angolo al vertice di 58,0°. Si calcoli la velocità degli elettroni nell'acqua.

 ISBN 88-408-1254-7

16. Due diapason identici vibrano alla frequenza di 442 Hz: una persona si trova sulla retta che li congiunge. Si calcoli la frequenza dei battimenti uditi dall'osservatore nei casi seguenti: (a) l'osservatore è fermo e i due diapason si muovono entrambi verso destra alla velocità di 31,3 m/s; (b) i diapason sono fermi e l'osservatore si muove verso destra alla velocità di 31,3 m/s.

17. Un aereo vola ad altitudine fissata alla velocità di 396 m/s. Il bang supersonico raggiunge un osservatore al suolo 12,0 s dopo che l'aereo ha superato la sua linea verticale. Si determini a quale altitudine vola l'aeroplano. Si assuma che la velocità di propagazione del suono nell'aria valga 330 m/s.

18. In Figura 19.29 è illustrato un dispositivo che funge da trasmettitore e ricevitore di onde acustiche; tale strumento può essere utile per misurare la velocità V alla quale un oggetto, schematizzato in figura da un piano, gli si avvicina. Applicando due volte l'equazione dell'effetto Doppler, la prima con l'obiettivo come osservatore e la seconda con l'obiettivo come sorgente, si dimostri che la frequenza ricevuta ν_r è legata alla frequenza ν_s del segnale emesso dalla relazione

$$\nu_r = \nu_s \left(\frac{v + V}{v - V} \right),$$

ove v è la velocità di propagazione del suono. (b) Nella maggior parte dei casi concreti è lecito assumere $V \ll v$: si dimostri che in questo caso la relazione precedente si riduce a

$$\frac{\nu_r - \nu_s}{\nu_s} \approx \frac{2V}{v}.$$

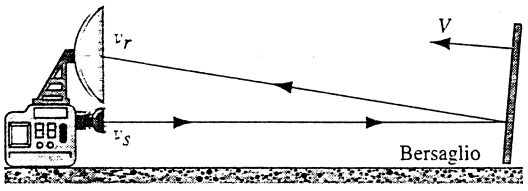


FIGURA 19.29 Problema 18.

19. Due sottomarini, durante un'esercitazione nell'oceano Atlantico, finiscono in rotta di collisione con velocità 20,2 km/h e 94,6 km/h (Figura 19.30). Il sottomarino più lento invia un segnale sonar, un'onda acustica che viaggia alla velocità di 5470 km/h, di frequenza 1030 Hz. (a) Il secondo sottomarino riceve il segnale; quanto vale la frequenza del segnale ricevuto? (b) Il primo sottomarino riceve la componente riflessa del segnale inviato; quanto vale la frequenza ricevuta? Si assuma che l'oceano sia calmo e che non vi siano correnti.

20. Un sottomarino si muove verso nord alla velocità di 75,2 km/h rispetto al fondale ed emette un segnale sonar – onda acustica che si propaga nell'acqua (vedi la Tabella 19.1) – di frequenza 989 Hz. Supponendo che vi sia una corrente con velocità di 30,5 km/h relativa alla terraferma,

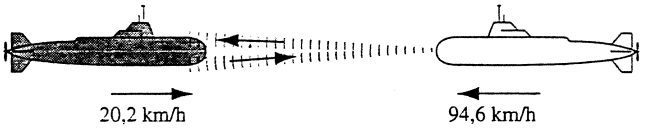


FIGURA 19.30 Problema 19.

si determini la frequenza misurata da un'imbarcazione trascinata dalla corrente che naviga a nord del sottomarino. (*Suggerimento*: nelle equazioni dell'effetto Doppler tutte le velocità vanno misurate in un riferimento solidale con il mezzo di trasmissione.)

21. Una sirena, che emette un segnale a frequenza di 2000 Hz, e un osservatore sono entrambi fermi rispetto alla superficie terrestre. Quanto vale la frequenza ricevuta dall'osservatore quando il vento spira con velocità di 12 m/s (a) dalla sorgente verso di lui e (b) da lui verso la sorgente?

22. Due treni su binari paralleli corrono l'uno verso l'altro, entrambi alla velocità di 34,2 m/s rispetto al suolo. Uno dei due treni emette un fischio di frequenza 525 Hz. (a) Quale frequenza ricevono degli osservatori sul secondo treno in assenza di vento? (b) Quale frequenza ricevono degli osservatori sul secondo treno se il vento spira alla velocità di 15,3 m/s parallelamente ai binari e nel verso in cui procede il treno sul quale viaggiano gli osservatori? (c) Si risponda al quesito (b) per un vento che spira nel verso in cui procede il treno che emette il fischio.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Si scriva un programma per un sonar Doppler. Il programma deve chiedere all'operatore la velocità del suono, la frequenza del segnale emesso, quella del segnale riflesso e il ritardo temporale tra l'invio del segnale emesso e la ricezione del segnale riflesso. Il programma deve calcolare la distanza probabile dell'obiettivo, le sue possibili velocità e deve stabilire se l'obiettivo si avvicina o si allontana dal sonar. Si provi il funzionamento del programma usando i dati seguenti: velocità del suono di 340 m/s, frequenza del segnale emesso 20 kHz, frequenza del segnale riflesso 20,612 kHz, ritardo di 0,230 s.

2. Si generalizzi il programma precedente in modo tale che analizzando i dati relativi a due segnali emessi successivi si possa determinare sia la distanza che la velocità dell'obiettivo. Il programma deve chiedere all'operatore anche la frequenza alla quale vengono inviati i segnali emessi. Si assuma, inoltre, che i segnali emessi siano isotropi e che si possa individuare in modo univoco la direzione del segnale riflesso. Si provi il funzionamento del programma usando i dati seguenti: velocità del suono: 340 m/s; frequenza dei segnali emessi: 20 kHz; numero di segnali emessi: uno al secondo; frequenza del primo segnale riflesso: 20,921 kHz; direzione del primo segnale riflesso: 40° verso est rispetto a nord; ritardo relativo al primo segnale: 0,288 s; frequenza del secondo segnale riflesso: 20,921 kHz; direzione del secondo segnale riflesso: 36,5° verso est rispetto a nord; ritardo relativo al secondo segnale: 0,311 s.

CAPITOLO 20

TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA*

La relatività ristretta ha la fama non meritata di essere una teoria molto difficile da comprendere. Ma non richiede complicati ragionamenti matematici: i suoi sviluppi possono essere spiegati per la maggior parte usando tecniche già ben note ai lettori di questo testo. L'aspetto forse più stimolante di questa teoria è l'insistenza con la quale pretende di farci abbandonare, a favore di nuove idee rivoluzionarie, le radicate convinzioni circa lo spazio e il tempo acquisite dal genere umano in secoli di esercizio del «senso comune».

*I concetti essenziali della relatività ristretta sono stati formalmente esposti da Albert Einstein in un documento pubblicato nel 1905.** In questo capitolo presenteremo i postulati fondamentali della teoria di Einstein e i loro sviluppi, introducendo le tecniche matematiche che consentono di trasferire in un diverso sistema di riferimento i risultati di esperienze di laboratorio, e studiandone alcune conseguenze sia cinematiche che dinamiche.*

20.1 LA FISICA CLASSICA IN DIFFICOLTÀ

La cinematica sviluppata da Galileo e la meccanica sviluppata da Newton, che costituiscono le fondamenta della cosiddetta *fisica classica*, hanno riscosso enormi successi: ricordiamo in particolare la teoria copernicana del moto dei pianeti nel sistema solare e il ricorso alla cinematica per spiegare certe proprietà dei gas scoperte sperimentalmente. Rimangono peraltro alcune categorie di fenomeni scoperti sperimentalmente che non possono essere interpretati alla luce di queste teorie classiche. Per introdurci allo studio di queste anomalie esponiamo qui di seguito alcuni tipici esempi di esperienze di laboratorio che hanno dato l'allarme sui limiti delle teorie affermate della fisica classica, e al tempo stesso hanno consentito di verificare la validità delle teorie della relatività ristretta di Einstein.

Difficoltà nel concetto di tempo

Il pione (π^+ o π^-) è una particella che si può creare in un acceleratore di particelle ad alta energia. È una particella molto instabile; si può osservare che i pioni generati allo stato di riposo decadono (in altre particelle) con una vita media di soli 26 ns ($26{,}0 \cdot 10^{-9}$ s). In un particolare esperimento si sono prodotti pioni in moto a una velocità $v = 0{,}913c$, ove $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s è la velocità della luce. In tali occasioni si è potuto osservare che essi percorrevano una distanza media $D = 17{,}4$ m prima di decadere, da cui si è potuto dedurre che decadono in un tempo $D/v = 63{,}7$ ns, molto maggiore della vita media a riposo di 26 ns. Questo effetto, chiamato *dilatazione del tempo*, fa pensare che «qualcosa» che dipen-

* Alcuni docenti preferiscono svolgere questo argomento dopo aver trattato le onde elettromagnetiche, qui presentate nel Capitolo 38. Gli effetti relativistici sul moto delle onde sono descritti nel Capitolo 39. Un riassunto di questo capitolo si può trovare nei Paragrafi da 20.4 a 20.7.

** Nello stesso anno egli pubblicò anche due saggi, sui moti browniani e sull'effetto fotoelettrico: e fu per quest'ultimo lavoro, e non propriamente per la teoria della relatività, che nel 1921 ricevette il premio Nobel per la fisica. Egli pubblicò ancora nel 1917 la teoria della relatività generale.

 ISBN 88-408-1254-7

de dal moto relativo del pione rispetto al laboratorio abbia «allungato» l'intervallo di tempo misurato di un fattore attorno a 2.5. Un effetto di questo genere non si può spiegare in base alla fisica newtoniana, che considera un postulato il fatto che il tempo sia una coordinata universale avente un identico valore per tutti gli osservatori.

Difficoltà nel concetto di lunghezza

Supponiamo che in quel laboratorio un osservatore abbia marcato un segno nel punto in cui si è formato il pione e un altro nel punto in cui è decaduto, e abbia misurato la loro distanza in 17,4 m. Immaginiamo ora la situazione di un osservatore che viaggi insieme al pione alla velocità $u = 0{,}913c$. Egli misurerà, per il pione che gli risulta essere allo stato di riposo, una vita media di 26,0 ns. Per questo osservatore la distanza percorsa fra i due segni che indicano i punti di formazione e di decadimento del pione è data dal prodotto $(0{,}913c)\ (26{,}0 \cdot 10^{-9}\ \text{s}) = 7{,}1$ m. Ciò significa che due osservatori in moto relativo misurano valori differenti per la stessa distanza. Anche questo è in contrasto con la fisica newtoniana, che considera un postulato il fatto che la lunghezza sia una coordinata universale avente un identico valore per tutti gli osservatori.

Difficoltà nel concetto di velocità

La Figura 20.1 rappresenta due giocatori A e B visti da un osservatore O. Tutti e tre sono fermi rispetto a questo sistema di riferimento. A lancia verso B una palla a una velocità «ultraluminosa» (più veloce della luce). L'immagine di A mentre lancia, che in sostanza è un segnale luminoso, viene trasmessa a B, e lo stesso succede per l'immagine di B mentre blocca la palla. Entrambi questi segnali viaggiano alla

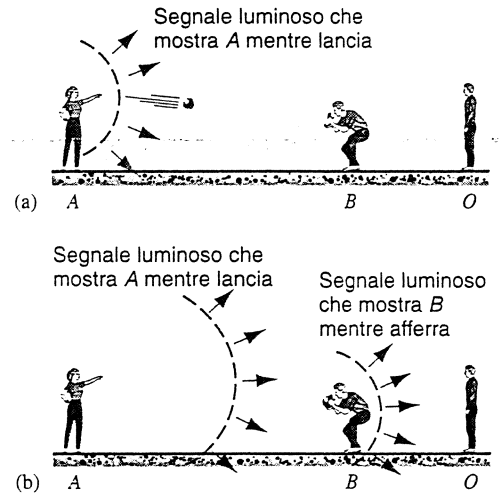


FIGURA 20.1 (a) A lancia una palla a B. La palla viaggia più veloce della luce e così arriva prima del segnale che riproduce A mentre tira la palla. (b) Il segnale luminoso che riproduce B mentre afferra la palla raggiunge l'osservatore O prima del segnale luminoso che riproduce il lanciatore A. Questi assurdi logici depongono contro la possibilità di accelerare particelle a velocità superiori a quella della luce.

velocità della luce, che è inferiore a quella della palla lanciata da A. Nel punto O in cui si trova l'osservatore, il segnale da B arriva prima di quello da A. Perciò, secondo O, B ha afferrato la palla prima che fosse lanciata da A! La fisica newtoniana, consentendo di accelerare proiettili senza limiti di velocità, accetterebbe queste apparenti violazioni della relazione di causa ed effetto.

Difficoltà nel concetto di energia

Il positrone (e^+) è l'*antiparticella* dell'elettrone (e^-). Le due particelle hanno uguale massa e carica elettrica opposta, negativa per l'elettrone e positiva per il positrone; quest'ultimo viene emesso in certi processi di decadimento radioattivo. Quando queste antiparticelle incontrano gli elettroni della comune materia, si osserva un fenomeno noto come *annichilazione elettrone-positrone*, in cui entrambe le particelle scompaiono e al loro posto troviamo soltanto radiazioni elettromagnetiche sotto forma di raggi gamma, simili alla luce visibile ma di lunghezza d'onda minore. Questo processo è rappresentato simbolicamente così:

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{radiazione.}$$

Nella Figura 20.2a vediamo un elettrone e un positrone che si avvicinano a velocità molto bassa. Le due particelle si trovano in un recipiente chiuso; ai fini energetici definiamo il sistema comprendente l'intero recipiente. Nella Figura 20.2b le due particelle si sono reciprocamente annullate, e al loro posto troviamo delle radiazioni. Nella Figura 20.2c le radiazioni sono state assorbite dalle pareti del recipiente, aumentandone l'energia interna.

È possibile applicare a questo sistema il principio di conservazione dell'energia che abbiamo studiato nel Capitolo 13? Chiaramente nessuna energia è entrata o uscita attraverso i confini del sistema; non è stato compiuto alcun lavoro esterno né vi è stato scambio di calore con l'esterno. Possiamo dunque aspettarci che l'energia totale entro i confini del sistema sia rimasta invariata. Ma nella Figura 20.2b vediamo che è emersa energia sotto forma di radiazione, che si è accumulata nelle pareti del recipiente e che non trova alcuna evidente contropartita nella Figura 20.2a. Sembra che la legge della conservazione dell'energia sia stata violata. Per salvare il principio di conservazione dell'energia come uno dei fondamenti della fisica, dobbiamo giustificarne questa apparente violazione.

Difficoltà nel concetto di luce

Nel 1905 Einstein espose la sua teoria della relatività ristretta partendo da un esperimento ideale da lui immaginato. A 16 anni, studiando la teoria dell'elettromagnetismo, aveva escogitato un paradosso: se vi muoveste alla velocità della luce parallelamente a un raggio di luce che viaggia nello spazio vuoto, osservereste un campo «statico» di elettricità e dei tracciati di campi magnetici. (Analogamente, nella Figura 18.8 appare una perturbazione «statica» su una corda vibrante, come sarebbe vista da un osservatore che

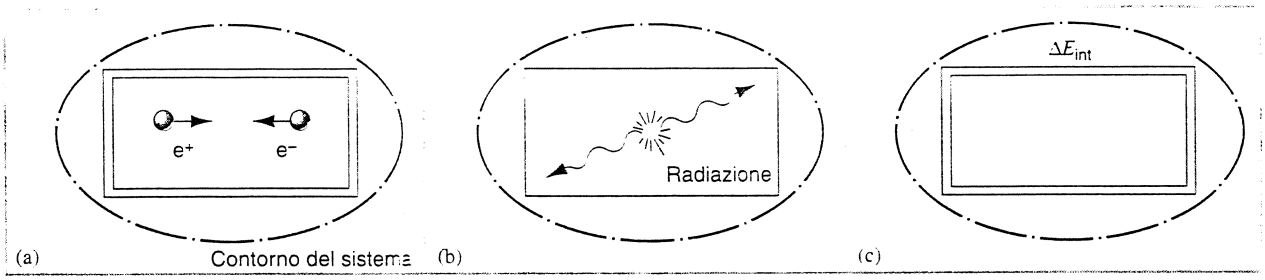


FIGURA 20.2 (a) Un elettrone e un positrone si avvicinano lentamente all'interno di un recipiente contenuto nel sistema. (b) Dopo l'annichilimento compare la radiazione. (c) L'energia radiante è assorbita dalle pareti del recipiente, incrementando l'energia interna di quest'ultimo di un quantità ΔE_{int}.

percorre la corda alla stessa velocità con cui l'onda acustica viaggia su di essa.) Ma Einstein ben sapeva che l'esistenza simultanea di campi elettrostatici e di campi magnetici violerebbe la teoria dell'elettromagnetismo.

Einstein si trovò di fronte a un'alternativa per risolvere questo paradosso: era sbagliata la teoria elettromagnetica oppure lo era la cinematica classica, che ammette l'esistenza di un osservatore che può viaggiare solidale con un raggio luminoso? Fidandosi dell'intuizione, che era forse la sua più grande qualità, Einstein puntò sulla teoria elettromagnetica e andò in cerca di una variante alle teorie cinematiche di Newton e Galileo. Vedremo più avanti in questo stesso capitolo come questa nuova cinematica, che sta alla base della relatività ristretta, vieti a qualsiasi osservatore di seguire dappresso un raggio di luce. Dimostreremo anche come egli risolva gli altri problemi qui sopra esaminati riguardanti tempo, lunghezza, velocità ed energia.

La prova decisiva per qualunque teoria è il modo con cui questa si concilia coi risultati sperimentali. La teoria della relatività ristretta di Einstein è stata sottoposta a esaurienti prove di laboratorio durante gli ultimi 95 anni, e le ha superate tutte. Quando i risultati sperimentali della fisica classica e della teoria della relatività appaiono in disaccordo, ha sempre vinto la relatività.

20.2 I POSTULATI DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Una teoria scientifica si presenta di solito formulando alcune affermazioni generali, chiamate *postulati,* che mirano a costituire una base per la teoria. Da questi postulati si sviluppano poi una serie di leggi matematiche sotto forma di equazioni che mettono in relazione fra loro delle variabili fisiche. In seguito si passa a verificare in laboratorio le previsioni delle equazioni. Ogni teoria rimane valida fino a che non sia contraddetta dalla sperimentazione, dopodiché si può procedere a rivedere o a sostituire i postulati, e il ciclo ricomincia.

Per circa due secoli la meccanica di Galileo e di Newton aveva superato tutte le prove sperimentali. I postulati consistevano allora nella natura assoluta del tempo e dello spazio. Con il suo esperimento ideale della cattura di un raggio di luce Einstein mise in evidenza la necessità di sostituire le leggi di Galileo sul moto relativo. Nel saggio del 1905 *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento* Einstein propose i due postulati che costituiscono i fondamenti della sua teoria della relatività ristretta, che possiamo riscrivere così:

> Principio della relatività: *le leggi della fisica sono le stesse in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.*
>
> Principio della costanza della velocità della luce: *la velocità della luce ha un identico valore in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.*

Il primo principio afferma che le leggi della fisica sono assolute, universali e identiche per tutti gli osservatori inerziali. Una legge valida per un osservatore inerziale non può essere violata nei confronti di *alcun* altro osservatore inerziale.

Il secondo postulato è molto più difficile da accettare, perché urta contro il nostro senso comune, fermamente radicato nella cinematica galileiana, che è sempre stata confermata dalle nostre esperienze quotidiane. Consideriamo tre osservatori, A, B e C, ciascuno dei quali sta fermo in un diverso sistema di riferimento inerziale. Un lampo di luce viene emesso da A, il quale rileva che la luce viaggia alla velocità c. Il sistema inerziale B si *allontana da A* alla velocità $c/4$: la cinematica di Galileo prevede che B misuri una velocità della luce emessa da A pari a $c - c/4 = 3c/4$. L'osservatore C si muove verso A alla velocità $c/4$: la cinematica di Galileo prevede che C misuri una velocità della luce emessa da A pari a $c + c/4 = 5c/4$. Il secondo postulato di Einstein afferma invece che *tutti e tre gli osservatori misurano per il lampo di luce la stessa velocità c*!

Ovviamente non è questo il modo di comportarsi degli oggetti ordinari. Un proiettile sparato da un'auto in corsa ha una velocità rispetto al terreno definita dalla somma vettoriale della velocità del proiettile rispetto all'auto e della velocità dell'auto rispetto al terreno. Ma le velocità delle onde luminose e di particelle che si muovano a velocità prossime a c si comportano diversamente. Nel Paragrafo 20.6 di questo capitolo studieremo la legge relativistica per la composizione delle velocità e dimostreremo che a basse velocità questa si riduce alla «ovvia» legge di Galileo.

Einstein ha enunciato questi postulati in un'epoca in cui le prove sperimentali erano impossibili o di difficile esecuzione. Soltanto dopo parecchi anni lo sviluppo degli acceleratori di particelle ad alta energia ha consentito di studiare il

 ISBN 88-408-1254-7

moto di particelle a velocità prossime a quella della luce. Nel 1964, per esempio, al CERN di Ginevra, il laboratorio europeo di fisica delle particelle ad alta energia, è stato eseguito un esperimento in cui l'acceleratore di protoni ha prodotto un fascio di particelle chiamate pioni neutri (π^0), che hanno la proprietà di decadere rapidamente (vita media di circa 10^{-16} s) emettendo due raggi gamma:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma.$$

I raggi gamma sono radiazioni elettromagnetiche che viaggiano alla velocità della luce. Gli sperimentatori misurarono direttamente la velocità dei raggi gamma emessi nel decadimento dei pioni, che si muovevano alla velocità di $0{,}99975c$. Secondo Galileo i raggi gamma emessi nella direzione del moto dei pioni avrebbero dovuto avere una velocità $c + 0{,}99975c = 1{,}99975c$ nel sistema di riferimento del laboratorio. Secondo Einstein avrebbero invece dovuto avere una velocità uguale a c. La velocità misurata risultò $2{,}9977 \cdot 10^8$ m/s, uguale a c con l'approssimazione di 1 su 10^4, fornendo così una verifica diretta del secondo postulato.

Considerati insieme, i due postulati hanno un'altra conseguenza: *è impossibile accelerare una particella a una velocità superiore a quella della luce, per quanto grande sia l'energia cinetica che le viene fornita.* Anche questa è un'affermazione verificabile in laboratorio, mettendo così in evidenza un'altra differenza fra i postulati della relatività e quelli della fisica classica: questa infatti non pone un limite superiore alla velocità che un oggetto può raggiungere, mentre la relatività impone questo limite massimo, che per il primo postulato deve essere lo stesso per qualsiasi sistema di riferimento.

In un altro esperimento del 1964 si accelerarono degli elettroni con un'elevata differenza di potenziale (fino a 15 milioni di volt) e se ne misurò direttamente la velocità. Il grafico della Figura 20.3 rappresenta la velocità degli elettroni in funzione dell'energia cinetica acquisita. Pur aumentando enormemente il potenziale acceleratore, la velocità non solo non supera mai, ma nemmeno riesce a raggiungere la velocità della luce. Ancora una volta i risultati degli esperimenti ad alte velocità sono in disaccordo con le leggi della cinematica di Galileo e Newton, confermando la validità dei postulati della relatività ristretta.

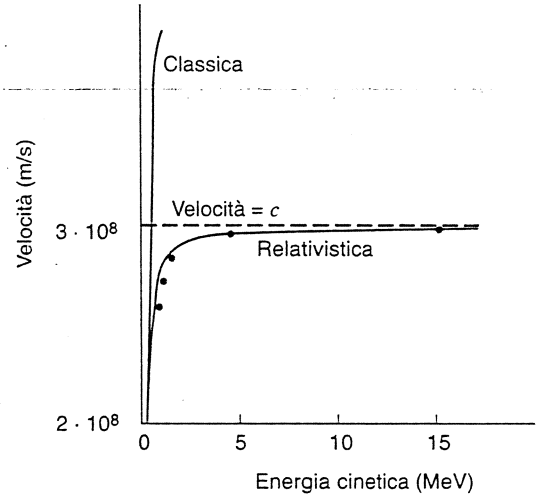


FIGURA 20.3 I punti rappresentano misurazioni della velocità degli elettroni accelerati da un'elevata differenza di potenziale fino a un valore noto di energia cinetica. Le misurazioni mostrano che, per quanto grande sia l'energia cinetica, la velocità degli elettroni non raggiungerà mai c.

20.3 CONSEGUENZE DEI POSTULATI DI EINSTEIN

All'inizio di questo capitolo abbiamo accennato ad alcune difficoltà manifestatesi nell'interpretare secondo la fisica classica certe misurazioni di tempo, lunghezza e velocità. Vediamo ora come i postulati di Einstein possano risolverle.

Relatività del tempo

Consideriamo due osservatori: S fermo a terra, ed S' su un treno, che viaggia a velocità costante u su un lungo tratto di binario rettilineo. Essi sono dotati di identici apparecchi di misura del tempo (Figura 20.4), costituiti da un lampeggiatore F affiancato a un rivelatore D davanti a uno specchio M posto alla distanza L_0. Il lampeggiatore emette un lampo di luce che, riflettendosi nello specchio, colpisce D dando un impulso all'orologio e facendo partire un altro lampo di luce da F. L'intervallo di tempo Δt_0 fra i due impulsi equivale al rapporto fra la distanza percorsa dal raggio di luce $2L_0$ e la velocità della luce c:

$$\Delta t_0 = 2L_0/c\,. \qquad (20.1)$$

L'intervallo Δt_0 è misurato da S o da S' quando gli orologi sono fermi nei rispettivi sistemi di riferimento.

Passiamo ora a esaminare la situazione in cui un osservatore guarda l'orologio solidale all'altro sistema di riferimento. La Figura 20.5 rappresenta la sequenza degli eventi osservati da S sull'orologio di S' collocato sul treno*. Se-

* Si suppone che S disponga di una serie di orologi sincronizzati, come descritti nel Paragrafo 20.5, atti a misurare i tempi dei passaggi per A, B e C.

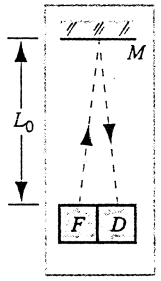


FIGURA 20.4 L'orologio avanza a scatti con intervalli di tempo Δt_0, determinati dal tempo impiegato da un lampo di luce a percorrere la distanza $2L_0$ dalla lampadina F allo specchio M e indietro al rivelatore D. (La distanza tra F e D è ritenuta trascurabile rispetto a L_0.)

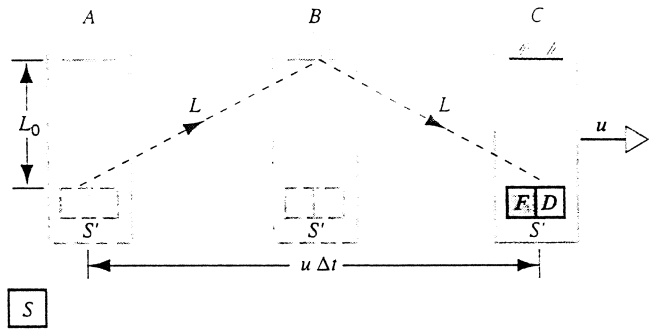


FIGURA 20.5 Nel sistema di riferimento di S, l'orologio trasportato da S' sul treno viaggia alla velocità u. La linea tratteggiata, di lunghezza $2L$, rappresenta il percorso del raggio di luce secondo S.

condo S il lampo di luce è emesso in A, riflesso in B e captato in C. Durante questo intervallo Δt, secondo S l'orologio si sposta di una distanza orizzontale $u\,\Delta t$ dal luogo dove è stato emesso il lampo di luce.

Per S il raggio di luce ha percorso una distanza $2L$, ove $L = \sqrt{L_0^2 + (u\Delta t/2)^2}$, come si vede in Figura 20.5. L'intervallo di tempo, misurato da S, che la luce impiega a percorrere questa distanza alla velocità c (la stessa misurata da S'!) sarà

$$\Delta t = \frac{2L}{c} = \frac{2\sqrt{L_0^2 + (u\,\Delta t/2)^2}}{c}. \qquad (20.2)$$

Sostituendo a L_0 il suo valore dato dall'Equazione 20.1 si ricava Δt:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (20.3)$$

Il fattore al denominatore dell'Equazione 20.3 è sempre minore o uguale a 1, e quindi $\Delta t \geq \Delta t_0$. Ossia, l'osservatore rispetto al quale l'orologio si muove (S) misura un maggiore intervallo di tempo fra due impulsi. Questo effetto si chiama *dilatazione del tempo* e l'intervallo Δt_0, misurato da un osservatore rispetto al quale l'orologio è fermo, si chiama *tempo proprio*, e rappresenta il minimo valore del tempo intercorrente fra due eventi che possa essere misurato da qualsiasi osservatore. Tutti gli osservatori in moto relativo rispetto a questo orologio rilevano *tempi più lunghi*.

L'Equazione 20.3 ci permette di capire le difficoltà incontrate nell'esperimento di decadimento dei pioni citato all'inizio del capitolo. Un pione fermo decade entro un intervallo di tempo di 26,0 ns: è il *tempo proprio*, che chiamiamo Δt_0. (Il pione è praticamente un orologio, per il quale l'intervallo tra la formazione e il decadimento rappresenta un *tic*.) Un osservatore nel sistema di riferimento del laboratorio, rispetto al quale il pione è in moto alla velocità $u = 0{,}913c$, dovrebbe misurare un intervallo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{26.0\text{ ns}}{\sqrt{1 - (0{,}913)^2}} = 63{,}7\text{ ns},$$

in perfetto accordo con il risultato sperimentale.

L'Equazione 20.3, dedotta dai postulati di Einstein, esprime il rapporto fra il tempo dilatato e il tempo proprio per osservatori in moto relativo. È da notare che il fattore al denominatore differisce da 1 di una quantità apprezzabile soltanto per velocità molto prossime a c. Ad esempio, per $u = 0{,}1c$ l'Equazione 20.3 dà $\Delta t = 1{,}005\Delta t_0$. Alle velocità usuali si può considerare $\Delta t = \Delta t_0$ con un alto grado di precisione. È questo il risultato classico [dato dalla (20.3) per $u \ll c$] in accordo con la nostra esperienza quotidiana.

L'Equazione 20.3 è valida per qualsiasi orientamento del moto di S' rispetto a S, e per qualsiasi tipo di orologio. È stata verificata sperimentalmente non soltanto per il decadimento di particelle elementari in moto ad alta velocità come il pione, ma anche con orologi atomici ad altissima precisione in moto relativo a velocità ordinarie come quelle dei jet di linea. Anche orologi biologici come l'invecchiamento degli esseri umani sono soggetti alla dilatazione del tempo. Un aspetto interessante di questa conseguenza, il *paradosso dei gemelli*, è discusso più avanti in questo capitolo.

Relatività della lunghezza

Passiamo ora a esaminare gli effetti dei postulati di Einstein sulla misura di intervalli di lunghezza. Supponiamo che ora S' orienti l'orologio sul treno in modo che la luce viaggi parallelamente alla direzione di marcia del treno. La Figura 20.6 mostra la sequenza degli eventi rilevata da S. Chiamiamo L la lunghezza dell'orologio vista da S, che, come vedremo, è diversa dalla lunghezza L_0 misurata da S', sul treno in corsa.

Un lampo di luce è emesso in A (Figura 20.6) e raggiunge lo specchio in B dopo un intervallo di tempo Δt_1. La distanza totale percorsa dal raggio di luce sarà $c\,\Delta t_1$, che si può scrivere come la lunghezza L aumentata della distanza $u\,\Delta t_1$ percorsa dal treno in quell'intervallo:

$$c\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \qquad (20.4)$$

Nel viaggio di ritorno del raggio dallo specchio al rivelatore in posizione C, che secondo S avviene in un tempo Δt_2, la luce percorre una distanza $c\,\Delta t_2$, che sarà uguale alla lunghezza L diminuita della distanza $u\,\Delta t_2$ percorsa dal treno in quell'intervallo:

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \qquad (20.5)$$

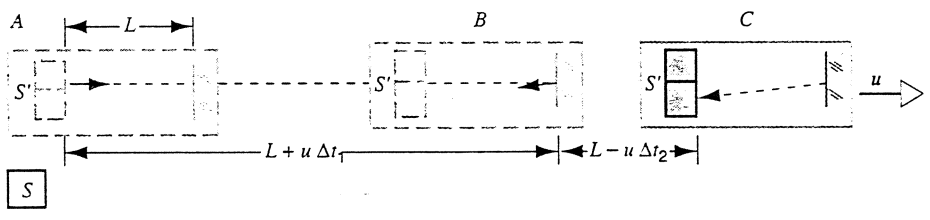


FIGURA 20.6 Qui l'orologio trasportato sul treno da S' emette il suo lampo di luce nella direzione di marcia del treno. Per chiarezza la figura in C è stata spostata a destra.

 ISBN 88-408-1254-7

Ricavati Δt_1 e Δt_2 dalle Equazioni 20.4 e 20.5, ne operiamo la somma per trovare l'intervallo totale di tempo Δt, che risulta

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{L}{c-u} + \frac{L}{c+u} = \\ = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-u^2/c^2}. \qquad (20.6)$$

Dalla (20.3), posto $\Delta t_0 = 2L_0/c$,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \qquad (20.7)$$

Uguagliando le Equazioni 20.6 e 20.7 e risolvendo rispetto a L, troviamo

$$L = L_0\sqrt{1-u^2/c^2}, \qquad (20.8)$$

che descrive il fenomeno noto come *contrazione della lunghezza*. La lunghezza L_0 misurata da un osservatore, come S', fermo rispetto all'oggetto di cui si misura la lunghezza, è la *lunghezza a riposo*, o *lunghezza propria* per analogia con il tempo proprio. Tutti gli osservatori in moto rispetto a S' misureranno una lunghezza minore, ma soltanto per la componente parallela alla direzione del moto: le componenti trasversali rispetto a quella direzione rimangono identiche per tutti gli osservatori. Nella situazione della Figura 20.5 la lunghezza L_0 rimane indisturbata dal moto.

L'Equazione 20.8 può consentirci di risolvere i dubbi esposti nel Paragrafo 20.1 circa il concetto classico di lunghezza. I due segni marcati in laboratorio nelle posizioni di formazione e di decadimento del pione sono distanti 17,4 m: ed essendo i segni fermi rispetto al sistema di riferimento del laboratorio, essi definiscono la *lunghezza a riposo*. Per un osservatore che si muova insieme al pione, il laboratorio è in moto a velocità $u = 0{,}913c$, e la distanza misurata fra i segni, secondo la (20.8), è la *lunghezza contratta*

$$L = (17{,}4\text{ m})\sqrt{1-(0{,}913)^2} = 7{,}1\text{ m},$$

d'accordo con quanto descritto nel Paragrafo 20.1.

In condizioni normali, per $u \ll c$, gli effetti della contrazione della lunghezza sono assolutamente trascurabili. Ad esempio, un razzo della lunghezza di 100 m lanciato dalla superficie terrestre alla velocità di fuga dalla Terra (u = 11,2 km/s) subirebbe una contrazione, per un osservatore fermo sulla Terra, pari all'incirca a 2 diametri atomici!

La contrazione della lunghezza implica che un osservatore fermo misuri per gli oggetti in moto una lunghezza minore rispetto a quando questi sono fermi. Ciò non significa che la lunghezza subisca un effettivo accorciamento, ma che si abbia soltanto una variazione della lunghezza misurata, così come avviene per l'effetto Doppler, in cui due osservatori in moto relativo fra loro misurano una diversa frequenza per il suono proveniente da una stessa fonte.

Somma relativistica delle velocità

Proviamo ora a modificare il nostro apparecchio di misurazione del tempo come indicato dalla Figura 20.7. Il lampeggiatore F è collocato al posto dello specchio ed è sostituito da un dispositivo P che emette particelle a una velocità v_0, misurata da un osservatore fermo rispetto al complesso di misura. Il lampeggiatore emette un lampo di luce quando è colpito da una particella, e il percorso di ritorno al rivelatore D è così compiuto da un raggio di luce. In tal modo l'intervallo di tempo Δt_0, misurato da un osservatore, come S', fermo rispetto all'apparecchio, è formato da due parti: la prima dovuta alla particella che percorre la distanza L_0 alla velocità v_0, e l'altra dovuta al raggio luminoso che percorre la stessa distanza alla velocità c:

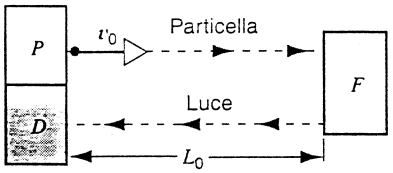


FIGURA 20.7 In questo strumento di misura del tempo una particella viene emessa da P a velocità v_0. Quando raggiunge F, provoca l'emissione di un lampo di luce che va a colpire il rivelatore D.

$$\Delta t_0 = L_0/v_0 + L_0/c. \qquad (20.9)$$

La sequenza degli eventi osservati da S mentre il treno trasporta l'apparecchio assieme a S' è identica a quella della Figura 20.6. La particella emessa, che per S viaggia alla velocità v, raggiunge F dopo aver percorso una distanza $v\,\Delta t_1$, uguale alla somma della distanza (contratta) L e della distanza $u\,\Delta t_1$ percorsa dal treno:

$$v\,\Delta t_1 = L + u\,\Delta t_1. \qquad (20.10)$$

Nell'intervallo Δt_2 il raggio di luce percorre la distanza $c\,\Delta t_2$ pari a L meno la distanza percorsa dal treno $u\,\Delta t_2$:

$$c\,\Delta t_2 = L - u\,\Delta t_2. \qquad (20.11)$$

Sommando Δt_1 e Δt_2 ricavati dalle Equazioni 20.10 e 20.11 si ha il tempo totale che intercorre, secondo S, fra due successivi impulsi dell'orologio, $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$, che, combinato con le Equazioni 20.9 e 20.8 nella (20.3), dà

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2}. \qquad (20.12)$$

Quest'espressione è una forma delle relazioni per la somma delle velocità secondo i postulati di Einstein, valida soltanto per la somma di velocità, o di loro componenti, aventi la stessa direzione del moto relativo, ossia del vettore $\boldsymbol{u}$. Più avanti in questo stesso capitolo ricaveremo risultati più generali.

Secondo Galileo e Newton, un proiettile sparato in avanti alla velocità v_0 da un treno che viaggia a velocità u dovrebbe avere una velocità $v_0 + u$ per un osservatore a terra. Ciò consentirebbe ovviamente di realizzare velocità maggiori di c. La differenza fra il risultato classico e quello relativistico proviene dal denominatore della (20.12), che si può tranquillamente porre uguale a 1 nelle usuali condizioni, con velocità molto minori di c. Questo importante fattore, come dimostriamo nel Problema svolto 20.2, impedisce che le velocità relative superino c.

Se il proiettile è un raggio luminoso ($v_0 = c$ secondo S') la (20.12) dà subito $v_0 = c$ per tutti gli osservatori, qualunque sia la loro velocità u rispetto a S', ossia è costante. Ciò conferma il secondo postulato di Einstein.

PROBLEMA SVOLTO 20.1 I muoni sono particelle elementari aventi una vita media (tempo proprio) di 2.2 μs. Sono generati ad altissime velocità nell'alta atmosfera quando i raggi cosmici (particelle ad alta energia provenienti dallo spazio) entrano in collisione con molecole d'aria. Ponendo che l'altezza L_0 (lunghezza propria) dell'atmosfera nel sistema di riferimento terrestre sia 100 km, trovare la velocità minima che consentirà a un muone di sopravvivere fino a raggiungere la superficie terrestre. Si calcoli il risultato nel sistema di riferimento (a) della Terra e (b) del muone.

Soluzione (a) Nel sistema di riferimento della Terra (Figura 20.8a) il decadimento del muone in moto relativo è rallentato dalla dilatazione del tempo. Se il muone viaggia a una velocità molto prossima a c, il tempo occorrente per raggiungere la Terra dall'alta atmosfera sarà

$$\Delta t = \frac{L_0}{c} = \frac{100\ \text{km}}{3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 333\ \mu\text{s}.$$

Nel sistema di riferimento della Terra il muone deve sopravvivere almeno per 333 μs. Dobbiamo ora trovare la velocità capace di dilatare la vita media dal suo valore proprio $\Delta t_0 (= 2{,}2\ \mu\text{s})$ a questo valore, in base all'Equazione 20.3:

$$333\ \mu\text{s} = \frac{2{,}2\ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Risolvendo, troviamo

$$u = 0{,}999978c.$$

(b) Nel sistema di riferimento del muone, l'atmosfera gli scorre accanto ad altissima velocità. In questa situazione tutta l'atmosfera deve attraversarlo in un intervallo di tempo pari al tempo (proprio) della vita media del muone, e perciò l'altezza totale dell'atmosfera non può superare il valore

$$L = c\,\Delta t_0 = (3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s})(2{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{s}) = 660\ \text{m}.$$

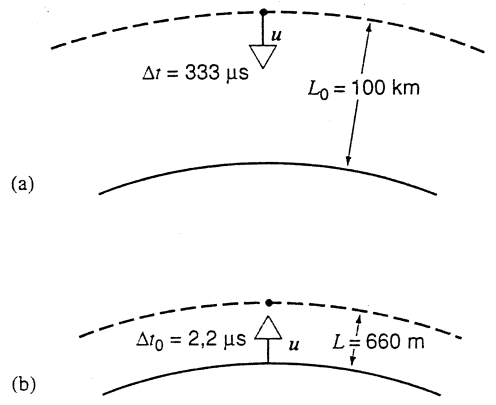


FIGURA 20.8 Problema svolto 20.1. (a) Nel sistema di riferimento della Terra un muone impiega 333 μs a percorrere la distanza di 100 km nell'atmosfera. (b) Nel sistema di riferimento del muone l'atmosfera è alta soltanto 660 m, e il percorso viene coperto in 2.2 μs.

Si tratta qui evidentemente del valore misurato di una lunghezza contratta nel sistema di riferimento del muone, come illustrato nella Figura 20.8b. La lunghezza contratta misurata nel sistema di riferimento del muone, rispetto alla lunghezza a riposo $L_0 (= 100\ \text{km})$, misurata nel sistema di riferimento della Terra, è, secondo l'Equazione 20.8,

$$660\ \text{m} = (100\ \text{km})\sqrt{1 - u^2/c^2}.$$

espressione che dà per u lo stesso valore trovato per il caso (a).

Si noti che una *dilatazione del tempo* in un sistema di riferimento implica una *contrazione della lunghezza* in un altro sistema. Questa interdipendenza del tempo e dello spazio è un aspetto fondamentale della relatività ristretta.

PROBLEMA SVOLTO 20.2 Un'astronave che si allontana dalla Terra alla velocità di $0{,}80c$ lancia un missile in direzione parallela e concorde al proprio moto, alla velocità relativa di $0{,}60c$, come in Figura 20.9. Quale sarà il valore della velocità del missile misurato da un osservatore sulla superficie terrestre?

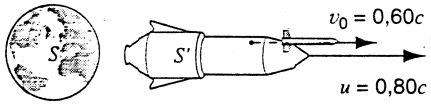


FIGURA 20.9 Problema svolto 20.2. Un'astronave si allontana dalla Terra alla velocità di $0{,}80c$. Un osservatore S' sulla nave spara un missile e ne misura la velocità in $0{,}60c$ rispetto al veicolo spaziale.

Soluzione Problema simile a quello del treno. Qui S' viaggia sull'astronave a velocità $u = 0{,}80c$ rispetto a S posto a terra, e il missile ha una velocità $v_0 = 0{,}60c$ rispetto a S'. Applicando la (20.12) otteniamo la velocità v del missile rispetto a S:

$$v = \frac{v_0 + u}{1 + v_0 u/c^2} = \frac{0{,}60c + 0{,}80c}{1 + (0{,}60c)(0{,}80c)/c^2} =$$
$$= \frac{1{,}40c}{1{,}48} = 0{,}95c.$$

Per la cinematica classica l'osservatore S sulla Terra misurerebbe soltanto il numeratore della (20.12), e vedrebbe il missile muoversi a una velocità $v = 0{,}60c + 0{,}80c = 1{,}40c$, superiore alla massima consentita dalla relatività ristretta. Ci si rende conto quindi di come l'Equazione 20.12 imponga questa limitazione: anche nel caso di $v_0 = 0{,}9999\ldots c$ e $u = 0{,}9999\ldots c$, la velocità relativa risultante v resterebbe sempre inferiore a c.

20.4 TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

I postulati di Einstein costituiscono un primo passo sulla via della risoluzione delle difficoltà prospettate all'inizio di questo capitolo, ma occorre che ci procuriamo una base matematica più formale affinché la teoria possa trattare una più vasta varietà di processi fisici. Potremmo ad esempio riproporci di calcolare come i risultati di misurazioni di un'energia o della forza di un campo magnetico possano differire per osservatori in moto relativo fra loro.

 ISBN 88-408-1254-7

Dobbiamo trovare un insieme di espressioni – le equazioni di trasformazione – che leghino fra loro le osservazioni di un medesimo evento da parte di due osservatori in movimento l'uno rispetto all'altro. Esse hanno bisogno di tre elementi: (1) un osservatore S a riposo in un sistema di riferimento inerziale; (2) un altro osservatore S' a riposo in un altro sistema di riferimento inerziale che sia in moto a velocità uniforme rispetto a S; e (3) un unico evento osservato *sia* da S *sia* da S'. L'evento si verifica, secondo ciascun osservatore, in un punto rappresentato da una particolare terna di coordinate in uno spazio tridimensionale e in un particolare istante. Conoscendo la velocità relativa di S' rispetto a S, vogliamo calcolare le coordinate x', y', z', t' di un evento osservato da S' partendo dalle coordinate x, y, z, t dello *stesso evento* secondo S. Per semplificare l'espressione risolutiva del problema, senza peraltro infirmarne la generalità, poniamo che gli assi x e x' siano orientati secondo la direzione di u, come nella Figura 20.10.

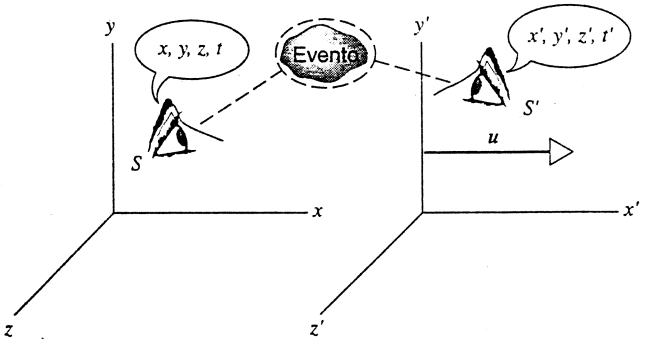


FIGURA 20.10 Due osservatori, i cui sistemi di riferimento sono rappresentati da S ed S', assistono allo stesso evento. S' si sposta rispetto a S alla velocità u lungo la comune direzione xx'. L'osservatore S misura le coordinate x, y, z, t di un evento, mentre S' misura le coordinate x', y', z', t' dello stesso evento.

Il problema si può risolvere ricorrendo alla cinematica classica di Galileo; le *equazioni di trasformazione galileiana* sono:

$$\begin{aligned} x' &= x - ut\,, \\ y' &= y\,, \\ z' &= z\,, \\ t' &= t\,. \end{aligned} \tag{20.13}$$

La prima di queste equazioni soddisfa la nostra esperienza *di tutti i giorni*. Immaginiamo ad esempio che S sia fermo a terra e misuri la distanza x di una palina. S', su un'auto che viaggia alla velocità u rispetto a S, misurerà la distanza $x' = x - ut$, come suggerito nella Figura 20.11. La quarta equazione, $t' = t$, si considera evidente secondo la fisica classica, e rappresenta ciò che Newton chiamava coordinata universale del tempo.

Le formule relativistiche che cerchiamo sono note come *equazioni di trasformazione di Lorentz* dal nome del fisico olandese H.A. Lorentz che le ha proposte, prima di Einstein, per una ragione totalmente differente, senza essere neppure consapevole delle loro implicazioni circa la natura dello spazio e del tempo. Queste equazioni si possono dedurre direttamente dai postulati di Einstein se accettiamo come ovvie proprietà dello spazio e del tempo la simmetria e l'omogeneità. Come esempio di quest'ultima proprietà, supponiamo che un osservatore S misuri la lunghezza di un'asticella sorretta da un osservatore S' in un altro sistema inerziale di riferimento. Il risultato di questa misurazione non dovrebbe dipendere dal punto in cui si trova S' o dall'ora e il giorno in cui si esegue la misurazione.

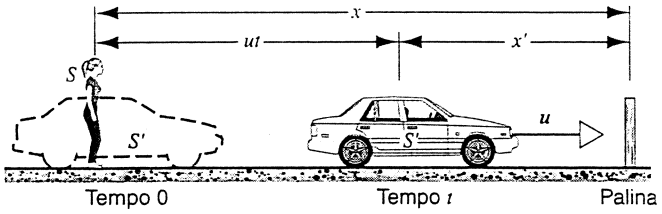


FIGURA 20.11 Secondo S la palina si trova alla coordinata x. Rispetto a S', che è alla coordinata ut, la palina è alla coordinata $x' = x - ut$. Si noti che le origini di S e di S' coincidono per $t = 0$.

Le equazioni di trasformazione di Lorentz ricavate da queste considerazioni sono:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(x - ut)\,, \\ y' &= y\,, \\ z' &= z\,, \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma(t - ux/c^2)\,. \end{aligned} \tag{20.14}$$

È da notare che un oggetto posto inizialmente all'origine secondo S, ossia con $x = 0$ a $t = 0$, si trova all'origine anche secondo S', ossia si ha $x' = 0$ e $t' = 0$).

In queste espressioni compare il *fattore* γ *di Lorentz*, così definito:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\,. \tag{20.15}$$

Nelle equazioni relativistiche è utile introdurre anche il *parametro di velocità* β, definito come il rapporto fra la velocità relativa u dei due sistemi di coordinate e la velocità della luce,

$$\beta = u/c\,. \tag{20.16}$$

Il grafico di Figura 20.12 rappresenta il fattore γ di Lorentz in funzione del parametro di velocità β, mentre la Tabella 20.1 ne fornisce alcune coppie di valori. Il campo di variazione di γ va da 1 (a bassa velocità, per $u \ll c$ oppure $\beta \ll c$) a ∞ (ad alta velocità, quando $u \to c$ oppure $\beta \to 1$).

TABELLA 20.1 **Alcuni valori del parametro di velocità e del fattore di Lorentz**

β	γ	β	γ
0,00	1,000	0,90	2,29
0,10	1,005	0,99	7,09
0,30	1,048	0,999	22,4
0,60	1,25	0,9999	70.7

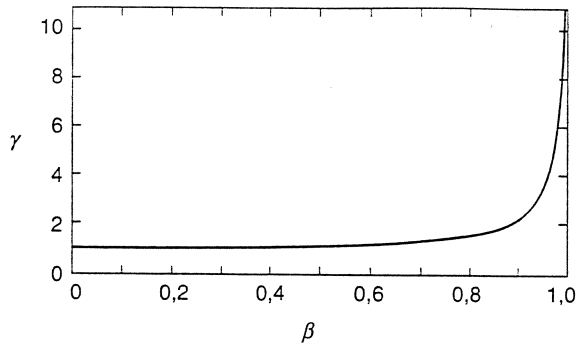


FIGURA 20.12 Il fattore di Lorentz γ in funzione del parametro di velocità β.

Si noti che le equazioni di trasformazione di Lorentz vengono a coincidere con quelle di trasformazione galileiana (Equazione 20.13) quando $u \ll c$. Per convincersene basta supporre che $c \to \infty$, e quindi $u/c \to 0$: l'Equazione relativistica 20.14 si riduce alla corrispondente Equazione classica 20.13. Tutti i risultati classici ricavati nei precedenti capitoli per $u \ll c$ sono confermati dall'esperienza e di conseguenza gli effetti relativistici vanno considerati soltanto ad altissime velocità.

Il sistema di Equazioni 20.14 dà le coordinate spaziotemporali nel sistema di S' in funzione di quelle di S. Se invece vogliamo trovare queste ultime conoscendo le prime, osserviamo dapprima che, nella Figura 20.10, S in apparenza si muove nel verso negativo di x (o di x'). Per ottenere le *trasformazioni inverse di Lorentz* basta scambiare fra loro le coordinate con l'apice e senza apice, e scrivere $-u$ al posto di u; così:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + ut'), \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= \gamma(t' + ux'/c^2). \end{aligned} \qquad (20.17)$$

L'Esercizio 14 presenta un altro modo di ricavare le trasformazioni inverse di Lorentz, consistente nel risolvere rispetto a x e a t il Sistema 20.14 trasformando la prima e la quarta equazione in un sistema di due equazioni in due incognite. Si ritrova così esattamente il Sistema 20.17 che era stato ottenuto direttamente da considerazioni di simmetria.

La Tabella 20.2 riassume le equazioni di trasformazione di Lorentz per una velocità relativa fra S ed S' diretta secondo il comune asse xx'. Sono elencati quattro tipi di trasformazione: le trasformazioni di Lorentz (Sistema 20.14), le trasformazioni inverse di Lorentz (Sistema 20.17), e le trasformazioni per le *differenze*, ossia le trasformazioni un *intervallo* tra due valori di una coordinata, come ad esempio una distanza $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ (la distanza fra due eventi misurata da S'), o un intervallo di tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ (il tempo intercorso fra due eventi misurato da S').

PROBLEMA SVOLTO 20.3 Nel sistema di riferimento inerziale S una luce rossa e una blu sono separate da una distanza $\Delta x = 2{,}45$ km (la luce rossa è la più lontana dall'origine). La luce blu lampeggia, e dopo 5,35 μs lampeggia anche la luce rossa. L'osservatore S' si muove nel verso positivo di xx' a velocità $u = 0{,}855c$. Quale distanza e quale intervallo di tempo fra i due eventi misurerà S'?

Soluzione Il parametro di Lorentz vale

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}855)^2}} = 1{,}928\,.$$

Sono dati gli intervalli secondo l'osservatore S, $\Delta x = 2450$ m e $\Delta t = 5{,}35 \cdot 10^{-6}$ s. Applichiamo l'equazione di trasformazione per le differenze data dalla Tabella 20.2:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \gamma(\Delta x - u\,\Delta t) = \\ &= 1{,}928[2450\,\text{m} - (0{,}855)(3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m/s})(5{,}35 \cdot 10^{-6}\,\text{s})] = \\ &= 2078\,\text{m} = 2{,}08\,\text{km} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2) = \\ &= 1{,}928[5{,}35 \cdot 10^{-6}\,\text{s} - (0{,}855)(2450\,\text{m})/(3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m/s})] = \\ &= -3{,}147 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = -3{,}15\,\mu\text{s}. \end{aligned}$$

In S' la luce rossa è sempre la più distante dall'origine, ma la distanza è di 2,08 km anziché 2,45 km. Ma secondo S' la luce rossa lampeggia *prima* della blu, al contrario di quanto avviene per S, e l'anticipo vale 3,15 μs.

20.5 MISURA DELLE COORDINATE SPAZIOTEMPORALI DI UN EVENTO

Fino ad ora abbiamo detto ben poco su come facciano gli osservatori S ed S' a misurare le coordinate x, y, z, t e x', y', z', t' di un evento, come nel caso dei lampi di luce del Problema svolto 20.3. Spiegheremo ora i concetti basilari cui si ispirano i metodi di misura di laboratorio.

Per definire un sistema di coordinate, si suppone che S disponga di un grande numero di assistenti muniti di un

TABELLA 20.2 Equazioni di trasformazione di Lorentz[a]

Trasformazioni di Lorentz	*Trasformazioni inverse*	*Trasformazioni per le differenze*	*Trasformazioni inverse per le differenze*
$x' = \gamma(x - ut)$	$x = \gamma(x' + ut')$	$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t)$	$\Delta x = \gamma(\Delta x' + u\,\Delta t'$
$y' = y$	$y = y'$	$\Delta y' = \Delta y$	$\Delta y = \Delta y'$
$z' = z$	$x = z'$	$\Delta z' = \Delta z$	$\Delta z = \Delta z'$
$t' = \gamma(t - ux/c^2)$	$t = \gamma(t' + ux'/c^2)$	$\Delta t' = \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2)$	$\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2)$

[a] Equazioni da applicare soltanto in caso di moto relativo nella direzione xx'. Il fattore di Lorentz è $\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$

 ISBN 88-408-1254-7

orologio e di un'asticella di una certa lunghezza. Per esempio, tre assistenti avranno un'asticella lunga 1 m, che disporranno a partire dall'origine su ciascuno dei tre assi coordinati, collocandosi ciascuno all'estremità della propria asticella. Quando vedranno il lampo di luce all'origine faranno partire gli orologi da un valore preimpostato di $3{,}33 \cdot 10^{-9}$ s (3,33 ns, il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza di 1 m dall'origine). Altri tre assistenti disporranno allo stesso modo le loro asticelle della lunghezza di 2 m, e faranno partire i loro orologi dal valore di 6,67 ns. In definitiva ciascun assistente è situato in un punto posto all'estremità di un'asticella di lunghezza L con un orologio predisposto a un tempo $t = L/c$.

Quando tutto è pronto, S lancia dall'origine un lampo di luce e al tempo stesso aziona un orologio da zero. In tal modo, all'arrivo del lampo gli orologi sull'asse x partiranno da un valore (3,33 ns o 6,67 ns) uguale in quell'istante a quello segnato dell'orologio di S, e altrettanto faranno quelli sugli assi y e z. Tutti gli orologi sono così perfettamente sincronizzati: la Figura 20.13 mostra una rappresentazione del sistema di orologi e asticelle.

Supponiamo che S voglia tracciare il grafico dello spostamento di un particella nel sistema di assi coordinati: basterà che insieme a tutti gli assistenti registri il tempo del passaggio della particella nel punto di coordinate x, y e z.

Questa taratura ovviamente funziona soltanto per l'osservatore S, mentre S' e tutti gli altri osservatori inerziali seguono una procedura simile per definire un proprio sistema di coordinate e sincronizzarne i propri orologi. In tal modo le asticelle e gli orologi di ciascun osservatore (che si trova a riposo rispetto al proprio sistema inerziale) sono unici in quel sistema inerziale e indipendenti da quelli di tutti gli altri sistemi inerziali.

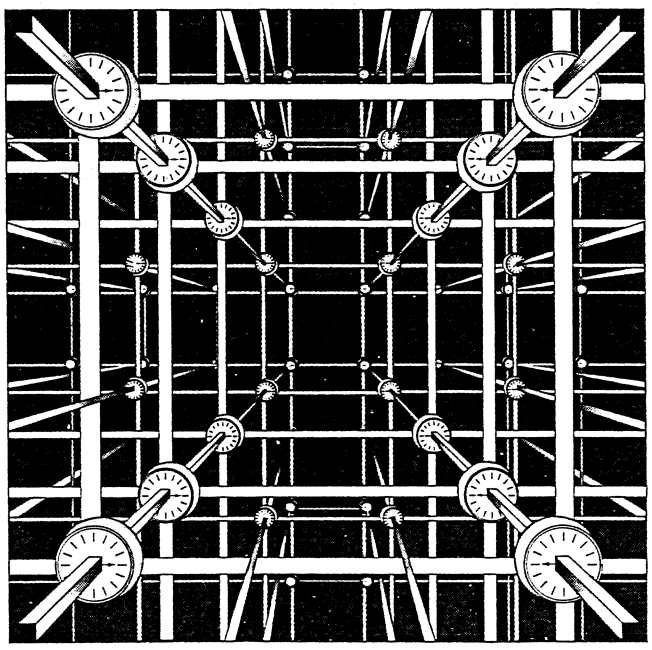


FIGURA 20.13 Un'intelaiatura di aste graduate e orologi utilizzabile da un osservatore in un particolare sistema di riferimento per determinare le coordinate spaziotemporali di un evento.

Da questa procedura di misurazione si deduce che spazio e tempo non sono coordinate indipendenti, e che perciò la descrizione di un evento non può prescindere dalle sue coordinate spaziotemporali: non si può usare un orologio in un determinato punto per registrare l'orario del passaggio di una particella in un altro punto. Per queste ragioni la relatività ristretta è generalmente formulata in termini di coordinate *spaziotemporali* x, y, z e t: spazio e tempo sono trattati come coordinate equivalenti.

20.6 TRASFORMAZIONE DELLE VELOCITÀ

In questo paragrafo ci serviremo delle equazioni di trasformazione di Lorentz per mettere in relazione fra loro la velocità $\boldsymbol{v}$ di una particella rispetto a un osservatore nel sistema inerziale di riferimento S con la velocità $\boldsymbol{v}'$ della stessa particella vista da un osservatore nel sistema inerziale S', che si muove a sua volta alla velocità $\boldsymbol{u}$ rispetto a S. È importante in questo contesto tener presente la definizione di queste tre velocità.

Poniamo che l'osservatore S rilevi che la particella si sposta dalle coordinate x_1, y_1, z_1, t_1 alle coordinate x_2, y_2, z_2, t_2 mentre l'osservatore S' registra come coordinate iniziali e finali della stessa particella x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 e x'_2, y'_2, z'_2, t'_2.

Calcoliamo ora $v'_x (= \Delta x'/\Delta t')$, la componente lungo x' della velocità misurata da S'. Nella Tabella 20.2 troviamo le equazioni di trasformazione per le differenze $\Delta x'$ e $\Delta t'$. Dal rapporto fra queste due equazioni otteniamo

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - u\Delta t)}{\gamma(\Delta t - u\Delta x/c^2)} = \frac{\Delta x/\Delta t - u}{1 - u(\Delta x/\Delta t)/c^2},$$

e, sostituendo v_x a $\Delta x/\Delta t$,

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}. \qquad (20.18)$$

In modo analogo ricaviamo le equazioni di trasformazione per le componenti della velocità lungo y' e z':

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)} \quad \text{e} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}. \qquad (20.19)$$

È da notare che $v'_y \neq v_y$ nonostante sia $\Delta y = \Delta y'$, perché $\Delta t \neq \Delta t'$; e analogamente per v'_z. Ecco un altro esempio della differenza fra le trasformazioni galileiane e quelle di Lorentz connessa alla coordinata tempo. E attenzione al fattore v_x che compare al denominatore in tutte e tre le equazioni.

Le Equazioni 20.18 e 20.19 rappresentano le trasformazioni delle velocità di Lorentz. Analogamente alle trasformazioni delle coordinate spaziotemporali, esprimono le coordinate osservate in un sistema di riferimento inerziale in funzione di quelle di un altro sistema inerziale. La Tabella 20.3 riassume i sistemi di equazioni per la trasformazione diretta e inversa. È da notare che l'equazione per la trasformazione inversa della velocità v_x è formalmente identica alla (20.12) che abbiamo ricavato in modo del tutto differen-

TABELLA 20.3 Trasformazioni delle velocità di Lorentz

Trasformazioni delle velocità	*Trasformazioni inverse delle velocità*
$v'_x = \dfrac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$	$v_x = \dfrac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2}$
$v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$	$v_y = \dfrac{v'_y}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}$
$v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - uv_x/c^2)}$	$v_z = \dfrac{v'_z}{\gamma(1 + uv'_x/c^2)}$

te: nell'Equazione 20.12 la velocità v_0 corrisponde alla v'_x misurata da S'.

Esaminiamo il sistema delle Equazioni 20.18 e 20.19 al limite non relativistico. È vero che si riduce alla trasformazione classica galileiana quando è $u \ll c$, o quando $c \to \infty$)? In questo caso le tre equazioni diventano

$$v'_x = v_x - u, \quad v'_y = v_y, \quad \text{e} \quad v'_z = v_z, \qquad (20.20)$$

che coincidono con i risultati di Galileo ottenuti dall'Equazione 4.32, o derivando le Equazioni 20.13, le trasformazioni galileiane delle coordinate.

Possiamo ora dimostrare direttamente che le trasformazioni delle velocità di Lorentz portano a risultati coerenti con il secondo postulato di Einstein, che afferma l'invariabilità della velocità della luce: una velocità c misurata da un osservatore ha il valore c anche per qualsiasi altro osservatore. Supponiamo che l'evento osservato da S ed S' sia il passaggio di un raggio di luce lungo l'asse x. L'osservatore S rileva $v_x = c$ e $v_y = v_z = 0$. Quale velocità misurerà S'? Dalle Equazioni 20.18 e 20.19 troviamo le tre componenti della velocità misurate da S':

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2} = \frac{c - u}{1 - uc/c^2} = \frac{c - u}{(c - u)/c} = c,$$
$$v'_y = v'_z = 0.$$

Questo risultato è *indipendente dalla velocità relativa u di* S' rispetto a S. Una velocità uguale a c misurata in un sistema di riferimento inerziale risulterà uguale a c in qualsiasi altro sistema di riferimento inerziale. La velocità della luce è dunque la stessa per qualsiasi osservatore. Alla stessa conclusione si arriva per raggi di luce che viaggino in qualsiasi direzione: si veda l'Esercizio 15.

PROBLEMA SVOLTO 20.4 Una particella inizialmente a riposo in laboratorio è accelerata fino alla velocità di 0,60c rispetto al laboratorio. In un sistema di riferimento che si sposta con la particella alla velocità 0,60c rispetto al laboratorio la particella riceve un ulteriore incremento di velocità di 0,60c. Trovare la velocità finale rispetto al sistema del laboratorio.

Soluzione Anche questo problema, una volta che abbiamo chiaramente definito i sistemi di riferimento S ed S' nonché l'oggetto da osservare, ossia la particella in movimento, richiede l'applicazione diretta delle trasformazioni di velocità di Lorentz. Poiché l'incognita è la velocità rispetto al laboratorio, assoceremo ad essa il sistema di riferimento S, mentre S' è il sistema inerziale di riferimento occupato dalla particella dopo la prima accelerazione e prima della seconda, come illustrato nella Figura 20.14. Rispetto a questo sistema la velocità finale della particella è $v'_x = 0.60c$. Conoscendo v'_x e u, per trovare v_x dobbiamo applicare la trasformazione inversa di velocità di Lorentz, desunta dalla Tabella 20.3:

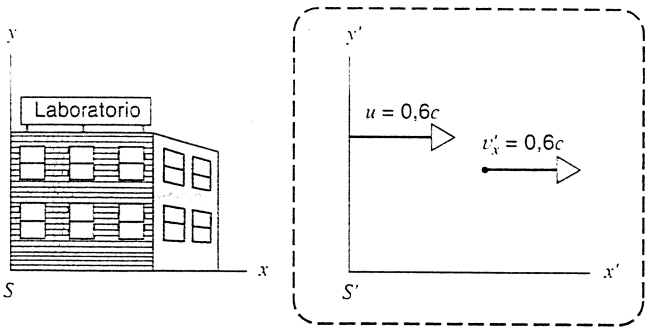


FIGURA 20.14 Problema svolto 20.4. S', il sistema di riferimento della particella, dopo la prima accelerazione, si sposta alla velocità $u = 0.60c$ rispetto al sistema di riferimento S del laboratorio. Rispetto a S', invece, la velocità diventa $v'_x = 0.60c$ dopo la seconda accelerazione.

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + uv'_x/c^2} = \frac{0{,}60c + 0{,}60c}{1 + (0{,}60c)(0{,}60c)/c^2} = \frac{1{,}20c}{1{,}36} = 0{,}88c.$$

La velocità è inferiore a c, in contrasto con quanto prevedibile dalla trasformazione classica galileiana, secondo la quale sarebbe $v_x = 1{,}20c$.

Supponiamo ora che S' sia il sistema inerziale di riferimento della particella dopo la seconda accelerazione, e quindi rispetto al laboratorio sia $u = 0{,}88c$. Applichiamo ora una *terza* accelerazione che porti la particella a muoversi ancora alla velocità di 0,60c rispetto al *nuovo* S'. Ripetendo il calcolo precedente si troverebbe che in questo caso l'osservatore S nel laboratorio misura una velocità $v'_x = 0.97c$.

Aumentando quante volte si vuole la velocità della particella rispetto a un sistema di riferimento che si muova con la particella stessa, la velocità rispetto al sistema del laboratorio non riuscirà mai a raggiungere la velocità della luce.

20.7 CONSEGUENZE DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

Abbiamo già dimostrato che l'applicazione dei postulati di Einstein può produrre conseguenze inaspettate. Vediamo ora come le basi matematiche delle trasformazioni di Lorentz possono dimostrare il verificarsi di queste e anche altre conseguenze impreviste.

Relatività del tempo

Nel Paragrafo 20.3 abbiamo dimostrato che l'effetto della dilatazione del tempo discende direttamente dall'applicazione dei postulati di Einstein alla misurazione di intervalli di tempo da parte di due osservatori che siano fra loro in moto relativo. La Figura 20.15 mostra un aspetto differente della dilatazione del tempo. L'orologio C' è a riposo nel si-

 ISBN 88-408-1254-7

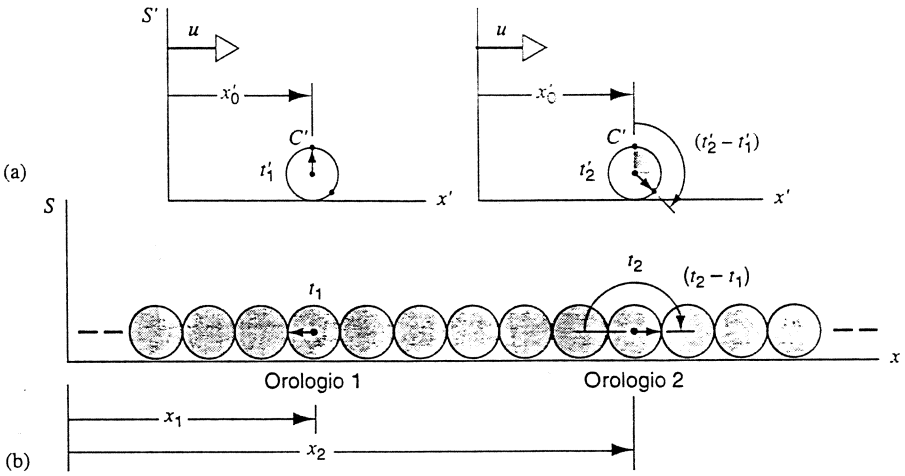


FIGURA 20.15 L'orologio C' è fisso nella posizione x'_0 rispetto al sistema di riferimento S'. L'osservatore S, rispetto al quale l'orologio C' si muove alla velocità u, confronta le letture di C' con due differenti orologi stazionari della schiera di orologi sincronizzati (distinti dai numeri 1 e 2) installata in S. Come indica la figura, l'intervallo $t_2 - t_1$ misurato da S è maggiore dell'intervallo $t'_2 - t'_1$. Perciò l'osservatore S afferma che, in confronto agli orologi in S, l'orologio in moto è lento.

stema di riferimento S', che si muove alla velocità u rispetto a S. Supponiamo che S' misuri l'intervallo di tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ durante il quale la lancetta dell'orologio passa davanti a due segni, il primo al tempo t'_1 e il secondo al tempo t'_2.

Il passaggio della lancetta di C' davanti ai due segni può esser considerato come una coppia di eventi che si verificano nello stesso punto x'_0 rispetto a S' (poiché l'orologio C' è a riposo in questo sistema di riferimento). Invece S, il cui sistema di riferimento inerziale contiene una serie di orologi stazionari sincronizzati come descritto nel Paragrafo 20.5, osserva il passaggio della lancetta di C' davanti al primo segno nel punto x_1, ove il locale orologio stazionario legge il tempo t_1, e davanti al secondo segno nel punto x_2, dove *un altro* orologio stazionario legge il tempo t_2. Dalle trasformazioni inverse di Lorentz per le differenze della Tabella 20.2 troviamo direttamente l'espressione di Δt in funzione di $\Delta t'$:

$$\Delta t = \gamma(\Delta t' + u\,\Delta x'/c^2). \qquad (20.21)$$

Questa espressione fornisce l'intervallo di tempo Δt misurato da S corrispondente all'intervallo $\Delta t'$ misurato da S' per eventi separati da una distanza $\Delta x'$. Secondo S', rispetto al quale l'orologio C' è fermo, i due eventi si verificano nello stesso punto x'_0, e perciò $\Delta x' = 0$. E poiché S' è fermo rispetto all'orologio C', l'intervallo $\Delta t'$ misurato da S' è un intervallo di tempo proprio, che indichiamo con Δt_0. L'Equazione 20.21, con $\Delta x' = 0$ e $\Delta t' = \Delta t_0$, diventa

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

identica alla (20.3), l'equazione che esprime la dilatazione del tempo.

L'effetto della dilatazione del tempo è perfettamente simmetrico. Se un orologio C a riposo in S è osservato da S', questi concluderà che C ritarda. Ogni osservatore ritiene che gli orologi altrui sono più lenti di quelli che sono a riposo nel proprio sistema inerziale di riferimento. La dilatazione del tempo si riassume spesso con la frase "gli orologi in moto sono più lenti." Questa frase va presa con prudenza. È vero che un orologio in moto rispetto a un sistema di riferimento che contiene una serie di orologi sincronizzati apparirà lento se confrontato con questi orologi: ma soltanto se confrontato con due orologi dell'altro sistema di riferimento.

Passiamo a esaminare altre tre conseguenze delle trasformazioni di Lorentz che riguardano la misurazione del tempo.

1. *Relatività della simultaneità.* Supponiamo che S' abbia due orologi a riposo, collocati in x'_1 e x'_2, a una distanza $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Un lampo di luce emesso a metà strada fra i due orologi visto da S' li raggiungerà simultaneamente (Figura 20.16a). Ciò significa che la misurazione fatta da S' dell'intervallo di tempo fra gli istanti dell'arrivo del segnale luminoso ai due orologi darà $\Delta t' = 0$. Consideriamo ora la situazione dal punto di vista di S, rispetto al quale il sistema S', compresi gli orologi, si muove alla velocità u (Equazione 20.16b). Evidentemente il segnale raggiunge il primo orologio prima del secondo, e quindi l'arrivo del segnale luminoso al punto dove si trovano i due orologi *non è* simultaneo. Si giunge quindi alla seguente affermazione.

> *Se due osservatori sono in moto relativo, in generale non sono d'accordo circa la simultaneità di due eventi che si verificano in posizioni diverse. Se uno dei due ritiene che due eventi siano simultanei, l'altro in generale non è d'accordo.*

A questa conclusione si arriva anche direttamente dall'Equazione 20.21: se $\Delta t' = 0$ e $\Delta x' \neq 0$, anche $\Delta t \neq 0$. Si noti che questo è vero soltanto se i due eventi avvengono in diversi punti rispetto a S'. Se due eventi che si verificano nello stesso punto rispetto a S' sono simultanei, lo sono anche rispetto a S.

2. *Spostamento Doppler.* Nel Paragrafo 19.9 abbiamo studiato l'effetto Doppler per le onde acustiche, che provoca una variazione della frequenza del suono rilevato da un osservatore quando la sorgente del suono o l'osservatore sono in moto rispetto al mezzo che trasporta le onde.

Nel caso delle onde luminose, il "moto rispetto al mezzo che trasporta le onde" non è un concetto valido. Nella relatività ristretta l'effetto Doppler consiste in una variazione della frequenza di un raggio luminoso che dipende soltanto

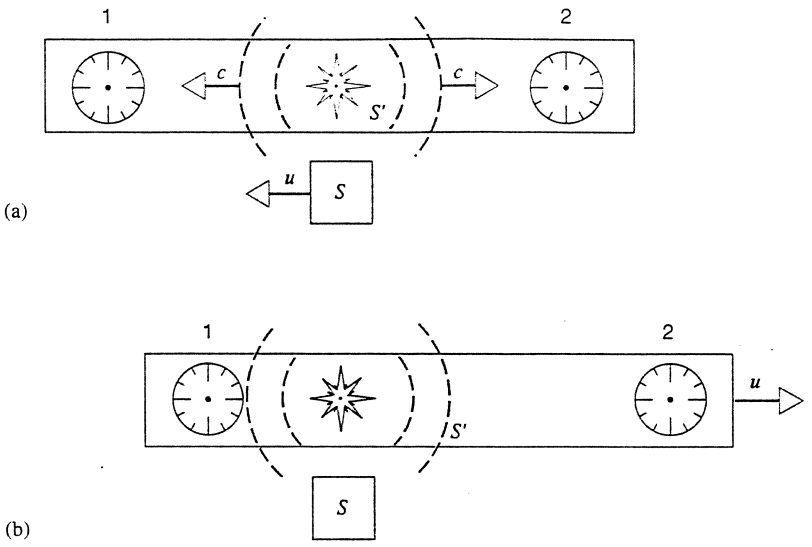


FIGURA 20.16 (a) Nel sistema di riferimento di S', un lampo di luce emesso a metà strada fra due orologi li raggiunge nello stesso istante. (b) Nel sistema di riferimento di S il lampo di luce raggiunge l'orologio 1 prima dell'orologio 2.

dalla velocità del moto relativo dell'osservatore rispetto alla sorgente della luce. A differenza dell'effetto acustico, che prevede formule diverse se a spostarsi è l'osservatore o la sorgente, per le onde luminose è sufficiente una sola formula, che considera *soltanto il moto relativo*. Per l'effetto Doppler la formula relativistica è più semplice di quella classica.

Un altro aspetto dell'effetto Doppler, che emerge nella relatività ristretta, non trova alcuna corrispondenza nella fisica classica. È l'effetto *Doppler trasverso* che, a differenza dei casi esaminati al Paragrafo 19.9, si manifesta quando la sorgente o l'osservatore si spostano perpendicolarmente alla linea che li congiunge. L'effetto Doppler trasverso rappresenta un altro effetto della dilatazione del tempo, e l'elevata precisione con cui lo si può misurare fornisce una delle più significative conferme sperimentali dell'effetto della dilatazione del tempo. Nel Capitolo 39 analizzeremo più in dettaglio l'effetto Doppler per la luce.

3. *Paradosso dei gemelli.* La dilatazione del tempo si applica non soltanto alle particelle elementari, ma anche a tutti gli intervalli di tempo che avvengono in natura, che possono riguardare anche il ritmo cardiaco e la durata della vita umana. Su questa considerazione è basato un apparente enigma noto come il *paradosso dei gemelli**.

Immaginiamo due gemelli, Gianni e Paola, che abitano su una piattaforma nello spazio. A un certo punto Paola parte con una velocissima astronave verso una remota stella, mentre Gianni rimane sulla piattaforma dalla quale ha il modo di misurare in continuazione il ritmo del battito cardiaco e del respiro di Paola, che troverà più lenti a causa della dilatazione del tempo. Tutto il processo di invecchiamento di Paola risulterà perciò rallentato, e al suo ritorno sarà più giovane di Gianni.

Il paradosso nasce quando consideriamo la situazione vista dal sistema inerziale di riferimento di Paola, per la quale è Gianni che, con la piattaforma, fa l'escursione ad alta velocità. Quando i due gemelli si ricongiungono, sarà Gianni il viaggiatore che è ringiovanito rispetto a Paola. Ma come è possibile che ciascuno dei gemelli sia diventato più giovane dell'altro?

Il mistero si svela quando ci rendiamo conto che in realtà le vicende dei due gemelli non sono simmetriche. Affinché essi possano ritrovarsi alla fine dell'escursione stellare, occorre che il moto di uno dei due rallenti fino ad arrestarsi e inverta il senso di marcia. Ciò significa che Paola deve passare da un sistema inerziale di allontanamento a un altro di ravvicinamento a Gianni sulla piattaforma, che nel frattempo non ha cambiato sistema inerziale di riferimento. Il gemello che ha viaggiato, e che quindi al ritorno si ritrova più giovane dell'altro, è Paola.

Anche se finora non c'è stato modo di effettuare questa prova su veri gemelli, è stata però eseguita su due orologi atomici. Due orologi identici sono stati calibrati con grande precisione; uno dei due ha fatto il giro del mondo su un aereo di linea e al ritorno è stato confrontato col suo gemello rimasto a casa. La velocità del volo era ovviamente molto inferiore a c, ma la precisione degli orologi atomici è tale che la piccolissima asimmetria nel loro «invecchiamento», dell'ordine di 10^{-7} s, ha potuto agevolmente essere misurata con grande esattezza. È risultato che l'orologio imbarcato sull'aereo, che aveva subìto un'accelerazione ed era quindi il vero viaggiatore, al ritorno era veramente «più giovane», ossia era rimasto indietro rispetto all'altro.

La lettura dell'orologio sull'aereo deve essere corretta anche per il tempo durante il quale si trova a un diverso potenziale gravitazionale, per un effetto della *relatività generale*. Quando si trasferiscono orologi di tale precisione da un luogo a un altro, si deve calcolare accuratamente la correzione dovuta alla relatività ristretta e alla relatività generale.

Relatività della lunghezza

Anche la contrazione della lunghezza (Paragrafo 20.3) discende direttamente dalle trasformazioni di Lorentz. Per prima cosa dobbiamo renderci conto che, per misurare la

* Per maggiore informazione sull'argomento vedi *Introduzione alla relatività ristretta*, di R. Resnick, ediz. CEA, 1969, p. 203.

 ISBN 88-408-1254-7

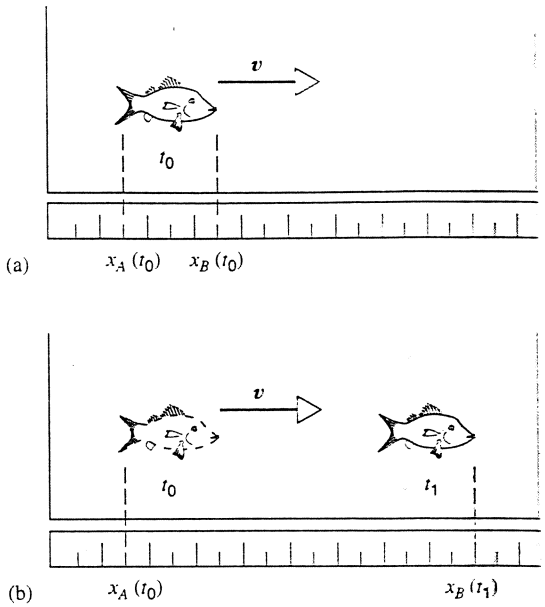


FIGURA 20.17 (a) Per misurare la lunghezza di un pesce che nuota, bisogna determinare *simultaneamente* le posizioni della sua testa e della sua coda. (b) Se la determinazione non è simultanea, la misurazione non dà la lunghezza reale.

lunghezza di un oggetto, occorre eseguire una determinazione simultanea delle coordinate delle sue estremità (Figura 20.17). *Non vale misurare le coordinate di un'estremità di un oggetto in movimento in un certo istante e quelle dell'altra estremità in un altro istante.*

Supponiamo (Figura 20.18) che un righello, avente lunghezza a riposo L_0, sia trasportato dall'osservatore S'. L'osservatore S vuole misurarne la lunghezza. Secondo S', le coordinate delle estremità del righello sono x'_2 e x'_1, e quindi sia $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = L_0$. L'osservatore S, usando le coordinate calibrate e sincronizzate secondo il metodo descritto nel Paragrafo 20.5, esegue una determinazione simultanea delle coordinate x_2 e x_1 delle estremità del righello. L'intervallo $\Delta x = x_2 - x_1$ dà la lunghezza L del righello secondo S. Dalle equazioni per le differenze della Tabella 20.2 otteniamo

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t). \qquad (20.22)$$

Ponendo $\Delta t = 0$, giacché S ha eseguito una determinazione simultanea di x_2 e x_1, risolviamo la (20.22) rispetto a Δx $(= L)$ ottenendo

$$L = \Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = L_0\sqrt{1 - u^2/c^2},$$

equazione identica alla (20.8).

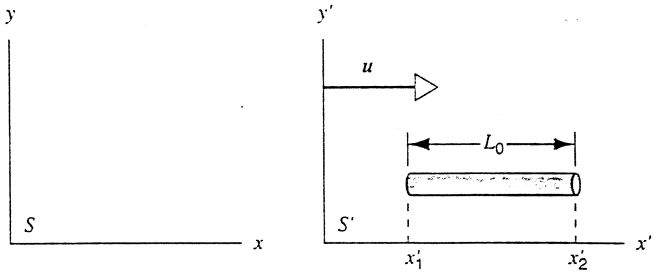


FIGURA 20.18 Le estremità di un righello hanno le coordinate x'_1 e x'_2 per il sistema di riferimento S', rispetto al quale il righello è a riposo. Per determinarne la lunghezza, S deve fare una determinazione simultanea delle coordinate x_1 e x_2 delle sue estremità.

Abbiamo dedotto la dilatazione del tempo e la contrazione della lunghezza sia dai postulati di Einstein sia dalle trasformazioni di Lorentz. Non si tratta peraltro di sviluppi indipendenti, visto che le trasformazioni di Lorentz derivano a loro volta dai postulati di Einstein. In definitiva, tutta la relatività ristretta deriva da quei postulati.

Come la dilatazione del tempo, anche la contrazione della lunghezza è un effetto che vale per tutti gli osservatori in moto relativo. A dubbi del tipo "un righello di misura muovendosi si accorcia *veramente*?" si risponde ricordando che l'effetto contrazione si riferisce soltanto a misure di lunghezza effettuate da osservatori in moto rispetto all'oggetto misurato. Il risultato delle misurazioni di tempo e di lunghezza, eseguite da un osservatore in moto relativo rispetto al sistema di riferimento in cui sta fermo l'oggetto misurato, dipende unicamente dalle condizioni del suo moto relativo: le coordinate di un oggetto a riposo nello stesso sistema inerziale di riferimento dell'osservatore hanno sempre lo stesso valore, che è il valore proprio o a riposo delle coordinate prese in esame. A questo proposito la relatività ristretta si limita ad affermare che "il moto influisce sulle misure".

PROBLEMA SVOLTO 20.5 Un osservatore S sta su una piattaforma lunga $D_0 = 65$ m in una stazione spaziale. Un razzo passa alla velocità relativa di $0{,}80c$ parallelamente al bordo della piattaforma. L'osservatore S nota che in un certo istante la punta e la coda del razzo passano simultaneamente davanti alle due estremità della piattaforma (Figura 20.19a). (a) Secondo S quale sarà il tempo che impiegherà il razzo per transitare davanti a un dato punto della piattaforma? (b) Qual è la lunghezza a riposo L_0 del razzo? (c) Per un osservatore S' sul razzo, qual è la lunghezza D della piattaforma? (d) Per S', quanto tempo impiega l'osservatore S a passare l'intera lunghezza del razzo? (e) Secondo S le estremità del razzo si allineano simultaneamente con le estremità della piattaforma. Questi due eventi sono simultanei anche per S'?

Soluzione (a) Secondo S la lunghezza L del razzo è uguale alla lunghezza D_0 della piattaforma. Il tempo impiegato dal razzo per transitare davanti a un punto qualsiasi della piattaforma vale per S

$$\Delta t_0 = \frac{L}{0{,}80c} = \frac{65\text{ m}}{2{,}40 \cdot 10^8\text{ m/s}} = 0{,}27\ \mu\text{s}.$$

Si tratta di un intervallo di tempo proprio, perché S misura l'intervallo di due eventi che si verificano nello stesso punto del suo sistema inerziale di riferimento, davanti al quale passa prima la punta e poi la coda del razzo.

(b) S misura la lunghezza contratta del razzo, la cui lunghezza a riposo, in base all'Equazione 20.8, vale

$$L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{65\text{ m}}{\sqrt{1 - (0{,}80)^2}} = 108\text{ m}.$$

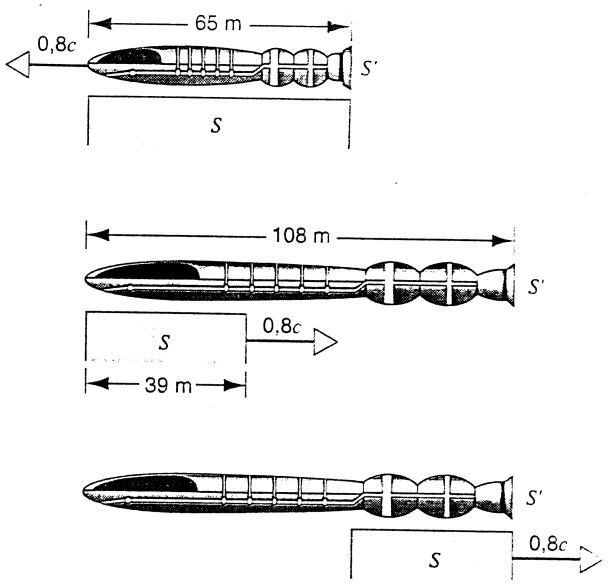


FIGURA 20.19 Problema svolto 20.5. (a) Per il sistema di riferimento S fermo sulla piattaforma il razzo che la sorvola si allinea simultaneamente con le parti anteriore e posteriore della piattaforma. (b, c) Per il sistema di riferimento solidale al razzo, la piattaforma sorvolata si allinea prima con la prora e poi con la poppa del razzo. Da notare i differenti effetti della contrazione di lunghezza nei due sistemi di riferimento.

(c) Per S la piattaforma è ferma: la sua lunghezza a riposo è D_0. Per S' la lunghezza contratta della piattaforma è quindi

$$D = D_0\sqrt{1 - u^2/c^2} = (65\text{ m})\sqrt{1 - (0{,}80)^2} = 39\text{ m}.$$

(d) Per passare l'intera lunghezza del razzo l'osservatore S dovrà, secondo S', muoversi di una distanza uguale alla lunghezza a riposo del razzo $L_0 = 108$ m. Il tempo necessario sarà, per S',

$$\Delta t' = \frac{108\text{ m}}{0{,}80c} = 0{,}45\ \mu\text{s}.$$

Si noti che per S' non si tratta di un intervallo di tempo proprio; per determinarlo infatti usa un orologio sulla punta del razzo per misurarne il passaggio davanti al traguardo fissato su S, e un altro sulla coda per il passaggio davanti allo stesso traguardo. I due eventi avvengono in due punti differenti di S' e non possono perciò fornire a S' un intervallo di tempo proprio. L'intervallo di tempo corrispondente misurato da S per la stessa coppia di eventi, qui calcolato in (a), è un intervallo di tempo proprio, perché si riferisce a due eventi che si verificano nello stesso punto del suo sistema inerziale di riferimento, davanti al quale passa prima la punta e poi la coda del razzo. Gli intervalli misurati da S e da S' sono legati dalla formula di dilatazione del tempo

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t = \frac{0.27\ \mu\text{s}}{\sqrt{1 - (0{,}80)^2}} = 0.45\ \mu\text{s}.$$

d'accordo con quanto calcolato poc'anzi per la lunghezza a riposo del razzo in S'.

(e) Secondo S', il razzo ha una lunghezza a riposo $L_0 = 108$ m e la piattaforma una lunghezza contratta $D = 39$ m. Non è perciò possibile che S' veda le due coppie di estremità allinearsi simultaneamente. La sequenza degli eventi vista da S' è indicata nelle Figure 20.19b e 20.19c. L'intervallo di tempo $\Delta t'$ misurato da S' per i due eventi, simultanei per S, si può calcolare con l'equazione delle differenze di tempo della Tabella 20.2 ponendo $\Delta t = 0$, che dà

$$\Delta t' = -\gamma u\,\Delta x/c^2 = \frac{-(0.80c)(-65\text{ m})}{c^2\sqrt{1 - (0.80)^2}} = 0.29\ \mu\text{s}.$$

Per verifica notiamo che, secondo S', l'intervallo di tempo fra le situazioni delle Figure 20.19b e 20.19c deve essere quello che occorrerebbe alla piattaforma per spostarsi di 108 m − 39 m = 69 m, ossia

$$\Delta t' = \frac{69\text{ m}}{0.80c} = 0.29\ \mu\text{s},$$

d'accordo col valore calcolato con l'equazione di trasformazione. Quest'ultimo risultato mostra la relatività della simultaneità: due eventi simultanei secondo S (l'allineamento del razzo con le due estremità della piattaforma) *non possono* essere simultanei per S', che è in movimento rispetto al sistema di riferimento inerziale di S.

20.8 QUANTITÀ DI MOTO RELATIVISTICA

Abbiamo finora esaminato gli effetti dei due postulati di Einstein sulle variabili cinematiche tempo, spostamento e velocità, viste da due diversi sistemi inerziali di riferimento. In questo e nel prossimo paragrafo estendiamo il nostro studio alle variabili dinamiche, quantità di moto ed energia. Partiamo dalla visione relativistica della quantità di moto.

Esaminiamo la collisione della Figura 20.20a, vista dal sistema di riferimento di S. Due particelle, ciascuna di massa m, si muovono sull'asse x a velocità uguali e di verso op-

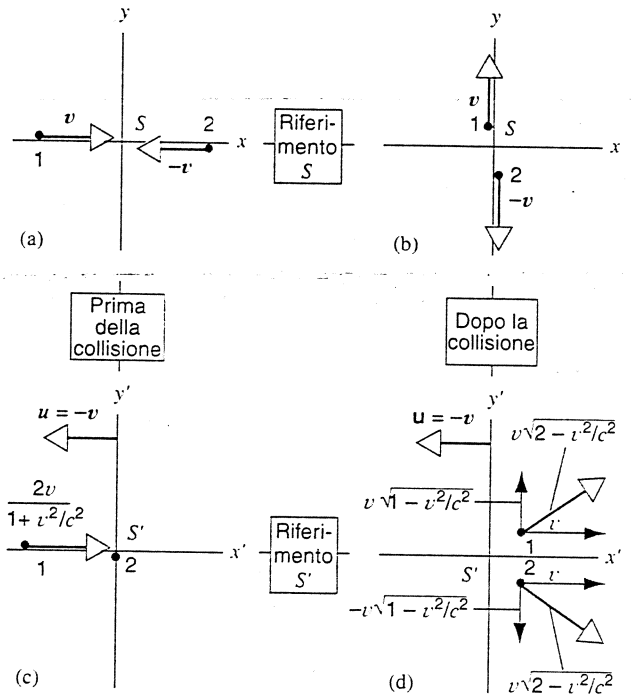


FIGURA 20.20 Una collisione fra due particelle di uguale massa è rappresentata (a) prima della collisione nel sistema di riferimento di S; (b) dopo la collisione nel sistema di riferimento di S; (c) prima della collisione nel sistema di riferimento di S'; (d) dopo la collisione nel sistema di riferimento di S'.

 ISBN 88-408-1254-7

posto v e $-v$. Si scontrano nell'origine delle coordinate, e la distanza fra le loro rette parallele di avvicinamento è stata predisposta in modo tale che dopo l'urto le due particelle si muovano lungo l'asse y a velocità finali uguali e di verso opposto (Figura 20.20b). Supponiamo che si tratti di un urto perfettamente elastico, senza perdita di energia cinetica. Le velocità finali debbono quindi essere v e $-v$.

Applicando la formula classica ($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$), le componenti della quantità di moto totale $\boldsymbol{P}$ del sistema di due particelle per l'osservatore S sono

$$\begin{aligned} \text{Iniziale:}\quad & P_{xi} = mv + m(-v) = 0\,, \\ & P_{yi} = 0\,. \\ \text{Finale:}\quad & P_{xf} = 0\,, \\ & P_{yf} = mv + m(-v) = 0\,. \end{aligned}$$

È dunque $P_{xi} = P_{xf}$ e $P_{yi} = P_{yf}$; il vettore quantità di moto iniziale è uguale a quello finale, e nel sistema di riferimento S vige la conservazione della quantità di moto.

Vediamo ora la stessa collisione dal punto di vista del sistema di riferimento S', che si muove rispetto a S alla velocità $u = -v$ (Figura 20.20c). Si noti che, rispetto a S', la particella 2 è a riposo prima dell'urto. Applichiamo le trasformazioni di velocità di Lorentz (Equazioni 20.18 e 20.19) per trovare le componenti trasformate x' e y' delle velocità iniziali e finali. Questi valori, che siamo in grado di calcolare, compaiono nelle Figure 20.20c e 20.20d.

Useremo ora queste velocità per calcolare le componenti della quantità di moto totale del sistema delle due particelle rispetto a S':

$$\begin{aligned} P'_{xi} &= m\left(\frac{2v}{1 + v^2/c^2}\right) + m(0) = \frac{2mv}{1 + v^2/c^2}\,, \\ P'_{yi} &= 0\,, \\ P'_{xf} &= mv + mv = 2mv\,, \\ P'_{yf} &= mv\sqrt{1 - v^2/c^2} + m(-v\sqrt{1 - v^2/c^2}) = 0\,. \end{aligned}$$

È evidente che P'_{xi} *non è uguale* a P'_{xf}, ed S' arriverà alla conclusione che *non* si ha conservazione della quantità di moto.

Questi calcoli dimostrano che, se per la quantità di moto adottiamo la formula $p = mv$, la legge di conservazione della quantità di moto, che ci è stata di grande utilità in parecchie applicazioni, non soddisfa il primo postulato di Einstein (la legge deve essere uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali). *Perciò, se vogliamo salvare il principio di conservazione della quantità di moto come una legge generale coerente con il primo postulato di Einstein, dobbiamo trovare una nuova definizione della quantità di moto.* Essa deve avere due proprietà. (1) Deve fornire una legge di conservazione della quantità di moto che sia in accordo con il principio della relatività: se la quantità di moto è conservata per un osservatore in un sistema di riferimento inerziale, deve conservarsi anche per tutti gli osservatori in qualsiasi sistema inerziale di riferimento. (2) A basse velocità la nuova definizione deve ridursi a $p = mv$, che, come sappiamo, funziona perfettamente in ambiente non relativistico.

La formula relativistica per la quantità di moto di una particella di massa m che si muove a velocità v è

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{20.23}$$

Per le componenti possiamo scrivere così l'Equazione 20.23:

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{e} \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \tag{20.24}$$

La velocità v che compare al denominatore di queste espressioni è *sempre* la velocità della particella misurata in un certo sistema inerziale. *Non* è la velocità (relativa) di un sistema inerziale rispetto a un altro. La velocità al numeratore è una delle componenti del vettore velocità.

Vediamo ora come questa nuova definizione possa salvare il principio di conservazione della quantità di moto nell'urto già esaminato. Nel sistema inerziale S le velocità prima e dopo l'urto sono uguali e opposte, e l'Equazione 20.23 dà sempre zero per le quantità di moto iniziale e finale. Nel sistema S' possiamo introdurre per le velocità i valori delle Figure 20.20c e 20.20d ottenendo così, come si può verificare,

$$\begin{aligned} P'_{xi} &= P'_{xf} = \frac{2mv}{1 - v^2/c^2}\,, \\ P'_{yi} &= P'_{yf} = 0\,. \end{aligned} \tag{20.25}$$

Così le quantità di moto iniziale e finale sono uguali anche nel sistema S'. Esse sono conservate sia in S sia in S'. Infatti la definizione della quantità di moto data dall'Equazione 20.23 garantisce la conservazione della quantità di moto in *qualsiasi* sistema inerziale, come richiesto dal principio della relatività.

Si noti anche che, nel campo delle basse velocità, il denominatore della (20.23) è praticamente uguale a 1; a basse velocità la (20.23) si riduce così alla classica formula, che ci è già familiare, $p = mv$. La (20.23) soddisfa così anche questo criterio fondamentale delle formule relativistiche.

Naturalmente la prova decisiva è data dalle prove sperimentali. Nella Figura 20.21 è tracciata la curva del rapporto p/mv, che per la fisica classica è uguale a 1, ricavata con la

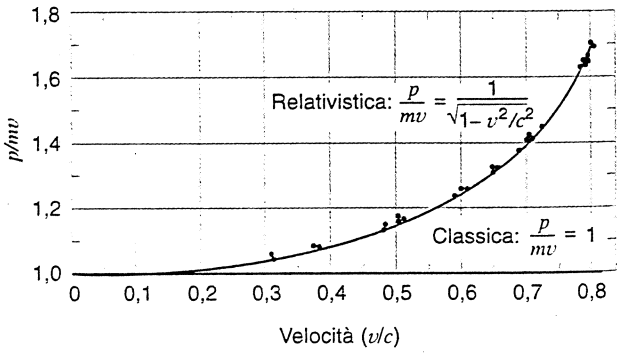


FIGURA 20.21 Il rapporto p/mv è diagrammato in funzione della velocità degli elettroni. Secondo la fisica classica è $p = mv$, e perciò $p/mv = 1$. I risultati delle prove confermano chiaramente la validità delle formule relativistiche. Alle basse velocità i due grafici, classico e relativistico, coincidono.

formula relativistica $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, sulla quale sono riportati numerosi punti che rappresentano valori del rapporto m/v basati su misurazioni indipendenti della quantità di moto e della velocità di elettroni, che giacciono tutti sulla curva, a conferma della validità della formula relativistica. Si noti che, come al solito, i valori dati dalla fisica classica e dalla relatività ristretta coincidono per basse velocità fino a circa $0{,}1c$, ciò che spiega l'impossibilità di rilevare le correzioni relativistiche in prove di laboratorio condotte su oggetti ordinari.

PROBLEMA SVOLTO 20.6 Qual è la quantità di moto di un protone che si muove alla velocità $v = 0{,}86c$?

Soluzione L'Equazione 20.23 dà

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \\ = \frac{(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg})(0.86)(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s})}{\sqrt{1 - (0.86)^2}} = \\ = 8{,}44 \cdot 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}\,.$$

L'uso delle unità kg · m/s non è comodo per problemi di questo tipo. Proviamo invece a calcolare la quantità pc:

$$pc = (8{,}44 \cdot 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s})(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s}) = \\ = 2{,}53 \cdot 10^{-10}\ \text{J} = \\ = 1580\ \text{MeV},$$

ove ci siamo avvalsi del fattore di conversione $1\ \text{MeV} = 1{,}60 \cdot 10^{-13}$ J. La quantità di moto si ottiene da questa equazione dividendo per il simbolo c (non il valore numerico):

$$p = 1580\ \text{MeV}/c\,.$$

L'uso dell'unità MeV/c agevola molto nel calcolo relativistico delle quantità di moto perché, come vedremo fra poco, la quantità pc vi compare spesso.

20.9 ENERGIA RELATIVISTICA

Analogamente a quanto abbiamo visto per la quantità di moto, anche per l'energia cinetica la relatività ristretta adotta un approccio particolare. Segnaliamo prima di tutto la difficoltà che incontriamo riesaminando la collisione della Figura 20.20. Se usiamo l'espressione classica $\frac{1}{2}mv^2$, per il sistema inerziale di S' nell'urto non si ha conservazione dell'energia cinetica. (Abbiamo scelto le velocità finali nel sistema inerziale S allo scopo di mantenere la conservazione dell'energia cinetica.) Per le velocità date nelle Figure 20.20c e 20.20d si può dimostrare (Esercizio 38) che, per $K = \frac{1}{2}mv^2$, le energie cinetiche totali iniziale e finale valgono

$$K'_i = \frac{2mv^2}{(1 + v^2/c^2)^2}\,, \qquad (20.26)$$
$$K'_f = mv^2(2 - v^2/c^2)\,.$$

Qui K'_i non è uguale a K'_f, e la collisione, che rispetto a S ($K_i = K_f$) conserva l'energia cinetica, non la conserva per S' ed è perciò anelastica. Ciò costituirebbe una violazione del postulato relativistico: il tipo di urto (elastico o anelastico) dipende dalle proprietà degli oggetti che si urtano e non dal particolare sistema inerziale dal quale si osserva l'urto. Come per la quantità di moto, occorre ridefinire l'energia cinetica onde salvare il principio di conservazione dell'energia e il postulato relativistico.

La classica espressione dell'energia cinetica viola anche il secondo postulato della relatività consentendo velocità superiori a quella della luce. Non vi sono limiti, nella fisica sia classica sia relativistica, all'energia che possiamo conferire a un oggetto. Ma se ammettiamo che l'energia cinetica possa aumentare oltre ogni limite, l'espressione classica $K = \frac{1}{2}mv^2$ implica che la velocità possa a sua volta aumentare oltre ogni limite, superando anche la velocità della luce. Si deve perciò trovare il modo di ridefinire l'energia cinetica, così da poter aumentare senza limite quella di una particella, senza che la sua velocità superi quella della luce.

L'espressione relativistica per l'energia cinetica si può ricavare seguendo essenzialmente lo stesso percorso della fisica classica, partendo dalla forma adattata alle particelle del teorema dell'energia cinetica (Problema 16):

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2\,. \qquad (20.27)$$

Questa espressione è molto diversa da quella classica $K = \frac{1}{2}mv^2$, ma si può dimostrare (Esercizio 35) che, per velocità basse ($v \ll c$), si riduce a quest'ultima. Dalla (20.27) risulta che l'espressione relativistica dell'energia cinetica non pone un limite all'energia che una particella può ricevere, senza che comunque la sua velocità raggiunga o superi quella della luce: a questo proposito rimandiamo alla Figura 20.3, che metteva in evidenza la differenza fra l'espressione classica e quella relativistica del legame esistente fra l'energia cinetica e la velocità quando ci si avvicina alla velocità della luce. In tutti i grandi acceleratori in grado di portare le particelle a velocità prossime a c, si è dovuto provvedere ad adattare i parametri di progetto alle leggi della dinamica relativistica. E in realtà ogni moderno acceleratore è un laboratorio di prova della teoria della relatività ristretta, che ne conferma nel modo più significativo la validità.

L'Equazione 20.27 dimostra che l'energia cinetica è conservata anche nel sistema di riferimento inerziale S' della Figura 20.20 (Esercizio 39).

PROBLEMA SVOLTO 20.7 Nell'acceleratore lineare di Stanford* gli elettroni vengono accelerati a un'energia cinetica di 50 GeV. Esprimete la velocità di un elettrone avente questa energia cinetica (a) come frazione di c e (b) come differenza da c. Per l'elettrone ponete $mc^2 = 0{,}511\ \text{MeV} = 0{,}511 \cdot 10^{-3}\ \text{GeV}$.

Soluzione (a) Per prima cosa ricaviamo v dalla (20.27):

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + K/mc^2)^2}}\,, \qquad (20.28)$$

e, introducendo i valori numerici,

* Vedi di J.R. Rees, *Lo Stanford linear collider*, «Le Scienze», dic. 1989, p. 24.

 ISBN 88-408-1254-7

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + 50\ \text{GeV}/0.11 \cdot 10^{-3}\ \text{GeV})^2}} =$$
$$= 0{,}999\,999\,999\,948c\,.$$

La precisione delle calcolatrici non arriva alla dodicesima cifra significativa: proviamo quindi a scrivere la (20.28) nella forma $v = c(1 + x)^{1/2}$, ove $x = -1/(1 + K/mc^2)^2$. Essendo $K \gg mc^2$, sarà $x \ll 1$, che possiamo sviluppare in serie binomiale come $v \approx c(1 + \frac{1}{2}x)$, ovvero

$$v \approx c\left[1 - \frac{1}{2(1 + K/mc^2)^2}\right]. \qquad (20.29)$$

da cui

$$v = c(1 - 5{,}2 \cdot 10^{-11}),$$

che riporta al valore di v ricavato dalla (20.28).

(b) Dal precedente risultato si ricava

$$c - v = 5{,}2 \cdot 10^{-11}c = 0.016\ \text{m/s} = 1.6\ \text{cm/s}\,.$$

Energia e massa nella relatività ristretta

L'Equazione 20.27 si può scrivere anche come

$$K = E - E_0\,, \qquad (20.30)$$

ove l'*energia totale relativistica* E è definita come

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,, \qquad (20.31)$$

e l'*energia a riposo* E_0 è

$$E_0 = mc^2\,. \qquad (20.32)$$

L'energia a riposo non è altro che l'energia totale relativistica di una particella misurata in un sistema di riferimento in cui la particella è ferma*.

L'energia a riposo si può considerare come l'energia interna di una particella o di un sistema di particelle. Secondo l'Equazione 20.32, ogni volta che aggiungiamo l'energia ΔE a un oggetto materiale che rimane a riposo, aumentiamo la sua massa di una quantità $\Delta m = \Delta E/c^2$. Se comprimiamo una molla e ne aumentiamo l'energia potenziale di una quantità ΔU, la sua massa aumenta di $\Delta U/c^2$. Se aumentiamo la temperatura di un oggetto, aumentando in tal modo la sua energia potenziale interna di ΔE_{int}, la sua massa cresce di $\Delta E_{\text{int}}/c^2$. Poiché il valore numerico di c è molto grande, queste variazioni di massa sono normalmente microscopiche e non misurabili per gli oggetti ordinari, ma nel caso di decadimenti e di reazioni fra nuclei e particelle subnucleari esse possono arrivare ad essere abbastanza grandi da consentirne la misurazione.

Considerando l'energia a riposo un'altra forma di energia, possiamo interpretare la situazione della Figura 20.2 dal punto di vista della conservazione dell'energia. Nella Figura 20.2a l'energia totale entro i confini del sistema vale $E_i = 2m_e c^2$, ove m_e è la massa di un elettrone o un positrone (si trascurano le piccolissime energie cinetiche delle particelle). Nella Figura 20.2b troviamo una radiazione la cui energia totale è $E_R = E_i$, così che nella Figura 20.2c l'incremento dell'energia interna è ancora uguale a E_i. Si ha così conservazione dell'energia totale, attraverso la trasformazione di un tipo di energia (l'energia a riposo) in un altro tipo (energia di radiazione oppure energia interna delle pareti del contenitore).

L'Equazione 20.32 dimostra che dobbiamo comprendere anche l'energia a riposo fra i tipi di energia che caratterizzano un sistema. La somma di tutti i tipi di energia, ossia l'*energia totale relativistica*, deve conservarsi in ogni interazione. Non è necessario che l'energia a riposo e l'energia cinetica siano conservate separatamente, e in effetti ciò non accade.

Consideriamo un processo di decadimento radioattivo nel quale un nucleo pesante si spacca in due frammenti più piccoli, la cosiddetta *fissione spontanea*. Per conservare la quantità di moto i due frammenti debbono allontanarsi fra loro. Se inizialmente il nucleo era a riposo, è chiaro che in questo evento non si ha conservazione dell'energia cinetica. Le misure provano che l'energia totale a riposo dei due frammenti è minore dell'energia a riposo dell'intero nucleo: non si ha quindi nemmeno la conservazione dell'energia a riposo. Ma la somma dell'energia a riposo più l'energia cinetica è conservata, dato che la diminuzione dell'energia a riposo compensa esattamente l'aumento dell'energia cinetica.

L'Equazione 20.32 può applicarsi ad altri sistemi isolati costituiti da particelle e radiazione. Pensiamo a una stella come il nostro Sole. Esso irraggia in ogni secondo un'energia di $4 \cdot 10^{26}$ J. Come nel caso della disintegrazione elettrone-positrone, consideriamo questa energia radiante come una diminuzione dell'energia a riposo del sistema, e la variazione di massa corrispondente vale

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4 \cdot 10^{26}\ \text{J}}{(3 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = -4 \cdot 10^9\ \text{kg}$$

per ogni secondo. Questa diminuzione di massa è veramente ingente nel nostro ordine di grandezza, ma è piuttosto piccolo se confrontato con la massa totale del Sole di $(2 \cdot 10^{30}\ \text{kg})$: in un anno la massa del Sole diminuisce soltanto di un fattore $6 \cdot 10^{-14}$.

PROBLEMA SVOLTO 20.8 Due palle di stucco di massa 35 g ciascuna vengono scagliate una contro l'altra, ciascuna alla velocità di 1.7 m/s. Dopo un urto frontale rimangono appiccicate insieme. Di quanto differisce la massa totale delle due palle riunite dalla somma delle loro singole masse?

Soluzione Consideriamo le due palle di stucco come un sistema isolato sul quale non è esercitata alcuna azione esterna. Possiamo così scrivere $\Delta K + \Delta E_0 = 0$. Per $\Delta K = K_f - K_i$, ove $K_f = 0$ e K_i rappresenta l'energia totale delle due palle separate prima del-

* La massa m nell'Equazione 20.32 rappresenta la massa a riposo, da non confondersi con la «massa relativistica» definita come $m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Abbiamo deciso di non utilizzare la massa relativistica, che può rappresentare un concetto fuorviante. Quando ci riferiamo alla massa intenderemo sempre la massa a riposo.

l'urto, abbiamo

$$\Delta K + \Delta E_0 = (0 - K_i) + \Delta E_0 = 0 .$$

ossia

$$\Delta E_0 = K_i = 2(\tfrac{1}{2}mv^2) = (0{,}035\ \text{kg})(1{,}7\ \text{m/s})^2 = 0{,}101\ \text{J} .$$

Questo incremento dell'energia a riposo potrebbe avvenire sotto forma di energia interna, magari con un aumento della temperatura del sistema complessivo. Il corrispondente aumento di massa vale

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0{,}101\ \text{J}}{(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 1{,}1 \cdot 10^{-18}\ \text{kg},$$

aumento di entità enormemente inferiore alle nostre capacità di misurazione.

PROBLEMA SVOLTO 20.9 Nel 1989 in un esperimento condotto nell'acceleratore lineare di Stanford furono prodotte delle particelle Z^0 da un fascio di elettroni che urtava frontalmente un fascio di positroni aventi la stessa energia cinetica. Trovare l'energia cinetica complessiva dei due raggi occorrente per produrre la particella Z^0, che ha un'energia a riposo di 91,2 GeV.

Soluzione Come nell'urto fra le palle di stucco del precedente Problema svolto 20.8, ammettiamo che il sistema costituito da un e^+ e un e^- sia isolato e che non vi sia alcuno scambio di energia con l'esterno durante il processo di formazione della particella Z^0. La variazione di energia a riposo dallo stato iniziale (un elettrone e un positrone aventi ciascuno 0,511 MeV di energia a riposo) allo stato finale (la particella Z^0) sarà

$$\Delta E_0 = 91{,}2\ \text{GeV} - 2(0{,}511\ \text{MeV}) = 91{,}2\ \text{GeV},$$

poiché è del tutto trascurabile l'energia a riposo totale dell'elettrone e del positrone (1,022 MeV = 0,001022 GeV). Per il principio di conservazione dell'energia in questo sistema isolato risulta $\Delta K + \Delta E_0 = 0$, da cui

$$\Delta K = -\Delta E_0 = -91{,}2\ \text{GeV} = K_f - K_i .$$

Ammesso che la particella Z^0 sia generata in stato di riposo, e quindi $K_f = 0$, le energie del positrone e dell'elettrone saranno ciascuna uguale a $\frac{1}{2}(91{,}2\ \text{GeV}) = 45{,}6\ \text{GeV}$. Al contrario di quanto osservato nel problema precedente, qui la variazione di energia a riposo (ossia di massa) all'interno del sistema è sostanziale, tanto che la massa finale è circa 100 000 volte maggiore di quella iniziale.

Conservazione dell'energia relativistica totale

L'Equazione 20.30 dà l'espressione dell'energia relativistica totale,

$$E = K + E_0 . \qquad (20.33)$$

Nel caso di interazioni tra particelle ad altissima velocità dobbiamo sostituire al precedente principio di conservazione dell'energia quello relativistico:

in un sistema isolato di particelle l'energia relativistica totale rimane costante.

Una combinazione delle Equazioni 20.23 e 20.31 fornisce un'utile espressione che lega l'energia totale, la quantità di moto e l'energia a riposo:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} . \qquad (20.34)$$

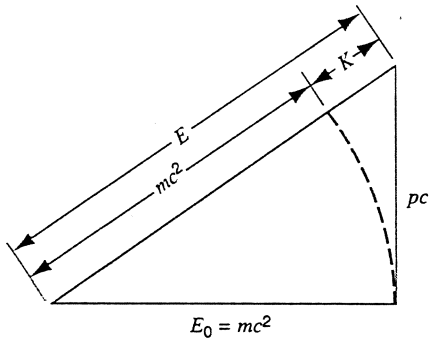


FIGURA 20.22 Un utile accorgimento mnemonico per ricordare la relazione fra E_0, p, K ed E. Si noti che, per uniformare in unità di energia le misure delle diverse variabili si è dovuto introdurre la quantità pc.

La Figura 20.22 presenta un utile accorgimento per ricordare questa relazione, per analogia col teorema di Pitagora.

Poiché le energie a riposo delle particelle iniziali e finali nell'urto di Figura 20.20 sono uguali, la conservazione dell'energia relativistica totale coincide con la conservazione dell'energia cinetica. In generale le collisioni di particelle ad alta energia possono generare nuove particelle, e quindi l'energia a riposo finale può esser diversa da quella iniziale, come nel Problema svolto 20.11. Tali collisioni vanno studiate tenendo conto dell'energia relativistica totale E: l'energia cinetica non si può conservare quando cambia l'energia a riposo durante la collisione.

PROBLEMA SVOLTO 20.10 Un acceleratore di particelle genera un fascio di kaoni neutri ($m_K c^2 = 498$ MeV) con energia cinetica di 325 MeV. Consideriamo un kaone che decade lungo il percorso producendo due pioni ($m_\pi c^2 = 140$ MeV). Trovare l'energia cinetica di ciascun pione nel caso particolare in cui i pioni viaggino concordi o discordi con il verso dei pioni, parallelamente al loro fascio.

Soluzione Si può calcolare l'energia delle particelle che rimangono dopo il decadimento applicando i princìpi di conservazione dell'energia relativistica totale e della quantità di moto. Dall'Equazione 20.33 ricaviamo l'energia relativistica totale:

$$E_K = K + m_K c^2 = 325\ \text{MeV} + 498\ \text{MeV} = 823\ \text{MeV},$$

e dalla (20.34) la quantità di moto iniziale:

$$p_K c = \sqrt{E_K^2 - (m_K c^2)^2} = \sqrt{(823\ \text{MeV})^2 - (498\ \text{MeV})^2} = \\ = 655\ \text{MeV}.$$

L'energia relativistica totale del sistema finale costituito dai due pioni è

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{(p_1 c)^2 + (m_\pi c^2)^2} + \sqrt{(p_2 c)^2 + (m_\pi c^2)^2} = \\ = 823\ \text{MeV}, \qquad (20.35)$$

che, per il principio di conservazione dell'energia relativistica totale, abbiamo eguagliato a quella iniziale di 823 MeV. Abbiamo così ottenuto una prima equazione nelle due incognite p_1 e p_2.

 ISBN 88-408-1254-7

Per trovare la seconda equazione applichiamo il principio di conservazione della quantità di moto. La quantità di moto finale $p_1 + p_2$, del sistema dei due pioni lungo la direzione del fascio, eguagliata alla quantità di moto iniziale p_K, dà:

$$p_1c + p_2c = p_Kc = 655 \text{ MeV}. \qquad (20.36)$$

Abbiamo così due equazioni indipendenti (20.35 e 20.36) nelle due incognite p_1 e p_2. Ricavando p_2c dalla (20.36) e sostituendolo nella (20.35), troviamo, dopo alcuni passaggi algebrici, un'equazione di secondo grado per p_1c, che si può risolvere con la tecnica ordinaria per trovare

$$p_1c = 668 \text{ MeV oppure } -13 \text{ MeV}.$$

Poiché gli indici 1 e 2 dei pioni sono arbitrari, risulta che il pione in moto concorde al fascio ha quantità di moto $p_1 = 668 \text{ MeV}/c$, e l'altro (in verso opposto) $p_2 = -13 \text{ MeV}/c$. Le energie cinetiche corrispondenti, che risultano dalle Equazioni 20.30 e 20.34, sono

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (m_\pi c^2)^2} - m_\pi c^2.$$

$$K_1 = \sqrt{(668\,\text{MeV})^2 + (140\,\text{MeV})^2} - 140\,\text{MeV} = 543\,\text{MeV},$$

$$K_2 = \sqrt{(-13\,\text{MeV})^2 + (140\,\text{MeV})^2} - 140\,\text{MeV} = 0{,}6\,\text{MeV}.$$

Per risolvere questo problema si può anche ricorrere a una trasformazione di Lorentz in un sistema di riferimento nel quale i kaoni sono a riposo e i due pioni, emessi in opposte direzioni (dovendo essere nulla la quantità di moto totale), si dividono in parti uguali l'energia del decadimento. Ritrasformando i valori nel sistema di riferimento del laboratorio si ottiene la soluzione per la quantità di moto e le energie (Esercizio 43). Il prossimo problema svolto presenta un'altra applicazione di questa tecnica.

PROBLEMA SVOLTO 20.11 Nel 1956 a Berkeley fu scoperto l'antiprotone $\bar{p}$, una particella con la stessa energia a riposo del protone, 938 MeV, ma con carica elettrica opposta, prodotto dalla seguente reazione:

$$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p},$$

nella quale protoni accelerati andavano a colpire un bersaglio di protoni a riposo nel laboratorio. Trovare la minima energia cinetica, chiamata *soglia* di energia cinetica, capace di provocare questa reazione che avvicina le particelle finali fino a costituire un unico complesso.

Soluzione Questo problema, che studia la ricongiunzione di particelle in un unico complesso, è concettualmente l'inverso del precedente. Per risolverlo adotteremo un metodo alternativo, basato sul sistema di riferimento del centro di massa, in cui i due protoni si scontrano con quantità di moto uguali e opposte per formare una nuova particella a riposo, come nella Figura 20.23.

L'energia relativistica totale finale nel sistema di riferimento del centro di massa S' è l'energia a riposo delle particelle che sono generate a riposo in questo sistema di riferimento, che vale

$$E'_f = 4m_pc^2.$$

L'energia iniziale è semplicemente la somma delle energie totali iniziali dei due protoni originari che si scontrano:

$$E'_i = E'_1 + E'_2.$$

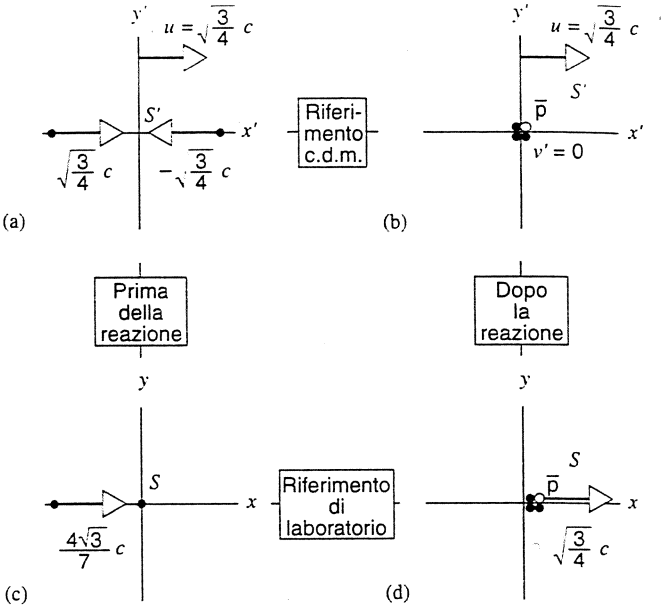


FIGURA 20.23 Problema svolto 20.11. La creazione di un antiprotone vista dal sistema di riferimento (a,b) del centro di massa e (c,d) del laboratorio. Si confronti con la Figura 20.20.

Il principio di conservazione dell'energia esige che sia $E'_i = E'_f$, e, poiché le energie E'_1 ed E'_2 sono uguali nel sistema di riferimento S', sarà

$$E'_1 = E'_2 = 2m_pc^2.$$

Il corrispondente modulo della velocità di ciascuno dei due protoni che si urtano nel sistema di riferimento S' si trova ricavando v/c dall'Equazione 20.31:

$$\frac{v'_1}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_pc^2}{E'_1}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Introducendo questo valore di velocità, operiamo ora una trasformazione di Lorentz per passare al sistema di riferimento del laboratorio, dove uno dei due protoni sarà a riposo e l'altro avrà la velocità v_x che risulta dalla formula delle trasformazioni inverse della Tabella 20.3. Dalle equazioni $v' = c\sqrt{3/4}$ e $u = c\sqrt{3/4}$, sopprimendo il pedice x, troviamo

$$v = \frac{v' + u}{1 + uv'/c^2} = \frac{2c\sqrt{3/4}}{1 + (\sqrt{3/4})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}c.$$

che è la velocità del protone incidente nel sistema di riferimento del laboratorio. Dall'Equazione 20.31 si ricava l'energia totale

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1 - (4\sqrt{3}/7)^2}} = 7m_pc^2,$$

e la soglia di energia cinetica risulta

$$K = E - m_pc^2 = 6m_pc^2 = 6(938 \text{ MeV}) =$$
$$= 5628 \text{ MeV} = 5{,}628 \text{ GeV}.$$

Il *Bevatron*, l'acceleratore dell'università di Berkeley, in grado di produrre un fascio di protoni di energia maggiore di 5,6 GeV, fu dimensionato proprio in vista di questo esperimento. La scoperta dell'antiprotone così generato valse l'onore del premio Nobel per la fisica del 1959 ai due scopritori, Emilio Segrè e Owen Chamberlain.

20.10 IL SENSO COMUNE DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

Siamo arrivati a un punto dal quale possiamo rileggere la nostra presentazione della relatività ristretta alla luce del senso comune. Dobbiamo anzitutto ribadire il concetto che la relatività investe tutti i rami della fisica: in questo capitolo ci siamo concentrati sulla meccanica, e più avanti andremo a considerare i suoi effetti sull'elettromagnetismo. In realtà è necessario rivedere ogni particolare settore della fisica dal punto di vista della relatività ristretta, per verificare se sia coerente con i due postulati di Einstein. Osserviamo inoltre che questa teoria ha superato tutte le prove di laboratorio senza che sorgesse la minima discrepanza. È una teoria che possiede un grande valore estetico, rivelandoci un'immagine più convincente di quella offerta dalla fisica classica circa la validità delle differenze di prospettiva e di simmetria. È anche una validissima, insostituibile guida per gli ingegneri che devono progettare i grandi acceleratori di particelle e per i tecnici addetti alle unità di misura campione, ad esempio per la correzione degli orologi atomici quando occorre trasferirli da un luogo a un altro.

Il primo postulato della relatività è in realtà un codicillo della prima legge di Newton, la legge dell'inerzia, che ha fondato il concetto dei sistemi inerziali di riferimento e ci ha insegnato che degli osservatori inerziali trarrebbero conclusioni identiche da esperimenti condotti su sistemi sui quali non agisce alcuna forza esterna. Non occorre fare un grande sforzo per estendere questo concetto e prevedere che gli osservatori inerziali dovrebbero poter trarre conclusioni identiche anche da esperimenti su sistemi nei quali *agisce* una forza esterna. E infine, perché dovremmo applicare questo concetto *soltanto* alle leggi della meccanica? Estendendolo a un'equivalenza per *qualsiasi* legge della fisica, si arriva al primo postulato.

Anche il secondo postulato appare ragionevole. Sembra inverosimile che si possa inviare un segnale a velocità infinita, potendo così stabilire un sistema di comunicazioni istantanee in tutto l'Universo. Inoltre gli esperimenti sulla relatività del tempo dimostrano che una simile simultaneità di comunicazione fra punti assai distanti fra loro non va d'accordo con quanto osservato. Se esiste una velocità limite, questa deve certamente (per il secondo postulato) essere uguale per tutti, indipendentemente dal loro stato di quiete o di moto.

Molte persone possono provare disagio al primo impatto con la relatività della simultaneità, con l'apparente accorciamento dei righelli dovuto al movimento e con il rallentamento del tempo. Ma un minimo di riflessione le porterà a convincersi che le alternative classiche possono risultare ancor più indigeste. Per esempio un classico righello rigido di lunghezza definita rappresenta un concetto incompatibile con la relatività: un segnale (diciamo, un brusco movimento) a un'estremità non può propagarsi istantaneamente all'altra. Dobbiamo rinunciare all'idea che *tutti* gli osservatori possano usare lo *stesso* righello. Dobbiamo abituarci all'idea che ogni osservatore deve possedere il proprio strumento di misura da usare *unicamente* all'interno del proprio sistema di riferimento. Non esistono strumenti di misura o risultati che siano preferibili ad altri. E da ultimo, la relatività fornisce un quadro di meravigliosa simmetria fra gli osservatori: non si afferma la realtà del rallentamento degli orologi, ma soltanto che, dal suo particolare punto di vista, ciascun osservatore constata il rallentamento degli orologi di altri osservatori in moto relativo nei suoi confronti. Non c'è alcun motivo di conferire un titolo di preferenza ad alcuno degli osservatori.

Secondo la fisica classica, lo spazio e il tempo sono assoluti. Ciò porta al risultato che le leggi della fisica debbano essere diverse per i diversi osservatori. La relatività invece afferma che le leggi della fisica debbono essere le stesse per qualsiasi osservatore, e che di conseguenza spazio e tempo diventano concetti relativi. È chiaro che la relatività è «più assolutistica» che la fisica classica., Il complesso e arbitrario mondo della fisica classica, nel quale ogni osservatore dovrebbe applicare un diverso codice di leggi fisiche, diventa il mondo più semplice e uniforme della relatività.

La relatività allarga la nostra visione dell'Universo collocandoci in un nostro posto particolare fra la moltitudine degli osservatori inerziali di quell'Universo. Porta a fondersi concetti che la fisica classica ci aveva insegnato a ritenere distinti: per esempio, spazio e tempo diventano lo spazio-tempo; massa ed energia, l'energia a riposo. E indica la meta di una sola teoria unificata che copra tutte le possibili interazioni fra particelle: elettricità e magnetismo nell'elettromagnetismo; l'elettromagnetismo e le cosiddette interazioni *deboli* (responsabili di certi processi di decadimento radioattivo) nella forza *elettrodebole*; l'interazione elettrodebole e le interazioni nucleari forti nelle Grandi Teorie Unificate (GUT) da tempo proposte, e infine le GUT e la gravità nella teoria ipotetica del Tutto. Einstein, che arrivò soltanto a conoscere la prima di queste unificazioni, sarebbe certamente molto contento di queste conquiste della sua fisica relativistica.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

20.1 La fisica classica in difficoltà

20.2 I postulati della relatività ristretta

20.3 Conseguenze dei postulati di Einstein

1. Il pilota di un'astronave che si allontana dalla Terra alla velocità di 0,86c lancia verso la Terra un segnale mediante un raggio laser.

   (a) La velocità v del raggio laser misurata dal pilota è

   (A) $v < c$. (B) $v = c$. (C) $v > c$.

   (b) Un osservatore sulla Terra misura una velocità v del raggio laser

   (A) $v < c$. (B) $v = c$. (C) $v > c$.

2. Un'astronave di lunghezza (misurata dal pilota sul-

 ISBN 88-408-1254-7

l'astronave stessa) uguale a 20 m viaggia a velocità costante lungo un molo spaziale di lunghezza (misurata da un operatore sul molo) di 40 m. L'operatore misura in 18 m la lunghezza dell'astronave che gli passa vicino.

(a) A quale velocità procede l'astronave lungo la banchina?

(A) $v \approx c/100$. (B) $v \approx c/10$. (C) $v \approx c/2$.
(D) $v = c$. (E) $v > c$.

(b) IQual è la lunghezza della banchina misurata dal pilota dell'astronave?

(A) 36 m. (B) 38 m.
(C) 42 m. (D) 44 m.

(c) Il pilota osserva un orologio sul molo per la durata di un minuto misurata su un orologio che si trova sull'astronave. Il tempo trascorso sull'orologio sul molo sarà però di

(A) 49 s. (B) 54 s.
(C) 60 s. (D) 67 s.

(d) L'operatore sul molo osserva un orologio sull'astronave per un minuto (misurato dal suo orologio sul molo). Il tempo trascorso per l'orologio sull'astronave sarà però di

(A) 54 s. (B) 60 s.
(C) 67 s. (D) 78 s.

(e) Il pilota lancia un missile alla velocità di $0{,}9c$ relativa all'astronave. La velocità del missile relativa alla banchina, come misurata dall'operatore sul molo sarà invece

(A) maggiore di c. (B) uguale a c. (C) minore di c.

20.4 Trasformazione di Lorentz

20.5 Misura delle coordinate spaziotemporali di un evento

20.6 Trasformazione delle velocità

3. Un'astronave si allontana dalla Terra alla velocità di $0{,}90c$. La velocità della Terra, misurata dall'astronave, sarà

(A) 0. (B) $0{,}45c$.
(C) $0{,}90c$. (D) $1{,}9c$.

4. Un'astronave che si allontana dalla Terra alla velocità di $0{,}60c$ lancia due missili, uno diretto in avanti e l'altro indietro, entrambi alla velocità $0{,}80c$ rispetto all'astronave.

(a) Il missile lanciato in avanti ha velocità v_1 rispetto alla Terra, ove

(A) $v_1 < 0{,}6c$. (B) $0{,}6c < v_1 < 0{,}8c$.
(C) $0{,}8c < v_1 < c$. (D) $v_1 = 1{,}4c$.
(E) $v_1 > 1{,}4c$.

(b) Il missile lanciato indietro verso la Terra ha una velocità v_2 con

(A) $v_2 < 0{,}2c$. (B) $v_2 = 0{,}2c$.
(C) $0{,}2c < v_2 < 0{,}6c$. (D) $0{,}6c < v_2 < 0{,}8c$.
(E) $0{,}8c < v_2 < c$.

(c) La velocità del missile lanciato verso la Terra misurata dall'altro missile è v_3 con

(A) $v_3 < 0{,}6c$. (B) $0{,}6c < v_3 < 0{,}8c$.
(C) $0{,}8c < v_3 < c$. (D) $v_3 = 1{,}6c$.
(E) $v_3 > 1{,}6c$.

20.7 Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

5. Due eventi A e B sono simultanei e avvengono nello stesso luogo nel sistema inerziale di riferimento S. In qualsiasi altro sistema S'

(A) gli eventi avverranno nello stesso luogo ma potrebbero avvenire in istanti differenti.
(B) gli eventi avverranno in diversi luoghi, ma saranno sempre simultanei.
(C) gli eventi avverranno sia simultaneamente sia nello stesso luogo.
(D) gli eventi non avverranno simultaneamente né nello stesso luogo.

6. Due eventi A e B sono simultanei, ma avvengono in luoghi differenti nel sistema inerziale di riferimento S. In un differente sistema S'

(A) gli eventi potrebbero essere simultanei e avvenire nello stesso luogo.
(B) gli eventi potrebbero essere simultanei o avvenire nello stesso luogo, ma non tutt'e due le cose allo stesso tempo.
(C) gli eventi potrebbero essere simultanei, ma non possono avvenire nello stesso luogo.
(D) gli eventi non possono essere simultanei, ma potrebbero avvenire nello stesso luogo.
(E) gli eventi non possono essere simultanei né avvenire nello stesso luogo.

7. Due eventi A e B non sono simultanei, ma avvengono nello stesso luogo nel sistema inerziale di riferimento S. In un differente sistema S'

(A) gli eventi potrebbero essere simultanei e avvenire nello stesso luogo.
(B) gli eventi potrebbero essere simultanei o avvenire nello stesso luogo, ma non tutt'e due le cose allo stesso tempo.
(C) gli eventi potrebbero essere simultanei ma non possono avvenire nello stesso luogo.
(D) gli eventi non possono essere simultanei ma potrebbero avvenire nello stesso luogo.
(E) gli eventi non possono essere simultanei né avvenire nello stesso luogo.

20.8 Quantità di moto relativistica

8. Una particella di massa m e quantità di moto di modulo $2mc$ va a colpire una particella di massa m a riposo. Dopo l'urto esse rimangono attaccate insieme.

(a) La velocità della particella in movimento *prima* dell'urto era

(A) $< c/2$. (B) fra $c/2$ e c.
(C) fra c e $2c$. (D) $2c$.

(b) Il modulo della quantità di moto totale dopo l'urto sarà

(A) $< 2mc$. (B) $= 2mc$.
(C) fra $2mc$ e $3mc$. (D) $> 3mc$.

(c) La velocità delle due particelle dopo l'urto sarà

(A) $< c/2$. (B) $= c/2$.
(C) fra $c/2$ e c. (D) $> c$.

20.9 Energia relativistica

9. Quale dei seguenti decadimenti è vietato dal principio di conservazione dell'energia?

(A) $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$

(B) $\pi^+ \rightarrow e^+ + \pi^0$

(C) $p \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}_e$

(D) $\rho^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$.

10. (a) La velocità v_1 di un elettrone che possiede l'energia cinetica $K \gg m_e c^2$ è

(A) $v_1 \ll c$. (B) $v_1 \approx c$.

(C) $v_1 > c$. (D) $v_1 \gg c$.

(b) Quale dev'essere la velocità di un elettrone che possiede l'energia cinetica $4K$?

(A) Tra v_1 e c. (B) $< 2v_1$.

(C) $= 2v_1$. (D) $> 2v_1$.

(E) Sia (A) sia (C) sono risposte esatte.

11. Un protone ad alta energia emesso dal Sole ha un'energia totale maggiore di 100 GeV. Dopo quanto tempo, misurato dalla Terra, colpirà la superficie terrestre?

(A) ≈ 6 s. (B) ≈ 1 min.

(C) ≈ 9 min. (D) ≈ 20 min.

(E) Non si può rispondere senza maggiori informazioni circa l'energia del protone.

20.10 Il senso comune della relatività ristretta

QUESITI

1. La velocità della luce nel vuoto è una vera costante della natura, indipendente dalla lunghezza d'onda o dal sistema inerziale di riferimento considerato. È perciò giusto affermare che il secondo postulato di Einstein si può considerare compreso nell'ambito del primo?

2. Esaminate il problema con il quale si cimentò il giovane Einstein: quale sarebbe l'aspetto di un raggio elettromagnetico per una persona che si muova insieme ad esso alla velocità c?

3. Nella relatività è valido il concetto di un fluido incomprimibile? E dei corpi perfettamente rigidi?

4. Un quasar (oggetto quasi-stellare) si allontana dalla Terra a una velocità uguale a metà di quella della luce. Qual è, vista dalla Terra, la velocità della luce emessa dal quasar?

5. I quasar sono gli oggetti intrinsecamente più luminosi dell'Universo. La luminosità di molti di essi è fluttuante, spesso su cicli di durata circa giornaliera. Come si può dedurre dalla rapidità di queste variazioni di luminosità il limite superiore della loro possibile grandezza? (*Suggerimento*: due punti separati non possono subire cambiamenti in maniera coordinata senza che fra essi vi sia trasmissione di informazione.)

6. La rapidità dell'oscillazione della coda di una cometa non può eccedere la velocità della luce. Spiegate questo fenomeno e dimostrate che non vi è contraddizione con la relatività.

7. Immaginiamo un fronte sferico di luce che si irraggia da una sorgente puntiforme. Dal punto di vista di un osservatore solidale alla sorgente qual è la differenza di velocità di fronti d'onda che viaggiano in versi opposti? Qual è la loro velocità relativa?

8. Prendendo in prestito due frasi di Hermann Bondi possiamo cogliere lo spirito dei due postulati di Einstein così definendoli: (1) il principio della "irrilevanza della velocità" e (2) della "unicità della luce". In che senso si può affermare che la velocità non ha importanza e che la luce è unica?

9. Un raggio laser colpisce normalmente uno specchio piano e si riflette. Qual è la velocità del raggio riflesso se lo specchio si trova (a) fisso in laboratorio oppure (b) in moto alla velocità v verso il raggio incidente?

10. Date un esempio di fisica classica in cui il moto di un orologio può influire sul suo stesso ritmo. (L'ampiezza dell'effetto può dipendere dal modo particolare di funzionare dell'orologio.)

11. Sebbene nella relatività, dove il moto è relativo e non assoluto, si affermi che "gli orologi in moto rallentano", questo effetto non ha niente a che fare con l'alterazione del movimento dovuta al moto dell'orologio. Con che cosa ha invece a che fare?

12. Abbiamo visto che, se diversi sperimentatori osservano due eventi, che chiameremo A e B, uno di loro può affermare che A è avvenuto per primo mentre un altro sostiene che B ha preceduto A. Che cosa rispondereste a un amico che vi chiedesse quale dei due sia realmente avvenuto prima?

13. Supponiamo che l'evento A sia la partenza di un aereo da Oslo e B il suo arrivo a Lisbona. È possibile che due osservatori non siano d'accordo sull'ordine cronologico di questi due eventi? Commentate.

14. Due osservatori, uno a riposo in S e l'altro a riposo in S', portano ciascuno un'asta graduata orientata parallelamente alla direzione del loro moto relativo. Ciascuno di essi rileva che l'asta dell'altro è più corta della propria. Vi sembra un paradosso? Spiegate. (*Suggerimento*: confrontate con questa situazione. Andrea saluta Walter, che risponde dal retro di un'auto che si sta allontanando. Andrea dirà che Walter diventa più piccolo, mentre Walter pensa che sia Andrea a diminuire di statura. Stanno misurando la stessa cosa?)

15. Come interviene il concetto di simultaneità nella misurazione della lunghezza di un oggetto?

16. Nella relatività le coordinate spaziotemporali sono intrecciate fra loro e trattate come entità più o meno equivalenti. Il tempo e lo spazio sono davvero della stessa natura, o vi è fra loro una certa differenza che si conserva anche nella relatività?

17. Nel paradosso dei gemelli spiegate (in termini di battito cardiaco, attività fisiche e mentali, ecc.) perché la gemella che torna ringiovanita non è vissuta più a lungo del suo tempo proprio mentre il suo gemello sedentario può affermare il contrario. A questo proposito spiegate l'osservazione: "invecchiamo secondo il nostro tempo proprio".

18. Se alcune particelle di massa nulla hanno velocità uguale a c in un sistema di riferimento, si può trovarle a riposo in un altro sistema? Possono avere una velocità diversa da c?

 ISBN 88-408-1254-7

19. Una particella a massa nulla (un neutrino, magari) può possedere una quantità di moto. Tuttavia, secondo l'Equazione 20.23, dev'essere $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, e perciò, se la massa è zero, anche la quantità di moto sarà nulla. Si spieghi.
20. Quante espressioni relativistiche potete pensare nelle quali il fattore γ di Lorentz entra come un semplice coefficiente di moltiplicazione?
21. La massa di una particella composta, per esempio un nucleo d'oro, è maggiore, uguale o minore della somma delle masse che la compongono? Si spieghi.
22. Talvolta la massa di una particella elementare è data in unità di MeV/c^2. Per esempio, la massa di un elettrone è 0,511 MeV/c^2. Se ne spieghi il significato.
23. "L'espressione $E_0 = mc^2$ è fondamentale per l'esercizio di una centrale elettronucleare a fissione, ma è di scarsissimo rilievo per una centrale termoelettrica a carbone." È un'affermazione vera? Commentate.
24. Una centrale idroelettrica genera energia elettrica prodotta dalla caduta per gravità di acqua che fa girare una turbina idraulica. Secondo il concetto massa-energia, la comparsa di un'energia (elettrica) si deve identificare da qualche parte con una diminuzione di massa? Se sì, dove?
25. Alcuni affermano che la relatività complica le cose. Citate un esempio del contrario, nel quale la relatività semplifica le cose.

ESERCIZI

20.1 La fisica classica in difficoltà

20.2 I postulati della relatività ristretta

20.3 Conseguenze dei postulati di Einstein

1. Prescindendo dagli effetti del moto rotazionale e orbitale della Terra, un sistema di riferimento di laboratorio non è strettamente inerziale, perché una particella che vi è stata collocata in stato di riposo generalmente non ci rimane, giacché cade per gravità. Spesso però gli eventi si svolgono tanto rapidamente che possiamo ignorare il fenomeno della caduta libera e trattare il laboratorio come un sistema inerziale. Consideriamo, per esempio, un elettrone di energia cinetica 1,0 MeV ($v = 0{,}941c$) proiettato orizzontalmente in una camera di prova che percorre una distanza di 20 cm. (a) Quanto tempo impiegherà nel tragitto, e (b) di quanto cadrà durante questo intervallo? A che conclusioni si arriva circa l'utilizzabilità del laboratorio come sistema di riferimento inerziale?
2. Un elettrone di energia cinetica 100 MeV ($v = 0{,}999987c$), si muove lungo l'asse di un tubo a vuoto di lunghezza 2,86 m misurata da un osservatore S nel laboratorio rispetto al quale il tubo a vuoto è a riposo. Un osservatore S' che si muove con l'elettrone vedrebbe il tubo muoversi all'indietro a velocità v. Che lunghezza misurerebbe per il tubo?
3. Un'asticella, di lunghezza a riposo 1,68 m, giacente parallela all'asse x, si muove lungo quest'asse alla velocità di $0{,}632c$. Quale sarà la sua lunghezza nel sistema S'?
4. In laboratorio, la vita media dei muoni arrestati da un blocco di piombo è 2,20 μs. La vita media di muoni ad alta energia in uno sciame di raggi cosmici osservati dalla Terra è 16,0 μs. Trovate la loro velocità.
5. Una particella instabile ad alta energia entra in un rivelatore ove lascia una traccia lunga 1,05 mm prima di decadere. La sua velocità iniziale rispetto al rivelatore era $0{,}992c$. Qual è il suo tempo proprio di vita media? Ossia, quanto tempo sarebbe *vissuta* prima di decadere se fosse stata a riposo rispetto al rivelatore?
6. Una particella avanza alla velocità di $0{,}43c$ lungo l'asse x' nel sistema S', che si muove a velocità $0{,}587c$ rispetto al sistema S. Quale velocità si misura per la particella nel sistema S?
7. Un'astronave di lunghezza a riposo 130 m passa per un posto di controllo alla velocità di $0{,}740c$. (a) Quale sarà la lunghezza dell'astronave misurata dalla postazione di controllo? (b) Che intervallo di tempo misurerà la stazione fra il passaggio della prora e della poppa dell'astronave?
8. Nell'alta atmosfera terrestre una particella ad alta energia in arrivo si scontra con un nucleo atomico e genera un pione, che discende verso la Terra a velocità $0{,}99c$. In un sistema di riferimento in cui fossero a riposo, i pioni avrebbero una vita media di 26 ns. Misurando in un sistema solidale con la Terra, per quale distanza si inoltrerà nell'atmosfera questo tipico pione prima di decadere?
9. Per orbitare intorno alla Terra a bassa quota un satellite deve avere una velocità di circa 7,91 km/s. Supponiamo che due satelliti girino in senso opposto su queste orbite. (a) Qual è la loro velocità relativa quando si incrociano? Valutatela con l'equazione classica galileiana di trasformazione della velocità. (b) Quale errore relativo si è introdotto per non aver adottato la (corretta) equazione di trasformazione relativistica?

20.4 Trasformazioni di Lorentz

10. Quale dev'essere il valore del parametro di velocità β se il fattore di Lorentz γ vale (a) 1,01? (b) 10,0? (c) 100? (d) 1000?
11. Trovate il parametro di velocità di una particella che impiega 2 anni più della luce a percorrere una distanza di 6,0 anni-luce.
12. L'osservatore S attribuisce a un evento le coordinate $x =$ 100 km, $t = 200$ μs. Trovatene le coordinate nel sistema di riferimento S', che è in moto nella direzione delle x crescenti a velocità $0{,}950c$. Ponete $x = x'$ a $t = t' = 0$.
13. L'osservatore S annota che sull'asse x, nel punto individuato da $x = 3{,}20 \cdot 10^8$ m al tempo $t = 2{,}50$ s, si è verificato un evento. (a) L'osservatore S' è in moto nella direzione delle x crescenti a velocità $0{,}380c$. Quali coordinate rileverà S' per questo evento? (b) Quali coordinate rileverebbe S'' se procedesse alla stessa velocità nel senso delle x decrescenti?
14. Ricavate le Equazioni 20.17 per le trasformazioni inverse di Lorentz invertendo algebricamente le Equazioni 20.14 per le trasformazioni dirette.

20.5 Misura delle coordinate spaziotemporali di un evento

20.6 Trasformazione delle velocità

15. Supponiamo che un osservatore S lanci un raggio di luce in direzione y ($v_x = 0$, $v_y = c$), mentre l'osservatore S' si muove alla velocità u in direzione x. Trovare le componen-

ti v'_x e v'_y della velocità della luce secondo S'. e dimostrate che, per il raggio di luce, S' misura la velocità c.

16. Un protone di un raggio cosmico si avvicina alla Terra lungo l'asse terrestre alla velocità di $0{,}787c$ in direzione del polo nord e un altro, alla velocità di $0{,}612c$, verso il polo sud (Figura 20.24). Trovare la velocità relativa di avvicinamento di una particella rispetto all'altra. (*Suggerimento*: è opportuno considerare la Terra e una delle due particelle come due sistemi inerziali di riferimento.)

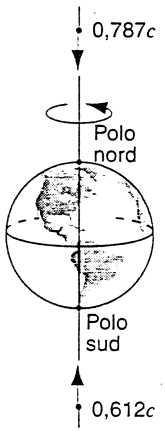


FIGURA 20.24 Esercizio 16.

17. Si osserva che la galassia A si allontana da noi alla velocità $0{,}347c$, mentre la galassia B, in posizione esattamente opposta alla prima, sta anch'essa allontanandosi alla stessa velocità. Quale velocità di allontanamento misurerà un osservatore sulla galassia A per (a) la nostra galassia e (b) la galassia B?

18. Da misurazioni dello spostamento verso il rosso della luce emessa si desume che il quasar Q_1 si allontana da noi a una velocità di $0{,}788c$, mentre il quasar Q_2, che sta nella stessa direzione del primo ma è più vicino a noi, si allontana alla velocità di $0{,}413c$. Quale velocità misurerebbe per Q_2 un osservatore posto su Q_1?

19. Nella Figura 20.25, A e B sono due treni che viaggiano su binari perpendicolari lungo gli assi y e x, alle velocità indicate rispetto al sistema di riferimento inerziale di S, origine degli assi. (a) Trovare v_{AB}, la velocità del treno B rispetto al treno A, e (b) v_{BA}, la velocità del treno A rispetto al treno B. (c) Spiegate come mai queste due velocità relative non sono dirette in senso opposto fra loro.

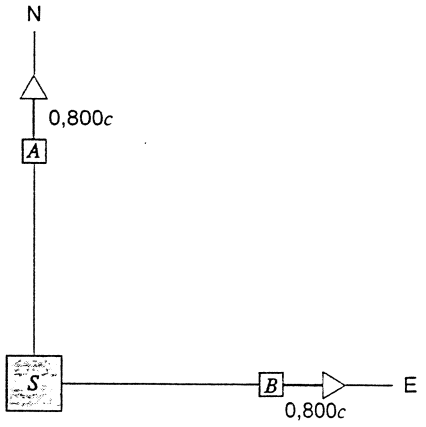


FIGURA 20.25 Esercizio 19.

20.7 Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

20. Un elettrone è in moto a una velocità con la quale potrebbe fare la circumnavigazione della Terra all'equatore in 1 s. (a) Qual è la sua velocità in rapporto alla velocità della luce? (b) Qual è la sua energia cinetica K? (c) Che errore percentuale si commetterebbe applicando la formula classica per il calcolo di K?

21. Il raggio a riposo della Terra è 6370 km e la sua velocità orbitale rispetto al Sole è 29,8 km/s. Di quanto sembrerebbe più corto il diametro della Terra per un osservatore situato in modo da veder passare la Terra a questa velocità?

22. Un aeroplano di lunghezza propria 42,4 m vola rispetto alla Terra a una velocità costante di 522 m/s. (a) Di quale frazione della sua lunghezza a riposo sembrerà più corto a un osservatore sulla Terra? (b) In quale intervallo di tempo misurato da un orologio terrestre ritarderebbe di 1 μs l'orologio aerotrasportato? (Si assuma che valga soltanto la relatività ristretta.)

23. Un'astronave di lunghezza a riposo 358 m va alla velocità di $0{,}728c$ rispetto a un certo sistema di riferimento. Un micrometeorite, alla velocità di $0{,}817c$ nello stesso sistema di riferimento, incrocia l'astronave su una rotta parallela e contraria. Quanto tempo impiega il micrometeorite a passare l'astronave?

24. Un orologio si muove sull'asse x a velocità $0{,}622c$ e legge zero al passaggio per l'origine. (a) Calcolare il fattore di Lorentz. (b) Che tempo segna l'orologio quando passa per l'ascissa $x = 183$ m?

25. Un viaggiatore spaziale decolla dalla Terra in rotta a velocità di $0{,}988c$ per Vega, che è distante 26,0 anni-luce. Quanto tempo sarà passato sugli orologi terrestri (a) quando avrà raggiunto Vega e (b) quando gli osservatori terrestri riceveranno il segnale del suo arrivo? (c) Gli osservatori terrestri di quanto lo giudicheranno invecchiato rispetto al momento della sua partenza dalla Terra?

26. Desiderate fare un viaggio di andata e ritorno partendo dalla Terra su un'astronave che viaggia in linea retta a velocità costante per 6 mesi e poi ritorna alla stessa velocità costante. Volete inoltre, al ritorno, trovare che sulla Terra siano passati 1000 anni. (a) A che velocità dovrete viaggiare? (b) Ha importanza il fatto che abbiate viaggiato sempre in linea retta? Se, ad esempio, aveste viaggiato circolarmente per 1 anno sulla Terra sarebbero ugualmente trascorsi 1000 anni?

20.8 Quantità di moto relativistica

27. Dimostrare che $1\ \text{kg} \cdot \text{m/s} = 1{,}875 \cdot 10^{21}\ \text{MeV}/c$.

28. Una particella ha quantità di moto pari a mc. Calcolate la sua velocità.

29. Calcolare il parametro di velocità β di una particella che ha quantità di moto 12,5 MeV/c, sapendo che si tratta (a) di un elettrone e (b) di un protone.

20.9 Energia relativistica

30. Trovare il parametro di velocità β e il fattore di Lorentz γ per un elettrone avente energia cinetica (a) 1,0 keV, (b) 1,0 MeV e (c) 1,0 GeV.

31. Trovare il parametro di velocità β e il fattore di Lorentz γ per una particella avente energia cinetica 10 MeV se si tratta (a) di un elettrone, (b) di un protone e (c) di una particella alfa.

 ISBN 88-408-1254-7

32. Una particella ha velocità $0{,}999c$ nel sistema di riferimento del laboratorio. Quali sono la sua energia cinetica, la sua energia totale e la sua quantità di moto se si tratta (a) di un protone o (b) di un elettrone?
33. Si presume che i quasar siano nuclei di galassie attive ai primi stadi di formazione. Un quasar tipico irradia energia con potenza di $1{,}20 \cdot 10^{41}$ W. Di quanto diminuisce nell'unità di tempo la sua massa per produrre questa energia? Esprimete la risposta in unità di massa solare all'anno.
34. Calcolare la velocità di una particella avente (a) energia cinetica uguale a due volte la sua energia a riposo e (b) energia totale uguale a due volte la sua energia a riposo.
35. (a) Usando la formula di sviluppo in serie binomiale (vedi Appendice I) dimostrare che l'Equazione 20.27 si riduce all'espressione classica $K = \frac{1}{2}mv^2$ per $v \ll c$. (b) Valutando il secondo termine dello sviluppo in serie, trovare il valore di v/c per cui l'errore dato dall'impiego dell'espressione classica è al massimo dell'1%.
36. Un'auto di massa 1000 kg viaggia alla velocità di 20 m/s. Calcolare la sua energia cinetica usando sia l'equazione classica sia quella relativistica. Qual è la differenza relativa fra i due risultati?
37. Trovare la quantità di moto di una particella di massa m tale che la sua energia totale sia tre volte quella a riposo.
38. Usando le velocità indicate nella Figura 20.20 relative al sistema di riferimento S', dimostrare che, per questo sistema S', le energie cinetiche prima e dopo l'urto calcolate col metodo classico risultano dalle Equazioni 20.26.
39. Riconsiderando l'urto di Figura 20.20, calcolare le energie cinetiche iniziale e finale in base alle Equazioni relativistiche 20.27 nel sistema di riferimento S', per dimostrare che l'energia cinetica si conserva sia in questo sistema di riferimento sia nel sistema S.
40. Considerate queste particelle in moto nello spazio: un fotone di energia cinetica 2,0 eV, un elettrone di energia cinetica 0,40 MeV e un protone di energia cinetica 10 MeV. (a) Qual è il più veloce? (b) Il più lento? (c) Quale ha la massima quantità di moto? (d) E la minima? (*Nota*: il fotone è una particella di massa nulla.)
41. Quanto lavoro si spende per aumentare la velocità di un elettrone (a) da $0{,}18c$ a $0{,}19c$ e (b) da $0{,}98c$ a $0{,}99c$? Notare che l'incremento di velocità, $0{,}01c$, è identico nei due casi.
42. Due particelle identiche, di massa 1,30 mg, in moto con velocità uguali e opposte di $0{,}58c$ nel sistema di riferimento del laboratorio, si scontrano e rimangono incastrate insieme. Trovare la massa della particella risultante.
43. (a) Si esamini il decadimento del kaone descritto nel Problema svolto 20.10 usando un sistema di riferimento (quello del centro di massa) nel quale i kaoni sono inizialmente a riposo. Si dimostri che due pioni generati nel decadimento viaggiano in direzioni opposte alla stessa velocità di $0{,}827c$. (b) Qual è la velocità dei kaoni originali osservata nel sistema di riferimento del laboratorio? (c) Ammettiamo che i due pioni siano emessi nel riferimento del centro di massa alle velocità $v'_x = 0{,}827c$ e $v'_x = -0{,}827c$. Calcolando le velocità corrispondenti nel sistema del laboratorio, si dimostri che le energie cinetiche in questo sistema sono identiche a quelle trovate nella soluzione del Problema svolto 20.10.
44. Una particella alfa con energia cinetica 7,70 MeV colpisce un nucleo di ^{14}N a riposo. Si generano un nucleo di ^{17}O e un protone, quest'ultimo emesso in direzione perpendicolare rispetto a quella della particella alfa incidente, con energia cinetica di 4,44 MeV. Le energie a riposo delle diverse particelle sono: particella alfa, 3730,4 MeV; ^{14}N, 13 051 MeV; protone, 939,29 MeV; ^{17}O, 15 843 MeV. (a) Trovare l'energia cinetica del nucleo di ^{17}O. (b) Sotto quale angolo si muoverà il nucleo ^{17}O rispetto alla direzione della particella alfa incidente?

20.10 Il senso comune della relatività ristretta

PROBLEMI

1. La lunghezza misurata di una nave spaziale risulta uguale esattamente alla metà della sua lunghezza a riposo. (a) Qual è la velocità della nave rispetto al sistema di riferimento dell'osservatore? (b) Qual è il fattore di rallentamento degli orologi trasportati dalla nave spaziale rispetto a quelli fermi rispetto all'osservatore?
2. Nel sistema inerziale S', in moto rispetto al sistema S a velocità $0{,}620c$ nel verso delle x crescenti, la velocità misurata di una particella è $0{,}470c$ nella direzione delle x' crescenti. (a) Qual è la velocità della particella rispetto a S ? (b) Quale sarebbe la velocità della particella rispetto a S se si muovesse a velocità $0{,}470c$ nel verso delle x' decrescenti rispetto a S'? In entrambi i casi confrontate le risposte con quanto previsto dall'equazione di trasformazione classica.
3. Uno sperimentatore prepara un'apparecchiatura per accendere contemporaneamente due lampeggiatori, un lampo blu all'origine del suo sistema di riferimento e un lampo rosso in x = 30,4 km. Anche un secondo osservatore, che viaggia a velocità di $0{,}247c$ nel verso delle x crescenti rileva la presenza delle luci. (a) Quale intervallo di tempo rileva tra i due lampi? (b) Quale luce ritiene che si accenda per prima?
4. Il sistema inerziale S' si muove a velocità $0{,}60c$ rispetto a S nel verso positivo delle x. Nel sistema S l'evento 1 avviene all'origine al tempo t = 0, e l'evento 2 sull'asse x con x = 3,0 km e t = 4,0 ps. A quali tempi avverranno gli stessi due eventi secondo l'osservatore S'? Spiegate le ragioni dell'inversione di sequenza.
5. Dimostrare che l'equazione

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2 = \\ = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 - c^2(\Delta t')^2$$

è vera per qualunque valore di γ e u.
6. Un nucleo radioattivo, in moto alla velocità costante di $0{,}240c$ lungo l'asse x in un sistema di riferimento S fisso rispetto al laboratorio, decade emettendo un elettrone a velocità di $0{,}780c$, misurata in un sistema di riferimento S'

ISBN 88-408-1254-7

che si muove con il nucleo. Si considerino anzitutto i casi in cui l'elettrone emesso viaggia (a) lungo l'asse comune xx' e (b) lungo l'asse y'; si trovi poi per ogni caso il modulo e la direzione della velocità misurata rispetto al sistema di riferimento S. (c) Supponiamo invece che l'elettrone emesso, visto ora nel sistema di riferimento S, viaggi lungo l'asse y di questo sistema a velocità di $0{,}780c$; quale sarà, in modulo e direzione, la sua velocità misurata nel sistema S'?

7. Un'astronave a riposo in un certo sistema di riferimento S riceve un incremento di velocità di $0{,}500c$. Riceve quindi, in questo nuovo sistema di riferimento, un ulteriore incremento di $0{,}500c$, e il ciclo si ripete fino a che la sua velocità rispetto al sistema originario arrivi a superare $0{,}999c$. Quanti incrementi sono necessari a questo scopo?

8. Un osservatore S vede un lampo di luce rossa a 1210 m di distanza e nella stessa direzione un altro di luce blu, più vicino di 730 m. S vede il lampo di luce rossa precedere di un intervallo di tempo di 4,96 μs quello di luce blu. (a) Trovare, in modulo e direzione, la velocità relativa di un secondo osservatore S' che vedrebbe i lampi di luce avvenire nello stesso luogo. (b) Dal punto di vista di S' quale lampo avviene per primo e qual è l'intervallo di tempo fra i due lampi?

9. Si consideri il problema precedente. Supponiamo ora che l'osservatore S veda che i due lampi avvengono nelle stesse posizioni precedenti, ma in tempi molto più ravvicinati. Qual è la massima vicinanza nel tempo che possono raggiungere per cui sia possibile trovare un sistema di riferimento per il quale i due lampi siano visibili nello stesso luogo?

10. a) Può una persona, in teoria, viaggiare dalla Terra al centro della Via Lattea (che è distante da noi all'incirca 23 000 anni-luce) nel periodo normale di una vita? Si spieghi come ciò possa avvenire, con riferimento alla dilatazione del tempo e la contrazione della lunghezza. (b) A che velocità costante bisognerebbe viaggiare per arrivare in 30 anni di tempo proprio?

11. Gli osservatori S ed S' si trovano all'origine dei loro rispettivi sistemi di riferimento, che si spostano alla velocità relativa di $0{,}600c$. Ciascuno ha un orologio campione che, come al solito, viene azzerato quando le origini coincidono. L'osservatore S tiene in vista l'orologio di S'. (a) Che tempo indicherà l'orologio di S' quando quello di S indica 5,00 μs? (b) Che tempo leggerà direttamente S sull'orologio di S' quando il suo indica 5,00 μs?

12. Dimostrare che due eventi A e B, simultanei nel sistema di riferimento S e separati da una distanza Δr, appariranno separati da una distanza maggiore di Δr in qualsiasi altro sistema di riferimento.

13. (a) Se è possibile misurare l'energia cinetica K e la quantità di moto p di una particella, dovrebbe essere possibile calcolarne la massa m e individuare la particella. Si dimostri che vale la seguente relazione

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}.$$

(b) A cosa si riduce questa espressione per $v/c \to 0$, ove v è la velocità della particella? (c) Si calcoli la massa di una particella che ha energia cinetica di 55,0 MeV e quantità di moto pari a 121 MeV/c; si esprima la risposta in funzione della massa m dell'elettrone.

14. In una collisione ad alta energia di una particella di un raggio cosmico primario al sommo dell'atmosfera terrestre, 120 km sopra la superficie della Terra, si genera un pione con energia totale 135 GeV, che viaggia verticalmente verso il basso. Nel suo sistema di riferimento esso decade 35,0 ns dopo la sua creazione. A che altitudine sul livello del mare avviene il decadimento? L'energia a riposo del pione è 139,6 MeV.

15. Una particella di massa m, che viaggia a una velocità relativistica, entra in una collisione completamente anelastica con un'altra particella identica inizialmente a riposo. Trovare (a) la velocità dell'unica particella prodotta e (b) la sua massa. Esprimere le risposte in funzione del fattore di Lorentz γ della particella incidente.

16. (a) Supponiamo di avere una particella accelerata da ferma per azione di una forza F. Supponendo che la seconda legge di Newton per una particella, $F = dp/dt$, sia valida nella relatività, si dimostri che l'energia cinetica finale K si può scrivere, in base al teorema dell'energia cinetica, $K = \int v\,dp$. (b) Valendosi dell'Equazione 20.23 per la quantità di moto relativistica, si dimostri che, integrando questa espressione si ottiene l'Equazione 20.27 per l'energia cinetica relativistica.

17. (a) Nella fisica sperimentale delle alte energie, le particelle cariche di energia circolano in versi opposti nei cosiddetti anelli di accumulazione e poi vengono fatte scontrare frontalmente. In queste condizioni ogni particella possiede rispetto al sistema del laboratorio la stessa energia cinetica K. Si può ritenere che gli urti siano completamente anelastici, così che l'energia a riposo delle particelle entrate in collisione, più tutta l'energia cinetica disponibile, venga convertita per generare nuove particelle dotate di energia cinetica. Dimostrare che l'energia E_{prod} disponibile in queste condizioni si può scrivere nella forma

$$E_{\text{prod}} = 2mc^2\left(1 + \frac{K}{mc^2}\right).$$

ove m è la massa delle particelle entrate in collisione. (b) Quanta energia si rende disponibile facendo collidere in questo modo dei protoni di energia cinetica 100 GeV? (c) Che energia devono avere i protoni per rendere disponibili 100 GeV? (*Nota*: confrontate le risposte con quelle del Problema 18, che descrive un'altra apparecchiatura di bombardamento meno efficace.)

18. (a) Un protone, di massa m, accelerato in un protosincrotrone all'energia cinetica K, colpisce un secondo protone (bersaglio) a riposo. La collisione è completamente anelastica, e così tutta l'energia a riposo dei due protoni più tutta l'energia cinetica compatibile con il principio di conservazione della quantità di moto si rende disponibile per generare nuove particelle dotandole di energia cinetica. Dimostrare che l'energia E_{prod} disponibile a questo scopo è data da

$$E_{\text{prod}} = 2mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{K}{2mc^2}\right)}.$$

(b) Quanta energia si rende disponibile quando si usano in questo modo dei protoni di energia cinetica 100 GeV? (c) Che energia devono avere i protoni per rendere disponibili 100 GeV? (*Nota*: si confronti con il Problema 17.)

 ISBN 88-408-1254-7

19. Una particella di massa M inizialmente a riposo è colpita da una particella di massa m che sopraggiunge alla velocità v_1. Dopo l'urto le due particelle si allontanano in versi opposti alla stessa velocità v_1. Ammettendo che si tratti di una collisione elastica relativistica, trovate il rapporto M/m delle masse in funzione di $\beta = v_1/c$. Dimostrate che questa espressione porta al valore non relativistico 3 per $v_1 \to 0$. (*Nota*: quantunque questo problema si possa risolvere manualmente, rappresenta un problema adatto a essere risolto con programmi di calcolo algebrico su computer, come *Maple* o *Mathematica*.)

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Un'astronave viaggia verso la stella più vicina fuori del sistema solare con accelerazione costante g misurata dagli occupanti. La nave passa la prima metà del viaggio accelerando al valore g e la seconda metà rallentando sempre al valore g. Quanto dura il viaggio di andata secondo i viaggiatori spaziali e quanto secondo gli osservatori sulla Terra?

CAPITOLO 21

TEMPERATURA

Iniziamo con questo capitolo lo studio della termologia, quella branca della fisica che tratta dei cambiamenti che subiscono le proprietà dei sistemi quando essi scambiano lavoro o calore. Le proprietà di cui parliamo sono, per sistemi come i gas confinati, la pressione, il volume, la temperatura, l'energia e, come vedremo, l'entropia, una grandezza che introdurremo al termine del libro.

Cominceremo con il parlare di temperatura, un concetto che sta alla base di tutte le leggi di termodinamica. Abbiamo già introdotto questo concetto nei capitoli precedenti, ma ora lo definiremo più dettagliatamente, come abbiamo fatto con tutte le altre grandezze finora incontrate. Presenteremo anche l'astrazione del gas perfetto, uno strumento utilissimo per analizzare e illustrare a fondo le leggi di termodinamica.

21.1 TEMPERATURA ED EQUILIBRIO TERMICO

A tutti è familiare il concetto di temperatura e noi stessi ce ne siamo liberamente serviti nei capitoli precedenti. Ora si rende necessario definire questo concetto in modo più rigoroso. Così come, definendo con rigore il concetto di forza, abbiamo superato le vaghe cognizioni del «tirare» e dello «spingere», legate all'esperienza comune, altrettanto dobbiamo fare adesso per andare oltre l'idea comune del «caldo» e del «freddo», definendo la temperatura. Prima di affrontare direttamente questa definizione occorre introdurre il concetto di *equilibrio termico*, che è un modo di stabilire quando due sistemi hanno la stessa temperatura.

La Figura 21.1a presenta due sistemi, A e B, che, tra le infinite possibilità, possono rappresentare due blocchi metallici o due gas confinati. Essi si trovano chiusi e isolati tra di loro e dal loro ambiente: ciò significa che i sistemi non possono scambiare con l'esterno né materia né energia. Per esempio, oltre ad essere rigidamente sigillati entro un contenitore, ciò che impedisce lo scambio di materia e di lavoro, essi sono avvolti da uno spesso involucro di un *isolante termico*, come il poliuretano espanso, che ostacola lo scambio di calore. Un siffatto involucro è detto *adiabatico*, termine di origine greca che allude proprio all'impossibilità di scambiare calore. Le variazioni di proprietà di un sistema non hanno quindi alcun effetto sulle proprietà dell'altro.

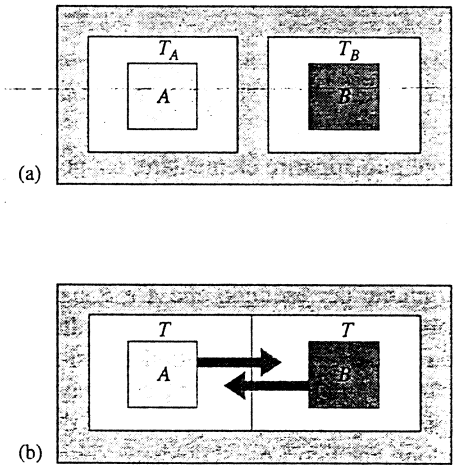


FIGURA 21.1 (a) I sistemi A e B sono separati da una parete adiabatica. I due sistemi hanno temperature diverse T_A e T_B. (b) Ora sono separati da una parete diatermica, che consente il trasferimento di energia termica tra i sistemi. Dopo un tempo adeguato essi pervengono all'equilibrio termico, per cui hanno la stessa temperatura T.

 ISBN 88-408-1254-7

Vista la disposizione in figura dei due sistemi, possiamo considerarne una variante in cui, come illustrato nella Figura 21.1b, è rimossa la parete divisoria isolante interposta tra i due sistemi e sostituita con un diaframma che permette solo lo scambio di energia e solamente in quella forma che abbiamo a suo tempo chiamato calore nel Capitolo 13.

Un esempio pratico di diaframma potrebbe essere costituito da un sottile foglio rigido di rame. Una simile parete divisoria assume l'attributo di *diatermica*, che, sempre traendo l'origine dal greco, allude alla sua capacità di condurre il calore.

Quando i due sistemi vengono messi a «contatto» termico attraverso la parete diatermica, il passaggio di calore da un sistema all'altro – qualora avvenga – provoca una modifica delle proprietà dei sue sistemi. Se questi sono due gas confinati, per esempio, potrebbe cambiare la loro pressione. I cambiamenti sono più veloci all'inizio e vanno gradatamente rallentando con il passare del tempo, finché le proprietà dei due sistemi tendono ad assumere valori costanti. Una volta raggiunta questa situazione, diciamo che i sistemi sono in *equilibrio termico*. Per provare se due sistemi sono in equilibrio termico, li si mette a contatto termico tra loro e si controlla che le loro proprietà non mutino.

Potrebbe risultare complicato, se non addirittura impossibile, mettere due sistemi a contatto termico tra loro attraverso una parete diatermica. I sistemi potrebbero essere per esempio troppo ingombranti, o troppo distanti. Cerchiamo quindi un modo di generalizzare il concetto di equilibrio termico in modo da non essere costretti a portare materialmente a contatto i sistemi indagati.

Una soluzione per condurre la prova su due sistemi separati consiste nel ricorrere all'ausilio di un terzo sistema C più manovrabile. Ponendo C prima a contatto di A e poi di B possiamo verificare se A e B sono in equilibrio termico, senza che essi vengano direttamente a contatto. Questa procedura concettuale è riassunta in un postulato che si chiama *legge zero della termodinamica*, enunciato normalmente così:

> *se ciascuno di due sistemi A e B è in equilibrio termico con un terzo sistema C, allora A e B sono in equilibrio termico tra loro.*

Questa legge può apparire elementare, ma non è così ovvia come sembra. Possono esistere altre situazioni in cui un sistema C può interagire equivalentemente con due sistemi A e B, senza che A e B presentino uguale interazione tra di loro. Immaginiamo per esempio che A e B siano due chiodi di ferro non magnetizzati e che C sia una calamita; orbene, C attrae sia A sia B, ma questi ultimi non si attraggono tra di loro.

La legge zero prese corpo negli anni '30 del secolo scorso, molto dopo che la prima e la seconda legge della termodinamica fossero state proposte, accettate e battezzate. La legge zero però costituisce il fondamento su cui si costruisce il concetto di temperatura, concetto focale nell'enunciazione sia della prima sia della seconda legge. Ecco perché fu necessario ricostruire l'ordine logico delle tre leggi, attribuendo il numero zero a quella or ora enunciata.

Temperatura

Quando due sistemi si trovano in equilibrio termico, diciamo che hanno la stessa *temperatura*. Immaginiamo per esempio due gas inizialmente a temperature, pressioni e volumi diversi. Dopo averli messi in contatto termico e aver atteso un tempo sufficiente a raggiungere l'equilibrio termico, le loro pressioni in generale saranno cambiate, o lo saranno i loro volumi; le loro temperature invece, in condizioni di equilibrio termico, saranno uguali. *È solo attraverso questo argomento basato sull'equilibrio termico che si può introdurre in fisica la nozione di temperatura.*

Quantunque il termine temperatura sia di uso quotidiano in ogni contesto, occorre precisarne il significato affinché abbia utilità in un ambito scientifico. La cognizione comune di temperatura non serve a questo scopo. Tutti noi abbiamo provato, in una fredda giornata d'inverno, a toccare simultaneamente una ringhiera di ferro e una staccionata di legno, ricavandone la netta sensazione che la ringhiera fosse molto più fredda della staccionata, anche se nella realtà avevano la stessa temperatura. In effetti quando tocchiamo un oggetto più freddo della nostra mano ciò che saggiamo non è solo la sua temperatura ma anche la capacità dell'oggetto di trasferire energia, sotto forma di calore, sottraendola alla nostra mano. In un caso del genere il tatto ci dà una valutazione soggettiva e scorretta della temperatura. Si può mettere in evidenza questo carattere soggettivo con il seguente esperimento: tenete immerse a lungo la mano sinistra in acqua calda e la mano destra in acqua fredda; poi spostatele entrambe rapidamente sotto un'acqua a temperatura intermedia: la mano sinistra percepirà una temperatura minore della destra.

Mettendo in pratica la legge zero della termodinamica, identifichiamo il sistema C, cui fa riferimento la legge, con un *termometro*. Se il termometro, posto successivamente in equilibrio termico con i sistemi A e B (pensate a due secchi d'acqua), indica lo stesso livello di temperatura per entrambi, possiamo concludere che A e B sono pure in equilibrio termico tra di loro e perciò hanno la stessa temperatura. Si noti che, per decidere se due sistemi hanno ugual temperatura, non occorre definire una scala di temperature. Se per esempio il sistema C fosse costituito da un termometro a colonna di mercurio, non occorrerebbe alcuna taratura né alcuna marcatura della colonnina. Basterebbe mettere il termometro a contatto con il sistema A, segnare il livello raggiunto dal mercurio, e controllare che il termometro, trasportato a contatto con il sistema B, si disponga allo stesso livello del mercurio.

Un altro enunciato della legge zero che fa riferimento alla temperatura è il seguente.

> *Esiste una grandezza scalare chiamata temperatura, che è una proprietà di tutti i sistemi termodinamici in equilibrio. Due sistemi sono in equilibrio termico se, e solo se, sono uguali le loro temperature.*

Questa legge definisce dunque la nozione di temperatura, grazie alla quale abbiamo tratto l'idea di costruire e utilizzare i termometri.

21.2 SCALE DI TEMPERATURE

Come si è visto nella Tabella 1.1, la temperatura (simbolo T) è una delle sette grandezze fondamentali del sistema di unità di misura SI. Come tale ci obbliga a un'attenta definizione delle procedure per misurarla e dei valori campione, che abbiano caratteristiche di agevole e universale riproducibilità. Più tardi ci soffermeremo sulle scale Celsius e Fahrenheit, che tuttavia sono soltanto scale di utilità pratica, che non attribuiscono ai valori misurati particolare significato fisico. La scala universalmente adottata in campo scientifico è la *scala Kelvin*. Essa è basata innanzitutto sull'osservazione che, sebbene non esista un limite superiore alle temperature che possono assumere le entità fisiche, *esiste* invece un limite inferiore alla scala di temperature. Questo limite è chiamato *temperatura dello zero assoluto* ed è assunto come valore zero della scala Kelvin; questa scala pertanto misura le temperature in unità *kelvin* con valori sempre positivi. Quando la temperatura compare in un'equazione di fondamentale importanza, l'appropriata unità di misura è sempre il kelvin, come definito dall'omonima scala, detta anche scala delle temperature assolute.

Per definire quanto valga 1 kelvin (simbolo K) occorre identificare uno specifico metodo di taratura attraverso un campione cui, per convenzione internazionale, si assegna una determinata temperatura. A questo scopo si è scelta la configurazione fisica in cui si trova l'acqua quando coesistono in equilibrio termico le sue tre fasi di aggregazione, solida, liquida e gassosa. Questo particolare «livello» della scala termometrica, molto vicino alla temperatura di solidificazione dell'acqua a pressione atmosferica, è chiamato *punto triplo dell'acqua*. Il punto triplo è stato preferito al punto di congelamento perché il primo ha caratteristiche di riproducibilità migliori del secondo. La Figura 21.2 riproduce una cella a punto triplo, del tipo utilizzato nei laboratori metrologici per tarare i termometri, che vengono inseriti a tale scopo nel «pozzo» centrale del dispositivo.

La temperatura in kelvin del punto triplo dell'acqua è stata fissata nel 1954 per accordo internazionale al valore

$$T_{tr} = 273{,}16\ \text{K} \qquad \text{(esatto per convenzione).} \quad (21.1)$$

Il kelvin dunque equivale a 1/(273,16) della temperatura del punto triplo dell'acqua. Naturalmente la convenzione avrebbe potuto scegliere per questa temperatura anche un altro valore, magari più semplice, come 100, ma non lo fece per preservare un'esatta equivalenza tra l'unità di misura kelvin (intesa come unità di intervallo di temperatura) e l'unità *grado* Celsius, secondo una scala già in uso da tempo e di ampia diffusione.

Si noti che, contrariamente alle usanze di un recente passato, le odierne convenzioni stabiliscono, per l'unità della scala Kelvin, il nome *kelvin* e non «grado kelvin». Per esempio diciamo che il punto di fusione del piombo è alla temperatura di 600,7 K o 600,7 kelvin.

Ci resta solo da descrivere come si effettuano le misurazioni di temperatura nella scala Kelvin. Lo faremo nel Paragrafo 21.3.

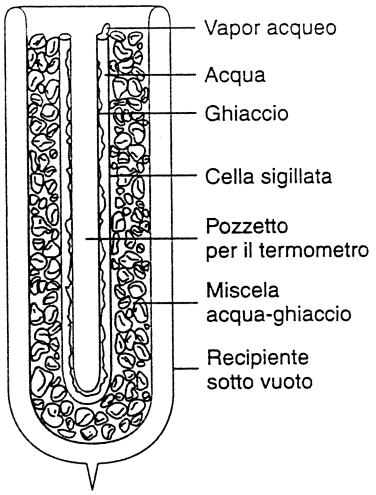


FIGURA 21.2 Una cella a punto triplo. Il tubo interno a forma di U contiene acqua pura e viene sigillato dopo aver evacuato tutta l'aria. Viene poi immerso in una miscela di acqua e ghiaccio. Il sistema si trova al punto triplo, quando il ghiaccio, l'acqua e il vapor acqueo raggiungono l'equilibrio entro la cella. Il termometro da tarare si inserisce nel pozzetto centrale.

Le scale Celsius e Fahrenheit

Quasi ovunque nel mondo la scala Celsius, detta anche centigrada, è la scala termometrica più utilizzata per tutti gli usi comuni e, in qualche caso, anche scientifici. Storicamente questa scala si basava su due punti di taratura: il punto di congelamento standard 0 °C, e il punto di ebollizione standard 100 °C dell'acqua. Questi due stati fisici dell'acqua erano usati per tarare i termometri e definire l'unità grado per semplice suddivisione dell'intervallo di temperatura tra i due punti. Il simbolo del grado (°), quando non è accompagnato dalla lettera maiuscola che specifica la scala (C per Celsius), di solito sottintende un valore della scala Celsius (da non confondere naturalmente con l'unità di misura degli angoli).

Oggigiorno, avendo a disposizione una scala definita in modo più rigoroso e fisicamente più significativo, come quella Kelvin, si preferisce riferire a quest'ultima la definizione della temperatura (T_C) in gradi Celsius, piuttosto che mantenere la definizione basata sui due punti fissi. Pertanto la relazione ufficiale tra T_C e la temperatura T misurata in kelvin è

$$T_C = T - 273{,}15\,. \quad (21.2)$$

I punti di congelamento ed ebollizione dell'acqua, alla pressione atmosferica standard di 1,01325 bar, hanno i valori sperimentali espressi in gradi Celsius, in base alla conversione data dalla (21.2), 0,00 °C e 99,975 °C rispettivamente, valori più che abbastanza prossimi, per gli usi comuni, a quelli di definizione storica della scala. La temperatura del punto triplo dell'acqua, espressa in gradi Celsius, risulta di 0,01 °C. Avevamo infatti già notato che il punto triplo dell'acqua è molto vicino al suo punto di congelamento. In base all'Equazione 21.2, infine, la temperatura della zero assoluto risulta nella scala Celsius di −273,15 °C.

 ISBN 88-408-1254-7

Anche la scala Fahrenheit, che oggi rimane di ampio uso solo in alcuni paesi di origine anglosassone, si basava su due punti fissi che, dopo varie vicissitudini storiche, finirono per essere identificati con i medesimi stati dell'acqua utilizzati per la scala Celsius, e precisamente: 32 °F per il punto di congelamento standard dell'acqua e 212 °F per il suo punto di ebollizione. La relazione tra la scala Celsius e la scala Fahrenheit è dunque oggi data da

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32. \qquad (21.3)$$

Il simbolo usato per il grado Fahrenheit è °F; per esempio 98,6 °F rappresenta una normale temperatura corporea.

Per convertire i valori di temperatura dalla scala Celsius alla scala Fahrenheit e viceversa, è utile ricordare la corrispondenza tra le due scale in due punti di facile memorizzazione, che si possono scegliere tra quanti compaiono in Figura 21.3, in cui vengono messe a confronto le due scale con la scala Kelvin. Occorre anche ricordare che l'unità grado, intesa come unità di intervallo di temperatura, se è la stessa per le scale Celsius e Kelvin, è invece diversa per la scala Fahrenheit, e precisamente una *differenza* di temperatura ΔT pari a 1 °C equivale a una *differenza* di temperatura di 1,8 °F nella scala Fahrenheit. Per esempio, se la temperatura T_1 vale 0 °C = 32 °F = 273,15 K, e la temperatura T_2 vale 5 °C = 41 °F = 278,15 K, allora si ha

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 5\ °C = 9\ °F = 5\ K, \qquad (21.4)$$

ove è importante capire che questi valori si riferiscono a un intervallo di temperatura e i segni di uguaglianza hanno senso solo se correttamente riferiti all'entità misurata, che è un ΔT e non una temperatura. Per fare un esempio, se diciamo "la temperatura in questo locale è di 32 °C; sarebbe più gradevole se fosse 6 °C in meno", il rapporto di conversione dato dalla (21.4) è applicabile soltanto al secondo di questi valori, che rappresenta appunto una variazione di temperatura.

21.3 MISURAZIONE DELLA TEMPERATURA

Affrontiamo ora l'argomento della misurazione di temperature nella scala Kelvin. Naturalmente, una volta misurata una temperatura in questa scala, sarà sempre possibile convertirne il valore nelle altre scale più comuni mediante le Equazioni 21.2 e 21.3. Abbiamo chiaramente bisogno di un termometro. Ma di che tipo?

In linea di principio qualsiasi proprietà di una sostanza che dipenda dalla temperatura, detta per questo proprietà termometrica, può servire allo scopo; ne sono esempi il volume di un liquido, come nei termometri a mercurio e ad alcool, la pressione di un gas confinato, la resistenza elettrica di un filo, la lunghezza di una striscia metallica, o il colore di un filamento da lampadina; tutte grandezze che variano al variare della temperatura e tutte utilizzate in comuni termometri. Considerato però che la dipendenza di queste grandezze dalla temperatura non è in generale espressa da una legge lineare, ne consegue che la conoscenza dettagliata di questa legge di dipendenza diventa un elemento cruciale per la taratura e per l'accuratezza del termometro basato su ognuna di queste grandezze. L'adozione di una semplice dipendenza lineare tra la grandezza misurata e la temperatura da misurare fa sì che ognuno dei citati procedimenti misuri una propria temperatura *empirica*, che sarà *diversa a seconda del tipo di termometro utilizzato*. Così facendo, anche ammesso che tutti i tipi siano concordi quando misu-

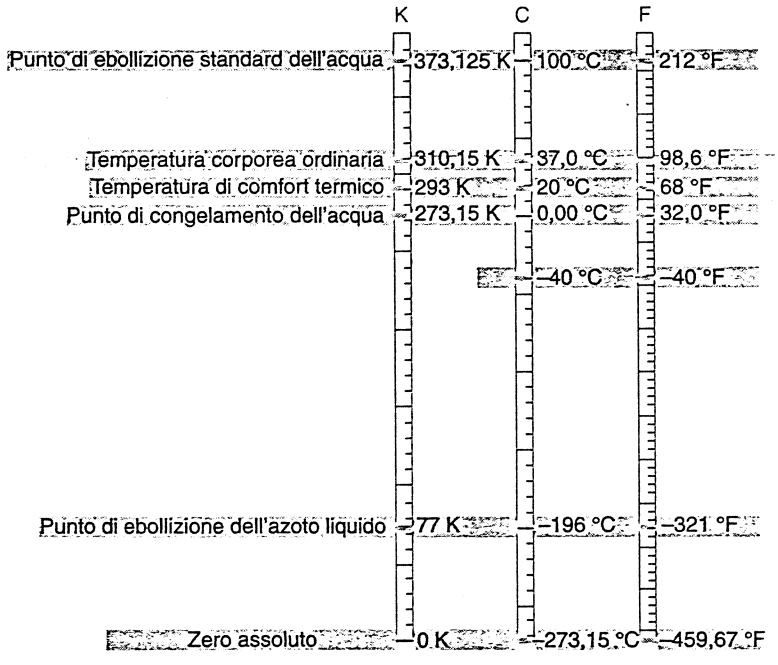


FIGURA 21.3 Confronto fra le scale termometriche Kelvin, Celsius e Fahrenheit. Le ultime due coincidono al valore –40.

rano il punto triplo dell'acqua, in generale non lo saranno più ad altre temperature, sia maggiori sia minori, come illustra il Problema svolto 21.1. Ciononostante i termometri *empirici*, se tarati opportunamente per confronto con campioni riconosciuti, possono servire utilmente come campioni secondari di misura della temperatura. E difatti quasi tutti i termometri esistenti sono campioni secondari siffatti.

Assumiamo che un termometro sia basato su una data proprietà termometrica X non specificata. La temperatura è una certa funzione di X, che ora supponiamo sia la più semplice possibile, e cioè un rapporto di proporzionalità:

$$T^* = aX \tag{21.5}$$

in cui a rappresenta una costante di opportune dimensioni. Abbiamo denotato con T^* la temperatura empirica data dalla (21.5) per distinguerla dalla reale temperatura T misurata sulla scala Kelvin. Si può dedurre il valore di a dalla misura di X al punto triplo dell'acqua cui corrisponde per definizione $T^* = 273{,}16$ K. La temperatura empirica in funzione della variabile X è dunque data da

$$T^*(X) = (273{,}16\ \text{K})\frac{X}{X_{\text{tr}}}. \tag{21.6}$$

Abbiamo però detto che l'ipotesi di linearità non è in generale rispettata per quasi tutte le proprietà termometriche in uso; ciò significa che il coefficiente a dell'Equazione 21.5 di solito non è realmente costante. Per una rigorosa misurazione della temperatura si tratta ora di individuare una proprietà termometrica X che presenti invece un perfetto rapporto di proporzionalità tra la temperatura e la grandezza X di cui è funzione.

PROBLEMA SVOLTO 21.1 La resistenza elettrica di una certa spirale di platino aumenta di un fattore 1,392 tra il punto triplo dell'acqua e il punto di ebollizione dell'acqua a pressione atmosferica. Quale temperatura empirica misurerebbe questo termometro per il punto di ebollizione standard dell'acqua, ammettendo che per esso valga la legge lineare data dall'Equazione 21.5?

Soluzione La generica proprietà termometrica X che compare nella definizione dell'Equazione 21.6 qui è costituita dalla resistenza elettrica della spirale di platino. Ci viene dato solo il rapporto tra R, resistenza corrispondente al punto di ebollizione, ed R_{tr}, resistenza corrispondente al punto triplo: $R = 1{,}392\ R_{\text{tr}}$. Sostituendo R a X nella (21.6) si ottiene

$$T^*(R) = T_{\text{tr}}\frac{R}{R_{\text{tr}}} = (273{,}16\ \text{K})(1{,}329) = 380{,}2\ \text{K}.$$

Questa è la temperatura empirica di ebollizione rilevata dal termometro a resistenza di platino. Termometri di altro tipo, sotto le stesse ipotesi semplificative, daranno in generale altri valori. Per esempio misurando la stessa temperatura con un termometro a *termocoppia*, basato sulla differenza di potenziale elettrico generata alle giunzioni di due fili metallici diversi (rame e *costantana*, una lega di rame e nichel), otterremmo la temperatura empirica di 412,5 K. Sappiamo già invece che la reale misura del punto di ebollizione standard dell'acqua nella scala Kelvin (Figura 21.3) è 373,125 K. Per quanto questi termometri empirici, opportunamente tarati, possano servire da buoni strumenti di misura pratici, è chiaro che non possiamo fare affidamento su di essi per misure rigorose e coerenti di temperature nella scala Kelvin.

Il termometro a gas a volume costante

La proprietà termometrica che si dimostra più soddisfacente per le misure di temperatura sulla scala Kelvin è la pressione p di un gas mantenuto a volume fisso. Il dispositivo che realizza in pratica un tale strumento si chiama *termometro a gas a volume costante*. La Figura 21.4 ne mostra uno schema nei suoi tratti essenziali. Un bulbo riempito di gas ha forma idonea per essere inserito in un recipiente ove è contenuta la sostanza di temperatura ignota o anche in un dispositivo contenente acqua al punto triplo. Il volume del gas nel bulbo – supponiamo che sia azoto – è mantenuto costante abbassando o sollevando il serbatoio di mercurio in modo che il livello di mercurio nel ramo di sinistra del manometro coincida sempre con un riferimento fisso.

Il procedimento di misurazione si svolge come segue:

1° passo: (a) immergiamo il bulbo in una cella a punto triplo e leggiamo la pressione p_{tr} del gas contenuto nel bulbo mediante il manometro a mercurio. Supponiamo per esempio che il valore letto sia 800 torr. (b) Immergiamo il bulbo nel bagno di liquido di cui vogliamo sapere la temperatura, e leggiamo la nuova pressione p sul manometro. Calcoliamo poi T^* secondo l'Equazione 21.6, in cui poniamo $X = p$ e $X_{\text{tr}} = p_{\text{tr}}$. Il risultato, che accettiamo al momento come provvisorio, è riportato sul grafico di Figura 21.5 in corrispondenza della pressione $p_{\text{tr}} = 800$ torr.

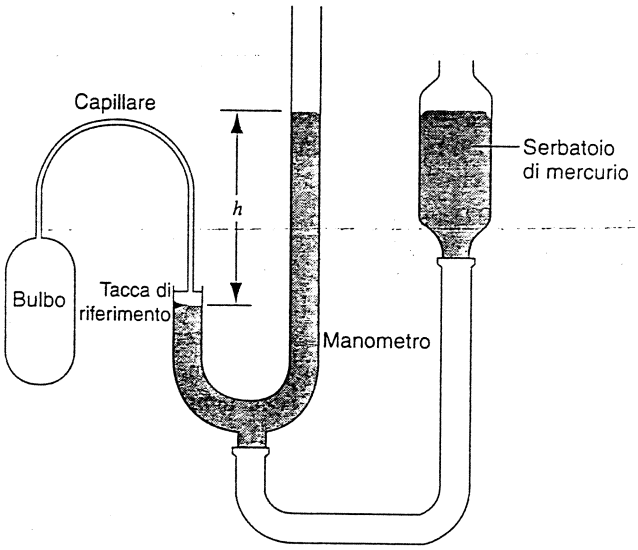


FIGURA 21.4 Termometro a gas a volume costante. Il bulbo può essere introdotto in una cella a punto triplo così come in liquidi di temperatura ignota da determinare. La differenza tra la pressione del gas nel bulbo e la pressione atmosferica è correlata all'altezza h della colonna di mercurio contenuto nel manometro. Questo è uno schema molto semplificato rispetto ai veri termometri a gas a volume costante, come quelli utilizzati dai laboratori metrologici.

 ISBN 88-408-1254-7

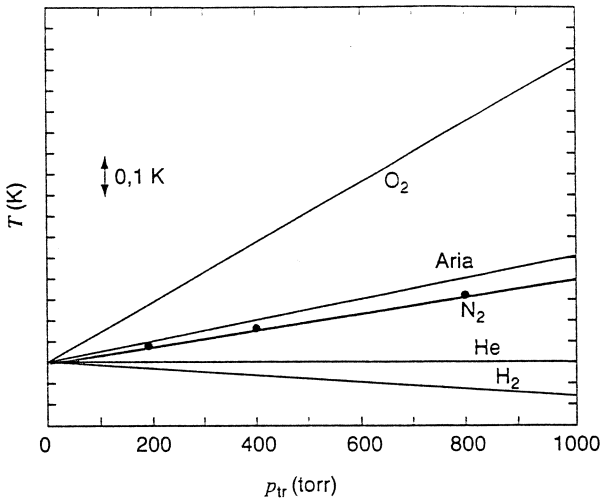


FIGURA 21.5 Man mano che la pressione dell'azoto in un termometro a gas a volume costante scende da 800 torr a 400 torr e poi a 200 torr, la temperatura del punto triplo tende a un limite corrispondente alla pressione zero. Tutti i gas tendono allo stesso limite. La scala delle ordinate si estende per circa 1 K comprendendo tutte le normali condizioni di lavoro.

2° passo: ripetiamo il procedimento con il bulbo contenente una minor quantità di gas, di modo che risulti minore anche la sua massa volumica. Quando il bulbo è nella cella a punto triplo, supponiamo di leggere una pressione $p_{tr} = 400$ torr. Quando invece lo trasportiamo nel bagno di temperatura ignota, risulta un nuovo valore p, da cui calcoliamo una nuova temperatura T^* provvisoria, che riportiamo sul grafico.

Continuiamo questa procedura con quantità di azoto sempre minori, cui corrispondono valori di p_{tr} e di T^* via via decrescenti. Dal grafico che riporta l'andamento di T^* in funzione di p_{tr}, possiamo infine estrapolare il valore di T corrispondente a $p_{tr} = 0$. I punti sperimentali del nostro esempio per l'azoto sono riportati nella Figura 21.5, ove è pure disegnata la retta che se ne trae.

Ripetendo poi tutto questo procedimento con gas diversi dall'azoto, otteniamo i risultati riassunti nella stessa Figura 21.5. In essa si nota che, al ridursi di p_{tr} (e quindi diminuendo la massa volumica del gas) le temperature del punto triplo ricavate mediante questo tipo di termometro tendono tutte a un solo valore T, indipendentemente dal gas usato. Possiamo dunque assumere T come temperatura del sistema e definire una *scala di temperatura del gas perfetto*:

$$T = (273{,}16\ \text{K}) \lim_{p_{tr} \to 0} \frac{p}{p_{tr}} \qquad (V \text{ costante}). \quad (21.7)$$

In questo contesto denotiamo *gas perfetto* o *gas ideale* un gas che fornisca il valore T della temperatura del punto triplo a qualsiasi pressione esso sia, senza cioè che si renda necessario il procedimento di estrapolazione descritto. Ne parleremo più diffusamente nel Paragrafo 21.5.

Se questa temperatura deve rappresentare davvero una quantità fisica fondamentale, bisogna assolutamente che la sua definizione sia indipendente dalle proprietà dei materiali che intervengono nel procedimento di misura. Non sarebbe ammissibile, per esempio, che una grandezza fondamentale come la temperatura dipenda da variabili quali la dilatazione termica del mercurio, la resistività elettrica del platino, o qualunque altra proprietà legata alla particolare sostanza impiegata. Ecco perché si sceglie il termometro a gas: nel suo impiego non sono coinvolte proprietà di questo tipo; con qualunque gas la risposta è sempre la stessa.

La minima temperatura misurabile in pratica con un termometro a gas è attorno a 1 K. A queste temperature si impone l'uso di elio a bassa pressione, che mantiene il suo stato gassoso a temperature più basse di qualunque altro gas.

Si può dimostrare che le temperature misurate con il termometro a gas a volume costante corrispondono alle reali temperature sulla scala Kelvin, nell'intervallo di temperature in cui è possibile far uso di tale termometro. Per temperature al di fuori di questo intervallo è giocoforza ricorrere a metodi speciali di misura. Nella Tabella 21.1 troviamo elencate le temperature di alcuni sistemi e processi.

La scala internazionale delle temperature

La misurazione precisa di una temperatura con un termometro a gas è un'operazione difficile, che richiede mesi di meticoloso lavoro di laboratorio; al suo concludersi si può dire di aver portato a termine un'impresa di rilievo internazionale. Nella pratica dunque si usa questo termometro solo per stabilire certi punti fissi della scala termometrica, a loro volta utilizzati per tarare termometri secondari di più agevole impiego.

Al fine di tarare termometri ad uso scientifico e industriale è stata messa a punto una Scala Internazionale delle Temperature, che consiste in una serie di procedure per ottenere in pratica la miglior approssimazione possibile alla scala Kelvin. Consiste di una sequenza di punti termometrici fissi e di una descrizione dei dispostivi necessari per interpolare tra i valori dei punti fissi ed estrapolare valori oltre gli estremi. La CGPM, di cui abbiamo parlato nel primo capitolo, si occupa di rivedere e di raffinare la scala ogni 20 anni circa. Nella Tabella 21.2 è riportata la scala pubblicata nel 1990.

TABELLA 21.1 Temperature di alcuni sistemi

Sistema	*Temperatura* (K)
Plasma in un reattore a fusione	10^8
Centro del Sole	10^7
Superficie del Sole	$6 \cdot 10^3$
Punto di fusione del tungsteno	$3{,}6 \cdot 10^3$
Punto di congelamento dell'acqua	$2{,}7 \cdot 10^2$
Punto di ebollizione standard di N_2	77
Punto di ebollizione standard di ^4He	4,2
Temperatura media dell'Universo	2,7
Refrigeratore a diluizione di ^3He-^4He	$5 \cdot 10^{-3}$
Smagnetizzazione adiabatica di sali paramagnetici	10^{-3}
Esperimenti sul condensato di Bose-Einstein	$2 \cdot 10^{-8}$

ISBN 88-408-1254-7

TABELLA 21.2 Punti fissi della Scala Internazionale delle Temperature, 1990[a]

Sostanza	*Stato*	*Temperatura* (K)
Elio	Punto di ebollizione	3-5[c]
Idrogeno	Punto triplo	13,8033
Idrogeno	Punto di ebollizione[b]	17,025-17,045[c]
Idrogeno	Punto di ebollizione	20,26-20,28[c]
Neon	Punto triplo	24,5561
Ossigeno	Punto triplo	54,3584
Argon	Punto triplo	83,8058
Mercurio	Punto triplo	234,3156
Acqua	Punto triplo	273,16
Gallio	Punto di fusione	302,9146
Indio	Punto di congelamento	429,7485
Stagno	Punto di congelamento	505,078
Zinco	Punto di congelamento	692,677
Alluminio	Punto di congelamento	933,473
Argento	Punto di congelamento	1234,93
Oro	Punto di congelamento	1337,33
Rame	Punto di congelamento	1357,77

[a] Vedi *The International Temperature Scale of 1990 (ITS-90)*, di H. Preston-Thomas, «Metrologia», 27 (1990), p. 3.

[b] Questo punto di ebollizione corrisponde a una pressione di $\frac{1}{3}$ atm. Tutti gli altri punti di ebollizione, fusione o congelamento sono relativi a una pressione di 1 atm.

[c] La temperatura del punto di ebollizione a volte è influenzata dalla pressione del gas che si trova sopra il liquido. La scala di temperatura dà la relazione fra T e p che possono essere usate per calcolare T a un dato valore di p.

21.4 DILATAZIONE TERMICA

Per aprire il coperchio troppo stretto di un vaso di conserva si può sovente riuscire nell'intento ponendolo sotto un getto di acqua calda. Al crescere della temperatura il coperchio metallico si espande un po' di più rispetto al vetro. La dilatazione termica non è però sempre desiderabile. Conosciamo tutti (Figura 21.6) le fessure che devono essere lasciate nei giunti delle rotaie e dei ponti per consentirne la dilatazione.

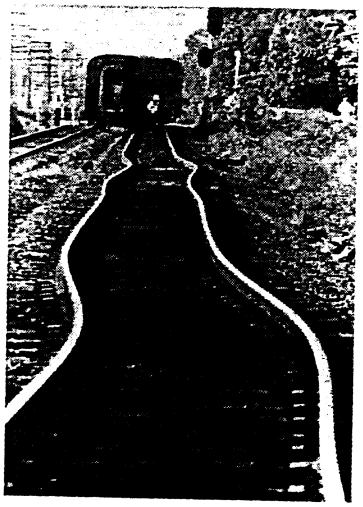


FIGURA 21.6 Rotaie piegate dalla dilatazione termica in una giornata torrida. Oggigiorno si installano le rotaie nella stagione più calda in segmenti lunghi 50 m, proprio per prevenire i fenomeni di deformazione.

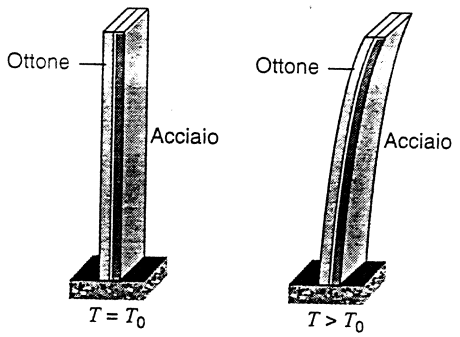


FIGURA 21.7 Un bimetallo, consistente di due strisce saldate, di ottone e di acciaio, alla temperatura T_0. Quando la temperatura è maggiore, il bimetallo s'incurva come in figura; se invece è minore, s'incurva dal lato opposto. Molti termostati sono basati su questo principio, azionando un contatto elettrico con l'estremità mobile del bimetallo.

Le tubazioni soggette a forti sbalzi di temperatura comprendono un giunto di espansione che eviti deformazioni. I materiali dentali utilizzati per le otturazioni devono possedere proprietà di dilatazione simili a quelle dello smalto dentale. Nell'industria aerea i bulloni e gli altri agganci sono raffreddati con ghiaccio secco prima dell'inserzione e quindi lasciati espandere una volta che si sono correttamente adattati. Esistono termometri e termostati che fondano il loro funzionamento sulla differenza di dilatazione tra le componenti di un *bimetallo* (vedi Figura 21.7). I termometri domestici di un tipo diffuso includono un bimetallo avvolto a spirale che si stringe e si allarga al variare della temperatura (Figura 21.8). E i comuni termometri, che presentano un liquido contenuto in un tubo di vetro, funzionano perché i liquidi come il mercurio o l'alcool si dilatano in misura differente (maggiore) rispetto al vetro che li contengono.

Per comprendere il fenomeno della dilatazione consideriamo un semplice modello della struttura cristallina di un

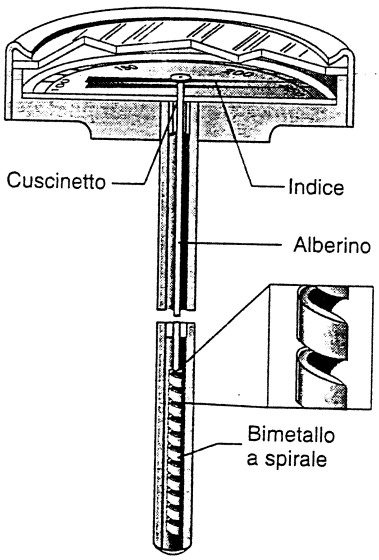


FIGURA 21.8 Un termometro operante secondo il principio del bimetallo, che è avvolto a spirale e si stringe o si allarga al variare della temperatura.

 ISBN 88-408-1254-7

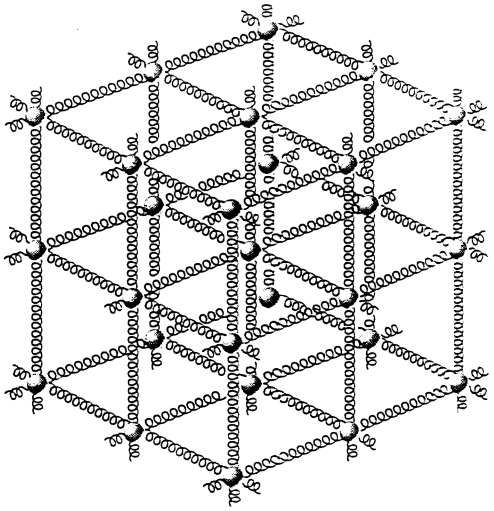


FIGURA 21.9 Un solido si comporta per certi aspetti come se fosse una schiera di atomi tenuti assieme da forze elastiche qui rappresentate con delle molle.

solido. Gli atomi sono mantenuti assieme in un reticolo regolare dalle forze elettrostatiche, in modo simile all'azione che eserciterebbero delle molle congiungenti gli atomi. Possiamo quindi immaginare il reticolo cristallino come una griglia tridimensionale di molle, quale quella rappresentata in Figura 21.9. Le molle sono piuttosto rigide e non rispondono ai requisiti delle molle ideali (Problema 1 del Capitolo 17). In un centimetro cubo ce ne sono circa 10^{23}. A qualsiasi temperatura gli atomi sono in vibrazione con un'ampiezza di circa 10^{-9} cm, circa 1/10 del diametro atomico, e una frequenza attorno a 10^{13} Hz. Aumentando la temperatura gli atomi vibrano con maggior ampiezza, ciò che accresce la distanza media tra gli atomi. Di conseguenza il fenomeno porta a un'espansione generale delle dimensioni del corpo. Per una discussione più approfondita sui fondamenti microscopici della dilatazione si rimanda alla fine di questo paragrafo.

La variazione di *qualsiasi* dimensione lineare di un solido, come la lunghezza, la larghezza o lo spessore, è chiamata *dilatazione lineare*. Se L è la lunghezza di questa dimensione lineare, la variazione di temperatura ΔT provoca una variazione di lunghezza ΔL. Per esperienza constatiamo che, quando ΔT non è troppo grande, la variazione di lunghezza ΔL è proporzionale a ΔT e alla lunghezza iniziale L:

$$\Delta L = \alpha L \, \Delta T \,, \tag{21.8}$$

ove α, chiamato *coefficiente di dilatazione lineare*, assume valori caratteristici per ogni sostanza. Riscrivendo abbiamo

$$\alpha = \frac{\Delta L / L}{\Delta T} \,, \tag{21.9}$$

di modo che α assume il significato di variazione relativa di lunghezza per unità di variazione di temperatura.

A rigore il coefficiente α varia con la temperatura (Problema 5). Questa dipendenza è però trascurabile in rapporto all'accuratezza normalmente richiesta in questo tipo di misure. Di norma è sufficiente scegliere un valore di α, da assumere come valore costante, mediato sull'intervallo di temperatura d'interesse. Nella Tabella 21.3 sono elencati alcuni valori sperimentali del coefficiente di dilatazione lineare per alcune sostanze solide comuni. Per tutte le sostanze elencate il coefficiente è positivo e pertanto si assiste a un allungamento in corrispondenza di una temperatura crescente. L'ordine di grandezza della dilatazione è di 0,1% ogni 100 K = 100° C di variazione di temperatura.

TABELLA 21.3 **Alcuni valori del coefficiente di dilatazione lineare[a]**

Sostanza	α (10^{-6} K^{-1})
Ghiaccio	51
Piombo	29
Alluminio	23
Ottone	19
Rame	17
Acciaio	11
Vetro (normale)	9
Vetro (Pyrex)	3,2
Lega Invar	0,7
Quarzo (fuso)	0,5

[a] Sono riportati i valori medi tipici per una gamma di temperature tra 0 °C e 100 °C, ad eccezione del ghiaccio per il quale la gamma va da −10 a 0 °C.

PROBLEMA SVOLTO 21.2 Una barra d'acciaio deve essere millimetrata con tacche la cui distanza dev'essere accurata entro un errore di $5 \cdot 10^{-5}$ mm a una certa temperatura. Quale massima variazione di temperatura si può tollerare?

Soluzione Dall'Equazione 21.8 abbiamo

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L} = \frac{5 \cdot 10^{-5} \text{ mm}}{(11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1})(1{,}0 \text{ mm})} = 4{,}5 \text{ °C},$$

in cui il valore di α è tratto dalla Tabella 21.3. Per mantenere l'errore entro i limiti desiderati, la temperatura non deve variare di oltre 5 °C circa.

Si noti che utilizzando una lega speciale chiamata *invar*, anziché acciaio, si può ottenere un prestazione analoga su un campo di temperature di circa 75 °C; ciò significa che, mantenendo invece l'intervallo di temperature entro 5 °C, si contiene l'errore entro $3 \cdot 10^{-6}$ mm.

Per la maggior parte delle sostanze solide, dette *isòtrope*, il coefficiente di dilatazione lineare è uguale in tutte le direzioni entro il corpo solido. La dilatazione è un po' come un ingrandimento fotografico, naturalmente in tre dimensioni. Per una piastra forata, per esempio, α è lo stesso per la lunghezza, la larghezza, lo spessore e il diametro del foro. Ogni segmento entro il corpo, anche curvilineo, subisce un ugual allungamento relativo α per ogni kelvin di variazione di temperatura. Se vi incidete sopra il vostro nome, anche queste linee sono soggette alla medesima legge di allungamento. L'analogia dell'ingrandimento fotografico è illustrata nella Figura 21.10.

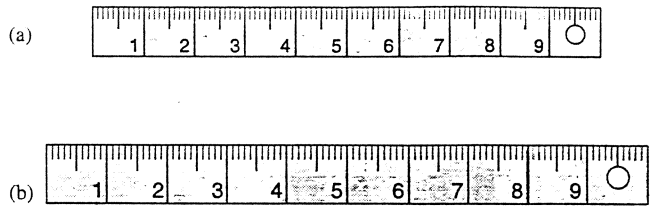


FIGURA 21.10 Un righello d'acciaio a due temperature diverse. La dilatazione si manifesta proporzionalmente in tutte le direzioni, compresa la scala, i numeri, il foro e lo spessore. Nella figura il fenomeno è esagerato per chiarezza: corrisponderebbe a un incremento di temperatura di circa 20 000 °C!)

Partendo da questi concetti non è difficile dimostrare (Esercizi 22 e 23) che in un solido isotropo, con ottima approssimazione, la variazione relativa di area A per unità di variazione di temperatura è pari a 2α, e cioè

$$\Delta A = 2\alpha A\ \Delta T. \qquad (21.10)$$

Analogamente in un solido isotropo la variazione relativa di volume V per unità di variazione di temperatura vale 3α e quindi

$$\Delta V = 3\alpha V\ \Delta T\,. \qquad (21.11)$$

Le relazioni da 21.8 a 21.10 non si applicano ai fluidi, perché, non avendo questi una forma definita, il coefficiente di dilatazione lineare per un fluido è privo di significato. Piuttosto, in analogia alla (21.11), definiamo un *coefficiente di dilatazione volumica* β tale che

$$\Delta V = \beta V\ \Delta T\,. \qquad (21.12)$$

Per i liquidi il coefficiente di dilatazione volumica è abbastanza indipendente dalla temperatura. Essi normalmente si dilatano al crescere della temperatura ($\beta > 0$). Valori tipici di β per liquidi a temperatura ambiente vanno da $200 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$ a $1000 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$, da uno a due ordini di grandezza in più rispetto al coefficiente di dilatazione volumica (3α) dei solidi. Per i gas invece il coefficiente β è fortemente dipendente dalla temperatura; per il gas perfetto si può dimostrare che $\beta = 1/T$, ove T è espresso in kelvin (Esercizio 36). Per un gas a temperatura ambiente e pressione costante, β è attorno a $3300 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$, circa un ordine di grandezza in più rispetto ai liquidi.

Il liquido più comune, l'acqua, ha un comportamento singolare, diverso dalla maggior parte dei liquidi. Nella Figura 21.11 è riportato il diagramma del volume specifico, che è l'inverso della massa volumica, dell'acqua in funzione della temperatura. Si nota che, per temperature maggiori di 4 °C, l'acqua si dilata al crescere della temperatura, sia pur con legge non lineare. Il suo coefficiente β non si può cioè considerare costante su un così ampio intervallo di temperature. Al di sotto di 4 °C però, al crescere della temperatura l'acqua si contrae, aumentando quindi la sua massa volumica. Questa è la ragione per cui i laghi gelano dapprima in superficie, mantenendo sul loro fondo l'acqua alla temperatura di 4 °C, cui corrisponde la massima massa volumica possibile. Questo comportamento non si osserva in alcun altro liquido comune.

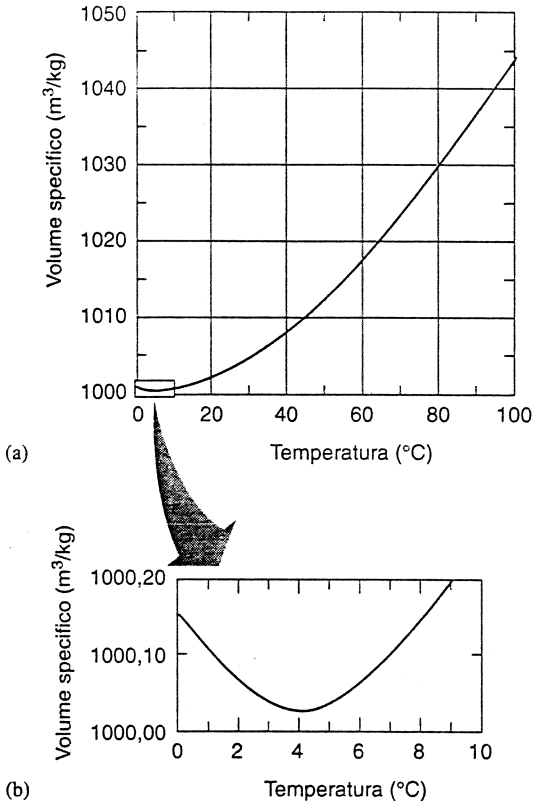


FIGURA 21.11 (a) Volume specifico (volume occupato da un'unità di massa) dell'acqua in funzione della sua temperatura. Il volume specifico è l'inverso della massa volumica (massa per unità di volume occupato). (b) Ingrandimento del tratto attorno a 4 °C, ove si mette in evidenza il valore minimo di volume specifico (o massimo di massa volumica).

Fondamenti microscopici della dilatazione termica

Su scala microscopica una dilatazione termica di un solido suggerisce l'esistenza di un fenomeno che incrementa la distanza media tra gli atomi che formano il solido. La curva che descrive l'energia potenziale tra due atomi adiacenti di un solido cristallino in funzione della loro distanza internucleare ha una forma asimmetrica, come nella Figura 21.12. Se gli atomi si avvicinano rispetto alla loro distanza d'equilibrio r_0, risentono di un'intensa azione repulsiva e la loro energia potenziale sale rapidamente ($F = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}r$); se invece gli atomi si allontanano dalla posizione d'equilibrio, aumentando così la distanza interatomica, intervengono forze attrattive, più deboli però delle precedenti, sicché l'energia potenziale cresce, ma più dolcemente. Data una certa energia vibrazionale, gli atomi oscillano tra una distanza massima e una minima, la cui media è maggiore della distanza d'equilibrio r_0 a causa della natura asimmetrica della curva che descrive l'energia potenziale. Aumentando l'energia vibrazionale, la distanza media cresce e il fenomeno è accentuato dal calo dell'energia cinetica all'aumentare della distanza, come si evince dal grafico di Figura 21.12; la particelle dunque, nei momenti in cui si trovano a distanze maggiori, si muovono più lentamente e quindi vi trascorro-

 ISBN 88-408-1254-7

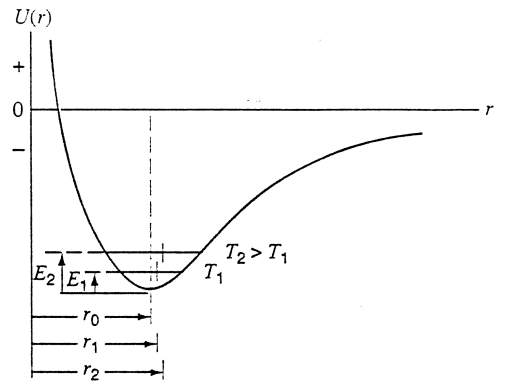


FIGURA 21.12 Curva dell'energia potenziale per due atomi adiacenti in un solido, in funzione della loro distanza internucleare. La distanza d'equilibrio è r_0. Grazie all'asimmetria della curva, la distanza media (r_1, r_2) cresce con la temperatura (T_1, T_2) e l'energia vibrazionale (E_1, E_2).

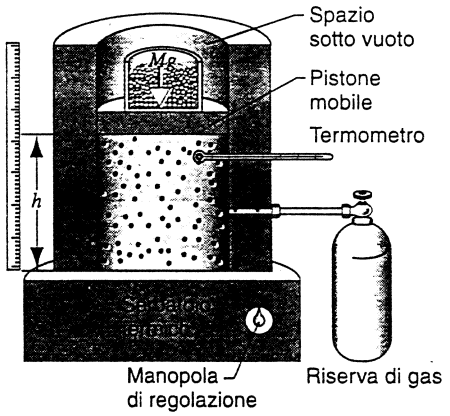


FIGURA 21.13 Il gas è confinato in un cilindro in contatto termico con un serbatoio termico a temperatura T regolabile. Un pistone esercita una forza totale Mg verso il basso sul gas, controbilanciata dalla forza di pressione verso l'alto esercitata dal gas. Il volume del gas si determina in base all'altezza h del pistone e la temperatura è misurata con un adeguato termometro. Una bombola di gas costituisce una riserva utile per variare a piacere la quantità di gas contenuta nel cilindro. Inoltre consente di cambiare il tipo di gas in prova.

no una maggior porzione del tempo. Dato che l'aumento di temperatura corrisponde a un incremento dell'energia vibrazionale, ecco che la distanza media interatomica cresce con la temperatura e il solido nel suo insieme si dilata.

Si osservi che, se la curva dell'energia potenziale fosse simmetrica attorno alla distanza d'equilibrio, la distanza media resterebbe sempre uguale a quella d'equilibrio anche quando l'ampiezza di oscillazione cresce per effetto dell'aumento di energia vibrazionale. La dilatazione termica è quindi una conseguenza dell'asimmetria che presenta la curva dell'energia potenziale caratteristica dei solidi.

Non sfugga tuttavia che il modello microscopico qui presentato è una notevole semplificazione dei complessi fenomeni che avvengono su scala atomica, fenomeni che si possono trattare più in dettaglio solo con l'ausilio della meccanica statistica e della teoria quantistica.

21.5 IL GAS PERFETTO

Dalla Figura 21.5 si trae la convinzione che i gas reali, come l'ossigeno, l'azoto e l'elio, differiscano tra di loro almeno per quel che riguarda alcune proprietà termodinamiche, come la pressione e la temperatura. Si evince però dalla medesima figura che queste discordanze vanno affievolendosi man mano che dimuisce la massa volumica dei gas, fino a convergere in un comportamento uguale per tutti. Da qui nasce l'idea del *gas perfetto*, detto anche *gas ideale*, un gas le cui proprietà rappresentino il comportamento limite dei gas reali, quando la loro massa volumica diminuisce e tende ad annullarsi.

Il gas perfetto è un'astrazione, ma è utile perché (1) tutti i gas reali, quanto minore è la loro massa volumica, tanto più approssimano le caratteristiche del gas perfetto, e perché (2) le proprietà termodinamiche del gas perfetto sono legate tra loro da relazioni particolarmente semplici. In fisica si incontrano spesso astrazioni utili e anche noi ne abbiamo fatto ampio uso, come gli urti perfettamente elastici, le superfici prive d'attrito, sbarre, molle, corde prive di massa, e via di seguito. Nella Figura 21.13 è schematizzato un apparato utile per studiare le proprietà dei gas reali aventi masse volumiche sufficientemente basse da poter estrapolare il comportamento del gas perfetto. Un cilindro isolato a contatto con un serbatoio termico (per esempio appoggiato su una piastra a temperatura controllabile) contiene una determinata quantità di gas, variabile a piacere attraverso un collegamento con un serbatoio di gas. La temperatura del gas racchiuso può anch'essa essere regolata al valore desiderato mediante il controllo del serbatoio termico. Un pistone mobile, la cui posizione determina il volume del gas, può scorrere su e giù entro il cilindro senza apprezzabile attrito. Ancorato alla testa del pistone, un apposito contenitore consente di togliere o aggiungere a piacimento pallini di piombo, variando il peso del pistone stesso e quindi la pressione cui è sottoposto il gas. In definitiva sono sotto il nostro totale controllo la pressione, il volume, la temperatura e la quantità di gas (cioè il numero n di moli o il numero N di molecole).

La sperimentazione di laboratorio con i gas reali ha messo in luce che le variabili ora citate sono in relazione tra di loro, con ottima approssimazione, secondo la seguente formula:

$$pV = NkT. \tag{21.13}$$

Qui N rappresenta il numero di molecole contenute nel volume V e k è una costante detta di *Boltzmann*. Il suo valore sperimentale, approssimato a tre cifre significative, è

$$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}. \tag{21.14}$$

La temperatura T che compare nell'Equazione 21.13 deve *sempre* essere espressa in kelvin.

La (21.13) risulta anche più utile se scritta in una forma leggermente diversa, esprimendo la quantità di gas in fun-

zione del numero di moli n anziché di molecole N. Non a caso la mole è una delle sette unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale (Paragrafo 1.5). Entrambi questi numeri caratterizzano la quantità di gas e sono correlati da

$$N = nN_A , \tag{21.15}$$

ove N_A è una costante detta *numero di Avogadro*: esso rappresenta il numero di molecole contenute in una mole di qualsiasi sostanza. Il suo valore è

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mole} . \tag{21.16}$$

Se riferita al numero di moli, l'Equazione 21.13 diventa

$$pV = nRT , \tag{21.17}$$

in cui $R = kN_A$ è anch'essa necessariamente una costante, detta *costante (molare) dei gas*. Ha il valore

$$R = 8{,}31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}. \tag{21.18}$$

Le Equazioni 21.13 e 21.17 sono forme del tutto equivalenti della *legge del gas perfetto*, o anche *equazione di stato del gas perfetto*. Essa rappresenta un'idealizzazione delle proprietà dei gas reali, ma costituisce un'ottima descrizione anche dei gas reali quando questi hanno valori modesti di pressione e massa volumica. Ecco perché le rette relative al comportamento di gas diversi che compaiono in Figura 21.5 convergono a un valore unico di temperatura man mano che la loro pressione (e quindi anche la massa volumica) diminuisce. Dall'esame di questa legge poi emerge chiarissima la necessità di mantenere costante il volume del gas (oltre che la sua quantità) nel termometro di Figura 21.4: solo così la pressione e la temperatura risultano proporzionali tra di loro.

Nel Capitolo 22 approfondiremo la legge del gas perfetto indagando la struttura molecolare del gas e le sue proprietà microscopiche. Questa importante legge può anche essere «suddivisa» in numerosi corollari, mettendo in evidenza solo due grandezze variabili mentre si mantengono costanti le altre; le enunciazioni che ne derivano hanno anche un'importanza storica, da cui si delinea il percorso di pensiero che ha portato alla formulazione finale della legge. Eccone tre esempi:

1. Il ricercatore italiano Amedeo Avogadro (1776-1856), da cui prende il nome l'omonima costante, nel 1811 scoprì che, sotto le medesime condizioni di pressione e temperatura, uguali volumi di gas diversi contengono lo stesso numero di molecole ($V \propto N$ per p e T costanti). All'epoca l'esistenza di atomi e molecole era in piena discussione e questa scoperta, nota come *legge di Avogadro*, portò argomenti a supporto della teoria atomica.

2. Lo sperimentatore, irlandese di nascita e inglese di adozione, Robert Boyle (1627-1691) scoprì, contemporaneamente e indipendentemente dal francese Edme Mariotte (1620-1684), che la pressione esercitata da una certa quantità di gas a temperatura costante è inversamente proporzionale al volume occupato ($p \propto V^{-1}$ per T ed N costanti). Questa osservazione costituisce la *legge di Boyle-Mariotte*.

3. Se si tiene costante la pressione di una certa quantità di gas, l'esperienza dimostra che il volume del gas è direttamente proporzionale alla sua temperatura ($V \propto T$ per p ed N costanti). Questi esperimenti furono condotti dai francesi J.A.C. Charles (1746-1823) prima e Joseph Louis Gay-Lussac (1778-1850) in seguito, e il risultato è noto come *legge di Charles* o *legge di Gay-Lussac*.

PROBLEMA SVOLTO 21.3 Un cilindro chiuso da un pistone (Figura 21.13) contiene ossigeno alla temperatura di 20 °C con pressione di 15 bar in un volume di 22 litri. Ora si abbassa il pistone finché il volume è ridotto a 16 L, e simultaneamente si alza la temperatura al valore di 25 °C. Assumendo che il comportamento del gas in queste condizioni possa considerarsi ideale, qual è la pressione finale del gas?

Soluzione Rimanendo invariata la quantità di gas, dall'Equazione 21.13 abbiamo

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f} ,$$

ovvero

$$p_f = p_i \left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{V_i}{V_f}\right) .$$

Non dimentichiamo di *esprimere T in unità di temperatura assoluta* (kelvin):

$$p_f = (15 \text{ bar}) \left[\frac{(273 + 25\ ^\circ\text{C})\ \text{K}}{(273 + 20\ ^\circ\text{C})\ \text{K}}\right] \left(\frac{22 \text{ L}}{16 \text{ L}}\right) = 21 \text{ bar} .$$

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

21.1 Temperatura ed equilibrio termico

1. Consideriamo quattro oggetti, A, B, C e D. Si constata che A e B sono in equilibrio termico e che lo sono pure C e D. Tuttavia A e C *non* sono in equilibrio termico. Si può concludere che

(A) B e D sono in equilibrio termico.

(B) non si può decidere se B e D siano in equilibrio termico o meno.

(C) B e D non sono in equilibrio termico.

(D) la legge zero della termodinamica qui non si applica perché i sistemi sono più di tre.

2. Il corpo A è inizialmente in equilibrio termico con B e non lo è con C, ma questi ultimi vengono messi a contatto termico e raggiungono rapidamente l'equilibrio. Dopo di che

(A) B e C sono pure in equilibrio termico.

(B) non si può decidere se B e C siano in equilibrio termico o meno.

(C) B e C non sono in equilibrio termico.

21.2 Scale di temperatura

3. A che temperatura coincidono i valori sulle scale Celsius e Fahrenheit?

 ISBN 88-408-1254-7

(A) −40 °F. (B) 0 °F. (C) 32 °F.
(D) 40 °F. (E) 104 °F.

4. A che temperatura la scala Fahrenheit assume lo stesso valore della scala Kelvin?
(A) −100 °F. (B) 273 °F.
(C) 574 °F. (D) 844 °F.

21.3 Misurazione della temperatura

21.4 Dilatazione termica

5. Un'ampia lastra metallica piana a temperatura T_0 presenta un foro. Dopo aver scaldato la lastra a temperatura $T > T_0$, l'area del foro è
(A) cresciuta. (B) diminuita.
(C) rimasta invariata.
(D) forse variata, in dipendenza della forma del foro.

6. Perché un bicchiere di vetro spesso si rompe, se vi versate acqua bollente?
(A) Perché l'acqua si espande imprimendo una intensa forza di «esplosione» al vetro.
(B) Perché l'acqua, toccando il vetro, si contrae e applica al vetro un'intensa forza di «risucchio».
(C) Perché il vetro si riscalda e si dilata, rompendo così le molecole.
(D) Perché la parte interna del vetro si dilata più rapidamente di quella esterna spezzando il vetro.

7. Un termometro a mercurio è in equilibrio termico alla temperatura di 20 °C con l'acqua di una bacinella. Poi viene immerso in acqua avente la temperatura di 30 °C. La colonnina di mercurio
(A) salirà a 30 °C e si fermerà.
(B) prima salirà poco oltre i 30 °C, poi scenderà a 30 °C e qui si fermerà.
(C) prima scenderà poco sotto i 20 °C, poi risalirà fino a 30 °C.
(D) prima scenderà sotto i 20 °C, poi salirà oltre i 30 °C, infine tornerà a fermarsi a 30 °C.

8. Una lamina di rame è saldata su una lamina di alluminio. Scaldando i due metalli, cosa succede?
(A) La doppia lamina si dilata senza piegarsi.
(B) La doppia lamina si dilata e si piega dalla parte del rame.
(C) La doppia lamina si dilata e si piega dalla parte dell'alluminio.

9. L'escursione termica diurna del ponte Golden Gate a San Francisco (USA) può raggiungere i 20 °C. Il ponte è lungo circa 2 km ed è essenzialmente fatto di acciaio.
(a) Di quanto si allunga il ponte con un tal incremento di temperatura?
(A) 4,4 cm. (B) 44 cm.
(C) 4,4 m. (D) 44 m.
(*b*) Se non fossero stati previsti dei giunti di espansione, con un tal incremento di temperatura di quanto si inarcherebbe il ponte al centro, in senso verticale?
(A) 2,1 cm. (B) 21 cm.
(C) 2,1 m. (D) 21 m.

21.5 Il gas perfetto

10. A parità di pressione e temperatura, ha una massa volumica maggiore l'aria secca o l'aria umida?
(A) L'aria secca. (B) L'aria umida.
(C) Sono uguali.

11. Quale dei seguenti gas presenta la maggior densità di particelle (particelle per unità di volume)?
(A) 0,8 L di azoto alla temperatura di 350 K e alla pressione di 100 kPa.
(B) 1,0 L di idrogeno alla temperatura di 350 K e alla pressione di 150 kPa.
(C) 1,5 L di ossigeno alla temperatura di 300 K e alla pressione di 80 kPa.
(D) 2,0 L di elio alla temperatura di 300 K e alla pressione di 120 kPa.

12. In quattro recipienti sono contenuti 0,5 mol ciascuno dei seguenti gas. Quale ha temperatura maggiore?
(A) 8,0 L di elio alla pressione di 120 kPa.
(B) 6,0 L di neon alla pressione di 160 kPa.
(C) 4,0 L di argon alla pressione di 250 kPa.
(D) 3,0 L di cripton alla pressione di 300 kPa.

QUESITI

1. La temperatura è un concetto macroscopico o microscopico?
2. Si può definire la temperatura come una grandezza derivata, cioè in funzione di lunghezza, massa e tempo? Si pensi per esempio al pendolo.
3. Lo zero assoluto è un minimo di temperatura. Esiste un massimo di temperatura?
4. Un oggetto può essere più caldo di un altro quando entrambi si trovano alla stessa temperatura?
5. Le nasse per aragoste sono conformate in modo che l'aragosta riesca ad entrare facilmente, ma non altrettanto facilmente riesca ad uscire. Si può realizzare una parete termica capace di condurre il calore in un senso solo? Si dia una spiegazione della risposta.
6. Ci sono altre grandezze fisiche, oltre alla temperatura, che tendono a diventare uguali quando due sistemi sono messi a contatto?
7. Un pezzo di ghiaccio e un termometro (più caldo) sono sospesi in un contenitore isolato e sotto vuoto, e disposti in modo che non entrino a contatto. Perché, per un certo periodo di tempo, la temperatura del termometro diminuisce?
8. Quali sono i requisiti che rendono una certa proprietà termometrica adatta a essere utilizzata per un termometro?
9. Quali difficoltà si incontrerebbero definendo la temperatura in funzione della massa volumica dell'acqua?
10. Sia p_3 la pressione nel bulbo di un termometro a gas a volume costante quando si trova in equilibrio al punto triplo dell'acqua, alla temperatura di 273,16 K, e sia p la pressione del bulbo in equilibrio a temperatura ambiente. Si abbiano tre termometri di questo tipo. In A il gas è ossigeno e $p_3 = 20$ cm Hg; anche in B il gas è ossigeno, ma $p_3 = 40$ cm Hg; in C il gas è idrogeno e $p_3 = 30$ cm Hg. I

valori di p misurati dai tre termometri sono p_A, p_B, e p_C. (a) Con ognuno dei tre termometri si ottiene un valore approssimato della temperatura ambiente T mediante le tre formule seguenti:

$$T_A = (273{,}16\ \text{K})(p_A/20\ \text{cm Hg}),$$
$$T_B = (273{,}16\ \text{K})(p_B/40\ \text{cm Hg}),$$
$$T_C = (273{,}16\ \text{K})(p_C/30\ \text{cm Hg}).$$

Si stabilisca se ciascuna delle seguenti proposizioni è vera o falsa: (1) con il metodo descritto tutti e tre i termometri danno lo stesso valore di T; (2) i due termometri a ossigeno danno risultati in accordo tra loro, ma non con il termometro a idrogeno; (3) ognuno dei tre termometri dà un diverso valore di T. (b) Nel caso che i tre termometri siano in disaccordo, si descriva come operare per far sì che tutti e tre segnino la medesima temperatura T.

11. Discutendo i possibili effetti di riscaldamento associati all'aumento di concentrazione dell'anidride carbonica in atmosfera (effetto serra), il direttore di una nota rivista economica scrisse: "Le regioni polari potrebbero divenire tre volte più calde di adesso . . ." Che cosa pensate che volesse dire e che cosa invece ha letteralmente detto?

12. Per quanto sembri impossibile raggiungere sperimentalmente la temperatura dello zero assoluto, si sono ottenute in laboratorio temperature di 0,00000002 K. Perché i fisici gareggiano per raggiungere temperature sempre più basse? Ai fini pratici non bastano quelle raggiunte?

13. Si pongano all'aperto, quando la temperatura è «sotto zero», due secchi d'acqua scoperti, uno con acqua calda, l'altro con acqua fredda. Comincerà probabilmente a gelare prima il secchio di acqua calda. Perché? Cosa succede coprendo i secchi?

14. Al vuoto si può attribuire una temperatura?

15. La nostra «sensazione di temperatura» ha un innato senso di direzione? Vale a dire: la sensazione di «più caldo» significa necessariamente «temperatura maggiore», o si tratta solo di una convenzione? Celsius, detto per inciso, scelse originariamente la temperatura di 0 °C per il punto di ebollizione dell'acqua e la temperatura di 100 °C per il punto di fusione del ghiaccio.

16. Negli Stati Uniti sulla confezione di molte medicine c'è il suggerimento di "conservare al di sotto di 86 °F". Perché 86 °F? (*Suggerimento*: si converta in gradi Celsius.)

17. Come si può misurare la temperatura (a) del Sole, (b) dell'alta atmosfera terrestre, (c) di un insetto, (d) della Luna, (e) del fondo del mare e (f) dell'elio liquido?

18. Si considerino le scale Celsius, Kelvin e Fahrenheit. Si può affermare che una di queste è una «scala naturale»? Se ne discuta.

19. Nel termometro a gas a volume costante, è preferibile usare certi gas piuttosto di altri? Quali sono le proprietà che deve avere un gas per questo scopo?

20. Quali sono le controindicazioni all'impiego di un termometro di vetro contenente acqua come sostanza termometrica? Un termometro di vetro contenente mercurio è meglio? Se sì, spiegare perché.

21. Quali sono le dimensioni del coefficiente di dilatazione lineare α? Il suo valore dipende dalle unità di misura utilizzate? Misurando le variazioni di temperatura in gradi Fahrenheit (invece che Celsius), varia anche il valore numerico di α? In caso affermativo, come? In caso negativo, lo si dimostri.

22. Una sfera metallica passa dentro un anello di metallo. Se, tuttavia, si scalda la sfera, essa si incastra nell'anello. Cosa succederebbe se, invece della sfera, si scaldasse l'anello?

23. Nei comuni termostati l'elemento sensibile è costituito da un bimetallo, fatto con due strisce metalliche unite insieme. Se ne spieghi il funzionamento.

24. Due strisce metalliche, una di ferro e l'altra di zinco, sono saldate in modo da formare una barretta rettilinea che s'incurva all'aumentare della temperatura. Perché il ferro si trova dalla parte concava?

25. Si spieghi perché, attaccando alla parte inferiore di un pendolo dei tubi verticali contenenti mercurio, se ne può mantenere costante il periodo di oscillazione al variare della temperatura.

26. Perché un camino dovrebbe essere sempre svincolato dalla struttura muraria della casa?

27. L'acqua quando gela si dilata. Si può definire un coefficiente di dilatazione per il processo di congelamento?

28. Si spieghi perché la dilatazione apparente di un liquido in un bulbo di vetro non fornisce il coefficiente di dilatazione reale del liquido stesso.

29. La variazione del volume di un corpo al modificarsi della temperatura dipende, a parità di condizioni, dalla presenza di cavità nel suo interno?

30. Perché la determinazione precisa del coefficiente di dilatazione di un liquido è molto più difficile di quella di un solido?

31. Un modello molto semplice di solido considera gli atomi come punti materiali in moto armonico semplice attorno alla loro posizione di equilibrio reticolare. Quale sarebbe il coefficiente di dilatazione di un tale reticolo?

32. Si spieghi perché, a grande profondità, la temperatura dei mari è costante durante tutto l'anno e pari a circa 4 °C.

33. Si spieghi perché i laghi congelano a cominciare dalla superficie.

34. Per qual motivo i tubi dell'acqua si rompono nei periodi di gelo?

35. Sapendo che il ghiaccio galleggia sull'acqua, come prevedete che sia la dipendenza dalla pressione del suo punto di fusione?

36. Due locali identici comunicano attraverso una porta aperta, ma le loro temperature vengono mantenute diverse. In quale dei due c'è più aria?

37. Un sacchetto pieno d'aria pesa tanto quanto il medesimo sacchetto sgonfiato e appiattito. Come mai?

38. Perché il fumo di una candela sale anziché scendere?

39. Se, mediante l'impianto di riscaldamento, si fa variare sensibilmente la temperatura interna di una casa, il volume e la pressione dell'aria contenuta cambiano? In caso negativo, si tratta di una violazione alla legge del gas perfetto?

 ISBN 88-408-1254-7

ESERCIZI

21.1 Temperatura ed equilibrio termico

21.2 Scale di temperatura

1. Il grado della scala Fahrenheit è ottenuto dividendo la differenza tra il punto di ebollizione e il punto di fusione dell'acqua in 180 parti uguali, un numero divisibile per 2, 3, 4, 5, 6 e 9. Immaginate una scala R in cui lo zero coincide con lo zero assoluto e l'intervallo di un grado è pari a quello della scala Fahrenheit. (a) Qual è la formula per convertirne i valori di temperatura nella scala Celsius? (b) Quali sono le temperature dei punti di fusione ed ebollizione dell'acqua in questa scala R, chiamata scala Rankine?
2. Lo zero assoluto vale $-273{,}15\,°C$. Quanto vale nella scala Fahrenheit?
3. Si ripeta l'esercizio 1 con una nuova scala Q, con medesimo valore 0, ma con l'unità grado di intervallo di temperatura pari a quello della scala Celsius. (a) Qual è la formula per convertirne i valori di temperatura nella scala Celsius? (b) Quali sono le temperature dei punti di fusione ed ebollizione dell'acqua in questa scala Q? (c) Conoscete già questa scala. Di quale si tratta?
4. (a) La temperatura sulla superficie del Sole è di circa 6000 K. Si esprima il suo valore in gradi Fahrenheit. (b) Si esprima in gradi Fahrenheit la temperatura normale del corpo umano di 37 °C. (c) La temperatura più bassa ufficialmente registrata negli USA è stata di $-70\,°F$ al *Roger Pass* nello stato del Montana. Si esprima questo valore in gradi Celsius. (d) Si esprima in gradi Fahrenheit il punto di ebollizione standard dell'ossigeno ($-183\,°C$). (e) A quale temperatura, in gradi Fahrenheit, una stanza può considerarsi eccessivamente calda?
5. Vi preoccupate se il medico vi misura una temperatura corporea di 310 K? Si giustifichi la risposta.
6. Quale temperatura espressa in gradi Fahrenheit è uguale (a) al doppio della temperatura espressa in gradi Celsius e (b) alla metà del temperatura espressa in gradi Celsius?

21.3 Misurazione della temperatura

7. Un *termometro a resistenza* è uno strumento nel quale la resistenza elettrica varia con la temperatura. Siamo liberi di supporre che in un termometro di questo tipo la temperatura misurata in kelvin (K) sia direttamente proporzionale alla resistenza R misurata in ohm (Ω). Ponendo in acqua al punto triplo (273,16 K) il bulbo di un certo termometro a resistenza, si misura 90,35 Ω. Che temperatura indicherà il termometro se il suo bulbo viene posto in un ambiente ove la resistenza vale 96,28 Ω?
8. Una termocoppia è formata da due metalli saldati tra loro in due punti, in modo che, quando le due giunzioni si trovano a temperatura diversa, si stabilisca tra di esse una piccola differenza di potenziale elettrico. In una data termocoppia di ferro-costantana, con una giunzione mantenuta alla temperatura di 0 °C, il segnale di risposta varia linearmente da 0 a 28,0 mV mentre la temperatura dell'altra giunzione passa da 0 a 510 °C. Si determini la temperatura della seconda giunzione quando la termocoppia fa registrare 10,2 mV.
9. Il fattore di amplificazione o *guadagno* di un amplificatore a transistor può dipendere dalla temperatura. Il guadagno di un certo amplificatore a temperatura ambiente (20,0 °C) vale 30,0 mentre diventa 35,2 alla temperatura di 55,0 °C. Considerando lineare la dipendenza dalla temperatura in questo intervallo limitato, quale sarebbe il suo valore a 28,0 °C?
10. Sappiamo che la temperatura del punto di ebollizione dell'acqua è di 373,15 K. Se si mantiene costante il volume del gas, qual è il valore limite del rapporto fra la pressione del gas a questa temperatura e quella al punto triplo dell'acqua?
11. Due termometri a gas a volume costante vengono posti assieme in un bagno di acqua alla temperatura di ebollizione. Uno è pieno di azoto e l'altro di elio. Ambedue contengono gas in quantità tale che $p_{tr} = 100$ cm Hg. Qual è la differenza di pressione tra i due termometri? Per quale dei due la pressione è maggiore? Si veda la Figura 21.5.

21.4 Dilatazione termica

12. Un pennone alzabandiera di alluminio è alto 33 m. Se la temperatura aumenta di 15 °C, di quanto cresce la sua altezza?
13. Lo specchio di vetro *Pyrex* del telescopio Hale all'osservatorio di Monte Palomar ha un diametro di 508 cm. Le temperature estreme storicamente registrate a Monte Palomar sono $-10\,°C$ e 50 °C. Si determini la variazione massima del diametro dello specchio.
14. Un piatto di alluminio ha un foro circolare di diametro pari a 2,725 cm alla temperatura di 12 °C. Quanto misurerà il diametro del foro se la temperatura sale a 140 °C?
15. Si esegue l'installazione di un binario ferroviario quando la temperatura esterna è di $-5{,}0\,°C$. La lunghezza nominale di un segmento di rotaia è di 12,0 m. Che spazio bisogna lasciare tra due segmenti adiacenti affinché non avvenga compressione quando la temperatura sale a 42 °C?
16. Una vetrata misura 200 cm · 300 cm alla temperatura di 10 °C. Di quanto aumenta la sua area se la temperatura sale a 40 °C? Si supponga che il vetro sia libero di dilatarsi.
17. Lo spigolo di un cubo di ottone misura 33,2 cm alla temperatura di 20,0 °C. Si determini (a) l'incremento di superficie e (b) l'incremento di volume quando viene riscaldato alla temperatura di 75,0 °C.
18. Calcolare il volume di una palla di piombo alla temperatura di $-12\,°C$ sapendo che vale 530 cm^3 quando la temperatura è di $+160\,°C$.
19. (a) Dal grafico di Figura 21.11 si stimi il coefficiente di dilatazione volumica per l'acqua a temperatura ambiente (20 °C). (b) E quant'è alla temperatura di 4 °C?
20. Subito dopo la formazione della Terra, il calore liberato dal decadimento degli elementi radioattivi provocò un aumento della temperatura media interna da 300 K a 3000 K, valore di equilibrio mantenuto ancora oggi. Se si suppone un coefficiente di dilatazione volumica di $3{,}2 \cdot 10^{-5}\ K^{-1}$, di quanto è aumentato il raggio della Terra dalla sua formazione?
21. Misurando a temperatura ambiente di 20 °C la lunghezza di una sbarra con un righello di acciaio, si trova un valore di 20,05 cm. La sbarra e il righello vengono poi collocati in un forno alla temperatura di 270 °C; a questa temperatura la sbarra, misurata con il righello, risulta lunga 20,11 cm. Si calcoli il coefficiente di dilatazione termica del materiale di cui è fatta la sbarra.

ISBN 88-408-1254-7

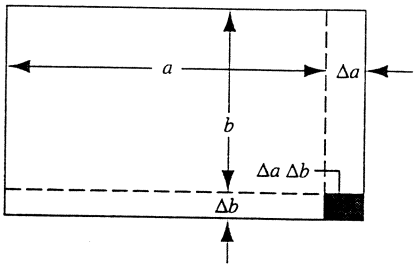


FIGURA 21.14 Esercizio 22.

22. L'area A di una lastra rettangolare vale ab. Il suo coefficiente di dilatazione lineare è α. A seguito di un aumento di temperatura ΔT, il lato a aumenta di Δa e il lato b di Δb. Si dimostri che, in accordo con l'Equazione 21.14 e trascurando (Figura 21.14) la piccola quantità $\Delta a\,\Delta b/ab$ risulta $\Delta A = 2\alpha A\,\Delta T$.

23. Si dimostri che, trascurando i termini infinitesimi, la variazione di volume di un solido dovuta alla variazione di temperatura ΔT è data da $\Delta V = 3\alpha V\,\Delta T$, dove α è il coefficiente di dilatazione lineare. Si veda l'Equazione 21.11.

24. Aumentando di 100 °C la temperatura di una moneta di rame da un cent (che però non è rame puro), il suo diametro aumenta dello 0,18 %. Si determini l'aumento percentuale (a) dell'area di una sua faccia, (b) del suo spessore, (c) del suo volume e (d) della sua massa. (e) Si calcoli il coefficiente di dilatazione lineare.

25. La massa volumica ρ è la massa divisa per il volume. Se il volume V dipende dalla temperatura, lo stesso vale per ρ. Si dimostri che la variazione di massa volumica $\Delta\rho$ per una variazione di temperatura ΔT è data da

$$\Delta\rho = -\beta\rho\,\Delta T,$$

dove β è il coefficiente di dilatazione volumica. Si giustifichi la presenza del segno meno.

26. Quando la temperatura di un cilindro di metallo aumenta da 60 °C a 100 °C, la sua lunghezza aumenta dello 0,092 %. (a) Si calcoli la variazione percentuale di massa volumica. (b) Si identifichi il metallo.

27. Una sbarra d'acciaio ha un diametro di 3,000 cm alla temperatura di 25,00 °C. Alla stessa temperatura un anello di ottone ha un diametro interno di 2,992 cm. A quale minima temperatura comune la sbarra potrà scorrere nell'anello?

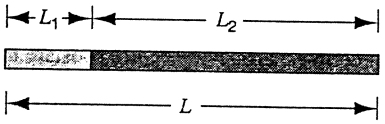


FIGURA 21.15 Esercizio 28.

28. Una sbarra di lunghezza $L = L_1 + L_2$ è composta da due tratti diversi saldati assieme e fatti dei materiali 1 e 2 (Figura 21.15). (a) Si dimostri che il coefficiente di dilatazione lineare complessivo α di questa sbarra è dato da $\alpha = (\alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2)/L$. (b) Si calcoli la lunghezza dei due tratti che compongono una sbarra di acciaio e ottone, di lunghezza totale pari a 52,4 cm per ottenere un coefficiente di dilatazione lineare complessivo uguale a $13 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$.

29. Alla temperatura di 100 °C una bottiglia di vetro è completamente riempita con 891 g di mercurio. Qual è la massa di mercurio necessaria a riempire la bottiglia alla temperatura di −35 °C? Il coefficiente di dilatazione lineare del vetro è $9.0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$: il coefficiente di dilatazione volumica del mercurio è $1.8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$.

30. (a) Si dimostri che la variazione del momento di inerzia I di un solido in funzione della temperatura è data da $\Delta I = 2\alpha I\,\Delta T$. (b) Una barra di ottone sottile e omogenea ruota liberamente con velocità angolare di 230 giri/s attorno a un asse perpendicolare passante per il suo centro. Essa viene riscaldata, senza contatto meccanico, finché la sua temperatura aumenta di 170 °C. Si calcoli la variazione della velocità angolare.

31. Un cilindro, sorretto da cuscinetti privi di attrito, è posto in rotazione attorno al suo asse. Il cilindro viene poi riscaldato, senza contatto meccanico, finché il suo raggio aumenta dello 0,18 %. Qual è la variazione percentuale (a) del momento angolare, (b) della velocità angolare e (c) dell'energia rotazionale?

32. (a) Si dimostri che la variazione del periodo P di un pendolo in funzione della temperatura è data da $\Delta P = \frac{1}{2}\alpha P\,\Delta T$. (b) Un orologio con un pendolo di *invar* ha un periodo di 0,500 s ed è calibrato per funzionare alla temperatura di 20 °C. Dopo 30 giorni, quale correzione va apportata all'orologio, se funziona in un clima la cui temperatura media è di 30 °C?

33. Un orologio con pendolo di ottone è calibrato per funzionare alla temperatura di 20 °C. Se l'orologio viene fatto funzionare alla temperatura di 0 °C, quale sarà l'errore, in s/h?

34. Una coppa di alluminio, di capacità pari a 110 cm^3 è riempita di glicerina, alla temperatura di 22 °C. Trabocherà la glicerina se la temperatura sale a 28 °C? Se sì, quanta? Il coefficiente di dilatazione volumica della glicerina è $5{,}1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$.

35. Un lungo tubo verticale di vetro è riempito fino a metà di un liquido alla temperatura di 20,0 °C. Di quanto cambierà l'altezza della colonna di liquido quando il tubo si riscalda alla temperatura di 33,0 °C? Si assuma $\alpha_{\text{vetro}} = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ e $\beta_{\text{liquido}} = 4{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.

21.5 Il gas perfetto

36. (a) Partendo dalla legge del gas perfetto e dalla definizione del coefficiente di dilatazione volumica (Equazione 21.12), si dimostri che, per un gas perfetto a pressione costante, $\beta = 1/T$. (b) In che unità di misura va espresso T? Esprimendo T in questa unità di misura, β può risultare in $^\circ\mathrm{C}^{-1}$? (c) Si stimi il valore di β per un gas ideale a temperatura ambiente.

37. (a) Calcolare il volume occupato da 1,00 mol di un gas ideale a condizioni standard (pressione di 1,00 atm e temperatura di 0 °C. (b) Si dimostri che il *numero di Loschmidt*, cioè il numero di molecole contenute in 1 cm^3, in condizioni standard vale $2{,}68 \cdot 10^{-19}$.

38. Il «vuoto» più spinto che si riesca a ottenere in laboratorio corrisponde a una pressione di circa 10^{-13} Pa. Qual è in questo caso il numero di Loschmidt (Esercizio 37)?

39. Un gas perfetto alla temperatura di 12,0 °C e alla pressione di 108 kPa occupa un volume di 2,47 m^3. (a) Di quante moli è composto? (b) Elevando la pressione a 316 kPa e la temperatura a 31,0 °C, quale sarà il volume occupato?

40. Un volume di ossigeno pari a 1130 cm^3 alla temperatura

 ISBN 88-408-1254-7

di 42,0 °C e alla pressione di 101 kPa si espande finché il suo volume diviene di 1530 cm^3 e la sua pressione di 106 kPa. Calcolare (a) il numero di moli presenti e (b) la temperatura finale.

41. Trovandovi in Canada ed esaminando un pneumatico d'automobile, misurate un volume di 988 in^3 e una pressione relativa di 24,2 lb/in^2, quando la temperatura è di −27,3 °F. Calcolate la pressione relativa qualora il volume diventasse di 1020 in^3 e la temperatura crescesse di −46,1 °F. (*Suggerimento*: salvo che per la temperatura, non occorre convertire le unità britanniche in unità SI. Perché? Occorre però sapere che $p_{atm} = 14{,}7\ lb/in^2$.)

42. Stimare la massa dell'atmosfera, esprimendola come frazione della massa terrestre. Si ricorda che la pressione atmosferica a livello del mare è di circa 1 bar.

43. In fondo a un lago profondo 41,5 m alla temperatura di 3,80 °C si trova una bolla d'aria di volume 19,4 cm^3. La bolla sale in superficie dove la temperatura è di 22,6 °C. Ipotizzando che la temperatura della bolla mentre sale rimanga sempre in equilibrio termico, calcolare il suo volume quando arriva in superficie.

44. Un tubo di lunghezza 25.0 m, chiuso a una estremità e aperto all'altra, contiene aria a pressione atmosferica. Il tubo viene spinto verticalmente nell'acqua di un lago fino a che l'acqua sale a metà altezza del tubo (Figura 21.16). Qual è la profondità h dell'estremità inferiore del tubo? Si supponga la temperatura costante e uniforme.

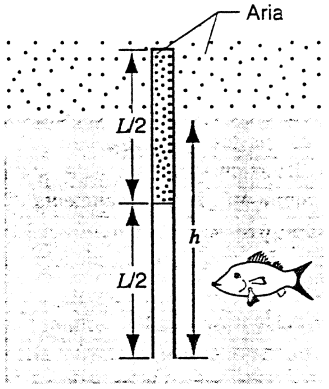


FIGURA 21.16 Esercizio 44.

PROBLEMI

1. L'esperienza di tutti i giorni ci insegna che gli oggetti caldi o freddi tendono a uniformarsi alla temperatura dell'ambiente che li circonda. Se la differenza di temperatura ΔT tra un oggetto e l'ambiente circostante non è troppo grande, la rapidità di raffreddamento o di riscaldamento dell'oggetto è approssimativamente proporzionale a ΔT, cioè

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -A(\Delta T),$$

dove A è una costante. Il segno meno sta ad indicare che ΔT diminuisce col tempo se positiva, mentre aumenta se negativa. Questa equazione è nota come *legge del raffreddamento di Newton*. (a) Da quali fattori dipende A? Quali sono le sue dimensioni? (b) Si dimostri che, se all'istante $t = 0$ la differenza di temperatura vale ΔT_0, a un istante generico t si ha

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-At}.$$

2. L'impianto di riscaldamento di una casa si rompe al mattino presto. La temperatura esterna è di −7,0 °C. Di conseguenza la temperatura interna scende in 45 min da 22 °C a 18 °C. In quanto tempo la temperatura interna scenderà di altri 4,0 °C? Si supponga che la temperatura esterna rimanga costante e che si possa applicare la legge del raffreddamento di Newton. Vedere il problema precedente.

3. Dimostrare che, rimanendo costante la pressione, a una variazione di temperatura ΔT del liquido contenuto in un barometro corrisponde una variazione di altezza h pari a $\Delta h = \beta h\, \Delta T$, ove β è il coefficiente di dilatazione volumica del liquido. Trascurate la dilatazione del vetro.

4. Come mostrato in Figura 21.17, un termometro è costituito da due bulbi contenenti un gas e posti in un bagno d'acqua ciascuno. Un manometro a mercurio misura la differenza di pressione tra i due bulbi. Il volume di gas nei due bulbi viene mantenuto costante grazie a serbatoi non mostrati nella figura. La differenza di pressione è nulla quando i due bagni sono al punto triplo dell'acqua, mentre vale 120 mm Hg quando uno è al punto triplo e l'altro al punto di ebollizione dell'acqua. Quando invece uno dei due bagni è al punto triplo e l'altro a una temperatura incognita, la differenza di pressione è di 90,0 mmHg. Si determini questa temperatura.

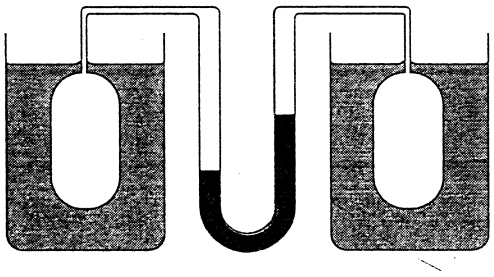


FIGURA 21.17 Problema 4.

5. Si dimostri che, se α dipende dalla temperatura T, l'equazione che esprime la dilatazione lineare si scrive come

$$L \approx L_0 \left[1 + \int_{T_0}^{T} \alpha(T)\, dT\right],$$

dove L_0 è la lunghezza alla temperatura di riferimento T_0.

6. Per un certo esperimento occorre spostare una piccola sorgente radioattiva a velocità molto ridotte. A questo scopo la sorgente viene fissata a un estremo di una sbarra di alluminio, che viene riscaldata poi al centro in modo controllato. Se la porzione riscaldata della sbarra è di 1,8 cm (Figura 21.18), con quale ritmo costante deve variare la tempe-

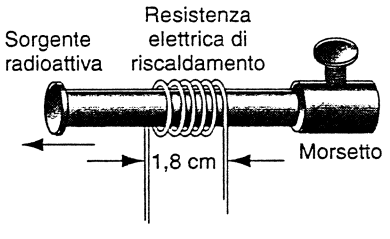


FIGURA 21.18 Problema 6.

ratura della sbarra per far muovere la sorgente con una velocità di 96 nm/s?

7. (a) Si dimostri che, se a una data temperatura iniziale le lunghezze di due sbarre di materiale diverso sono inversamente proporzionali ai rispettivi coefficienti di dilatazione lineare, la differenza di lunghezza tra le due sbarre resterà costante a qualsiasi temperatura. (b) Quanto devono essere le lunghezze di una sbarra di acciaio e una di ottone alla temperatura di 0 °C per poter differire di 0,30 m a qualunque temperatura?

8. Come mostra la Figura 21.19, per effetto di un aumento di temperatura di 32 °C, una sbarra crepata al centro si solleva. Se la distanza tra gli estremi $L_0 = 3{,}77$ m è fissa e il coefficiente di dilatazione lineare è $25 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$, si calcoli l'altezza x di cui si è sollevato il centro della sbarra.

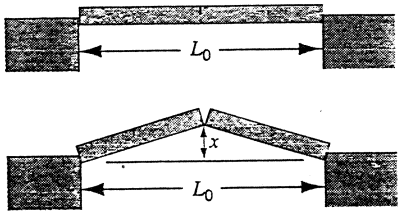


FIGURA 21.19 Problema 8.

9. La Figura 21.20 mostra l'andamento del coefficiente di dilatazione volumica dell'acqua tra 4 °C e 20 °C. La massa volumica dell'acqua a 4 °C è 1000 kg/m^3. Si calcoli la sua massa volumica a 20 °C.

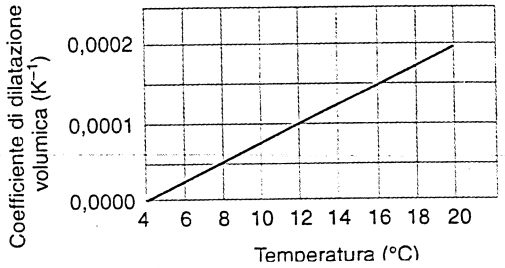


FIGURA 21.20 Problema 9.

10. Si consideri un termometro a mercurio. Si supponga che la sezione A del capillare sia costante e sia V il volume del bulbo di mercurio alla temperatura di 0,00 °C. Si supponga inoltre che a questa temperatura il mercurio riempia esattamente il bulbo. Si dimostri che la lunghezza L della colonna di mercurio nel capillare alla temperatura T espressa in °C è data da

$$L = \frac{V}{A}(\beta - 3\alpha)T\,,$$

che è proporzionale alla temperatura. Qui β rappresenta il coefficiente di dilatazione volumica del mercurio e α il coefficiente di dilatazione lineare del vetro.

11. Tre sbarre, una di alluminio, una di *invar* e una di acciaio, di uguale lunghezza e temperatura di 20 °C, formano un triangolo equilatero con i vertici incernierati. A quale temperatura l'angolo opposto alla sbarra di invar risulterà di 59,95°? Per le formule trigonometriche necessarie si consulti l'Appendice I.

12. Un tubo di vetro quasi completamente pieno di mercurio funge da peso di un pendolo costituito da un'asta di ferro lunga 100 cm. A che altezza deve essere regolato il livello del mercurio nel tubo affinché il centro di massa del pendolo non si innalzi o si abbassi con la temperatura? La sezione del tubo è uguale a quella dell'asta di ferro. Si trascuri la massa del vetro. Il ferro ha massa volumica di $7{,}87 \cdot 10^3$ kg/m^3 e un coefficiente di dilatazione lineare di $12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$. Il coefficiente di dilatazione volumica del mercurio è $18 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.)

13. Un cubo di alluminio con spigolo di 20 cm galleggia sul mercurio. Di quanto affonderà ulteriormente se la temperatura sale da 270 K a 320 K? Il coefficiente di dilatazione volumica del mercurio è $1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}$.

14. Il filo *Dumet* è stato progettato per consentire la dilatazione del vetro nelle lampadine. Il filo consiste di un'anima in nichel-acciaio (*invar*) circondata da un rivestimento di rame. I diametri dell'anima e del rivestimento sono tali che il filo presenta caratteristiche di dilatazione analoghe a quelle del vetro. (a) Dimostrare che il rapporto tra il raggio dell'anima di invar e il raggio del rivestimento in rame dev'essere

$$\frac{r_{\text{invar}}}{r_{\text{rame}}} = \sqrt{\frac{\alpha_{\text{rame}} - \alpha_{\text{vetro}}}{\alpha_{\text{rame}} - \alpha_{\text{invar}}}}$$

(b) Che tipici valori assume questo rapporto?

15. La distanza tra i piloni della campata principale del ponte Golden Gate di San Francisco è di 1280 m (Figura 21.21). Alla temperatura di 10 °C l'avvallamento verticale del cavo è di 143 m. Si assuma $\alpha = 6{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ e, per un aumento di temperatura da −12,2 °C a −32,2 °C, si calcolino: (a) la variazione di lunghezza del cavo e (b) la variazione dell'avvallamento del cavo. Si supponga che le torri restino parallele e si approssimi con una parabola la curva sottesa dal cavo.

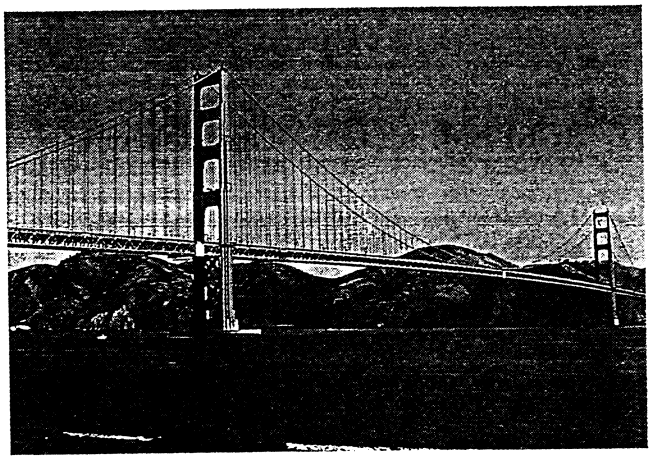


FIGURA 21.21 Problema 15.

16. Un pallone aerostatico per impiego meteorologico viene gonfiato, senza che raggiunga la massima tensione, con elio alla pressione di 1,01 bar (= 76,0 cmHg) e alla temperatura di 22,0 °C. Il volume del gas è di 3,47 m^3. All'altitudine di 6,50 km, la pressione atmosferica è scesa a 36,0 cmHg e l'elio si è espanso gonfiando il pallone. A questa altitudine la temperatura del gas vale −48,0 °C. Qual è il volume del pallone in questa situazione?

 ISBN 88-408-1254-7

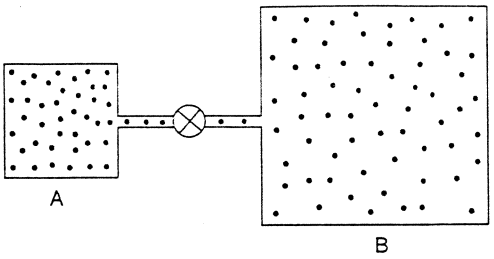


FIGURA 21.22 Problema 18.

17. Due recipienti contenenti gas cripton, di volumi 1,22 L e 3,18 L, sono collegati da un tubo sottile. Inizialmente sono alla stessa temperatura di 16,0 °C e alla stessa pressione di 1,45 bar. Si scalda il contenitore di volume maggiore fino alla temperatura di 108 °C e si mantiene costante la temperatura dell'altro (16,0 °C). Si calcoli la pressione finale.

18. Un recipiente A contiene gas ideale alla pressione di $5{,}0 \cdot 10^5$ Pa e alla temperatura di 300 K. È collegato mediante un tubicino a un recipiente B, che ha volume quadruplo di A (Figura 21.22). Il recipiente B contiene la stessa quantità di gas ideale alla pressione di $1{,}0 \cdot 10^5$ Pa e alla temperatura di 400 K. A un certo momento si apre la valvola che collega i due recipienti ottenendo l'equilibrio del sistema con la stessa pressione nei due recipienti e la temperatura di ciascun recipiente mantenuta uguale al valore iniziale. Qual è la pressione finale nel sistema?

19. La variazione di pressione nell'atmosfera terrestre, supponendo che questa sia a temperatura uniforme, è data da $p = p_0 e^{-Mgy/(RT)}$, dove M è la massa molare dell'aria (Paragrafo 15.3). Si dimostri che il numero di molecole nell'unità di volume è $n_V = n_{V_0} e^{-Mgy/(RT)}$.

20. Una bolla di sapone di raggio $r_0 = 2{,}0$ mm galleggia liberamente all'interno di un vaso sotto vuoto. Inizialmente la pressione interna era di 1,0 bar. Poi si è azionata la pompa a vuoto e la pressione nel vaso è scesa lentamente a pressione bassissima, mentre la temperatura rimaneva costante. Qual è il raggio della bolla quando la pressione è praticamente a zero? La tensione superficiale dell'acqua saponata è $\gamma = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ N/m. (Si veda anche il Problema al calcolatore 1.)

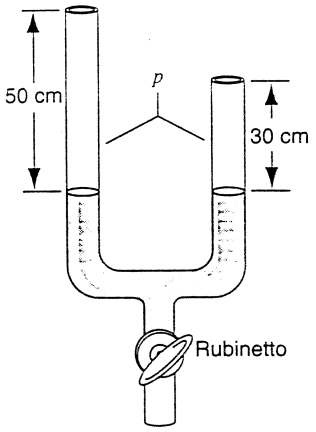


FIGURA 21.23 Problema 21.

21. Un manometro a mercurio formato da due rami di diversa lunghezza ma ugual sezione viene sigillato con la stessa pressione p nei due rami, come schematizzato in Figura 21.23. Dal rubinetto sul fondo del manometro si lasciano entrare altri 10,0 cm^3 di mercurio mantenendo la temperatura costante. Nel ramo di sinistra il mercurio sale di 6,00 cm e in quello di destra di 4,00 cm. Si determini la pressione p.

22. La «tensione superficiale» di un pallone sferico è proporzionale al raggio del pallone. Il pallone è riempito con 10,0 L di gas ideale inizialmente alla temperatura di 80 °C e alla pressione di 103 kPa. Il gas poi si raffredda fino a 20 °C. Si calcoli il nuovo volume del pallone assumendo che la pressione esterna rimanga costante al valore di 101 kPa.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Una bolla di sapone avente una tensione superficiale di $2{,}50 \cdot 10^{-2}$ N/m ha raggio $r_0 = 2{,}0$ mm quando la pressione esterna è di 1,0 bar. (a) Calcolare numericamente il raggio della bolla quando la pressione esterna cade al valore di 0,5 bar. (b) Ripetere per una pressione esterna di 2,0 bar.

2. In fondo alla *Fossa delle Marianne*, alla profondità di 11,5 km sotto il livello dell'oceano Pacifico, si riempie un palloncino di azoto (supposto ideale). Il palloncino ha inizialmente raggio di 1,0 mm, è privo di massa, è infinitamente estensibile senza tensione superficiale, ma mantiene sempre una forma sferica. La temperatura rimane costantemente di 4 °C. Il palloncino comincia a salire e a dilatarsi, ma nel suo moto è ostacolato da una forza di resistenza del mezzo di intensità f proporzionale alla sua velocità v e al suo raggio r secondo la relazione

$$f = 6\pi\eta r v,$$

ove $\eta = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ Pa · s è la viscosità dell'acqua. (a) Calcolare la spinta di Archimede iniziale del palloncino. (b) Quale sarà la dimensione del palloncino una volta arrivato in superficie? (c) Calcolare numericamente il tempo che impiega per raggiungere la superficie.

CAPITOLO 22

PROPRIETÀ MOLECOLARI DEI GAS

Nel Paragrafo 21.5 abbiamo introdotto la legge del gas perfetto, espressa in funzione di volume, pressione e temperatura. Lo studio dei gas attraverso queste grandezze misurabili di larga scala costituisce un approccio macroscopico dell'argomento. La legge del gas perfetto non ci dà informazioni sull'intima natura corpuscolare che costituisce i gas stessi e, dopotutto, anche l'intera materia, identificabile come un insieme di atomi e molecole.

È questo un approccio microscopico, *che affronteremo proprio in questo capitolo per rendere conto delle proprietà macroscopiche. Ci proponiamo di seguire il moto di una molecola rappresentativa per dedurre il comportamento medio di tutte le molecole che formano un sistema. Essendo il numero di molecole normalmente molto grande, l'analisi statistica consente di ottenere valori medi ben definiti. Questo approccio assume la denominazione di* teoria cinetica dei gas, *laddove il termine «cinetica» allude alla presenza di particelle in moto.*

22.1 NATURA ATOMICA DELLA MATERIA

Oggigiorno nessuna persona ben informata dubita più che la materia sia costituita di atomi. Può sorprendere l'idea che una vasta accettazione dell'esistenza degli atomi in campo scientifico non sia avvenuta prima dell'inizio del '900. Molte erano state le speculazioni di pensiero attorno alla natura della materia, a cominciare dagli antichi Greci, ma nessuna teoria offriva conferme sperimentali sufficienti a escludere le idee concorrenti. Oggi ormai l'ipotesi di esistenza dell'atomo è talmente radicata nelle nostre conoscenze della natura che ci circonda, che il premio Nobel Richard Feynman così si è espresso: "Qualora tutto il castello di conoscenze scientifiche dovesse un giorno essere smontato, mi auguro che almeno il concetto di atomo venga risparmiato."

Lo studio dei fondamenti moderni della teoria atomica trova il precursore nel botanico di origine scozzese Robert Brown, che nel 1823 osservò attraverso il suo microscopio i granelli di polline sospesi in acqua in un incessante movimento di tipo casuale. Oggi questo fenomeno è chiamato *moto browniano*. Le osservazioni di Brown proseguirono con altri tipi di particelle, come polveri fini di carbone, vetro, rocce e molti minerali, per arrivare sempre alla medesima conclusione: una sorta di «danza» anima queste microparticelle, ciò che sembra essere – e in effetti è – una proprietà fondamentale della materia.

Nel 1905 Einstein (all'oscuro dei lavori di Brown) previde per via teorica un effetto del genere e la presentò come una possibile prova a conferma del fatto che i fluidi in cui avvengono questi moti sono fatti di atomi. Una particella sospesa nel liquido viene bombardata da tutte le parti dagli atomi che costituiscono il fluido, i quali sono in costante agitazione, chiamata *agitazione termica*. Sia N il numero medio di urti tra atomi e particelle che avvengono su un lato della particella nel breve intervallo di tempo Δt. Uno stesso numero di urti, *in media*, avverrà sul lato opposto della particella. Data la casualità degli eventi però, da ciascun lato della particella si assisterà a delle fluttuazioni attorno a questo valor medio. Per ogni determinato intervallo Δt si avrà pertanto un leggero sbilancio tra il numero di urti agenti su un lato e quello degli urti agenti sul lato opposto. Il fenomeno avviene nelle tre dimensioni e di conseguenza la particella bombardata, che tipicamente ha una massa di alcuni ordini di grandezza maggiore di quella degli atomi, vaga in quel modo erratico che caratterizza il moto browniano.

 ISBN 88-408-1254-7

Qualche anno dopo l'analisi di Einstein del moto browniano, il chimico-fisico francese J.B. Perrin (1870-1942) eseguì misure quantitative del fenomeno. La Figura 22.1 mostra un esempio di questi risultati. Raffigura il moto browniano di una minuscola particella di resina sospesa in acqua, osservata attraverso il microscopio. Perrin rilevò le coordinate x e y a intervalli di 30 s, segnando su un grafico le successive posizioni della particella, poi congiunte con i segmenti colorati che appaiono in Figura. Questi segmenti non rappresentano l'effettivo percorso della particella tra un punto e l'altro; tale percorso non è affatto rettilineo, ma è caratterizzato da un analogo andamento erratico di dimensioni minori.

I valori che si possono ricavare da un diagramma di *cammino casuale* come quello di Figura 22.1 sono le variazioni di coordinate Δx e Δy tra due posizioni successive della particella. Dato che Δx e Δy possono essere entrambi sia positivi sia negativi, il loro valor medio su un gran numero di osservazioni finisce per essere zero. I parametri statistici significativi sono perciò i *quadrati* di questi valori, $(\Delta x)^2$ and $(\Delta y)^2$, i quali, essendo intrinsecamente positivi, quando vengono mediati danno luogo a un valor medio non nullo.

Einstein ricavò la seguente espressione per il valor medio $\overline{(\Delta x)^2}$ relativo a una particella sferica di raggio a sospesa in un gas:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{RT}{3\pi\eta a N_A}\Delta t. \qquad (22.1)$$

Qui η rappresenta una misura della viscosità del gas (Paragrafo 16.6), che compare perché la particella, sottoposta a una «spinta» impressa dallo sbilancio d'urto, incontra ostacoli nel moto da parte delle forze viscose del gas. La costante R che compare nell'Equazione 22.1 è la costante molare dei gas, mentre T è la temperatura (in kelvin) ed N_A rappresenta il numero di Avogadro.

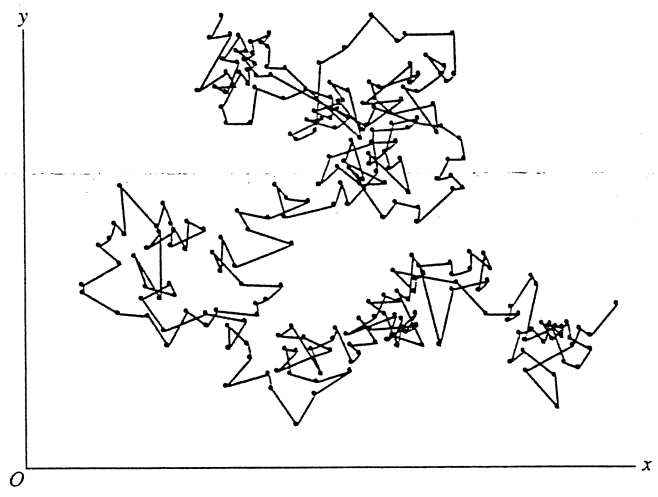


FIGURA 22.1 Moto browniano di una microparticella di resina di raggio attorno a 3 μm. I punti, congiunti con segmenti, rappresentano la posizione della particella a intervalli di 30 s. L'itinerario della particella è un esempio di *frattale*, una curva di cui ogni elemento rassomiglia all'intera curva stessa. Per esempio, se prendiamo un segmento relativo all'intervallo di 30 s e lo espandiamo evidenziando le posizioni intermedie ogni 0,1 s, il grafico di questo segmento risulta molto simile all'intera Figura qui riprodotta.

Se il numero di Avogadro fosse molto più grande del suo valore effettivo, l'estensione del moto browniano si ridurrebbe perché le probabilità d'urto da entrambe le parti della particella approssimerebbero meglio l'uguaglianza. Viceversa succederebbe nel caso che N_A fosse più piccolo della realtà. Una misura sperimentale di $\overline{(\Delta x)^2}$ permette quindi il calcolo di N_A attraverso l'Equazione 22.1. Perrin, dopo molte prove del tipo illustrato in Figura 22.1, trovò il valore $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ molecole/mole, in buon accordo con i risultati ottenuti con altri metodi. Fu per questo lavoro, così importante per dimostrare la natura atomica della materia, che Perrin vinse il premio Nobel in fisica nel 1926. Nel suo libro *Atomi* del 1913 egli scrisse entusiasticamente a proposito dei moti browniani: "La teoria atomica ha trionfato. I suoi avversari, tuttora numerosi, finalmente battuti, ora mettono da parte uno dopo l'altro la loro diffidenza."

Proprietà del gas perfetto

Nel Paragrafo 21.5 abbiamo esposto le caratteristiche macroscopiche del gas perfetto e abbiamo mostrato come esse siano legate dall'equazione di stato del gas perfetto ($pV = nRT$). Ora che abbiamo esposto i motivi per cui riponiamo fiducia nella descrizione atomica della materia, esaminiamo più in dettaglio le proprietà microscopiche del gas perfetto. Nella parte rimanente di questo capitolo eleveremo il gas perfetto al rango di sistema preferito per le nostre discussioni di termodinamica.

1. *Il gas perfetto consiste di corpuscoli materiali, in moto casuale e soggetti alle leggi del moto di Newton.* Si può trattare sia di atomi singoli, sia di gruppi di atomi. In entrambi i casi li designeremo come «molecole». Sono animate da moto in qualsiasi direzione e velocità comprese in un ampio intervallo.

2. *Il numero totale di molecole è «grande».* Quando una molecola rimbalza sulla parete del recipiente, le conferisce quantità di moto. Il numero di molecole è così grande che possiamo considerare costante la quantità di moto totale conferita nell'unità di tempo.

3. *La somma dei volumi occupati da tutte le molecole è trascurabile in confronto al volume occupato dal gas.* Sappiamo che un gas, quando condensa nella fase liquida, riduce enormemente il suo volume. Ciò dimostra che la nostra assunzione è ragionevole.

4. *Se escludiamo gli effetti degli urti, sia tra molecole sia con le pareti, le molecole non sono soggette ad alcun'altra forza.* Ciò significa che una molecola, tra un urto e l'altro, segue traiettorie rettilinee a velocità uniforme.

5. *Gli urti sono* (a) *perfettamente elastici e* (b) *di durata trascurabile.* Per la condizione (a) occorre che l'energia cinetica totale delle molecole sia costante; per la condizione (b) occorre che l'energia potenziale totale delle molecole (che interviene solo nella fase d'urto) sia trascurabile.

Nel modello di gas ideale assumiamo che tutte le molecole di un dato gas siano identiche e quindi abbiano ugual massa. La massa di una molecola è data dalla somma delle masse degli atomi che la compongono. Le masse atomiche, normalmente indicate sulle tavole periodiche degli elementi, sono riportate (in unità u) nell'Appendice D. Per esempio, la massa di una molecola di biossido di zolfo (SO_2) è data dalla somma delle masse dello zolfo e dell'ossigeno:

$$m = m(\mathrm{S}) + 2m(\mathrm{O}) = 32{,}1\ \mathrm{u} + 2(16{,}0\ \mathrm{u}) = 64{,}1\ \mathrm{u}\,.$$

Anziché riferirsi al numero di molecole N è spesso più conveniente per i gas descriverne la quantità in numero di moli n; l'Equazione 21.15 precisa il legame esistente tra le due quantità: $N = nN_A$, ove N_A è il numero di Avogadro e vale $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ molecole/mole.

La massa di una mole di qualsiasi sostanza, chiamata *massa molare* N, è semplicemente la massa di una molecola moltiplicata per il numero di molecole contenute nella mole, cioè

$$M = mN_A\,. \tag{22.2}$$

La massa molare, misurata in grammi, è numericamente uguale alla massa molecolare espressa in u. Quindi la massa molare dello SO_2 è $M = 64{,}1$ g/mol $= 0{,}0641$ kg/mol.

Dedicheremo questo capitolo a spiegare come un insieme di molecole che si comporta conformemente alle leggi di Newton ci offra la possibilità di correlare le sue proprietà termodinamiche macroscopiche alle sue proprietà microscopiche, come la velocità molecolare media o il cammino medio percorso da una molecola tra due urti successivi.

22.2 DESCRIZIONE MOLECOLARE DELLA PRESSIONE

In questo paragrafo associamo il concetto di pressione esercitata da un gas sulle pareti del recipiente che lo confina con il concetto di bombardamento di queste pareti da parte delle molecole del gas, un modo di vedere il fenomeno che fu proposto forse per la prima volta dallo scienziato svizzero Daniel Bernoulli (1700-1782) nel 1738. Il sistema che consideriamo è costituito da un gas perfetto, e ci ripromettiamo di esprimere la pressione ch'esso esercita in funzione delle proprietà molecolari che lo caratterizzano.

Prendiamo N molecole di un gas ideale racchiuso in un recipiente cubico di spigolo L, come in Figura 22.2. Chiamiamo A_1 e A_2 le due facce normali all'asse x, ciascuna delle quali ha area L^2. Seguiamo il moto di una singola molecola di massa m, dotata di velocità v, che possiamo scomporre nelle sue tre componenti v_x, v_y e v_z. Quando questa molecola colpisce la parete A_1, rimbalza invertendo la componente v_x, perché la collisione è elastica per ipotesi; le altre due componenti rimangono immutate e quindi la variazione di quantità di moto della molecola è associata alla sola componente lungo l'asse x:

$$\Delta p_x = -mv_x - (mv_x) = -2mv_x\,. \tag{22.3}$$

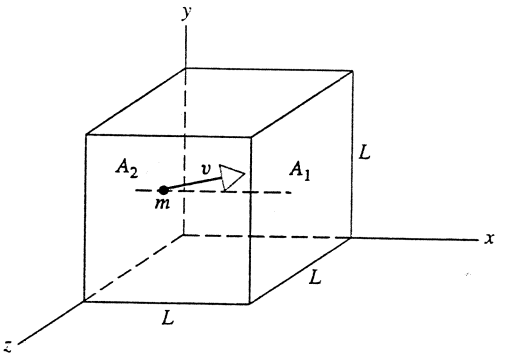


FIGURA 22.2 Un recipiente cubico di spigolo L contiene un gas ideale. È mostrata una molecola del gas animata da velocità v diretta verso la faccia A_1 del cubo.

Dato che la quantità di moto totale si deve conservare, la parete A_1 si vede impartita una quantità di moto $+2mv_x$.

Supponiamo che questa molecola, proseguendo il suo cammino dopo il rimbalzo, raggiunga la parete A_2 senza imbattersi in altre collisioni. Il tempo richiesto per l'attraversamento del recipiente è L/v_x. Se in questo tragitto la molecola dovesse incontrare una parete diversa, vi rimbalzerebbe senza mutare la componente x della velocità né il tempo di percorrenza. Nell'urto contro A_2, di nuovo inverte la componente x della velocità e torna ad A_1. Assumendo che ancora il tragitto avvenga senza altri urti, il percorso di andata e ritorno ad A_1 richiede il tempo $2L/v_x$, cioè l'intervallo di tempo tra due urti successivi sulla parete A_1. La forza impulsiva media esercitata da questa molecola sulla parete A_1 è data dalla quantità di moto trasferitale divisa per il tempo che intercorre tra due urti successivi:

$$F_x = \frac{2mv_x}{2L/v_x} = \frac{mv_x^2}{L}\,. \tag{22.4}$$

La forza *totale* esercitata su A_1 è data dunque da questa quantità moltiplicata per il numero di molecole, e la pressione si ottiene dividendo questa forza totale per l'area di A_1. La pressione vale quindi

$$p = \frac{1}{L^2}\frac{mv_{1x}^2 + mv_{2x}^2 + \cdots}{L} = \frac{m}{L^3}(v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots)\,, \tag{22.5}$$

ove v_{1x} rappresenta la componente x della velocità della molecola 1, v_{2x} quella della molecola 2, e via di seguito. Se N è il numero totale di molecole racchiuse nel recipiente, Nm è la massa totale ed Nm/L^3 la massa volumica ρ. Di conseguenza $m/L^3 = \rho/N$ e

$$p = \rho\left(\frac{v_{1x}^2 + v_{2x}^2 + \cdots}{N}\right)\,. \tag{22.6}$$

La quantità tra parentesi rappresenta il valor medio di v_x^2 tra tutte le molecole del sistema, che rappresentiamo con $\overline{(v_x^2)}$. Si ha allora

$$p = \rho\overline{(v_x^2)}\,. \tag{22.7}$$

 ISBN 88-408-1254-7

Ora, per ogni molecola abbiamo $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Poiché le molecole sono moltissime e si muovono in modo completamente casuale, i valori medi di v_x^2, v_y^2 e v_z^2 sono uguali e quindi ciascuno di essi rappresenta un terzo della loro somma, v^2. Le molecole, in atre parole, non mostrano preferenze di moto per l'uno o l'altro degli assi, e quindi $\overline{(v_x^2)} = \frac{1}{3}\overline{(v^2)}$, per cui l'Equazione 22.7 diventa

$$p = \tfrac{1}{3}\rho\overline{(v^2)}. \qquad (22.8)$$

Questo risultato è stato ricavato trascurando gli urti tra le molecole, ma rimane valido anche prendendoli in considerazione. Dato che negli urti elastici tra particelle identiche le velocità si scambiano, esisterà sempre una molecola che va a urtare la parete A_2 con quantità di moto mv_x corrispondente alla quantità di moto di cui è dotata una molecola che lascia la parete A_1 dopo il rimbalzo. Inoltre il tempo trascorso durante l'evento d'urto è trascurabile in confronto al tempo che separa un urto e l'altro. L'aver ignorato le collisioni intermolecolari è quindi solo un utile artifizio di calcolo. Anche la forma del contenitore non conta; il cubo non fa che semplificare il procedimento. Ci siamo limitati a calcolare la pressione sulla parete A_1 perché sappiamo bene che, per il principio di Pascal, la pressione è uniforme su tutto l'involucro e all'interno del recipiente, purché il gas abbia massa volumica uniforme. Quest'ultima condizione è normalmente rispettata in volumi di gas di dimensioni limitate; laddove si abbia a che fare con grandi masse di gas, come l'atmosfera, occorre tenere presente la variabilità di massa volumica dovuta alla gravitazione (Paragrafo 15.3 e Problema 19 del Capitolo 21).

La radice quadrata di $\overline{(v^2)}$ assume l'appellativo di velocità *quadratica media* delle molecole ed è una misura utile a indicare il comportamento medio delle molecole per quel che concerne la loro velocità scalare. Dai valori misurati di pressione e massa volumica, tramite l'Equazione 22.8 possiamo calcolare la velocità quadratica media v_{qm}:

$$v_{qm} \equiv \sqrt{\overline{(v^2)}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}. \qquad (22.9)$$

L'Equazione 22.8 in definitiva lega una grandezza macroscopica, la pressione, al valor medio di una grandezza microscopica, $\overline{v^2}$ o v_{qm}^2.

PROBLEMA SVOLTO 22.1 Calcolare la velocità quadratica media delle molecole d'idrogeno alla pressione atmosferica e alla temperatura di 0,00 °C assumendo che si tratti di un gas perfetto. La massa volumica dell'idrogeno in queste condizioni risulta di $8{,}99 \cdot 10^{-2}$ kg/m^3.

Soluzione Giacché $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, si ha

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa})}{8{,}99 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3}} = 1840 \text{ m/s}.$$

Più di 6500 km/h!

La Tabella 22.1 elenca i valori calcolati di velocità quadratica media per alcuni gas a temperatura ambiente. Tale velocità è quella che mediamente una molecola possiede nel suo tragitto tra un urto e l'altro. A causa di queste collisioni, le molecole cambiano continuamente la direzione del loro moto e quindi l'effettivo spostamento nello spazio che realizza una molecola risulta molto più lento. Ecco perché, malgrado l'elevata velocità con cui le molecole si muovono tra due urti successivi, la loro diffusione all'espandersi di un gas avviene piuttosto lentamente, fenomeno di cui ci rendiamo conto constatando quanto tempo intercorra tra l'apertura di un boccettino di profumo e la percezione olfattiva che ne traiamo, specie se stiamo ad alcuni metri di distanza. E per di più, di norma esistono moti convettivi dell'aria che veicolano il profumo e ne favoriscono la diffusione molto più rapidamente di quanto avverrebbe in loro assenza. La velocità di diffusione delle molecole di un gas è di gran lunga inferiore alla loro velocità quadratica media.

TABELLA 22.1 Velocità molecolari a temperatura ambiente (300 K)

Gas	*Massa Molecolare m* (u)	v_{qm} (m/s)
Idrogeno	2,0	1920
Elio	4,0	1370
Vapore acqueo	18,0	645
Azoto	28,0	517
Ossigeno	32,0	483
Biossido di carbonio	44,0	412
Biossido di zolfo	64,1	342

PROBLEMA SVOLTO 22.2 Il recipiente cubico di Figura 22.2 ha lo spigolo che misura 10 cm e contiene ossigeno alla pressione di 1,0 bar e temperatura di 300 K. (a) Quante moli di ossigeno contiene? (b) E quante molecole? (c) Quanti urti avvengono all'incirca nell'unità di tempo tra le molecole e ogni singola faccia del recipiente? (*Suggerimento*: assumete per semplicità che tutte le molecole si muovano alla velocità v_{qm}, che non si urtino tra di loro e che un terzo di loro si muova avanti e indietro tra ciascuna delle tre coppie di facce opposte.)

Soluzione (a) Risolvendo l'equazione di stato dei gas (Equazione 21.17) rispetto al numero di moli n, si ottiene

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{(1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa})(0{,}10 \text{ m})^3}{[8{,}31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}](300 \text{ K})} = 0{,}041 \text{ mol},$$

ove abbiamo sostituito V con L^3.

(b) Il numero di molecole si trova con l'ausilio della (21.15):

$$N = nN_A = (0{,}041 \text{ mol})(6.02 \cdot 10^{23} \text{ molecole/mole}) =$$
$$= 2{,}5 \cdot 10^{22} \text{ molecole}.$$

(c) Consideriamo il moto di andirivieni di una molecola. Il tempo trascorso mediamente tra un urto e l'altro è $2L/v_{qm}$ e il suo inverso, $v_{qm}/2L$, rappresenta proprio la frequenza con cui la molecola colpisce la parete. Partendo dall'assunto che, delle N molecole componenti, $\frac{1}{3}N$ partecipa al bombardamento di questa parete, la frequenza complessiva di bombardamento è $\frac{1}{3}N\left(\frac{v_{qm}}{2L}\right)$. Dalla Tabella 22.1 ricaviamo il valore di v_{qm} per l'ossigeno alla

temperatura di 300 K, pari a 483 m/s. Quindi

$$\text{frequenza d'urto} \approx \frac{N v_{qm}}{6L} = \frac{(2.5 \cdot 10^{23}\ \text{molecole})(483\ \text{m/s})}{(6)(0{,}1\ \text{m})} = 2{,}0 \cdot 10^{25}\ \text{urti/secondo}.$$

Da un'analisi più rigorosa che tenga conto delle velocità e direzioni variabili delle molecole, si otterrebbe il valore $2{,}8 \cdot 10^{25}$ urti/secondo. La nostra risposta non è poi così lontana dalla realtà. Nel risolvere i problemi di fisica si possono sovente fare assunzioni semplificative che agevolano di molto i calcoli senza compromettere troppo pesantemente la validità sostanziale del risultato.

PROBLEMA SVOLTO 22.3 L'uranio naturale consiste principalmente di due isòtopi, uno suscettibile di fissione (^{235}U, presente allo 0,7 %), e l'altro praticamente no (^{238}U, presente al 99,3 %). (a) Calcolare il rapporto tra la velocità quadratica media delle molecole che contengono ^{235}U e quella delle molecole che contengono ^{238}U nell'esafluoruro di uranio (UF_6), gas contenente uranio nelle proporzioni naturali. (b) Facendo passare il gas attraverso una barriera porosa, le molecole più veloci ne emergono prima e la proporzione tra i due tipi di molecole diventa pari a quella tra le loro velocità quadratiche medie. Quant'è la percentuale di presenza delle molecole contenenti ^{235}U dopo il passaggio della barriera? (c) Quante volte va fatto passare il gas attraverso la barriera per ottenere un valore del 3 % per questa percentuale? Si tratta del valore tipico richiesto per il combustibile fissile dei reattori a uranio, e questo processo prende il nome di *arricchimento*.

Soluzione (a) Consideriamo due campioni di uranio identici in tutto tranne che il primo contiene solo ^{235}U e l'altro solo ^{238}U. La massa molecolare di $^{235}UF_6$ è $m_{235} = 235\,u + 6(19\,u) = 349\,u$ e quella di $^{238}UF_6$ è $m_{238} = 238\,u + 6(19\,u) = 352\,u$. Il rapporto tra le masse volumiche, essendo il resto tutto uguale, è dato dal rapporto tra le masse molecolari; sicché dall'Equazione 22.9 abbiamo

$$\frac{v_{qm}(235)}{v_{qm}(238)} = \sqrt{\frac{m(238)}{m(235)}} = \sqrt{\frac{352\ u}{349\ u}} = 1{,}0043.$$

(b) Il rapporto tra i due generi di molecole gassose nel campione è uguale al rapporto di isotopi di uranio che esse contengono. All'ingresso della barriera questo rapporto vale 0,007/0,993 = 0,00705. Il passaggio della barriera incrementa tale rapporto del fattore calcolato nella parte (a), sicché:

$$\text{rapporto dopo 1 passaggio} = 0{,}00705 \cdot 1{,}0043 = 0{,}00708.$$

(c) Il gas che entra nella barriera ha un rapporto isotopico, calcolato in (b), di 0,00705. Dopo che è transitato n volte attraverso la barriera, il nostro obiettivo è raggiungere il rapporto di 0,030/0,970 = 0,03093. A ogni passaggio l'incremento del rapporto è di 1,0043, per cui

$$(1{,}0043)^n (0{,}00705) = 0{,}03093.$$

Risolvendo questa espressione rispetto a n, troviamo $n \approx 350$.

22.3 LIBERO CAMMINO MEDIO

Supponiamo di voler seguire il percorso a zigzag (Figura 22.3) di una tipica molecola che vaga in un gas, percorso determinato da un urto dopo l'altro con le altre molecole

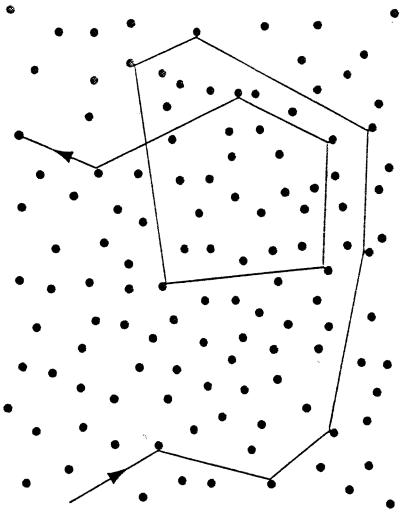


FIGURA 22.3 Percorso di una molecola che si muove in un gas e urta altre molecole durante il tragitto. Anche le altre molecole sono ovviamente in moto e soggette a simili urti.

presenti. Ci proponiamo in particolare di misurare la distanza dei segmenti rettilinei che intercorrono tra le collisioni, per valutarne il valore medio. Chiamiamo questo valore il *libero cammino medio* λ della molecola. Dato che la molecola scelta non ha nulla di speciale rispetto alle altre, il libero cammino medio trovato sarà uguale anche per tutte le altre molecole. È chiaro che ci è impossibile realizzare un vero inseguimento di una molecola per eseguire queste misurazioni, ma in questo paragrafo metteremo in evidenza come ricavarne comunque il valore.

Supponiamo che le molecole del gas siano sfere di diametro d. Avviene una collisione se i due centri delle molecole coinvolte si avvicinano a una distanza inferiore a d. Se vogliamo, possiamo anche idealizzare la molecola proiettile da noi seguita come avente diametro $2d$ e tutte le altre molecole come puntiformi: il risultato è lo stesso, come si vede nella Figura 22.4.

Per il momento assumiamo che la molecola prescelta di diametro $2d$ non eserciti forze sulle altre molecole puntiformi, mentre si muove tra di esse. Nel tempo t questa mo-

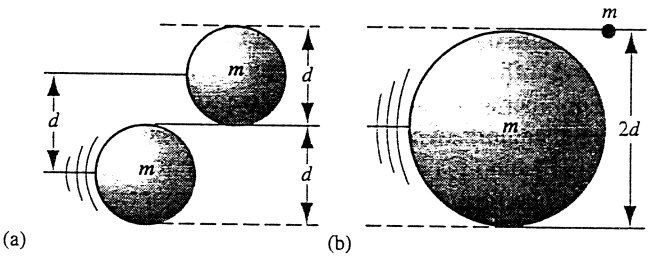


FIGURA 22.4 (a) Avviene un urto quando i due centri delle molecole si avvicinano a una distanza minore di d, il diametro delle particelle. Una rappresentazione equivalente ma più comoda vede la molecola incidente di diametro doppio, $2d$, e tutte le altre molecole bersaglio come punti.

 ISBN 88-408-1254-7

lecola muovendosi spazza il volume di un cilindro di sezione πd^2, e di lunghezza $L_{cil} = vt$ ove v è la velocità della molecola; il volume del cilindro è V_{cil} = area di base · altezza = $(\pi d^2)(vt)$. Supponiamo che il gas sia racchiuso in un volume V e contenga N molecole. Il numero di molecole (puntiformi) contenuto nel cilindro spazzato di Figura 22.5 è dunque

$$N_{cil} = N\frac{V_{cil}}{V} = \frac{N\pi d^2 vt}{V}. \qquad (22.11)$$

Questo dunque rappresenta il numero medio di «incontri» che esperimenta la nostra molecola prescelta nel tempo t, durante i quali ovviamente nella realtà *scambia* forze con le particelle incontrate. La molecola a ogni urto cambia direzione, e prosegue poi a spazzare sempre il volume di un analogo cilindro, realizzando così una sorta di lungo cilindro, «spezzato» in numerosi tratti di direzioni diverse, la cui composizione rettilinea equivale al cilindro da noi definito.

Il libero cammino medio λ è la distanza totale percorsa seguendo questa traiettoria nel tempo t divisa per il numero di urti subiti nello stesso intervallo di tempo, ossia

$$\lambda = \frac{L_{cil}}{N_{cil}} = \frac{vtV}{N\pi d^2 vt} + \frac{V}{N\pi d^2}. \qquad (22.11)$$

In base all'Equazione 21.13 possiamo scrivere l'equazione di stato del gas perfetto nella forma $pV = NkT$, in cui k è la costante di Boltzmann. Da qui ricaviamo $V/N = kT/p$ e l'Equazione 22.11 diventa

$$\lambda = \frac{kT}{\pi d^2 p}. \qquad (22.12)$$

L'Equazione 22.12 assume che la molecola prescelta urti sempre molecole ferme. Nei fatti essa collide con bersagli in movimento. In questo caso le velocità v che compaiono nell'Equazione 22.11 non rappresentano le stesse quantità e quindi non si possono elidere. Quella a numeratore è $\bar{v}$, la velocità molecolare media misurata rispetto al recipiente che contiene il gas. La v al denominatore invece rappresenta la velocità relativa media v_{rel} rispetto alle altre molecole, ed è quella che determina la frequenza di collisione.

Qualitativamente si può constatare che $v_{rel} > \bar{v}$ nel modo seguente. Due molecole di velocità v dirette l'una contro l'altra hanno velocità relativa $v_{rel} = 2v$, maggiore di v. Non è difficile dimostrare che due molecole in moto su direzioni perpendicolari tra loro hanno $v_{rel} = \sqrt{2}v$, che pure è maggiore di v. Due molecole in moto parallelo e concorde hanno $v_{rel} = 0$, che ovviamente è minore di v. Se l'angolo che formano le loro direzioni è compreso tra 0° e 60°, allora $0 \leq v_{rel} \leq v$. Se l'angolo è compreso tra 60° e 180° (quest'ultimo corrisponde all'urto frontale), allora $v \leq v_{rel} \leq 2v$. Dato che le direzioni sono casuali, il numero di urti con angolo compreso tra 60° e 180° sarà maggiore di quelli con angolo compreso tra 0° e 60°. La velocità media d'urto sarà quindi mediamente maggiore di v.

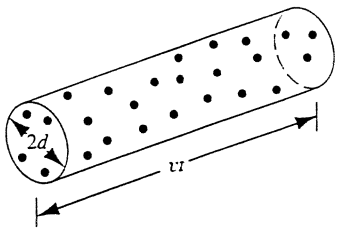


FIGURA 22.5 Una molecola di diametro equivalente $2d$ (come in Figura 22.4b) in moto a velocità v spazza nel tempo t un cilindro di base πd^2 e lunghezza vt. Il numero di urti sopportati dalla molecola in questo tragitto è uguale al numero delle molecole (rappresentate dai punti) che giacciono nel cilindro. Nella realtà questo cilindro deve considerarsi come spezzato in molti tratti aventi assi diversi a seconda della direzione che assume la molecola dopo ciascuna collisione. Solo per convenienza l'abbiamo disegnato rettilineo.

A una conclusione simile si giunge anche considerando che le molecole non hanno tutte la stessa velocità v, ma una distribuzione di velocità attorno al valor medio. Tenendone conto, un calcolo preciso dà come risultato $v_{rel} = \bar{v}\sqrt{2}$. L'Equazione 22.12 diventa quindi

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \qquad \text{(libero cammino medio).} \qquad (22.13)$$

Questa espressione lega due grandezze microscopiche (λ e d) a due grandezze macroscopiche (p e T).

Per le molecole d'aria a livello del mare si ha $\lambda \approx 10^{-7}$ m, ossia 0,1 μm. A un'altitudine di 100 km la massa volumica dell'aria diminuisce a un valore tale che $\lambda \approx 16$ cm. A 300 km, $\lambda \approx 20$ km. Laddove, per ragioni scientifiche o industriali, si creino gas rarefatti tramite una *pompa a vuoto* in recipienti chiusi, occorre tener conto che, al di sotto di una certa pressione, quando il libero cammino medio calcolato con l'Equazione 22.13 eccede le dimensioni del contenitore, il concetto stesso di libero cammino medio perde significato, giacché le molecole urtano più frequentemente contro le pareti del recipiente che tra di loro.

L'abilità di un gas a condurre calore, le viscosità dei gas e la velocità di diffusione da zone ad alta pressione a zone a pressione minore, sono tutte proprietà che dipendono proporzionalmente dal libero cammino medio delle molecole. I progettisti di acceleratori ad alta energia, come quelli al CERN o al Fermilab, si profondono in sforzi per evacuare quanto più possibile l'aria dagli anelli di accelerazione, onde le particelle ivi accelerate possano percorrerli migliaia di volte senza incorrere in un deleterio evento di collisione con molecole d'aria.

PROBLEMA SVOLTO 22.4 Calcolare (a) il libero cammino medio e (b) la frequenza d'urto media per l'azoto a temperatura ambiente (300 K) e pressione atmosferica ($1{,}01 \cdot 10^5$ Pa). La molecola di azoto ha un diametro efficace di $3{,}15 \cdot 10^{-10}$ m e una velocità media, per le condizioni imposte, di 478 m/s.

Soluzione (a) Dall'Equazione 22.13 ricaviamo

$$\lambda = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{(1.38 \cdot 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{(\sqrt{2}\pi)(3.15 \cdot 10^{-10}\ \text{m})^2(1.01 \cdot 10^5\ \text{Pa})} =$$
$$= 9{,}3 \cdot 10^{-8}\ \text{m}.$$

Equivale a circa 300 volte il diametro molecolare. In media la distanza tra una molecola e l'altra in un gas è uguale alla radice cubica del volume occupato da una singola molecola, ossia $(V/N)^{1/3}$, che, per l'Equazione 21.13, può anche essere scritto come $(kT/p)^{1/3}$, in questo caso pari a circa $3{,}4 \cdot 10^{-9}$ m. Questa distanza equivale a circa 11 diametri molecolari. Ciò significa che una tipica molecola, percorrendo un libero cammino medio λ, vede passare a breve distanza al suo fianco in media 27 molecole prima di incorrere in un urto.

(b) La frequenza media d'urto è data dalla velocità media divisa per il libero cammino medio:

$$\text{frequenza d'urto} = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \frac{478\ \text{m/s}}{9{,}3 \cdot 10^{-8}\ \text{m}} =$$
$$= 5.1 \cdot 10^9\ \text{s}^{-1}.$$

In media ogni molecola d'azoto incorre in 5 miliardi di collisioni al secondo!

22.4 DISTRIBUZIONE DELLE VELOCITÀ MOLECOLARI

Si può calcolare v_{qm}, la velocità quadratica media, mediante l'Equazione 22.9. Supponiamo però di voler conoscere come le velocità delle molecole si distribuiscono attorno a questo valor medio. Non è probabile che tutte le molecole abbiano questo valor medio, perché gli urti ne sconvolgerebbero presto la regolarità. Anche le velocità prossime a zero o enormemente superiori a v_{qm} sono ben poco probabili. Perché si realizzassero si richiederebbe una sequenza lunghissima di urti tutti favorevoli a un'azione concorde per raggiungere lo scopo, un'evenienza assai improbabile in condizioni di equilibrio termico.

Il fisico scozzese James Clerk Maxwell (1831-1879) risolse per primo il problema della distribuzione di velocità in un gas contenente un gran numero di molecole. La *distribuzione di Maxwell delle velocità*, come oggi è chiamata, per un gas a temperatura T costituito di N molecole di massa m, è

$$N(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2kT)}. \qquad (22.14)$$

In Figura 22.6 è riportato un grafico di quest'equazione per ossigeno a temperatura ambiente.

Si può interpretare $N(v)$ dell'Equazione 22.14 in questo modo: il prodotto (adimensionale) $N(v)\,dv$ indica il numero di molecole aventi velocità comprese tra v e $v + dv$. Nella Figura 22.6 questo prodotto è messo in evidenza, riferito alla velocità di 600 m/s, dalla sottile striscia colorata in corrispondenza di tale velocità.

Fuggite dalla tentazione di interpretare $N(v)$ come "il numero di molecole aventi velocità v", un'interpretazione senza senso perché il numero di molecole, per quanto grande, non può essere infinito, mentre così parlando sottolineereste che i valori di velocità possibili *sono* infiniti, ma non possono corrispondere uno ad ogni molecola, non essendovene a disposizione un numero infinito. La probabilità che una molecola abbia un valore infinitamente preciso, come 600,34326759... m/s, è semplicemente nulla. Non è nulla invece la probabilità di trovare un certo numero di molecole aventi velocità comprese in un intervallo sia pur piccolo, ma finito, come tra 600,0 m/s e 600,2 m/s.

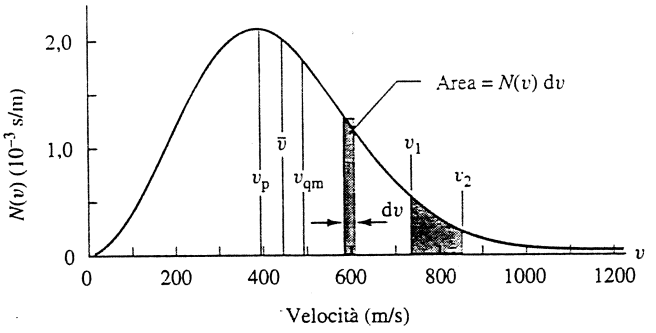


FIGURA 22.6 Distribuzione di Maxwell per le velocità delle molecole in un gas. La curva tracciata si riferisce alle molecole d'ossigeno alla temperatura di 300 K. Il numero di molecole comprese in un intervallo dv è dato da $N(v)\,dv$, ed è qui evidenziato con una sottile striscia colorata. Il numero di molecole aventi velocità comprese tra due valori, v_1 e v_2, è dato dall'area sottesa dalla curva e compresa tra i due valori dati.

Se sommiamo con un'integrazione il numero di molecole relative a ciascun intervallo infinitesimo di velocità dv tra gli estremi $v = 0$ e $v \to \infty$, dovremmo ottenere N, il numero totale di molecole del sistema:

$$N = \int_0^\infty N(v)\,dv. \qquad (22.15)$$

Si noti che questo integrale si può interpretare come l'area sottesa alla curva di distribuzione delle velocità di Figura 22.6. Infatti, il numero di molecole la cui velocità è compresa nell'intervallo tra due qualsiasi valori v_1 e v_2 è uguale all'area compresa tra questi limiti sotto la curva di distribuzione.

Al crescere della temperatura la velocità media delle molecole aumenta e la curva di distribuzione si allarga; poiché tuttavia il numero delle molecole resta lo stesso, anche l'area totale sottesa dalla curva deve rimanere invariata; ciò significa che la curva si appiattisce. La Figura 22.7 rappresenta la distribuzione di velocità per l'ossigeno a due diverse temperature, 80 K e 300 K, dimostrando come la curva si allarga e si appiattisce all'aumentare della temperatura.

La distribuzione delle velocità nei liquidi assomiglia a quella di Figura 22.6. Ciò rende conto di come l'acqua contenuta in una pentola finisca per evaporare completamente. La velocità di una molecola d'acqua necessaria per sfuggire dalla superficie del liquido giace molto spostata nella coda della curva di distribuzione simile a quella di Figura 22.6. È piccolissimo il numero di molecole che può vantare una ve-

 ISBN 88-408-1254-7

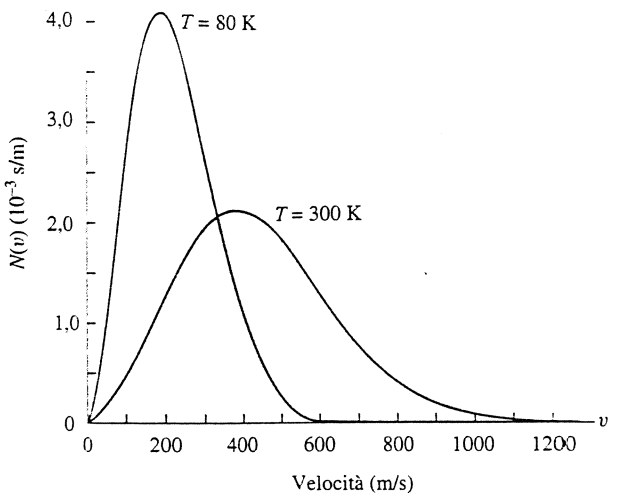


FIGURA 22.7 Confronto tra le distribuzioni maxwelliane delle velocità per le molecole d'ossigeno a due temperature differenti. Generalmente a una temperatura più bassa corrisponde una minor velocità media delle molecole, per quanto le curve di distribuzione coprano entrambe l'intero intervallo di velocità. Le aree sottese dalle distribuzioni sono uguali perché uguale è il numero delle molecole nei due casi.

locità oltre tale limite di soglia. Tuttavia queste poche molecole che riescono a sfuggire alle forze di legame molecolari in superficie, allontanandosi dal liquido grazie a un consistente apporto di energia, sottraggono questa energia al resto delle molecole che rimangono nella pentola, abbassandone la temperatura. Ciò spiega perché l'evaporazione è un processo di raffreddamento. Se la pentola non è isolata termicamente dall'ambiente esterno, può assorbire energia da questo ambiente (per esempio dal fornello) e mantenere così l'equilibrio termico con esso. Il flusso di calore che viene così somministrato all'acqua va a compensare il flusso termico portato via dalle molecole evaporate, e il processo continua finché le molecole, essendo tutte evaporate, si esauriscono.

L'Equazione 22.14 mostra anche che la distribuzione di velocità dipende sia dalla massa molecolare sia dalla temperatura del gas. Quanto minore è la massa della molecola, tanto più velocemente essa si muove. L'idrogeno quindi ha più probabilità di sfuggire dall'alta atmosfera di quanta ne abbiano l'ossigeno e l'azoto.

Conseguenze dalla distribuzione di velocità

Dall'Equazione 22.14, che esprime la distribuzione delle velocità molecolari, si ottengono informazioni molto utili.

1. *Velocità più probabile* v_p. Si tratta della velocità per la quale $N(v)$ nell'Equazione 22.14 assume valore massimo. Lo si trova imponendo $dN/dv = 0$ e risolvendo l'Equazione rispetto a v. Il risultato, facilmente verificabile, è

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \qquad (22.16)$$

Lo abbiamo ottenuto introducendo $k = R/N_A$ dall'Equazione 21.17 ed $m = M/N_A$ dall'Equazione 22.2.

2. *Velocità media* $\bar{v}$. Per calcolarla dobbiamo sommare le velocità con un'integrazione e dividere per il numero di molecole. Dobbiamo quindi sommare i prodotti della velocità riferita a un intervallo infinitesimo dv per il numero $N(v)\,dv$ di molecole nell'intervallo di velocità:

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\int_0^\infty vN(v)\,dv. \qquad (22.17)$$

Sostituiamo ora a $N(v)$ l'espressione data dalla (22.14) e risolviamo l'integrale, ottenendo

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \qquad (22.18)$$

3. *Velocità quadratica media* v_{qm}. È la stessa velocità già incontrata nell'Equazione 22.9. Seguiamo lo stesso procedimento della velocità media, riferito però a v^2 anziché a v. Risulta

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N}\int_0^\infty v^2N(v)\,dv = \frac{3kT}{m}. \qquad (22.19)$$

La velocità quadratica media è la radice quadrata di questa quantità, ossia

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (22.20)$$

4. *Energia cinetica traslazionale per molecola* K_{trasl}. Si osservi per prima cosa che, avendo scelto un gas monoatomico, la sola forma di energia cinetica attribuibile alle molecole è quella traslazionale. Una molecola essenzialmente puntiforme infatti non può possedere energia cinetica rotazionale di entità significativa, e inoltre assumiamo che non vi siano variazioni di energia interna delle molecole.

Per trovare K_{trasl}, dobbiamo prima calcolare l'energia cinetica traslazionale totale relativa all'insieme di N molecole e poi dividerla per N. L'energia totale K è

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}m(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2) = \\ &= \tfrac{1}{2}mN\frac{(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_N^2)}{N} = \\ &= \tfrac{1}{2}mNv_{qm}^2. \end{aligned}$$

Introducendo l'espressione di v_{qm} data dalla (22.20) e dividendo per N, numero di molecole, si ottiene

$$K_{trasl} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad (22.21)$$

Parleremo più diffusamente di questa importante relazione nel prossimo capitolo.

5. *Legge del gas perfetto.* Abbiamo ricavato due equazioni per v_{qm}, la velocità quadratica media delle molecole, la (22.9) e la (22.20). Eguagliandole si ha

$$v_{qm}^2 = \frac{3p}{\rho} = \frac{3RT}{M}.$$

La massa volumica ρ può scriversi come nM/V. Sostituendola nell'eguaglianza qui sopra, si ottiene $pV = nRT$. Dalla discussione sulle grandezze microscopiche siamo giunti a definire l'equazione di stato del gas perfetto.

Verifica sperimentale della distribuzione di Maxwell delle velocità

Maxwell ricavò la sua legge di distribuzione delle velocità (Equazione 22.14) nel 1860. A quell'epoca non erano possibili misure sperimentali che la verificassero e i primi tentativi non si fecero che a partire dal 1920. Le tecniche però migliorarono rapidamente e nel 1955 R.C. Miller con P. Kusch della Columbia University provvidero a una verifica sperimentale molto precisa della legge di Maxwell.

Il loro apparato è schematizzato nella Figura 22.8. Un forno O contenente tallio metallico viene scaldato, in una serie di prove, alla temperatura di 870 ± 4 K. I vapori di tallio a questa temperatura riempiono il forno alla pressione di $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ torr. Alcune molecole di tallio sfuggono dalla fenditura S diffondendosi nello spazio, esterno al forno, tenuto sotto vuoto, e investono il cilindro rotante R. Il cilindro di lunghezza L è provvisto di circa 700 scanalature elicoidali intagliate nella sua superficie laterale, di cui una sola è disegnata nella Figura 22.8. Fissata una velocità angolare ω di rotazione del cilindro, soltanto le molecole dotate di una ben definita velocità v riescono a percorrere le scanalature senza urtarne le pareti, attraversando l'intera lunghezza del cilindro in un tempo t dato da

$$t = \frac{L}{v} = \frac{\phi}{\omega},$$

da cui

$$v = \frac{L\omega}{\phi},$$

in cui ϕ rappresenta lo spostamento angolare del cilindro tra l'ingresso e l'uscita della molecola dalla scanalatura. Il cilindro rotante funge così da *selettore di velocità*, in cui la velocità di transito delle molecole è controllata dalla velocità angolare ω, regolabile. L'intensità del fascio è misurata poi da un rivelatore D. In definitiva l'apparato consente di ottenere l'andamento dell'intensità in funzione della velocità molecolare. Il grafico di Figura 22.9 dimostra la notevole concordanza tra la curva teorica e i valori misurati per il vapore di tallio.

La distribuzione delle velocità nel *fascio* (da distinguersi dalla distribuzione nel *forno*) non è proporzionale a v^2, come dettato dall'Equazione 22.14, bensì a v^3. Consideriamo infatti un gruppo di molecole nel forno dotate di velocità comprese tra v_1 e $v_1 + \delta v$, ove v_1 è una velocità inferiore alla velocità più probabile v_p. Possiamo sempre trovare un altro intervallo di velocità δv, che si estende da v_2 a $v_2 + \delta v$, ove v_2 è ora una velocità superiore a v_p, tale che i due intervalli contengano lo stesso numero di molecole. Le molecole con velocità più alta però sfuggiranno in maggior numero dalla fenditura S perché colpiranno la fenditura con maggior frequenza delle molecole più lente, e precisamente con un rapporto tra le frequenze d'urto di v_2/v_1. Sicché, a parità di tutti gli altri parametri, le molecole più veloci sono favorite, nel formare il fascio uscente dal forno, in modo esattamente proporzionale alla loro velocità, e quindi le molecole del fascio hanno una distribuzione dipendente da v^3 anziché v^2. Questo effetto è naturalmente considerato nel trarre il confronto sperimentale riportato nella Figura 22.9.

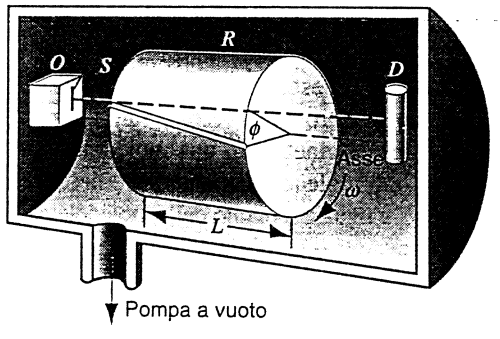


FIGURA 22.8 Apparato di Miller e Kusch per verificare la distribuzione maxwelliana delle velocità. Un fascio di molecole di tallio viene espulso dal forno O attraverso la feritoia S; prosegue in moto rettilineo percorrendo la scanalatura elicoidale praticata sulla superficie del cilindro rotante R e colpisce il rivelatore D. La velocità angolare del cilindro si può variare a piacere in modo da selezionare la velocità delle molecole che riescono a percorrere in linea retta la scanalatura.

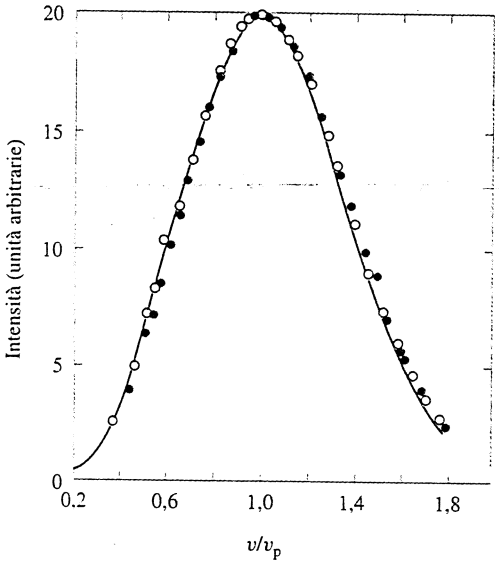


FIGURA 22.9 Risultati dell'esperimento di Miller e Kusch. I cerchietti si riferiscono a una temperatura del forno di 870 K, mentre i pallini pieni a una temperatura di 944 K. Se le distribuzioni sono espresse in funzione di v/v_p, si sovrappongono. La curva continua rappresenta l'equazione di distribuzione maxwelliana e dimostra una notevole concordanza con i dati sperimentali.

 ISBN 88-408-1254-7

PROBLEMA SVOLTO 22.5 Si hanno 10 particelle dotate delle seguenti velocità in m/s: 0,0; 1,0; 2,0; 3,0; 3,0; 3,0; 4,0; 4,0; 5,0; 6,0. Trovare (a) la velocità media, (b) la velocità quadratica media e (c) la velocità più probabile di queste particelle.

Soluzione (a) La velocità media è data da

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n = \frac{1}{10}[0+1{,}0+2{,}0+3{,}0+3{,}0+ \\ +3{,}0+4{,}0+4{,}0+5{,}0+6{,}0] = \\ = 3{,}1\ \text{m/s}.$$

(b) La media dei quadrati delle velocità è data da

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n^2 = \frac{1}{10}[0+(1{,}0)^2+(2{,}0)^2+(3{,}0)^2+(3{,}0)^2+ \\ +(3{,}0)^2+(4{,}0)^2+(4{,}0)^2+(5{,}0)^2+(6{,}0)^2] = \\ = 12{,}5\ \text{m}^2/\text{s}^2,$$

e la velocità quadratica media è

$$v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{12{,}5\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 3{,}5\ \text{m/s}.$$

(c) Delle dieci particelle, tre hanno velocità di 3,0 m/s, due hanno velocità di 4,0 m/s e le altre cinque hanno velocità tutte diverse. La velocità più probabile è dunque

$$v_p = 3{,}0\ \text{m/s}.$$

PROBLEMA SVOLTO 22.6 Un recipiente di N molecole di ossigeno viene mantenuto alla temperatura di 300 K. Quale frazione delle molecole ha velocità compresa tra 599 m/s e 601 m/s? La massa molare M dell'ossigeno è 0,032 kg/mol.

Soluzione L'intervallo di velocità δv è così piccolo (2 m/s) che ci consente di trattarlo come un differenziale infinitesimo $\mathrm{d}v$. Il numero di molecole comprese nell'intervallo è $N(v)\,\mathrm{d}v$, e la sua frazione rispetto al totale delle molecole è $f = N(v)\,\mathrm{d}v/N$, ove $N(v)$ va valutato alla velocità v di 600 m/s, il valore intermedio dell'intervallo, come per la sottile striscia colorata di Figura 22.6. Sostituendo m/k con M/R, nell'Equazione 22.14, si trova la frazione cercata:

$$f = \frac{N(v)\,\mathrm{d}v}{N} = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} v^2 \mathrm{e}^{-Mv^2/(2RT)}\mathrm{d}v.$$

Introducendo i valori numerici si ha

$$f = 2{,}6\cdot 10^{-3} \text{ ossia } 0{,}26\ \%.$$

A temperatura ambiente lo 0.26 % di molecole di ossigeno ha velocità comprese nell'intervallo tra 599 m/s e 601 m/s. Se la striscia di Figura 22.6 fosse disegnata alla scala richiesta da questo problema, sarebbe davvero sottile.

PROBLEMA SVOLTO 22.7 Calcolare (a) la velocità più probabile, (b) la velocità media e (c) la velocità quadratica media per le molecole di ossigeno alla temperatura di 300 K.

Soluzione (a) Dall'Equazione 22.16 ricaviamo

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}} = \sqrt{\frac{(2)[8{,}31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](300\ \text{K})}{0{,}032\ \text{kg/mol}}} = 395\ \text{m/s}.$$

(b) Dall'Equazione 22.18 si trova

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{(8)[8{,}31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](300\ \text{K})}{(\pi)(0{,}032\ \text{kg/mol})}} = 445\ \text{m/s}.$$

(c) Dall'Equazione 22.20 si ottiene

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{(3)[8{,}31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](300\ \text{K})}{0{,}032\ \text{kg/mol}}} = 483\ \text{m/s}.$$

Si osservi che, per qualsiasi gas a una data temperatura, vale la proporzione

$$v_p/\bar{v}/v_{qm} = 1/1{,}128/1{,}1225.$$

22.5 DISTRIBUZIONE DELLE ENERGIE MOLECOLARI

Si può ottenere un'altra descrizione del moto molecolare dal modo in cui si distribuiscono le *energie* piuttosto che le velocità. Si vuole in questo caso cercare una distribuzione $N(E)$, tale che $N(E)\,\mathrm{d}E$ rappresenti il numero di molecole aventi energia compresa tra E ed $E + \mathrm{d}E$.

Anche questo problema fu affrontato e risolto da Maxwell. Ne ricaveremo il risultato per il caso in cui l'energia cinetica si trovi sotto la sola forma traslazionale, caso in cui prende il nome di *distribuzione di Maxwell-Boltzmann dell'energia.*

Consideriamo ancora la situazione del Problema svolto 22.6, in cui abbiamo ricavato la frazione di molecole aventi velocità comprese tra 599 m/s e 601 m/s. Abbiamo trovato che lo 0,26 % delle molecole alla temperatura di 300 K si trova in questa condizione. Una molecola d'ossigeno con velocità di 599 m/s ha un'energia cinetica di $9{,}54\cdot 10^{-21}$ J, mentre una con velocità di 601 m/s ha energia cinetica di $9{,}60\cdot 10^{-21}$ J. Che frazione delle molecole presenti ha energia compresa tra questi due estremi?

Un breve ragionamento dovrebbe convincerci che questa frazione vale ancora 0,26 %. Non fa differenza se contiamo le molecole badando alla loro velocità o alla loro energia cinetica; una volta fissati gli estremi dell'intervallo, ciascuno dei quali presenta una corrispondenza tra velocità ed energia cinetica, entro questo estremi conteremo comunque sempre lo stesso numero di molecole. Vale a dire che, se E rappresenta l'energia cinetica di una molecola avente velocità v, il numero di molecole con energia cinetica compresa tra E ed $E + \mathrm{d}E$ è uguale a quello delle molecole aventi velocità compresa tra v e $v + \mathrm{d}v$. Possiamo dunque scrivere

$$N(E)\,\mathrm{d}E = N(v)\,\mathrm{d}v, \tag{22.22}$$

ovvero

$$N(E) = N(v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}E}. \tag{22.23}$$

Dato che l'energia si manifesta nella sola forma cinetica, dev'essere $E = \frac{1}{2}mv^2$, cioè $v = \sqrt{2E/m}$, da cui

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}E} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left(\tfrac{1}{2}E^{-1/2}\right). \tag{22.24}$$

Combinando le Equazioni 22.14 e 22.24 con la 22.23) si ottiene

$$N(E) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/(kT)}. \qquad (22.25)$$

L'Equazione 22.25 rappresenta la *distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle energie*. Anche qui abbiamo assunto che le molecole siano dotate di energia cinetica solo di tipo traslazionale, e che quindi siano monoatomiche. Nel caso di molecole più complesse occorrerà includere nell'Equazione 22.25 altri fattori che tengano conto dei moti rotatòri e oscillatòri. Il fattore $e^{-E/(kT)}$, però, è una caratteristica generale della distribuzione di Maxwell-Boltzmann per l'energia, presente comunque per qualunque tipo di energia E. Questo fattore, chiamato *fattore di Boltzmann*, è spesso assunto come una stima approssimativa della probabilità relativa che ha una particella di possedere energia E tra un insieme di particelle caratterizzate dalla temperatura T.

Con l'Equazione 22.25 possiamo calcolare la frazione di molecole aventi energia compresa tra E ed $E + dE$, data dall'espressione $N(E)\,dE/N$. Anche qui N è il numero totale di molecole che deve coincidere con

$$N = \int_0^\infty N(E)\,dE. \qquad (22.26)$$

Una caratteristica interessante della distribuzione di Maxwell -Boltzmann delle energie è la sua indipendenza dalla massa delle molecole: fissata la temperatura T, la distribuzione è sempre la stessa per qualsiasi gas, a differenza di quanto succede per la distribuzione maxwelliana delle velocità, la quale dipende invece esplicitamente dalla massa molecolare (Equazione 22.14). Persino un «gas» di elettroni, nella misura in cui questi possono essere trattati come particelle classiche, ha la stessa distribuzione di energia di un gas di atomi pesanti. L'aumento della massa m di un certo fattore provoca la diminuzione di v^2 di un ugual fattore, di modo che il prodotto mv^2, e quindi l'energia cinetica, rimangono invariati.

Per illustrare una semplice applicazione del fattore di Boltzmann, consideriamo un lunghissimo tubo verticale contenente gas e appoggiato con la base inferiore sulla superficie terrestre. Supponiamo che il gas contenuto sia in equilibrio termico a temperatura uniforme T. Una molecola ad altezza y sopra il fondo possiede energia $E_0 + mgy$, dove E_0 è l'energia di una molecola simile posta in fondo al tubo. Dal fattore di Boltzmann possiamo desumere il rapporto tra il numero di molecole situate ad altezza y e il numero di quelle situate ad altezza $y = 0$,

$$\frac{N(y)}{N(0)} = \frac{e^{-(E_0+mgy)/(kT)}}{e^{-E_0/(kT)}}, \qquad (22.27)$$

ovvero

$$N(y) = N_0\, e^{-mgy/(kT)}, \qquad (22.28)$$

in cui $N_0 = N(0)$. Sostituendo, in base alla legge del gas perfetto, pV/N a kT, il fattore $m/(kT)$ all'esponente diventa $mN/(pV) = \rho/p$, ove ρ è la massa volumica del gas. Poiché abbiamo supposto che il gas sia a temperatura uniforme, dev'essere $\rho/p = \rho_0/p_0$, in cui ρ_0 e p_0 sono i valori corrispondenti alla superficie terrestre. Inoltre, giacché il numero di molecole in un volume elementare a qualunque altezza è proporzionale alla massa volumica alla stessa altezza, che a sua volta è proporzionale alla pressione, si può scrivere l'Equazione 22.28 come

$$p(y) = p_0\, e^{-mgy/(kT)} = p_0 e^{-gy\rho_0/p_0}. \qquad (22.29)$$

Questa equazione è identica alla (15.12), che descrive la pressione atmosferica in funzione dell'altitudine sopra il livello del mare. Anche quell'equazione era stata ricavata sotto il presupposto che la temperatura fosse uniforme, ed è molto confortante constatare che l'approccio dinamico seguito nel Capitolo 15 ci abbia condotti a un risultato identico a quello qui ricavato con un procedimento statistico.

PROBLEMA SVOLTO 22.8 Trovare (a) l'energia media e (b) l'energia più probabile di un gas in equilibrio termico a temperatura T.

Soluzione (a) L'energia media $\overline{E}$ si può scrivere, in analogia con l'Equazione 22.17, come

$$\overline{E} = \frac{1}{N} \int_0^\infty E N(E)\,dE.$$

Introducendovi l'Equazione 22.25, si ottiene

$$\overline{E} = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \int_0^\infty E^{3/2} e^{-E/(kT)} dE. \qquad (22.30)$$

La soluzione di questo integrale si ottiene facilmente sostituendo $x^2 = E/(kT)$, che dà luogo a un integrale di forma comune la cui soluzione è data anche in Appendice I. Il risultato, che potete verificare, è

$$\overline{E} = \tfrac{3}{2}kT, \qquad (22.31)$$

un'espressione che coincide con la (22.21), ricavata pure per il caso in cui l'energia cinetica assuma la sola forma traslazionale.

(b) Per trovare l'energia più probabile deriviamo l'Equazione 22.25 rispetto a E, eguagliamo il risultato a zero e risolviamo l'equazione così ottenuta rispetto a E. Il risultato, che dovremmo essere in grado di dimostrare, è

$$E_p = \tfrac{1}{2}kT.$$

Si noti che *non* coincide con $\frac{1}{2}mv_p^2$, che darebbe un'energia kT. Sapete spiegare perché l'energia corrispondente alla velocità più probabile non è l'energia più probabile?

22.6 EQUAZIONI DI STATO PER I GAS REALI

L'equazione di stato per il gas perfetto serve egregiamente anche per i gas reali quando questi hanno massa volumica sufficientemente bassa. Naturalmente, al crescere della massa volumica, l'approssimazione derivante dall'applicazione di questa equazione diventa via via più inaccettabile. Sarebbe dunque interessante trovare un'equazione di stato

 ISBN 88-408-1254-7

che descriva il comportamento dei gas reali per un'ampia gamma di masse volumiche. Presentiamo due possibili approcci tendenti a questo scopo.

Sviluppo del viriale

Un primo approccio a un'equazione di stato per i gas reali consiste nello scrivere uno sviluppo in serie di potenze dell'inverso del volume, detto *sviluppo del viriale*:

$$pV = nRT\left[1 + B_1\frac{n}{V} + B_2\left(\frac{n}{V}\right)^2 + \cdots\right]. \qquad (22.32)$$

in cui B_1, B_2, . . . , sono detti *coefficienti del viriale*. Questi coefficienti sono funzione della temperatura e diventano sempre più piccoli al progredire della serie. È chiaro che, per basse densità molari ($n/V \to 0$), quest'equazione si riduce alla legge del gas perfetto, come deve essere per tutte le equazioni di stato dei gas reali. I coefficienti del viriale si determinano sperimentalmente adattando i dati empirici alla curva descritta dall'Equazione 22.32.

Equazione di stato di van der Waals

Nel 1873 il fisico olandese Johannes Diderik van der Waals (1837-1923) propose la seguente equazione:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \qquad (22.33)$$

in cui a e b sono costanti da determinare su basi sperimentali. Il confronto di questa equazione con quella del gas perfetto fa pensare che van der Waals (che per questo contributo ricevette il premio Nobel nel 1910) sia giunto a tale espressione inserendo fattori correttivi laddove l'equazione di stato del gas perfetto cade in difetto. Ed effettivamente è così. Se le costanti a e b sono nulle, o se $n/V = 0$, l'Equazione 22.33 si riduce alla legge del gas perfetto. Seguiamo ora la linea di ragionamento che ha portato a questa formulazione.

Correzione di volume. Nel Paragrafo 22.1 abbiamo assunto (proprietà 3) che il volume occupato dalle molecole sia trascurabile. Non è del tutto vero per i gas reali. Immaginiamo la molecola di un gas come una sfera solida di diametro d. Due molecole non possono avvicinarsi a una distanza tra i centri inferiore a d (Figura 22.10). Il volume di «ingombro» di una molecola è dato quindi dal volume di una semisfera di diametro d (Figura 22.10) che, moltiplicato per il numero di molecole contenute in una mole e sottratto al complessivo volume molare, dà il volume molare «vuoto», cioè quello effettivamente frequentabile da una molecola in moto. Stimando $d = 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ m (tipico diametro molecolare), in prima approssimazione si ottiene un valore di b pari a

$$b = \tfrac{1}{2}N_A(\tfrac{3}{4}\pi d^3) = 2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/mol}.$$

Il fattore $\frac{1}{2}$ deriva dall'aver considerato per il volume di «ingombro» solo metà della sfera che circonda la molecola, anziché la sfera intera (Figura 22.10). Questo perché, quando una molecola si avvicina a un'altra, il volume entro

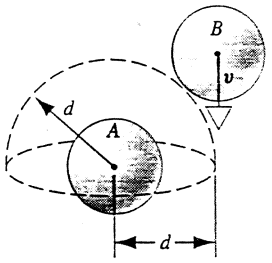


FIGURA 22.10 Considerando le molecole gassose come delle sfere solide, il centro della molecola B non può penetrare entro un emisfero di raggio d attorno alla sfera A, ove d rappresenta il diametro della molecola. Il volume frequentabile da B viene quindi ridotto di un volume pari a una tal semisfera concentrica con ogni molecola del gas.

il quale possono interagire è costituito solo dall'emisfero della molecola bersaglio che si affaccia nella direzione di provenienza della molecola incidente. Nelle condizioni standard di temperatura e pressione la densità molare n/V del gas perfetto è attorno a 45 mol/m^3, per cui bn/V risulta circa 0,0009, ossia 0,1 %; in queste condizioni la correzione apportata dal fattore b è relativamente modesta.

Correzione di pressione. Nel Paragrafo 22.1 abbiamo assunto (proprietà 4) che le molecole del gas perfetto esercitino forze solo durante gli urti. Anche questo non è propriamente vero per i gas reali. Per una molecola situata all'interno del gas le forze esercitate complessivamente su di essa dalle molecole circostanti danno una risultante effettivamente nulla, ma per una molecola che si trovi presso le pareti del recipiente questo non è vero, come illustra la Figura 22.11. Questa molecola è soggetta a una forza netta che

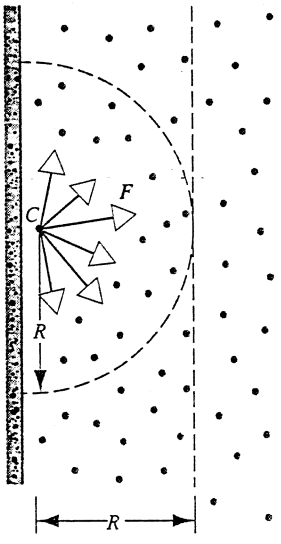


FIGURA 22.11 Una molecola C di un gas, considerata puntiforme, vicina alla parete del recipiente, è soggetta a una forza risultante non nulla diretta verso l'interno, dovuta alla presenza di altre molecole entro il raggio d'azione R delle loro forze attrattive. La pressione sulla parete è minore della pressione interna per uno strato limite di spessore R.

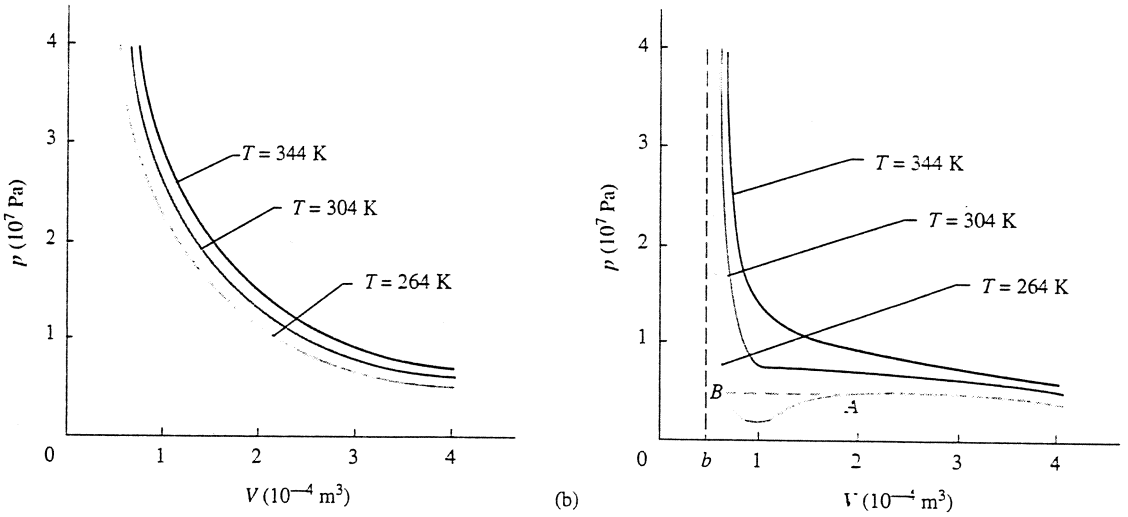


FIGURA 22.12 Diagrammi pressione-volume per una mole di (a) un gas ideale e (b) CO_2, in base all'equazione di van der Waals. Per grandi valori del volume i due grafici coincidono. Al crescere della temperatura le curve di van der Waals diventano pure simili a quelle del gas perfetto. Si noti anche che, al crescere della pressione, il volume tende al valore b, come richiede l'Equazione 22.33, piuttosto che a zero, come richiederebbe l'equazione di stato del gas perfetto. La linea tratteggiata AB rappresenta un andamento più realistico del comportamento alla temperatura $T = 264$ K. Comprimendo il gas a partire dal punto A, le molecole cominciano a condensare nello stato liquido e la pressione rimane costante.

l'attrae verso l'interno del recipiente, esercitata dalle molecole che si trovano nei suoi dintorni, le quali si trovano prevalentemente dalla parte opposta alla parete. La pressione allo strato limite aderente alla parete risulta un poco inferiore alla pressione interna che si considera uniforme.

La riduzione di pressione causata dagli urti della molecola C contro la parete (Figura 22.11) è proporzionale al numero di molecole presenti nell'emisfero di raggio R in cui ha efficacia la loro forza attrattiva, a sua volta proporzionale alla densità molecolare e quindi alla densità molare n/V. L'effetto sommato per *tutte* le molecole suscettibili di urti con le pareti, come la molecola C, è anch'esso proporzionale alla densità molecolare e quindi a n/V. La riduzione di pressione complessiva è quindi proporzionale al prodotto di queste due variabili e quindi a $(n/V)^2$.

Se per esempio triplichiamo il numero di molecole in un determinato recipiente, la molecola C risente di uno sbilanciamento di forze tre volte superiore. Inoltre nel gas sono contenute il triplo di molecole nelle stesse condizioni di C. Di conseguenza la riduzione totale di pressione alla parete aumenta di nove volte. Se p nell'Equazione 22.33 è la pressione incognita, dobbiamo aumentarla di una quantità proporzionale a $(n/V)^2$ cioè sommare un termine an^2/V^2, per ottenere la pressione «corretta».

La Figura 22.12 mette a confronto la funzione $p(V)$ per il gas perfetto e per il biossido di carbonio secondo l'Equazione 22.33. Si noti che la deviazione di comportamento del gas perfetto si osserva principalmente al crescere della pressione, e poi anche all'abbassarsi della temperatura. Per la CO_2 alla temperatura di 264 K la curva comprende un tratto con pendenza positiva, che indicherebbe una diminuzione della pressione al decrescere del volume. Essendo questo comportamento contrario a quello che ci si aspetta per un gas, si può ipotizzare che una parte di gas si liquefaccia, lasciando meno gas allo stato gassoso. L'equazione di van der Waals suggerisce quindi una coesistenza di fasi diverse, che nel modello del gas ideale non può avvenire. Sottoponendo nella realtà a compressione un campione di CO_2, si nota che il suo reale comportamento alla temperatura di 264 K non segue la curva mostrata in Figura 22.12b, ma se ne discosta nel tratto AB e segue nella realtà la linea tratteggiata orizzontale.

PROBLEMA SVOLTO 22.9 Per l'ossigeno i coefficienti misurati dell'equazione di van der Waals sono $a = 0{,}138\ \text{J} \cdot \text{m}^3/\text{mol}^2$ e $b = 3{,}18 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$. Supponiamo di avere 1,00 mol di ossigeno alla temperatura di 50 K confinato in una bombola di volume $0{,}0224\ \text{m}^3$. Quale pressione esercita il gas secondo (a) la legge del gas perfetto e (b) l'equazione di van der Waals?

Soluzione (a) Dall'equazione di stato del gas perfetto otteniamo

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{(1{,}00\ \text{mol})[8{,}31\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}](50\ \text{K})}{0{,}0224\ \text{m}^3} =$$
$$= 1{,}85 \cdot 10^4\ \text{Pa} = 0{,}185\ \text{bar}.$$

(b) I termini di correzione per la pressione e il volume nell'equazione di van der Waals sono

$$\frac{an^2}{V^2} = \frac{(0{,}138\ \text{J} \cdot \text{m}^3/\text{mol}^2)(1{,}00\ \text{mol})^2}{(0{,}0224\ \text{m}^3)^2} = 275\ \text{Pa}$$

e

$$b = 3{,}18 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}.$$

Introducendo questi valori nell'equazione di stato di van der Waals, si ha

$$p = 1{,}83 \cdot 10^{-2}\ \text{Pa} = 0{,}183\ \text{bar}.$$

 ISBN 88-408-1254-7

Per l'ossigeno in queste condizioni le due formule danno risultati concordi entro il 2 % di scarto. Si noti che il fattore di correzione per la pressione è di solo $(275\ \text{Pa})/(1{,}83 \cdot 10^{7}\ \text{Pa})$, ossia circa l'1,5 %. Il fattore di correzione del volume bn/V è di solo $(3{,}18 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol})(1{,}00\ \text{mol})/(0{,}0224\ \text{m}^3)$, ossia circa lo 0,14 %. A temperature ancora minori, quando l'ossigeno si avvicina al punto di liquefazione, l'equazione di stato di van der Waals aderisce molto meglio ai valori sperimentali di quanto faccia la legge del gas perfetto.

22.7 FORZE INTERMOLECOLARI (facoltativo)

Le forze agenti tra le molecole sono di natura elettromagnetica. Tutte le molecole contengono cariche elettriche in moto. Ciascuna molecola nel suo complesso è elettricamente neutra, nel senso che la carica negativa dei suoi elettroni compensa esattamente la carica positiva del nucleo. Questo non significa però che le molecole non interagiscano per effetto delle cariche elettriche contenute. Per esempio, quando due molecole si avvicinano tra loro, le cariche in esse contenute vengono disturbate e si ridispongono spostandosi leggermente dalle loro posizioni di equilibrio, di modo che la distanza media tra le cariche di segno opposto, appartenenti alle due molecole, risulta leggermente inferiore alla distanza media tra le cariche di ugual segno. Da qui deriva una forza di attrazione intermolecolare. Questa modifica di disposizione interna delle cariche avviene solo quando le molecole si trovano sensibilmente vicine, di modo che il raggio d'azione di queste forze risulta molto corto. Ma se le molecole si avvicinano troppo, fino a sovrapporre gli spazi di competenza delle loro reciproche cariche esterne, le forze intermolecolari mutano in forze repulsive. Le molecole si respingono infatti, perché non hanno modo di risistemare le cariche interne fino a prevenire la repulsione dei loro elettroni esterni che vengono a contatto. È questa repulsione di contatto che rende conto degli effetti d'urto tipo «palla da biliardo» cui vanno incontro le molecole dei gas in collisione. Se non esistesse questo fenomeno repulsivo, le molecole in collisione finirebbero dritte dritte per compenetrarsi senza alcun rimbalzo.

Assumiamo che le molecole abbiano press'a poco simmetria sferica, ciò che ci permette di descrivere graficamente le forze intermolecolari attraverso una curva di energia potenziale U del sistema di due molecole in funzione della distanza r tra i loro centri. La forza F agente su ciascuna molecola è legata all'energia potenziale dalla relazione $F = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}r$. Nella Figura 22.13a vediamo il grafico di una tipica funzione energia potenziale $U(r)$. Possiamo immaginare una molecola fissa nell'origine O delle coordinate. L'altra molecola viene dunque respinta da O quando la pendenza della curva è negativa, mentre ne viene attratta se è positiva. A distanza r_0 si ha una condizione di equilibrio in cui la forza risultante è nulla e la pendenza della curva è zero. Nella Figura 22.13b è riportato l'andamento della forza $F(r)$ corrispondente a questa energia potenziale. L'energia E segnata nella Figura 22.13a rappresenta l'energia meccanica $(K + U)$ delle molecole incidenti. L'intersezione della curva $U(r)$ con questo valore di energia rappresenta il *punto di inversione* del moto (Paragrafo 12.5). Vi corrisponde la minima distanza intermolecolare ammissibile. La distanza in cui l'energia potenziale si annulla, invece, può essere presa come riferimento per valutare il diametro efficace della molecola: è la distanza a cui si avvicinano le due molecole quando l'incontro avviene con un'energia cinetica modestissima. Per molecole semplici questa distanza è di circa $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ m. La distanza r_0, cui corrisponde il minimo dell'energia potenziale (distanza di equilibrio), vale circa $3{,}5 \cdot 10^{-10}$ m, mentre la forza e l'energia potenziale si annullano entrambe (distanza di assenza d'interazione) quando la distanza tra i centri si approssima a circa 10^{-9} m, equivalente a circa quattro diametri molecolari. La forza molecolare ha quindi un raggio d'azione molto corto. Naturalmente a tipi diversi di molecole corrispondono, oltre che dimensioni diverse, anche comportamenti differenti nella risistemazione delle cariche, sicché le forze intermolecolari dipendono dal genere di molecola. Il loro andamento qualitativo resta comunque quello illustrato nella Figura 22.13.

In un solido le molecole vibrano attorno alla loro posizione di equilibrio caratterizzata dalla reciproca distanza r_0. La loro energia totale E è negativa, e cioè è rappresentata da una retta orizzontale al di sotto dell'asse delle ascisse nel grafico di Figura 22.13a. Queste molecole dunque non posseggono energia sufficiente a sfuggire dalla zona di avvalla-

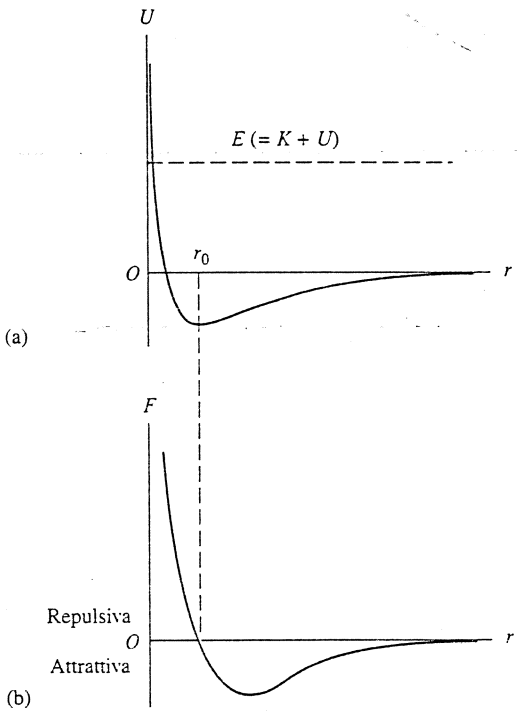


FIGURA 22.13 (a) Energia potenziale U di due molecole in funzione della loro distanza r. L'energia meccanica E è indicata dalla retta orizzontale tratteggiata. (b) Forza radiale tra le due molecole, data da $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}r$, corrispondente all'energia potenziale sopradescritta. L'energia potenziale presenta un minimo per la distanza r_0, cui corrisponde una forza nulla.

mento della curva, e cioè a sopraffare le forze di coesione molecolare. I centri di vibrazione O in un solido sono più o meno fissi. Nei liquidi invece le molecole hanno energie vibrazionali maggiori attorno al punto d'equilibrio, ma le distanze tra i centri restano comunque dello stesso ordine di grandezza. Allo stato gassoso infine, in cui le molecole sono dotate della massima energia cinetica, la distanza media tra le molecole è considerevolmente maggiore del raggio d'azione efficace delle forze molecolari; per questo le molecole dopo un urto proseguono il loro moto rettilineo uniforme. Maxwell presentò il legame tra il modello di energia cinetica dei gas e quello delle forze intermolecolari nel seguente modo: "invece di dire che le molecole sono solide, sferiche ed elastiche, possiamo, se ci piace, dire che esse sono dei centri di forza la cui azione è impercettibile salvo che a certe brevi distanze, alle quali esse compaiono d'improvviso esercitando forze repulsive di grande intensità. È evidente che entrambe le descrizioni portano allo stesso risultato".

È interessante confrontare i valori delle forze intermolecolari con quelli della forza di attrazione gravitazionale tra molecole. Fissando una distanza di separazione di $4 \cdot 10^{-10}$ m, per esempio, la forza intermolecolare tra due atomi di elio è di circa 6×10^{-13} N, mentre la forza gravitazionale nelle stesse condizioni vale circa $7 \cdot 10^{-42}$ N, più debole di 29 ordini di grandezza! Questo risultato è rappresentativo di una situazione tipica e dimostra quindi la trascurabilità degli effetti gravitazionali nell'interazione tra molecole.

Per quanto queste forze appaiano modeste rispetto alle forze ordinarie, non dimentichiamo che la massa molecolare è così piccola (attorno a 10^{-26} kg), che le forze intermolecolari impartiscono accelerazioni dell'ordine di 10^{15} m/s^2 ($10^{14}g$). Ovviamente queste accelerazioni vengono impresse per tempi brevissimi, giacché la molecola interessata si viene a trovare ben presto fuori dalla sfera d'influenza della forza molecolare che l'ha provocata.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

22.1 Natura atomica della materia

1. Due fra i seguenti casi *non* corrispondono al comportamento di un gas ideale. Quali?
(A) Una molecola perde energia cinetica nell'urto elastico con un'altra.
(B) All'interazione tra molecole è associata un'energia potenziale.
(C) Gli urti possono modificare l'energia interna delle molecole.
(D) Dopo un urto contro una parete, la velocità di una molecola è immutata.

2. In un recipiente chiuso si ha una miscela di elio e cripton, che possiamo trattare come gas perfetto purché gli atomi di elio e cripton abbiano lo stesso valor medio di
(A) massa. (B) velocità.
(C) quantità di moto. (D) energia cinetica.

22.2 Descrizione molecolare della pressione

3. A cosa si deve il fattore 3 che compare nell'Equazione 22.9?
(A) È un'approssimazione di π.
(B) Al confronto tra le unità di pressione e di massa volumica.
(C) È legato al numero di dimensioni nello spazio.
(D) Deriva dall'integrazione di v^2 eseguita per trovare la media.

22.3 Libero cammino medio

4. (a) A che densità molecolare dell'azoto, espressa in molecole/metro cubo, corrisponde all'incirca un libero cammino medio delle dimensioni di un locale (≈ 3 m)?
(A) 10^{23}. (B) 10^{20}.
(C) 10^{18}. (D) 10^{9}.

5. Mantenendo costante la massa volumica di un gas sotto una campana di vetro, se ne varia la temperatura. Raddoppiando la temperatura, il libero cammino medio
(A) raddoppia. (B) resta invariato.
(C) si dimezza.

6. Per una quantità di gas fissata, come viene influenzato il libero cammino medio nel caso che
(a) si raddoppi la massa volumica?
(b) si raddoppi la velocità molecolare media?
(c) si raddoppino entrambe le grandezze precedenti?
(A) Raddoppia.
(B) Resta invariato.
(C) Si dimezza.
(D) Diventa un quarto del valore originario.

22.4 Distribuzione delle velocità molecolari

7. Mettete in ordine decrescente v_p, $\overline{v}$ e v_{qm} per le molecole d'idrogeno alla temperatura di 350 K.
(A) $v_{qm} > v_p > \overline{v}$. (B) $v_{qm} > \overline{v} > v_p$.
(C) $\overline{v} > v_{qm} > v_p$. (D) $v_p > \overline{v} > v_{qm}$.

8. La velocità quadratica media delle molecole in aria ferma a temperatura ambiente è prossima alla velocità
(A) di camminata (2 m/s).
(B) di un'auto veloce (30 m/s).
(C) di un aereo supersonico (500 m/s).
(D) di fuga dalla Terra ($1.1 \cdot 10^4$ m/s).
(E) della luce ($3 \cdot 10^8$ m/s).

9. In un gas in equilibrio termico, quale delle seguenti velocità divide l'insieme delle molecole in due parti uguali, metà con velocità maggiore e metà con velocità minore?
(A) v_p. (B) $\overline{v}$. (C) v_{qm}.
(D) Nessuna delle precedenti.

10. Quale delle seguenti velocità corrisponde a quella di una molecola con energia cinetica media?
(A) v_p. (B) $\overline{v}$. (C) v_{qm}.
(D) Nessuna delle precedenti.

 ISBN 88-408-1254-7

11. Considerate la distribuzione di velocità mostrata nella Figura 22.14. Qual è l'ordine corretto delle seguenti velocità?
    (A) $v_{qm} < \bar{v} < v_p$. (B) $v_{qm} < v_p < \bar{v}$.
    (C) $\bar{v} < v_{qm} < v_p$. (D) $\bar{v} < v_p < v_{qm}$.
    (E) $v_p < \bar{v} < v_{qm}$.

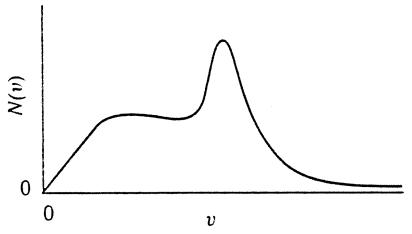


FIGURA 22.14 Domanda a risposta multipla 11.

12. Un certo gas (virtuale) risponde perfettamente al comportamento dettato dalla legge di van der Waals. Il suo volume varia da $V_i = 1000nb$ a $V_f = 2000nb$. Si consideri a molto minore di pV^2/n^2, ma non trascurabile. Sapendo che la pressione è rimasta costante, si conclude che
    (A) T_f è leggermente maggiore di $2T_i$.
    (B) T_f è leggermente minore di $2T_i$.
    (C) T_f è esattamente uguale a $2T_i$.
    (D) La risposta dipende dal valore di $an^2/(pV^2)$.

13. Un plasma è un gas di particelle cariche. Se la carica è la stessa per tutte le particelle, le forze sono repulsive per qualsiasi distanza tra le particelle. Quale sarà il segno di a nell'equazione di van der Waals per questo tipo di gas?
    (A) Positivo. (B) Negativo.
    (C) Dipende dal segno delle cariche nel plasma.
    (D) L'equazione di van der Waals si applica solo a forze attrattive.

22.5 Distribuzione delle energie molecolari

22.6 Equazioni di stato per i gas reali

22.7 Forze intermolecolari

QUESITI

1. Nella teoria cinetica assumiamo che il numero di molecole contenuto in un gas sia molto grande. I gas reali a bassa massa volumica si comportano come ideali. Sono affermazioni contraddittorie? In caso negativo, come le conciliate?
2. Abbiamo presupposto che gli urti delle molecole contro le pareti del recipiente siano elastici. Di fatto però non lo sono. Perché non fa differenza, purché le pareti siano alla stessa temperatura del gas?
3. Abbiamo assunto che la forza esercitata dalle molecole sulle pareti del contenitore sia costante nel tempo. Come si giustifica?
4. Un sasso lasciato libero cade per terra. Le molecole sono libere eppure non cadono. Perché?
5. Nel modello della teoria cinetica come è correlata la velocità del suono con le variabili del gas?
6. Perché l'atmosfera terrestre non si disperde nel vuoto? Ai limiti dell'atmosfera spesso delle molecole si trovano ad avere velocità maggiori di quella di fuga in direzione di allontanamento. Non è quindi solo una questione di tempo?
7. Titano, una delle molte lune di Saturno, possiede un'atmosfera, al contrario della nostra Luna. Come mai?
8. Come vi aspettate che si modifichi, se è il caso, la composizione dell'atmosfera con l'aumentare dell'altitudine?
9. Un gas fatto di molecole aventi caratteristica di veri punti geometrici obbedirebbe esattamente alla legge del gas perfetto?
10. Perché di fatto le molecole, tra un urto e l'altro, non seguono una traiettoria perfettamente rettilinea, e quale effetto, facilmente osservabile in laboratorio, ne deriva?
11. Supponete di voler ottenere ^{238}U anziché ^{235}U come prodotto di un processo di diffusione. Seguirete un processo identico a quello del ^{235}U? Se no, spiegate come occorre modificare il processo di diffusione.
12. Si consideri la diffusione reciproca di due gas. Si può fare un paragone con un'enorme folla che si spintona lungo un piano inclinato di pochi gradi rispetto al piano orizzontale?
13. Vi aspettate che le molecole reali abbiano davvero simmetria sferica? Altrimenti, come cambierebbe la funzione energia potenziale di Figura 22.13?
14. I gas reali possono liquefarsi. Il gas perfetto no. Perché?
15. Dimostrare che, all'aumentare del volume molare, l'equazione di stato di van der Waals tende a quella del gas perfetto.
16. Consideriamo il caso in cui il libero cammino medio superi la dimensione massima del contenitore. Per una molecola ivi imprigionata equivale a una condizione di vuoto perfetto?
17. Elencate dei modi pratici di incrementare la frequenza d'urto molecolare di un gas.
18. Date una spiegazione qualitativa del legame che esiste tra il libero cammino medio di molecole di ammoniaca in aria, e il tempo che impiegano queste molecole per raggiungere il vostro apparato olfattivo quando se ne apre una bottiglia a distanza.
19. Se le molecole in realtà non sono sferiche, che significato possiamo dare al diametro d nell'Equazione 22.13 che esprime il libero cammino medio? In quali gas le molecole si comporterebbero in modo più prossimo possibile a quello di una sfera rigida?
20. In che senso il libero cammino medio molecolare è una proprietà macroscopica piuttosto che microscopica di un gas?
21. Dato che la forza effettiva tra molecole dipende dalla loro distanza, le forze possono provocare deviazione anche quando sono lontane dalla situazione di «contatto». Inoltre le deviazioni dovrebbero dipendere dalla durata dell'azione esercitata e dalla velocità relativa delle molecole. (a) Vi aspettate dunque che il libero cammino medio nella realtà dipenda dalla temperatura, anche a massa volumica costante? (b) In caso affermativo, pensate che λ aumenti o diminuisca col crescere della temperatura? (c) Come può entrare questa dipendenza nell'Equazione 22.13?

22. Scuotendo un barattolo di nocciole, perché le nocciole più grandi generalmente vengono in superficie, anche se la loro massa volumica è un po' maggiore?
23. Giustificate qualitativamente la seguente affermazione: "In una miscela di molecole diverse in completo equilibrio ciascun genere di molecole presenta la stessa distribuzione maxwelliana di velocità che avrebbe in assenza delle altre specie di molecole".
24. Un gas contiene N particelle. Si spieghi come mai $v_{qm} \geq \bar{v}$. indipendentemente dalla distribuzione di velocità.
25. Quale osservazione costituisce buona prova che non tutte le molecole di un corpo si muovano alla stessa velocità, pur essendo uniforme la temperatura?
26. La frazione di molecole compresa entro un dato intervallo δv della velocità quadratica media diminuisce al crescere della temperatura del gas. Si spieghi perché.
27. La Figura 22.15 mostra la distribuzione delle componenti x della velocità molecolare in un recipiente a temperatura determinata. (a) La distribuzione è simmetrica attorno al valore v_x; se ne dia una ragione. (b) Che cosa rappresenta l'area totale sottesa dalla curva? (c) Aumentando la temperatura come si modificherebbe questa distribuzione? (d) Qual è il valore più probabile di v_x? (e) La velocità più probabile è pari a zero? Si commenti.

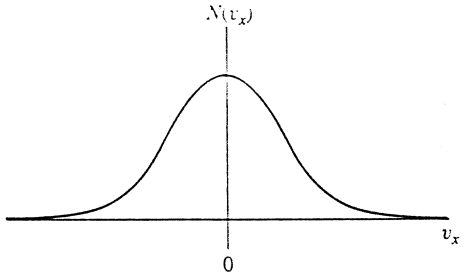


FIGURA 22.15 Quesito 27.

28. Il sistema a fenditura della Figura 22.8 seleziona le molecole in moto nella direzione dell'asse x. Ciò invalida l'efficacia dell'esperimento per la misura della distribuzione di velocità in ogni direzione?
29. Fate degli esempi di moto browniano quale si può riscontrare nei fenomeni fisici.
30. Un pallina da golf è appesa al soffitto mediante un filo. Si spieghi in dettaglio perché il suo moto browniano non è evidente.
31. Sia ρ_n il numero di molecole nell'unità di volume di un gas. Se definiamo ρ_n per un volume di gas molto piccolo – diciamo dieci volte il volume di una molecola – ρ_n fluttua tra il valore zero e un valore massimo. Come si può affermare allora che ρ_n ha un valore definito in ogni punto del gas?

ESERCIZI

22.1 Natura atomica della materia

1. L'oro ha una massa molare (atomica) di 197 g/mol. Considerate un campione di 2,56 g di oro puro sotto forma di vapore. (a) Calcolate il numero di moli di oro presenti. (b) Quanti atomi di oro ci sono nel campione?
2. (a) Trovare il numero di molecole contenute in 1,00 m^3 di aria alla temperatura di 20,0 °C e pressione di 1,00 atm (b) Che massa ha questo volume d'aria? Si assuma che il 75 % sia azoto e il rimanente ossigeno.
3. Un recipiente d'acciaio contiene 315 g di ammoniaca (NH_3) a una pressione assoluta di $1{,}35 \cdot 10^6$ Pa e a una temperatura di 77,0 °C. (a) Qual è il volume del recipiente? (b) Dopo che la temperatura è scesa a 22,0 °C e la pressione si è ridotta a $8{,}68 \cdot 10^5$ Pa, quanti grammi di gas sono sfuggiti dal recipiente?
4. (a) Consideriamo 1,00 mol di un gas ideale alla temperatura di 285 K e pressione di 1,00 atm. Supponiamo che le molecole siano in massima parte equamente distanziate collocandosi nei centri di cubi identici. In base al numero di Avogadro, assumendo come diametro molecolare il valore di $3{,}00 \cdot 10^{-8}$ cm, si calcoli la lunghezza dello spigolo del cubo e il suo rapporto col diametro della molecola. Lo spigolo rappresenta una stima della distanza tra le molecole del gas. (b) Ora si consideri una mole di acqua avente un volume di 18 cm^3. Supponendo la stessa disposizione delle molecole, si ripetano i calcoli della parte (a).
5. Supponendo che il raggio di un atomo (sferico) di argon sia di $0{,}710 \cdot 10^{-10}$ m, si calcoli la frazione del volume effettivamente occupato dagli atomi in un campione di argon alla temperatura di 35,0 °C e alla pressione di 1,21 bar.

22.2 Descrizione molecolare della pressione

6. La massa molecolare dell'idrogeno è $3{,}3 \cdot 10^{-24}$ g. Che pressione esercitano $1{,}6 \cdot 10^{23}$ molecole che colpiscono ogni secondo l'area di 2,0 cm^2 di parete, con un angolo d'incidenza di 55° rispetto alla normale, alla velocità di $1{,}0 \cdot 10^5$ cm/s?
7. Alla temperatura di 44,0 °C e alla pressione di $1{,}24 \cdot 10^{-2}$ bar un gas risulta avere massa volumica di $1{,}32 \cdot 10^{-5}$ g/cm^3. (a) Si trovi la velocità v_{qm} delle molecole. (b) Basandosi sulla legge del gas perfetto, si trovi la densità molare del gas. (c) Combinando i precedenti risultati, si calcoli la massa molare e si identifichi il gas.
8. Un recipiente cilindrico lungo 56,0 cm di diametro 12,5 cm contiene 0,350 mol di azoto alla pressione di 2,07 bar. Si calcoli v_{qm} per le molecole di azoto.

22.3 Libero cammino medio

9. A temperatura e pressione standard (0° C e 1,01 bar) il libero cammino medio nell'elio risulta di 285 nm. Determinare (a) il numero di molecole al metro cubo (densità molecolare) e (b) il diametro efficace degli atomi di elio.
10. A un'altitudine di 2500 km al di sopra della superficie terrestre la densità molecolare dell'atmosfera è di circa

 ISBN 88-408-1254-7

1,0 molecola/cm^3. (a) Quale libero cammino medio è previsto dall'Equazione 22.13 e (b) qual è il suo significato in queste condizioni? Supponete che il diametro molecolare sia $2,0 \cdot 10^{-8}$ cm.

11. Per quale frequenza la lunghezza d'onda di un suono in aria è uguale al libero cammino medio delle molecole di azoto alla pressione di 1,03 bar e alla temperatura di 18,0 °C? Si assuma il diametro delle molecole pari a 315 pm.

12. In un acceleratore di particelle i protoni si muovono lungo un percorso circolare del diametro di 23,5 m in una camera a $1,10 \cdot 10^{-6}$ torr di pressione e 295 K di temperatura. (a) Calcolate il numero di molecole di gas al centimetro cubo a questa pressione. (b) Qual è il libero cammino medio delle molecole del gas in queste condizioni, se il diametro molecolare è di $2,20 \cdot 10^{-8}$ cm?

13. Con riferimento al problema svolto 22.4, supposto che la pressione non cambi, a quale temperatura la frequenza media degli urti assume il valore di $6,0 \cdot 10^9$ s^{-1}?

22.4 Distribuzione delle velocità molecolari

14. Le velocità di 10 molecole sono: 2,0 km/s, 3,0 km/s, 4,0 km/s, . . . , 11 km/s. (a) Qual è la loro velocità media? (b) Qual è la loro velocità quadratica media?

15. (a) Dieci particelle si muovono con le seguenti velocità: quattro a 200 m/s, due a 500 m/s, e quattro a 600 m/s. Calcolate la velocità media e la velocità quadratica media. È vero che $v_{qm} > \bar{v}$? (b) Fissate una vostra distribuzione delle velocità per le 10 particelle e mostrate che $v_{qm} \geq \bar{v}$ anche per la vostra distribuzione. (c) In quale condizione (se ne esiste qualcuna) $v_{qm} = \bar{v}$?

16. Calcolare la velocità quadratica media dell'ammoniaca (NH_3) alla temperatura di 56,0 °C. La massa atomica dell'azoto è $2,33 \cdot 10^{-26}$ kg, mentre quella dell'idrogeno è $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

17. La temperatura nello spazio interstellare è di 2,7 K. Trovare la velocità quadratica media dell'idrogeno a questa temperatura (vedere la Tabella 22.1).

18. Verificare l'Equazione 22.16 risolvendo l'equazione $dN(v)/dv = 0$ rispetto a v.

19. Operare l'integrale dell'Equazione 22.17 per verificare la (22.18).

20. Operare l'integrale dell'Equazione 22.19 per verificare che $\overline{v^2} = 3kT/m$.

21. Calcolare la velocità quadratica media delle particelle di fumo, aventi massa di $5,2 \cdot 10^{-14}$ g, in aria alla temperatura di 14 °C e pressione di 1,08 bar.

22. A quale temperatura le molecole di elio hanno la stessa velocità quadratica media di quelle di idrogeno alla temperatura di 26 °C?

23. (a) Calcolare a quale temperatura le molecole di ossigeno e di idrogeno hanno v_{qm} pari alla velocità di fuga dalla Terra. (b) Sapendo che sulla Luna l'accelerazione di gravità vale 0,16g, eseguire analogo calcolo al precedente per la Luna. (c) La temperatura nell'alta atmosfera è di 1000 K. Possiamo aspettarci di trovarvi molto idrogeno? O molto ossigeno?

24. Viene dato il seguente gruppo di particelle (N_n rappresenta il numero di particelle che hanno una velocità v_n):

N_n	v_n (km/s)
2	1,0
4	2,0
6	3,0
8	4,0
2	5,0

(a) Calcolate la velocità media $\bar{v}$. (b) Calcolate la velocità quadratica media v_{qm}. (c) Delle cinque velocità indicate, qual è la velocità più probabile v_p?

25. La lunghezza L del cilindro rotante nell'apparato di Miller e Kusch (Figura 22.8) è di 20,4 cm e l'angolo ϕ vale 0,0841 rad. Quale velocità angolare ω del cilindro corrisponde alla velocità v delle molecole di 212 m/s?

26. Da un esperimento risulta che la velocità più probabile delle molecole di un gas a temperatura T_1 è uguale alla loro velocità quadratica media quando il gas ha temperatura T_2. Determinare T_2/T_1.

27. Dimostrare che la velocità più probabile per atomi di massa m espulsi dal foro di un forno a temperatura T è $v_p = \sqrt{3kT/m}$.

28. Un atomo di germanio (diametro = 246 pm) sfugge da una fornace (T = 4220 K) con velocità pari alla sua velocità quadratica media. Entra in una camera piena di argon freddo (diametro atomico = 300 pm) con densità molecolare di $4,13 \cdot 10^{19}$ molecole/cm^3. (a) Qual è la velocità degli atomi di germanio? (b) Nell'urto tra l'atomo di germanio e quello di argon qual è la distanza minima tra i centri degli atomi, supposti sferici? (c) Trovare la frequenza d'urto iniziale dell'atomo di germanio.

22.5 Distribuzione delle energie molecolari

29. Calcolare la frazione di particelle di un gas che si muovono con energia cinetica traslazionale compresa tra $0,01kT$ e $0,03kT$. (*Suggerimento*: per $E \ll kT$, il termine $e^{-E/(kT)}$ dell'Equazione 22.25 si può sostituire con $1-E/(kT)$. Perché?)

30. Trovare la frazione di particelle di un gas aventi energia cinetica traslazionale compresa nell'intervallo di $0,02kT$ centrato sull'energia più probabile E_p. (*Suggerimento*: in questa situazione $N(E)$ è circa costante. Perché?)

22.6 Equazioni di stato per i gas reali

31. Sapendo che la massa volumica dell'acqua è di 1000 kg/m^3 e che le sua massa molare vale 18 g/mol, stimare la costante b dell'equazione di van der Waals.

32. Il valore della costante b nell'equazione di van der Waals per l'ossigeno vale 32 cm^3/mol. Ricavare il diametro della molecola di ossigeno.

33. Dimostrare che la costante a dell'equazione di van der Waals può assumere l'unità di

$$\frac{\text{energia per particella}}{\text{densità di particelle}}$$

22.7 Forze intermolecolari

PROBLEMI

1. Alla temperatura di 0 °C e alla pressione di 1,013 bar le masse volumiche dell'aria, dell'ossigeno e dell'azoto sono rispettivamente 1,293 kg/m^3, 1,429 kg/m^3 e 1.250 kg/m^3. Assumendo che nell'aria siano presenti solo questi due gas, calcolare la frazione di azoto in massa.
2. La legge di *Dalton* afferma che, in presenza di una miscela di gas, la pressione esercitata da ciascun componente a una data temperatura è uguale alla pressione che eserciterebbe se da solo riempisse lo stesso volume totale; inoltre la pressione totale dovuta a tutti i componenti è uguale alla somma delle pressioni parziali dei singoli gas. Si ricavi questa legge dalla teoria cinetica servendosi dell'Equazione 22.8.
3. Un recipiente contiene due gas ideali. Il primo è presente con due moli e ha massa molare M_1; il secondo è presente con 0,5 moli e ha massa molare $M_2 = 3M_1$. Che frazione della pressione totale esercitata sulle pareti è da attribuire al secondo gas? (*Suggerimento*: vedi Problema 2.)
4. Calcolate il libero cammino medio per 35 caramelle sferiche chiuse in un vaso e agitate violentemente. Il volume del vaso sia di 1,0 L e il diametro di una caramella 1,0 cm.
5. Si possono eseguire misurazioni del libero cammino medio λ delle molecole in un gas (per esempio tramite la viscosità del gas). Alla temperatura di 20,0 °C e alla pressione di 75,0 cmHg alcune misure danno i valori λ (argon) $= 9{,}90 \cdot 10^{-6}$ cm e λ (azoto) $= 27{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm. (a) Trovare il rapporto tra il diametro delle sezione d'urto dell'argon e quello dell'azoto. (b) Quale sarebbe il libero cammino medio dell'argon alla temperatura di 20,0 °C e alla pressione di 15,0 cmHg? (c) E alla temperatura di −40,0 °C e pressione di 75,0 cmHg?
6. La probabilità che una molecola di gas percorra un tragitto compreso tra r ed $r + dr$ prima di scontrarsi con un'altra molecola è data da $Ae^{-cr}dr$, ove A e c sono due costanti. Trovare A e c in funzione del numero di molecole N e del libero cammino medio λ, ponendo il tragitto medio uguale al libero cammino medio.
7. Due recipienti hanno la stessa temperatura. Il primo contiene molecole di massa m_1 di gas alla pressione p_1 con velocità quadratica media $v_{qm,1}$. Il secondo contiene molecole di massa m_2 di gas alla pressione p_2 con velocità quadratica media $v_{qm,2}$. Trovare il rapporto m_1/m_2.
8. Un gas, non necessariamente in equilibrio termico, contiene N particelle. La distribuzione delle velocità non segue necessariamente la legge di Maxwell. (a) Dimostrare che $v_{qm} \geq \bar{v}$ indipendentemente dalla distribuzione delle velocità. (b) In che situazione vale il segno di uguaglianza?
9. Nella Figura 22.16 è riportata un'ipotetica distribuzione di velocità per N molecole di gas, ove $N(v) = Cv^2$ per $0 < v < v_0$ ed $N(v) = 0$ per $v > v_0$. Trovare (a) un'espressione per C in funzione di N e di v_0, (b) la velocità media delle particelle e (c) la velocità quadratica media delle particelle.
10. Un ipotetico campione di N particelle di gas ha la distribuzione delle velocità mostrata nella Figura 22.17, dove $N(v) = 0$ per $v > 2v_0$. (a) Esprimete a in funzione di N e v_0. (b) Quante particelle hanno velocità compresa tra $1{,}50v_0$ e $2{,}00v_0$? (c) Esprimete la velocità media delle particelle in funzione di v_0. (d) Trovate v_{qm}.

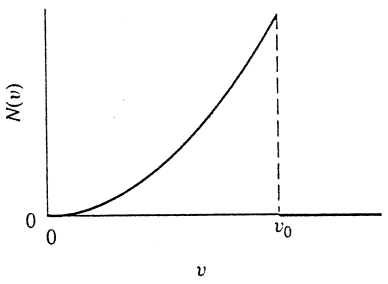


FIGURA 22.16 Problema 9.

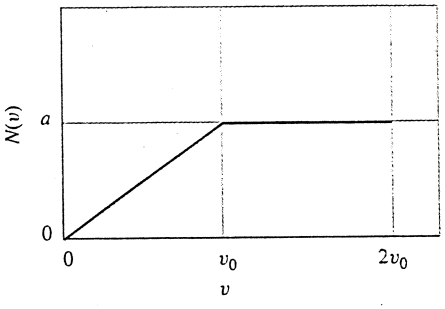


FIGURA 22.17 Problema 10.

11. Per un gas in cui tutte le molecole viaggiano con la stessa velocità $\bar{v}$, dimostrare che $v_{rel} = \frac{4}{3}\bar{v}$ piuttosto che $\sqrt{2}\bar{v}$, come risulterebbe considerando l'effettiva distribuzione delle velocità molecolari (Equazione 23.13).
12. Il Sole è come un'enorme sfera di gas ideale. L'alone che lo circonda, riprodotto nell'immagine a ultravioletti mostrata in Figura 22.18, è la *corona*, l'atmosfera solare. La sua temperatura è di $2{,}0 \cdot 10^6$ K e la sua pressione è di 0,030 Pa. Calcolare la velocità quadratica media degli elettroni liberi nella corona.

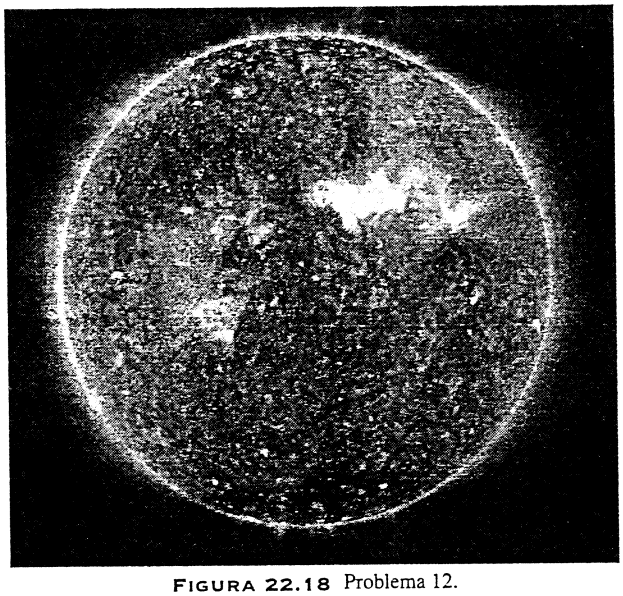


FIGURA 22.18 Problema 12.

 ISBN 88-408-1254-7

13. Supponiamo che un gas a temperatura T occupi un volume V e contenga una miscela di atomi, e precisamente N_a atomi di massa m_a e tutti con velocità v_a pari alla velocità quadratica media, nonché N_b atomi di massa m_b e tutti con velocità v_b pari alla velocità quadratica media. (a) Trovare un'espressione per la pressione totale esercitata dal gas. (b) Ora si supponga che $N_a = N_b$ e che gli atomi si combinino a volume costante per formare molecole di massa $m_a + m_b$. Quando la temperatura è tornata al suo valore iniziale qual è la nuova pressione in rapporto alla precedente?

14. Trovare *tutti* i coefficienti del viriale per un gas che obbedisce all'equazione di stato di van der Waals.

15. Un aerostato ad aria calda ha una massa totale di 249 kg e il suo pallone ha un capacità di 2180 m^3. Supponendo che sia completamente gonfio, quale temperatura deve avere l'aria per fornire all'aerostato una capacità di carico di 272 kg, che si aggiungono alla propria massa? Si assuma che l'aria circostante abbia temperatura di 18,0 °C e massa volumica di 1,22 kg/m^3.

16. Nello spazio interstellare sono presenti piccole particelle solide chiamate grani. Essi vengono continuamente bombardati dalle molecole d'idrogeno che riempiono lo spazio interstellare. Come conseguenza, i grani sono sottoposti a un moto browniano sia traslatorio sia rotatorio. Assumiamo che i grani siano sfere di diametro $4{,}0 \cdot 10^{-6}$ cm con massa volumica di 1,0 g/cm^3, e che la temperatura del gas sia di 100 K. Si trovi (a) la velocità quadratica media dei grani tra un urto e l'altro e (b) la loro approssimativa velocità angolare di rotazione in giri/s. Si assuma che l'energia cinetica si ripartisca equamente tra la forma traslazionale e quella rotazionale.

17. Come suggerisce la Figura 22.11, se le forze intermolecolari sono sufficientemente intense, la pressione p reale di un gas che obbedisce all'equazione di stato di van der Waals può annullarsi. (a) A che valore di volume molare accade ciò? (b) Dimostrare che esiste una temperatura massima oltre la quale la pressione non può annullarsi; se ne trovi il valore in funzione dei parametri a e b dell'equazione di stato di van der Waals. (c) Assumendo che l'ossigeno obbedisca a questa equazione con parametri $a = 0{,}138\ J \cdot m^3/mol^2$ e $b = 3{,}18 \cdot 10^{-5}\ m^3/mol$, trovare la temperatura massima che permette l'azzeramento della pressione e confrontarla con la temperatura standard di ebollizione dell'ossigeno.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Scrivete un programma per simulare il percorso casuale di una particella. La particella muove dall'origine e procede con un passo di incremento Δx e Δy assegnati casualmente e compresi tra -1 e 1. (a) Fate avanzare la particella per 200 passi e disegnate il percorso come in Figura 22.1. Scegliete la scala del grafico per adattarvi l'intero itinerario. (b) Ripetete con 2000 passi, ma questa volta tracciate il grafico segnando soltanto un punto ogni dieci ed aggiustando la scala in modo che possano entrare tutti. (c) Ripetete ancora con 20 000 passi e segnatene uno ogni 100. A questo punto confrontate i tre grafici. Di quanto aumenta la dimensione del grafico al crescere del numero dei passi? Gli itinerari appaiono simili? Se mischiate i grafici, siete poi in grado di riconoscerli senza avere riferimenti particolari?

2. Consideriamo un gas reale di van der Waals con $a = 0{,}10\ J \cdot m^3/mol^2$ e $b = 1{,}0 \cdot 10^{-4}\ m^3/mol$. (a) Trovare la temperatura T_{cr}, il volume V_{cr} e la pressione p_{cr} tali che $\partial p/\partial V = 0$ e $\partial^2 p/\partial V^2 = 0$. (b) Riportare su grafico la pressione in funzione del volume lungo curve isoterme per $0{,}80T_{cr}$, $0{,}85T_{cr}$, $0{,}90T_{cr}$, $0{,}95T_{cr}$, $1.00T_{cr}$, $1{,}05T_{cr}$, $1{,}10T_{cr}$. L'ascissa deve estendersi da $V = 0$ a $V = 5V_{cr}$. (c) Che significato fisico si può attribuire all'isoterma T_{cr}?

CAPITOLO 23

PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

Nei capitoli precedenti abbiamo dato per noto il concetto di calore senza tuttavia definirlo chiaramente. In questo capitolo esamineremo più in dettaglio la natura del calore. Una volta entrati in possesso dei concetti di lavoro, calore ed energia interna ritorneremo per un'analisi più approfondita alla prima legge della termodinamica, già introdotta alla fine del Capitolo 13. Concluderemo applicando questa legge a molte trasformazioni termodinamiche, scegliendo ancora una volta il gas perfetto come fluido campione.

23.1 CALORE: ENERGIA IN TRANSITO

È una comune esperienza mettere su un tavolo a temperatura ambiente un bicchiere di acqua ghiacciata o una chicchera di caffè: il caffè si raffredda e l'acqua si riscalda, tendendo entrambi ad avvicinarsi alla temperatura dell'ambiente. In ogni caso gli oggetti tendono a stabilire un equilibrio termico con l'ambiente.

Abbiamo già accennato al fatto che questa tendenza all'equilibrio termico deve implicare qualche specie di scambio di energia fra il sistema e l'ambiente circostante. Nel Paragrafo 13.7 (che conviene riguardare) abbiamo definito il calore Q come l'energia trasferita, ad esempio dal caffè all'ambiente o dall'ambiente all'acqua gelata. In particolare:

> *il calore è energia che fluisce tra un sistema e il suo ambiente a causa della differenza di temperatura fra essi esistenti.*

La Figura 23.1 riassume questa affermazione. Se la temperatura T_S di un sistema è minore della temperatura T_A dell'ambiente, l'energia fluisce dall'ambiente *al* sistema sotto forma di calore. Adottiamo per i segni una convenzione tale che la quantità di calore Q in questo caso sia positiva, perché tende ad aumentare l'energia interna E_{int} del sistema.

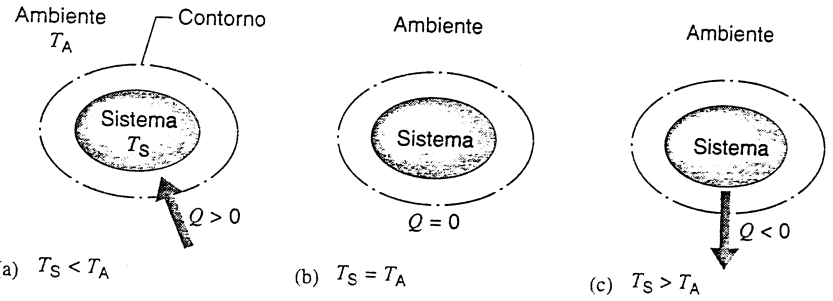


FIGURA 23.1 (a) Se la temperatura T_S di un sistema è minore della temperatura T_A dell'ambiente, il calore fluisce dall'esterno all'interno del sistema fino al raggiungimento della situazione di equilibrio illustrata in (b). (c) Se la temperatura di un sistema è maggiore di quella dell'ambiente, il calore viene ceduto dal sistema all'ambiente.

 ISBN 88-408-1254-7

Se invece è $T_S > T_A$, l'energia fluisce *fuori* dal sistema, diminuendo così E_{int}, e il calore Q in questo caso è negativo.

Come le altre forme di energia, il calore può essere espresso nell'unità SI joule (J). Nel Paragrafo 13.7 abbiamo elencato le relazioni fra il joule e alcune altre unità in cui talvolta si misura il calore.

Fraintendimenti riguardo al calore

Il calore è simile al lavoro, in quanto entrambi rappresentano mezzi di trasferimento di energia. Né il calore né il lavoro sono proprietà intrinseche di un sistema: non possiamo dire che un sistema «contiene» una certa quantità di calore o di lavoro. A differenza di altre proprietà, quali la pressione, la temperatura e l'energia interna, il calore e il lavoro non sono proprietà dello stato di un sistema: non sono *funzioni di stato*. Possiamo invece affermare che una certa quantità di energia si può trasferire, all'interno o all'esterno di un sistema, sotto forma di calore o di lavoro. Associamo così il calore e il lavoro a un *processo termodinamico*, ossia all'interazione fra il sistema e l'ambiente circostante mentre il sistema passa da uno a un altro stato di equilibrio.

Come ricordato nel Paragrafo 13.7, nell'uso corrente il termine calore è spesso confuso con la temperatura o con l'energia interna. Quando una ricetta di cucina dice: "scaldare a 150 gradi" intende "alla temperatura di 150 gradi Celsius". Si sente anche parlare di "calore prodotto" nei pattini dei freni di un'auto durante l'arresto. In questo caso sono aumentate sia la temperatura sia l'energia interna dei pattini dei freni per il lavoro di attrito applicato al sistema. L'aumento di temperatura dei freni non è dovuto a un apporto di calore da parte di un oggetto esterno al sistema avente una temperatura più elevata. Non è questo il caso. L'unico trasferimento di calore è avvenuto *dai* pattini dei freni surriscaldati *ai* loro dintorni immediati.

23.2 TRASMISSIONE DEL CALORE

Abbiamo visto che si ha un trasferimento di calore fra un sistema e l'ambiente quando le loro temperature sono differenti. Non abbiamo però descritto il meccanismo mediante il quale si verifica questa trasmissione di calore. Ne esistono tre: la conduzione termica, la convezione e l'irraggiamento.

Conduzione del calore

Se lasciate un attizzatoio nel fuoco per un certo tempo, il suo manico diventerà rovente. L'energia si trasferisce dal fuoco all'impugnatura per *conduzione termica* lungo il manico metallico. Nei metalli, come vedremo nel Capitolo 49, alcuni degli elettroni dell'atomo sono liberi di vagare entro i confini dell'oggetto metallico e possono così trasportare gli incrementi della loro energia cinetica dalle zone di temperatura più elevata a zone di temperatura più bassa. In questo modo si crea lungo il manico fino all'impugnatura un campo di temperature crescenti nel tempo.

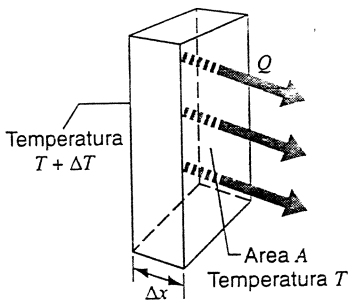


FIGURA 23.2 Il calore Q attraversa una lastra rettangolare di spessore Δx e superficie di area A.

Consideriamo una lastra sottile di un materiale omogeneo di spessore Δx e area A (Figura 23.2). Una faccia sia tenuta a temperatura costante T e l'altra a una temperatura costante un poco maggiore $T + \Delta T$, in modo uniforme su ciascuna superficie. Consideriamo la potenza termica $H(= Q/\Delta T)$ passante attraverso la lastra. (L'unità SI per H è il joule al secondo, ossia il watt.) L'esperienza dimostra che H è (1) direttamente proporzionale ad A (più area è disponibile, più calore passa nell'unità di tempo); (2) inversamente proporzionale a Δx (più spessa è la lastra, meno calore sarà trasferito nell'unità di tempo); (3) direttamente proporzionale a ΔT (a maggiore differenza di temperatura corrisponde maggiore potenza termica). Possiamo riassumere questi risultati sperimentali nella relazione

$$H = kA\frac{\Delta T}{\Delta x}, \qquad (23.1)$$

ove il coefficiente di proporzionalità k è la conducibilità termica del materiale. L'unità SI per il coefficiente k è il watt al metro kelvin [W/(m · K)].

La Tabella 23.1 riporta i valori di k per alcune sostanze. Una sostanza con un valore elevato di k è un buon conduttore di calore; una con un valore più basso è un cattivo conduttore di calore, o magari un buon isolante termico. La Figura 23.3 mostra gli effetti che può presentare una pavimentazione da cortile che ha lastre di calcestruzzo separate da listelli di abete. Come risulta dalla Tabella 23.1 la conducibilità termica del calcestruzzo è oltre cinque volte quella dell'abete; la conduzione termica dal terreno (più caldo), attraverso il calcestruzzo e i listelli di abete, all'aria esterna (più fredda) fa sciogliere per prima la neve che sta sopra il calcestruzzo.

Nella scelta dei materiali da costruzione capita spesso di trovare che sono classificati in base alla loro *resistenza termica*, così definita:

$$R = \frac{L}{k}, \qquad (23.2)$$

ove L è lo spessore del materiale attraverso il quale si trasferisce il calore. In tal modo più bassa è la conducibilità termica, maggiore è la resistenza termica: un buon isolante ha un basso valore di conducibilità. Numericamente il valore di R si può calcolare dall'Equazione 23.2 in unità SI $m^2 \cdot K/W$. La resistenza termica è definita per un certo

TABELLA 23.1 Conducibilità termica e resistenza termica per alcuni materiali[a]

Materiale	*Conducibilità k* (W/m · K)	*Resistenza termica R* ($m^2 \cdot K/W$)
Metalli		
Acciaio inossidabile	14	$7{,}1 \cdot 10^{-4}$
Piombo	35	$2{,}9 \cdot 10^{-4}$
Alluminio	235	$0{,}43 \cdot 10^{-4}$
Rame	401	$0{,}25 \cdot 10^{-4}$
Argento	428	$0{,}23 \cdot 10^{-4}$
Gas		
Aria (secca)	0.026	$3850 \cdot 10^{-4}$
Elio	0.15	$667 \cdot 10^{-4}$
Idrogeno	0.18	$556 \cdot 10^{-4}$
Materiali da costruzione		
Poliuretano espanso	0,024	$4170 \cdot 10^{-4}$
Lana di roccia	0,043	$2330 \cdot 10^{-4}$
Lana di vetro	0,048	$2080 \cdot 10^{-4}$
Abete	0.14	$714 \cdot 10^{-4}$
Calcestruzzo	0,80	$125 \cdot 10^{-4}$
Vetro da finestre	1,0	$100 \cdot 10^{-4}$

[a] I valori dati sono per temperatura ambiente. I valori della resistenza termica si riferiscono a lastre o strati di 1 cm di spessore.

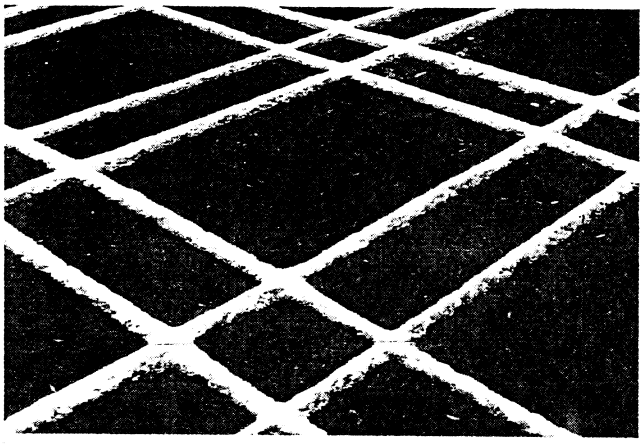


FIGURA 23.3 La neve a contatto con il cemento si scioglie mentre quella che si è posata sugli interstizi lignei non lo fa; il cemento è un conduttore termico migliore del legno.

spessore del materiale. Per esempio, uno spessore di 1 cm di lana di vetro ha $R \approx 0{,}23\ m^2 \cdot K/W$, mentre per il legno si ha $R \approx 0{,}07\ m^2 \cdot K/W$, che perciò conduce tre volte rispetto alla lana di vetro (ossia occorre uno spessore di legno triplo dello spessore di uno strato di lana di vetro per avere lo stesso isolamento termico). Uno strato di un centimetro di aria avrebbe $R \approx 0{,}38\ m^2 \cdot K/W$, ma, poiché l'aria trasferisce il calore principalmente per convezione, la sua resistenza al trasferimento di calore per conduzione non è un indice significativo del suo potere isolante. Nella Tabella 23.1 sono indicati per alcuni materiali, oltre ai valori della conducibilità termica, i valori della resistenza termica per lastre dello spessore di 1 cm.

Consideriamo ora due applicazioni dell'Equazione 23.1. Esaminiamo dapprima una lunga bacchetta di lunghezza L e sezione uniforme A (Figura 23.4a), che a un'estremità è tenuta a un'alta temperatura T_2 e all'altra a una temperatura più bassa T_1.* Questo stato è definito *regime stazionario*, in cui le temperature e la potenza termica trasmessa si mantengono costanti nel tempo. Così ogni incremento di energia che entra nella bacchetta dall'estremità più calda ne esce da quella più fredda. Da un altro punto di vista possiamo dire che in ogni sezione della bacchetta passa un'uguale quantità di calore nell'unità di tempo. Per questo caso la (23.1) si può scrivere così:

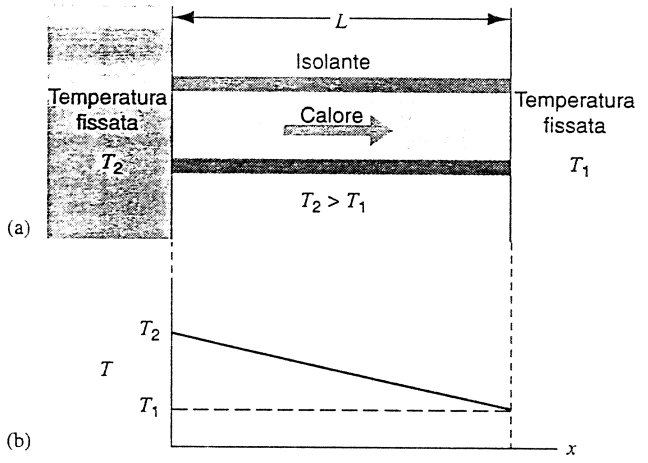


FIGURA 23.4 (a) Conduzione del calore attraverso una sbarra conduttrice isolata dall'esterno. (b) Grafico della temperatura lungo la sbarra.

$$H = kA\frac{T_2 - T_1}{L}. \qquad (23.3)$$

ove L è lo spessore del materiale nella direzione del trasferimento di calore. La potenza termica trasmessa H è una costante, e la temperatura diminuisce linearmente fra le due estremità della bacchetta (Figura 23.4b).

Passiamo a un altro caso, in cui la lastra ha uno spessore dx e una differenza di temperatura fra le due facce dT, entrambe quantità infinitesime; si può scrivere pertanto

$$H = -kA\frac{dT}{dx}. \qquad (23.4)$$

La derivata dT/dx è chiamata *gradiente di temperatura*. Si adotta come verso positivo per la variabile x nell'Equazione 23.4 quello in cui fluisce il calore: e poiché il calore fluisce nel senso delle temperature *decrescenti*, il gradiente dT/dx è intrinsecamente negativo. Nell'Equazione 23.4 introduciа-

* Si può ammettere che le estremità della bacchetta siano immerse in serbatoi termici, che possono assorbire o erogare una quantità illimitata di calore mantenendo una temperatura costante. Un serbatoio termico può essere costituito da un corpo omogeneo così grande e capace di assorbire tanto calore che il flusso di calore scambiato con la bacchetta provochi una variazione trascurabile della sua temperatura. Oppure potrebbe essere una miscela di vapore e acqua tenuta al punto di ebollizione, o di ghiaccio e acqua al punto di fusione, così che il calore trasmesso provochi un cambiamento di fase senza variazione di temperatura. Altre soluzioni prevedono caldaie o refrigeranti in cui il calore è convertito in lavoro meccanico o viceversa mantenendo fissa la temperatura.

 ISBN 88-408-1254-7

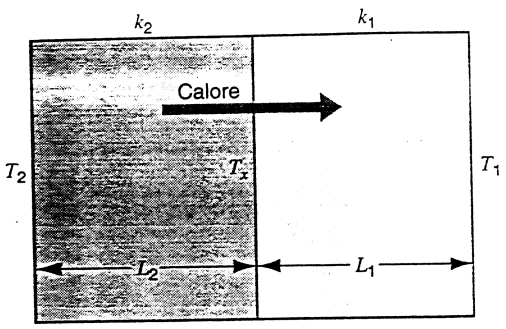


FIGURA 23.5 Problema svolto 23.1. Conduzione del calore attraverso due strati con diversa conducibilità termica.

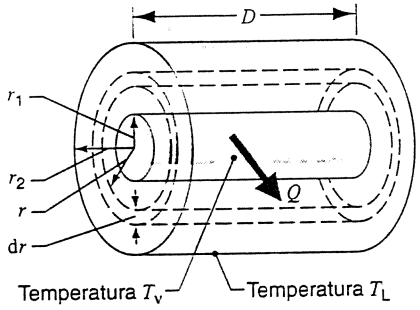


FIGURA 23.6 Problema svolto 23.2. La superficie interna (raggio r_1) dello strato isolante che circonda un tubo cilindrico è alla temperatura T_v; la superficie esterna (raggio r_2) è alla temperatura T_L. I gusci cilindrici isolanti sono tutti attraversati da una quantità di calore uguale alla quantità Q che fluisce lungo il guscio centrale, tratteggiato in figura, di spessore dr e raggio r.

mo un segno meno per esser certi che H, la potenza termica trasmessa, sia positiva.

L'Equazione 23.4 è particolarmente adatta per i casi in cui la sezione del materiale attraverso il quale si trasferisce il calore non è uniforme. Il Problema svolto 23.1 ne costituisce un esempio.

PROBLEMA SVOLTO 23.1 Consideriamo una lastra composta, formata da due materiali aventi spessori differenti L_1 ed L_2, e differenti conducibilità termiche k_1 e k_2. Se le temperature delle facce esterne sono T_1 e T_2, con $T_2 > T_1$, trovate la potenza termica trasmessa attraverso la lastra composta (Figura 23.5) a regime stazionario.

Soluzione Sia T_x la temperatura all'interfaccia fra i due materiali. La potenza termica trasmessa attraverso la lastra 2 sarà

$$H_2 = \frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2}$$

e, attraverso la lastra 1,

$$H_1 = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}.$$

A regime stazionario $H_2 = H_1$, di modo che

$$\frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}.$$

Sia H la potenza termica trasmessa, identica per tutte le sezioni. Ricavando T_x e sostituendola in una qualunque delle equazioni per H_1 o H_2, si ottiene

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{R_1 + R_2}.$$

Estendendo a qualsiasi numero n di lastre in serie, si ha

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{\sum(L_n/k_n)} = \frac{A(T_2 - T_1)}{\sum R_n}. \qquad (23.5)$$

PROBLEMA SVOLTO 23.2 Un sottile tubo cilindrico di metallo trasporta vapore a temperatura $T_v = 100\,°C$. Ha diametro 5,4 cm ed è coperto da uno strato isolante di lana di vetro spesso 5,2 cm. Un tratto di lunghezza $D = 6{,}2$ m attraversa un locale alla temperatura $T_L = 11\,°C$. (a) Che potenza termica si trasmette attraverso l'isolamento? (b) Quanto isolante bisogna aggiungere per ridurre a metà la perdita di calore?

Soluzione (a) La Figura 23.6 mostra la geometria da adottare per il calcolo. A regime stazionario la potenza termica trasmessa H sarà costante e sarà identica per ogni sottile strato cilindrico, come quello indicato dal tratteggio nella Figura 23.6, che si può considerare di spessore dr e area $2\pi r D$. Applicando la (23.4) a questo schema otteniamo

$$H = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi r D)\frac{dT}{dr},$$

ossia

$$H\frac{dr}{r} = -2\pi k D\, dT.$$

Ammettiamo che il sottile tubo metallico sia alla temperatura del vapore. Integriamo dal raggio interno r_1 dell'isolamento, ove la temperatura è T_v, al raggio esterno r_2, ove la temperatura è T_L:

$$\int_{r_1}^{r_2} H\frac{dr}{r} = -2\pi k D\int_{T_v}^{T_L} dT.$$

Portando la costante H fuori dal segno d'integrale a sinistra, e risolvendo gli integrali, si ottiene

$$H\ln\frac{r_2}{r_1} = -2\pi k D(T_L - T_v) = 2\pi k D(T_v - T_L).$$

Passando ai valori numerici troviamo H:

$$H = \frac{2\pi k D(T_L - T_v)}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi[(0{,}048\ \text{W/(m}\cdot\text{K)}](6{,}2\ \text{m})(89\ \text{K})}{\ln(7{,}9\ \text{cm}/2{,}7\ \text{cm})} = 155\ \text{W}.$$

Si noti che, se non avessimo inserito il segno meno nella (23.4), il segno algebrico di H sarebbe risultato negativo.

(b) Per ridurre a metà il calore trasferito dobbiamo aumentare r_2 fino a un valore r_2' tale che si raddoppi il denominatore nell'espressione finale di H, ossia

$$\frac{\ln(r_2'/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} = 2.$$

che, risolta rispetto a r_2', dà

$$r_2' = \frac{r_2^2}{r_1} = \frac{(7{,}9\ \text{cm})^2}{2{,}7\ \text{cm}} = 23\ \text{cm}.$$

Occorre quindi quasi il quadruplo di spessore dell'isolamento per ridurre a metà la potenza termica trasmessa! Questo è dovuto all'aumento dell'area, e quindi della massa, contenuta in ogni strato sottile per effetto dell'aumento del raggio. In questa geometria cilindrica c'è più materiale disponibile per condurre il calore verso il raggio esterno, e occorre aggiungere un sempre maggior spessore di isolante all'aumentare del raggio. Nella geometria lineare invece la resistenza termica aumenta proporzionalmente allo spessore. Nella geometria sferica poi, che si deve applicare per calcolare l'energia termica trasferita dall'interno della Terra alla superficie, il calcolo è ancora differente; si veda il Problema 3.

Convezione

Osservando la fiamma di una candela o di un fiammifero si assiste al trasporto di energia termica verso l'alto per *convezione*. Il trasporto di calore per convezione avviene quando un fluido, come aria o acqua, è in contatto con un oggetto la cui temperatura è diversa da quella del fluido che lo circonda.

Poniamo per esempio il caso in cui il fluido sia a temperatura minore. La temperatura del fluido in diretto contatto con l'oggetto si innalza e, nella maggior parte dei casi, il fluido si espande. Il fluido più caldo è meno denso di quello freddo che lo circonda e quindi sale per effetto della spinta di Archimede, come in Figura 23.7. Il fluido circostante, più freddo di quello ascendente, discende per prenderne il posto, e si stabilisce così una circolazione convettiva.

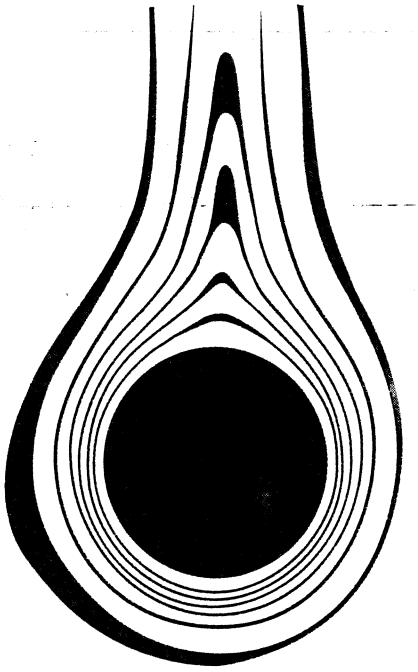


FIGURA 23.7 L'aria che circonda un cilindro caldo si muove verso l'alto per convezione. Le regioni nere rappresentano strati d'aria in cui la temperatura è uniforme.

L'influenza della convezione atmosferica è fondamentale per l'evoluzione climatica su larga scala e per le condizioni meteorologiche locali giornaliere. I piloti di alianti, come pure uccelli come i condor, vanno alla ricerca delle correnti termiche convettive che, salendo dalle zone sottostanti più calde della superficie terrestre, li tengono in volo. E analogamente sotto la superficie degli oceani avvengono massicci trasferimenti di energia. La regione esterna del Sole, detta *fotosfera*, è un'enorme sequenza di celle convettive che trasportano energia alla superficie del Sole e le conferiscono un aspetto granulare. Ed è da ritenere che anche il mantello della Terra contenga poderose celle convettive: la loro superficie esterna costituisce le placche tettoniche, la cui deriva sposta i continenti.

Abbiamo finora descritto la convezione *naturale*. Essa può però anche essere forzata, come nel caso in cui il ventilatore di un aerotermo produce una circolazione d'aria atta a scaldare i locali di un'abitazione.

Irraggiamento

L'energia del Sole ci viene trasportata da onde elettromagnetiche che viaggiano indisturbate nel vuoto quasi assoluto dello spazio interplanetario. Se sedete vicino a un falò vi scaldate per un effetto analogo. Tutti gli oggetti emettono queste radiazioni elettromagnetiche dipendenti dalla loro temperatura (esterna), e assorbono al tempo stesso una parte della radiazione termica che li investe, emessa da altri oggetti. Un oggetto irraggia tanto più calore quanto più elevata è la sua temperatura.

Nel Capitolo 45 vedremo che l'energia irraggiata da un oggetto è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta (in kelvin). La temperatura media della superficie terrestre, per esempio, si stabilisce a circa 300 K perché a questo valore di temperatura la Terra irraggia all'incirca tanta energia nello spazio quanta ne riceve (mediamente) dal Sole; si veda la Figura 23.8.

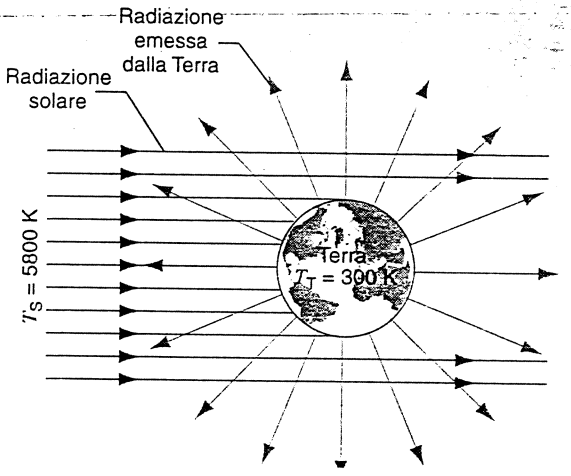


FIGURA 23.8 La radiazione solare che giunge sulla Terra viene per lo più assorbita; la temperatura T_T della Terra è tale che la sua radiazione emessa sia esattamente uguale a quella solare assorbita dal pianeta.

 ISBN 88-408-1254-7

23.3 PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

Nel Capitolo 13 abbiamo illustrato il principio fondamentale della conservazione dell'energia in un sistema di particelle. Come nel caso della conservazione della quantità di moto discusso nel Capitolo 7, abbiamo focalizzato la nostra attenzione su un particolare insieme di particelle, che abbiamo definito come il *sistema*. Abbiamo tracciato un contorno immaginario che isola il nostro sistema dall'*ambiente esterno*, e abbiamo quindi accuratamente rilevato tutte le interazioni presenti fra il sistema e l'ambiente esterno. A volte, come nel caso della quantità di moto, è opportuno esprimere queste interazioni in termini di *forze*; oppure può convenire considerarle trasferimenti di energia.

Siamo liberi di definire il nostro sistema secondo i criteri che preferiamo, purché siano fra loro coerenti e consentano di identificare tutti gli scambi di energia fra sistema e ambiente esterno. Potremmo per esempio assumere come sistema un blocco di metallo a temperatura minore della temperatura ambiente, definendo così come verso della trasmissione di energia quello dall'ambiente al blocco. Oppure un sistema di acqua mescolata con ghiaccio in un recipiente isolato: avremmo così uno scambio di energia termica *all'interno* del sistema, ma nessuna interazione con l'ambiente esterno.

Per un sistema termodinamico, per il quale l'energia interna è l'unico tipo di energia possibile, il principio di conservazione dell'energia si può esprimere così:

$$Q + L = \Delta E_{\text{int}} . \qquad (23.6)$$

Esaminiamo questa equazione, che è una formulazione della *prima legge della termodinamica*. Osserviamo che in essa

> Q è l'energia trasferita (sotto forma di calore) fra il sistema e l'ambiente esterno per effetto di una differenza di temperatura fra essi esistente. Un trasferimento di calore che avvenga interamente entro il contorno del sistema non è compreso in Q.
>
> L è il lavoro compiuto sul (o dal) sistema per effetto di forze che agiscono attraverso il contorno del sistema. Un lavoro svolto da forze che agiscono interamente all'interno dei confini del sistema non entra nel computo di L.
>
> ΔE_{int} è la variazione di energia interna del sistema, che interviene quando si verifica un trasferimento di energia, sotto forma di calore o di lavoro, fra il sistema e l'ambiente esterno.

Abbiamo stabilito per convenzione che Q sia positivo quando il calore viene trasferito dall'ambiente esterno al sistema, e che L sia positivo quando il lavoro è compiuto sul sistema: valori positivi di Q e di L vanno così ad aumentare l'energia interna del sistema.*

L'Equazione 23.6 è una forma ridotta del principio generale di conservazione dell'energia. Per esempio, non contempla un termine relativo a possibili variazioni di energia cinetica, che potrebbe intervenire qualora il sistema fosse in moto rispetto al nostro sistema di riferimento. Dovremmo, in tal evenienza, aggiungere un termine ΔK_{cm} al membro di destra della (23.6), ma nei sistemi che descriveremo il centro di massa è sempre a riposo nel riferimento scelto, e quindi lo omettiamo.

La Figura 23.9 visualizza come può essere applicata la (23.6). Il sistema parte da uno stato di *equilibrio iniziale* «i» nella Figura 23.9a, ove le proprietà del sistema, come la sua energia interna E_{int}, hanno valori costanti ben definiti. Nella Figura 23.9b il sistema è soggetto a un processo, detto anche *trasformazione termodinamica*, ossia a un evento in cui interagisce con l'ambiente esterno, tramite scambio di calore e/o di lavoro. Alla chiusura del processo, il sistema entra in uno stato di *equilibrio finale* «f», in cui le sue proprietà avranno, in generale, valori diversi da quelli iniziali e nuovamente costanti.

Esistono trasformazioni di diversi tipi che portano un sistema da uno specifico stato iniziale a uno specifico stato finale. In generale si potranno adottare diversi valori di Q e di L, a seconda del tipo di trasformazione scelta. Ma la loro somma $Q + L$ sarà uguale per tutti i processi che portano dallo stato iniziale i allo stato finale f. Come risulta dall'Equazione 23.6, è questa la base sperimentale per considerare l'energia interna E_{int} una vera *funzione di stato*, detta anche *variabile di stato*, ossia una proprietà intrinseca del sistema al pari della pressione, della temperatura e del volume. Per sottolineare questo punto di vista possiamo così esprimere formalmente la prima legge della termodinamica:

*Alcuni autori definiscono positivo il lavoro svolto *dal* sistema, e scrivono così la prima legge: $Q - L = \Delta E_{\text{int}}$. Abbiamo preferito definire positivo il lavoro fatto *sul* sistema per adottare la stessa convenzione dei segni usata nei capitoli precedenti per il lavoro meccanico.

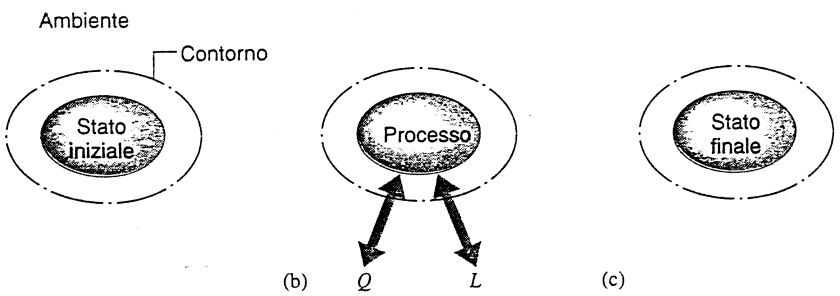


FIGURA 23.9 (a) Sistema nel suo stato iniziale in equilibrio con il suo ambiente. (b) Processo termodinamico durante il quale il sistema scambia con l'esterno il calore Q e compie il lavoro L. (c) Sistema nel suo stato d'equilibrio finale raggiunto come risultato del processo termodinamico.

in qualsiasi processo termodinamico fra due stati di equilibrio i *ed* f, *la quantità* $Q + L$ *ha lo stesso valore qualunque sia il percorso seguito per passare da* i *a* f; *questa quantità equivale alla variazione di una funzione di stato, chiamata energia interna* E_{int}.

La prima legge della termodinamica è un risultato generale che si ritiene possa applicarsi a qualsiasi processo naturale che intervenga fra diversi stati di equilibrio. Non è necessario che in ogni stadio del processo si realizzi uno stato di equilibrio, basta che siano tali lo stato iniziale e quello finale. Possiamo ad esempio applicarlo all'esplosione di un fuoco d'artificio in un fusto metallico isolato. Possiamo valutare il bilancio dell'energia prima dell'esplosione e dopo che il sistema sia tornato in equilibrio, e così facendo non dobbiamo preoccuparci delle turbolente condizioni intermedie in cui la pressione e la temperatura non erano ben definite.

Per la sua generalità, la prima legge non presenta una descrizione soddisfacente dei fatti naturali. Afferma che l'energia deve conservarsi in qualsiasi processo, ma non ci dice se un qualsiasi processo particolare che conservi l'energia può effettivamente realizzarsi. L'esplosione dei fuochi d'artificio, per esempio, libera l'energia chimica immagazzinata nella polvere pirica, che accresce la temperatura dei gas all'interno del fusto. Si potrebbe immaginare che i gas caldissimi restituiscano la loro energia termica ai combustibili, rigenerando la polvere pirica e ricostituendo il fuoco d'artificio, ma ciò non accadrà mai. Il principio di conservazione dell'energia sarebbe rispettato in entrambi i sensi, ma la natura sembra preferire una certa direzione nello svolgersi degli eventi. La *seconda* legge della termodinamica, oggetto del Capitolo 24, chiarisce questa distinzione.

Nella termologia, come nella meccanica, bisogna descrivere con molta chiarezza il sistema al quale si voglia applicare leggi fondamentali come l'Equazione 23.6. La Figura 23.10, per esempio, mostra una resistenza elettrica sommersa nell'acqua contenuta in un recipiente isolato. La corrente che alimenta la bobina è fornita da un generatore (ideale) mosso da un peso che cade a velocità costante. Vediamo quali valori avranno Q, L e ΔE_{int} per diverse scelte arbitrarie di quello che chiamiamo il sistema:

1. *Sistema = soltanto acqua.* Il calore è fornito all'acqua dalla resistenza, che si trova fuori dal sistema: $Q > 0$. Non si svolge alcun lavoro perché l'acqua non si muove per effetto di alcuna forza esterna: $L = 0$. Per la prima legge quindi $\Delta E_{int} > 0$. Il calore somministrato all'acqua ne aumenta l'energia interna, e la sua temperatura sale.

2. *Sistema = resistenza + peso.* Mentre il peso scende a velocità costante la resistenza rimane a una temperatura costante. Il sistema è a regime stazionario, senza trasferimenti di energia entro i confini del sistema. Perciò $\Delta E_{int} = 0$. Vi è dell'energia termica trasferita dalla resistenza all'acqua, che si trova fuori del sistema: $Q < 0$. La forza di gravità, esterna al sistema, compie lavoro sul peso: $L > 0$. Il sistema agisce come un mezzo di trasporto e trasformazione dell'energia, dalla forma gravitazionale a quella termica.

3. *Sistema = resistenza + peso + acqua.* Qui la forza di gravità, esterna, compie lavoro sul sistema, cosicché $L > 0$. L'isolamento del recipiente impedisce le perdite di calore verso l'ambiente, per cui $Q = 0$. Dall'Equazione 23.6, quindi, $\Delta E_{int} > 0$. Anche qui, il lavoro compiuto da una forza esterna produce un aumento dell'energia interna, e quindi della temperatura, del sistema.

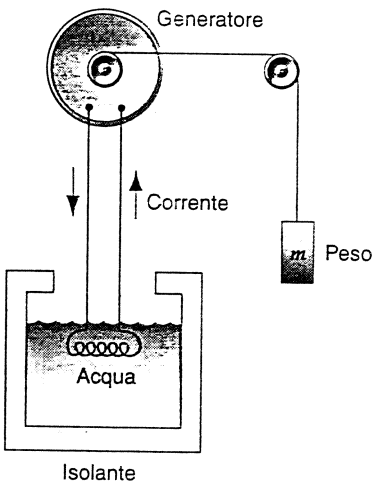


FIGURA 23.10 Un avvolgimento percorso da corrente proveniente da un generatore ideale, attivato da un peso in caduta libera, viene posto in acqua. Il valore delle grandezze Q, L e ΔE_{int}, che compaiono nell'Equazione 23.6, dipende da quale parte del dispositivo sperimentale viene considerata come «sistema» termodinamico.

4. *Sistema = resistenza + peso + acqua + Terra.* Qui la forza di gravità è interna al sistema, per cui $L = 0$. E così pure $Q = 0$, come nel caso precedente. Si ha dunque $\Delta E_{int} = 0$. L'energia interna di una parte del sistema è cresciuta per l'aumento di temperatura dell'acqua; ma quella di un'altra parte del sistema è diminuita – e della stessa quantità – perché il peso che scende e la Terra si avvicinano, diminuendo così la loro energia potenziale.

Questo esempio ci insegna che bisogna essere molto attenti nella definizione del sistema, e attenersi scrupolosamente, nel corso di tutta l'analisi, alle regole derivanti da questa definizione.

23.4 CAPACITÀ TERMICA E CALORE SPECIFICO

Possiamo modificare lo stato di un corpo fornendogli o sottraendogli energia termica (calore), oppure energia meccanica (lavoro). Una proprietà del corpo che è soggetta a variare per effetto di questi tipi di trasformazione è la sua temperatura T. La variazione di temperatura ΔT corrispondente al trasferimento di una quantità di calore Q dipende dalle circostanze in cui il calore è trasmesso. Per esempio, nel caso di un gas confinato in un cilindro da un pistone mobile, possiamo fornire calore tenendo fisso il pistone, mantenendo così costante il volume del gas, oppure consentendo al pistone di scorrere nel cilindro, ma assoggettandolo a una

 ISBN 88-408-1254-7

forza costante, mantenendo così il gas a pressione costante. Possiamo perfino cambiare la temperatura di un corpo senza fornire calore, ma compiendo lavoro su di esso, per esempio strofinandolo contro un altro oggetto in modo da far agire forze d'attrito reciproche.

È conveniente definire la *capacità termica* C di un corpo come rapporto fra la quantità di energia termica Q trasferita e il valore della sua corrispondente variazione di temperatura ΔT; ossia

$$C = \frac{Q}{\Delta T}. \tag{23.7}$$

Il termine «capacità» può indurre in errore perché suggerisce l'idea di "quantità di calore che un corpo può contenere", come se fosse un recipiente di un determinato volume. Si tratta invece semplicemente dell'energia, per unità di incremento termico, trasferita sotto forma di calore al variare della temperatura del corpo.

La capacità termica per unità di massa di un corpo, chiamata *capacità termica specifica*, o semplicemente *calore specifico*, è una caratteristica del materiale di cui il corpo è composto:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m\,\Delta T}. \tag{23.8}$$

La capacità termica è dunque una caratteristica di un determinato corpo, mentre il calore specifico è una proprietà di una certa sostanza. Così, possiamo parlare della capacità termica di un certo blocco di rame, oppure del calore specifico del rame.

Né la capacità termica di un corpo né il calore specifico di un materiale sono costanti: dipendono entrambi dalla temperatura, e magari da altre variabili, come per esempio la pressione. Le equazioni forniscono soltanto valori medi validi per un intervallo di temperature ΔT: per $\Delta T \to 0$ si può parlare di calore specifico riferito a una particolare temperatura T.

Possiamo determinare il calore da fornire a un corpo di massa m, costituito di una sostanza avente calore specifico c, per aumentare la sua temperatura dal valore iniziale T_i al valore finale T_f dividendo la variazione di temperatura in N piccoli intervalli ΔT_n, tali da poter ammettere che c_n sia costante entro ciascuno di essi, e sommandone i contributi per tutti gli intervalli $n = 1, 2, \ldots, N$. Si ha

$$Q = \sum_{n=1}^{N} m c_n\,\Delta T_n \tag{23.9}$$

che, in termini differenziali, diventa

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c\,\mathrm{d}T, \tag{23.10}$$

ove c può essere funzione della temperatura. A temperature ordinarie e per ordinari intervalli di temperatura il calore specifico si può ritenere costante. Per esempio il calore specifico dell'acqua varia meno dell'1% nell'intervallo da 0 °C a 100 °C. Possiamo perciò scrivere la (23.10) nella forma, generalmente più utile,

$$Q = mc(T_f - T_i). \tag{23.11}$$

L'Equazione 23.8 non definisce in modo univoco il calore specifico. Bisogna anche definire sotto quali condizioni il calore sia somministrato al corpo. Una condizione usuale stabilisce che l'oggetto in esame rimanga a normale (costante) pressione atmosferica durante l'apporto di calore, ma esistono altri parametri da considerare, ciascuno dei quali può portare a differenti versioni di c: calore specifico c_p, a pressione costante, calore specifico c_V, a volume costante, ecc.

La Tabella 23.2 fornisce i valori del calore specifico di alcune sostanze di uso comune. Pur essendo indicato come unità di temperatura il kelvin, i valori sono validi anche per gradi Celsius, visto che, per le differenze di temperatura, l'unità K è identica all'unità °C.

PROBLEMA SVOLTO 23.3 Un cubo di rame avente massa $m_{Cu} = 75$ g è collocato in un forno alla temperatura $T_0 = 312$ °C fino a raggiungere l'equilibrio termico. Il cubo viene quindi immerso bruscamente in un bicchiere isolato contenente una quantità di acqua di massa $m_a = 220$ g. La capacità termica del bicchiere vuoto è $C_b = 190$ J/K. Inizialmente acqua e bicchiere sono alla temperatura $T_i = 12{,}0$ °C. Quale sarà la temperatura finale di equilibrio del sistema rame + acqua + bicchiere?

Soluzione Una volta che il cubetto di rame è stato gettato nel bicchiere, nel sistema rame + acqua + bicchiere non entra più energia dall'esterno sotto forma di calore né di lavoro, e quindi l'energia interna totale rimane costante. Ma vi sono ancora variazioni dell'energia interna dei tre componenti, che possiamo considerare sottosistemi. Queste tre variazioni di energia interna devono dare somma zero:

$$\Delta E_{int,Cu} + \Delta E_{int,a} + \Delta E_{int,b} = 0.$$

TABELLA 23.2 Calore specifico di alcune sostanze[a]

Sostanza	*Calore specifico* [J/(kg · K)]	*Calore specifico molare* [J/(mol · K)]
Elementi solidi		
Piombo	129	26,7
Tungsteno	135	24,8
Argento	236	25,5
Rame	387	24,6
Carbonio	502	6,02
Alluminio	900	24,3
Altri materiali solidi		
Ottone	380	
Granito	790	
Vetro	840	
Ghiaccio (−10 °C)	2220	
Liquidi		
Mercurio	139	
Etanolo	2430	
Acqua di mare	3900	
Acqua	4190	

[a] Misurato a temperatura ambiente e pressione atmosferica, salvo diversa indicazione.

Ma, poiché per tutti i sottosistemi $L = 0$, si può scrivere

$$Q_{Cu} + Q_a + Q_b = 0. \qquad (23.12)$$

In base alle Equazioni 23.7 e 23.11, i trasferimenti di calore per i tre sottosistemi sono

$$\text{Rame:} \quad Q_{Cu} = m_{Cu}c_{Cu}(T_f - T_0)$$

$$\text{Acqua:} \quad Q_a = m_a c_a (T_f - T_i)$$

$$\text{Bicchiere:} \quad Q_b = C_b(T_f - T_i).$$

Si noti che per le differenze di temperatura abbiamo indicato la temperatura finale meno quella iniziale, sicché Q_a e Q_b sono positive, perché l'energia termica *entra* nei sottosistemi acqua e bicchiere, aumentandone così l'energia interna, mentre Q_{Cu} è negativa, perché il sottosistema *cede* energia termica. Sostituendo questi trasferimenti di energia nella (23.12), otteniamo

$$m_a c_a (T_f - T_i) + C_b(T_f - T_i) + m_{Cu}c_{Cu}(T_f - T_0) = 0.$$

Ricavando la temperatura finale e introducendo i valori numerici si trova

$$T_f = \frac{m_a c_a T_i + C_b T_i + m_{Cu}c_{Cu}T_0}{m_a c_a + C_b + m_{Cu}c_{Cu}} =$$

$$= \frac{(0{,}220\,\text{kg})[4190\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}](12\,^\circ\text{C}) + (190\,\text{J/K})(12\,^\circ\text{C})}{(0{,}220\,\text{kg})[4190\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}] + 190\,\text{J/K} + (0{,}075\,\text{kg})[387\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}]} +$$

$$+ \frac{(0{,}075\,\text{kg})[387\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}](312\,^\circ\text{C})}{(0{,}220\,\text{kg})[4190\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}] + 190\,\text{J/K} + (0{,}075\,\text{kg})[387\,\text{J/(kg}\cdot\text{K)}]} =$$

$$= 19{,}6\,^\circ\text{C}.$$

Ricordiamo che, comparendo qui solo *differenze* di temperatura, si può usare sia il kelvin sia il grado Celsius. Invece nelle espressioni termodinamiche di regola si richiede obbligatoriamente l'uso del kelvin.

Le energie termiche trasmesse valgono, per i tre sottosistemi,

$$Q_a = 7010\,\text{J}, \quad Q_b = 1440\,\text{J}, \quad Q_{Cu} = -8450\,\text{J},$$

la cui somma algebrica è zero, come impone l'Equazione 23.12.

Calore latente di trasformazione

Quando un corpo solido o un liquido assorbe calore non è detto che la sua temperatura debba aumentare. Il corpo può invece cambiare *stato* passando da una *fase* a un'altra fase, solida, liquida o gassosa. Così il ghiaccio si scioglie e l'acqua bolle, assorbendo calore in entrambi i casi senza variazione di temperatura. Nel processo inverso (l'acqua congela, il vapor d'acqua si condensa) il corpo cede calore, sempre senza variazione di temperatura.

La quantità di calore per unità di massa che si trasferisce per produrre un cambiamento di fase è detta *calore latente di trasformazione* o semplicemente *calore latente* (simbolo C_L) corrispondente al tipo di trasformazione in atto, secondo la seguente relazione:

$$Q = C_L m, \qquad (23.13)$$

ove m è la massa della sostanza che cambia fase. Il calore trasferito durante la fusione o la solidificazione è detto *calore (latente) di fusione* (simbolo C_F); il calore trasferito durante l'evaporazione o la liquefazione è detto *calore (latente) di evaporazione* (simbolo C_E). La Tabella 23.3 elenca i calori latenti e le temperature di trasformazione di alcune sostanze.

TABELLA 23.3 Calore latente di trasformazione di alcune sostanze

Sostanza[a]	*Punto di fusione* T_F (K)	*Calore di fusione* C_F (kJ/kg)	*Punto di ebollizione* T_E (K)	*Calore di evaporazione* C_E (kJ/kg)
Idrogeno	14,0	58.6	20,3	452
Ossigeno	54,8	13.8	90,2	213
Mercurio	234	11.3	630	296
Acqua	273	333	373	2256
Piombo	601	24.7	2013	858
Argento	1235	105	2485	2336
Rame	1356	205	2840	4730

[a] Le sostanze sono elencate in ordine crescente di punto di fusione.

La conoscenza dei calori specifici e dei calori latenti è importante, perché permette di misurare o calcolare l'entità di un trasferimento di calore, conoscendo la variazione di temperatura di una sostanza di calore specifico noto, oppure la massa da trasformare di una sostanza di cui conosciamo il calore latente. Per esempio, per esperimenti a bassissima temperatura che impiegano elio a 4 K, ossia alla sua temperatura di ebollizione, si può misurare la quantità di calore che entra nel sistema in base alla quantità di elio evaporato.

Capacità termica dei solidi

Ricordiamo che il *calore specifico* di una sostanza [in unità SI, J/(kg · K)] è la sua capacità termica per unità di massa. Nella Tabella 23.2 vediamo che i valori di questa grandezza variano ampiamente da una sostanza solida a un'altra. Se moltiplichiamo il calore specifico per la massa molare M otteniamo la *capacità termica molare* [J/(mol · K) in unità SI]. Dalla Tabella 23.2 risulta che, salvo alcune eccezioni, fra cui il carbonio, la capacità termica molare di tutti gli elementi solidi è di circa 25 J/(mol · K). Questa importante osservazione sperimentale fu resa nota nel 1819 dagli scienziati francesi P.L. Dulong (1785-1838) e A.T. Petit (1791-1820).

Confrontando le capacità termiche molari noi in realtà stiamo considerando dei corpi che non hanno la stessa massa, ma hanno lo stesso numero di moli. I corpi aventi uno stesso numero di moli hanno lo stesso numero di molecole, in questo caso tutte monoatomiche; possiamo perciò concludere che l'energia termica richiesta *da ogni atomo* per aumentare di una certa quantità la temperatura di un corpo solido ha, salvo poche eccezioni, lo stesso valore per tutti i solidi elementari. Questa constatazione rappresenta una valida conferma della teoria atomica della materia.

In realtà i calori specifici molari variano con la temperatura, avvicinandosi a zero per $T \to 0$ e raggiungendo i cosiddetti valori di Dulong e Petit soltanto a temperature relativamente alte. La Figura 23.11 ne indica le variazioni per il piombo, l'alluminio e il carbonio. Il basso valore per il carbonio elencato nella Tabella 23.2 è dovuto al fatto che il carbonio a temperatura ambiente non ha ancora raggiunto il suo valore limite.*

* Le curve riportate nella Figura 23.11 rappresentano calori specifici molari a volume costante. È praticamente impossibile impedire a un corpo so-

 ISBN 88-408-1254-7

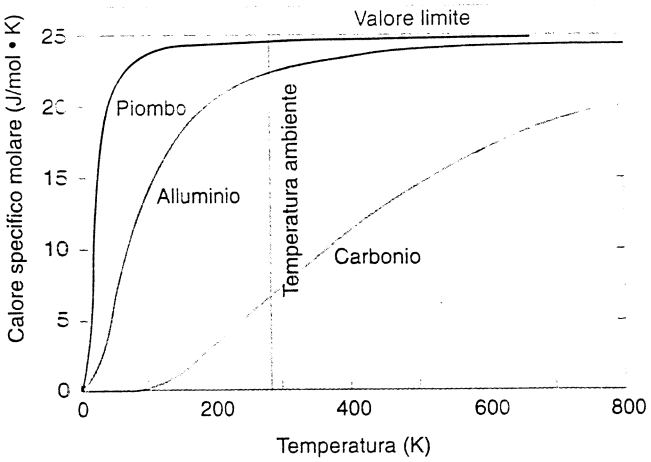


FIGURA 23.11 Grafico del calore specifico molare di tre diversi elementi in funzione della temperatura. Ad alta temperatura il calore specifico di tutti i solidi tende a un medesimo valore limite. Il valore limite viene raggiunto con buona approssimazione già a temperatura ambiente dal piombo e dall'alluminio: per il carbonio è necessario considerare temperature molto più elevate.

Nel Paragrafo 23.6 vedremo come il limite ad alta temperatura dei valori di Dulong e Petit si può giustificare in base alla fisica classica. Tuttavia per comprendere appieno il comportamento del calore specifico molare in funzione della temperatura bisogna ricorrere alla fisica quantistica. Einstein comprese subito che la sperimentazione sul calore specifico molare costituiva un validissimo mezzo di indagine sul modo in cui gli atomi assorbono l'energia – argomento di grande importanza. L'interpretazione della variazione del calore specifico molare dei solidi in funzione della temperatura fu il primo problema al quale Einstein rivolse la propria attenzione dopo l'introduzione della teoria dei quanti, e del quale fornì una spiegazione preliminare, ma profonda, già nel 1906.*

I tracciati della Figura 23.11 non presentano variazioni repentine e sono caratteristici di materiali che non cambiano di stato in quella gamma di temperature: non fondono né cambiano struttura cristallina. Le misurazioni delle capacità termiche sono utili per lo studio di questi cambiamenti. Per esempio, la Figura 23.12a mostra le variazioni del calore specifico molare del tantalio per temperature comprese fra 3 K e 5,5 K. Sembra che *qualcosa* accada al tantalio intorno a $T = 4{,}4$ K: ed è proprio così. Sopra questa temperatura il tantalio conduce l'elettricità allo stesso modo del rame e di tutti gli altri metalli ordinari; al di sotto di questa temperatura, invece, la sua resistività elettrica scompare completamente: diventa uno dei cosiddetti *superconduttori*.

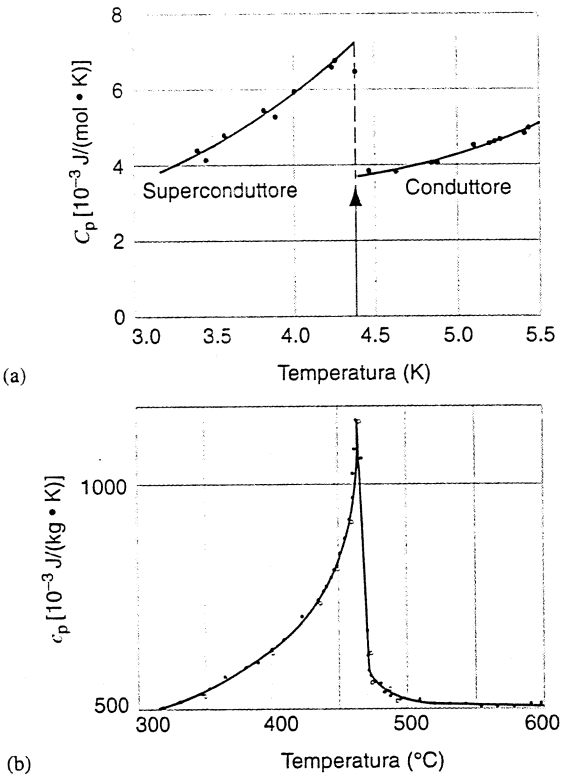


FIGURA 23.12 (a) Calore specifico molare del tantalio vicino alla transizione di fase di superconduttività. (b) Calore specifico molare dell'ottone.

Un altro esempio: la Figura 23.12b dà il grafico del calore specifico dell'ottone a temperature comprese fra 300 °C e 600 °C. L'analisi ai raggi X rivela che intorno ai 460 °C interviene un brusco cambiamento nella struttura cristallina, che passa da un reticolo molto ordinato fino a questa temperatura, a una struttura piuttosto disordinata a temperature superiori.

23.5 LAVORO SCAMBIATO CON UN GAS IDEALE

In questo capitolo abbiamo finora studiato i trasferimenti di energia sotto forma di calore in relazione con la prima legge della termodinamica. Passiamo ora a esaminare i trasferimenti che avvengono sotto forma di lavoro e, come già abbiamo fatto, scegliamo il gas perfetto come oggetto del nostro studio di termodinamica. L'apparecchiatura schematizzata nella Figura 21.13 suggerisce come il lavoro possa essere svolto *su* un gas ideale o *da* un gas ideale.

Se aumentiamo la temperatura del gas nel cilindro della Figura 21.13, il gas si espande e solleva il pistone contrastando la forza di gravità: il gas compie un lavoro (positivo) sul pistone. La forza diretta verso l'alto, esercitata dal gas sul pistone per effetto della sua pressione p, è data da pA, essendo A l'area del pistone. Per la terza legge di Newton la forza esercitata *sul* gas *dal* pistone è uguale e opposta a quella esercitata *sul* pistone *dal* gas. Dall'Equazione 11.14

lido di espandersi all'aumento della temperatura; perciò le misure sono state eseguite in condizioni di pressione costante. I valori dei tracciati, dichiarati a volume costante, sono stati in realtà ottenuti da misure a pressione costante, cui sono state apportate piccole correzioni di origine teorica.

* Notizie dettagliate sui calcoli di Einstein si trovano in Kenneth S. Krane, *Modern Physics*, J. Wiley 1996, Capitolo 10.

possiamo scrivere che il lavoro L svolto sul gas è

$$L = \int F_x \, dx = \int (-pA) \, dx. \qquad (23.14)$$

Qui dx rappresenta lo spostamento infinitesimo del pistone, e il segno meno interviene perché la forza esercitata dal pistone sul gas ha verso opposto a quello dello spostamento del pistone. Se *riduciamo* la temperatura del gas, esso si contrae invece di espandersi: in questo caso il lavoro compiuto sul gas è positivo. Supponiamo che il processo descritto dall'Equazione 23.14 avvenga lentamente, così che si possa considerare il gas in equilibrio termico a tutti gli stadi intermedi: altrimenti la pressione non avrebbe valori chiaramente definiti durante il processo, e l'integrale dell'Equazione 23.14 non si potrebbe calcolare facilmente.

Possiamo scrivere l'Equazione 23.14 in una forma più generale, che si rivelerà molto vantaggiosa. Se il pistone si muove di un intervallo dx, il volume del gas varia di una quantità $dV = A\,dx$, e il lavoro compiuto sul gas risulta

$$L = -\int p \, dV. \qquad (23.15)$$

L'integrale si estende dal volume iniziale V_i al volume finale V_f.

La (23.15) rappresenta l'espressione più generale del lavoro svolto su un gas. Non fa alcun riferimento all'agente esterno che compie il lavoro; afferma semplicemente che il lavoro eseguito sul gas si può calcolare a partire dalla pressione e dalla variazione di volume del gas stesso. Si noti che il segno algebrico del lavoro è implicitamente contenuto nell'Equazione 23.15: se il gas si espande, dV è positivo ed L è negativo, poiché p è una grandezza scalare che può avere soltanto valori positivi. Se al contrario il gas viene compresso, dV è negativo e il lavoro svolto sul gas risulta positivo.

L'Equazione 23.15 è analoga al risultato generale per il lavoro compiuto su un sistema da una forza variabile F. Ricordiamo dalla Figura 11.12 che, se riportiamo l'andamento di F in funzione di x, il lavoro svolto da F è semplicemente l'area sottesa alla curva tra x_i e x_f. La Figura 23.13 riflette una identica situazione per il lavoro svolto sul gas. Un grafico come quello della Figura 23.13 è chiamato *diagramma p-V*, con V in ascissa e p in ordinata. *Il modulo del lavoro compiuto sul gas è uguale all'area sottesa dalla curva che rappresenta il processo in un diagramma p-V.* Il segno di L è determinato dalla disuguaglianza tra V_i e V_f: se è $V_f > V_i$, L sarà negativo, come nella Figura 23.13, mentre se è $V_f < V_i$, L sarà positivo. Ancora una volta, il lavoro fatto *sul* gas è negativo se si ha un aumento di volume del gas, ed è positivo se il volume diminuisce.

La forza di pressione è chiaramente non conservativa, come dimostra la Figura 23.14. Supponiamo di voler portare il nostro gas ideale dalle condizioni iniziali V_i e p_i (punto A) alle condizioni finali V_f e p_f (punto D). Possiamo seguire molti percorsi differenti da A a D, due dei quali sono evidenziati nella Figura 23.14. Col percorso 1 (ABD) aumentiamo prima la pressione da p_i a p_f a volume costante (ciò che potremmo fare inserendo il circuito di controllo del serbatoio termico, aumentando la temperatura del gas e contemporaneamente aggiungendo la giusta quantità di peso supplementare sul pistone per impedirgli di salire). Proseguiamo poi da B verso D, aumentando la temperatura, ma senza aggiungere peso supplementare sul pistone, in modo tale che la pressione rimanga costante al valore p_i mentre il volume aumenta da V_i a V_f. Il lavoro svolto con questa procedura è uguale all'area del rettangolo $BDFE$ (l'area sotto al segmento BD). Il lavoro L_1, svolto sul gas lungo il percorso 1, si può determinare sommando il lavoro svolto lungo i due segmenti AB e BD:

$$L_1 = L_{AB} + L_{BD}.$$

Poiché lungo AB il volume è costante, sarà $L_{AB} = 0$. Lungo BD la pressione è costante (al valore p_i) e si può estrarre dal segno d'integrale. Si ottiene così

$$L_1 = L_{AB} + L_{BD} = \\ = 0 - \int p \, dV = -p_f \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_f (V_f - V_i).$$

Seguendo il percorso 2 (ACD) si aumenta prima la temperatura, tenendo costante la pressione al valore p_i (ossia non aggiungendo peso al pistone), e lasciando aumentare il volume da V_i a V_f. Si fa quindi aumentare la pressione da p_i a p_f, con il volume mantenuto costante al valore V_f, aumentando la temperatura e aggiungendo peso al pistone per impedirgli di salire. In questo caso il lavoro svolto è dato dall'area sotto il segmento AC del rettangolo $ACFE$. Possiamo scrivere

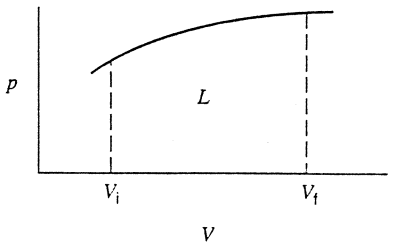


FIGURA 23.13 Il lavoro L compiuto da un gas durante un generico processo termodinamico è uguale all'area sottesa dal grafico della pressione nel piano pV relativo all'intervallo che ha per estremi il volume iniziale V_i e quello finale V_f.

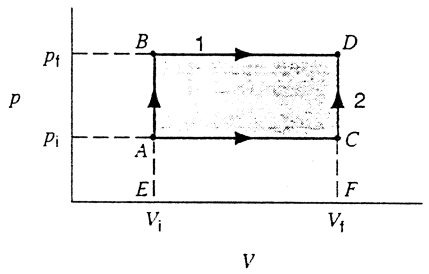


FIGURA 23.14 Un gas viene portato dallo stato di pressione e volume A allo stato D lungo i due percorsi ABD e ACD. Il lavoro compiuto lungo il percorso 1 (ABD) è dato dall'area del rettangolo $BDFE$, quello compiuto lungo il percorso 2 (ACD) è dato dall'area del rettangolo $ACFE$.

 ISBN 88-408-1254-7

$$L_2 = L_{AC} + L_{CD} = \\ = -\int p\mathrm{d}V + 0 = -p_\mathrm{i}\int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} \mathrm{d}V = -p_\mathrm{i}(V_\mathrm{f} - V_\mathrm{i}).$$

Chiaramente $L_1 \neq L_2$: il lavoro dipende dal percorso seguito.

Possiamo fare una grande varietà di operazioni sul gas e valutare il lavoro compiuto in ognuno dei casi.

Lavoro svolto a volume costante

Il lavoro è nullo per qualsiasi processo in cui il volume rimanga costante, come lungo i segmenti *AB* e *CD* della Figura 23.14:

$$L = 0 \qquad (V \text{costante}). \tag{23.16}$$

Dall'Equazione 23.15 si deduce direttamente che $L = 0$ se V è costante. Si noti che ciò non significa che il lavoro sia nullo se sono uguali i volumi iniziale e finale: affinché non si compia alcun lavoro occorre che il volume rimanga costante durante tutto il processo. Consideriamo per esempio la trasformazione *ACDB* nella Figura 23.14. Il volume V_i è uguale al volume V_f, ma il lavoro non è certamente nullo: ciò accade soltanto per percorsi con andamento verticale, come *AB*, che rappresentano processi a volume costante.

Lavoro svolto a pressione costante

In una trasformazione di questo tipo, detta *isobara*, si può applicare semplicemente l'Equazione 23.15, perché la pressione, essendo costante, può uscire dal segno d'integrale:

$$L = -p\int \mathrm{d}V = \\ = -p(V_\mathrm{f} - V_\mathrm{i}) \quad (p \text{ costante}). \tag{23.17}$$

Ne sono esempi i segmenti *AC* e *BD* della Figura 23.14. Si noti che il lavoro compiuto sul gas è negativo in entrambi i casi perché il volume aumenta.

Lavoro compiuto a temperatura costante

Se il gas si espande o si contrae a temperatura costante, la relazione tra p e V, derivata dalla legge dei gas perfetti, $(pV = nRT)$, è

$$pV = \text{costante}.$$

Su un diagramma p-V, il grafico definito dall'equazione $pV =$ costante è rappresentato da un'iperbole, come appare nella Figura 23.15.

Un processo a temperatura costante è definito *isotermico*, e la curva corrispondente nel diagramma p-V è un'*isoterma*. Per trovare il lavoro svolto su un gas durante un processo isotermico, ricorriamo all'Equazione 23.15, ma dobbiamo trovare il modo di risolvere l'integrale per una pressione p variabile. A questo fine utilizziamo l'equazione di stato del gas perfetto scrivendo $p = nRT/V$, da cui

$$L = -\int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} p\,\mathrm{d}V = -\int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V = -nRT\int_{V_\mathrm{i}}^{V_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}V}{V},$$

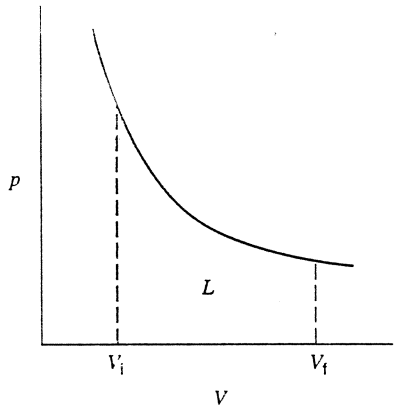


FIGURA 23.15 Una trasformazione a temperatura costante, detta isoterma, è rappresentata da un'iperbole nel piano p-V. Il lavoro compiuto durante il processo è uguale all'area sottesa dall'iperbole nell'intervallo di estremi V_i e V_f.

dove l'ultimo passaggio si può fare perché T è costante. Risolvendo l'integrale, si ottiene

$$L = -nRT\ln\frac{V_\mathrm{f}}{V_\mathrm{i}} \qquad (T \text{ costante}). \tag{23.18}$$

Si noti che anche qui il lavoro è negativo quando $V_\mathrm{f} > V_\mathrm{i}$ ($\ln x$ è positivo per $x > 1$) mentre sarà positivo quando è $V_\mathrm{f} < V_\mathrm{i}$.

Lavoro svolto in condizioni adiabatiche

Eliminiamo il contatto tra il serbatoio termico e il cilindro nella Figura 21.13 e collochiamolo su un piano di materiale isolante. Il gas si troverà allora in completo isolamento termico dall'ambiente esterno; compiendo lavoro su di esso, la sua temperatura varierà, a differenza di ciò che avveniva quando era in contatto con il serbatoio a temperatura costante. Una trasformazione svolta in condizioni di isolamento termico è detta *adiabatica*.

Se lasciamo libero il gas di variare il suo volume senza alcun impedimento, risulta – e lo dimostreremo più avanti in questo capitolo nel Paragrafo 23.8 – che il diagramma p-V del suo comportamento sarà una curva somigliante a una parabola, rappresentata dall'Equazione generale 23.19:

$$pV^\gamma = \text{costante}, \tag{23.19}$$

come quella che appare nella Figura 23.16. Il parametro adimensionale γ, detto *rapporto dei calori specifici*, va determinato sperimentalmente per ogni gas. I suoi valori sono normalmente compresi fra 1,1 e 1,8. Poiché $\gamma > 1$, in qualunque punto si intersechino, la curva $pV^\gamma =$ costante è più ripida della curva $pV =$ costante. Come risulta dalla Figura 23.16, ciò significa che il lavoro fatto dal gas espandendosi adiabaticamente da V_i a V_f sarà un poco minore, in modulo, del lavoro fatto espandendosi isotermicamente fra gli stessi volumi V_i e V_f.

Possiamo trovare la costante dell'Equazione 23.19 conoscendo γ e anche la pressione e il volume in un qualsiasi

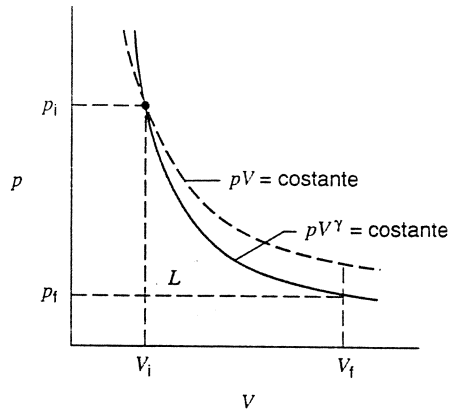


FIGURA 23.16 Un processo adiabatico è rappresentato nel piano pV dalla curva di equazione pV^γ = costante. Il lavoro compiuto durante il processo è uguale all'area sottesa da questa curva nell'intervallo di estremi V_i e V_f. Dal momento che $\gamma > 1$, la curva relativa alla trasformazione adiabatica ha pendenza negativa in modulo maggiore di quella della curva pV = costante relativa alla trasformazione isoterma.

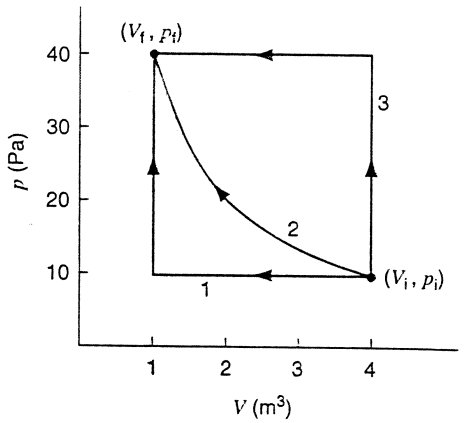


FIGURA 23.17 Problema svolto 23.4. Un gas viene portato dallo stato iniziale i a quello finale f lungo tre diversi cammini. Il cammino 2 è una trasformazione isoterma.

punto della curva. Se scegliamo il punto iniziale (p_i, V_i) nella Figura 23.16, la costante ha il valore $p_i V_i^\gamma$, e possiamo scrivere in questa forma la 23.19:

$$pV^\gamma = p_i V_i^\gamma,$$

ovvero

$$p = \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma}. \qquad (23.20)$$

Si può ora ricavare il lavoro adiabatico

$$L = \int_{V_i}^{V_f} p\,dV =$$
$$= -\int_{V_i}^{V_f} \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} dV = -p_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} =$$
$$= -\frac{p_i V_i^\gamma}{\gamma - 1}(V_i^{1-\gamma} - V_f^{1-\gamma}).$$

Raccogliendo un fattore $V_i^{\gamma-1}$, si può scrivere il lavoro adiabatico in questa forma:

$$L = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1} - 1\right]. \qquad (23.21)$$

Se il gas si espande, è $V_i/V_f < 1$, e poiché un numero minore di 1 elevato a qualsiasi potenza rimane minore di 1, il lavoro risulta ancora negativo. Grazie all'uguaglianza $p_i V_i^\gamma = p_f V_f^\gamma$, si può scrivere il lavoro adiabatico anche nella forma equivalente

$$L = \frac{1}{\gamma - 1}(p_f V_f - p_i V_i) \qquad \text{(adiabatica)}. \qquad (23.22)$$

PROBLEMA SVOLTO 23.4 Un campione di gas costituito da 0,11 mol è compresso da un volume di 4,0 m^3 a uno di 1,0 m^3, mentre la pressione aumenta da 10 Pa a 40 Pa. Confrontare i lavori svolti secondo i tre percorsi della Figura 23.17.

Soluzione Il percorso 1 consiste di due processi, il primo a pressione costante e il secondo a volume costante. L'Equazione 23.17 dà il lavoro fatto a pressione costante:

$$L = -p(V_f - V_i) = -(10\text{ Pa})(1{,}0\text{ m}^3 - 4{,}0\text{ m}^3) = 30\text{ J}.$$

Il lavoro svolto a volume costante è nullo (Equazione. 23.16), e quindi il lavoro totale del percorso 1 vale

$$L_1 = 30\text{ J} + 0 = 30\text{ J}.$$

Il percorso 2 segue un processo isotermico, T = costante, da cui $p_i V_i = p_f V_f = nRT$. Dall'Equazione 23.18, sostituendo $p_i V_i$ a nRT, otteniamo

$$L_2 = -p_i V_i \ln\frac{V_f}{V_i} = -(10\text{ Pa})(4{,}0\text{ m}^3)\ln\frac{1{,}0\text{ m}^3}{4{,}0\text{ m}^3} = 55\text{ J}.$$

Il percorso 3 consiste di una trasformazione a volume costante, per cui $L = 0$, seguito da una trasformazione a pressione costante. Il lavoro totale risulta:

$$L_3 = 0 - p_f(V_f - V_i) = -(40\text{ Pa})(1{,}0\text{ m}^3 - 4{,}0\text{ m}^3) = 120\text{ J}.$$

Notare che il lavoro è positivo per tutti e tre i percorsi, e che il suo modulo è tanto maggiore quanto più grandi sono le aree sottese ai tracciati dei tre percorsi sul diagramma p-V.

PROBLEMA SVOLTO 23.5 (a) Trovare il modulo di comprimibilità B per un processo adiabatico relativo a un gas ideale. (b) Noto questo modulo, trovare la velocità del suono in quel gas in funzione della temperatura. Determinarne il valore per la temperatura ambiente (20 °C).

Soluzione (a) Dall'Equazione 15.5, in forma differenziale, si può scrivere:

$$B = -V\frac{dp}{dV}.$$

Per un processo adiabatico, derivando rispetto a V l'Equazione 23.19, pV^γ = costante, si ottiene

$$\frac{d(pV^\gamma)}{dV} = \left(\frac{dp}{dV}\right)V^\gamma + p(\gamma V^{\gamma-1}) = 0,$$

 ISBN 88-408-1254-7

ossia

$$V\frac{dp}{dV} = -\gamma p,$$

da cui

$$B = \gamma p$$

per un processo adiabatico relativo a un gas ideale.

(b) Nel Paragrafo 19.3 si è dimostrato che la velocità del suono in un gas vale

$$v = \sqrt{B/\rho},$$

ove B è il modulo di comprimibilità e ρ la massa volumica del gas. Partendo dal risultato della parte (a) e dall'equazione di stato del gas perfetto ($pV = nRT$), si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma(nRT/V)}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma nRT}{\rho V}}.$$

La quantità ρV è la massa totale del gas, che si può anche scrivere nM, ove n è il numero di moli ed M la massa molare. Con questa sostituzione si ha

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}.$$

La velocità del suono in un gas dipende dalla radice quadrata della temperatura assoluta. Per l'aria la massa molare media vale circa 0,0290 kg/mol, e il rapporto dei calori specifici γ vale circa 1,4. Per $T = 20\,°C = 293$ K,

$$v = \sqrt{\frac{(1{,}4)[8{,}31\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)}](293\ \text{K})}{0{,}0290\ \text{kg/mol}}} = 343\ \text{m/s}.$$

23.6 ENERGIA INTERNA DI UN GAS IDEALE

Nel Paragrafo 22.4 abbiamo dimostrato che l'energia cinetica traslazionale media per molecola di un gas ideale monoatomico è

$$K_{\text{trasl}} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad (23.23)$$

Per un gas monoatomico l'energia interna è costituita da questo unico tipo di energia, perché le sue molecole, essendo praticamente puntiformi, non possiedono alcuna energia potenziale: non possono vibrare, né avere energia cinetica rotazionale.

L'energia interna totale di n moli di un gas ideale monoatomico è data dal numero di molecole ($= nN_A$) moltiplicato per l'energia molecolare media:

$$E_{\text{int}} = (nN_A)(K_{\text{trasl}}) = (nN_A)(\tfrac{3}{2}kT),$$

ossia

$$E_{\text{int}} = \tfrac{3}{2}nRT, \qquad (23.24)$$

ove (Equazione. 21.17) abbiamo sostituito a $N_A k$ il suo valore R, la costante molare dei gas.

L'Equazione 23.24 dimostra che, variando l'energia interna del gas – compiendo un lavoro su di esso o apportando calore – la sua temperatura cambierà, per cui

$$\Delta E_{\text{int}} = \tfrac{3}{2}nR\,\Delta T. \qquad (23.25)$$

Passiamo ora a considerare non più la molecola puntiforme di un gas monoatomico, ma una molecola costituita da due particelle puntiformi separate da una distanza nota. Questo modello corrisponde meglio alla molecola di un gas biatomico, come O_2, N_2 o il monossido di carbonio CO. Questo tipo di molecola può acquisire energia cinetica ruotando intorno al suo centro di massa: l'energia interna del gas verrà così a comprendere, oltre all'energia di traslazione, anche questa energia di rotazione della molecola.

L'energia cinetica rotazionale di una molecola biatomica, come si vede nella Figura 23.18, si può esprimere così:

$$K_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2,$$

ove I è il momento d'inerzia della molecola riferito a un particolare asse. Per masse puntiformi allineate lungo l'asse z non si ha energia cinetica per rotazione intorno a questo asse, per cui $I_z = 0$. L'energia cinetica totale della molecola biatomica è la somma delle sue componenti traslazionale e rotazionale:

$$K = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2. \qquad (23.26)$$

Per ottenere l'energia interna totale del gas dobbiamo calcolare l'energia media di una singola molecola e poi moltiplicare per il numero delle molecole.

I cinque termini dell'Equazione 23.26 rappresentano altrettanti modi indipendenti con cui una molecola può assorbire energia e sono chiamati *gradi di libertà*. Un gas monoatomico, disponendo soltanto di energia cinetica traslazionale, ha tre gradi di libertà ($K = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2$.)

La molecola biatomica (Equazione. 23.26) ha dunque 5 gradi di libertà, 3 traslazionali e 2 rotazionali. Se aumentiamo la sua energia interna di una quantità ΔE_{int}, appare ovvio che ciascuna delle tre componenti traslazionali, che non si possono distinguere fra loro, assorbirà una eguale quantità di energia. E analogamente le due componenti rotazionali si divideranno in parti uguali la loro quota di energia cinetica rotazionale assorbita dalla molecola. Ma non si ha al-

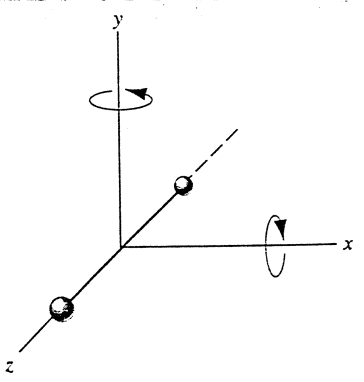


FIGURA 23.18 Molecola biatomica con asse parallelo all'asse coordinato z. In questa configurazione il momento d'inerzia relativo all'asse z è nullo e quindi non vi sono termini di energia cinetica dovuti alla rotazione attorno a tale asse. I momenti d'inerzia relativi agli assi x e y sono diversi da zero e quindi vi sono termini di energia cinetica relativi a rotazioni attorno a tali assi.

cun motivo di ritenere a priori che la quota traslazionale e quella rotazionale siano frutto di una suddivisione in due parti uguali dell'intera energia cinetica disponibile.

A questo punto, James Clerk Maxwell enunciò un teorema, il *teorema dell'equipartizione dell'energia*, col quale affermava che l'energia interna di una molecola è suddivisa mediamente in parti uguali fra tutte le vie indipendenti attraverso le quali può assorbire energia. E precisamente:

quando il numero delle molecole è molto grande, l'energia media di ogni molecola vale $\frac{1}{2}kT$ per ogni grado indipendente di libertà.

Ci siamo già imbattuti in una situazione di equipartizione dell'energia, nello studio dell'oscillatore armonico semplice unidimensionale. In quel caso l'energia poteva essere immagazzinata sotto forma sia cinetica che potenziale, e la Figura 17.8 dava un esempio di come l'energia disponibile fosse divisa in parti uguali fra queste due forme.

Proviamo a utilizzare il teorema dell'equipartizione dell'energia per scrivere un'espressione dell'energia interna di un gas monoatomico ideale. L'energia media per molecola vale $\frac{3}{2}kT$ (3 gradi di libertà $\cdot \frac{1}{2}kT$ ciascuno), e l'energia totale per N molecole vale

$$E_{\text{int}} = N(\tfrac{3}{2}kT) = \tfrac{3}{2}nRT \quad \text{(gas monatomico)}. \qquad (23.27)$$

L'Equazione 23.27 è identica alla (23.24). Per un gas biatomico, con 5 gradi di libertà si ha:

$$E_{\text{int}} = N(\tfrac{5}{2}kT) = \tfrac{5}{2}nRT \quad \text{(gas biatomico)}. \qquad (23.28)$$

Un gas poliatomico (si chiama normalmente così un gas avente più di 2 atomi per molecola) possiede tre possibili assi di rotazione (salvo il caso particolare in cui tutti gli atomi siano disposti in linea retta, come per CO_2). L'energia cinetica di una singola molecola viene ad avere un sesto termine, $\frac{1}{2}I_z\omega_z^2$. E per i sei gradi di libertà l'energia interna risulta:

$$E_{\text{int}} = N(\tfrac{6}{2}kT) = 3nRT \quad \text{(gas poliatomico)}. \qquad (23.29)$$

Le Equazioni 23.27, 23.28 e 23.29 esplicitano un concetto che discende direttamente dal teorema dell'equipartizione dell'energia: indipendentemente dalla sua natura,

l'energia interna di un gas ideale dipende soltanto dalla sua temperatura.

Non dipende nemmeno dalla pressione né dal volume.

Abbiamo finora considerato soltanto il contributo dell'energia cinetica traslazionale e rotazionale. Ma altre forme di energia possono intervenire. Per esempio, una molecola biatomica libera di vibrare (immaginate due atomi puntiformi collegati da una molla) dispone di altre due possibili forme di energia, l'energia potenziale connessa alla «molla» e l'energia cinetica degli atomi che oscillano: viene così ad avere 7 $(= 3 + 2 + 2)$ gradi di libertà. Per le molecole poliatomiche il numero di termini vibrazionali può essere anche maggiore di due. I moti vibrazionali compaiono di solito soltanto ad alte temperature del gas, quando le collisioni più violente possono innescare oscillazioni nella molecola.

Calore specifico molare dei solidi

Possiamo applicare il teorema dell'equipartizione dell'energia anche al calore specifico molare dei solidi, argomento già accennato nel Paragrafo 23.4. Come appare dalla Figura 21.9, gli atomi in un solido sono disposti secondo strutture reticolari. Ogni atomo può oscillare intorno alla sua posizione di equilibrio in tre direzioni indipendenti, disponendo così di tre gradi di libertà, legati alla sua energia cinetica. Esso possiede inoltre energia potenziale, associata alle forze che lo legano agli atomi adiacenti, con tre altri gradi di libertà, per un totale di sei. L'energia media per atomo è dunque $6 \cdot \frac{1}{2}kT = 3kT$. L'energia interna totale di un campione contenente N atomi vale

$$E_{\text{int}} = N(3kT) = 3nN_Ak T = 3nRT\,,$$

ove n è il numero di moli.

Supponiamo di somministrare al campione solido l'energia Q, sotto forma di calore, aumentando la sua temperatura di ΔT. Non svolgendosi alcun lavoro ($L = 0$), per la prima legge della termodinamica ($Q + L = \Delta E_{\text{int}}$), possiamo scrivere

$$Q = \Delta E_{\text{int}} = 3nR\,\Delta T\,.$$

Il calore specifico molare risulta

$$C = \frac{Q}{n\,\Delta T} = \frac{3nR\,\Delta T}{n\,\Delta T} = 3R =$$
$$= (3)[8{,}31\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}] \approx 25\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}.$$

Come risulta dal grafico della Figura 23.11, è questo il valore asintotico raggiunto alle alte temperature dal calore specifico molare dei solidi. Si noti che il teorema (classico) di equipartizione dell'energia fornisce valori corretti per il calore specifico molare fino a temperature abbastanza elevate, ma cade in difetto alle bassissime temperature. In questo dominio soltanto un approccio basato sulla fisica dei quanti fornisce risultati confermati dalla sperimentazione.

23.7 CALORI SPECIFICI DI UN GAS IDEALE

Per calcolare il calore specifico molare di una sostanza solida siamo ricorsi al teorema di equipartizione dell'energia. Passiamo ora a calcolarlo per un gas ideale. Il valore misurato della capacità termica di un materiale dipende dal modo di somministrare il calore. Nel caso di un gas, per esempio, si deve tenere costante il volume durante l'operazione? O la pressione? Esaminiamo le due possibilità.

Calore specifico molare a volume costante

Introduciamo n moli di un gas in un cilindro munito di un pistone. Fissiamo la posizione del pistone in modo che non

 ISBN 88-408-1254-7

possano esservi variazioni di volume e quindi scambi di lavoro, e aggiungiamo al gas una quantità di energia Q sotto forma di calore. Per la prima legge della termodinamica (Equazione. 23.6), posto $L = 0$, scriviamo

$$Q = \Delta E_{\text{int}} . \tag{23.30}$$

Sia C_V il *calore specifico molare a volume costante*, di modo che

$$C_V = \frac{Q}{n\,\Delta T} = \frac{\Delta E_{\text{int}}}{n\,\Delta T}. \tag{23.31}$$

Dall'Equazione 23.27 per un gas monoatomico ideale sappiamo che $\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2} nR\,\Delta T$, e perciò

$$C_V = \tfrac{3}{2} R = 12{,}5 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \quad \text{(gas monatomico)}. \tag{23.32}$$

Ripetendo il passaggio, dalle Equazioni 23.28 e 23.29 troviamo

$$C_V = \tfrac{5}{2} R = 20{,}8 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \quad \text{(gas biatomico)}, \tag{23.33}$$

$$C_V = 3R = 24{,}9 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \quad \text{(gas poliatomico)}. \tag{23.34}$$

Calore specifico molare a pressione costante

La Figura 23.19 presenta due curve isoterme di un gas ideale, aventi una differenza di temperatura ΔT. Il percorso AB è il processo a volume costante già visto; AC è una trasformazione a pressione costante che collega la stessa coppia di isoterme. Nel Paragrafo 23.6 abbiamo stabilito che l'energia interna di un gas ideale dipende soltanto dalla temperatura. Per tutti i percorsi che collegano le due isoterme della Figura 23.19 la variazione di energia interna deve avere il medesimo valore, perché tutti producono la stessa variazione di temperatura. In particolare ciò deve avvenire per i percorsi AB e AC:

$$\Delta E_{\text{int},AB} = \Delta E_{\text{int},AC} . \tag{23.35}$$

Per variare l'energia interna lungo la trasformazione AC si dispone di due contributi: il calore Q ceduto al gas e il lavoro L svolto sul gas:

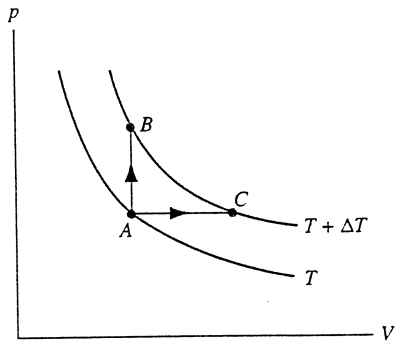


FIGURA 23.19 Le due isoterme di un gas perfetto relative a temperature differenti di un intervallo ΔT sono connesse dalla trasformazione AB a volume costante e da quella AC a pressione costante.

$$\Delta E_{\text{int},AC} = Q + L . \tag{23.36}$$

Notare le convenzioni sui segni che sono implicite nell'Equazione 23.36. Il calore trasferito *dall'*ambiente esterno è positivo e tende ad aumentare l'energia interna. Se il volume diminuisce, il lavoro svolto *dall'*ambiente esterno è positivo e tende ad aumentare l'energia interna. Se invece il volume aumenta, $L < 0$: il gas compie un lavoro sull'ambiente esterno e tende a diminuire la propria energia interna.

Per il calore trasferito in una trasformazione a pressione costante si può scrivere

$$Q = nC_p\,\Delta T, \tag{23.37}$$

ove C_p è il *calore specifico molare a pressione costante*. In base all'Equazione 23.15 il lavoro lungo il percorso AC è $L = -p\,\Delta V$ che, secondo la legge del gas perfetto, diventa

$$L = -p\,\Delta V = -nR\,\Delta T. \tag{23.38}$$

Sostituendo nella (23.36) l'espressione della variazione di energia interna lungo AB, troviamo

$$nC_V\,\Delta T = nC_p\,\Delta T - nR\,\Delta T,$$

ossia

$$C_p = C_V + R . \tag{23.39}$$

Dalle Equazioni 23.32, 23.33 e 23.34 ricaviamo i calori specifici molari a pressione costante:

$$C_p = \tfrac{5}{2} R = 20{,}8 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \quad \text{(gas monatomico)}, \tag{23.40}$$

$$C_p = \tfrac{7}{2} R = 29{,}1 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \quad \text{(gas binatomico)}, \tag{23.41}$$

$$C_p = 4R = 33{,}3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \quad \text{(gas poliatomico)}. \tag{23.42}$$

Altro parametro interessante che può essere misurato direttamente senza passare attraverso i valori di C_p e C_V è il rapporto γ dei calori specifici molari, definito come

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} . \tag{23.43}$$

Poiché il calore specifico è legato al calore specifico molare dalla relazione $c = C/M$, ove M è la massa molare della sostanza, possiamo definire γ anche come rapporto c_p/c_V. Per questa ragione γ è spesso chiamato anche *rapporto dei calori specifici*. In questa forma lo abbiamo già usato nel Problema svolto 23.5 per trovare l'espressione della velocità del suono in un gas e nell'Equazione 23.19 per la relazione fra pressione e volume in una trasformazione adiabatica.

Dalle Equazioni 23.40, 23.41, 23.42 per C_p e 23.32, 23.33, 23.34 per C_V ricaviamo

$$\gamma = \tfrac{5}{3} = 1{,}67 \quad \text{(gas monatomico)}, \tag{23.44}$$

$$\gamma = \tfrac{7}{5} = 1{,}40 \quad \text{(gas biatomico)}, \tag{23.45}$$

$$\gamma = \tfrac{4}{3} = 1{,}33 \quad \text{(gas poliatomico)}. \tag{23.46}$$

La Tabella 23.4 mette a confronto i valori misurati dei calori specifici molari e del rapporto γ con quelli calcolati per il modello del gas perfetto. La concordanza è più che soddisfacente.

TABELLA 23.4 Calori specifici molari dei gas

Gas	C_p [J/(mol · K)]	C_V [J/(mol · K)]	$C_p - C_V$ [J/(mol · K)]	γ
Monoatomico				
Ideale	20,8	12,5	8,3	1,67
He	20,8	12,5	8,3	1,66
Ar	20,8	12,5	8,3	1,67
Biatomico				
Ideale	29,1	20,8	8,3	1,40
H_2	28,8	20,4	8,4	1,41
N_2	29,1	20,8	8,3	1,40
O_2	29,4	21,1	8,3	1,40
Poliatomico				
Ideale	33,3	24,9	8,3	1,33
CO_2	37,0	28,5	8,5	1,30
NH_3	36,8	27,8	9,0	1,31

PROBLEMA SVOLTO 23.6 Una famiglia entra in una casetta per le vacanze invernali che non è stata riscaldata da tanto tempo: la temperatura interna 0 °C, è uguale a quella esterna. La casetta consiste in un locale unico di area 6 m · 4 m e altezza 3 m, e contiene una stufetta elettrica di potenza 2 kW. Supposto che la stanza offra una perfetta tenuta d'aria e che tutto il calore fornito dalla stufetta sia assorbito dall'aria, senza che ne sfugga attraverso le pareti o sia assorbito dai mobili e dalla struttura, in quanto tempo dal momento dell'accensione della stufetta la temperatura dell'aria raggiungerà il valore soddisfacente di 21 °C?

Soluzione Ammettiamo che l'aria ambiente, costituita principalmente da ossigeno e azoto, si comporti come un gas biatomico ideale avente $C_V = 20{,}8$ J/(mol · K), come dalla Tabella 23.4. Il volume della stanza, in litri, è

$$V = (6\text{ m})(4\text{ m})(3\text{ m}) = 72\text{ m}^3 = 72\,000\text{ L}.$$

Poiché 1 mole di gas ideale alla temperatura di 0 °C e alla pressione di 1 bar occupa un volume di 22,4 L, il numero di moli risulta

$$n = (72\,000\text{ L})/(22{,}4\text{ L/mol}) = 3{,}2 \cdot 10^3\text{ mol}.$$

Se la stanza è a tenuta d'aria (vedi il commento al termine del problema svolto), l'assorbimento di calore avverrà a volume costante, per cui

$$Q = nC_V\,\Delta T = (3{,}2 \cdot 10^3\text{ mol})[20{,}8\text{ J/(mol} \cdot \text{K)}](21\text{ K}) =$$
$$= 1{,}4 \cdot 10^6\text{ J}.$$

La stufetta, di potenza $P = 2$ kW, può fornire l'energia richiesta in un tempo

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{1{,}4 \cdot 10^6\text{ J}}{2 \cdot 10^3\text{ W}} = 700\text{ s},$$

ossia circa 12 minuti.

In questo problema si formulano ipotesi assai poco verosimili circa l'assorbimento di calore nella stanza. Provate a stimare la capacità termica di alcuni mobili o delle pareti per verificare se sia ragionevole ignorare il loro effetto sull'assorbimento di calore, e quindi sul tempo occorrente per riscaldare l'ambiente. E la dispersione di calore attraverso le pareti, già esaminata nel Paragrafo 23.2, ha un peso certamente non indifferente.

Che forza si eserciterà verso l'esterno sulle pareti e sul soffitto? Un'ipotesi più ragionevole è che la stanza non sia assolutamente a tenuta d'aria, ma presenti delle fessure attraverso le quali l'aria può sfuggire, senza apprezzabili perdite di calore, mantenendo una pressione costante uguale a quella esterna iniziale. Si veda il Problema 16 per un calcolo basato su queste considerazioni.

PROBLEMA SVOLTO 23.7 Torniamo al caso del Problema svolto 23.4, in cui 0,11 moli di un gas ideale sono inizialmente nello stato caratterizzato da $V_i = 4{,}0\text{ m}^3$ e $p_i = 10$ Pa. Distacchiamo ora il cilindro dal serbatoio termico e comprimiamo il gas adiabaticamente fino a ridurre il volume a $V_f = 1{,}0\text{ m}^3$. Trovare la variazione di energia interna del gas, supponendo che si tratti di elio, gas monoatomico con $\gamma = 1{,}66$.

Soluzione Dall'Equazione 23.27 possiamo trovare la variazione di energia interna conoscendo l'incremento di temperatura. Essendo noti p_i e V_i possiamo trovare la temperatura iniziale tramite la legge del gas perfetto, e la temperatura finale da volume e pressione finali. Quest'ultima si ricava dall'Equazione 23.19 per la trasformazione adiabatica:

$$p_f = \frac{p_i V_i^\gamma}{V_f^\gamma} = \frac{(10\text{ Pa})(4{,}0\text{ m}^3)^{1{,}66}}{(1{,}0\text{ m}^3)^{1{,}66}} = 100\text{ Pa}.$$

Sul diagramma p-V della Figura 23.17 il punto finale raggiunto nel processo adiabatico si trova verticalmente molto al di sopra del punto raggiunto nel processo isotermico (40 Pa). Ciò è d'accordo col fatto che le curve adiabatiche sono molto più ripide delle isoterme, come dimostra la Figura 23.16.

Possiamo ora calcolare le temperature iniziali e finali e quindi la variazione di energia interna:

$$T_i = \frac{p_i V_i}{nR} = \frac{(10\text{ Pa})(4{,}0\text{ m}^3)}{(0{,}11\text{ mol})[8{,}31\text{ J/(mol} \cdot \text{K)}]} = 44\text{ K}.$$

$$T_f = \frac{p_f V_f}{nR} = \frac{(100\text{ Pa})(1{,}0\text{ m}^3)}{(0{,}11\text{ mol})[8{,}31\text{ J/(mol} \cdot \text{K)}]} = 109\text{ K}.$$

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2} mR\Delta T =$$
$$= \tfrac{3}{2}(0{,}11\text{ mol})[8{,}31\text{ J/(mol} \cdot \text{K)}](109\text{ K} - 44\text{ K}) = 89\text{ J}.$$

La variazione di energia interna è positiva. Ciò è coerente con la prima legge della termodinamica ($Q + K = \Delta E_{int}$) perché, nel processo adiabatico, $Q = 0$ e il lavoro compiuto comprimendo il gas è positivo.

23.8 APPLICAZIONI DELLA PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

Ora che abbiamo esaminato molte delle proprietà del gas perfetto, compresa la sua energia interna (Paragrafo 23.6) e i suoi calori specifici (Paragrafo 23.7), siamo pronti a studiare le diverse trasformazioni che può subire un sistema consistente in un gas ideale.

Trasformazioni adiabatiche

In una trasformazione adiabatica il sistema deve essere ben isolato per impedire l'entrata o l'uscita di energia termica, così che sia $Q = 0$. La prima legge diventa quindi

$$\Delta E_{int} = L \quad \text{(trasformazione adiabatica)}. \quad (23.47)$$

 ISBN 88-408-1254-7

Scriviamo ora in forma differenziale la relazione fra p e V per un processo adiabatico, come nel Paragrafo 23.5. Ammettiamo che il processo si svolga lentamente, in modo che il valore della pressione risulti sempre ben definito. La (23.31) per un gas perfetto diventa

$$dE_{int} = nC_V\,dT.$$

da cui

$$p\,dV = -dL = -dE_{int} = -nC_V\,dT. \qquad (23.48)$$

L'equazione di stato del gas si può scrivere in forma differenziale:

$$\begin{aligned} d(pV) &= d(nRT) \\ p\,dV + V\,dp &= nR\,dT. \end{aligned} \qquad (23.49)$$

Ma $p\,dV$ non è altro che $-dL$, che è uguale a $-dE_{int}$ (perché l'Equazione 23.47 scritta in forma differenziale diventa $dL = dE_{int}$). Sostituendo nella (23.49) $p\,dV$ ricavato dalla (23.48), si ottiene

$$V\,dp = nC_V\,dT + nR\,dT = nC_p\,dT, \qquad (23.50)$$

in cui il terzo passaggio risulta giustificato dalla (23.39), $C_p = C_V + R$. Prendiamo ora il rapporto fra la (23.50) e la (23.48), che risulta

$$\frac{V\,dp}{p\,dV} = \frac{nC_p\,dT}{-nC_V\,dT} = -\frac{C_p}{C_V} = -\gamma,$$

in cui γ è dato dalla (23.43). Riordinando si trova

$$\frac{dp}{p} = -\gamma\frac{dV}{V},$$

che si può integrare fra lo stato iniziale i e lo stato finale f:

$$\int_{p_i}^{p_f}\frac{dp}{p} = -\gamma\int_{V_i}^{V_f}\frac{dV}{V}$$

$$\ln\frac{p_f}{p_i} = -\gamma\ln\frac{V_f}{V_i},$$

che si può scrivere

$$p_iV_i^\gamma = p_fV_f^\gamma. \qquad (23.51)$$

Ma, poiché i ed f sono punti qualsiasi, si arriva alla formula più generale

$$pV^\gamma = \text{costante}. \qquad (23.52)$$

Le Equazioni 23.51 e 23.52 esprimono la relazione fra la pressione e il volume di un gas ideale sottoposto a un processo adiabatico. Noti i valori iniziali di pressione e volume, il processo adiabatico si svolge fino a un punto finale di cui si può calcolare pressione e volume dalla (23.51). La (23.52) definisce invece una famiglia di curve su un diagramma p-V. Qualsiasi processo adiabatico può essere rappresentato da un segmento di una di queste curve (Figura 23.20).

Possiamo riscrivere questi risultati in funzione della temperatura, valendoci dell'equazione di stato del gas perfetto:

$$\begin{aligned} (pV)V^{\gamma-1} &= \text{costante} \\ TV^{\gamma-1} &= \text{costante}. \end{aligned} \qquad (23.53)$$

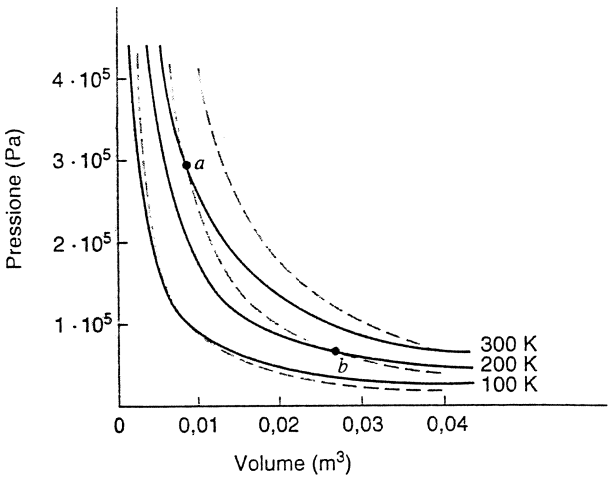


FIGURA 23.20 Trasformazioni isoterme (linee continue) e adiabatiche (linee tratteggiate) di una mole di un gas biatomico. Si osservi che a un *aumento* adiabatico del volume corrisponde sempre una *diminuzione* della temperatura del gas.

La costante nella (23.53) non è la stessa che compare nella (23.52). La (23.53) si può esprimere in funzione di due punti dati i ed f:

$$\begin{aligned} T_iV_i^{\gamma-1} &= T_fV_f^{\gamma-1} \\ T_f &= T_i\left(\frac{V_i}{V_f}\right)^{\gamma-1}. \end{aligned} \qquad (23.54)$$

Supponiamo di comprimere un gas in un processo adiabatico. Sarà allora $V_i > V_f$ e, per la (23.54), dovrà essere $T_f > T_i$. La temperatura del gas, quando viene compresso, aumenta, come abbiamo sperimentato usando la pompa della bicicletta per gonfiare una gomma. Inversamente, la temperatura, quando un gas si espande, diminuisce, effetto frequentemente usato in laboratorio per ottenere temperature molto basse (Figura 23.20).

Il moto delle onde acustiche in aria può considerarsi una trasformazione adiabatica. A frequenze acustiche l'aria è un cattivo conduttore del calore. Si ha un aumento di temperatura nella zona compressa dell'onda acustica, ma, grazie alla scarsa conduzione del calore, non si ha trasferimento alle zone adiacenti più fredde a pressione minore. Anche la compressione e l'espansione del vapore in una macchina a vapore, o dei gas caldissimi nei cilindri di un motore a combustione interna, sono essenzialmente processi adiabatici, perché non vi è il tempo di trasferire calore.

Trasformazioni isoterme

In una trasformazione isoterma la temperatura rimane costante. Se il sistema è un gas ideale, anche l'energia interna rimane costante. Per $\Delta E_{int} = 0$ la prima legge dà

$$Q + L = 0 \quad \text{(trasformazione isoterma; gas perfetto).} \qquad (23.55)$$

Se sul gas si compie un lavoro L (positivo), un'equivalente

quantità di calore $Q = -L$ si trasferisce dal gas all'ambiente esterno. Nulla del lavoro svolto rimane immagazzinato nel gas come energia interna.

La Figura 23.20 confronta le trasformazioni adiabatiche con quelle isoterme per 1 mole di gas monoatomico ideale.

Trasformazioni isocore

Si dice *isocòra* una trasformazione che avviene a volume costante. In questo caso non si può avere scambio di lavoro. Per $L = 0$ la prima legge diventa

$$\Delta E_{\text{int}} = Q \quad \text{(trasformazione isocora)}. \qquad (23.56)$$

Tutto il calore che entra nel sistema ($Q > 0$) viene immagazzinato come incremento di energia interna ($\Delta E_{\text{int}} > 0$).

Trasformazioni cicliche

In un processo ciclico si svolge una sequenza di operazioni che alla fine ripristina lo stato iniziale del sistema, come per esempio la trasformazione ciclica a tre stadi di Figura 23.21. Tali trasformazioni sono anche dette *cicli termici*. Poiché il ciclo di Figura 23.21 comincia e finisce nel punto A, la variazione di energia interna durante il ciclo è zero. In accordo con la prima legge sarà

$$Q + L = 0 \quad \text{(trasformazione ciclica)}, \qquad (23.57)$$

ove Q ed L sono i valori totali per l'intero ciclo. Nella Figura 23.21 il lavoro totale è positivo, perché l'area positiva sotto la curva che rappresenta lo stadio 3 è di modulo maggiore dell'area negativa sotto la linea che rappresenta lo stadio 2. È perciò $L > 0$ e per la (23.57) sarà $Q < 0$. In effetti, quando un ciclo su un diagramma p-V è percorso in senso antiorario, si ha $L > 0$ e $Q < 0$, mentre i cicli eseguiti in senso orario hanno $L < 0$ (e $Q > 0$).

Espansione libera

La Figura 23.22 rappresenta la trasformazione nota come *libera espansione*. Il gas si trova inizialmente confinato in una delle due camere del contenitore, e quando si apre il rubinetto d'arresto, si espande nell'altra camera precedentemente vuota. Non si possono sollevare pesi con questo tipo

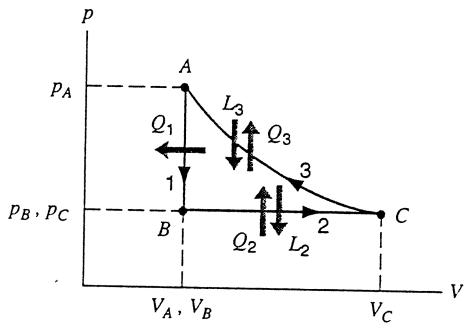


FIGURA 23.21 Un gas viene sottoposto a un ciclo partendo dallo stato inziale A, e costituito dall'isocora AB, dall'isobara BC e dall'isoterma CA.

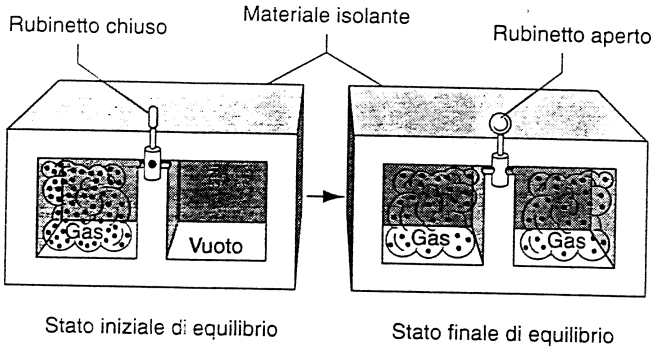


FIGURA 23.22 Espansione libera. L'apertura del rubinetto permette il passaggio del gas da una parte all'altra del contenitore isolato. Il gas non compie lavoro e non vi è scambio di calore con l'ambiente esterno.

di operazione, e quindi non si compie alcun lavoro. Il processo è adiabatico, perché il contenitore è isolato. Essendo nulli sia L sia Q, la prima legge dà

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 \quad \text{(libera espansione)}. \qquad (23.58)$$

L'energia interna di un gas ideale che si espande liberamente rimane costante, e poiché in questo caso l'energia interna dipende soltanto dalla temperatura, anche la temperatura rimane costante.

L'espansione libera è un buon esempio di processo che avviene in *assenza di equilibrio*. Se un gas ha valori ben definiti di pressione e volume, e quindi di temperatura, si può rappresentare il suo stato con un punto su un diagramma p-V. L'assegnazione al gas di una temperatura implica che deve essere in equilibrio termico: ogni punto su un diagramma p-V rappresenta un sistema in equilibrio. Nell'espansione libera lo stato iniziale, con tutto il gas da una parte, è uno stato di equilibrio, e così pure lo stato finale. Ma nei passaggi intermedi, quando il gas dilaga precipitosamente da un lato all'altro, temperatura e pressione non hanno valori univoci, e non si riesce a tracciare un diagramma p-V del processo in corso. Si può però ugualmente analizzare il processo alla luce della prima legge, perché la variazione di energia interna dipende soltanto dai punti iniziale e finale. La Tabella 23.5 riassume le caratteristiche delle trasformazioni che abbiamo preso in esame e i loro trasferimenti di energia.

PROBLEMA SVOLTO 23.8 Nella Figura 23.23 vediamo un apparato nel quale convertiamo in vapore 1,00 kg di acqua facendola bollire alla pressione atmosferica standard. Il volume varia dal valore iniziale di $1{,}00 \cdot 10^{-3}$ m^3 del liquido a 1,671 m^3 del vapore. Si trovi (a) il lavoro compiuto sul sistema, (b) il calore fornito al sistema e (c) la variazione di energia interna del sistema.

Soluzione (a) Il lavoro svolto sul sistema durante questa trasformazione isobara è dato dall'Equazione 23.17:

$$L = -p(V_f - V_i) =$$
$$= -(1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Pa})(1{,}671 \text{ m}^3 - 1{,}00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) =$$
$$= -1{,}69 \cdot 10^5 \text{ J} = -169 \text{ kJ}.$$

 ISBN 88-408-1254-7

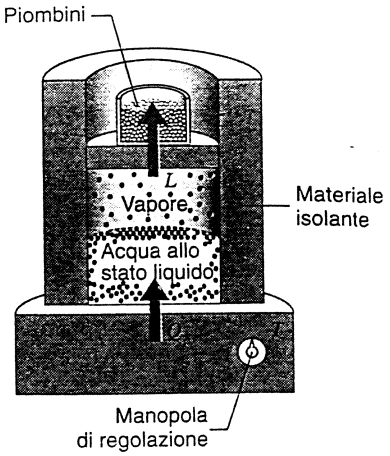


FIGURA 23.23 Problema svolto 23.8. L'acqua bolle a pressione costante e il serbatoio termico fornisce il calore necessario per la trasformazione in vapore di tutta l'acqua. Il gas in espansione compie lavoro per sollevare il pistone.

Questo lavoro è negativo: il sistema svolge un equivalente lavoro positivo *sull'*ambiente esterno sollevando il pistone.

(b) Dall'Equazione 23.13 abbiamo

$$Q = C_L m = (2256\ \text{kJ/kg})(1{,}00\ \text{kg}) = 2260\ \text{kJ}.$$

La quantità di calore è positiva, come è giusto, dato che il calore è ceduto al sistema dall'ambiente esterno.

(c) La prima legge ci dà la variazione di energia interna:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + L = 2260\ \text{kJ} + (-169\ \text{kJ}) = 2090\ \text{kJ}.$$

quantità positiva, con la quale si conferma che il processo di ebollizione ha aumentato l'energia interna. Questa energia rappresenta il lavoro svolto all'interno del liquido per vincere la forte attrazione fra le molecole di H_2O allo stato liquido.

Si nota che, quando l'acqua bolle, circa il 7,5 % del calore fornito (169 kJ/2260 kJ = 0,075) viene speso in lavoro esterno contro la pressione atmosferica. Il resto va a incrementare l'energia interna del sistema.

PROBLEMA SVOLTO 23.9 Il ciclo della Figura 23.21 consiste di tre trasformazioni, a partire dal punto A: una riduzione isocora di pressione da A a B; un aumento isobaro di volume da B a C e un'isoterma (con diminuzione di volume) da C nuovamente ad A. Il ciclo è percorso da 0,75 mol di un gas biatomico ideale, con $p_A = 3{,}2 \cdot 10^3$ Pa, $V_A = 0{,}21\ \text{m}^3$ e $p_B = 1{,}2 \cdot 10^3$ Pa. Trovare Q, L e ΔE_{int}.

Soluzione Il primo passo consiste nel trovare i valori di p, L e T in ogni punto. In A conosciamo p_A e V_A e possiamo trovare T_A dalla legge del gas perfetto:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{(3{,}2 \cdot 10^3\ \text{Pa})(0{,}21\ \text{m}^3)}{(0{,}75\ \text{mol})[8{,}31\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}]} = 108\ \text{K}.$$

Del punto B conosciamo p_B e $V_B (= V_A)$ e allo stesso modo troviamo T_B:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{(1{,}2 \cdot 10^3\ \text{Pa})(0{,}21\ \text{m}^3)}{(0{,}75\ \text{mol})[8{,}31\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}]} = 40\ \text{K}.$$

Di C conosciamo $p_C (= p_B)$ e $T_C (= T_A$, perché il processo CA è isotermico), e quindi possiamo trovare V_C:

$$V_C = \frac{nRT_C}{p_C} = \frac{(0{,}75\ \text{mol})[8{,}31\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}](108\ \text{K})}{1{,}2 \cdot 10^3\ \text{Pa}} = 0{,}56\ \text{m}^3.$$

Da questi dati passiamo a calcolare il calore trasferito, il lavoro svolto e la variazione di energia interna di ogni trasformazione. Per la trasformazione 1 (AB) si ha

$$Q_1 = nC_V(T_B - T_A) =$$
$$= (0{,}75\ \text{mol})[20{,}8\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}](40\ \text{K} - 108\ \text{K}) = -1060\ \text{J},$$
$$L_1 = 0 \qquad \text{(trasformazione isocora)},$$
$$\Delta E_{\text{int},1} = Q_1 + L_1 = -1060\ \text{J} + 0 = -1060\ \text{J}.$$

In questa trasformazione 1 il sistema trasferisce energia sotto forma di calore all'ambiente esterno, e la sua temperatura cala, con diminuzione dell'energia interna.

Per la trasformazione 2 (BC) a pressione costante troviamo

$$Q_2 = nC_p(T_C - T_B) =$$
$$= (0{,}75\ \text{mol})[29{,}1\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}](108\ \text{K} - 40\ \text{K}) = 1480\ \text{J},$$
$$L_2 = -p(V_C - V_B) =$$
$$= -(1{,}2 \cdot 10^3\ \text{Pa})(0{,}56\ \text{m}^3 - 0{,}21\ \text{m}^3) = -420\ \text{J},$$
$$\Delta E_{\text{int},2} = Q_2 + L_2 = 1480\ \text{J} + (-420\ \text{J}) = 1060\ \text{J}.$$

Durante questa trasformazione si trasferisce energia termica al gas, che, espandendosi, compie un lavoro sull'ambiente esterno.

Lungo l'isoterma della trasformazione 3 (CA) il lavoro è dato dalla (23.18):

$$L_3 = -nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C} =$$
$$= -(0{,}75\ \text{mol})[8{,}31\ \text{J/(mol} \cdot \text{K)}](108\ \text{K}) \ln \frac{0{,}21\ \text{m}^3}{0{,}56\ \text{m}^3} = 660\ \text{J}.$$

TABELLA 23.5 Applicazioni della prima legge della termodinamica

Trasformazioni	*Restrizioni*	*Prima Legge*	*Altre caratteristiche*
Tutte	–	$\Delta E_{\text{int}} = Q + L$	$\underline{\Delta E_{\text{int}} = nC_V\,\Delta T}$, $L = -\int p\,dV$
Adiabatica	$Q = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = L$	$\underline{L = (p_f V_f - p_i V_i)/(\gamma - 1)}$
Isocora	$L = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = Q$	$Q = nC_V\,\Delta T$
Isobara	$\Delta p = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = Q + L$	$L = -p\,\Delta V$, $Q = nC_p\,\Delta T$
Isoterma	$\underline{\Delta E_{\text{int}} = 0}$	$\underline{Q = -L}$	$\underline{L = -nRT \ln(V_f/V_i)}$
Ciclo termico	$\Delta E_{\text{int}} = 0$	$Q = -L$	
Espansione libera	$Q = L = 0$	$\Delta E_{\text{int}} = 0$	$\underline{\Delta T = 0}$

Le espressioni sottolineate si applicano soltanto ai gas ideali; le altre a tutti i gas.

$\Delta E_{\text{int},3} = 0$ (trasformazione isoterma).

$Q_3 = \Delta E_{\text{int},3} - L_3 = 0 - 660\ \text{J} = -660\ \text{J}.$

Per l'intero ciclo abbiamo

$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = -1060\ \text{J} + 1480\ \text{J} + (-660\ \text{J}) = -240\ \text{J},$

$L = L_1 + L_2 + L_3 = 0 + (-420\ \text{J}) + 660\ \text{J} = 240\ \text{J}.$

$\Delta E_{\text{int}} = \Delta E_{\text{int},1} + \Delta E_{\text{int},2} + \Delta E_{\text{int},3} = -1060\ \text{J} + 1060\ \text{J} + 0 = 0.$

Si noti che per il ciclo completo, come si prevedeva, è $\Delta E_{\text{int}} = 0$ e $Q = -L$. Il lavoro totale per il ciclo, che è percorso in senso antiorario, è positivo.

Nella soluzione di problemi di questo tipo possiamo ricorrere a espressioni che diano direttamente il calore trasferito solo per le trasformazioni adiabatiche ($Q = 0$), e per quelle isobare e isocore. Per altre trasformazioni, come quella isoterma di questo problema, per trovare Q dobbiamo prima calcolare ΔE_{int} e L, e quindi ricorrere alla prima legge della termodinamica.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

23.1 Calore: energia in transito

23.2 Trasmissione del calore

1. Due sbarrette cilindriche identiche vengono usate per trasferire calore da un serbatoio termico a temperatura T_{caldo} a uno a temperatura T_{freddo}. Le sbarrette vengono collegate in serie come illustrato in Figura 23.24a e si misura il flusso di calore H_0. Successivamente le sbarrette vengono collegate in parallelo come illustrato nella Figura 23.24b; quanto vale il flusso di calore nella nuova configurazione?

(A) $16H_0$. (B) $4H_0$.

(C) $2H_0$. (D) $H_0/2$.

(E) La risposta dipende dalla conducibilità termica k del materiale di cui sono costituiti i cilindri.

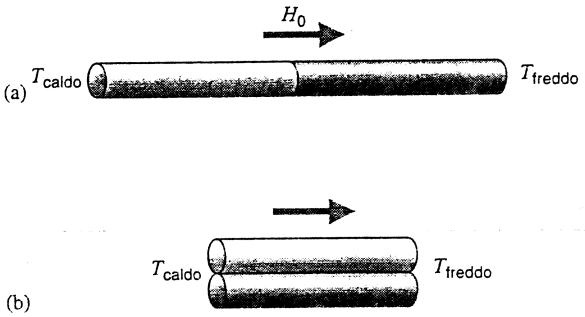


FIGURA 23.24 Domanda a risposta multipla 1.

2. Due sbarrette cilindriche hanno la stessa forma ma sono costituite da materiali con diversa conducibilità termica. Le due sbarrette vengono saldate in serie e le estremità vengono poste a contatto con due serbatoi termici rispettivamente a temperatura T_{caldo} e T_{freddo}. Sapendo che nel punto in cui le due sbarrette sono state saldate la temperatura vale T_b, si può affermare che

(A) T_b cade esattamente a metà tra T_{caldo} e T_{freddo}.

(B) T_b è più vicina a T_{caldo} che a T_{freddo}.

(C) T_b è più vicina a T_{freddo} che a T_{caldo}.

(D) T_b è più vicina alla temperatura del serbatoio termico a contatto con la sbarretta con conducibilità termica più bassa.

(E) T_b è più vicina alla temperatura del serbatoio termico a contatto con la sbarretta con conducibilità termica più alta.

3. Una sorgente di calore sferica a temperatura costante ha raggio r_1 e viene posta nel centro di una sfera solida uniforme di raggio r_2. La potenza termica attraverso la superficie della sfera è proporzionale a

(A) $r_2^2 - r_1^2$. (B) $r_2 - r_1$.

(C) $\ln r_1 - \ln r_2$. (D) $1/r_2 - 1/r_1$.

(E) $(1/r_2 - 1/r_1)^{-1}$.

23.3 Prima legge della termodinamica

4. Si dica quali tra i processi di seguito elencati violano la prima legge della termodinamica.

(A) $L > 0$, $Q < 0$ e $\Delta E_{\text{int}} = 0$.

(B) $L > 0$, $Q < 0$ e $\Delta E_{\text{int}} > 0$.

(C) $L > 0$, $Q < 0$ e $\Delta E_{\text{int}} < 0$.

(D) $L < 0$, $Q > 0$ e $\Delta E_{\text{int}} < 0$.

(E) $L > 0$, $Q > 0$ e $\Delta E_{\text{int}} < 0$.

23.4 Capacità termica e calore specifico

5. Un cubo di alluminio di massa 100 g alla temperatura di 120 °C viene posto in un contenitore isolato nel quale si trova dell'acqua a 18 °C. Dopo un certo tempo il sistema giunge all'equilibrio; si misura la temperatura dell'acqua e si ottiene 22 °C. Quanto vale la temperatura del blocco d'alluminio?

(A) Più di 22 °C.

(B) Esattamente 22 °C.

(C) Meno di 22 °C.

(D) Più o meno di 22 °C, dipende dalla massa dell'acqua nel contenitore.

6. Due blocchi d'alluminio pesano 50 g (*A*) e 100 g (*B*); i due blocchi hanno temperature iniziali rispettivamente uguali a 90 °C e 45 °C. I due blocchi vengono posti in due diversi contenitori all'interno dei quali vi è un litro d'acqua alla temperatura di 20 °C. Quale dei due blocchi avrà temperatura maggiore all'equilibrio?

(A) Il blocco *A*. (B) Il blocco *B*.

(C) I blocchi avranno la stessa temperatura.

(D) La risposta dipende dal valore del calore specifico dell'acqua.

7. Un pezzo di ghiaccio di 1 kg alla temperatura di 0 °C viene posto in un contenitore isolato e sigillato assieme a 2 kg d'acqua alla stessa temperatura. Il ghiaccio e l'acqua riempiono completamente il contenitore le cui pareti sono flessibili. È sensato aspettarsi che dopo un certo tempo

(A) parte dell'acqua si solidificherà e quindi la massa del ghiaccio risulterà accresciuta.

(B) parte del ghiaccio si scioglierà e quindi la massa totale di ghiaccio risulterà diminuita.

 ISBN 88-408-1254-7

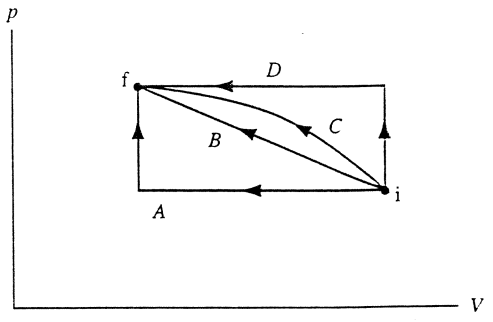


FIGURA 23.25 Domanda a risposta multipla 8.

(C) le quantità d'acqua e di ghiaccio risulteranno invariate.

(D) sia la quantità d'acqua che quella di ghiaccio risulteranno diminuite.

23.5 Lavoro scambiato con un gas ideale

8. Si considerino le trasformazioni in Figura 23.25 di stato iniziale i e finale f; si dica in quale caso il lavoro svolto sul gas è massimo.

9. Si dica quali tra le seguenti disuguaglianze *non* sono condizioni necessarie per un processo in cui un gas ideale compie lavoro

(A) $\Delta T \neq 0$. (B) $\Delta p \neq 0$.

(C) $\Delta V \neq 0$. (D) $Q \neq 0$.

23.6 Energia interna di un gas ideale

10. Si considerino le tre seguenti trasformazioni di un gas ideale: isocora, $\Delta V = 0$, isobara, $\Delta p = 0$, e isoterma, $\Delta T = 0$. (a) Per quale processo $L = 0$? (b) Per quale processo $Q = 0$? (c) Per quale processo si ha $L + Q = 0$? (d) Per quale processo si ha $\Delta E_{int} = Q$? (e) Per quale processo si ha $\Delta E_{int} = L$?

(A) $\Delta V = 0$. (B) $\Delta p = 0$. (C) $\Delta T = 0$.

(D) Per nessuno dei tre processi.

23.7 Calori specifici di un gas ideale

11. Per quale gas ideale è massima la differenza $C_p - C_V$?

(A) Monoatomico. (B) Biatomico. (C) Poliatomico.

(D) La differenza è la stessa per tutti i tipi di gas perfetto.

12. Qual sarebbe un valore sensato per il calore specifico molare a temperatura costante C_T?

(A) 0. (B) $0 < C_T < C_V$.

(C) $C_V < C_T < C_p$. (D) $C_T = \infty$.

23.8 Applicazioni della prima legge della termodinamica

13. Quali tra i seguenti processi sono proibiti dalla prima legge della termodinamica?

(A) Un cubo di ghiaccio viene posto in un bicchiere di caffè bollente; il ghiaccio si raffredda e il caffè si riscalda.

(B) Un pezzo di cera solida viene posto su una lamina di metallo calda; la cera si scioglie e il pannello di metallo si raffredda.

(C) Dell'acqua fredda viene versata in un bicchiere freddo; il bicchiere e l'acqua si raffreddano.

(D) Uno studente costruisce un motore che trasforma in lavoro il calore che si libera quando l'acqua si trasforma in ghiaccio.

(E) È possibile produrre ghiaccio secco lasciando espandere l'anidride carbonica gassosa in un sacchetto.

QUESITI

1. Nel linguaggio comune la temperatura viene spesso confusa con il calore; si pensi, per esempio, all'espressione "oggi il caldo è soffocante." Si costruiscano una serie di esempi che mettano in luce la differenza tra questi due concetti.

2. Si dia un esempio di processo in cui la temperatura del sistema cambia nonostante questo non scambi calore con l'ambiente.

3. È lecito considerare il calore come una forma di energia potenziale immagazzinata nel sistema? Questa interpretazione è in contraddizione con l'idea di calore come energia trasferita durante un processo termodinamico a causa della differenza di temperatura tra le diverse parti di un sistema?

4. È possibile cedere calore a una sostanza senza incrementarne la temperatura? In caso di risposta affermativa si dica se questa osservazione è in contraddizione con l'idea di calore come energia trasferita a causa della differenza di temperatura tra le diverse parti di un sistema.

5. Per quale ragione la fusione di un pezzo di ghiaccio richiede energia termica? Si osservi che la temperatura del sistema resta costante.

6. Si spieghi per quale ragione la presenza di una grossa massa d'acqua, come un oceano o un mare, tende a moderare le escursioni termiche sulla terraferma adiacente.

7. Scaldando un pezzo di ghiaccio lo si trasforma dapprima in liquido e poi in vapore. Un pezzo di anidride carbonica solida, invece, se scaldato si trasforma direttamente in vapore; si dice che il solido sublima. È possibile osservare l'anidride carbonica allo stato liquido?

8. Due pentole contenenti l'una acqua bollente e l'altra acqua fredda vengono poste in un ambiente a temperatura sotto zero. Si spieghi per quale ragione l'acqua fredda ghiaccia prima di quella calda se (a) le pentole non hanno coperchio, mentre se (b) le pentole sono chiuse allora è possibile che l'acqua bollente ghiacci prima di quella fredda.

9. Per quale motivo la temperatura di ebollizione dell'acqua cresce con la pressione?

10. Si considerino due corpi solidi, uno di legno e uno di metallo, alla stessa temperatura. Quando i due corpi sono al gelo, quello di metallo sembra più freddo di quello di legno; quando i due corpi sono surriscaldati, quello di metallo sembra più caldo di quello di legno. A quale temperatura i due corpi sembreranno ugualmente freddi o caldi?

11. Qual è il modo più efficiente di raffreddare del caffè bollente per mezzo di un cucchiaino metallico? Mescolando il caffè si compie lavoro sul sistema. sembra quindi che l'effetto sia quello di riscaldarlo.

12. Come mai uno strato di neve protegge le piante durante gli inverni rigidi? Nei periodi invernali molto rigidi i coltivatori di agrumi della Florida spruzzano le loro piante con acqua sperando che ghiacci, perché?
13. Si spieghi la sensazione di fresco o di freddo che si prova quando si viene investiti da una folata di vento.
14. Un cuoco malaccorto introduce la sua mano in un forno molto caldo per estrarne una casseruola e si scotta le dita toccando la pentola bollente. Per quale ragione l'aria all'interno del forno, pur trovandosi esattamente alla stessa temperatura della casseruola, non brucia le dita del cuoco?
15. È possibile infilare una mano nel metallo fuso per un intervallo brevissimo di tempo senza provocarsi scottature. Perché?
16. Per quale motivo i pannelli isolanti usati negli attici sono più spessi di quelli usati nelle mura di una casa?
17. Il ghiaccio è sempre alla temperatura di 0 °C? Può raggiungere temperature più basse? Più alte? E le miscele di acqua e ghiaccio?
18. (a) È possibile riscaldare il ghiaccio a una temperatura maggiore di 0 °C senza fonderlo? Si giustifichi la risposta. (b) È possibile raffreddare l'acqua a una temperatura minore di 0 °C senza ghiacciarla? Si giustifichi la risposta.
19. Per quale motivo le dita si attaccano a un vassoio metallico appena estratto da un congelatore?
20. È difficoltoso cuocere le uova sode in alta montagna perché la temperatura di ebollizione è relativamente bassa. Si proponga un metodo semplice che permetta di superare questa difficoltà.
21. Il tempo necessario per cuocere le uova sode si riduce se l'acqua viene fatta bollire in modo più violento?
22. Per quale motivo l'acqua è il miglior liquido di raffreddamento? Vi sono situazioni in cui altri liquidi sono preferibili?
23. Per quale ragione ci si aspetta che il calore latente di evaporazione di una sostanza sia molto maggiore di quello di fusione?
24. Si spieghi per quale motivo il calore specifico a pressione costante è maggiore di quello a volume costante.
25. Per quale motivo la differenza $C_p - C_V$ è quasi sempre trascurabile nei solidi?
26. È possibile che C_p risulti minore di C_V? In caso di risposta affermativa si diano alcuni esempi.
27. I gas reali si raffreddano durante un'espansione libera; ciò non avviene nei gas ideali. Si spieghi questo diverso comportamento.
28. Si spieghino le differenze e le analogie tra calore, lavoro ed energia interna.
29. Si discuta il congelamento dell'acqua dal punto di vista del primo principio della termodinamica. Si ricordi che a parità di massa l'acqua occupa un volume maggiore di quello occupato dal ghiaccio.
30. Un *thermos* contenente caffè viene agitato con vigore. Si consideri il caffè come il sistema termodinamico e si risponda alle seguenti domande. (a) Si osserva un aumento della temperatura del sistema? (b) Gli è stato ceduto calore? (c) È stato compiuto lavoro su di esso? (d) È variata la sua energia interna?
31. La temperatura di un sistema isolato dall'ambiente esterno è costante? Si giustifichi la risposta.
32. Ha senso affermare che il calore e l'energia interna sono la stessa cosa? In caso di risposta negativa si dia un esempio di processo in cui cambia l'energia interna del sistema senza che vi sia passaggio di calore attraverso il contorno del sistema.
33. È possibile stabilire se l'energia interna di un sistema è stata acquisita mediante scambio di calore o esecuzione di lavoro?
34. Noti la pressione e il volume di un sistema è possibile determinare in modo univoco la sua temperatura?
35. Ricordando che l'energia interna di un sistema termodinamico consiste di energia cinetica e di energia potenziale, si dica in cosa l'energia interna si differenzia dalla temperatura.
36. Si spieghi come si possa mantenere costante la temperatura di un gas durante un processo termodinamico.
37. In una giornata invernale la temperatura della faccia interna di un muro portante è molto più bassa della temperatura ambiente interna, mentre la faccia esterna ha temperatura molto più alta di quella ambiente esterna. Si spieghi questo fenomeno.
38. È possibile che l'energia termica si trasmetta per radiazione? In caso di risposta affermativa si diano degli esempi, in caso di risposta negativa si diano delle giustificazioni.
39. Per quale motivo le pentole di acciaio inossidabile hanno il fondo ricoperto di un sottile strato di rame o di alluminio?
40. Ricordando che il calore può trasmettersi per convezione e per radiazione, oltre che per conduzione, si spieghi per quale ragione i *thermos* hanno pareti doppie argentate con intercapedine sotto vuoto.
41. Un lago si gela a partire dagli strati d'acqua superficiali. Il trasporto di calore per convezione è operante in questo fenomeno? Quello per conduzione? Quello per radiazione?
42. Si spieghi per quale motivo la temperatura di un gas sottoposto a espansione adiabatica diminuisce.
43. Si commenti la seguente affermazione: "Vi sono due metodi per realizzare una trasformazione adiabatica. L'uno consiste nell'eseguirla rapidamente, l'altro nell'eseguirla in un contenitore isolato."

ESERCIZI

23.1 Calore: energia in transito

23.2 Trasmissione del calore

1. Il flusso medio al quale il calore fuoriesce dalla superficie terrestre nell'America del Nord è di 54 mW/m^2 e la conducibilità termica media dello strato terrestre superficiale è di 2,5 $W/(m \cdot K)$. Assumendo che la temperatura della su-

 ISBN 88-408-1254-7

perficie sia di 10 °C si stimi la temperatura dello strato profondo distante 33 km dalla superficie. Si ignorino il calore dovuto alla radioattività degli elementi e la curvatura della Terra.

2. Si calcoli la potenza termica trasmessa durante una giornata invernale molto fredda attraverso una parete spessa 32 cm, larga 6,2 m e alta 3,8 m. Si assuma che la temperatura interna valga 26 °C, quella esterna −18 °C e che la conducibilità termica dei mattoni sia 0,74 W/(m · K).
3. Si consideri la lastra di rame illustrata nella Figura 23.2 supponendo $\Delta x = 24,9$ cm e $A = 1,80$ m^2. Si consideri lo stato stazionario raggiunto nel caso in cui $T = -12,0$ °C e $\Delta T = 136$ °C. Si calcoli (a) il gradiente di temperatura, (b) la potenza termica e (c) il valore della temperatura nel punto della lastra distante 11,0 cm dall'estremità più calda.
3. (a) Si calcoli la potenza termica dissipata attraverso gli abiti di uno sciatore sapendo che: la superficie corporea vale 1,8 m^2 e gli abiti sono spessi 1,2 cm: la temperatura della superficie del corpo dello sciatore è di 33 °C e quella esterna vale 1,0 °C; gli abiti hanno conducibilità termica 0,040 W/(m · K). (b) Si ripeta lo stesso calcolo supponendo che a causa di una caduta gli abiti dello sciatore si impregnino d'acqua. Si assuma che la conducibilità termica dell'acqua sia 0,60 W/(m · K).
5. Una superficie di area $2A$ deve essere ricoperta di materiale isolante e si hanno a disposizione quattro spezzoni quadrati di due diversi materiali, ma tutti di medesimo spessore e area A. L'opera può essere realizzata nei due modi illustrati in Figura 23.26; si supponga $k_1 \neq k_2$ e si dica in quale caso si ottiene il minimo flusso di calore.

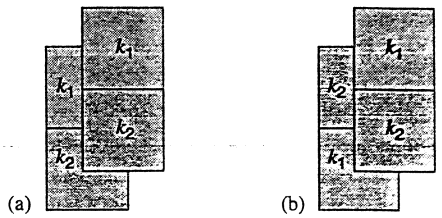


FIGURA 23.26 Esercizio 5.

6. Si dimostri che la temperatura T_x del punto di interfaccia di una lastra composita (si veda il Problema svolto 23.1) è data dalla formula

$$T_x = \frac{R_1 T_1 + R_2 T_2}{R_1 + R_2}.$$

7. Si consideri un laghetto poco profondo ghiacciato e si supponga che si sia raggiunto lo stato stazionario caratterizzato dalla temperatura dell'aria di −5,20 °C e quella del fondo di 3,98 °C. Si calcoli lo spessore dello strato di ghiaccio sapendo che la profondità totale del laghetto (strato di ghiaccio + strato d'acqua) è di 1,42 m e assumendo che il ghiaccio e l'acqua abbiano conducibilità termica rispettivamente uguale a 1,67 e 0,502 W/(m · K).
8. Due sbarre metalliche rettangolari identiche vengono saldate come illustrato nella Figura 23.27a. Si osserva che in 2,0 min le sbarre vengono attraversate da una quantità di calore pari a 10 J. Si calcoli in quanto tempo le sbarre verrebbero attraversate da 30 J se venissero saldate come in Figura 23.27b.

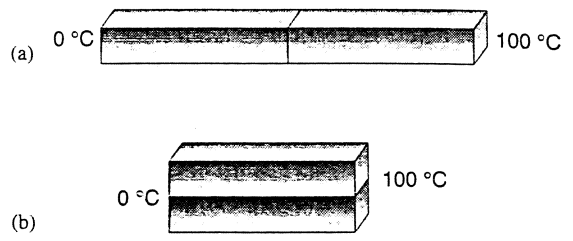


FIGURA 23.27 Esercizio 8.

9. In Figura 23.28 è riportato il grafico ideale della temperatura in funzione della distanza da una finestra di dimensioni 60 cm · 60 cm · 0,50 cm in una giornata invernale priva di vento. (a) Si calcoli il flusso di calore attraverso la finestra. (Suggerimento: la variazione di temperatura nel vetro è molto piccola.) (b) Si stimi la differenza di temperatura tra la superficie interna e quella esterna del vetro della finestra.

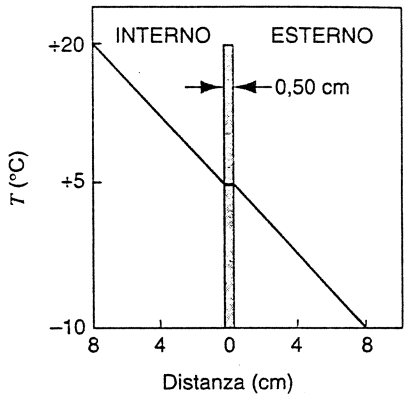


FIGURA 23.28 Esercizio 9.

23.3 Prima legge della termodinamica

10. Su un sistema termodinamico viene compiuto un lavoro di 214 J e da esso vengono estratti 293 J di calore. Si determini, dal punto di vista della prima legge delle termodinamica, il valore e il segno delle seguenti quantità: (a) L, (b) Q e (c) ΔE_{int}.
11. Un sistema termodinamico passa dallo stato iniziale i allo stato finale f (Figura 23.29). Se sottoposto al processo iaf si misura $Q = 50$ J ed $L = -20$ J. Se sottoposto al processo ibf si misura $Q = 36$ J. (a) Si calcoli L lungo ibf. (b) Si calcoli Q per il processo fi rappresentato dalla curva in Figura 23.29, sapendo che $L = +13$ J. (c) Si calcoli $E_{\text{int},f}$ sapendo che $E_{\text{int},i} = 10$ J. (d) Si calcoli Q per i processi ib e bf sapendo che $E_{\text{int},b} = 22$ J.

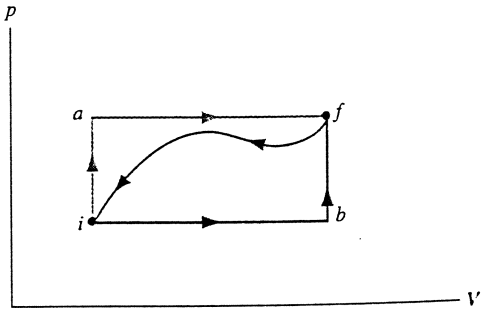


FIGURA 23.29 Esercizio 11.

23.4 Capacità termica e calore specifico

12. Per evitare il pericolo costituito dagli iceberg (Figura 23.30), le navi che percorrono l'Atlantico del Nord nella stagione critica sono costrette ad aumentare la lunghezza delle loro rotte del 30 %. Vi sono varie strategie che permettono di distruggere un iceberg; per esempio inserendo dell'esplosivo nella sua base, oppure bombardandolo, o distruggendolo a colpi di battipalo, o ancora ricoprendolo con nerofumo. Si supponga di voler sciogliere direttamente l'iceberg ponendovi una sorgente di calore all'interno; si calcoli quanto calore è necessario per sciogliere il 10 % di un iceberg da 210 000 tonnellate.

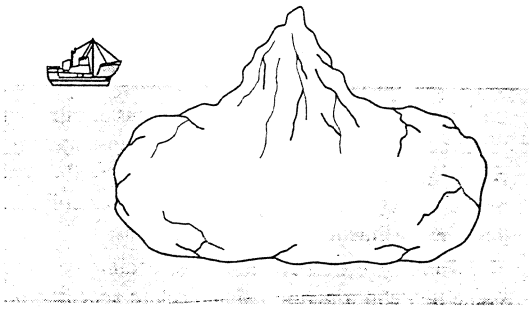


FIGURA 23.30 Esercizio 12.

13. Si supponga di immagazzinare l'energia solare usando barili pieni d'acqua. Durante cinque giornate invernali nuvolose si devono consumare 5,22 GJ per mantenere in casa la temperatura di 22,0 °C. Si calcoli il volume d'acqua necessario assumendo che la temperatura dell'acqua nei barili sia di 50,0 °C.

14. Per far bollire 136 g d'acqua si usa un piccolo bollitore elettrico a immersione di potenza 220 watt. Ignorando le perdite di calore si calcoli il tempo necessario per portare l'acqua da 23,5 °C al punto di ebollizione.

15. Si calcoli la quantità d'acqua che rimane allo stato liquido se si sottraggono 50,4 kJ di calore a 258 g di acqua inizialmente a 0 °C.

16. (a) Si calcoli il possibile aumento di temperatura dell'acqua che cade dall'altezza di 49,9 m alle cascate del Niagara. (b) Quali fattori si oppongono a questo possibile aumento di temperatura?

17. Un ciotola di rame di massa 146 g contiene 223 g d'acqua; la ciotola e l'acqua sono alla temperatura di 21,0 °C. Per effetto di un cilindro di rame molto caldo di massa 314 g introdotto nell'acqua, quest'ultima bolle e 4,70 g d'acqua si trasformano in vapore prima di raggiungere lo stato finale in cui la temperatura del sistema è 100 °C. (a) Si calcoli la quantità di calore ceduta all'acqua e (b) alla ciotola. (c) Si calcoli la temperatura iniziale del cilindro.

18. Si calcoli la quantità di calore necessaria per sciogliere completamente 130 g d'argento partendo dalla temperatura iniziale di 16,0 °C. Si assuma che il calore specifico non dipenda dalla temperatura (si consultino le Tabelle 23.2 e 23.3).

19. Un bollitore d'alluminio di massa 0,560 kg ha una resistenza di potenza 2,40 kW; nel bollitore vengono introdotti 0,640 L d'acqua alla temperatura di 12,0 °C. Si calcoli dopo quanto tempo (a) ha inizio l'ebollizione e (b) l'acqua è passata completamente nella fase di vapore. Si assuma che la temperatura del bollitore non superi mai il valore di 100 °C.

20. Si calcoli la quantità di vapore a 100 °C che deve essere introdotta in un contenitore termicamente isolato assieme a 150 g di ghiaccio a 0 °C, affinché si produca acqua nella fase liquida a 50 °C.

21. Alla temperatura di 0 °C un anello di rame di massa 21,6 g ha diametro di 2,54000 cm. Alla temperatura di 100 °C una sfera di alluminio ha diametro di 2,54533 cm. La sfera viene posta sull'anello come illustrato nella Figura 23.31 e si fa in modo che il sistema giunga all'equilibrio termico senza perdite di calore. Si determini la massa della sfera d'alluminio sapendo che all'equilibrio termico ha esattamente lo stesso diametro dell'anello.

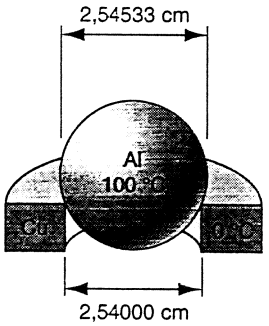


FIGURA 23.31 Esercizio 21.

22. (a) Due cubetti di ghiaccio di massa 50 g ciascuno alla temperatura del congelatore di −15 °C vengono immersi in un bicchiere in cui vi sono 200 g d'acqua alla temperatura di 25 °C. Si calcoli la temperatura finale della bevanda. (b) Si ripeta l'esercizio supponendo di introdurre nel bicchiere un solo cubetto di ghiaccio. Si trascuri la capacità termica del bicchiere.

23. Cedendo 320 J di calore a un campione di 37,1 g di un certo materiale di massa molare 51,4 g/mol, la sua temperatura cresce da 26,1 a 42,0 °C. (a) Si calcoli il calore specifico del materiale. (b) Si calcoli il numero di moli presenti nel campione. (c) Si calcoli il calore specifico molare del materiale.

23.5 Lavoro scambiato in un gas ideale

24. Il volume di un gas aumenta da 1,0 a 5,0 m^3 e la sua pressione diminuisce da 15 a 5,0 Pa. Si calcoli il lavoro compiuto sul gas supponendo che la pressione vari con il volume come nei tre processi illustrati nella Figura 23.32.

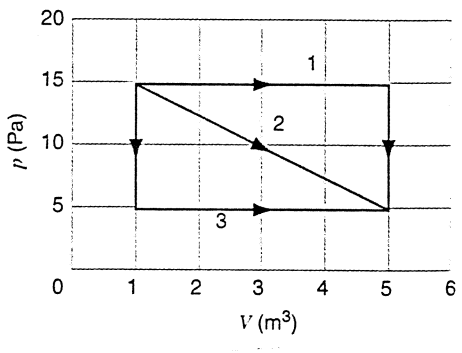


FIGURA 23.32 Esercizio 24.

 ISBN 88-408-1254-7

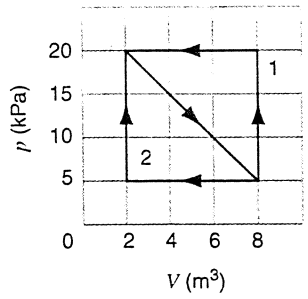


FIGURA 23.33 Esercizio 25.

25. Un gas subisce la trasformazione diagonale illustrata nel diagramma p-V riportato nella Figura 23.33 e il suo volume aumenta da 2,0 a 8,0 m^3. Il gas viene successivamente compresso a 2,0 m^3 lungo i cammini 1 o 2. Si calcoli il lavoro compiuto sul gas lungo i due cicli.
26. Una massa d'aria occupa il volume di 0,142 m^3 alla pressione di 103 kPa. L'aria subisce un'espansione isoterma fino alla pressione relativa di 0 Pa e poi viene raffreddata a pressione costante fino a raggiungere il suo volume iniziale. Si calcoli il lavoro compiuto sul gas.
27. Si calcoli il lavoro che si deve compiere per comprimere 1,12 moli di ossigeno dallo stato iniziale, caratterizzato dal volume di 22,4 L e dalla pressione di 1,33 bar, allo stato finale di 15,3 L e alla stessa temperatura.
28. (a) Un litro di gas, caratterizzato da $\gamma = 1,32$, si trova inizialmente alla temperatura di 273 K e alla pressione di 1,01 bar. Il gas viene compresso adiabaticamente fino a dimezzarne il volume. Si determini la pressione finale del gas. (b) Successivamente il gas viene riportato isobaricamente alla temperatura di 273 K. Si determini il volume finale del gas. (c) Si calcoli il lavoro compiuto sul gas.
29. Un gas, alla pressione di 1,18 bar e alla temperatura di 310 K, occupa un volume di 4,33 L. Il gas viene compresso adiabaticamente fino a raggiungere il volume di 1,06 L. Si determini (a) la pressione finale e (b) la temperatura finale, assumendo che il gas sia ideale e che $\gamma = 1,40$. (c) Si calcoli il lavoro compiuto sul gas.
30. Un compressore trasforma adiabaticamente aria alla pressione di 1,01 bar e alla temperatura di 18,0 °C in aria alla pressione di 2,32 bar. La potenza del compressore è di 230 W. (a) Si determini la temperatura dell'aria compressa. (b) Si calcoli quanta aria compressa, in litri, viene prodotta ogni secondo.

23.6 Energia interna di un gas ideale

31. Si calcoli l'energia cinetica rotazionale totale delle molecole di una mole d'aria alla temperatura di 25,0 °C.
32. Si calcoli l'energia interna totale di una mole di gas ideale alla temperatura di 250 °C.
33. Un gas ideale viene compresso adiabaticamente dallo stato individuato dai parametri $p = 122$ kPa, $V = 10,7$ m^3 e $T = -23,0$ °C allo stato caratterizzato da $p = 1450$ kPa e $V = 1,36$ m^3. (a) Si calcoli il valore di γ. (b) Si determini la temperatura finale. (c) Si calcoli il numero di moli. (d) Si calcoli l'energia cinetica traslazionale per mole prima e dopo la compressione. (e) Si calcoli il rapporto tra la velocità quadratica media delle molecole prima e dopo la compressione.
34. Una particella facente parte della radiazione cosmica con energia di 1,34 TeV viene rivelata da un tubo contenente 0.120 moli di neon. Si calcoli l'aumento della temperatura del gas dovuto alla ridistribuzione dell'energia della particella.

23.7 Calori specifici di un gas ideale

35. Un esperimento viene condotto riscaldando a pressione costante 1,35 moli di ossigeno (O_2) inizialmente alla temperatura di 11,0 °C. Si calcoli il calore che si deve fornire al gas per raddoppiarne il volume.
36. Dodici grammi d'azoto (N_2) vengono posti in un contenitore di acciaio alla temperatura di 25,0 °C e riscaldati fino a raggiungere la temperatura di 125 °C. (a) Si calcoli il numero di moli del gas. (b) Si calcoli la quantità di calore che è stata fornita all'azoto.
37. La temperatura di 4,34 moli di un gas ideale biatomico viene aumentata di 62,4 K a pressione costante. (a) Si calcoli la quantità di calore fornita al gas. (b) Si calcoli l'aumento dell'energia interna del gas. (c) Si calcoli l'aumento dell'energia cinetica traslazionale del gas.
38. Si calcoli, in J/(kg · K), il calore specifico a volume costante dell'elio a partire dal suo calore specifico molare a volume costante e ricordando che un atomo di elio ha massa pari a $6,66 \cdot 10^{-27}$ kg.
39. In un contenitore viene posta una miscela di tre gas non interagenti: il numero di moli della specie i-esima viene indicato con n_i e il suo calore specifico molare a volume costante con C_i. Si determini il calore specifico molare a volume costante della miscela.

23.8 Applicazioni della prima legge della termodinamica

40. Un gas viene posto in un contenitore e sottoposto al ciclo illustrato nella Figura 23.34. Si determini il calore Q_{CA} fornito al gas durante la trasformazione CA sapendo che $Q_{AB} = 20$ J, $Q_{BC} = 0$ e $L_{BCA} = -15$ J.

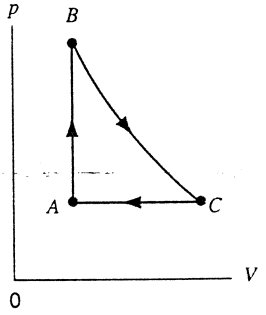


FIGURA 23.34 Esercizio 40.

41. Si effettua un'espansione isoterma di n moli di un gas ideale. Si esprima il flusso di calore entrante nel gas in funzione della temperatura e dei volumi iniziale e finale.
42. Una certa quantità di gas ideale occupa il volume V_0 alla pressione p_0 e alla temperatura T_0. Il gas subisce un'espansione (a) isobara, (b) isoterma e (c) adiabatica fino a raggiungere il volume finale V_1. Si disegnino le trasformazioni nel piano p-V. Si dica per quale trasformazione il calore Q fornito al gas è massimo e per quale trasformazione è minimo. Si dica per quale trasformazione il lavoro L è massimo e per quale trasformazione è minimo. Si dica per quale trasformazione la variazione di energia interna

del gas ΔE_{int} è massima e per quale trasformazione è minima.

43. (a) Un gas ideale monoatomico inizialmente alla temperatura di 19,0 °C viene compresso repentinamente a un decimo del suo volume iniziale. Si calcoli la temperatura del gas nello stato finale. (b) Si esegua lo stesso calcolo nel caso di un gas biatomico.

44. Si considerino le trasformazioni termodinamiche illustrate nella Figura 23.35 e si assuma

$$p_i = 2{,}20 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V_i = 0{,}0120 \text{ m}^3,$$
$$p_f = 1{,}60 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad V_i = 0{,}0270 \text{ m}^3.$$

Per ciascuna delle tre trasformazioni in figura si calcoli Q, L e $Q + L$. Suggerimento: si calcoli p, V e T per gli stati A, B e C; si assuma che il gas sia ideale e monoatomico.

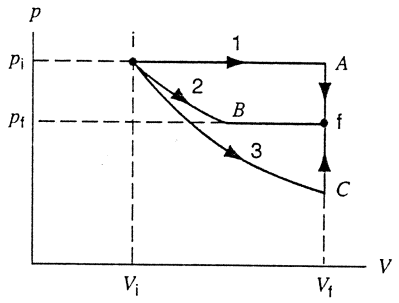


FIGURA 23.35 Esercizio 44.

45. Sia T_1 la temperatura iniziale di n moli di un gas ideale monoatomico. La pressione e il volume del gas vengono raddoppiati lentamente in modo tale che la trasformazione corrisponda a una retta del piano p-V. Si determini l'espressione di (a) L, (b) ΔE_{int} e (c) Q in funzione dei parametri n, R e T_1. (d) Si definisca e si calcoli il calore specifico equivalente del processo descritto.

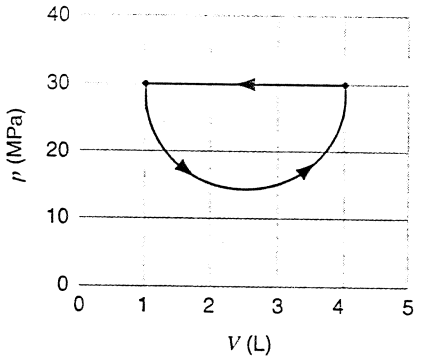


FIGURA 23.36 Esercizio 46.

46. Un gas viene sottoposto al ciclo illustrato nella Figura 23.36. Si calcoli il calore netto fornito al sistema durante un ciclo completo.

47. A un gas ideale vengono forniti 20,9 J di calore e il suo volume passa da 63,0 a 113 cm^3, mentre la pressione resta costantemente uguale a 1,01 bar. (a) Si calcoli la variazione di energia interna del gas. (b) Si calcoli il calore specifico molare del gas supponendo che nel contenitore vi siano $2{,}00 \cdot 10^{-3}$ mol di gas. (c) Si calcoli il calore specifico molare a volume costante.

48. La temperatura di 3,15 moli di un gas ideale poliatomico viene aumentata di 52,0 K per mezzo di una trasformazione isocora o isobara o adiabatica. Si compili una tabella inserendo per ciascuna trasformazione il valore del calore fornito al gas, del lavoro compiuto sul gas, della variazione di energia interna e di energia cinetica traslazionale totale del gas.

PROBLEMI

1. (a) Si calcoli la potenza termica dissipata attraverso il vetro di una finestra di area 1,4 m^2 e spessore 3,0 mm; si supponga che la temperatura esterna valga −20 °F e quella interna +72 °F. (b) Si ripeta il calcolo proposto al punto precedente supponendo che la finestra sia costituita da due vetri di spessore 3,0 mm separati da uno strato d'aria di 7,5 cm; si supponga che la conduzione sia l'unico meccanismo con il quale si trasmette il calore.

2. Una sbarra cilindrica d'argento di lunghezza 1,17 m e sezione 4,76 cm^2 viene isolata in modo da evitare la dissipazione di calore attraverso la sua superficie laterale. Tra le due estremità viene imposta la differenza di temperatura di 100 °C ponendo una delle due estremità in acqua bollente e l'altra in una miscela di ghiaccio fondente. (a) Si calcoli il flusso di calore lungo la sbarra. (b) Si calcoli il ritmo al quale fonde il ghiaccio all'estremità fredda.

3. Assumendo che k sia costante, si dimostri che il flusso di calore radiale attraverso una sostanza racchiusa tra due superfici sferiche concentriche è dato dall'equazione

$$H = \frac{(T_1 - T_2)4\pi k r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

ove r_1 e T_1 sono il raggio e la temperatura della sfera interna, mentre r_2 e T_2 sono il raggio e la temperatura di quella esterna.

4. (a) Con i dati dell'Esercizio 1 si calcoli il flusso di calore uscente attraverso la superficie terrestre. (b) Si supponga che questo flusso sia dovuto alla presenza di un nucleo caldo sferico di raggio 3470 km con centro nel centro della Terra. Si supponga, inoltre, che la regione compresa tra il nucleo caldo e la superficie sia priva di ulteriori sorgenti di calore e abbia conducibilità termica media di 4,2 W/(m · K). Si calcoli la temperatura del nucleo caldo partendo dai risultati del Problema 3. (Si assuma che la superficie terrestre sia alla temperatura di 0 °C.) Si spieghi per quale ragione si ottiene un risultato sbagliato di un fattore 10.

5. A temperatura abbastanza bassa, sotto i 50 K, la conducibilità termica di un metallo è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta, ovvero $k = aT$ con a una costante che dipende dalle proprietà fisiche del metallo. Si dimostri che in queste condizioni il flusso di calore lungo una sbarra di lunghezza L e sezione trasversale A è dato da

$$H = \frac{aA}{2L}(T_1^2 - T_2^2),$$

 ISBN 88-408-1254-7

ove T_1 e T_2 sono le temperature fissate delle due estremità della sbarra. Si ignori la dissipazione del calore attraverso la superficie laterale della sbarra.

6. Un recipiente pieno d'acqua viene tenuto all'esterno di un'abitazione, durante una giornata molto fredda, fino a quando si forma uno strato superficiale ghiacciato spesso 5,0 cm (Figura 23.37). Si calcoli il ritmo al quale si forma la lastra di ghiaccio, espresso in centimetri all'ora, sapendo che la temperatura esterna vale -10 °C. Si assuma che la conducibilità termica del ghiaccio sia uguale a 1,7 W/(m · K), la sua massa volumica valga 0,92 g/cm^3 e che non vi sia dissipazione di calore attraverso le pareti del contenitore.

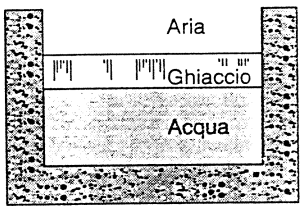


FIGURA 23.37 Problema 6.

7. Si prepara del tè ghiacciato mescolando 520 g di tè bollente con la stessa quantità di ghiaccio alla temperatura di 0 °C. Si determini la temperatura e la quantità di ghiaccio finale supponendo che il tè fosse all'inizio alla temperatura di (a) 90,0 °C e (b) 70,0 °C.

8. Per misurare il calore specifico di un liquido si può usare uno speciale *calorimetro* in cui il liquido scorre con portata nota e il calore viene aggiunto al liquido con potenza anch'essa nota. Il calore specifico del liquido viene dedotto a partire dalla misura sperimentale della differenza di temperatura tra il punto di ingresso del liquido e quello d'uscita. Si supponga che un fluido di massa volumica 0,85 g/cm^3 fluisca attraverso il calorimetro con portata volumica di 8,2 cm^3/s e che il calore venga introdotto mediante una resistenza elettrica di potenza 250 W. Si determini il calore specifico del liquido sapendo che, a regime stazionario, si misura la differenza di temperatura di 15 °C tra i punti d'ingresso e d'uscita del fluido.

9. Se un recipiente d'acqua viene lasciato in un ambiente alla temperatura di 32 °C, si osserverà che parte del fluido evaporerà a causa della fuga di alcune molecole d'acqua superficiali. Il calore di evaporazione è all'incirca uguale a εn, ove ε è l'energia media necessaria per liberare una molecola ed n è la densità molecolare. (a) Si calcoli ε. (b) Assumendo che la relazione tra l'energia cinetica delle molecole d'acqua e la temperatura sia la stessa valida nel caso dei gas, si calcoli il rapporto tra ε e l'energia cinetica media delle molecole di H_2O.

10. Un termometro di massa 0,055 kg e capacità termica 46,1 J/K segna 15,0 °C. Successivamente lo strumento viene immerso in 0,300 kg d'acqua e raggiunge l'equilibrio termico con temperatura finale uguale a quella dell'acqua. Si determini la temperatura iniziale dell'acqua sapendo che nello stato finale il termometro indica 44,4 °C. Si trascurino le perdite di calore del sistema.

11. Partendo dalle informazioni contenute nella Figura 23.11 si stimi la quantità di calore necessaria per portare la temperatura di 0,45 mol di carbone da 200 a 500 K. (*Suggerimento*: si approssimi con un segmento la porzione di curva corrispondente all'intervallo di temperatura considerato.)

12. A pressione atmosferica e nell'intervallo di temperature da 50 a 100 K, il calore specifico molare dell'argento varia con la temperatura in accordo con la legge empirica

$$C = 0{,}318T - 0{,}00109T^2 - 0{,}628,$$

ove C è misurata in J/(mol · K) e la temperatura T in K. Si calcoli la quantità di calore necessaria per portare la temperatura di 316 g di argento da 50,0 a 90,0 K. La massa molare dell'argento vale 107,87 g/mol.

13. In una camera a nebbia mantenuta a 292 K il gas subisce un'espansione molto rapida. Assumendo che il processo sia adiabatico, che sia $\gamma = 1{,}40$ e che il rapporto di espansione volumetrica sia pari a 1,28, si calcoli la temperatura finale del gas.

14. Si calcoli il lavoro compiuto su n moli di un gas di van der Waals durante un'espansione isoterma da V_i a V_f.

15. Un tubo sottile, chiuso alle estremità, di lunghezza 1,00 m giace orizzontalmente; nella regione mediana il tubo è occupato da 10,0 cm di mercurio, mentre la parte restante è occupata da aria a pressione atmosferica. Si calcoli lo spostamento del mercurio quando il tubo viene portato nella posizione verticale. Si assuma che il processo sia (a) isotermo e (b) adiabatico (per l'aria si ha $\gamma = 1{,}40$). Quale delle due ipotesi è più ragionevole?

16. Una stanza di volume V viene riempita di un gas ideale biatomico, che nel seguito verrà chiamato aria, a temperatura T_1 e pressione p_0. L'aria viene riscaldata a pressione costante, perché le pareti non sono a tenuta stagna, e la temperatura raggiunge il valore T_2. Si dimostri che l'energia interna dell'aria che resta nella stanza nello stato finale è uguale a quella dell'aria nello stato iniziale. Si dimostri, inoltre, che tutta l'energia fornita dal sistema di riscaldamento è andata perduta con l'aria fuoriuscita dalla stanza. Perché ci si preoccupa di accendere il sistema di riscaldamento se ciò non aumenta l'energia dell'aria nella stanza? (Si ignori l'energia necessaria a far aumentare la temperatura delle pareti, ci si limiti a considerare solo l'energia spesa per aumentare la temperatura dell'aria.)

17. Lo iodio ha massa molare 127 g; un'onda stazionaria di frequenza 1000 Hz si instaura in un tubo riempito di iodio e tenuto alla temperatura di 400 K. I nodi dell'onda hanno distanza mutua di 6,77 cm. Si determini, a partire da questi dati, se lo iodio è un gas monoatomico o biatomico.

18. n Figura 23.38a è illustrato un cilindro contenente gas e chiuso mediante un pistone mobile. Il cilindro viene im-

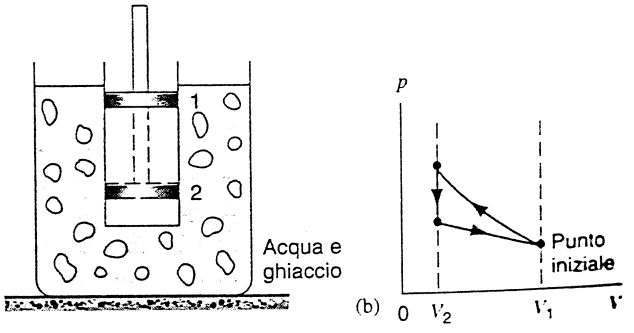


FIGURA 23.38 Problema 18.

merso in una miscela acqua-ghiaccio e il pistone viene abbassato repentinamente dalla posizione 1 alla 2. Il pistone viene tenuto nella posizione 2 fino a quando il gas giunge nuovamente alla temperatura di 0 °C e poi viene riportato lentamente nella posizione 1. La figura 23.38b rappresenta un diagramma del processo. Si calcoli quanto lavoro è stato compiuto sul gas sapendo che durante il ciclo si sono sciolti 122 g di ghiaccio.

19. Un motore termico fa compiere a 1,00 mol di un gas ideale monoatomico il ciclo illustrato nella Figura 23.39. La trasformazione AB è isocora, quella BC adiabatica e quella CA isobara. (a) Per ciascuno dei tre processi e per l'intero ciclo si calcoli il calore Q, il lavoro L e la variazione di energia interna E_{int}. (b) Sapendo che nello stato A la pressione vale 1,00 atm si determini la pressione del gas negli stati B e C. Si ponga 1 atm $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa ed $R = 8{,}314$ J/(mol · K).

20. Un cilindro viene chiuso a tenuta mediante un pistone mobile di massa 2,0 kg e sezione trasversale 2,0 cm^3 (Figura 23.40). Il cilindro contiene acqua e vapore a temperatura costante; si osserva che il pistone si muove verso il basso alla velocità di 0,30 cm/s a causa della dissipazione di calore attraverso le pareti del cilindro. Durante questo processo parte del vapore si condensa; la massa volumica del vapore nel cilindro vale $6{,}0 \cdot 10^{-4}$ g/cm^3 e la pressione 1,0 bar. (a) Si calcoli la massa condensata nell'unità di tempo. (b) Si calcoli la potenza termica di dissipazione. (c) Si calcoli il rapporto temporale di variazione dell'energia interna del vapore e dell'acqua nel cilindro.

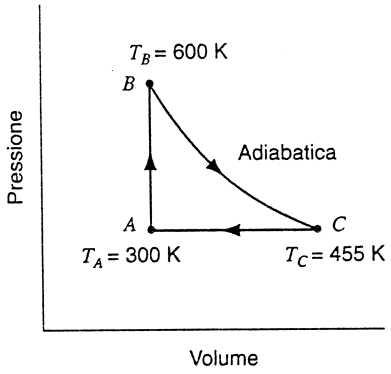


FIGURA 23.39 Problema 19.

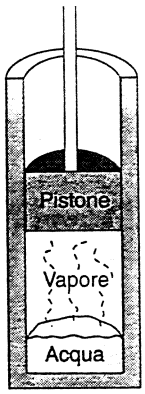


FIGURA 23.40 Problema 20.

21. Nei motori delle motociclette subito dopo la combustione, che avviene nella parte superiore del cilindro, il pistone viene spinto verso il basso a causa dell'espansione adiabatica della miscela di gas prodotti. Si calcoli la potenza media di questa espansione assumendo che il motore operi alla velocità angolare di 4000 giri/min, che la pressione immediatamente dopo la combustione valga 15,2 bar, che il volume iniziale sia di 50,0 cm^3 e che quello finale sia di 250 cm^3. Si assuma, infine, che i gas siano biatomici e che l'espansione duri la metà dell'intero ciclo.

PROBLEMI AL CALCOLATORE

1. Il calore specifico teorico di un solido a temperatura T è dato dalla formula di Debye

$$c_V = 9\left[4\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3 \int_0^{\Theta} \frac{x}{T^2}\,\frac{dx}{e^{x/T}-1}\,\frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T}-1}\right],$$

ove Θ è una costante, detta temperatura di Debye, che dipende dalle proprietà fisiche della sostanza. (a) Si calcoli numericamente il calore specifico dell'alluminio a temperatura ambiente usando il valore $\Theta_{alluminio} = 420$ K. Si confronti il valore calcolato con quello sperimentale. (b) Si disegni il grafico del calore specifico dell'alluminio in funzione delle temperatura T nell'intervallo di estremi $T = 0$ K e $T = 500$ K.

2. Il calore specifico dell'alluminio a bassa temperatura è dato da

$$c_V = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{420\text{ K}}\right)^3.$$

Un blocco di alluminio di massa 1,0 kg alla temperatura iniziale di 20 K viene posto in un dispositivo frigorigeno in grado di estrarre calore dal solido in ragione di 1000 J al minuto. (a) Dopo quanto tempo la temperatura dell'alluminio si riduce a 1 K? (b) Quanto vale la temperatura dell'alluminio dopo 12 ore? (c) È possibile usare questo dispositivo per portare il blocco di alluminio allo zero assoluto?

CAPITOLO 24

ENTROPIA E SECONDA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

Possiamo immaginare una quantità di processi che non avvengono mai, anche se non violano il principio di conservazione dell'energia. Per esempio il caffè in una tazzina potrebbe ben convertire un poco della sua energia interna, di cui, se è ben caldo, è largamente dotato, per convertirla in energia cinetica rotazionale e mettersi a roteare attorno all'immobile cucchiaino! E così un bicchiere d'acqua fredda potrebbe anche trasferire spontaneamente un po' del suo calore all'aria che lo circonda e, mentre scalda quest'ultima, diventare un bel cubetto di ghiaccio! Eppure siamo abituati a vedere questi fenomeni che si svolgono naturalmente, ma solo nel senso inverso. La seconda legge della termodinamica, di cui ci occuperemo tra poco, tratta proprio del verso in cui avvengono questi processi. Si dice talvolta che questa legge attribuisce alla «freccia del tempo» un senso preferenziale, indicando in quale verso, rispetto al verso di scorrimento del tempo, si evolvono spontaneamente certi sistemi.

Abbiamo studiato come la legge zero della termodinamica introduca il concetto di temperatura. Così la prima legge ci ha portati al concetto di energia interna. Anche la seconda legge porta con sé un nuovo concetto: l'entropia, *una grandezza funzionale all'enunciazione di questo nuovo principio della termodinamica. La esamineremo dal punto di vista macroscopico e microscopico.*

24.1 PROCESSI A SENSO UNICO

Esiste una proprietà del mondo fisico in cui viviamo che si presenta in modo quanto mai naturale, ma che nello stesso tempo è bizzarra al limite della credibilità. Eppure, ci siamo talmente abituati, che non ci pensiamo praticamente mai. Eccola:

> *tutti i processi che avvengono in natura procedono in un solo senso. Mai, di loro spontanea volontà, procedono in senso inverso.*

Consideriamone degli esempi:

Esempio 1: Lasciamo cadere un sasso. Finisce per terra. Di sua iniziativa, non si è mai visto un sasso che si sollevi da terra per finirci in mano.

Esempio 2: Se dimenticate il caffè sul tavolo, si raffredda. Da solo, non si è mai visto un caffè che si scaldi.

Esempio 3: Immettiamo una goccia d'inchiostro in una scodella d'acqua. Dopo un po' l'inchiostro si ritrova distribuito uniformemente in tutta la scodella. Mai viste delle molecole d'inchiostro che, spontaneamente, si radunino a formare una sferetta d'inchiostro nell'acqua!

Se raccontate di aver visto qualcuno di questi fenomeni accadere al rovescio, il minimo che vi possono ribattere è di avere esagerato con la dose di grappa o, in alternativa, vi invitano a cercare dove sta il trucco.

Definiamo questi processi a senso unico come *irreversibili*, un termine che significa: una volta avviato un processo (irreversibile), esso continua a procedere. Più precisamente, si vuol dire che è impossibile, con piccole modifiche dell'ambiente in cui si svolge, far sì che il processo cambi verso. Sostanzialmente, tutti i processi che avvengono in natura sono irreversibili.

Si noti che, sebbene nel «senso sbagliato» non avvenga alcuno degli eventi sopradescritti, ciò non comporterebbe di

 ISBN 88-408-1254-7

per sé violazione del principio di conservazione dell'energia. Rivediamo gli esempi.

Esempio 1: Il pavimento potrebbe benissimo cedere un poco di calore al sasso fermo per terra e fornirgli energia cinetica sufficiente ad arrivare sino alle nostre mani. Ma non lo fa.

Esempio 2: Qui non si tratta di trasformare energia da un tipo all'altro, ma solo di trasferire energia termica in un senso o nell'altro. Il calore potrebbe benissimo fluire dall'aria circostante al caffè della tazzina, anziché l'inverso. Ma non lo fa.

Esempio 3: Qui non si tratta nemmeno di trasferire energia. Si richiede solo che tutte le molecole d'inchiostro, libere di muoversi nell'acqua, ritornino simultaneamente verso il loro sito originario. Non succede mai.

Non è l'*energia* del sistema che controlla il senso dei processi irreversibili; è un'altra proprietà che introdurremo in questo capitolo, l'*entropia* (simbolo S) del sistema. Anche se non abbiamo avuto ancora occasione fino a questo momento di introdurre l'entropia, essa è una funzione dello stato di un sistema né più né meno come la temperatura, la pressione, il volume e l'energia interna. Definiremo l'entropia nel prossimo paragrafo, ma, per sapere ora cosa ci aspetta, ne anticipiamo la sua caratteristica focale, legata al *principio di entropia*:

quando in un sistema chiuso avviene un processo irreversibile, l'entropia del sistema aumenta sempre; non diminuisce mai.

L'entropia si differenzia dall'energia anche perché non obbedisce ad alcun principio di conservazione. Qualunque sia la variazione che avviene all'interno di un sistema, la sua energia rimane costante, mentre la sua entropia aumenta inesorabilmente non appena vi si svolgano processi irreversibili.

In questo capitolo avremo a che fare con *variazioni* di entropia, cioè con ΔS piuttosto che con valori assoluti di S. Quando in un sistema avviene un processo irreversibile, il principio di entropia impone che sia $\Delta S > 0$. I processi «a rovescio» su cui abbiamo fantasticato, se accadessero presenterebbero $\Delta S < 0$ e violerebbero il principio di entropia.

Abbiamo due modi equivalenti di definire una variazione d'entropia di un sistema: (1) un approccio macroscopico, che coinvolge i trasferimenti termici e la temperatura a cui avvengono; (2) un approccio microscopico, che coinvolge il numero di disposizioni in cui possono trovarsi gli atomi e molecole componenti del sistema. Presentiamo il primo approccio nel prossimo paragrafo e il secondo nel Paragrafo 24.9.

24.2 DEFINIZIONE DI VARIAZIONE ENTROPICA

Definiamo ora la variazione d'entropia ΔS che si verifica quando un sistema chiuso passa da un ben definito stato iniziale a un altro ben definito stato finale attraverso un processo che si possa descrivere come *reversibile*. In un processo, o trasformazione, reversibile le variazioni che produciamo nel sistema e nel suo ambiente sono piccole; rovesciando il senso di queste trasformazioni, il sistema e il suo ambiente ritornano alle condizioni di partenza. Per esempio, se poniamo un blocco metallico caldo a contatto con uno freddo, si trasferisce del calore dal primo al secondo. Questa è una trasformazione irreversibile; non possiamo invertire alcun passaggio di questa trasformazione, ciò che comporterebbe un'inversione del flusso termico e tenderebbe a riportare i blocchi alle loro temperature originarie. Consideriamo invece un pezzo metallico appoggiato su una piastra calda a temperatura T. Se aumentiamo la temperatura della piastra di una piccola quantità dT, una quantità elementare di calore dQ si trasferirà dalla piastra calda al pezzo metallico. Se poi *diminuiamo* la temperatura della piastra di un'uguale differenza dT, altrettanto calore dQ si trasferirà dal pezzo alla piastra. Il pezzo metallico e la piastra si ritrovano così alle condizioni originarie; quando si trasferisce calore in questo modo il processo è reversibile.

Facciamo ora un altro esempio. Consideriamo il gas contenuto nel cilindro della Figura 21.13. Se togliamo un piccolo numero di pallini di piombo dal contenitore sopra al pistone, una piccola quantità di calore dQ si trasferirà dal serbatoio termico al gas; rimettendo i pallini al loro posto, altrettanto calore dQ tornerà dal gas al serbatoio termico. Il sistema e l'ambiente circostante riacquistano così le condizioni originarie dopo questa trasformazione reversibile.

In un processo veramente reversibile non dovrebbero esserci perdite di energia dovute a turbolenza, attrito o ad altri fenomeni dissipativi. È chiaro dunque che il processo reversibile è una pura astrazione, perché tutti i processi naturali comportano in realtà perdite dissipative e quindi sono irreversibili. Per esempio, se il pistone di Figura 21.13 si muove nel cilindro con attrito, ricollocando i pallini di piombo esso non tornerà all'esatta posizione di partenza. Possiamo però, con accorgimenti raffinati, avvicinarci senza limiti alle condizioni di reversibilità. Ad ogni modo la trasformazione rigorosamente reversibile è una semplice e utile astrazione che ci aiuta ad analizzare e capire processi più complicati, proprio come il gas perfetto costituisce un modello istruttivo per comprendere il comportamento dei gas reali.

Iniziamo la trattazione dell'entropia definendo semplicemente la variazione d'entropia per una trasformazione reversibile ed esaminandone le conseguenze. La definizione è

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ}{T} \qquad \text{(reversibile)}. \tag{24.1}$$

Qui dQ rappresenta l'incremento di energia termica, altrimenti detta calore, che si trasferisce dal o verso il sistema (chiuso) alla temperatura T (in kelvin). L'integrale è esteso dallo stato iniziale «i» allo stato finale «f». In questa definizione sono egualmente importanti sia il calore dQ trasferito sia la temperatura T a cui avviene il trasferimento.

Se la trasformazione è isoterma, il trasferimento di calore si svolge tutto alla stessa temperatura T e l'Equazione 24.1 si può scrivere come

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \qquad \text{(reversibile, isoterma)}. \qquad (24.2)$$

Dato che la temperatura T (in kelvin) è sempre una quantità positiva, ne consegue che, nelle Equazioni 24.1 e 24.2, la variazione entropica assume lo stesso segno del calore Q. Vale a dire che, nel caso si *aggiunga* calore (reversibilmente) al sistema chiuso ($Q > 0$), l'entropia del sistema *aumenta* ($\Delta S > 0$); viceversa accade se il calore viene sottratto al sistema. L'unità di misura dell'entropia, che discende da questa definizione, è il J/K.

Entropia come proprietà di stato

Se l'entropia non fosse una vera proprietà di un dato stato d'equilibrio, al pari della pressione, dell'energia interna e della temperatura, non la troveremmo un granché utile. Dimostriamo ora specificatamente che l'entropia è davvero una tal *funzione di stato* per l'importante caso del gas perfetto.

Scriviamo dapprima la prima legge della termodinamica in forma differenziale:

$$\mathrm{d}Q + \mathrm{d}L = \mathrm{d}E_{\mathrm{int}}.$$

Sostituiamo $-p\,\mathrm{d}V$ a $\mathrm{d}L$ e, in base all'Equazione 23.31, anche $nC_V\,\mathrm{d}T$ a $\mathrm{d}E_{\mathrm{int}}$. Risolvendo rispetto a $\mathrm{d}Q$ troviamo

$$\mathrm{d}Q = p\,\mathrm{d}V + nC_V\,\mathrm{d}T.$$

Avvalendoci della legge del gas perfetto sostituiamo p con nRT/V e dividiamo per T:

$$\frac{\mathrm{d}Q}{T} = nR\frac{\mathrm{d}V}{V} + nC_V\frac{\mathrm{d}T}{T}.$$

Integriamo ora ciascuno dei termini di questa equazione tra un arbitrario stato iniziale e un arbitrario stato finale. Il primo membro non è che la variazione d'entropia come definita dall'Equazione 24.1, e quindi

$$\Delta S = nR\ln\frac{V_f}{V_i} + nC_V\ln\frac{T_f}{T_i}.$$

Non abbiamo imposto alcun percorso lungo il quale eseguire l'integrazione. Significa che questo risultato vale per qualunque trasformazione (reversibile) tra lo stato iniziale e lo stato finale. La variazione d'entropia dunque dipende solo dalle proprietà degli stati iniziale (T_i e V_i) e finale (T_f e V_f). Non ha alcuna importanza quale tipo di processo abbia seguito il gas ideale per passare dallo stato iniziale a quello finale. L'entropia è davvero una funzione di stato, caratteristica di un certo stato del sistema, e indipendente da come il sistema si sia evoluto per giungere a quello stato.

PROBLEMA SVOLTO 24.1 Un recipiente isolato contiene 1,8 kg di acqua a temperatura iniziale di 20 °C. Viene collocato su una piastra di riscaldamento e si comincia lentamente a scaldare la piastra fino alla temperatura di 100 °C, quando l'acqua comincia a bollire. Di quanto varia l'entropia dell'acqua durante questo processo?

Soluzione L'acqua e la piastra sono sostanzialmente in costante equilibrio termico grazie alla lentezza del procedimento; la trasformazione è dunque reversibile. Questo significa che, interrompendo in qualunque momento la crescita di temperatura della piastra e invertendo il senso di variazione di temperatura, si arresta immediatamente anche il riscaldamento dell'acqua e la sua temperatura inizia subito a scendere. Come sistema abbiamo scelto la sola acqua e, siccome il processo è reversibile, siamo autorizzati all'uso della (24.1) per calcolare la variazione d'entropia.

La quantità di calore richiesta per elevare la temperatura dell'acqua di un incremento $\mathrm{d}T$ è

$$\mathrm{d}Q = mc\,\mathrm{d}T,$$

in cui m è la massa dell'acqua e c è il suo calore specifico. L'Equazione 24.1 diviene dunque

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f}\frac{mc\,\mathrm{d}T}{T} =$$

$$= mc\int_{T_i}^{T_f}\frac{\mathrm{d}T}{T} = mc\ln\frac{T_f}{T_i} =$$

$$= (1{,}8\ \mathrm{kg})[4190\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}]\ln\frac{(273+100)\ \mathrm{K}}{(273+20)\ \mathrm{K}} =$$

$$= 1820\ \mathrm{J/K}.$$

Si noti la necessità di convertire le temperature in kelvin per soddisfare le richieste della (24.1), e si osservi che la variazione d'entropia risulta positiva perché abbiamo fornito calore al sistema per accrescerne la temperatura.

24.3 VARIAZIONI ENTROPICHE NEI PROCESSI IRREVERSIBILI

L'Equazione 24.1 ci permette di calcolare le variazioni d'entropia solo per quei processi che risultano reversibili. Sappiamo però che questi processi, al pari del gas perfetto, sono idealizzazioni. Tutte le trasformazioni nel mondo reale comportano attriti, turbolenze o qualche altro fenomeno dissipativo che ne inficia la reversibilità. Come facciamo dunque a calcolarne la variazione entropica?

Possiamo contare sul fatto che l'entropia è una proprietà di stato. Quando si verifica una trasformazione da un certo stato iniziale a un altro stato finale, la variazione entropica dipende solo da questi due stati, e non da come si sia svolta la trasformazione e quindi nemmeno dalle sue caratteristiche di reversibilità. Per calcolare la variazione ΔS d'entropia per un sistema che evolve dallo stato «i» allo stato «f» possiamo quindi comportarci nel seguente modo.

1. Individuiamo una trasformazione reversibile che congiunga i medesimi due stati. Tra le molte possibili, egualmente valide al nostro scopo, sceglieremo quella che ci fa più comodo per caratteristiche di semplicità.

2. Applichiamo l'Equazione 24.1 per calcolare il ΔS di questa *trasformazione reversibile equivalente*. Il risultato sarà valido anche per la nostra trasformazione irreversibile.

 ISBN 88-408-1254-7

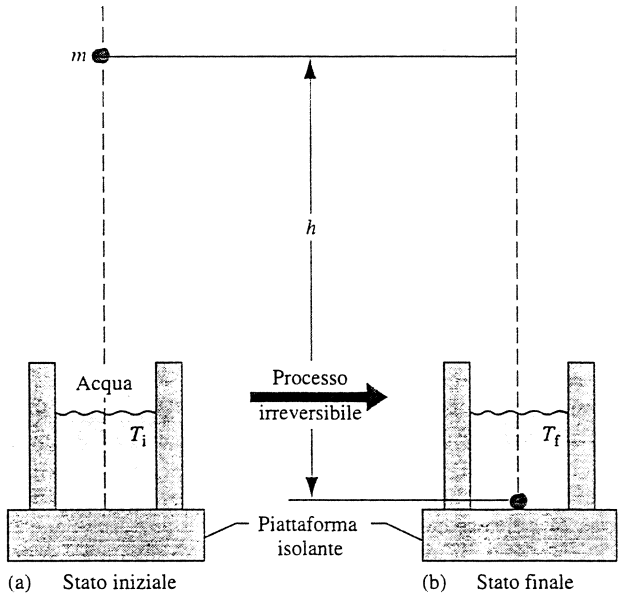


FIGURA 24.1 Processo irreversibile tra due stati di equilibrio. Un sasso di massa m viene lasciato cadere da un'altezza h in un secchio d'acqua termicamente isolato. La temperatura dell'acqua e del sasso aumentano dal valore iniziale T_i al valore finale T_f.

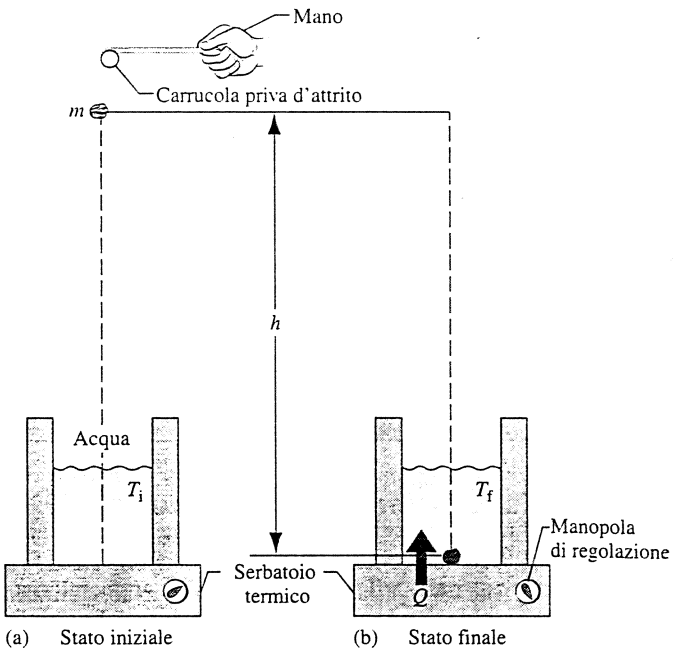


FIGURA 24.2 Processo irreversibile che congiunge gli stessi stati iniziale e finale della figura precedente. Il secchio d'acqua ora è a contatto di un *serbatoio termico*, la cui temperatura è regolabile agendo sulla manopola. Dapprima si cala lentamente il sasso trattenendolo con una corda, poi si alza lentamente la temperatura dell'acqua e del sasso da T_i a T_f regolando la temperatura con la manopola. Durante il processo si trasferisce l'energia termica Q dal serbatoio all'acqua.

Vediamo come funziona questo metodo applicandolo al più familiare dei processi irreversibili che abbiamo citato, quello del sasso che cade dell'Esempio 1 nel Paragrafo 24.1. La Figura 24.1a illustra lo stato iniziale del sistema. Per rendere più semplice la comprensione, lasciamo cadere il sasso in un secchio d'acqua termicamente isolato. La Figura 24.1b riporta invece lo stato finale del sistema: il sasso giace sul fondo del secchio, mentre la temperatura dell'acqua e del sasso sono passate da un valore T_i a un valore T_f.

Il sistema è costituito dal *sasso + acqua*. Attraverso i confini del sistema non avviene trasferimento di calore e quindi $Q = 0$. Si ha invece svolgimento di lavoro sul sistema, compiuto dalla forza esterna di gravità, nella misura di $L = +m_s g h$, ove m_s rappresenta la massa del sasso. Per la prima legge della termodinamica si ha dunque

$$\Delta E_{int} = Q + L = 0 + m_s g h = +m_s g h .$$

L'incremento di energia interna si manifesta sotto forma di lieve incremento di temperatura del sistema sasso + acqua.

Applichiamo ora il primo passo del nostro procedimento: cerchiamo una trasformazione reversibile che congiunga i due stati di Figura 24.1. Nella Figura 24.2a il secchio, anziché su un supporto isolante, si trova su un serbatoio termico a temperatura regolabile fissata sul valore T_i. Non faremo cadere il sasso liberamente, ma lo tratteremo con una corda e lo abbasseremo molto lentamente. Quando il sasso entra in acqua cominciamo ad aumentare gradatamente la temperatura del serbatoio termico fino alla temperatura T_f. Gli stati iniziale e finale di Figura 24.2 sono gli stessi della Figura 24.1.

La trasformazione illustrata in Figura 24.2 è rigorosamente reversibile. Potremmo invertire il senso del processo con modestissimi cambiamenti nell'ambiente del sistema: alzando il sasso anziché abbassarlo e sottraendo calore dall'acqua col serbatoio termico anziché fornirne.

Esaminiamo ora i trasferimenti di energia che avvengono nella trasformazione equivalente di Figura 24.2. La forza risultante che agisce sul sasso ora è nulla perché la forza di gravità è controbilanciata dalla forza di tensione nella corda. Quindi $L = 0$. Dato che gli stati finale e iniziale sono gli stessi di prima ed essendo l'energia interna una funzione di stato, dev'essere $\Delta E_{int} = +m_s g h$. La prima legge della termodinamica ci dà quindi

$$\begin{aligned} Q &= \Delta E_{int} - L = \\ &= m_s g h - 0 = +m_s g h. \end{aligned} \qquad (24.3)$$

Il calore Q somministrato al sistema proviene dal serbatoio termico di cui eleviamo la temperatura da T_i a T_f. Conoscendo Q possiamo calcolare la variazione entropica per questa trasformazione reversibile equivalente grazie all'Equazione 24.1. Dato che Q è positivo (il calore entra nel sistema) l'entropia subirà un incremento positivo. *Questo stesso incremento subirà il processo irreversibile di Figura 24.1.*

Nei prossimi tre esempi esamineremo tre processi irreversibili in sistemi chiusi e dimostreremo che, in accordo con il principio di entropia, quest'ultima aumenta sempre.

PROBLEMA SVOLTO 24.2 Un sasso di massa $m_s = 1{,}5$ kg cade per un'altezza $h = 2{,}5$ m dentro a un secchio d'acqua di massa $m_a = 4{,}5$ kg come in Figura 24.1. La temperatura iniziale

dell'acqua e del sasso è di 300 K. (a) Quant'è l'incremento di temperatura ΔT del sistema *sasso + acqua*? (b) Quant'è la variazione entropica ΔS del sistema? (c) Quanto sarebbe la variazione entropica per il processo inverso, in cui l'acqua cede calore al sasso che lo converte in energia cinetica e sale per aria di 2,5 m (ciò che non avviene mai)? Il calore specifico dell'acqua è $c_a = 4190$ J/(kg · K) e quella del sasso $c_s = 790$ J/(kg · K).

Soluzione (a) La Figura 24.2 mostra una trasformazione reversibile equivalente, utile per calcolare la variazione d'entropia del sasso in caduta. Il calore Q trasferito, espresso in funzione del salto termico ΔT del sistema, è, per la trasformazione reversibile equivalente di Figura 24.2b,

$$Q = m_a c_a \Delta T + m_s c_s \Delta T , \qquad (24.4)$$

una quantità positiva. Dall'Equazione 24.3 vediamo che Q è dato anche da

$$Q = m_s g h = (4{,}5 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)(2{,}5 \text{ m}) = +110 \text{ J} .$$

Combinandola con la (24.4) e risolvendola rispetto a ΔT si ottiene

$$\Delta T = \frac{Q}{m_a c_a + m_s c_s} =$$
$$= \frac{+110 \text{ J}}{(4{,}5 \text{ kg})[4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}] + (1{,}5 \text{ kg})[790 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}]} =$$
$$= +5{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ K} = +5{,}5 \text{ mK} .$$

La temperatura è una variabile di stato e quindi questo salto termico vale sia per la trasformazione reversibile equivalente di Figura 24.2, sia per quella irreversibile di Figura 24.1.

(b) Ora calcoliamo la variazione entropica per la trasformazione reversibile equivalente di Figura 24.2. La variazione di temperatura è così piccola che possiamo considerare il processo isotermico a temperatura di 300 K. Siamo ora in grado di calcolare ΔS con l'Equazione 24.2:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{+110 \text{ J}}{300 \text{ K}} = +0{,}37 \text{ J/K} .$$

Il calore Q viene ceduto *al* sistema dal serbatoio termico e quindi è positivo. Di conseguenza anche ΔS è positivo e corrisponde a una *crescita* di entropia.

Sebbene ΔS sia stato valutato per la trasformazione reversibile di Figura 24.2, esso vale anche per il processo di Figura 24.1. La caduta di un sasso provoca un aumento di entropia del sistema, come vuole il principio d'entropia.

(c) Nel processo inverso occorrerebbe trasferire una quantità $Q = -110$ J asportandola *dal* sistema di Figura 24.1b e causando una *diminuzione* di temperatura di 5,5 mK. Il sasso, acquistando quest'energia sotto forma cinetica, balzerebbe in alto fino a un'altezza di 2,5 m ripristinando il sistema nella configurazione iniziale di Figura 24.1a. Il calcolo della variazione entropica si eseguirebbe allo stesso modo salvo che Q sarebbe negativo e tale quindi risulterebbe anche ΔS. Questo processo vedrebbe quindi variare l'entropia del sistema di $-0{,}37$ J/K, violando il principio di entropia.

Potreste essere tentati di affermare: "questo processo all'inverso non accade perché violerebbe il principio di entropia". Sarebbe meglio dire che: "avendo osservato che nessun processo alla rovescia come questo accade, i fisici hanno pensato di correlare l'inesistenza di tali fenomeni formulando il principio di entropia".

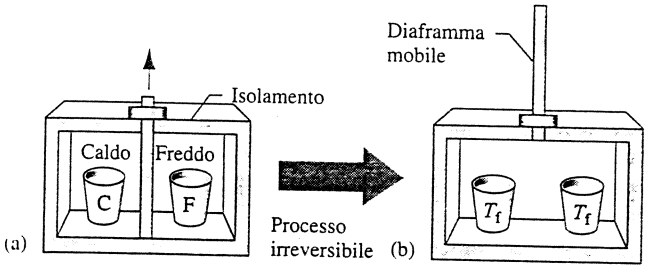


FIGURA 24.3 Problema svolto 24.3. (a) Allo stato iniziale due bicchieri di acqua F e C, identici salvo che per la temperatura, si trovano in un contenitore isolati dall'ambiente e separati tra loro. (b) Rimuovendo il diaframma isolante, i bicchieri scambiano calore e raggiungono lo stato finale caratterizzato da un'unica temperatura comune T_f. Il processo è irreversibile.

PROBLEMA SVOLTO 24.3 La Figura 24.3a mostra un bicchiere di carta contenente una massa $m = 0{,}57$ kg di acqua calda e un altro identico di acqua fredda. La temperatura dell'acqua calda è inizialmente $T_{iC} = 90\,^\circ\text{C} = 363$ K; quella dell'acqua fredda è $T_{iF} = 10\,^\circ\text{C} = 283$ K. Rimuovendo il setto isolante di separazione, come in Figura 24.3b, i bicchieri giungono alla fine all'equilibrio termico alla temperatura $T_f = 50\,^\circ\text{C} = 323$ K. Calcolare la variazione d'entropia per questa trasformazione irreversibile. Si trascuri la capacità termica del bicchiere. Il calore specifico dell'acqua è 4190 J/(kg · K).

Soluzione Come sempre in questi casi di processi irreversibili, occorre prima trovare una trasformazione reversibile equivalente che congiunga i medesimi stati iniziale e finale. La Figura 24.4 ne mostra un possibile esempio.

Passo 1: Regolata la temperatura del serbatoio termico a $T_{iC} = 363$ K, sistemiamo il bicchiere di acqua calda (C) a contatto col serbatoio termico e racchiudiamolo in un involucro isolante. Abbassiamo poi lentamente la temperatura del serbatoio termico fino a $T_f = 323$ K. Ad ogni incremento infinitesimo di temperatura dT si trasferisce *dall'*acqua un calore infinitesimo $dQ = mc\,dT$. La variazione entropica corrispondente, calcolata con l'Equazione 24.1, è

$$\Delta S_C = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_{iC}}^{T_f} \frac{mc\,dT}{T} =$$
$$= mc \ln \frac{T_f}{T_{iC}} =$$
$$= (0{,}57 \text{ kg})[4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}] \ln \frac{323 \text{ K}}{363 \text{ K}} = -279 \text{ J/K} .$$

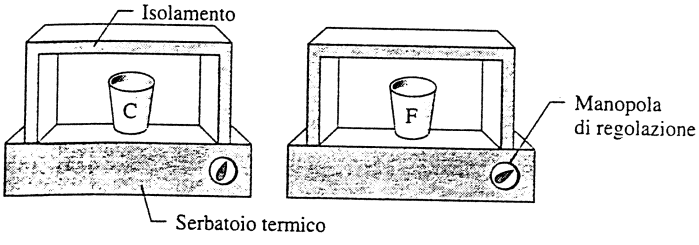


FIGURA 24.4 I bicchieri della Figura 24.3 possono raggiungere il loro stato finale a partire da quello iniziale in modo reversibile utilizzando un serbatoio termico a temperatura regolabile per (a) estrarre calore lentamente da C e (b) somministrarlo lentamente a F.

 ISBN 88-408-1254-7

Dato che il calore è stato sottratto al sistema, ci aspettiamo che il salto entropico sia negativo, e così infatti è.

Passo 2: Ripetiamo lo stesso procedimento con il bicchiere d'acqua fredda (F) imponendo dapprima $T_{iF} = 283$ K e poi aumentando la temperatura a T_f. In questo caso il calore dQ viene somministrato *al* sistema e la variazione entropica risulta

$$\Delta S_F = (0{,}57 \text{ kg})[4190 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}] \ln \frac{323 \text{ K}}{283 \text{ K}} = +316 \text{ J/K}.$$

Passo 3: La variazione netta di entropia del sistema è

$$\Delta S = \Delta S_C + \Delta S_F =$$
$$= -279 \text{ J/K} + 316 \text{ J/K} = +37 \text{ J/K}.$$

E questa dev'essere anche la variazione entropica per il processo irreversibile di Figura 24.3. Di nuovo si dimostra che la variazione di entropia in un sistema chiuso, in cui avvenga un processo irreversibile, è *positiva*.

PROBLEMA SVOLTO 24.4 Nel vano di sinistra termicamente isolato dell'apparato di Figura 24.5 sono confinate 0,55 mol di gas ideale a temperatura ambiente $T = 293$ K. Il vano di destra è invece idealmente vuoto ed è collegato a quello di sinistra attraverso un rubinetto. Aprendo il rubinetto il gas invade la camera di destra fino a che riempie i due vani equamente e si trova in equilibrio termico. Di quanto varia l'entropia del gas in questo processo?

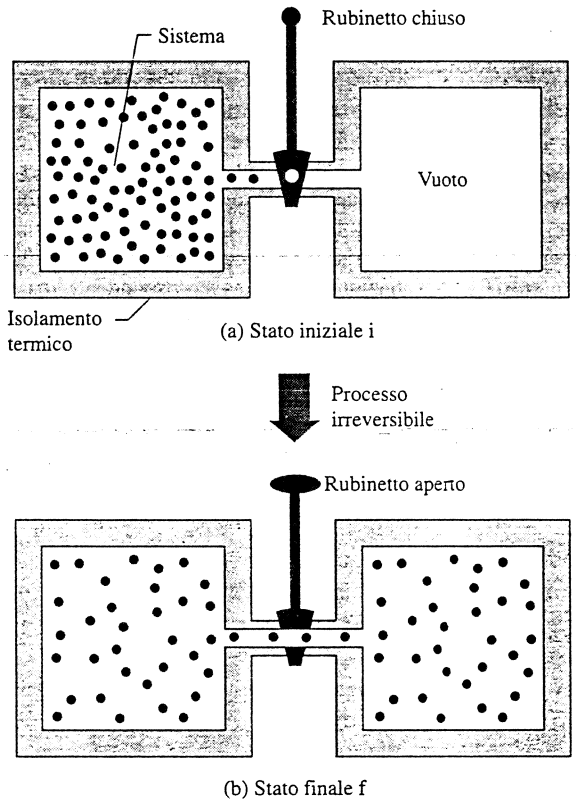


FIGURA 24.5 Problema svolto 24.4. Espansione libera di un gas ideale. (a) Il gas è confinato dal rubinetto chiuso nel vano di sinistra di un recipiente isolato. (b) Aprendo il rubinetto, il gas irrompe nel vano di destra, precedentemente vuoto, fino ad occupare tutto lo spazio disponibile. Questo processo è irreversibile e quindi non può accadere in senso inverso spontaneamente.

Soluzione Il processo qui descritto si chiama *espansione libera*, un processo già visto nel Paragrafo 23.8. Sappiamo già che, trattandosi di un gas ideale, la temperatura dello stato finale è la stessa di quello iniziale. L'espansione libera chiaramente *non* è reversibile. Il sistema non torna al suo stato iniziale operando semplicemente qualche piccola variazione dell'ambiente esterno.

Come negli esempi precedenti, per valutare il salto entropico occorre trovare una trasformazione reversibile equivalente tra gli stessi stati iniziale e finale. Una possibilità è rappresentata nella Figura 24.6: si tratta di un'espansione isoterma reversibile del gas ideale.

Racchiudiamo 0,55 mol di gas in un cilindro isolato a contatto con un serbatoio termico regolato sulla temperatura di 293 K. Aggiustiamo la quantità di pallini di piombo sul pistone in modo che la pressione e il volume del gas siano quelli dello stato iniziale di Figura 24.5a. Poi con molta lentezza cominciamo a togliere pallini finché la pressione e il volume raggiungano i valori corrispondenti allo stato finale di Figura 24.5b. Questo processo lento *è* reversibile perché ad ogni stadio possiamo sempre invertire il flusso di pallini e ricomporre pian piano la situazione iniziale restituendo piccole quantità di gas per volta *al* serbatoio termico. Durante il processo di espansione si trasferisce una quantità di calore Q *dal* serbatoio termico *al* sistema per mantenerne la temperatura costante durante l'espansione.

Il calore Q si calcola mediante la prima legge della termodinamica, che scriviamo in forma differenziale:

$$dQ + dL = dE_{int}.$$

L'energia interna di un gas ideale dipende solo dalla sua temperatura (Equazione 23-24). Dato che qui la temperatura non cambia, abbiamo $\Delta E_{int} = 0$. Sostituendo $-p\,dV$ a dL e nRT/V a p, otteniamo

$$dQ = -dL = p\,dV = nRT\frac{dV}{V}.$$

L'integrazione tra gli stati iniziale e finale dà

$$Q = \int dQ = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

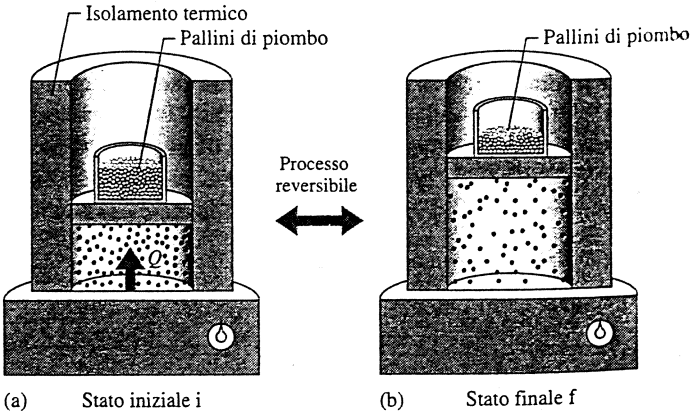


FIGURA 24.6 Espansione isoterma di un gas ideale svolta in modo reversibile. Il gas presenta gli stessi stati iniziale e finale della Figura 24.5.

Grazie alla temperatura costante, per valutare il salto entropico dell'espansione isoterma di Figura 24.6 possiamo ricorrere all'Equazione 24.2:

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR \ln \frac{V_f}{V_i} =$$

$$= (0{,}55 \text{ mol})[8{,}31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}](\ln 2) = +3{,}17 \text{ J/K}.$$

Anche l'entropia del processo irreversibile di Figura 24.5 cambia della medesima quantità, che è positiva, come ci si aspetta dal principio di entropia. Questo è un terzo esempio di come l'entropia di un sistema chiuso in un processo irreversibile aumenti sempre.

24.4 SECONDA LEGGE DELLA TERMODINAMICA

A questo punto, però, ci troviamo di fronte a un piccolo enigma. Abbiamo visto nel Problema svolto 24.4 che, se effettuiamo la trasformazione reversibile da (a) a (b) della Figura 24.6, la variazione di entropia del gas, considerato come sistema, è positiva. Dato che tuttavia il processo è reversibile, possiamo benissimo realizzarlo in senso opposto, da (b) ad (a), aggiungendo piano piano pallini di piombo al pistone di Figura 24.6b, finché non avremo ristabilito il volume originale del gas. In questo processo inverso, il calore va prelevato *dal* gas per prevenirne un aumento di temperatura. Perciò Q è negativo e così, per l'Equazione 24.2, l'entropia deve diminuire.

Non è questa una violazione del principio di entropia, il quale afferma che al contrario l'entropia aumenta sempre? No perché il postulato vale solo per processi *irreversibili* in sistemi *chiusi*. La trasformazione descritta non rispetta questi requisiti: *non* è irreversibile e *non* è un sistema chiuso (viene trasferito del calore dal gas al serbatoio termico, mentre il sistema è rappresentato dal solo gas).

Se tuttavia includiamo nel sistema anche il serbatoio termico oltre al gas, allora abbiamo un sistema chiuso. Verifichiamo ora quant'è la variazione di entropia per il sistema *gas + serbatoio* sempre per la trasformazione da (b) ad (a) della Figura 24.6. In questo processo reversibile si trasferisce calore dal gas al serbatoio termico, cioè da un elemento all'altro del sistema. Sia $|Q|$ il valore assoluto di questo calore, una quantità positiva. Mediante la (24.2), che si applica a processi isotermi come quello di Figura 24.6, possiamo calcolare separatamente la variazione di entropia relativa al gas e relativa alla sorgente. Si ha

$$\Delta S_{\text{gas}} = -\frac{|Q|}{T} \quad \text{e} \quad \Delta S_{\text{sorg}} = +\frac{|Q|}{T}.$$

La variazione complessiva di entropia del sistema è la somma delle due quantità; essa è quindi *nulla*. È vero dunque che l'entropia del gas diminuisce, ma quella del serbatoio termico aumenta di un'ugual quantità.

Grazie a questo risultato possiamo correggere l'enunciato del principio di entropia del Paragrafo 24.1 per comprendere trasformazioni sia irreversibili sia reversibili:

se un processo avviene in un sistema chiuso, l'entropia S del sistema aumenta quando si tratta di un processo irreversibile, rimane costante quando è reversibile; comunque non diminuisce mai.

Si può considerare questa affermazione una forma della *seconda legge della termodinamica* e si può scrivere, in termini formali,

$$\Delta S \geq 0, \tag{24.5}$$

in cui il segno di uguaglianza si riferisce ai processi reversibili e quello di disuguaglianza ai processi irreversibili. Non si è mai trovata alcuna eccezione alla seconda legge della termodinamica.

Se in una data parte di un sistema chiuso l'entropia diminuisce, in un'altra parte deve crescere almeno nella stessa misura, in modo che l'entropia complessiva del sistema intero non diminuisca mai.

24.5 ENTROPIA E RENDIMENTO DEI MOTORI TERMICI

Una macchina termica, detta anche *motore termico*, è un dispositivo che scambia calore con l'ambiente e produce lavoro. Ogni macchina termica contiene un *fluido motore*. Nel motore delle automobili, per esempio, il fluido motore è una miscela di aria e benzina. Se la macchina termica deve produrre lavoro in modo continuativo come fa un motore, il fluido motore deve percorrere un *ciclo* di trasformazioni, vale a dire che il fluido deve passare attraverso una serie di processi termodinamici, talvolta chiamati *tempi*, che formano un ciclo chiuso, ripercorrendo sempre ad ogni ciclo le stesse trasformazioni. Vediamo ora come si applicano le leggi della termodinamica al comportamento dei motori termici.

Macchina di Carnot

Abbiamo visto come dall'astrazione del gas perfetto possiamo imparare molto sulle caratteristiche dei gas reali, riducendone idealmente il comportamento alla semplice legge $pV = nRT$. È un metodo efficace perché, malgrado l'inesistenza di un gas ideale, tutti i gas reali ricalcano il comportamento ideale tanto più fedelmente quanto minore è la loro massa volumica. Con il medesimo spirito affrontiamo lo studio dei motori reali analizzando il comportamento di un motore ideale.

La Figura 24.7 schematizza gli elementi necessari al funzionamento di un motore ideale, detto *macchina di Carnot*, elaborata dallo scienziato francese N.L. Sadi Carnot, che ne propose l'uso nel 1824. È sorprendente sapere che Carnot analizzò il comportamento di questa macchina termica 25 anni prima che venisse formulata la prima legge della termodinamica e quando non era ancora stato sviluppato il concetto di entropia.

Nel corso di ciascun ciclo di Figura 24.7 il fluido motore assorbe l'energia $|Q_1|$ sotto forma di calore dalla sorgente a

 ISBN 88-408-1254-7

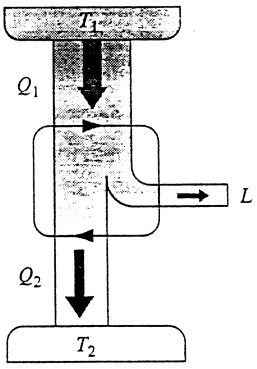


FIGURA 24.7 Elementi di un motore termico di Carnot. Le due freccette nere e la linea chiusa suggeriscono il ciclo termodinamico percorso dal fluido motore, come su un diagramma p-V. Dalla sorgente ad alta temperatura T_1 si trasferisce il calore Q_1 al fluido. Questo cede il calore Q_2 al serbatoio di bassa temperatura T_2. Il fluido inoltre compie il lavoro L su un oggetto che si trova all'esterno.

temperatura costante T_1 e cede l'energia $|Q_2|$ sotto forma di calore a un secondo serbatoio termico a temperatura costante T_2. In un motore ideale come questo si assume che tutte le trasformazioni siano *reversibili* e non avvengano dispersioni di energia dovute ad esempio ad attriti o a fenomeni di turbolenza. Sebbene la macchina di Carnot sia un motore ipotetico, può essere molto utile analizzarne il funzionamento per capire come funzionano i motori reali.

Ciclo di Carnot

La Figura 24.8 presenta un diagramma p-V del ciclo di Carnot, la sequenza di trasformazioni subite dal fluido motore e schematizzate nella Figura 24.7. Le freccette nere indicano il senso di percorrenza orario. Si può immaginare il fluido di lavoro come un gas confinato in un cilindro termicamente isolato e chiuso al di sopra da un pistone mobile zavorrato. Si può collocare il cilindro a piacimento su una delle due sorgenti termiche (che abbiamo chiamato spesso anche serbatoi termici), una alla temperatura T_1 e l'altra alla temperatura T_2, oppure anche su una piattaforma coibentata. Dalla Figura 24.8 osserviamo che, collocando il cilindro sulla sorgente calda a temperatura T_1, il calore $|Q_1|$ fluisce *dalla* sorgente *al* fluido motore, mentre questo subisce un'*espansione* isoterma dal volume V_A al volume V_B. Al contrario, quando si pone il cilindro a contatto con la sorgente a temperatura T_2, è il fluido motore a cedere il calore $|Q_2|$ *alla* sorgente fredda mentre il gas subisce una *compressione* isoterma dal volume V_C al volume V_D.

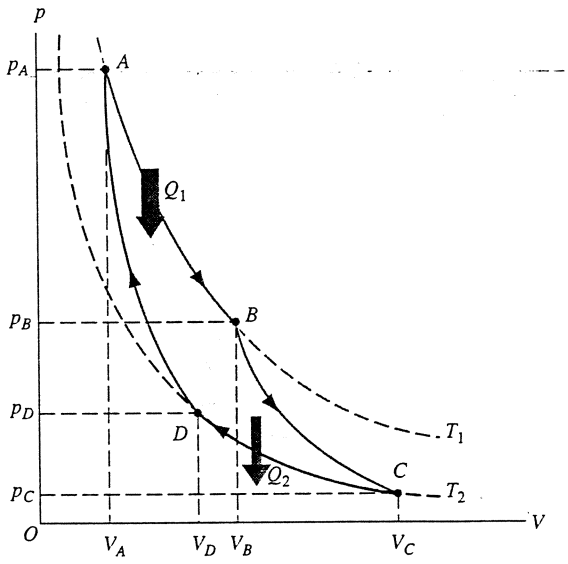


FIGURA 24.8 Ciclo di Carnot su un diagramma p-V in cui il fluido motore è costituito da un gas ideale.

Per il motore della Figura 24.7 assumiamo che lo scambio di calore con il fluido possa avvenire *soltanto* durante le trasformazioni isoterme AB e CD di Figura 24.8. Di conseguenza le trasformazioni BC e DA nel medesimo diagramma, che congiungono le due isoterme, devono essere processi adiabatici (reversibili), in cui non si scambia energia sotto forma di calore. Per garantirci questa condizione, durante queste due trasformazioni BC e DA, in cui varia il volume, collochiamo il cilindro sulla piattaforma coibentata.

Secondo la definizione data nel Paragrafo 23.5 il lavoro svolto *su* un gas è negativo quando questo si espande (volume in crescita). Nel valutare il rendimento di una macchina, tuttavia, siamo più interessati al lavoro svolto *dal* gas sull'ambiente esterno. Quando si espande esso compie lavoro *positivo* sull'ambiente, per esempio alzando un peso. Manteniamo valida la nostra definizione di lavoro termodinamico L data nel Capitolo 23, in cui L è il lavoro svolto *sul* gas, ma, discutendo di motori termici, parleremo di $|L|$ come del lavoro svolto *da* un gas in espansione sul proprio ambiente. In definitiva, il lavoro negativo svolto *sul* gas corrisponde a lavoro positivo compiuto *dal* gas.

Nelle due trasformazioni consecutive AB e BC di Figura 24.8 il fluido motore si espande e quindi compie lavoro positivo sollevando il pistone. Nella figura questo lavoro è rappresentato dall'area sottostante al tratto ABC. Nei successivi stadi CD e DA il gas viene compresso, e quindi svolge lavoro negativo nei confronti dell'ambiente o, ciò che è lo stesso, l'ambiente compie lavoro positivo sul gas spingendo verso il basso il pistone zavorrato. Nel diagramma questo lavoro è rappresentato dall'area sottostante al tratto CDA. Il *lavoro netto* svolto ad *ogni ciclo*, rappresentato da L nella Figura 24.7, è la differenza tra queste due aree ed è una quantità negativa pari all'area racchiusa dal ciclo $ABCDA$ e colorata nella Figura 24.8. Il lavoro L viene compiuto su un oggetto esterno, per esempio un carico da sollevare.

Per illustrare il ciclo di Carnot possiamo riportare le sue trasformazioni su un diagramma temperatura-entropia (T-S), come quello di Figura 24.9. Si noti che in questo diagramma le isoterme sono rappresentate da linee orizzontali. Si verifichi che i punti A, B, C e D di Figura 24.9 corrispondano agli omonimi punti sul diagramma p-V di Figura 24.8. Dalla Figura 24.9 vediamo che, durante la trasformazione AB, l'entropia del fluido aumenta. In base all'Equazione

ISBN 88-408-1254-7

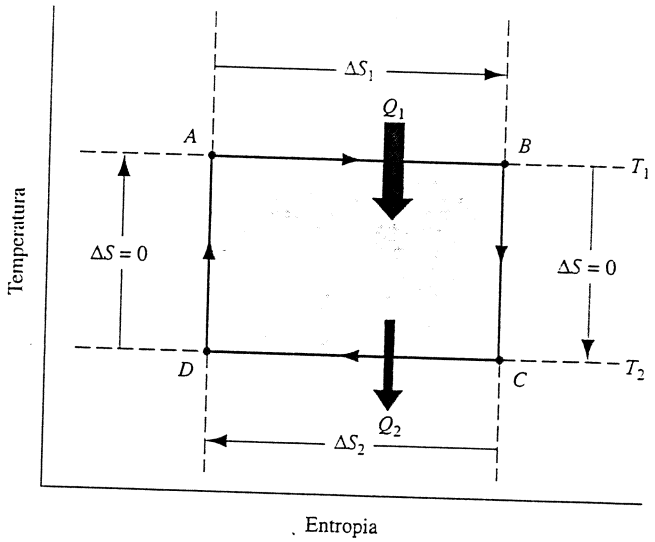


FIGURA 24.9 Ciclo di Carnot su un diagramma *T-S*. Si hanno variazioni d'entropia nelle trasformazioni *AB* e *CD*, ma non nelle trasformazioni *BC* e *DA*. Il ciclo presenta questa forma rettangolare indipendentemente dal fluido motore impiegato.

24.2 questo incremento è dato da $|Q_1|/T_1$, perché è il calore Q_1 ad essere trasferito al fluido motore, in modo reversibile e a temperatura costante T_1. Analogamente nel tratto *CD* di Figura 24.9 il calore Q_2 viene ceduto (reversibilmente e a temperatura costante T_2) dal fluido motore e di conseguenza la sua entropia diminuisce. I processi *BC* e *DA* di Figura 24.9 sono adiabatici; non essendovi dunque passaggio di calore, l'entropia in questo caso resta costante, come vuole l'Equazione 24.2. Nella Figura 24.9 si vede immediatamente che il ciclo di Carnot consiste di due trasformazioni isoterme e due trasformazioni *isoentropiche* (in cui l'entropia rimane costante).

La macchina lavora descrivendo sempre lo stesso ciclo e quindi il fluido motore ripassa sempre dagli stessi stati. Indicando con X una qualsiasi delle variabili di stato del fluido motore, come la pressione, la temperatura, il volume, l'energia interna o l'entropia, si ha sempre, dopo un ciclo esatto, $\Delta X = 0$, e in particolare

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 \quad \text{e} \quad \Delta S = 0 \tag{24.6}$$

per ogni ciclo percorso dal fluido. Faremo uso di questa conclusione più tardi.

Rendimento del ciclo di Carnot

Lo scopo di un motore termico consiste nel trasformare quanto più possibile il calore assorbito Q in lavoro utile. Misuriamo la capacità realizzativa di questo scopo con il *rendimento termodinamico* η, definito come il rapporto tra il lavoro erogato dalla macchina ("ciò che otteniamo") e l'energia termica assorbita ("ciò che spendiamo") ad ogni ciclo, ossia

$$\eta = \frac{|L|}{|Q_1|}. \tag{24.7}$$

Applichiamo la prima legge della termodinamica ($\Delta E_{\text{int}} = Q + L$) al fluido motore durante un ciclo. Q rappresenta l'apporto *netto* di calore ad ogni ciclo, mentre L è il lavoro *netto* svolto dal fluido durante un ciclo. Per l'Equazione 24.6, $\Delta E_{\text{int}} = 0$. La prima legge diventa dunque

$$|L| = |Q_1| - |Q_2|. \tag{24.8}$$

Combinando le Equazioni 24.7 e 24.8 si ottiene

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}. \tag{24.9}$$

Passiamo ora a qualche considerazione sulle variazioni di entropia che intervengono nel ciclo di Carnot. Assistiamo a due trasferimenti di calore reversibili e quindi a due variazioni entropiche, una (ΔS_1) alla temperatura T_1 e l'altra (ΔS_2) alla temperatura T_2. Come deduciamo anche dall'Equazione 24.6, la variazione totale d'entropia relativa a un ciclo è zero, e di conseguenza, coerentemente con la Figura 24.9, dev'essere

$$\Delta S_1 = -\Delta S_2, \tag{24.10}$$

da cui, considerando che ΔS_2 è negativa, si ricava

$$\frac{|Q_1|}{T_1} = \frac{|Q_2|}{T_2}. \tag{24.11}$$

A sinistra abbiamo il modulo della variazione entropica di alta temperatura, mentre a destra compare quella di bassa temperatura. Inoltre, dato che $T_1 > T_2$, dev'essere $|Q_1| > |Q_2|$. Significa che il calore assorbito dalla sorgente calda è di modulo maggiore di quello restituito al serbatoio freddo.

Introducendo l'Equazione 24.11 nella (24.9), si ottiene il rendimento della macchina di Carnot:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{(rendimento di Carnot)}. \tag{24.12}$$

Dato che $T_2 < T_1$, il rendimento di Carnot è necessariamente minore di 1, o, come si suol dire anche con riferimento alla logica delle conversioni energetiche, inferiore al 100 %. Ne abbiamo conferma osservando la Figura 24.7 da cui risulta chiaro che solo una parte del calore assorbito dalla sorgente calda viene convertita in lavoro, mentre il resto viene scaricato alla sorgente fredda. Dimostreremo nel Paragrafo 24.7 che *non esiste motore reale di rendimento superiore a quello calcolato con l'Equazione 24.12.*

Si noti anche che, per ricavare l'Equazione 24.12 non abbiamo bisogno di specificare la natura del fluido motore – e nemmeno l'abbiamo fatto – per cui:

l'Equazione 24.12 esprime il rendimento di qualsiasi macchina di Carnot, indipendentemente dalla natura del fluido motore.

Alla ricerca del motore perfetto

Gli inventori sono all'eterna ricerca di un modo per migliorare il rendimento delle macchine termiche riducendo la quantità di calore $|Q_2|$ «scaricata» in ogni ciclo. Il loro so-

 ISBN 88-408-1254-7

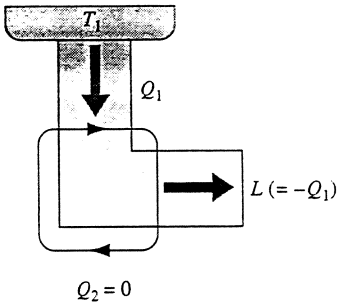


FIGURA 24.10 Elementi di un motore perfetto, che converte il calore Q_1 prelevato dalla sorgente calda, direttamente in lavoro L con rendimento del 100 %.

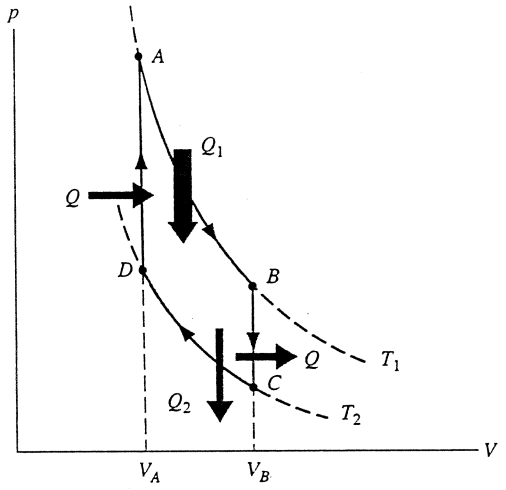


FIGURA 24.11 Diagramma p-V di un ciclo Stirling ideale (cioè reversibile), in cui il fluido motore si assume essere un gas perfetto. Lo si confronti con il ciclo di Carnot di Figura 24.8. Entrambi i cicli comprendono due trasformazioni isoterme, ma nel ciclo Stirling queste sono congiunte da due trasformazioni isocore (non isoentropiche, come nel ciclo di Carnot), durante le quali si ha pure scambio di calore.

gno è realizzare il *motore perfetto* (non si confonda questo concetto con quello di motore ideale presentato all'inizio del paragrafo), schematizzato nella Figura 24.10, in cui Q_2 è ridotto a zero e quindi Q_1 è convertito totalmente in lavoro. Il motore perfetto di un transatlantico, ad esempio, potrebbe estrarre energia dall'acqua del mare e impiegarla per muovere le eliche, senza alcun costo di combustibile. E su un'automobile il motore perfetto potrebbe ricavare calore dall'aria circostante e convertirlo in energia utile a spingere l'auto, di nuovo senza costi di combustibile. Ma ahimé, un siffatto motore perfetto non è che un sogno: basta uno sguardo all'Equazione 24.12 per rendersi conto che il rendimento η potrebbe diventare pari a 1 solo se $T_2 = 0$ K oppure se T_1 tendesse all'infinito, requisiti purtroppo impossibili da ottenere. Al contrario, decenni di pratica ingegneristica hanno portato a questa ulteriore forma alternativa del secondo principio della termodinamica:

> *non esiste un ciclo di trasformazioni che dia come unico risultato l'acquisizione di calore da una sorgente termica e la sua totale trasformazione in lavoro.*

In breve, *non esiste il motore perfetto.*

Sintetizzando: il rendimento termodinamico dato dall'Equazione 24.12 si applica solo alla macchina ideale di Carnot. I motori reali, nei quali le trasformazioni che realizzano il ciclo sono irreversibili, presentano rendimenti inferiori. Se le auto godessero di un motore a ciclo di Carnot, il loro rendimento secondo la (24.12) sarebbe di circa il 55 %; nella realtà i motori d'automobile hanno rendimenti attorno al 25 %. Una centrale elettronucleare, nel suo insieme, può considerarsi una macchina termica: ricava energia termica dal nocciolo del reattore nucleare, compie lavoro mediante una turbina che aziona il generatore di elettricità, e riversa il calore di scarico nell'ambiente circostante, come ad esempio un fiume vicino. Se operasse come un ciclo di Carnot, avrebbe un rendimento del 40 % circa; nella realtà arriva al 30 %. Nella progettazione di macchine termiche non esiste fisicamente il modo di superare il limite imposto al rendimento dall'Equazione 24.12.

Altri motori termici reversibili

L'Equazione 24.12 non si applica a tutti i motori reversibili ideali, ma solo a quelli che presentano due (e solo due) sorgenti termiche a temperatura costante, rappresentabili come in Figura 24.7, cioè alle macchine termiche di Carnot. La Figura 24.11 presenta il ciclo termodinamico realizzato in un *motore Stirling* ideale, cioè reversibile. Dal confronto col ciclo di Carnot di Figura 24.8 si nota che entrambe le macchine scambiano calore nel corso di due trasformazioni isoterme alle temperature T_1 e T_2. Nel ciclo Stirling però le due isoterme sono congiunte, anziché con le due adiabatiche del ciclo di Carnot, con due trasformazioni isocore (Figura 24.11). L'incremento di temperatura di un gas a volume costante realizzato in modo reversibile tra le temperature T_2 e T_1 (tratto DA di Figura 24.11) comporta la somministrazione di calore al fluido motore da parte di una sorgente a temperatura variabile gradatamente e con continuità tra le due temperature limite. In questo caso dunque lo scambio termico reversibile (e quindi la corrispondente variazione entropica) avviene in tutti e quattro i tempi del ciclo Stirling, e non solo in due come nel ciclo di Carnot. Per il motore Stirling ideale non si può quindi ripetere l'analisi che ha portato all'Equazione 21.11; e, cosa più importante, risulta che il rendimento di un ciclo Stirling ideale è necessariamente più basso del ciclo di Carnot che opera tra le due medesime temperature. Un motore reale poi, che faccia uso del ciclo Stirling, avrà di fatto un rendimento ancora inferiore.

PROBLEMA SVOLTO 24.5 La turbina di una centrale termoelettrica preleva vapore dalla caldaia alla temperatura di 520 °C e lo restituisce al condensatore alla temperatura di 100 °C.

ISBN 88-408-1254-7

Quale rendimento termodinamico massimo può avere questo ciclo a turbina?

Soluzione Il rendimento massimo teorico è quello di una macchina di Carnot operante tra le due medesime temperature, ossia, dall'Equazione 24.12,

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{(273 + 100)\ \text{K}}{(273 + 520)\ \text{K}} = \\ = 0{,}53 \quad \text{ossia} \quad 53\,\%.$$

Notare che le temperature in questa relazione *devono* essere espresse in kelvin. A causa degli attriti, turbolenze e scambi termici indesiderati, il rendimento reale di una turbina siffatta difficilmente supera il 40 %. Si osservi come il rendimento massimo teorico dipenda solo dalle due temperature e non da altri parametri, quali pressione, ecc.

24.6 ENTROPIA E RENDIMENTO DEI FRIGORIFERI

Una macchina che trasferisce energia sotto forma di calore da una sorgente fredda a una calda mediante una ripetuta sequenza di trasformazioni termodinamiche è detta *macchina frigorigena* o *frigorifero*. In un frigorifero domestico, per esempio, un compressore elettrico compie lavoro per trasferire energia termica dal compartimento cibi (sorgente a bassa temperatura) all'ambiente esterno (sorgente ad alta temperatura).

I *condizionatori d'aria* e le *pompe di calore* sono, in linea di principio, delle macchine frigorigene. Nel caso del condizionatore la sorgente a bassa temperatura è il locale da raffreddare, mentre la sorgente calda è l'ambiente esterno. La pompa di calore è la stessa macchina utilizzata in maniera opposta: il locale da riscaldare è la sorgente calda, a cui viene ceduto il calore sottratto alla sorgente fredda, che è l'ambiente esterno.

La Figura 24.12 schematizza gli elementi fondamentali di un frigorifero. Se assumiamo che le trasformazioni termodinamiche coinvolte siano tutte reversibili, abbiamo il *frigorifero ideale*. Confrontando le Figure 24.12 e 24.7 osserviamo che il frigorifero ideale opera come un ciclo di Carnot all'inverso. In altre parole, rispetto alla macchina termica di Carnot, tutti i trasferimenti di calore e di lavoro risultano rovesciati. Potremmo chiamare il frigorifero ideale di Figura 24.12 *macchina frigorigena di Carnot*.

Il progettista di macchine frigorigene desidera estrarre quanto più possibile calore $|Q_2|$ dal serbatoio termico a bassa temperatura (è lo scopo che ci prefiggiamo nel caso del frigorifero comune) con la minor spesa possibile di energia sotto forma di lavoro introdotto L (il prezzo che dobbiamo pagare per ottenere lo scopo). Una misura di quanto si riesca a soddisfare questo desiderio si può definire come

$$\varepsilon = \frac{|Q_2|}{|L|}, \qquad (24.13)$$

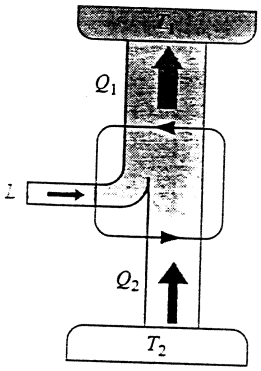


FIGURA 24.12 Elementi di un frigorifero di Carnot. Le due frecce nere sulla spira centrale suggeriscono il ciclo percorso dal fluido motore, come se fosse su un diagramma p-V. Dal serbatoio termico a bassa temperatura T_2 si trasferisce il calore Q_2 al fluido motore e da questi si trasferisce il calore Q_1 al serbatoio termico ad alta temperatura T_1. Il motore (o più esattamente il suo fluido di lavoro) assorbe il lavoro L compiuto dall'esterno.

ove ε è detto *efficienza* o *COP* (dall'inglese *coefficient of performance*): maggiore è il valore di ε, tanto più efficiente risulta la macchina frigorigena. Nel caso del frigorifero di Carnot la prima legge della termodinamica impone

$$|L| = |Q_1| - |Q_2|,$$

ove $|Q_1|$ è ora il calore (in valore assoluto) scaricato nel serbatoio termico ad alta temperatura. L'Equazione 24.13 può dunque scriversi

$$\varepsilon = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|}. \qquad (24.14)$$

Dato che un frigorifero di Carnot è come un motore di Carnot funzionante a rovescio, per esso vale la (24.11), che, combinata con la (24.14) fornisce, dopo qualche passaggio,

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad \text{(frigorifero di Carnot)}. \qquad (24.15)$$

Per un tipico condizionatore d'aria, l'efficienza potrebbe valere per esempio 2,5. Questo significa che (Equazione 24.13), per ogni joule di energia meccanica (o elettrica, in pratica) immessa nella macchina, vengono assorbiti 2,5 J sotto forma di calore dalla sorgente fredda. Come si deduce dall'Equazione 24.15, l'efficienza è tanto maggiore quanto più vicini tra di loro sono i valori di temperatura delle due sorgenti. Per questo le pompe di calore, come mezzo di riscaldamento, sono più efficienti in climi temperati che in climi rigidi.

Alla ricerca del frigorifero perfetto

Sarebbe fantastico avere un frigorifero che non richiedesse, per il suo azionamento, immissione di lavoro, che, cioè, funzionasse da solo senza consumare energia elettrica.

 ISBN 88-408-1254-7

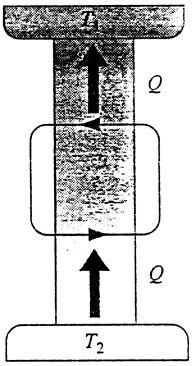


FIGURA 24.13 Elementi di un frigorifero perfetto, che trasferisce il calore Q_2, prelevato dalla sorgente fredda, direttamente alla sorgente calda senza apporto di lavoro alcuno.

Nella Figura 24.13 è rappresentata un'altra «invenzione da sogno», un *frigorifero perfetto* (anche qui, da non confondere col frigorifero ideale), che trasferisce energia da una sorgente fredda a una sorgente calda senza l'intervento di alcun lavoro, per il quale dunque $L = 0$, ed $\varepsilon \to \infty$ (Equazione 24.13). Come vedremo, questa macchina violerebbe la seconda legge della termodinamica.

Adottiamo come sistema chiuso il fluido motore assieme ai due serbatoi termici. Solo includendo questi ultimi possiamo essere sicuri che il sistema sia veramente chiuso. Dato che la macchina segue una trasformazione ciclica, il fluido motore non varia la sua entropia percorrendo un intero ciclo. Le entropie dei due serbatoi termici invece variano: la variazione netta di entropia del sistema intero (Figura 24.13) è

$$\Delta S = -\frac{|Q|}{T_2} + \frac{|Q|}{T_1},$$

ove Q è il calore assorbito dalla sorgente fredda e, nella medesima misura, è anche il calore ceduto alla sorgente calda. Dato che T_1 è maggiore di T_2, il membro a destra di questa equazione è negativo, e risulta quindi che la variazione entropica complessiva per un ciclo del sistema chiuso *macchina + sorgenti* è pure negativa. Ciò violerebbe la seconda legge della termodinamica e quindi si conclude che il frigorifero perfetto non può esistere. Se volete un frigorifero funzionante, dovete attaccare la spina!

Questo risultato suggerisce un'ulteriore formulazione del secondo principio della termodinamica, spesso chiamata enunciazione di Clausius, dal nome del fisico tedesco Rudolph J.E. Clausius (1822-1888), che per primo introdusse il concetto di entropia:

> *non esiste un ciclo di trasformazioni che dia come unico risultato il trasferimento di calore da una data sorgente termica a un'altra sorgente termica a temperatura maggiore.*

In breve, *non esiste il frigorifero perfetto.*

PROBLEMA SVOLTO 24.6 Un frigorifero domestico, con efficienza $\varepsilon = 4.7$, estrae calore dalla cella alimentare in misura di 250 J ad ogni ciclo. (a) Quanto lavoro richiede ad ogni ciclo per il suo funzionamento? (b) Quanto calore cede in ogni ciclo all'ambiente del locale in cui si trova?

Soluzione (a) La definizione di efficienza data dall'Equazione 24.13 mette in relazione ε con il calore Q_2 rimosso dalla sorgente fredda. Risolvendola rispetto a L si trova

$$|L| = \frac{|Q_2|}{\varepsilon} = \frac{250\ \text{J}}{4{,}7} = 53\ \text{J}.$$

(b) Applicando la prima legge della termodinamica al fluido motore del frigorifero si ottiene

$$-|Q_1| + |Q_2| + |L| = \Delta E_{\text{int}}.$$

Dato che in questo caso la variazione di energia interna si riferisce a un ciclo, risulta $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Risolvendo questa equazione rispetto a $|Q_1|$ e introducendo i valori numerici, troviamo

$$|Q_1| = |L| + |Q_2| = \\ = 53\ \text{J} + 250\ \text{J} = 303\ \text{J}.$$

Ad ogni ciclo l'immissione di 53 J di energia meccanica provoca il prelievo di 250 J di calore dalla cella frigorifera, che vengono riversati, con l'aggiunta di 53 J, nell'ambiente esterno al frigorifero sotto forma di calore a temperatura maggiore.

PROBLEMA SVOLTO 24.7 La pompa di calore è una macchina che, agendo né più né meno come una macchina frigorigena, serve a riscaldare ambienti trasferendo calore da una fonte esterna, più fredda, ai locali interessati, più caldi; il ciclo termodinamico è sostenuto con l'immissione di lavoro esterno, di norma mediante un compressore azionato da un motore elettrico. Poniamo che la temperatura esterna sia di $-10\,^\circ\text{C}$ e che la temperatura interna venga mantenuta a $22\,^\circ\text{C}$. In queste condizioni i locali disperdono verso l'esterno una potenza termica di 16 kW, che dev'essere quindi fornita dalla pompa di calore per mantenere il regime stazionario. Qual è la potenza meccanica minima teorica, necessaria per l'alimentazione della pompa di calore?

Soluzione Il serbatoio termico a bassa temperatura è rappresentato dall'atmosfera esterna ai locali riscaldati, la cui temperatura è $T_2 = (273 - 10)\ \text{K} = 263\ \text{K}$, mentre il serbatoio termico ad alta temperatura è rappresentato dagli ambienti riscaldati, ove la temperatura è $T_1 = (273 + 22)\ \text{K} = 295\ \text{K}$. L'efficienza massima teorica è data dall'Equazione 24.15:

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{263\ \text{K}}{295\ \text{K} - 263\ \text{K}} = 8{,}22.$$

Applicando la prima legge della termodinamica all'Equazione 24.13 si ottiene

$$\varepsilon = \frac{|Q_2|}{|L|} = \frac{|Q_1| - |L|}{|L|}.$$

Riferiamo il nostro calcolo alle energie scambiate nell'unità di tempo. Il calore Q_1 sarà dato dalla potenza termica erogata dalla pompa di calore, moltiplicata per l'unità di tempo, cioè $16\ \text{kW} \cdot 1\ \text{s} = 16\ \text{kJ}$. Risolvendo la precedente equazione rispetto a $|L|$ si trova

$$|L| = \frac{|Q_1|}{\varepsilon + 1} = \frac{16\ \text{kJ}}{8.22 + 1} = 1{,}7\ \text{kJ}.$$

È questa l'energia meccanica che il motore elettrico della pompa di calore deve immettere nell'unità di tempo. La sua potenza sarà data quindi da (1,7 kJ)/(1 s) = 1,7 kW.

Ecco il vantaggio offerto dalla pompa di calore. Consumando una potenza di 1,7 kW di energia elettrica, si ottengono 16 kW in calore utile per il riscaldamento. Grazie al calore sottratto all'ambiente esterno, che quindi subisce un raffreddamento, la potenza termica immessa negli ambienti da riscaldare è molto maggiore di quella che si otterrebbe, per esempio, convertendo direttamente l'energia elettrica in calore mediante una stufa elettrica.

Il valore qui calcolato è in effetti un limite teorico: si basa infatti sull'assunzione che la pompa di calore sia un frigorifero ideale di Carnot. Nella pratica occorrerà quindi immettere una potenza meccanica maggiore, ma il vantaggio resta comunque assai considerevole.

24.7 RENDIMENTI DELLE MACCHINE REALI

Dimostreremo in questo paragrafo che non esiste alcun motore reale, operante tra le medesime temperature, che presenti un rendimento maggiore della macchina di Carnot. Vale a dire che nessuna macchina termica reale può avere rendimento maggiore di quello risultante dall'Equazione 24.12.

Supponiamo che un fantasioso inventore abbia realizzato un motore X, il cui rendimento η_X voglia dimostrare essere maggiore di η_C, il rendimento di Carnot:

$$\eta_X > \eta_C \quad \text{(pretesa da dimostrare).} \qquad (24.16)$$

Accoppiamo il motore X a una macchina frigorigena di Carnot, come nella Figura 24.14a. Regoliamo il sistema in modo che il lavoro richiesto dal frigorifero ad ogni ciclo sia esattamente uguale al lavoro prodotto dalla macchina termica X. Sul sistema combinato *motore + frigorifero* di Figura 24.14a non si compie dunque alcun lavoro esterno.

Se la (24.16) fosse vera, dalla definizione di rendimento (Equazione 24.7) avremmo

$$\frac{|L|}{|Q_{1,C}|} > \frac{|L|}{|Q_{1,X}|},$$

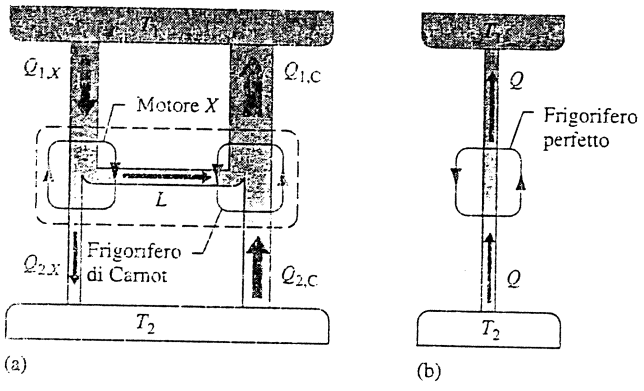


FIGURA 24.14 (a) Il motore termico X alimenta un frigorifero di Carnot. Se il motore X avesse rendimento maggiore del corrispondente ciclo di Carnot, allora la combinazione corrisponderebbe al frigorifero perfetto mostrato in (b).

dove $Q_{1,X}$ si riferisce al calore assorbito dal motore X dalla sorgente calda, e $Q_{1,C}$ è la stessa quantità del frigorifero di Carnot quando opera come motore. Dalla disuguaglianza ricaviamo che

$$|Q_{1,C}| > |Q_{1,X}|. \qquad (24.17)$$

Applichiamo ora la prima legge della termodinamica separatamente ai fluidi di lavoro delle due macchine. Dato che il lavoro erogato dal motore X è uguale al lavoro immesso nel frigorifero di Carnot, abbiamo

$$|L| = |Q_{1,C}| - |Q_{2,C}| = |Q_{1,X}| - |Q_{2,X}|,$$

che si può scrivere come

$$|Q_{1,C}| - |Q_{1,X}| = |Q_{2,C}| - |Q_{2,X}| = Q. \qquad (24.18)$$

Considerata la disuguaglianza 24.17, la quantità Q della (24.18) deve essere positiva.

Dal confronto della (24.18) con la Figura 24.14 emerge che il risultato complessivo della combinazione delle due macchine è trasferire il calore Q dalla sorgente a bassa temperatura alla sorgente a temperatura più alta, senza la necessità di immettere lavoro (Figura 24.14b). Questa combinazione agisce dunque come il frigorifero perfetto di Figura 24.13, che non può esistere in osservanza alla seconda legge della termodinamica.

Qualcosa dunque di sbagliato deve sussistere nelle ipotesi assunte, e tra queste l'unica vulnerabile è l'Equazione 24.16. Concludiamo affermando che

> *nessun motore reale può avere un rendimento maggiore di una macchina di Carnot operante tra le medesime due temperature.*

Nel migliore dei casi il rendimento può essere pari a quello di Carnot, dato dall'Equazione 24.12; e se è così, *si tratta* di una macchina termica di Carnot. Dato che poi le macchine reali sono irreversibili, i loro rendimenti sono sempre inferiori al limite imposto dalla (24.12).

PROBLEMA SVOLTO 24.8. L'inventore del motore X dichiara che il lavoro svolto dalla sua macchina ad ogni ciclo è L = 120 J, e che esso opera tra i punti di ebollizione e congelamento dell'acqua con rendimento $\eta_X = 75\,\%$. (a) Che rapporto sussiste tra questo preteso valore e il rendimento di una macchina di Carnot che operi tra le stesse due temperature? (b) Se il motore X esistesse davvero, quanto calore Q_1 assorbirebbe dalla sorgente calda ad ogni ciclo? (c) Se il motore X esistesse davvero, quanto calore Q_2 cederebbe alla sorgente fredda ad ogni ciclo? (d) E se esistesse davvero, quale sarebbe la variazione entropica ad ogni ciclo per l'intero sistema che comprende il fluido e le due sorgenti?

Soluzione (a) Dall'Equazione 24.12, applicabile solo al ciclo di Carnot, abbiamo

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{(273 + 0)\ \text{K}}{(273 + 100)\ \text{K}} = 0{,}268 \approx 27\,\%.$$

Abbiamo visto proprio in questo paragrafo che non può esistere un motore con rendimento maggiore di quello di Carnot operante tra

 ISBN 88-408-1254-7

le medesime temperature. Al di là delle dichiarazioni dell'inventore, il motore X deve avere un rendimento minore del 27 %. Qualcosa dunque non quadra.

(b) Ricaviamo dall'Equazione 24.7

$$|Q_1| = \frac{|L|}{\eta_X} = \frac{120\ \text{J}}{0.75} = 160\ \text{J}.$$

(c) Applicando la prima legge della termodinamica al fluido di lavoro del motore X otteniamo

$$|L| = |Q_1| - |Q_2|.$$

Infatti, essendo ciclica la trasformazione che subisce il fluido, $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Risolvendo quest'equazione rispetto a Q_2 e introducendo i dati numerici, si ha

$$|Q_2| = |Q_1| - |L| = 160\ \text{J} - 120\ \text{J} = 40\ \text{J}.$$

(d) Il sistema adottato è chiuso e quindi possiamo applicare la seconda legge della termodinamica nella forma dell'Equazione 24.5. La variazione entropica totale ad ogni ciclo è data dalla somma dei contributi di variazione della sorgente calda, che è negativa, della sorgente fredda, che è positiva e del fluido motore, ΔS_{fm}, che per un ciclo è nulla:

$$\begin{aligned}\Delta S_X &= \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_{\text{fm}} = \\ &= -\frac{|Q_1|}{T_1} + \frac{|Q_2|}{T_2} + 0 = \\ &= -\frac{160\ \text{J}}{(273+100)\ \text{K}} + \frac{40\ \text{J}}{(273+0)\ \text{K}} + 0 = \\ &= -0{,}429\ \text{J/K} + 0{,}147\ \text{J/K} + 0 = -0.28\ \text{J/K}.\end{aligned}$$

Si noti che, come avevamo anticipato, l'entropia complessiva del motore X *diminuisce* continuamente ad ogni ciclo ($\Delta S_X < 0$). Si tratta di una chiara violazione della seconda legge, secondo la quale l'entropia di un sistema chiuso non può mai diminuire. Un'ulteriore prova che qualcosa non va.

24.8 RIORDINO DELLE IDEE SULLA SECONDA LEGGE

Finora abbiamo presentato tre formulazioni della seconda legge della termodinamica per un sistema chiuso, che riassumiamo.

1. L'entropia di un sistema chiuso non diminuisce mai. Dall'Equazione 24.5, si ha $\Delta S \geq 0$.

2. Non si può trasformare l'energia termica in lavoro con un rendimento del 100 %. Come dire che non esiste il motore perfetto.

3. Non si può trasferire calore da una sorgente fredda a una più calda senza svolgere lavoro. Come dire che non esiste il frigorifero perfetto.

A prima vista queste asserzioni sembrano avere scarsa relazione tra di loro. Eppure esse sono completamente equivalenti. Accettandone una delle tre, le altre due seguono come inevitabili conseguenze. Se una sola fosse falsa, lo sarebbero anche le altre due.

Nel Paragrafo 24.5 abbiamo visto che la formulazione 2 discende dalla 1, e nel Paragrafo 24.6 abbiamo visto che anche l'enunciato 3 trae origine dall'1. Ora dimostreremo che anche le formulazioni 2 e 3 sono equivalenti tra di loro.

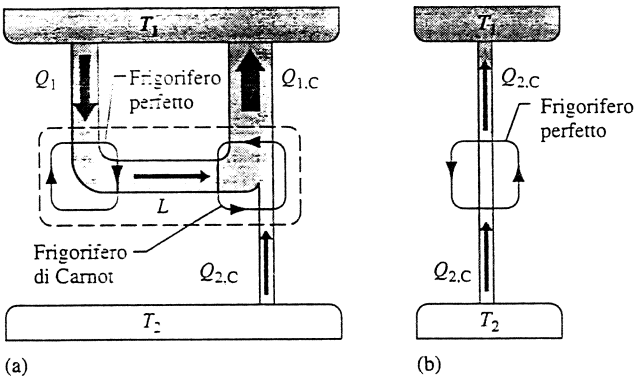


FIGURA 24.15 (a) Un frigorifero di Carnot, alimentato da un motore perfetto sarebbe equivalente al frigorifero perfetto mostrato in (b).

Se l'enunciato 2 fosse falso, potremmo costruire un motore perfetto, che converta tutto il calore Q_1 in lavoro L. Immettiamo questo lavoro in una macchina frigorigena di Carnot, come in Figura 24.15a. Il frigorifero trasferisce il calore $|Q_{1,C}| = |Q_{2,C}| + |L|$ nel serbatoio ad alta temperatura.

Ora guardiamo l'effetto complessivo dell'insieme delle due macchine, suggerito dal contorno tratteggiato in Figura 24.15a. Il lavoro L costituisce un trasferimento energetico interno a questo nuovo sistema e quindi non interferisce con gli scambi tra il sistema e l'ambiente esterno. Il risultato complessivo rimane dunque il prelievo di calore $|Q_{2,C}|$ dalla sorgente fredda e la cessione di calore alla sorgente calda in quantità netta data da $|Q_{1,C}| - |Q_1|$. Abbiamo detto che $|Q_1| = |L|$ e quindi, applicando la prima legge al frigorifero di Carnot, risulta

$$|Q_{1,C}| - |Q_1| = |Q_{1,C}| - |L| = |Q_{2,C}|.$$

La combinazione delle due macchine funziona insomma come un frigorifero perfetto, schematizzato nella Figura 24.15b, che trasferisce il calore $|Q_{2,C}|$ dalla sorgente fredda a quella calda, senza l'apporto di alcun lavoro esterno.

La possibilità dunque di costruire un motore termico perfetto finisce per consentire la costruzione di un frigorifero perfetto, e, con analoghi argomenti, si può dimostrare che vale anche l'opposto. In definitiva, una violazione dell'enunciato 2 della seconda legge implica una violazione anche della formulazione 3, e viceversa. I due enunciati sono quindi equivalenti.

24.9 ASPETTO STATISTICO DELL'ENTROPIA

Nella nostra discussione sull'entropia non abbiamo accennato finora al fatto che la materia è costituita di atomi. Focalizzeremo ora l'attenzione su questo fatto e vedremo come affrontare l'entropia partendo da considerazioni di carattere microscopico. Cominciamo con il contare il numero di modi in cui si possono suddividere un certo numero di atomi o molecole tra le due metà di un contenitore. Si tratta di un problema di *meccanica statistica*.

ISBN 88-408-1254-7

Distribuiamo, a mano, otto molecole tra le due metà di una scatola come quella di Figura 24.16. Le molecole sono indistinguibili una dall'altra, sicché. per prendere la prima molecola e collocarla nella scatola. possiamo scegliere tra otto possibilità. Alla seconda mossa potremo scegliere tra le sette molecole rimaste, poi tra sei e così via. Il numero totale di modi in cui possiamo prelevare le molecole da mettere nella scatola è dato dal prodotto di queste scelte indipendenti che ci vengono offerte nelle otto mosse, ossia

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320 .$$

Scriviamo questa espressione nella forma matematica compatta

$$8! = 40\,320 ,$$

in cui 8! si legge "otto fattoriale", operazione algebrica che quasi tutte le calcolatrici scientifiche sono in grado di compiere. Per definizione si stabilisce che $0! = 1$, un'uguaglianza che ci tornerà utile più tardi.

Non tutti questi 40 320 modi sono però indipendenti. Il nostro conteggio contiene un errore per eccesso. Consideriamo la *configurazione* di Figura 24.16a, per esempio, in cui cinque molecole sono state messe da una parte e tre dall'altra. Giacché le molecole sono identiche, non c'è maniera, guardandole semplicemente, di sapere in che ordine siano state collocate. Sono difatti ben $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ i modi differenti con cui avremmo potuto collocarle, ma tutti i modi avrebbero portato allo stesso risultato. E dall'altra parte avremmo potuto inserire le molecole in $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ modi differenti.

Per ottenere il numero di modi indipendenti di raggiungere la configurazione illustrata nella Figura 24.16a, dobbiamo dividere 40 320 prima per 120 e poi anche per 6, ottenendo alla fine 56. Chiamiamo *microstati* questi modi indipendenti della configurazione, e al numero di microstati possibili per ciascuna configurazione diamo il nome di *molteplicità* w di quella configurazione. La configurazione di Figura 24.16a presenta una molteplicità $w = 56$, col che s'intende che contiene 56 microstati.

Estendendo queste considerazioni a N molecole, troviamo che la molteplicità di una configurazione, che vede N_1 molecole in una metà della scatola ed N_2 nell'altra metà, è data da

$$w = \frac{N!}{N_1!N_2!} . \qquad (24.19)$$

Facile verificare che, con questa formula, otteniamo proprio il valore $w = 56$ per l'esempio di Figura 24.16a.

La Tabella 24.1 elenca le nove configurazioni possibili, contrassegnate da numeri romani, per un insieme di $(N = 8)$, molecole. Vi sono riportati i valori di molteplicità w per ciascuna configurazione, calcolati con la (24.19). I casi illustrati nelle Figure 24.16a e 24.16b corrispondono rispettivamente alle configurazioni IV e V. La molteplicità totale per tutte le configurazioni è 256 $(= 2^8)$. L'assunto fondamentale della meccanica statistica, a prima vista un poco sorprendente, è il seguente:

tutti i microstati di un sistema sono ugualmente probabili.

Ordunque, il sistema di Figura 24.16, mentre le sue otto molecole vagano nel contenitore nel loro moto casuale, trascorrerà un tempo uguale in ciascuno dei 256 microstati possibili, elencati nella Tabella 24.1. Si noti che le nove configurazioni *non* sono tutte equiprobabili. Il sistema trascorrerà 70 volte più tempo nella configurazione V che nella I, perché tale è il rapporto tra il numero di microstati che competono alle due configurazioni. La configurazione V è la più favorita e ha la massima probabilità di occorrenza. Questa osservazione ci è invece abbastanza familiare, perché ci aspettiamo che le molecole si distribuiscano prevalentemente in maniera equa tra le due metà della scatola.

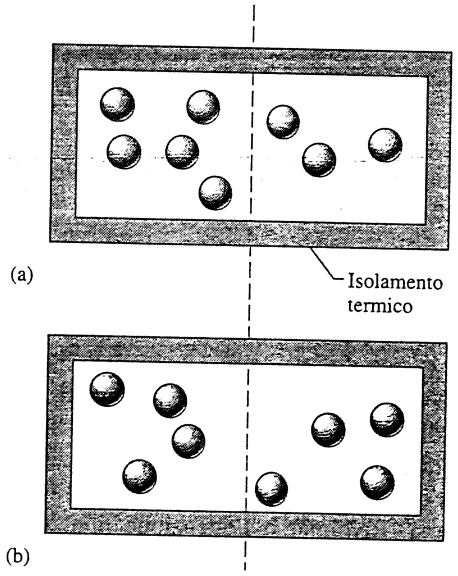


FIGURA 24.16 Una scatola isolata contiene otto molecole di un gas. Ciascuna di esse ha la stessa probabilità di trovarsi nella metà sinistra o nella metà destra della scatola. La sistemazione illustrata in (a) corrisponde alla configurazione IV della Tabella 24.1 e la sistemazione (b) corrisponde alla configurazione V.

TABELLA 24.1 Configurazioni possibili di 8 molecole in una scatola

Configurazione	N_1	N_2	*Molteplicità*[a] w	*Entropia* $(10^{-23}$ J/K)[b]
I	8	0	1	0
II	7	1	8	2,87
III	6	2	28	4,60
IV	5	3	56	5,56
V	4	4	70	5,86
VI	3	5	56	5,56
VII	2	6	28	4,60
VIII	1	7	8	2,87
IX	0	8	1	0
Numero totale di microstati			256	

[a] Calcolata dall'Equazione 24.19 [b] Calcolata dall'Equazione 24.20.

 ISBN 88-408-1254-7

Otto molecole non sono davvero molte per poter trarre conclusioni sul comportamento della natura. Proviamo allora con $N = 50$ (ancora un numero infimo, in fatto di molecole) e confrontiamo il rapporto di permanenza temporale tra le configurazioni estreme: quella in cui le molecole sono equamente suddivise tra le due metà del recipiente con quella in cui esse si trovano tutte accatastate in una sola metà. Questo rapporto, che era di 70 nell'esempio precedente di otto molecole, ora diventa di circa $1{,}2 \cdot 10^{14}$. Se vi toccasse di contare a uno a uno tutti i microstati che presenta questa configurazione di equisuddivisione, al ritmo di un conteggio al secondo impieghereste quattro milioni di anni. E ora provate a immaginare cosa succede quando N non è più 50, ma qualcosa come 10^{22}, il numero di molecole che può contenere un palloncino gonfiabile. La probabilità di equisuddivisione delle molecole tra le due metà del palloncino è tale da non lasciare speranze di incontrare qualsiasi altra configurazione se non molto prossima.

Per valori elevati di N, dunque, praticamente tutti i microstati corrispondono a uno stato di sostanziale equisuddivisione delle molecole tra le due metà del contenitore, come suggerisce il grafico di Figura 24.17. Anche quando il gas rimane a una temperatura e a una pressione costanti, le molecole continuano a rimescolarsi incessantemente e a «visitare» tutti i possibili microstati di uguale probabilità. I microstati che giacciono al di fuori del picco indicato in figura sono così pochi che il gas si trova praticamente sempre equamente suddiviso nelle due metà. Esiste in teoria la possibilità che tutte le molecole si trovino spontaneamente in una sola metà, ma la sua probabilità è infinitamente piccola.

Vediamo dunque che, lasciati a loro stessi, i sistemi tendono ad assumere configurazioni con il massimo valore di w, cui corrisponde la massima probabilità di occorrenza.

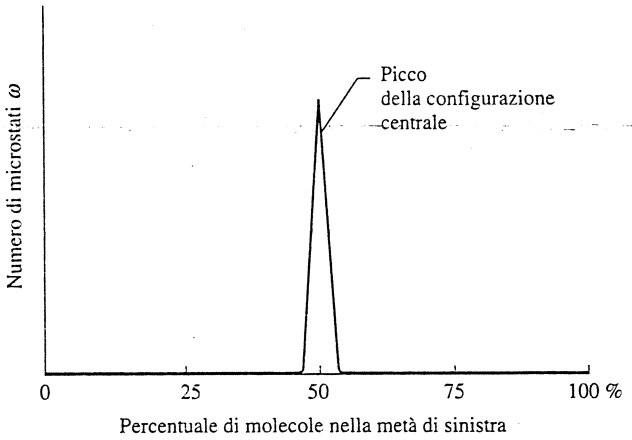


FIGURA 24.17 Grafico che illustra, per un numero *elevato* di molecole, il numero di microstati che comportano la presenza di una data percentuale di molecole nella metà sinistra della scatola. Quasi tutti i microstati corrispondono a una suddivisione approssimativamente equa delle molecole tra le due metà della scatola. Questi microstati formano il picco di *configurazione centrale* del diagramma. Per $N \approx 10^{22}$ il picco è molto più stretto di quanto si possa disegnare su questo grafico.

Altrove avevamo visto anche che i sistemi tendono spontaneamente ad assumere configurazioni di massima entropia. Deve esistere quindi un legame tra probabilità ed entropia. Qualsiasi correlazione tra le due grandezze deve tener conto di questi due fatti:

1. La probabilità di occorrenza di due sottosistemi è uguale al *prodotto* delle singole probabilità;

2. L'entropia di un sistema che consiste di due sottosistemi è la *somma* delle loro entropie.

Significa che la probabilità (come per il lancio delle monete) ha carattere moltiplicativo, mentre l'entropia (come l'energia e il volume) ha carattere additivo.

Da qui l'ipotesi che la relazione tra probabilità ed entropia debba comprendere l'operatore logaritmo, il più semplice modo (ed anche l'unico) di legare quantità che si moltiplicano con quantità che si sommano. Infatti

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b\,.$$

Il fisico austriaco Ludwig Boltzmann per primo mise in luce la relazione tra entropia e probabilità nel 1877, proponendo la formula logaritmica oggi chiamata *equazione dell'entropia di Boltzmann*:

$$S = k \ln w\,, \qquad (24.20)$$

in cui $k(= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K) è la costante di Boltzmann che già incontrammo nel Paragrafo 21.5, e w rappresenta la molteplicità associata alla configurazione di cui vogliamo calcolare l'entropia S. L'entropia delle nove configurazioni che compaiono nella Tabella 24.1 sono ricavate con quest'equazione.

Nell'applicare l'Equazione 24.19 per calcolare w, la vostra calcolatrice può rifiutarsi di darvi il fattoriale di numeri superiori a poche centinaia, un numero davvero esiguo nel trattare i sistemi macroscopici. Esiste fortunatamente un'ottima formula approssimata, nota come *approssimazione di Stirling*, non per $N!$, ma per $\ln N!$, proprio quel che serve per calcolare l'entropia. L'approssimazione di Stirling è

$$\ln N! \approx N \ln N - N. \qquad (24.21)$$

Il suo ideatore non è lo stesso Stirling del ciclo termodinamico illustrato nella Figura 24.11.

Entropia e disordine

L'equazione di Boltzmann (Equazione 24.20) è idonea a calcolare l'entropia di sistemi termodinamici molto più complicati dei semplici esempi già presentati, come la suddivisione di molecole tra le due metà di una scatola. Applichiamola qualitativamente al caso di una tazzina di caffè rimescolato col cucchiaino, ove il caffè ruota rallentando fino ad arrestarsi. Rivolgiamo l'attenzione non alla posizione delle molecole, come abbiamo fatto nell'esempio della scatola, ma alla loro velocità.

Lo stato finale di quiete, in cui le velocità delle molecole hanno direzioni casuali, contiene molti più microstati dello stato iniziale, in cui le molecole hanno il loro moto prevalentemente orientato secondo la direzione di rotazione. o

una direzione molto vicina. In breve

$$w_{\text{quiete}} > w_{\text{rot}} .$$

Dall'Equazione 24.20 segue allora

$$S_{\text{quiete}} > S_{\text{rot}} .$$

In base alla seconda legge della termodinamica, il caffè, lasciato alla sua sorte, tende spontaneamente allo stato di maggior entropia. Non succede mai il contrario. Di conseguenza il comportamento spontaneo del caffè tende a passare dalla condizione di moto rotatorio a quella di quiete. Per questo non assistiamo mai a un caffè che comincia a roteare da solo nella tazzina.

Spesso associamo l'entropia al *disordine* e talvolta affermiamo con la seconda legge che il disordine di un sistema chiuso cresce sempre. Se pensiamo alla tazzina di caffè, questo concetto risulta chiaro. Lo stato finale, con i suoi moti di natura puramente casuale, è certamente più disordinato di quello iniziale, in cui le direzioni di moto delle molecole sono prevalentemente ordinate. In genere però l'associazione del concetto di disordine a quello di entropia richiede una definizione attenta del disordine, con riferimento allo specifico processo in esame. In ossequio all'ordine evidente che riempie la nostra quotidiana esperienza, vita compresa, il fisico e scrittore scientifico Timothy Ferris, spingendo forse il concetto al limite, scrisse:

"L'entropia, anche se su scala universale cresce, localmente può subire riduzioni. Si potrebbe al limite pensare che l'eccitazione offerta dalla vita, dall'arte, dalla scienza e dallo spettacolo di una città in fermento con le sue biblioteche e i suoi teatri, sia in fondo in fondo l'eccitazione di vedere una volta tanto sconfitto il principio d'entropia."

PROBLEMA SVOLTO 24.9 (a) In quanti modi indipendenti 200 molecole possono suddividersi equamente tra le due metà di un recipiente? (b) Quanti microstati prevedono che 150 molecole si dispongano in una metà e le rimanenti 50 nell'altra?

Soluzione (a) Ponendo $N = 200$ ed $N_1 = N_2 = 100$ nell'Equazione 24.29, si calcola

$$w = \frac{N!}{N_1!N_2!} = \\ = \frac{200!}{100!\,100!} = \frac{2{,}22 \times 10^{373}}{(3{,}72 \cdot 10^{156})(3{,}72 \cdot 10^{156})} = \\ = 1{,}60 \cdot 10^{60}.$$

Si noti il valore enorme dei fattoriali. Li si può calcolare, facendo uso di normali calcolatrici, solo ricorrendo all'approssimazione di Stirling (Equazione 24.21).

(b) Ora $N = 200$, $N_1 = 150$ ed $N_2 = 50$. Di nuovo applicando la (24.19) si ottiene

$$w = \frac{N!}{N_1!N_2!} = \\ = \frac{200!}{(150!)\,(50!)} = \frac{2{,}22 \cdot 10^{373}}{(1{,}86 \cdot 10^{261})(1{,}71 \cdot 10^{63})} = \\ = 6{,}97 \cdot 10^{48}.$$

Facendo il rapporto tra le due molteplicità, si viene a sapere che la prima configurazione (equisuddivisione) è 200 miliardi di volte più probabile della seconda. Al crescere di N, l'equisuddivisione domina subito senza rivali, come illustra la Figura 24.17.

DOMANDE A RISPOSTA MULTIPLA

24.1 Processi a senso unico

24.2 Definizione di variazione entropica

1. Quali delle seguenti trasformazioni presentano variazione d'entropia nulla?

(A) Isobara. (B) Isoterma.
(C) Adiabatica. (D) Isocora.
(E) Nessuna delle precedenti perché è sempre $\Delta S > 0$.

2. Una mole di gas ideale è allo stato iniziale p_0, V_0 e T_0. Il gas viene riscaldato a volume costante fino alla temperatura $2T_0$, poi lasciato espandere isotermicamente fino al volume $2V_0$ e infine raffreddato isobaricamente fino alla temperatura T_0. La variazione entropica complessiva è

(A) $\Delta S = (5R/2)\ln 2$. (B) $\Delta S = 5R/2$.
(C) $\Delta S = R \ln 2$. (D) $\Delta S = 3R/2$.
(E) $\Delta S = 0$.

24.3 Variazioni entropiche nei processi irreversibili

3. Un blocco di alluminio a temperatura iniziale di 80 °C viene gettato in un recipiente d'acqua a temperatura iniziale di 25 °C. Dopo un po' il complesso raggiunge una temperatura d'equilibrio pari a 31 °C.

(a) Durante il processo
(A) $\Delta S_{\text{al}} > 0$.
(B) $\Delta S_{\text{al}} = 0$.
(C) $\Delta S_{\text{al}} < 0$.

(b) Durante il processo
(A) $\Delta S_{\text{ac}} > 0$.
(B) $\Delta S_{\text{ac}} = 0$.
(C) $\Delta S_{\text{ac}} < 0$.

(c) Durante il processo
(A) $|\Delta S_{\text{ac}}| > |\Delta S_{\text{al}}|$.
(B) $|\Delta S_{\text{ac}}| = |\Delta S_{\text{al}}|$.
(C) $|\Delta S_{\text{ac}}| < |\Delta S_{\text{al}}|$.

24.4 Seconda legge della termodinamica

4. Quali dei seguenti fenomeni sono conseguenza della seconda legge della termodinamica?

(A) Il calore fluisce dalla temperatura maggiore a quella minore.
(B) Gli oggetti a contatto tendono ad assumere una temperatura comune.
(C) Tutti i sistemi che generano ordine partendo dal disordine richiedono un agente esterno.

 ISBN 88-408-1254-7

24.5 Entropia e rendimento dei motori termici

5. Una macchina di Carnot cede 3 J di calore al serbatoio freddo per ogni 2 J di lavoro prodotto.

(a) Qual è il rendimento di questa macchina di Carnot?

(A) 1/3. (B) 2/5. (C) 3/5. (D) 2/3.

(b) Sia $T_2 = 27\,°C$. Che cosa si può dire riguardo a T_1?

(A) $T_1 = 627\,°C$. (B) $T_1 = 227\,°C$.
(C) $T_1 > 627\,°C$. (D) $T_1 < 227\,°C$.
(E) $227\,°C < T_1 < 627\,°C$.

24.6 Entropia e rendimento dei frigoriferi

6. Consideriamo una pompa di calore ideale e una stufa elettrica perfetta. Quest'ultima converte il 100 % dell'energia elettrica in energia termica; nella pompa di calore si converte il 90 % dell'energia elettrica in lavoro, che viene immesso nella macchina frigorigena di Carnot. Qual è il modo più «efficiente» di scaldare una casa? Si trascurino i costi d'investimento e di manutenzione.

(A) La stufa elettrica è sempre la più efficiente.
(B) La pompa di calore è sempre la più efficiente.
(C) La pompa di calore è più efficiente purché la temperatura esterna non sia troppo calda.
(D) La pompa di calore è più efficiente purché la temperatura esterna non sia troppo fredda.

24.7 Rendimenti delle macchine reali

7. Un motore reale ha un rendimento del 33 %. Eroga 24 J di lavoro ad ogni ciclo.

(a) Quanto calore assorbe dalla sorgente calda ad ogni ciclo?

(A) 8 J. (B) 16 J. (C) 48 J. (D) 72 J.
(E) Non si può rispondere se non si tratta di una macchina di Carnot.

(b) Quanto calore cede alla sorgente fredda ad ogni ciclo?

(A) 8 J. (B) 16 J. (C) 48 J. (D) 72 J.
(E) Non si può rispondere se non si tratta di una macchina di Carnot.

(c) Poniamo $T_2 = 27\,°C$. Che cosa si può dire riguardo T_1?

(A) $T_1 = 450\,°C$. (B) $T_1 = 177\,°C$.
(C) $T_1 > 177\,°C$. (D) $T_1 < 177\,°C$.
(E) $177\,°C < T_1 < 450\,°C$.

8. Un motore reale realizza un rendimento pari al 75 % di quello di Carnot operante fra le stesse temperature. Eroga una potenza di 100 W e scarica nella sorgente fredda alla temperatura di 27 °C una potenza termica di 300 W. Qual è la temperatura T_1?

(A) 27 °C. (B) 77 °C. (C) 127 °C. (D) 177 °C.

24.8 Riordino delle idee sulla seconda legge

9. Un emulo di Archimede Pitagorico sostiene di aver inventato quattro motori termici, tutti operanti tra le temperature di 400 K e 300 K. Eccone i dati tecnici riferiti a un ciclo:

	Q_1	Q_2	$\lvert L\rvert$
Motore 1	200 J	−175 J	40 J
Motore 2	500 J	−200 J	400 J
Motore 3	600 J	−200 J	400 J
Motore 4	100 J	− 90 J	10 J

(a) Quali motori violano la prima legge della termodinamica?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(b) Quali motori violano la seconda legge della termodinamica?

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

24.9 Aspetto statistico dell'entropia

10. Si devono suddividere 10 particelle in due recipienti.

(a) La configurazione avente 3 particelle da una parte e 7 dall'altra quanti microstati comprende?

(A) 120. (B) 30 240.
(C) 3 628 800. (D) $6{,}3 \cdot 10^9$.

(b) Quante configurazioni sono possibili?

(A) 1. (B) 11.
(C) 120. (D) 1024.
(E) 3 628 800.

(c) Quanto microstati comprende l'intero sistema?

(A) 1. (B) 11.
(C) 120. (D) 1024.
(E) 3 628 800.

(d) Quali configurazioni hanno il massimo numero di microstati?

(A) 0, X. (B) III, VII. (C) IV, VI. (D) V, V.

11. In una scatola si hanno sei molecole identiche e in un'altra ve ne sono altre due. I sistemi vengono rimescolati e alla fine si hanno quattro molecole per scatola. Qual è la variazione di entropia del processo?

(A) $k/2$. (B) $k \ln (5/2)$.
(C) $k \ln (4/3)$. (D) $k \ln 20$.

QUESITI

1. Fra i seguenti fenomeni ce n'è qualcuno reversibile? (a) Rompere una bottiglietta vuota; (b) preparare un cocktail; (c) caricare un orologio; (d) sciogliere un cubetto di ghiaccio in un bicchiere di tè freddo; (e) bruciare una catasta di legna; (f) perforare un pneumatico d'automobile; (g) riscaldare elettricamente un blocco metallico; (h) espandere isotermicamente un gas reale sollevando un pistone; (i) dare una mano a Schubert terminando l'*Incompiuta*; (j) scrivere questo libro.

2. Esponete qualche esempio di processo irreversibile che avviene in natura.

3. Esistono processi naturali reversibili?

4. Dare una spiegazione qualitativa di come due superfici che strisciano aumentino la loro energia interna per opera delle forze d'attrito. Perché non si manifesta l'effetto opposto (energia interna che si traduce in moto)?

5. Il corpo umano è una macchina termica?

6. Non potremmo definire ugualmente bene il rendimento di un motore come $\eta = |L|/|Q_2|$, anziché $\eta = |L|/|Q_1|$? Perché non lo facciamo?

7. I rendimenti delle centrali elettronucleari sono minori di quelli delle centrali termoelettriche. Perché?

8. Si può convertire totalmente in calore una data quantità di energia meccanica? Se sì, se ne dia qualche esempio.

9. Un inventore suggerisce di scaldare una casa in questo modo. Una macchina tipo frigorifero sottrae calore alla Terra e la immette nella casa. Egli sostiene che l'energia termica prodotta superi l'energia meccanica spesa. Cosa ne dite?
10. Commentate questa affermazione. "Un motore converte moti meccanici disordinati in un moto meccanico ordinato."
11. Un motore che operi tra la temperatura superficiale del mare e la sua temperatura in profondità è concettualmente proponibile? È realizzabile in pratica?
12. Si può esprimere il lavoro svolto in una trasformazione irreversibile in termini di area sul diagramma p-V?
13. Se la macchina di Carnot lavora con qualsiasi fluido motore, entro certi limiti forse lo stesso si può dire dei motori reali. Perché dunque ci impegnamo tanto a ricercare combustibili adatti, come carbone, benzina e sostanze fissili, se poi, magari, potrebbero andar bene anche i sassi?
14. In che condizioni un motore ideale può ottenere un rendimento del 100 %?
15. Che fattori limitano il rendimento di una macchina reale?
16. Desiderate aumentare il più possibile il rendimento di un motore di Carnot. Avete la possibilità sia di aumentare T_1 di una certa quantità tenendo costante T_2, sia di diminuire T_2 della medesima quantità tenendo costante T_1. Quale scelta vi conviene?
17. Spiegate perché si può scaldare un locale tenendo aperta la porta del forno, ma non si può raffreddarlo tenendo aperta la porta del frigorifero.
18. Perché il consumo di un'automobile è leggermente maggiore d'inverno che d'estate?
19. Periodicamente compare un inventore che annuncia di aver perfezionato un dispositivo che genera lavoro consumando poco o punto combustibile. Qual è la vostra reazione in questi casi? (a) L'inventore ha probabilmente ragione. (b) L'inventore ha sbagliato le misure. (c) L'inventore è un impostore. Ritenete che questi casi vadano esaminati con cura da un comitato di scienziati e ingegneri? Sarebbero giustificati gli sforzi e l'impegno richiesti?
20. Come si è visto le macchine termiche riversano consistenti quantità di energia alle loro sorgenti fredde. È un peccato buttare via tanta energia. Perché non utilizzare questo calore come sorgente calda per un'altra macchina termica?
21. Ideate esempi in cui l'entropia di un sistema diminuisce e spiegate perché in quei casi non si viola la seconda legge della termodinamica.
22. Gli esseri viventi violano la seconda legge della termodinamica? Per esempio, un pulcino che prende forma da un uovo costituisce un sistema via via più organizzato. Ma aumentare l'entropia significa aumentare il disordine e la disorganizzazione. Questo significa che l'entropia di un pulcino davvero diminuisce durante la crescita?
23. Due contenitori di gas a temperature diverse sono isolati dall'ambiente esterno e separati tra loro mediante un diaframma che consente lo scambio termico. Per far sì che l'entropia diminuisca, cosa dovrebbe succedere? E per far aumentare l'entropia? Cosa in realtà è più probabile che succeda?
24. Nei moti meccanici puri vi è variazione di entropia?
25. Dimostrare che, convertendo lavoro in calore per effetto dell'attrito tra due superfici striscianti, l'entropia totale aumenta.
26. Dal Sole alla Terra fluisce energia termica. Dimostrare che l'entropia del sistema Sole-Terra aumenta a causa di questo trasferimento.
27. È vero che l'energia termica dell'Universo diventa sempre meno disponibile a trasferimenti utili di energia?
28. Consideriamo una scatola contenente pochissime molecole – diciamo cinque. Potrebbe capitare di tanto in tanto che esse si vengano a trovare tutte simultaneamente nella metà di sinistra, lasciando la parte destra completamente vuota. Si tratta del processo inverso a quello di libera espansione, che già abbiamo dichiarato essere *irreversibile*. Che spiegazione ne date?
29. Un elastico diventa un po' più caldo dell'ambiente subito dopo che lo si è allungato repentinamente; viceversa succede quando di colpo lo si lascia contrarre. Un elastico teso sotto l'effetto di un carico, se riscaldato si contrae. Dare spiegazione di questi fenomeni sapendo che l'elastico è composto di atomi legati in lunghe catene di molecole intrecciate trasversalmente tra di loro, che hanno orientazione grossolanamente casuale.
30. Mescolando un mazzo di 52 carte da gioco fino a raggiungere una certa disposizione, che effetti si producono sull'entropia del sistema? È appropriato applicare il concetto di entropia in questo caso? In caso affermativo, si spieghi come sarebbe possibile ottenere un effetto di raffreddamento eseguendo l'operazione adiabaticamente.
31. Commentate la seguente affermazione di Panofsky e Phillips: "Dal punto di vista della fisica formale, esiste una sola grandezza asimmetrica rispetto al tempo: l'entropia. Sarebbe dunque ragionevole assumere la seconda legge della termodinamica come metodo per stabilire il verso del tempo indipendentemente da qualsiasi sistema di riferimento; potremmo per esempio scegliere come positivo il verso in cui si ha statisticamente crescita di disordine o di entropia." Si veda D. Layzer, *La freccia del tempo*, «Le Scienze», apr. 1976, p. 26.
32. Si spieghi questa affermazione: "I raggi cosmici continuano a *diminuire* l'entropia della Terra laddove cadono." Perché non si tratta di una contraddizione della seconda legge?
33. Quando accatastiamo delle carte da gioco o sistemiamo i mattoni per costruire una casa aumentiamo l'ordine fisico delle cose. È forse una violazione dalla seconda legge della termodinamica?
34. La termodinamica che conosciamo sulla Terra, notoriamente applicabile a corpi circoscritti e isolati, vale anche per l'intero Universo? L'Universo è dunque circoscritto? E da che cosa è isolato?
35. La temperatura e la pressione sono esempi di grandezze *intensive* di un sistema, per cui i loro valori sono indipendenti dalle dimensioni del sistema stesso. L'entropia invece, al pari dell'energia interna, è una grandezza *estensiva*, cioè di valore proporzionale alla sua estensione. Se ne discuta.
36. La prima e la seconda legge della termodinamica sono state parafrasate nel seguente modo: (1) Non si può vincere. (2) Non si può nemmeno pareggiare. Si spieghi il senso di queste inconsuete formulazioni.

 ISBN 88-408-1254-7

ESERCIZI

24.1 Processi a senso unico

24.2 Definizione di variazione entropica

1. Un gas ideale compie un'espansione isoterma reversibile alla temperatura di 132 °C. L'entropia del gas aumenta di 46,2 J/K. Quanto calore è stato assorbito?
2. Si supponga che la variazione d'entropia subita dal sistema per passare dal punto *a* al punto *b* della Figura 24.18 attraverso il percorso 1 sia di +0,60 J/K. Qual è la variazione entropica per passare (a) da *a* a *b* attraverso il percorso 2 e (b) da *b* ad *a* sempre per il percorso 2?

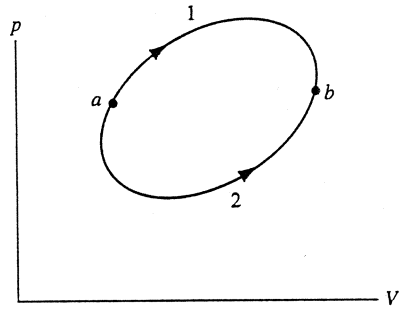


FIGURA 24.18 Esercizio 2.

3. Calcolare per il ciclo di Carnot rappresentato in Figura 24.19 (a) il calore assorbito e (b) il lavoro svolto dal sistema.

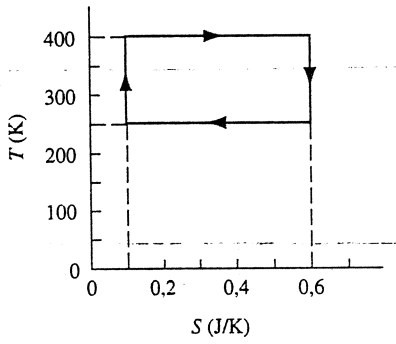


FIGURA 24.19 Esercizio 3.

4. Quattro moli di un gas ideale subiscono espansione dal volume V_1 al volume $V_2 = 3{,}45V_1$. Se l'espansione è isoterma a una temperatura $T = 410$ K, trovate (a) il lavoro compiuto dal gas che si espande e (b) la variazione di entropia. (c) Se l'espansione anziché isoterma è adiabatica reversibile, qual è la variazione di entropia?
5. Trovare (a) l'energia termica assorbita e (b) la variazione di entropia di un blocco di rame, avente massa di 1,22 kg, al crescere della temperatura da 25,0 °C a 105 °C in una trasformazione reversibile.
6. Trasferendo calore dall'acqua senza agitarla alla temperatura di 0 °C e alla pressione atmosferica, se ne provoca il congelamento. Si supponga invece di riuscire a raffreddarla alla temperatura di −5,0 °C prima che cominci a formarsi il ghiaccio. Si calcoli la variazione entropica connessa con il rapido congelamento di 1,0 g di acqua che ne consegue.

24.3 Variazioni entropiche per processi irreversibili

7. Un gas ideale compie un'espansione isoterma reversibile alla temperatura di 77 °C, aumentando il suo volume da 1,3 L a 3,4 L. La variazione di entropia del gas è 24 J/K. Quante sono le moli di gas presenti?
8. Si supponga che una data quantità di calore, 260 J, venga trasferita per conduzione da un serbatoio termico alla temperatura di 400 K ad altri serbatoi termici di temperature (a) 100 K, (b) 200 K, (c) 300 K e (d) 360 K. Si calcoli la variazione entropica per ciascuno dei casi nella sequenza indicata e se ne discuta la tendenza.
9. Una barra di ottone è in contatto con un serbatoio termico alla temperatura di 130 °C da un estremo e con altro serbatoio alla temperatura di 24,0 °C dall'altro. (a) Calcolare la variazione d'entropia conseguente al passaggio di 1200 J di calore attraverso la barra. (b) L'entropia della barra cambia durante il processo?

24.4 Seconda legge della termodinamica

10. Un blocco di rame di massa 50,0 g a una temperatura di 400 K viene posto in un contenitore isolante assieme a un blocco di piombo di massa 100 g avente temperatura di 200 K. (a) Qual è la temperatura di equilibrio di questo sistema costituito dai due blocchi? (b) Qual è la variazione di energia interna del sistema dei due blocchi quando passa dalla condizione iniziale alla condizione di equilibrio? (c) Qual è la variazione di entropia del sistema dei due blocchi? (Si veda la Tabella 23.2.)
11. Una miscela di 1,78 kg di acqua e 262 g di ghiaccio in equilibrio alla temperatura di 0 °C viene portata, durante un processo reversibile, a uno stato di equilibrio finale dove il rapporto delle masse acqua-ghiaccio è 1/1 alla temperatura di 0 °C. (a) Calcolate la variazione di entropia del sistema durante questo processo. (b) Il sistema viene quindi riportato al primo stato di equilibrio, ma in modo irreversibile (utilizzando un becco Bunsen, per esempio). Calcolate la variazione di entropia del sistema durante questo processo. (c) La vostra risposta è in accordo con la seconda legge della termodinamica?
12. In un esperimento, 196 g di alluminio alla temperatura di 107 °C vengono mischiati con 52,3 g di acqua alla temperatura di 18,6 °C senza altri scambi di calore. (a) Calcolate la temperatura di equilibrio. Trovate la variazione di entropia (b) dell'alluminio, (c) dell'acqua e (d) del sistema alluminio-acqua. (*Suggerimento*: vedere il Problema svolto 24.3.)

24.5 Entropia e rendimento dei motori termici

13. Una macchina termica di Carnot assorbe 52,4 kJ di calore e ne scarica 36,2 kJ ogni ciclo. Calcolate (a) il rendimento e (b) il lavoro compiuto per ogni ciclo.

14. Il motore di un'automobile fornisce lavoro in misura di 8,18 kJ ad ogni ciclo. (a) Prima di una messa a punto il rendimento è del 25,0 %. Calcolate il calore assorbito dal combustibile e quello scaricato in atmosfera ad ogni ciclo. (b) Dopo una messa a punto il rendimento è diventato del 31,0 %. Quali sono i nuovi valori delle quantità calcolate sopra?

15. Calcolare il rendimento di una centrale termonucleare che consuma 382 tonnellate di carbone ogni ora per generare una potenza elettrica di 755 MW. Il calore di combustione del carbone è di 28,0 MJ/kg.

16. Un motore *A* rispetto a un motore *B* ad ogni ciclo fornisce il quintuplo di lavoro, assorbe il triplo di calore e ne scarica il doppio. Determinare il rendimento dei due motori.

17. In un ciclo di Carnot l'espansione isoterma del gas ideale avviene alla temperatura di 412 K e la compressione isoterma alla temperatura di 297 K. Durante l'espansione il gas assorbe 2090 J di calore. Determinare (a) il lavoro svolto dal gas durante l'espansione isoterma. (b) il calore ceduto dal gas durante la compressione isoterma e (c) il lavoro compiuto sul gas durante la compressione isoterma.

18. In un ciclo di Carnot si ha un rendimento del 22 %. Le sue due sorgenti a temperatura costante differiscono di 75 °C. Trovare le due temperature.

19. Dimostrare che per il ciclo di Carnot illustrato nella Figura 24.8 il lavoro svolto dal gas durante la trasformazione *BC* ha lo stesso valore assoluto di quello svolto sul gas nella trasformazione *DA*.

20. (a) In una macchina termica di Carnot a due stadi, durante il primo stadio viene assorbita una quantità di calore $|Q_1|$ a una temperatura T_1, viene eseguito il lavoro $|L_1|$ e viene espulsa una quantità di calore $|Q_2|$ a una temperatura più bassa T_2. Nel secondo stadio viene assorbito il calore ceduto durante il primo, viene eseguito il lavoro $|L_2|$, e viene espulsa una quantità di calore $|Q_3|$ a una temperatura ancora inferiore T_3. Dimostrate che il rendimento della macchina termica combinata è $(T_1 - T_3)/T_1$. (b) Una turbina combinata mercurio-vapore acqueo nel primo stadio assorbe calore dai vapori saturi di mercurio alla temperatura di 469 °C e scarica calore al vapore acqueo con temperatura di 238 °C. Il secondo stadio riceve il vapore a questa temperatura e lo scarica alla temperatura di 37,8 °C. Calcolare il massimo rendimento teorico della combinazione.

21. In una locomotiva a vapore, il vapore entra nei cilindri alla pressione di 16,0 bar, si espande adiabaticamente aumentando il volume di 5,60 volte e infine viene scaricato in atmosfera. Calcolare (a) la pressione del vapore dopo l'espansione e (b) il massimo rendimento teorico del ciclo.

22. Una mole di un gas ideale monoatomico viene utilizzata come fluido di lavoro di una macchina termica che percorre il ciclo mostrato nella Figura 24.20. Supponete $p_1 = 2p_0$, $V_1 = 2V_0$, $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Pa e $V_0 = 0{,}0225$ m^3. Calcolate (a) il lavoro compiuto in ogni ciclo, (b) il calore fornito a ogni ciclo durante la trasformazione *abc* e (c) il rendimento del ciclo. (d) Qual è il rendimento di una macchina termica di Carnot funzionante tra la temperatura più alta e quella più bassa che si manifestano nel ciclo? Com'è questo rendimento rispetto a quello calcolato in (c)?

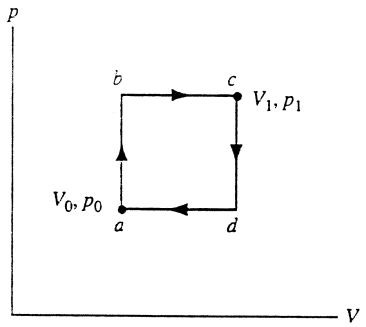


FIGURA 24.20 Esercizio 22.

24.6 Entropia e rendimento dei frigoriferi

23. Un congelatore per formare del ghiaccio estrae 185 kJ di calore alla temperatura di −12,0 °C. Il ciclo ha un'efficienza $\eta = 5{,}70$ e la temperatura ambiente è di 26,0 °C. (a) Quanto calore cede al locale? (b) Quanto lavoro assorbe?

24. Un frigorifero di Carnot compie 153 J di lavoro per rimuovere 568 J di calore dal suo compartimento freddo. (a) Qual è l'efficienza del frigorifero? (b) Quanto calore viene rilasciato all'ambiente della cucina ad ogni ciclo?

25. Quanto lavoro bisogna compiere mediante un frigorifero di Carnot per estrarre 10,0 J di calore (a) da una sorgente alla temperatura di 7 °C e trasferirlo a un'altra alla temperatura di 27 °C. Ripetere per le coppie di temperature (b) −73 °C e 27 °C; (c) −173 °C e 27 °C; (d) −223 °C e 27 °C.

26. Un apparecchio per la liquefazione dell'elio si trova in laboratorio alla temperatura di 296 K. L'elio liquido nell'apparecchio ha la temperatura di 4,0 K. Volendo sottrarre 150 mJ di calore all'elio, calcolare la minima teorica quantità di calore che occorre cedere all'ambiente del laboratorio.

27. Un condizionatore d'aria ideale, che funziona come un frigorifero di Carnot, assorbe calore da una stanza alla temperatura di 25 °C e lo trasferisce al suo esterno, che si trova alla temperatura di 32 °C. Quanti joule di calore vengono sottratti alla stanza per ogni joule di energia elettrica richiesto dal motore della macchina?

28. Un inventore annuncia di aver creato una pompa di calore che estrae calore dall'acqua di un lago alla temperatura di 3,0 °C e fornisce una potenza termica di 20 kW alla temperatura di 35 °C per il riscaldamento di un edificio, assorbendo solo 1,9 kW di energia elettrica. Come giudicate l'annuncio?

29. (a) Una macchina termica di Carnot opera tra le temperature di 322 K e 258 K. Quanto lavoro fornisce se assorbe 568 J di calore dalla sorgente calda? (b) Facendo percorrere alla macchina il ciclo al contrario, essa funge da frigorifero. Operando tra le medesime temperature, quanto lavoro richiede per estrarre 1230 J di calore dalla sorgente fredda?

30. Si usa una pompa di calore per riscaldare un edificio. La temperatura esterna è −5,0 °C e la temperatura all'interno dell'edificio deve essere mantenuta a 22 °C. L'efficienza del ciclo è 3,8 e la pompa di calore libera ogni ora 7,6 MJ di energia termica nell'edificio. Assumendo che si tratti di un ciclo frigorifero di Carnot, qual è la potenza meccanica di alimentazione per far funzionare la pompa di calore?

 ISBN 88-408-1254-7

31. In un frigorifero lo scambiatore di calore del comparto cibi è alla temperatura di −13 °C mentre il gas compresso nel condensatore esterno ha una temperatura di 25 °C. Trovare l'efficienza di una macchina frigorigena di Carnot operante tra queste due temperature.
32. Il motore di un frigorifero ha una potenza di 210 W. Se il compartimento del freddo è alla temperatura di −3.0 °C e l'aria esterna è alla temperatura di 26 °C, supponendo che l'efficienza sia l'80 % di quella del frigorifero di Carnot, qual è la quantità massima di calore che può essere estratta dal compartimento cibi in 15 min?
33. Una macchina termica di Carnot opera tra le temperature T_1 e T_2. Essa fa funzionare un frigorifero di Carnot che lavora tra due temperature diverse T_3 e T_4 (Figura 24.21). Trovate il rapporto $|Q_3|/|Q_1|$ in funzione delle quattro temperature.

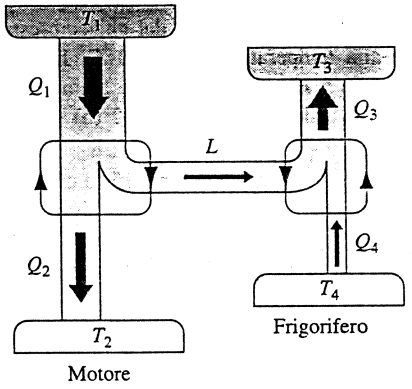


FIGURA 24.21 Esercizio 33.

24.7 Rendimenti delle macchine reali

24.8 Riordino delle idee sulla seconda legge

24.9 Aspetto statistico dell'entropia

34. (a) Ricavare l'approssimazione di Stirling (Equazione 24.21) sostituendo un integrale alla somma nell'espressione

$$\ln N! = \sum_{x=1}^{N} \ln x \approx \int_1^N \ln x\,dx .$$

(b) Per quali valori di N l'approssimazione di Stirling presenta un errore inferiore a 1 %, 0,1 %, $1 \cdot 10^{-6}$?

35. Consideriamo un recipiente diviso in due parti separate. (a) Inizialmente N molecole di un gas si trovano da una parte, mentre l'altra risulta vuota. Si calcoli la molteplicità di questa configurazione. (b) Una volta perforato il setto di separazione, il gas riempie uniformemente tutt'e due le parti e quindi $N/2$ molecole si trovano da ciascuna parte. Trovare la molteplicità dello stato finale. (c) Dimostrare che la variazione entropica è $\Delta S = kN \ln 2$. (d) Si confronti questo risultato con quello del Problema svolto 24.4 riguardante l'entropia nel processo di libera espansione, e si giustifichino le somiglianze tra i due risultati.

PROBLEMI

1. A temperature bassissime il calore specifico molare di molti solidi è approssimativamente proporzionale a T^3; vale a dire che $C_V = AT^3$ ove A dipende dalla sostanza. Per l'alluminio $A = 3{,}15 \cdot 10^{-5}$ J/(mol · K^4). Trovare la variazione entropica di 4,8 mol di alluminio nell'innalzamento di temperatura da 5,0 K a 10 K.
2. Un corpo di capacità termica costante C viene riscaldato da una temperatura iniziale T_i a una temperatura finale T_f. (a) Si rappresenti il processo su un grafico di C/T in funzione di T e si dimostri graficamente che la variazione totale d'entropia ΔS (corpo + serbatoio) è positiva; (b) si dimostri che l'uso di serbatoi a temperature intermedie consentirebbe di condurre il processo con ΔS piccole quanto si vuole.
3. Una mole di un gas ideale monoatomico percorre il ciclo mostrato nella Figura 24.22. (a) Quanto lavoro si compie sul gas in espansione da a a c lungo il percorso abc? (b) Calcolare le variazioni di energia interna e di entropia nella trasformazione tra b e c. (c) Calcolare le variazioni di energia interna e di entropia in un ciclo completo. Si esprimano le risposte in funzione della pressione p_0 e del volume V_0 posseduti nel punto a del diagramma.
4. A una mole di gas biatomico ideale, con molecole rotanti ma non oscillanti, viene fatto percorrere il ciclo mostrato sul diagramma p-V nella Figura 24.23, ove $V_2 = 3V_1$. Determinate, in funzione di p_1, V_1, T_1 ed R: (a) p_2, p_3, T_3 e (b) L, Q, ΔE_{int} e ΔS per tutti i tre processi.

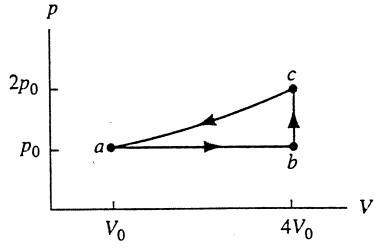


FIGURA 24.22 Problema 3.

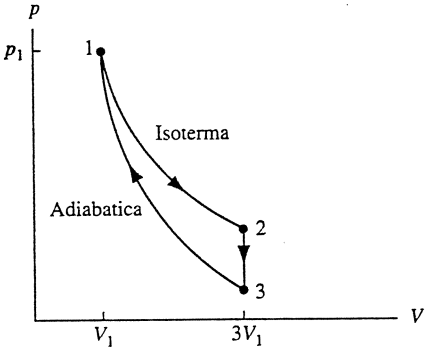


FIGURA 24.23 Problema 4.

5. Una mole di un gas monoatomico ideale passa da uno stato iniziale di pressione p_0 e volume V_0 a uno stato finale di pressione e volume doppi con due processi differenti. (I) Si espande il gas isotermicamente fino a raddoppiarne il volume e poi lo si comprime a volume costante fino allo stato finale. (II) Si comprime isotermicamente il gas fino a raddoppiarne la pressione e poi lo si espande isobaricamente fino al suo stato finale. Disegnate i due percorsi su un diagramma p-V. Per ciascuna trasformazione calcolate in funzione di p_0 e V_0 (a) il calore assorbito dal gas in ogni parte del processo; (b) il lavoro svolto sul gas in ogni parte del processo; (c) la variazione di energia interna del gas tra gli stati finale e iniziale; (d) la variazione entropica tra gli stati finale e iniziale.

6. Un cubetto di ghiaccio di massa 12,6 g alla temperatura di $-10{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$ viene immerso in un lago la cui temperatura è di $+15{,}0\,^{\circ}\mathrm{C}$. Calcolate la variazione di entropia subita dal sistema quando il cubetto di ghiaccio raggiunge l'equilibrio termico con il lago. (*Suggerimento*: il cubetto di ghiaccio influenzerà la temperatura del lago?)

7. Un sistema consiste di due corpi posti a contatto termico. Il corpo 1 ha massa m_1, calore specifico c_1 e temperatura iniziale è $T_{1,i}$. Il corpo 2 ha massa m_2, calore specifico c_2 e temperatura iniziale è $T_{2,i} < T_{1,i}$. Mentre il corpo 1 lentamente si raffredda, il corpo 2 pian piano si riscalda. (a) Trovare un'espressione per la temperatura T_2 del corpo 2 in funzione della temperatura T_1 del corpo 1. (b) Trovare la variazione entropica ΔS del sistema in funzione di T_1. (c) Dimostrare che ΔS raggiunge un massimo quando i due corpi sono alla stessa temperatura.

8. A due moli di un gas ideale monoatomico viene fatto percorrere il ciclo mostrato nella Figura 24.24. Il processo bc è un'espansione adiabatica reversibile; $p_b = 10{,}5$ bar, $V_b = 1{,}22\ \mathrm{m}^3$ e $V_c = 9{,}13\ \mathrm{m}^3$. Si calcoli per ogni ciclo (a) il calore fornito al gas, (b) il calore restituito dal gas, (c) il lavoro totale compiuto dal gas e (d) il rendimento.

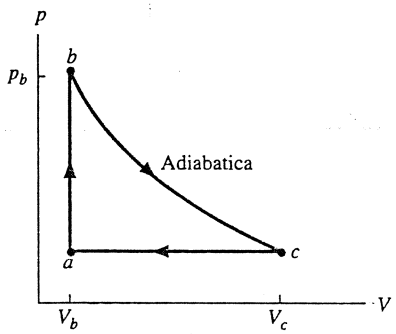


FIGURA 24.24 Problema 8.

9. Una mole di gas monoatomico ideale a volume iniziale di 10 L e temperatura iniziale di 300 K viene scaldata a volume costante alla temperatura di 600 K, poi espansa isotermicamente alla sua pressione iniziale e infine compressa isobaricamente fino al suo stato iniziale. (a) Calcolare il calore assorbito in un ciclo. (b) Qual è il lavoro netto svolto dal gas durante un ciclo? (c) Qual è il rendimento del ciclo?

10. Una macchina termica a combustione interna di benzina può essere approssimata dal ciclo mostrato nella Figura 24.25. Supponete che la miscela aria-benzina sia un gas ideale e utilizzate un rapporto di compressione di 4/1 ($V_d = 4V_a$). Supponete che $p_b = 3p_a$. (a) Determinate la pressione e la temperatura in ognuno dei punti di vertice del diagramma p-V in funzione di p_a e T_a. (b) Qual è il rendimento del ciclo?

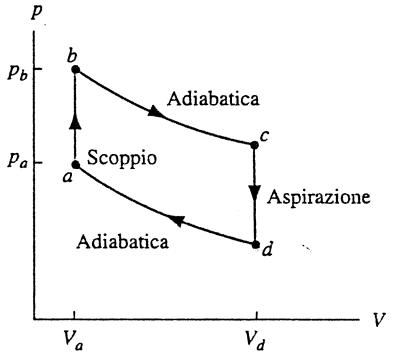


FIGURA 24.25 Problema 10.

11. (a) Riportate accuratamente su diagramma p-V il percorso di un ciclo di Carnot per 1,00 mol di gas ideale. Nel punto A (Figura 24.8) sia $p = 1{,}01$ bar e $T = 300$ K, mentre nel punto B sia $P = 0{,}505$ bar e $T = 300$ K. La temperatura T_2 sia di 100 K. Si assuma $\gamma = 1{,}67$. (b) Calcolare graficamente il lavoro compiuto in questo ciclo. (c) Confrontarlo col valore calcolato analiticamente.

APPENDICE A

SISTEMA INTERNAZIONALE DI UNITÀ (SI)*

1. Unità SI fondamentali

Grandezza	Nome	Simbolo	Definizione
lunghezza	metro	m	"...la lunghezza è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299792458 di secondo" (1983)
massa	kilogrammo	kg	"...questo prototipo (un particolare cilindro di platino-irido) potrà d'ora in poi essere considerato l'unità di massa" (1901)
tempo	secondo	s	"...la durata di 9 192 631,770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133" (1967)
corrente elettrica	ampere	A	"...quella corrente costante che, passando in due conduttori paralleli rettilinei infinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a 1 m di distanza nel vuoto, produce tra i due conduttori una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ N per metro di lunghezza" (1948)
temperatura termodinamica	kelvin	K	"...la frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua" (1967)
quantità di sostanza	mole	mol	"...la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0,012 kg di carbonio 12" (1971)
intensità luminosa	candela	cd	"...l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è di (1/683) W/sr" (1979)

* Adattato da Guide for the Use of The International System of Units (SI), National Bureau of Standards Special Publication 811, edizione 1995. La definizione di queste unità fondamentali è stata adottata dalla Conferenza Generale Pesi e Misure, un ente internazionale, alle date indicate. In questo testo non si fa uso della candela.

 ISBN 00-000-0000-0

2. Alcune unità derivate SI

Grandezza	Nome	Simbolo	Unità equivalenti
superficie	metro quadrato	m^2	
volume	metro cubo	m^3	
frequenza	hertz	Hz	s^{-1}
massa volumica[a]	kilogrammo al metro cubo	kg/m^3	
velocità	metro al secondo	m/s	
velocità angolare	radiante al secondo	rad/s	
accelerazione	metro al secondo quadrato	m/s^2	
accelerazione angolare	radiante al secondo quadrato	rad/s^2	
forza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
pressione	pascal	Pa	N/m^2
energia, lavoro, calore	joule	J	$N \cdot m$
potenza, flusso radiante	watt	W	J/s
quantità di elettricità, carica elettrica	coulomb	C	$A \cdot s$
potenziale elettrico, differenza di potenziale, forza elettromotrice	volt	V	$N \cdot m/C$
campo elettrico	volt al metro	V/m	N/C
capacità elettrica	farad	F	$A \cdot s/V$
resistenza elettrica	ohm	Ω	V/A
flusso magnetico	weber	Wb	$V \cdot s$
induzione magnetica	tesla	T	Wb/m^2, $N/(A \cdot m)$
induttanza	henry	H	$V \cdot s/A$
entropia	joule al kelvin	J/K	
calore specifico	joule al kilogrammo per kelvin	$J/(kg \cdot K)$	
conducibilità termica	watt al metro per kelvin	$W/(m \cdot K)$	
intensità radiante	watt allo steradiante	W/sr	

[a] Precedentemente chiamata *densità*

3. Unità supplementari del SI

Grandezza	Nome	Simbolo
angolo	radiante	rad
angolo solido	steradiante	sr

APPENDICE *B*

ALCUNE COSTANTI FONDAMENTALI DELLA FISICA

Costante	Simboli	Valore usato nei calcoli	Valore migliore (1998)	
			Valore[a]	Incertezza[b]
Velocità della luce nel vuoto	c	$3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s	2,99792458	esatto
Carica elementare	e	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C	1,602176462	0,039
Maasa a riposo dell'elettrone	m_e	$9{,}11 \cdot 10^{31}$ kg	9,10938188	0,079
Costante dielettrica	ϵ_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m	8,85418781762	esatto
Costante di permeabilità magnetica	μ_0	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$ H/m	1,25663706143	esatto
Massa a riposo dell'elettrone [c]	m_e	$5{,}49 \cdot 10^{-4}$ u	5,485799110	0,0021
Massa a riposo del neutrone [c]	m_n	1,0087 u	1,00866491578	0,00054
Massa a riposo dell'atomo di idrogeno [c]	$m(^1\mathrm{H})$	1,0078 u	1,0078250316	0,0005
Massa a riposo dell'atomo di deuterio [c]	$m(^2\mathrm{H})$	2,0141 u	2,0141017779	0,0005
Massa a riposo dell'atomo di elio [c]	$m(^4\mathrm{He})$	4,0026 u	4,0026032	0,067
Rapporto tra carica e massa dell'elettrone	e/m_e	$1{,}76 \cdot 10^{11}$ C/kg	1,758820174	0,040
Massa a riposo del protone	m_p	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	1,67262158	0,079
Rapporto tra le masse del protone e dell'elettrone	m_p/m_e	1840	1836,1526675	0,0021
Massa a riposo del neutrone	m_n	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg	1,67492716	0,079
Massa a riposo del muone	m_μ	$1{,}88 \cdot 10^{-28}$ kg	1,883532	0,61
Costante di Plank	h	$6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s	6,62606876	0,078
Lunghezza d'onda Compton dell'elettrone	λ_e	$2{,}43 \cdot 10^{-12}$ m	2,426310215	0,0073
Costante molare universale dei gas	R	8,31 J/(mol · K)	8,314472	1,7
Numero di Avogadro	N_A	$6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	6,02214191	0,079
Costante di Boltzmann	k	$1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K	1,3806503	1,7
Volume molare di un gas ideale a STP[d]	V_m	$2{,}24 \cdot 10^{-2}$ m^3/mol	2,2413996	1,7
Costante di Faraday	F	$9{,}65 \cdot 10^{4}$ C/mol	9,64853415	0,040
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m^2 · K^4)	5,670400	7,0
Costante di Rydberg	R_∞	$1{,}10 \cdot 10^{7}$ m^{-1}	1,0973731568549	0,0000076
Costante gravitazionale	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3/(s^2 · kg)	6,673	1500
Raggio di Bohr	a_0	$5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m	5,291772083	0,0037
Momento magnetico dell'elettrone	μ_e	$9{,}28 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,28476362	0,040
Momento magnetico del protone	μ_p	$1{,}41 \cdot 10^{-26}$ J/T	1,410606633	0,041
Magnetone di Bohr	μ_B	$9{,}27 \cdot 10^{-24}$ J/T	9,27400899	0,040
Magnetone nucleare	μ_N	$5{,}05 \cdot 10^{-27}$ J/T	5,05078317	0,040

a Stesse unità e potenza di dieci del valore usato nei calcoli
b Parti per milione
c Masse espresse in unità di massa atomiche, dove 1 u = $1{,}6605402 \cdot 10^{-27}$ kg
d STP indica temperatura e pressione standard ($T = 0{,}00$ °C e $p = 101$ kPa)

APPENDICE C

ALCUNI DATI ASTRONOMICI

Il Sole, la Terra e la Luna

Proprietà	Sole[a]	Terra	Luna
Massa (kg)	$1{,}99 \cdot 10^{30}$	$5{,}98 \cdot 10^{24}$	$7{,}36 \cdot 10^{22}$
Raggio medio (m)	$6{,}96 \cdot 10^{8}$	$6{,}37 \cdot 10^{6}$	$1{,}74 \cdot 10^{6}$
Massa volumica media (kg/m^3)	1410	5520	3340
Accelerazione gravitazionale alla superficie (m/s^2)	274	9,81	1,67
Velocità di fuga (km/s)	618	11,2	2,38
Periodo di rotazione[c] (d)	26 – 37[b]	0,997	27,3
Raggio medio dell'orbita (km)	$2{,}6 \cdot 10^{17}$[d]	$1{,}50 \cdot 10^{8}$[e]	$3{,}82 \cdot 10^{5}$[f]
Periodo di rivoluzione	$2{,}4 \cdot 10^{8}$ a[d]	1,00 a[e]	27,3 d[f]

[a] Il Sole irradia energia con una potenza di $3.90 \cdot 10^{26}$ W; l'intensità solare extra-atmosferica alla distanza media della Terra è, per incidenza normale, di 1380 W/m^2.
[b] Il Sole, una palla di gas, non ruota come un corpo rigido. Il suo periodo di rivoluzione varia tra i 26 giorni all'equatore e i 37 giorni ai poli.
[c] Misurato rispetto alle stelle fisse.
[d] Rispetto al centro della galassia.
[e] Intorno al Sole.
[f] Intorno alla Terra.

Alcune proprietà dei pianeti

	Mercurio	Venere	Terra	Marte	Giove	Saturno	Urano	Nettuno	Plutone
Distanza media dal Sole (10^6 km)	57,9	108	150	228	778	1430	2870	4500	5900
Periodo di rivoluzione (anni)	0,241	0,615	1,00	1,88	11,9	29,5	84,0	165	248
Periodo di rotazione[a] (giorni)	58,7	243[b]	0,997	1,03	0,409	0,426	0,451[b]	0,658	6,39
Velocità orbitale (km/s)	47,9	35,0	29,8	24,1	13,1	9,64	6,81	5,43	4,74
Inclinazione dell'asse rispetto all'orbita	< 28	≈ 3°	23,4°	25,0°	3,08°	26,7°	97,9°	29,6°	57,5°
Inclinazione dell'orbita rispetto a quella terrestre	7,00°	3,39°	–	1,85°	1,30°	2,49°	0,77°	1,77°	17,2°
Eccentricità dell'orbita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,0472	0,0086	0,250
Diametro equatoriale (km)	4 880	12 100	12 800	6 790	143 000	120 000	51 800	49 500	2 300
Massa (Terra = 1)	0,0558	0,815	1,000	0,107	318	95,1	14,5	17,2	0,002
Massa volumica media (g/cm^3)	5,60	5,20	5,52	3,95	1,31	0,704	1,21	1,67	2,03
Accelerazione gravitazionale alla superficie[c] (m/s^2)	3,78	8,60	9,78	3,72	22,9	9,05	7,77	11,0	0,03
Velocità di fuga (km/s)	4,3	10,3	11,2	5,0	59,5	35,6	21,2	23,6	1.3
Satelliti noti	0	0	1	2	16 + anelli	18 + anelli	15 + anelli	8 + anelli	1

[a] Misurato rispetto alle stelle fisse.
[b] Il senso di rotazione è opposto a quello del moto orbitale.
[c] Misurato all'equatore del pianeta.

APPENDICE *D*

PROPRIETÀ DEGLI ELEMENTI

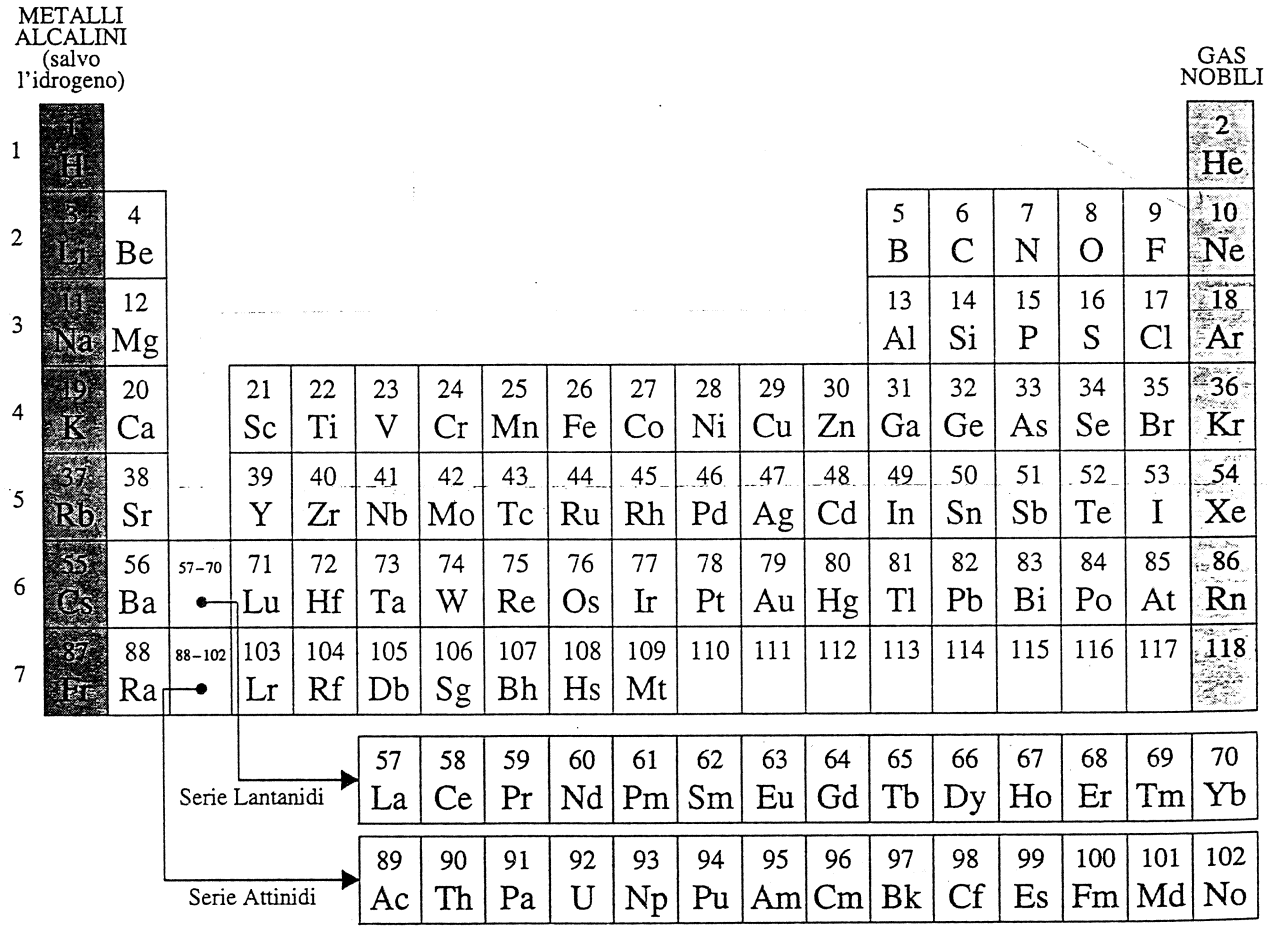
	Simbolo	Numero atomico *Z*	Massa molare (g/mol)	Massa volumica (g/cm^3) a 20 °C	Punto di fusione (°C)	Punto di ebollizione (°C)	Calore specifico J/(g · K) a 25 °C
Afnio	Hf	72	178,49	13,31	2233	4603	0,144
Alluminio	Al	13	26,9815	2,699	660	2519	0,897
Americio	Am	95	(243)	13,7	1176	2011	—
Antimonio	Sb	51	121,76	6,69	630,6	1587	0,205
Argento	Ag	47	107,68	10,49	961,8	2162	0,235
Argo o argon	Ar	18	39,948	$1{,}6626 \cdot 10^{-3}$	−189,3	−185,9	0,520
Arsenico	As	33	74,9216	5,72	817 (28 bar)	614 (subl.	0,329
Astato	At	85	(210)	—	302	337	—
Attinio	Ac	89	(227)	10,1 (calc.)	1051	3200	0,120
Azoto	N	7	14,0067	$1{,}1649 \cdot 10^{-3}$	−210,0	−195,8	1,04
Bario	Ba	56	137,33	3,594	727	1597	0,204
Berillio	Be	4	9,0122	1,848	1287	2471	1,83
Berkelio	Bk	97	(247)	14 (stima)	1050	—	—
Bismuto	Bi	83	208,980	9,75	271,4	1564	0,122
Bohrio	Bh	107	262,12	—	—	—	—
Boro	B	5	10,81	2,34	2075	4000	1,03
Bromo	Br	35	79,904	3,12 (liquido)	−7,2	58,8	0,226
Cadmio	Cd	48	112,41	8,65	321,1	767	0,232
Calcio	Ca	20	40,08	1,55	842	1484	0,647
Californio	Cf	98	(251)	—	900 (stima)	—	—
Carbonio	C	6	12,011	2,25	3550	—	0,709
Cerio	Ce	58	140,12	6,770	798	3424	0,192
Cesio	Cs	55	132,905	1,873	28.44	671	0,242
Cloro	Cl	17	35,453	$3{,}214 \cdot 10^{-3}$ (0 °C)	−101,5	−34,6	0,479
Cobalto	Co	27	58,9332	8,85	1495	2927	0,421
Cripton	Kr	36	83,80	$3{,}488 \cdot 10^{-3}$	−157,4	−153,2	0,248
Cromo	Cr	24	51,996	7,19	1907	2671	0,449
Curio	Cm	96	(247)	13,5 (calc.)	1345	—	—
Disprosio	Dy	66	162,50	8,55	1412	2567	0,170
Dubnio	Db	105	(262)	—	—	—	—
Einsteinio	Es	99	(252)	—	860 (stima)	—	—

 ISBN 88-408-1254-7

	Simbolo	Numero atomico Z	Massa molare (g/mol)	Massa volumica (g/cm^3) a 20 °C	Punto di fusione (°C)	Punto di ebollizione (°C)	Calore specifico J/(g · K) a 25 °C
Elio	He	2	4,0026	$0{,}1664 \cdot 10^{-3}$	–272,2	–268,9	5,19
Erbio	Er	68	167,26	9,07	1529	2868	0,168
Europio	Eu	63	151,96	5,244	822	1529	0,182
Fermio	Fm	100	(257)	—	1527	—	—
Ferro	Fe	26	55,845	7,87	1538	2861	0,449
Fluoro	F	9	18,9984	$1{,}696 \cdot 10^{-3}$ (0 °C)	–219,6	–188,1	0,824
Fosforo	P	15	30,9738	1,82	44,15	280,5	0,769
Francio	Fr	87	(223)	—	27	677	—
Gadolinio	Gd	64	157,25	7,90	1313	3273	0,236
Gallio	Ga	31	69,72	5,904	29,76	2204	0,371
Germanio	Ge	32	72,61	5,323	937,4	2830	0,322
Hassio	Hs	108	(269)	—	—	—	—
Idrogeno	H	1	1,00797	$0{,}08375 \cdot 10^{-3}$	–259,34	–252,87	14,3
Indio	In	49	114,82	7,31	156,6	2072	0,233
Iodio	I	53	126,9044	4,93	113,7	184,4	0,145
Iridio	Ir	77	192,2	22,4	2446	4428	0,131
Itterbio	Yb	70	173,04	6,966	819	1196	0,155
Ittrio	Y	39	88,905	4,469	1522	3345	0,298
Lantanio	La	57	138,91	6,145	918	3464	0,195
Laurenzio	Lr	103	(260)	—	—	—	—
Litio	Li	3	6,941	0,534	180,5	1342	3,58
Lutezio	Lu	71	174,97	9,84	1663	3402	0,154
Magnesio	Mg	12	24,305	1,74	650	1090	1,02
Manganese	Mn	25	54,9380	7,43	1244	2061	0,79
Meitnerio	Me	109	(268)	—	—	—	—
Mendelevio	Md	101	(258)	—	827	—	—
Mercurio	Hg	80	200,59	13,55	–38,83	356,7	0,140
Molibdeno	Mo	42	95,94	10,22	2623	4639	0,251
Neodimio	Nd	60	144,24	7,00	1021	3074	0,190
Neon	Ne	10	20,180	$0{,}8387 \cdot 10^{-3}$	–248,6	–246,0	1,03
Nettunio	Np	93	(237)	20,25	644	3902	1,26
Nichel	Ni	28	58,69	8,902	1455	2913	0,444
Niobio	Nb	41	92,906	8,57	2477	4744	0,265
Nobelio	No	102	(259)	—	—	—	—
Olmio	Ho	67	164,930	8,79	1474	2700	0,165
Oro	Au	79	196,967	19,3	1064,18	2856	0,129
Osmio	Os	76	190,2	22,57	3033	5012	0,130
Ossigeno	O	8	15,9994	$1{,}3318 \cdot 10^{-3}$	–218,8	–183,0	0,918
Palladio	Pd	46	106,4	12,02	1555	2963	0,246
Piombo	Pb	82	207,19	11,35	327,5	1749	0,129
Platino	Pt	78	195,08	21,45	1768	3825	0,133
Plutonio	Pu	94	(244)	19,84	640	3228	0,130
Polonio	Po	84	(209)	9,32	254	962	—
Potassio	K	19	39,098	0,86	63,28	759	0,757
Praseodimio	Pr	59	140,907	6,773	931	3520	0,193
Promezio	Pm	61	(145)	7,264	1042	3000 (stima)	—

APPENDICE *E*

TAVOLA PERIODICA DEGLI ELEMENTI*



*Il sistema periodico fu proposto, in una forma più semplice, dal chimico russo D.I. Mendeleev (1834-1907). Per questo motivo questa tavola è anche detta *tavola di Mendeleev*.

	Simbolo	Numero atomico Z	Massa molare (g/mol)	Massa volumica (g/cm^3) a 20 °C	Punto di fusione (°C)	Punto di ebollizione (°C)	Calore specifico J/(g · K) a 25 °C
Protoattinio	Pa	91	(231)	15,4 (calc.)	1572	—	—
Radio	Ra	88	(226)	5,0	700	1140	—
Radon	Rn	86	(222)	$9{,}96 \cdot 10^{-3}$ (0 °C)	–71	–61,7	0,094
Rame	Cu	29	63,54	8,96	1084,6	2562	0,385
Renio	Re	75	186,2	21,02	3186	5596	0,137
Rodio	Rh	45	102,905	12,41	1964	3695	0,243
Rubidio	Rb	37	85,47	1,53	39,31	688	0,363
Rutenio	Ru	44	101,07	12,41	2334	4150	0,238
Rutherfordio	Rf	104	(261)	—	—	—	—
Samario	Sm	62	150,35	7,52	1074	1794	0,197
Scandio	Sc	21	44,956	2,99	1541	2836	0,568
Seaborghio	Sg	106	(266)	—	—	—	—
Selenio	Se	34	78,96	4,79	221	685	0,321
Silicio	Si	14	28,086	2,33	1414	3265	0,705
Sodio	Na	11	22,9898	0,971	97,72	883	1,23
Stagno	Sn	50	118,71	7,31	231,93	2602	0,228
Stronzio	Sr	38	87,62	2,54	777	1382	0,301
Tallio	Tl	81	204,38	11,85	304	1473	0,129
Tantalio	Ta	73	180,948	16,6	3017	5458	0,140
Tecnezio	Tc	43	(98)	11,5 (calc.)	2157	4265	—
Tellurio	Te	52	127,60	6,24	449,5	988	0,202
Terbio	Tb	65	158,924	8,23	1356	3230	0,182
Titanio	Ti	22	47,88	4,54	1668	3287	0,523
Torio	Th	90	(232)	11,72	1750	4788	0,113
Tulio	Tm	69	168,934	9,32	1545	1950	0,160
Tungsteno	W	74	183,85	19,3	3422	5555	0,132
Uranio	U	92	(238)	18,95	1135	4131	0,116
Vanadio	V	23	50,942	6,11	1910	3407	0,489
Xenon	Xe	54	131,30	$5{,}495 \cdot 10^{-3}$	–111,75	–108,0	0,158
Zinco	Zn	30	65,39	7,133	419,53	907	0,388
Zirconio	Zr	40	91,22	6,506	1855	4409	0,278
Zolfo	S	16	32,066	2,07	115,2	444,.6	0,710

Tra gli elementi radioattivi i valori tra parentesi nella colonna delle masse atomiche sono i numeri di massa degli isotopi di vita media più lunga. I punti di fusione e i punti di ebollizione fra parentesi sono incerti.

Eccetto per i casi in cui i valori sono stati specificati, tutte le proprietà fisiche sono riferite alla pressione atmosferica standard.

I dati per i gas si riferiscono allo stato molecolare come H_2, He, O_2, Ne, ecc. I calori specifici dei gas sono a pressione costante.

Riferimento principale: Handbook of Chemistry and Physics, 71ª edizione (CRC Press, 1990). Vedere anche http//www.webelements.com

APPENDICE F

PARTICELLE ELEMENTARI

1. PARTICELLE FONDAMENTALI

Leptoni

Particella	*Simbolo*	*Antiparticella*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Energia a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Tipici prodotti di decadimento*
Elettrone	e^-	e^+	-1	1/2	0,511	∞	
Neutrino elettronico	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	1/2	<0,000015	∞	
Muone	μ^-	μ^+	-1	1/2	105,7	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$
Neutrino muonico	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	1/2	<0,19	∞	
Tau	τ^-	τ^+	-1	1/2	1777	$3{,}0 \cdot 10^{-13}$	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$
Neutrino tauonico	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	1/2	<18	∞	

Quark

Tipo di quark	*Simbolo*	*Antiparticella*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Energia a riposo*[a] (MeV)	*Altre Proprietà*
Up (Su)	u	$\bar{u}$	+2/3	1/2	3	$C = S = T = B = 0$
Down (Giù)	d	$\bar{d}$	−1/3	1/2	6	$C = S = T = B = 0$
Charm (Incantato)	c	$\bar{c}$	+2/3	1/2	1300	Charm (C) = +1
Strange (Strano)	s	$\bar{s}$	−1/3	1/2	120	Strangeness (S) = −1
Top (Alto)	t	$\bar{t}$	+2/3	1/2	174 000	Topness (T) = +1
Bottom (Basso)	b	$\bar{b}$	−1/3	1/2	4300	Bottomness (B) = −1

Field Particles

Particella	*Simbolo*	*Interazione*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Energia a riposo* (GeV)
Gravitone[b]		Gravitazionale	0	2	0
Bosone debole	W^+, W^-	Debole	± 1	1	80,4
Bosone debole	Z^0	Debole	0	1	91,2
Fotone	γ	Elettromagnetica	0	1	0
Gluone	g	Forte (colore)	0	1	0

 ISBN 88-408-1254-7

2. ALCUNE PARTICELLE COMPOSTE

Barioni

Particella	*Simbolo*	*Quark contenuti*	*Antiparticella*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Energia a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Decadimento tipico*
Protone	p	uud	$\bar{p}$	+1	1/2	938	$>10^{33}$	$\pi^0 + e^+$ (?)
Neutrone	n	udd	$\bar{n}$	0	1/2	940	887	$p + e^- + \nu_e$
Lambda	Λ^0	uds	$\overline{\Lambda}^0$	0	1/2	1116	$2{,}6 \times 10^{-10}$	$p + \pi^-$
Omega	Ω^-	sss	$\overline{\Omega}^-$	−1	3/2	1672	$8{,}2 \times 10^{-11}$	$\Lambda^0 + K^-$
Delta	Δ^{++}	uuu	$\overline{\Delta}^{++}$	+2	3/2	1232	$5{,}7 \times 10^{-24}$	$p + \pi^+$
Lambda incantato	Λ_c^+	udc	$\overline{\Lambda}_c^+$	+1	1/2	2285	$1{,}9 \times 10^{-13}$	$\Lambda^0 + \pi^+$

Mesoni

Particella	*Simbolo*	*Quark contenuti*	*Antiparticella*	*Carica* (e)	*Spin* ($h/2\pi$)	*Energia a riposo* (MeV)	*Vita media* (s)	*Decadimento tipico*
Pione	π^+	$u\bar{d}$	π^-	+1	0	140	$2{,}6 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ + \nu_\pi$
Pione	π^0	$u\bar{u} + d\bar{d}$	π^0	0	0	135	$8{,}4 \cdot 10^{-17}$	$\gamma + \gamma$
Kaone	K^+	$u\bar{s}$	K^-	+1	0	494	$1{,}2 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
Kaone	K^0	$d\bar{s}$	$\overline{K}^0$	0	0	498	$0{,}9 \cdot 10^{-10}$	$\pi^+ + \pi^-$
Ro	ρ^+	$u\bar{d}$	ρ^-	+1	1	770	$4{,}5 \cdot 10^{-24}$	$\pi^+ + \pi^-$
Mesone D	D^+	$c\bar{d}$	D^-	+1	0	1869	$1{,}1 \cdot 10^{-12}$	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
Psi	ψ	$c\bar{c}$	ψ	0	1	3097	$7{,}6 \cdot 10^{-21}$	$e^+ + e^-$
Mesone B	B^+	$u\bar{b}$	B^-	+1	0	5279	$1{,}6 \cdot 10^{-12}$	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
Ipsilon	Y	$b\bar{b}$	Y	0	1	9460	$1{,}3 \cdot 10^{-20}$	$e^+ + e^-$

[a] Le masse a riposo dei quark non sono quelle delle particelle libere; poiché non sono mai stati osservati quark liberi, non è possibile misurare la loro massa isolata. I valori riportati si riferiscono alle masse a riposo efficaci dei quark che costituiscono una particella composta.

[b] Particelle previste ma non ancora osservate.

Valori tratti da: "Review of Particle Properties," *European Physical Journal C*, vol. 15 (2000).

APPENDICE G

FATTORI DI CONVERSIONE

I fattori di conversione si possono ricavare rapidamente dalle tabelle. Per esempio, 1 grado $= 2.778 \cdot 10^{-3}$ angoli giri, quindi $16.7° = 16.7 \cdot 1.778 \cdot 10^{-3}$ giri. Le unità SI sono in carattere maiuscolo. Adattato parzialmente da G. Shortley e D. Williams, *Element of Physics*, Prentice-Hall, 1971

ANGOLI PIANI

	°	′	″	rad	angoli giri
1 grado =	1	60	3600	$1,745 \cdot 10^{-2}$	$2,778 \cdot 10^{-3}$
1 primo =	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	60	$2,909 \cdot 10^{-4}$	$4,630 \cdot 10^{-5}$
1 secondo =	$2,778 \cdot 10^{-4}$	$1,667 \cdot 10^{-2}$	1	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$7,716 \cdot 10^{-7}$
1 RADIANTE =	57,30	3438	$2,063 \cdot 10^{5}$	1	0,1592
1 angolo giro =	360	$2,16 \cdot 10^{4}$	$1,296 \cdot 10^{6}$	6,283	1

Angoli Solidi

1 angolo sferico = 4π steradianti = 12,57 steradianti

Lunghezza

	cm	m	km	pollici (in)	piedi (ft)	miglia (mi)
1 centimetro =	1	10^{-2}	10^{-5}	0,3937	$3,281 \cdot 10^{-2}$	$6,214 \cdot 10^{-6}$
1 METRO =	100	1	10^{-3}	39,37	3,281	$6,214 \cdot 10^{-4}$
1 kilometro =	10^{5}	1000	1	$3,937 \cdot 10^{-4}$	3281	0,6214
1 pollice (inch) =	2,540	$2,540 \cdot 10^{-2}$	$2,540 \cdot 10^{-5}$	1	$8,333 \cdot 10^{-2}$	$1,578 \cdot 10^{-5}$
1 piede (foot) =	30,48	0,3048	$3,048 \cdot 10^{-4}$	12	1	$1,894 \cdot 10^{-4}$
1 miglio (mile) =	$1,609 \cdot 10^{5}$	1609	1,609	$6,336 \cdot 10^{4}$	5280	1

1 ångström $= 10^{-10}$ m
1 miglio marino = 1852 m
= 1,151 miglia = 6076 ft
1 fermi $= 10^{-15}$ m

1 anno-luce $= 9,460 \cdot 10^{12}$ km
1 parsec $= 3,084 \cdot 10^{13}$ km
1 fathom = 6 ft
1 raggio di Bohr $= 5,292 \cdot 10^{-11}$ m

1 iarda = 3 ft

 ISBN 88-408-1254-7

Superficie

	m^2	cm^2	ft^2	in^2
1 METRO QUADRATO =	1	10^4	10,76	1550
1 centimetro quadrato =	10^{-4}	1	$1{,}076 \cdot 10^{-3}$	0,1550
1 piede quadrato =	$9{,}290 \cdot 10^{-2}$	929,0	1	144
1 pollice quadrato =	$6{,}452 \cdot 10^{-4}$	6,452	$6{,}944 \cdot 10^{-3}$	1

1 miglio quadrato = $2{,}788 \cdot 10^7$ ft^2 = 640 acri
1 barn = 10^{-28} m^2
1 acro = 43 600 ft^2
1 ettaro = 10^4 m^2 = 2,471 acri

Volume

	m^3	cm^3	L	ft^3	in^3
1 METRO CUBO =	1	10^6	1000	35,31	$6{,}102 \cdot 10^4$
1 centimetro cubo =	10^{-6}	1	$1{,}000 \cdot 10^{-3}$	$3{,}531 \cdot 10^{-5}$	$6{,}102 \cdot 10^{-2}$
1 litro =	$1{,}000 \cdot 10^{-3}$	1000	1	$3{,}531 \cdot 10^{-2}$	61,02
1 piede cubo =	$2{,}832 \cdot 10^{-2}$	$2{,}832 \cdot 10^{-4}$	28,32	1	1728
1 pollice cubo =	$1{,}639 \cdot 10^{-5}$	16,39	$1{,}639 \cdot 10^{-2}$	$5{,}787 \cdot 10^{-4}$	1

Massa

	g	kg	t	u	oz	lb
1 grammo =	1	0,001	10^{-6}	$6{,}024 \cdot 10^{23}$	$3{,}527 \cdot 10^{-2}$	$2{,}205 \cdot 10^{-3}$
1 KILOGRAMMO =	1000	1	0,001	$6{,}024 \cdot 10^{26}$	35,27	2,205
1 tonnellata =	10^6	1000	1	$6{,}024 \cdot 10^{29}$	$3{,}527 \cdot 10^4$	2205
1 unità di massa atomica =	$1{,}661 \cdot 10^{-24}$	$1{,}661 \cdot 10^{-27}$	$1{,}661 \cdot 10^{-30}$	1	$5{,}855 \cdot 10^{-26}$	$3{,}660 \cdot 10^{-27}$
1 oncia (ounce) =	28,35	$2{,}835 \cdot 10^{-2}$	$2{,}835 \cdot 10^{-5}$	$1{,}718 \cdot 10^{25}$	1	$6{,}250 \cdot 10^{-2}$
1 libbra (pound) =	453,6	0,4536	$4{,}536 \cdot 10^{-4}$	$2{,}732 \cdot 10^{26}$	16	1

Le quantità indicate nelle zone colorate non sono unità di massa, ma sono spesso usate come tali. Quando si scrive, per esempio 1 kg = 2,205 lb si vuol dire che 1 kg ha una *massa* che *pesa* 2,205 libbre (con $g = 9{,}80665$ m/s^2).

Massa volumica*

	kg/m^3	g/cm^3	lb/ft^3	lb/in^3
1 KILOGRAMMO al METRO CUBO =	1	0.001	$6{,}243 \cdot 10^{-2}$	$3{,}613 \cdot 10^{-5}$
1 grammo al centimetro cubo =	1000	1	62,43	$3{,}613 \cdot 10^{-2}$
1 libbra al piede cubo =	16,02	$1{,}602 \cdot 10^{-2}$	1	$5{,}787 \cdot 10^{-4}$
1 libbra al pollice cubo =	$2{,}768 \cdot 10^4$	27,68	1728	1

* È ancora largamente in uso il termine *densità*.
Le quantità nelle zone colorate sono pesi specifici e, come tali, sono dimensionalmente diversi dalle masse volumiche (Vedi nota relativa alla tabella delle unità di massa).

Tempo

	a	d	h	min	s
1 anno =	1	365,25	$8{,}766 \cdot 10^{3}$	$5{,}259 \cdot 10^{5}$	$3{,}156 \cdot 10^{7}$
1 giorno =	$2{,}738 \cdot 10^{-3}$	1	24	1440	$8{,}640 \cdot 10^{4}$
1 ora =	$1{,}141 \cdot 10^{-4}$	$4{,}167 \cdot 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto =	$1{,}901 \cdot 10^{-6}$	$6{,}944 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1	60
1 SECONDO =	$3{,}169 \cdot 10^{-8}$	$1{,}157 \cdot 10^{-5}$	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	1

Velocità

	ft/s	km/h	m/s	mi/h	cm/s
1 piede al secondo =	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48
1 kilometro all'ora =	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78
1 METRO al SECONDO =	3,281	3,6	1	2,237	100
1 miglio all'ora =	1,467	1,609	0,4470	1	44,70
1 centimetro al secondo =	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	$3{,}6 \cdot 10^{-2}$	0,01	$2{,}237 \cdot 10^{-2}$	1

1 nodo = 1 miglio marino/h = 1852 m/h 1 miglio/min = 88,00 ft/s = 60,00 mi/h

Forza

	dyn	N	lb	gf	kgf
1 dina =	1	10^{-5}	$2{,}248 \cdot 10^{-6}$	$1{,}020 \cdot 10^{-3}$	$1{,}020 \cdot 10^{-6}$
1 NEWTON =	10^{5}	1	0,2248	102,0	0,1020
1 libbra (pound) =	$4{,}448 \cdot 10^{-5}$	4,448	1	453,6	0,4536
1 grammo-forza =	980,7	$9{,}807 \cdot 10^{-3}$	$2{,}205 \cdot 10^{-3}$	1	0,001
1 kilogrammo-forza =	$9{,}807 \cdot 10^{5}$	9,807	2,205	1000	1

Le quantità nelle zone colorate sono unità di forza definite per un determinato valore dell'accelerazione di gravità, pari a g. Per esempio, scrivendo

1 grammo forza = 980,7 dine

intendiamo che la massa di 1 grammo subisce una forza di 980,7 dine nel campo gravitazionale terrestre ($g = 9{,}80665$ m/s^2). Queste unità sono ormai poco usate.

 ISBN 88-408-1254-7

Energia, lavoro, calore

	Btu	erg	ft · lb	CV · h	JOULE	cal	kW · h	eV	MeV	kg	u
1 British thermal unit =	1	$1{,}055 \cdot 10^{10}$	777,9	$3{,}983 \cdot 10^{-4}$	1055	252,0	$2{,}930 \cdot 10^{-4}$	$6{,}585 \cdot 10^{21}$	$6{,}585 \cdot 10^{15}$	$1{,}174 \cdot 10^{-14}$	$7{,}070 \cdot 10^{12}$
1 erg =	$9{,}481 \cdot 10^{-11}$	1	$7{,}376 \cdot 10^{-8}$	$3{,}777 \cdot 10^{-14}$	10^{-7}	$2{,}389 \cdot 10^{-8}$	$2{,}778 \cdot 10^{-14}$	$6{,}242 \cdot 10^{11}$	$6{,}242 \cdot 10^{5}$	$1{,}113 \cdot 10^{-24}$	670,2
1 piede libbra =	$1{,}285 \cdot 10^{-3}$	$1{,}356 \cdot 10^{7}$	1	$5{,}121 \cdot 10^{-7}$	1,356	0,3238	$3{,}766 \cdot 10^{-7}$	$8{,}464 \cdot 10^{18}$	$8{,}464 \cdot 10^{12}$	$1{,}509 \cdot 10^{-17}$	$9{,}037 \cdot 10^{9}$
1 cavallo-vapore ora =	2510	$2{,}648 \cdot 10^{13}$	$1{,}952 \cdot 10^{6}$	1	$2{,}648 \cdot 10^{6}$	$6{,}326 \cdot 10^{5}$	0,7355	$1{,}653 \cdot 10^{25}$	$1{,}653 \cdot 10^{19}$	$2{,}947 \cdot 10^{-11}$	$1{,}774 \cdot 10^{16}$
1 JOULE =	$9{,}481 \cdot 10^{-4}$	10^{7}	0,7376	$3{,}777 \cdot 10^{-7}$	1	0,2389	$2{,}778 \cdot 10^{-7}$	$6{,}242 \cdot 10^{18}$	$6{,}242 \cdot 10^{12}$	$1{,}113 \cdot 10^{-17}$	$6{,}702 \cdot 10^{9}$
1 caloria =	$3{,}969 \cdot 10^{-3}$	$4{,}186 \cdot 10^{7}$	3,088	$1{,}581 \cdot 10^{-6}$	4,186	1	$1{,}163 \cdot 10^{-6}$	$2{,}613 \cdot 10^{19}$	$2{,}613 \cdot 10^{13}$	$4{,}660 \cdot 10^{-17}$	$2{,}806 \cdot 10^{10}$
1 kilowattora =	3413	$3{,}6 \cdot 10^{13}$	$2{,}655 \cdot 10^{6}$	1,360	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	$8{,}600 \cdot 10^{5}$	1	$2{,}247 \cdot 10^{25}$	$2{,}247 \cdot 10^{19}$	$4{,}007 \cdot 10^{-11}$	$2{,}413 \cdot 10^{16}$
1 elettronvolt =	$1{,}519 \cdot 10^{-22}$	$1{,}602 \cdot 10^{-12}$	$1{,}182 \cdot 10^{-19}$	$6{,}050 \cdot 10^{-26}$	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	$3{,}827 \cdot 10^{-20}$	$4{,}450 \cdot 10^{-26}$	1	10^{-6}	$1{,}783 \cdot 10^{-36}$	$1{,}074 \cdot 10^{-9}$
10^6 elettronvolt =	$1{,}519 \cdot 10^{-16}$	$1{,}602 \cdot 10^{-6}$	$1{,}182 \cdot 10^{-13}$	$6{,}050 \cdot 10^{-20}$	$1{,}602 \cdot 10^{-13}$	$3{,}827 \cdot 10^{-14}$	$4{,}450 \cdot 10^{-20}$	10^{6}	1	$1{,}783 \cdot 10^{-30}$	$1{,}074 \cdot 10^{-3}$
1 kilogrammo =	$8{,}521 \cdot 10^{13}$	$8{,}987 \cdot 10^{23}$	$6{,}629 \cdot 10^{16}$	$3{,}394 \cdot 10^{10}$	$8{,}987 \cdot 10^{16}$	$2{,}146 \cdot 10^{16}$	$2{,}497 \cdot 10^{10}$	$5{,}610 \cdot 10^{35}$	$5{,}610 \cdot 10^{29}$	1	$6{,}022 \cdot 10^{26}$
1 unità di massa atomica =	$1{,}415 \cdot 10^{-13}$	$1{,}492 \cdot 10^{-3}$	$1{,}101 \cdot 10^{10}$	$5{,}635 \cdot 10^{-17}$	$1{,}492 \cdot 10^{-10}$	$3{,}564 \cdot 10^{-11}$	$4{,}146 \cdot 10^{-17}$	$9{,}32 \cdot 10^{8}$	932,0	$1{,}661 \cdot 10^{-27}$	1

Le ultime due voci della tabella non sono propriamente di energia, ma sono state incluse per praticità. In base alla formula relativistica che esprime l'equivalenza massa-energia $E = mc^2$, rappresentano l'energia sviluppata dalla completa conversione in energia di 1 kilogrammo o di un'unità atomica (u).

Pressione

	atm	dyn/cm^2	mH_2O	cmHg	Pa	lb/in^2
1 atmosfera =	1	$1{,}013 \cdot 10^{6}$	10,33	76	$1{,}013 \cdot 10^{5}$	14,70
1 dina al cm^2 =	$9{,}869 \cdot 10^{-7}$	1	$1{,}02 \cdot 10^{-5}$	$7{,}501 \cdot 10^{-5}$	0,1	$1{,}450 \cdot 10^{-5}$
1metro d'acqua a 4 °C[a] =	$9{,}6784 \cdot 10^{-2}$	$9{,}807 \cdot 10^{4}$	1	7,3556	9807	1,4223
1 centimetro di mercurio a 0 °C[a] =	$1{,}316 \cdot 10^{-2}$	$1{,}333 \cdot 10^{4}$	0,136	1	1333	0,1934
1 PASCAL =	$9{,}869 \cdot 10^{-6}$	10	$1{,}02 \cdot 10^{-4}$	$7{,}501 \cdot 10^{-4}$	1	$1{,}450 \cdot 10^{-4}$
1 libbra al pollice quadrato =	$6{,}805 \cdot 10^{-2}$	$6{,}895 \cdot 10^{4}$	0,7033	5,171	$6{,}895 \cdot 10^{3}$	1

[a] Dove l'accelerazione di gravità ha il valore standard 9.80665 m/s^2.

1 bar = 0.1 MPa 1 millibar = 10^2 Pa 1 torr = 1 mmHg

Potenza

	Btu/h	ft · lb/s	CV	cal/s	kW	W
1 British thermal unit all'ora =	1	0,2161	$3,982 \cdot 10^{-4}$	$6,998 \cdot 10^{-2}$	$2,930 \cdot 10^{-4}$	0,2930
1 piede libbra al secondo =	4,628	1	$1,842 \cdot 10^{-3}$	0,3239	$1.356 \cdot 10^{-3}$	1,356
1 cavallo vapore =	2510	543	1	175,8	0,7355	735,5
1 caloria al secondo =	14,29	3,088	$5,688 \cdot 10^{-3}$	1	$4,186 \cdot 10^{-3}$	4,186
1 kilowatt =	3413	737,6	1,359	238,9	1	1000
1 WATT =	3,413	0,7376	$1,359 \cdot 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

Flusso magnetico

	Mx	Wb
1 maxwell =	1	10^{-8}
1 WEBER =	10^{8}	1

Campo magnetico

	G	T	mG
1 gauss =	1	10^{-4}	1000
1 TESLA =	10^{4}	1	10^{7}
1 milligauss =	0,001	10^{-7}	1

1 T = 1 Wb/m^2

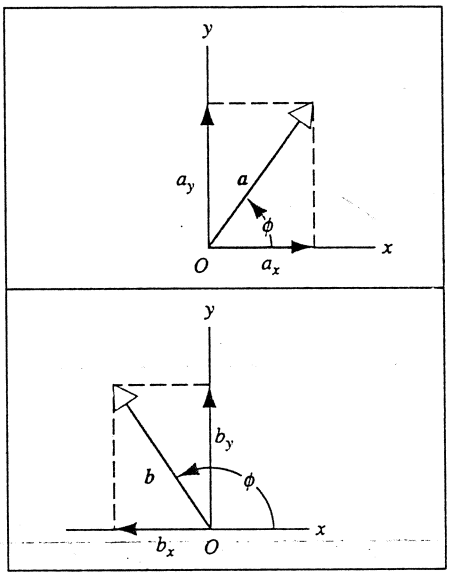
APPENDICE *H*

VETTORI

H-1 COMPONENTI DEI VETTORI

$a_x = a\cos\phi \qquad a_y = a\sin\phi$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \tan\phi = a_y/a_x$



$b_x = b\cos\phi \quad (< 0)$

$b_y = b\sin\phi \quad (> 0)$

$a_x = a\sin\theta\cos\phi$

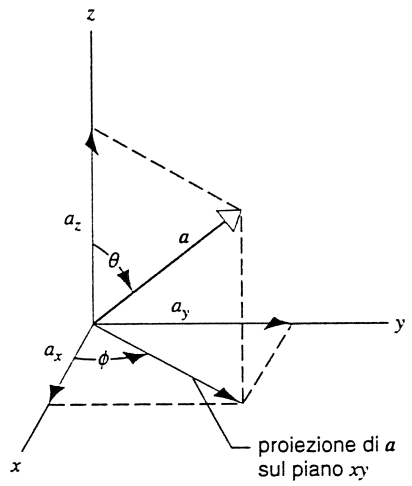
$a_y = a\sin\theta\sin\phi$

$a_z = a\cos\theta$

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$\tan\phi = a_y/a_x$

$\cos\theta = a_z/a$



APPENDICE I

FORMULE MATEMATICHE

Geometria

Cerchio di raggio r: circonferenza $= \pi r$, superficie $= \pi r^2$.
Sfera di raggio r: superficie $= 4\pi r^2$, volume $= 4\pi r^3/3$.
Cilindro circolare retto di raggio r e altezza h: superficie totale $= 2\pi r(r + h)$, volume $= \pi r^2 h$.
Triangolo di base a e altezza h: superficie $= \frac{1}{2}ah$.

Equazioni di 2° grado

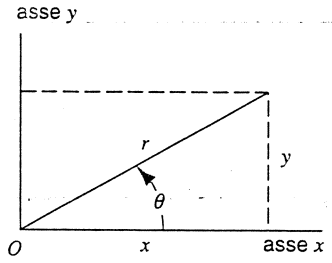
Se $ax^2 + bx + c = 0$, $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Funzioni trigonometriche dell'angolo θ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

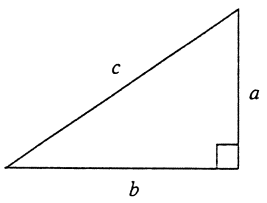
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$



Teorema di Pitagora

$a^2 + b^2 = c^2$



Triangoli

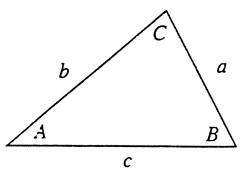
Angoli A, B, C

Lati opposti a, b, c

$A + B + C = 180°$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Segni matematici e simboli

$=$ eguale
$\approx$ circa eguale
$\neq$ diverso
$\equiv$ identico a
$>$ maggiore di ($\gg$ molto maggiore di)
$<$ minore di ($\ll$ molto minore di)
$\geq$ maggiore o eguale a (oppure non minore di)
$\leq$ minore o eguale a (oppure non maggiore di)
$\pm$ più o meno (per es. $\sqrt{4} = \pm 2$)
$\propto$ proporzionale a
$\sum$ sommatoria
$\bar{x}$ valor medio di x.

Identità trigonometriche

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1 \quad \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin[\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)]\cos[\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)]$

Sviluppo del binomio

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots (x^2 < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \ldots (x^2 < 1)$$

 ISBN 88-408-1254-7

Sviluppo dell'esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Sviluppo del logaritmo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (|x| < 1)$$

Sviluppi di funzioni trigonometriche (θ in radianti)

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$
$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$
$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$$

Derivate e integrali indefiniti

In ciò che segue u e v indicano funzioni arbitrarie di x, mentre a ed m sono delle costanti. A tutti gli integrali va aggiunta una costante di integrazione. Per un elenco più ricco si veda *Handbook of Chemistry and Physics* (Chemical Rubber Pub. Co.).

1. $\frac{dx}{dx} = 1$
2. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$
5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$
6. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
8. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$
9. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
10. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$
12. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$
13. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\cot x \operatorname{cosec} x$
14. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$

1. $\int dx = x$
2. $\int au\,dx = a\int u\,dx$
3. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
4. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$
5. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
6. $\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx$
7. $\int e^x dx = e^x$
8. $\int \sin x\,dx = -\cos x$
9. $\int \cos x\,dx = \sin x$
10. $\int \tan x dx = \ln|\sec x| = -\ln\cos x$
11. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$
12. $\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$
13. $\int xe^{-ax}dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$
14. $\int x^2e^{-ax}dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$
15. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$
18. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$

APPENDICE *J*

PREMI NOBEL PER LA FISICA*

1901	Wilhelm Konrad Röntgen	1845–1923	Scoperta dei raggi X.
1902	Hendrik Antoon Lorentz	1853–1928	Influenza del magnetismo sui fenomeni della radiazione.
	Pieter Zeeman	1865–1943	
1903	Antoine Henri Becquerel	1852–1908	Scoperta della radioattività naturale e degli elementi radioattivi
	Pierre Curie	1859–1906	radio e polonio.
	Marie Sklowdowska-Curie	1867–1934	
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842–1919	Scoperta dell'argon.
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1862–1947	Ricerche sui raggi catodici.
1906	Joseph John Thomson	1856–1940	Conduzione elettrica nei gas.
1907	Albert Abraham Michelson	1852–1931	Invenzione dell'interferometro e ricerche spettroscopiche e metrologiche.
1908	Gabriel Lippmann	1845–1921	Fotografia a colori.
1909	Guglielmo Marconi	1874–1937	Sviluppo della telegrafia senza fili.
	Carl Ferdinand Braun	1850–1918	
1910	Johannes Diderik van der Waals	1837–1923	Equazioni di stato di gas e liquidi.
1911	Wilhelm Wien	1864–1928	Leggi sull'irraggiamento.
1912	Nils Gustaf Dalén	1869–1937	Faro costiero automatico.
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853–1926	Proprietà della materia alle basse temperature; produzione dell'elio liquido.
1914	Max von Laue	1879–1960	Diffrazione di raggi X nei cristalli.
1915	William Henry Bragg	1862–1942	Studio di strutture cristalline mediante i raggi X.
	William Lawrence Bragg	1890–1971	
1917	Charles Glover Barkla	1877–1944	Scoperta dei raggi X caratteristici dei vari elementi.
1918	Max Planck	1858–1947	Scoperta dei quanti di energia.
1919	Johannes Stark	1874–1957	Scoperta dell'effetto Doppler sui raggi canale e della scissione di righe spettrali in un campo elettrico.
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861–1938	Scoperta di anomalie nelle leghe nichel-acciaio.
1921	Albert Einstein	1879–1955	Scoperta delle leggi dell'effetto fotoelettrico.
1922	Neils Bohr	1885–1962	Studio della struttura e delle radiazioni degli atomi.
1923	Robert Andrews Millikan	1868–1953	Ricerche sulla carica elettrica elementare e sull'effetto fotoelettrico.
1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1886–1978	Scoperte sugli spettri dei raggi X.
1925	James Franck	1882–1964	Leggi che governano le collisioni tra elettroni e atomi.
	Gustav Hertz	1887–1975	
1926	Jean Baptiste Perrin	1870–1942	Scoperta dell'equilibrio nella sedimentazione.
1927	Arthur Holly Compton	1892–1962	Scoperta della diffusione di raggi X da parte di particelle cariche.
	Charles Thomson Rees Wilson	1869–1959	Invenzione della camera a nebbia, dispositivo per rendere visibile il cammino delle particelle cariche.

* Per le biografie, le motivazioni e le lezioni tenute in occasione del ricevimento del premio, si veda *Nobel Lectures,* Physics, 1901-1970, Elsevier Pub. Co. Per maggiori informazioni si veda http://www.nobel.se/physics/laureates/index.html.

 ISBN 88-408-1254-7

1928	Owen Willans Richardson	1879–1959	Scoperta della legge omonima (dipendenza della temperatura dell'emissione di elettroni).
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892–1987	Natura ondulatoria degli elettroni.
1930	Sir Chandrasekhara Venkata Raman	1888–1970	Ricerche sulla diffusione della luce e scoperta dell'omonimo effetto.
1932	Werner Heisenberg	1901–1976	Creazione della meccanica quantistica.
1933	Paul Adrien Maurice Dirac	1887–1961	Scoperta di nuove formulazioni della teoria atomica.
	Erwin Schrödinger	1902–1984	
1935	James Chadwick	1891–1974	Scoperta del neutrone.
1936	Victor Franz Hess	1883–1964	Scoperta della radiazione cosmica.
	Carl David Anderson	1905–1991	Scoperta del positrone.
1937	Clinton Joseph Davisson	1881–1958	Scoperta della diffrazione di elettroni dai cristalli.
	George Paget Thomson	1892–1975	
1938	Enrico Fermi	1901–1954	Elementi artificiali radioattivi prodotti dall'irragiamento con neutroni lenti.
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901–1958	Invenzione del ciclotrone.
1943	Otto Stern	1888–1969	Ricerche con fasci molecolari e sul momento magnetico del protone.
1944	Isidor Isaac Rabi	1898–1988	Risonanza magnetica nucleare.
1945	Wolfgang Pauli	1900–1958	Scoperta del principio di esclusione.
1946	Percy Williams Bridgman	1882–1961	Fisica delle alte pressioni.
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892–1965	Fisica dell'alta atmosfera e scoperta dello strato omonimo.
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897–1974	Scoperte sulla radiazione cosmica e in fisica nucleare.
1949	Hideki Yukawa	1907–1981	Predizione dell'esistenza del mesone.
1950	Cecil Frank Powell	1903–1969	Metodo fotografico per lo studio di processi nucleari; scoperte sui mesoni
1951	Sir John Douglas Cockcroft	1897–1967	Trasmutazione di nuclei atomici con particelle atomiche accelerate artificialmente.
	Ernest Thomas Sinton Walton	1903–1995	
1952	Felix Bloch	1905–1983	Sviluppo di nuovi metodi per lo studio del magnetismo nucleare.
	Edward Mills Purcell	1912–1997	
1953	Frits Zernike	1888–1966	Invenzione del microscopio a contrasto di fase.
1954	Max Born	1882–1970	Lavori di meccanica quantistica e interpretazione statistica della funzione d'onda.
	Walther Bothe	1891–1957	Analisi della radiazione cosmica con l'uso dei metodi di coincidenza.
1955	Willis Eugene Lamb	1913–	Struttura fine dell'idrogeno.
	Polykarp Kusch	1911–1993	Momento magnetico dell'elettrone.
1956	William Shockley	1910–1989	Invenzione e sviluppo del transistor.
	John Bardeen	1908–1991	
	Walter Houser Brattain	1902–1987	
1957	Chen Ning Yang	1922–	Non conservazione della parità e lavori sulla teoria delle particelle elementari.
	Tsung Dao Lee	1926–	
1958	Pavel Aleksejecič Čerenkov	1904–1990	Scoperta e interpretazione dell'effetto Čerenkov sulla radiazione.
	Il' ja Michajlovič Frank	1908–1990	emessa da particelle cariche veloci nella materia.
	Igor Yevgenyevich Tamm	1895–1971	
1959	Emilio Gino Segrè	1905–1989	Scoperta dell'antiprotone.
	Owen Chamberlain	1920–	
1960	Donald Arthur Glaser	1926–	Invenzione della camera a bolle.
1961	Robert Hofstadter	1915–1990	Struttura elettromagnetica dei nucleoni con esperimenti di diffusione di elettroni ad alta energia.
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929–	Scoperta di assorbimento in risonanza di raggi gamma nei nuclei.
1962	Lev Davidovič Landau	1908–1968	Teoria della materia condensata; fenomeni di superficialità e superconduttività.
1963	Eugene P. Wigner	1902–1995	Contributi alla fisica teorica atomica e nucleare.
	Maria Goeppert Mayer	1906–1972	Teoria del modello a guscio e numeri magici del nucleo atomico.
	J. Hans D. Jensen	1907–1973	
1964	Charles H. Townes	1915–	Scoperta del maser e teoria della radiazione atomica coerente.
	Nikolai G. Basov	1922–2001	
	Alexander M. Prochorov	1916–2002	
1965	Sin-itiro Tomonaga	1906–1979	Sviluppo dell'elettrodinamica quantistica.
	Julian Schwinger	1918–1994	
	Richard P. Feynman	1918–1988	
1966	Alfred Kastler	1902–1984	Scoperta e sviluppo di metodi ottici per lo studio della risonanza hertziana negli atomi.

1967	Hans Albrecht Bethe	1906–	Teoria delle reazioni nucleari e scoperte riguardanti la produzione di energia nelle stelle.
1968	Luis W. Alvarez	1911–1988	Fisica delle particelle elementari, in particolare la scoperta di un gran numero di stati di risonanza mediante l'impiego della camera a bolle a idrogeno.
1969	Murray Gell-Mann	1929–	Scoperte sulla classificazione delle particelle elementari e sulle loro interazioni.
1970	Hannes Alfvén	1908–1995	Scoperte in magnetoidrodinamica con applicazioni alla fisica del plasma.
	Louis Néel	1904–2000	Scoperte sull'antiferromagnetismo e sul ferrimagnetismo con importanti applicazioni alla fisica dei solidi.
1971	Dennis Gabor	1900–1979	Scoperta dei principi dell'olografia.
1972	John Bardeen	1908–1991	Teoria della superconduttività.
	Leon N. Cooper	1930–	
	J. Robert Schrieffer	1931–	
1973	Leo Esaki	1925–	Scoperta dell'effetto tunnel nei semiconduttori.
	Ivar Giaever	1929–	
	Brian D. Josephson	1940–	Predizione teorica della proprietà di una supercorrente attraverso una barriera tunnel.
1974	Antony Hewish	1924–	Scoperta delle pulsar.
	Sir Martin Ryle	1918–1984	Ricerche fondamentali di radioastronomia.
1975	Aage Bohr	1922–	Scoperta della correlazione tra il moto collettivo e il moto di una particella e sviluppo della teoria della struttura del nucleo atomico basata su tale correlazione.
	Ben Mottelson	1926–	
	James Rainwater	1917–1986	
1976	Burton Richter	1931–	Scoperta (indipendente) di una importante particella elementare.
	Samuel Chao Chung Ting	1936–	
1977	Philip Warren Anderson	1923–	Studi teorici sulla struttura elettronica di sistemi magnetici e disordinati.
	Nevill Francis Mott	1905–1996	
	John Hasbrouch Van Vleck	1899–1980	
1978	Peter L. Kapitza	1894–1984	Scoperte e invenzioni nella fisica delle basse temperature.
	Arno A. Penzias	1926–	Scoperta della radiazione cosmica di fondo.
	Robert Woodrow Wilson	1936–	
1979	Sheldon Lee Glashow	1932–	Formulazione del modello unificato elettrodebole e previsione dell'esistenza delle correnti neutre.
	Abdus Salam	1926–1996	
	Steven Weinberg	1933–	
1980	James W. Cronin	1931–	Scoperta delle violazioni dei principi di simmetria nel decadimento del mesone K.
	Val L. Fitch	1923–	
1981	Nicolaas Bloembergen	1920–	Contributo allo sviluppo della spettroscopia laser.
	Arthur Leonard Schawlow	1921–1999	
	Kai M. Siegbahn	1918–1999	Contributo alla spettroscopia elettronica ad alta risoluzione.
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936–	Metodo di analisi dei fenomeni critici della materia sottoposta a variazioni di pressione e temperatura.
1983	Subrehmanyan Chandrasekhar	1910–1995	Studio teorico sull'evoluzione delle stelle.
	William A. Fowler	1911–1995	Studio della formazione degli elementi chimici nell'universo.
1984	Carlo Rubbia	1934–	Decisivo contributo al progetto che portò alla scoperta dei bosoni intermedi W e Z dell'interazione elettrodebole.
	Simon van der Meer	1925–	
1985	Klaus von Klitzing	1943–	Scoperta della resistenza Hall quantizzata.
1986	Ernst Ruska	1906–1988	Invenzione del microscopio elettronico.
	Gerd Binnig	1947–	Invenzione del microscopio elettronico a scansione.
	Heinrich Rohrer	1933–	
1987	Karl Alex Müller	1927–	Scoperta di una nuova classe di superconduttori.
	J. Georg Bednorz	1950–	
1988	Leon M. Lederman	1922–	Esperimenti con fasci di neutrini e scoperta del neutrino muonico.
	Melvin Schwartz	1932–	
	Jack Steinberger	1921–	
1989	Hans G. Dehmelt	1922–	Sviluppo della tecnica di intrappolamento di singoli atomi.
	Wolfgang Paul	1913–1993	Scoperte di spettroscopia della risonanza atomica che hanno permesso la costruzione dei maser a idrogeno e degli orologi atomici.
	Norman F. Ramsey	1915–	
1990	Richard E. Taylor	1929–	Esperimenti di diffusione di elettroni da nuclei che hanno messo in evidenza la presenza di quark nei nucleoni.
	Jerome I. Friedman	1930–	
	Henry W. Kendall	1926–1999	

 ISBN 88-408-1254-7

1991	Pierre-Gilles de Gennes	1932–	Scoperta di un certo ordine molecolare in sostanze come i cristalli liquidi, i superconduttori e i polimeri.
1992	George Charpak	1924–	Invenzione dei rivelatori elettronici veloci per particelle ad alta energia.
1993	Joseph H. Taylor	1941–	Scoperta e interpretazione della prima pulsar binaria.
	Russell A. Hulse	1950–	
1994	Bertram N. Brockhouse	1918–	Sviluppo delle tecniche di diffusione dei neutroni.
	Clifford G. Shull	1915–2001	
1995	Martin L. Perl	1927–	Captazione del neutrino.
	Frederick Reines	1918–1998	
1996	David M. Lee	1931–	Scoperta della superfluidità nel ^{3}He.
	Douglas M. Osheroff	1945–	
	Robert C. Richardson	1937–	
1997	Steven Chu	1948–	Sviluppo di metodi d'intrappolamento e raffreddamento di atomi col laser.
	Claude Cohen-Tannoudji	1933–	
	William D. Phillips	1948–	
1998	Robert B. Laughlin	1950–	Scoperta di una nuova forma di fluido quantico con eccitazioni a carica frazionaria.
	Horst L. Stormer	1949–	
	Daniel C. Tsui	1939–	
1999	Gerardus 't Hooft	1946–	Sviluppo della struttura quantistica delle interazioni elettrodeboli.
	Martinus J. G. Veltman	1931–	
2000	Zhores I. Alferov	1930–	Sviluppo di eterostrutture a semiconduttore per alte velocità e optoelettronica.
	Herbert Kroemer	1928–	
	Jacks S. Kilby	1923–	Contributo allo sviluppo del circuito integrato.
2001	Eric A. Cornell	1961–	Realizzazione del condensato di Bose-Einstein in gas diluiti di atomi alcalini.
	Wolfgang Katterle	1957–	
	Care E. Wieman	1951–	
2002	Raymond Davis Jr.	1914–	Rivelazione dei neutrini cosmici.
	Masatoshi Koshiba	1926–	
	Riccardo Giacconi	1931–	Scoperta di sorgenti cosmiche di raggi X.

RISPOSTE A ESERCIZI E PROBLEMI DI NUMERO DISPARI

CAPITOLO 1

Esercizi

3. 52,6 min; 5,2 %. **5.** − 0,44 %. **7.** 3,33 ft. **9.** 55 s.
11. 2,2 d. **13.** (a) 100 m; 8.56 m; 28.1 ft.
(b) 1 mi è più lungo di 109 m o 358 ft. **15.** $1{,}88 \cdot 10^{22}$ cm^3.
17. (a) $4{,}00 \cdot 10^4$ km. (b) $5{,}10 \cdot 10^8$ km^2.
(c) $1{,}08 \cdot 10^{12}$ km^3. **19.** $2{,}86 \cdot 10^{-3}$ anni-luce/secolo.
21. (a) $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ pc; $1{,}58 \cdot 10^{-5}$ a.l.
(b) $9{,}48 \cdot 10^{12}$ km; $3{,}08 \cdot 10^{13}$ km.
23. $5{,}98 \cdot 10^{26}$. **25.** New York. **27.** 840 km.
29. 605,780211 nm. **31.** m/s.
33. $(ch/G)^{1/2} = 5{,}46 \cdot 10^{-8}$ kg.

Problemi

1. 19 h 44 min 50 s. **3.** (a) 31 m. (b) 22 m.
(c) Lago Ontario. **5.** Circa 0,5 kg. **7.** 0,260 kg.
9. (a) 282 pm. (b) 416 pm.

CAPITOLO 2

Esercizi

1. (a) Paralleli. (b) Contrapposti. (c) Perpendicolari.
3. (a) 4,5, 52° a N rispetto a E. (b) 8,4, 25° a S rispetto a E.
5. 4,76 km. **7.** (a) $2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$. (b) 5,4, a 68° rispetto al semiasse $+x$. **9.** (a) 5,0; 323°. (b) 10,0; 53,1°. (c) 11,2; 26,6°.
(d) 11,2; 79,7°. (e) 11,2; 260°.
11. (a) 370 m, 57° a E rispetto a N. (b) 370 m, 420 m.
13. (a) 16,0 cm, 225°. (b) 22,.6 cm, 90°. (c) Zero.
15. 10,3 km, 180,3°.
17. (a) $(6\text{ m})\boldsymbol{i} - (106\text{ m})\boldsymbol{j}$. (b) $(19\text{ m/s})\boldsymbol{i} - (224\text{ m/s})\boldsymbol{j}$.
(c) $(24\text{ m/s}^2)\boldsymbol{i} - (336\text{ m/s}^2)\boldsymbol{j}$. **19.** (a) $-(18\text{ m/s}^2)\boldsymbol{i}$. (b) 0,75 s. (c) Mai. (d) 2,2 s. **21.** (a) 6 h. (b) 4 h in meno rispetto a Roma. (c) Groenlandia sudoccidentale. **23.** 31 m. **25.** 2 cm/a. **27.** 43 min. **29.** 48 km/h. **31.** 100 m.
33. -20 m/s^2. **35.** (a) *OA*: +; *AB*: +; *BC*: 0; *CD*: −. (b) No.
39. (a) m/s^2; m/s^3. (b) 2 s. (c) 24 m. (d) − 16 m.
(e) 3,0; 0,0; − 9,0; − 24 m. (*f*) 0,0; − 6,0; − 12; − 18 m/s^2.
(g) − 10 m/s. **41.** (a) $3{,}1 \cdot 10^6$ s. (b) $4{,}7 \cdot 10^{13}$ m.
43. 10,4 cm. **45.** $21g$. **47.** (a) 5,00 s. (b) 61,5 m.
49. (a) 107 m. (b) 41,6 s. **51.** 183 m/s.
53. (a) 29,4 m. (b) 2,45 s. **55.** (a) 3,19 s. (b) 1,32 s.
57. (a) 27,4 m/s. (b) 5,33 m/s. (c) 1,45 m. **59.** 1,52 s.
61. 0,39 m.

Problemi

1. (a) 28 m. (b) 13 m. **3.** (a) $(3{,}0\text{ m})\boldsymbol{i} + (3{,}7\text{ m})\boldsymbol{j} + (4{,}3\text{ m})\boldsymbol{k}$.
(b) 6,5 m. (c) uguale o maggiore. (d) 26 ft.
5. (a) 72,0 km/h. (b) 68.8 km/h. (c) 70,7 km/h.
7. (a) Infiniti. (b) 87 km. **9.** (a) 28,5 cm/s.
(b) 18,0 cm/s. (c) 40,5 cm/s. (d) 28,1 cm/s. (e) 30,3 cm/s.
11. (a) 14 m/s; 18 m/s^2. (b) 6 m/s, 12 m/s^2; 24 m/s, 24 m/s^2.
13. No, la sua velocità era $\leq$ 38.5 km/h.
15. (a) 0,75 s. (b) 50 m. **17.** (a) 3,40 s. (b) 16,2 m.
19. 1,23; 4,90; 11,0; 19,6; 30,6 cm. **21.** (a) 110 km. (b) 330 s.
23. (a) 8,85 m/s. (b) 0,999 m. **25.** $96g$. **27.** 0,3 s.
29. 20,4 m. **31.** Approsimativamente $3{,}6h^{1/2}$, con h in metri.

CAPITOLO 3

Esercizi

1. 6,3 a. **3.** $1{,}0 \cdot 10^{-15}$ N. **5.** 0,080 m/s^2. **7.** 1,9 mm.
9. (a) 4,55 m/s^2. (b) 2,59 m/s^2. **11.** (a) 9,9 N. (b) 2,1 m/s^2. **13.** (a) 6860 N. (b) 4040 N.
15. (a) 12,2 N; 2,65 kg. (b) Zero; 2,65 kg. **17.** 68 kN.
19. $1{,}19 \cdot 10^6$ N. **21.** (a) 5400 N. (b) 5,5 s. (c) 15 m.
(d) 2,7 s. **23.** (a) 210 m/s^2. (b) $1{,}8 \cdot 10^4$ N.
25. Lasciarlo scendere con un'accelerazione maggiore di 1,3 m/s^2. **27.** 33 m/s. **29.** (a) $5{,}0 \cdot 10^5$ N. (b) $1{,}4 \cdot 10^6$ N.
31. (a) $2{,}2 \cdot 10^5$ N. (b) $5{,}0 \cdot 10^4$ N.

Problemi

1. (a) 0,28 μm. (b) 37 μm. **3.** (a) 1,8 m/s^2. (b) 3,8 m/s.
(c) 4,0 m. **5.** (a) 3260 N. (b) 2720 kg. (c) 1,20 m/s^2.
7. (a) 0,97 m/s^2. (b) 1,2 N. (c) 3,5 N.
9. (a) 1,23 N, 2,46 N, 3,69 N, 4,92 N. (b) 6,15 N. (c) 0,250 N.
11. (a) $P/(m + M)$. (b) $PM/(m + M)$.

CAPITOLO 4

Esercizi

1. (a) 2,4 ns. (b) 2,7 mm. (c) 9600 km/s, 2300 km/s.
3. (a) $(2Bt)\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k} = (8{,}0\text{ m/s}^2)t\boldsymbol{j} + (1{,}0\text{ m/s})\boldsymbol{k}$
(b) $2B\boldsymbol{j} = (8{,}0\text{ m/s}^2)\boldsymbol{j}$. (c) Una parabola.
5. $(0{,}83\text{ m/s}^2)\boldsymbol{i} + (0{,}71\text{ m/s}^2)\boldsymbol{j}$. **7.** (a) 2,2 m/s^2.
(b) 120 N. (c) 21, m/s^2. **9.** 11 m.
11. 6800 N a 21° rispetto alla linea del moto. **13.** (a) 0,294 s.
(b) 1,74 m/s. **15.** (a) 0,18 m. (b) 1,9 m. **19.** (a) 11 m.
(b) 23 m. (c) 17 m/s, −63°. **21.** 1 cm in più.
23. 23,5 m/s, 65°. **25.** (a) 0,20 m. (b) No. **27.** 35,0 m/s.
29. 1,47 N. **31.** (m/b) ln 2. **33.** (a) 257 kN. (b) 1,06°. **35.**
(a) 19 m/s. (b) 35 giri/min.
37. (a) 130 km/s. (b) 790 km/s^2. **39.** 36 s; no.
41. Vento verso est a velocità di 88 km/h.
43. (a) 0,70 s. (b) 0,68 m.

Problemi

1. 60°. **3.** (a) 8,44 km. (b) 59,0 km. **5.** (a) 1,16 s.
(b) 13,0 m. (c) 18,8 m/s; 5,56 m/s. (d) No. **7.** (a) 30 m.
(b) 27 m/s. (c) 54 m. **9.** Tra 31° e 63° sopra al piano

 ISBN 88-408-1254-7

orizzontale. **13.** 1,30 m/s.
15. (a) g. (b) $(mg/b)^{1/2}$. (c) $0.75g$.
17. (a) $ge^{-bt/m}$; g; 0. (b) $(mg/b)[t + (m/b)(e^{-bt/m} - 1)]$.
19. (a) 15 km. (b) 77 km/h. **21.** 220 m/s^2.
23. (b) Massimo: $v_x = 2\omega R$, $v_y = 0$; $a_x = 0$, $a_y = -\omega^2 R$. Minimo: $v_x = v_y = 0$; $a_x = 0$, $a_y = \omega^2 R$.
25. (da 2,976 a 2,991) $\cdot 10^8$ m/s.
27. 98,1 km/h, 15,1°.

CAPITOLO 5

Esercizi

1. (a) 0,0018 N. (b) 0,0033 N. **3.** (a) 7,3 kg. (b) 89 N.
5. (a) 6,8 m/s. (b) Arrampicandosi sulla corda. **7.** 18 kN.
9. 2°. **11.** 9,3 m/s^2. **13.** 900 N. **15.** (a) 9,1 kN.
(b) 9,0 kN. **17.** (b) 219 N. (c) 81 N. **19.** 0,040; 0,026.
21. 0,487. **23.** (a) 3,2 m/s^2, verso il basso. (b) 2,9 m.
(c) Vi resta. **25.** (a) 310 N. (b) 1,4 m/s^2. **27.** 155 N.
29. (a) Zero. (b) 4,0 m/s^2, verso il basso. (c) 1,3 m/s^2, verso l'alto. **31.** (a) 7,6 m/s^2. (b) 0,87 m/s^2. **33.** (a) 3200 N.
(b) 0,3. **35.** (a) 0,67 m/s. (b) 1,8 m/s^2. (c) 0,53 N.
37. (a) $2,2 \cdot 10^6$ m/s. (b) $9,1 \cdot 10^{22}$ m/s^2. (c) $8,3 \cdot 10^{-8}$ N.
39. $(Mgr/m)^{1/2}$. **41.** (a) 0,23. (b) 128 km/h.
43. 0,162; 0,295. **45.** (a) 9,5 m/s. (b) 20 m.
47. (a) 0,0337 N. (b) 9,77 N.

Problemi

1. (b) $-1,73$ m/s^2; 23,4 N. (c) $m_2 < 2,60$ kg; $m_2 > 2,60$ kg; $m_2 = 2,60$ kg. **5.** (a) 11,1 N. (b) 47,3 N. (c) 40,1 N.
7. (a) $\mu_k mg/(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$. (b) $\arctan\mu_s$. **9.** 490 N.
13. (a) 0,46. (b) 0,92. **15.** (a) 30 cm/s.
(b) 1,7 m/s^2, radialmente verso l'interno. (c) 2,9 mN.
(d) 0,40. **17.** (a) 8,74 N. (b) 37,9 N. (c) 6,45 m/s.
19. (b) 45°; 1,72 mrad. (c) Zero; zero.

CAPITOLO 6

Esercizi

1. (a) 52,0 km/h. (b) 178 km/h.
3. 205 kg · m/s; verso l'alto, normalmente alla lamiera.
5. (a) $2mv/\Delta t$. (b) 560 N. **7.** 3,29 kN. **9.** 930 N.
11. 8,8 m/s. **13.** $1,95 \cdot 10^5$ kg · m/s sempre in direzione della spinta. **15.** 2,0 s. **17.** Aumenta di 4,54 m/s. **19.** 3960 km/h.
21. 5,6 m/s verso sinistra. **23.** 1,77 m/s.
25. $(4,0 \text{ m/s})i + (5,0 \text{ m/s})j$.
27. 3,43 m/s, deviata di 17,3° verso sinistra. **29.** 100 g.
31. 1,2 kg. **33.** 120°. **35.** 2,44 m/s, verso sinistra.

Problemi

1. $1\mu u$. **3.** (a) 2,20 N · s. (b) 212 N. **5.** (a) 0,480 g.
(b) 7,2 kN. **7.** $mgR[(2h/g)^{1/2} + t]$; 41,0 N. **9.** (a) 130 t.
(b) 0,22 cm. (c) elastico. **11.** 59,7 km/h, 63,6° a S rispetto a W. **13.** 28,0°. (b) 7,44 m/s.
15. (a) 74,4 m/s. (b) 81,5 m/s; 84,1 m/s.
17. v_2 e v_3 formano un angolo di 30,0° rispetto a v_0 e hanno modulo di 6,93 m/s; v_1 è opposto a v_0 e ha modulo di 2,00 m/s.
19. (a) 746 m/s. (b) 963 m/s.
21. (a) A: 4,57 m/s; B: 3,94 m/s. (b) 7,53 m/s.

CAPITOLO 7

Esercizi

1. 4640 km (1730 km sotto la superficie terrestre). **3.** 75,2 km/h. **5.** (a) Non si muove. (b) 1,23 m. **7.** 4,5 m.
9. 33,4 m. **11.** $6,75 \cdot 10^{-12}$ m sull'asse di simmetria.
13. A distanza di $L/5$ dalla sbarretta più pesante, sull'asse di simmetria. **15.** $x_{cm} = y_{cm} = 20$ cm; $z_{cm} = 16$ cm. **17.** 27.
19. (a) 3,2 m/s. (b) 3,2 m/s. **21.** (a) 2,72. (b) 7,39.
23. 1,33 km/s. **25.** 1,29 m/s.

Problemi

1. (a) Verso il basso; $mv/(m + M)$. (b) Si trova nuovamente fermo. **3.** $g(1 - 2x/L)$.
5. (b) $(HM/m)[(1 + m/M)^{1/2} - 1]$.
7. (a) 540 m/s. (b) 40,4°. **9.** 60 N.
11. La più rapida: 49,5 N in più; la più lenta: nessuna variazione.

CAPITOLO 8

Esercizi

1. $n(n + 1)/2$. **3.** (a) $a + 3bt^2 - 4ct^3$. (b) $6t(b - 2ct)$.
5. (a) $\omega_0 + at^4 - bt^3$. (b) $\omega_0 t + at^5/5 - bt^4/4$. **7.** 14.
9. (a) 4,8 m/s. (b) No. **11.** $1/T_S = 1/T_P - 1/T_T$.
13. (a) 8140 giri/min^2. (b) 425 giri.
15. (a) $-1,28$ rad/s^2. (b) 248 rad. (c) 29,5 giri.
17. (a) 2,0 giri/s. (b) 3,8 s.
19. (a) 369 s. (b) $-3,90 \cdot 10^{-3}$ rad/s^2. (c) 108 s.
21. 0,132 rad/s.
23. (a) $2,48 \cdot 10^{-3}$ rad/s. (b) 19,7 m/s^2. (c) Zero.
25. (a) $7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s. (b) 355 m/s.
(c) $7,27 \cdot 10^{-5}$ rad/s; 463 m/s. **27.** (a) 310 m/s. (b) 340 m/s.
29. (a) $r\alpha^2 t^2$. (b) $r\alpha$. (c) 44,1°. **31.** No; + 0,16.
33. (a) $(-26,2 \text{ m/s})i$. (b) $(-4,87 \text{ m/s}^2)i - (375 \text{ m/s}^2)j$.
(c) 1,83 m.

Problemi

1. (a) 4,0 rad/s; 28 rad/s. (b) 12 rad/s^2.
(c) 6,0 rad/s^2; 18 rad/s^2. **3.** (b) 23 h 56 min. **5.** (a) 0,92 giri.
(b) 6,0 rad/s. **7.** (a) $1,99 \cdot 10^{-7}$ rad/s. (b) 29,9 km/s.
(c) 5,94 mm/s^2. **9.** (a) 3800 rad/s. (b) 190 m/s.
11. (a) 22,4 rad/s. (b) 5,38 km. (c) 1,15 h.
13. (a) $\omega b/\cos^2(\omega t)$ in qualsiasi direzione sul piano perpendicolare a ω (b) $\pi/(2\omega)$.

CAPITOLO 9

Esercizi

1. (a) 15 N · m. (b) 10 N · m. (c) 15 N · m.
5. 27 unità, nella direzione $+z$. **7.** $a^2 b \sin\phi$, $\pi/2 - \phi$.
9. $(-4,8 \text{ N} \cdot \text{m})i + (-0,85 \text{ N} \cdot \text{m})j + (3,4 \text{ N} \cdot \text{m})k$.
11. (a) 0,14 kg · m^2. (b) 91 rad/s^2.
13. (a) $2,6 \cdot 10^{-2}$ kg · m^2. (b) Nessuna variazione.
15. (a) 482 kN. (b) 11,2 kN · m.
17. $M(a^2 + b^2)/3$. **19.** $5mL^2 + (8/3)mL^2$. **23.** (a) 2,5 m.
(b) 7,3°. **25.** 10,4 m. **27.** 1500 N; 1900 N.
29. $P[h(2r - h)]^{1/2}/(r - h)$.
31. (a) 210 N. (b) 105 N; 55 N.
33. 7,63 rad/s^2, uscente dal piano della pagina.
35. (a) 28,2 rad/s^2. (b) 338 N · m. **37.** 690 rad/s.
39. $1,73 \cdot 10^5$ g · cm^2. **41.** (a) 56,5 rad/s. (b) $-8,88$ rad/s^2.
(c) 69,2 m. **43.** (a) 1,13 s. (b) 13,6 m.

Problemi

1. (a) Scivola; 31°. (b) Si ribalta; 34°. **3.** (a) $P(1 + r^2/L^2)^{1/2}$.
(b) Pr/L. **5.** (a) 269 N. (b) 874 N, 10,7° al di sopra della scala.
7. $F_1 = P \sin\theta_2/\sin(\theta_2 - \theta_1)$; $F_2 = P \sin\theta_1/\sin(\theta_2 - \theta_1)$; normale ai piani. **9.** (a) $L/2$, $L/4$, $L/6$. (c) $N = n$. **15.** (a)

$dm/M = 2r\,dr/R^2$. (b) $dI = 2Mr^3 dr/R^2$.
(c) $\frac{1}{2}MR^2$ **17.** 1,73 m/s^2; 6,92 m/s^2.
19. (a) $(2/3)\mu MgR$. (b) $(3/4)\omega_0 R/(4\mu g)$. **21.** (a) 10,7°.
(b) $0{,}186g$. **25.** (a) La sfera. (b) No.

CAPITOLO 10

Esercizi

1. 0,62 kg · m^2/s. **5.** $2{,}49 \cdot 10^{11}$ kg · m^2/s.
9. (a) 0,521 kg · m^2/s. (b) 4080 giri/min.
13. $v_f = 2{,}90$ m/s nella direzione dell'impulso;
$\omega_f = 10{,}7$ rad/s attorno al centro di massa. **15.**
$R_1R_2I_1\omega_0/(R_1^2I_2 + R_2^2I_1)$. **17.** 3,0 min. **19.** 354 giri. **21.**
171 giri/min. **23.** (a) 9,66 rad/s, in senso orario visto dall'alto.
(b) Il moto finale è come in (a). **25.** 0,739 rad/s.
27. 1,90 min.

Problemi

1. (a) 14,1 kg · m^2/s, uscente dal piano della pagina.
(b) 1,76 N · m, uscente dal piano della pagina. **7.** (a) 1,18 s. (*b*)
8,6 m. (c) 5,18 giri. (d) 6,07 m/s. **9.** Si allungherebbe di 0,4
s. **11.** $(I\omega - mRv)/(I + mR^2)$.

CAPITOLO 11

Esercizi

1. (a) 580 J. (b) 0. (c) 0. **3.** (a) 430 J. (b) −400 J. (c) 0.
5. (a) 2160 J. (b) −1430 J. **7.** 22,2°. **9.** −19. **11.** 720 W.
13. 24 W. **15.** 18 kW. **17.** (a) 1,2 km. (b) 71 kW.
19. 2,0 kW. **21.** 800 J. **23.** (a) 23 mm. (b) 45 N.
27. 1200 km/s. **29.** (a) $2{,}88 \cdot 10^7$ m/s. (b) 1,32 MeV.
31. (a) 493 J. (b) 168 W. **33.** (a) 340 kJ. (b) 10 kW. (c) 20
kW. **35.** $6{,}75 \cdot 10^{12}$ rad/s. **37.** 1,36 kW. **39.** (a)
$2{,}57 \cdot 10^{29}$ J. (b) 1,32 Ga.

Problemi

1. $2{,}1 \cdot 10^{-10}$ N. **3.** (a) 970 N. (b) 13 kJ. (c) 16 m.
(d) 13,2 kJ. **5.** (a) 320 kJ. (b) 0,46 CV.
9. (a) 10,0 kW. (b) 2,97 kW. **11.** (b) $3F_0x_0/2$. **13.** $15L_0$.
17. Uomo: 2,41 m/s; ragazzo: 4,82 m/s.
19. (a) $9{,}0 \cdot 10^4$ megaton di TNT. (b) 45 km. **23.** 0,0217.
25. 0,792. **27.** $K_a = 97{,}5$ J; $K_b = 941$ J.
31. (a) $mv_i/(m + M)$. (b) $M/(m + M)$. **33.** 700 J guadagnati.
35. (a) $m_1v_{1i}^2/2$. (b) $m_1^2v_{1i}^2/[2(m_1 + m_2)]$. (c)
$m_2/(m_1 + m_2)$. (d) $m_1m_2v_{1i}^2/[2(m_1 + m_2)]$; zero; 1; sì.

CAPITOLO 12

Esercizi

1. (a) $U(x) = -Gm_1m_2/x$. (b) $Gm_1m_2d/[x_1(x_1 + d)]$.
3. $U(x) = -[\alpha/(2\beta)]e^{-\beta x^2}$ con $U(\infty) = 0$. **5.** 110 MN/m.
7. 2,15 m/s. **9.** (a) v_0. (b) $(v_0^2 + gh)^{1/2}$ (c) $(v_0^2 + 2gh)^{1/2}$
11. (a) 7,63 N/cm. (b) 57,4 J.
13. (a) $K = \frac{1}{2}mg^2t^2$; $U = mg(h - \frac{1}{2}gt^2)$.
(b) $K = mg(h - y)$; $U = mgy$. **15.** 4,24 m. **19.** 1,25 cm.
21. $d[m_1/(m_1 + m_2)]^2$. **23.** $[2hmg/(m + I/r^2 + 2M/3)]^{1/2}$.
25. (a) 3,43 m. (b) 2,65 s. (*c*) 23,1. **27.** $v_0(5/7)^{1/2}$.
29. (a) 4,7 N. (b) $x = 1{,}2$ m e $x = 14$ m. (c) 3,7 m/s.
31. (a) $F_x = -kx$; $F_y = -ky$; F è diretta verso l'origine.
(b) $F_r = -kr$; $F_\theta = 0$.

Problemi

1. (a) $k/(z + l) - k/(z - l)$. **3.** (a) 105 cm. (b) 322 cm/s. **5.**
(a) $8{,}06mg$, con angolo di 172,9°. (b) $5R/2$. **7.** (a) 26,9 J.
(b) 19,7 m/s. **13.** $[9g/(4L)]^{1/2}$. **15.** $(2gr \sec\theta_0)^{1/2}$.

CAPITOLO 13

Esercizi

1. 740 m. **3.** 0,41 m/s. **5.** (a) 3,86 m/s. (b) 0,143 J.
7. (a) $2{,}56 \cdot 10^{12}$ J. (b) $3{,}82 \cdot 10^8$ J. **9.** 54 %. **11.** 4,19 m.
13. 6,55 m/s. **15.** 1,34 m/s; 0,981 m/s. **17.** (a) 862 N.
(b) 2,42 m/s. **19.** (a) 22,4 kN. (b) 12,5 kJ.
21. $[2E(M + m)/(Mm)]^{1/2}$.

Problemi

3. (a) 3,02 m/s. (b) 1,60 km/s. **5.** (a) $\frac{1}{2}ke^2(1/r_2 - 1/r_1)$
(b) $-ke^2(1/r_2 - 1/r_1)$. (c) $-\frac{1}{2}ke^2(1/r_2 - 1/r_1)$ **7.** (a) 0,298
J. (b) 0,008 J.

CAPITOLO 14

Esercizi

1. 2,16. **3.** $2{,}9 \cdot 10^{-11}$ N. **5.** 0,07 N.
7. (a) $1{,}33 \cdot 10^{12}$ m/s^2. (b) $1{,}79 \cdot 10^6$ m/s. **9.** (a) 0,05 %.
(b) $7 \cdot 10^{-4}$ s. **13.** $2{,}2 \cdot 10^5$ m/s. **17.** $1{,}55 \cdot 10^7$ m.
19. (a) $3{,}34 \cdot 10^7$ m/s. (b) $5{,}49 \cdot 10^7$ m/s. **21.** $(Gm/d)^{1/2}$.
23. $6{,}5 \cdot 10^{23}$ kg. **25.** 0,354 mesi lunari.
27. (a) 1,68 km/s. (b) 108 min. **29.** 58,3 km/s.
33. (a) $2\pi d^{3/2}/[G(4M + m)]^{1/2}$. (b) 2. (c) 2. **35.** (a) Sì.
(b) Sì. **37.** Verso sud, 48,4° sopra al piano orizzontale. **39.** (a)
5389 s. (b) 4,3 J/s.

Problemi

7. (a) $2{,}63 \cdot 10^6$ m. (b) $5{,}3 \cdot 10^9$ J. **9.** (b) 250 m, 50 m. (c)
293 m, 7 m. **11.** $(GMm/d^2)[1 - 1/8(1 - R/2d)^2]$.
13. (a) 9,83 m/s^2. (b) 9,84 m/s^2. (c) 9,79 m/s^2.
15. (b) 200 MN/m^2. (c) 180 km. **19.** 98,4 pJ.
21. (a) 1,02 a. (*b*) 87,6 km/s. **23.** (a) $3{,}32Gm^2/R^2$.
(b) $2\pi(R^3/3{,}32GM)^{1/2}$.
25. (a) $-GM_Tm/r$. (b) $-2GM_Tm/r$. (c) Cade verticalmente.
29. (a) 7,54 km/s. (b) 97,3 min.
(c) 405 km; 7,68 km/s; 92,3 min. (d) 3,18 mN.
31. $(GM/L)^{1/2}$.

CAPITOLO 15

Esercizi

1. 429 kPa. **3.** 27,5 kN. **5.** 41,2 kPa. **7.** 19,0 kPa.
9. 55,2 kPa. **11.** 0,412 cm. **13.** (a) 8,52 km. (b) 17,0 km.
19. (a) 35,6 kN. (b) $\Delta V = -0{,}0851$ m^3. **21.** 1070 g.
23. $2{,}0 \cdot 10^{-4}$. **25.** (a) 38,4 kN. (b) 40,5 kN. (c) 2,35 kN.
(d) 2,08 kN. **27.** 4,74 MN. **29.** Quattro. **31.** 0,031.
33. 78 m. **35.** 54,3 mN.

Problemi

1. (b) 26,6 kN. **3.** (a) $\rho gLH^2/2$. (b) $\rho gLH^3/6$. (c) $H/3$.
5. 43,5 km. **7.** (b) a.
9. (b) $p = \rho gh$. **13.** 56,1 cm. **15.** 0,190. **17.** 2,79 g/cm^3.
21. 3,71 mm.

CAPITOLO 16

Esercizi

1. 1 h 49 min. **3.** 3,9 m. **5.** 1,1 m/s. **7.** (a) 16,5 bar.
(b) 295 cm^2. **9.** (a) 0,81 mm^2. (b) 440 L/d. **11.** (a) 560 Pa.
(b) 52 kN. **13.** 30,4 L/s. **15.** 63 m/s. **19.** (a) 87,5 N.
(b) 172 m^3. **21.** $\frac{1}{2}\rho v^2A$. **25.** 71,6 L/s.

Problemi

1. 3,4 m/s. **3.** (b) $H - h$. (c) $\frac{1}{2}H$; H. **5.** (c) $\frac{1}{2}\rho(v_1 - v_2)^2$.

 ISBN 88-408-1254-7

7. 410 m/s; $v_{suono} = 340$ m/s.
9. (a) $v_1 = 4{,}46$ m/s; $v_2 = 21{,}2$ m/s. (b) $9{,}47 \cdot 10^{-3}$ m^3/s.

CAPITOLO 17

Esercizi

1. 0,289 s. **3.** >455 Hz. **5.** (a) 1,00 mm. (b) 75,4 cm/s. (c) 568 m/s^2. **7.** (a) 3,27 m. (b) 4,33 m/s. (c) -230 m/s^2. (d) 1,33 Hz. (e) 0,750 s. **9.** 7,73 m/s. **11.** 2,08 h. **13.** (a) 5,27 Hz. (b) 415 g. (c) 42,5 cm. **15.** (a) 1,07 Hz. (b) 4,73 cm. **17.** (b) 3,21 s. **19.** (a) 6,97 MN/m. (b) 48500. **21.** (a) 3,04 ms. (b) 3,84 m/s. (c) 90,7 J. **23.** (a) 0,319 m. (b) 34,4°. **25.** 0,249 m. **27.** (a) 33°. (b) $9 \cdot 10^{-4}$. **29.** 9,78 m/s^2. **31.** 8,35 s. **33.** (a) 0,436 Hz. (b) 1,31 m. **35.** 12,1 s. **37.** 1,22 v_0. **41.** (a) Retta, $y = \pm x$. (b) Ellisse, $y^2 - \sqrt{3}xy + x^2 = A^2/4$. (c) Circonferenza: $x^2 + y^2 = A^2$. **43.** $5{,}22 \cdot 10^{11}$ N/m. **51.** 1,9 in. **53.** 0,362 s.

Problemi

1. 708 N/m. **3.** 0,119 m. **7.** (a) 7,20 N/cm. (b) 4,43 kg. **11.** $mv[k(m + M)]^{-1/2}$. **13.** (a) 5,60 J. (b) 2,80 J. **15.** 0,906 s. **17.** (a) $2\pi[(L^2 + 12d^2)/(12gd)]^{1/2}$. **19.** (b) R. **21.** (a) 2,00 s. (b) 18,5 N · m/rad. **23.** (b) $(GM/R^3)^{1/2}/(2\pi)$. (c) 10^{-16} Hz. **25.** (a) $k = 490$ N/cm; $b = 1100$ kg/s.

CAPITOLO 18

Esercizi

1. (a) 7,43 kHz. (b) 135 μs. **3.** (a) 0,712 s. (b) 1,40 Hz. (c) 1,93 m/s. **7.** (a) 6,0 cm. (b) 1,0 m. (c) 2,0 Hz. (d) 2,0 m/s. (e) direzione $-x$. (f) 0,75 m/s. **9.** 135 N. **11.** (a) 5,0 cm. (b) 40 cm. (c) 12 m/s. (d) 33 ms. (e) 9,4 m/s. (f) $y = (5{,}0\text{ cm}) \sin[(15{,}7\text{ rad/m})x + (190\text{ rad/s})t + 0{,}93\text{ rad}]$. **13.** 7,54 m da dove è partito il primo impulso. **15.** 198 Hz. **17.** 4,0 kW. **19.** 68,8°; 1,20 rad. **25.** (a) 8,.4 m/s. (b) 16,7 m. (c) 4,87 Hz. **27.** (a) -3, 9 cm. (b) $y = (0{,}15\text{ m}) \sin[(0{,}79\text{ rad/m})x + (13\text{ rad/s})t]$. (c) -14 cm. **29.** (a) 1,.25 m. (b) $y = (3.80\text{ mm}) \sin[(10.1\text{ rad/m})x] \cos[(3910\text{ rad/s})t]$. **31.** 7,47 Hz; 14,9 Hz; 22,4 Hz. **33.** 480 cm; 160 cm; 96 cm.

Problemi

1. (a) 10,9 cm. (b) 199°. **3.** (b) 304 m/s. **7.** (a) $k\Delta L(L + \Delta L)/m]^{1/2}$ **11.** 8,5 %. **15.** 1,18 m/s. **21.** 36,8 N.

CAPITOLO 19

Esercizi

1. (a) 600 cm/s. (b) $(0{,}30\text{ cm}) \sin[(0{,}26\text{ rad/cm})x + (160\text{ rad/s})t]$. **3.** (a) 76,2 μm. (b) 333 μm. **5.** (a) 57 nm. (b) 35. **7.** 170 m. **9.** 1800 km. **11.** 4,47 W. **13.** 0,0271 J. **17.** 51,9 nJ/m^3. **19.** 190 dB. **1.** 63 dB. **23.** 18,4 cm. **25.** 64,4 Hz, 129 Hz. **27.** (a) $L(1 - 1/r)$. (b) 13,3; 16,0; 20,0; 26,7 cm. **29.** 11,9 m. **31.** 188 Hz. **33.** (a) 405 m/s. (b) 611 N. **35.** 5,0 cm da un estremo. **37.** 387 Hz. **39.** 505, 507, 508 Hz oppure 501, 503, 508 Hz. **41.** 17,4 kHz. **43.** (a) 522 Hz. (b) 554 Hz. **45.** 570 m/s. **47.** 160 Hz. **49.** (a) 464 Hz. (b) 490 Hz. **51.** 41,2 kHz.

Problemi

1. (a) $L(v_{aria} - v)/(v_{aria}v)$. (b) 43,5 m. **3.** (a) 44,2 μW/m^2. (b) 164 nm. (c) 0,894 Pa. **5.** (a) $\propto r^{-1}$. (b) $\propto r^{-1}$ ².
7. (a) 66,8 μW/m^2. (b) 5,02 nW. (c) 7,53 μJ. **9.** 346 m. **13.** 45,4 N. **15.** $2.65 \cdot 10^8$ m/s. **17.** 7,16 km. **19.** (a) 1050 Hz. (b) 1070 Hz. **21.** (a) 2000 Hz. (b) 2000 Hz.

CAPITOLO 20

Esercizi

1. (a) 710 ps. (b) $2{,}5 \cdot 10^{-18}$ m. **3.** 1,30 m. **5.** 0,445 ps. **7.** (a) 87,4 m. (b) 394 ns. **9.** (a) 15,8 km/s. (b) $6{,}95 \cdot 10^{-10}$. **11.** 0,75. **13.** (a) $x' = 3{,}78 \cdot 10^7$ m; $t' = 2{,}26$ s. (b) $6{,}54 \cdot 10^8$ m; 3,14 s. **15.** (a) $v'_x = -u; v'_y = c(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ **17.** (a) $0{,}347c$. (b) $0{,}619c$. **19.** (a) $0{,}933c$; 31,0° verso est rispetto a sud. (b) $0{,}933c$; 59,0° verso overst rispetto a nord. **21.** 6,29 cm. **23.** 1,23 μs. **25.** (a) 26,3 a. (b) 52,3 a. (c) 4,06 a. **29.** (a) 0,999165. (b) 0,0133. **31.** (a) 0,9988; 20,6. (b) 0,145; 1,01. (c) 0,073; 1,0027. **33.** 21,2 masse solari all'anno. **35.** (b) $v/c < 0{,}115$. **37.** $\sqrt{8}mc$. **41.** (a) 996 eV. (b) 1,05 MeV. **43.** (b) $0{,}796c$.

Problemi

1. (a) $2{,}60 \cdot 10^8$ m/s. (b) 2. **3.** (a) 25,8 μs. (b) La luce rossa (dopo aver subito spostamento Doppler). **7.** 7. **9.** 2,43 μs. **11.** (a) 4,00 μs. (b) 2,50 μs. **13.** (b) $K = p^2/(2m)$. (c) $206m_e$. **15.** (a) $c[(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]^{1/2}$. (b) $m[2(\gamma + 1)]^{1/2}$. **17.** (b) 202 GeV. (c) 49,1 GeV. **19.** $1 + (2\gamma_1 + 1)^{1/2}$ dove $\gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$

CAPITOLO 21

Esercizi

1. (a) $T_R = (9/5)T_C + 491{,}69$. (b) 671,69 °R; 491,69 °R. **3.** (a) $T_Q = T_C + 273{,}15$. (b) 373,15 °Q; 273,15 °Q. (c) La scala Kelvin. **5.** No; 310 K = 36,9 °C. **7.** 291,1 K. **9.** 31,2. **11.** 0,073 cm Hg; azoto. **13.** 0,98 mm. **15.** 6,2 mm. **17.** (a) 13,9 cm^2. (b) 115 cm^3. **19.** (a) $1{,}6 \cdot 10^{-4} \cdot \text{K}^{-1}$. (b) Zero. **21.** $2{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot \text{K}^{-1}$. **27.** 360 °C. **29.** 909 g. **31.** (a) Zero. (b) − 0,36 %. (c) − 0,36 %. **33.** + 0,68 s/h. **35.** 0,17 mm. **37.** (a) 22,5 L. **39.** (a) 113 mol. (b) 900 L. **41.** 26,9 lb/in^2. **43.** 104 cm^3.

Problemi

7. (b) Acciaio: 71 cm; ottone: 41 cm. **9.** 998,4 kg/m^3. **11.** 66,4 °C. **13.** 0,27 mm. **15.** (a) 70 cm. (b) 1,2 m. **17.** 1.75 bar. **21.** 152 kPa.

CAPITOLO 22

Esercizi

1. (a) 0,0130 mol. (b) $7{,}23 \cdot 10^{21}$. **3.** (a) 39,9 L. (b) 74,4 g. **5.** $4{,}34 \cdot 10^{-5}$. **7.** (a) 531 m/s. (b) 0,472 mol/m^3. (c) 28 g/mol; N_2. **9.** (a) $2.69 \cdot 10^{25}$. (b) 0,171 nm. **11.** 3,86 GHz. **13.** −12 °C. **15.** (a) 420 m/s; 458 m/s; sì. **17.** 180 m/s. **21.** 1.5 cm/s. **23.** (a) 10 000 K; 160 000 K. (b) 440 K; 7000 K. **25.** 13,9 giri/s. **29.** $3{,}09 \cdot 10^{-3}$. **31.** $3{,}8 \cdot 10^{-5}$ m^3/mol.

Problemi

1. 0,76. **3.** 1/5. **5.** (a) 1,67. (b) $49{,}5 \cdot 10^{-6}$ cm. (c) $7{,}87 \cdot 10^{-6}$ cm. **7.** 4,71. **9.** (a) $3N/v_0^3$ (b) $0{,}750v_0$ (c) $0{,}775v_0$. **13.** (a) $(N_a + N_b)kT/V$. (b) $\frac{1}{2}$. **15.** 89,0 °C. **17.** (a) $V/n = [a \pm (a^2 - 4abRT)^{1/2}]/(2RT)$ (c) 131 K.

CAPITOLO 23

Esercizi

1. 720 °C. **3.** (a) 546 °C/m. (b) 394 kW. (c) 63.9 °C. **5.** *b*. **7.** 1,15 m. **9.** (a) 1,8 W. (b) 0,025 °C. **11.** (a) − 6,0 J. (b) − 43 J. (c) 40 J. (d) 18 J; 18 J. **13.** 44,5 m^3. **15.** 107 g. **17.** (a) 75,4 kJ. (b) 4,46 kJ. (c) 757 °C. **19.** (a) 117 s. (b) 718 s. **21.** 4,81 g. **23.** (a) 542 J/(kg · K). (b) 0,722 mol. (c) 27,9 J/(mol · K). **25.** $L_1 = 45$ kJ; $L_2 = -45$ kJ. **27.** 1,14 kJ. **29.** (a) 8,47 bar. (b) 544 K. (c) 966 J. **31.** 2480 J. **33.** (a) 1,20. (b) 105 °C. (c) 628 mol. (d) 1,96 MJ; 2,96 MJ. (e) 0,813. **35.** 11,3 kJ. **37.** (a) 7880 J. (b) 5630 J. (c) 3380 J. **39.** $(n_1C_1 + n_2C_2 + n_3C_3)/(n_1 + n_2 + n_3)$. **41.** $nRT\ln(V_f/V_i)$. **43.** (a) 1090 °C. (b) 460 °C. **45.** (a) $-1{,}5nRT_1$. (b) $4{,}5nRT_1$. (c) $65nRT_1$. (d) $2R$. **47.** (a) 15,9 J. (b) 34,4 J/(mol · K). (c) 26,1 J/(mol · K).

Problemi

1. (a) 24 kW. (b) 24 W. **7.** (a) 5,26 °C; non resta ghiaccio. (b) 0 °C; 62.0 g di ghiaccio rimasto. **9.** (a) $6{,}75 \cdot 10^{-20}$ J. (b) 10,7. **11.** 1,2 kJ. **13.** 265 K. **15.** (a) 2,95 cm. (b) 2,11 cm. **17.** Biatomico. **19.** (a) *AB*: 3740 J, 3740 J, 0 J; *BC*: 0 J, −1810 J, −1810 J; *CA*: −3220 J, −1930 J, 1290 J; ciclo: 520 J, 0 J, −520 J. (b) $p_B = 2{,}00$ atm; $V_B = 0{,}0246$ m^3; $p_C = 1{,}00$ atm; $V_C = 0{,}0373$ m^3. **21.** 12,0 kW.

CAPITOLO 24

Esercizi

1. 18,7 kJ. **3.** (a) 200 J. (b) − 75 J. **5.** (a) 37,7 kJ. (b) 112 J/K. **7.** 3,0 mol. **9.** (a) 1,06 J/K. (b) No. **11.** (a) − 926 J/K. (b) 926 J/K. **13.** (a) 30,9 %. (b) 16,2 kJ. **15.** 25,4 %. **17.** (a) 2090 J. (b) 1510 J. (c) 1510 J. **21.** (a) 1,64 bar. (b) 43,7 %. **23.** (a) 217 kJ. (b) 32,5 kJ. **25.** (a) 0,714 J. (b) 5,00 J. (c) 20,0 J. (d) 50,0 J. **27.** 21 J. **29.** (a) 113 J. (b) 305 J. **31.** 6.8. **33.** $(1 - T_2/T_1)/(1 - T_4/T_3)$. **35.** (a) 1 (b) $N!/[(N/2)!]^2$

Problemi

1. 44 mJ/K. **3.** (a) $3p_0V_0$. (b) $6p_0V_0$; $(3R/2)\ln 2$ (c) Entrambe sono nulle. **5.** Percorso I: $Q_T = p_0V_0\ln 2$, $Q_V = (9/2)p_0V_0$; Percorso II: $Q_T = -p_0V_0\ln 2$, $Q_p = (15/2)p_0V_0$. (b) Percorso I: $L_T = -p_0V_0\ln 2$, $L_V = 0$; Percorso II: $L_T = p_0V_0\ln 2$, $L_p = 3p_0V_0$. (c) $(9/2)p_0V_0$ in tutti i processi. (d) $4R\ln 2$ in tutti i processi. **7.** (a) $T_2 = (m_1c_1T_{1i} + m_2c_2T_{2i} - m_1c_1T_1)/m_2c_2$. (b) $S = m_1c_1\ln T_1/T_{1i} + m_2c_2\ln[(m_1c_1T_{1i}/m_2c_2 + T_{2i} - m_1c_1T_1/m_2c_2)/T_{2i}]$. **9.** (a) 7200 J. (b) 960 J. (c) 13 %. **11.** (c) 1,15 kJ.

FONTI DELLE ILLUSTRAZIONI

Capitolo 1
Pagina 4: National Institute of Standards and Technology, Boulder Laboratories, U.S. Department of Commerce. Pagina 6: National Institute of Standards and Measures. Pagina 12: ©Stephen Pitkin.

Capitolo 2
Pagina 33: T.M. Niebauer, Micro-g Solutions. Pagina 35 (sinistra): NASA. Pagina 35 (destra): Baltimore Office of Promotion and Tourism. Pagina 39: Marriott Marquis, NYC. Pagina 42 (sinistra): E.H. Wallop/The Stock Market. Pagina 42 (destra): ©Photo by John Tlumacky, The Boston Globe. Con permesso di riproduzione.

Capitolo 3
Pagina 50: Vernier Software & Technology. Pagina 58: NASA. Pagina 59: Robert Markowitz/Foto Fantasies. Pagina 64 (in alto a sinistra): NASA. Pagina 64 (in alto a destra): Courtesy National Archive. Pagina 64 (in basso): Hale Observatories. Pagina 66 (in basso a sinistra): Jerry Schad/Photo Researchers. Pagina 66 (in alto a destra): Courtesy Department of Defense. Pagina 66 (in basso a destra): Photo by Eugenio P. Redmond. USA ADIA. Pagina 67 (in alto): Boeing Corporation. Pagina 67 (al centro): NASA.

Capitolo 4
Pagina 69: Education Development Center.

Capitolo 5
Pagina 101: Da *Friction and Lubrication of Solids* di F.P. Bowden e D. Tabor, Clarendon Press, 1950. Pagina 109: ©PhotoDisc, Inc. Pagina 114: ©Shilo Sports/FPG International. Pagina 117: Photo Disc.

Capitolo 6
Pagina 123: ©Estate of Harold E. Edgerton, Palm Press. Con permesso di riproduzione. Pagina 124 (in alto a sinistra): Education Development Center. Pagina 124 (in alto a destra): CERN. Pagina 124 (in basso): NASA. Pagina 125: H.P. Merten/The Stock Market. Pagina 136: ©Charles Gupton/The Stock Market. Pagina 138: George Gerster/Comstock, Inc. Pagina 139: Superman è un marchio registrato della DC Comics ©2001. Tutti i diritti riservati. Con permesso di riproduzione. Pagina 142: Arbor Scientific.

Capitolo 7
Pagina 144: Foto di Manfred Bucher e Randy Dotta-Dovidio. Pagina 159: ©Lois Greenfield. Pagina 161: ©United Feature Syndicate.

Capitolo 8
Pagina 165: K. Bendo. Pagina 173: Riprodotta col permesso di The Courier-Journal and The Louisville Times. Pagine 177 e 180: NASA.

Capitolo 9
Pagina 204 (in alto): Education Development Center. Pagina 204 (in basso): Alice Halliday. Pagina 213: Corbis-Bettmann. Pagina 214: Lawrence Livermore Laboratory.

Capitolo 10
Pagina 231: NASA/Photo Researchers.

Capitolo 11
Pagina 246: William Sallaz/Duomo/Corbis. Pagina 265: ©UPI/Corbis-Bettman.

Capitolo 12
Pagina 277: Joseph Nettis/Photo Researchers. Pagina 287: Richard Martin/Allsport.

Capitolo 13
Pagina 310: NASA.

Capitolo 14
Pagina 328: NASA. Pagina 331(in alto): Lick Observatory. Pagina 331 (in basso): Mt. Wilson & Palomar Observatories.

Capitolo 15
Pagina 355: Mark Antman/Image Works. Pagina 357: NASA. Pagina 361: Goodyear Tire & Co.

Capitolo 16
Pagina 366: Andy Sacks/Stone. Pagina 374: Foto di A.D. More, University of Michigan. Da W.E. Rogers, *Introduction to Electric Fields,* McGraw-Hill, 1954. Pagina 377 (in alto: Richard Megna/Fundamental Photographs. Pagina 377 (in basso): Imperial College, London. Pagina 378: Professor Harry Swinney, University of Texas, Austin.

 ISBN 88-408-1254-7

Capitolo 17
Pagina 404: AP/Wide World Photos. Pagina 412: NASA.

Capitolo 18
Pagina 419: G. White/Photo Researchers. Pagina 430: Clifford Swartz. Pagina 435: Education Development Center.

Capitolo 19
Pagina 457: Thomas D. Rossing, Northern Illinois University. Pagina 462: U.S. Army Ballistic Research Laboratory. Pagina 463: Bose Corporation. Pagina 465: Foto di C.F. Quate. John S. Foster, Stanford University.

Capitolo 21
Pagina 505: AP/Wide World Photos. Pagina 515: Neil Rabinowitz/Corbis Images.

Capitolo 22
Pagina 515: European Space Agency/Photo Researchers.

Capitolo 23
Pagina 539: Alice Halliday.

INDICE ANALITICO

A

accelerazione 16, 21, 78
  angolare istantanea 168
  angolare media 168
  centripeta 78, 175
  di gravità 30, 32, 318
  istantanea 22
  media 21
  radiale 79
  tangenziale 175
acustica 445
adesione fra superfici 101
adiabatica 548
  trasformazione 548, 554
adiabatico 499
aeriformi 345
aerodinamica 77
  resistenza 77
afelio 326
agitazione termica 517
ambiente esterno 542
ampiezza 388, 420
  modulazione di 458
amplificazione, fattore di 512
analisi
  di Fourier 425, 429
  dimensionale 8
annichilazione 472
anno-luce 11
anomalie gravimetriche 341
antinodo 431
aperiodico, moto 378
apogeo 326
applicazione, punto di 299
approssimazione di Stirling 582
Archimede
  principio di 352
  spinta di 353
armonica
  fondamentale 455
  oscillazione 389
  superiore 455
arricchimento 521
asse
  di rotazione 223
  fisso 171
  moti rotatori attorno a un – fisso 183
assenza di peso 58
atmosferica, pressione 349
atomica
  natura 517
  teoria 518
attenuazione 402
attrito
  coefficiente di 101
  dinamico 100
  forza di 99
  statico 100
Atwood
  macchina di 98
Avogadro
  legge di 509
  numero di 509
azione 54
  a distanza 330
  e reazione 54

B

bang supersonico 462
barometro 355
barriera del suono 462
battimento 458
Bernoulli, equazione di 368
bersaglio, tiro al 75
bilancia di torsione 317, 395
bimetallo 505
Boltzmann
  equazione dell'entropia di 582
  fattore di 527
Boyle-Mariotte, legge di 509
braccio 185
browniano, moto 517

C

caduta 24
  libera 30
calore 306, 537, 542
  di evaporazione 545
  di fusione 545
  latente di trasformazione 545
  specifico 544
    molare 551
    molare a pressione costante 552
    molare a volume costante 552
    rapporto di 548, 552
  trasmissione del 538
calori specifici, rapporto dei 450
caloria 308
  equivalente meccanico della 308
cammino
  casuale 518
  libero – medio 521
campo 330
  di flusso 373
  gravitazionale 330
  intensità del 330
  scalare 330
  statico 330

 ISBN 88-408-1254-7

vettoriale 330
caos 111
capacità
termica 544
molare 545
Carnot
ciclo di 574
macchina di 573
cavallo-vapore 248
Cavendish 317
Celsius, grado 501
centripeta 78
accelerazione 78
forza 78
centro
di galleggiamento 353
di massa 143, 150, 196
di massa, energia del 301
di oscillazione 398
di percussione 398
di spinta 353
riferimento del – di massa 132
Čerenkov, radiazione 461
CGPM 1
Charles, legge di 509
ciclo 573
di Carnot 574
cicloide 91
cifre
precisione e – significative 7
significative 7
cinematica 16, 22
coefficiente
del viriale 528
di attrito 101
di Fourier 429
di viscosità 375
collisione 124
compensazione, livello di 362
componenti 16
vettoriali 17
compressione 446, 574
comprimibilità, modulo di 347
concordanza di fase 430
condizione di risonanza 404
conducibilità
idraulica 12
termica 539
conduzione termica 538
configurazione 581
di un sistema 274
cono
conservazione
del momento angolare 228
dell'energia 298, 489
meccanica 275
della quantità di moto 128, 152
principio di – della massa 367
contatto, forze di 96
continuità, equazioni di 367
contrazione, della lunghezza 476
convezione 541
naturale 541
coordinate spaziotemporali 479
Copernico 313
corda vibrante 455
Coriolis, forza di 109, 176
corpo rigido
dinamica di 201
momento d'inerzia di un 192
statica di 197
costantana 503
costante
(molare) dei gas 509
del moto 328
della molla 251
di fase 392, 422
di torsione 396
elastica 251
gravitazionale 316
curva sopraelevata 105

D

Dalton, legge di 535
decadimento, processi di 305
decibel 451
densità 347
derivata parziale 421
deviazione della luce 334
diagramma
delle forze 53
di fase 362
p-V 547
diatermico 500
differenza di fase 452
dilatazione
coefficiente di – lineare 506
del tempo 471, 475
lineare 506
termica 505, 507
volumica 507
dimensione 8
dinamica
dei corpi rigidi 201
dei moti rotatori 224, 234
dinamòmetro 50
discontinuità Moho 342
disordine 582
dispersione 424
dispersivo, mezzo 423
distribuzione
delle energie 526
delle velocità 525
molecolari 523
di Maxwell-Boltzmann 526
Doppler
effetto 459
spostamento 482

E

ebollizione, punto di 505
eccentricità 326
effetto
Coriolis 109
Doppler 459
trasverso 483
efficienza 577
Einstein, postulati di 474
elettronvolt 246
eliocentrico, sistema 335
energia 243
a riposo 488
cinetica 244, 253
negli urti 259
rotazionale 258, 550
traslazionale per molecola 524
conservazione dell'– meccanica 275
conservazione dell' 298, 489
del centro di massa 301
di dissociazione 282
di legame 325
distribuzione delle 526
in moto armonico semplice 393
interna 295, 542, 550
meccanica totale 276
nel moto rotatorio 278
potenziale 274, 304, 325
elastica 274
gravitazionale 274, 322
interna 304
superficiale 356
variazioni di 323
relativistica 487
teorema dell'– cinetica 253
totale relativistica 488
trasferimento di 306
trasferita 307
trasportata da un'onda 426
entropia 568, 580

entropica, variazione 568
epicicli 313
equazione
  dell'entropia di Boltzmann 582
  delle onde 425
  di Bernoulli 368
  di stato del gas perfetto 509
  di stato di van der Waals 528
equazioni di continuità 367
equilibrio
  assenza di 556
  indifferente 281
  instabile 281
  posizioni di 198
  stabile 281
  stato di 542
  termico 499
equinozi, precessione degli
equipartizione, teorema dell'– dell'energia 551
equivalente meccanico della caloria 308
equivalenza, principio di 332
errore
  assoluto 7
  relativo 7
espansione 574
  libera 555
esperienza di Joule 308
ettaro 11
evaporazione, calore di 545

F

faglie 40
fase 392, 420, 422
  concordanza di 430
  costante di 392, 422
  differenza di 430, 452
  opposizione di 430
  velocità di 420
fattore
  di amplificazione 512
  di Lorentz 478
fisica classica 471
fissione spontanea 488
Fizeau, interferometro di 181
fluidi 345
fluido
  incomprimibile 366
  irrotazionale 366
  motore 573
flusso
  campo di 373
  caotico 378
  laminare 375
  linea di 366
  tubo di 366
  uniforme rotazionale 373
forza 46, 49
  centrifuga 108
  centripeta 78, 108
  conservativa 271
  d'attrito 272, 296
  di Coriolis 109, 176
  di galleggiamento 353
  di gravità 271
  di marea 340
  di richiamo 250, 390
  di sollevamento dinamico 371
  di taglio 345
  dissipativa 299
  elastica 271
  elettrodebole 93, 492
  elettromagnetica 93
  gravitazionale 93
  impulsiva 123
  intermolecolare 530
  lavoro di una – esterna 293
  lavoro svolto da una – costante 244
  lavoro svolto da una – elastica 250
  lavoro svolto da una – variabile 249
  leggi della 46
  media 126
  molecolare 530
  momento di una 183
  netta 52
  normale 96
  nucleare debole 93
  nucleare forte 93
  superficiale 356
  tangenziale 345
  viscosa 77, 366
forze 93
  di attrito 99
  di contatto 96
  diagramma delle 53
  dipendenti dal tempo 106
  esterne 144
  fittizie 107
  inerziali 108
  interne 144
  leggi delle 93
  newtoniane 108
  normali 94
  risultante delle 52
  unificazione delle 93
fotosfera 541
Fourier
  analisi di 425, 429
  coefficienti di 429
  integrale di 429
  serie di 429
frattale 518
frenata, spazio di 103
frequenza 388, 421
  angolare 392, 421
  fondamentale 455
  naturale 404
frigorifero 577
  ideale 577
fronte d'onda 418
fusione
  calore di 545
  punto di 505

G

galleggiamento
  centro di 353
  forza di 353
gas
  biatomico 551
  costante (molare) dei 509
  ideale 504, 508
  monoatomico 551
  perfetto 504, 508, 518
    equazione di stato del 509
    legge del 509, 524
  poliatomico 551
Gay-Lussac, legge di 509
geocentrico, sistema 335
geosincrona, orbita 327
geostazionario, satellite 327
giroscopico, effetto 230
giroscopio 233
gittata 73
gradiente di temperatura 539
grado
  Celsius 501
  Fahrenheit 502
grande unificazione, teorie della 93
grandezza 1
  estensiva 585
  intensiva 585
gravimetro 33
gravità
  accelerazione di 30, 32, 318
  artificiale 58
  momento torcente dovuto alla 195

 ISBN 88-408-1254-7

gravitazionale
lente 334
onda 334
gravitazione 313
legge di Newton della – universale 314
teoria della 330
gruppo, velocità di 424
guadagno 512
gusci, teoremi dei 319

H

Hooke, legge di 251
Huygens-Steiner, teorema di 190

I

impulso 125
teorema dell' 126
inerzia 47
legge di 47
momento di 184
rotazionale 184
infrasuoni 445
intensità 15, 427, 451
del campo 330
interazione debole 492
interferenza 429, 452
costruttiva 430
distruttiva 430
temporale 458
interferometro di Fizeau 181
inversione, punto di 388
inverso, legge dell'– del quadrato 315
ipertono 455
irradianza 428
irraggiamento 541
irreversibile, processo 567
isobara 548
isocòra 555
trasformazione 555
isolante termico 499
isoterma 548
trasformazione 555
isòtropa, sostanza 506

J

joule 246
esperienza di 308

K

Kelvin
Keplero 314
kilogrammo 6

L

laboratorio, riferimento del 132
laminare, flusso 375
lavoro 243, 245, 542, 546
esterno 294
interno 294
totale 253
legge 46
dei periodi 327
del gas perfetto 509, 524
del raffreddamento di Newton 514
dell'inverso del quadrato 315
delle aree 326
delle orbite 326
di Avogadro 509
di Boyle-Mariotte 509
di Charles 509
di Dalton 535
di Gay-Lussac 509
di gravitazione 313
di Hooke 251
di Keplero 326
di Newton della gravitazione universale 314
di Poiseuille 376
di Torricelli 382
invariante 256
prima – della termodinamica 542
prima – di Newton 46
seconda – di Newton 52
terza – di Newton 54
zero della termodinamica 500
leggi 70, 93
delle forze 46, 93
di Newton 70
lente gravitazionale 334
leva idraulica 351
libera, espansione 555
libero cammino medio 521
linea di flusso 366
liquidi 345
livello
di compensazione 362
sonoro 451
Lorentz
fattore di 478
parametro di 478
trasformazione di 478
trasformazioni inverse di 479
Loschmidt, numero di 513
luce
deviazione della 334
velocità della 5
lunghezza 4
a riposo 476
campione di 4
contratta 476
contrazione della 476
d'onda 420
di Planck 9
propria 476
relatività della 475, 483

M

macchina
di Atwood 98
di Carnot 573
frigorigena 577
di Carnot 577
reale 579
termica 573
Mach
cono di 462
numero di 462
manometro 355
marea, forza di 340
massa 6, 50, 332
campione di 6
di Planck 9
gravitazionale 332
inerziale 332
lineica 423
molare 519
principio di conservazione della 367
ridotta 406
unità di – atomica 6
variabile 154
volumica 347
massica, portata 367
materia
condensata 345
oscura 331
Maxwell, distribuzione di 523, 526
meccanica statistica 580
Mercurio, precessione del perielio di 334
mese
lunare 11
sidereo 11

metro 1, 5
mezzo 75
  di trasmissione 424
  dispersivo 423
  resistenza del 75
microgravità 59
microstati 581
misura 1
  campioni di unità di 1
moderatore 255
modulazione d'ampiezza 458
modulo 15
  di comprimibilità 347
Moho, discontinuità 342
mole 6
molla, costante della 251
molteplicità 581
momento
  angolare 219, 224
    conservazione del 228
  d'inerzia 184, 187
    dei corpi rigidi 192
  della forza 183
  della quantità di moto 219
  lineare 125
  torcente 183, 222, 226
    dovuto alla gravità 195
  totale d'inerzia 189
moti rotatori, dinamica dei 224, 234
moto 48, 69
  accelerato 23
  aperiodico 378
  armonico angolare semplice 396
  armonico semplice 389, 400
    energia in un 393
    equazione del 390
  armonico smorzato 402
  browniano 517
  circolare 226
  circolare uniforme 78, 400
  costantemente accelerato 69
  costanti del 328
  dei pianeti 326
  dei proiettili 72, 77
  energia nel – rotatorio 278
  puramente rotatorio 166
  relativo 48, 80
  rotatorio 165
    attorno a un asse fisso 183
  rototraslatorio 204, 279
  seconda legge di Newton per il – rotatorio 188
  uniforme 23
  uniformemente accelerato 28
motore
  ideale 573
  perfetto 576
  reale 579
  Stirling 576
  termico 573

N

nana bianca 231
natura atomica 517
Newton 46, 70
  legge del raffreddamento di 514
  leggi di 70
  prima legge di 46
  seconda legge di 52
    per i moti rotatori 188
  terza legge di 54
  unità di misura N 52
nodo 431
numero
  d'onda angolare 421
  di Avogadro 6, 509
  di Loschmidt 513
  di Mach 462
  di Reynolds 377
nutazioni 234

O

onda
  acustica 445
  armonica 418
  di pressione 448
  di spostamento 447
  energia trasportata da un' 426
  gravitazionale 334
  in moto 419
  longitudinale 418
  lunghezza d' 420
  meccanica 417
  piana 419
  sferica 419
  sinusoidale 420
  stazionaria 431
    longitudinale 453
  trasversale 418
onde, equazione delle 425
opposizione di fase 430
orbita
  circolare 326
  ellittica 326
  geosincrona 327
oscillatore armonico 389
oscillazione
  armonica 389
  centro di 398
  forzata 404
osservatori 48

P

pacchetto 425
paradosso
  dei gemelli 475, 483
  idrostatico 358
parametro di velocità 478
particella, momento d'inerzia di una – singola 187
particelle 16
  fluide 365
  puntiformi 45
  sistema di 221
Pascal 346
  principio di 351
pendolo
  conico 104
  di torsione 396
  fisico 398
  semplice 396
percussione, centro di 398
perielio, precessione del – di Mercurio 334
periodicità 418
periodo 388, 420
peso 56
  assenza di 58
picchi 430
Pitot, tubo di 371
Poiseuille, legge di 376
pompa
  a vuoto 522
  di calore 577
portanza 371
portata
  massica 367
  volumica 367
posizione 16, 20
  di equilibrio 198
postulati di Einstein 474
potenza 248, 427
  istantanea 248
  media 248
precessione 233
  degli equinozi 233
  del perielio di Mercurio 334

ISBN 88-408-1254-7

pressione 346
assoluta 354
atmosferica 349
descrizione molecolare della 519
di radiazione 231
dinamica 369
onda di 448
relativa 354
statica 369
prima legge della termodinamica 307, 542
primo teorema dei gusci 319
principio
della costanza della velocità della luce 473
della relatività 473
di Archimede 352
di conservazione della massa 367
di equivalenza 332
di Pascal 351
di sovrapposizione 315, 428
processo
irreversibile 567
reversibile 568
termodinamico 538
prodotto
scalare 247
vettoriale 174, 185
proiettili 72
moto dei 72, 77
propagazione, velocità di 423
proprietà termometrica 502
pseudoforze 108
pulsar 231
pulsazione 392, 421
risonante 404
punto
d'inversione 281, 388, 530
di applicazione 299
di ebollizione 505
di fusione 505
fisso 505
triplo 501

Q

quantità di moto 125
conservazione della 128, 152
relativistica 485

R

radiale, accelerazione 79
radiante 167
radiazione
Čerenkov 461
pressione di 231
raggio 418
gravitazionale 338
rapporto dei calori specifici 450, 548, 552
rarefazione 446
reazioni 304
endoenergetiche 305
esoenergetiche 305
regime
stazionario 539
turbolento 376
relatività
del tempo 474, 481
della lunghezza 475, 483
della simultaneità 482
principio della 473
teoria della – generale 331
rendimento
di Carnot 575
termodinamico 575
resistenza 75
aerodinamica 77
coefficiente di – del mezzo 76
del mezzo 75
termica 538
reversibile, processo 568
Reynolds, numero di 377
richiamo, forza di 390
riferimento 47
del centro di massa 132
del laboratorio 132
non inerziale 107
sistema di 47
riflessione 432
risonanza 434
condizione di 404
risultante delle forze 52
riverberazione, tempo di 469
rotazione 170
asse di 223
rotolamento, puro 204, 279
rumori 445

S

satellite 55
geostazionario 327
scala
di temperature 501
internazionale delle temperature 504
Kelvin 501
Rankine 512
seconda
legge della termodinamica 573
legge di Newton per i moti rotatori 188
secondo 3
teorema dei gusci 320
selettore di velocità 525
semiasse maggiore 326
serie di Fourier 429
sfasamento 430
shake 10
simmetria
assiale 224
cilindrica 150
sferica 150, 319
spaziale 129
temporale 129
simultaneità, relatività della 482
sistema 47, 294, 542
britannico 2
configurazione di un 274
conservativo 280
di due particelle 144
di particelle 143, 221
di riferimento 47, 255
inerziale 47
isolato 276
Metrico Decimale 2
oscillante 387
SI 2
vibrante 455
Sistema Internazionale 2
smorzamento 402
coefficiente di 403
critico 403
solidi 345
sollevamento, forza di – dinamico 371
somma
relativistica delle velocità 476
vettoriale 15, 17
sorgente sonora 455
sostanza isòtropa 506
sovrapposizione, principio di 315, 428
spazio d'arresto 41
spinta 156, 372
centro di 353
di Archimede 353
spostamento 20

angolare 167
Doppler 482
onda di 447
stabilità
d'orientamento 230
direzionale 230
statica dei corpi rigidi 197
stato
di equilibrio 542
funzioni di 538
variabile di 542
stazionario, regime 365
stella di neutroni 231
Stirling, approssimazione di 582
strato limite 371
strisciamento 205
suoni 445
suono
barriera del 462
velocità del 449
superconduttore 546
sviluppo del viriale 528

T

temperatura 499
assoluta 509
empirica 502
gradiente di 539
scala di 501
scala internazionale della 504
tempo
campione di 3
di Planck 8
di reazione 41
di riverberazione 469
di volo 255
dilatazione del 471, 475
proprio 475
relatività del 474, 481
tensione 94, 356
superficiale 355
teorema
dell'impulso 126
di Huygens-Steiner 190
teoria
atomica 518
del caos 111
della gravitazione 330
della relatività generale 331
teorie della grande unificazione 93
termica
capacità 544
dilatazione 505
termocoppia 503, 512
termodinamica
legge zero della 500
prima legge della 307, 542
seconda legge della 573
trasformazione 542
termodinamico, processo 538
termometrica, proprietà 502
termometro 500
a gas a volume costante 503
a resistenza 503, 512
empirico 503
timbro 429
tiro al bersaglio 75
Tolomeo 313
tono 455
Torricelli, legge di 382
torsione
bilancia di 317, 395
costante di 396
pendolo di 396
trasferimento di energia 306
trasformazione 81
adiabatica 548, 554
ciclica 555
delle velocità 81, 480
di Lorentz 478
galileiana 478
inversa di Lorentz 479
isocora 555
isoentropica 575
isoterma 555
reversibile equivalente 569
termodinamica 542
trasmissione
del calore 538
mezzo di 424
treno
d'onde 418
periodico 418
trottola 233
tubo
aperto 454
chiuso 454
di flusso 366
di Pitot 371
turbolento, regime 376

U

ultrasuoni 445
unificazione delle forze 93
unità 1
astronomica 11
campioni di – di misura 1
di massa atomica 6
fondamentali 2
urto 123
anelastico 260
completamente anelastico 133, 260
elastico 133, 259
energia cinetica in un 259
esplosivo 260
fra due corpi 130

V

valli 430
valore assoluto 15
van der Waals, equazione di stato di 528
variabile di stato 542
variabili
angolari 172
rotazionali 166
variazione entropica 568
variazioni di energia potenziale 323
velocità 16, 20, 76
angolare istantanea 167
angolare media 167
critica 377
del suono 449
della luce 5
di fase 420
di fuga 324
di gruppo 424
di propagazione 423
distribuzione delle 525
molecolari 523
istantanea 21
limite 76
media 20, 524
parametro di 478
più probabile 524
quadratica media 520, 524
scalare 21
selettore di 525
somma relativistica delle 476
trasformazione delle 81, 480
trasversale 421
vettoriale 21
ventre 431
venturimetro 370
versori 17
vettore 15
forza 315
posizione 15, 20

ISBN 88-408-1254-7

spostamento 20
unitario 17
velocità 21
viriale
coefficienti del 528
sviluppo del 528
viscosa, forza 77
viscosità 375
coefficiente di 375
vortice 374
vuoto, pompa a 522

W

wattora 249

Z

zero assoluto 501

SEGNI MATEMATICI E SIMBOLI

$=$	uguale	∞	infinito
$\approx$	circa uguale	lim	limite di
$\neq$	diverso	$\sum$	sommatoria
$\equiv$	identico a	$\int$	integrale di
$>$	maggiore di	Δx	variazione di x
$\gg$	molto maggiore di	$\lvert x \rvert$	modulo di x
$\geq$	maggiore o uguale a (oppure non minore di)	$\bar{x}$	valor medio di x
$<$	minore di	$x!$	x fattoriale
$\ll$	molto minore di	$\ln x$	logaritmo naturale di x
$\leq$	minore o uguale a (oppure non maggiore di)	$f(x)$	funzione di x
$\sim$	dell'ordine di grandezza di	$\frac{df}{dx}$	derivata di f rispetto a x
$\propto$	proporzionale a (per es. la legge di Hooke: $F \propto x$ o $F = -kx$	$\frac{\partial f}{\partial x}$	derivata parziale di f rispetto a x

ALCUNE UNITÀ E ABBREVIAZIONI

ampere	A	litro	L
anno	a	metro	m
atmosfera	atm	miglio	mi
caloria	cal	minuto	min
cavallo vapore	CV	Newton	N
coulomb	C	ohm	Ω
giorno	d	ora	h
grado Celsius	°C	pascal	Pa
grado Fahrenheit	°F	piede	ft
grammo	g	pollice	in
elettronvolt	eV	radiante	rad
farad	F	secondo	s
gauss	G	tesla	T
henry	H	unità di massa atomica	u
hertz	Hz	unità termica britannica	Btu
joule	J	volt	V
kelvin	K	watt	W
libbra	lb	weber	Wb

ALFABETO GRECO

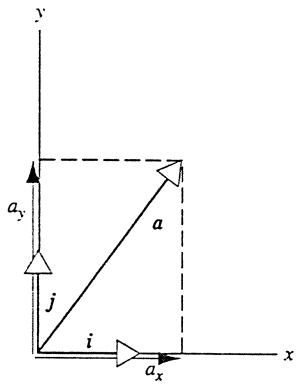
Alfa	A	α	Iota	I	ι	Ro	P	ρ , ϱ
Beta	B	β	Kappa	K	κ , $\varkappa$	Sigma	Σ	σ , ς
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mi[a]	M	μ	Upsilon	Υ	υ
Epsilon	E	ϵ , ε	Ni[b]	N	ν	Fi	Φ	ϕ , φ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Chi	X	χ
Eta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ , ϑ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω

[a] In ambito scientifico è in uso il nome «mu».
[b] In ambito scientifico è in uso il nome «nu».

H-2 VETTORI UNITARI (O VERSORI)

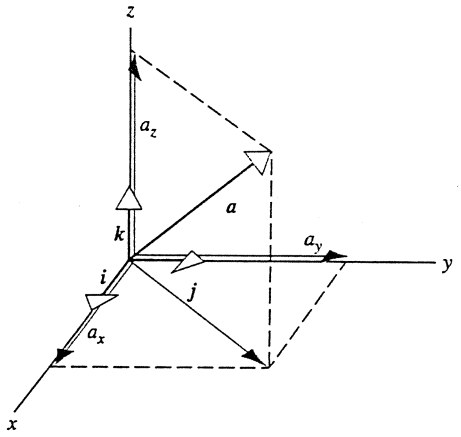
Coordinate cartesiane bidimensionali:

$a = a_x i + a_y j$



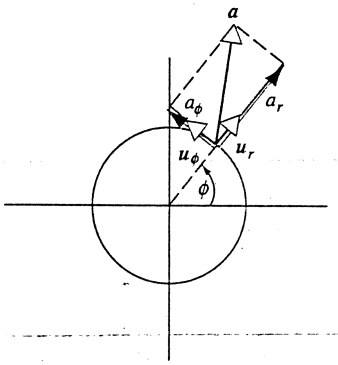
Coordinate cartesiane tridimensionali:

$a = a_x i + a_y j + a_z k$



Coordinate polari bidimensionali:

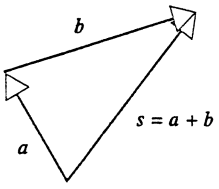
$a = a_r u_r + a_\phi u_\phi$

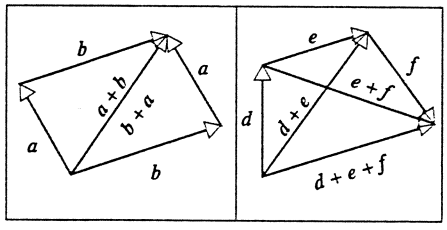


H-3 SOMMA VETTORIALE

$s = a + b$

$s_x = a_x + b_x \qquad s_y = a_y + b_y$





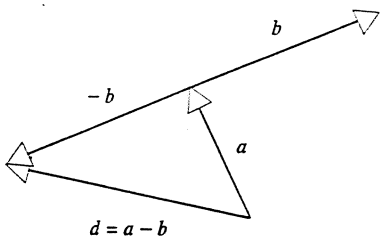
$a + b = b + a$ (proprietà commutativa)

$d + (e + f) = (d + e) + f$ (proprietà associativa)

 ISBN 88-408-1254-7

$$d = a - b = a + (-b)$$

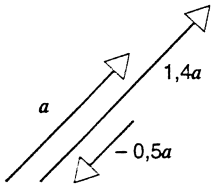
$$d_x = a_x - b_x \qquad d_y = a_y - b_y$$



H-4 PRODOTTI VETTORIALI

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare:

$$b = ca$$

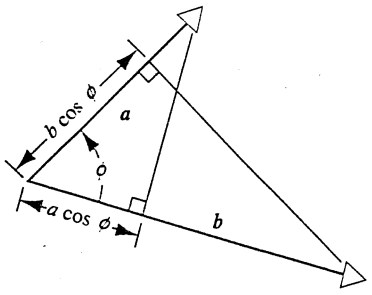


$$b_x = ca_x \qquad b_y = ca_y$$

$$b = |c|a$$

Prodotto scalare di due vettori:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\phi = a(b\cos\phi) = b(a\cos\phi)$$



$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$$

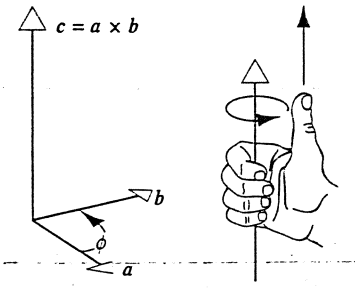
$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Prodotto vettoriale di due vettori:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$



$$|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = ab\sin\phi$$

La direzione di $\boldsymbol{c}$ è normale al piano formato da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e il suo verso è determinato dalla regola della mano destra.

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$$

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$$

$$(s\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (s\boldsymbol{b}) = s(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \qquad (s = \text{scalare})$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$