

**GIORGIO
FRANCESCHETTI**

**CAMPI
ELETTRO
MAGNETICI**

SECONDA EDIZIONE

**PROGRAMMA
DI
MATEMATICA
FISICA
ELETTRONICA**

BOLLATI BORINGHIERI



Indice

Prefazione, 9

1 Elettromagnetismo, 11

- 1.1 Le equazioni di Maxwell
- 1.2 Le relazioni costitutive
- 1.3 Teoremi energetici e meccanici
- 1.4 Condizioni iniziali, al contorno e teorema di unicità
- 1.5 Teoremi di reciprocità e di equivalenza
- 1.6 Teoremi di dualità e delle immagini
- 1.7 Riepilogo
- Riferimenti bibliografici

2 Propagazione, 81

- 2.1 Introduzione
- 2.2 La propagazione per onde
- 2.3 La propagazione di un pacchetto d'onda
- 2.4 Linee di trasmissione (dominio del tempo)
- 2.5 Linee di trasmissione (dominio della frequenza)
- 2.6 Generatori sulle linee: condizioni di risonanza
- 2.7 Onde piane
- 2.8 Riepilogo
- Riferimenti bibliografici

3 Rappresentazione, 151

- 3.1 Rappresentazione analitica del campo elettromagnetico
- 3.2 Problemi interni: le guide d'onda
- 3.3 Modi trasversali, elettrici e magnetici, in guida d'onda
- 3.4 Problemi interni: cavità risonanti
- 3.5 Problemi esterni: rappresentazione mediante onde piane
- 3.6 Onde sferiche
- 3.7 Problemi esterni: sviluppo in onde sferiche
- 3.8 Riepilogo
- Riferimenti bibliografici

4 Radiazione, 238

- 4.1 Introduzione
- 4.2 Potenziali elettromagnetici
- 4.3 Campo associato a un dipolo elementare: dominio della frequenza
- 4.4 Campo associato a un dipolo elementare: dominio del tempo
- 4.5 Antenne filiformi
- 4.6 Parametri di un'antenna in trasmissione
- 4.7 Allineamenti di antenne
- 4.8 Riepilogo
Riferimenti bibliografici

5 Ricezione, 301

- 5.1 Ricezione del segnale elettromagnetico
- 5.2 Parametri di un'antenna in ricezione
- 5.3 Relazione tra i parametri di un'antenna in trasmissione e in ricezione
- 5.4 Il collegamento radio
- 5.5 Temperatura di rumore di un'antenna
- 5.6 Riepilogo
Riferimenti bibliografici

6 Polarizzazione, 338

- 6.1 Introduzione
- 6.2 I parametri di Stokes
- 6.3 Onde polarizzate e onde non polarizzate
- 6.4 Riepilogo
Riferimenti bibliografici

Formulario, 363

Glossario, 371

Indice dei nomi, 379

Indice analitico, 381

Capitolo 1

Elettromagnetismo

*One of the chief peculiarities of this treatise is the doctrine which asserts that the true electric current on which the electromagnetic phenomena depend is not the same thing as the current of conduction, but that the variation of the electric displacement must be taken into account in estimating the total movement of electricity.**

James Clerk Maxwell, 1873.

Loi fondamentale de l'électricité:

La force répulsive de deux petits globes électrisés de la même nature d'électricité, est en raison inverse du carré de la distance du centre des deux globes.

Charles Augustin Coulomb, 1785.

La force attractive et répulsive du fluide magnétique est exactement, ainsi que dans le fluide électrique, en raison composée de la directe des densités, et inverse du carré des distances des molécules magnétique.

Charles Augustin Coulomb, 1785.

Dans un corps conducteur chargé d'électricité, le fluide électrique se répand sur la surface du corps, mais ne pénètre pas dans l'intérieur du corps.

Charles Augustin Coulomb, 1785.

Lorsque deux conducteurs, ou plutôt deux portions d'un même conducteur voltaïque, l'une et l'autre mobile, sont à une distance convenable dans des directions à peu près parallèles, la portion mobile est attirée ou repoussée par la portion fixe, selon que la direction du courant électrique est le même, ou en sens opposé dans ces deux portions.

André Marie Ampère, 1821.

* Le traduzioni delle citazioni sono riportate in fondo al capitolo.

Whether Ampère's beautiful theory were adopted, or any other, or whatever reservation were mentally made, still it appeared very extraordinary, that as every electric current was accompanied by a corresponding intensity of magnetic action at right angles to the current, good conductors of electricity, when placed within the sphere of this action, should not have any current induced through them, or some sensible effect produced equivalent in force to such a current.

These considerations, with their consequence, the hope of obtaining electricity from ordinary magnetism, have stimulated me at various time to investigate experimentally the inductive effect of electric current.

Michael Faraday, 1839.

The variation of the electrical displacement must be added to the currents to get total motion of electricity.

If the medium, instead of being a perfect insulator, is a conductor whose resistance per unit of volume is ρ , then will be not only electric displacements, but true currents of conduction in which electrical energy is transformed into heat, and the ondulation is thereby weakened.

James Clerk Maxwell, 1865.

In a medium in which waves are propagated there is a pressure in the direction normal to the waves (...) A flat body exposed to sunlight would therefore be repelled from the side on which the light falls. It is probable that a much greater energy of radiation might be obtained by means of the concentrated rays of the electric lamp. Such rays falling on a thin metallic disk, delicately suspended in a vacuum, might perhaps produce an observable mechanical effect.

James Clerk Maxwell, 1873.

Ich habe die Versuche in der von Maxwell vorgeschlagenen einfachen Form aufgenommen (...)

Diese Druckkräfte des Lichtes stimmen innerhalb des Versuchsfehler quantitativ mit den von Maxwell und von Bartoli berechneten ponderomotorischen Kräften der Strahlung überein.

Pëtr Nikolaevič Lebedev, 1901.

Auf die Frage "Was ist die Maxwell'sche Theorie?" wüsste ich also keine kürzere und bestimmtere Antwort als diese: die Maxwell'sche Theorie ist das System der Maxwell'schen Gleichungen.

Heinrich Hertz, 1894.

Are not gross Bodies and Light convertible into another, and may not Bodies receive much of their Activity from the Particles of Light which enter their Composition? The changing of Bodies into Light, and Light into Bodies is very conformable to the Course of Nature, which seems delighted with Transmutations.

Isaac Newton, 1717.

1.1 Le equazioni di Maxwell

Ogni fenomeno elettromagnetico, nell'ambito macroscopico, è descrivibile per mezzo di un gruppo di equazioni, la cui validità è data come postulato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{array} \right. \quad [1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{array} \right. \quad [2]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \end{array} \right. \quad [3]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0 \end{array} \right. \quad [4]$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \quad [5]$$

con il seguente significato dei simboli (tra parentesi sono indicate, nel sistema di misura MKSA, le unità delle relative grandezze):

$\mathbf{e}$ campo elettrico (V/m)

$\mathbf{h}$ campo magnetico (A/m)

$\mathbf{b}$ induzione magnetica (Wb/m²)

$\mathbf{d}$ induzione elettrica (C/m²)

$\mathbf{j}$ densità di corrente elettrica (A/m²)

ρ densità di carica elettrica (C/m³)

$\mathbf{f}$ densità di forza (N/m³).

Le [1]-[4] sono le ben note *equazioni di Maxwell*; la [5], che mette in relazione i fenomeni elettromagnetici e meccanici (nel vuoto) è l'*equazione della forza di Lorentz*.

Le equazioni [1]-[4] non sono tutte indipendenti: infatti, com'è facile verificare, la [4] può essere dedotta dalle precedenti (vedi 1.1.1). Da esse discende poi l'*equazione di continuità della corrente* (vedi 1.1.2):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad [6]$$

Il significato delle equazioni di Maxwell e dell'equazione di continuità diviene trasparente una volta che queste equazioni siano trasformate nelle corrispondenti relazioni integrali. Integrando le [3], [4] e [6] in un volume fisso V (vedi fig. 1.1a) limitato da una superficie S di versore normale $\mathbf{i}_n$, si ottiene:

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS = \iiint_V \rho dV = q \quad [7]$$

$$\oint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0 \quad (\omega) \quad [8]$$

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{\partial q}{\partial t} = 0. \quad [9]$$

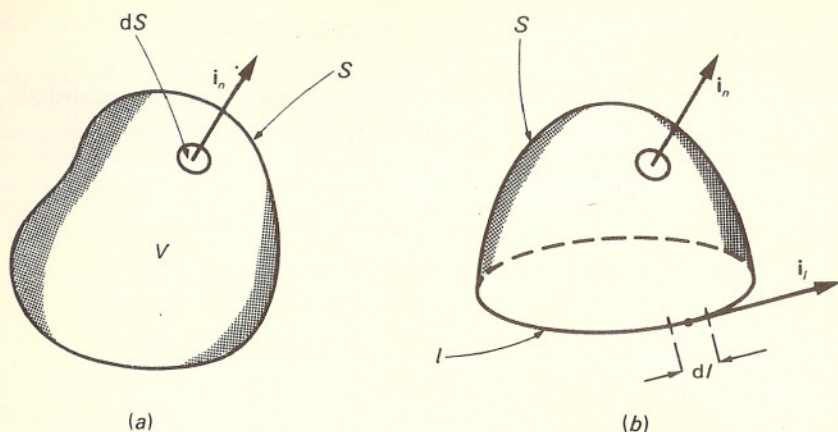


Figura 1.1

Geometrie relative alla trasformazione delle equazioni di Maxwell in forma integrale.

La [7] e la [8] non sono che l'espressione della *legge di Gauss* per le cariche elettriche e magnetiche; la [9] è un'equazione di *continuità*, generalizzazione della *prima legge di Kirchhoff* nel caso di cariche e correnti variabili nel tempo.

Integrando le [1] e [2] su una superficie fissa S di versore normale $\mathbf{i}_n$ (vedi fig. 1.1b) e limitata da una curva l di versore tangente $\mathbf{i}_l$, si ottiene:

$$\oint_l \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_l dl = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad [10]$$

$$\oint_l \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l dl = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_n dS + \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n dS; \quad [11]$$

la superficie S è stata supposta fissa nel tempo, in modo da poter eseguire la derivata temporale all'esterno dell'integrale di superficie. La [10] non è altro che la *legge di Lenz-Neumann*, generalizzazione della *seconda legge di Kirchhoff* nel caso di induzioni e tensioni variabili nel tempo. La [11] è la *legge di Ampère*, generalizzata da Maxwell al caso di grandezze variabili nel tempo; l'importanza del primo termine al secondo membro della [11], di cui Maxwell (1861 e 1873) postulò l'esistenza in base a considerazioni puramente teoriche, viene esaminata in seguito (vedi 1.1.4).

Può essere utile rendere simmetriche le equazioni di Maxwell introducendo densità fittizie di corrente magnetica e di carica magnetica, $\mathbf{j}_m$ (V/m²) e ρ_m (Wb/m³) rispettivamente. le [1]-[4] si trasformano così:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathbf{j}_m \end{array} \right. \quad [12]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{array} \right. \quad [13]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \quad [14]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \rho_m. \quad [15]$$

L'equazione di Lorentz viene a sua volta generalizzata come segue:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + \rho_m \mathbf{h} - \mathbf{j}_m \times \mathbf{d}, \quad [16]$$

e quella di continuità della corrente (magnetica) diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \quad [17]$$

Il motivo dell'introduzione delle densità di corrente e di carica magnetica è duplice: da un lato vi sono distribuzioni di campi elettromagnetici che possono formalmente attribuirsi a sorgenti magnetiche, dall'altro, l'uso di queste cariche e correnti fittizie è necessario in relazione al teorema di equivalenza (vedi § 1.5).

La ovvia generalizzazione delle due equazioni integrali [8] e [10], includendo cariche e correnti magnetiche, è la seguente:

$$\oiint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n dS = \iiint_V \rho_m dV = q_m \quad [18]$$

$$\oint_l \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_l dl = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_n dS - \iint_S \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_n dS; \quad [19]$$

l'equazione di continuità per la corrente magnetica è:

$$\oiint_S \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{\partial q_m}{\partial t} = 0. \quad [20]$$

Le equazioni integrali [7], [9], [11], [18], [19] e [20] consentono di esaminare il comportamento delle induzioni, dei campi e delle densità di corrente in corrispon-

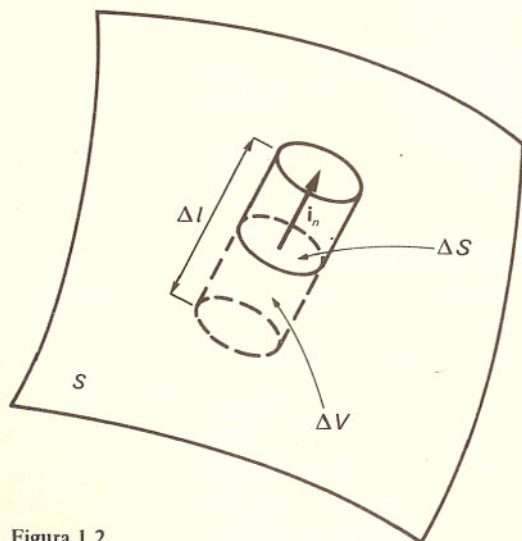


Figura 1.2

Volume di integrazione ΔV per lo studio delle variazioni delle induzioni e delle densità di corrente in corrispondenza di discontinuità spaziali.

denza a spostamenti infinitesimi nell'intorno di loro possibili discontinuità spaziali. Nel caso di discontinuità del tipo suddetto, le equazioni di Maxwell non hanno più validità locale se, come accade per alcune delle componenti, campi, induzioni e densità di corrente sono discontinui.

Consideriamo la figura 1.2, ove sono rappresentate schematicamente due regioni dello spazio separate da una superficie S . Questa può essere o un'effettiva superficie fisica di separazione tra mezzi diversi o una superficie ideale (in questo caso vi è un unico mezzo); il versore normale ad essa, $\mathbf{i}_n$, è orientato dalla faccia 1 alla faccia 2. Sia data inoltre una porzione di superficie, ΔS , sufficientemente piccola perché su ciascuna delle sue due facce campi e induzioni possano ritenersi spazialmente costanti. In tali condizioni, le equazioni [7], [9], [18] e [20], per $\Delta l \rightarrow 0$ e a meno di infinitesimi superiori rispetto a ΔS , forniscono

$$\Delta S(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{i}_n = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iiint_{\Delta V} \rho \, dV$$

$$\Delta S(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iiint_{\Delta V} \rho \, dV \right)$$

$$\Delta S(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{i}_n = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iiint_{\Delta V} \rho_m \, dV$$

$$\Delta S(\mathbf{j}_{m2} - \mathbf{j}_{m1}) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iiint_{\Delta V} \rho_m \, dV \right),$$

chiaro essendo il significato degli indici 1 e 2 apposti ai simboli delle grandezze. Se su ΔS sono presenti *distribuzioni superficiali* di carica elettrica, con densità ρ_S (C/m²), e di carica magnetica, con densità ρ_{mS} (Wb/m²), valgono le seguenti relazioni:

$$(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \mathbf{i}_n = \rho_S \quad [21]$$

$$(\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial \rho_S}{\partial t}. \quad [22]$$

$$(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{i}_n = \rho_{mS} \quad [23]$$

$$(\mathbf{j}_{m2} - \mathbf{j}_{m1}) \cdot \mathbf{i}_n = -\frac{\partial \rho_{mS}}{\partial t}. \quad [24]$$

Ne consegue che, in assenza di tali distribuzioni di carica, le componenti normali a S delle induzioni e delle densità di corrente sono continue, anche se le caratteristiche del mezzo cambiano bruscamente attraversando S .

Consideriamo ora la figura 1.3; il segmento Δa , intersezione di S con $\Delta \Sigma$, è così piccolo che si possono ritenere i campi costanti su esso; di nuovo, la superficie S che seziona $\Delta \Sigma$ è una superficie fisica di separazione tra due mezzi diversi o anche una pura superficie geometrica. E' anche chiaro, dalla figura, il significato dei versori $\mathbf{i}_t$, $\mathbf{i}_b$ e $\mathbf{i}_n$: considerati in quest'ordine, essi formano una terna levogira e sono tali che $\mathbf{i}_t \times \mathbf{i}_b = \mathbf{i}_n$. Le [19], [11] danno immediatamente, per $\Delta l \rightarrow 0$ e a meno di infinite-

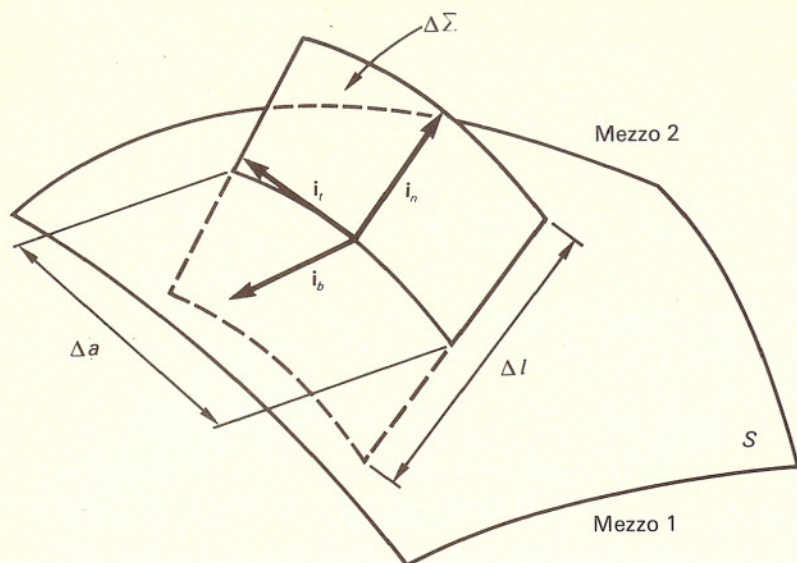


Figura 1.3

Superficie di integrazione per lo studio della variazione del campo in corrispondenza di discontinuità spaziali.

simi superiori in Δa ,

$$\Delta a(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{i}_t = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iint_{\Delta S} \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}_b dS \right) - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iint_{\Delta S} \mathbf{j}_m \cdot \mathbf{i}_b dS$$

$$\Delta a(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{i}_t = \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iint_{\Delta S} \mathbf{d} \cdot \mathbf{i}_b dS \right) + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \iint_{\Delta S} \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_b dS.$$

Se attraverso il segmento Δa fluiscono densità lineari di corrente elettrica $\mathbf{j}_S$ (A/m) e magnetica $\mathbf{j}_{mS}$ (Wb/m), si ha (vedi 1.1.7):

$$\mathbf{i}_t \cdot (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = -\mathbf{j}_{mS} \cdot \mathbf{i}_b$$

$$\mathbf{i}_t \cdot (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S \cdot \mathbf{i}_b.$$

Sostituendo $\mathbf{i}_t = \mathbf{i}_b \times \mathbf{i}_n$, e dovendo le relazioni precedenti valere per qualunque $\mathbf{i}_b$, si ottengono le formule finali:

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = -\mathbf{j}_{mS} \quad [25]$$

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S. \quad [26]$$

In assenza di densità lineari di corrente, le componenti dei campi *tangenti* a S sono dunque continue, anche se le caratteristiche del mezzo cambiano bruscamente passando attraverso S .

Le equazioni di Maxwell [12] e [13], unitamente alle [6], [17], possono essere inte-

grate, anziché su volumi o superfici, rispetto al tempo tra limiti prefissati t_1 e t_2 , ottenendo (nell'ipotesi che sia i campi sia le loro derivate spaziali siano integrabili):

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t_2) - \mathbf{b}(\mathbf{r}, t_1) = -\nabla \times \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) dt$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t_2) - \mathbf{d}(\mathbf{r}, t_1) = \nabla \times \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{h}(\mathbf{r}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dt$$

$$\rho(\mathbf{r}, t_2) - \rho(\mathbf{r}, t_1) = -\nabla \cdot \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) dt$$

$$\rho_m(\mathbf{r}, t_2) - \rho_m(\mathbf{r}, t_1) = -\nabla \cdot \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) dt.$$

Queste relazioni sono utili per studiare il comportamento delle induzioni e delle densità di carica quando le caratteristiche del mezzo variano bruscamente nel tempo.

Sia $t_2 = t_0 + \Delta t$, $t_1 = t_0 - \Delta t$; supponiamo che al tempo t_0 siano impresse densità di corrente elettriche e magnetiche *temporalmente impulsive*:

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{d}_t \delta(t - t_0), \quad \mathbf{j}_{mt} = \mathbf{b}_t \delta(t - t_0),$$

dove $\delta(\xi)$ è la funzione di Dirac e $\mathbf{d}_t$, $\mathbf{b}_t$ rappresentano i flussi totali rispetto al tempo delle densità di corrente, rispettivamente elettrica (C/m^2) e magnetica (Wb/m^2). Per $\Delta t \rightarrow 0$, posto

$$t_2 \rightarrow t_0^+, \quad t_1 \rightarrow t_0^-,$$

si ottiene, nell'ipotesi che i campi rimangano finiti,

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t_0^+) - \mathbf{b}(\mathbf{r}, t_0^-) = -\mathbf{b}_t \quad [27]$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t_0^+) - \mathbf{d}(\mathbf{r}, t_0^-) = -\mathbf{d}_t \quad [28]$$

$$\rho(\mathbf{r}, t_0^+) - \rho(\mathbf{r}, t_0^-) = -\nabla \cdot \mathbf{d}_t \quad [29]$$

$$\rho_m(\mathbf{r}, t_0^+) - \rho_m(\mathbf{r}, t_0^-) = -\nabla \cdot \mathbf{b}_t. \quad [30]$$

Nell'intervallo Δt , in assenza di correnti impresse, induzioni e cariche rimangono continue anche se le caratteristiche del mezzo cambiano bruscamente all'istante t_0 .

E' utile individuare, tra le correnti e le cariche, la parte ascrivibile a processi (ad esempio di natura chimica o meccanica) estranei, per così dire, alle equazioni di Maxwell. Tali *densità impresse* di corrente e di carica fungono da sorgenti per il campo elettromagnetico, nel senso che nelle equazioni di Maxwell figurano come termini noti. Le equazioni, una volta risolte, esprimono campi e induzioni come funzionali delle sorgenti; conviene pertanto porre in evidenza questi termini di sorgente: $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{j}_{m0}$, ρ_0 , ρ_{m0} . Le residue densità di carica e di corrente sono ancora indicate, per semplicità, con $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}_m$, ρ , ρ_m ; anch'esse sono espresse, una volta risolte le equazioni, come funzionali delle sorgenti. Con questa suddivisione di cariche e correnti, le

[12]-[15] assumono la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathbf{j}_m - \mathbf{j}_{m0} \end{array} \right. \quad [31]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j} + \mathbf{j}_0 \end{array} \right. \quad [32]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho + \rho_0 \end{array} \right. \quad [33]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{b} = \rho_m + \rho_{m0} \end{array} \right. \quad [34]$$

La dipendenza temporale che appare nelle [1]-[4] si esprime in forma algebrica utilizzando la trasformazione di Fourier (o di Laplace); per il campo elettrico si ha

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t) d\omega;$$

formule analoghe valgono per gli altri vettori del campo. Le equazioni di Maxwell, nel dominio delle ω , si ottengono trasformando le [31]-[34]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{J}_m(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{J}_{m0}(\mathbf{r}, \omega) \end{array} \right. \quad [35]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, \omega) \end{array} \right. \quad [36]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \rho(\mathbf{r}, \omega) + \rho_0(\mathbf{r}, \omega) \end{array} \right. \quad [37]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \rho_m(\mathbf{r}, \omega) + \rho_{m0}(\mathbf{r}, \omega) \end{array} \right. \quad [38]$$

Le equazioni di continuità della corrente elettrica [6] e di quella magnetica [17] diventano

$$\nabla \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, \omega)] + j\omega[\rho(\mathbf{r}, \omega) + \rho_0(\mathbf{r}, \omega)] = 0 \quad [39]$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}_{m0}(\mathbf{r}, \omega)] + j\omega[\rho_m(\mathbf{r}, \omega) + \rho_{m0}(\mathbf{r}, \omega)] = 0. \quad [40]$$

Conoscendo la soluzione delle equazioni di Maxwell nel dominio trasformato (*dominio della frequenza*), la soluzione nel *dominio del tempo* si può subito ottenere utilizzando la trasformata di Fourier (o di Laplace).¹ Importante per le applicazioni è il caso (1.1.12) dei segnali puramente sinusoidali nel tempo (*segnali armonici*).

Può essere utile talvolta esprimere in forma algebrica la dipendenza spaziale, anziché quella temporale, delle equazioni di Maxwell; in tal caso si utilizza la trasformata tripla di Fourier:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) \exp(-jk_x x - jk_y y - jk_z z) = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}, \end{aligned}$$

con $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i}_x + k_y \mathbf{i}_y + k_z \mathbf{i}_z$;

¹ Almeno nel caso lineare (vedi § 1.2).

analogamente si procede per gli altri vettori del campo. Sostituendo nelle [31]-[34] e uguagliando anche qui gli integrandi, si ha

$$\left\{ \begin{aligned} -j\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, t) &= -\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} - \hat{\mathbf{J}}_m(\mathbf{k}, t) - \hat{\mathbf{J}}_{m0}(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \right. \quad [41]$$

$$\left\{ \begin{aligned} -j\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, t) &= \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{k}, t) + \hat{\mathbf{J}}_0(\mathbf{k}, t) \end{aligned} \right. \quad [42]$$

$$-j\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, t) = \hat{\rho}(\mathbf{k}, t) + \hat{\rho}_0(\mathbf{k}, t) \quad [43]$$

$$-j\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = \hat{\rho}_m(\mathbf{k}, t) + \hat{\rho}_{m0}(\mathbf{k}, t). \quad [44]$$

Le [41]-[44] sono le cosiddette *equazioni di Maxwell nel dominio del numero d'onda*. Ovviamente, sono ulteriormente trasformabili nel dominio della frequenza; in tal caso, le equazioni di Maxwell risultano interamente scritte in forma algebrica. Ciò non significa che ogni problema di elettromagnetismo sia di soluzione immediata: il numero delle incognite, infatti, è largamente superiore a quello delle equazioni (il problema viene trattato nel § 1.2); e inoltre non sono state ancora specificate le condizioni iniziali e al contorno (vedi § 1.4).

Annotazioni

1.1.1 Interdipendenza delle equazioni di Maxwell

Calcoliamo la divergenza della [1]:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{b};$$

ne consegue che $\nabla \cdot \mathbf{b} = \text{cost.}$ rispetto al tempo. Se i campi sono nulli per $t < t_0$ (t_0 è l'istante di tempo in cui le sorgenti sono eccitate), è $\mathbf{b}(t < t_0) = 0$, si ha cioè

$$\nabla \cdot \mathbf{b}(t < t_0) = 0;$$

dovendo essere $\nabla \cdot \mathbf{b} = \text{cost.}$ per ogni tempo, si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0,$$

relazione che coincide con la [4]; la [1] risulta dunque più una condizione iniziale che un'equazione indipendente.

1.1.2 Equazione di continuità della corrente

Si calcoli la divergenza della [2]:

$$0 = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j} \right). \quad [45]$$

La [45] è già di per sé un'equazione interessante; essa mostra che nel caso dina-

mico è solenoidale il vettore

$$\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$$

e non il vettore $\mathbf{j}$ (come accade nel caso statico: *prima legge di Kirchhoff*). Sostituendo la [3] nella [45] si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

che non è altro che l'equazione di continuità della corrente elettrica [6].

1.1.3 Equazione di continuità della corrente magnetica (esercizio)

Utilizzando lo stesso procedimento di 1.1.2, si ricavi la [17].

*1.1.4 Discussione della seconda equazione di Maxwell

La forma differenziale della legge di Ampère è la seguente:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}.$$

Si consideri il caso di un condensatore a piatti paralleli alimentato da un filo metallico (fig. 1.4). Supponiamo che il generatore e i fili siano opportunamente schermati, che il condensatore abbia un anello di guardia e che la frequenza del generatore sia sufficientemente bassa (ma non nulla), di modo che il campo elettromagnetico possa ritenersi diverso da zero solo nello spazio compreso tra i due piatti del condensatore.

Integriamo l'equazione di Ampère, calcolandone il flusso attraverso la superficie S_1 ; si ottiene

$$\oint_l \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l \, dl = \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = i,$$

dove i è la corrente che fluisce lungo il filo.

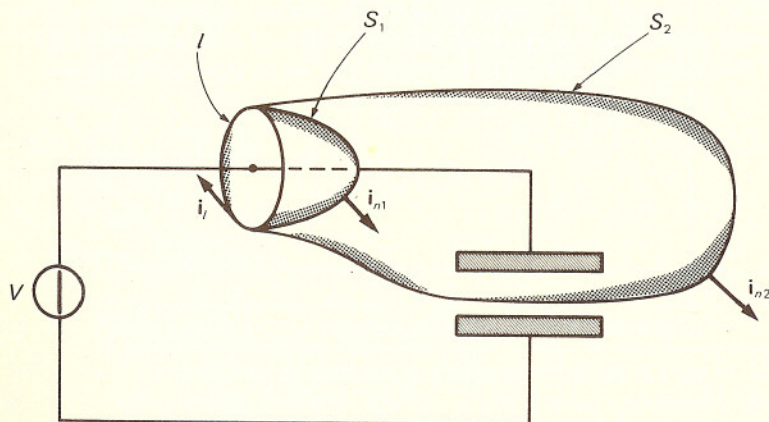


Figura 1.4

Se il calcolo è effettuato sulla superficie S_2 , si ricava

$$\oint_l \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l \, dl = \iint_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = 0.$$

I due risultati sono dunque incompatibili. Sostituendo all'equazione di Ampère quella di Maxwell, si ha invece

$$\oint_l \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l \, dl = \iint_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{i}_n \, dS = i, \quad \oint_l \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_l \, dl = \iint_{S_2} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \cdot \mathbf{i}_n \, dS.$$

All'interno del condensatore la densità di corrente $\mathbf{j}$ è nulla, ma è sostituita dal termine $\partial \mathbf{d} / \partial t \neq 0$.

1.1.5 Campi statici (esercizio)

Si mostri che nel caso *statico*, cioè per $\partial / \partial t = 0$, le equazioni per i campi elettrici e magnetici si disaccoppiano se $\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e}$, $\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}$, e se l'unica corrente è quella impressa $\mathbf{j}_0$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= -\nabla \Phi, & \nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla (\ln \epsilon) &= -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \mathbf{h} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{a}, & \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla \times \mathbf{a}) \times \nabla (\ln \mu) &= \mu \mathbf{j}_0. \end{aligned}$$

1.1.6 Densità di carica elettrica di volume e di superficie

Con riferimento alla figura 1.5, consideriamo una distribuzione di carica (ad esempio elettrica) con densità di volume ρ (C/m^3) limitata allo stato di spessore Δz . Se nel volume $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ della figura la carica totale contenuta è Δq , la densità

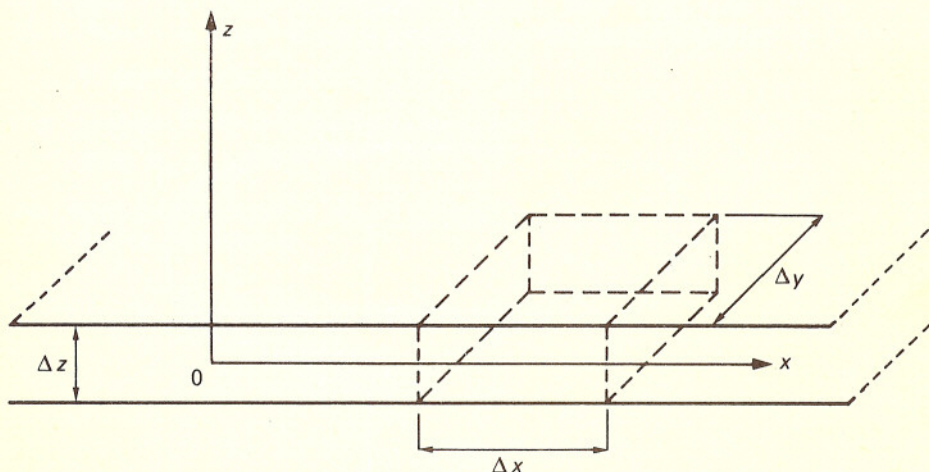


Figura 1.5

è localmente data da

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta x \Delta y \Delta z}.$$

Si immagini ora di diminuire lo spessore Δz , mantenendo però invariata la carica Δq nel volume ΔV . Evidentemente la densità di volume ρ aumenta, tendendo all'infinito quando $\Delta z \rightarrow 0$; è allora utile introdurre una densità di carica elettrica superficiale ρ_S (C/m^2) tale che

$$\Delta q = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\rho \Delta z) \Delta x \Delta y = \rho_S \Delta x \Delta y.$$

Nel passaggio al limite per $\Delta z \rightarrow 0$ il prodotto $\rho_S = \rho \Delta z$ rimane costante; la densità di volume di carica assume la forma di un impulso (spaziale) di Dirac:

$$\rho = \rho_S \delta(z).$$

Chiaramente, se su una superficie localmente piana $z = z_0$ è disposta una carica superficiale ρ_S , la carica contenuta in un volume ΔV a cavallo della superficie (vedi fig. 1.2) è data da

$$\Delta q = \Delta S \int \rho_S \delta(z - z_0) dz = \rho_S \Delta S.$$

1.1.7 Densità di corrente e densità lineare di corrente (esercizio)

Procedendo come sopra, si mostri che a una corrente elettrica confinata su una superficie (localmente piana) $z = z_0$ corrisponde una densità di corrente

$$\mathbf{j} = j_S \delta(z - z_0),$$

dove j_S (A/m) è la densità lineare della corrente elettrica. Si utilizzi il risultato per giungere alle relazioni [25] e [26].

1.1.8 Rifrazione elettrica (esercizio)

Si mostri che alla superficie piana di separazione di due mezzi le linee di forza del campo elettrostatico (quelle che individuano, punto per punto, direzione e verso del campo) formano angoli α_1, α_2 con la normale alla superficie (vedi fig. 1.6) dati da

$$\frac{1}{\epsilon_1} \tan \alpha_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \tan \alpha_2,$$

nell'ipotesi che

$$\mathbf{d}_1 = \epsilon_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{d}_2 = \epsilon_2 \mathbf{e}_2.$$

1.1.9 Potenza fornita dalle sorgenti al campo elettromagnetico

Consideriamo la densità di corrente impressa $\mathbf{j}_0$, sorgente del campo elettromagnetico, come dovuta a una densità di carica ρ_0 che si muova con velocità assegnata $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{j}_0 = \rho_0 \mathbf{v}.$$

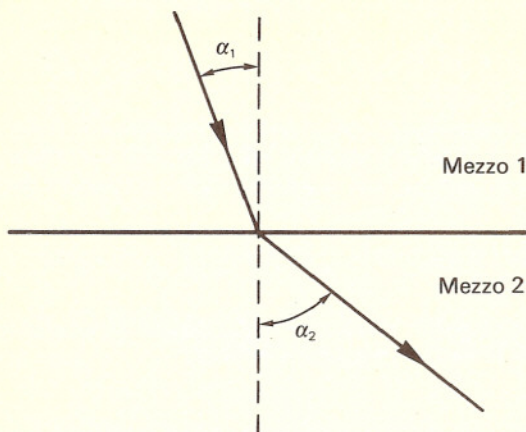


Figura 1.6

La densità di corrente j_0 genera un campo elettromagnetico; sulle sorgenti, di conseguenza, agisce una densità di forza

$$f = \rho_0 e + j_0 \times b.$$

Per mantenere in moto la densità di carica ρ_0 alla velocità v è necessario applicare ad essa una densità di forza di pari intensità, ma opposta alla precedente. Per ogni spostamento dr tale densità di forza compie una densità di lavoro

$$-f \cdot dr = -\rho_0 e \cdot dr - j_0 \times b \cdot dr.$$

Nel tempo dt , la corrispondente densità di potenza è data da

$$-f \cdot v = -e \cdot j_0 - j_0 \times b \times j_0 = -e \cdot j_0.$$

La potenza totale è

$$p_0 = - \iiint e \cdot j_0 dV; \quad [46]$$

questa è la potenza che i generatori, cioè le sorgenti del campo, devono erogare perché possa sussistere la densità di corrente j_0 e, in definitiva, il campo elettromagnetico. Tale potenza si ritrova appunto nel campo elettromagnetico.

1.1.10 Potenza fornita da generatori di tipo magnetico (esercizio)

Si dimostri, con ragionamento analogo al precedente, che sorgenti impresse di tipo magnetico j_{m0} forniscono al campo elettromagnetico la potenza

$$p_{m0} = - \iiint j_{m0} \cdot h dV. \quad [47]$$

1.1.11 Rappresentazione spettrale dell'energia fornita dai generatori (esercizio)

Adoperando il teorema di Parseval si mostri che l'energia totale (supposta finita) fornita dai generatori è data da

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{-\infty}^{+\infty} [p_0(t) + p_{m0}(t)] dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left\{ - \iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0 dV - \iiint_V \mathbf{J}_{m0} \cdot \mathbf{H} dV \right\}.
 \end{aligned}$$

*1.1.12 Fasori del campo elettromagnetico

In molte applicazioni le sorgenti del campo elettromagnetico variano nel tempo con legge sinusoidale, oppure la banda relativa di frequenza $\Delta\omega/\omega$ (ω è la pulsazione centrale) è talmente piccola che la maggior parte della informazione sulle caratteristiche dei campi può essere ottenuta considerando il comportamento di un segnale alla frequenza di centro banda.

Se il mezzo nel quale i campi sono presenti è lineare e stazionario (vedi § 1.2), allora l'andamento temporale di tutti i vettori del campo è anch'esso sinusoidale, con la stessa frequenza del generatore. Risulta

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) &= E_x \cos(\omega t + \theta_x) \mathbf{i}_x + E_y \cos(\omega t + \theta_y) \mathbf{i}_y + E_z \cos(\omega t + \theta_z) \mathbf{i}_z \\
 &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t) \}; \\
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= E_x(\mathbf{r}) \exp[j\theta_x(\mathbf{r})] \mathbf{i}_x + E_y(\mathbf{r}) \exp[j\theta_y(\mathbf{r})] \mathbf{i}_y + E_z(\mathbf{r}) \exp[j\theta_z(\mathbf{r})] \mathbf{i}_z;
 \end{aligned}$$

relazioni analoghe si hanno per gli altri vettori del campo.

Il vettore (complesso) $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ è detto *fasore* del campo elettrico. Mentre un ordinario vettore è geometricamente rappresentabile mediante una freccetta, per il fasore questa rappresentazione è soltanto simbolica. Esso è infatti caratterizzato da due quantità: parte reale e coefficiente dell'immaginario (per individuarle, sarebbero a rigore necessarie due freccette, ad esempio di colori diversi).

Pur se fasori e vettori trasformati nel dominio della frequenza sono contrassegnati dallo stesso simbolo, tra questi due tipi di grandezze esiste una differenza fondamentale: i fasori hanno le dimensioni delle corrispondenti grandezze nel dominio del tempo (ad esempio, il fasore del campo elettrico si misura in V/m); le dimensioni dei vettori trasformati invece si ottengono da quelle dei corrispondenti vettori nel dominio del tempo dividendole per una frequenza (così, il vettore trasformato del campo elettrico si misura in V/m·Hz).

Nella somma di fasori, si compongono vettorialmente le parti reali con le parti reali, e i coefficienti dell'immaginario con i coefficienti dell'immaginario. Pertanto, non necessariamente le direzioni della parte reale e del coefficiente dell'immaginario del fasore risultante sono coincidenti.

Vogliamo ora stabilire a che cosa tutto ciò corrisponda nel dominio del tempo. Posto

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$$

con $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ vettori reali, è

$$\mathbf{e} = \text{Re}[\mathbf{E} \exp(j\omega t)] = \text{Re}[(\mathbf{A} + j\mathbf{B}) \exp(j\omega t)] = \mathbf{A} \cos \omega t - \mathbf{B} \sin \omega t.$$

I vettori $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ d'altronde determinano un piano; introdotto su esso un sistema cartesiano ortogonale di riferimento (x, y) , si ha

$$\mathbf{e} = (A_x \cos \omega t - B_x \sin \omega t) \mathbf{i}_x + (A_y \cos \omega t - B_y \sin \omega t) \mathbf{i}_y.$$

L'estremo del vettore $\mathbf{e}$ ha coordinate (vedi fig. 1.7)

$$x = A_x \cos \omega t - B_x \sin \omega t$$

$$y = A_y \cos \omega t - B_y \sin \omega t.$$

Le funzioni del tempo possono essere facilmente eliminate risolvendo il sistema per $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ e utilizzando la relazione $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$. Si ha

$$(A_y^2 + B_y^2)x^2 + (A_x^2 + B_x^2)y^2 - 2(A_x A_y + B_x B_y)xy = (A_x B_y - A_y B_x)^2,$$

che è l'equazione di un'ellisse; il vettore $\mathbf{e}$ si dice avere *polarizzazione ellittica*. Tale vettore, per chi osservi il piano $z=0$ da un punto posto nella regione $z>0$, appare muoversi in senso antiorario se $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ha il verso di $\mathbf{i}_z$, in senso orario se $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ ha il verso di $-\mathbf{i}_z$. L'ellisse si riduce a una circonferenza se $A=B$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}=0$, ovvero quando parte reale e coefficiente dell'immaginario del fasore sono ortogonali e di ampiezza uguale ($B_y = \pm A_x$; $B_x = \mp A_y$); in questo caso, si dice che il campo è *polarizzato circolarmente*. L'ellisse degenera in un segmento se $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = 0$, cioè quando parte reale e coefficiente dell'immaginario del fasore hanno la stessa direzione ($B_x = \alpha A_x$; $B_y = \alpha A_y$); in questo caso, il campo è *polarizzato linearmente* (per una trattazione più esauriente del problema della polarizzazione vedi cap. 6).

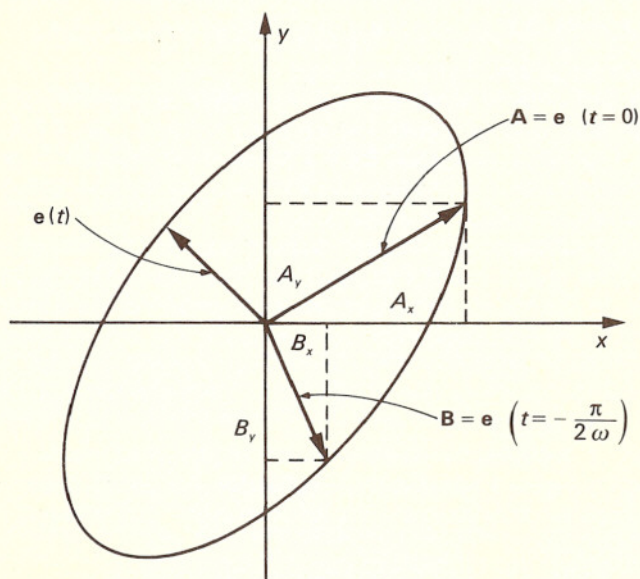


Figura 1.7

Composizione di due fasori e corrispondente vettore nel dominio del tempo.

Esprimendo i campi in funzione dei rispettivi fasori nelle [31]-[34] e uguagliando le quantità entro il simbolo di parte reale (dovendo le uguaglianze essere vere per qualunque t) si ha

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) - \mathbf{J}_m(\mathbf{r}) - \mathbf{J}_{m0}(\mathbf{r}) \quad [48]$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) \quad [49]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) + \rho_0(\mathbf{r}) \quad [50]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \rho_m(\mathbf{r}) + \rho_{m0}(\mathbf{r}); \quad [51]$$

si tratta di espressioni formalmente identiche alle [35]-[38] (equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza) a parte la non esplicita dipendenza da ω che, in questo caso, è una costante. Vien da pensare che la notazione di fasore (e la semplice regola che consente di passare nel dominio del tempo: moltiplicare per $\exp(j\omega t)$ e prendere poi la parte reale) sia qualcosa di simile a una trasformata di Fourier per i campi sinusoidali. In effetti, se lo spettro $\mathbf{E}(\omega)$ è quello riportato nella figura 1.8, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} 2A \Delta\omega \frac{\sin(\Delta\omega t)}{\Delta\omega t} \cos(\omega_0 t + \theta_0); \end{aligned}$$

se $\Delta\omega \rightarrow 0$, ma $A \rightarrow \infty$ in modo che $2A \Delta\omega/\pi$ tenda al valore costante E_0 , è

$$\mathbf{e}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0).$$

Un segnale sinusoidale di fasore $\mathbf{E} = E_0 \exp(j\theta_0)$ e pulsazione ω_0 ha quindi uno spettro

$$\pi E_0 [\exp(j\theta_0) \delta(\omega - \omega_0) + \exp(-j\theta_0) \delta(\omega + \omega_0)];$$

la notazione di fasore può così riguardarsi come una forma abbreviata per effettuare una trasformata di Fourier.

Concludiamo osservando che, una volta calcolati per mezzo dei fasori i campi prodotti da sorgenti sinusoidali, quelli prodotti da sorgenti non sinusoidali, almeno nel caso lineare (vedi § 1.2), sono immediatamente calcolabili: basta moltiplicare la soluzione sinusoidale per lo spettro delle sorgenti. L'andamento dei campi nel tempo è ottenuto mediante una successiva trasformazione di Fourier.

1.1.13 Potenza associata a campi sinusoidali

Per campi sinusoidali l'energia totale fornita dalle sorgenti (vedi 1.1.9) è infinita. Conviene riferirsi a una media della potenza, calcolata nel periodo $T = 2\pi/\omega$ (*potenza media*)

$$\langle p_0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_0(t) dt; \quad [52]$$

lo stesso dicasi per la potenza fornita dai generatori di tipo magnetico.

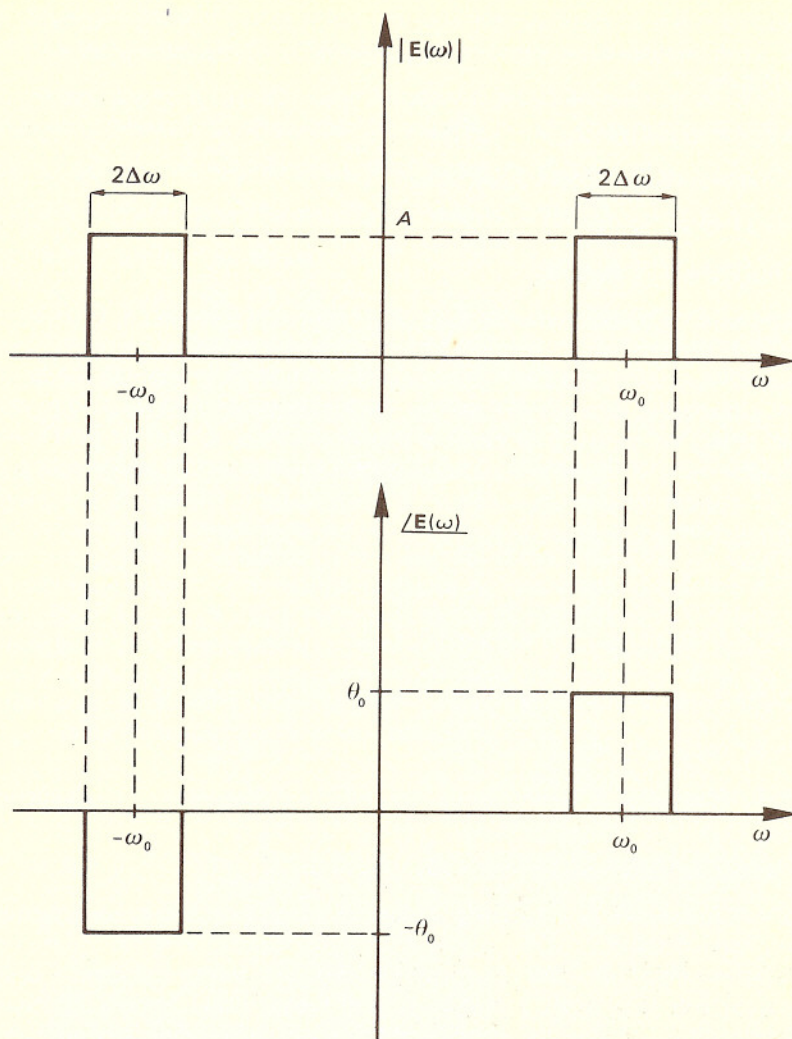


Figura 1.8

Spettro di un segnale a banda limitata e, in essa, costante.

Nei fasori $\mathbf{J}_0$ ed $\mathbf{E}$ si distinguono il modulo e la fase:

$$\mathbf{J}_0 = A \exp(j\alpha), \quad \mathbf{E} = C \exp(j\gamma),$$

in modo che

$$j_0(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{J}_0 \exp(j\omega t)] = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$e(t) = \operatorname{Re}[\mathbf{E} \exp(j\omega t)] = C \cos(\omega t + \gamma).$$

La densità di volume di potenza media (W/m^3) fornita al campo da generatori di tipo elettrico è

$$\begin{aligned} p_e &= -\frac{1}{T} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \int_0^T \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \gamma) dt = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cos(\alpha - \gamma) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^*]. \end{aligned} \quad [53]$$

La [53] mostra come tale densità di potenza possa calcolarsi come la parte reale di una densità di potenza complessa:

$$\bar{p}_e = -\frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^*). \quad [54]$$

Per questo motivo, quando può ingenerarsi confusione con la [54], la [53] viene detta *densità di potenza media attiva*.

Analogamente, la densità di potenza media complessa fornita al campo da generatori di tipo magnetico è data da

$$\bar{p}_m = -\frac{1}{2} (\mathbf{J}_{m0} \cdot \mathbf{H}^*), \quad [55]$$

e la densità di potenza media attiva è

$$p_m = \operatorname{Re}[\bar{p}_m] = -\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2} \mathbf{J}_{m0} \cdot \mathbf{H}^*\right]. \quad [56]$$

I coefficienti dell'immaginario di p_e e di p_m sono le cosiddette *densità di potenza media reattiva*; il loro significato è chiarito nel paragrafo 1.3.

1.2 Le relazioni costitutive

Le equazioni di Maxwell, come si è visto, non sono tutte indipendenti (vedi 1.1.1); a un rapido esame si scopre anzi che il numero delle incognite supera di molto quello delle equazioni. Il problema del calcolo dei campi è allora indeterminato, a meno che, in aggiunta alle equazioni di Maxwell e indipendenti da esse, non ne vengano scritte di nuove, con il compito di fornire informazioni sul mezzo in cui i campi vengono calcolati. Del resto, in mezzi diversi il campo elettromagnetico è in generale diverso, a parità di sorgenti; pertanto le caratteristiche del mezzo devono, in qualche modo, apparire nella soluzione.

Le nuove equazioni che descrivono il mezzo, insieme con quelle di Maxwell, vengono a formare un sistema che in linea di principio ammette soluzione, ovvero è *compatibile*. Ad esempio, in un particolare mezzo detto *plasma* il campo elettromagnetico, per esistere, deve soddisfare (vedi 1.2.2), sotto certe ipotesi restrittive

riguardanti il plasma stesso, le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - Nq\mathbf{v} \\ m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -q\mathbf{e}, \end{cases}$$

dove i parametri $\epsilon_0, \mu_0, N, q, m$ sono grandezze assegnate. Si riconosce che la terza equazione è indipendente da quelle di Maxwell ed è caratteristica del mezzo considerato.

Il fenomeno descritto da questo sistema di tre equazioni vettoriali richiede evidentemente l'introduzione di un *campo vettoriale* ($\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{v}$) con nove componenti scalari, delle quali sei elettromagnetiche ($\mathbf{e}, \mathbf{h}$) e tre meccaniche ($\mathbf{v}$). Questa formulazione del problema si dimostra perfettamente adeguata in un gran numero di casi (Marcuvitz, 1970); si può tuttavia pensare a una formulazione alternativa, suggerita dal fatto che nello spazio libero (cioè nel vuoto e, per frequenze sino dell'ordine delle decine di gigahertz, con ottima approssimazione anche nell'aria) le equazioni di Maxwell assumono, in assenza di sorgenti, una forma particolarmente semplice:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{e} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{h} = 0. \end{cases}$$

In questo caso, le equazioni alle divergenze sono ambedue conseguenza di quelle ai rotori, e la libera propagazione nello spazio vuoto può studiarsi in base alle sole equazioni

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} & [1] \\ \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} & [2] \end{cases}$$

Le relazioni caratteristiche del mezzo considerato (il vuoto) sono

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h};$$

ove i parametri ϵ_0 e μ_0 sono costanti dipendenti dal mezzo: $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 1,256 \times 10^{-6}$ H/m. Tali espressioni sono state sostituite nelle equazioni di Maxwell, che si presentano così come un sistema di due equazioni vettoriali nelle due

incognite $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$. Il campo vettoriale che descrive il fenomeno è in questo caso un puro campo elettromagnetico.

Ci si può chiedere se il ricondursi a un sistema del tipo [1]-[2] sia sempre possibile: la risposta è affermativa, sempre che i vettori $\mathbf{d}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{j}$ siano esprimibili in funzione di $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$ (per quel che concerne $\mathbf{j}$, vedi 1.2.1).

Le relazioni che legano induzioni e campi prendono il nome di *relazioni costitutive*. Nel caso che $\mathbf{d}$ dipenda solo da $\mathbf{e}$ e $\mathbf{b}$ solo da $\mathbf{h}$ si può porre

$$\mathbf{d} = \mathcal{F}_e(\mathbf{e}) \quad [3]$$

$$\mathbf{b} = \mathcal{F}_h(\mathbf{h}), \quad [4]$$

dove $\mathcal{F}_e$ e $\mathcal{F}_h$ indicano operatori, detti anche *funzionali*, che descrivono il tipo di mezzo considerato. Nel linguaggio della teoria dei sistemi, i vettori $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ vengono detti *cause*, o *ingressi*; i vettori $\mathbf{d}$, $\mathbf{b}$, *effetti* o *uscite*.

Una prima grande distinzione è quella tra mezzi lineari e non lineari: un mezzo è detto *lineare* se alla combinazione lineare delle cause, secondo assegnati coefficienti, corrisponde la combinazione lineare degli effetti secondo gli stessi coefficienti. Tranne il vuoto, nessun mezzo è esattamente lineare per qualunque valore dell'ingresso. Se questo è troppo debole, può addirittura non esservi uscita (*soglia*); se è troppo elevato, l'uscita può rimanere costante al variare dell'ingresso (*saturazione*). Tuttavia, in molte applicazioni di elettromagnetismo, il mezzo si mantiene lineare in tutta la gamma di valori d'ingresso che hanno un interesse pratico. In tal caso gli operatori che appaiono nelle [3]-[4] devono essere lineari; se poi, per ragioni fisiche, si richiede che siano continui, essi sono di tipo integrale:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int \mathcal{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \quad [5]$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \int \mathcal{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt', \quad [6]$$

dove l'integrazione è estesa a tutto lo spazio e a tutti i tempi; le funzioni $\mathcal{G}_e, \mathcal{G}_h$, dipendenti solo dal mezzo, sono rappresentate da matrici 3×3 , perché non necessariamente cause ed effetti devono essere paralleli (quanto all'espressione che appare sotto il segno di integrale, è inteso che le componenti cartesiane dei vettori $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ sono ordinate secondo due matrici colonna e i prodotti sono eseguiti riga per colonna).

Il significato delle matrici $\mathcal{G}_e, \mathcal{G}_h$ è chiaro quando si consideri un particolare tipo di ingresso, quello impulsivo:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{a}_e \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t_0)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{a}_h \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t_0),$$

dove $\mathbf{a}_e$ e $\mathbf{a}_h$ sono vettori (dimensionati) costanti; in tal caso si scrive

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) \cdot \mathbf{a}_e$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{J}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) \cdot \mathbf{a}_h.$$

Pertanto $\mathcal{J}_e \cdot \mathbf{a}_e, \mathcal{J}_h \cdot \mathbf{a}_h$ sono le risposte in $(\mathbf{r}, t)$ a cause impulsive in $(\mathbf{r}_0, t_0)$. Le matrici $\mathcal{J}_e, \mathcal{J}_h$, denominate *risposte impulsive unitarie*, elettrica e magnetica rispettivamente, del mezzo, rappresentano la risposta a un *ingresso impulsivo unitario*

$$\mathcal{J} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0),$$

ove $\mathcal{J}$ è la matrice unitaria

$$\mathcal{J} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si noti che un formalismo simile a quello espresso dalle [5], [6] può essere introdotto anche nel caso di mezzi non lineari (Franceschetti e Pinto, 1980; Flytzanis, 1975).

Una classe molto importante di mezzi è quella per cui le risposte impulsive sono diagonali e a elementi tutti uguali:

$$\mathcal{J}_e = g_e \mathcal{J}, \quad \mathcal{J}_h = g_h \mathcal{J}.$$

Per tali mezzi, denominati *isotropi* (i precedenti erano *anisotropi*), le relazioni costitutive assumono la forma semplificata:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \mathbf{e}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \quad [7]$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \int g_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \mathbf{h}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'; \quad [8]$$

$\mathbf{d}$ ed $\mathbf{e}$, come del resto $\mathbf{b}$ e $\mathbf{h}$, sono allineati; chiaramente, g_e, g_h rappresentano la *risposta impulsiva unitaria*, elettrica e magnetica, cioè le induzioni corrispondenti a campi impulsivi (spazialmente e temporalmente) unitari. Se ad esempio

$$\mathbf{e} = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \delta(t' - t_0) \mathbf{i}_e,$$

dove $\mathbf{i}_e$ è un vettore (dimensionato) unitario, allora

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) \mathbf{i}_e$$

è l'induzione elettrica, in $(\mathbf{r}, t)$, dovuta al campo elettrico impulsivo unitario in $(\mathbf{r}_0, t_0)$.

Un mezzo si dice *causale* se l'effetto non precede la causa; tale proprietà, ovviamente valida anche per mezzi non lineari, a livello macroscopico è comune a tutti i mezzi fisicamente realizzabili (vedi 1.2.9). Supponendo inoltre che ogni perturbazione

non possa propagarsi con velocità superiore a quella della luce c , risulta

$$g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = 0 \quad \text{per} \quad t < t_0 + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}{c}; \quad [9]$$

lo stesso dicasi per g_h . Tale proprietà di realizzabilità fisica per la risposta impulsiva è verificata anche nel caso dei mezzi anisotropi, al pari di molte delle proprietà esaminate qui di seguito nell'ipotesi, formalmente più semplice, di isotropia del mezzo.

Una classe molto importante di mezzi è quella per i quali l'effetto in ogni punto $\mathbf{r}$ dipende solo dal valore della causa nello stesso punto:

$$g_e \rightarrow g_e(\mathbf{r}; t, t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$g_h \rightarrow g_h(\mathbf{r}; t, t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Tali mezzi sono detti *spazialmente non dispersivi*, a differenza dei precedenti (*spazialmente dispersivi*); per essi le relazioni [7] e [8] si semplificano come segue:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\mathbf{r}; t, t') \mathbf{e}(\mathbf{r}, t') dt' \quad [10]$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_h(\mathbf{r}; t, t') \mathbf{h}(\mathbf{r}, t') dt', \quad [11]$$

dove il limite superiore di integrazione può essere esteso anche solo sino a t , a causa della condizione di realizzabilità fisica [9].

Un mezzo è anche *temporalmente non dispersivo* se l'effetto, ad ogni istante t , dipende solo dal valore della causa in quello stesso istante:

$$g_e(\mathbf{r}; t, t') = \epsilon(\mathbf{r}, t) \delta(t - t')$$

$$g_h(\mathbf{r}; t, t') = \mu(\mathbf{r}, t) \delta(t - t');$$

ϵ e μ prendono rispettivamente il nome di *permittività* (o *costante dielettrica*) e *permeabilità* (o *costante magnetica*). Per tali mezzi le precedenti relazioni [10], [11] si semplificano come segue:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \epsilon(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \quad [12]$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}, t) \mathbf{h}(\mathbf{r}, t). \quad [13]$$

Invece i mezzi descritti dalle [10], [11] sono detti *temporalmente dispersivi* (o semplicemente *dispersivi*, o anche, con *memoria*, o con *eredità*).

Un mezzo è infine *omogeneo* se a una traslazione dei vettori $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$ (cause) corrisponde un'uguale traslazione degli effetti $\mathbf{d}$ e $\mathbf{b}$; *non omogeneo* nel caso opposto. In particolare, l'omogeneità, o la non-omogeneità, può essere spaziale o temporale; nel secondo caso si usano anche le locuzioni *mezzo stazionario*, o al contrario,

variante, riservando l'appellativo "omogeneo" o "non omogeneo", senza ulteriore specificazione, a indicare tali proprietà nello spazio.

Se il mezzo è non dispersivo, l'omogeneità implica che ϵ e μ siano costanti, cioè non dipendenti da $\mathbf{r}$ e da t ; se invece è dispersivo, le risposte impulsive dipendono unicamente (vedi 1.2.7) dalle differenze $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$, $t-t'$:

$$g_e = g_e(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; t-t')$$

$$g_h = g_h(\mathbf{r}-\mathbf{r}'; t-t').$$

Questa proprietà conduce a un risultato molto importante per i mezzi stazionari e spazialmente non dispersivi, ai quali si riferisce una larghissima parte delle applicazioni. Trasformando le relazioni [10], [11] nel dominio della frequenza (vedi 1.2.8), si ottengono, per via della dipendenza da $t-t'$ (e non semplicemente da t , t'), le seguenti relazioni:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad [14]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad [15]$$

esprimenti una semplice proporzionalità tra le trasformate delle induzioni e dei campi. I fattori di proporzionalità (diadi nel caso anisotropo) sono le trasformate di Fourier delle risposte impulsive:

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(\mathbf{r}, t) \exp(-j\omega t) dt \quad [16]$$

$$\mu(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(\mathbf{r}, t) \exp(-j\omega t) dt \quad [17]$$

e corrispondono a quella che, in teoria dei sistemi, vien detta *funzione di trasferimento*. Si sono usati gli stessi simboli che appaiono nelle [12], [13], sia in omaggio a una consuetudine consolidata, sia per mettere in luce che, nel dominio della frequenza, i mezzi dispersivi e non dispersivi sono formalmente descritti nello stesso modo. Si noti tuttavia che mentre le [16], [17] sono funzioni in generale complesse, le ϵ e μ che appaiono nelle [12], [13] sono funzioni reali.

Se il mezzo è anche spazialmente dispersivo si possono ottenere, purché esso sia omogeneo, relazioni simili alle [14], [15]. Con una ulteriore trasformazione nel dominio del numero d'onda si ricava:

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega) \quad [18]$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\mu}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega). \quad [19]$$

In conclusione, per l'importante classe dei mezzi lineari, stazionari ed eventualmente non omogenei (nello spazio), dispersivi (solo nel tempo) e anisotropi, i feno-

meni elettromagnetici possono essere descritti dalle equazioni

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -j\omega \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{J}_{m0}(\mathbf{r}, \omega) \quad [20]$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = j\omega \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, \omega). \quad [21]$$

Le espressioni

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}$$

corrispondono, per il mezzo considerato, alle [3], [4]. Calcolando le divergenze di ambo i membri delle [20], [21], si ottengono, in assenza di sorgenti di carica, condizioni necessarie per il campo elettromagnetico:

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})] = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad [22]$$

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})] = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad [23]$$

del resto già contenute in forma implicita nelle stesse [20], [21]; le induzioni $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ che appaiono nelle [22], [23] non corrispondono però alle $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ contenute nelle [35], [36] del paragrafo 1.1 (come risulta da 1.2.1); esse possono considerarsi induzioni generalizzate.

Annotazioni

1.2.1 Relazione costitutiva per un mezzo conduttore

Un mezzo si dice *conduttore* se la relazione tra la densità di corrente (eccitata dal campo elettrico applicato) e il campo è la seguente:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}. \quad [24]$$

Per un mezzo stazionario risulta $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$; di conseguenza

$$j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} = j\omega \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} = j\omega \left(\boldsymbol{\epsilon} - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}.$$

Avendo posto

$$\boldsymbol{\epsilon}_{eq} = \boldsymbol{\epsilon} - j \frac{\sigma}{\omega}, \quad [25]$$

la seconda equazione di Maxwell si scrive, in assenza di sorgenti,

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \boldsymbol{\epsilon}_{eq} \mathbf{E}.$$

La trasformata della [25] è, nell'ipotesi che ϵ non dipenda dalla frequenza,

$$g_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_{eq}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \epsilon \delta(t) + \sigma U(t),$$

dove l'integrale di Fourier è calcolato come limite di quello di Laplace per assicurare la causalità alla risposta. Pertanto le relazioni costitutive di un mezzo conduttore, nel

dominio della frequenza e del tempo, sono date, conformemente ai risultati generali, dalle relazioni

$$D(\omega) = \epsilon_{eq}(\omega) E(\omega),$$

$$d(t) = \int_{-\infty}^t g_e(t-\tau) e(\tau) d\tau.$$

D e d sono induzioni generalizzate, non coincidenti con quelle che appaiono nelle equazioni [36] e [13] (§ 1.1): infatti contengono anche l'integrale della corrente di conduzione. Le divergenze di queste induzioni sono nulle, in conformità alla [22], ed esprimono l'equazione di continuità della corrente (vedi § 1.1, equazioni [6], [39]).

*1.2.2 Relazione costitutiva di un plasma freddo, isotropo, senza collisioni

Si definisce *plasma* un insieme di particelle cariche e neutre tali che la carica complessiva positiva uguagli quella negativa. Un esempio di plasma è la ionosfera che circonda la Terra: le particelle negative sono gli elettroni prodotti per ionizzazione dalla radiazione ultravioletta solare; quelle positive, gli atomi ionizzati; quelle neutre gli atomi non ionizzati.

Quando vi sono due soli tipi di particelle cariche e una ha massa molto minore dell'altra (è il caso della ionosfera), quelle a massa minore sono le uniche a muoversi sotto l'azione di un campo elettromagnetico di frequenza sufficientemente elevata (le altre particelle possono ritenersi praticamente ferme). In tal caso si parla di plasma *a un solo costituente*, o anche *a un solo fluido*; è appunto questo il caso che qui di seguito viene considerato.

Ricavare equazioni che descrivono il comportamento del plasma in seguito all'emissione di un segnale elettromagnetico è problema non lieve, per il fatto di dover utilizzare sia equazioni di campo (quelle di Maxwell) sia equazioni cinetiche, quelle cioè che descrivono il comportamento della singola particella, su cui agiscono, oltre alle forze (deterministiche) conseguenti all'azione del segnale, quelle (casuali) dovute alla presenza delle altre particelle che, nel moto incessante dell'agitazione termica, assumono posizioni e velocità aleatorie. Le posizioni delle particelle, le loro velocità e i campi da esse prodotti risultano quindi *variabili stocastiche*.

Lo studio rigoroso del plasma è notevolmente complesso (Klimontovič, 1965; Marcuvitz, 1974) e viene affrontato partendo dalle equazioni di Maxwell-Klimontovič. Più semplicemente, in modo semieuristico, si può introdurre sin dall'inizio un concetto di media.

A tal fine si immagini di avere a disposizione un gran numero di plasmii, tutti equivalenti dal punto di vista statistico. A un certo istante t e in un certo punto r si effettua la media della grandezza che interessa, per esempio la densità di particelle. Una media siffatta, relativa ai possibili plasmii, è detta *media d'insieme*; tuttavia, per come è stata costruita, essa è pur sempre una media microscopica e, in quanto tale, fortemente variabile al variare di r e t . Né, d'altra parte, essa è rappresentativa di grandezze osservabili (cioè misurabili), che sono necessariamente macroscopiche. Occorre dunque effettuare nuove medie, su volumi e tempi opportuni, nell'intorno del punto e dell'istante considerato. Il volume da un lato dev'essere sufficientemente grande perché le operazioni di media abbiano senso (variando di poco le dimensioni dei volumi, i valori medi devono rimanere praticamente costanti); dall'altro, sufficientemente piccolo perché le operazioni di media non facciano scomparire le variazioni spazio-

temporali del segnale che si propaga nel plasma e che si vuol calcolare. Analogamente vale per i tempi.

Ammettendo che questa scelta sia possibile, cioè che la scala delle variazioni deterministiche sia molto più grande di quella delle variazioni stocastiche, allora le varie grandezze medie che descrivono le caratteristiche del plasma (numero N di particelle per unità di volume, velocità $\mathbf{v}$ delle particelle) sono, per così dire, purificate dalla parte aleatoria e si presentano come variabili deterministiche. Nella scala (macroscopica) dettata dalle variazioni spaziotemporali del segnale queste grandezze variano anche con continuità. Si è quindi sostituito al plasma, inteso come insieme discreto di particelle, un modello "fluidodinamico", caratterizzato da densità di carica Nq (q è la carica della particella), densità di corrente $Nq\mathbf{v}$ e densità di massa Nm (m è la massa della particella). Le equazioni che descrivono l'interazione di un campo elettromagnetico con tale fluido sono (in assenza di sorgente) le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + Nq\mathbf{v} \\ \frac{d(Nm\mathbf{v})}{dt} = Nq(\mathbf{e} + \mu_0 \mathbf{v} \times \mathbf{h}) \\ \nabla \cdot (Nq\mathbf{v}) + \frac{\partial (Nq)}{\partial t} = 0; \end{cases}$$

la penultima equazione esprime la legge della dinamica di Newton, la densità di forza è quella di Lorentz e l'ultima equazione è quella di continuità. Altre forze eventualmente presenti, come quelle dovute alla gravità e all'attrazione e repulsione tra le particelle, sono state trascurate. Il fluido è stato poi considerato perfetto, e infatti non compaiono forze di attrito (*fluido non viscido*; vedi 1.2.3), e a pressione nulla: infatti, nell'equazione di Newton si è trascurata la densità di forza $-\nabla p$, dove p è la pressione (*plasma freddo*; vedi 1.2.5).

Le equazioni che descrivono questo modello di plasma sono *non lineari*, perché in esse appaiono prodotti di variabili dipendenti; se però i segnali che si propagano nel plasma sono deboli, possono essere linearizzate, trascurando tali prodotti. In particolare

$$N \rightarrow N_0 + N$$

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h}_0 + \mathbf{h};$$

N_0 è la densità media delle particelle su volumi grandi rispetto alla variazione spaziale del segnale, $\mathbf{v}_0$ una eventuale velocità impressa (velocità di *drift*), $\mathbf{h}_0$ un eventuale campo magnetico statico impresso (campo magnetico di polarizzazione); le grandezze variabili si indicano, per semplicità, con gli stessi simboli N , $\mathbf{v}$ e $\mathbf{h}$. Risulta allora

$$N\mathbf{v} \approx N_0\mathbf{v}_0 + N_0\mathbf{v} + N\mathbf{v}_0$$

$$N\mathbf{e} \approx N_0\mathbf{e}$$

$$N\mathbf{v} \times \mathbf{h} \approx N_0\mathbf{v}_0 \times \mathbf{h}_0 + N_0\mathbf{v} \times \mathbf{h}_0 + N_0\mathbf{v}_0 \times \mathbf{h} + N\mathbf{v}_0 \times \mathbf{h}_0.$$

Nel seguito N_0, v_0, h_0 sono assunti costanti in tutto lo spazio occupato dal plasma (plasma omogeneo), e in più è $v_0 = 0$, cosicché

$$N\mathbf{v} \approx N_0 \mathbf{v}$$

$$N\mathbf{e} \approx N_0 \mathbf{e}$$

$$N\mathbf{v} \times \mathbf{h} \approx N_0 \mathbf{v} \times \mathbf{h}_0.$$

Essendo poi

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(x, y, z, t),$$

risulta

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \approx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t},$$

quando si trascurino, nel processo di linearizzazione, anche i prodotti tra $\mathbf{v}$ e le sue derivate spaziali.

Se anche $h_0 = 0$ (vedi 1.2.4 per il caso $h_0 \neq 0$), si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + N_0 q \mathbf{v} \\ N_0 m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = N_0 q \mathbf{e} \\ \nabla \cdot (N_0 \mathbf{v}) + \frac{\partial N}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

che descrivono l'interazione tra il campo elettromagnetico e un plasma a un costituente, non viscido, freddo e linearizzato, in assenza di velocità di *drift* e di campo magnetico di polarizzazione. Si noti che l'ultima equazione è disaccoppiata dalle precedenti e che basta considerare le prime tre.

Nel dominio della frequenza,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} + N_0 q \mathbf{V} \\ j\omega N_0 m \mathbf{V} = N_0 q \mathbf{E}; \end{cases}$$

sostituendo la terza equazione nella seconda:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r;$$

$$\epsilon_r = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad \omega_p^2 = \frac{N_0 q^2}{m \epsilon_0}.$$

[26]

Il plasma si comporta quindi come un dielettrico la cui permittività relativa è data dalla [26]; la frequenza angolare ω_p è detta *pulsazione di plasma*.

Per comprendere il significato di ω_p , si consideri un modello semplice di plasma (in assenza di campo applicato), cioè una distribuzione regolare di cariche elettriche

di periodo spaziale $a^3 = 1/N_0$. Con riferimento alla figura 1.9 (in cui è rappresentata una parte della distribuzione intorno alla carica q), la forza totale agente sulla carica q (indistinguibile dalle altre) è nulla se il plasma è in equilibrio. Se la carica viene spostata di una piccola quantità $x \ll a$, nasce una forza di richiamo che tende a riportarla nella posizione originaria. Ad esempio, la forza dovuta alle cariche 1 e 2 è data da

$$F_1 = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2} \right] \approx -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4x}{a^3} = -\frac{1}{\pi} \frac{N_0 q^2}{\epsilon_0} x.$$

In generale, la componente f_x della forza dovuta a una carica la cui distanza da q , proiettata sugli assi x, y, z , è pari rispettivamente a na, ma, sa , è data da

$$\begin{aligned} f_x &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{[(na-x)^2 + (ma)^2 + (sa)^2]^{1/2}} \right\} = \\ &= -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{na-x}{[(na-x)^2 + (ma)^2 + (sa)^2]^{3/2}} \approx \\ &\approx -\frac{q^2 N_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{na}{[n^2 + m^2 + s^2]^{3/2}} + \frac{2n^2 - m^2 - s^2}{[n^2 + m^2 + s^2]^{5/2}} x \right\}, \end{aligned}$$

a meno di termini di ordine superiore in x .

La componente secondo x della forza totale (indicata, per semplicità, con lo stesso simbolo) si ottiene dalla sommatoria delle forze prodotte dalle singole cariche, ove m ,

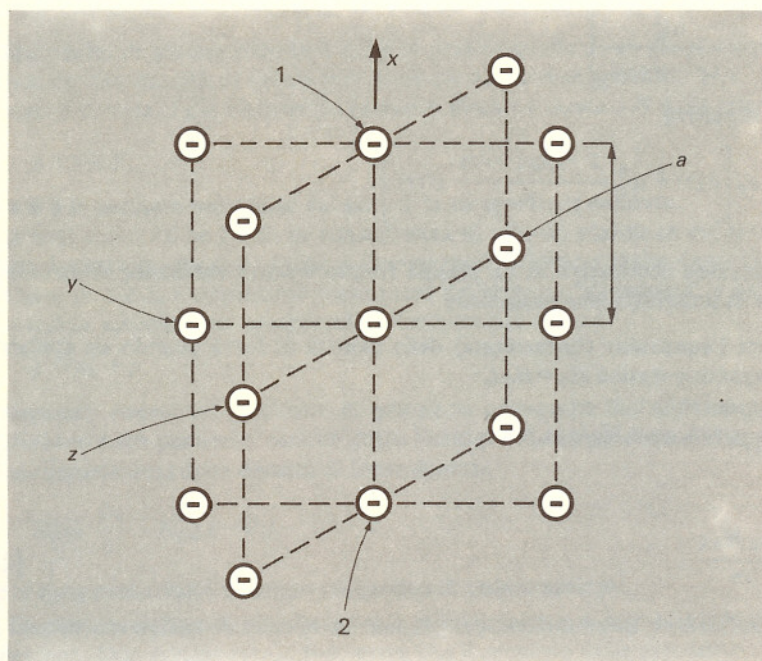


Figura 1.9
Modello di plasma imperturbato.

n, s assumono tutti i valori, tranne $n=m=s$ contemporaneamente (Collin, 1960).

$$f_x \approx \frac{1,2}{\pi} \frac{q^2 N_0}{\epsilon_0}.$$

Sono nulle, invece, le componenti f_y e f_z (della forza totale). Se la carica dopo esser stata spostata, è lasciata libera, essa si muove in conformità all'equazione²

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + (0,64 \cdot \omega_p)^2 x = 0,$$

cioè oscilla a una pulsazione prossima a quella del plasma. Tenuto conto delle semplificazioni introdotte nel modello, si può identificare ω_p con la pulsazione di oscillazione libera del plasma.

1.2.3 Relazione costitutiva di un plasma freddo e isotropo, con collisioni (esercizio)

Nelle equazioni del plasma si sostituisca all'equazione (linearizzata) della densità di forza l'equazione più completa

$$N_0 m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = N_0 q \mathbf{e} - N_0 m \nu \mathbf{v},$$

dove l'ultimo termine rappresenta una forza di attrito che tiene fenomenologicamente conto delle collisioni tra le particelle. La costante ν (1/s) è proporzionale alla *frequenza media di collisioni* che ogni particella subisce nel suo moto.

Si mostri che la permittività del plasma assume la forma

$$\epsilon = \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j \omega \nu} \right] \quad [27]$$

e la risposta impulsiva,

$$g_e(t) = \epsilon_0 \left[\delta(t) + \omega_p^2 \frac{1 - \exp(-\nu t)}{\nu} U(t) \right].$$

1.2.4 Relazione costitutiva di un plasma freddo e senza collisioni, in un campo magnetico di polarizzazione (esercizio)

Si consideri l'equazione (linearizzata) della densità di forza quando sia applicato un campo magnetico statico $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{i}_z$:

$$N_0 m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = N_0 q \mathbf{e} + N_0 m \omega_c \mathbf{v} \times \mathbf{i}_z,$$

essendo

$$\omega_c = \frac{\mu_0 H_0 q}{m}; \quad [28]$$

ω_c è detta *pulsazione di ciclotrone* del plasma. In assenza di campo elettrico si ha

² Trascurando la radiazione da parte della carica stessa e le oscillazioni delle altre cariche.

$\partial \mathbf{v} / \partial t = \omega_c \mathbf{v} \times \mathbf{i}_z$, equazione che, risolta, fornisce

$$v_z = \text{cost.}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} + \omega_c^2 v_x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} + \omega_c^2 v_y = 0.$$

Ne consegue che ω_c è la pulsazione naturale di rotazione degli elettroni intorno al campo magnetico statico applicato.

Si dimostri che la permittività del plasma è data da

$$\epsilon \rightarrow \begin{vmatrix} \epsilon_1 & j\epsilon_2 & 0 \\ -j\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{vmatrix}; \quad [29]$$

essendo

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_c \omega_p^2 / \omega}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Il plasma si comporta quindi come un *dielettrico anisotropo*. Per $\omega_c \rightarrow \infty$ ($H_0 \rightarrow \infty$), $\epsilon_1 \rightarrow 1$, $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ed ϵ si diagonalizza; tale plasma viene detto *uniassico*.

1.2.5 Relazione costitutiva di un plasma senza collisioni e isotropo, ma caldo

Il modello di plasma visto in 1.2.2 è in pratica quello di un gas elettronico caratterizzato da una densità di massa mN , cioè da un volume specifico $1/N$. La pressione parziale p dovuta al gas elettronico (assunto ideale) è legata a N dalla relazione

$$p = NRT,$$

dove R è la costante universale dei gas e T la temperatura assoluta.

Si noti che $p=0$ se $T=0$; in conseguenza di ciò, un plasma in cui si trascurino gli effetti dovuti alla pressione (plasma *incompressibile*) viene anche denominato *freddo*.

Come in 1.2.2, è opportuno distinguere nel termine "pressione" la parte costante, p_0 , e quella variabile, per semplicità indicata ancora con p :

$$p \rightarrow p_0 + p.$$

Tenendo conto del gradiente di pressione provocato dall'addensamento e dalla rarefazione delle particelle cariche sotto l'azione del campo elettromagnetico, l'equazione (linearizzata) della densità di forza diventa

$$N_0 m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = N_0 q \mathbf{e} - \nabla p,$$

ove si è supposto nullo il campo magnetico di polarizzazione.

La presenza della variabile dipendente p , in aggiunta a $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{v}$, richiede una ulteriore, equazione. Ora, è ragionevole ipotizzare che il processo delle successive compressioni e rarefazioni che dà origine a ∇p sia *adiabatico*: la frequenza di oscillazione delle grandezze in gioco è infatti sufficientemente elevata perché non avvengano apprezz-

zabili scambi di calore. In questa ipotesi,

$$p_0 + p = C(N_0 + N)^\gamma,$$

dove C è una costante e $\gamma > 1$ è il rapporto tra i calori specifici, rispettivamente a pressione e a volume costante. La relazione precedente, linearizzata, diventa

$$p_0 + p \approx CN_0^\gamma + C\gamma N_0^{\gamma-1}N,$$

che equivale a

$$p_0 = CN_0^\gamma$$

$$p = CN_0^{\gamma-1}\gamma N = \frac{p_0}{N_0}\gamma N;$$

sostituendo nell'equazione di continuità, sempre linearizzata, ricaviamo

$$N_0 q \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{q N_0}{\gamma p_0} \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Questa è l'ulteriore equazione cercata. Le costanti che vi compaiono acquistano un più chiaro significato fisico in caso di assenza di campo elettromagnetico:

$$\begin{cases} N_0 m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p \\ \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{\gamma p_0} \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \end{cases}$$

derivando la seconda equazione rispetto a t e sostituendo nell'equazione risultante l'espressione di $\partial \mathbf{v} / \partial t$ ricavata dalla prima equazione, si ottiene

$$\nabla^2 p - \frac{m N_0}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0.$$

La grandezza

$$u^2 = \frac{\gamma p_0}{m N_0} \quad [30]$$

ha le dimensioni del quadrato di una velocità e corrisponde, in assenza di campo elettromagnetico, alla velocità di propagazione delle onde acustiche nel plasma. Per $p_0 = 0$ (plasma freddo) è $u = 0$.

In definitiva, le equazioni che descrivono questo modello di plasma (linearizzato) isotropo, senza collisioni ma caldo, sono le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + N_0 q \mathbf{v} \\ \nabla p = -N_0 m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + N_0 q \mathbf{e} \\ N_0 m \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial p}{\partial t} \end{cases}$$

Queste equazioni, trasformate nel dominio della frequenza e del numero d'onda, diventano

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \mu_0 \hat{\mathbf{H}} \\ \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} + j N_0 q \hat{\mathbf{V}} \\ \mathbf{k} \hat{\mathbf{P}} = \omega N_0 m \hat{\mathbf{V}} + j N_0 q \hat{\mathbf{E}} \\ N_0 m \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{V}} = \frac{\omega}{u^2} \hat{\mathbf{P}}. \end{cases}$$

Si possono eliminare le variabili dipendenti $\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{P}}$, ponendo la seconda equazione nella forma

$$\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \hat{\mathbf{E}},$$

dove la costante dielettrica *relativa* è data da

$$\hat{\epsilon}_r = \mathcal{I} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (\beta_0^2 - \beta_a^2)} \mathcal{R}, \quad [31]$$

con

$$\mathcal{R} \rightarrow \begin{vmatrix} \beta_0^2 - \beta_a^2 - k_x^2 & -k_x k_y & -k_x k_z \\ -k_x k_y & \beta_0^2 - \beta_a^2 - k_y^2 & -k_y k_z \\ -k_x k_z & -k_y k_z & \beta_0^2 - \beta_a^2 - k_z^2 \end{vmatrix},$$

$$\beta_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \beta_a^2 = \frac{\omega^2}{u^2}.$$

La [31] è facilmente trasformabile nel solo dominio della frequenza:

$$\epsilon_r = \mathcal{I} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 (\beta_0^2 - \beta_a^2)} \mathcal{R},$$

con

$$\mathcal{R} \rightarrow \begin{vmatrix} \beta_0^2 - \beta_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \beta_0^2 - \beta_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & \beta_0^2 - \beta_a^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

*1.2.6 Relazione costitutiva di una ferrite magnetizzata

Le ferriti sono materiali di natura ceramica che rispondono alla formula chimica generale MeFe_2O_4 , dove Me è un metallo bivalente, ad esempio manganese. Dal punto di vista elettromagnetico si possono considerare come un insieme di dipoli magnetici, dove il dipolo magnetico elementare è quello dovuto allo spin dell'elettrone.

Se un singolo dipolo magnetico di momento $\mathbf{u}_m$ ($\text{Wb} \cdot \text{m}$) si trova immerso in un

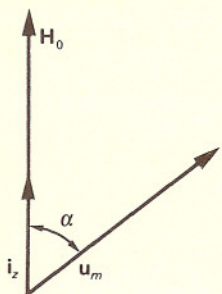


Figura 1.10

campo magnetico statico $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{i}_z$ (vedi fig. 1.10), è sottoposto a una coppia

$$\mathbf{T} = \mathbf{u}_m \times \mathbf{H}_0.$$

Al momento di dipolo magnetico $\mathbf{u}_m$ è associato un momento angolare $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{u}_m = -\gamma \mathbf{c},$$

dove $\gamma = 2,21 \times 10^5$ (m/A) è il *rapporto giromagnetico* (il segno “-” tiene conto del fatto che, per le ferriti, $\mathbf{u}_m$ e $\mathbf{c}$ sono antiparalleli); dall’equazione della coppia di Newton segue

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{T} = -\gamma \mathbf{c} \times \mathbf{H}_0 = \omega_0 \mathbf{i}_z \times \mathbf{c},$$

dove

$$\omega_0 = \gamma H_0, \quad [32]$$

è detta *pulsazione angolare di Larmor*, o anche *pulsazione di risonanza*. Il significato della ω_0 è presto desunto proiettando l’equazione della coppia sugli assi:

$$\begin{cases} \frac{\partial c_z}{\partial t} = 0 \\ \frac{dc_x}{dt} = -\omega_0 c_y \\ \frac{dc_y}{dt} = \omega_0 c_x \end{cases}$$

Risolviendo, se ne deduce che il vettore $\mathbf{c}$, e quindi anche $\mathbf{u}_m$, esegue un movimento di precessione intorno all’asse z con angolo α costante (vedi fig. 1.10) e velocità angolare ω_0 .

Se il campo magnetico di polarizzazione $\mathbf{H}_0$ è sufficientemente intenso, allora tutti i dipoli magnetici della ferrite si orientano, in assenza di altro campo applicato, lungo l’asse z ; e la densità dipolare magnetica per unità di volume uguaglia quella di saturazione $\mathbf{M}_s$ (questa densità di magnetizzazione è misurata qui in Wb/m^2 , e non in A/m , come tradizionalmente viene fatto).

Se è presente anche un campo magnetico (dinamico) $\mathbf{h}$, in generale non parallelo a

$\mathbf{H}_0$, nasce una componente della magnetizzazione ortogonale a $\mathbf{M}_s$ (lungo l'asse z la magnetizzazione è saturata), cosicché la magnetizzazione totale è $\mathbf{M}_s + \mathbf{m}$. L'equazione della densità di coppia (per unità di volume) diventa

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\gamma(\mathbf{M}_s + \mathbf{m}) \times (\mathbf{H}_0 + \mathbf{h});$$

l'equazione si ottiene moltiplicando per $-\gamma$ quella del singolo dipolo e sommando i contributi di tutti i dipoli nell'unità di volume.

Nell'ipotesi di linearizzazione, cioè $h \ll H_0$, $m \ll M_s$, risulta

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\mu_0 \omega_m \mathbf{i}_z \times \mathbf{h} - \omega_0 \mathbf{m} \times \mathbf{i}_z,$$

dove

$$\omega_m = \gamma M_s / \mu_0. \quad [33]$$

Nel dominio della frequenza le equazioni che descrivono, in assenza di sorgenti, l'integrazione tra il campo elettromagnetico e la ferrite magnetizzata sono quindi le seguenti:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H} - j\omega \mathbf{M} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E} \\ j\omega \mathbf{M} = -\mu_0 \omega_m \mathbf{i}_z \times \mathbf{H} - \omega_0 \mathbf{M} \times \mathbf{i}_z. \end{cases}$$

Sostituendo la terza equazione nella prima, si può calcolare la permeabilità $\mu = \mu_0 \mu_r$ della ferrite magnetizzata:

$$\mu_r \rightarrow \begin{vmatrix} \mu_1 & j\mu_2 & 0 \\ -j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad [34]$$

$$\mu_1 = 1 + \frac{\omega_0 \omega_m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\mu_2 = \frac{\omega \omega_m}{\omega_0^2 - \omega_m^2}.$$

La presenza di perdite può essere tenuta in conto introducendo un *termine di attrito* nell'equazione (linearizzata) della coppia

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = -\mu_0 \omega_m \mathbf{i}_z \times \mathbf{h} - \omega_0 \mathbf{m} \times \mathbf{i}_z + \frac{\nu}{\omega_0} \mathbf{i}_z \times \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t},$$

dove ν è una *costante di rilassamento*. In tal caso, in assenza di campo magnetico $\mathbf{h}$, il singolo dipolo magnetico esegue un movimento di precessione smorzata intorno all'asse z .

In una teoria più raffinata va aggiunto un ulteriore termine al secondo membro dell'equazione (linearizzata) della coppia. Questo termine, detto *di scambio*, è essenzialmente di natura quantistica (Akhiezer, Bar'yakhatar e Peletminskij, 1968) ed è del tipo

$$\omega_0 \eta^2 \mathbf{i}_z \times \nabla^2 \mathbf{m}; \quad [35]$$

la costante η^2 è detta *costante di scambio*.

Anche in questo caso, come per il plasma, la presenza dell'operatore spaziale ∇^2 nell'equazione della coppia

$$j\omega \mathbf{M} = -\mu_0 \omega_m \mathbf{i}_z \times \mathbf{E} - \omega_0 \mathbf{M} \times \mathbf{i}_z - \omega_0 \eta^2 \mathbf{i}_z \times \nabla^2 \mathbf{M}$$

rende necessario trasformare nel dominio del numero d'onda per ottenere l'espressione della permeabilità. In queste condizioni la ferrite si comporta come un mezzo non solo temporalmente, ma anche spazialmente dispersivo.

1.2.7 Risposta impulsiva di mezzi omogenei

Per un mezzo temporalmente omogeneo, se

$$\mathbf{d}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(t, t') \mathbf{e}(t') dt',$$

deve aversi

$$\mathbf{d}(t+t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(t, t') \mathbf{e}(t'+t_0) dt'$$

dove è sottintesa la dipendenza da $\mathbf{r}$.

Ciò è possibile solo se $g_e(t, t') \rightarrow g_e(t-t')$: infatti,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_e(t-t') \mathbf{e}(t'+t_0) dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(t+t_0-[t'+t_0]) \mathbf{e}(t'+t_0) dt' = \mathbf{d}(t+t_0).$$

Analogo ragionamento vale per mezzi spazialmente omogenei.

1.2.8 Relazione tra risposte impulsive e costanti del mezzo

Consideriamo, per semplicità, il caso di un mezzo isotropo per il quale la risposta impulsiva, ad esempio elettrica, sia data, in assenza di dispersività spaziale, da

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(\mathbf{r}; t, t') \mathbf{e}(\mathbf{r}, t') dt'.$$

Se il mezzo è stazionario, risulta

$$g_e(\mathbf{r}; t, t') \rightarrow g_e(\mathbf{r}; t-t'),$$

e, applicando il teorema di Borel,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega),$$

dove

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_e(\mathbf{r}, t) \exp(-j\omega t) dt.$$

Ragionamenti analoghi valgono nel caso di dispersione spaziale, purché il mezzo sia (spazialmente) omogeneo.

1.2.9 Relazione tra parte reale e coefficiente dell'immaginario delle costanti del mezzo

Consideriamo, nel dominio della frequenza, una costante del mezzo, ad esempio quella elettrica $\epsilon(\omega)$, e prolunghiamola analiticamente nel piano complesso $p = \alpha + j\omega$. Sia

$$\epsilon(p) = \epsilon_{\infty} + \epsilon'(p),$$

dove $\epsilon_{\infty} = \epsilon(|p| \rightarrow \infty)$ e $\epsilon'(|p| \rightarrow \infty) = 0$. Che la $\epsilon(p)$ sia reale per qualunque $|p| \rightarrow \infty$ è fisicamente giustificato dal fatto che, a frequenze altissime, la risposta è sempre immediata.

La risposta impulsiva elettrica è data da

$$g_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \epsilon_{\infty} \delta(t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon'(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Il primo termine è detto *risposta immediata*, il secondo *risposta dilazionata*. Questo secondo termine può essere messo sotto la forma di un integrale su un contorno chiuso (vedi fig. 1.11),

$$\frac{1}{2\pi j} \int_l \epsilon(p) \exp(pt) dp,$$

e calcolato successivamente utilizzando il teorema di Cauchy.

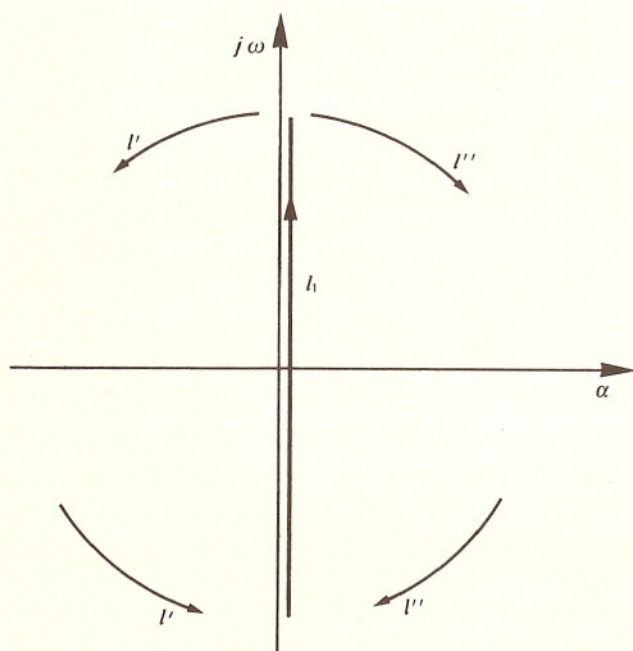


Figura 1.11

Per $t < 0$ il contorno l può essere $l_1 + l''$; se il dielettrico è causale (il che è necessario per la *realizzabilità fisica*) la risposta dev'essere nulla. Pertanto $\epsilon'(p)$ non deve avere singolarità nel semipiano a destra.

Per $t > 0$ il contorno l può essere $l_1 + l'$; le singolarità devono presentarsi in coppie complesse coniugate con residui complessi coniugati nei poli, in modo che la risposta sia reale. Eventuali poli sull'asse immaginario produrrebbero una risposta *permanente*, mentre in ogni dielettrico *reale* (e cioè con perdite non nulle) la risposta deve smorzarsi nel tempo; pertanto, i poli devono essere punti non appartenenti all'asse immaginario, con parte reale negativa. Fa eccezione l'eventuale singolarità per $p = 0$, indicante che il dielettrico ha conducibilità diversa da zero (vedi 1.2.1).

Consideriamo ora l'integrale (vedi fig. 1.12)

$$\int_l \frac{\epsilon(p) - \epsilon_\infty}{p - j\omega_0} dp;$$

il cammino di integrazione l può essere chiuso nel semipiano di destra, in base al lemma di Jordan; applicando ancora il teorema dei residui si ha, per mezzi a conducibilità nulla (Gerosa, Latmiral e Vinciguerra, 1961):

$$\int \frac{\epsilon(p) - \epsilon_\infty}{p - j\omega_0} dp = \pi j [\epsilon(\omega_0) - \epsilon_\infty] + \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_\infty - j\epsilon_2(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega;$$

l'ultimo integrale va inteso come il valore principale e $\epsilon = \epsilon_1 - j\epsilon_2$. Ne consegue

$$\epsilon_1(\omega_0) - \epsilon_\infty = -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_2(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega,$$

$$\epsilon_2(\omega_0) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_1(\omega) - \epsilon_\infty}{\omega - \omega_0} d\omega. \quad [36]$$

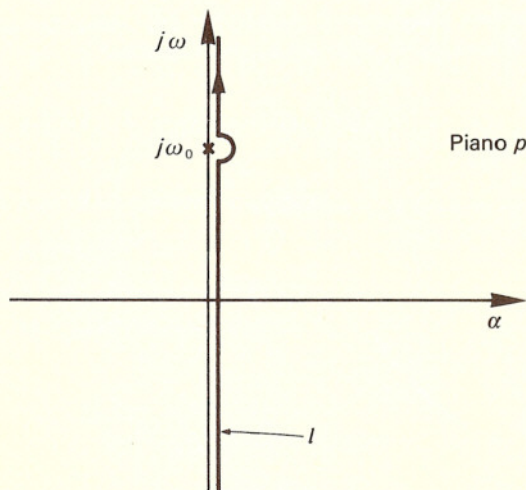


Figura 1.12

Le [36] sono *trasformate di Hilbert*; esse mostrano come parte reale e coefficiente dell'immaginario della costante dielettrica di un mezzo fisicamente realizzabile non siano tra loro indipendenti.

1.3 Teoremi energetici e meccanici

Uno dei più noti risultati associati alle equazioni di Maxwell è il teorema di Poynting. Consideriamo il *vettore* omonimo

$$\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad [1]$$

e calcoliamone la divergenza:

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h}.$$

Sostituendo, nella precedente espressione, i rotori mediante le equazioni [1] e [2] (§ 1.1) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \left(\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) + \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_0, \quad [2]$$

dove si è distinta la densità di corrente impressa $\mathbf{j}_0$ da quella $\mathbf{j}$ sostenuta dal campo.

La quantità al secondo membro della [2] è la densità di potenza fornita dalle sorgenti (vedi 1.1.9). Nel caso di mezzi conduttori la quantità

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{j} = \sigma e^2 \quad [3]$$

è la densità di potenza dissipata per effetto Joule. Nel caso di mezzi lineari non dispersivi (per semplicità isotropi) si ha

$$\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e}, \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h}.$$

Posto $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = e^2$, $\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$, la grandezza in parentesi nella [2] diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon e^2 + \frac{1}{2} \mu h^2 \right).$$

Per campi statici i due addendi che ivi compaiono sono rispettivamente identificati come *densità di energia elettrostatica* e *densità di energia magnetostatica*. Si può dunque supporre che la grandezza scalare

$$w = \frac{1}{2} \epsilon e^2 + \frac{1}{2} \mu h^2, \quad [4]$$

funzione del tempo nel caso dinamico, coincida con l'energia del campo elettromagnetico. Questa ipotesi porta, come conseguenza, a interpretare il vettore di Poynting $\mathbf{s}$ come *densità di flusso di potenza* (W/m^2), e l'equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \frac{\partial w}{\partial t} + \sigma e^2 = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_0 \quad (\text{teorema di Poynting}) \quad [5]$$

come *equazione di conservazione*. Infatti, integrando la [5] in un volume V (vedi fig. 1.13) e in un tempo Δt , si ha che l'energia fornita dalle sorgenti relativamente a V e a Δt è uguale alla somma di tre termini: il terzo rappresenta l'energia dissipata nel volume; il secondo, la variazione dell'energia immagazzinata nel volume; il primo, infine, l'energia trasmessa attraverso la superficie S , sempre durante il tempo Δt .

E' importante notare che nella [5] l'energia compare sotto forma di differenziale esatto, come dev'essere per poter rappresentare una funzione di stato del sistema; la sua variazione nel tempo dipende solo dai valori del campo agli estremi dell'intervallo temporale e non da come a tali valori si è giunti. Se ad esempio ci si riferisce a una cavità vuota con pareti metalliche perfettamente conduttrici e le sorgenti sono accese al tempo $t=0$, l'integrazione della [5] al volume della cavità fornisce

$$-\int_{-\infty}^t dt \iiint_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_0 dV = \iiint_V \dot{w} dV.$$

Se il mezzo è dispersivo, i risultati precedenti non sono più validi in generale, proprio perché il termine di energia non compare più nella forma di un differenziale esatto, a meno di riformulare, volta per volta, il teorema di Poynting (vedi 1.3.1).

Esiste anche una formulazione del teorema di Poynting per campi sinusoidali, ove si introduce il *vettore di Poynting complesso*, il cui fasore è

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{S}_r + j\mathbf{S}_j. \quad [6]$$

Operando come nel dominio del tempo, considerando anche sorgenti di tipo magnetico e avendo posto (per un mezzo isotropo)

$$\epsilon = \epsilon_1 - j\epsilon_2, \quad \mu = \mu_1 - j\mu_2; \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = |\mathbf{E}|^2, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* = |\mathbf{H}|^2, \quad [7]$$

si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_r + \frac{\omega \epsilon_2}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\omega \mu_2}{2} |\mathbf{H}|^2 + \frac{1}{2} \sigma |\mathbf{E}|^2 = -\text{Re} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* + \frac{1}{2} \mathbf{J}_{m0} \cdot \mathbf{H}^* \right) \quad [8]$$

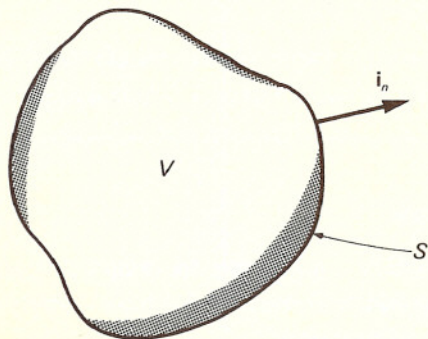


Figura 1.13

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_j + 2\omega \left(\frac{1}{4} \mu_1 |H|^2 - \frac{1}{4} \epsilon_1 |E|^2 \right) = -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_0^* + \frac{1}{2} \mathbf{J}_{m0} \cdot \mathbf{H}^* \right). \quad [9]$$

Nella [8] compare, al secondo membro, il valore medio nel periodo della densità di potenza fornita dalle sorgenti (vedi 1.1.13); nel primo membro, $\mathbf{S}_r$ è il valore medio della densità di *flusso* di potenza elettromagnetica, e $\sigma|E|^2/2$ il valore medio della densità di potenza dissipata per effetto Joule. I termini rimanenti,

$$\frac{\omega \epsilon_2}{2} |E|^2 + \frac{\omega \mu_2}{2} |H|^2 \quad [10]$$

corrispondono ai valori medi della densità di potenza dissipata per altri meccanismi, diversi da quelli connessi alla conducibilità del materiale in cui il campo è considerato. Queste ulteriori perdite, di natura non conduttiva, sono riferite a un'isteresi dielettrica e magnetica rispettivamente. Di conseguenza, per un mezzo passivo, cioè incapace di generare energia, ϵ_2 e μ_2 devono essere non negativi ($\omega \geq 0$).

Nella [9] il fattore in parentesi è, nel caso di un mezzo non dispersivo, uguale alla differenza tra i valori medi delle densità di energia di tipo magnetico ed elettrico rispettivamente. Nel caso di un mezzo dispersivo ciò non è più vero, e i due fattori vengono chiamati *densità di pseudoenergia magnetica* e di *pseudoenergia elettrica*. Al secondo membro della [9] compare una grandezza denominata *densità di potenza reattiva* associata alle sorgenti (vedi 1.1.13).

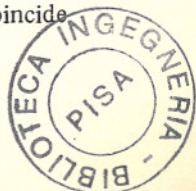
La [9], integrata sul volume V (vedi fig. 1.13), mostra che la potenza reattiva, divisa per 2ω , uguaglia la differenza tra i valori medi delle energie magnetiche ed elettriche (mezzo non dispersivo) o pseudoenergie (mezzo dispersivo) immagazzinate in V (integrale del termine in parentesi a primo membro della [9]) ed esterne al volume V (flusso di $\mathbf{S}_j$ attraverso la superficie S).

La potenza reattiva, divisa per 2ω , rappresenta pertanto un'energia di scambio tra sorgenti e ambiente esterno: questa energia è successivamente immagazzinata sotto forma prevalentemente magnetica o elettrica (nel caso semplice di mezzo non dispersivo). Se nel periodo considerato i valori medi delle due forme di energia non sono uguali, devono essere i generatori ad assicurare l'equilibrio, fornendo energia all'ambiente esterno durante una parte del periodo, e ricevendola nella restante parte.

Oltre al teorema di Poynting è anche utile considerare il cosiddetto *teorema dell'energia* (vedi 1.3.4). Esso mostra che per un segnale a banda stretta, centrato intorno alla pulsazione ω_0 , la quantità

$$\frac{1}{4} \frac{\partial(\omega \epsilon)}{\partial \omega} |E|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega \mu)}{\partial \omega} |H|^2 \quad [11]$$

può identificarsi con la densità media (nel periodo $2\pi/\omega_0$) dell'energia elettromagnetica. Nella [11] le derivate sono calcolate per $\omega = \omega_0$, e E e H sono le parti *lenta-mente variabili* dei campi (vedi 1.3.4). Se il mezzo non è dispersivo, la [11] coincide con la media temporale della [4].



I teoremi precedenti mostrano, in definitiva, che al campo elettromagnetico è associato, nel caso dinamico, un flusso di energia. Si può pensare che il campo elettromagnetico possieda un momento meccanico (quantità di moto) ed eventualmente anche un momento (meccanico) angolare. In effetti, partendo dalle equazioni di Maxwell per lo spazio libero si deduce la seguente relazione (vedi 1.3.5), dove il volume V e la superficie S sono quelli della figura 1.13:

$$\iiint_V (\rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mu_0 \mathbf{h}) dV + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{s} dV + \iint_S [w \mathbf{i}_n - \epsilon_0 \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n) - \mu_0 \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n)] dS = 0. \quad [12]$$

La [12] è un'uguaglianza tra forze; il primo termine rappresenta la forza di Lorentz agente sulle cariche e le correnti esistenti nel volume V , l'ultimo termine può riguardarsi come una forza trasmessa attraverso la superficie S . La grandezza

$$\mathcal{S} = w \mathcal{J} - \epsilon_0 \mathbf{e} \mathbf{e} - \mu_0 \mathbf{h} \mathbf{h} \quad [13]$$

è detta *tensore degli sforzi di Maxwell*; il vettore

$$\mathbf{p} = \mathcal{S} \cdot \mathbf{i}_n \quad [14]$$

può essere interpretato come lo sforzo unitario che si trasmette attraverso l'elemento di superficie di normale $\mathbf{i}_n$. Se questa superficie è ad esempio metallizzata o assorbente, tale sforzo unitario si manifesta come una pressione, detta *pressione di radiazione*. Il secondo termine rappresenta anch'esso una forza, espressa come derivata temporale della grandezza

$$\iiint_V \frac{\mathbf{s}}{c^2} dV = \iiint_V \mathbf{g} dV.$$

Questo integrale di volume, la cui variazione temporale è uguale alla forza, può essere riguardato come il momento meccanico associato al campo elettromagnetico presente nel volume V ; di conseguenza

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{s} \quad [15]$$

è la *densità di momento meccanico* del campo elettromagnetico (momento e pressione di radiazione sono però sempre molto modesti per le normali intensità del campo).

In aggiunta a una forza, il campo elettromagnetico può trasmettere anche una coppia (Carrara e altri, 1955). Preso un centro O di riferimento, e detto $\mathbf{r}$ il raggio vettore misurato da questo punto, il prodotto vettoriale della [12] per $\mathbf{r}$ mostra che al campo elettromagnetico è associata una *densità di momento angolare*, rispetto al

centro O , data da

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{r} \times \mathbf{s}, \quad [16]$$

e inoltre che, attraverso la superficie S , è trasmessa una *coppia*, la cui densità superficiale è data da

$$w \mathbf{r} \times \mathbf{i}_n - \epsilon_0 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n) \mathbf{r} \times \mathbf{e} - \mu_0 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n) \mathbf{r} \times \mathbf{h}. \quad [17]$$

Annotazioni

1.3.1 Flusso di potenza in un plasma caldo

Definiamo il vettore (generalizzazione di quello di Poynting)

$$\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} + (p + p_0) \mathbf{v}.$$

Calcoliamone la divergenza:

$$\nabla \cdot \mathbf{s} = \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h} + \nabla p \cdot \mathbf{v} + (p + p_0) \nabla \cdot \mathbf{v};$$

sostituiamo i rotori, le divergenze e i gradienti con le espressioni tratte dalle equazioni del plasma (vedi 1.2.5), ottenendo

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu_0 h^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 e^2 + \frac{1}{2} N_0 m v^2 \right) + \frac{p + p_0}{N_0 m u^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

I tre termini in parentesi rappresentano la somma delle densità di energia elettromagnetica

$$w_{em} = \frac{1}{2} \mu_0 h^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 e^2$$

e di energia cinetica delle particelle

$$w_c = \frac{1}{2} N_0 m v^2;$$

per l'ultimo termine si ha

$$\frac{p + p_0}{N_0 m u^2} = \frac{p + p_0}{\gamma p_0}.$$

Pertanto, nell'ambito della linearizzazione,

$$\frac{p + p_0}{N_0 m u^2} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} (p + p_0) = \frac{\partial}{\partial t} w_i,$$

avendo posto

$$w_i = \frac{p + p_0}{\gamma}.$$

Di conseguenza l'equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial t} (w_{em} + w_c + w_i) = 0$$

esprime una conservazione di energia. La densità di energia è

$$w = w_{em} + w_c + w_i;$$

w_i si può identificare con l'energia interna del fluido (plasma) e s con una densità di flusso di energia, elettromagnetica ($\mathbf{e} \times \mathbf{h}$) e meccanica ($((p + p_0) \mathbf{v})$).

1.3.2 Teorema di Poynting, nel dominio della frequenza, per un mezzo anisotropo elettrico (esercizio)

Per un mezzo definito dalle relazioni costitutive

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

si decomponga la diade $\boldsymbol{\varepsilon}$ come segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 - j\boldsymbol{\varepsilon}_2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \right), \quad -j\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \right).$$

La diade $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, che coincide con la sua trasposta coniugata $\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^*$, è detta *hermitiana*; la diade $-j\boldsymbol{\varepsilon}_2$, che coincide con l'opposto della sua trasposta coniugata $j\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2^*$, è detta *anti-hermitiana*. Non è difficile verificare che

$$\widetilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1^* \cdot \mathbf{E}^* = \text{scalare reale}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2^* \cdot \mathbf{E}^* = \text{scalare reale},$$

dove con $\widetilde{\mathbf{E}}$ si è indicato il trasporto del vettore colonna $\mathbf{E}$.

Si mostri che le equazioni [8] e [9] sono ancora valide, pur di effettuare le sostituzioni

$$\begin{cases} \frac{\omega}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_2 |E|^2 \rightarrow \frac{\omega}{2} \widetilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2^* \cdot \mathbf{E}^* \\ -\frac{1}{4} \boldsymbol{\varepsilon}_1 |E|^2 \rightarrow -\frac{1}{4} \widetilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1^* \cdot \mathbf{E}, \end{cases}$$

e che pertanto, per un mezzo passivo, è verificata la relazione

$$\widetilde{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2^* \cdot \mathbf{E}^* > 0,$$

qualunque sia il vettore $\mathbf{E}$. Una matrice che goda di questa proprietà si dice *definita positiva* (questa proprietà caratterizza i mezzi passivi).

1.3.3 Teorema di Poynting, nel dominio della frequenza, per un mezzo anisotropo magnetico (esercizio)

Si mostri come i risultati di 1.3.2 possano essere estesi a un mezzo definito dalle relazioni costitutive

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}.$$

1.3.4 Teorema dell'energia

Si è già visto (§ 1.3), che solo nel caso di mezzi non dispersivi si può dare del teorema di Poynting una interpretazione termodinamica precisa e attribuire a uno dei termini che compaiono nell'espressione del teorema il significato di energia elettromagnetica. Nel caso di mezzi dispersivi, una tale identificazione è ancora possibile per i segnali a banda stretta. A tal fine è opportuno estendere il concetto di fasore, introdotto nell'annotazione 1.1.12 in relazione a segnali monocromatici. Per quest'ultimo caso si ha

$$e(t) = \operatorname{Re}[E \exp(j\omega_0 t)],$$

e il fasore E è un numero complesso indipendente dal tempo.

Nel caso dei segnali a banda stretta l'espressione precedente è ancora valida, pur di considerare l'ampiezza di E variabile, nel tempo, *lentamente* rispetto al periodo $T = 2\pi/\omega_0$. Ad esempio, per il tipo di banda considerato in 1.1.12 si ha

$$E(t) = \frac{2A \Delta\omega}{\pi} \frac{\sin \Delta\omega t}{\Delta\omega t} \exp(j\theta_0) = E_0(t) \exp(j\theta_0);$$

l'ampiezza del fasore, $E_0(t)$, è una funzione lentamente variabile con il tempo. Più in generale, tale può essere anche θ_0 .

Questi fasori generalizzati godono di proprietà simili a quelle dei fasori propriamente detti. Ad esempio,

$$\frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^2(t) dt \approx \frac{1}{2} |E(t)|^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e(t) \approx \operatorname{Re}[j\omega_0 E(t) \exp(j\omega_0 t)].$$

Il calcolo delle derivate delle induzioni richiede una qualche maggior cura. Si ha

$$\frac{\partial d(t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega \epsilon(\omega) A(\omega) \exp(j\omega t) d\omega,$$

dove $A(\omega)$ è lo spettro di $e(t)$. Questo è apprezzabilmente diverso da zero in una banda (relativa) $\Delta\omega/\omega_0$ piccola, centrata in $\pm\omega_0$. Non si commette così grande errore sviluppando la funzione $\omega\epsilon(\omega)$ in serie nell'intorno di $\pm\omega_0$, e troncando lo sviluppo al secondo termine. Sostituendo nell'integrale, questo può essere facilmente valutato osservando che $A(-\omega) = A^*(\omega)$ e $\epsilon(-\omega) = \epsilon^*(\omega)$, poiché le rispettive trasformate devono essere funzioni reali: l'integrale esteso all'intervallo $(-\infty, 0)$ risulta essere il complesso coniugato di quello esteso all'intervallo $(0, \infty)$. Si ha

$$\frac{\partial d}{\partial t} \approx \operatorname{Re} \left\{ \left[j\omega_0 \epsilon(\omega_0) E(t) + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \frac{\partial E}{\partial t} \right] \exp(j\omega_0 t) \right\},$$

dal momento che $j(\omega - \omega_0) \rightarrow \partial/\partial t$. La derivata rispetto a ω è calcolata in ω_0 .

Alla luce delle precedenti osservazioni, le equazioni di Maxwell, in assenza di sorgenti, assumono la forma

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} - \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E} + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

per segnali a banda stretta. In queste equazioni, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ variano anche con r oltre che (lentamente) con t .

La grandezza

$$\frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H})$$

non è altro che la parte reale del vettore di Poynting. In un mezzo senza perdite (ϵ e μ sono reali), utilizzando le equazioni di Maxwell, si ha

$$\frac{1}{4} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} |\mathbf{H}|^2 \right\} = 0.$$

L'espressione precedente è di nuovo un'equazione di conservazione di tipo [5]; la grandezza in parentesi graffa può dunque essere identificata con l'energia elettromagnetica in un mezzo dispersivo, nel caso di un segnale a banda stretta.

Ad esempio, nel caso di un plasma freddo senza collisioni (vedi 1.2.2) si ha

$$\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} = \mu_0$$

$$\frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} = \epsilon_0 + \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \epsilon_0 + \frac{Nq^2}{m\omega^2};$$

poiché

$$j\omega m V = qE,$$

si ha

$$w_{em} = \frac{1}{4} \mu_0 |\mathbf{H}|^2 + \frac{1}{4} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{4} Nm |\mathbf{V}|^2.$$

L'energia del plasma è quindi la somma di quella elettromagnetica che si avrebbe nello spazio vuoto e di quella cinetica delle particelle.

1.3.5 Momento del campo elettromagnetico

Consideriamo la diade

$$\mathcal{J}^{(e)} = \epsilon_0 \mathbf{e} \mathbf{e} - \frac{1}{2} \epsilon_0 e^2 \mathcal{J},$$

dove

$$\mathcal{J} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e la diade $\mathbf{ee}$ è rappresentata, in coordinate cartesiane, da

$$\mathbf{ee} \rightarrow \begin{vmatrix} e_x e_x & e_x e_y & e_x e_z \\ e_y e_x & e_y e_y & e_y e_z \\ e_z e_x & e_z e_y & e_z e_z \end{vmatrix}.$$

Calcoliamone la divergenza:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathcal{J}^{(e)} &= \epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{ee}) - \frac{1}{2} \epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \mathcal{J} = \\ &= \epsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} - \epsilon_0 \mathbf{e} \times \nabla \times \mathbf{e}; \end{aligned}$$

utilizzando le equazioni di Maxwell per lo spazio libero si ottiene

$$\nabla \cdot \mathcal{J}^{(e)} = \rho \mathbf{e} + \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{e} \times \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}.$$

Analogamente, utilizzando la diade

$$\mathcal{J}^{(m)} = \mu_0 \mathbf{h} \mathbf{h} - \frac{1}{2} \mu_0 h^2 \mathcal{J},$$

si ha

$$\nabla \cdot \mathcal{J}^{(m)} = -\mu_0 \epsilon_0 \mathbf{h} \times \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{h} \times \mathbf{j}.$$

La grandezza

$$\mathcal{J} = -(\mathcal{J}^{(e)} + \mathcal{J}^{(m)})$$

è il *tensore degli sforzi di Maxwell* ; vale la relazione

$$\nabla \cdot \mathcal{J} + \rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mu_0 \mathbf{h} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{s} = 0.$$

Integrando questa equazione sul volume V della figura 1.13 e utilizzando il teorema della divergenza applicato alle diadi, si ha

$$\iiint_V (\mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mu_0 \mathbf{h}) dV + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{s} dV + \iint_S \mathcal{J} \cdot \mathbf{i}_n dS = 0$$

dove

$$\mathcal{J} \cdot \mathbf{i}_n = w \mathbf{i}_n - \epsilon_0 \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_n) - \mu_0 \mathbf{h} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_n).$$

1.4 Condizioni iniziali, al contorno e teorema di unicità

E' certamente molto importante riuscire a stabilire condizioni che assicurino, una volta verificate, che la soluzione delle equazioni di Maxwell è determinata e unica. In

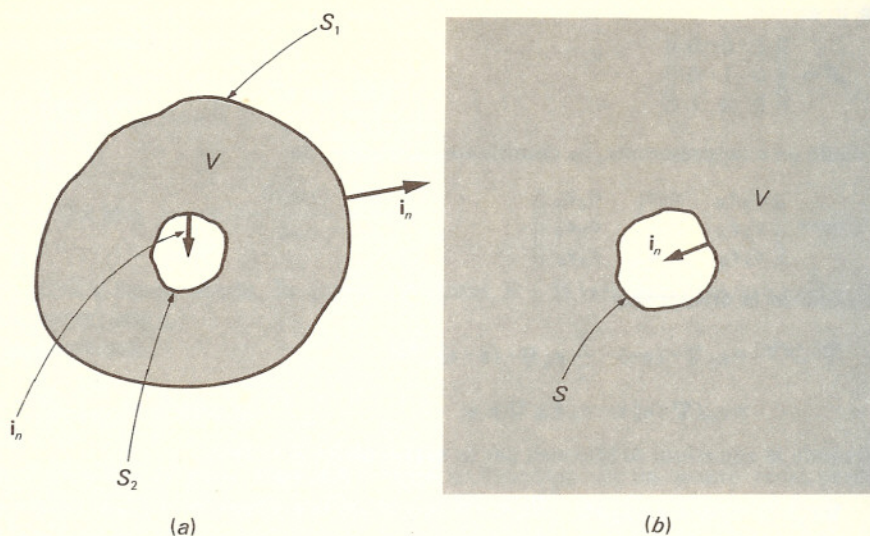


Figura 1.14

questo paragrafo ci si limita a esporre concetti generali, senza pretese di rigore o di completezza; maggiori informazioni sono reperibili nei testi di fisica matematica (Müller, 1969).

Considerando le equazioni di Maxwell nel dominio del tempo, si usa distinguere tra *condizioni iniziali* e *condizioni al contorno*: le prime specificano i valori del campo all'istante a partire dal quale esso viene calcolato (ad esempio, l'istante $t=0$); le seconde sono quelle cui il campo deve soddisfare sulla superficie S che limita il volume V nel quale lo si considera (vedi fig. 1.14). Se il volume V è tutto al finito (vedi fig. 1.14a) e $S=S_1+S_2$, il problema del calcolo del campo viene detto *problema interno*; in caso contrario, quando cioè V si estende all'infinito (vedi fig. 1.14b), si parla di *problema esterno*. In quest'ultimo caso, almeno in parte le condizioni che riguardano il comportamento del campo sono all'infinito.

Quando si opera nel dominio della frequenza non vi sono più condizioni iniziali. Questo riflette il fatto che le soluzioni in tale dominio corrispondono a campi *a regime*, e cioè esistenti (e variabili nel tempo con legge sinusoidale) da tempo infinito.

Consideriamo dapprima il problema interno nel dominio del tempo. Sia $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0$, il campo elettromagnetico generato dalle sorgenti $\mathbf{j}_0$ nel volume V , e sia $\mathbf{e}, \mathbf{h}$, un altro campo elettromagnetico prodotto nello stesso volume da sorgenti $\mathbf{j}$. Nell'ipotesi di un mezzo *lineare*, il campo $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e} - \mathbf{e}_0, \mathbf{h}_1 = \mathbf{h} - \mathbf{h}_0$ è certamente soluzione delle equazioni di Maxwell in V , quando in questo siano presenti le sorgenti $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j} - \mathbf{j}_0$. Supposto, per semplicità, il mezzo isotropo e non dispersivo, il teorema di Poynting fornisce la

relazione

$$\iint_S \mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{i}_n dS + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left[\frac{1}{2} \epsilon |e_1|^2 + \frac{1}{2} \mu |h_1|^2 \right] dV + \\ + \iiint_V \sigma |e_1|^2 dV = - \iiint_V \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{j}_1 dV.$$

Studiamo come si evolve la precedente equazione a partire dal tempo $t=0$ (per altro arbitrario). Se $\mathbf{j}$ coincide con $\mathbf{j}_0$ in tutti i punti di V e per ogni $t \geq 0$, l'integrale di volume al secondo membro è sempre identicamente nullo. Se inoltre $\mathbf{e} \times \mathbf{i}_n = \mathbf{e}_0 \times \mathbf{i}_n$, oppure $\mathbf{h} \times \mathbf{i}_n = \mathbf{h}_0 \times \mathbf{i}_n$ sulla superficie S per ogni $t \geq 0$, anche l'integrale di superficie è identicamente nullo, e pertanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left[\frac{1}{2} \epsilon |e_1|^2 + \frac{1}{2} \mu |h_1|^2 \right] dV = - \iiint_V \sigma |e_1|^2 dV.$$

La relazione precedente mostra come, al passare del tempo, l'energia elettromagnetica associata al campo $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{h}_1$ e contenuta nel volume V non possa che rimanere stazionaria o decrescere. Se, in un arbitrario istante di riferimento, ad esempio $t=0$, $\mathbf{e}=\mathbf{e}_0$ e $\mathbf{h}=\mathbf{h}_0$ in tutto il volume V , nello stesso istante l'energia è nulla. D'altra parte, essendo una grandezza essenzialmente positiva, essa non può che rimanere nulla per ogni $t > 0$, e, poiché l'integrando è non negativo, si deve avere in ogni istante $\mathbf{e}=\mathbf{e}_0$ e $\mathbf{h}=\mathbf{h}_0$.

La conclusione è che per specificare interamente un campo elettromagnetico, soluzione delle equazioni di Maxwell, in un volume V per ogni tempo $t > 0$ basta assegnare i valori del campo in tutto il volume all'istante $t=0$ (condizioni iniziali), le sorgenti per tutti i tempi $t \geq 0$ e la componente tangenziale del campo elettrico o di quello magnetico sulla superficie S per tutti i tempi $t \geq 0$ (condizioni al contorno). In queste ipotesi la soluzione è unica (*teorema di unicità*).

Un caso particolarmente importante è quello in cui il volume è limitato da un *conduttore elettrico perfetto*, tale cioè che $\sigma \rightarrow \infty$. Nell'interno di un tale materiale $\mathbf{e}=0$, altrimenti la densità di corrente indotta dal campo sarebbe infinita. Alla superficie di separazione S_2 tra il mezzo che riempie il volume V e il conduttore perfetto, la componente tangenziale del campo elettrico dev'essere continua. La condizione al contorno per un tale conduttore è dunque

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{e} = 0. \quad [1]$$

Il duale del conduttore elettrico perfetto è il *conduttore magnetico perfetto*; per esso $\mu_2 \rightarrow \infty$, e la condizione al contorno diventa

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{h} = 0. \quad [2]$$

Spostando all'infinito la superficie S_1 , si passa al problema esterno; in tal caso si dovrebbero fornire condizioni per i valori dei campi all'infinito (vedi 1.4.5). Nel dominio del tempo, ciò è immediato, perché essendo *finita* la velocità di propaga-

zione dei campi, questi non giungono mai all'infinito: il campo è ivi sempre nullo.

Come si è già osservato, nel dominio della frequenza non devono essere assegnate le condizioni iniziali, e pertanto il campo è determinato quando siano assegnati i fasori delle sorgenti e le condizioni al contorno per la componente tangenziale del campo elettrico o di quello magnetico; fa eccezione il caso del calcolo del campo in un volume finito di materiale senza perdite e con pareti senza perdite (vedi 1.4.4).

Annotazioni

1.4.1 Analisi delle condizioni al contorno per un conduttore elettrico perfetto

Si è visto che, alla superficie di un conduttore elettrico perfetto,

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{e} = 0.$$

D'altra parte, nel conduttore dev'essere $\mathbf{e} = 0$, e quindi, in base alle equazioni di Maxwell, anche $\mathbf{h} = 0$ (sempre che i campi siano variabili nel tempo). Non si può tuttavia avere $\mathbf{i}_n \times \mathbf{h} = 0$ sulla superficie, altrimenti nel volume l'unico possibile campo sarebbe quello identicamente nullo. Di conseguenza, alla superficie di un conduttore elettrico perfetto la componente tangenziale del campo magnetico dev'essere *discontinua*. Questo è possibile perché un conduttore elettrico perfetto può sostenere una corrente elettrica superficiale (vedi § 1.1, equazione [26] e 2.7.2).

1.4.2 Analisi delle condizioni al contorno per un conduttore magnetico perfetto (esercizio)

Si mostri che alla superficie di un conduttore magnetico perfetto il campo elettrico tangente è discontinuo ed è sostenuto da una corrente magnetica superficiale.

1.4.3 Condizioni al contorno di tipo impedenza

Una condizione al contorno si definisce *di tipo impedenza* se viene specificata una combinazione lineare tra le componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico sulla superficie stessa, *omogenea* se tale combinazione lineare è nulla, *isotropa* se il coefficiente della combinazione è scalare. In queste due ultime ipotesi si ha

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} \times \mathbf{i}_n = Z_s (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n). \quad [3]$$

Per una condizione al contorno *di tipo ammettenza* si ha

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{H} \times \mathbf{i}_n = Y_s (\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}). \quad [4]$$

(Queste condizioni contengono, come caso particolare, quelle di campo elettrico tangente nullo ($Z_s = 0$) o magnetico tangente nullo ($Y_s = 0$) sul contorno.)

La componente del vettore di Poynting secondo $\mathbf{i}_n$ è data, nei due casi, da

$$S_n = \frac{1}{2} Z_s |\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n|^2, \quad S_n = \frac{1}{2} Y_s |\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}|^2.$$

Se si vuole che la parte reale di S_n sia positiva (flusso di potenza attiva nel verso di i_n), devono essere positive le parti reali della *impedenza superficiale*, $Z_s = R_s + jX_s$, e dell'*ammettenza superficiale* $Y_s = G_s + jB_s$.

*1.4.4 Teorema di unicità, nel dominio della frequenza, per il problema interno

Con riferimento alla figura 1.14a, sia $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ il campo elettromagnetico soluzione delle equazioni di Maxwell, con sorgenti $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_{m1}$ in V e condizioni al contorno assegnate su S ; sia poi $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ un'altra possibile soluzione, con le stesse sorgenti e condizioni al contorno. Per un mezzo lineare,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2$$

è ancora soluzione delle equazioni omogenee (sorgenti nulle) di Maxwell con condizioni di campo tangente, elettrico o magnetico, nullo al contorno. Pertanto il teorema di Poynting, applicato al volume V , porta alle seguenti relazioni:

$$\frac{\omega}{2} \iiint_V \epsilon_2 |\mathbf{E}|^2 dV + \frac{\omega}{2} \iiint_V \mu_2 |\mathbf{H}|^2 dV + \frac{1}{2} \iiint_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV = 0;$$

$$2\omega \iiint_V \left[\frac{1}{4} \mu_1 |\mathbf{H}|^2 - \frac{1}{4} \epsilon_1 |\mathbf{E}|^2 \right] dV = 0.$$

La prima è una somma di quantità *non negative* poiché gli integrandi sono non negativi; di conseguenza, se nel mezzo vi sono perdite, anche piccolissime, deve essere

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0,$$

il che mostra l'unicità della soluzione.

Se il mezzo è senza perdite, la prima relazione è una identità. Quanto alla seconda relazione, essa è certamente verificata non solo da $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$, ma anche da quelle particolari distribuzioni di campo, soluzioni delle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti, con condizioni al contorno

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = 0, \quad \text{oppure} \quad \mathbf{i}_n \times \mathbf{H} = 0,$$

che verificano

$$\iiint_V \frac{1}{4} \mu_1 |\mathbf{H}|^2 dV = \iiint_V \frac{1}{4} \epsilon_1 |\mathbf{E}|^2 dV. \quad [5]$$

Se il mezzo è non dispersivo, la precedente condizione implica l'uguaglianza tra le energie elettriche e magnetiche medie immagazzinate. Queste possibili soluzioni sono dette *risonanti*. Si noti che la [5] è un'ulteriore condizione imposta alla soluzione; non è quindi detto che queste soluzioni risonanti esistano per qualunque frequenza (vedi § 3.4).

In un volume limitato, senza perdite la soluzione delle equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza è dunque unica a meno delle possibili soluzioni risonanti.

*1.4.5 Teorema di unicità, nel dominio della frequenza, per il problema esterno (esercizio)

Nel caso del problema esterno, per segnali sinusoidali, non si può più asserire che il campo non è ancora giunto all'infinito, poiché è finito il tempo trascorso dall'accensione delle sorgenti: infatti, essendo il campo a regime, si deve supporre che le sorgenti siano state accese da un tempo infinito.

Si può allora richiedere che, se tutte le sorgenti del campo sono al finito, a grande distanza da queste vi sia un flusso di potenza reale verso l'infinito. E' questa, essenzialmente, la *condizione di radiazione all'infinito* (vedi anche § 4.2). Questa condizione stabilisce che per un mezzo di parametri ϵ e μ , omogeneo all'infinito, a grande distanza dalle sorgenti (tutte al finito nell'intorno di $r=0$), $|rE|$ deve essere limitato all'infinito e

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[E(r) - \zeta H(r) \times \mathbf{i}_r] = 0, \quad \zeta = \sqrt{\mu/\epsilon}. \quad [6]$$

E' agevole verificare che, in conseguenza delle [6], all'infinito il vettore di Poynting è reale ed è diretto nel verso positivo delle r . Richiedere, nel dominio della frequenza, che all'infinito il flusso di potenza sia verso l'esterno è equivalente a imporre il principio di causalità nel dominio del tempo.

1.4.6 Condizioni al contorno e di continuità per i campi

Si è visto nel paragrafo 1.4 che per specificare il campo elettromagnetico è necessario assegnare la componente tangenziale del campo elettrico o di quello magnetico sulla superficie limitante il volume dove il campo viene calcolato. D'altra parte, se nell'interno del volume V sono presenti superfici di discontinuità spaziale per i parametri del mezzo, le componenti tangenziali dei campi e le componenti normali delle induzioni devono essere ivi continue (vedi § 1.1). In quest'ultimo caso, basta imporre la continuità delle componenti tangenziali dei campi perché sia automaticamente assicurata la continuità delle componenti normali delle induzioni. Ciò dipende dal fatto che le equazioni di Maxwell alle divergenze sono conseguenza di quelle ai rotori, in assenza di densità di carica e corrente. Introdotto sulla superficie di discontinuità un sistema cartesiano localmente ortogonale, con l'asse z parallelo alla normale, si può mostrare che le componenti secondo z delle induzioni sono esprimibili in funzione delle componenti tangenziali di campi (vedi § 3.2); di conseguenza, l'assicurare la continuità di queste ultime implica la continuità delle prime.

Nulla di strano, poi, se sulle superfici di discontinuità si rende necessaria la continuità delle componenti tangenziali sia del campo elettrico sia di quello magnetico, mentre le condizioni al contorno richiedono solo la conoscenza della componente di uno qualunque dei due. Si tratta infatti di condizioni sostanzialmente diverse: quelle al contorno servono per *determinare* la soluzione delle equazioni di Maxwell, quelle di continuità per *prolungare* il campo da una regione all'altra. Per trovare la soluzione del volume V si procede, in linea di principio, come segue: si risolvono le equazioni di Maxwell in ciascuna regione omogenea, rimanendo indeterminate le costanti di integrazione; successivamente si specificano queste ultime imponendo le condizioni al contorno su S e quelle di continuità (per le componenti tangenziali dei campi) sulle superfici di discontinuità eventualmente presenti in V .

1.5 Teoremi di reciprocità e di equivalenza

In questo paragrafo e in quello successivo vengono illustrati brevemente alcuni teoremi, di notevole importanza ai fini applicativi.

Il primo teorema è quello detto *di reciprocità*. Sia dato un mezzo, per semplicità isotropo, nel quale siano presenti sorgenti $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_{m1}$, che producono il campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$, e sorgenti $\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_{m2}$ che producono il campo $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$. Consideriamo la divergenza

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1;$$

ed eliminiamo i rotori utilizzando le equazioni di Maxwell; risulta

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1} + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2.$$

Se ora si integra su un volume V limitato da una superficie S di normale uscente $\mathbf{i}_n$, si ha

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{i}_n dS &= \iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1}) dV - \\ &- \iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}) dV. \end{aligned} \quad [1]$$

La [1] è la formulazione più generale del teorema di reciprocità. In molti casi, importanti per le applicazioni, l'integrale di superficie è nullo: per esempio, se la superficie S è un conduttore elettrico (o magnetico) perfetto, o una superficie di impedenza (vedi 1.4.3); quest'ultimo caso è anche quello in cui il volume V occupa tutto lo spazio (vedi 1.4.5).

Se l'integrale di superficie è nullo, il teorema di reciprocità assume la forma

$$\iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}) dV = \iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1}) dV. \quad [2]$$

Ciascuno degli integrali di volume prende anche il nome di *reazione* (Rumsey, 1954) dei campi sulle sorgenti; il teorema di reciprocità, nella formulazione data dalla [2], afferma in sostanza che le *reazioni dei campi sulle sorgenti sono uguali*.

Molto importante è pure il *teorema di equivalenza*, o *teorema di Love*. Consideriamo sorgenti $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$ tutte interne a un volume V limitato da una superficie S (pura superficie geometrica, che ha l'unico scopo di separare il volume V dallo spazio esterno; vedi fig. 1.15). Le sorgenti producono un campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ in tutto lo spazio; sia $\mathbf{E}_S, \mathbf{H}_S$ il suo valore nei punti della superficie.

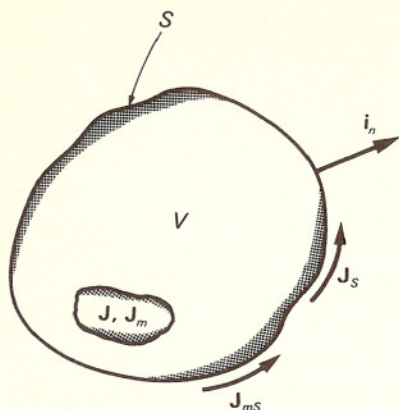


Figura 1.15

Introduciamo a questo punto un altro campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$, di nuovo in tutto lo spazio, tale che

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = 0 \quad \text{in } V,$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H} \quad \text{fuori di } V,$$

in presenza di correnti impresse sulla superficie S , di densità lineare

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_S$$

$$\mathbf{J}_{mS} = -\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_S,$$

[3]

e in assenza delle sorgenti originarie $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$. Si vuol sapere se tale campo è soluzione delle equazioni di Maxwell (se cioè è un campo elettromagnetico) e se può riguardarsi come prodotto dalle correnti superficiali [3].

All'esterno di V il campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ coincide con $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, che certamente è soluzione delle equazioni di Maxwell. In V non vi sono sorgenti, e il campo nullo $\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_1 = 0$ è ancora una possibile soluzione delle equazioni di Maxwell. Attraversando la superficie S , il campo è discontinuo, come dev'essere in presenza di distribuzioni superficiali di correnti elettriche e magnetiche, e l'ammontare della discontinuità è in accordo con le condizioni [25] e [26] (§ 1.1). $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ è dunque una soluzione delle equazioni di Maxwell in presenza delle nuove sorgenti $\mathbf{J}_S, \mathbf{J}_{mS}$. Per il teorema di unicità, tale soluzione è anche l'unica.

La conclusione è la seguente (teorema di equivalenza):

Il campo elettromagnetico, all'esterno di una superficie chiusa S , è esprimibile in termini di sorgenti equivalenti $\mathbf{J}_S, \mathbf{J}_{mS}$, che possono essere determinate a partire dalla conoscenza, su essa, delle componenti tangenziali dei campi.

E' questa la formulazione elettromagnetica del cosiddetto *principio di Huygens* (o

di Huygens-Kirchhoff), che considera ciascun punto investito dal campo come nuova sorgente per la successiva produzione del campo stesso.

L'importanza del teorema di equivalenza (formulazioni alternative sono date in 1.5.7 e 1.5.8) risiede nel fatto che, in parecchie applicazioni, la distribuzione del campo prodotto dalle assegnate sorgenti su S può essere ragionevolmente approssimata con una scelta opportuna della superficie; dopodiché, le sorgenti equivalenti, e quindi i campi all'esterno di S , sono calcolabili (vedi § 3.5) e spesso in modo abbastanza semplice.

Annotazioni

1.5.1 Teorema di reciprocità per mezzi anisotropi reciproci (esercizio)

Si mostri che il teorema di reciprocità, nella formulazione data nel paragrafo 1.5, è valido anche per un mezzo anisotropo purché le diadi rappresentanti le caratteristiche di questo siano *simmetriche*, cioè coincidenti con le rispettive trasposte:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}; \quad \boldsymbol{\mu} = \widetilde{\boldsymbol{\mu}}, \quad [4]$$

Un tale mezzo viene detto *reciproco*. (Nella dimostrazione del teorema si sfrutti la proprietà

$$\widetilde{\mathbf{E}}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}_1 = \widetilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{E}_2; \quad \widetilde{\mathbf{H}}_2 \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}_1 = \widetilde{\mathbf{H}}_1 \cdot \widetilde{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H}_2.)$$

1.5.2 Teorema di reciprocità per mezzi anisotropi non reciproci (esercizio)

Dato un mezzo anisotropo non reciproco, si derivi il teorema di reciprocità; esso è formalmente uguale a quello del paragrafo 1.5, pur di considerare le sorgenti $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_{m1}$ operanti in un mezzo di caratteristiche $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}$, e le sorgenti $\mathbf{J}_2, \mathbf{J}_{m2}$, in un altro mezzo di caratteristiche $\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \widetilde{\boldsymbol{\mu}}$.

1.5.3 Formulazione alternativa del teorema di reciprocità in un mezzo senza perdite (esercizio)

Si consideri un mezzo isotropo senza perdite; si mostri che

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2^* \times \mathbf{H}_1) = -\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2^* - \mathbf{E}_2^* \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}^* - \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{J}_{m1}.$$

Dedurne una formulazione alternativa del teorema di reciprocità.

1.5.4 Formulazione alternativa del teorema di reciprocità in un mezzo con perdite (esercizio)

Si mostri che in un mezzo con perdite la formulazione precedente è ancora valida, pur di considerare i campi $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ in un mezzo di parametri ϵ, μ, σ , e i campi $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ in un mezzo di parametri $\epsilon^*, \mu^*, -\sigma$.

1.5.5 Metodo delle sorgenti di prova: caso elettrico (esercizio)

Sia data una distribuzione di sorgenti $\mathbf{J}_{m2} = 0, \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_t = \mathbf{i}_t \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t)$, alla quale sia associato il campo $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$. Partendo dalla formulazione [2] del teorema di reciprocità,

si dimostri che

$$\mathbf{i}_t \cdot \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_t) = \iiint_V (\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_t \cdot \mathbf{J}_{m1}) dV.$$

La sorgente $\mathbf{J}_t$ (*sorgente di prova*; $\mathbf{i}_t$ è misurato in $\text{A} \cdot \text{m}$) è spazialmente impulsiva e permette di individuare il valore del campo elettrico dovuto alle sorgenti $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_{m1}$ nel punto in cui si trova.

1.5.6 Metodo delle sorgenti di prova: caso magnetico (esercizio)

Si modifichi la dimostrazione precedente per il caso di una sorgente magnetica di prova.

*1.5.7 Prima formulazione alternativa del teorema di equivalenza

Consideriamo, in tutto lo spazio, il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ prodotto dalle sorgenti $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$ e soddisfacente la condizione di radiazione all'infinito, sia S una superficie chiusa ideale limitante un volume V che contiene tutte le sorgenti (vedi fig. 1.16a); sia $\mathbf{E}_S, \mathbf{H}_S$ il campo in corrispondenza dei punti di S .

Consideriamo poi un'altra geometria (vedi fig. 1.16b): lo stesso volume V è ora riempito da un materiale perfettamente conduttore, e il volume esterno a S coincide con quello della figura 1.16a (per chiarezza, le due geometrie sono disegnate separate ma devono essere immaginate sovrapposte). Nella nuova geometria non siano più presenti le sorgenti $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$, ma solo correnti magnetiche superficiali impresse, disposte su S e di densità lineare

$$\mathbf{J}_{mS} = -\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_S. \quad [5]$$

Sia $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ il campo prodotto dalle [5], ancora soddisfacente la condizione di radiazione all'infinito.

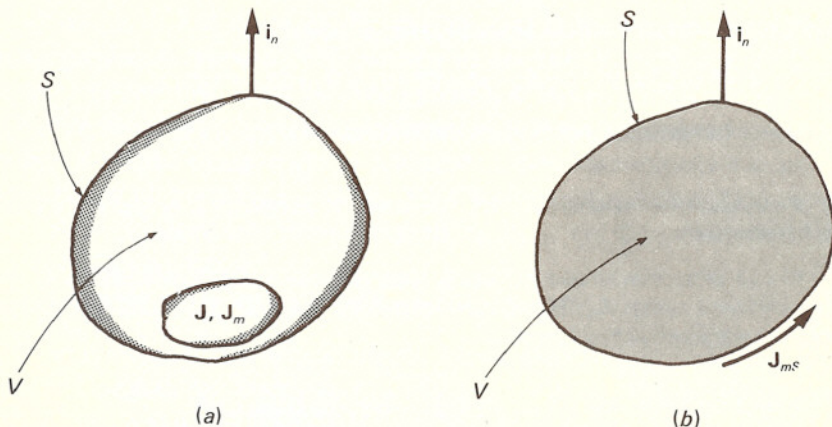


Figura 1.16

Si può dimostrare che, in queste condizioni, la soluzione delle equazioni di Maxwell, $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$, coincide con $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ all'esterno di S . Ambedue i campi soddisfano la condizione di radiazione all'infinito. Per il teorema di unicità (vedi 1.4.5) i due campi coincidono all'esterno di S se su tale superficie hanno identica componente tangenziale del campo elettrico. Questa condizione è verificata, perché il campo elettrico $\mathbf{E}_1$ è nullo in V , e, a causa della densità lineare di corrente $\mathbf{J}_{mS}$, la sua componente tangenziale è discontinua attraversando S e uguale a $\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_S$ sulla faccia esterna di questa superficie.

E' opportuno notare quanto segue. Se il teorema di equivalenza è dato in questa forma, i campi all'esterno di S possono essere calcolati in funzione delle sole correnti magnetiche superficiali, e non dalla combinazione di correnti elettriche e magnetiche superficiali. Il motivo è che, nella formulazione che porta alle [3], viene considerato un campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ in *tutto* lo spazio. Pertanto, le condizioni su S sono di discontinuità per le componenti tangenziali dei campi; esse sono necessarie per prolungare il campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ dall'esterno di S in un campo nullo all'interno. Al contrario, nella formulazione che porta alle [5], il campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ è considerato nel solo volume esterno a S ; il campo in V è automaticamente nullo, perché detto volume è riempito da un conduttore elettrico perfetto. Le condizioni su S sono ora di tipo al contorno. In assenza di correnti impresse, la componente tangenziale del campo magnetico è automaticamente discontinua, mentre quella del campo elettrico è nulla; imprimendo la corrente superficiale magnetica, la componente tangenziale del campo elettrico diventa uguale a quella del campo originario $\mathbf{E}, \mathbf{H}$.

Si nota ancora che le correnti superficiali impresse [3] irradiano nello spazio libero (producendo il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ all'esterno di S e un campo globalmente nullo in S). Al contrario, la corrente superficiale [5] irradia sì nello spazio libero, ma in presenza della massa metallica (di un conduttore elettrico perfetto) di volume V . Se $\mathbf{E}_S$ e $\mathbf{H}_S$ sono i valori esatti del campo, le due formulazioni del teorema di equivalenza portano agli stessi valori per il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ all'esterno di S ; se viceversa sono approssimati le due formulazioni conducono inevitabilmente a valori diversi. Anzi, la differenza tra le due soluzioni può fornire un'idea della bontà dell'approssimazione nella scelta di $\mathbf{E}_S, \mathbf{H}_S$.

*1.5.8 Seconda formulazione alternativa del teorema di equivalenza (esercizio)

Si mostri che, se il volume V (vedi fig. 1.16) è riempito con un conduttore magnetico perfetto, i campi all'esterno di S si possono calcolare in funzione delle sole correnti elettriche superficiali

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_S, \quad [6]$$

irradianti in presenza del suddetto materiale magnetico.

1.6 Teoremi di dualità e delle immagini

Altri teoremi importanti per le applicazioni riguardano possibilità di determinare ulteriori soluzioni per le equazioni di Maxwell, a partire da una soluzione nota, sfruttando la simmetria delle equazioni stesse. Un primo teorema è il cosiddetto *teorema di dualità*.

In un mezzo omogeneo isotropo consideriamo una soluzione $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ delle equazioni

di Maxwell dovuta alle sorgenti $\mathbf{J}$, e, insieme ad essa, il nuovo campo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H} = \zeta \mathbf{H}; \\ \mathbf{H}' &= -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} = -\frac{1}{\zeta} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad [1]$$

Ci si può chiedere se $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ sia soluzione delle equazioni di Maxwell. Ricavando dalle [1] le espressioni di $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, in funzione di $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ e sostituendole nelle equazioni di Maxwell, si ottiene

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}' = j\omega\epsilon\mathbf{E}' \\ \nabla \times \mathbf{E}' = -j\omega\mu\mathbf{H}' + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{J}. \end{cases}$$

Se ne conclude che il nuovo campo soddisfa formalmente a dette equazioni con sorgenti di tipo magnetico

$$\mathbf{J}'_m = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{J} = -\zeta \mathbf{J}. \quad [2]$$

Bisogna ora verificare se esso è congruente con le originarie condizioni al contorno. Se il campo $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ è in presenza di conduttori elettrici perfetti, sulla superficie di questi risulta

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = 0,$$

e di conseguenza

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}' = 0,$$

che è proprio la condizione al contorno appropriata alla superficie di un conduttore magnetico perfetto; un ragionamento analogo può farsi nel caso in cui si sia in presenza di conduttori magnetici perfetti. In conclusione, il campo $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ è soluzione di un problema diverso, dove non solo le sorgenti sono diverse, ma tutti i conduttori elettrici perfetti si mutano in conduttori magnetici perfetti, e viceversa.

Se le condizioni al contorno sono del tipo "impedenza",

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} \times \mathbf{i}_n = Z_S (\mathbf{H} \times \mathbf{i}_n),$$

queste si trasformano nelle nuove condizioni

$$\begin{aligned} -\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}' \times \mathbf{i}_n \frac{\zeta^2}{Z_S} &= \mathbf{E}' \times \mathbf{i}_n, \\ \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}' \times \mathbf{i}_n &= \frac{Z_S}{\zeta^2} (\mathbf{H}' \times \mathbf{i}_n). \end{aligned}$$

Il campo $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ è quindi soluzione di un problema con condizioni al contorno ancora del tipo suddetto, purché l'impedenza assuma il nuovo valore

$$Z'_S = \frac{\xi^2}{Z_S}.$$

Solo se $Z_S = \xi$ le due impedenze superficiali coincidono. In assenza di conduttori elettrici o magnetici perfetti, si ha la formulazione più nota del teorema di dualità:

Dato un campo elettromagnetico $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ prodotto da sorgenti $\mathbf{J}$ in un mezzo omogeneo e isotropo e soddisfacente la condizione di radiazione all'infinito, le formule di trasformazione [1] permettono di determinare il campo $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ generato dalle sorgenti $\mathbf{J}'_m$, date dalla [2].

Un altro teorema che utilizza la simmetria delle equazioni di Maxwell è quello detto *delle immagini*. In un mezzo isotropo sia $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ il campo elettromagnetico dovuto a sorgenti $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_m$. Introdotta una terna ortogonale cartesiana (x, y, z) , eseguiamo la trasformazione di coordinate

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z, \quad [3]$$

il che corrisponde a effettuare una *riflessione* rispetto al piano $z=0$; come si dimostra in 1.6.4, il nuovo campo $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$, di componenti

$$\begin{aligned} E'_x &= -E_x, & H'_x &= H_x \\ E'_y &= -E_y, & H'_y &= H_y \\ E'_z &= E_z, & H'_z &= -H_z, \end{aligned} \quad [4]$$

prodotto da sorgenti $\mathbf{J}'$, $\mathbf{J}'_m$, di componenti

$$\begin{aligned} J'_x &= -J_x, & J'_{mx} &= J_{mx} \\ J'_y &= -J_y, & J'_{my} &= J_{my} \\ J'_z &= J_z, & J'_{mz} &= -J_{mz}, \end{aligned} \quad [5]$$

è soluzione delle equazioni di Maxwell nel nuovo sistema di coordinate (x', y', z') . Questo significa ad esempio che, se la soluzione $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ è rappresentabile come nella figura 1.17a, la nuova soluzione $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ ha la forma indicata nella parte (b) della stessa. La configurazione (b) è l'immagine riflessa della (a), secondo le regole fornite dalle relazioni [3]-[5], rispetto al piano $z=0$. Si noti che i due campi $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, e $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ sono soluzioni valide in tutto lo spazio.

Si consideri ora il campo

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}', \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \mathbf{H}',$$

somma del campo $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e della sua immagine $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$. Sul piano $z=0$ si ha'

$$E_{1x} = E_{1y} = 0, \quad H_{1z} = 0,$$

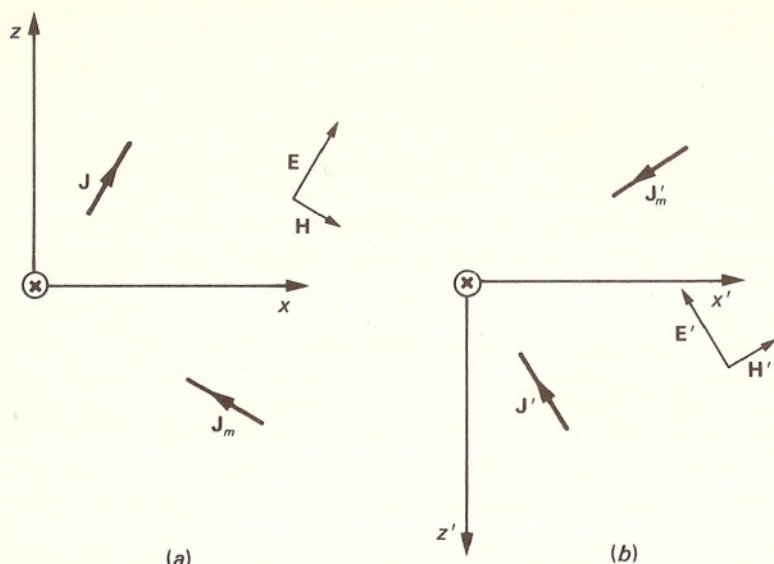


Figura 1.17

che sono le condizioni cui deve soddisfare il campo su un conduttore elettrico perfetto. Questo risultato può essere utilizzato per calcolare il campo E_1 , H_1 prodotto da sorgenti poste in un semispazio omogeneo limitato da un piano perfettamente conduttore (vedi fig. 1.18).

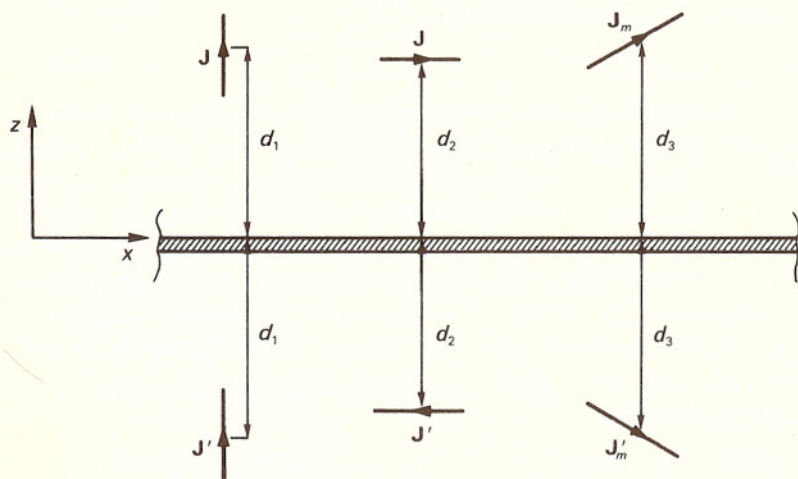


Figura 1.18
Immagini di sorgenti rispetto a un piano metallico.

Infatti, il campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$, nel semispazio $z > 0$, è soluzione delle equazioni di Maxwell, in quanto sovrapposizione di due campi, ciascuno, a sua volta, soluzione: il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, soluzione delle equazioni non omogenee (cioè in presenza delle sorgenti $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$) e il campo $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$, soluzione delle equazioni omogenee (essendo le sorgenti $\mathbf{J}', \mathbf{J}'_m$ nel semispazio $z < 0$). Il campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ soddisfa inoltre alle condizioni al contorno sul piano metallico $z=0$, e pertanto, in base al teorema di unicità della soluzione, coincide con il campo cercato.

Il campo $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ è definito anche nel semispazio $z < 0$, ove è soluzione delle equazioni di Maxwell; tuttavia, il campo fisicamente esistente è quello definito nel semispazio $z > 0$, ed è prodotto dalle sorgenti $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$ in presenza del piano metallico. Per questo motivo le sorgenti $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$ sono anche dette *sorgenti reali*, e le sorgenti $\mathbf{J}', \mathbf{J}'_m$, *sorgenti virtuali*.

Annotazioni

1.6.1 Forma alternativa del teorema di dualità (esercizio)

Si mostri che una forma alternativa alla [1] per il teorema di dualità è la seguente:

$$\mathbf{E}' = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}' = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E}, \quad \mathbf{J}'_m = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{J},$$

1.6.2 Teorema di dualità in un mezzo non omogeneo

Sia dato il mezzo non omogeneo della figura 1.19, le cui caratteristiche cambiano bruscamente in corrispondenza della superficie S . Le sorgenti $\mathbf{J}$ producono il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, indicato con $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ nel mezzo 1 e con $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ nel mezzo 2; in corrispondenza della superficie S :

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_2.$$

Applicando il teorema di dualità nel mezzo 1, si ha la nuova possibile soluzione:

$$\mathbf{E}'_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \mathbf{H}, \quad \mathbf{H}'_1 = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{E}_1,$$

dovuta a sorgenti

$$\mathbf{J}'_m = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \mathbf{J}.$$

Nel mezzo 2, consideriamo la seguente trasformazione:

$$\mathbf{E}'_2 = \zeta \mathbf{H}_2, \quad \mathbf{H}'_2 = -\frac{1}{\zeta} \mathbf{E}_2,$$

con ζ parametro per ora incognito; dalle equazioni di Maxwell, sostituendo ai campi $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ le loro espressioni in funzione di $\mathbf{E}'_2, \mathbf{H}'_2$, si ha

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E}'_2 = -j\omega\epsilon_2\zeta^2 \mathbf{H}'_2 \\ \nabla \times \mathbf{H}'_2 = j\omega\mu_2 \frac{1}{\zeta^2} \mathbf{E}'_2, \end{cases}$$

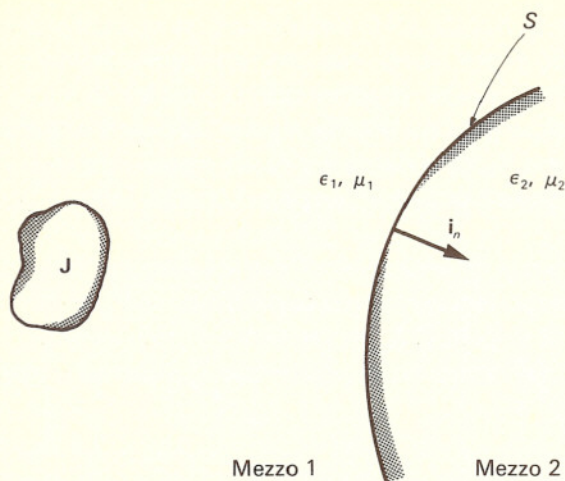


Figura 1.19

il che mostra che il campo $\mathbf{E}'_2, \mathbf{H}'_2$ è una possibile soluzione in un mezzo di costanti

$$\mu'_2 = \epsilon_2 \zeta^2, \quad \epsilon'_2 = \frac{\mu_2}{\zeta^2}.$$

La continuità delle componenti tangenziali per i nuovi campi, sempre in corrispondenza di S , implica che

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\zeta} \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_2$$

$$\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_1 = \zeta \mathbf{i}_n \times \mathbf{H}_2;$$

di conseguenza,

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}.$$

La conclusione è che, data la soluzione $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, prodotta dalle sorgenti $\mathbf{J}$ nel mezzo di caratteristiche ϵ_1, μ_1 (in 1) e ϵ_2, μ_2 (in 2), si può determinare la soluzione

$$\mathbf{E}' = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \mathbf{H},$$

$$\mathbf{H}' = -\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \mathbf{E},$$

dovuta a sorgenti

$$\mathbf{J}'_m = -\sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \mathbf{J},$$

in un mezzo di costanti ϵ_1, μ_1 (in 1) e ϵ_2', μ_2' (in 2):

$$\epsilon_2' = \epsilon_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \mu_2' = \mu_1 \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}.$$

*1.6.3 Uso congiunto del teorema di equivalenza e di quello delle immagini

Con riferimento alla figura 1.20, consideriamo lo spazio totale, somma del volume V , contenente le sorgenti $\mathbf{J}, \mathbf{J}_m$, e del volume V' nel quale si vuol calcolare il campo (la superficie S'' recede all'infinito). In V' , per il teorema di equivalenza, il campo può essere calcolato utilizzando sorgenti equivalenti $\mathbf{J}_S, \mathbf{J}_{mS}$ poste sulla superficie $S' + S''$. Si può dimostrare che, se i campi soddisfano su S'' alla condizione di radiazione all'infinito (com'è nel caso in esame), allora il contributo delle correnti superficiali che scorrono su S'' è nullo. La dimostrazione di ciò può essere ricavata in base ai risultati esposti in 4.3.5: ciascun elemento di S'' è un'areola elementare di Huygens che non emette posteriormente radiazione elettromagnetica. Allo stesso risultato si giunge se si ammette che in V' vi siano piccolissime perdite: i campi prodotti dalle sorgenti equivalenti su S'' non producono alcun campo al finito, se S'' è infinitamente remota. In conclusione, le uniche sorgenti equivalenti da considerare sono quelle su S' .

Applicando il teorema di equivalenza nella formulazione data in 1.5.7 (avendo cioè metallizzato il semispazio V contenente le sorgenti), basta considerare le sorgenti equivalenti puramente magnetiche

$$\mathbf{J}_{mS} = -\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_S$$

su S' . Ma tali correnti magnetiche producono in V' un campo che può essere calco-

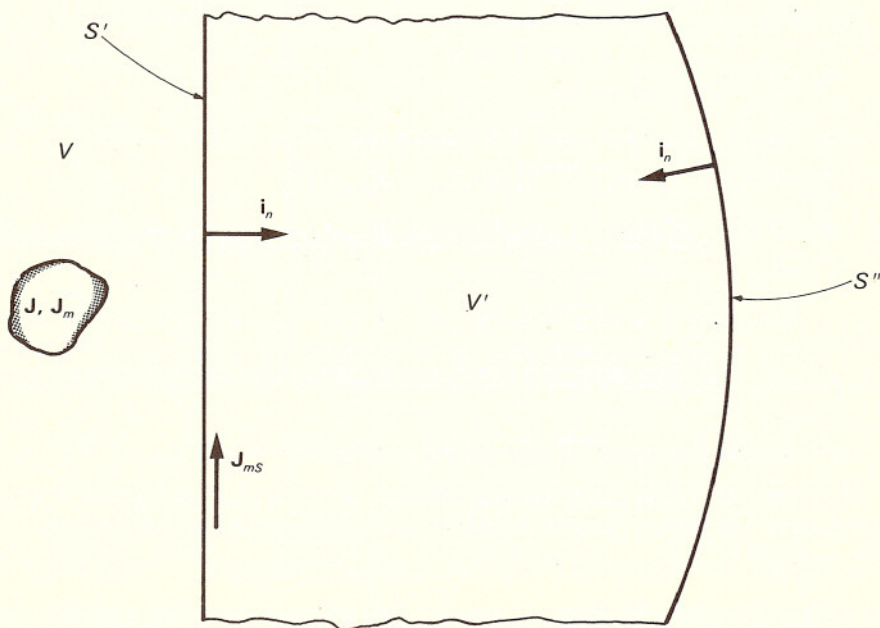


Figura 1.20

lato con l'ausilio delle sorgenti immagine; tali sorgenti virtuali hanno direzione e verso delle sorgenti $\mathbf{J}_m$ e sono infinitamente prossime ad esse. Di conseguenza il campo in V' è calcolabile mediante le sorgenti equivalenti

$$\mathbf{J}'_{mS} = -2\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_S,$$

irradianti nello spazio libero.

1.6.4 Dimostrazione del teorema delle immagini

Proiettiamo le equazioni di Maxwell sugli assi di un sistema cartesiano di riferimento

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x - J_{mx} \\ -\frac{\partial E_x}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y - J_{my} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} = -j\omega\mu H_z - J_{mz} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x + J_x \\ -\frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y + J_y \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = j\omega\epsilon E_z + J_z. \end{array} \right.$$

Si verifica subito che le equazioni sono invarianti per la trasformazione di coordinate

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z$$

se anche i campi e le sorgenti sono trasformate conformemente alle relazioni

$$\begin{array}{llll} E'_x = -E_x, & H'_x = H_x, & J'_x = -J_x, & J'_{mx} = J_{mx} \\ E'_y = -E_y, & H'_y = H_y, & J'_y = -J_y, & J'_{my} = J_{my} \\ E'_z = E_z, & H'_z = -H_z, & J'_z = J_z, & J'_{mz} = -J_{mz}. \end{array}$$

La combinazione lineare $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}'$, $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \mathbf{H}'$ delle due soluzioni fornisce un campo che è, rispetto a z , *simmetrico* per le componenti H_{1x} , H_{1y} , E_{1z} e *antisimmetrico* per le E_{1x} , E_{1y} , H_{1z} .

1.6.5 Forma alternativa del teorema delle immagini (esercizio)

Si mostri che le equazioni di Maxwell sono invarianti per la trasformazione di coordinate [3] se anche i campi e le sorgenti si trasformano secondo le relazioni

$$\begin{array}{llll} E''_x = E_x, & H''_x = -H_x, & J''_x = J_x, & J''_{mx} = -J_{mx} \\ E''_y = E_y, & H''_y = -H_y, & J''_y = J_y, & J''_{my} = -J_{my} \\ E''_z = -E_z, & H''_z = H_z, & J''_z = -J_z, & J''_{mz} = J_{mz}. \end{array}$$

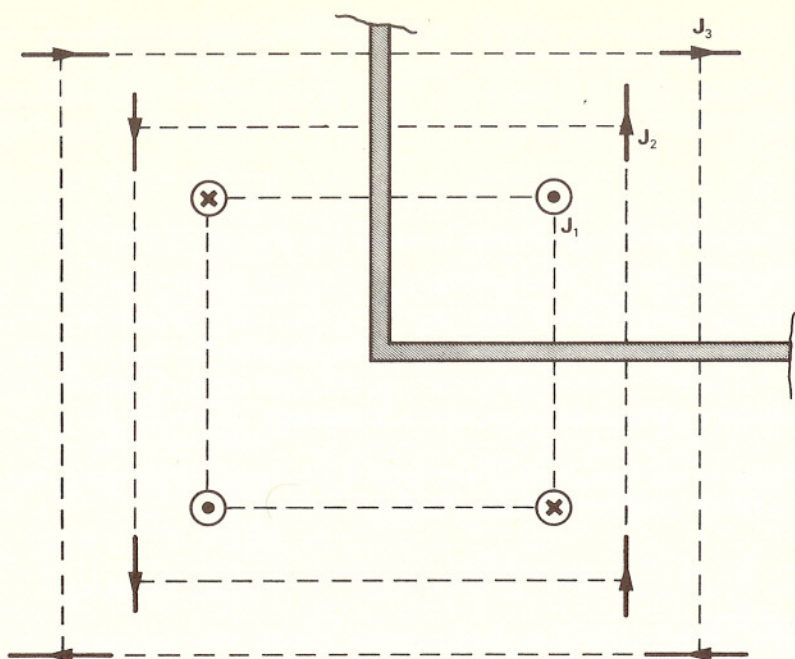


Figura 1.21

Sorgenti elettriche in due semispazi metallici ad angolo retto (simmetria quadrantale).

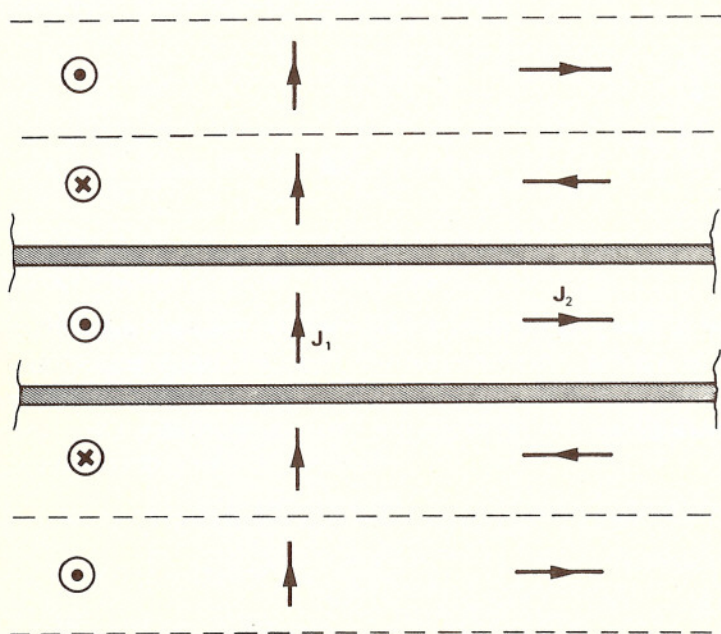


Figura 1.22

La combinazione lineare $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}'', \mathbf{H}_1 = \mathbf{H} + \mathbf{H}''$ delle due soluzioni è, rispetto a z , simmetrica per le componenti E_{1x}, E_{1y}, H_{1z} e antisimmetrica per le H_{1x}, H_{1y}, H_{1z} ; in particolare, per $z=0$, risulta $H_{1x}=H_{1y}=E_{1z}=0$. Tale combinazione può opportunamente rappresentare un campo in presenza di un conduttore magnetico perfetto su $z=0$.

1.6.6 Applicazione del teorema delle immagini (esercizio)

Con riferimento alla figura 1.21, si giustifichi la disposizione delle sorgenti immagine colà riportate (sorgenti di tipo elettrico).

1.6.7 Ulteriore applicazione del teorema delle immagini (esercizio)

Con riferimento alla figura 1.22, si giustifichi la successione di (infinite) sorgenti immagine colà riportate (sorgenti di tipo elettrico).

1.7 Riepilogo

In questo capitolo si sono brevemente riassunti i risultati fondamentali dell'elettromagnetismo.

Le equazioni di Maxwell sono state date come postulato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j} \\ \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \end{array} \right.$$

e si è mostrato che da esse possono ricavarsi l'equazione di continuità della corrente, le leggi di Gauss, la legge di Lenz-Neumann e la legge di Ampère generalizzata a campi dinamici. Le equazioni di Maxwell possono essere convenientemente scritte nel dominio della frequenza,

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} - \mathbf{J}_m \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m, \end{array} \right.$$

o nei domini della frequenza e del numero d'onda:

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \hat{\mathbf{B}} + j \hat{\mathbf{J}}_m \\ \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}} = -\omega \hat{\mathbf{D}} - j \hat{\mathbf{J}} \\ \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{D}} = j \hat{\rho} \\ \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}} = j \hat{\rho}_m, \end{cases}$$

dove si sono introdotte le *densità di corrente magnetica* e di *carica magnetica*.

Alla superficie di separazione tra mezzi diversi le componenti tangenziali dei campi e normali delle induzioni sono continue, a meno che non siano ivi presenti densità lineari di corrente o superficiali di carica, nel qual caso si ha

$$\begin{cases} \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) = \rho_S \\ \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) = \rho_{mS} \\ \mathbf{i}_n \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = -\mathbf{j}_{mS} \\ \mathbf{i}_n \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S \end{cases}$$

Condizioni analoghe valgono in corrispondenza di discontinuità temporali delle caratteristiche del mezzo.

Per poter risolvere le equazioni di Maxwell è necessario fornire ulteriori relazioni tra induzioni e campi. Nel caso di *mezzi lineari*, una forma generale di queste relazioni, dette *costitutive*, è, nel dominio del tempo,

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int \mathcal{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \int \mathcal{G}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \cdot \mathbf{h}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt'.$$

Queste relazioni si trasformano nel dominio della frequenza e del numero d'onda, per mezzi *stazionari* e *omogenei*, come segue:

$$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\epsilon}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\mu}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega).$$

Nel caso più usuale di un *mezzo non dispersivo nello spazio, isotropo e stazionario* le relazioni costitutive si semplificano:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int \mathcal{G}_e(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{e}(\mathbf{r}, t') dt'$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \int \mathcal{G}_h(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{h}(\mathbf{r}, t') dt'$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega).$$

Partendo dalle equazioni di Maxwell possono derivarsi alcuni teoremi. Riguardo all'energia, il risultato più importante è il *teorema di Poynting*, espresso dalla equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \left(\mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) + \sigma e^2 = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}. \quad [1]$$

Per mezzi non dispersivi la somma del secondo e del terzo termine si identifica come la derivata temporale della densità di energia elettromagnetica, data (per mezzi isotropi) da

$$w = \frac{1}{2} \epsilon e^2 + \frac{1}{2} \mu h^2.$$

Il vettore di Poynting $\mathbf{s}$ rappresenta la *densità di flusso* della potenza elettromagnetica. L'analogo della [1] nel dominio della frequenza porta a stabilire che, per *mezzi passivi*, i coefficienti dell'immaginario delle costanti dielettrica e magnetica

$$\epsilon = \epsilon_1 - j\epsilon_2, \quad \mu = \mu_1 - j\mu_2$$

sono non negativi:

$$\epsilon_2 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0.$$

Al campo elettromagnetico è associato un *momento meccanico*, di densità

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{s}}{c^2},$$

e anche, in generale, un *momento angolare meccanico*.

Molto importante è il *teorema di unicità*; esso stabilisce che un campo elettromagnetico è univocamente determinato, nel dominio del tempo, se sono fissati il valore del campo in ogni punto all'istante iniziale e, per ogni tempo, le sorgenti e le condizioni al contorno in termini delle componenti tangenziali del solo campo elettrico o magnetico (o di una loro combinazione lineare). Nel dominio della frequenza la condizione sul valore del campo nell'istante iniziale non è appropriata.

Vi sono ancora: il *teorema di reciprocità*, che nella sua forma più usuale stabilisce che le reazioni dei campi sulle sorgenti sono uguali:

$$\iiint_V (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_2 - \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{J}_{m2}) dV = \iiint_V (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_1 - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{J}_{m1}) dV,$$

quello di *equivalenza*, che permette di calcolare il campo all'esterno di una superficie S in termini di sorgenti equivalenti presenti su essa; quelli di *dualità e delle immagini*, che permettono di costruire altre soluzioni dalle equazioni di Maxwell, a partire da una soluzione nota, sfruttando la simmetria di queste.

Traduzione delle citazioni riportate all'inizio del capitolo

Una delle caratteristiche salienti di questo trattato è la dottrina secondo cui la corrente reale alla base dei fenomeni elettromagnetici non coincide con la corrente di conduzione, ma la variazione temporale dello spostamento elettrico dev'essere tenuta in conto nel calcolo del movimento complessivo dell'elettricità.

J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford 1873).

Legge fondamentale dell'elettricità:

La forza repulsiva di due piccoli globi elettrizzati da elettricità della stessa natura è inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra i loro centri.

C. A. Coulomb, *Premier mémoire sur l'électricité et le magnetisme*, a cura dell'Académie Royale des Sciences (Parigi 1785).

La forza attrattiva e repulsiva del fluido magnetico è esattamente, così come quella del fluido elettrico, direttamente proporzionale alla densità e inversamente proporzionale al quadrato della distanza tra gli elementi magnetici.

C. A. Coulomb, *Second mémoire sur l'électricité et le magnetisme*, a cura dell'Académie Royale des Sciences (Parigi 1785).

Su un corpo conduttore carico di elettricità, il fluido elettrico si spande sulla superficie del corpo, ma non penetra nel suo interno.

C. A. Coulomb, *Quatrième mémoire sur l'électricité*, a cura dell'Académie Royale des Sciences (Parigi 1785).

Quando due conduttori, o meglio due parti di uno stesso conduttore voltaico, l'una fissa e l'altra mobile, sono a una distanza conveniente e con direzioni all'incirca parallele, la parte mobile è attirata o respinta da quella fissa, a seconda che nell'una e nell'altra la direzione della corrente elettrica abbia lo stesso verso o verso opposto.

A. M. Ampère in *Annls Chim. Phys.*, 18 (1821).

Sia che si adotti la bella teoria di Ampère sia che se ne adotti una qualunque altra, fatta ogni possibile riserva mentale, sarebbe davvero singolare se, mentre ogni corrente elettrica è accompagnata da una corrispondente intensità di azione magnetica in direzione normale alla corrente, nei buoni conduttori di elettricità, posti nella sfera di questa azione, non comparissero correnti indotte né si producessero altri effetti misurabili equivalenti per intensità a tali correnti. Queste considerazioni, con la loro conseguenza, e cioè la speranza di ottenere elettricità dall'ordinario magnetismo, mi hanno indotto più volte a investigare sperimentalmente l'effetto induttivo delle correnti elettriche.

M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity* (1839).

Per ottenere il movimento complessivo di elettricità la variazione dello spostamento elettrico dev'essere aggiunta alle correnti. Se il mezzo, invece di essere un isolante perfetto, è un conduttore la cui resistenza per unità di volume è ρ , allora vi sarà non solo uno spostamento elettrico, ma vere correnti di conduzione in cui l'energia elettrica è trasformata in calore, e l'ondulazione è pertanto indebolita.

J. C. Maxwell, *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, *Phil. Trans.*, 155 (1865).

In un mezzo in cui si propagano onde vi è una pressione in direzione normale ad esse (...) Un corpo piatto, esposto alla luce del sole, sarebbe pertanto respinto da una forza che si applica sul lato su cui cade la luce. E' probabile che si possa ottenere una quantità molto più grande di energia di radiazione per mezzo dei raggi concentrati della lampada elettrica. Tali raggi, cadendo su di un sottile disco metallico, delicatamente sospeso nel vuoto, potrebbero forse produrre un effetto meccanico osservabile.

J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Oxford 1873).

Ho effettuato gli esperimenti nella semplice forma suggerita da Maxwell (...)

Queste forze esercitate dalla luce sono in accordo, nell'ambito degli errori sperimentali, con le forze ponderomotrici della radiazione calcolate da Maxwell e Bartoli.

P. N. Lebedev, *Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes*, *Annalen Phys.*, 4, 6 (1901)

Non sono forse Materia e Luce convertibili l'una nell'altra, e non può la Materia ricevere la maggior parte della propria attività dalle particelle di Luce che entrano anche nella sua composizione?

Il tramutarsi di Materia in Luce, e di Luce in Materia è del tutto conforme al corso della Natura, che sembra deliziarsi di trasmutazioni.

I. Newton, *Scritti di ottica*, in "Opere", trad. it. (Utet, Torino 1977-78). Ed. or.: 1717.

Alla domanda "che cos'è la teoria di Maxwell?" non saprei dare risposta più concisa e definita di questa: la teoria di Maxwell è il sistema delle equazioni di Maxwell.

H. Hertz, *Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft* (Lipsia 1894).

Riferimenti bibliografici

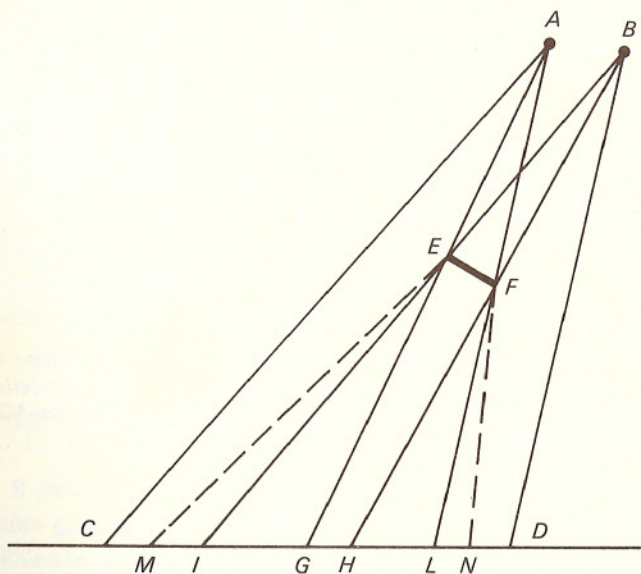
- Akhiezer A. I., Bar'yakhatar V. G. e Peletminskij S. V., *Spin Waves* (North Holland, Amsterdam 1968).
- Carrara N., Fazzini I., Ronchi L. e Toraldo di Francia G., *Sul momento di rotazione di un campo elettromagnetico*, *Alta Frequenza*, 24, N. 2, 100-09 (1955).
- Collin R. E., *Field Theory of Guided Waves* (McGraw-Hill, New York 1960) cap. 12.
- Flytzanis C., *Theory of Non-linear Optical Susceptibilities*, in H. Rabin e C. L. Lang (a cura di), "Quantum Electronics", vol. 1 (Academic Press, New York 1975) cap. 2.
- Franceschetti G. e Pinto I., *Volterra Series Solution of Maxwell Equations in Non-linear Media*, presentato al 3° Convegno nazionale sull'elettromagnetismo (Bari, giugno 1980).
- Gerosa G., Latmiral G. e Vinciguerra R., *Electromagnetic Parameters of Matter and Conditions of Physical Realizability*, *Nuovo Cim.*, ser. X, 20, 610-16 (1961).
- Klimontovič Y. L., *Non-linear Interaction of Waves in a Plasma*, *Sov. Phys. JETP*, 21, 362-32 (1965).
- Marcuvitz N., *Interaction of Electromagnetics and Particle Fields*, *Proc. 4th Coll. Microwave Commun.* (1970).
- *On the Theory of Plasma Turbulence*, *J. math. Phys.*, 15, N. 6, 870-79 (1974).
- Maxwell J. C., *On Physical Lines of Forces*, *Phil. Mag.*, 21 (1861); ristampato nei "Scientific Papers", vol. 1 (Cambridge University Press, Londra 1890) pp. 451-513.
- *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover, New York 1965). Ed. or.: 1873.
- Müller C., *Foundation of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, trad. ingl. (Springer, Berlino, Heidelberg e New York 1969).
- Rumsey V. H., *Reaction Concept in Electromagnetic Theory*, *Phys. Rev.*, 94, 1483-91 (1954).

Capitolo 2

Propagazione

Lumen propagatur seu diffunditur non solum directe, refracte, ac reflexe, sed etiam alio quodam quarto modo, diffracte.

Aperto in fenestra foraminulo perquam paruo AB, introducatur per illud in cubiculum, alioqui valde obscurum, lumen solis caelo serenissimo, cuius diffusio erit per conum, vel quasi conu ACDB visibilem si aër fuerit refertus atomis pulveris, vel si in eo excitetur aliquis fumus. Huic cono inferatur aliquod corpus opacum EF, in magna distantia a foramine AB, et ita ut saltem unum extremum corporis opaci illuminetur.



Praeterea observetur super lucidae basis parte CM, et ND, nitide ac fortiter illustrata, spargi et distingui tractus aliquos, seu series luminis colorati, ita ut in qualibet serie sit in medio quidem lux valde pura, et sincera, in extremis autem sit color aliquis, nempe caeruleus in extremo ipsi umbrae MN propinquiore, et rubeus in extremo remotiore.

Francesco Maria Grimaldi, 1665.

Ainsi ce nombre infini d'ondes qui naissent en mesme instant de tous les points d'une étoile fixe, grande peut etre comme le Soleil, ne font sensiblement qu'une seule onde, laquelle peut bien avoir assez de force pour faire impression sur nos yeux. Outre que de chaque point lumineux il peut venir plusieurs milliers d'ondes dans le moindre temps imaginable, par la frequente percussion des corpuscules, qui frappent l'éther en ces points; ce qui contribue encore à rendre leur action plus sensible.

Il y a encore à considerer dans l'émanation de ces ondes que chaque particules de la matiere, dans laquelle une onde s'étend, ne doit pas communiquer son mouvement seulement à la particule prochaine, qui est dans la ligne droite tirée du point lumineux; mais qu'elle en donne aussi necessairement à toutes les autres qui la touchent, et qui s'opposent à son mouvement. De sorte qu'il faut qu'autour de chaque particule il se fasse une onde dont cette particule soit le centre.

Christiaan Huygens, 1690.

Are not all hypotheses erroneous in which light is supposed to consist in pression or motion propagated through a fluid medium? If it consisted in pression or motion, propagated either in an instant, or in time, it would bend into the shadow. For pression or motion cannot be propagated in a fluid in right lines beyond an obstacle which stops part of motion, but will bend and spread every way into the quiescent medium which lies beyond the obstacle. The waves on the surface of stagnating water passing by the sides of a broad obstacle which stops part of them, bend afterwards, and dilate themselves gradually into the quiet water behind the obstacle. The waves, pulses or vibrations of the air, wherein sounds consist, bend manifestly, though not so much as the waves of water. For a bell or a cannon may be heard beyond a hill intercepts the sight of the sounding body; and sounds are propagated as readily through crooked pipes as straight ones. But light is never known to follow crooked passages nor to bend into the shadow. For the fixed star, by the interposition of any of the planets, cease to be seen. An so do the parts of the sun by the interposition of the moon, Mercury, or Venus. The rays which pass very near to the edges of any body are bent a little by the action of the body, but this bending is not towards but from the shadow, and is performed only in the passage of the ray by the body, and at a very small distance from it.

So soon as the ray is past the body it goes right on.

Isaac Newton, 1717.

Es ist gewiss ein interessanter Gedanke, dass die Vorgänge im Luftraume, welche wir untersuchten, uns in millionenfacher Vergrößerung dieselben Vorgänge darstellen, welche zwischen den Platten eines Newton'schen Farbenglases oder in der Nähe eines Fresnel'schen Spiegels sich abspielen.

Heinrich Hertz, 1888.

2.1 Introduzione

Una delle più importanti conseguenze delle equazioni di Maxwell riguarda la *propagazione elettromagnetica*: l'esistenza di sorgenti in un punto dello spazio, attive a un certo istante, è sperimentalmente rilevabile solo dopo un tempo finito ma non nullo. Il segnale elettromagnetico si propaga quindi con velocità finita da un punto

all'altro dello spazio. E' questa la caratteristica fondamentale che distingue le equazioni dell'elettrodinamica da quelle dell'elettrostatica o della magnetostatica; in queste ultime, grazie al concetto di *campo*, è certamente possibile calcolare le azioni che si esercitano tra cariche distanti, ma tali azioni sono istantanee: esauriti tutti i transitori, rimane solo una situazione di equilibrio, in cui cariche e correnti conservano indefinitamente i loro valori. In elettrodinamica, invece, cariche e correnti migrano e pulsano, e i campi ad esse associati variano nel tempo e nello spazio; la conseguenza più appariscente è qui l'esistenza dell'*onda elettromagnetica*.

La propagazione elettromagnetica, teoricamente prevista in base alle equazioni di Maxwell, fu verificata sperimentalmente da Hertz nel 1887: segnali elettromagnetici, prodotti da correnti impulsive (scariche elettriche) potevano essere focalizzati da riflettori parabolici e ricevuti a una certa distanza. In tal modo si dimostrava anche la sostanziale coincidenza tra propagazione elettromagnetica e ottica.

Per spiegare tali fenomeni fu proposto un modello meccanico che prevedeva la presenza, in tutto lo spazio, di un mezzo singolare: l'*etere*. In seguito alla deformazione dell'etere, l'onda elettromagnetica (o luminosa) si propagava in modo analogo a quanto accade in un solido per un'onda meccanica; i campi erano una misura di quella deformazione. L'ipotesi dell'esistenza dell'etere (sovrastuttura non necessaria delle equazioni di Maxwell) fu presto abbandonata, mentre ha conservato la sua validità il concetto di onda elettromagnetica; e il campo, puro strumento di previsione e di calcolo delle azioni a distanza, ha un significato più astratto.

In questo capitolo sono illustrati alcuni semplici esempi di propagazione elettromagnetica, in parte guidata da strutture fisiche (linee di trasmissione), in parte nello spazio libero (onde piane). In entrambi i casi, il formalismo matematico è modesto, per non offuscare l'aspetto fisico più rilevante del problema, che è quello della propagazione. Le caratteristiche più salienti di questa sono presentati direttamente, con riferimento all'equazione d'onda, nei paragrafi 2.2 e 2.3. Nel successivo capitolo 3 vengono affrontati problemi concettualmente simili, ma che necessitano di una formalizzazione della soluzione più onerosa.

2.2 La propagazione per onde

Il concetto di *onda* non è facile da definire esattamente: una definizione abbastanza generale è quella di Whitham (1974), che chiama onda "ogni segnale riconoscibile che si trasferisca da una parte del mezzo (di trasmissione) a un'altra con una velocità di propagazione misurabile". Il segnale può essere una qualunque modificazione dello stato di quiete dell'ambiente, purché identificabile, in ogni istante, nello spazio: soddisfatta questa condizione, il segnale può distorcersi, cambiare in intensità e in velocità. Giusta la definizione precedente, le onde possono essere suddivise in due grandi categorie, anche se per alcuni tipi la distinzione non è chiara e vi è una certa sovrapposizione tra le classi.

→ Alla prima classe appartengono onde descrivibili matematicamente per mezzo di equazioni differenziali di tipo iperbolico; il modello di queste onde è rappresentato dalle soluzioni dell'equazione

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{equazione d'onda}). \quad [1]$$

Se la funzione $\Phi(\mathbf{r}, t)$ dipende solo da x, t , la [1] assume la più semplice forma

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad [2]$$

Con il cambiamento di variabili

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

la [2] si trasforma nell'equazione

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

la cui soluzione generale è

$$\Phi(x, t) = f(\xi) + g(\eta) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

con f e g funzioni arbitrarie (purché differenziabili).

La funzione $f(x - ct)$ assume gli stessi valori per coppie di punti x_1, x_2 e di tempi t_1, t_2 tali che

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2.$$

Riportando su un grafico i valori di $f(x - ct)$ in funzione di x , per successivi valori di t , si ottiene un diagramma del tipo di quello riportato nella figura 2.1: in questo caso, com'è facile vedere, l'onda si propaga, senza cambiare forma, nel verso positivo dell'asse x con velocità c . Tutto ciò può essere ripetuto per l'onda rappresentata dalla funzione $g(x + ct)$; l'unica variante è che il movimento è ora nella direzione negativa dell'asse x .

→ Alla seconda classe di onde appartengono invece (nel caso di onde scalari e dipendenti unicamente da x e t) quelle rappresentabili come arbitrarie combinazioni lineari di soluzioni elementari del tipo

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x), \quad [3]$$

e che risultano completamente definite una volta specificata la cosiddetta *relazione di dispersione* tra i parametri ω e β (supposti per semplicità reali):

$$\omega = \omega(\beta). \quad [4]$$

In termini di fasori, invece della [3] si può scrivere

$$\Psi(x, t) = A \operatorname{Re} \{ \exp[j(\omega t - \beta x)] \}. \quad [5]$$

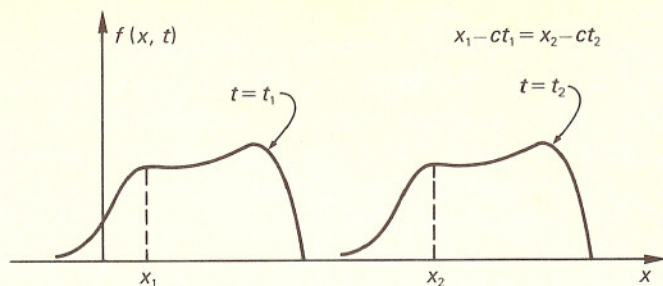


Figura 2.1
Propagazione di un'onda.

Per sovrapposizione, si ottiene la forma più generale di questa classe di onde:

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) \exp[j(\omega t - \beta x)] d\beta. \quad [6]$$

In particolare, se $\omega = c\beta$, la [6] diventa

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) \exp[-j\beta(x - ct)] d\beta = \Phi(x - ct),$$

che è certamente soluzione della [2]. Per distinguere più nettamente le due classi di onde, si può limitare la definizione di appartenenza alla seconda classe richiedendo che

$$\frac{d\omega}{d\beta} \neq \text{costante},$$

cioè

$$\frac{d^2\omega}{d\beta^2} \neq 0. \quad [7]$$

Consideriamo ora la soluzione elementare [3], rappresentata nella figura 2.2. Per $x = \bar{x} = \text{cost.}$, la Ψ riproduce sé stessa dopo un intervallo di tempo (*periodo* dell'oscillazione)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad [8]$$

Lo stesso accade, per $t = \bar{t} = \text{cost.}$, dopo un intervallo di spazio (*lunghezza d'onda*)

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad [9]$$

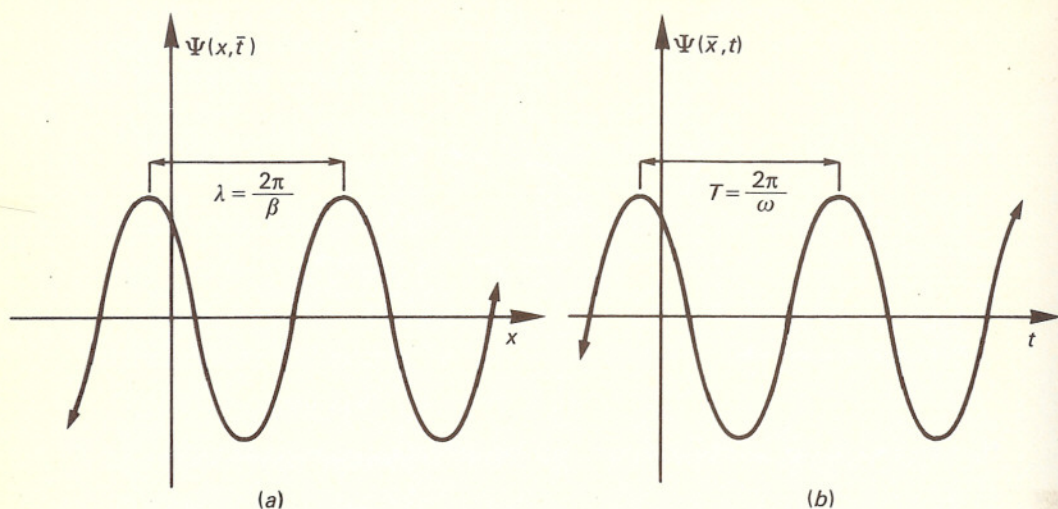


Figura 2.2

Rappresentazione della funzione $\Psi(x, t)$: in (a) $t = \bar{t} = \text{costante}$; in (b) $x = \bar{x} = \text{cost.}$

Le onde elementari, nella [6], si spostano ciascuna con *velocità di fase*

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}. \quad [10]$$

Se $\omega = c\beta$, la velocità di fase è la stessa per tutte le onde e uguale a c . Per questo motivo il segnale risultante è funzione della differenza $x - ct$ e la propagazione avviene senza distorsione: le varie onde componenti conservano le loro relazioni mutue (spaziali e temporali) perché si spostano tutte con uguale velocità; di conseguenza tutto il segnale, nel suo complesso, si sposta con velocità c .

Se invece la velocità di fase non è costante, il segnale complessivo [6] nel propagarsi cambia di forma; le varie onde componenti perdono le loro relazioni mutue, ovvero “si disperdono”, e pertanto vengono dette *dispersive*. Per stabilire se effettivamente siano tali, importa non tanto l'equazione di definizione [3] quanto la relazione di dispersione [4]. E' da quest'ultima, infatti, che si può ricavare l'equazione di propagazione, che tuttavia non necessariamente è di tipo iperbolico; contrariamente a quanto spesso si legge, “propagazione d'onda” ed “equazione differenziale di tipo iperbolico” non sono sinonimi. Come si è detto, le equazioni che governano la propagazione delle onde dispersive possono essere di varia natura, e anche di tipo integrale anziché differenziale. Addirittura, la propagazione di onde in un fluido incompressibile, non viscoso, in presenza di un campo gravitazionale, è descritta dall'equazione di Laplace (caratteristica dei fenomeni statici) pur di specificare particolari condizioni alla superficie libera del fluido (Luke, 1967).

Nel caso lineare, non considerando la limitazione [7], le due classi di onde esami-

nate sono, almeno formalmente, rappresentabili in modo unitario mediante la [6]. Questa rappresentazione corrisponde a considerare un segnale variabile sinusoidalmente nel tempo e a calcolare il valore di β mediante la [4] (equazione che, per le onde di tipo iperbolico, può essere facilmente ottenuta a partire dalla equazione differenziale di definizione, vedi 2.2.1 e 2.2.2), per sovrapporre poi i vari segnali elementari in modo da soddisfare le condizioni iniziali e al contorno. E' appunto questo il procedimento utilizzato nel presente capitolo.

Annotazioni

2.2.1 Relazione di dispersione per l'equazione del fascio' (esercizio)

Sia data l'equazione

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \gamma^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = 0, \quad [11]$$

ricavarne la relazione di dispersione, sostituendo in essa l'espressione $\Phi(x, t) = A \exp[j(\omega t - \beta x)]$.

2.2.2 Esempi di calcolo di relazioni di dispersione (esercizio)

Si applichi la tecnica precedente alle seguenti equazioni

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \gamma^2 \Phi = 0 \quad (\text{equazione di Klein-Gordon}),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \gamma \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{equazione linearizzata di Korteweg de Vries}).$$

(Si noti che solo la prima equazione è iperbolica.)

2.2.3 Relazione di dispersione di un'equazione integro-differenziale

Sia data l'equazione

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int_{-\infty}^{+\infty} K(u-x) \frac{\partial \Phi}{\partial u} du = 0,$$

dove la funzione $K(x)$, detta *kernel* dell'integrale, è assegnata.

Posto $\Phi(x, t) = A \exp[j(\omega t - \beta x)]$, si ha

$$j\omega \exp(-j\beta x) - j\beta \int_{-\infty}^{+\infty} K(u-x) \exp(-j\beta u) du = 0,$$

cioè

$$\omega = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} K(v) \exp(-j\beta v) dv,$$

che è la relazione di dispersione cercata.

(Si noti che l'integrale non è altro che la trasformata di Fourier del kernel.)

2.3 La propagazione di un pacchetto d'onda

Al fine di comprendere meglio le caratteristiche del moto ondoso, consideriamo il cosiddetto *pacchetto d'onda*, cioè la sovrapposizione di più soluzioni elementari, nella forma integrale [6] del paragrafo precedente, con opportuna scelta della funzione $A(\beta)$. Ad esempio, sia $A(\beta) = A_0 = \text{cost.}$ in due intervalli di larghezza $2\Delta\beta \ll \beta_0$ a cavallo di $\pm\beta_0$ (vedi fig. 2.3), e nulla al di fuori. In tal caso l'integrale [6] può essere calcolato esattamente all'istante $t=0$; si ha

$$\Phi(x, 0) = 4A_0 \Delta\beta \cos(\beta_0 x) \frac{\sin \Delta\beta x}{\Delta\beta x}. \quad [1]$$

L'equazione [1] è riportata graficamente nella figura 2.4, dove la $\Phi(x, 0)$ è rappresentata dal tratto continuo, mentre la linea tratteggiata rappresenta l'*inviluppo* del pacchetto, cioè la funzione

$$4A_0 \Delta\beta \frac{\sin \Delta\beta x}{\Delta\beta x}.$$

Si noti come la parte più importante del pacchetto sia quella compresa tra le ascisse $\pi/\Delta\beta$ e $-\pi/\Delta\beta$. Pertanto, se il pacchetto è composto di onde elementari molto raggruppate intorno al valore centrale del *numero d'onda* (o *costante di propagazione*) β_0 , esso è proporzionalmente "allargato" nello spazio (e viceversa). Se si prende (arbitrariamente) come misura della larghezza del pacchetto la distanza tra i due primi zeri B, B' dell'inviluppo, si ha

$$2\Delta x \cdot 2\Delta\beta = 4\pi, \quad [2]$$

che esprime quantitativamente la relazione inversa tra banda spaziale ($2\Delta\beta$) e larghezza ($2\Delta x$) del pacchetto. La [2] è una diretta conseguenza della relazione di

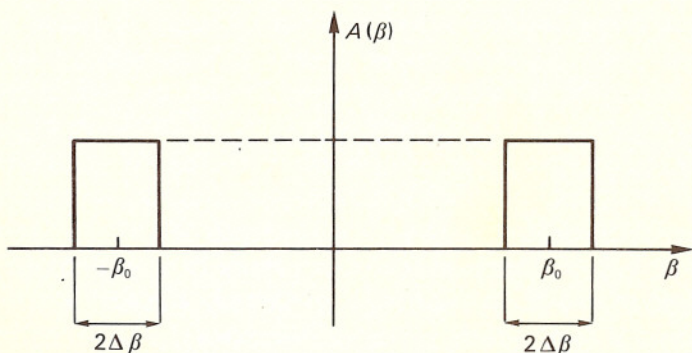


Figura 2.3
Banda spaziale del pacchetto d'onda.

N.B. :

$$[6] : \Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) e^{-i\beta x} e^{i\omega t} d\beta$$

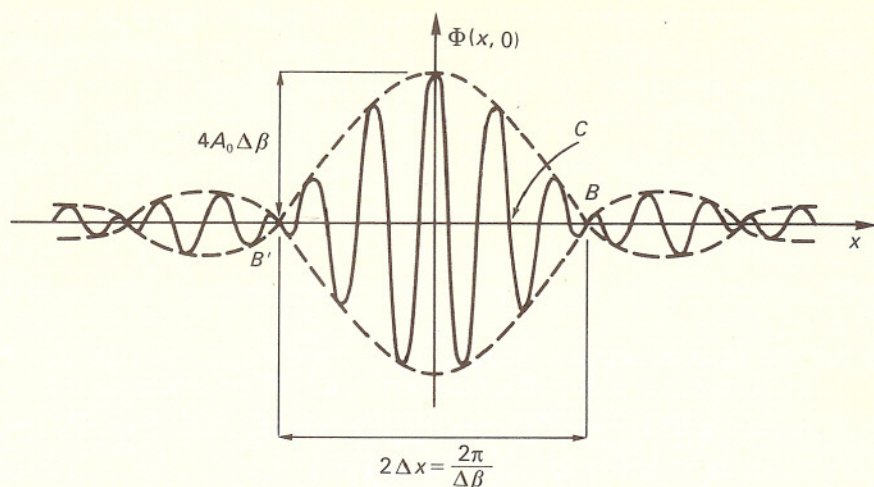


Figura 2.4

Rappresentazione del pacchetto d'onda nell'istante $t=0$.

trasformazione di Fourier tra $\Phi(x, 0)$ e $A(\beta)$; il valore di $\Delta\beta\Delta x$ dipende in generale dalla particolare forma della $A(\beta)$ e dalla definizione di banda; per $A(\beta)=A_0$ la costante è pari a 4π .

La figura 2.4 rappresenta la forma del pacchetto d'onda all'istante $t=0$; negli istanti successivi la configurazione dipende strettamente dal tipo di relazione di dispersione che si considera, e di conseguenza dalle caratteristiche del mezzo nel quale il pacchetto d'onda si propaga.

Se $\omega=c\beta$, sostituendo nella [6] (§ 2.2) si ha

$$\Phi(x, t) = 4A_0 \Delta\beta \cos[\beta_0(x-ct)] \frac{\sin[\Delta\beta(x-ct)]}{\Delta\beta(x-ct)}; \quad [3]$$

ne consegue che il pacchetto d'onda si sposta nel verso positivo dell'asse x con velocità c e senza deformarsi: non vi è infatti dispersione, perché le varie onde elementari si propagano con la stessa velocità.

Se invece ω è legato a β da una relazione non lineare, lo studio della propagazione del pacchetto d'onda si complica. Per studiare che cosa accade, può esser conveniente sviluppare in serie di potenze la funzione $\omega(\beta)$ nell'intorno di $\beta=\pm\beta_0$:

$$\omega(\beta) = \omega(\pm\beta_0) + \frac{\omega'(\pm\beta_0)}{1!} (\beta \mp \beta_0) + \frac{\omega''(\pm\beta_0)}{2!} (\beta \mp \beta_0)^2 + \dots$$

$$= \pm\omega_0 + \omega'_0 (\beta \mp \beta_0) \pm \frac{\omega''_0}{2} (\beta \mp \beta_0)^2 + \dots;$$

$$\omega_0 = \omega(\beta_0), \quad \omega'_0 = \omega'(\beta_0), \dots$$

dove si è supposta la funzione $\omega(\beta)$ reale (assenza di perdite) e dispari (in modo che sia reale la $\Phi(x, t)$), e l'apice indica l'operazione di derivata. Troncando lo sviluppo al secondo termine e sostituendo nell'integrale [6] (§ 2.2), si ottiene

$$\Phi(x, t) = \dot{A}_0 \exp[j(\omega_0 t - \beta_0 x)] \int_{-\Delta\beta}^{\Delta\beta} \exp[j\beta(\omega'_0 t - x)] d\beta + \text{c.c.}$$

dove la notazione "c.c." indica il complesso coniugato. Il calcolo dell'integrale fornisce

$$\Phi(x, t) = 4A_0 \Delta\beta \cos\left[\beta\left(x - \frac{\omega_0}{\beta_0} t\right)\right] \frac{\sin[\Delta\beta(x - \omega'_0 t)]}{\Delta\beta(x - \omega'_0 t)} \quad [4]$$

Il confronto tra la [3] (valida nel caso di mezzo non dispersivo) e la [4] è istruttivo; le due espressioni sono identiche, pur di sostituire a c

$$\frac{\omega_0}{\beta_0} = v_f \quad [5]$$

nell'espressione del coseno e

$$\omega'_0 = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\beta=\beta_0} = v_g \quad [6]$$

in quella della funzione sinc(u).

La [5] è la velocità di fase [10] (§ 2.2) calcolata per la pulsazione ω_0 di centro banda. Gli zeri del diagramma della figura 2.4 (ad esempio, il punto C) si spostano verso destra esattamente con questa velocità; in pratica ciò accade per tutti i punti del diagramma (*linea a tratto continuo*). Tuttavia l'ampiezza globale dell'oscillazione, data dall'involuppo, non si muove con questa velocità, bensì con quella di gruppo [6], come immediatamente si rileva analizzando l'espressione della funzione sinc(u) nella [4]. Spostandosi il pacchetto non si deforma, ma le oscillazioni del segnale slittano rispetto all'involuppo: un osservatore che si muovesse con velocità di gruppo v_g vedrebbe il segnale spostarsi con velocità $v_f - v_g$.

Il risultato precedente è stato ottenuto supponendo di poter trascurare i termini successivi al secondo nello sviluppo in serie della relazione di dispersione. Perché la [4] sia valida, dev'essere

$$\omega''_0 (\Delta\beta)^2 t \ll 1. \quad [7]$$

Per tempi molto lunghi, detta approssimazione non è accettabile, e si rende necessaria una valutazione più accurata dell'integrale [6] del paragrafo precedente, per la quale rimandiamo all'annotazione 2.3.1.

Annotazioni

2.3.1 Valutazione asintotica dell'espressione del pacchetto d'onda

Ci proponiamo di studiare la forma del pacchetto d'onda, la cui struttura è nota nell'intorno di $x=0$, $t=0$, al tendere all'infinito del tempo t e della distanza x . A tal fine, conviene porre l'integrale [6] (§ 2.2) nella forma seguente:

$$\Phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) \exp \left[i \left(\omega(\beta) - \beta \frac{x}{t} \right) t \right] d\beta \quad [8]$$

dove, più in generale, $A(\beta)$ è una funzione essenzialmente diversa da zero in due intorno $2 \Delta\beta \ll \beta_0$ a cavallo di $\pm\beta_0$, ma non necessariamente nulla al di fuori di essi.

Si tratta ora di valutare questo integrale, per $t \rightarrow \infty$, nell'ipotesi che x/t venga mantenuto costante. Il problema venne affrontato per la prima volta da lord Kelvin, il quale osservò che, per grandi per valori di t , l'integrando è una funzione molto rapidamente variabile con β , tranne che nelle vicinanze di punti β_s tali che

$$\frac{d}{d\beta} \left[\omega(\beta) - \beta \frac{x}{t} \right] = \omega'(\beta) - \frac{x}{t} = 0. \quad [9]$$

L'integrale [8] è dunque essenzialmente determinato dai valori assunti dall'integrando nelle vicinanze dei punti β_s ; infatti quando ci si scosta da essi, i valori positivi e negativi della parte reale e di quella immaginaria dell'integrando tendono a compensarsi, e il contributo all'integrale è trascurabile. Una tale approssimazione dell'integrale è detta *asintotica* (Jeffreys e Jeffreys, 1956).

La [9] mostra che l'integrale [8] è apprezzabilmente diverso da zero solo nell'intorno di valori di x e di t tali che

$$x = \omega'(\beta_s) t, \quad [10]$$

sempre che $A(\beta_s)$ sia apprezzabilmente diverso da zero. Pertanto, fissato il rapporto x/t , a formare il segnale nel punto x e all'istante t contribuiscono essenzialmente solo alcune delle soluzioni elementari [5] (§ 2.2) nelle quali il segnale stesso è scomponibile: precisamente quelle la cui *frequenza spaziale* β si trova nell'intorno del valore fissato dalla [10]. Le altre onde elementari, per via dell'interferenza, tendono ad annullarsi, e il loro contributo alla formazione del segnale è trascurabile. Se $\Delta\beta$ è molto piccolo, da un lato è $\omega'(\beta_s) \approx \omega'(\beta_0) = v_g$, dall'altro il segnale è apprezzabilmente diverso da zero solo in punti tali che $x \approx v_g t$; di nuovo si conclude che il pacchetto si sposta, nel suo complesso, con velocità di gruppo v_g .

Sviluppiamo in serie di potenze la relazione di dispersione nell'intorno di un punto β_s , soluzione della [9]:

$$\begin{aligned} \omega(\beta) &= \omega(\beta_s) + \frac{\omega'(\beta_s)}{1!} (\beta - \beta_s) + \frac{\omega''(\beta_s)}{2!} (\beta - \beta_s)^2 + \dots \\ &= \omega_s + \frac{x}{t} (\beta - \beta_s) + \frac{\omega_s''}{2} (\beta - \beta_s)^2 + \dots \end{aligned}$$

Perché l'integrale [8] sia reale, la fase dell'integrando dev'essere una funzione dispari di β . Pertanto i *punti stazionari* dell'integrando sono sempre in coppia: $\pm\beta_s$.

Limitandosi al solo $+\beta_s$ e sostituendo nell'integrale [8], si ottiene

$$\Phi_1(x, t) = \exp[j(\omega_s t - \beta_s x)] \int_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) \exp\left[j \frac{\omega_s''}{2} (\beta - \beta_s)^2 t\right] d\beta, \quad [11]$$

dove l'integrale è ancora esteso tra $(-\infty, +\infty)$ per quanto già osservato: i contributi per punti lontani da β_s sono trascurabili e per tale motivo si può porre $A(\beta) \simeq A(\beta_s)$. Nella [11] x e t non sono indipendenti, bensì legati dalla relazione $x = \omega_s' t$; nel caso di due soli punti stazionari, il segnale $\Phi(x, t)$ è dato dalla somma della [11] e della sua complessa coniugata. Si ha ancora

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, t) &\simeq \exp[j(\omega_s t - \beta_s x)] A(\beta_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[j \frac{\omega_s''}{2} t u^2\right] du \simeq \\ &\simeq \sqrt{\frac{2\pi}{|\omega_s''| t}} A(\beta_s) \exp\left[j\left(\omega_s t - \beta_s x + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}[\omega_s'']\right)\right], \end{aligned} \quad [12]$$

l'integrale è stato valutato asintoticamente, $\omega_s'' t \rightarrow \infty$ (pur essendo calcolabile esattamente; Gradshteyn e Ryzhik, 1965).

La [12] mostra che dopo un tempo sufficientemente lungo il pacchetto si deforma: la sua ampiezza è inversamente proporzionale alla radice quadrata del tempo, o della distanza (si ricordi che, nella [12], $t = x/\omega_s'$). Tale deformazione è trascurabile limitatamente a tempi (e distanze) per i quali l'approssimazione $\omega_0''(\Delta\beta)^2 t \ll 1$ è accettabile; non lo è più per tempi tali che $\omega_0''(\Delta\beta)^2 t \gg 1$, come richiesto nella valutazione asintotica. La deformazione del pacchetto indicata dalla [12] corrisponde a una diminuzione della intensità del segnale, che però non può essere attribuita a un fenomeno di dissipazione, perché si è supposto che il mezzo nel quale il segnale si propaga sia senza perdite. Pertanto, diminuendo l'intensità del segnale, il pacchetto deve necessariamente allargarsi, se l'energia totale associata al segnale deve mantenersi costante. La conclusione è che, nel propagarsi in un mezzo dispersivo, un pacchetto d'onda non cambia di forma in tempi brevi, al contrario, in tempi lunghi si allarga e si deforma, e una successione di impulsi tende a divenire meno riconoscibile. Si ha quindi una degradazione del contenuto informativo del segnale.

2.4 Linee di trasmissione (dominio del tempo)

Uno dei mezzi più semplici, e tra i primi a essere usati, per convogliare il segnale elettromagnetico in una direzione prefissata è la cosiddetta *linea di trasmissione*. Nella sua forma più semplice essa è costituita da due conduttori metallici paralleli (vedi fig. 2.5a) che talvolta possono essere incapsulati in un sostegno dielettrico (vedi fig. 2.5b). Un'altra forma comunemente adottata è quella del cosiddetto cavo coassiale (vedi fig. 2.5c), composto da un conduttore centrale coassiale con una calza metallica concentrica. La sezione trasversale del cavo coassiale è generalmente di tipo circolare, e talvolta ellittico; l'intercapedine tra i due conduttori può essere totalmente riempita con un materiale dielettrico, oppure la separazione tra i conduttori è assicurata da distanziatori dielettrici disposti a conveniente distanza lungo l'asse del cavo.

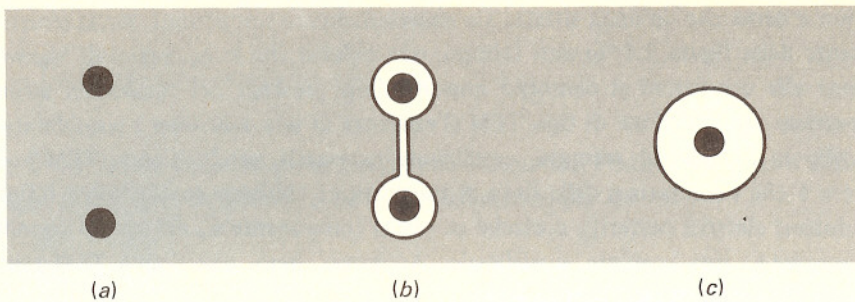


Figura 2.5

Sezioni di alcuni tipi di linee di trasmissione: (a) linea bipolare; (b) piattina; (c) cavo coassiale.

Lo studio delle possibili linee di trasmissione è riconducibile allo stesso tipo di equazioni; per semplicità, si considera nel seguito la linea di trasmissione bifilare (vedi fig. 2.6). La domanda che ci si pone è la seguente: quali sono le più semplici onde elettromagnetiche che tale sistema può far propagare?

Abbastanza semplice è il caso di un'onda *elettromagnetica trasversale* (TEM), caratterizzata da componenti secondo z identicamente nulle sia dei campi sia delle induzioni:

$$e_z = h_z = d_z = b_z = 0.$$

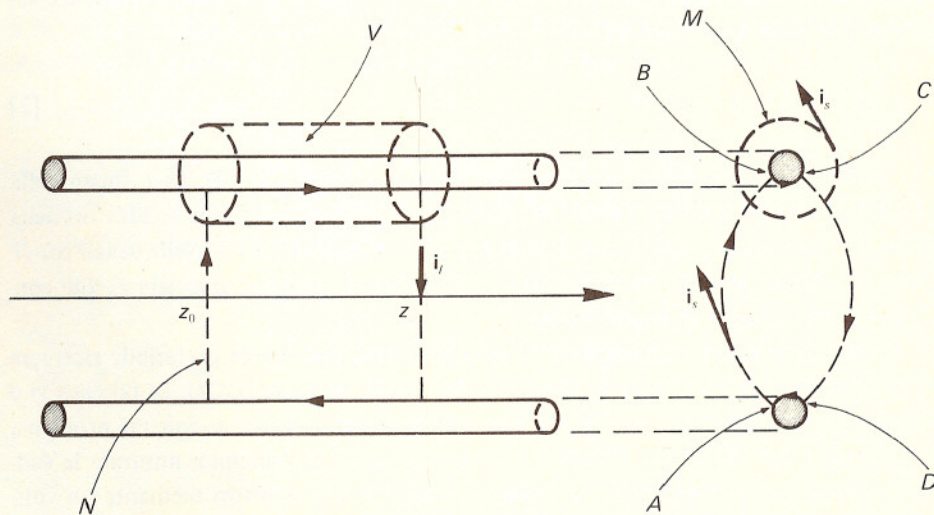


Figura 2.6

Linea di trasmissione bifilare.

Non è detto che un'onda siffatta sia necessariamente compatibile con la struttura guidante della figura 2.6; in altri termini, non è detto che le equazioni di Maxwell, insieme alle condizioni al contorno imposte dalla presenza dei conduttori bifilari, ammettano una soluzione di tipo TEM (l'esistenza di tale soluzione è considerata in dettaglio in 3.2.1). Ad esempio, condizione necessaria perché l'onda TEM possa esistere è che i conduttori della linea di trasmissione abbiano conducibilità infinita (conduttori elettrici perfetti), cosicché su essi la componente E_z del campo sia nulla, pur scorrendo una corrente superficiale. Ammesso, però, che l'onda TEM esista, seguono per essa interessanti proprietà.

Il calcolo della circuitazione del campo elettrico lungo il circuito $ABCD$ della figura 2.6 fornisce

$$\oint \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_s ds = 0,$$

dal momento che il flusso magnetico concatenato è nullo ($b_z = 0$); essendo nulla la circuitazione lungo i tratti BC e DA (conduttore elettrico perfetto), si ha

$$\int_A^B \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_s ds = \int_D^C \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_s ds = v. \quad [1]$$

La conclusione è che può essere univocamente definito, nel piano trasversale, un potenziale v , che in quanto tale è funzione *solo* di z e t , e non del percorso di integrazione.

In modo analogo è possibile calcolare la circuitazione del campo magnetico lungo il circuito M della figura 2.6, arbitrario, purché contenuto nel piano trasversale e abbracciante un solo filo; risulta

$$\oint \mathbf{h} \cdot \mathbf{i}_s ds = i, \quad [2]$$

dal momento che il flusso elettrico concatenato è nullo ($d_z = 0$). La i , flusso della densità lineare di corrente che scorre sulla superficie di uno dei due conduttori della linea di trasmissione, dipende anch'essa solo dalle coordinate z e t . Nelle usuali condizioni di funzionamento, in ogni sezione trasversale le correnti associate ai due conduttori sono uguali e di segno opposto.

Invece di studiare le equazioni relative ai campi, può essere preferibile ricercare quelle cui devono soddisfare la tensione $v(z, t)$ e la corrente $i(z, t)$. In tal caso vi è l'evidente vantaggio di avere a che fare con grandezze scalari e con un problema unidimensionale. E' inoltre possibile, almeno in linea di principio, misurare le suddette grandezze direttamente: la tensione v tra i due conduttori mediante un voltmetro, la corrente i mediante un amperometro.

Per trovare le suddette equazioni si può procedere come segue.

Calcoliamo anzitutto la circuitazione del campo elettrico lungo un circuito N i cui

tratti verticali giacciono nel piano trasversale (vedi fig. 2.6); risulta

$$\int_N \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_l \, dl = v(z) - v(z_0) = -\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t},$$

dove $\bar{\Psi}$ è il flusso concatenato dell'induzione magnetica. Posto $z = z_0 + \Delta z$ e detto Ψ il flusso per unità di lunghezza, si ha immediatamente, per $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad [3]$$

Successivamente, integrando l'equazione di continuità della corrente nel volume V (vedi fig. 2.6), si ha

$$\iiint_V \left[\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0,$$

cioè

$$i(z) - i(z_0) = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t},$$

dove $\bar{q}$ è la carica totale sul filo conduttore tra le ascisse z e z_0 e $\bar{\Phi}$ il flusso dell'induzione elettrica attraverso la superficie che limita il volume V . Anche per tale equazione, posto $z = z_0 + \Delta z$ e detti Φ e q il flusso e la carica per unità di lunghezza, si ha

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial i}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad [4]$$

Le [3] e [4] sono le equazioni cercate. Esse vanno completate dalle relazioni costitutive per il sistema considerato, quelle cioè tra i flussi (delle induzioni elettrica e magnetica) e tra le tensioni e correnti; per sistemi lineari non dispersivi si ha

$$q = \Phi = Cv; \quad \Psi = Li,$$

dove C è la *capacità per unità di lunghezza* (F/m) e L l'*induttanza per unità di lunghezza* (H/m) tra i due conduttori. Le equazioni delle linee di trasmissione si scrivono dunque, in forma equivalente,

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad [5]$$

$$\begin{cases} \frac{1}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases} \quad [6]$$

Il sistema [5] richiama subito il circuito equivalente a costanti concentrate della figura 2.7, dove la linea di trasmissione è stata suddivisa in tratti elementari di lunghezza Δz , caratterizzati da induttanza serie $L\Delta z$ e capacità parallela $C\Delta z$; le due equazioni corrispondono, in questo caso, ai principi di Kirchhoff applicati alle maglie e ai nodi.

Le equazioni [3] e [4] sono state ricavate con riferimento alla linea di trasmissione della figura 2.6, in cui L e C , *parametri* della linea, non variano con z (linea spazialmente omogenea) e nemmeno con t (linea stazionaria). Più in generale, i parametri potrebbero variare con z , con t , o con z e t . La variazione con z può essere ottenuta variando la distanza tra i conduttori, o variando (in un cavo coassiale) con z le caratteristiche (ad esempio la permittività) del dielettrico. Analogamente, la variazione con t si può ottenere variando nel tempo le caratteristiche del mezzo nel quale la linea è immersa. In pratica ciò si realizza disponendo, in parallelo tra i conduttori, diodi varactor, la cui capacità è controllabile mediante una tensione esterna di polarizzazione. Se la distanza tra i varactor è sufficientemente piccola rispetto alle variazioni spaziali del segnale che si propaga sulla linea, la capacità per unità di lunghezza della linea può essere approssimativamente assunta pari a C (capacità della linea non caricata dai varactor) più $NC_v(t)$ (capacità del singolo varactor $\times$ numero di varactor per unità di lunghezza). Si noti che il sistema [5] deriva dalle equazioni [3] e [4] nell'ipotesi che L e C non varino col tempo; lo stesso dicasi per il sistema [6] nell'ipotesi che L e C non varino con z .

Ricordiamo che alla base della validità delle equazioni [3] e [4] è l'ipotesi che la linea di trasmissione possa sostenere onde TEM. Questa ipotesi è verificata nel caso di una linea uniforme perfettamente conduttrice (vedi 3.2.1), ma non necessariamente nel caso di linee non uniformi.

Supponiamo ad esempio che la variazione di L e C con z sia conseguenza di una divaricazione dei conduttori, il cui asse pertanto non è più parallelo all'asse z . In tal caso si dimostra che onde TEM rispetto a z non sono più possibili: infatti sul conduttore metallico il campo elettrico, dovendo essere normale, possiede una compo-

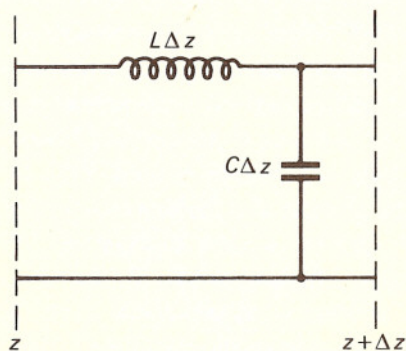


Figura 2.7
Circuito equivalente a costanti concentrate.

nente lungo z . Al contrario, una stratificazione del dielettrico lungo z è compatibile con l'esistenza di campi TEM.

Consideriamo ancora una variazione temporale dei parametri della linea ottenuta mediante variazione meccanica della loro distanza: il movimento delle cariche di segno opposto sui due conduttori della linea produce una radiazione elettromagnetica (vedi §§ 4.3 sg.), incompatibile in generale con l'ipotesi di campi TEM. Al contrario, l'uso di varactor in parallelo lungo la linea è compatibile, nei limiti sopra precisati, con l'ipotesi suddetta.

D'altra parte, se le variazioni spaziali e temporali di L e C sono sufficientemente dolci (rispetto alle analoghe variazioni delle grandezze che si propagano lungo la linea) si può ritenere con sufficiente approssimazione che le [3] e [4] descrivano correttamente l'andamento dei segnali lungo la linea.

Una linea si dice *temporalmente uniforme* se i suoi parametri L e C non variano nel tempo. Si vede subito dalla [5] che una possibile variazione temporale per v e i è del tipo

$$\begin{aligned} v(z, t) &= \text{Re} [V(z) \exp(j\omega t)] \\ i(z, t) &= \text{Re} [I(z) \exp(j\omega t)]. \end{aligned} \quad [7]$$

Sostituendo le [7] nella [5] si ha

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -j\omega LI \\ \frac{dI}{dz} = -j\omega CV \end{cases} \quad [8]$$

dove $V(z)$, $I(z)$ sono i fasori associati a $v(t)$, $i(t)$ rispettivamente. Queste ultime grandezze possono essere ricavate, conoscendo $V(z)$, $I(z)$, mediante il calcolo di un integrale di Fourier. Per la loro importanza pratica, le equazioni [8] (storicamente, *equazioni dei telegrafisti* o *dei telefonisti*) sono studiate in dettaglio nel paragrafo 2.5.

Una linea si dice *spazialmente uniforme* se i suoi parametri L e C non variano con la distanza; si vede subito dalle [6] che una possibile variazione spaziale per Φ e Ψ è del tipo $\exp(-j\beta z)$:

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \hat{\Phi}(t) \exp(-j\beta z) \\ \Psi(z, t) &= \hat{\Psi}(t) \exp(-j\beta z), \end{aligned} \quad [9]$$

dove $\hat{\Phi}(t)$, $\hat{\Psi}(t)$ sono nuovi fasori (nel dominio del numero d'onda) associati a $\Phi(z, t)$, $\Psi(z, t)$ rispettivamente; queste ultime grandezze possono essere anch'esse ricavate mediante il calcolo di un integrale di Fourier. Sostituendo le [9] nelle [6] si ha:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} = \frac{j\beta}{C} \hat{\Phi} \\ \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial t} = \frac{j\beta}{L} \hat{\Psi} \end{cases} \quad [10]$$

Si noti la perfetta simmetria tra il sistema [8] e il sistema [10].

Annotazioni

*2.4.1 Propagazione di un segnale lungo una linea uniforme

Partendo dalle equazioni [5], mediante derivazione e sostituzione si ottiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0.$$

Posto $c = 1/\sqrt{LC}$, ciascuna delle equazioni precedenti ha la forma dell'equazione d'onda [2] (§ 2.2); risulta pertanto

$$v(z, t) = v^+(z - ct) + v^-(z + ct)$$

$$i(z, t) = i^+(z - ct) + i^-(z + ct),$$

dove v^+ e v^- sono (prima della imposizione delle condizioni al contorno) funzioni arbitrarie, purché differenziabili; le i^+ , i^- sono funzioni note (come è mostrato in seguito) una volta che si conoscano v^+ e v^- .

La $v^+(z - ct)$ rappresenta un'onda di tensione che si propaga lungo il verso positivo dell'asse z , senza deformarsi, con velocità c ; essa è detta *onda diretta* (o *progressiva*). Analogamente, la $v^-(z + ct)$ rappresenta un'onda di tensione propagantesi nel verso negativo dell'asse z , ed è denominata *onda riflessa* (o *regressiva*).

L'onda riflessa è generata da discontinuità presenti lungo la linea; se quest'ultima è infinitamente lunga, l'onda riflessa è nulla. Ragionamenti simili valgono per le funzioni $i^+(z - ct)$ e $i^-(z + ct)$.

Si consideri la sola onda diretta. Posto $\xi = z - ct$, si ha dalla prima delle [5]

$$\frac{d}{d\xi} (v^+ - Lci^+) = 0,$$

il che significa che la quantità entro parentesi è costante con ξ ; di conseguenza

$$v^+ = Lci^+ + \text{costante}.$$

Se si cercano le sole soluzioni dinamiche della [5], la costante va posta uguale a zero:

$$v^+ = Lci^+ = \sqrt{\frac{L}{C}} i^+.$$

La grandezza

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad [11]$$

è detta *resistenza caratteristica* (molto spesso, *impedenza caratteristica*, e si usa allora il simbolo Z_0) della linea ed è misurata in ohm. Analogamente si trova che

$$v^- = -R_0 i^-.$$

2.4.2 Propagazione di un segnale lungo una linea uniforme terminata da un cortocircuito

Si è visto in 2.4.1 che la soluzione generale per la tensione e la corrente lungo la linea è la seguente:

$$\begin{cases} v(z, t) = v^+(z - ct) + v^-(z + ct) \\ R_0 i(z, t) = v^+(z - ct) - v^-(z + ct). \end{cases}$$

Se nel punto di ascissa $z = 0$ la linea è chiusa in cortocircuito, si ha

$$v(0, t) = v^+(-ct) + v^-(ct) = 0,$$

cioè

$$v^-(ct) = -v^+(-ct);$$

e la soluzione per la tensione e la corrente sulla linea è

$$\begin{cases} v(z, t) = v^+(z - ct) - v^+(-z - ct) \\ R_0 i(z, t) = v^+(z - ct) + v^+(-z - ct). \end{cases}$$

Si noti che l'onda riflessa di tensione è l'immagine speculare negativa, rispetto a $z = 0$, dell'onda diretta; questo permette una facile costruzione grafica della soluzione, com'è rappresentato nella figura 2.8 nel caso di un impulso di tensione.

2.4.3 Propagazione di un segnale lungo una linea di trasmissione uniforme chiusa sulla sua resistenza caratteristica R_0

Sia $z = 0$ l'ascissa in corrispondenza del carico R_0 . Dev'essere

$$v(0, t) = R_0 i(0, t).$$

Perché tale condizione sia verificata, occorre che sia

$$v(0, t) = v^+(0, t), \quad i(0, t) = i^+(0, t),$$

e cioè, per qualsiasi z ,

$$v(z, t) = v^+(z - ct), \quad R_0 i(z, t) = v^+(z - ct).$$

Su una linea chiusa sulla sua resistenza caratteristica si propaga dunque la sola onda diretta; la linea si dice *adattata*.

2.4.4 Propagazione di un segnale in presenza di discontinuità

(a) *Discontinuità spaziale*. Si consideri una linea di trasmissione di parametri L_1, C_1 per $z < 0$ e L_2, C_2 per $z > 0$. La soluzione generale per la tensione e corrente è del tipo:

$$\begin{cases} v_1(z \leq 0, t) = v_1^+(z - c_1 t) + v_1^-(z + c_1 t) \\ R_{01} i_1(z \leq 0, t) = v_1^+(z - c_1 t) - v_1^-(z + c_1 t) \\ v_2(z \geq 0, t) = v_2^+(z - c_2 t) + v_2^-(z + c_2 t) \\ R_{02} i_2(z \geq 0, t) = v_2^+(z - c_2 t) - v_2^-(z + c_2 t) \end{cases}$$

con

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}, \quad R_{01} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad R_{02} = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}.$$

Sulla discontinuità tensioni e correnti devono essere continue:

$$v_1(0, t) = v_2(0, t), \quad i_1(0, t) = i_2(0, t).$$

A grande distanza dai generatori possono esservi solo onde che si allontanano da essi, se i parametri della linea non cambiano più con la distanza (per la condizione di radiazione all'infinito; vedi 1.4.5). Se i generatori sono posti in $z < 0$, si può fare l'ipotesi che in $z > 0$ esista la sola onda diretta:

$$v_2^-(z + c_1 t) = 0.$$

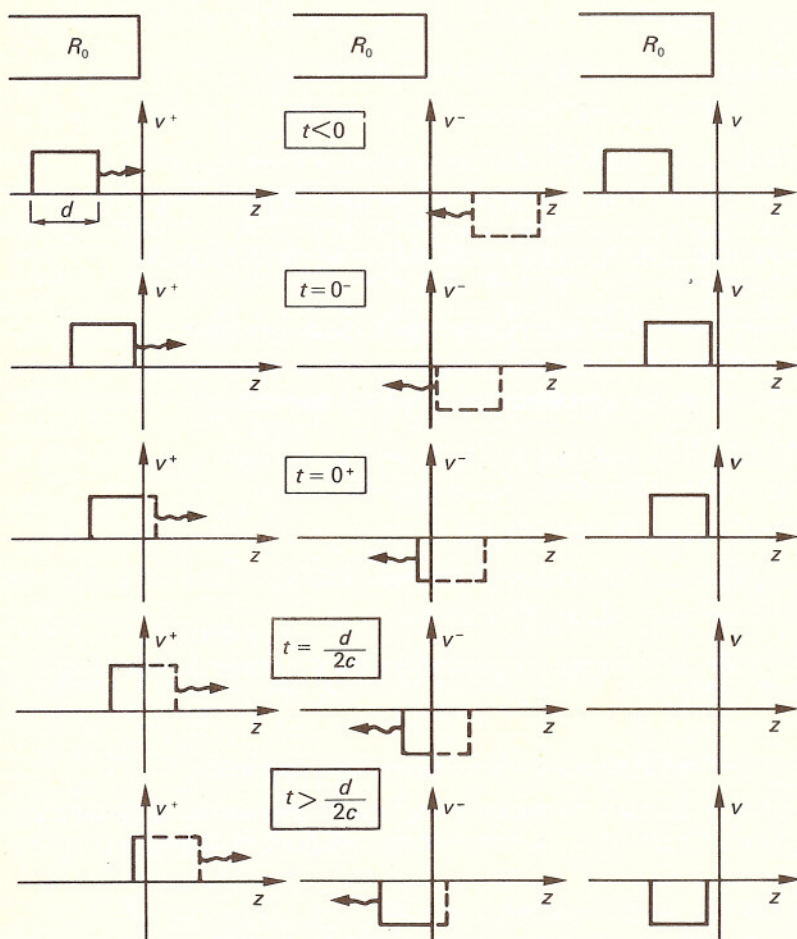


Figura 2.8

Tensione diretta (v^+), riflessa (v^-) e totale (v) per una linea di trasmissione chiusa in cortocircuito.

Pertanto nel punto $z=0$ dev'essere

$$\begin{cases} v_1^+(-c_1 t) + v_1^- (c_1 t) = v_2^+(-c_2 t) \\ v_1^+(-c_1 t) - v_1^- (c_1 t) = \frac{R_{01}}{R_{02}} v_2^+(-c_2 t); \end{cases}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} v_1^-(c_1 t) &= \frac{R_{02} - R_{01}}{R_{02} + R_{01}} v_1^+(-c_1 t) \\ v_2^+(-c_2 t) &= \frac{2R_{02}}{R_{02} + R_{01}} v_1^+(-c_1 t). \end{aligned}$$

La presenza della discontinuità spaziale nella linea di trasmissione origina dunque un'onda riflessa in $z < 0$:

$$v_1^-(z + c_1 t) = \frac{R_{02} - R_{01}}{R_{02} + R_{01}} v_1^+(-z - c_1 t).$$

(b) *Discontinuità temporale.* Si consideri una linea di trasmissione di parametri L_1 , C_1 per $t < 0$ e L_2 , C_2 per $t > 0$. La soluzione generale per i flussi delle induzioni magnetica ed elettrica è, per le [6],

$$\begin{cases} \Psi_1(z, t \leq 0) = \Psi_1^+(z - c_1 t) + \Psi_1^-(z + c_1 t) \\ R_{01} \Phi_1(z, t \leq 0) = \Psi_1^+(z - c_1 t) - \Psi_1^-(z + c_1 t) \\ \Psi_2(z, t \geq 0) = \Psi_2^+(z - c_1 t) + \Psi_2^-(z + c_2 t) \\ R_{02} \Phi_2(z, t \geq 0) = \Psi_2^+(z - c_1 t) - \Psi_2^-(z + c_2 t). \end{cases}$$

Nell'istante $t=0$ i flussi devono essere continui:

$$\Psi_1(z, 0) = \Psi_2(z, 0); \quad \Phi_1(z, 0) = \Phi_2(z, 0).$$

Se i generatori sono stati attivati in un istante $t < 0$ e sono locati in $z < 0$, si può supporre, in base agli stessi ragionamenti del caso (a), che per $t < 0$ e in $z > 0$ esista la sola onda diretta:

$$\Psi_1^-(z + c_1 t) = 0.$$

Pertanto, le condizioni in $t=0$ richiedono che sia

$$\begin{cases} \Psi_1^+(z) = \Psi_2^+(z) + \Psi_2^-(z) \\ \frac{R_{02}}{R_{01}} \Psi_1^+(z) = \Psi_2^+(z) - \Psi_2^-(z); \end{cases}$$

di conseguenza

$$\begin{aligned} \Psi_2^+(z) &= \frac{R_{01} + R_{02}}{2R_{01}} \Psi_1^+(z) \\ \Psi_2^-(z) &= \frac{R_{01} - R_{02}}{2R_{01}} \Psi_1^+(z). \end{aligned}$$

Anche l'accadere della discontinuità temporale sulla linea di trasmissione provoca



la nascita di un'onda riflessa per $t > 0$:

$$\Psi_2^-(z + c_2 t) = \frac{R_{01} - R_{02}}{2R_{01}} \Psi_1^+(z + c_2 t).$$

2.4.5 Propagazione su una linea di trasmissione uniforme con piccole perdite

Nell'effettiva realizzazione di una linea di trasmissione, alcune delle ipotesi su cui si fonda la deduzione delle equazioni [3] e [4] sono verificate solo approssimativamente. In particolare, i conduttori della linea sono imperfetti; in altri termini, la loro conducibilità è alta, ma non infinita. Analogamente, un dielettrico (che non sia l'aria) interposto tra i due conduttori presenta ancora una conducibilità, magari molto piccola, ma pur sempre diversa da zero; oppure ha perdite per isteresi dielettrica, anche queste piccole, ma finite.

Il circuito equivalente della figura 2.7 suggerisce un modo per tener conto di tutto ciò. Detta R la resistenza serie per unità di lunghezza (Ω/m) e G la conduttanza derivata, sempre per unità di lunghezza (S/m), della linea, basta inserire nel circuito equivalente della figura 2.7 gli elementi concentrati $R\Delta z$ e $G\Delta z$ nel modo illustrato nella figura 2.9. Il sistema [5] si trasforma nel seguente:

$$\begin{cases} -\frac{\partial v}{\partial z} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri \\ -\frac{\partial i}{\partial z} = C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv. \end{cases} \quad [12]$$

Le equazioni [12], pur essendo da un lato più realistiche, in quanto tengono conto delle inevitabili perdite sulle linee di trasmissione, costituiscono anch'esse delle approssimazioni. Infatti, come già notato, l'imperfetta conducibilità dei conduttori porta a escludere l'ipotesi dell'esistenza di una pura propagazione TEM. Ai fini pratici, però, le [12] sono accettabili se i termini Ri e Gv sono molto piccoli rispetto a $L\partial i/\partial t$ e $C\partial v/\partial t$ rispettivamente.

Vogliamo ora studiare l'andamento di tensione e corrente su una linea descritta dalle [12], nell'ipotesi che $G=0$. Derivando rispetto a z la seconda delle [12], e sostituendo, nell'equazione che così si ricava, l'espressione di $\partial v/\partial z$ data dalla prima, si ha

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - RC \frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad [13]$$

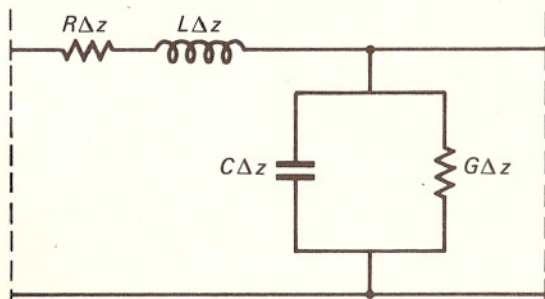


Figura 2.9

che differisce dall'equazione analoga data in 2.4.1 (linea senza perdite) per la presenza dell'ultimo termine al primo membro. Se la linea è infinitamente lunga, o adattata, si può ipotizzare una soluzione del tipo

$$i(z, t) = i^+(z - ct) f(z, t),$$

dove $i^+(z - ct)$ è la soluzione dell'equazione in assenza di perdite e $f(z, t)$ è una funzione incognita, lentamente variabile con z e ct : in altri termini, si cerca una soluzione *perturbativa* rispetto a quella che si avrebbe in assenza di perdite.

Sostituendo la precedente espressione nella [13], trascurando le derivate seconde di $f(z, t)$ (per la supposta variazione lenta) e notando che $\partial i^+ / \partial t = -c \partial i^+ / \partial z$, si ottiene

$$\frac{\partial i^+}{\partial t} \left[2 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{R}{R_0} f \right] - \frac{1}{c} \frac{R}{R_0} i^+ \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Una possibile soluzione di tale equazione è quella definita dalle relazioni

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$2 \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{R}{R_0} f = 0,$$

che forniscono subito la soluzione

$$f = \exp(-\alpha z), \quad \alpha = \frac{R}{2R_0}; \quad [14]$$

se ne deduce che l'onda di corrente si attenua esponenzialmente nella sua propagazione lungo l'asse z , con una costante di attenuazione data dalla [14]. Posto poi

$$v(z, t) = v^+(z - ct) \exp(-\alpha z),$$

sostituendo tale espressione nella prima delle [12] e trascurando i termini di ordine α , si ha

$$v(z, t) = R_0 i^+(z - ct) \exp(-\alpha z).$$

L'onda di tensione va dunque incontro alle stesse vicissitudini di quella di corrente.

2.5 Linee di trasmissione (dominio della frequenza)

In questo paragrafo si considerano linee di trasmissione con eccitazione sinusoidale. Questo studio è utile per due motivi. Per prima cosa, la conoscenza della soluzione sinusoidale permette lo studio di eccitazioni arbitrarie nel tempo, per il caso di linee i cui parametri costitutivi siano stazionari (le più comuni in pratica). Inoltre, molto spesso la banda dei segnali trasmessi è sufficientemente piccola, sicché la conoscenza del comportamento del segnale al centro banda fornisce già la maggior parte delle informazioni necessarie per il corretto dimensionamento della linea.

Il punto di partenza per lo studio delle linee di trasmissione nel dominio della frequenza è il sistema di equazioni [8] (§ 2.4). Derivando rispetto a z la prima di

tali equazioni e sostituendo nell'equazione trovata l'espressione di dI/dz data dalla seconda, si ottiene

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + \omega^2 LC V = 0; \quad [1]$$

analogamente, derivando la seconda equazione e sostituendo nella nuova equazione l'espressione di dV/dz data dalla prima, si ottiene

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + \omega^2 LC I = 0. \quad [2]$$

Posto

$$\omega^2 LC = \beta^2, \quad [3]$$

la soluzione delle [1], [2] è la seguente:

$$V(z) = V^+ \exp(-j\beta z) + V^- \exp(j\beta z) \quad [4]$$

$$I(z) = I^+ \exp(-j\beta z) + I^- \exp(j\beta z). \quad [5]$$

Le costanti V^+ , V^- , I^+ , I^- non sono tra loro indipendenti. Infatti, sostituendo l'espressione data dalla [5] nella seconda delle [8] (§ 2.4) risulta

$$R_0 I^+ = V^+, \quad -R_0 I^- = V^-,$$

cosicché la [5] può essere riscritta come segue:

$$R_0 I(z) = V^+ \exp(-j\beta z) - V^- \exp(j\beta z). \quad [6]$$

Si consideri ora l'onda $V^+ \exp(-j\beta z)$. Posto

$$V^+ = |V^+| \exp(j\nu),$$

questa onda è rappresentata, nel dominio del tempo, dall'espressione

$$v^+(z, t) = |V^+| \cos(\omega t - \beta z + \nu).$$

Si riconosce subito che l'onda ha un periodo temporale

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e un periodo spaziale

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta};$$

la grandezza β è detta *costante di propagazione*; λ , *lunghezza d'onda*.

L'equazione di dispersione del sistema è quindi la [3]. La curva

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \beta$$

è una retta (vedi fig. 2.10); in base ai risultati del paragrafo 2.3, la linea di trasmissione (in assenza di perdite) non è dispersiva; notiamo anche che la curva $\omega = \omega(\beta)$ (*diagramma di Brillouin*) fornisce, già a prima vista, una quantità di informazioni preziose sulla risposta in frequenza del sistema.

L'onda $v^+(z, t)$ assume gli stessi valori in istanti t_1, t_2 e in punti di ascissa z_1, z_2 tali che

$$\omega t_1 - \beta z_1 = \omega t_2 - \beta z_2.$$

Posto $z_2 = z_1 + \Delta z$, $t_2 = t_1 + \Delta t$, si verifica immediatamente che l'onda si sposta con velocità

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

nel verso positivo dell'asse z ; la costante V^+ è dunque il valore del fasore dell'onda diretta nel punto di ascissa $z=0$. Analogamente, V^- è il valore del fasore dell'onda riflessa nel punto di ascissa $z=0$.

La soluzione [4] e [6] per il sistema [8] (§ 2.4) mette in luce gli aspetti del segnale legati alla propagazione; in essa il segnale stesso risulta scomposto in onda diretta e in onda riflessa. Per questo motivo, tale rappresentazione è detta *soluzione di tipo viaggiante*. Tuttavia essa non è l'unica: infatti, sviluppando gli esponenziali complessi in funzioni circolari, si ha la rappresentazione alternativa

$$\begin{cases} V(z) = V_0 \cos \beta z - j R_0 I_0 \sin \beta z \\ I(z) = I_0 \cos \beta z - j \frac{V_0}{R_0} \sin \beta z, \end{cases} \quad [7]$$

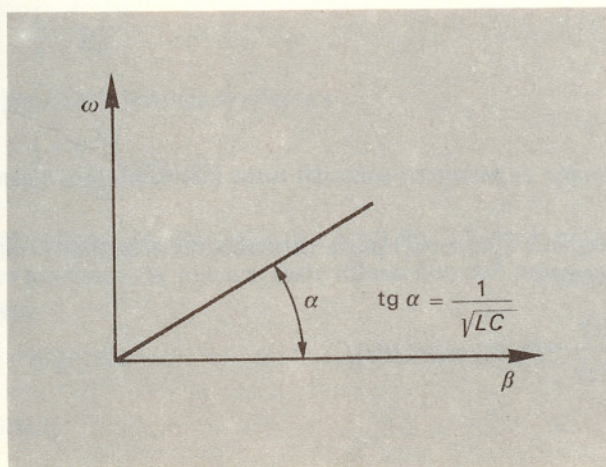


Figura 2.10

Diagramma di Brillouin per una linea di trasmissione senza perdite.

ove

$$V_0 = V^+ + V^- = V(0),$$

è il valore del fasore della tensione nel punto di ascissa $z=0$, e

$$I_0 = \frac{V^+ - V^-}{R_0} = I(0),$$

è il valore del fasore della corrente, ancora all'ascissa $z=0$. La rappresentazione [7] è detta *soluzione di tipo stazionario* e mette in luce la distribuzione di tensione e corrente che si misura sulla linea. Si noti che in ambedue i tipi di rappresentazione i parametri costitutivi della linea, L e C , non appaiono più esplicitamente, bensì attraverso la costante di propagazione

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

e la resistenza caratteristica

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

I parametri L e C vengono tradizionalmente (e arbitrariamente) chiamati *primari*, e i parametri β e R_0 , *secondari*. Questo perché a bassa frequenza è naturale parlare di induttanze e capacità come di parametri primari. Storicamente è vero che le equazioni [8] (§ 2.4) sono state ottenute partendo dallo schema equivalente della figura 2.7 (circuiti a costanti concentrate, bassa frequenza) e non dalle equazioni di Maxwell; tuttavia, esse possono immediatamente essere riscritte utilizzando i parametri β e R_0 :

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\beta R_0 I \\ -\frac{dI}{dz} = j\frac{\beta}{R_0} V \end{cases}$$

il che mostra che le due coppie di parametri sono del tutto intercambiabili e hanno la stessa dignità.

La soluzione di tipo viaggiante ([4] e [6]) porta naturalmente a definire i *coefficienti di riflessione, di tensione*:

$$\Gamma_V(z) = \frac{V^- \exp(j\beta z)}{V^+ \exp(-j\beta z)} = \Gamma_V(0) \exp(2j\beta z), \quad [8]$$

e di corrente:

$$\Gamma_I(z) = \frac{I^- \exp(j\beta z)}{I^+ \exp(-j\beta z)} = \Gamma_I(0) \exp(2j\beta z).$$

Si nota subito che

$$\Gamma_V(z) = -\Gamma_I(z).$$

(Data la semplice relazione tra Γ_V e Γ_I , ci si può riferire sempre al solo coefficiente di riflessione di tensione, e indicarlo solo con Γ .)

Un altro parametro molto usato nella tecnica delle linee di trasmissione (e in semplice relazione con il coefficiente di riflessione) è il *rapporto d'onda stazionaria* ROS (o anche, VSWR, dall'inglese *Voltage Standing Wave Ratio*), cioè il rapporto tra il massimo e il minimo del modulo della tensione lungo la linea:

$$\text{ROS} = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}.$$

E' interessante ricercare se vi siano limitazioni ai valori che il coefficiente di riflessione e il rapporto d'onda stazionaria possono assumere. A tal fine, calcoliamo la potenza (complessa) nel punto di ascissa z ; come si dimostra in 3.2.1, essa è data da

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z),$$

risultato peraltro intuitivo; sostituendo a V e I le espressioni [4] e [6] e utilizzando il coefficiente di riflessione, si ha

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0} (1 - |\Gamma(z)|^2) + \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0} (\Gamma(z) - \Gamma^*(z)).$$

In questa espressione, il primo termine al secondo membro corrisponde alla potenza reale, mentre il secondo rappresenta la potenza reattiva. Per la potenza reale,

$$\frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0}$$

rappresenta la potenza incidente e

$$\frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0} |\Gamma(z)|^2$$

quella riflessa. Se alla destra di z (vedi fig. 2.6 per l'orientamento dell'asse z) non vi sono generatori, la potenza reale riflessa non può superare quella incidente; di conseguenza

$$|\Gamma(z)| \leq 1$$

e quindi

$$\text{ROS} \geq 1.$$

La soluzione di tipo stazionario [7] porta naturalmente a definire l'*impedenza di*

ingresso della linea nel punto di ascissa z :

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0 \cos \beta z - j R_0 I_0 \sin \beta z}{I_0 \cos \beta z - j \frac{V_0}{R_0} \sin \beta z} = \\ &= R_0 \frac{Z(0) - j R_0 \operatorname{tg} \beta z}{R_0 - j Z(0) \operatorname{tg} \beta z}, \end{aligned} \quad [9]$$

dove

$$Z(0) = \frac{V_0}{I_0}$$

è l'impedenza di ingresso all'ascissa $z=0$. (Può essere utile talvolta introdurre anche l'ammittenza di ingresso: $Y(z) = 1/Z(z)$.)

L'impedenza d'ingresso è in generale data da un numero complesso

$$Z(z) = R(z) + jX(z).$$

Anche in questo caso è utile mettere in relazione l'impedenza d'ingresso con la potenza (complessa) nel punto z :

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} Z(z) |I(z)|^2 = \frac{1}{2} R(z) |I(z)|^2 + j \frac{1}{2} X(z) |I(z)|^2.$$

Se alla destra del punto di ascissa z non vi sono generatori, la potenza reale dev'essere non negativa; di conseguenza $R(z) \geq 0$: si ritrova, nel caso delle linee di trasmissione, una ben nota proprietà della resistenza di un elemento passivo a parametri concentrati. Ovviamente, essa non dipende dall'orientamento dell'asse z , e di conseguenza l'impedenza nel verso negativo dell'asse z dev'essere definita come $-V(z)/I(z)$. Infatti, se i generatori sono tutti alla sinistra del punto di ascissa z , la resistenza risulta negativa, il che è di nuovo coerente con le proprietà dei circuiti a costanti concentrate, perché in questo caso la resistenza d'ingresso è quella di un sistema attivo, e non passivo.

Nel seguito, quando non vi sia motivo di confusione, si indica con $Z(z)$ l'impedenza di ingresso nel verso positivo dell'asse z ; in caso contrario vengono usati due diversi simboli: uno per l'impedenza di ingresso nel verso positivo dell'asse z ,

$$\vec{Z}(z) = \frac{V(z)}{I(z)};$$

uno per quella nel verso negativo,

$$\overleftarrow{Z}(z) = -\frac{V(z)}{I(z)}.$$

Come le due rappresentazioni, la viaggiante e la stazionaria, non sono tra loro indi-

pendenti, così anche il coefficiente di riflessione e l'impedenza d'ingresso sono deducibili l'uno dall'altra, e viceversa. Si ha infatti

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+}{I^+} \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} = R_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad [10]$$

o anche

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - R_0}{Z(z) + R_0} \quad [11]$$

Annotazioni

*2.5.1 Tensione e corrente su una linea di trasmissione chiusa in cortocircuito

Scegliamo il punto di ascissa $z=0$ in corrispondenza del cortocircuito (vedi fig. 2.11); risulta

$$V(0) = V_0 = 0.$$

Sostituendo tale valore nella soluzione [7], si ha

$$\begin{cases} V(z) = -jR_0 I_0 \sin \beta z = jR_0 I_0 \sin \beta d \\ I(z) = I_0 \cos \beta z = I_0 \cos \beta d, \end{cases}$$

dove $d = -z$ è la distanza dal cortocircuito. L'andamento dei moduli della tensione e della corrente è dato, nella figura, in funzione dell'unica costante I_0 , il cui valore ovviamente dipende dall'eccitazione (non specificata) della linea.

La potenza nel punto di ascissa z è data da

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} jR_0 |I_0|^2 \sin \beta d \cos \beta d$$

ed è, com'era da aspettarsi, tutta reattiva.

L'impedenza di ingresso nel punto di ascissa z è data dalla [9], con $Z(0) = 0$:

$$Z(z) = -jR_0 \tan \beta z = jR_0 \tan \beta d = jX,$$

ed è puramente reattiva. L'andamento di X in funzione di z è riportato nella figura; si noti come, al variare di d , la linea chiusa in cortocircuito si comporti come un carico di tipo induttivo ($X > 0$) o capacitivo ($X < 0$). A distanze $\lambda/4, 3\lambda/4, \dots$ dal carico il cortocircuito terminale è trasformato in un circuito aperto. Da questo punto di vista, la linea può considerarsi come un trasformatore di impedenza.

2.5.2 Tensione e corrente su una linea aperta all'estremo terminale (esercizio)

Ripetere gli sviluppi esposti in 2.5.1 per questa nuova condizione di carico della linea di trasmissione.

2.5.3 Tensione e corrente su una linea chiusa sulla sua resistenza caratteristica (esercizio)

Vedi 2.5.2.

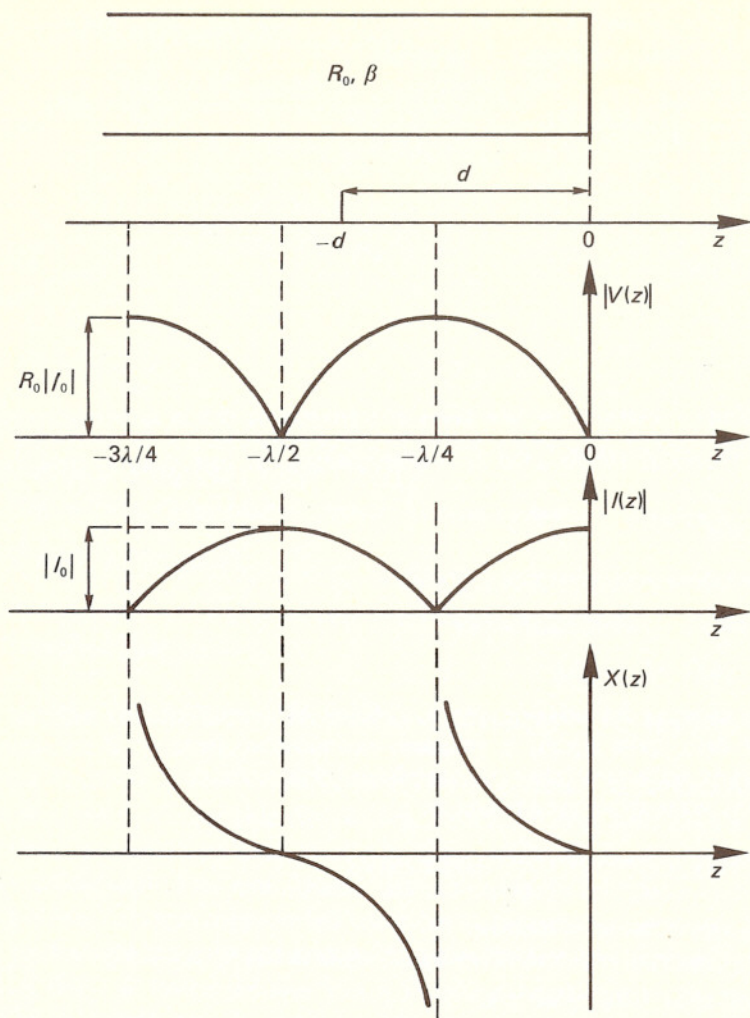


Figura 2.11

2.5.4 Proprietà trasformatrici di una linea chiusa su un carico generico Z_c (esercizio)

Studiare l'andamento della impedenza di ingresso della linea al variare del carico e della distanza da questo, in particolare per un carico puramente resistivo o reattivo.

2.5.5 Tensione e corrente su una linea chiusa su una induttanza L_c

Scegliamo il punto di ascissa $z = 0$ in corrispondenza del carico; risulta

$$V(0) = V_0 = j\omega L_c I(0) = j\omega L_c I_0.$$

La soluzione in termini di onde stazionarie è dunque

$$\begin{cases} V(z) = jI_0(\omega L_c \cos \beta z - R_0 \sin \beta z) \\ I(z) = I_0 \left(\cos \beta z + \frac{\omega L_c}{R_0} \sin \beta z \right), \end{cases}$$

come si vede subito dalle [7]. Se invece si preferisce avere per la soluzione una rappresentazione di tipo viaggiante, conviene calcolare il coefficiente di riflessione sul carico; dalla [11] si deduce che

$$\Gamma(0) = \Gamma_c = \frac{j\omega L_c - R_0}{j\omega L_c + R_0};$$

e dalle [4], [6]

$$\begin{cases} V(z) = V^+ \left[\exp(-j\beta z) + \frac{j\omega L_c - R_0}{j\omega L_c + R_0} \exp(j\beta z) \right] \\ R_0 I(z) = V^+ \left[\exp(-j\beta z) - \frac{j\omega L_c - R_0}{j\omega L_c + R_0} \exp(j\beta z) \right]. \end{cases}$$

La soluzione di tipo viaggiante è, per questo esempio, particolarmente utile se si vuole studiare l'andamento di tensioni e correnti con variazioni arbitrarie nel tempo:

$$v(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(z, \omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

(similmente si procede per $i(z, t)$).

Supponiamo ora che la tensione incidente sia un gradino di ampiezza V_0 :

$$V_0 U\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

Nel dominio della frequenza si ha¹

$$V(z, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 U\left(t - \frac{z}{c}\right) \exp(-j\omega t) dt = \frac{V_0}{j\omega} \exp\left(-j\frac{\omega}{c} z\right);$$

ne consegue

$$V^+ = \frac{V_0}{j\omega}, \quad \frac{\omega}{c} = \beta = \omega \sqrt{LC}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

L'onda riflessa di tensione è data da

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_0}{j\omega} \frac{j\omega L_c - R_0}{j\omega L_c + R_0} \exp\left[j\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right] d\omega =$$

¹ Si considera la trasformata di Fourier come limite di quella di Laplace per evitare l'uso della trasformata di Fourier generalizzata che, in questo caso, porterebbe solo a un appesantimento delle notazioni.

$$= \frac{1}{2\pi} V_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{j\omega} + \frac{2L_c}{j\omega L_c + R_0} \right] \exp \left[j\omega \left(t + \frac{z}{c} \right) \right] d\omega =$$

$$= V_0 U \left(t + \frac{z}{c} \right) \left\{ -1 + 2 \exp \left[-\frac{R_0}{L_c} \left(t + \frac{z}{c} \right) \right] \right\}.$$

La tensione totale è la somma di quella diretta e di quella riflessa; quest'ultima, a sua volta, è data dalla somma di due termini. Singolarmente ciascun termine, e poi la tensione totale, sono riportati nella figura 2.12 in funzione di z e per vari valori di t . Quando l'onda diretta di tensione incide sull'induttanza ($t=0$), la tensione riflessa è uguale e dello stesso segno, e la tensione totale sul carico è doppia rispetto a quella incidente. Il motivo è che, variando bruscamente la corrente nell'induttanza, al

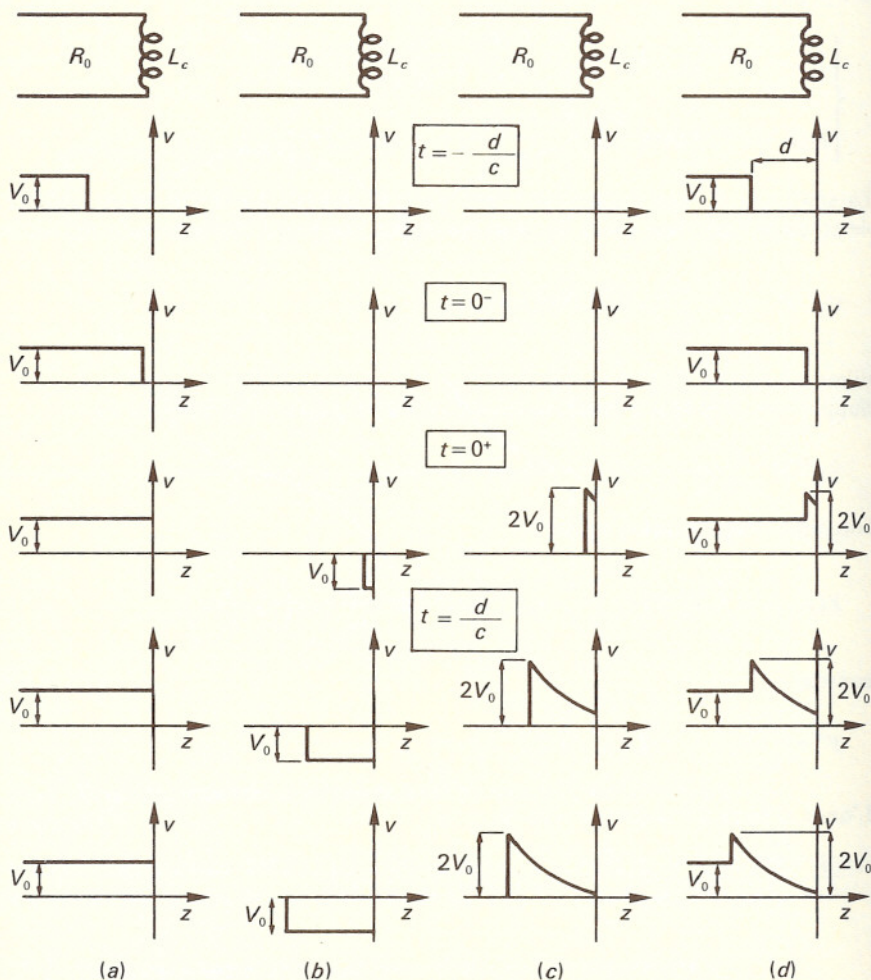


Figura 2.12

(a) Andamento della tensione diretta; (b) primo e (c) secondo termine della tensione riflessa; (d) tensione totale al variare di z , per vari valori di t .

tempo $t=0$ il carico si comporta come un circuito aperto. Al passare del tempo, tuttavia, la variazione della corrente dell'induttanza si attenua; sul carico, la tensione riflessa diminuisce e tende, per tempi sempre maggiori, a cancellare la tensione incidente: questo perché, a regime, l'induttanza si comporta come un cortocircuito. In tal modo si spiegano i diagrammi della figura 2.12, in particolare il picco iniziale dell'onda riflessa di tensione che si propaga, con velocità c , nel verso negativo dell'asse z .

I diagrammi relativi alla corrente si possono tracciare facilmente; la loro spiegazione è simile a quella relativa ai diagrammi della tensione.

2.5.6 Tensione e corrente lungo una linea chiusa su una capacità C_c (esercizio)

Ripetere gli sviluppi esposti in 2.5.5 per questa nuova condizione di carico.

2.5.7 Propagazione su una linea di trasmissione con piccole perdite

In base alle considerazioni svolte in 2.4.5, le equazioni delle linee di trasmissione con piccole perdite sono, nel dominio della frequenza, le trasformate delle [12] (§ 2.4):

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\omega LI + RI \\ -\frac{dI}{dz} = j\omega CV + GV. \end{cases} \quad [12]$$

Per $\omega \neq 0$, le equazioni [12] possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\omega \left(L + \frac{R}{j\omega} \right) I \\ -\frac{dI}{dz} = j\omega \left(C + \frac{G}{j\omega} \right) V, \end{cases}$$

il che mostra come la presenza di perdite corrisponda, *formalmente*, a rendere complesse l'induttanza

$$L' = L + \frac{R}{j\omega} = L - j \frac{R}{\omega}$$

e la capacità

$$C' = C + \frac{G}{j\omega} = C - j \frac{G}{\omega}$$

per unità di lunghezza, nel sistema di equazioni [8] (§ 4.2).

Le soluzioni del sistema [12] sono allora le stesse [4], [6] e [7], pur di attribuire alla linea una costante di propagazione complessa

$$k = \omega \sqrt{L' C'}$$

e una impedenza caratteristica (anch'essa complessa)

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}.$$

La linea si dice *con piccole perdite* se

$$\frac{R}{\omega} \ll L, \quad \frac{G}{\omega} \ll C;$$

in tal caso, sviluppando in serie la radice quadrata, si ha

$$k \approx \omega \sqrt{LC} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L} - j \frac{G}{2\omega C} \right) = \omega \sqrt{LC} - j \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_0} + GR_0 \right) = \beta - j\alpha,$$

$$Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{R}{2\omega L} + j \frac{G}{2\omega C} \right) = R_0 - j \frac{1}{2\beta} \left(R - GR_0^2 \right) = R_0 - jX_0.$$

La presenza di perdite rende complesse sia la costante di propagazione, sia l'impedenza caratteristica. L'onda diretta si propaga attenuandosi lungo l'asse z , secondo la legge

$$\exp(-j\beta z) \exp(-\alpha z),$$

dove

$$\alpha = \frac{R}{2R_0} + \frac{GR_0}{2}$$

è detta *costante di attenuazione* (N/m); si noti come l'espressione di α sia in accordo con quanto risulta in 2.4.5 relativamente al caso $G=0$. Anche se α è molto piccola, il termine $\exp(-\alpha z)$ non può essere trascurato se z è sufficientemente grande.

Il rapporto

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = R_0 - jX_0$$

in una linea con piccole perdite è complesso. Al prim'ordine ($X_0 \ll R_0$), questo comporta solo un piccolo sfasamento tra i fasori V^+ e I^+ , che risulta costante e indipendente da z . Se le perdite sono molto piccole, si può porre

$$\frac{V^+}{I^+} \approx R_0,$$

cioè considerare ancora reale l'impedenza caratteristica. Questa condizione può essere realizzata esattamente se vi è opportuna compensazione tra perdite serie e parallelo lungo la linea:

$$\frac{R}{R_0} = GR_0, \quad [13]$$

o anche

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}.$$

Si verifica immediatamente che, in questo caso, Z_0 è sempre reale e uguale a $\sqrt{L/C}$, anche se le perdite non sono piccole. La relazione [13] esprime la cosiddetta *condizione di Heaviside*.

2.5.8 Interconnessioni di più linee di trasmissione (esercizio)

Si consideri il sistema di linee di trasmissione della figura 2.13, dove sono rappresentate simbolicamente tre linee di trasmissione, di resistenze caratteristiche R_0 , R_{01} , R_{02} , delle quali due sono chiuse rispettivamente sui carichi R_1 e Z_2 . La distribuzione della tensione e della corrente sui tre tronchi di linea può essere facilmente determinata prendendo come origine delle coordinate, per ciascuna linea, il comune punto N , e scrivendo la soluzione (stazionaria) per ciascuno dei tronchi, in termini quindi di costanti

$$V_0, I_0; \quad V_{01}, I_{01}; \quad V_{02}, I_{02}.$$

Si impongano poi le condizioni terminali

$$V_1(l_1) = R_1 I_1(l_1),$$

$$V_2(l_2) = Z_2 I_2(l_2),$$

e, nel nodo N , le condizioni di continuità della tensione (le tensioni sui tre tronchi di linea devono essere uguali in N),

$$V_0 = V_{01} = V_{02},$$

e della corrente (la somma delle correnti in ingresso sui tronchi 1 e 2 deve uguagliare la corrente terminale del tronco di linea a sinistra):

$$I_0 = I_{01} + I_{02}.$$

Le cinque relazioni precedenti determinano tutte le costanti meno una, il cui valore è ovviamente fissato dai generatori (non specificati nel problema).

2.5.9 Adattamento di linee di trasmissione

Una linea si dice *adattata* se su essa è presente la sola onda diretta. Il più semplice caso di linea adattata è quello di una linea chiusa sulla sua resistenza caratteristica. Se

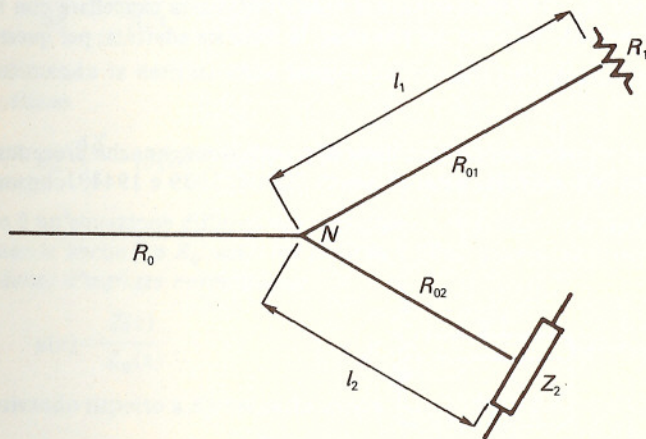


Figura 2.13

il carico è resistivo, ma diverso da R_0 , l'adattamento può essere ottenuto inserendo un tronco di linea di lunghezza $\lambda/4$ (*trasformatore a $\lambda/4$*) di opportuna resistenza caratteristica, tra carico e linea di trasmissione (vedi fig. 2.14).

Si ha

$$Z\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = R_{01} \frac{R_c + jR_{01} \operatorname{tg} \beta \frac{\lambda}{4}}{R_{01} + jR_c \operatorname{tg} \beta \frac{\lambda}{4}} = \frac{R_{01}^2}{R_c};$$

pertanto, la linea è adattata se

$$\frac{R_{01}^2}{R_c} = R_0, \quad \text{ovvero} \quad R_{01} = \sqrt{R_c R_0}.$$

Se invece il carico è complesso, l'adattamento può essere ottenuto (vedi fig. 2.15) con l'inserzione di un tronco di linea in parallelo e in cortocircuito (*stub*).

L'ammettenza di ingresso a destra del punto M è data da

$$Y(M^+) = G_0 \frac{Y_c + jG_0 \operatorname{tg} \beta l}{G_0 + jY_c \operatorname{tg} \beta l} = G + jB,$$

dove

$$G_0 = \frac{1}{R_0},$$

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} = G_c + jB_c.$$

Calcolando l'espressione esplicita di G si vede che è sempre possibile rendere $G = G_0$ con una scelta opportuna di l . Infatti in questo caso $\operatorname{tg}(\beta l)$ è determinata da un'equazione algebrica di secondo grado, con discriminante

$$G_0 G_c [(G_0 - G_c)^2 + B_c^2] \geq 0.$$

Scelto l in modo che $G = G_0$ immediatamente a valle di M , basta cancellare con lo stub la parte reattiva B perché, a monte del punto M , la linea sia adattata; per questo è sufficiente porre

$$B = -jG_0 \operatorname{tg} \beta d.$$

Esistono vari altri sistemi per adattare una linea di trasmissione, nonché procedure grafiche di calcolo, come la cosiddetta *carta di Smith* (Smith, 1939 e 1944; Johnson, 1950).

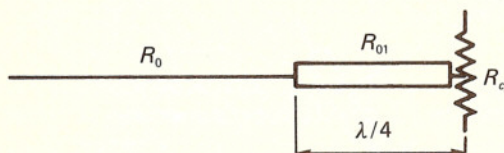


Figura 2.14

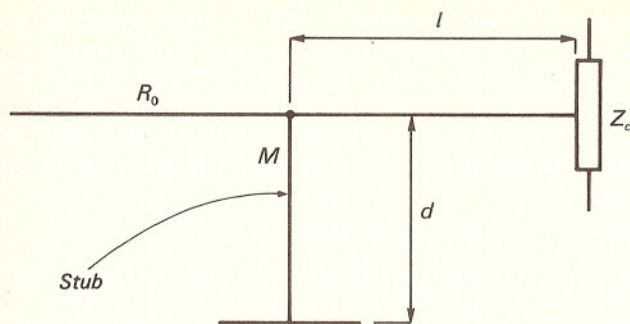


Figura 2.15

2.5.10 Impedenza di ingresso di linea a parametri spazialmente variabili

Lo svantaggio dei sistemi di adattamento presentati in 2.5.9 è di essere risonanti: la condizione di adattamento dipende dalla lunghezza d'onda. Se, come sempre accade, viene trasmessa una banda di frequenza, si ha un disadattamento variabile con la frequenza, il che produce una distorsione del segnale. Fissato l'ammontare tollerabile per la distorsione, resta fissata la banda di lavoro del sistema di adattamento; per i sistemi presentati, queste bande sono molto piccole; risultati migliori si ottengono variando con continuità i parametri (induttanza e capacità) della linea.

La domanda che si pone è allora la seguente: come varia l'impedenza di ingresso di una linea a parametri variabili? Per definizione:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}.$$

Derivando rispetto a z :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dV/dz}{I(z)} - \frac{V(z)}{I^2(z)} \frac{dI}{dz}.$$

Sostituendo le derivate delle tensioni e correnti utilizzando le equazioni delle linee, si ottiene

$$Z_0 \frac{dZ}{dz} = j\beta(Z^2 - Z_0^2), \quad [14]$$

che è un'equazione differenziale non lineare di *Riccati*. (Si noti che non solo Z , ma in generale anche β e Z_0 sono funzioni di z .) Può convenire introdurre la cosiddetta *impedenza d'ingresso normalizzata*

$$u(z) = \frac{Z(z)}{Z_0(z)}.$$

Derivando rispetto a z e tenendo conto della [14], si ha

$$\frac{du}{dz} = j\beta(u^2 - 1) - u \frac{dZ_0/dz}{Z_0}, \quad [15]$$

che è ancora un'equazione non lineare di Riccati. La [14] è stata oggetto di lunghi studi, e svariate tecniche sono state messe a punto per ottenere soluzioni approssimate per variazioni arbitrarie di β e Z_0 con z (Franceschetti, 1964; Sugai, 1962).

Un caso particolarmente interessante è quello per cui β è costante e solo Z_0 varia con z . In una linea bifilare questa condizione può essere ottenuta divaricando i conduttori; la costante di propagazione rimane pari a quella nel vuoto, mentre l'impedenza caratteristica cambia. Se

$$Z_0(z) = Z_0(0) \exp(-\gamma z) \quad (\text{linea esponenziale})$$

l'equazione [15] diventa

$$\frac{du}{dz} = j\beta(u^2 - 1) + \gamma u,$$

da cui

$$z = \int_{u(0)}^{u(z)} \frac{du}{j\beta(u^2 - 1) + \gamma u}.$$

L'integrale si calcola immediatamente mediante scomposizione in fratti semplici. La soluzione per $u(z)$, in forma facilmente esplicitabile, è data da

$$\frac{u(z) + \frac{\gamma}{2j\beta} - \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\beta^2}}}{u(z) + \frac{\gamma}{2j\beta} + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\beta^2}}} = \frac{u(0) + \frac{\gamma}{2j\beta} - \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\beta^2}}}{u(0) + \frac{\gamma}{2j\beta} + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4\beta^2}}} \exp\left(2j\sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma^2}{4}} z\right). \quad [16]$$

Si consideri la linea esponenziale rappresentata nella figura 2.16. Se $Z_c = Z_0(0)$, si ha $u(0) = 1$. Per $\gamma/2\beta < 1$ si ha (al primo ordine in questo parametro)

$$u(z) \approx 1 + \frac{\gamma}{2j\beta} \left[\exp\left(2j\sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma^2}{4}} z\right) - 1 \right]. \quad [17]$$

Definiamo il *coefficiente di riflessione locale* della linea non omogenea:

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - Z_0(z)}{Z(z) + Z_0(z)} = \frac{u(z) - 1}{u(z) + 1}; \quad [18]$$

confrontando la [18] con la [17], si ottiene per la linea esponenziale (nelle approssimazioni precedenti)

$$\Gamma(z) = \frac{\gamma}{4j\beta} \left[\exp\left(2j\sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma^2}{4}} z\right) - 1 \right] = \frac{\gamma}{2\beta} \exp\left(j\sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma^2}{4}} z\right) \sin\left(\sqrt{\beta^2 - \frac{\gamma^2}{4}} z\right);$$

è dunque

$$|\Gamma(-l)| \leq \frac{|\gamma|}{2\beta} = \frac{1}{2\beta l} \ln \left| \frac{Z_0(0)}{Z_0(-l)} \right|,$$

il che mostra che il coefficiente di riflessione può essere reso piccolo a piacere purché

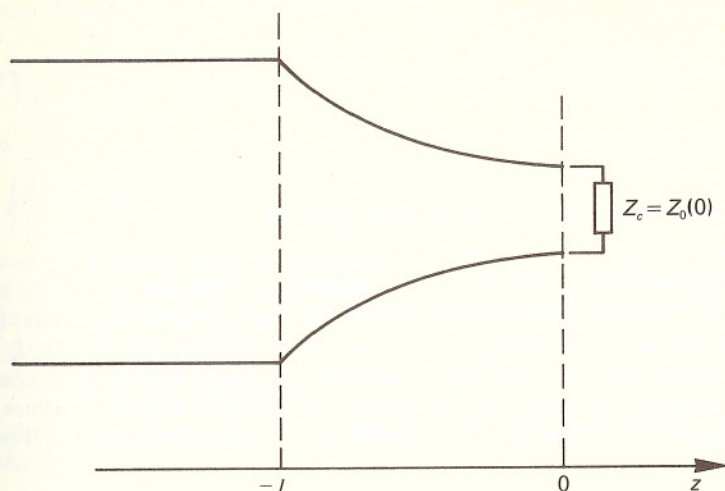


Figura 2.16

$|\gamma|$ sia sufficientemente piccolo rispetto a β , oppure, fissato il *rapporto di trasformazione* $Z_0(0)/Z_0(-l)$, purché sia sufficientemente grande βl .

Una interessante proprietà della linea esponenziale è la seguente: se $\beta < |\gamma|/2$, allora la radice quadrata nella [16] è un numero immaginario puro. Per

$$\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \beta^2} \quad |z| \gg 1$$

si ha dalla [16]

$$u(z) \approx j \left[\frac{\gamma}{2\beta} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2\beta}\right)^2 - 1} \right];$$

l'impedenza d'ingresso è dunque una quantità puramente immaginaria e indipendente da quella terminale se la variazione di Z_0 con z è troppo rapida. La linea non accetta potenza reale, e, se $|\gamma/2\beta| \gg 1$, l'impedenza di ingresso tende a zero. Il fenomeno descritto prende il nome di *cut-off*, o *interdizione*, e la lunghezza d'onda

$$\lambda_c = \frac{4\pi}{\gamma}$$

che divide la regione di propagazione ($\lambda < \lambda_c$) da quella interdetta ($\lambda > \lambda_c$) è detta *lunghezza d'onda critica* o *di taglio*. La linea esponenziale si comporta dunque come un filtro passa-alto.

2.5.11 Coefficiente di riflessione di una linea a parametri spazialmente variabili (esercizio)

Partendo dalla definizione [18] si mostri che l'equazione del coefficiente di rifles-

sione è la seguente

$$\frac{d\Gamma}{dz} = 2j\beta\Gamma - \frac{1}{2} \frac{dZ_0/dz}{Z_0} (1 - \Gamma^2) = 0, \quad [19]$$

cioè ancora un'equazione di Riccati.

*2.5.12 Linea di trasmissione caricata periodicamente

Consideriamo la linea di trasmissione rappresentata nella figura 2.17; essa è supposta infinitamente lunga e caricata periodicamente, con intervallo d , da una capacità derivata C_s (più in generale, da una ammettenza Y_s). Si vuol ricercare, per prima cosa, la relazione tra le tensioni e le correnti nella sezione n -esima (V_n, I_n) e tra le stesse grandezze nella sezione $(n+1)$ -esima (V_{n+1}, I_{n+1}). Il calcolo può essere effettuato agevolmente notando che il problema è quello della serie di due linee di trasmissione, ciascuna di lunghezza $d/2$, collegate da una capacità derivata C_s . Posto $\beta d = \Theta$, si ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_n \\ I_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} = \mathcal{M} \begin{bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{bmatrix} \\ \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} \cos \Theta - \frac{\omega C_s}{2Y_0} \sin \Theta & jZ_0 \left(\frac{\omega C_s}{2Y_0} \cos \Theta + \sin \Theta - \frac{\omega C_s}{2Y_0} \right) \\ jY_0 \left(\frac{\omega C_s}{2Y_0} \cos \Theta + \sin \Theta + \frac{\omega C_s}{2Y_0} \right) & \cos \Theta - \frac{\omega C_s}{2Y_0} \sin \Theta \end{bmatrix} \quad [20] \end{aligned}$$

Perché possa propagarsi un'onda lungo la struttura periodica della figura 2.17, è necessario che le grandezze V_{n+1}, I_{n+1} differiscano dalle V_n, I_n per un puro fattore di fase (stante l'assenza di perdite) che tenga conto del tempo finito di propagazione. Ciò equivale a imporre la seguente condizione:

$$\begin{cases} V_{n+1} = V_n \exp(-j\gamma d) \\ I_{n+1} = I_n \exp(-j\gamma d). \end{cases}$$

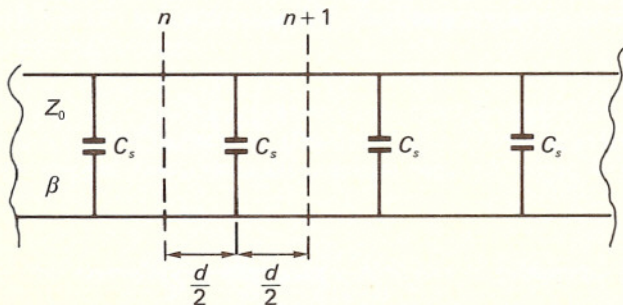


Figura 2.17

Sostituendo tali espressioni nella [20] si ottiene

$$\begin{Bmatrix} V_n \\ I_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A & B \\ C & D \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{Bmatrix} = \exp(j\gamma d) \begin{Bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{Bmatrix},$$

e cioè

$$\left\{ \begin{Bmatrix} A & B \\ C & D \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \exp(j\gamma d) & 0 \\ 0 & \exp(j\gamma d) \end{Bmatrix} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} V_{n+1} \\ I_{n+1} \end{Bmatrix} = 0. \quad [21]$$

La [21] è l'equazione di un sistema lineare omogeneo. Perché la soluzione non sia quella identicamente nulla è necessario che il determinante dei coefficienti si annulli; di conseguenza

$$\exp(2j\gamma d) - (A + D) \exp(j\gamma d) + (AD - BC) = 0. \quad [22]$$

E' facile verificare che $AD - BC = 1$; pertanto, moltiplicando la [22] per $\exp(-j\gamma d)$, si vede che

$$\cos \gamma d = \frac{A + D}{2} = \cos \beta d - \frac{\omega C_s}{2Y_0} \sin \beta d = \cos \beta d - \frac{C_s}{2Cd} \beta d \sin \beta d. \quad [23]$$

La [23] è l'equazione che determina i possibili *autovalori* γ della struttura periodica della figura 2.17; la sua soluzione è riportata nella figura 2.18, per $-\pi \leq \gamma d \leq \pi$, $0 \leq \beta d \leq 6,14\pi$ e $C_s/2Cd = 1$. Perché vi sia propagazione lungo la linea, γ dev'essere reale, e di conseguenza

$$\left| \cos \beta d - \frac{\omega C_s}{2Y_0} \sin \beta d \right| \leq 1. \quad [24]$$

La relazione [24] dipende chiaramente dalla frequenza, e ciò spiega come nella struttura periodica della figura 2.17 siano presenti *bande passanti* (o *pass-bands*) nelle quali il segnale si propaga (vedi fig. 2.18) e *bande proibite* (o *stop-bands*) nelle quali il segnale non si propaga.

Le onde in grado di propagarsi, con costante γ , lungo una linea di trasmissione caricata periodicamente sono dette *onde di Bloch*, per analogia con un noto fenomeno della meccanica ondulatoria riguardante l'elettrone in una struttura cristallina; poiché sulle ordinate del diagramma della figura 2.18 è riportata una quantità proporzionale alla frequenza, è possibile calcolare la velocità di fase dell'onda, e quella di gruppo, proprio come accade per il diagramma di Brillouin. Si noti che il diagramma presenta un numero infinito (numerabile) di *rami*; sono stati riportati solo quelli corrispondenti al valor principale di γd nella [23]. Gli altri rami corrispondono alle *armoniche spaziali*, e cioè a valori della costante di propagazione di Bloch

$$\gamma_m = \gamma + 2m\pi.$$

Il segnale totale sulla linea è in generale una combinazione di armoniche spaziali; la possibilità di rappresentare un segnale in una struttura periodica in questo modo è usualmente giustificata in base al *teorema di Floquet*.

Si noti ancora che la velocità di gruppo (proporzionale alla tangente alle curve del diagramma della fig. 2.18) può aver segno opposto a quella di fase; le corrispondenti onde di tensione e di corrente sono dette *retrograde* (o *backward waves*).

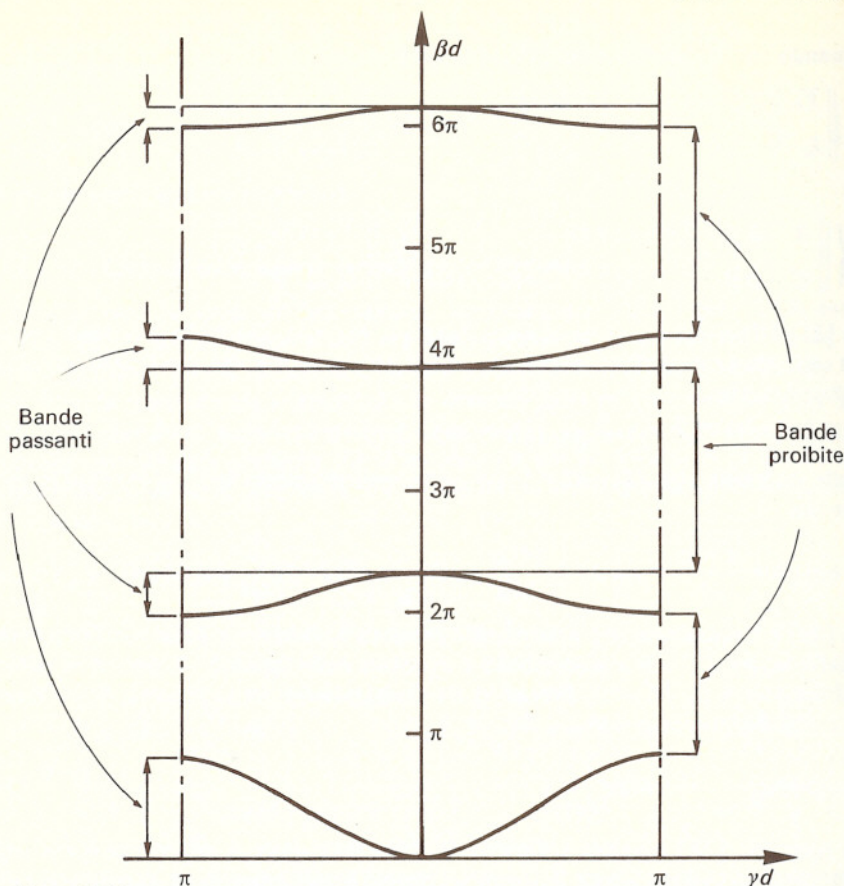


Figura 2.18

Diagramma βd - γd per una linea di trasmissione caricata periodicamente con capacità.

*2.5.13 Linee accoppiate

Si considerino due linee di trasmissione *accoppiate*, ad esempio induttivamente, con coefficiente di mutua induttanza per unità di lunghezza M (H/m). Indicando con pedici 1 e 2 le grandezze relative alle due linee, le equazioni che ne descrivono il comportamento sono (nel dominio della frequenza)

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{dV_1}{dz} = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ -\frac{dI_1}{dz} = j\omega C_1 V_1 \\ -\frac{dV_2}{dz} = j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \\ -\frac{dI_2}{dz} = j\omega C_2 V_2, \end{array} \right. \quad [25]$$

ovvia generalizzazione della [8] (§ 2.4), in base al circuito equivalente della figura 2.7.

Nell'ipotesi di una dipendenza spaziale del tipo $\exp(-jkz)$, il sistema [25] si scrive in forma algebrica nel modo seguente:

$$\begin{vmatrix} -k & \omega L_1 & 0 & \omega M \\ \omega C_1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & \omega M & -k & \omega L_2 \\ 0 & 0 & \omega C_2 & -k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \\ V_2 \\ I_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Perché vi sia una soluzione diversa dalla banale è necessario imporre che il determinante dei coefficienti sia nullo:

$$k^4 - k^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) + (\beta_1^2\beta_2^2 - \omega^2 M^2 \omega^2 C_1 C_2) = 0,$$

e cioè

$$k^2 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2}\right)^2 - \beta_1^2\beta_2^2 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)}.$$

Su ciascuna delle due linee possono propagarsi, in ciascuno dei due versi, due onde, le cui costanti di propagazione si ottengono scegliendo uno dei due segni nella espressione precedente; si indica con k_1 la costante corrispondente alla scelta del segno $+$, con k_2 l'altra. Risolvendo il sistema rispetto a V_1 , si ottengono le due soluzioni progressive (in funzione dell'unica costante V^+)

$$\begin{cases} V_1(z) = V^+ \exp(-jkz) \\ I_1(z) = \frac{\omega C_1}{k} V^+ \exp(-jkz) \\ V_2(z) = \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2 - k^2} \frac{M}{L_1} V^+ \exp(-jkz) \\ I_2(z) = \frac{\omega C_2}{k} \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2 - k^2} \frac{M}{L_1} V^+ \exp(-jkz), \end{cases}$$

dove k può assumere i valori k_1 o k_2 . Se l'accoppiamento è nullo risulta $M=0$, $k_1=\beta_1$, e $k_2=\beta_2$. Per $k=k_1$ si ha $V_2=I_2=0$, e l'onda, di costante β_1 , si propaga solo sulla linea 1; per $k=k_2$, l'ampiezza di V_2 e I_2 tende all'infinito, e pertanto non può che essere $V^+=0$: l'onda, di costante β_2 , si propaga solo sulla linea 2. Se invece le due linee sono accoppiate è $M \neq 0$, e su ciascuna linea possono propagarsi entrambe le onde.

E' interessante effettuare l'analisi perturbativa del sistema, nell'ipotesi di accoppiamento modesto ($M^2 \ll L_1 L_2$). Per $M=0$, si ha su ciascuna linea una soluzione del tipo

$$V(z) = V^+ \exp(-j\beta z)$$

dove $V=V_1$ (o V_2) e $\beta=\beta_1$ (o β_2). Per $M \neq 0$ (con $M^2 \ll L_1 L_2$) ipotizziamo una soluzione del tipo

$$V(z) = A(z) \exp(-j\beta z),$$

con $A(z)$ funzione lentamente variabile di z . Si ha

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dz} &= -j\beta V(z) + \frac{dA}{dz} \exp(-j\beta z) \\
 \frac{d^2 V}{dz^2} &\approx -\beta^2 V(z) - 2j\beta \frac{dA}{dz} \exp(-j\beta z) = -\beta^2 V(z) - 2j\beta \left[\frac{dV}{dz} + j\beta V \right] = \\
 &= \beta^2 V(z) - 2j\beta \frac{dV}{dz}, \quad [26]
 \end{aligned}$$

dove, per l'ipotesi di variazione lenta, si è trascurata la derivata seconda di $A(z)$. Il risultato [26] è ora utilizzato per eliminare le derivate seconde nelle equazioni che si ottengono dalle [25]:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 V_1}{dz^2} = \beta_1^2 V_1 + \omega^2 M C_2 V_2 \\ -\frac{d^2 V_2}{dz^2} = \beta_2^2 V_2 + \omega^2 M C_1 V_1. \end{cases}$$

Si giunge così alle equazioni dei modi accoppiati

$$\begin{cases} -\frac{dV_1}{dz} = j\beta_1 V_1 + j \frac{\omega M}{2Z_{02}} \frac{\beta_2}{\beta_1} V_2 \\ -\frac{dV_2}{dz} = j\beta_2 V_2 + j \frac{\omega M}{2Z_{01}} \frac{\beta_1}{\beta_2} V_1. \end{cases} \quad [27]$$

Consideriamo ora la grandezza

$$P(z) = \frac{1}{2} \frac{V_1 V_1^*}{Z_{01}} + \frac{1}{2} \frac{V_2 V_2^*}{Z_{02}}. \quad [28]$$

Se le due linee sono disaccoppiate, $P(z)$ è reale ed è la potenza totale che fluisce lungo le due linee; essa è ovviamente costante con z , data l'assenza di perdite. Quando vi è accoppiamento, derivando la [28] e tenendo conto della [27], si ha

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} j(V_1 V_2^* - V_1^* V_2) \frac{\omega M}{2Z_{01}Z_{02}} \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right).$$

Se $\beta_1 \approx \beta_2$ (il caso di maggior interesse pratico) la variazione della $P(z)$ con z diventa trascurabile, ed è lecito identificare la [28] con la potenza totale fluente lungo le linee, anche nel caso di accoppiamento di queste. Posto $\beta_1 = \beta_2$ nei termini di accoppiamento della [27] (già piccoli per l'ipotesi fatta su M), si ha

$$\begin{cases} -\frac{dV_1}{dz} = j\beta_1 V_1 + j \frac{\omega M}{2Z_{02}} V_2 \\ -\frac{dV_2}{dz} = j\beta_2 V_2 + j \frac{\omega M}{2Z_{01}} V_1. \end{cases} \quad [29]$$

2.6 Generatori sulle linee: condizioni di risonanza

La soluzione illustrata nei paragrafi 2.4 e 2.5 per la tensione e la corrente lungo una linea di trasmissione è la cosiddetta soluzione *libera*, indipendente cioè da una

particolare scelta dei generatori. Come si è visto, essa è determinata a meno di una costante, il cui valore dipende dalla eccitazione, ovvero dal tipo, dall'intensità e dalla posizione delle sorgenti lungo la linea. Ai fini del calcolo, è opportuno schematizzare questi generatori in termini di sorgenti impresse, cioè di tensioni o correnti assegnate in prefissati punti della linea. Tra le sorgenti impresse, le più semplici sono i generatori (ideali) spazialmente impulsivi (cioè applicati in corrispondenza di un punto della linea) di tensione

$$\hat{V}(z, z'') = V_G \delta(z - z'') \quad [1]$$

e di corrente

$$\hat{I}(z, z') = I_G \delta(z - z') \quad [2]$$

rappresentati nella figura 2.19. Questa semplificazione è lecita finché le dimensioni degli attacchi dei generatori sulla linea sono piccoli rispetto alla lunghezza d'onda.

Nelle [1] e [2] si è usata la rappresentazione nel dominio della frequenza, cosicché V_G e I_G sono rispettivamente i fasori della tensione e della corrente impressa.

Il generatore ideale di tensione è caratterizzato da una resistenza interna nulla. A rigore, per mantenere la simmetria della linea di trasmissione, dovrebbero essere inseriti un generatore $V_G/2$ in serie al conduttore superiore e un generatore $-V_G/2$ in serie a quello inferiore, ambedue nel punto di ascissa $z = z''$. La tensione fornita dal generatore ideale di tensione è indipendente dal carico.

Il generatore ideale di corrente è caratterizzato da una resistenza serie infinita. Trattandosi di una idealizzazione di un generatore reale, la corrente erogata non dipende dal carico.

La grandezza $\hat{V}(z, z'')$ è una densità lineare di tensione (V/m); analogamente $\hat{I}(z, z')$ è una densità lineare di corrente (A/m). Il generatore di tensione introduce una discontinuità di tensione V_G nell'ascissa $z = z''$ sulla linea, come si vede integran-

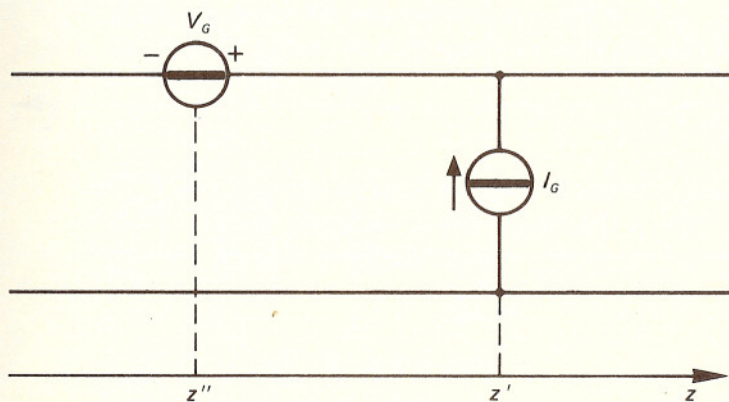


Figura 2.19

do la [1] tra $z'' - \Delta z$, $z'' + \Delta z$, con $\Delta z \rightarrow 0$. Analogamente, il generatore di corrente produce una discontinuità di corrente all'ascissa $z = z'$:

Riferendosi allo schema circuitale della figura 2.9, si vede subito che le equazioni delle linee, in presenza dei generatori [1] e [2], diventano

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\omega LI - V_G \delta(z - z'') \\ -\frac{dI}{dz} = j\omega CV - I_G \delta(z - z'), \end{cases} \quad [3]$$

dove i segni "meno" indicano che la tensione impressa ha segno opposto alla caduta di tensione serie e la corrente impressa ha segno opposto alla corrente parallelo.

Si consideri il caso $V_G = 0$. Derivando rispetto a z la prima delle [3], divisa per $j\omega L$, e sostituendo per dI/dz l'espressione data dalla seconda, si ottiene

$$j\omega L \frac{d}{dz} \frac{1}{j\omega L} \frac{dV}{dz} + \beta^2 V = -j\omega L I_G \delta(z - z'),$$

dove i parametri della linea possono variare con z . Notiamo che, per $z \neq z'$, il secondo membro è nullo e si possono così utilizzare le soluzioni delle equazioni delle linee in assenza di sorgenti. Sia $\vec{V}(z)$ la soluzione per $z > z'$ e $\vec{V}(z)$ quella per $z < z'$; ciascuna di esse è determinata a meno di una costante. Per $z = z'$ la tensione deve essere continua, come rappresentato nella figura 2.20 (simbolicamente, perché i due fasori $\vec{V}(z)$)

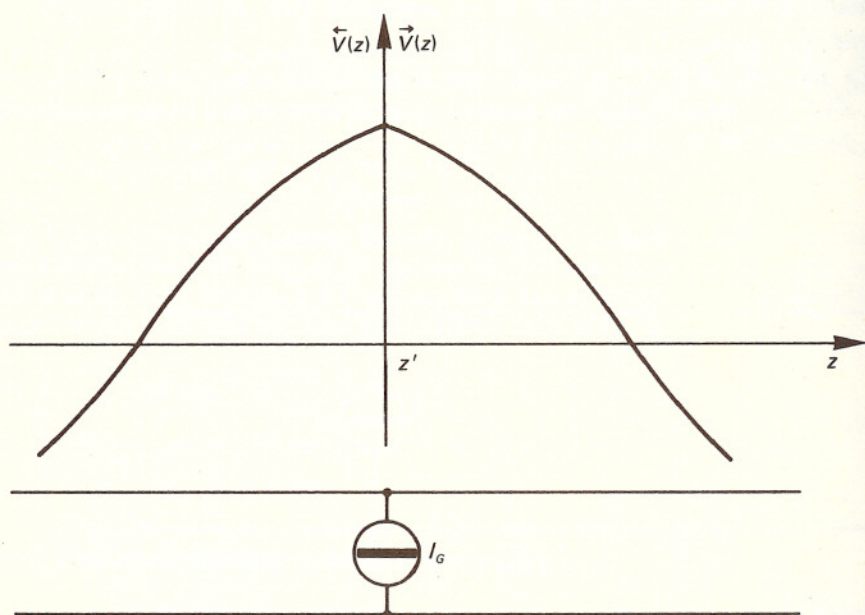


Figura 2.20

e $\vec{V}(z)$ sono in generale complessi):

$$\vec{V}(z') = \vec{V}(z'') = V(z'). \quad [4]$$

Questa è una prima relazione per la determinazione delle costanti incognite. Un'altra relazione può essere ottenuta integrando l'equazione differenziale della tensione tra $z' - \Delta z$ e $z' + \Delta z$:

$$\frac{dV}{dz} \bigg|_{z' - \Delta z}^{z' + \Delta z} + \beta^2 \int_{z' - \Delta z}^{z' + \Delta z} V(z) dz = -j\omega L(z') I_G.$$

Per $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{d\vec{V}}{dz'} - \frac{d\vec{V}}{dz} = -j\omega L(z') I_G,$$

il che mostra che la curva della tensione presenta una cuspidine in $z = z'$ (vedi fig. 2.20).

La relazione precedente può essere riscritta come segue:

$$-\vec{I}(z') + \vec{I}(z') = -I_G,$$

o anche, dividendo e moltiplicando il primo membro per $V(z')$,

$$V(z') = \frac{I_G}{\vec{Y}(z') + \vec{Y}(z')}, \quad [5]$$

dove al denominatore appare la somma delle ammettenze di ingresso della linea, a destra ($\vec{Y}(z')$) e a sinistra ($\vec{Y}(z')$) del punto di ascissa $z = z'$. La relazione precedente ha una immediata interpretazione in termini di circuito equivalente a costanti concentrate: la corrente I_G è chiusa sul parallelo delle due ammettenze $\vec{Y}(z')$ e $\vec{Y}(z')$.

Le due relazioni [4] e [5] determinano completamente la soluzione per la tensione, e quindi anche per la corrente, per qualsiasi valore di z . Si noti che la soluzione per la tensione è continua, mentre quella per la corrente è discontinua in $z = z'$, per la presenza del generatore (spazialmente impulsivo) di corrente.

Al denominatore delle espressioni della tensione e corrente lungo la linea compare la somma delle ammettenze di ingresso

$$\vec{Y}(z') + \vec{Y}(z)$$

dei due tronchi di linea a destra e a sinistra del punto di ascissa z' . Se si fosse studiato il caso di un'eccitazione con generatore di tensione sarebbe apparsa, sempre al denominatore, la somma delle impedenze di ingresso

$$\vec{Z}(z'') + \vec{Z}(z'')$$

dei tronchi di linea suddetti. Poiché, d'altra parte,

$$\vec{Y} + \vec{Y} = \frac{\vec{Z} + \vec{Z}}{\vec{Z}\vec{Z}},$$

si può sempre far comparire, al denominatore dell'espressione della tensione o della corrente impressa, la somma delle impedenze, qualunque sia il tipo di eccitazione (o, se si preferisce, la somma delle ammettenze).

La soluzione trovata per la tensione e la corrente sulla linea perde di significato se²

$$\tilde{V}(z') + \tilde{V}(z') = 0, \quad [6]$$

a meno che non si annulli anche l'eccitazione in modo che tensioni e correnti sulla linea rimangano finite. Si vede dunque come la [6] sia la condizione di risonanza, potendosi avere eccitazione della linea anche in assenza di generatori; essa è comunemente detta *condizione di risonanza trasversale* (Felsen e Marcuvitz, 1956 e 1973), anche se in questo contesto sarebbe più opportuno parlare di *risonanza longitudinale* (vedi anche 2.7.9).

E' utile notare che il primo membro della [6] è indipendente dalla particolare ascissa considerata z' . Infatti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz'} (\tilde{V} + \tilde{V}) &= \frac{d}{dz'} \left(-\frac{\tilde{I}}{\tilde{V}} + \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}} \right) = \\ &= -\frac{d\tilde{I}/dz'}{\tilde{V}} + \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}^2} \frac{d\tilde{V}}{dz'} + \frac{d\tilde{I}/dz'}{\tilde{V}} - \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}^2} \frac{d\tilde{V}}{dz'}; \end{aligned}$$

e sostituendo le derivate della tensione mediante le equazioni delle linee, si ricava che l'espressione precedente è nulla alla risonanza. Di conseguenza, ai fini della determinazione delle condizioni di risonanza, la [6], o la sua analogia in termini di impedenza,

$$\tilde{Z}(z) + \tilde{Z}(z) = 0 \quad [7]$$

possono essere calcolate in qualunque conveniente ascissa z lungo la linea.

Le impedenze e le ammettenze che compaiono nelle [6] e [7] sono funzioni della frequenza, dei parametri e della lunghezza della linea; alla risonanza queste grandezze sono legate tra loro da una relazione, in generale di tipo trascendente. Si nota ancora che in condizione di risonanza le cuspidi (vedi fig. 2.20) presenti nei diagrammi della tensione o della corrente scompaiono, data l'assenza dei generatori.

Annotazioni

2.6.1 Distribuzione della tensione e della corrente lungo una linea

Consideriamo la linea raffigurata nella figura 2.21. Per $z > 0$, la soluzione stazionaria, con la condizione

$$V_2(l_2) = 0,$$

² In tal caso se ne deduce che è nulla anche la somma delle impedenze, e viceversa (sempre che i due termini della [6] siano singolarmente diversi da zero).

è la seguente:

$$\begin{cases} V_2(z) = V_{02} \left(\cos \beta z - \frac{\cos \beta l_2}{\sin \beta l_2} \sin \beta z \right) \\ I(z) = -j \frac{V_{02}}{R_0} \left(\frac{\cos \beta l_2}{\sin \beta l_2} \cos \beta z + \sin \beta z \right). \end{cases}$$

Per $z < 0$, la soluzione stazionaria, con la condizione

$$V_1(-l_1) = 0,$$

è data da

$$\begin{cases} V_1(z) = V_{01} \left(\cos \beta z + \frac{\cos \beta l_1}{\sin \beta l_1} \sin \beta z \right) \\ I_1(z) = j \frac{V_{01}}{R_0} \left(\frac{\cos \beta l_1}{\sin \beta l_1} \cos \beta z - \sin \beta z \right). \end{cases}$$

La continuità della tensione per $z = 0$ richiede che sia

$$V_{01} = V_{02} = V_0,$$

e il generatore di corrente determina il valore della tensione nel punto di ascissa $z = 0$:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{I_G}{\tilde{Y}(0) + \vec{Y}(0)} = \frac{R_0 I_G}{-j(\operatorname{ctg} \beta l_1 + \operatorname{ctg} \beta l_2)} = \\ &= -\frac{R_0^2 I_G \sin \beta l_1 \sin \beta l_2}{\cos \beta l} \frac{1}{j R_0 \operatorname{tg} \beta l}. \end{aligned}$$

Si noti come al denominatore di questa espressione compaia la quantità

$$\tilde{Z} + \vec{Z} = j R_0 \operatorname{tg} \beta l$$

che è la somma delle impedenze longitudinali in $z = -l_1$ (sezione AA' nella fig. 2.21, $\vec{Z}(-l_2) = 0$), e determina le singolarità della soluzione.

La risonanza avviene per

$$\operatorname{tg} \beta l = 0,$$

cioè alle frequenze

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\sqrt{LC}l}, \quad n = 1, 2, \dots$$

o, equivalentemente, alle lunghezze d'onda

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

2.6.2 Calcolo delle frequenze di risonanza

Con riferimento alla linea della figura 2.22, applichiamo la condizione di risonanza longitudinale alla sezione terminale AA' :

$$j R_0 \operatorname{tg} \beta l + j \omega L_c = 0,$$

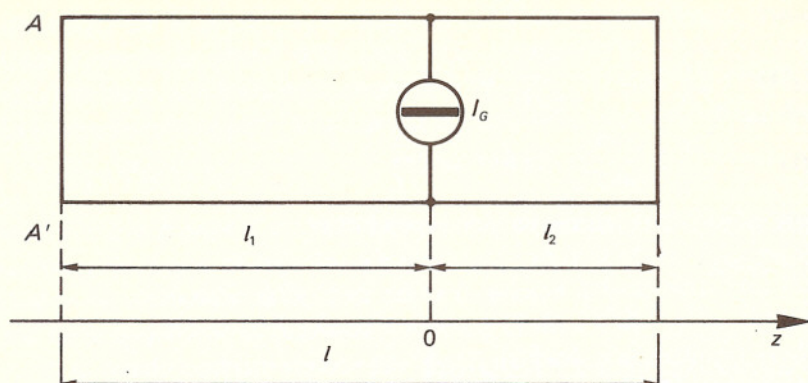


Figura 2.21

cioè

$$\operatorname{tg}(\omega\sqrt{LC}l) = -\omega\sqrt{LC}l \frac{L_c}{Ll}.$$

La soluzione grafica di questa equazione trascendente è indicata nella figura 2.23.

Si noti come la linea debba essere più lunga di mezza lunghezza d'onda, alla risonanza, perché questa possa verificarsi. Infatti la reattanza induttiva (positiva) dell'induttanza di carico dev'essere compensata da una reattanza di tipo capacitivo (negativa) di ingresso della linea.

*2.6.3 Risonanza di una linea con piccole perdite

Consideriamo la stessa linea della figura 2.21, in assenza di generatore. La linea presenti piccole perdite, così da essere descritta dai parametri

$$R_0, \quad k = \beta - j\alpha = \omega\sqrt{LC} - j\left(\frac{R}{2R_0} + \frac{GR_0}{2}\right),$$

come mostrato in 2.5.7.

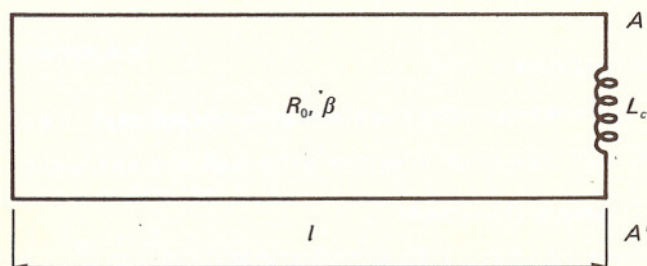


Figura 2.22

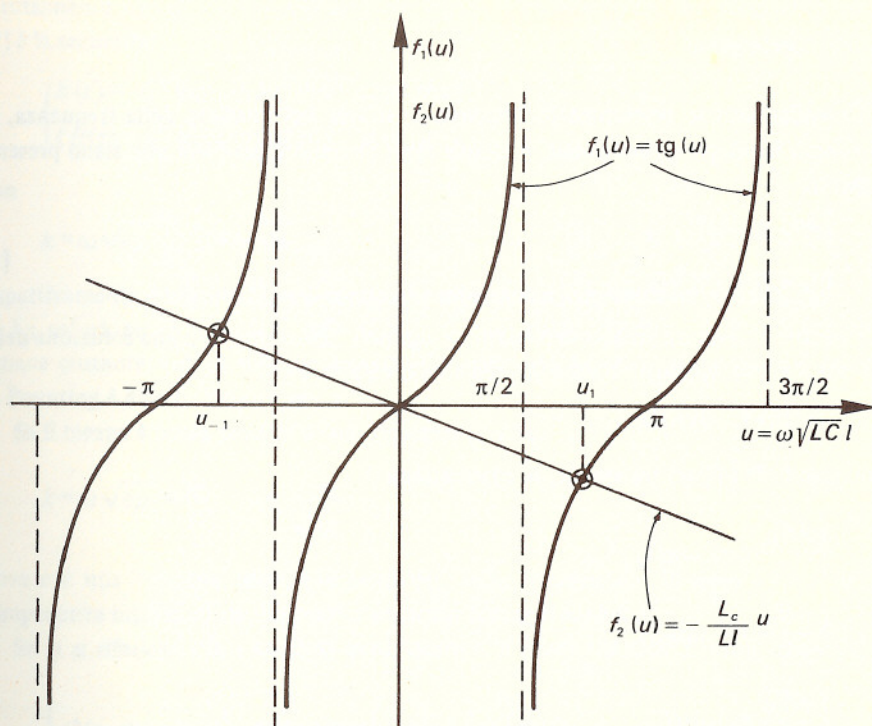


Figura 2.23

Determinazione delle frequenze di risonanza di una linea chiusa in cortocircuito a un estremo e caricata su una induttanza L_c all'altro.

La condizione di risonanza longitudinale richiede che sia

$$jR_0 \operatorname{tg} kl = 0, \quad kl = n\pi.$$

L'unica possibilità perché tale condizione sia verificata è che la pulsazione diventi complessa:

$$\omega = \omega' + j\omega'',$$

cosicché

$$\omega'_n = \frac{n\pi}{\sqrt{LC}l}, \quad \omega'' \approx \frac{R}{2L} + \frac{G}{2C}.$$

La frequenza di risonanza è quindi complessa. La parte reale ω' non cambia (nell'ipotesi di linea con piccole perdite) rispetto al caso di linea senza perdite e determina il periodo temporale dell'oscillazione. Il coefficiente dell'immaginario ω'' non è altro che l'inverso della costante di estinzione dell'oscillazione, che decade nel tempo come $\exp(-\omega''t)$.

2.7 Onde piane

Consideriamo le equazioni di Maxwell ai rotori, nel dominio della frequenza, in un mezzo isotropo e omogeneo, e in una regione dello spazio ove non siano presenti sorgenti:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} \end{cases} \quad [1]$$

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali, si vuol trovare una soluzione delle [1] tale che i campi siano funzioni della sola coordinata z :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(z).$$

Proiettando le [1] sui tre assi (x, y, z) si ottiene

$$\begin{cases} \frac{dE_x}{dz} = -j\omega\mu H_y \\ \frac{dH_y}{dz} = -j\omega\epsilon E_x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dE_y}{dz} = j\omega\mu H_x \\ \frac{dH_x}{dz} = j\omega\epsilon E_y, \end{cases}$$

$$j\omega\mu H_z = j\omega\epsilon E_z = 0.$$

Si nota che il sistema [1] si spezza in un numero di sottosistemi tra loro indipendenti. Nel primo appaiono le due componenti E_x, H_y ; nel secondo, E_y, H_x ; il terzo e il quarto si riducono a

$$E_z = H_z = 0,$$

sempre che $\omega \neq 0$. Possono quindi propagarsi due famiglie di onde indipendenti, ambedue TEM rispetto alla direzione z .

Consideriamo ora la sola onda (E_x, H_y); posto

$$\mathbf{E} = E(z) \mathbf{i}_x, \quad \mathbf{H} = H(z) \mathbf{i}_y,$$

le equazioni che descrivono la propagazione dell'onda sono

$$\begin{cases} \frac{dE}{dz} = -j\omega\mu H \\ \frac{dH}{dz} = -j\omega\epsilon E, \end{cases} \quad [2]$$

uguali alle [8] (§ 2.4). Pertanto, la soluzione di tipo viaggiante per le
te:

$$\begin{aligned} & E^+ \exp(-jkz) + E^- \exp(jkz) \\ & = E^+ \exp(-jkz) - E^- \exp(jkz) \end{aligned} \quad [3]$$

$$\sqrt{\epsilon\mu}, \quad \zeta = \sqrt{\mu/\epsilon},$$

ente costante di propagazione e impedenza intrinseca del mezzo.

zione [3] è detta *onda piana*: in ogni piano $z = \text{cost.}$ il fasore dell'onda
stante; campi elettrici e magnetici sono mutuamente ortogonali; il vettore
 $\mathbf{g}$ è diretto lungo l'asse z .

mezzo è senza perdite e non dispersivo, si ha

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

una costante reale, indipendente dalla frequenza.³ In questo caso, anche
la intrinseca risulta reale e costante con la frequenza.

si riferisce alla sola onda progressiva e si passa nel dominio del tempo, si ha

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \exp \left[j\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] d\omega$$

$$E(z, t) = \frac{1}{\zeta} e^+(z, t).$$

ne precedente è completamente determinata, una volta assegnata la distri-
n z del campo elettrico al tempo $t=0$:

$$E(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \exp \left(-j\omega \frac{z}{c} \right) d\omega.$$

Confrontando le due espressioni precedenti, si ha

$$E(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \exp \left(-j\omega \frac{z - ct}{c} \right) d\omega = e^+(z - ct, 0).$$

ne precedente mostra che l'intensità dell'onda, nel punto di ascissa z e all'i-
ncide con quella che l'onda aveva al tempo zero e nel punto di ascissa
onda ha dunque traslato rigidamente, senza deformarsi, nel verso positivo
con velocità costante c (vedi fig. 2.24).

ndezza c coincide con la velocità della luce nel mezzo di costanti ϵ e μ .

formalmente uguali alle [8] (§ 2.4). Pertanto, la soluzione di tipo viaggiante per le [2] è la seguente:

$$\begin{cases} E(z) = E^+ \exp(-jkz) + E^- \exp(jkz) \\ H(z) = E^+ \exp(-jkz) - E^- \exp(jkz) \end{cases} \quad [3]$$

con

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad \zeta = \sqrt{\mu/\epsilon},$$

rispettivamente *costante di propagazione* e *impedenza intrinseca* del mezzo.

La soluzione [3] è detta *onda piana*: in ogni piano $z = \text{cost.}$ il fasore dell'onda rimane costante; campi elettrici e magnetici sono mutuamente ortogonali; il vettore di Poynting è diretto lungo l'asse z .

Se il mezzo è senza perdite e non dispersivo, si ha

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu} = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}},$$

dove c è una costante reale, indipendente dalla frequenza.³ In questo caso, anche l'impedenza intrinseca risulta reale e costante con la frequenza.

Se ci si riferisce alla sola onda progressiva e si passa nel dominio del tempo, si ha

$$\begin{cases} e^+(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \exp \left[j\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] d\omega \\ h^+(z, t) = \frac{1}{\zeta} e^+(z, t). \end{cases}$$

La soluzione precedente è completamente determinata, una volta assegnata la distribuzione con z del campo elettrico al tempo $t=0$:

$$e^+(z, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \exp \left(-j\omega \frac{z}{c} \right) d\omega.$$

Infatti, confrontando le due espressioni precedenti, si ha

$$e^+(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \exp \left(-j\omega \frac{z - ct}{c} \right) d\omega = e^+(z - ct, 0).$$

La relazione precedente mostra che l'intensità dell'onda, nel punto di ascissa z e all'istante t , coincide con quella che l'onda aveva al tempo zero e nel punto di ascissa $z - ct$. L'onda ha dunque traslato rigidamente, senza deformarsi, nel verso positivo dell'asse z con velocità costante c (vedi fig. 2.24).

³ La grandezza c coincide con la velocità della luce nel mezzo di costanti ϵ e μ .

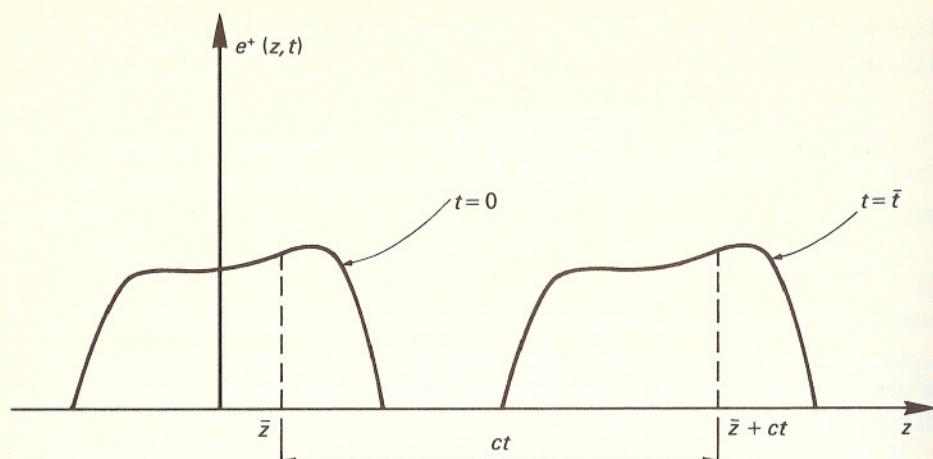


Figura 2.24

Propagazione di un'onda piana in un mezzo isotropo, omogeneo e non dispersivo.

La naturale generalizzazione della soluzione [3] al caso di un'onda piana che si propaghi in una direzione arbitraria è la seguente (vedi fig. 2.25):

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{H}} \exp(-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \end{cases} \quad [4]$$

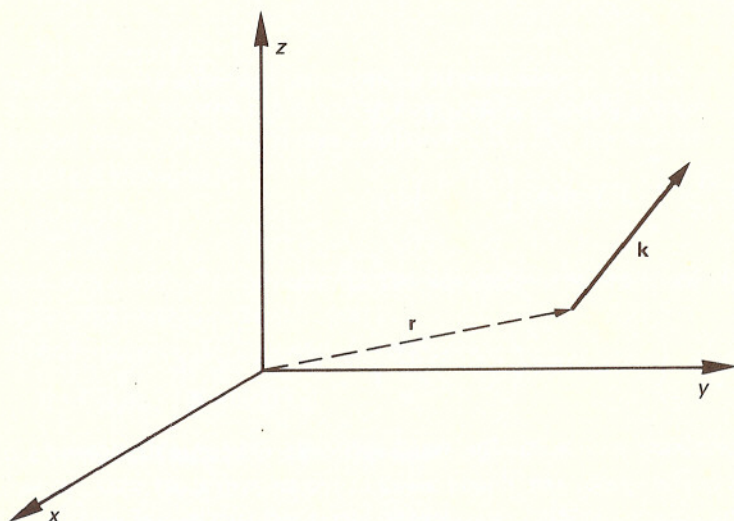


Figura 2.25

Geometria relativa a un'onda piana.

dove $\mathbf{k} = k_x \mathbf{i}_x + k_y \mathbf{i}_y + k_z \mathbf{i}_z$ è il *vettore di propagazione*. La sostituzione delle [4] nelle equazioni di Maxwell porta a una algebrizzazione delle stesse, perché l'operatore differenziale " ∇ " si trasforma in $-j\mathbf{k}$. Si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} = \omega \mu \hat{\mathbf{H}} \\ -\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{H}} = \omega \epsilon \hat{\mathbf{E}} \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0. \end{cases} \quad [5]$$

La terza e quarta equazione mostrano che $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{H}}$ sono ortogonali a $\mathbf{k}$: in questo mezzo isotropo omogeneo, il vettore di propagazione ha dunque la stessa direzione del vettore di Poynting. Moltiplicando la prima delle [5] vettorialmente per $\mathbf{k}$ a destra, e tenendo conto della seconda equazione, si ricava

$$\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{k} = \omega^2 \epsilon \mu \hat{\mathbf{E}},$$

cioè

$$(k^2 - \omega^2 \epsilon \mu) \hat{\mathbf{E}} = 0.$$

Perché $\hat{\mathbf{E}}$ sia diverso da zero, dev'essere

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2 \epsilon \mu, \quad [6]$$

relazione che fissa l'ampiezza del vettore di propagazione. Dalla prima delle [5] si ha poi

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{\zeta} \mathbf{i}_k \times \hat{\mathbf{E}}, \quad [7]$$

dove $\mathbf{i}_k = \mathbf{k}/k$.

Pertanto le caratteristiche di un'onda piana sono le seguenti:

(a) Campo elettrico e magnetico sono mutuamente ortogonali, e ambedue ortogonali al vettore propagazione; la terna $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}, \mathbf{k}$ è levogira, cosicché il vettore di Poynting è diretto secondo $\mathbf{i}_k$.

(b) Il rapporto tra $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{H}}$ è pari all'impedenza intrinseca del mezzo; l'ampiezza della costante di propagazione è data dalle [6].

(c) I vettori dell'onda sono completamente determinati quando siano specificate due componenti dei campi e del vettore propagazione. Se ad esempio sono fissate le componenti $\hat{E}_x, \hat{E}_y$ del campo elettrico e le componenti k_x, k_y del vettore propagazione, si ha dalla terza delle [5]

$$\hat{E}_z = -\frac{k_x \hat{E}_x + k_y \hat{E}_y}{k_z},$$

e $\hat{\mathbf{H}}$ è fissato dalla [7].

Si noti che la [6] fissa solo la somma dei quadrati delle componenti del vettore di propagazione $\mathbf{k}$, ma non le singole componenti; di queste, due sono indipendenti. Se

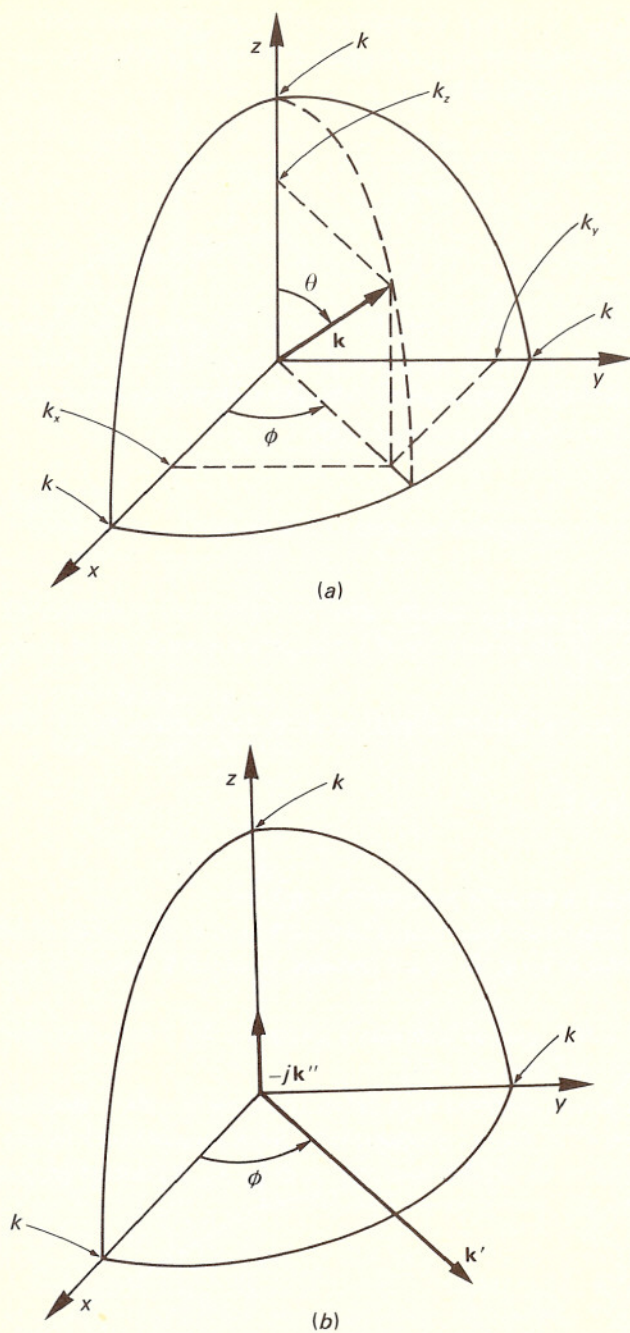


Figura 2.26

Vettore di propagazione $\mathbf{k}$: (a) con componenti tutte reali; (b) con due componenti reali e una immaginaria.

le tre componenti k_x , k_y , k_z sono tutte reali (mezzo senza perdite; vedi fig. 2.26a), l'estremo del vettore $\mathbf{k}$ deve giacere su una sfera di raggio k , e la sua direzione è individuata da angoli (θ, ϕ) dati da

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi$$

$$k_y = k \sin \theta \sin \phi,$$

essendo

$$k_z = \sqrt{k^2 - (k_x^2 + k_y^2)} = k \cos \theta.$$

Per $\theta = \pi/2$, il vettore $\mathbf{k}$ giace nel piano $z=0$ ($k_z=0$), formando un angolo ϕ con l'asse x , dato da

$$k_x = k \cos \phi, \quad k_y = k \sin \phi.$$

Supponendo fissato il valore di tale angolo, si può aumentare l'ampiezza delle componenti k_x e k_y (vedi fig. 2.26b) pur di rendere k_z immaginario, in modo che sia:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}' - j\mathbf{k}'' = k_x \mathbf{i}_x + k_y \mathbf{i}_y - j k_z \mathbf{i}_z$$

$$k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2 \epsilon \mu}, \quad k_x^2 + k_y^2 > \omega^2 \epsilon \mu ;$$

questo corrisponde, formalmente, a rendere l'angolo θ complesso

$$\theta = \frac{\pi}{2} + j\theta'', \quad k_z = k \sinh \theta''.$$

e a considerare un'onda piana la cui fase decresce linearmente spostandosi lungo $\mathbf{k}'$, mentre la sua ampiezza decresce esponenzialmente spostandosi lungo $\mathbf{k}''$. Le onde piane caratterizzate da vettori di propagazione con parti reali e coefficienti dell'immaginario non equidiretti sono dette *non omogenee*. Come viene spiegato in 2.7.8 e 2.7.9, esse possono esistere alla superficie di separazione tra due mezzi distinti (per tale motivo prendono anche il nome di *onde superficiali*), e hanno ampiezza apprezzabilmente diversa da zero solo se sufficientemente vicine alla superficie.

Annotazioni

*2.7.1 Riflessione di un'onda piana

Consideriamo un'onda piana proveniente da un semispazio di parametri ϵ_1, μ_1 , e incidente normalmente su un semispazio di parametri ϵ_2, μ_2 , come rappresentato nella figura 2.27. Affinché siano soddisfatte le condizioni al contorno nel punto di ascissa $z=0$, è possibile (come in 2.4.4) utilizzare la soluzione completa [3] (onda diretta e riflessa) in $z < 0$:

$$\begin{cases} E_1(z) = E_1^+ \exp(-jk_1 z) + E_1^- \exp(jk_1 z) \\ \zeta_1 H_1(z) = E_1^+ \exp(-jk_1 z) - E_1^- \exp(jk_1 z) \end{cases}$$

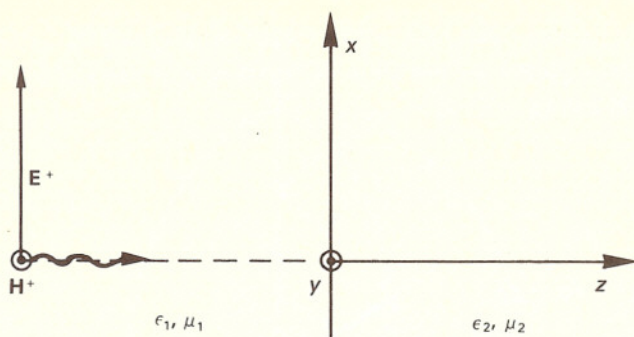


Figura 2.27

con $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, $\xi_1 = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$, e, in $z > 0$, la parte relativa alla sola onda diretta:

$$\begin{cases} E_2(z) = E_2^+ \exp(-jk_2 z) \\ \xi_2 H_2(z) = E_2^+ \exp(-jk_2 z), \end{cases}$$

con $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$, $\xi_2 = \sqrt{\mu_2 / \epsilon_2}$. Il teorema di unicità assicura, a posteriori, che la soluzione trovata è anche l'unica. La continuità dei campi, nel punto di ascissa $z=0$, richiede che sia

$$\begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \\ \frac{1}{\xi_1} (E_1^+ - E_1^-) = \frac{1}{\xi_2} E_2^+, \end{cases}$$

sistema che è facilmente risolto per i rapporti:

$$\Gamma = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\xi_2 + \xi_1},$$

coefficiente di riflessione per il campo elettrico nel punto di ascissa $z=0$, e

$$\tau = \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2\xi_2}{\xi_2 + \xi_1},$$

coefficiente di trasmissione per il campo elettrico nel punto di ascissa $z=0$.

Osserviamo che

$$1 + \Gamma = \tau.$$

Per il campo magnetico, infine, il coefficiente di riflessione è pari a $-\Gamma$, quello di trasmissione, a $(\xi_1 / \xi_2) \tau$.

*2.7.2 Profondità di penetrazione

Consideriamo il problema precedente, con i seguenti parametri per i mezzi 1 e 2.

Semispaio $z < 0$: $\epsilon_1 = \epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$

Semispaio $z > 0$: $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu_2 = \mu_0$, σ ;

il mezzo 2 è cioè caratterizzato da una permittività relativa ϵ_r e da una conducibilità σ . Facciamo inoltre l'ipotesi che

$$\sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon_r,$$

condizione, questa, che definisce i mezzi buoni conduttori: una stessa sostanza può, così essere considerata un conduttore buono o cattivo a seconda della frequenza. I metalli ($\sigma \approx 10^7$ S/m), fino alle frequenze ottiche, sono certamente ottimi conduttori.

La costante di propagazione nel conduttore è data da

$$k_2 = \omega \sqrt{\left(\epsilon_0 \epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega}\right) \mu_0} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (1-j) = \frac{1-j}{\delta},$$

dove

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad [8]$$

è detta *profondità di penetrazione*; il nome si giustifica osservando che il campo si attenua nel conduttore secondo la legge

$$\exp(-z/\delta).$$

La costante δ corrisponde dunque a uno spessore di conduttore tale che l'intensità del campo a un estremo risulti uguale a $1/e$ volte quella relativa all'altro estremo ($-8,69$ dB).

Nel caso di un metallo, lo spessore di penetrazione è sempre molto piccolo; ad esempio, per l'alluminio ($\sigma = 3,54 \times 10^7$ S/m) la penetrazione è di solo 8 mm già a 100 Hz, e a 10 GHz si riduce a 0,8 μm . Nei metalli, quindi, solo la parte esterna viene interessata al fenomeno elettromagnetico ($\omega \neq 0$). Questo da un lato giustifica la denominazione *effetto pelle* (o *skin effect*) per l'insieme dei fenomeni associati a un conduttore immerso in un campo elettromagnetico; dall'altro spiega come, nel passaggio dal mezzo esterno al conduttore, all'andamento continuo della componente tangenziale del campo magnetico si possa sostituire un (approssimato) andamento discontinuo. Infatti, la componente tangenziale del campo magnetico diventa trascurabile dopo pochi spessori di penetrazione; non si commette dunque un grande errore nel supporre che il campo magnetico tangente passi, in modo discontinuo, da un valore diverso da zero sulla superficie esterna del conduttore a un valore nullo all'interno.

Per meglio chiarire questo concetto, calcoliamo il flusso J_S (A/m) della densità di corrente indotta nel conduttore per un tratto unitario lungo l'asse y :

$$\begin{aligned} J_S &= \int_0^\infty \mathbf{J} \cdot \mathbf{i}_x \, dz = \int_0^\infty \sigma E_2^+ \exp(-jk_2 z) \, dz = \\ &= \sigma \frac{2\xi_2 E_1^+}{\xi_1 + \xi_2} \frac{1}{jk_2} \approx \frac{2E_1^+}{\xi_1} \frac{\sigma \xi_2}{jk_2} \approx \frac{2E_1^+}{\xi_1} = 2H_1^+; \end{aligned}$$

la densità lineare di corrente è dunque costante per $\sigma \gg \omega \epsilon_0$, ed è data da

$$\mathbf{J}_S = 2\mathbf{H}^+ \times \mathbf{i}_z.$$

Fissare condizioni al contorno di tipo discontinuo per la componente tangenziale del campo magnetico equivale a sostituire al vettore $\mathbf{J}$ (densità di corrente nel conduttore) la densità lineare di corrente $\mathbf{J}_S$ (flusso di $\mathbf{J}$ per unità di lunghezza lungo y).

La profondità di penetrazione può, in altre situazioni, essere rilevante; per esempio, nel caso di acqua di mare ($\sigma \approx 5 \text{ S/m}$), alla frequenza di 300 Hz si ha $\delta \approx 13 \text{ m}$. Questo spiega l'uso di basse frequenze per comunicare con i sommergibili.

*2.7.3 Propagazione per onde piane e linea di trasmissione equivalente

Sia data l'onda piana rappresentata nella figura 2.28:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(y, z) = E^+ \exp(-jk_y y - jk_z z) \mathbf{i}_x \\ \mathbf{H}(y, z) = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \left(\frac{k_z}{\omega\mu} \mathbf{i}_y - \frac{k_y}{\omega\mu} \mathbf{i}_z \right) E^+ \exp(-jk_y y - jk_z z), \end{cases}$$

$$k_y = k \sin \theta, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2};$$

si tratta di un'onda elettrica trasversale (TE) rispetto alla direzione z . Consideriamo ora le *componenti trasversali* del campo

$$\mathbf{E}_t(y, z) = [E^+ \exp(-jk_y y) \mathbf{i}_x] \exp(-jk_z z)$$

$$\mathbf{H}_t(y, z) = \frac{k_z}{\omega\mu} [E^+ \exp(-jk_y y) \mathbf{i}_z \times \mathbf{i}_x] \exp(-jk_z z).$$

Si nota subito un'analogia con la soluzione progressiva per la tensione e la corrente lungo una linea di trasmissione (equivalente) di impedenza caratteristica e costante di propagazione date rispettivamente da

$$Z_0 = \frac{\omega\mu}{k_z}, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}. \quad [9]$$

Perché l'analogia sia valida a tutti gli effetti, bisogna ancora verificare che le quantità in parentesi quadra soddisfino alle stesse condizioni al contorno cui soddisfano

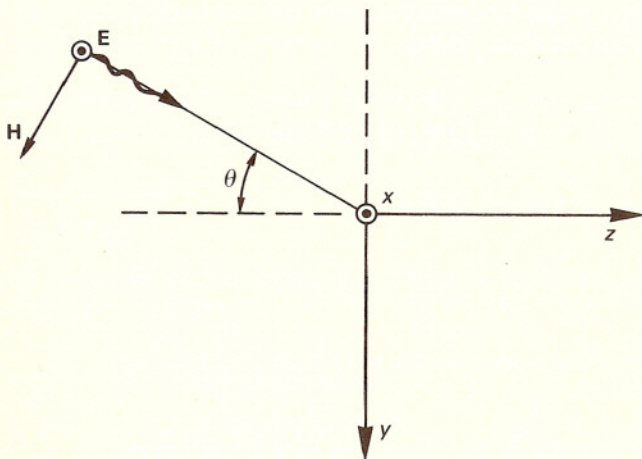


Figura 2.28

tensione e corrente lungo una linea di trasmissione. In corrispondenza di una discontinuità dei parametri della linea, tensione e corrente (totali) rimangono continui. Passando al caso delle onde, se le caratteristiche del mezzo cambiano bruscamente nel punto di ascissa $z=0$ (i parametri costitutivi sono diversi per $z>0$ e $z<0$, ma in ciascuno dei due semispazi non variano con x e y), si hanno onde dirette e riflesse in $z<0$ e onda trasmessa in $z>0$, se i generatori sono situati in $z<0$. Indicando con pedici 1 e 2 le onde nei semispazi $z<0$ e $z>0$ rispettivamente, per la continuità delle componenti tangenziali dei campi dev'essere

$$\begin{cases} E_1^+ \exp(-jk_y y) + E_1^- \exp(-jk_y y) = E_2^+ \exp(-jk_y y) \\ \frac{k_{z1}}{\omega \mu_1} [E_1^+ \exp(-jk_y y) - E_1^- \exp(-jk_y y)] = \frac{k_{z2}}{\omega \mu_2} E_2^+ \exp(-jk_y y); \end{cases}$$

la componente trasversale della costante di propagazione, k_y , è qui la stessa per l'onda diretta, per quella riflessa e per quella trasmessa, affinché le condizioni di continuità possano essere soddisfatte qualunque sia y .

L'analogia con la linea di trasmissione è ora completamente dimostrata. Essa è molto utile per studiare problemi di riflessione e trasmissione in mezzi stratificati.

*2.7.4 Linea equivalente per onde TM (esercizio)

Si consideri un'onda piana incidente con il campo magnetico tutto trasversale:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(y, z) = \frac{1}{\omega \epsilon} \mathbf{H} \times \mathbf{k} = \left(-\frac{k_z}{\omega \epsilon} \mathbf{i}_y + \frac{k_y}{\omega \epsilon} \mathbf{i}_z \right) H^+ \exp(-jk_y y - jk_z z) \\ \mathbf{H}(y, z) = \mathbf{i}_x H^+ \exp(-jk_y y - jk_z z), \end{cases}$$

$$k_y = k \sin \theta, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}.$$

Si mostri che la linea di trasmissione equivalente ha impedenza caratteristica e costante di propagazione rispettivamente date da

$$Z_0 = \frac{k_z}{\omega \epsilon}, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_y^2}. \quad [10]$$

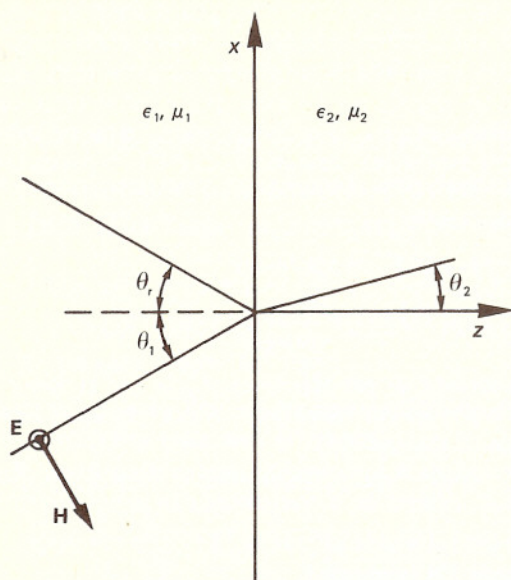
2.7.5 Coefficiente di riflessione di Fresnel

Sia data un'onda piana incidente, con un angolo θ_1 , su un semispazio di caratteristiche diverse, come rappresentato nella figura 2.29. Nella figura sono indicate le due diverse polarizzazioni possibili: TE, con campo elettrico normale al piano di incidenza (che contiene la direzione di incidenza e la normale al piano di separazione tra i due mezzi; vedi fig. 2.29a), e TM, con campo elettrico contenuto nel piano di incidenza (vedi fig. 2.29b). Il primo tipo di polarizzazione è denominato *polarizzazione normale*, il secondo, *polarizzazione parallela*. Si vogliono calcolare i coefficienti di riflessione (detti di *Fresnel*) per le due polarizzazioni.

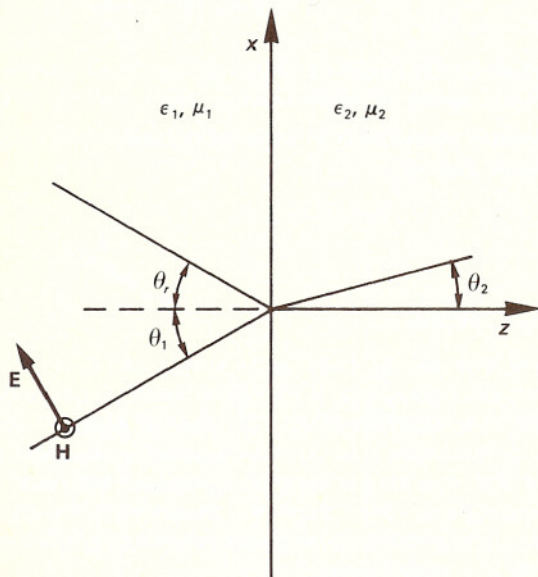
Le caratteristiche del mezzo sono le seguenti: per $z<0$, parametri ϵ_1, μ_1 ; per $z>0$, parametri ϵ_2, μ_2 . L'uguaglianza della costante di propagazione trasversale k_y per l'onda diretta e riflessa implica

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r,$$

dove θ_i e θ_r sono gli angoli di incidenza e di riflessione. Ne consegue la cosiddetta *legge*



(a)



(b)

Figura 2.29
Incidenza obliqua su un semispazio dielettrico.

della riflessione dell'ottica: angoli di incidenza e riflessione sono uguali. Si noti che il risultato precedente è stato ricavato nel caso di un'onda incidente piana. A frequenze ottiche, tuttavia, la quasi totalità delle onde può riguardarsi come localmente piana, e questo giustifica la generale validità della legge di riflessione in questo campo di frequenze.

L'uguaglianza della costante k_y per l'onda diretta e trasmessa implica

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2,$$

dove θ_2 è l'angolo di rifrazione; di conseguenza

$$\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \sin \theta_1 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \theta_2;$$

o anche, detto $n = \sqrt{\epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0}$ l'indice di rifrazione del mezzo,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad [11]$$

che è la legge di rifrazione ottica di Snellius. Si noti ancora che

$$\sqrt{k_1^2 - k_y^2} = \omega n_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = \omega n_1 \cos \theta_1$$

$$\sqrt{k_2^2 - k_y^2} = \omega \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}.$$

Per il caso di polarizzazione normale si ha, in base ai risultati 2.7.3,

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 - \mu_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}{\mu_2 n_1 \cos \theta_1 + \mu_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1}}; \quad [12]$$

mentre per la polarizzazione parallela si ha (vedi 2.7.4)

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\epsilon_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} - \epsilon_2 n_1 \cos \theta_1}{\epsilon_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} + \epsilon_2 n_1 \cos \theta_1}. \quad [13]$$

Osserviamo che nelle espressioni [12], [13] figura solo l'angolo di incidenza θ_1 (oltre naturalmente ai parametri dei due mezzi).

2.7.6 Angolo di Brewster

Con riferimento al problema della figura 2.29, con $\mu_2 = \mu_1 = \mu_0$, vogliamo determinare (ammesso che esista) un angolo di incidenza θ_B per cui non si abbia onda riflessa. Per la polarizzazione normale (vedi la formula [12]) dev'essere

$$n_1^2 \cos^2 \theta_B = n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_B,$$

il che implica $n_1 = n_2$, cioè $\epsilon_1 = \epsilon_2$. Se i mezzi sono diversi, non vi è alcun angolo con questa caratteristica. Per la polarizzazione parallela (vedi la [13]) la condizione di assenza di riflessione è data da

$$\epsilon_1^2 (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_B) = \epsilon_2^2 n_1^2 \cos^2 \theta_B,$$

cioè

$$\sin^2 \theta_B = \frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}. \quad [14]$$

La [14] individua il cosiddetto *angolo di Brewster*, che corrisponde ad assenza di riflessione con polarizzazione parallela. Se l'onda incidente è a polarizzazione arbitraria, in corrispondenza all'angolo di Brewster l'onda riflessa è solo quella a polarizzazione normale, quella parallela essendo stata totalmente trasmessa nel semispazio a destra. L'onda riflessa risulta pertanto polarizzata linearmente; su tale fenomeno si basano alcuni tipi di polarizzatori.

2.7.7 Pseudoangolo di Brewster (esercizio)

Si mostri che per polarizzazione parallela con $\epsilon_2 = -j\sigma/\omega$, $\sigma/\omega\epsilon_1 \gg 1$, $\mu_1 = \mu_2$, il coefficiente di riflessione è minimo per un angolo $\bar{\theta}_B$ (*pseudoangolo di Brewster*) dato da

$$\cos^2 \bar{\theta}_B \approx \frac{\omega\epsilon_1}{\sigma}.$$

2.7.8 Riflessione totale

Con riferimento alla figura 2.29, consideriamo il caso

$$\frac{n_1}{n_2} > 1.$$

Esiste allora un angolo di incidenza θ_t , detto *angolo limite*, o di *riflessione totale*, definito da

$$\sin \theta_t = \frac{n_2}{n_1}, \quad [15]$$

tale che l'onda emergente si propaga lungo y (perché $k_{z2} = 0$). Per angoli di incidenza $\theta_1 > \theta_t$,

$$k_{z2} = \omega \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_1} = -jk_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1}$$

e l'onda nel semispazio $z > 0$ diventa superficiale.

L'appellativo "riflessione totale" si giustifica in ottica perché, per $k_2 \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$), basta spostarsi di pochissimo dal piano $z=0$ nel semispazio $z \geq 0$ perché il valore del campo trasmesso diventi trascurabile. Una giustificazione diversa, valida anche nel campo delle radiofrequenze, si ottiene calcolando, ad esempio, il valore dell'impedenza caratteristica della linea di trasmissione equivalente (per incidenza TE) per angoli maggiori di quello limite:

$$Z_0 = \frac{\omega\mu_2}{-jk_2 \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1}},$$

valore che risulta puramente immaginario (se i mezzi non hanno perdite). Per angoli di incidenza maggiori dell'angolo limite non vi è dunque flusso di potenza reale nel verso positivo dell'asse z , per $z > 0$: $|\Gamma(z < 0)| = 1$.

2.7.9 Onde superficiali guidate

Consideriamo ora il caso (illustrato in fig. 2.30) di un piano metallico ricoperto per uno spessore d da un dielettrico di permittività (relativa al mezzo 1) ϵ_r . Si vuole stabilire se lungo tale struttura possa propagarsi un'onda guidata lungo l'asse z .

Suppiamo che nei due mezzi esistano onde piane con costante di propagazione giacente nel piano della figura. La componente secondo z delle due costanti di propagazione dev'essere la stessa, per $x < 0$ e $x > 0$, in modo che le condizioni al contorno, per $x=0$, siano verificate per qualunque z (vedi 2.7.3). Detta k_z tale componente, si ha

$$k_0^2 = k_z^2 + k_{x1}^2, \quad k_0^2 \epsilon_r = k_z^2 + k_{x2}^2, \quad k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0,$$

dove k_{x1} , k_{x2} , sono le componenti secondo x (per ora incognite) delle costanti di propagazione nei mezzi 1 e 2; esse non sono indipendenti, avendosi dalla relazione precedente

$$k_{x2}^2 - k_{x1}^2 = k_0^2 (\epsilon_r - 1).$$

Per determinare k_{x2} , consideriamo la linea di trasmissione equivalente *lungo l'asse x* (si tratta dell'unica possibile linea di trasmissione equivalente, perché solo lungo x le caratteristiche del mezzo sono uniformi in ogni piano trasversale; vedi 2.7.3). Le possibili onde naturalmente sostenute dalla struttura, o *modi di propagazione guidata*, si ottengono imponendo la condizione di risonanza [7] (§ 2.6), che in questo contesto è giusto chiamare *trasversale*. Scegliendo come sezione di riferimento $x=0$, si ha, per modi TE rispetto a x ,

$$\frac{\omega \mu_0}{k_{x1}} + j \frac{\omega \mu_0}{k_{x2}} \operatorname{tg} k_{x2} d = 0.$$

Questa relazione è verificata se k_{x1} è immaginario puro:

$$k_{x1} = -j k_{x1}'', \quad k_{x1}'' = \sqrt{k_0^2 (\epsilon_r - 1) - k_{x2}^2} \geq 0.$$

Posto

$$k_{x2} d = u, \quad k_0^2 (\epsilon_r - 1) d^2 = v^2,$$

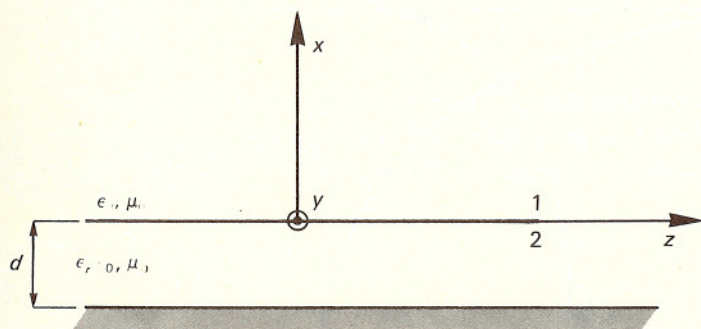


Figura 2.30
Guida dielettrica superficiale.

l'equazione da risolvere diventa la seguente (per $u \neq 0$):

$$\operatorname{tg} u = \frac{-u}{\sqrt{v^2 - u^2}}, \quad u^2 \leq v^2,$$

la cui soluzione grafica è riportata nella figura 2.31. Perché l'onda guidata possa esistere, dev'essere

$$v = k_0 \sqrt{\epsilon_r - 1} d \geq \frac{\pi}{2}.$$

Per $x > 0$ si ha un'onda superficiale; è $k_z > k_0$, e quindi la velocità di fase risulta minore di quella della propagazione libera nello stesso mezzo: un'onda di questo tipo viene detta *lenta*. Al contrario, per $x < 0$, $k_z < k_0 \epsilon_r$, si è in presenza di un'onda *veloce*.

Per la propagazione guidata di onde TM rispetto a x valgono considerazioni analoghe. L'equazione alla quale si perviene è la seguente:

$$\operatorname{tg} u = \frac{\epsilon_r \sqrt{v^2 - u^2}}{u}, \quad u = k_{x2} d, \quad u^2 \leq v^2 = k_0^2 (\epsilon_r - 1) d^2,$$

dove k_{x2} è ora la costante di propagazione secondo x per i modi TM.

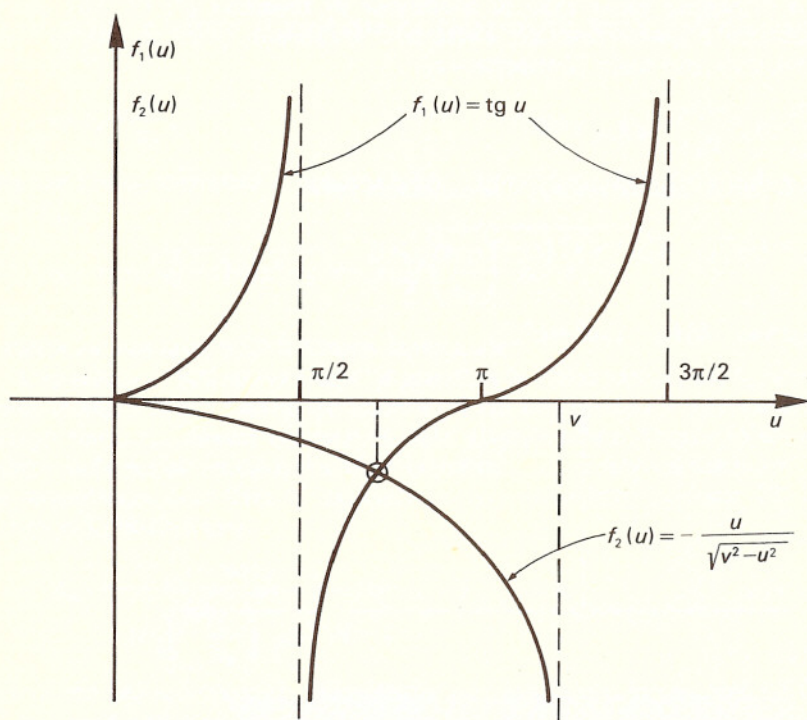


Figura 2.31

Soluzione grafica per il calcolo delle costanti di propagazione dei modi guidati da un piano metallico caricato con dielettrico.

2.7.10 Teorema dell'energia per le onde piane

Come si è visto in 1.3.4, per un segnale a banda stretta, in un mezzo privo di perdite e in assenza di sorgenti, si deve avere

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} |E|^2 + \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} |H|^2 \right) \right] = 0, \quad [16]$$

dove E, H , sono le parti lentamente variabili dei campi. Nel caso di onde piane, tutte propagantisi con identica polarizzazione lungo l'asse z , il segnale a banda stretta dà luogo a un pacchetto d'onde (§ 2.3) e si può porre

$$\mathbf{E} = A \frac{\sin u}{u} \mathbf{i}_x, \quad \mathbf{H} = \frac{A}{\xi} \frac{\sin u}{u} \mathbf{i}_y, \quad u = \Delta\beta z - \Delta\omega t, \quad [17]$$

dove A è $4\Delta\beta$ volte l'ampiezza (complessa) dello spettro del campo elettrico per $\beta = \beta_0$.

Sostituiamo le espressioni [17] nell'equazione [16]; poiché

$$\frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\xi} \mathbf{i}_z, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\Delta\omega \frac{d}{du}, \quad \nabla \cdot \rightarrow \Delta\beta \mathbf{i}_z \cdot \nabla,$$

si ha

$$\frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\xi} - w_{em} v_g \right\} = 0.$$

Posta uguale a zero la costante di integrazione, si ha

$$\frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\xi} = w_{em} v_g. \quad [18]$$

La [18] mostra che il valor medio (temporale) della densità di energia elettromagnetica del pacchetto si sposta con la velocità di gruppo.

2.8 Riepilogo

In questo capitolo si sono presentate le idee fondamentali riguardanti il fenomeno della propagazione elettromagnetica. Per prima cosa, si è osservato che le onde possono essere descritte o da equazioni di tipo *iperbolico*, come la classica *equazione d'onda*

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0,$$

o dall'*equazione di dispersione*

$$\omega = \omega(\beta).$$

Nel caso dei mezzi lineari, il secondo tipo di descrizione comprende il primo, potendosi sempre la funzione d'onda esprimere come integrale di Fourier.

Particolarmente utile, nel descrivere le caratteristiche generali della propagazione, si dimostra il concetto di *pacchetto d'onda*, cioè di un segnale la cui *banda* (nel dominio della frequenza, e anche in quello del numero d'onda) è molto stretta. La forma del pacchetto non cambia in modo apprezzabile in intervalli spaziali o temporali sufficientemente piccoli, ed esso si propaga con *velocità di gruppo*

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta},$$

calcolata al centro della banda.

Il più semplice tipo di propagazione si ha quando l'onda è funzione di una sola coordinata spaziale e dalla coordinata temporale; ne è un esempio la propagazione lungo le *linee di trasmissione*. Per queste, conviene considerare come rappresentazione dell'onda la coppia tensione-corrente, oppure la coppia flusso dell'induzione elettrica-flusso dell'induzione magnetica, ottenendo in un caso il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases},$$

nell'altro il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial \Psi}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases}.$$

Il primo sistema si riferisce a linee *stazionarie*, e può essere convenientemente trasformato nel dominio della frequenza, il secondo a linee *spazialmente omogenee*, e può essere convenientemente trasformato nel dominio del numero d'onda.

Un altro esempio di propagazione è quello per *onde piane*, caratterizzate (in un mezzo isotropo omogeneo) da un vettore elettrico e da un vettore magnetico mutuamente ortogonali, ortogonali alla direzione di propagazione e in un rapporto (delle loro ampiezze) pari all'*impedenza intrinseca* del mezzo:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\zeta} \mathbf{i}_k \times \hat{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{i}_k = \frac{\mathbf{k}}{k}.$$

Se il mezzo è non dispersivo, un'onda piana si propaga con velocità costante $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ senza deformarsi.

La presenza di generatori corrisponde alla inclusione di *termini di sorgente* nelle equazioni differenziali che descrivono il processo propagativo. Nel caso semplice di

linee di trasmissione in regime sinusoidale con *generatori ideali* (spazialmente) impulsivi di tensione (serie) e di corrente (parallelo) si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j\omega LI - V_G \delta(z - z'') \\ -\frac{dI}{dz} = j\omega CV - I_G \delta(z - z'). \end{cases}$$

Una linea di trasmissione, caricata ai suoi estremi, è in risonanza se la somma delle impedenze (o ammettenze), in una sua qualunque sezione, è nulla:

$$\bar{Z} + \bar{Z} = 0.$$

Questa condizione è detta di *risonanza longitudinale*.

Traduzione delle citazioni riportate all'inizio del capitolo

La luce si propaga e si diffonde non solo direttamente, per rifrazione e riflessione, ma anche in un quarto modo, per diffrazione.

Aperto in una finestra un piccolissimo foro *AB*, si lasci filtrare attraverso esso in una stanza, per altro immersa nell'oscurità, la luce del sole splendente in un cielo sereno. Questa luce si propaga secondo un cono, o una figura quasi conica, *ACDB*, che è visibile se l'aria contiene una quantità di particelle di polvere o se viene prodotto del fumo. Un corpo opaco *EF* sia inserito in questo cono a grande distanza dall'apertura *AB*, cosicchè almeno un suo spigolo sia illuminato.

Alla base del cono di luce, nelle zone *CM* e *ND*, nitide e fortemente illuminate, è possibile distinguere una gamma di righe o serie di luci colorate. La luce è pura e naturale nel centro di ciascuna di queste serie, ma colorata ai bordi, cerulea vicino all'ombra *MN* e rosa all'estremità opposta.

F. M. Grimaldi, *Physico-matheris de lumine, coloribus et iride aliisque adnexis* (Bologna 1665).

Così le infinite onde che nello stesso istante si originano da tutti i punti di una stella fissa, per esempio grande come il sole, vengono percepite come un'unica onda, la quale può ben essere forte abbastanza da impressionare i nostri occhi. Oltre che da ogni punto luminoso, possono originarsi onde a migliaia, nel minimo tempo immaginabile, in seguito all'urto continuo dei corpuscoli che colpiscono l'etere in questi punti, il che contribuisce ulteriormente a rinforzare la loro azione. Bisogna anche tener presente che nella emanazione di tali onde ogni particella di materia in cui si genera un'onda trasmette il suo movimento non solo alla particella vicina, posta sulla retta tracciata dal punto luminoso, ma anche, necessariamente, a tutte le altre che la toccano e si oppongono al suo movimento. Talché avviene che intorno ad ogni particella si sviluppa un'onda di cui quella particella è il centro.

C. Huygens, *Traité de la lumière* (Leida 1690).

Non sono forse errate tutte le ipotesi secondo cui la luce consiste in pressione, o in spostamento che si propaga attraverso un mezzo fluido? Se essa consistesse in pressione o in spostamento, propagantesi istantaneamente o in tempo finito, piegherebbe nell'ombra. Perché pressione o spostamento, in un fluido, non possono propagarsi in linea retta al di là di un ostacolo che fermi in parte il moto, ma piegandosi, si diffondono per ogni dove nel mezzo in quiete che si trova dietro l'ostacolo. Le onde sulla superficie dell'acqua stagnante, passando ai lati di un grosso ostacolo che fermi parte di esse, si piegano al di là e si espandono gradualmente nell'acqua cheta dietro l'ostacolo. Le onde, gli impulsi, le vibrazioni dell'aria, di cui consistono i suoni, chiaramente si piegano, anche se non tanto come le onde nell'acqua. Ecco perché una campana o un cannone possono

essere uditi al di là di una collina che impedisce la vista dell'oggetto che produce il suono; e i suoni si propagano attraverso i condotti sia dritti sia tortuosi. Ma non si è mai saputo che la luce segua condotti tortuosi o si pieghi verso la zona d'ombra. Infatti, le stesse fisse non sono più visibili se tra esse e l'osservatore si interpone uno qualunque dei pianeti. E così accade a parte del Sole per interposizione della Luna, di Mercurio o di Venere. I raggi che passano molto vicino allo spigolo di un corpo piegano leggermente per azione del corpo, ma questa deviazione non è nella direzione dell'ombra, bensì in quella opposta, ed è prodotta solo al passaggio del raggio vicino al corpo, e a piccolissima distanza da esso. Subito dopo aver oltrepassato il corpo, il raggio continua il suo percorso in linea retta.

I. Newton, *Scritti di ottica*, in "Opere", trad. it. (Utet, Torino 1977-78). Ed or.: 1717.

E' certamente affascinante l'idea che i fenomeni che hanno luogo nell'aria e su cui noi abbiamo indagato siano una rappresentazione, su scala un milione di volte più grande, di quanto accade in prossimità di uno specchio di Fresnel o tra le lastre di vetro usate per evidenziare gli anelli di Newton.

H. Hertz, *Über elektrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion*, Wiedemanns Annln, 34 (1888).

Riferimenti bibliografici

- Franceschetti G., *Scattering from Plane-layered Media*, IEEE Trans. Antennas Propag., 12, N. 6, 754-63 (nov. 1964).
- Felsen L. B. e Marcuvitz N., *Modal Analysis and Synthesis of Electromagnetic Fields*, Rep. R. 446a, b del Microwave Research Institute (Brooklyn Polytechnic Institute, New York 1956).
- *Radiation and Scattering of Waves* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1973) pp. 215-17.
- Gradshteyn I. S. e Ryzhik I. M., *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York 1965) p. 395, equazione 1.
- Jeffreys H. e Jeffreys B. S., *Methods of Mathematical Physics* (Cambridge University Press, Londra, 3^a ed. 1956) § § 17.04 sg.
- Johnson W. C., *Transmission Lines and Networks* (McGraw-Hill, New York 1950) pp. 128-43.
- Luke J. C., *A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface*, J. Fluid. Mech., 27, 395-97 (1967).
- Smith P. H., *Transmission Line Calculator*, Electronics, 29 (genn. 1939).
- *An Improved Transmission Line Calculator*, loc. cit., 130 (genn. 1944).
- Sugai I., *A Table of Solutions of Riccati's Equations*, Proc. IRE, 50, N. 10, 2124-26 (1962).
- Whitham G. B., *Linear and Non-linear Waves* (Wiley, New York 1974) cap. 1, p. 2.

Capitolo 3

Rappresentazione

*Guide d'onda e antenne a microonde alla fine del secolo scorso **

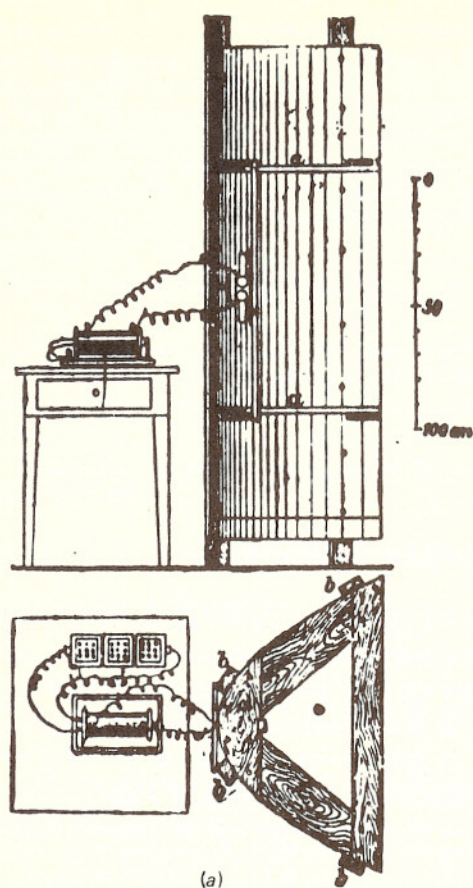
Tra il 1887, anno dei famosi esperimenti di Hertz sulla radiazione elettromagnetica e il 1900, anno in cui Marconi iniziò con successo i suoi collegamenti radio su onde lunghe, si registra un vivo interesse dei fisici per le microonde, soprattutto in relazione alla possibilità, messa in luce da Heinrich Hertz, di spiegare mediante esse l'intera fenomenologia dell'ottica: "Si ha davvero l'impressione che queste formule matematiche abbiano una esistenza indipendente, e siano anzi più sagge di noi, più sagge persino dei loro scopritori, e che se ne possa ricavare più di quanto in origine era dato di sperare" (Hertz, 1893).

Le ricerche nel campo delle microonde subirono tuttavia una battuta di arresto quando si scoprì che onde di lunghezza maggiore erano più adatte (in relazione ai dispositivi sperimentali del tempo) alle comunicazioni a grande distanza, e finirono in pratica con l'essere abbandonate. Solo agli inizi della seconda guerra mondiale, per la necessità di sviluppare sistemi di comunicazione direttivi e sistemi di radiolocalizzazione, si tornò con grande impegno sull'argomento, riscoprendo tecniche e componenti già sperimentati alla fine del secolo scorso.

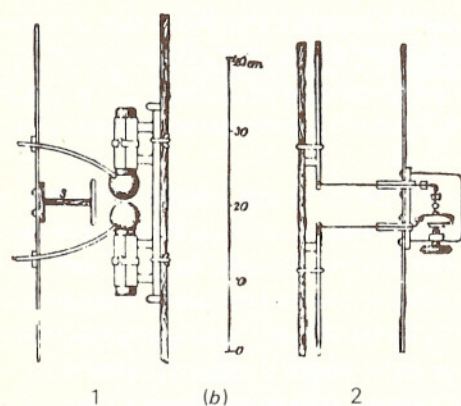
Dei primi esperimenti sulle microonde colpisce ancor oggi l'ingegnosità. Hertz, per esempio, per giungere a risultati di importanza storica (come la conferma sperimentale della teoria maxwelliana della natura elettromagnetica della luce) si servì di un dispositivo semplicissimo (vedi fig. A) che sfruttava la nota proprietà ottica del fuoco di una parabola: "Non appena mi riuscì di dimostrare che l'azione di un'oscillazione elettrica si propaga nello spazio come un'onda, studiai il modo di concentrare tale azione e di renderla percepibile a grande distanza collocando il conduttore primario [il dipolo] sulla linea focale di un grande specchio parabolico concavo" (Hertz, 1893).

* Per una informazione più dettagliata sull'argomento si rimanda a Ramsay (1958).





(a)



1

(b)

2

Figura A

In (a) è raffigurato il riflettore parabolico usato da Hertz nel 1888 per l'irradiazione di un'onda di 66 cm; in (b) il disegno dello stesso Hertz dell'oscillatore a dipolo in 1) trasmissione e 2) ricezione. (Hertz, 1893)

Non molto diversa era l'apparecchiatura di cui si servì il bolognese Augusto Righi per effettuare una serie di esperienze, riassunte nell'*Ottica delle oscillazioni elettriche* (1897), che fanno di lui il più degno continuatore di Hertz nel dare basi sperimentali alla teoria di Maxwell. La lunghezza d'onda della radiazione utilizzata dal Righi (prodotta da uno speciale oscillatore di sua costruzione) era tuttavia inferiore (3 o 10 cm, cioè nelle bande *X* e *S*) a quella con cui operava il fisico tedesco, onde ottenere un fascio riflesso più definito e di conseguenza una migliore approssimazione delle leggi dell'ottica classica. La figura B illustra appunto uno dei suoi celebri esperimenti. A questo proposito bisogna tuttavia ricordare che gli interessi della maggioranza dei seguaci di Hertz, più che all'ottica, considerata argomento superato, erano rivolti ai problemi connessi alla trasmissione e alla ricezione delle microonde. Così, sempre più numerosi erano gli "hertziani" attratti dal virtuosismo ingegneristico di Guglielmo Marconi, un ex allievo di Righi assunto a grande notorietà e prestigio per via dei suoi esperimenti di trasmissione "intelligente" dei segnali mediante modulazione dell'oscillazione (nel suo primo esperimento del 1897 a Salisbury Plain, in Inghilterra, si servì egli pure di riflettori cilindrici a sezione parabolica, per la trasmissione "senza fili" di onde di 25 cm; vedi Marconi, patente del 1896).

La popolarità di questo tipo di antenna a sezione parabolica era senza dubbio legata alla semplicità della sua costruzione: ovviamente, un paragone con le prestazioni dei moderni riflettori parabolici a doppia curvatura è improponibile! Una variante è data dal riflettore cilindrico a sezione circolare, realizzato nel 1896 da un fisico di Calcutta, sir Jagadis Chandra Bose, per esperimenti su lunghezza d'onda di 5 millimetri (Bose, 1927). Il nome del bengalese è anche legato all'invenzione di un'originale antenna, oggi chiamata *trombino elettromagnetico*, destinata alla ricezione, le cui caratteristiche operative vennero da Bose stesso illustrate nel 1897 a Londra, nel corso di una conferenza alla Royal Institution. L'antenna faceva parte di un sistema completo "per lo studio delle proprietà delle onde elettriche" (Bose, 1896), in sostanza uno spettrometro per microonde, che Bose aveva trasportato a bella posta dall'India insieme con una quantità di componenti quasi ottici (vedi fig. C). Connesso "all'imbuto collettore" (*collecting funnel*) era un ingegnoso rivelatore "a semiconduttore", costituito da un insieme di molle metalliche a forma di spirale, sottoposte a una pressione regolabile e a un'opportuna tensione di polarizzazione. Talvolta egli usava come radiatore un semplice tubo di sezione rettangolare o circolare al cui estremo era solito collocare una *lente* affinché la radiazione risultasse più intensa. Un esempio di un'antenna siffatta (oscillatore in guida d'onda, più lente schermata, o *shielded lens*) è riportato nella figura D. Ancor prima di Bose fu Lodge (nel 1894) a fornire una convincente dimostrazione sperimentale, sempre alla Royal Institution di Londra, delle possibilità offerta dalle guide d'onda per lo studio della fenomenologia delle microonde; la figura E mostra appunto l'apparecchiatura da lui usata in quella circostanza. Pochi anni dopo le sue scoperte sulle proprietà *modali* della propagazione di un'onda in una cavità ricevettero da parte di lord Rayleigh una compiuta spiegazione nell'ambito della teoria di Maxwell.

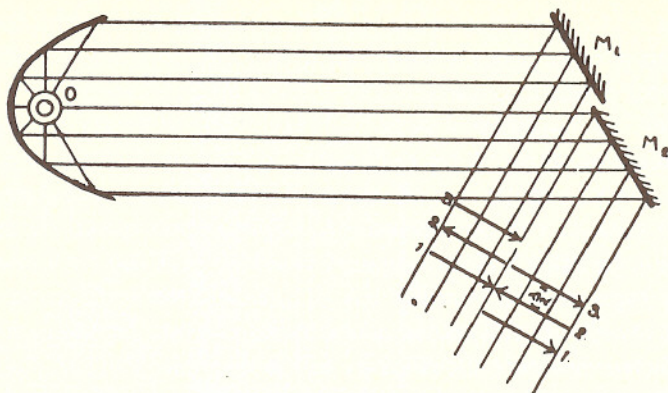


Figura B

Esperimento di interferenza tra due specchi di Fresnel realizzato da Righi con un'onda di 3 cm: i raggi riflessi dei due fasci hanno la stessa differenza di fase in tutti i punti, e il grado di interferenza dipende dalla distanza tra gli specchi M_1 e M_2 . (Poincaré e Vreeland, 1905)

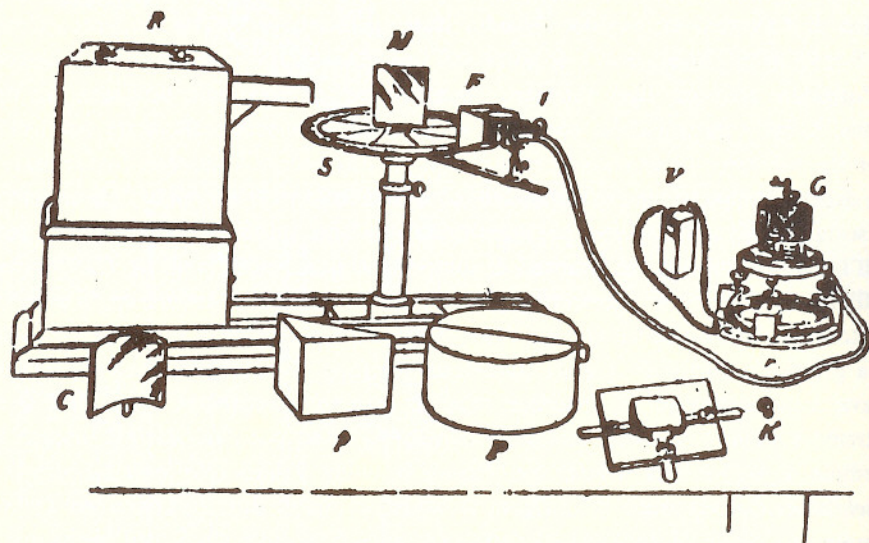


Figura C

Spettrometro per microonde usato da Bose nella sua dimostrazione del 1897. Componenti: R , radiatore; S , cerchio spettrometrico; M , specchio piano; C , specchio cilindrico; p , prisma a riflessione totale; P , semicilindri; K , portacristalli; F , imbuto collettore collegato al rivelatore a molle; t , vite tangenziale per la rotazione del ricevitore; V , elemento di pila di Volta; r , reostato circolare; G , galvanometro. (Bose, 1927)

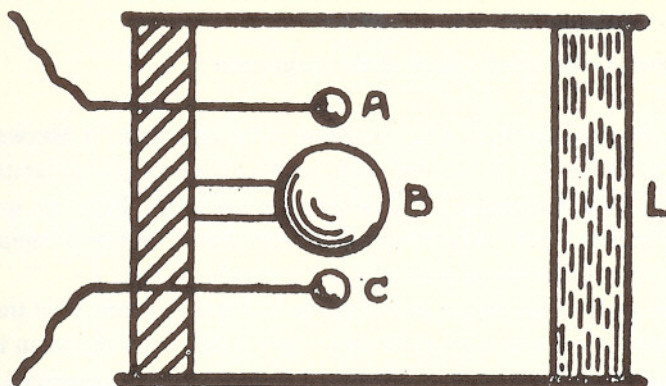


Figura D

Antenna usata da Bose nel 1897 per l'irradiazione di onde elettromagnetiche di lunghezza compresa tra 5 mm e 2,5 cm (*oscillatore di Bose*). La sfera di platino *B*, isolata, è la sorgente delle oscillazioni; le sfere *A* e *C* sono collegate allo spinterometro; la lente cilindrica *L* ha lo scopo di intensificare la radiazione. (Bose, 1927)

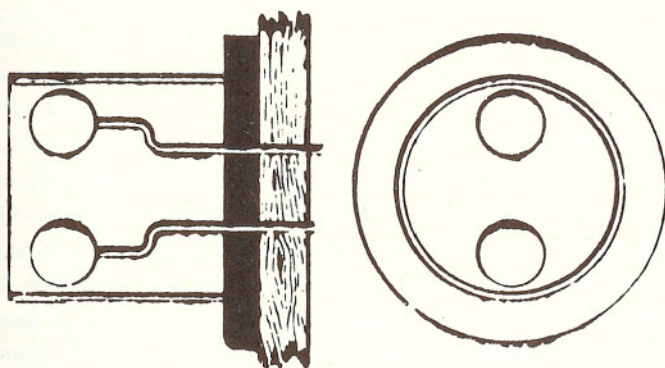


Figura E

Radiatore realizzato da Lodge nel 1894 e operante su lunghezza d'onda da 7,5 a 20 cm; l'eccitazione è posta dentro una cavità (aperta) cilindrica (*copper hat*). (Lodge, 1898)

Nell'ottica delle microonde, un capitolo importante è quello dei fenomeni di polarizzazione, un campo in cui gli "hertziani" eccellevano, come dimostrano gli studi di Righi (1897), di Bose (1898) e prima ancora dello stesso Hertz (1893). Meritano infine un cenno le ricerche condotte in quel periodo (essenziali per la realizzazione dei dispositivi e delle apparecchiature esaminati) sulle proprietà dei dielettrici, in gran parte sulla base di lavori originali di Hertz. Tra i materiali insoliti studiati da quest'ultimo vi erano la carta ("feci una pila di libri fino a formare un parallelepipedo lungo 1,5 m, largo 0,5 m e alto 1 m") lo zolfo, la pece artificiale e addirittura l'asfalto (Hertz, 1893).

3.1 Rappresentazione analitica del campo elettromagnetico

Qualunque campo elettromagnetico è la soluzione delle equazioni di Maxwell, quando siano assegnati i generatori, le relazioni costitutive che specificano le caratteristiche del mezzo, le condizioni iniziali e le condizioni al contorno. Risolvere quel sistema di equazioni significa anche, implicitamente, saper rappresentare il campo, conoscerne cioè i valori in ciascun punto dello spazio e in ciascun istante.

Tale rappresentazione può essere realizzata in due modi. Il primo consiste nel tracciare una specie di mappa che faccia corrispondere ad ogni punto dello spazio un insieme di numeri che descrivono completamente il campo in quel punto: ad esempio, le componenti dei vettori del campo in un sistema di riferimento arbitrario. Perché il procedimento sia di utilità pratica, si devono discretizzare le coordinate spaziali e temporali, costruendo una specie di reticolo e assegnando i valori del campo in tutti i vertici di questo; negli spazi intermedi il campo può essere stimato per interpolazione. Quella che è stata sommariamente descritta è una *rappresentazione numerica*, oggi possibile grazie all'impiego di calcolatori ad ampia memoria e ad accesso rapido; dal punto di vista delle applicazioni, si tratta di una tecnica soddisfacente.

Il secondo modo consiste in una rappresentazione di tipo *analitico*, nel senso che il campo è espresso mediante funzioni note; a differenza del primo procedimento, non è applicabile ad ogni situazione.

Storicamente, la rappresentazione mediante funzioni, o *espansione modale*, ha preceduto quella numerica; non di rado essa consente, sfruttando le proprietà delle funzioni (*modi*), di spiegare le caratteristiche generali del campo elettromagnetico, indipendentemente dal particolare problema considerato. Si tratta di un vantaggio non trascurabile, almeno nella misura in cui la scienza non può appagarsi della semplice descrizione del fenomeno, ma deve mirare alla sua comprensione. La tecnica numerica applicata all'elettromagnetismo è ancora agli inizi e può darsi che, opportunamente raffinata, sia capace di fornire una visione più chiara dei fenomeni, ma anche in tal caso, difficilmente si riuscirà a fare a meno dello studio analitico del campo; è anzi probabile che si arrivi a una specie di fusione tra i due metodi per vie già indicate da alcuni autori (Harrington e Mautz, 1971; Harrington, Mautz e Chang, 1972).

In sostanza il problema della rappresentazione modale di un campo elettromagnetico non è dissimile da quello di una rappresentazione di una funzione del tempo in serie (o integrale) di Fourier. Si consideri il semplice caso della funzione periodica rappresentata nella figura 3.1. Le funzioni adatte per lo sviluppo (*funzioni di base*) sono le seguenti:

$$\sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

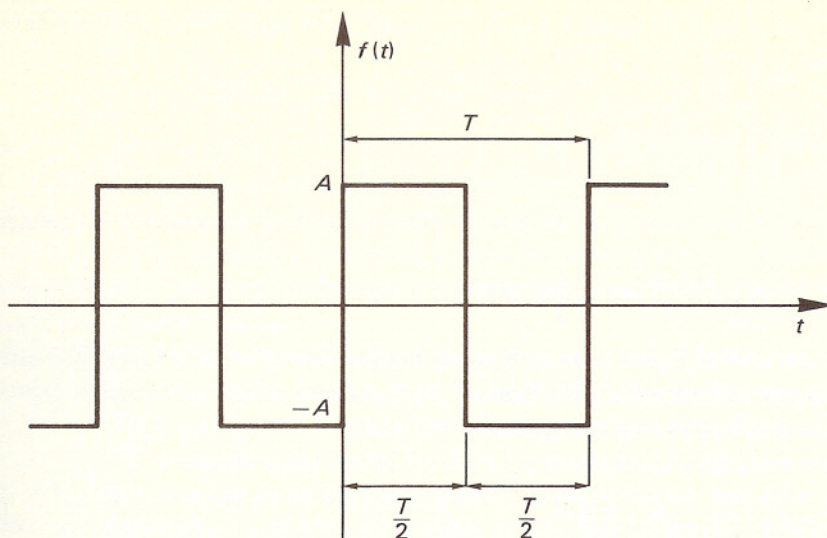


Figura 3.1

Grafico della funzione periodica $f(t)$.

Poniamo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right);$$

moltiplicando a destra e sinistra per $\sin(2m\pi t/T)$ e tenendo conto che

$$\int_0^T \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right) \sin\left(2m\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{T}{2} \delta_{nm},$$

si ha, integrando,

$$\frac{A_m T}{2} = \int_0^T f(t) \sin\left(2m\pi \frac{t}{T}\right) dt = \frac{AT}{m\pi} (1 - \cos m\pi).$$

Da questa relazione si può ricavare A_m e di conseguenza lo sviluppo per la funzione $f(t)$:

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[2(2n+1)\pi \frac{t}{T}\right]. \quad [1]$$

Il precedente esempio è indicativo delle tecniche che vengono adoperate per l'analisi degli *spazi lineari* (Friedman, 1961). Vi si considera infatti un particolare spazio lineare $\mathcal{L}$: l'insieme di tutte le funzioni dispari reali, di periodo T , a quadrato

sommabile nel periodo. Detti x e y due elementi dello spazio $\mathcal{L}$, si definisce in esso un *prodotto scalare*

$$\langle x, y \rangle = \int_0^T x(t) y(t) dt. \quad [2]$$

In $\mathcal{L}$ è poi introdotto un sistema di *elementi di base* linearmente indipendenti

$$\langle x_n \rightarrow \sin \left[2(2n+1) \pi \frac{t}{T} \right];$$

il sistema è *completo*, nel senso che un qualunque elemento dello spazio può essere rappresentato come combinazione lineare degli elementi di base, convergente secondo la metrica indotta dal prodotto scalare.¹

Gli elementi della base sono *ortogonali*, nel senso che

$$\langle x_n, x_m \rangle = 0 \quad \text{per } n \neq m, \quad [3]$$

e possono essere resi *ortonormali*:

$$\langle x_n \rightarrow \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left[2(2n+1) \pi \frac{t}{T} \right]$$

in modo che

$$\langle x_n, x_m \rangle = \delta_{nm}. \quad [4]$$

In questo caso l'elemento x dello spazio è rappresentato, nella base $\langle x_n$, come segue:

$$x(t) = \sum_n \langle x, x_n \rangle \langle x_n. \quad [5]$$

Nel semplice esempio considerato, la base $\langle x_n$ è formata da funzioni ortogonali che possono essere rese ortonormali (vedi la [4]), e il prodotto scalare è definito semplicemente come l'integrale, esteso al periodo, del prodotto di due elementi dell'insieme. Più in generale, il prodotto scalare è definito con l'introduzione di una *funzione peso* w :

$$\langle x, y \rangle = \int_0^T x(t) y(t) w(t) dt.$$

Se gli elementi dello spazio sono funzioni complesse, il prodotto scalare è definito moltiplicando, nell'integrale [2], un fattore per il complesso coniugato dell'altro.

Talvolta è invece necessario adoperare una rappresentazione *integrale*; un esempio

¹ La convergenza, in generale, è definita a meno di un insieme di misura nulla; nel caso unidimensionale considerato, l'insieme nullo è un insieme di punti. E' infatti noto che la rappresentazione [1] non converge al valore esatto per la $f(t)$ nei punti (fenomeno di Gibbs) $t = T/2, T, \dots$

tipico è la rappresentazione di Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Le funzioni $\exp(j\omega t)$, non essendo a quadrato sommabile, a rigore non appartengono allo spazio delle funzioni $x(t)$ (spazio di Hilbert); tuttavia, poiché il loro prodotto scalare con gli elementi di tale spazio è ancora definito, si conviene di chiamarle (impropriamente) “elementi” della base. Di conseguenza “coefficienti” dello sviluppo sarebbero le funzioni $X(\omega)$.

Dal punto di vista applicativo è poi importante che la rappresentazione [5] sia non solo corretta, ma anche rapidamente convergente, nel senso che un numero limitato di termini della serie fornisca già una rappresentazione sufficientemente approssimata dell'elemento $x(t)$.

Si tratta dunque di scegliere rappresentazioni alternative, cioè basi diverse, più appropriate al particolare problema allo studio; ovvero rappresentazioni *asintotiche*, cioè valide (e rapidamente convergenti) quando un qualche parametro del problema (per esempio, la distanza dalle sorgenti) diventa molto grande.

Tornando al campo elettromagnetico, una volta passati nel dominio della frequenza, rappresentata cioè la dipendenza temporale dei campi con un integrale di Fourier,² resta da rappresentare la dipendenza spaziale del campo. In primo luogo è necessario disporre di un conveniente insieme di funzioni di base, completo e possibilmente ortonormale. Dato il carattere complesso di tali funzioni, il prodotto scalare tra due elementi, Φ e Ψ , dello spazio viene definito come segue:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int \Phi(\mathbf{r}) \Psi^*(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad [6]$$

essendo l'integrale esteso al volume dove il campo è definito. In particolare, si osserva che la cosiddetta *norma*,

$$(\langle \Phi, \Phi \rangle)^{1/2}, \quad [7]$$

è positiva, e nulla solo se lo è identicamente l'elemento Φ . Questo permette di riguardare la norma come la naturale estensione della lunghezza di un vettore in uno spazio euclideo reale, e spesso di interpretare il prodotto scalare [6] in termini di potenza associata al campo.

La ricerca delle funzioni di base equivale a fissare un opportuno sistema di coordinate, e a ricercare in esso tutte le possibili soluzioni delle equazioni di Maxwell, in assenza di sorgenti, che soddisfino le prescritte condizioni al contorno.

Nell'ipotesi che nel volume considerato tali funzioni Φ_n siano ortogonali e complete, un generico campo elettromagnetico può essere espresso come loro combina-

² Più semplicemente, quando ci si riferisca ai fasori.

zione lineare:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_n \alpha_n \Phi_n(\mathbf{r}); \quad [8]$$

con $\Phi(\mathbf{r})$ si è indicato (simbolicamente) il campo elettromagnetico, e gli α_n sono coefficienti dello sviluppo. Il calcolo dei coefficienti α_n dipende da come è specificata l'eccitazione del campo. Se in un sottospazio dello spazio $\mathbf{r}$ (per esempio su una superficie, se lo spazio è un volume) qualche componente, o combinazione lineare di componenti, dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ ha un valore assegnato, la via più semplice è imporre che l'eguaglianza [8] sia valida nel sottospazio, dove ora il primo membro è noto (*campo impresso*); se le Φ_n sono ivi ortogonali, il calcolo dei coefficienti risulta immediato.

L'eccitazione può essere invece data in termini di *correnti*, elettriche e magnetiche, *imprese*. In tal caso, è utile adoperare il teorema di reciprocità. Si consideri la situazione rappresentata nella figura 3.2, dove $\mathbf{J}$, $\mathbf{J}_m$ sono sorgenti imprese, S è una superficie ideale, e $\mathbf{T}$ una opportuna *sorgente di prova* che genera un campo, $\mathbf{E}_s$, $\mathbf{H}_s$, coincidente con uno degli elementi della base. Applicando il teorema di reciprocità nella formulazione 1.5.3 (mezzo senza perdite) ai campi $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ e $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$ si ha

$$\begin{aligned} \iint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_s^* + \mathbf{E}_s^* \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{i}_n dS &= \iint_S [(\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}_s^* + \mathbf{H} \cdot (\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_s)^*] dS = \\ &= \iiint_V (\mathbf{E}_s^* \cdot \mathbf{J} + \mathbf{H}_s^* \cdot \mathbf{J}_m) dV. \end{aligned} \quad [9]$$

Nell'integrale di volume che appare nella [9] tutte le grandezze sono note. Se i vettori della base sono ortogonali sulla superficie S , in modo che

$$\iint_S (\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_s)^* \cdot \mathbf{H}_q dS = 0 \quad \text{se } s \neq q,$$

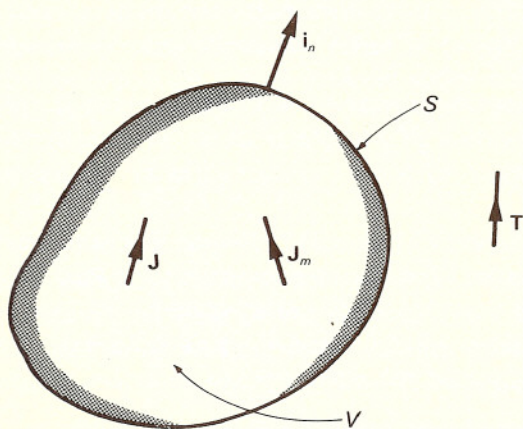


Figura 3.2

e il campo $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ viene sviluppato nella base $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$, le grandezze che figurano nell'integrale di superficie sono note, tranne il coefficiente di eccitazione per il modo di indice s , che è così calcolabile (vedi anche 3.3.8).

Annotazioni

*3.1.1 Studio di un'equazione differenziale

Consideriamo la seguente equazione:

$$\nabla_t^2 \Psi(t) + \xi^2 \Psi(t) = G(t), \quad t = x i_x + y i_y \quad [10]$$

in un dominio piano S , limitato da una curva l (vedi fig. 3.3), su cui

$$\partial \Psi / \partial n = 0 \quad (\text{condizione di Neumann});$$

in S la funzione $G(t)$ è supposta nota e l'operatore ∇_t^2 è il "laplaciano trasversale"; in coordinate cartesiane, ad esempio, è dato da

$$\nabla_t^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Si vuole ricercare una soluzione dell'equazione [10] che sia esprimibile come combinazione lineare di elementi di un opportuno sistema di base. Consideriamo allora l'omogenea associata (utilizzando momentaneamente, per semplicità, lo stesso simbolo Ψ):

$$\nabla_t^2 \Psi + \xi^2 \Psi = 0, \quad (\text{equazione di Helmholtz}) \quad [11]$$

con condizioni al contorno di tipo Neumann

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } l.$$

L'equazione [11], insieme con la sua condizione al contorno, ammette soluzioni (diverse da quella identicamente nulla) solo per particolari valori di ξ^2 , detti *autovalori* dell'equazione differenziale; le corrispondenti soluzioni sono dette *autofunzioni*. Ad ogni autovalore corrisponde, al più, un numero finito di autofunzioni; inoltre, se nella [10] ξ^2 coincide con un autovalore, la soluzione non è più unica.

Una prima proprietà degli autovalori della [11] si ottiene moltiplicandola per Ψ^* e integrando su S :

$$\iint_S (\Psi^* \nabla_t^2 \Psi + \xi^2 \Psi^* \Psi) dS = 0.$$

Utilizzando la forma bidimensionale della prima identità di Green

$$\iint_S (f \nabla_t^2 g + \nabla_t f \cdot \nabla_t g) dS = \oint_l f \frac{\partial g}{\partial n} dl \quad [12]$$

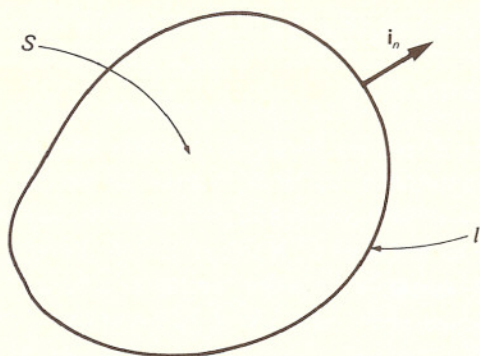


Figura 3.3

e risolvendo per ξ^2 , si ottiene, tenendo esplicitamente conto delle condizioni al contorno,

$$\xi^2 = \frac{\iint_S |\nabla_t \Psi|^2 dS}{\iint_S |\Psi|^2 dS} \geq 0;$$

gli autovalori della [11] sono dunque reali positivi.

Dati poi due autovalori, ξ_n^2, ξ_m^2 , sottraendo l'una dall'altra le due relazioni

$$\Psi_m^* \nabla_t^2 \Psi_n + \xi_n^2 \Psi_m^* \Psi_n = 0$$

$$\Psi_n \nabla_t^2 \Psi_m^* + \xi_m^2 \Psi_n \Psi_m^* = 0$$

e integrando su S , dalla seconda identità di Green in due dimensioni,

$$\iint_S (f \nabla_t^2 g - g \nabla_t^2 f) dS = \oint_l \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dl, \quad [13]$$

si ottiene, tenendo conto delle condizioni al contorno:

$$(\xi_n^2 - \xi_m^2) \iint_S \Psi_m^* \Psi_n dS = 0.$$

Se autofunzioni diverse sono caratterizzate da autovalori distinti (*autofunzioni non degeneri*) la relazione precedente implica

$$\iint_S \Psi_n \Psi_m^* dS = 0 \quad (m \neq n). \quad [14]$$

Le autofunzioni Ψ_n sono quindi ortogonali rispetto al prodotto scalare definito dalla quantità a primo membro della [14]; è possibile renderle ortonormali con una oppor-

tuna scelta della costante arbitraria rispetto alla quale sono definite, ponendo cioè

$$\iint_S |\Psi_n|^2 dS = 1.$$

Se le autofunzioni sono degeneri, si può dimostrare che una opportuna combinazione lineare di tutte le autofunzioni corrispondenti allo stesso autovalore conduce ad autofunzioni ortonormali.

Supposto l'insieme $\{\Psi_n\}$ completo, la funzione nota G può essere rappresentata come combinazione lineare di autofunzioni Ψ_n :

$$G = \sum_n \alpha_n \Psi_n,$$

ove

$$\alpha_n = \langle G, \Psi_n \rangle = \iint_S G \Psi_n^* dS;$$

analogamente, la soluzione (incognita) Ψ della [10] è rappresentabile come segue:

$$\Psi = \sum_n \beta_n \Psi_n = \sum_n \langle \Psi, \Psi_n \rangle \langle \Psi_n.$$

La funzione Ψ soddisfa certamente le condizioni al contorno, perché queste sono singolarmente soddisfatte da ciascuna autofunzione. Sostituendo nella [10] i due sviluppi per G e Ψ si ottiene facilmente

$$\Psi = \sum_n \frac{\alpha_n}{\xi^2 - \xi_n^2} \Psi_n = \sum_n \frac{\langle G, \Psi_n \rangle \langle \Psi_n}{\xi^2 - \xi_n^2},$$

che è la soluzione cercata. Si noti che per $\xi^2 = \xi_n^2$ la soluzione è singolare, indice questo della non univoca invertibilità della [10].

*3.1.2 Equazione di Helmholtz in dominio rettangolare con condizioni al contorno di tipo Neumann (esercizio)

Si calcolino gli autovalori e le autofunzioni dell'equazione differenziale [11], nel dominio rettangolare della figura 3.4, con la condizione al contorno

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } l \text{ (perimetro del rettangolo)}.$$

Esprimendo la [11] in coordinate cartesiane e applicando il metodo della separazione delle variabili, si mostri che

$$\Psi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{ab}} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right),$$

$$\xi_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

$$\iint_S \Psi_{nm} \Psi_{n'm'} dS = \delta_{nn'} \delta_{mm'},$$

dove

$$\epsilon_s = 1 \quad \text{per } s \neq 0; \quad \epsilon_s = \frac{1}{2} \quad \text{per } s = 0.$$

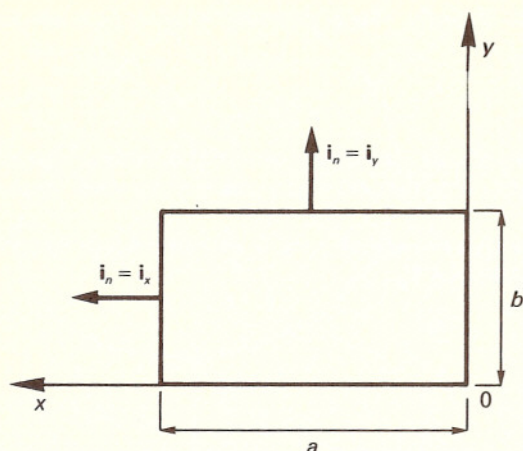


Figura 3.4

*3.1.3 Equazione di Helmholtz in dominio rettangolare con condizioni al contorno di tipo Dirichlet (esercizio)

Si calcolino gli autovalori e le autofunzioni per il problema precedente con la differente condizione al contorno (per maggior chiarezza, la funzione viene ora chiamata Φ):

$$\Phi = 0 \quad \text{su } l.$$

Procedendo come in 3.1.2, si dimostri che

$$\Phi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

$$\xi_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

$$\iint_S \Phi_{nm} \Phi_{n'm'} dS = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

3.1.4 Equazione di Helmholtz in dominio circolare con condizioni al contorno di tipo Neumann (esercizio)

Si calcolino gli autovalori e le autofunzioni per il problema 3.1.2, nel dominio circolare della figura 3.5. L'equazione [11], scritta in coordinate cilindriche, diventa

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \xi^2 \Psi = 0.$$

Posto

$$\Psi(\rho, \phi) = \Psi_1(\rho) \Psi_2(\phi)$$

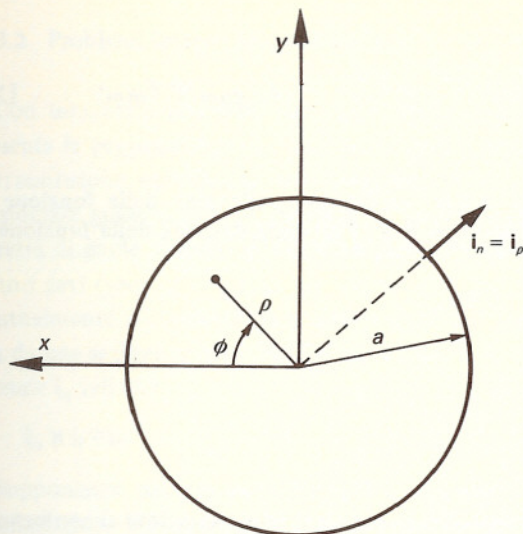


Figura 3.5

si ottiene

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d\Psi_1}{d\rho} + \left(\xi^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) \Psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2 \Psi_2}{d\phi^2} + n^2 \Psi_2 = 0.$$

La prima equazione è quella di Bessel, la cui soluzione finita per $\rho = 0$ è

$$J_n(\xi\rho),$$

che è la funzione di Bessel di prima specie; la soluzione per la seconda è

$$\exp(jn\phi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

dove n assume valori interi affinché il campo sia funzione univoca di ϕ . Si mostri che

$$\Psi_{nm}(\rho, \phi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\exp(jn\phi)}{a} \frac{q_{nm}}{\sqrt{q_{nm}^2 - n^2}} \frac{J_n(q_{nm}\rho/a)}{J_n(q_{nm})},$$

dove

$$J'_n(q_{nm}) = 0;$$

$$\iint_S \Psi_{nm} \Psi_{n'm'} dS = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

Si noti che i punti q_{nm} sono i successivi zeri della derivata della funzione di Bessel, e che la ortogonalità di queste funzioni discende dalla relazione (Abramovitz e Stegun,

1968, p. 485)

$$\int_0^a \rho J_n \left(q_{nm} \frac{\rho}{a} \right) J_n \left(q_{nm}' \frac{\rho}{a} \right) d\rho = \frac{a^2}{2} \frac{q_{nm}^2 - n^2}{q_{nm}^2} [J_n(q_{nm})]^2 \delta_{mm'} \quad [15]$$

in cui appare la funzione peso p .

Negli autovalori ξ_{nm}^2 , il primo indice corrisponde all'ordine della funzione di Bessel, il secondo individua la successione degli zeri della derivata della funzione di Bessel. Ad esempio:

$$q_{11} = 1,841 \dots, \quad \xi_{11}^2 = \frac{q_{11}^2}{a^2} = \frac{3,390 \dots}{a^2},$$

dove

$$J_1'(1,841 \dots) = 0.$$

3.1.5 Equazione di Helmholtz in dominio circolare con condizioni al contorno di tipo Dirichlet (esercizio)

Si calcolino gli autovalori e le autofunzioni per il problema 3.1.3 nel dominio circolare della figura 3.5.

Procedendo come in 3.1.4, si dimostri che

$$\Phi_{nm}(\rho, \phi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{\exp(jn\phi)}{a} \frac{J_n \left(p_{nm} \frac{\rho}{a} \right)}{J_n' \left(p_{nm} \frac{\rho}{a} \right)},$$

dove

$$J_n(p_{nm}) = 0;$$

$$\iint_S \Phi_{nm} \Phi_{n'm'} dS = \delta_{nn'} \delta_{mm'}.$$

L'ortogonalità delle funzioni di Bessel discende dalla relazione (Abramovitz e Stegun, 1968, p. 485)

$$\int_0^a \rho J_n \left(p_{nm} \frac{\rho}{a} \right) J_n \left(p_{nm}' \frac{\rho}{a} \right) d\rho = \frac{a^2}{2} [J_n'(p_{nm})]^2 \delta_{mm'}.$$

Per gli autovalori ξ_{nm}^2 valgono le stesse considerazioni fatte in 3.1.4; si ha ad esempio:

$$p_{01} = 2,405 \dots, \quad \xi_{01}^2 = \frac{p_{01}^2}{a^2} = \frac{5,784 \dots}{a^2},$$

dove

$$J_0(2,405) = 0.$$

3.2 Problemi interni: le guide d'onda

Con una certa generalità si può definire *guida d'onda* qualunque struttura che consenta la propagazione di un'onda elettromagnetica. Nel presente contesto, le linee di trasmissione considerate nei paragrafi 2.4 e 2.5 (vedi anche fig. 2.5) sono da considerare guide d'onda particolari. In questo paragrafo ci si limita a una classe più ristretta di guide d'onda, quella delle strutture cilindriche metalliche, cioè tubi conduttori cavi (vedi fig. 3.6a) la cui sezione non cambia al variare di z (*guide uniformi*), eventualmente a connessione multipla (vedi fig. 3.6b). La guida è quindi caratterizzata da una sezione trasversale S , e da un contorno l metallico di versore tangente $\mathbf{i}_l$ e normale $\mathbf{i}_n$ tali che

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_z.$$

Supponiamo per ora che il metallo di cui sono costituite le pareti della guida sia un conduttore elettrico perfetto. Per i buoni conduttori, quali l'alluminio, l'ottone e il rame usati nella costruzione delle guide, si tratta di un'ottima approssimazione sino alle microonde (vedi 2.7.2). Tuttavia, come si è visto in 2.5.7, perdite anche molto piccole, dovute alla imperfetta conducibilità delle pareti, possono far sentire la loro influenza dopo percorsi sufficientemente lunghi. E poiché le lunghezze sono rapportate alla lunghezza d'onda, nel campo delle cosiddette *microonde* ($1 \text{ mm} \leq \lambda \leq 10 \text{ cm}$) questo effetto può verificarsi anche per i tratti di guida comunemente usati nelle applicazioni. Della presenza di perdite si può tener conto con uno studio di tipo perturbativo (vedi 3.3.9). La sezione trasversale della guida è supposta infine *omogenea*, pur potendo le caratteristiche del mezzo variare lungo z .

Il problema esaminato in questo e nel successivo paragrafo è dunque il seguente: trovare eventuali configurazioni del campo elettromagnetico, in regime sinusoidale e in assenza di sorgenti, in grado di propagarsi nell'interno di un tubo metallico cilindrico e soggette alla condizione al contorno

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{su } l \quad [1]$$

(annullamento della componente tangenziale del campo elettrico sul contorno di un conduttore elettrico perfetto).

Conviene anzitutto scomporre i campi nelle rispettive *componenti trasversali e longitudinali*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_t(\mathbf{r}) + E_z(\mathbf{r})\mathbf{i}_z$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_t(\mathbf{r}) + H_z(\mathbf{r})\mathbf{i}_z;$$

lo stesso dicasi per le componenti trasversali e longitudinali della coordinata spaziale $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{t} + z\mathbf{i}_z.$$

Sostituendo le precedenti espressioni di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ nelle equazioni di Maxwell ai rotori (in

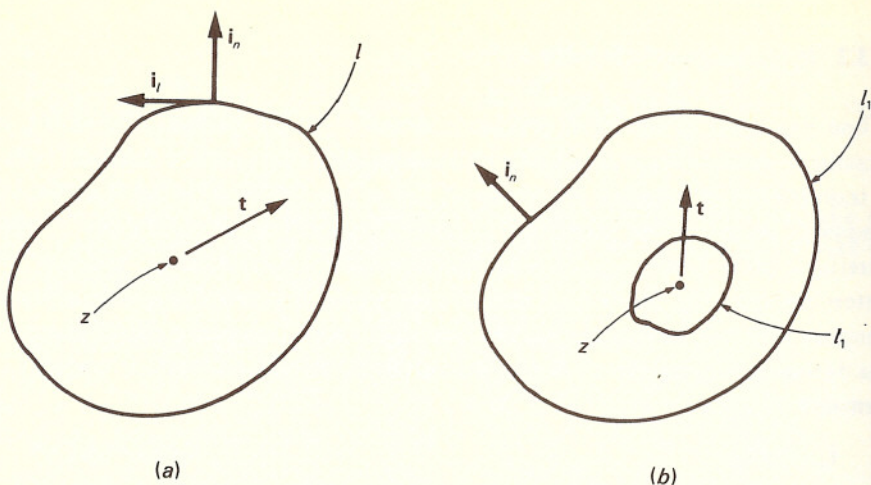


Figura 3.6

assenza di sorgenti) e proiettando queste equazioni trasversalmente e longitudinalmente, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu\mathbf{H}_t + \mathbf{i}_z \times \nabla_t E_z \\ \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) = -j\omega\epsilon\mathbf{E}_t + \nabla_t H_z \times \mathbf{i}_z, \end{cases} \quad [2]$$

$$\begin{cases} \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t) = j\omega\mu H_z \\ \nabla_t \cdot (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) = j\omega\epsilon E_z, \end{cases} \quad [3]$$

ove l'operatore trasversale ∇_t è definito come segue:

$$\nabla_t = \nabla - \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Ad esempio, in coordinate cartesiane

$$\nabla_t \rightarrow \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Le [2], [3] possono essere ricavate in vari modi, ovviamente tutti equivalenti. Il più semplice è probabilmente quello di proiettare le equazioni di Maxwell in coordinate cartesiane e raccogliere poi separatamente i termini trasversali e quelli longitudinali. Le [3] esprimono i campi longitudinali in funzione di quelli trasversali; nelle equazioni [2] è dunque possibile, per sostituzione, far comparire solo questi ultimi.

Applichiamo ora il metodo della separazione delle variabili al sistema [2], esprimendo i campi trasversali come prodotto di due funzioni, l'una della sola coordinata

trasversale t , l'altra della sola coordinata longitudinale z :

$$\mathbf{E}_t(t, z) = \mathbf{e}(t) V(z)$$

$$\mathbf{H}_t(t, z) = \mathbf{h}(t) I(z),$$

cosicché i campi longitudinali sono dati da

$$\begin{cases} j\omega\mu H_z = V(z) \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{e}) = -V(z) \mathbf{i}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{e}) \\ j\omega\epsilon E_z = I(z) \nabla_t \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{i}_z) = I(z) \mathbf{i}_z \cdot (\nabla_t \times \mathbf{h}). \end{cases} \quad [4]$$

Sostituendo nelle [2] si ottiene

$$\begin{cases} (\mathbf{i}_z \times \mathbf{e}) \frac{dV}{dz} = -j\omega\mu I \left\{ \mathbf{h} + \frac{1}{k^2} [\nabla_t \nabla_t \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{i}_z)] \right\} \\ (\mathbf{h} \times \mathbf{i}_z) \frac{dI}{dz} = -j\omega\epsilon V \left\{ \mathbf{e} + \frac{1}{k^2} [\nabla_t \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{e})] \times \mathbf{i}_z \right\} \end{cases} \quad [5]$$

dove $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$.

Supponendo $E_z = 0$ (campi TE), si hanno le seguenti conseguenze:

- (a) il vettore (trasversale) $\mathbf{h}$ è irrotazionale, come si desume dalla seconda delle [4] ($\nabla \times \mathbf{h}$ ha un'unica componente secondo z);
- (b) i vettori $\mathbf{i}_z \times \mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$ sono paralleli, come si desume dalla prima delle [5]:

$$\mathbf{i}_z \times \mathbf{e} = A \mathbf{h}, \quad [6]$$

dove A è una costante arbitraria;

- (c) il vettore (trasversale) $\mathbf{e}$ è solenoidale, come si desume dalla seconda delle [4] dopo aver sostituito la [6].

Supponendo invece $H_z = 0$ (campi TM), si hanno le conseguenze duali:

- (a') il vettore (trasversale) $\mathbf{e}$ è irrotazionale;
- (b') vale la relazione, d'altronde coincidente con la [6],

$$A \mathbf{h} \times \mathbf{i}_z = \mathbf{e};$$

- (c') il vettore (trasversale) $\mathbf{h}$ è solenoidale.

Ora, un arbitrario campo vettoriale può essere espresso come sovrapposizione di due campi, l'uno irrotazionale e l'altro solenoidale (teorema di Helmholtz). Si può dunque scomporre il campo $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ in una parte TE (elettrica trasversale) e in una parte TM (magnetica trasversale) rispetto alla direzione z : la prima è composta da tutte le possibili soluzioni TE; la seconda, da tutte le possibili soluzioni TM. Questi due insiemi hanno un elemento in comune, cioè l'eventuale campo TEM (elettromagnetico trasversale) che conviene considerare a parte (vedi 3.2.1). Le proprietà delle due soluzioni, TE e TM, sono considerate nel paragrafo 3.3.

Annotazioni

*3.2.1 Propagazione TEM in cavo coassiale

Si vogliano studiare le possibili soluzioni TEM del sistema [5]. Poiché $H_z = 0$, il vettore $\mathbf{e}$ è irrotazionale e pertanto può essere espresso come gradiente di una opportuna funzione potenziale:

$$\mathbf{e} = -\nabla_t \Phi;$$

d'altra parte, poiché $E_z = 0$ e

$$\mathbf{e} = A \mathbf{h} \times \mathbf{i}_z,$$

il vettore $\mathbf{e}$ è anche solenoidale, in accordo con la seconda delle [4], e pertanto

$$\nabla_t \cdot \nabla_t \Phi = \nabla_t^2 \Phi = 0. \quad [7]$$

Nella sezione S la funzione Φ è dunque soluzione dell'equazione di Laplace con la condizione al contorno (richiesta dalla perfetta conducibilità delle pareti)

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_l = -(\nabla_t \Phi) \cdot \mathbf{i}_l = -\partial \Phi / \partial l = 0 \quad \text{su } l,$$

cioè

$$\Phi = \text{cost. su } l. \quad [8]$$

Ora, se S è semplicemente connessa, la costanza di Φ su l implica la costanza di Φ su tutta S , per la proprietà delle funzioni armoniche, soluzioni della [7]; di conseguenza *i modi TEM non possono esistere in guide a sezione semplicemente connessa*. Diverso è il caso di una sezione moltiplicemente connessa (ad esempio doppiamente connessa, come in fig. 3.7), poiché la funzione Φ può assumere valori costanti, ma diversi, su posizioni disgiunte nel contorno. Modi TEM possono dunque esistere solo in strutture moltiplicemente connesse. Se il grado di connessione è m , esistono $(m-1)$ soluzioni indipendenti della [7], corrispondenti alle $(m-1)$ costanti che si possono assegnare su $(m-1)$ dei contorni, la costante sull'ultimo dei conduttori essendo inessenziale (in altri termini, contano solo le differenze delle costanti rispetto a una costante di riferimento).

Se la struttura è doppiamente connessa e i conduttori esterno e interno sono concentrici, si parla di *cavo coassiale*. Nelle realizzazioni pratiche, la sezione trasversale è generalmente circolare e talvolta ellittica (in tal caso i fuochi delle due ellissi che la limitano coincidono); la separazione tra i due conduttori è assicurata da un dielettrico che riempie uniformemente l'intercapedine o è limitato a setti distanziatori.

Il sistema [5] diventa il seguente:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -j\omega \frac{\mu}{A} I \\ \frac{dI}{dz} = -j\omega \epsilon A V. \end{cases} \quad [9]$$

Se la costante A è scelta in modo che V sia pari alla differenza di potenziale tra i conduttori interno ed esterno, e I alla corrente che circola lungo il conduttore interno, allora μ/A coincide con l'induttanza per unità di lunghezza e ϵA con la

capacità per unità di lunghezza del cavo, come si desume confrontando le [9] con le equazioni delle linee di trasmissione [8] (§ 2.4).

L'integrale del campo elettrico tra i punti B e C (vedi fig. 3.7), d'altronde arbitrari, deve allora eguagliare $V(z)$ (il campo elettrico è diretto secondo i_ρ , e il potenziale è per convenzione positivo rispetto al conduttore esterno a massa):

$$\int_B^C \mathbf{E} \cdot i_\rho d\rho = -V \int_B^C \nabla_t \Phi \cdot i_\rho d\rho = -V[\Phi(c) - \Phi(b)] = V,$$

cioè

$$\Phi(c) - \Phi(b) = -1, \quad [10]$$

relazione che determina (a meno di una costante inessenziale) la funzione Φ . Inoltre, la circuitazione del campo magnetico, lungo un qualunque contorno che racchiuda il conduttore interno, deve uguagliare $I(z)$:

$$\oint \mathbf{H} \cdot i_\phi \rho d\phi = \frac{I}{A} \oint i_z \times \mathbf{e} \cdot i_\phi \rho d\phi = -\frac{I}{A} \oint \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \rho d\phi = I,$$

ovvero

$$A = - \oint \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \rho d\phi.$$

Nel caso del cavo coassiale a sezione circolare, la soluzione della [7] con la condizione al contorno [8] e la normalizzazione [10] è

$$\Phi = -\frac{-\ln \rho}{\ln(c/b)} + \text{cost.}$$

Risulta dunque

$$A = \frac{2\pi}{\ln(c/b)},$$

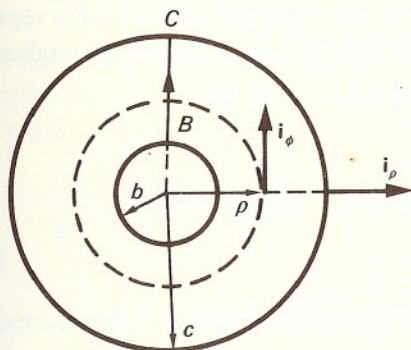


Figura 3.7

Sezione di un cavo coassiale.

e quindi induttanza e capacità per unità di lunghezza del cavo sono date da

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{c}{b}\right), \quad C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(c/b)}.$$

La costante di propagazione $k = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ non dipende dalle dimensioni del cavo, ma solo dal materiale del quale esso è riempito (come deve essere per ogni modo TEM), mentre l'impedenza caratteristica

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{c}{b}$$

non coincide con l'impedenza intrinseca del materiale.

E' facile verificare che la potenza che si propaga lungo il cavo è data da $VI^*/2$: infatti essa, in quanto flusso del vettore di Poynting, è data da

$$P = \frac{1}{2} VI^* \iint_S \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{i}_z dS;$$

d'altra parte

$$\iint_S \mathbf{e} \times \mathbf{h}^* \cdot \mathbf{i}_z dS = \frac{1}{A^*} \iint_S \nabla_t \Phi \cdot \nabla_t \Phi^* dS = \frac{1}{A^*} \oint_l \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \rho d\phi = 1,$$

dove si è fatto uso della prima identità di Green ([12], § 3.1) insieme alla [7] e l è il contorno (interno più esterno) del cavo.

3.3 Modi trasversali, elettrici e magnetici, in guida d'onda

Consideriamo ora una guida d'onda a sezione semplicemente connessa, in modo da poter ignorare i modi TEM (se la sezione è molteplicemente connessa, i risultati del presente paragrafo, pur di includere questi modi, continuano a valere).

Esaminiamo in primo luogo i campi TE, ponendo pari a 1 la costante A che appare nella [6] (§ 3.2).³ La seconda delle [5] (§ 3.2) stabilisce una relazione di uguaglianza fra tre vettori. Poiché due sono uguali,

$$\mathbf{h} \times \mathbf{i}_z = \mathbf{e},$$

e il terzo vettore dev'essere a sua volta parallelo a $\mathbf{e}$; di conseguenza

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \mathbf{h} = -k_t^2 \mathbf{h}, \quad [1]$$

dove k_t^2 è una (per ora arbitraria) costante. D'altra parte, il vettore $\mathbf{h}$ è irrotazionale,

³ Per modi non TEM non è più immediata l'identificazione di V e I con tensioni e correnti effettive, e pertanto conviene scegliere per A il valore più semplice, cioè 1.

come mostra la seconda delle [4] (§ 3.2), e pertanto

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi, \quad [2]$$

ovvero

$$\nabla_t^2 \Psi + k_t^2 \Psi = 0, \quad [3]$$

a meno di una arbitraria (inessenziale) costante additiva. L'equazione [3] determina la funzione potenziale Ψ (e quindi i vettori trasversali $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$) quando siano specificate le condizioni al contorno. Poiché su l dev'essere

$$\mathbf{E}_t \cdot \mathbf{i}_l = -\frac{1}{k_t} \nabla_t (\nabla_t \Psi \times \mathbf{i}_z) \cdot \mathbf{i}_l = \frac{1}{k_t} (\nabla_t \Psi) \cdot \mathbf{i}_n = 0,$$

la condizione al contorno è la seguente (condizione di Neumann):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \quad \text{su } l. \quad [4]$$

L'equazione differenziale [3] con la condizione al contorno [4] è stata studiata in 3.1.1. Essa ammette un insieme discreto di soluzioni (autofunzioni) corrispondenti a un insieme numerabile di valori per k_t^2 (autovalori trasversali), tutti reali non negativi. Le autofunzioni sono ortogonali, e possono essere rese *ortonormali* (vedi ad esempio 3.1.2 e 3.1.4):

$$\iint_S \Psi_n(t) \Psi_m^*(t) dS = \delta_{nm}. \quad [5]$$

Ad ogni autofunzione corrisponde una possibile distribuzione di campo, o *modo*:

$$\mathbf{h}_n = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi_n,$$

$$\mathbf{e}_n = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Psi_n \times \mathbf{i}_z = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \times (\Psi_n \mathbf{i}_z).$$

Le funzioni $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$ sono dette *funzioni vettoriali di modo*. L'ortonormalità delle [5] implica anche una ortonormalità dei campi: dalla prima identità di Green e dalla [4] si ricava

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_m^* \cdot \mathbf{i}_z dS &= \iint_S \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{h}_n \times \mathbf{i}_z) \times \mathbf{h}_m^* dS = \iint_S \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_m^* dS = \\ &= \frac{1}{k_{tn} k_{tm}} \iint_S \nabla_t \Psi_n \cdot \nabla_t \Psi_m^* dS = -\frac{1}{k_{tn} k_{tm}} \iint_S \Psi_n \nabla_t^2 \Psi_m^* = \\ &= \frac{k_{tm}}{k_{tn}} \iint_S \Psi_n \Psi_m^* dS; \end{aligned}$$

risulta pertanto

$$\iint_S \mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_m^* \cdot \mathbf{i}_z dS = \delta_{nm}. \quad [6]$$

La relazione [6] ha una conseguenza importante: in base ad essa, il calcolo del flusso del vettore di Poynting attraverso la sezione della guida, in presenza di due modi, fornisce

$$P = \frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{E}_n + \mathbf{E}_m) \times (\mathbf{H}_n + \mathbf{H}_m)^* \cdot \mathbf{i}_z dS = \frac{1}{2} V_n I_n^* + \frac{1}{2} V_m I_m^*.$$

La formula mostra che i due modi sono *disaccoppiati in potenza*, nel senso che il flusso di potenza è la somma dei singoli flussi. Il risultato si estende immediatamente al caso di più di due modi, i quali risultano quindi tutti disaccoppiati. (Naturalmente, occorre che siano soddisfatte condizioni al contorno del tipo [4], cioè che le pareti della guida siano perfettamente conduttrici.) Si osserva ancora che il flusso di potenza associato al singolo modo ha un'espressione formalmente analoga a quella relativa a una linea di trasmissione lungo la quale sussista una distribuzione di tensione $V_n(z)$ e di corrente $I_n(z)$.

Rimane da vedere a quali equazioni debbano soddisfare le cosiddette *funzioni scalari di modo* $V_n(z)$ e $I_n(z)$. Per ottenerle, basta sostituire la [1] nelle [5] (§ 3.2); tralasciando l'indicazione esplicita del pedice n , si ha

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -j\omega\mu I \\ \frac{dI}{dz} = -j\omega\epsilon \left(1 - \frac{k_t^2}{k^2}\right) V. \end{cases}$$

Avendo posto

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2} \quad [7]$$

e

$$Z_0 = \frac{\omega\mu}{k_z}, \quad [8]$$

le precedenti equazioni si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -jk_z Z_0 I \\ \frac{dI}{dz} = -j \frac{k_z}{Z_0} V. \end{cases} \quad [9]$$

Si tratta di un risultato interessante. Per ogni modo TE (cioè per ogni possibile

autovalore trasversale k_t^2) la propagazione in guida è descritta da una *linea di trasmissione equivalente*, di costante di propagazione [7] e impedenza caratteristica [8]. Il fatto che le equazioni [9] siano formalmente identiche a quelle delle linee di trasmissione permette di applicare alle guide tutti i risultati ottenuti nel paragrafo 2.5 per le linee nel dominio della frequenza. E' però da notare che i parametri k_z e Z_0 , al variare della frequenza, hanno un comportamento ben diverso da quello degli stessi parametri relativi a una vera linea di trasmissione senza perdite. Per prima cosa, k_z non varia linearmente con ω ; pertanto la guida è *dispersiva in frequenza*. Inoltre, se ϵ e μ sono reali (assenza di perdite) e $k < k_t$, la costante di propagazione e l'impedenza caratteristica risultano puramente immaginarie:

$$k_z = -j\sqrt{k_t^2 - k^2} = -j\alpha, \quad Z_0 = j\frac{\omega\mu}{\alpha};$$

L'onda diretta associata al modo non si propaga più lungo la linea, ma si attenua esponenzialmente secondo il fattore

$$\exp(-\alpha z).$$

A questa attenuazione non corrisponde però una dissipazione di potenza (in accordo con la supposta assenza di perdita della guida); infatti il flusso del vettore di Poynting (per l'onda diretta)

$$\frac{1}{2} VI^* = \frac{1}{2} Z_0 |I|^2 = \frac{1}{2} j \frac{\omega\mu}{\alpha} |I|^2$$

è puramente immaginario.

La guida si comporta dunque come un *filtro passa-alto*. Per ciascun modo esiste una *pulsazione critica*, o di taglio (o di cut-off) ω_c ,

$$\omega_c^2 \epsilon \mu = k_t^2,$$

tale che la propagazione avviene solo per $\omega > \omega_c$; ad essa corrisponde una *lunghezza d'onda critica* λ_c :

$$\frac{2\pi}{\lambda_c} = \omega_c \sqrt{\epsilon\mu} = k_t,$$

tale che la propagazione avviene solo se $\lambda < \lambda_c$ (λ è la lunghezza d'onda corrispondente nello spazio libero). Può definirsi altresì, relativamente al particolare modo considerato, una *lunghezza d'onda in guida*, λ_g , che misura il periodo spaziale di ripetizione del campo lungo l'asse z :

$$\frac{2\pi}{\lambda_g} = k_z.$$

Le tre lunghezze d'onda non sono indipendenti, avendosi

$$\lambda_g = \frac{\lambda \lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda^2}}, \quad \lambda < \lambda_c.$$

Le proprietà dispersive della guida sono messe in luce, per $k_z = \beta_z$ reale, dal diagramma di Brillouin (vedi fig. 3.8); si tratta di un diagramma *multiramo*, nel senso che ogni ramo corrisponde a un possibile modo di propagazione. Ciascun ramo parte da una pulsazione che corrisponde alla pulsazione critica del modo e tende asintoticamente, per $\beta_z \rightarrow \infty$, alla retta

$$\omega = \beta_z c,$$

ove c è la velocità della luce. Osserviamo anzitutto che ogni modo è dispersivo, non essendo la velocità di fase costante con la frequenza. Se poi si propagano più modi (*segnale multimodale*), le loro velocità di fase, corrispondenti a una data frequenza, sono in genere diverse le une dalle altre; ciò contribuisce ulteriormente alla dispersione del segnale.

Lo studio dei modi TM viene effettuato con criteri del tutto simili, giungendo alle stesse conclusioni. Tenuto conto della prima delle [5] (§ 3.2), si scrive

$$\nabla_t \nabla_t \cdot \mathbf{e} = -k_t^2 \mathbf{e}, \quad [10]$$

dove gli autovalori trasversali, k_t^2 , sono in generale diversi da quelli relativi ai modi

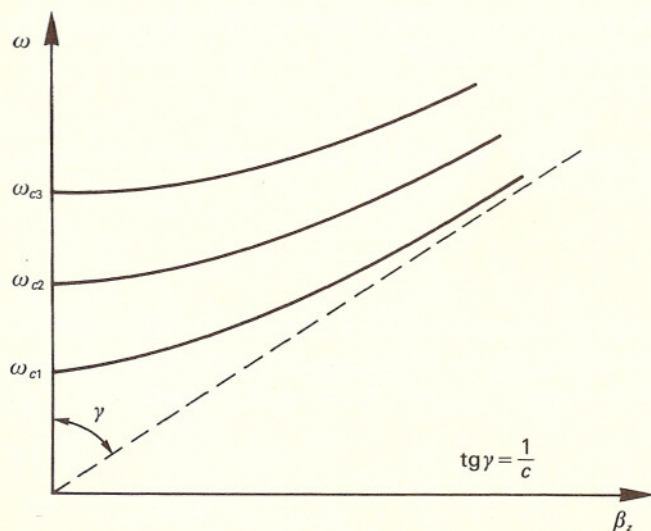


Figura 3.8

Diagramma di Brillouin per la propagazione in guida.

TE. In questo caso è il vettore $\mathbf{e}$ ad essere irrotazionale:

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{k_t} \nabla \Phi, \quad [11]$$

da cui discende

$$\nabla_t^2 \Phi + k_t^2 \Phi = 0. \quad [12]$$

Le condizioni al contorno per la [12] sono fissate imponendo che

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{i}_l = -\frac{1}{k_t} \nabla_t \Phi \cdot \mathbf{i}_l = -\frac{1}{k_t} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial l} = 0 & \text{su } l \\ E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t \cdot \mathbf{e} = -\frac{1}{j\omega\epsilon k_t} \nabla_t^2 \Phi = \frac{k_t}{j\omega\epsilon} \Phi = 0 & \text{su } l. \end{cases}$$

Esse sono sicuramente compatibili, perché la seconda implica la prima. All'equazione [12] è dunque associata la seguente condizione al contorno (di Dirichlet):

$$\Phi = 0 \quad \text{su } l. \quad [13]$$

L'ortonormalità delle autofunzioni, espressa da

$$\iint_S \Phi_n(\mathbf{t}) \Phi_m^*(\mathbf{t}) dS = \delta_{nm}, \quad [14]$$

implica, se la [13] è soddisfatta, l'ortonormalità dei campi:

$$\iint_S \mathbf{e}_n \times \mathbf{h}_m^* \cdot \mathbf{i}_z = \delta_{nm}. \quad [15]$$

Anche i modi TM sono dunque disaccoppiati in potenza.

E' interessante verificare se modi TE e TM siano ortogonali. Dette $\mathbf{e}'_n, \mathbf{h}'_n$ le funzioni modali *vettoriali* relative a un modo TM, ed $\mathbf{e}''_m, \mathbf{h}''_m$ le analoghe funzioni relative a un modo TE, si ha

$$\iint_S \mathbf{e}'_n \times \mathbf{h}''_m^* \cdot \mathbf{i}_z dS = \frac{1}{k'_{tn} k''_{tm}} \iint_S \nabla_t \Phi_n \times \nabla_t \Psi_m^* \cdot \mathbf{i}_z dS = \frac{1}{k'_{tn} k''_{tm}} \oint_l \Phi_n \frac{\partial \Psi_m^*}{\partial l} dl,$$

dove si è fatto uso della identità

$$\iint_S \nabla \times (f \nabla g) \cdot \mathbf{i}_z dS = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \mathbf{i}_z dS = \oint_l f \nabla g \cdot \mathbf{i}_l dl.$$

I modi TE e TM sono dunque ortogonali, anche se corrispondenti allo stesso autovalore trasversale, e risultano pertanto disaccoppiati in potenza. Non necessariamente, invece, modi TE *degeneri* (corrispondenti allo stesso autovalore) sono ortogonali (pos-

sono tuttavia essere resi tali: vedi 3.3.1). Le stesse considerazioni si applicano ai modi TM degeneri.

Le equazioni per le funzioni modali *scalari* relative ai modi TM si ottengono, come per il caso TE, sostituendo la [1] nelle [5] (§ 3.2). Tralasciando anche qui l'indicazione esplicita del pedice n , si ha

$$\begin{cases} \frac{dV}{dz} = -j\omega\mu \left(1 - \frac{k_t^2}{k^2}\right) I \\ \frac{dI}{dz} = -j\omega\epsilon V. \end{cases} \quad [16]$$

In termini della costante di propagazione lungo z ,

$$k_z = k^2 - k_t^2 \quad [17]$$

e dell'impedenza caratteristica

$$Z_0 = \frac{k_z}{\omega\epsilon}, \quad [18]$$

si ottiene formalmente lo stesso sistema [9]. A parte la differenza nella definizione dell'impedenza caratteristica, tutto quanto si è detto in relazione alle proprietà dispersive e filtranti dei modi TE vale anche per quelli TM. Analoghe sono le definizioni di pulsazione e lunghezza d'onda critica, e analoghi sono i diagrammi di Brillouin. A frequenze inferiori a quella critica l'impedenza caratteristica risulta puramente immaginaria, negativa invece che positiva come nel caso TE.

Siamo ora in grado, raccogliendo i risultati parziali esaminati in questo e nel precedente paragrafo, di trattare l'*espansione modale* di un generico campo elettromagnetico in guida. Indicando con gli apici "H" ed "E" i modi TE e TM rispettivamente, si hanno le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t(t, z) = \sum_n \left[V_n^H(z) \mathbf{e}_n^H(t) + V_n^E(z) \mathbf{e}_n^E(t) \right] = \\ \quad = -\sum_n \left[V_n^H \frac{\nabla \times (\Psi_n \mathbf{i}_z)}{k_{tn}^H} + V_n^E \frac{\nabla_t \Phi_n}{k_{tn}^E} \right] \\ \mathbf{H}_t(t, z) = \sum_n \left[I_n^H(z) \mathbf{h}_n^H(t) + I_n^E(z) \mathbf{h}_n^E(t) \right] = \\ \quad = -\sum_n \left[I_n^H \frac{\nabla_t \Psi_n}{k_{tn}^H} - I_n^E \frac{\nabla \times (\Phi_n) \mathbf{i}_z}{k_{tn}^E} \right], \end{cases} \quad [19]$$

$$\begin{cases} j\omega\epsilon E_z(t, z) = \sum_n I_n^E(z) k_{tn}^E \Phi_n(t) \\ j\omega\mu H_z(t, z) = \sum_n V_n^H(z) k_{tn}^H \Psi_n(t), \end{cases} \quad [20]$$

cui vanno aggiunti gli eventuali termini relativi ai modi TEM.

Le [19] mostrano chiaramente la scomposizione del campo in parte irrotazionale e

parte solenoidale; le somme vanno estese a tutti i possibili modi presenti nella guida.

Per guide uniformi lungo z , la variazione delle funzioni modali scalari è del tipo

$$\exp(\pm jk_z z); \quad [21]$$

i coefficienti della espansione possono trovarsi, una volta assegnate le sorgenti, utilizzando il teorema di reciprocità nella forma [9] (§ 3.1); vedi 3.3.6.

Si noti anche che i campi longitudinali E_z, H_z dipendono solo dalle funzioni Φ_n e Ψ_n rispettivamente, e non dalle loro derivate, e che per una variazione spaziale del tipo [21] la relazione tra le funzioni scalari modali è del tipo

$$V_n(z) = \pm Z_{0n} I_n(z).$$

Non vi è allora alcuna difficoltà a esprimere i campi trasversali [19] in funzione di quelli longitudinali [20] (Johnson, 1965, pp. 100-09): un modo alternativo, ovviamente equivalente, per lo studio della propagazione in guida (vedi 3.4.1).

Annotazioni

*3.3.1 Modi in guida d'onda rettangolare

Si consideri una guida a sezione rettangolare come quella della figura 3.4. Le espressioni dei modi associati a tale guida si possono ottenere facilmente in base a risultati esaminati in precedenza (vedi 3.1.2 e 3.1.3). Per i modi TE si ha

$$\mathbf{h} = -\frac{1}{k_{tm}} \sqrt{\frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{ab}} \nabla_t \left[\cos\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \right],$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{h} \times \mathbf{i}_z,$$

$$k_{tm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2.$$

Per $b < a$ il modo TE a frequenza di taglio più bassa è il TE₁₀, le cui funzioni vettoriali modali sono

$$\mathbf{h} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \mathbf{i}_x,$$

$$\mathbf{e} = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \mathbf{i}_y;$$

il relativo autovalore trasversale e la corrispondente frequenza critica sono dati da

$$k_t^2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^2, \quad \lambda_c = 2a.$$

Nella maggior parte delle applicazioni pratiche è $b = a/2$. I successivi modi TE sono i seguenti ($b = a/2$):

$$\text{TE}_{20} \text{ e } \text{TE}_{01} : \lambda_c = a; \quad \text{TE}_{11} : \lambda_c = 0,894a \dots$$

Per i modi TM si ha

$$\mathbf{e} = -\sqrt{\frac{4}{ab}} \nabla_t \left[\sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \right],$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{i}_z \times \mathbf{e},$$

$$k_{tm}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2.$$

Gli autovalori trasversali dei modi TM coincidono con quelli dei modi TE. In ciascuna coppia, essi possono essere combinati linearmente, in modo da dare ancora un modo della guida. In particolare, tali combinazioni possono formare nuovi insiemi di base, TE e TM, rispetto a y o a x .

I modi TM con un indice uguale a zero sono identicamente nulli: infatti

$$\Phi_{0m}(x, y) = \Phi_{n0}(x, y) = 0.$$

Il primo modo TM che si propaga è il TM_{11} , caratterizzato da

$$k_t^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$$

e

$$\lambda_c = 0,894a, \quad b = a/2.$$

I modi successivi sono

$$\text{TM}_{21} : \lambda_c = 0,707a; \quad \text{TM}_{31} : \lambda_c = 0,555a; \quad \dots$$

Il primo modo che si propaga (*modo fondamentale*) è quindi il TE_{10} . L'onda progressiva è data da

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = -\sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) Z_0 I^+ \exp(-j\beta_z z) \mathbf{i}_y \\ \mathbf{H}_t = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) I^+ \exp(-j\beta_z z) \mathbf{i}_x \\ H_z = \sqrt{\frac{2}{ab}} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \frac{\pi}{j\beta_z a} I^+ \exp(-j\beta_z z), \end{cases}$$

con

$$\beta_z = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}, \quad Z_0 = \frac{\omega \mu}{\beta_z}.$$

(La distribuzione dei campi lungo x è riportata in fig. 3.9.)

I modi caratterizzati da una pulsazione critica maggiore di quella del modo fondamentale si dicono *modi superiori*. I primi sono il TE_{20} e il TE_{01} ; vengono poi il TE_{11} e il TM_{11} , e di seguito tutti gli altri.

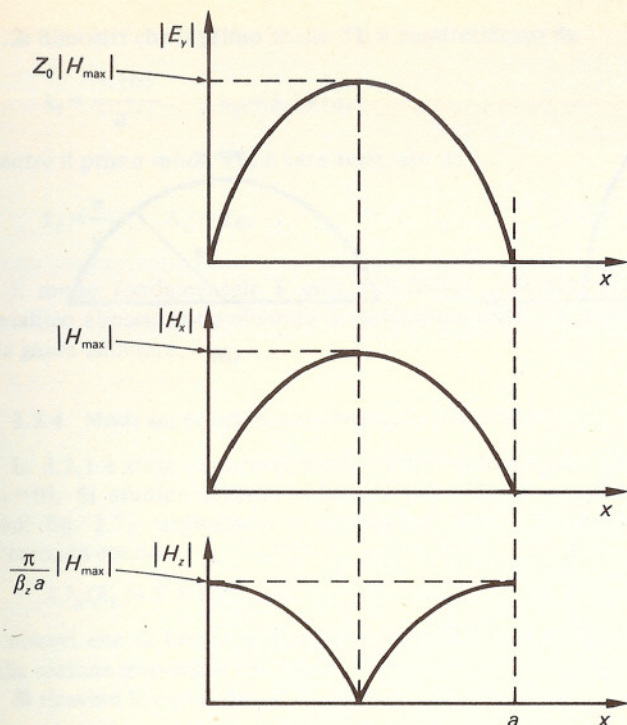


Figura 3.9

Guida d'onda rettangolare: andamento dei moduli delle ampiezze dei campi in funzione di x per un'onda progressiva e per il modo TE_{10} .

3.3.2 Modi in guida d'onda circolare (esercizio)

Si studino i modi in guida d'onda a sezione circolare utilizzando i risultati visti in 3.1.4 e 3.1.5. Si mostri che il modo fondamentale è il TE_{11} , caratterizzato da

$$k_t = \frac{1,841}{a}, \quad \lambda_c = 3,413a,$$

e il primo modo superiore è il TM_{01} , caratterizzato da

$$k_t = \frac{2,405}{a}, \quad \lambda_c = 2,613a.$$

3.3.3 Modi in guida d'onda a spicchio (esercizio)

Si studino i modi in una guida d'onda la cui sezione trasversale è rappresentata nella figura 3.10a. Si utilizzi la soluzione trovata per la guida d'onda circolare, imponendo opportune condizioni al contorno per

$$\phi = 0, \quad \phi = \gamma.$$

Si mostri che la dipendenza radiale delle funzioni Ψ e Φ è rispettivamente del tipo

$$J_\nu(q_{\nu m} \rho), \quad J_\nu(p_{\nu m} \rho),$$

dove $\nu = n\pi/\gamma$.

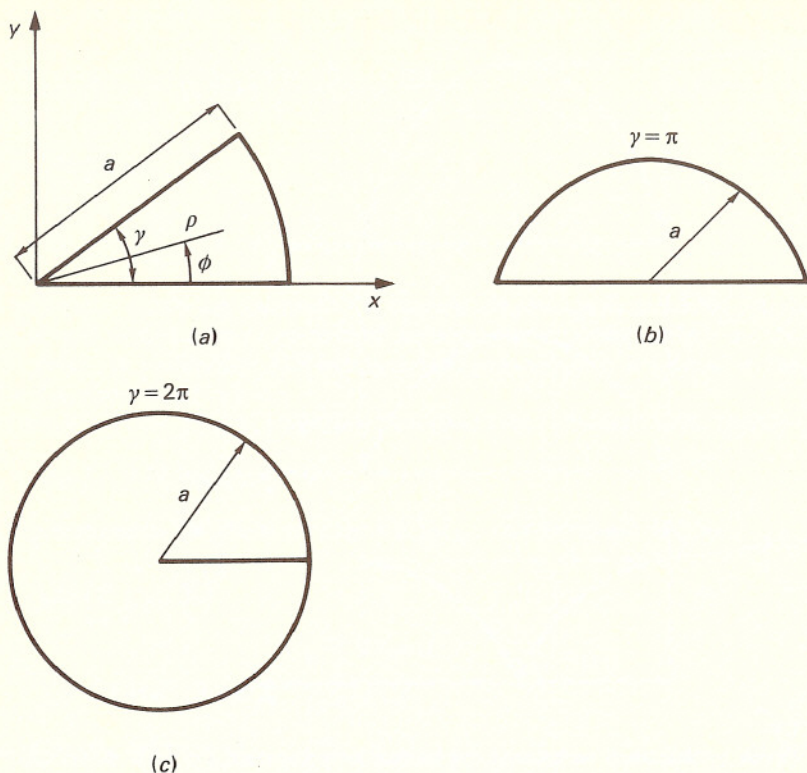


Figura 3.10
Alcune sezioni di guida d'onda a spicchio.

Le $J_\nu(u)$ sono funzioni di Bessel di ordine (in generale) frazionario (Abramovitz e Stegun, 1968, pp. 435-77); $q_{\nu m}$, $p_{\nu m}$ sono i successivi zeri delle due funzioni, per $\rho = a$:

$$J'_\nu(q_{\nu m}a) = 0, \quad J_\nu(p_{\nu m}a) = 0.$$

Si studi in particolare una guida a spicchio con $\gamma = \pi$ (vedi fig. 3.10b); in tal caso $\nu = n$, e la dipendenza radiale dei campi è ancora descrivibile per mezzo di funzioni di Bessel di ordine intero. Si mostri che il primo modo TE è il TE_{11} , come nel caso della guida circolare, e che il primo modo TM è il TM_{11} , mentre tutti i modi TM_{0m} sono identicamente nulli.

Si studi poi la guida a spicchio con $\gamma = 2\pi$ (vedi fig. 3.10c), corrispondente a una guida circolare con un setto radiale metallico. In questo caso $\nu = n/2$.

Per n pari si ottengono modi con dipendenza radiale uguale a quella della guida circolare; per n dispari si ottengono nuovi modi, la cui dipendenza radiale è descritta da funzioni di Bessel di ordine frazionario. I modi a frequenza di taglio più bassa sono descritti dalla funzione (Abramovitz e Stegun, 1968, p. 438)

$$J_{1/2}(k_t \rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k_t \rho)}{\sqrt{k_t \rho}}.$$

Si dimostri che il primo modo TE è caratterizzato da

$$k_t = \frac{1,165}{a}, \quad \lambda_c = 5,391a;$$

mentre il primo modo TM è caratterizzato da

$$k_t = \frac{\pi}{a}, \quad \lambda_c = 2a.$$

Il modo fondamentale è quindi il $TE_{1/2,1}$. Si noti come l'inserzione del setto metallico abbassi notevolmente la pulsazione critica, a parità di dimensioni, rispetto alla guida circolare.

3.3.4 Modi superiori in cavo coassiale (esercizio)

In 3.2.1 è stato mostrato che il modo fondamentale in un cavo coassiale è il TEM ($k_t = 0$). Si studino i modi superiori nel caso di una sezione trasversale circolare (vedi fig. 3.7), utilizzando combinazioni lineari di funzioni di Bessel di prima e di seconda specie,

$$AJ_n(k_t \rho) + BY_n(k_t \rho);$$

si osservi che la funzione $Y_n(k_t \rho)$ è singolare per $\rho = 0$ (ma questo punto è escluso dalla sezione trasversale del cavo).

Si ricavino le equazioni di dispersione per i modi TE

$$\frac{J'_n(k_{tm}b)}{Y'_n(k_{tm}b)} = \frac{J'_n(k_{tm}c)}{Y'_n(k_{tm}c)},$$

e per i modi TM

$$\frac{J_n(k_{tm}b)}{Y_n(k_{tm}b)} = \frac{J_n(k_{tm}c)}{Y_n(k_{tm}c)}.$$

Delle precedenti equazioni esistono soluzioni numeriche (Ramo e Whinnery, 1953); è anche possibile darne una soluzione analitica approssimata (Johnson, 1965, p. 142) se

$$c - b \ll \frac{1}{2} (c + b) = R;$$

in tal caso si ha per il primo modo TE

$$k_t \approx \frac{1}{R}, \quad \lambda_c \approx 2\pi R,$$

e per il primo TM

$$k_t \approx \frac{\pi}{c-b}, \quad \lambda_c \approx 2(c-b).$$

Il primo modo superiore è quindi il TE_{10} ; il primo indice ($n = 1$) individua l'ordine delle funzioni di Bessel adoperate e il secondo ($m = 0$) classifica il primo zero della equazione di dispersione per i modi TE_{nm} .

3.3.5 Modi in guida d'onda a spicchio di cavo coassiale (esercizio)

Rifacendosi alla guida d'onda la cui sezione è riportata nella figura 3.11, studiarne i modi, con particolare riferimento ai casi $\gamma = \pi$ e $\gamma = 2\pi$.

3.3.6 Eccitazione del campo in una guida d'onda a sezione rettangolare

Consideriamo una guida a sezione rettangolare, come quella riportata nella figura 3.12a, eccitata da un dipolo magnetico di lunghezza Δl , percorso da una corrente I_m (fig. 3.12b) e orientato lungo l'asse longitudinale della guida. La sorgente è qui una densità di corrente magnetica

$$\mathbf{J}_m = I_m \delta(x-x') \delta(y-y') \mathbf{i}_z,$$

costante in $|z| < \Delta l/2$ e nulla all'esterno di tale intervallo. Il campo da essa prodotto può essere rappresentato nei modi propri della guida rettangolare considerata. Per calcolare l'eccitazione del singolo modo, si può far uso del teorema di reciprocità nella forma [9] (§ 3.1), laddove il volume di integrazione è la parte di guida compresa tra le ascisse z' e z'' e la sorgente di prova è posta all'esterno di esso.

Considerando l'integrale di volume è facile rendersi conto che in questo caso solo i modi TE sono eccitati. Se la guida è illimitata nei due sensi e le sorgenti di prova sono poste a un'ascissa $z < z''$, esse producono un campo (modo di indice generico i)

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{e}_1 Z_{0i} \exp(-ik_{zi}z) \\ \mathbf{H}' = \left[\mathbf{h}_i + \frac{\mathbf{i}_z}{jk_{zi}} \nabla_t \cdot \mathbf{h}_i \right] \exp(-jk_z z), \end{cases}$$

dove

$$Z_{0i} = \frac{\omega\mu}{k_{zi}}, \quad k_{zi} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

L'ampiezza del campo di prova è stata scelta (arbitrariamente) in modo che sia $\mathbf{H}' = \mathbf{h}_i$ per $z = 0$.

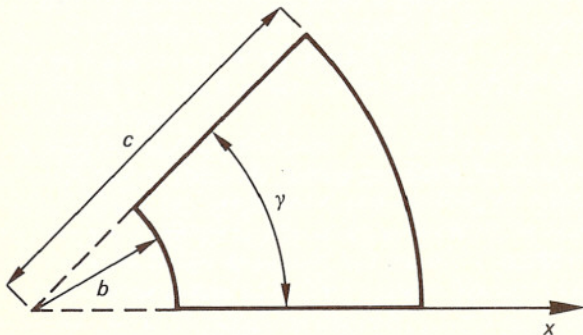


Figura 3.11

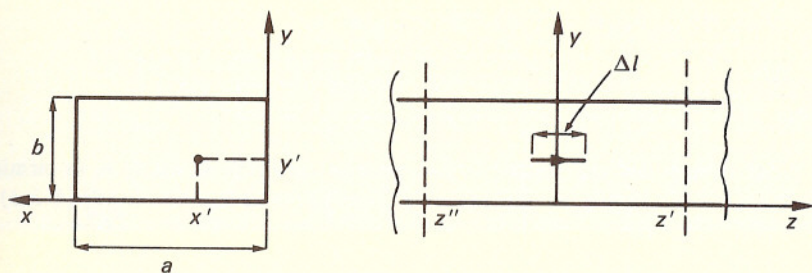


Figura 3.12

Il dipolo magnetico produce un campo che varia con z in modo diverso a seconda che $z < \Delta l/2$ o $z > \Delta l/2$. Espandendo questo campo nei modi associati alla guida, per il modo di ordine q e $z > \Delta l/2$ si ha

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{e}_q Z_{0q} I_q \exp(-jk_{zq} z) \\ \mathbf{H} = \left[\mathbf{h}_q I_q + \frac{I_q \mathbf{i}_z}{jk_{zq}} \nabla_t \cdot \mathbf{h}_q \right] \exp(-jk_{zq} z); \end{cases}$$

per $z < \Delta l/2$, si ha

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{e}_q Z_{0q} I_q \exp(jk_{zq} z) \\ \mathbf{H} = \left[\mathbf{h}_q I_q - \frac{I_q \mathbf{i}_z}{jk_{zq}} \nabla_t \cdot \mathbf{h}_q \right] \exp(jk_{zq} z). \end{cases}$$

Per $\Delta l \rightarrow 0$, le espressioni precedenti valgono rispettivamente per $z > 0$ e $z < 0$.

La I_q è una costante incognita che rappresenta l'eccitazione del modo di ordine q ; essa è la stessa per valori positivi e negativi di z , in modo da assicurare la continuità del campo magnetico tangente per $z = 0$; la componente longitudinale del campo magnetico è invece discontinua a causa della presenza della sorgente.

Il campo totale prodotto dalla sorgente risulta dalla sovrapposizione dei modi precedenti, con opportuna scelta dei coefficienti I_q dello sviluppo. Sostituendo questo nell'integrale [9] (§ 3.1), si vede subito che solo il termine corrispondente allo stesso modo della sorgente di prova fornisce un valore diverso da zero per l'integrale di superficie. Infatti la parte di questo integrale estesa alle pareti metalliche della guida è nulla, perché ivi è nullo il campo elettrico tangente. Per la parte di integrale estesa alla sezione trasversale della guida ($z = z'$ e $z = z''$) le relazioni di ortogonalità [6] mostrano che solo il modo di ordine i può dare un contributo diverso da zero. Se $k > k_t$ (il modo di ordine i si propaga), solo l'integrale nella sezione $z = z'$ è diverso da zero e vale

$$Z_{0i} I_i + Z_{0i}^* I_i = 2 Z_{0i} I_i.$$

Se invece $k < k_t$ (il modo di ordine i è interdetto), solo l'integrale nella sezione $z = z''$ è diverso da zero e vale

$$Z_{0i} I_i - Z_{0i}^* I_i = 2 Z_{0i} I_i.$$

perché Z_{0i} è una pura reattanza. Pertanto, l'integrale superficiale vale sempre $2 Z_{0i} I_i$.

L'integrale di volume (compreso il segno meno) è anche immediatamente calcolabile, ove si ammetta che la lunghezza del dipolo magnetico Δl tenda a zero, rimanen-

do finito il prodotto $I_m \Delta l$. Il risultato è il seguente:

$$-\frac{I_m \Delta l}{jk_{zi}} k_{ti} \Psi_i(x', y'),$$

dove si è tenuto conto dell'espressione della funzione vettoriale di modo h_i in termini della corrispondente funzione Ψ_i . Uguagliando i due integrali secondo la [9] (§ 3.1) e risolvendo per I_i , si ottiene

$$I_i = -\sqrt{\frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{ab}} \frac{I_m \Delta l}{2j\omega\mu} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \cos\left(\frac{n\pi}{a} x'\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y'\right).$$

Una eccitazione come quella considerata può essere realizzata mediante una piccola spira di corrente elettrica, nel modo illustrato nella figura 3.13 (vedi 4.3.4).

L'alimentazione della spira lungo la quale circola la corrente (spazialmente costante) I può essere ottenuta mediante un cavo coassiale. La spira è centrata in $y = b/2$, in modo da eccitare al massimo i modi con m pari; essa è inoltre appoggiata alla parete $x = a$, dove l'ampiezza del campo magnetico longitudinale per i modi TE è massima.

La sezione $A = \Delta x \Delta y$ della spira (per semplicità supposta quadrata) può essere scomposta in elementi infinitesimi, ciascuno dei quali contribuisce alla corrente magnetica totale I_m con una parte

$$\frac{I_m}{\Delta x \Delta y} dx' dy'.$$

Il coefficiente di eccitazione I_i è dato per sovrapposizione da

$$\begin{aligned} I_i &= -\sqrt{\frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{ab}} \frac{I_m \Delta l}{j\omega\mu \Delta x \Delta y} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \int_{a-\Delta x}^a \cos\left(\frac{n\pi}{a} x'\right) dx' \cdot \\ &\quad \cdot \int_{(b-\Delta y)/2}^{(b+\Delta y)/2} \cos\left(\frac{m\pi}{b} y'\right) dy' = \\ &= -\sqrt{\frac{4\epsilon_n \epsilon_m}{ab}} IA \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2} \frac{\sin \frac{n\pi}{a} \Delta x}{\frac{n\pi}{a} \Delta x} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2b} \Delta y\right)}{\frac{m\pi}{2b} \Delta y} \cos\left(\frac{m\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

dove si è fatto uso della relazione (vedi § 4.3.4)

$$-I_m \Delta l + \omega(\mu A I) = 0.$$

Data la particolare simmetria della eccitazione, i modi con m dispari non sono eccitati.

Se ci si allontana dalla sorgente, i modi che non si propagano si attenuano come

$$\exp\left[-\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - k^2} z\right].$$

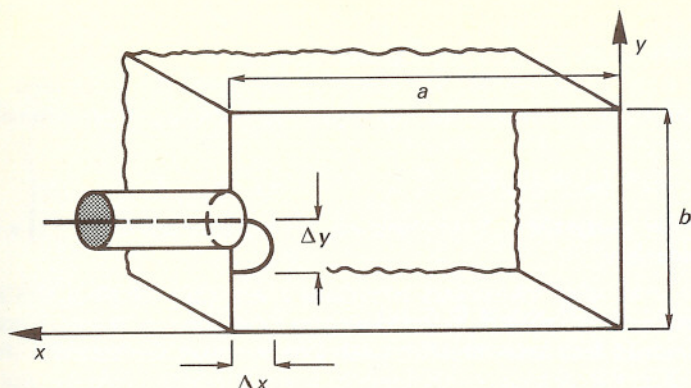


Figura 3.13

Eccitazione di una guida mediante spira di corrente.

Se ad esempio nella guida può propagarsi il solo modo TE_{10} , cioè

$$\frac{2\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a},$$

per $z \gg a$ esso è sufficiente a descrivere il campo in guida: tutti gli altri modi infatti risultano sensibilmente attenuati. E' solo nelle vicinanze della sorgente che il campo ha una distribuzione spaziale più complicata, ed è quindi necessaria la sovrapposizione di tutti i modi TE_{nm} , con m pari, per descriverlo correttamente.

E' interessante notare che le proprietà di convergenza della rappresentazione migliorano se si passa dal caso di un dipolo magnetico elementare, a sezione trasversale infinitesima, a quello di una spira di corrente, la cui sezione trasversale è piccola ma finita. Facciamo ora l'ipotesi che sia finita anche l'estensione longitudinale della sorgente (essa è peraltro difficilmente valutabile nel caso della spira). Detto Δl un valore approssimato di tale lunghezza, il fattore aggiuntivo che compare nell'espressione di I_i ,

$$\frac{\sin(k_{zi}\Delta l/2)}{k_{zi}\Delta l/2},$$

migliora ancora la convergenza della rappresentazione.

3.3.7 Eccitazione del campo in una guida d'onda rettangolare (esercizio)

Studiare la distribuzione del campo in una guida d'onda rettangolare eccitata da un filo di corrente uniforme secondo l'asse y :

$$\mathbf{J} = I\delta\left(x - \frac{a}{2}\right)\delta(z)\mathbf{i}_y.$$

Si noti che si eccitano solo i modi TE (precisamente TE_{n0} , n dispari), perché

$$\int_0^b \mathbf{J} \cdot \nabla_t \Phi \, dy = 0.$$

*3.3.8 Eccitazione in guida d'onda (caso generale)

Data, all'interno della guida d'onda, una distribuzione di corrente impressa, sia elettrica ($\mathbf{J}$) sia magnetica ($\mathbf{J}_m$), scomponiamola in parte trasversale e in parte longitudinale:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_t + J_z \mathbf{i}_z, \quad \mathbf{J}_m = \mathbf{J}_{mt} + J_{mz} \mathbf{i}_z.$$

Operando come nel paragrafo 3.2 si ottengono, invece delle equazioni [2] e [3] (§ 3.2), le nuove equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu \mathbf{H}_t + \mathbf{i}_z \times \nabla_t E_z - \mathbf{J}_{mt} \\ \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) = -j\omega\mu \mathbf{E}_t + \nabla_t H_z \times \mathbf{i}_z - \mathbf{J}_t \\ \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t) = j\omega\mu H_z + J_{mz} \\ \nabla_t \cdot (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) = j\omega\epsilon E_z + J_z. \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni tratte dalle seconde equazioni nelle prime, queste possono essere riscritte nella forma molto compatta (Marcuvitz e Schwinger, 1951)

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_t = j\omega\mu \left[\mathcal{J}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right] \cdot (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_z) + \bar{\mathbf{J}}_{mt} \times \mathbf{i}_z \\ -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{H}_t = j\omega\epsilon \left[\mathcal{J}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right] \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t) + \mathbf{i}_z \times \bar{\mathbf{J}}_t, \end{cases} \quad [22]$$

dove $\mathcal{J}_t$ è la matrice unitaria trasversale,

$$\mathcal{J}_t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{J}_t = \mathbf{A},$$

e $\bar{\mathbf{J}}_t, \bar{\mathbf{J}}_{mt}$ sono correnti elettriche e magnetiche impresse *equivalenti*:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{J}}_t = \mathbf{J}_t + \frac{(\nabla_t J_{mz}) \times \mathbf{i}_z}{j\omega\mu} = \mathbf{J}_t + \frac{\nabla_t \times (J_{mz} \mathbf{i}_z)}{j\omega\mu} \\ \bar{\mathbf{J}}_{mt} = \mathbf{J}_{mt} + \frac{\mathbf{i}_z \times (\nabla_t J_z)}{j\omega\epsilon} = \mathbf{J}_{mt} - \frac{\nabla_t \times (J_z \mathbf{i}_z)}{j\omega\epsilon}. \end{cases} \quad [23]$$

Le [22] generalizzano le [5] al caso di presenza di sorgenti, come si verifica espandendo le sorgenti trasversali equivalenti nei modi appropriati alla guida:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{J}}_t = -\sum_n \mathbf{e}_n(t) I_{Gn}(z) \\ \bar{\mathbf{J}}_{mt} = -\sum_n \mathbf{h}_n(t) V_{Gn}(z). \end{cases} \quad [24]$$

Sostituendo nelle [22] si ottiene, per ogni modo, l'equazione della linea equivalente con generatori (per unità di lunghezza) serie V_G e parallelo I_G (l'indice di modo n è stato omissso):

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = jk_z Z_0 I - V_G \\ -\frac{dI}{dz} = j \frac{k_z}{Z_0} V - I_G, \end{cases} \quad [25]$$

dove

$$\begin{cases} I_G = - \iint_S \bar{\mathbf{J}}_t \cdot \mathbf{e}^* dS \\ V_G = - \iint_S \bar{\mathbf{J}}_{mt} \cdot \mathbf{h}^* dS. \end{cases} \quad [26]$$

Utilizzando le [23], per i *generatori equivalenti* sulla linea si può ricavare una espressione più comoda per i calcoli, che non prevede necessariamente che le componenti longitudinali delle correnti siano differenziabili (nel piano trasversale): in virtù di una identità vettoriale (vedi Formulario) e scrivendo e nella forma [11], si ha

$$\iint_S \mathbf{i}_z \times (\nabla_t J_z) \cdot \mathbf{h}^* dS = \iint_S \mathbf{e}^* \cdot \nabla_t J_z dS = - \iint_S J_z \nabla_t \cdot \mathbf{e}^* dS + \oint_l J_z \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{i}_n dl.$$

Ma J_z è nulla sulle pareti e pertanto

$$V_G = - \iint_S \mathbf{J}_{mt} \cdot \mathbf{h}^* dS + \frac{1}{j\omega\epsilon} \iint_S J_z \nabla_t \cdot \mathbf{e}^* dS. \quad [27]$$

Analogamente si ha

$$I_G = - \iint_S \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{e}^* dS + \frac{1}{j\omega\mu} \iint_S J_{mz} \nabla_t \cdot \mathbf{h}^* dS. \quad [28]$$

*3.3.9 Perdite nelle guide

In una guida d'onda la dissipazione di energia elettromagnetica può avvenire in due modi: o ha luogo nel materiale che riempie la guida (*perdite di volume*) o si verifica per l'imperfetta conducibilità delle pareti.

Il primo tipo di perdite è importante principalmente nel caso dei cavi coassiali, necessariamente riempiti (in tutto o in parte) di materiale dielettrico. Per quanto buono, ogni dielettrico ha perdite a causa della isteresi del materiale; un parametro caratteristico è il cosiddetto *angolo di perdita* γ ,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1},$$

che, per minimizzare le perdite, dev'essere il più piccolo possibile. La presenza di tali perdite non richiede modifiche ai risultati dei precedenti paragrafi 3.2 e 3.3, tranne che il rendere ϵ e/o μ complessi. Se, come in pratica accade, $\gamma \ll 1$, è possibile tener conto delle perdite di volume applicando i risultati dell'analisi delle linee con piccole perdite (vedi 2.5.7). In pratica, l'impedenza caratteristica rimane reale e la costante

di propagazione (per un cavo coassiale riempito di dielettrico)

$$k = \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \approx \omega \sqrt{\epsilon \mu_0} \left(1 - j \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} \right)$$

diventa complessa, con una piccola parte immaginaria che produce una attenuazione (esponenziale) del segnale lungo la direzione di propagazione.

Le perdite sulle pareti sono invece importanti non solo per i cavi, ma anche (e soprattutto) per le guide. Non si può però tenerne conto richiamandosi direttamente ai risultati dei paragrafi 3.2 e 3.3, che presuppongono la perfetta conducibilità delle pareti: se il materiale che limita la guida non è un conduttore perfetto, la componente tangenziale del campo elettrico non è più nulla sulle pareti interne della guida. Un primo problema è quindi quello di determinare le nuove condizioni al contorno. Per questo ci si riferisce al più semplice caso di incidenza di un'onda piana su un semispazio buon conduttore, dove gli angoli di incidenza θ_1 e di rifrazione (nel conduttore) θ_2 sono legati dalla relazione (vedi 2.7.5)

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2, \quad k_2 \approx \sqrt{\omega \mu \sigma / j}.$$

In un buon conduttore $|k_2| \gg k_1$, cosicché $\theta_2 \approx 0$. La conclusione è che il campo trasmesso nel conduttore è un'onda piana con direzione di propagazione normale alla superficie di separazione, qualunque sia l'angolo di incidenza.

Supponendo che questa conclusione sia valida anche nel caso delle guide, si ricava immediatamente la seguente condizione al contorno (*condizione di Leontovič*):

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} \approx \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma / j \omega}} \mathbf{i}_n \times \mathbf{H} \times \mathbf{i}_n = \frac{1+j}{\sigma \delta} \mathbf{i}_n \times \mathbf{H} \times \mathbf{i}_n, \quad [29]$$

dove δ è la profondità di penetrazione nel materiale delle pareti (vedi 2.7.2).

Un secondo problema è verificare se sia ancora possibile un'espansione modale nella guida. Si nota subito una serie di differenze rispetto al caso di pareti perfettamente conduttrici. Anzitutto non possono esistere, in generale, modi TE, perché alle correnti (longitudinali) sulle pareti è associata una componente secondo z del campo elettrico; né possono esistere modi TM, poiché alle correnti (trasversali) sulle pareti è associata una componente longitudinale del campo magnetico. Una espansione in modi TE e TM non è a rigore possibile; e se anche le funzioni di modo potessero essere adoperate, verrebbe a mancare la loro ortogonalità perché le condizioni [4] e [13] (§ 3.3) non sono più verificate.

Fortunatamente, per l'elevata conducibilità delle pareti, la variazione delle componenti dei campi, rispetto alla situazione ideale di pareti perfettamente conduttrici, è molto piccola, ed è pertanto lecito assumere la distribuzione dei campi ancora uguale a quella del caso ideale; la condizione al contorno [29] serve per il calcolo della costante di propagazione in guida, unico parametro la cui variazione, sulle lunghe distanze, non può essere trascurata.

Nell'ipotesi che il campo magnetico sia noto e coincidente con quello della guida ideale, per mezzo della [29] si può ricavare il valore della componente tangenziale del campo elettrico sulle pareti. Vi è dunque una componente del vettore di Poynting, normale alla parete della guida, la cui parte reale è data da

$$\frac{1}{2\sigma\delta} |\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}|^2 \quad \text{su } l.$$

Questa produce un flusso di potenza (reale) attraverso le pareti (che si trasforma in calore per effetto Joule) cui corrisponde un'attenuazione dell'onda che si propaga. Se ci si riferisce a un modo particolare, con la sola onda progressiva, i campi si attenuano come $\exp(-\alpha z)$; per la potenza si ha

$$P(z) = P(0) \exp(-2\alpha z), \quad dP = -2\alpha P(z) dz.$$

Uguagliando la diminuzione di potenza al flusso attraverso le pareti, si ottiene immediatamente

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma\delta} \frac{\oint_l |\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}|^2 dl}{Z_0 |I|^2}.$$

Per i modi TM si ha

$$\oint_l |\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}|^2 dl = |I|^2 \oint_l |\mathbf{e}|^2 dl = \frac{|I|^2}{k_t^2} \oint_l \left| \frac{\delta\Phi}{\delta n} \right|^2 dl,$$

e α è funzione della frequenza, secondo una costante che dipende dalle dimensioni della guida e del particolare modo considerato, del tipo

$$\alpha \propto \frac{\sqrt{(\omega/\omega_c)^3}}{\sqrt{(\omega/\omega_c)^2 - 1}}.$$

Il grafico dell'andamento di α con ω è riportato nella figura 3.14; per ogni modo, il minimo dell'attenuazione si ha per $\omega = \sqrt{3}\omega_c$.

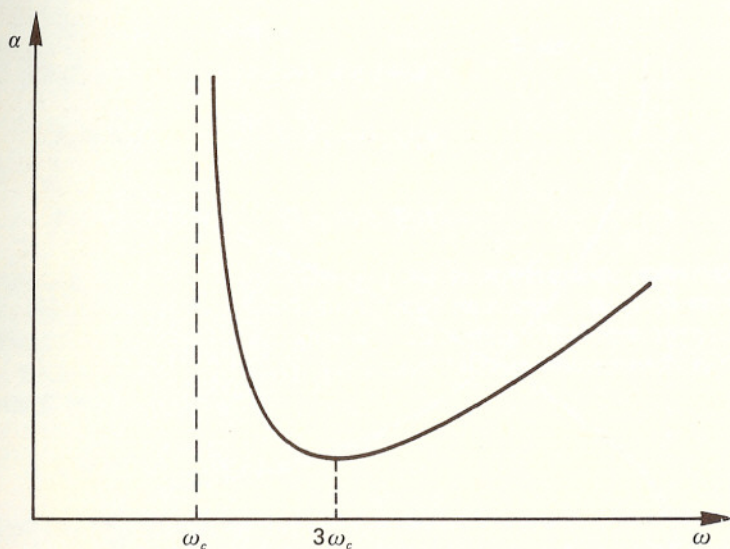


Figura 3.14

Per i modi TE si ha

$$\oint_l |\mathbf{i}_n \times \mathbf{H}|^2 dl = |I|^2 \oint_l |\mathbf{e}|^2 dl + \frac{|I|^2}{k_z^2} \oint_l |\nabla_t \cdot \mathbf{h}|^2 dl =$$

$$= \frac{|I|^2}{k_t^2} \oint_l \left| \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right|^2 dl + k_t^2 \frac{|I|^2}{k_z^2} \oint_l \Psi^2 dl$$

e α ha una dipendenza con la frequenza del tipo

$$A \frac{\sqrt{(\omega/\omega_c)^2 - 1}}{\sqrt{\omega/\omega_c}} + B \frac{1}{\sqrt{\omega/\omega_c} \sqrt{(\omega/\omega_c)^2 - 1}}$$

con A e B costanti dipendenti dalle dimensioni della guida e del modo considerato. Le due parti che concorrono a formare α sono riportate nella figura 3.15.

Si noti, in particolare, che le perdite di tipo "B" decrescono con ω . Se il modo è tale che $A=0$ ($\mathbf{e}=0$ sul contorno), esso presenta perdite molto basse se la frequenza è sufficientemente alta. Questo accade, ad esempio, per modi TE_{0m} della guida circolare, perché $\partial \Psi / \partial l = 0$.

La guida circolare può essere, quindi, particolarmente utile per trasmissioni a lunga distanza. Ovviamente, non essendo il modo TE_{01} quello fondamentale, bisogna prendere opportuni accorgimenti al fine di non eccitare i modi a frequenze critiche più basse.

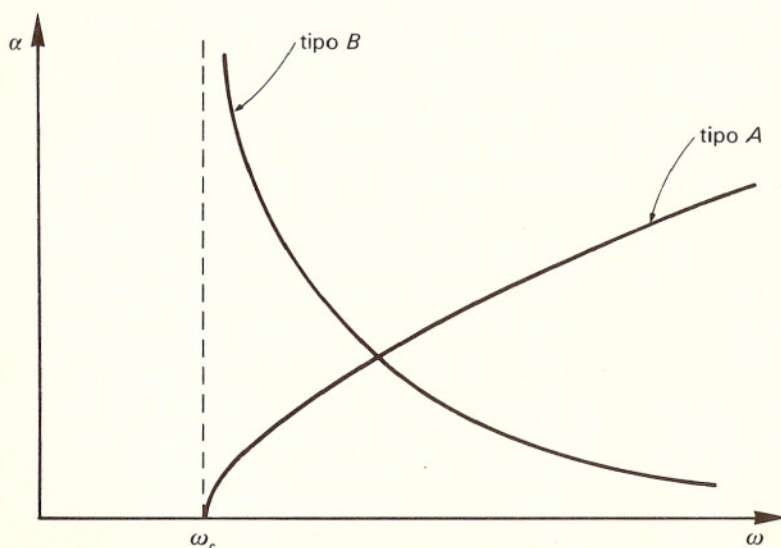


Figura 3.15

3.3.10 Costante d'attenuazione (esercizio)

Calcolare la costante d'attenuazione dovuta alle perdite sulle pareti per il modo TE_{10} in guida d'onda rettangolare, e per il modo TEM in cavo coassiale; per quest'ultimo studiare l'andamento di α al variare del rapporto c/b (diametro esterno/diametro interno) e verificare l'esistenza di un minimo.

3.3.11 Studio dei modi in guida per mezzo delle componenti longitudinali dei campi

Nei paragrafi 3.2 e 3.3 lo studio dei modi in guida è stato effettuato eliminando le componenti longitudinali dei campi e studiando il comportamento di quelle trasversali. E' tuttavia possibile seguire la via opposta, e limitarsi a considerare le componenti longitudinali dopo aver eliminato quelle trasversali.

Per una variazione con z del tipo $\exp(\pm jk_z z)$ (guida uniforme lungo z), posto

$$\begin{cases} E_t(x, y, z) = e(t) \exp(\pm jk_z z) \\ H_t(x, y, z) = h(t) \exp(\pm jk_z z) \\ H_z(x, y, z) = h_z(t) \exp(\pm jk_z z) \\ E_z(x, y, z) = e_z(t) \exp(\pm jk_z z), \end{cases}$$

le [2], [3] (§ 3.2) diventano

$$\begin{cases} \pm jk_z (i_z \times e) = -j\omega\mu h + i_z \times \nabla_t e_z \\ \pm jk_z (h \times i_z) = -j\omega\epsilon e + \nabla_t h_z \times i_z, \end{cases} \quad [29]$$

$$\begin{cases} \nabla_t \cdot (i_z \times e) = j\omega\mu h_z \\ \nabla_t \cdot (h \times i_z) = j\omega\epsilon e_z. \end{cases} \quad [30]$$

Eliminando e o h nella [29], si ottiene

$$\begin{cases} (k^2 - k_z^2) e = \pm \frac{\omega\mu}{k_z} \nabla_t h_z \pm jk_z \nabla_t e_z, \\ (k^2 - k_z^2) h = \pm \frac{\omega\epsilon}{k_z} \nabla_t e_z \pm jk_z \nabla_t h_z. \end{cases} \quad [31]$$

Tali equazioni da un lato mostrano che la distribuzione trasversale del campo può desumersi da quella longitudinale, dall'altro che i modi possono essere di tipo $TE(e_z = 0)$ o $TM(h_z = 0)$, salvo eventuali modi TEM che vanno studiati a parte.

L'equazione di definizione per i modi TE si ottiene ponendo $e_z = 0$, cosicché dalla prima delle [29] si ottiene

$$i_z \times e = \pm \frac{\omega\mu}{k_z} h. \quad [32]$$

Com'era prevedibile, la [32] mostra che le funzioni e e h coincidono essenzialmente (a parte una differente normalizzazione, che ne cambia anche le dimensioni) con le funzioni vettoriali di modo del paragrafo 3.2 e 3.3. Sostituendo poi l'espressione di

$\mathbf{i}_z \times \mathbf{e}$, data dalla [32], nella prima delle [30] ed eliminando la $\nabla_t \cdot \mathbf{h}$ mediante la seconda delle [31], si ottiene

$$\nabla_t^2 h_z + (k^2 - k_z^2) h_z = 0.$$

L'annullarsi della componente tangenziale del campo elettrico sul contorno,

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{e} = 0 \quad \text{su } l,$$

si traduce, per la prima delle [31], nella condizione al contorno

$$\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0 \quad \text{su } l.$$

Di conseguenza la funzione h_z è proporzionale alla funzione Ψ definita dalla [2] (§ 3.3).

In maniera analoga si ottiene, per i modi TM,

$$\mathbf{h} \times \mathbf{i}_z = \pm \frac{k_z}{\omega \epsilon} \mathbf{e}$$

$$\nabla_t^2 e_z + (k^2 - k_z^2) e_z = 0, \quad \text{con } e_z = 0 \quad \text{su } l.$$

3.4 Problemi interni: cavità risonanti

Si definisce *cavità risonante* un volume V racchiuso da una superficie metallica S (vedi fig. 3.16) e in cui sia eccitato un campo elettromagnetico. Il volume è riempito da un dielettrico, molto spesso omogeneo; quasi sempre è il vuoto (ma alle frequenze alle quali le cavità sono adoperate, l'aria può ritenersi a tutti gli effetti equivalente al vuoto). Posto dunque che vi sia un campo elettromagnetico nella cavità, si tratta ora di darne la rappresentazione. Spesso la cavità è realizzata mediante un tronco di guida in cortocircuito agli estremi, e questo semplifica di molto il problema, perché si può far riferimento ai risultati ottenuti per le guide (vedi 3.4.3). Nella figura 3.17a è rappresentata una *cavità rettangolare*, che può considerarsi come una guida d'onda a sezione rettangolare di lunghezza l , chiusa agli estremi in cortocircuito (vedi 3.4.4).

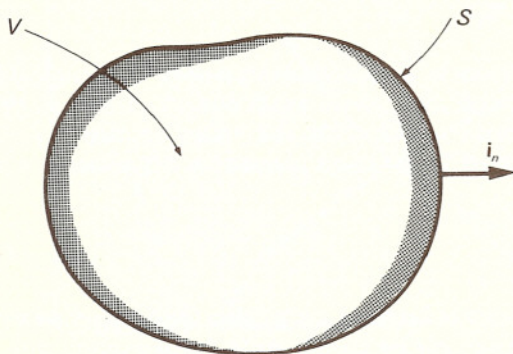


Figura 3.16

Nella parte (b) della stessa figura è rappresentata la cosiddetta *cavità rientrante* (importante se si desidera un forte campo elettrico, come quello che, intuitivamente, si localizza tra l'estremo del conduttore centrale e il cortocircuito terminale nello spazio di spessore d). Questa cavità si può pensare formata da un tronco di cavo coassiale (vedi 3.4.5), chiuso a un estremo in cortocircuito e all'altro estremo su una capacità (questo tipo di struttura trova fra l'altro applicazione nei circuiti per l'accelerazione e la modulazione di fasci di particelle cariche).

Prima di passare a una trattazione più dettagliata, definiamo alcune classi di cavità. Si definisce *cavità ideale* una cavità riempita di un dielettrico senza perdite e limitata da una superficie metallica perfetta e senza fori di accoppiamento con l'ambiente esterno. Si dice poi *cavità reale* la stessa cavità le cui pareti, sempre senza fori, siano però realizzate mediante conduttori buoni, ma non perfetti; lo stesso dielettrico (raramente, nelle applicazioni pratiche) potrà avere perdite. Si definisce *cavità accoppiata* una cavità reale che sia in comunicazione con l'esterno mediante fori attraverso i quali siano possibili scambi di energia elettromagnetica, ad esempio mediante una piccola spira di corrente (vedi fig. 3.18).

Data inizialmente una cavità ideale (vedi fig. 3.16), facciamo l'ipotesi che in essa il campo $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ possa essere rappresentato mediante un insieme di vettori di base $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$:⁴

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \sum_n V_n \mathbf{e}_n \\ \mathbf{H} = \sum_n I_n \mathbf{h}_n, \end{cases} \quad [1]$$

dove i coefficienti V_n , I_n sono indipendenti dalle coordinate. Per cavità omogenee e isotrope, il campo elettrico soddisfa l'equazione d'onda

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \beta^2 \mathbf{E} = 0, \quad \text{con} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\beta^2 = \omega^2 \epsilon \mu),$$

che si ottiene facilmente eliminando $\mathbf{H}$ dalle equazioni di Maxwell mediante il calcolo del rotore della prima delle [1] (§ 2.7). La condizione al contorno è

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{su } S.$$

Conviene pertanto scegliere come vettori di base le autofunzioni vettoriali $\mathbf{e}_n$ soluzioni del problema agli autovalori

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{e}_n + k_n^2 \mathbf{e}_n = 0, & \text{con} \quad \nabla \cdot \mathbf{e}_n = 0, \\ \mathbf{i}_n \times \mathbf{e}_n = 0 & \text{su } S, \end{cases} \quad [2]$$

D'altra parte, il campo magnetico $\mathbf{H}$ è proporzionale al rotore di quello elettrico $\mathbf{E}$; conviene quindi porre

$$k_n \mathbf{h}_n = \nabla \times \mathbf{e}_n. \quad [3]$$

⁴ Non bisogna confondere questi simboli, come i successivi V_n , I_n , con quelli delle autofunzioni dei campi trasversali in guida.

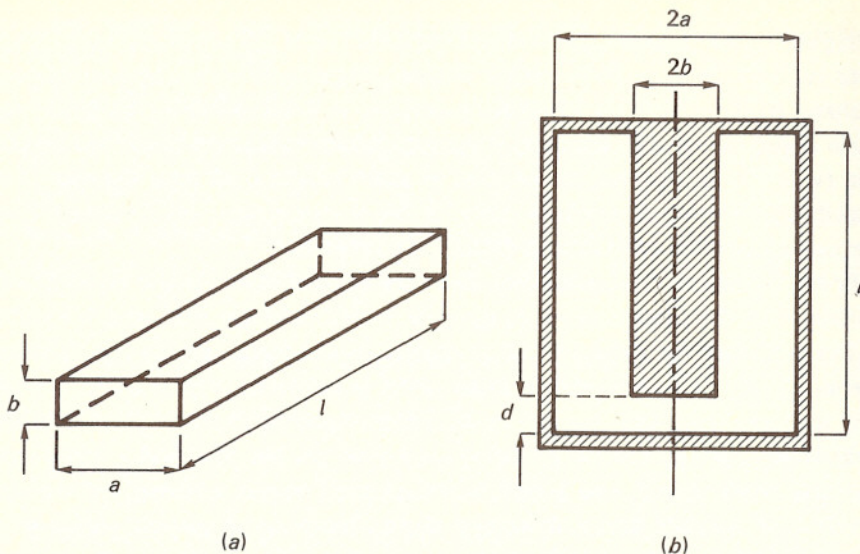


Figura 3.17
Cavità risonanti: (a) cavità rettangolare; (b) cavità rientrante.

L'equazione differenziale per $\mathbf{h}_n$ si ottiene calcolando il rotore della [3] e utilizzando la prima delle [2]:

$$\begin{cases} k_n \nabla \times \mathbf{h}_n = \nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_n = -\nabla^2 \mathbf{e}_n = k_n^2 \mathbf{e}_n \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{h}_n = \nabla \nabla \cdot \mathbf{h}_n - \nabla^2 \mathbf{h}_n = k_n \nabla \times \mathbf{e}_n = k_n^2 \mathbf{h}_n. \end{cases} \quad [4]$$

In definitiva risulta

$$\nabla^2 \mathbf{h}_n + k_n^2 \mathbf{h}_n = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{h}_n = 0, \quad [4']$$

con la condizione al contorno

$$\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{h}_n = 0 \quad \text{su } S,$$

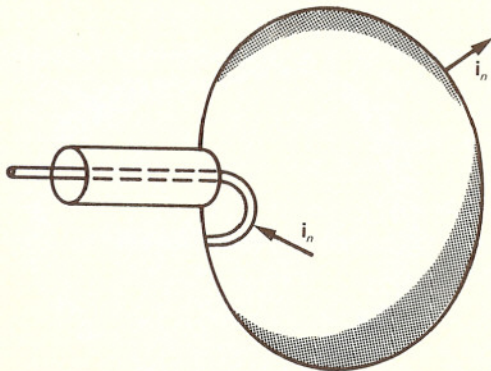


Figura 3.18
Accoppiamento della cavità con l'esterno mediante una piccola spira di corrente.

essendo le pareti perfettamente conduttrici.⁵ Come viene mostrato nell'annotazione 3.4.1 gli autovalori k_n^2 sono positivi e i vettori di base sono ortogonali e possono essere resi ortonormali:

$$\iiint_V \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m^* dV = \iiint_V \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_m^* dV = \delta_{nm}. \quad [5]$$

E' da notare che la [4'] non è in disaccordo con la [3]. Gli autovettori $\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n$ hanno le stesse dimensioni: $[e_n] = [h_n] = [1/m^{3/2}]$; i coefficienti V_n, I_n si misurano in $V \cdot m^{1/2}$ e in $A \cdot m^{1/2}$.

Consideriamo ora le espressioni [1] e sostituiamole nelle equazioni di Maxwell ai rotori:

$$\begin{cases} \nabla \times \sum_n V_n \mathbf{e}_n = -j\omega\mu \sum_n I_n \mathbf{h}_n \\ \nabla \times \sum_n I_n \mathbf{h}_n = j\omega\epsilon \sum_n V_n \mathbf{e}_n. \end{cases}$$

E' evidente che il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ soddisfa alle condizioni al contorno, perché vi soddisfano singolarmente $\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{h}_n$. Bisogna ora vedere quali relazioni devono intercorrere tra i coefficienti dello sviluppo, V_n e I_n , perché i campi soddisfino anche alle equazioni di Maxwell nel volume V . Ammettendo di poter invertire l'operatore "rotore" con la somma, uguagliando termine a termine gli elementi di questa e utilizzando le relazioni [3] e [4] tra i vettori della base, si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} V_n = -j \frac{\beta}{k_n} \xi I_n \\ I_n = j \frac{\beta}{k_n} \frac{V_n}{\xi}, \end{cases}$$

che sono soddisfatte se

$$V_n = -j \xi I_n \quad [6]$$

$$\beta = k_n. \quad [7]$$

Tali relazioni hanno importanti conseguenze. Fissate le dimensioni della cavità, gli autovalori k_n sono determinati, e pertanto in una cavità ideale possono esistere solo campi di frequenza tale che la [7] sia verificata. Partendo poi dall'eguaglianza del teorema di Poynting (§ 1.3, [9]), utilizzando la rappresentazione [1] del campo e sfruttando le relazioni di ortogonalità, si ottiene

$$\frac{1}{4} \iiint_V \epsilon |V_n|^2 \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n^* dV = \frac{1}{4} \iiint_V \mu |I_n|^2 \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{h}_n^* dV. \quad [8]$$

Se il mezzo che riempie la cavità non è dispersivo, la [8] stabilisce che, *in risonanza*, le energie elettriche e magnetiche medie immagazzinate sono uguali. Nel caso di ca-

⁵ Lo sviluppo [1], con autovettori di base tutti a divergenza nulla, può rappresentare solo un campo solenoidale, come quello che si ha in cavità ideali in assenza di sorgenti ($\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$). Nel caso più generale è necessaria l'aggiunta di un campo irrotazionale (van Bladel, 1964).

vità omogenea che si considera, l'energia media totale immagazzinata per il modo è data da

$$W_n = \frac{1}{2} \epsilon |V_n|^2 = \frac{1}{2} \mu |I_n|^2.$$

Passiamo ora a considerare il caso di cavità reali e possibilmente accoppiate. Come per la trattazione delle guide a pareti non perfettamente conduttrici, si può adoperare la stessa rappresentazione [1] se il materiale delle pareti della cavità è un buon conduttore e gli eventuali fori di accoppiamento sono piccoli. Sulle pareti, tuttavia, la serie [1] non è uniformemente convergente, perché i singoli termini non soddisfano alle condizioni al contorno della cavità reale, e non è lecito invertire operatori differenziali e di somma.

Per aggirare la difficoltà, detto $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ il campo nella cavità, calcoliamo

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{h}_n^*) = \mathbf{h}_n^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{h}_n^*.$$

Sostituendo i rotori, espandendo i campi al secondo membro e integrando nel volume della cavità, si ottiene

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \mathbf{i}_n dS = -j\omega\mu I_n - k_n V_n;$$

analogamente, il calcolo della divergenza di $\mathbf{e}_n^* \times \mathbf{H}$ fornisce

$$\oint_S (\mathbf{e}_n^* \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{i}_n dS = k_n I_n - j\omega\epsilon V_n.$$

Risolvendo questo sistema rispetto a V_n e I_n , si ottiene

$$\begin{cases} I_n = \frac{j\omega\epsilon \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \mathbf{i}_n dS + k_n \oint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{e}_n^*) \cdot \mathbf{i}_n dS}{k^2 - k_n^2} \\ V_n = \frac{k_n \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \mathbf{i}_n dS - j\omega\mu \oint_S (\mathbf{H} \times \mathbf{e}_n^*) \cdot \mathbf{i}_n dS}{k^2 - k_n^2} \end{cases} \quad [9]$$

Si noti che i modi $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$ sono quelli definiti dalle [2] e [4']; ne segue che i secondi integrali nelle [9] sono nulli, perché $\mathbf{i}_n \times \mathbf{e}_n = 0$ su S ; gli altri sono proporzionali a un flusso di potenza (attiva e reattiva) attraverso le pareti. Nelle ipotesi precedenti (elevata conducibilità delle pareti) tale flusso è molto piccolo, cosicché i coefficienti V_n , I_n sono apprezzabilmente diversi da zero solo se $k \approx k_n$. Di conseguenza, il modo di ordine n è apprezzabilmente eccitato solo se la frequenza del campo elettromagnetico è prossima a quella di risonanza, anche se il campo può esistere nella cavità a qualsiasi frequenza. Tenendo conto della condizione di Leon-

tovič [29] (§ 3.3) e per $k \approx k_n$, sulle pareti della cavità si ha

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} \approx \frac{1+j}{\sigma\delta} \mathbf{i}_n \times \mathbf{H} \times \mathbf{i}_n \approx \frac{1+j}{\sigma\delta} I_n \mathbf{i}_n \times \mathbf{h}_n \times \mathbf{i}_n,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{E} \times \mathbf{h}_n^* \cdot \mathbf{i}_n dS &\approx \frac{1+j}{\sigma\delta} I_n \iint_S |\mathbf{i}_n \times \mathbf{h}_n|^2 dS = \frac{1+j}{\sigma\delta} I_n \iint_S |h_n|^2 dS = \\ &= (1+j) I_n \frac{\omega_n \mu}{Q_n}, \end{aligned}$$

dove

$$Q_n = \omega_n \frac{\frac{1}{2} \mu |I_n|^2}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma\delta} |I_n|^2 \iint_S |h_n|^2 dS} = \omega_n \frac{W_n}{P_d}. \quad [10]$$

Il rapporto adimensionale [10] è detto *fattore di merito* della cavità alla frequenza di risonanza (reale) ω_n . Nei casi pratici, Q_n è un numero molto grande, poiché la potenza media dissipata, P_d , cioè il flusso di potenza attiva che entra nelle pareti e viene trasformato in calore, è sempre molto piccola rispetto al prodotto, $\omega_n \cdot W_n$, della pulsazione di risonanza e dell'energia media immagazzinata. Sostituendo le espressioni precedenti nella prima delle [9] si ottiene

$$\begin{aligned} k^2 - k_n^2 &= j\omega\epsilon(1+j) \frac{\omega_n \mu}{Q_n} \\ k &= k_n + (-1+j) \frac{\omega\omega_n \epsilon \mu}{Q_n(k+k_n)} \approx k_n \left(1 + \frac{-1+j}{2Q_n}\right). \end{aligned} \quad [11]$$

La [11] mostra che la pulsazione di risonanza di una cavità reale è in realtà complessa:

$$ck = \omega_n = \omega'_n + j\omega''_n = ck_n \left(1 - \frac{1}{2Q_n}\right) + jc \frac{k_n}{2Q_n}. \quad [12]$$

La parte reale della pulsazione è leggermente inferiore a quella della cavità ideale; il motivo è l'allargamento virtuale della cavità a causa della penetrazione del campo nelle pareti. Il coefficiente dell'immaginario mostra che una oscillazione innescata nella cavità si smorza con legge esponenziale:

$$\exp(-\omega''_n t) \approx \exp(-\omega'_n t / 2Q_n); \quad [13]$$

il fattore di merito appare come l'inverso di un *coefficiente di smorzamento* (un modo alternativo per giungere a questo risultato è dato in 3.4.8).

Restano da determinare i coefficienti di eccitazione del modo. Questo è possibile

solo se si considera l'accoppiamento della cavità con l'esterno, ad esempio mediante una spira di materiale conduttore (vedi fig. 3.19). Lungo la spira circola una corrente; per la presenza di questa, le formule precedenti [9], ricavate in assenza di sorgenti, vanno modificate (vedi annotazione 3.4.2). E' possibile non solo calcolare i nuovi coefficienti di eccitazione del modo di ordine n , ma anche l'ammettenza d'ingresso della spira che alimenta la cavità oscillante nel modo di ordine n :

$$Y_n = \frac{k^2 \left(1 + \frac{1-j}{Q_n}\right) - k_n^2}{-j\omega\mu k_n^2 |\Psi_n|^2} \approx \frac{1}{k_n |\Psi_n|^2} \left(j\omega \frac{\epsilon}{k_n} + \frac{\omega\epsilon}{Q_n k_n} + \frac{k_n}{j\omega\mu} \right). \quad [14]$$

La [14] mostra chiaramente che, a parte il *fattore* (adimensionale) di *accoppiamento*

$$K_n = \frac{1}{k_n |\Psi_n|^2}, \quad [15]$$

l'ammettenza d'ingresso della cavità, nell'intorno della risonanza, coincide con quella

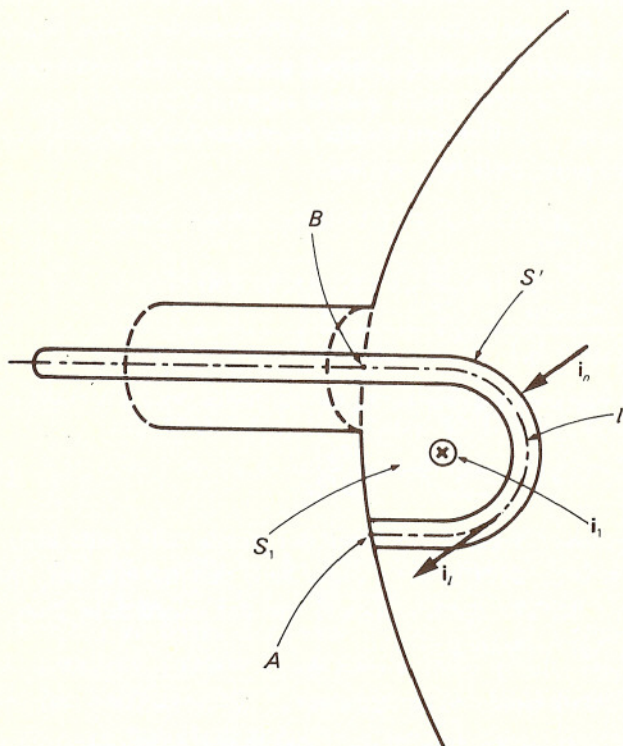


Figura 3.19

Spira eccitatrice di una cavità.

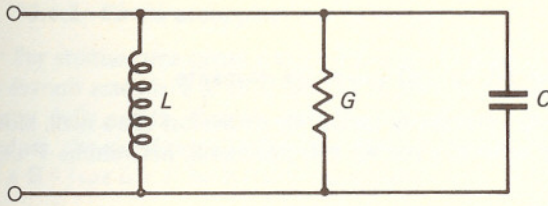


Figura 3.20

di un *circuito oscillante parallelo* (vedi fig. 3.20) di capacità C , conduttanza G e induttanza L date da

$$C = \frac{\epsilon}{k_n}, \quad G = \frac{\omega \epsilon}{Q_n k_n}, \quad L = \frac{\mu}{k_n}.$$

E' lecito pertanto considerare le cavità risonanti come il corrispettivo, nelle strutture a parametri distribuiti, dei circuiti oscillanti nelle strutture a parametri concentrati.

La risonanza si ha alla pulsazione (reale)

$$\omega_n = ck_n$$

(più esattamente, alla pulsazione, leggermente più bassa, data dalla [12]); a tale frequenza l'ammittenza di ingresso è puramente reale e vale, a parte il coefficiente di accoppiamento, $1/Q_n \zeta$. Alla risonanza l'impedenza di ingresso è massima e puramente resistiva. Nell'intorno della risonanza l'impedenza d'ingresso vale

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{k_n |\Psi_n|^2}{\frac{\omega \epsilon}{k_n Q_n} + j \left(\frac{\omega \epsilon}{k_n} - \frac{k_n}{\omega \mu} \right)} = k_n |\Psi_n|^2 \frac{Q_n k_n / \omega_n \epsilon}{\frac{\omega}{\omega_n} + j Q_n \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{k_n^2}{\omega \omega_n \mu \epsilon} \right)} \approx \\ &\approx k_n |\Psi_n|^2 \frac{Q_n \zeta}{\frac{\omega}{\omega_n} + j Q_n \left(\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega} \right)} \approx k_n |\Psi_n|^2 \frac{Q_n \zeta}{1 + 2j Q_n \frac{\omega - \omega_n}{\omega_n}}, \end{aligned}$$

se (come sempre accade) $Q_n \gg 1$. Definendo *larghezza di banda* $\Delta \omega$ della cavità l'intervallo di frequenze in cui la resistenza di ingresso non è inferiore a metà di quella di risonanza, si ha

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_n} = \frac{1}{Q_n}.$$

[16]

Tale relazione lega il fattore di qualità alla larghezza di banda della cavità.



Annotazioni

*3.4.1 Autovalori e autovettori di base di una cavità risonante

Si vuole anzitutto mostrare che, per cavità ideali, gli autovalori sono reali. Moltiplichiamo scalarmente la prima delle [2] per $\mathbf{e}_n^*$ e integriamo nel volume V della cavità:

$$\iiint_V \mathbf{e}_n^* \cdot \nabla^2 \mathbf{e}_n dV + k_n^2 \iiint_V |\mathbf{e}_n|^2 dV = 0.$$

Dalla relazione

$$\nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{e}_n) \times \mathbf{e}_n^*] = \mathbf{e}_n^* \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_n - |\nabla \times \mathbf{e}_n|^2$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{e}_n^* \cdot \nabla^2 \mathbf{e}_n dV &= - \iiint_V |\nabla \times \mathbf{e}_n|^2 dV - \iiint_V \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{e}_n) \times \mathbf{e}_n^*] dV = \\ &= - \iiint_V |\nabla \times \mathbf{e}_n|^2 dV, \end{aligned}$$

essendo

$$\iiint_V \nabla \cdot [(\nabla \times \mathbf{e}_n) \times \mathbf{e}_n^*] dV = \oint_S [(\nabla \times \mathbf{e}_n) \times \mathbf{e}_n^*] \cdot \mathbf{i}_n dS = 0$$

per la condizione al contorno data dalla seconda delle [2]. Pertanto

$$k_n^2 = \frac{\iiint_V |\nabla \times \mathbf{e}_n|^2 dV}{\iiint_V |\mathbf{e}_n|^2 dV},$$

che è una quantità reale non negativa; k_n è quindi reale. Si noti che risulta anche, dalla [3],

$$\iiint_V |\mathbf{e}_n|^2 dV = \iiint_V |\mathbf{h}_n|^2 dV;$$

i vettori di base sono normalizzabili in accordo alla [5]. Dalla prima delle [2] si ha inoltre

$$\mathbf{e}_m^* \cdot \nabla^2 \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_n \cdot \nabla^2 \mathbf{e}_m^* = (k_m^2 - k_n^2) \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m^*.$$

Osservando che

$$\mathbf{e}_m^* \cdot \nabla^2 \mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_m^* \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_n = \nabla \cdot (\mathbf{e}_m^* \times \nabla \times \mathbf{e}_n) - (\nabla \times \mathbf{e}_n) \cdot (\nabla \times \mathbf{e}_m^*),$$

integrando in V e tenendo in conto la condizione al contorno, risulta che i vettori di base sono ortogonali purché $k_n \neq k_m$ per $n \neq m$ (modi non degeneri). Se poi i modi sono degeneri, si può mostrare che essi sono ancora ortogonalizzabili.

*3.4.2 Cavità accoppiata con l'esterno

Per studiare una cavità accoppiata con l'esterno mediante una spira (vedi fig. 3.19), si devono estendere le formule [9] al caso di correnti di eccitazione presenti nell'interno della cavità. Questa estensione si ottiene agevolmente seguendo la stessa procedura che conduce alle [9], ma tenendo conto, nella sostituzione dei rotori, che $\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} + \mathbf{J}$. In definitiva si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} I_n = \frac{j\omega \epsilon \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \mathbf{i}_n dS - k_n^2 \iiint_V \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{J} dV}{k^2 - k_n^2} \\ V_n = \frac{k_n \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{h}_n^*) \cdot \mathbf{i}_n dS + j\omega \mu \iiint_V \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{J} dV}{k^2 - k_n^2} \end{array} \right.$$

La corrente di eccitazione è quella che scorre sulla superficie del conduttore della spira:

$$\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{J} dV &\rightarrow \iint_{S'} \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{J}_S dS' \approx I \int_l \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{i}_l dl = I \oint_{l'} \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{i}_l dl = \\ &= \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{e}_n^* \cdot \mathbf{i}_1 dS_1 = k_n I \iint_{S_1} \mathbf{h}_n^* \cdot \mathbf{i}_1 dS_1 = k_n I \Psi_n^*. \end{aligned}$$

Nelle espressioni precedenti (vedi fig. 3.19) S' è la superficie del filo, S_1 la superficie della spira delimitata dal filo, l il circuito della spira, l' il circuito chiuso ottenuto aggiungendo a l il tratto AB lungo la parete della guida, dove $\mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_l = 0$; infine Ψ_n è il flusso di $\mathbf{h}_n$ attraverso S_1 .

Gli integrali che compaiono nelle espressioni di V_n , I_n sono ora noti. Sostituendoli, si ottiene

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{k_n^2 \Psi_n^* I}{k^2 - k_n^2 + (1-j) \frac{\omega \omega_n \epsilon \mu}{Q_n}} \approx \frac{-k_n^2 \Psi_n^* I}{k^2 \left(1 + \frac{1-j}{Q_n}\right) - k_n^2} \\ V_n &= \frac{k_n(1+j) I_n \frac{\omega_n' \mu}{Q_n} + j\omega \mu k_n I \Psi_n^*}{k^2 - k_n^2} \approx \frac{-j\omega \mu}{k_n} I_n. \end{aligned}$$

D'altra parte, la differenza di potenziale ai morsetti della spira è data da

$$V = - \oint_{l'} \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_l dl = - \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{i}_1 dS_1 = j\omega \mu \iint_{S_1} \mathbf{H} \cdot \mathbf{i}_1 dS_1.$$

In prossimità della risonanza $\mathbf{H} \approx I_n \mathbf{h}_n$, e quindi

$$V \approx j\omega \mu I_n \iint_{S_1} \mathbf{h}_n \cdot \mathbf{i}_1 dS_1 = j\omega \mu I_n \Psi_n.$$

Sostituendo in questa relazione il valore trovato per I_n si ha

$$\frac{V}{I} = Z_n = \frac{-j\omega\mu k_n^2 |\Psi_n|^2}{k^2 \left(1 + \frac{1-j}{Q_n}\right) - k_n^2},$$

che è l'impedenza d'ingresso della spira, posta nella cavità che risuona sul modo di ordine n .

*3.4.3 Cavità composte da un tronco di guida chiuso agli estremi in cortocircuito

Spesso le cavità sono realizzate mediante tronchi di guida chiusi in cortocircuito, ad esempio nel modo rappresentato nella figura 3.17. Per modi TE rispetto all'asse z della guida il campo all'interno della cavità è dato da

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \mathbf{e}(t) V(z) \\ \mathbf{H}_t = \mathbf{h}(t) I(z) + \frac{V(z)}{j\omega\mu} \mathbf{i}_z \nabla_t \cdot \mathbf{h}. \end{cases}$$

Le funzioni vettoriali modali $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ dipendono dalla forma della sezione trasversale, la quale fissa anche l'autovalore k_t^2 del modo che si considera. Le funzioni scalari modali $V(z)$, $I(z)$ devono soddisfare le equazioni della linea equivalente del modo considerato e le condizioni al contorno

$$V(0) = V(l) = 0$$

nei punti di ascissa $z=0$ e $z=l$, dove sono stati posti i cortocircuiti terminali che delimitano la cavità. Per $z=0$

$$V(0) = \vec{Z}(0) I(0) = \vec{Z} I_0 = 0,$$

e quindi

$$\vec{Z}(0) = 0,$$

relazione che coincide con la condizione di risonanza longitudinale [7] (§ 2.6). Il risultato era prevedibile poiché, risuonando la cavità, deve ovviamente risuonare anche la linea equivalente. Per cavità omogenee

$$\vec{Z}(0) = j \frac{\omega\mu}{k_z} \operatorname{tg} k_z l = 0,$$

da cui

$$k_z l = s\pi, \quad \text{con } s \text{ intero.}$$

La condizione di risonanza è data quindi da

$$\omega = c \sqrt{k_t^2 + \left(\frac{s\pi}{l}\right)^2}$$

ed è in generale associata a tre indici, due relativi all'autovalore trasversale k_t^2 e uno all'autovalore longitudinale.

I campi nella cavità si esprimono in funzione dell'unica costante I_0 come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -j\mathbf{e}(t) Z_0 I_0 \sin\left(\frac{s\pi}{l} z\right) \\ \mathbf{H} = \mathbf{h}(t) I_0 \cos\left(\frac{s\pi}{l} z\right) - I_0 \sin\left(\frac{s\pi}{l} z\right) \frac{\nabla_t \cdot \mathbf{h}}{s\pi/l} \mathbf{i}_z; \end{cases}$$

essi coincidono con gli autovettori di base $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{h}_n$ della cavità (per il particolare modo considerato), a meno di una costante di proporzionalità che può essere determinata imponendo la normalizzazione [5].

3.4.4 Frequenze di risonanza di una cavità rettangolare (esercizio)

Si fissi l'asse z lungo il lato di lunghezza l della cavità rettangolare illustrata nella figura 3.17a; per i modi TE rispetto a z , la condizione di risonanza longitudinale porge

$$j \frac{\omega\mu}{k_z} \operatorname{tg} k_z l = 0, \quad k_z l = s\pi;$$

pertanto, le frequenze di risonanza sono date da

$$\omega_{nms} = c \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l}\right)^2}.$$

Analogamente, per i modi TM rispetto a z , si ha

$$j \frac{k_z}{\omega\epsilon} \operatorname{tg} k_z l = 0, \quad k_z l = s\pi.$$

I modi TM hanno dunque le stesse frequenze di risonanza di quelli TE. Per essi tuttavia gli indici n e m non possono assumere il valore zero (vedi 3.3.1). Il primo modo risonante, per $a > b$ e $l > b$, è quindi il TE_{101} . Per questo modo, si traccino le distribuzioni dei campi e delle correnti superficiali sulle pareti.

3.4.5 Frequenze di risonanza di una cavità rientrante

Con riferimento alla figura 3.17b, si supponga

$$d \ll b, \quad l \gg a.$$

Si può allora considerare approssimativamente la cavità come un tronco di cavo coassiale, chiuso in cortocircuito a un estremo e su una capacità

$$C \approx \epsilon \frac{\pi b^2}{d}$$

all'altro. Anche in questo caso, le frequenze di risonanza possono ottenersi imponendo la condizione di risonanza longitudinale. La frequenza più bassa è data da

$$j\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \operatorname{tg}(kl) + \frac{d}{j\omega\epsilon\pi b^2} = 0,$$

cioè

$$kl \operatorname{tg}(kl) = \frac{2ld}{b^2 \ln \frac{b}{a}}.$$

3.4.6 Frequenza di risonanza di una cavità cilindrica

Per lo studio della cavità cilindrica della figura 3.21, si può seguire il procedimento illustrato in 3.4.3, utilizzando i risultati di 3.3.2. In particolare, per i modi TM rispetto a z si ha

$$k^2 = \left(\frac{p_{nm}}{a} \right)^2 + \left(\frac{s\pi}{l} \right)^2$$

con $J_n(p_{nm}) = 0$ (vedi 3.1.5); per $s = n = 0$, $m = 1$ è

$$\omega_{010} = c \frac{p_{01}}{a} = c \frac{2,405}{a}.$$

Per questo particolare modo risonante non vi è variazione dei campi con z e ϕ , ma solo con ρ ; le uniche componenti diverse da zero sono E_z e H_ϕ .

I modi TE_{0ms} hanno campo magnetico trasversale nullo sulle pareti parallele all'asse z (vedi 3.3.2), perché $h(a, \phi) = 0$; di conseguenza, le correnti superficiali sulle pareti laterali sono tutte dirette secondo ϕ . E' questa la condizione ideale per poter spostare un cortocircuito terminale senza perturbare apprezzabilmente la distribuzione delle correnti (e quindi dei campi) a causa dell'inevitabile imperfezione del contatto tra la base (scorrevole lungo l'asse) del cilindro e la parete laterale. Si riesce in

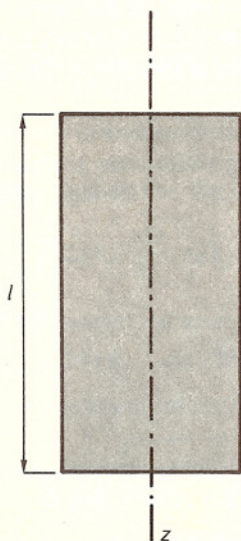


Figura 3.21

tal modo a costruire una cavità *accordabile*, dove la frequenza di risonanza è variata cambiando la lunghezza del tronco di guida.

*3.4.7 Fattore di merito di una cavità rettangolare operante nel modo TE_{101}

Con riferimento alla figura 3.22 calcoliamo i termini che appaiono nell'espressione [10] del fattore di merito Q . Per il modo TE_{101} si ha

$$\mathbf{E} = -jZ_0 I_0 \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) \mathbf{i}_y$$

$$\mathbf{H} = I_0 \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{l} z\right) \mathbf{i}_x - I_0 \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{\pi/a}{\pi/l} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{l} z\right) \mathbf{i}_z.$$

Queste espressioni, a meno di una costante di normalizzazione, coincidono con gli autovettori del modo TE_{101} ; risulta

$$W = \frac{1}{2} \epsilon Z_0^2 |I_0|^2 \frac{l}{2},$$

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma \delta} 2 \left[|I_0|^2 + |I_0|^2 \frac{2}{ab} \frac{(\pi/a)^2}{(\pi/l)^2} b \frac{l}{2} + |I_0|^2 \frac{2}{ab} \frac{a}{2} \frac{l}{2} + \right. \\ \left. + |I_0|^2 \frac{2}{ab} \frac{(\pi/a)^2}{(\pi/l)^2} \frac{a}{2} \frac{l}{2} \right],$$

dove i successivi termini nell'espressione di P_d si riferiscono alla integrazione superficiale sulle facce $z=0, l$; $x=0, a$; $y=0, b$ rispettivamente. In definitiva,

$$Q = \frac{\sigma \delta \zeta}{4\pi^2} \frac{(k_0 l)^3}{1 + \frac{l^3}{a^3} + \frac{1}{2} \frac{l}{b} \left(1 + \frac{l^2}{a^2}\right)}$$

dove $k_0 = \omega_{010}/c$.

Ci si può chiedere quali siano, una volta fissata la pulsazione di risonanza, le di-

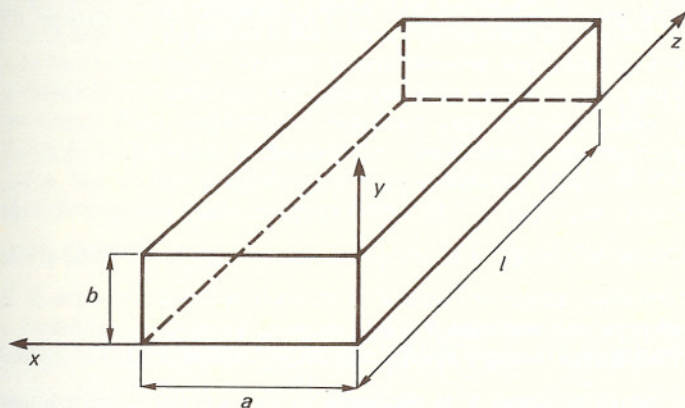


Figura 3.22

mensioni della cavità che rendono massimo Q ; dev'essere

$$\frac{1}{l^3} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{2b} \left(\frac{k_0}{\pi} \right)^2 = \min.,$$

quando sia verificata la condizione di risonanza

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{a^2} = \left(\frac{k_0}{\pi} \right)^2.$$

Si deve quindi rendere minima l'espressione

$$\frac{1}{l^3} + \left[\left(\frac{k_0}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{l^2} \right]^{3/2} + \frac{1}{2b} \left(\frac{k_0}{\pi} \right)^2.$$

Per quel che concerne il fattore contenente la quantità b , questa deve essere la massima possibile, ma certamente non superiore ad a o a l , per non correre il rischio di innescare modi di risonanza diversi dal TE_{101} . Si riconosce poi che la restante parte dell'espressione ha un minimo, ottenuto eguagliando a zero la derivata rispetto a l :

$$\frac{1}{l} - \sqrt{\left(\frac{k_0}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{l^2}} = 0, \quad \text{da cui} \quad \frac{2}{l^2} = \left(\frac{k_0}{\pi} \right)^2,$$

cioè $l=a$. In questa condizione Q assume il valore

$$Q = \frac{\sigma \delta \zeta}{4\pi^2} \frac{(k_0 a)^3}{2 + \frac{a}{b}}.$$

3.4.8 Deduzione alternativa del significato fisico del fattore di merito

Consideriamo una cavità risonante la cui energia elettromagnetica media, immagazzinata alla risonanza, sia W_n ; se la potenza media dissipata è P_d , si ha

$$-dW_n = P_d dt$$

su tempi grandi rispetto al periodo dell'oscillazione, ma piccoli rispetto a quello del decremento dell'oscillazione. Sostituendo per P_d l'espressione che si ottiene dalla [10], si ha

$$-dW_n = \frac{\omega'_n W_n}{Q_n} dt,$$

da cui, dopo integrazione,

$$W_n(t) = W_n(0) \exp(-\omega'_n t / Q_n). \quad [17]$$

La [17], che si riferisce all'energia, è in completo accordo con la [13], che si riferisce ai campi.

3.4.9 Cavità multimodali

Nelle applicazioni usuali la cavità si fa risuonare su una singola frequenza, generalmente la più bassa; le sue dimensioni sono pertanto dell'ordine della lunghezza

d'onda corrispondente a tale frequenza. Tuttavia, in alcune applicazioni, si costruiscono cavità di dimensioni molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda del campo presente in esse. Si parla in questo caso di *cavità multimodali*, o *camere riverberanti*; per quanto esposto in seguito, conviene supporre che la distribuzione dei modi nella cavità vari nel tempo. Questo si può ottenere, ad esempio, facendo vibrare le pareti della cavità, con il che variano le dimensioni di questa e quindi i modi eccitati; oppure ponendo nelle vicinanze delle pareti ventole metalliche che, rotando, cambino le condizioni al contorno sulla parete (Corona e Latmiral, 1978); in tal caso si dice che i modi sono *miscelati*. Se la costante di tempo degli strumenti usati per misurare l'intensità del campo nell'interno della cavità è grande rispetto al periodo di vibrazione delle pareti o al periodo di rotazione delle pale, il valor medio del campo misurato, su un gran numero di modi, risulta approssimativamente lo stesso in tutti i punti della cavità (salvo per il campo elettrico nelle immediate prossimità delle pareti). Inoltre, il campo è praticamente non polarizzato. In tal caso si dice che la distribuzione del campo nella cavità è *omogenea* e *isotropa*: il campo è lo stesso in ogni punto, qualunque sia la direzione lungo la quale è misurato. E' lecito dunque considerare la camera riverberante a geometria variabile alla stregua di una cavità isoterma, eventualmente contenente corpi (termometrici e non) con i quali, a regime, è in equilibrio termodinamico a temperatura costante. Tale interessante analogia è stata effettivamente sviluppata (Corona e Latmiral, 1978); qui di seguito ci limitiamo ad alcune semplici considerazioni elettromagnetiche.

Il fattore di merito della cavità, in cui è presente un numero molto elevato di modi, tutti risonanti nell'intorno della stessa pulsazione ω_0 , può essere calcolato per mezzo della [10]. Con una certa approssimazione, si può ritenere il campo magnetico sulle pareti uguale a quello nel volume della cavità (proprietà di omogeneità); le perdite sono calcolate come se fossero dovute a una corrente indotta sulle pareti (per unità di lunghezza), pari a H , che scorresse per una profondità δ (penetrazione):

$$Q = \frac{\omega_0 \frac{1}{2} \mu |H|^2 V}{\frac{1}{2} \frac{1}{\sigma \delta} |H|^2 S} \approx \frac{V}{S \delta}, \quad [18]$$

dove V ed S sono rispettivamente il volume e la superficie (pareti laterali) della cavità; la formula, in prima approssimazione, vale anche nel caso di cavità unimodali. In pratica, il Q della cavità è molto più basso, a causa delle inevitabili perdite attraverso fessure nelle pareti (porte, finestre di osservazione ecc.); così è più realistico introdurre un coefficiente di assorbimento globale delle pareti, η , tale che la potenza dissipata, o comunque persa, attraverso le pareti sia pari a η volte quella incidente sulle stesse.

Detta p_i la densità di potenza (W/sr) che fluisce in una direzione arbitraria (uguale a quella che fluisce in qualunque altra direzione, stante la supposta isotropia del campo), la potenza totale dissipata è data da

$$P_d = \eta S 2\pi p_i,$$

dove si sono sommate le potenze (i campi provenienti dalle varie direzioni essendo non correlati). A ciascuna potenza $p_i d\Omega$ è associata una densità di energia $p_i d\Omega/c$; la densità di energia in ogni punto nel volume è quindi data da

$$W = \frac{4\pi p_i}{c};$$

e, in definitiva, il fattore di merito da

$$Q = \omega_0 \frac{4\pi V p_i / c}{2\pi \eta S p_i} = \frac{4\pi V}{\eta \lambda S} \quad [19]$$

3.5 Problemi esterni: rappresentazione mediante onde piane

Supponendo assegnata la distribuzione del campo elettromagnetico, consideriamone in particolare le componenti tangenziali su una superficie chiusa S_1 (*campo impresso*). Il teorema di equivalenza permette di sostituire a tale configurazione una equivalente distribuzione di correnti, elettriche e magnetiche, superficiali. Se lo spazio esterno alla superficie è illimitato, in esso il campo elettromagnetico viene univocamente determinato imponendo la condizione di radiazione all'infinito, e può essere calcolato sovrapponendo i campi elementari prodotti dai singoli elementi di corrente superficiale. Poiché ciascun elemento è essenzialmente un dipolo (elettrico o magnetico), esso irradia un'onda sferica (vedi cap. 4) se lo spazio è omogeneo e isotropo, come si suppone. Il campo totale è dato appunto dalla sovrapposizione di onde sferiche elementari provenienti dai vari punti della superficie.

In modo equivalente, il campo elettromagnetico, all'esterno della superficie, si può considerare come quella soluzione delle equazioni di Maxwell che soddisfa la condizione di radiazione all'infinito e le cui componenti tangenziali alla superficie coincidono con quelle impresse. Ci si può chiedere se, nello spazio esterno alla superficie S_1 , il campo non sia rappresentabile mediante funzioni che siano soluzioni delle equazioni di Maxwell, soddisfacenti, singolarmente (come nel caso di guide d'onda e cavità) o globalmente, alle date condizioni al contorno. Tale rappresentazione analitica del campo è possibile solo nel caso di superfici semplici, in particolare coincidenti con una superficie coordinata di un sistema di riferimento in cui siano note le soluzioni delle equazioni di Maxwell, in assenza di sorgenti.

Il problema accennato è importante in relazione al calcolo del campo irradiato attraverso un foro in uno schermo metallico (il foro costituisce allora un'*antenna ad apertura*).

Consideriamo una superficie chiusa, S_1 , metallizzata tranne che per la presenza di uno o più fori di superficie S (vedi fig. 3.23); sorgenti disposte nel suo interno producono sulla sua faccia esterna una distribuzione di campo $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$. All'esterno di S_1 , in base al teorema di unicità (§ 1.4), il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, è quella soluzione delle equazioni di Maxwell che soddisfa la condizione di radiazione all'infinito ed è inoltre tale che

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E} = \mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_0 \quad \text{su } S;$$

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}_0 = 0 \quad \text{su } S_1 - S \text{ (conduttore elettrico perfetto).}$$

In modo analogo si sarebbe potuto partire dal campo magnetico, con la condi-

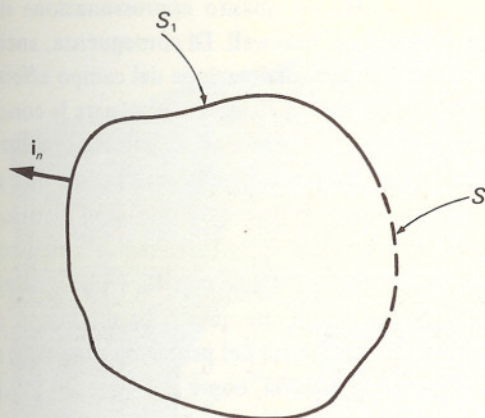


Figura 3.23

zione $i_n \times \mathbf{H} = i_n \times \mathbf{H}_0$ su S_1 , ottenendo lo stesso campo all'esterno di S_1 . E' però essenziale che i campi tangenti, $i_n \times \mathbf{E}_0$ oppure $i_n \times \mathbf{H}_0$, siano a loro volta l'esatta soluzione delle equazioni del campo elettromagnetico prodotto dalle sorgenti situate all'interno della superficie S_1 .

Si pone dunque il problema della conoscenza del campo $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$. In pratica, il più delle volte questo campo non è noto; esso viene ragionevolmente stimato in base a considerazioni parzialmente intuitive. Tra le varie approssimazioni, le più usate sono quelle di Kirchhoff e di Bethe.

Nell'*approssimazione di Kirchhoff* si suppone che il campo tangente nell'apertura S sia quello *imperturbato*, cioè il campo che esisterebbe in S se non vi fosse schermo e le sorgenti irradiassero nello spazio libero. Si suppone inoltre che sullo schermo $S_1 - S$ il campo tangente sia nullo (il che è esatto per il solo campo elettrico). L'approssimazione di Kirchhoff equivale quindi a trascurare l'effetto che i bordi hanno sulla distribuzione del campo di apertura, nonché le correnti superficiali (elettriche) indotte sulla faccia esterna dello schermo. In effetti, vicino al bordo la perturbazione del campo d'apertura e le correnti superficiali indotte sono apprezzabili solo in una striscia di larghezza paragonabile alla lunghezza d'onda. L'effetto di tale perturbazione è presumibilmente trascurabile se l'area dell'apertura è grande rispetto a quella della striscia, sempre che per interferenza gli effetti delle varie onde emesse da ogni elemento dell'apertura non si cancellino. In conclusione, l'approssimazione di Kirchhoff è valida per aperture grandi rispetto alla lunghezza d'onda e in regioni spaziali in cui il campo irradiato è intenso.

L'*approssimazione di Bethe* è duale della precedente: si assume come campo imperturbato quello che si avrebbe se il foro non esistesse e la superficie S_1 fosse tutta metallizzata. Poiché si trascura la perturbazione prodotta dalla presenza del foro nello schermo, l'approssimazione suddetta è valida solo per fori di dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda.

Il valore assegnato al campo nel foro, $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, in quanto approssimazione del campo reale, non è una soluzione delle equazioni di Maxwell. Di conseguenza, anche il campo $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ che si calcola all'esterno di S_1 è un'approssimazione del campo effettivamente irradiato dall'apertura; né è indifferente, per tale calcolo, assegnare le condizioni al contorno su S_1 in termini di campo elettrico tangente o magnetico tangente: l'errore che si commette sul campo $\mathbf{E}_0$ può esser diverso da quello che si commette su $\mathbf{H}_0$. (Nel caso di fori su superfici metalliche si ricorre in genere al campo elettrico, perché è certamente nulla la componente tangenziale di $\mathbf{E}_0$ sullo schermo metallico.)

Un caso relativamente semplice è quello di una superficie metallica piana indefinita in cui vi sia un foro (vedi fig. 3.24). Supponendo che questo sia illuminato da sinistra, si voglia calcolare il campo per $z > 0$. La simmetria del problema suggerisce di utilizzare come "funzioni di base" (notazione impropria, come si è visto in § 3.1) le onde piane considerate nel paragrafo 2.7, se nella regione di spazio considerata il mezzo è omogeneo e isotropo. Si pone dunque

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \hat{\mathbf{E}}(u, v) \exp(-jwx) \exp(-jux - jvy) \quad [1]$$

dove (vedi § 2.7)

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{k^2 - (u^2 + v^2)}, & u^2 + v^2 < k^2 = \omega^2 \epsilon \mu = \beta^2 \text{ reale,} \\ w &= -j \sqrt{(u^2 + v^2) - k^2}, & u^2 + v^2 > k^2, \end{aligned}$$

e la radice va presa col segno positivo; la scelta del segno w è compatibile con la condizione di radiazione all'infinito. La funzione vettoriale $\hat{\mathbf{E}}(u, v)$ è detta *spettro di onde piane* (o semplicemente, *spettro*) del campo $\mathbf{E}$, e viene determinata imponendo la condizione al contorno sul piano $z = 0$:

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{E}(x, y, 0) \times \mathbf{i}_n = \mathbf{E}_t(x, y), \quad [2]$$

dove $\mathbf{E}_t$ coincide con il campo elettrico tangente (assegnato) sull'apertura ed è zero sulla restante parte dello schermo. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \hat{\mathbf{E}}_t(u, v) \exp(-jux - jvy) = \mathbf{E}_t(x, y)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_t(u, v) = \mathbf{i}_n \times \hat{\mathbf{E}}(u, v) \times \mathbf{i}_n.$$

La precedente relazione è una trasformata doppia di Fourier che, invertita, porge

$$\hat{\mathbf{E}}_t(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \mathbf{E}_t(x, y) \exp(jux + jvy), \quad [3]$$

dove l'integrale può essere esteso alla sola apertura, essendo, all'esterno di questa,

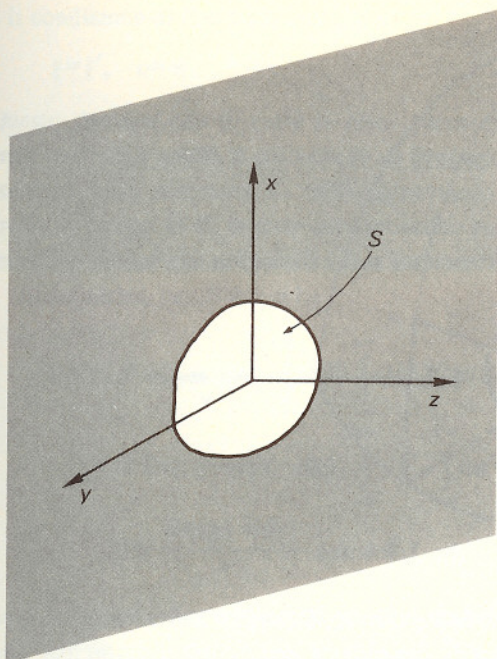


Figura 3.24
Antenna ad apertura.

$E_t(x, y) = 0$. La componente trasversale dello spettro è dunque determinata totalmente dai valori del campo sull'apertura; per la componente longitudinale si ha (vedi § 2.7)

$$\hat{E}_z(u, v) = -\frac{u\hat{E}_x + v\hat{E}_y}{w}.$$

In definitiva, con notazione compatta,

$$\hat{\mathbf{E}}(u, v) = \left(\mathcal{J}_t - \frac{\mathbf{i}_z \mathbf{k}}{w} \right) \cdot \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \mathbf{E}_t(x, y) \exp(jux + jvy). \quad [4]$$

Lo spettro di onde piane è pertanto totalmente determinato dalla distribuzione del campo tangente sull'apertura; inserita nella [1], la funzione $\hat{\mathbf{E}}(u, v)$ permette il calcolo del campo ovunque nel semispazio $z > 0$.

La rappresentazione [1] è particolarmente utile se si vuol calcolare il campo a *grande distanza* dall'apertura, cioè per $\beta r \gg 1$ (vedi anche fig. 3.25). A tal fine conviene introdurre i coseni direttori

$$\xi = \sin \theta \cos \phi, \quad \eta = \sin \theta \sin \phi, \quad \gamma = \cos \theta$$

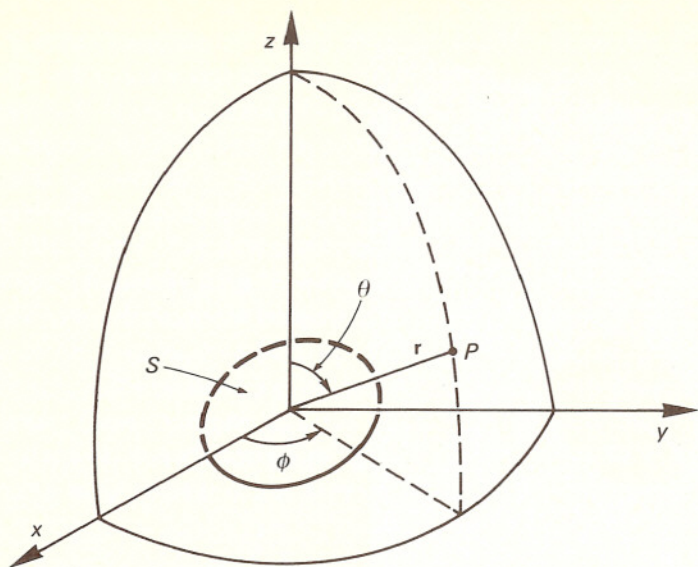


Figura 3.25

Apertura giacente nel piano $z=0$ e suo associato sistema di coordinate sferiche.

della direzione r considerata, nonché i coseni direttori

$$\xi' = \frac{u}{\beta}, \quad \eta' = \frac{v}{\beta}, \quad \gamma' = \frac{w}{\beta}$$

del vettore d'onda $\mathbf{k}$, e riscrivere l'integrale [1] come segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \hat{\mathbf{E}}(\xi', \eta') \exp[-j\beta r \psi(\xi, \eta; \xi', \eta')],$$

con $\psi(\xi, \eta; \xi', \eta') = \xi\xi' + \eta\eta' + \gamma\gamma'$.

Per $\beta r \gg 1$ l'argomento dell'esponenziale che compare nell'integrale è una funzione rapidamente variabile di ξ', η' , a meno che

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi'} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta'} = 0 \quad (\text{punto a fase stazionaria}).$$

Solo un minuscolo intorno di un tale punto contribuisce in modo significativo all'integrale; quando ci si allontani da esso, l'integrando diventa una funzione rapidamente oscillante con ξ', η' e il contributo all'integrale diventa trascurabile. Ora

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \xi'} &= \xi - \frac{\gamma \xi'}{\gamma'} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \eta'} &= \eta - \frac{\gamma \eta'}{\gamma'}, \end{aligned}$$

e la condizione di fase stazionaria si ha per

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \gamma = \gamma'.$$

Questo significa che di tutte le onde piane che compongono il campo e che arrivano in P , solo quelle il cui vettore di propagazione è compreso in uno stretto cono centrato nella direzione i_r , dall'origine verso P , interferiscono positivamente per creare il campo in P ; le altre interferiscono negativamente e il risultato netto è trascurabile. Si noti che nel punto a fase stazionaria $\psi = 1$.

In definitiva, per $\beta r \gg 1$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \beta^2 \exp(-j\beta r) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \hat{\mathbf{E}}(\xi', \eta') \exp[-j\beta r(\psi - 1)] \simeq \\ &\simeq \beta^2 \hat{\mathbf{E}}(\xi, \eta) \exp(-j\beta r) \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta' \exp[-j\beta r(\psi - 1)] \simeq \\ &\simeq 2\pi j \frac{\beta \exp(-j\beta r)}{r} \cos \theta \hat{\mathbf{E}}(\xi, \eta), \end{aligned} \quad [5]$$

dove la funzione vettoriale $\hat{\mathbf{E}}(\xi', \eta')$ è stata approssimata al suo valore $\hat{\mathbf{E}}(\xi, \eta)$ (perché solo nell'intorno del punto stazionario l'integrando ha un ruolo significativo) e il restante integrale è stato valutato asintoticamente sviluppando in serie la funzione ψ sino ai termini di ordine quadratico; si noti che i termini lineari sono nulli (James, 1976).

Dalla relazione [5] si deduce anzitutto che lo spettro di onde piane associato all'apertura è proporzionale al campo a grande distanza (*campo irradiato*), nell'ambito dei valori $\xi < 1$, $\eta < 1$ (direzioni reali di irraggiamento); risulta inoltre, sostituendo la [4] nella [5], che tale campo è proporzionale alla trasformata di Fourier della distribuzione del campo tangente sull'apertura.

Annotazioni

*3.5.1 Campo irradiato da un'apertura rettangolare

Sia data un'apertura rettangolare (vedi fig. 3.26a), illuminata da un campo elettromagnetico tale che la componente tangenziale del campo elettrico nell'apertura sia

$$\mathbf{E}_t(x, y) = E_0 i_y \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right).$$

La componente tangenziale dello spettro è data da

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_t(u, v) &= \frac{E_0}{(2\pi)^2} i_y \int_{-b}^b \exp(jvy) \int_{-a}^a \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right) \exp(jux) dx = \\ &= E_0 i_y \frac{2ab}{\pi^3} \frac{\sin(vb)}{vb} \frac{\cos(ua)}{1 - \left(\frac{2ua}{\pi}\right)^2} = \hat{E}_y i_y, \end{aligned}$$

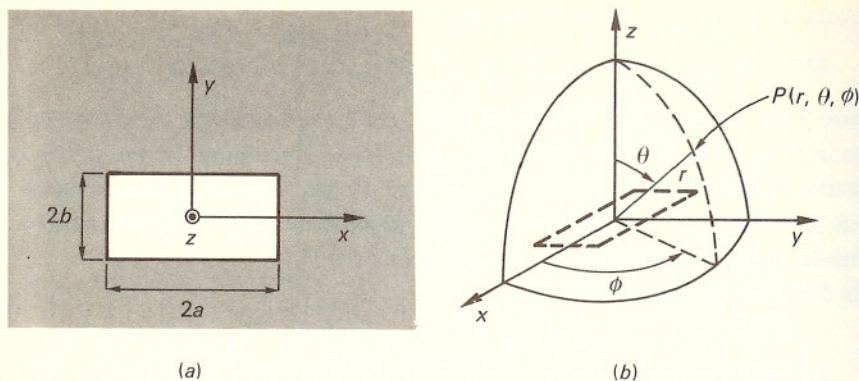


Figura 3.26
Apertura rettangolare (a) e suo associato sistema di riferimento sferico (b).

mentre la componente longitudinale è data da

$$\hat{E}_z(u, v) = -\frac{v \hat{E}_y}{w}.$$

Consideriamo ora il diagramma di radiazione nei due piani principali. Nel piano E ($\phi = \pm \pi/2$ con la polarizzazione scelta per E_0) $u = 0$ e $v = \pm \beta \sin \theta$. Pertanto nella direzione $\mathbf{k} = \beta \mathbf{i}_r$,

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{k} = \beta \mathbf{i}_r) &= E_0 \frac{2ab}{\pi^3} \frac{\sin(\beta b \sin \theta)}{\beta b \sin \theta} \left(\mathbf{i}_y \pm \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \mathbf{i}_z \right) = \\ &= E_0 \frac{2ab}{\pi^3 \cos \theta} \frac{\sin(\beta b \sin \theta)}{\beta b \sin \theta} \mathbf{i}_\theta \end{aligned}$$

e il campo irradiato ha componenti E_θ, H_ϕ date da

$$\begin{cases} E_\theta = j E_0 \frac{8ab}{\pi \lambda r} \exp(-j\beta r) \left[\frac{\sin(\beta b \sin \theta)}{\beta b \sin \theta} \right] \\ H_\phi = \frac{E_0}{\zeta} \end{cases}$$

Il fattore in parentesi quadra mostra come varia il campo irradiato dall'apertura nel piano E . Il primo punto di annullamento si ha per

$$\beta b \sin \theta_0 = \pi;$$

per grandi aperture ($\beta b \gg 1$), è $\theta_0 \approx \lambda/2b$. La larghezza del primo lobo (vedi fig. 3.27) è data dunque da

$$\Delta \theta_0 \approx \frac{\lambda}{b},$$

formula di notevole interesse pratico.

L'ampiezza dei lobi secondari decresce uniformemente all'aumentare di θ . L'ampiezza massima del primo lobo laterale, in corrispondenza di $\beta b \sin \theta = 3\pi/2$, è $2/3\pi$

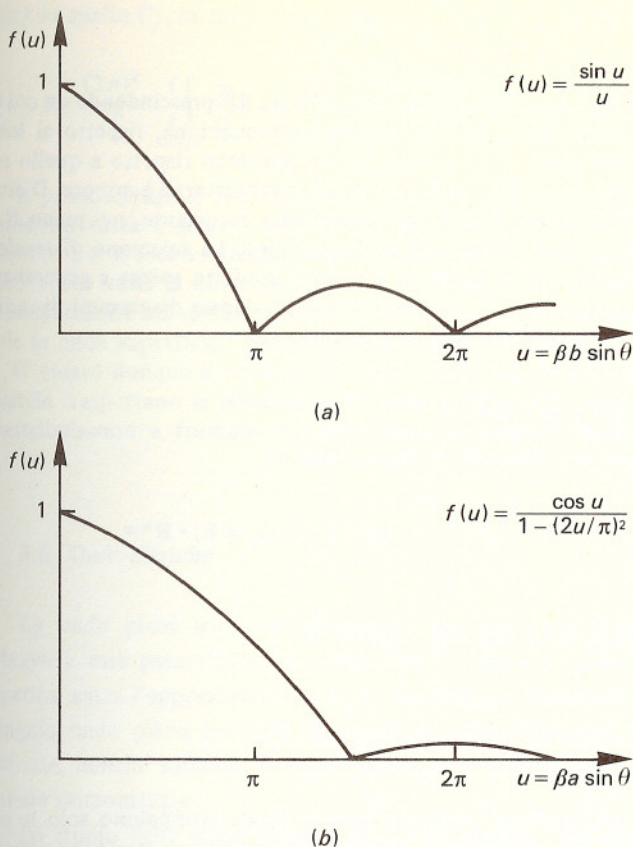


Figura 3.27

Campo irradiato da un'apertura rettangolare: (a) piano E ; (b) piano H .

volte quella del lobo principale, con un'attenuazione di 13,46 dB; per i lobi secondari successivi l'attenuazione è ancora più accentuata.

Nel piano H ($\phi=0, \pi$) si ha $u=\pm\beta\sin\theta$, $v=0$. Pertanto, con procedimento del tutto analogo, si ha per il campo irradiato

$$\begin{cases} E_{\phi} = \pm jE_0 \frac{8ab}{\pi\lambda r} \cos\theta \exp(-j\beta r) \left[\frac{\cos(\beta a \sin\theta)}{1 - \left(\frac{2\beta a \sin\theta}{\pi} \right)^2} \right] \\ H_{\theta} = -\frac{E_{\phi}}{\zeta}, \end{cases}$$

dove il segno superiore va preso per $\phi=0$ e l'inferiore per $\phi=\pi$.

Il fattore in parentesi quadra, moltiplicato per $\cos\theta$, rappresenta ora il variare del campo irradiato nel piano H . Per grandi aperture la larghezza del primo lobo è data

da

$$\Delta\theta_0 \approx \frac{3\lambda}{2a};$$

l'ampiezza del primo lobo secondario è inferiore (di 23,52 dB prescindendo da $\cos\theta$) a quella del lobo principale; per i lobi successivi l'attenuazione, rispetto al lobo principale, è superiore. Nel piano H il primo lobo è più largo rispetto a quello nel piano E (a parità di dimensioni a e b), ma l'ampiezza dei lobi laterali è minore. D'altra parte, nel piano E la distribuzione del campo di apertura è costante, nel piano H si attenua agli estremi dell'apertura (*tapering* cosinusoidale). La relazione di trasformata di Fourier tra distribuzione di apertura e campo irradiato spiega e generalizza i risultati precedenti: distribuzioni di apertura più dolci danno diagrammi di radiazione con lobi principali più larghi e lobi laterali più bassi.

3.5.2 Potenza associata a un'apertura

La potenza (complessa) associata all'apertura è data da

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{i}_z = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H}^* = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{H}^* \times \mathbf{i}_z) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t) \cdot (\mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t^* \times \mathbf{i}_z), \end{aligned}$$

dove $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ è il campo nell'apertura. Nell'espressione finale compaiono solo le sue componenti tangenziali $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$, che sono d'altronde in relazione di trasformazione di Fourier con i rispettivi spettri $\hat{\mathbf{E}}_t$, $\hat{\mathbf{H}}_t$; l'integrale della formula precedente può così trasformarsi, grazie al teorema di Parseval in due dimensioni, nell'integrale del prodotto degli spettri:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} (2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv (\mathbf{i}_z \times \hat{\mathbf{E}}_t) \cdot (\mathbf{i}_z \times \hat{\mathbf{H}}_t^* \times \mathbf{i}_z) = \\ &= \frac{(2\pi)^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv (\mathbf{i}_z \times \hat{\mathbf{E}}) \times (\mathbf{i}_z \times \hat{\mathbf{H}})^* \cdot \mathbf{i}_z = \\ &= \frac{(2\pi)^2}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv (\mathbf{i}_z \times \hat{\mathbf{E}}) \times [\mathbf{i}_z \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}})^*] \cdot \mathbf{i}_z; \end{aligned}$$

sviluppando i prodotti e raccogliendo i termini si ottiene

$$P = \frac{(2\pi)^2}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv (w^* |\hat{E}_t|^2 + w |\hat{E}_z|^2).$$

Si può distinguere l'intervallo di integrazione C_R , in cui w è reale (*dominio visi-*

bile) da quello C_J , in cui w è immaginario (*dominio invisibile*); risulta

$$P = \frac{(2\pi)^2}{2\zeta} \iint_{C_R} \frac{w}{\beta} |\hat{E}|^2 du dv + j \frac{(2\pi)^2}{2\zeta} \iint_{C_J} \frac{|w|}{\beta} (|\hat{E}_t|^2 - |\hat{E}_z|^2) du dv.$$

Il primo integrale rappresenta la *potenza reale* irradiata dall'apertura, cui contribuiscono tutte le onde piane dello spettro che emergono con angolo reale rispetto a z . Il secondo integrale rappresenta la *potenza reattiva* associata all'apertura, cioè $1/2\omega$ volte la differenza tra i valori medi delle energie elettriche e magnetiche immagazzinate nel semispazio $z \geq 0$. A formare questa potenza contribuiscono tutte e sole le onde superficiali che si attenuano esponenzialmente lungo il verso positivo di z . E' chiaro dunque il ruolo svolto dalle varie onde dello spettro: quelle del dominio visibile trasportano la potenza dell'apertura all'infinito, quelle del dominio invisibile contribuiscono a formare il campo nelle immediate vicinanze dell'apertura stessa.

3.6 Onde sferiche

Le onde piane sono certamente la soluzione più semplice delle equazioni di Maxwell; esse permettono di presentare il fenomeno della propagazione elettromagnetica senza l'appesantimento di un formalismo matematico eccessivo. Tuttavia, la singola onda piana non è praticamente realizzabile: essa presuppone una potenza infinita, nonché sorgenti di estensione infinita che diano luogo a eccitazioni perfettamente sincronizzate.

Lo studio delle onde piane non è però inutile: da un lato esse sono fisicamente sovrapponibili (vedi § 3.5), dall'altro a frequenze ottiche, o a grande distanza dalle sorgenti, la maggior parte delle onde possono riguardarsi come *localmente piane*.

Un'onda che, essendo prodotta da sorgenti localizzate, è fisicamente realizzabile è quella *sferica*. In questo paragrafo si considerano le onde sferiche, soluzioni delle equazioni di Maxwell (in coordinate sferiche r, θ, ϕ) nel dominio della frequenza, nell'ipotesi di un mezzo isotropo e omogeneo e di sorgenti localizzate nell'intorno del centro ($r=0$) del sistema di coordinate (questo studio è propedeutico a quello dello sviluppo in onde sferiche, oggetto del prossimo paragrafo).

La trattazione delle onde sferiche è qui svolta in modo formalmente analogo a quello del calcolo dei modi nelle guide d'onda (vedi § 3.3): l'asse z diventa la direzione di propagazione $\mathbf{r}$, e la sezione trasversale della guida diventa una qualunque delle superfici sferiche che inglobano le sorgenti. Per prima cosa occorre dunque scomporre i campi nelle loro componenti *trasversali* (alla direzione $\mathbf{i}_r$) e *longitudinali*, o *radiali* (Marcuvitz, 1951):

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}_t(r, \theta, \phi) + E_r(r, \theta, \phi) \mathbf{i}_r$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \phi) = \mathbf{H}_t(r, \theta, \phi) + H_r(r, \theta, \phi) \mathbf{i}_r.$$

Sostituendo nelle equazioni di Maxwell ai rotori, e proiettando queste trasversalmente e radialmente, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_r \times r \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu r \mathbf{H}_t + \mathbf{i}_r \times (r \nabla_t E_r) \\ \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_r) = -j\omega\epsilon r \mathbf{E}_t + (r \nabla_t H_r) \times \mathbf{i}_r \end{cases} \quad [1]$$

$$\begin{cases} r \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_r \times r \mathbf{E}_t) = -j\omega\mu r^2 H_r \\ r \nabla_t \cdot (r \mathbf{H}_t \times \mathbf{i}_r) = j\omega\epsilon r^2 E_r, \end{cases} \quad [2]$$

mentre le equazioni di Maxwell alle divergenze forniscono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} r \nabla_t \cdot (r \mathbf{E}_t) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \\ r \nabla_t \cdot (r \mathbf{H}_t) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H_r) = 0. \end{cases} \quad [3]$$

Gli operatori differenziali che appaiono nelle [1]-[3] sono così definiti:

$$\begin{cases} r \nabla_t f(r, \theta, \phi) = \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi \\ r \nabla_t \cdot \mathbf{F}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta F_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} F_\phi; \end{cases}$$

si tratta quindi di operatori puramente trasversali.

Vogliamo ora trovare soluzioni delle [1]-[3] che corrispondano a onde propagantisi lungo l'asse r .⁶ I campi, in analogia con quanto si è visto nel paragrafo 3.2, si esprimono come il prodotto di due funzioni, l'una dipendente solo da (θ, ϕ) , l'altra solo da r :

$$\begin{cases} r \mathbf{E}_t(r, \theta, \phi) = \mathbf{e}(\theta, \phi) V(r) \\ r \mathbf{H}_t(r, \theta, \phi) = \mathbf{h}(\theta, \phi) I(r). \end{cases} \quad [4]$$

Dalle [2], si ha come espressione dei campi longitudinali:

$$\begin{cases} j\omega\mu r^2 H_r(r, \theta, \phi) = r \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_r \times \mathbf{e}) V(r) \\ j\omega\epsilon r^2 E_r(r, \theta, \phi) = r \nabla_t \cdot (\mathbf{h} \times \mathbf{i}_r) I(r). \end{cases} \quad [5]$$

Le due relazioni precedenti mostrano che i campi radiali decrescono più rapidamente con r di quelli trasversali: a grande distanza il campo tende a diventare tutto trasversale.

⁶ Ciò corrisponde a scegliere una possibile classe di soluzioni delle [1]-[3]. Esistono classi alternative di soluzioni, corrispondenti a propagazione lungo $\mathbf{i}_\theta$ e $\mathbf{i}_\phi$ (Felsen e Marcuvitz, 1973).

Verifichiamo ora se può esistere un campo TEM (rispetto a r) tale che

$$E_r = H_r = 0.$$

In tal caso dalle [1] si ricava

$$\mathbf{i}_r \times \mathbf{e} = \mathbf{h} \quad [6]$$

perché i vettori al primo e secondo membro devono essere paralleli. Per le [3]

$$r \nabla_t \cdot \mathbf{e} = 0$$

$$r \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_r \times \mathbf{e}) = 0 = \mathbf{i}_r \cdot \nabla_t \times \mathbf{e}.$$

Il vettore $\mathbf{e}$, essendo a divergenza e a rotore nulli sulla sfera, è anch'esso nullo in base al teorema di Helmholtz. Di conseguenza un'onda elettromagnetica puramente trasversale (TEM) non è fisicamente eccitabile.

Consideriamo ora le possibili onde TE rispetto a r , tali cioè che

$$E_r = 0, \quad H_r \neq 0.$$

In questa ipotesi, le [1] si semplificano come segue:

$$\begin{cases} (\mathbf{i}_r \times \mathbf{e}) \frac{dV}{dr} = -j\omega\mu I \mathbf{h} \\ (\mathbf{h} \times \mathbf{i}_r) \frac{dI}{dr} = -j\omega\epsilon V \mathbf{e} + (r \nabla_t H_r) \times \mathbf{i}_r. \end{cases} \quad [7]$$

La prima equazione mostra che anche in questo caso (a meno di una costante arbitraria che è assunta pari a uno) dev'essere $\mathbf{i}_r \times \mathbf{e} = \mathbf{h}$. Dalla prima delle [2] segue inoltre

$$r \nabla_t H_r \times \mathbf{i}_r = \frac{V(r)}{j\omega\mu r^2} [r \nabla_t r \nabla_t \cdot (\mathbf{i}_r \times \mathbf{e})] \times \mathbf{i}_r = \frac{V(r)}{j\omega\mu r^2} [r \nabla_t r \nabla_t \cdot \mathbf{h}] \times \mathbf{i}_r.$$

Dalla seconda delle [7] risulta che questo vettore dev'essere parallelo a $\mathbf{h} \times \mathbf{i}_r$; si può dunque porre

$$r \nabla_t r \nabla_t \cdot \mathbf{h} + n(n+1) \mathbf{h} = 0, \quad [8]$$

con $n(n+1)$ costante per ora arbitraria. Le [7] si trasformano come segue:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dr} = -j\omega\mu I \\ \frac{dI}{dr} = -j\omega\epsilon \left[1 - \frac{n(n+1)}{k^2 r^2} \right] V. \end{cases} \quad [9]$$

La [8] determina la distribuzione trasversale (θ, ϕ) dell'onda sferica (vedi 3.6.1); il sistema [9] determina invece la sua dipendenza dal raggio (vedi 3.6.3). Di qui si vede

che una possibile soluzione del sistema [9] è la seguente:

$$\begin{cases} \frac{V(r)}{r} = E^+ h_n^{(2)}(kr) \\ \frac{I(r)}{r} = \frac{jE^+}{\xi kr} [kr h_n^{(2)}(kr)]' \end{cases}$$

dove le $h_n^{(2)}(kr)$ sono funzioni sferiche di Hankel di seconda specie (Stratton, 1965, pp. 551-60; Abramovitz e Stegun, 1970, pp. 435-38) e l'apice indica l'operazione di derivata rispetto a kr .

La determinazione della costante $n(n+1)$ è legata alla soluzione dell'equazione [8]; si mostra in 3.6.1 che n può assumere qualunque valore intero positivo. Vi è dunque una infinità numerabile di possibili onde, con diversa dipendenza radiale, che però hanno tutte andamento simile per $kr \rightarrow \infty$. Infatti, adoperando lo sviluppo asintotico delle funzioni sferiche di Hankel per $kr \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} h_n^{(2)}(kr) &\simeq j^{n+1} \frac{\exp(-jkr)}{kr} \\ h_n^{(2)'}(kr) &= \frac{1}{2n+1} \left[n h_{n-1}^{(2)}(kr) - (n+1) h_{n+1}^{(2)}(kr) \right] \simeq j^n \frac{\exp(-jkr)}{kr}, \end{aligned} \quad [10]$$

risulta

$$\begin{cases} \frac{V(r)}{r} \simeq j^{n+1} E^+ \frac{\exp(-jkr)}{kr} \\ \frac{I(r)}{r} \simeq j^{n+1} \frac{E^+}{\xi} \frac{\exp(-jkr)}{kr} \end{cases}$$

Le relazioni precedenti mostrano chiaramente che, per $kr \gg 1$, il fasore del campo elettrico e di quello magnetico corrispondono a quelli di un'onda propagantesi nel verso positivo di r con velocità di fase (per $k = \beta$ reale) $v_f = \omega/\beta$. Inoltre campi elettrici e magnetici sono ortogonali (vedi relazione [6]) e il rapporto tra le loro ampiezze è pari alla impedenza intrinseca del mezzo ξ . In queste circostanze l'onda sferica è localmente piana, attenuandosi però inversamente con la distanza (in assenza di perdite del mezzo). La ragione di questo decadimento risulta chiara se si considera il flusso del vettore di Poynting attraverso un angolo solido $d\Omega$; tale flusso è proporzionale a

$$\frac{1}{2} \frac{V}{r} \frac{I^*}{r} r^2 d\Omega = -j \frac{1}{2} \frac{|E^+|^2}{\xi} h_n^{(2)}(\beta r) \frac{[(\beta r) h_n^{(2)}(\beta r)]'^*}{\beta r} r^2 d\Omega.$$

Come è chiarito in 3.6.4, la parte reale del flusso è costante con r ; di conseguenza la potenza reale iniettata dalle sorgenti nell'angolo solido $d\Omega$ si ripartisce, al variare di r , sulla superficie $r^2 d\Omega$. Per $kr \gg 1$ la potenza è tutta reale, e pertanto il campo decresce come $1/r$ all'aumentare della distanza.

Le onde sferiche corrispondenti a diversi valori di n sono invece notevolmente diverse per valori piccoli di kr , come si può vedere dallo sviluppo delle funzioni sferiche di Hankel per $kr \ll 1$:

$$h_n^{(2)}(kr) \approx j \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{(kr)^{n+1}}.$$

Lo studio dei modi TM (rispetto a r) è del tutto analogo; nuovamente, campi elettrici e magnetici trasversali sono tra loro ortogonali:

$$\mathbf{h} \times \mathbf{i}_r = \mathbf{e}.$$

La distribuzione trasversale del campo è descritta dall'equazione

$$r \nabla_t r \nabla_t \cdot \mathbf{e} + n(n+1) \mathbf{e} = 0, \quad [11]$$

e la distribuzione radiale dal sistema

$$\begin{cases} \frac{dV}{dr} = -j\omega\mu \left[1 - \frac{n(n+1)}{k^2 r^2} \right] I \\ \frac{dI}{dr} = -j\omega\epsilon V \end{cases} \quad [12]$$

le cui soluzioni sono ancora le funzioni sferiche di Hankel.

Annotazioni

*3.6.1 Distribuzione trasversale di onde sferiche TE

Per lo studio del caso TE occorre partire dalla [8]. Si osserva anzitutto che la circuitazione di $\mathbf{h}$ lungo un qualunque percorso giacente su una sfera $r = \text{cost.}$ è nulla, poiché $E_r = 0$. Risulta pertanto

$$\mathbf{h}(\theta, \phi) = -r \nabla_t \Psi(\theta, \phi),$$

dove $\Psi(\theta, \phi)$ svolge il ruolo di un potenziale; sostituendo nell'equazione [8] si ottiene

$$r \nabla_t [r \nabla_t \cdot r \nabla_t \Psi + n(n+1) \Psi] = 0,$$

cioè, a meno di una costante inessenziale,

$$r \nabla_t \cdot r \nabla_t \Psi + n(n+1) \Psi = 0, \quad [13]$$

dove l'operatore differenziale

$$r \nabla_t \cdot r \nabla_t = r^2 \nabla_t^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

rappresenta un laplaciano trasversale. Posto $\Psi(\theta, \phi) = \Psi_\theta(\theta) \Psi_\phi(\phi)$, con il metodo di

separazione delle variabili la [13] si spezza nelle due equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Psi_\phi}{d\phi^2} + m^2 \Psi_\phi = 0 \\ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Psi_\theta}{d\theta} + [n(n+1) \sin^2 \theta - m^2] \Psi_\theta = 0. \end{array} \right. \quad [14]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \theta \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Psi_\theta}{d\theta} + [n(n+1) \sin^2 \theta - m^2] \Psi_\theta = 0. \end{array} \right. \quad [15]$$

La soluzione della [14] è

$$\Psi_\phi(\phi) = C_m \cos m\phi + S_m \sin m\phi;$$

poiché si richiede che

$$\Psi_\phi(\phi + 2\pi) = \Psi_\phi(\phi),$$

m può assumere solo valori interi positivi ($m=0, 1, 2, \dots$).

La soluzione della [15], finita per $\theta=0$ e $\theta=\pi$, è data da

$$\Psi_\theta(\theta) = P_n^m(\cos \theta), \quad m \leq n,$$

dove l'indice n può assumere tutti i valori interi positivi ($n=0, 1, 2, \dots$) e $P_n^m(\cos \theta)$ sono i polinomi associati di Legendre (Stratton, 1965, pp. 351-58; Abramovitz e Stegun, 1970, 331-53). Usualmente l'indice m si sottintende se esso è uguale a zero; per i primi valori di n si ha

$$P_0(\cos \theta) = 1, \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \quad P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1),$$

e, per i primi valori di m ,

$$P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta, \quad P_2^1(\cos \theta) = 3 \cos \theta \sin \theta, \quad P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta.$$

Per ogni $m > n$ risulta

$$P_n^m(\cos \theta) = 0.$$

*3.6.2 Studio della distribuzione trasversale di onde sferiche TM (esercizio)

Si proceda come nel caso precedente, ponendo

$$\mathbf{e}(\theta, \phi) = -r \nabla_t \Phi(\theta, \phi).$$

*3.6.3 Distribuzione radiale di onde sferiche

Per il caso TE, si parta dal sistema [9]; per successive derivazioni e sostituzioni, tale sistema si trasforma come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dr} = -j\omega\mu I \\ r^2 \frac{d^2 V}{dr^2} + [k^2 r^2 - n(n+1)] V = 0. \end{array} \right.$$

Posto $f(r) = V(r)/r$, si ottiene facilmente

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} + [k^2 r^2 - n(n+1)] f = 0, \quad [16]$$

equazione che definisce le funzioni sferiche di Bessel (Stratton, 1965, pp. 551-60; Abramovitz e Stegun, 1970, pp. 435-78). Una soluzione della [16] che corrisponde a onde che si propagano verso l'infinito (vedi equazioni [10]) è la funzione sferica di Hankel di seconda specie; la soluzione della [16] in un mezzo omogeneo è pertanto

$$\begin{cases} \frac{V(r)}{r} = E^+ h_n^{(2)}(kr) \\ \frac{I(r)}{r} = -\frac{1}{j\omega\mu r} \frac{dV}{dr} = -\frac{E^+}{j\omega\mu kr} [kr h_n^{(2)}(kr)]'. \end{cases}$$

Per i primi valori di n si ha

$$h_0^{(2)}(x) = j \frac{\exp(-jx)}{x},$$

$$h_1^{(2)}(x) = j \frac{\exp(-jx)}{x^2} (1 + jx),$$

$$h_2^{(2)}(x) = j \frac{\exp(-jx)}{x^3} (3 + 3jx - x^2).$$

3.6.4 Potenza reale associata a un'onda sferica

Il flusso del vettore di Poynting attraverso un angolo solido $d\Omega$ nell'ipotesi di un mezzo senza perdite è proporzionale (per modi TE) a

$$\begin{aligned} & -j \frac{1}{2} \frac{|E^+|^2}{\xi} h_n^{(2)}(\beta r) \frac{[\beta r h_n^{(1)}(\beta r)]'}{\beta r} r^2 d\Omega = \\ & = -j \frac{1}{2} \frac{|E^+|^2}{\xi} \left[h_n^{(2)}(\beta r) h_n^{(1)'}(\beta r) + \frac{|h_n^{(2)}(\beta r)|^2}{\beta r} \right] r^2 d\Omega, \end{aligned}$$

dove

$$h_n^{(1)}(\beta r) = j_n(\beta r) + jy_n(\beta r) = [h_n^{(2)}(\beta r)]^*$$

è la funzione sferica di Hankel di prima specie. Le funzioni $h_n^{(2)}(\beta r)$ e $h_n^{(1)}(\beta r)$ sono soluzioni indipendenti dell'equazione [16]; il wronskiano è dato da

$$\begin{aligned} h_n^{(1)'}(\beta r) h_n^{(2)}(\beta r) - h_n^{(1)}(\beta r) h_n^{(2)'}(\beta r) &= \frac{2j}{(\beta r)^2} = \\ &= 2j [j_n(\beta r) y_n'(\beta r) - j_n'(\beta r) y_n(\beta r)]. \end{aligned}$$

La grandezza in parentesi quadra non è altro che il coefficiente dell'immaginario del prodotto $h_n^{(2)}(\beta r) h_n^{(1)'}(\beta r)$. D'altra parte, l'espressione del flusso del vettore di Poynting mostra che la sua parte reale è proprio proporzionale a tale quantità. Se ne deduce che il flusso di *potenza attiva nell'angolo solido* $d\Omega$ è dato da

$$\frac{1}{2} \frac{|E^+|^2}{\xi \beta^2} d\Omega,$$

cioè è indipendente da r . Questo non accade per la potenza reattiva, che al crescere di r decresce, annullandosi all'infinito.

3.6.5 Onde sferiche nel dominio del tempo

Si consideri il caso di un mezzo senza perdite, non dispersivo, per il quale

$$k = \beta = \omega \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{\omega}{c},$$

dove c è una costante reale indipendente dalla frequenza.

Esaminiamo dapprima il caso $n=0$, corrispondente al caso dell'onda TEM (anche se questa non è fisicamente eccitabile) per cui

$$E(r, \omega) = E^+(\omega) \frac{\exp(-j\beta r)}{\beta r}$$

e il campo magnetico, ortogonale a quello elettrico, è dato da

$$H(r, \omega) = \frac{E^+(\omega)}{\zeta} \frac{\exp(-j\beta r)}{\beta r}.$$

Applicando la stessa tecnica utilizzata nel caso dell'onda piana (vedi § 2.7) si ha, nel dominio del tempo,

$$e(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \frac{\exp\left[j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]}{\omega \frac{r}{c}} d\omega,$$

dove $E^+(\omega)$ è determinato una volta nota, ad esempio, la distribuzione radiale dell'onda per $t=0$:

$$e(r, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E^+(\omega) \frac{\exp\left(-j\omega \frac{r}{c}\right)}{\omega \frac{r}{c}} d\omega,$$

$$\frac{E^+(\omega)}{\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} e(r, 0) \frac{r}{c} \exp\left(j\omega \frac{r}{c}\right) d\left(\frac{r}{c}\right).$$

Pertanto

$$\begin{aligned} e(r, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp\left[j\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]}{\frac{r}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} e(r', 0) \left(\frac{r'}{c}\right) \exp\left(j\omega \frac{r'}{c}\right) d\left(\frac{r'}{c}\right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(r', 0) \frac{\frac{r'}{c}}{\frac{r}{c}} \left(t + \frac{r' - r}{c}\right) d\left(\frac{r'}{c}\right) = e(r - ct, 0) \frac{r - ct}{r}. \end{aligned}$$

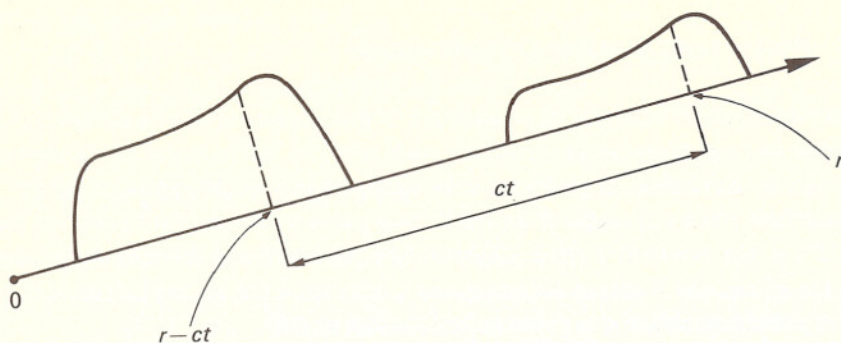


Figura 3.28

La relazione precedente mostra che l'ampiezza dell'onda, nel punto di ascissa r e all'istante t , coincide con l'ampiezza (ridotta nel rapporto delle distanze dal punto $r=0$) che l'onda aveva all'istante $t=0$ nel punto di ascissa $r-ct$ (vedi fig. 3.28). L'onda ha dunque trasfatto con velocità c costante lungo il verso positivo dell'asse r , la sua ampiezza in ogni punto decrescendo come $1/r$.

Passando al caso $n \neq 0$, si nota che nell'espressione della funzione sferica di Hankel compare sempre l'esponenziale $\exp(-j\beta r)$ che moltiplica una combinazione lineare di fattori del tipo

$$\frac{1}{\left(\omega \frac{r}{c}\right)^m}, \quad 1 < m < n + 1.$$

A ciascuno di tali fattori si applicano le considerazioni precedenti; il campo parziale associato al singolo fattore trasla con velocità costante c , attenuandosi con la distanza come r^{-m} . L'onda complessiva, sovrapposizione di queste onde parziali, si deforma nella propagazione, perché i singoli termini costituenti hanno leggi diverse di dipendenza da r (la conclusione è curiosa, trattandosi di un mezzo non dispersivo). Questo tipo di deformazione è diverso da quello considerato in 2.3.1, per il quale le varie frequenze componenti il segnale si propagano con velocità differenti e, dopo un cammino sufficientemente lungo, il pacchetto si allarga. Nel caso in esame, i termini componenti il segnale sono tutti della stessa frequenza e si propagano tutti con la stessa velocità. Il motivo della deformazione è diverso. Si è visto che la densità di potenza attiva associata all'onda (parte reale del vettore di Poynting) diminuisce con la distanza come $1/r^2$. Pertanto sono i termini del campo che diminuiscono come $1/r$ ad essere associati a tale densità di potenza; gli altri sono associati (nel dominio della frequenza) alla densità di potenza reattiva (coefficiente dell'immaginario del vettore di Poynting), cioè a una potenza di scambio tra sorgenti e campo. Di conseguenza, a piccola distanza dalle sorgenti l'onda non è ancora formata completamente, essendo ancora stretto l'accoppiamento con le sorgenti. Al crescere della distanza dalle sorgenti, i termini in $1/r$ diventano dominanti, venendo meno l'accoppiamento con quelle; l'onda prende forma, e da un certo punto in poi, raggiunta la configurazione definitiva, si propaga senza più deformarsi, a parte la progressiva diminuzione di ampiezza.

3.7 Problemi esterni: sviluppo in onde sferiche

In alternativa allo sviluppo in onde piane, si può considerare per il campo elettromagnetico una rappresentazione mediante onde sferiche. Nel presente paragrafo viene esaminato, in particolare, il problema della rappresentazione del campo all'esterno di una superficie sferica di raggio R su cui il campo stesso assuma valori prefissati (vedi fig. 3.29); si suppone inoltre che le sorgenti che originano il campo siano tutte interne a tale superficie, che il mezzo sia omogeneo e isotropo e che sia soddisfatta la condizione di radiazione all'infinito (sono esclusi i campi statici).

Come si è visto (§ 3.6), l'insieme delle onde sferiche comprende modi (o *armoniche*) TE rispetto a r

$$\begin{cases} \mathbf{E}(r, \theta, \phi) = -E^+ h_n^{(2)}(kr) r \nabla_t \Psi_{nm} \times \mathbf{i}_r \\ \mathbf{H}(r, \theta, \phi) = -j \frac{E^+}{\xi} \frac{[kr h_n^{(2)}(kr)]'}{kr} r \nabla_t \Psi_{nm} + \frac{E^+}{j\omega\mu r} n(n+1) h_n^{(2)}(kr) \Psi_{nm} \mathbf{i}_r \end{cases}$$

$$\Psi_{nm}(\theta, \phi) = (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta),$$

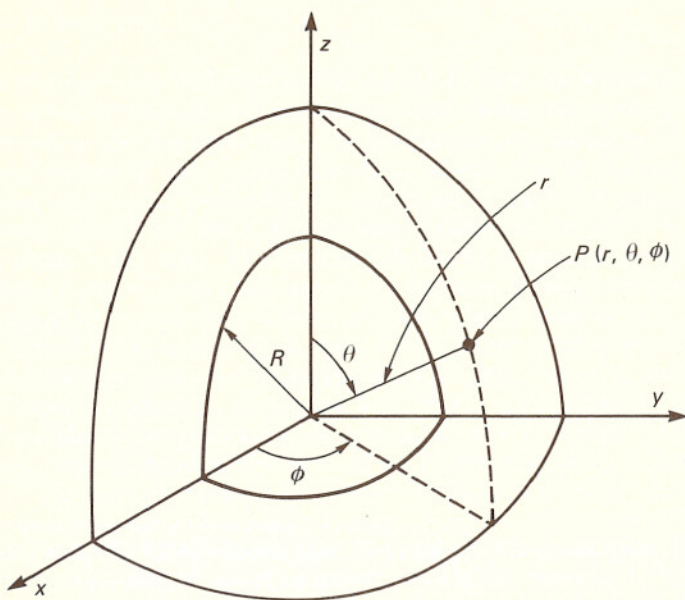


Figura 3.29

e modi TM (sempre rispetto a r):

$$\begin{cases} \mathbf{E}(r, \theta, \phi) = j\zeta H^+ \frac{[kr h_n^{(2)}(kr)]'}{kr} r \nabla_t \Phi_{nm} + \frac{H^+}{j\omega\epsilon r} n(n+1) h_n^{(2)}(kr) \Phi_{nm} \mathbf{i}_r \\ \mathbf{H}(r, \theta, \phi) = H^+ h_n^{(2)}(kr) \mathbf{i}_r \times r \nabla_t \Phi_{nm} \end{cases}$$

$$\Phi_{nm}(\theta, \phi) = (C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta).$$

Nelle formule precedenti, $A_m, B_m, C_m, D_m, E^+, H^+$ sono costanti; la condizione di radiazione all'infinito è stata imposta con la scelta della funzione di Hankel di seconda specie che esprime la opportuna dipendenza radiale dei campi (§ 3.6, [10]).

Onde di questo tipo costituiscono una base *completa* (Courant e Hilbert, 1931) per lo sviluppo in serie di funzioni del generico campo prodotto dalle sorgenti e soddisfacente alla condizione di radiazione all'infinito. Per semplificare le notazioni si introducono le matrici (1×2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{nm} &\rightarrow P_n^m(\cos \theta) \begin{vmatrix} \cos m\phi & \sin m\phi \end{vmatrix} \\ \mathcal{F}_{nm} &\rightarrow r \nabla_t \mathcal{F}_{nm}, \end{aligned}$$

e le matrici (2×1) dei coefficienti

$$a_{nm} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{nm}^c \\ a_{nm}^s \end{vmatrix}; \quad \mathcal{L}_{nm} \rightarrow \begin{vmatrix} b_{nm}^c \\ b_{nm}^s \end{vmatrix}.$$

Lo sviluppo del campo $\mathbf{E}(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{H}(r, \theta, \phi)$ ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \sum_1^\infty \sum_0^n \left[(\mathcal{F}_{nm} \times \mathbf{i}_r) \odot a_{nm} h_n^{(2)}(kr) + \right. \\ \left. + j\zeta \mathcal{F}_{nm} \odot \mathcal{L}_{nm} \frac{[kr h_n^{(2)}(kr)]'}{kr} - \frac{n(n+1)}{j\omega\epsilon r} \mathbf{i}_r \mathcal{F}_{nm} \odot \mathcal{L}_{nm} h_n^{(2)}(kr) \right] \quad [1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(r, \theta, \phi) = \sum_1^\infty \sum_0^n \left[(\mathbf{i}_r \times \mathcal{F}_{nm}) \odot \mathcal{L}_{nm} h_n^{(2)}(kr) + \right. \\ \left. + j \frac{1}{\zeta} \mathcal{F}_{nm} \odot a_{nm} \frac{[kr h_n^{(2)}(kr)]'}{kr} - \frac{n(n+1)}{j\omega\epsilon r} \mathbf{i}_r \mathcal{F}_{nm} \odot a_{nm} h_n^{(2)}(kr) \right]. \quad [2] \end{aligned}$$

Il simbolo $\odot$ indica il prodotto matriciale riga per colonna; la seconda sommatoria è limitata a n , come valore massimo dell'indice m , per la nota proprietà dei polinomi associati di Legendre:

$$P_n^m(x) = 0 \quad \text{se } m > n.$$

Ovviamente gli indici n e m assumono tutti i possibili valori interni.

Notiamo fra l'altro che su ogni superficie sferica la parte TE del campo elettrico (determinata dai coefficienti a_{nm}^c, a_{nm}^s) è solenoidale, mentre la TM (determinata dai coefficienti b_{nm}^c, b_{nm}^s) è irrotazionale.⁷ Per ogni modo, o *armonica sferica*, si hanno dunque quattro coefficienti (*righe dello spettro*), che però possono ridursi a due se, invece di esprimere la dipendenza del campo da ϕ mediante funzioni circolari, scomponendolo così in parte simmetrica e in parte antisimmetrica, si ricorre agli esponenziali complessi $\exp(jm\phi)$ (in tal caso la sommatoria rispetto a m si estenderebbe da $-n$ a $+n$).

I coefficienti dello sviluppo nel caso particolare considerato si calcolano imponendo l'uguaglianza tra i valori noti del campo sulla sfera $r=R$ e l'espressione generale [1]-[2]. Per il teorema di unicità (vedi § 1.4), basta fissare su $r=R$ le sole componenti tangenziali del campo elettrico o di quello magnetico (più in generale, basta assegnare una loro combinazione lineare); il calcolo dei coefficienti viene effettuato utilizzando un procedimento standard (vedi 3.7.1).

Osserviamo che i valori del campo sulla superficie $r=R$ potrebbero corrispondere a valori misurati. In tal caso i coefficienti dello sviluppo permettono di calcolare agevolmente i valori del campo a grande distanza, cioè le caratteristiche radiative del sistema delle sorgenti interno alla sfera (ideale) di raggio R (Jacobson, 1977). Infatti, utilizzando lo sviluppo asintotico delle funzioni di Hankel (§ 3.6, [10]), si ha

$$\begin{cases} E(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = \frac{\exp(-jkr)}{kr} \sum_1^\infty j^{n+1} \sum_0^n \left\{ (\mathcal{F}_{nm} \times \mathbf{i}_n) \odot a_{nm} + \zeta \mathcal{F}_{nm} \odot b_{nm} \right\} \\ H(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = \frac{1}{\zeta} \mathbf{i}_r \times E. \end{cases}$$

In pratica, la serie viene troncata a un conveniente valore di n , attuando un compromesso tra l'esigenza di accuratezza e quella di minimo ingombro di programma numerico. Questa tecnica è utile nel caso di antenne grandi rispetto alla lunghezza d'onda (vedi 4.5.5).

Annotazioni

3.7.1 Calcolo dei coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche

Si immagini di conoscere la componente tangenziale del campo elettrico $E_t(R, \theta, \phi)$ sulla sfera $r=R$. Se il campo all'esterno della sfera $r=R$ deve soddisfare la condizione di radiazione all'infinito, può essere rappresentato mediante sviluppo in serie le [1] e [2]. I coefficienti dello sviluppo sono determinati imponendo che la serie, sulla sfera $r=R$, assuma i valori (noti) $E_t(R, \theta, \phi)$.

⁷ Per il campo magnetico accade il contrario.

Per calcolare i singoli coefficienti si sfruttano essenzialmente le condizioni di ortogonalità delle funzioni circolari,

$$\int_0^{2\pi} \sin(my) \sin(m'y) dy = \int_0^{2\pi} \cos(my) \cos(m'y) dy = 0, \quad m \neq m', \quad [3]$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(my) \cos(m'y) dy = 0, \quad [4]$$

e dei polinomi associati di Legendre (Jahnke e Emde, 1945),

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\eta) P_{n'}^{m'}(\eta) d\eta = 0, \quad \eta = \cos \theta, \quad n \neq n', \quad [5]$$

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\eta) P_{n'}^{m'}(\eta) \frac{d\eta}{1-\eta^2} = 0, \quad m \neq m', \quad [6]$$

la serie viene moltiplicata termine a termine scalarmente per una opportuna funzione e poi integrata sulla superficie della sfera $r=R$.

Si voglia, ad esempio, calcolare il coefficiente b_{nm}^c ; consideriamo il vettore

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{nm} \odot \mathcal{L}_{nm} = b_{nm}^c & \left[\frac{dP_n^m}{d\theta} \cos(m\phi) \mathbf{i}_\theta - \frac{mP_n^m}{\sin \theta} \sin(m\phi) \mathbf{i}_\phi \right] + \\ & + b_{nm}^s \left[\frac{dP_n^m}{d\theta} \sin(m\phi) \mathbf{i}_\theta + \frac{mP_n^m}{\sin \theta} \cos(m\phi) \mathbf{i}_\phi \right] \end{aligned}$$

e moltiplichiamolo scalarmente per il vettore

$$\mathbf{T} = \frac{dP_n^{m'}}{d\theta} \cos(m'\phi) \mathbf{i}_\theta - \frac{m'P_n^{m'}}{\sin \theta} \sin(m'\phi) \mathbf{i}_\phi.$$

Integrando il prodotto rispetto a ϕ tra 0 e 2π , solo il coefficiente del fattore b_{nm}^c risulta diverso da zero (per le [4]); inoltre, solo il termine con $m=m'$ è diverso da zero (per le [3]). Se poi si integra rispetto a θ tra 0 e π dopo aver moltiplicato per $\sin \theta$, solo il termine con $n=n'$ è diverso da zero; infatti (Stratton, 1965, p. 576)

$$\int_0^\pi \left(\frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^{m'}}{d\theta} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_n^m P_{n'}^{m'} \right) \sin \theta d\theta = \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad [7]$$

per $n=n'$, mentre l'integrale è nullo per $n \neq n'$.

Si consideri ora il vettore

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{nm} \times \mathbf{i}_r) \odot a_{nm} = -a_{nm}^c & \left[\frac{dP_n^m}{d\theta} \cos(m\phi) \mathbf{i}_\phi + \frac{mP_n^m}{\sin \theta} \sin(m\phi) \mathbf{i}_\theta \right] - \\ & - a_{nm}^s \left[\frac{dP_n^m}{d\theta} \sin(m\phi) \mathbf{i}_\phi - \frac{mP_n^m}{\sin \theta} \cos(m\phi) \mathbf{i}_\theta \right] \end{aligned}$$

e lo si moltiplichi per il vettore $\mathbf{T}$. Integrando rispetto a ϕ , solo il coefficiente del fattore a_{nm}^s risulta diverso da zero, per $m = m'$; se però si integra rispetto a θ , dopo aver moltiplicato per $\sin \theta$, questo coefficiente risulta identicamente nullo: infatti

$$m \int_0^\pi \left(P_n^m \frac{dP_n^{m'}}{d\theta} + P_n^{m'} \frac{dP_n^m}{d\theta} \right) d\theta = m \int_0^\pi \frac{d}{d\theta} \left(P_n^m P_n^{m'} \right) d\theta = m \left[P_n^m P_n^{m'} \right]_0^\pi = 0,$$

perché i polinomi associati di Legendre sono nulli, per $m \neq 0$, agli estremi dell'intervallo di integrazione. In definitiva

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{T} \sin \theta d\theta = j \zeta b_{nm}^c \frac{[kR h_n^{(2)}(kR)]'}{kR} \pi \frac{2n(n+1)}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!};$$

è questa la formula che permette il calcolo del coefficiente b_{nm}^c . Si noti che il secondo membro è nullo per $n=0$; questo corrisponde al fatto che i campi a simmetria radiale ($n=0$) sono puramente longitudinali, e hanno pertanto componenti tangenti (alla sfera $r=R$) nulle. Gli altri coefficienti dello sviluppo in armoniche sferiche sono calcolati in maniera analoga.

3.7.2 Ammettenza di ingresso di un'antenna sferica

Sia data un'antenna sferica, cioè una sfera metallica con una fessura equatoriale (*gap*), alla quale sia applicata una tensione costante in azimut e il cui fasore sia uguale a V_0 (vedi fig. 3.30). Si voglia calcolare l'ammettenza di ingresso dell'antenna, cioè il rapporto tra il fasore del flusso della densità lineare di corrente al gap e il fasore della

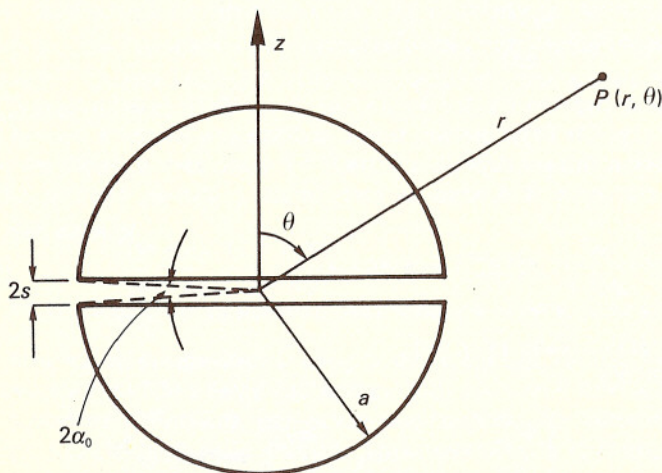


Figura 3.30
Antenna sferica.

tensione:

$$Y = \frac{2\pi a H(a, \theta_0)}{V_0},$$

ove $\theta_0 = \pi/2 - \alpha_0$; data la simmetria del problema, si assume che i campi siano indipendenti da ϕ . Sempre per simmetria, le correnti sull'antenna sono tutte dirette secondo θ , e di conseguenza sono eccitati solo modi TM.

Nell'ipotesi di un mezzo senza perdite ($k = \beta$) il campo esterno all'antenna può essere rappresentato dal seguente sviluppo in armoniche sferiche:

$$\begin{cases} E_r = -\frac{1}{j\omega\epsilon r} \sum_1^\infty n(n+1) P_n(\cos\theta) h_n^{(2)}(\beta r) b_{n0}^c \\ E_\theta = j\zeta \sum_1^\infty \frac{dP_n}{d\theta} \frac{[\beta r h_n^{(2)}(\beta r)]'}{\beta r} b_{n0}^c \\ H_\phi = \sum_1^\infty \frac{dP_n}{d\theta} h_n^{(2)}(\beta r) b_{n0}^c; \end{cases}$$

lo sviluppo si ricava dalle formule generali [1] e [2], con $m=0$ (indipendenza da ϕ) e considerando i soli modi TM. Posto $-b_{n0}^c = t_n$, $\cos\theta = \eta$, e tenendo conto delle relazioni

$$h_n^{(2)'}(x) = h_{n-1}^{(2)}(x) - (n+1) \frac{h_n^{(2)}(x)}{x},$$

$$P_n^1(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} \frac{dP_n}{d\eta},$$

si ottengono per i campi trasversali le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} E_\theta = \frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_1^\infty t_n \frac{n h_n^{(2)}(\beta r) - (\beta r) h_{n-1}^{(2)}(\beta r)}{r} P_n^1(\eta) \\ H_\phi = \sum_1^\infty t_n h_n^{(2)}(\beta r) P_n^1(\eta). \end{cases} \quad [8]$$

Per determinare i coefficienti t_n dello sviluppo, basta imporre che $E_\theta(a, \theta)$ sia uguale al campo elettrico tangente applicato sulla superficie dell'antenna. Questo campo è ovunque nullo, tranne che nella regione del gap, dove è lecito porre

$$E(\alpha) = -\frac{1}{a} \frac{dV}{d\alpha}$$

e quindi, essendo $\alpha = \pi/2 - \theta$,

$$E(\theta) = \frac{1}{a} \frac{dV}{d\theta},$$

$$E(\eta) = -\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a} \frac{dV}{d\eta} = -\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{a} V'(\eta).$$

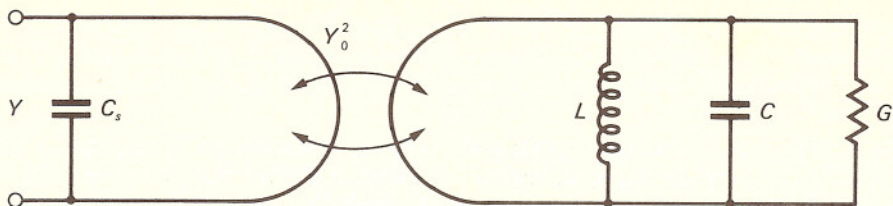


Figura 3.31

Circuito equivalente per l'ammettenza d'ingresso di un'antenna sferica: $C_s = 2\epsilon a \ln\left(\frac{4a}{s}\right)$; $L = \mu a$; $C = \epsilon a$; $G = \sqrt{\epsilon/\mu}$; $Y_0^2 = \frac{3\pi}{2} \omega^2 \epsilon^2 a^2$.

Nell'espressione precedente $V(\eta)$ è la distribuzione della tensione applicata nel gap; essa è tale che

$$\int_{-\eta_0}^{\eta_0} V'(\eta) d\eta = V_0, \quad \eta_0 = \cos \theta_0 = \sin \alpha_0.$$

E' ora agevole calcolare i valori di t_n utilizzando la relazione di ortogonalità [5], specificata per $m = 1$:

$$\int_{-1}^1 P_n^1(\eta) P_{n'}^1(\eta) d\eta = \begin{cases} \frac{4n(n+1)}{2n+1} & (n=n') \\ 0 & (n \neq n') \end{cases}.$$

La seconda delle [8], per $r=a$, fornisce un'espressione per l'ammettenza di ingresso che si presta a una rappresentazione circuitale equivalente (Bucci e Franceschetti, 1974) generalizzabile anche ad altri tipi di antenne, ad esempio a quelle filiformi. Il circuito equivalente, sino alla prima risonanza dell'antenna, è rappresentato nella figura 3.31. In questa, C_s è la capacità statica dell'antenna (relativa alla distribuzione di campo esterna alla sfera $r=a$), e l'accoppiamento tra i due circuiti è realizzato mediante un trasformatore ideale, ad accoppiamento elettrico invece che magnetico, tale che l'ammettenza a monte del trasformatore, Y_1 , sia legata all'ammettenza a valle dello stesso, Y_2 , dalla relazione $Y_1 = Y_0^2/Y_2$.

3.8 Riepilogo

In questo capitolo sono stati illustrati alcuni esempi di *rappresentazione analitica* del campo elettromagnetico, in cui cioè il campo è espresso in termini di funzioni note. A questo proposito, si è visto come, introducendo un *insieme di base*

$$\langle x_n$$

completo e ortonormale

$$\langle x_n, x_m \rangle = \delta_{nm},$$

il campo x sia formalmente *rappresentato* come segue:

$$x = \sum_n \langle x, x_n \rangle \langle x_n.$$

Questa rappresentazione *discreta* è talvolta sostituita da una rappresentazione *integrale* (tipica è quella di Fourier), che si può ancora considerare riferita a una base (impropria). Ciascun elemento di essa viene detto *modo* del campo elettromagnetico.

Un primo esempio di rappresentazione analitica del campo è quello che si ha in una guida d'onda uniforme (cioè a sezione costante), per la quale gli elementi della base, e il relativo sviluppo, sono definiti nel piano trasversale della guida, cioè ortogonale alla direzione di propagazione. I modi in guida sono classificabili come TE e TM, più eventuali TEM esistenti solo in regioni trasversali che siano almeno doppiamente connesse.

Gli *autovalori trasversali* della guida dipendono solo dalla geometria della sezione trasversale e corrispondono alla soluzione di un'equazione del tipo

$$\nabla_t^2 f + k_t^2 f = 0,$$

con condizioni al contorno di tipo Dirichlet (modi TM) o Neumann (modi TE), per pareti perfettamente conduttrici; essi influiscono sul valore della *costante di propagazione longitudinale*

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2}$$

e determinano le *proprietà filtranti* della guida; l'ortogonalità dei modi corrisponde al loro *disaccoppiamento in potenza*.

L'ampiezza dei campi è soluzione delle equazioni delle linee di trasmissione (equivalenti, una per ogni modo):

$$\begin{cases} -\frac{dV}{dz} = j k_z Z_0 I \\ -\frac{dI}{dz} = j \frac{k_z}{Z_0} V, \end{cases}$$

con

$$Z_0 = \frac{\omega \mu}{k_z}, \quad Z_0 = \frac{k_z}{\omega \epsilon}$$

per i modi TE e TM rispettivamente.

Per le *cavità risonanti* gli autovalori (*pulsazioni di risonanza*) sono determinati risolvendo un'equazione vettoriale del tipo

$$\nabla^2 \mathbf{f} + k_n^2 \mathbf{f} = 0$$

con la condizione al contorno

$$\mathbf{i}_n \times \mathbf{f} = 0 \quad \text{su } l.$$

Alla risonanza le energie elettriche e magnetiche medie sono uguali. Delle inevitabili perdite sulle pareti (ed eventualmente anche nel volume) della cavità si tiene conto introducendo il *fattore di merito*

$$Q = \frac{\omega_n W_n}{P_d},$$

cui è proporzionale la *costante di estinzione* dell'oscillazione nella cavità. In pratica quest'ultima è spesso costituita da un tronco di guida chiuso agli estremi in cortocircuito. In tal caso la condizione di risonanza può convenientemente esprimersi in termini di *risonanza longitudinale*:

$$\vec{Z} + \vec{Z} = 0.$$

Lo sviluppo in *onde piane* trova applicazione al calcolo del campo associato alle aperture. Il relativo spettro,

$$\hat{\mathbf{E}}(u, v) = \left[\mathcal{J}_t - \frac{\mathbf{i}_z \mathbf{k}}{w} \right] \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \mathbf{E}_t(x, y) \exp(jux + jvy),$$

risulta proporzionale alla trasformata di Fourier della distribuzione del campo tangente nell'apertura. Allo spettro, nella sua regione visibile, risulta proporzionale il *campo irradiato* dall'apertura

$$\mathbf{E}(r \rightarrow \infty) = \mathbf{E}(r\xi, r\eta, r\gamma) = 2\pi j \frac{\beta \exp(-j\beta r)}{r} \cos \theta \hat{\mathbf{E}}(\xi, \eta).$$

Lo spettro nella regione invisibile (ξ e/o $\eta > 1$) determina la *potenza reattiva* associata all'apertura, cioè i campi reattivi.

Uno sviluppo interessante del campo è quello in *onde sferiche*, in particolare per la connessione che stabilisce tra il *campo vicino* e il *campo lontano* di un arbitrario sistema di radiatori, tutto contenuto nella sfera all'esterno della quale si considera lo sviluppo.

Riferimenti bibliografici

- Abramovitz M. e Stegun J., *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York 1968).
 Bladel J. van, *Electromagnetic Fields* (McGraw Hill, New York 1964) cap. 10.
 Bose J. C., *On a Complete Apparatus for the Study of the Properties of Electric Waves*, *Electr. Engr. Lond.* (2 ottobre 1896).
 — *On the Rotation of Plane of Polarisation of Electric Waves by a Twisted Structure*, *Proc. R. Soc.*, **63**, 146 (1898).
 — *Collected Physical Papers* (Longmans, New York 1927).
 Bucci O. M. e Franceschetti G., *Input Impedance and Transient Response of Spheroidal Antennas in Dispersive Media*, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, **22**, 526-36 (1974).
 Corona P. e Latmiral G., *Approccio termodinamico allo studio di una camera riverberante elettro-*

- magnetica a geometria variabile*, in A. Sposito (a cura di), "Studi in onore di Giuseppe Simeon" (Giannini, Napoli 1978) pp. 309-19.
- Courant R. e Hilbert D., *Methoden der Mathematischen Physik* (Springer, Berlino, Heidelberg e New York 1931) cap. 8, § 5.
- Felsen L. B. e Marcuvitz N., *Radiation and Scattering of Waves* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1973) pp. 284-88 e 698-710.
- Friedman B., *Principles and Techniques of Applied Mathematics* (Wiley, New York 1961) cap. 1, pp. 1-56.
- Harrington R. F. e Mautz J. R., *Theory and Computation of Characteristic Modes for Conducting Bodies*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 19, N. 5, 622-39 (1971).
- e Chang Y., *Characteristic Modes for Electric and Magnetic Bodies*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 20, N. 2, 194-98 (1972).
- Hertz H., *Electric Waves* (Macmillan, Londra 1893).
- Jacobson J. (a cura di), "Antenna Testing Techniques", Atti del convegno tenuto presso l'ESA, giugno 1977 (ESA Scientific and Technical Publication Branch, Noordwijk 1977).
- Jahnke E. e Emde F., *Tables of Functions* (Dover, New York 1945) cap. 7.
- James G. L., *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves* (Peter Peregrinus, Stevenage, U. K. 1976) pp. 35-40.
- Johnson C. C., *Field and Wave Electrodynamics* (McGraw-Hill, New York 1950).
- Lodge O. J., *Signalling through Space without Wires* (The Electrician, Londra 1898).
- Marconi G., British Patent Specification N. 12039 (1896).
- Marcuvitz N., *Field Representation in Spherically Stratified Regions*, Commun pure appl. Math., 4, 263-315 (1951).
- e Schwinger J., *On the Representation of Electric and Magnetic Fields Produced by Currents and Discontinuities in Waveguides*, J. appl. Phys., 22, N. 6, 806-19 (1951).
- Poincaré H. e Vreeland F. K., *Maxwell's Theory and Wireless Telegraphy* (Constable, Londra 1905).
- Ramo S. e Whinnery J. R., *Fields and Waves in Modern Radio* (Wiley, New York 1953) p. 365.
- Ramsay J. F., *Microwave Antenna and Waveguide Technique before 1900*, Proc. IRE, 46, 405-15 (1958).
- Righi A., *L'ottica delle oscillazioni elettriche* (Zanichelli, Bologna 1897).
- Stratton J. A., *Teoria dell'elettromagnetismo* (Boringhieri, Torino 1965) pp. 551-60.

Capitolo 4

Radiazione

When, about two years ago, news came from the other side of the Atlantic that a method had been invented of transmitting, by means of electricity, the articulated sounds of the human voice, so as to be heard hundreds of miles away from the speaker, those of us who had reason to believe that the report had some foundation in fact, began to exercise our imagination in picturing some triumph of constructive skill. When at last this little instrument appeared, consisting, as it does, of parts, everyone of which is familiar to us, and capable of being put together by an amateur, the disappointment arising from its humble appearance was only partially relieved on finding that it was really able to talk (...)

For whatever may be said about the importance of aiming at depth rather than width in our studies, and however strong the demand of the present age may be for specialists, there will always be work, not only for those who build up particular sciences and write monographs on them, but for those who open up such communications between the different groups of builders as will facilitate a healthy interaction between them. And in an university we are especially bound to recognise not only the unity of science itself, but the communion of the workers in science. We are too apt to suppose that we are congregated here merely to be within reach of certain appliances of study, such as museums and laboratories, libraries and lecturers, so that each of us may study what he prefers.

James Clerk Maxwell, 1878.

The existence of induced currents and of electromagnetic actions at a distance from a primary circuit from which they draw their energy, has led us, under the guidance of Faraday and Maxwell, to look upon the medium surrounding the conductor as playing a very important part in the development of the phenomena. If we believe in the continuity of the motion of energy, that is, if we believe that when it disappears at one point and reappears at another it must have passed through the intervening space, we are forced to conclude that the surrounding medium contains at least a part of energy, and that it is capable of transferring it from point to point (...)

I think it is necessary that we should realise thoroughly that if we accept Maxwell's theory of energy residing in the medium, we must no longer consider a current as something conveying energy along the conductor. A current in a conductor is rather to be regarded as consisting essentially of a convergence of electric and magnetic energy from the medium upon the conductor and its transformation there into other forms.

John Henry Poynting, 1884.

4.1 Introduzione

Un problema centrale nella teoria dell'elettromagnetismo è il calcolo del campo ir-radiato da distribuzioni di corrente assegnate; in questo capitolo lo si considera soprattutto in relazione a distribuzioni *filiformi*, cui corrisponde, in pratica, l'emissione di segnali su un ampio spettro di frequenze, da quelle estremamente basse (ELF) alle radioonde.

E' necessario anzitutto chiarire un punto fondamentale, e per questo può essere utile riferirsi a un esempio concreto di antenna. Sia dato, come nella figura 4.1, un filo metallico troncato nel mezzo; alle estremità dell'interspazio (*gap*) tra i capi del filo sia applicata una differenza di potenziale $v(t)$. La distribuzione di corrente lungo il filo, a priori incognita, può essere calcolata, in linea di principio, imponendo che il campo elettromagnetico, soluzione delle equazioni di Maxwell, soddisfi a opportune condizioni al contorno. In particolare, la componente tangenziale del campo elettrico sul filo dev'essere nulla, se si può ritenere che il materiale di cui questo è composto sia un conduttore elettrico perfetto, e l'integrale di linea del campo elettrico ai capi del gap deve uguagliare $v(t)$, se il gap è così piccolo da consentire l'uso di un concetto statico, come è quello di potenziale, anche nel caso dinamico; dev'essere soddisfatta inoltre la condizione di radiazione all'infinito (vedi § 3.2). La conoscenza della distribuzione di corrente consente poi (come mostra questo capitolo) di determinare il campo irradiato dall'antenna.

Tuttavia neppure la differenza di potenziale $v(t)$ è, in generale, nota a priori. Anche considerando come sorgente un generatore ideale di tensione (cosicché la tensione, non dipendendo dal carico, sia finalmente nota a priori), questo è di regola collegato all'antenna mediante una linea di trasmissione. Si pone dunque un altro problema di valori al contorno: note la tensione fornita dal generatore e le caratteristiche geometriche e fisiche della linea di trasmissione con la sua connessione all'antenna, calcolare la tensione $v(t)$ ai capi del gap dell'antenna. In conclusione, il calcolo del campo irradiato da assegnate distribuzioni di correnti è solo una parte del complesso problema del calcolo del campo con sorgenti assegnate.

D'altra parte, non è pensabile cercare di risolvere ogni problema di eccitazione di ciascuna particolare antenna. Un giusto compromesso sembra essere la ricerca della soluzione di alcuni problemi tipici, o *canonici*, al fine di ottenere informazioni piuttosto generali sulla distribuzione della corrente lungo l'antenna, sull'accoppiamento tra linea di trasmissione e antenna, in condizioni idealizzate (ad esempio, il caso di eccitazione coassiale rappresentato nella fig. 4.2) e così via. In tal modo si può calcolare con sufficiente accuratezza la distribuzione di corrente sulle configurazioni di antenna adoperate in pratica. Note le correnti, è possibile affrontare il problema del calcolo del campo irradiato.

A questo fine, è essenziale poter calcolare il campo irradiato da un elemento di corrente di lunghezza infinitesima. Infatti in ogni sistema lineare (per il quale vale il

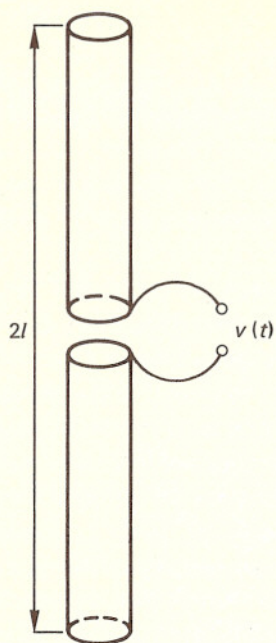


Figura 4.1
Antenna filiforme eccitata da una tensione $v(t)$.

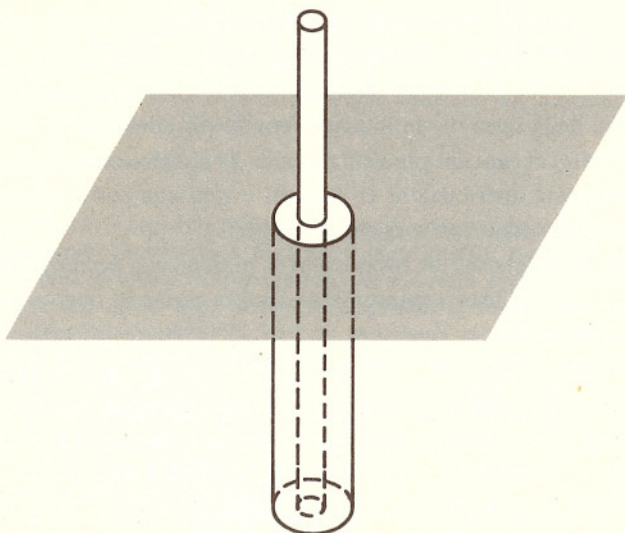


Figura 4.2
Antenna ad eccitazione coassiale, realizzata mediante cavo coassiale con la calza collegata a un piano di terra e con il conduttore centrale che funziona da elemento radiante.

criterio di sovrapposizione degli effetti) il campo irradiato da una arbitraria distribuzione di corrente può ricondursi alla sovrapposizione dei campi irradiati dai singoli elementi in cui si può scomporre la distribuzione.

4.2 Potenziali elettromagnetici

Nello studio della radiazione proveniente da sorgenti date, in mezzi isotropi omogenei, conviene utilizzare funzioni ausiliarie (i *potenziali*) da cui i campi siano deducibili con semplici operazioni di derivazione.

Sia assegnata, nel dominio della frequenza, una distribuzione di corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ alla quale è associata, in virtù dell'equazione di continuità della corrente, una densità di carica $\rho(\mathbf{r})$:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + j\omega\rho = 0. \quad [1]$$

Il campo elettromagnetico è la soluzione delle equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \epsilon\mathbf{E} = \rho \\ \nabla \cdot \mu\mathbf{H} = 0, \end{cases} \quad [2]$$

soggetta alla opportuna condizione al contorno (*di radiazione all'infinito*, o di *Sommerfeld*); questa richiede, per un mezzo illimitato, omogeneo e isotropo, che a grande distanza dalle sorgenti i campi diminuiscano di intensità almeno come $1/r$,¹ e che inoltre

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\mathbf{E}(\mathbf{r}) - \zeta \mathbf{H}(\mathbf{r}) \times \mathbf{i}_r] = 0. \quad [3]$$

La diminuzione dei campi come $1/r$ si giustifica in base a considerazioni energetiche (vedi anche § 3.6). Infatti l'intensità del campo, sia elettrico sia magnetico, è proporzionale alla radice quadrata della densità di potenza irradiata; questa, d'altra parte, al crescere di r diminuisce come $1/r^2$ (in un mezzo senza perdite e a grande distanza dalle sorgenti), perché la potenza totale irradiata dalle sorgenti si distribuisce su superfici sferiche di area crescente come r^2 .

La [3] stabilisce che *localmente*, e a grande distanza dalle sorgenti, il campo irradiato non differisce sostanzialmente da quello di un'onda piana propagantesi nella direzione e nel verso di $\mathbf{i}_r$. Ciò equivale a imporre che il segnale si propaghi dalle sorgenti verso l'infinito, e non viceversa (per i potenziali, corrisponde a scegliere quelli *ritardati* anziché gli *anticipati*; vedi 4.3.4).

¹ Se, come esplicitamente si suppone, le sorgenti sono tutte al finito e situate nell'intorno di $r=0$.

Poiché la quarta delle [2] mostra che la divergenza di $\mu \mathbf{H}$ è nulla, questo vettore può essere espresso come il rotore di un altro vettore $\mathbf{A}$, detto *potenziale vettore*:

$$\mu \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad [4]$$

Sostituendo l'espressione [4] nella prima delle [2], si ha

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0;$$

il vettore $\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}$ può essere dunque espresso come gradiente di una funzione Φ , detta *potenziale scalare*:

$$\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A} = -\nabla \Phi. \quad [5]$$

Le equazioni cui $\mathbf{A}$ e Φ devono soddisfare si ottengono sostituendo $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$, date in funzione di $\mathbf{A}$ e Φ mediante le [4], [5], nella seconda e terza delle [2]; dopo alcuni calcoli e ricordando che $\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A}$, si ottiene

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \epsilon \mu \Phi) \\ \nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} - j\omega (\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \epsilon \mu \Phi). \end{cases} \quad [6]$$

Le [6] sono una coppia di equazioni in quattro incognite (scalari); la ricerca delle soluzioni si presenta qui più vantaggiosa che non nel caso del sistema costituito dalle prime due equazioni [2], essendo minore il numero delle incognite. Il sistema [6] può essere inoltre notevolmente semplificato con un'opportuna scelta di $\mathbf{A}$ e Φ , la cui determinazione è in parte arbitraria. Segue infatti dalla [4] che l'introduzione di un nuovo potenziale vettore $\mathbf{A}'$,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla \Psi, \quad [7]$$

lascia il campo $\mathbf{H}$ invariato. La [5] mostra che invece il campo $\mathbf{E}$ cambia, a meno che anche il potenziale scalare Φ sia sostituito da un nuovo potenziale Φ' :

$$\Phi' = \Phi + j\omega \Psi. \quad [8]$$

Le espressioni [7] e [8] definiscono il grado di indeterminazione per i potenziali; nella scelta di questi si può imporre qualche condizione aggiuntiva.

Una possibile condizione (*gauge di Lorentz*) è la seguente:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \epsilon \mu \Phi = 0. \quad [9]$$

Si verifica subito, per sostituzione, che se la coppia $(\mathbf{A}, \Phi)$ non soddisfa la [9] e il secondo membro è pari a una funzione χ non identicamente nulla, basta modificare i potenziali per mezzo di una funzione Ψ , soluzione dell'equazione

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = \chi,$$

perché la nuova coppia $(\mathbf{A}', \Phi')$ soddisfi la [9]. Se la condizione [9] è soddisfatta, i

potenziali $\mathbf{A}$ e Φ non sono più accoppiati; il potenziale vettore è determinato dalle sole correnti,

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad [10]$$

quello scalare dalle sole cariche:

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad [11]$$

I potenziali non sono più indipendenti, ma legati dalla [9], e di conseguenza, purché $\omega \neq 0$, i campi possono essere espressi in funzione del solo potenziale vettore:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad [12]$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega \epsilon \mu}. \quad [13]$$

Questi potenziali non sono gli unici possibili (vedi 4.2.5 e 4.3.1) e si possono anche imporre condizioni diverse da quella di Lorentz (vedi 4.2.4); tuttavia l'introduzione delle espressioni [12] e [13] apre interessanti prospettive per lo studio dei fenomeni di radiazione da parte di antenne. In questo capitolo si utilizzano essenzialmente la gauge di Lorentz e il potenziale vettore.

Annotazioni

4.2.1 Potenziale vettore e potenziale scalare nel dominio del tempo (esercizio)

Si mostri che, nel dominio del tempo,

$$\mathbf{b}(t) = \nabla \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{e}(t) = -\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \nabla \Phi,$$

dove, in un mezzo non dispersivo,

$$\nabla^2 \mathbf{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}(t)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho(t)}{\epsilon},$$

con la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{a} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

4.2.2 Sorgenti magnetiche (esercizio)

Si mostri che i campi prodotti da sorgenti magnetiche $\mathbf{J}_m$, ρ_m sono derivabili da potenziali $\mathbf{A}_m$, Φ_m (*potenziali magnetici*),

$$\nabla^2 \mathbf{A}_m + k^2 \mathbf{A}_m = -\epsilon \mathbf{J}_m$$

$$\nabla^2 \Phi_m + k^2 \Phi_m = -\frac{\rho_m}{\mu},$$

con la condizione

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_m + j\omega\epsilon\mu\Phi_m = 0,$$

e che

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{A}_m$$

$$\mathbf{H} = -j\omega \mathbf{A}_m - \nabla \Phi_m.$$

4.2.3 Gauge di Coulomb

Se al posto della condizione di Lorentz si impone la *gauge di Coulomb*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0,$$

il sistema [6] si trasforma nell'altro

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu(\mathbf{J} - j\omega\epsilon\nabla\Phi). \end{cases}$$

Con questa condizione il potenziale scalare soddisfa a una equazione formalmente identica a quella del caso statico. Scomponiamo ora $\mathbf{J}$ in una parte irrotazionale $\mathbf{J}_i$,

$$\nabla \times \mathbf{J}_i = 0,$$

e in una parte solenoidale $\mathbf{J}_s$,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0,$$

essendo

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_s.$$

Tale scomposizione è possibile in base a un teorema dovuto a Helmholtz; l'equazione di continuità della corrente diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i + j\omega\rho = \nabla \cdot (\mathbf{J}_i - j\omega\epsilon\nabla\Phi) = 0.$$

Poiché è anche

$$\nabla \times (\mathbf{J}_i - j\omega\epsilon\nabla\Phi) = 0,$$

il vettore

$$\mathbf{J}_i - j\omega\epsilon\nabla\Phi$$

risulta esprimibile come gradiente di una funzione armonica. Per sorgenti tutte al

finito, sia $\mathbf{J}_i$ sia $\nabla\Phi$ sono nulli all'infinito, e pertanto la funzione armonica è ivi regolare; dovendo godere di questa proprietà in tutto lo spazio, essa si riduce a una costante. In definitiva,

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_s$$

dal momento che $\mathbf{J}_i - j\omega\epsilon\nabla\Phi = 0$.

*4.2.4 Potenziale di Hertz

Si ponga

$$\mathbf{A} = j\omega\epsilon\mu\Pi, \quad [14]$$

cosicché i campi siano espressi da

$$\begin{cases} \mathbf{H} = j\omega\epsilon\nabla \times \Pi \\ \mathbf{E} = k^2 \Pi + \nabla\nabla \cdot \Pi. \end{cases}$$

Il vettore Π prende il nome di *potenziale di Hertz*. L'equazione cui esso deve soddisfare si ottiene facilmente sostituendo l'espressione [14] della sua definizione nell'equazione del potenziale vettore:

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = -\frac{\mathbf{J}}{j\omega\epsilon} = -\frac{\mathbf{u}}{\epsilon},$$

dove

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{J}}{j\omega}.$$

Il vettore $\mathbf{u}$ ha le dimensioni di una densità di polarizzazione, cioè di una polarizzazione $\mathbf{U}$ (C · m) per unità di volume. Per chiarirne il significato fisico, consideriamo il semplice caso di due cariche di segno opposto separate da un piccolo intervallo lungo l'asse z (vedi fig. 4.3).

La densità di carica elettrica del sistema è

$$\begin{aligned} \rho &= q\delta(x)\delta(y)\left[\delta\left(z - \frac{l}{2}\right) - \delta\left(z + \frac{l}{2}\right)\right] = \\ &= -ql\delta(x)\delta(y)\delta'(z) = -U\delta(x)\delta(y)\delta'(z) \end{aligned} \quad [15]$$

nell'ipotesi che $l \rightarrow 0$ e che il prodotto $ql \rightarrow U$.

Immaginiamo ora che le cariche varino sinusoidalmente nel tempo.² In tal caso si ha

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (J\mathbf{i}_z) = \frac{\partial J}{\partial z} = -j\omega\rho, \quad [16]$$

ovvero, sostituendo la [15] nella [16]

$$\frac{\mathbf{J}}{j\omega} = U\delta(\mathbf{r})\mathbf{i}_z.$$

Il membro a destra rappresenta, per l'esempio considerato, la polarizzazione elettrica per unità di volume; pertanto il vettore descrive le sorgenti in termini di una

² Ciò equivale a supporre ad esempio, che tra esse vi sia un passaggio di corrente: a questo proposito immaginiamo che le cariche siano collegate da un sottile filo metallico, disposto lungo l'asse z , provvisto di due serbatoi di carica alle estremità.

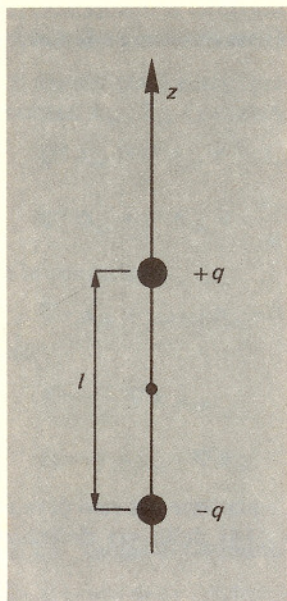


Figura 4.3
Dipolo elettrico.

densità di polarizzazione impressa, e il potenziale di Hertz è determinato da questa rappresentazione delle sorgenti.

4.2.5 Potenziale di Hertz magnetico (esercizio)

Si introduca un potenziale di Hertz magnetico appropriato a sorgenti di tipo magnetico:

$$\mathbf{A}_m = j\omega\epsilon\mu\Pi_m,$$

e se ne derivi l'equazione.

4.2.6 Potenziali di Hertz nel dominio del tempo (esercizio)

Si derivino le equazioni dei potenziali di Hertz nel dominio del tempo.

4.2.7 Potenziali di Debye (esercizio)

Si mostri che, in coordinate sferiche, i campi possono essere dedotti da potenziali (di Debye)

$$D_e = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \quad D_m = \mathbf{H} \cdot \mathbf{r}.$$

I campi associati al potenziale D_e risultano TM rispetto a r , quelli descritti da D_m risultano TE (sempre rispetto a r). Si ricavino le equazioni cui devono soddisfare i due potenziali.

4.3 Campo associato a un dipolo elementare: dominio della frequenza

Si consideri un elemento di corrente, di lunghezza Δz , lungo il quale scorra una corrente I costante con z (vedi fig. 4.4). Poiché la corrente non può annullarsi bruscamente agli estremi dell'elemento, si può immaginare che il tratto Δz sia solo una piccola parte di un filo percorso da corrente, oppure che agli estremi di questo vi siano due serbatoi di carica elettrica (sulla cui realizzazione pratica non è per ora necessario dilungarsi) che assicurino la continuità della corrente.

L'espressione per la densità di corrente è

$$\mathbf{J} = I \delta(x) \delta(y) f(z) \mathbf{i}_z,$$

dove

$$\begin{cases} f(z) = 1 & \text{per } -\frac{\Delta z}{2} < z < \frac{\Delta z}{2} \\ f(z) = 0 & \text{per } |z| > \frac{\Delta z}{2} \end{cases}.$$

Sostituendo la presente espressione nell'equazione [10] (§ 4.2) e proiettando sugli assi, si ha

$$\nabla^2 A_x + k^2 A_x = 0$$

$$\nabla^2 A_y + k^2 A_y = 0$$

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I \delta(x) \delta(y) f(z).$$

Le prime due equazioni hanno come soluzione forzata (legata cioè alle sorgenti) $A_x = A_y = 0$. Per risolvere la terza supponiamo che $\Delta z \rightarrow 0$ e $I \rightarrow \infty$ in modo che il prodotto $I \Delta z$ rimanga costante e diverso da zero (*dipolo elementare*); la soluzione per $r \neq 0$ è allora la seguente (vedi 4.3.1):

$$A_z = \frac{C}{r} \exp(-jkr) + \frac{F}{r} \exp(jkr). \quad [1]$$

Il primo termine al secondo membro della [1] è il cosiddetto *potenziale ritardato* (vedi 4.3.2) ed è il solo a soddisfare alla condizione di radiazione all'infinito (per la dimostrazione vedi 4.3.1); perché il secondo termine (*potenziale anticipato*) si annulli si deve allora porre $F = 0$. La costante C si calcola come in 4.3.1, ottenendosi

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \Delta z}{r} \exp(-jkr) \mathbf{i}_z \quad [2]$$

come espressione del potenziale vettore associato a un dipolo elementare di corrente.

La [2] è esattamente la stessa formula che si sarebbe ottenuta nel caso statico, con la sola aggiunta del fattore $\exp(-jkr)$. L'espressione del potenziale scalare può otte-

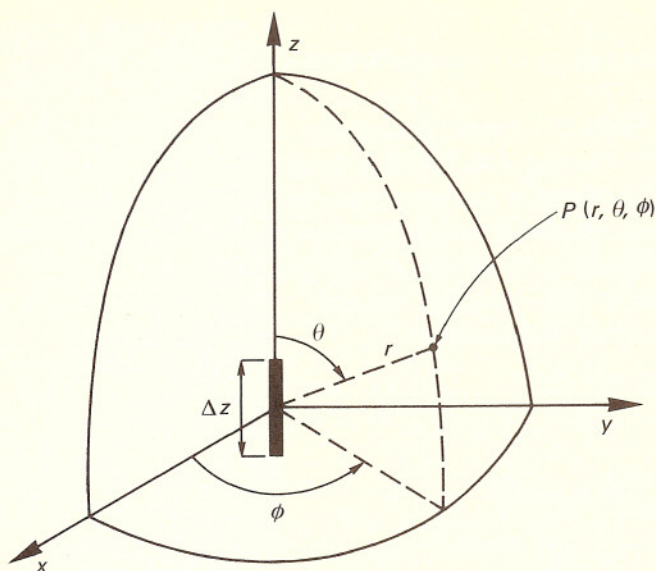


Figura 4.4

Dipolo elementare e associato sistema di coordinate.

nersi dalla [9] (§ 4.2).

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{I\Delta z/j\omega}{r^2} (1+jkr) \cos\theta \exp(-jkr). \quad [3]$$

Momento dipolare e corrente risultano legati dall'equazione di continuità della corrente, dopo che questa sia stata integrata nel volume ΔV della figura 4.5. Per convenzione, la corrente entra nel volume se il dipolo elettrico è quello indicato nella figura, cosicché

$$-I + j\omega q = 0,$$

cioè, dopo moltiplicazione per Δz ,

$$I\Delta z = j\omega U. \quad [4]$$

I campi associati al dipolo elementare di corrente sono ora facilmente calcolabili sostituendo l'espressione [2] nelle [12], [13] (§ 4.2); in coordinate sferiche si ha

$$\begin{cases} E_r = \zeta \frac{I\Delta z}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos\theta \exp(-jkr) \\ E_\theta = \zeta \frac{I\Delta z}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin\theta \exp(-jkr) \\ H_\phi = \frac{I\Delta z}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin\theta \exp(-jkr). \end{cases} \quad [5]$$

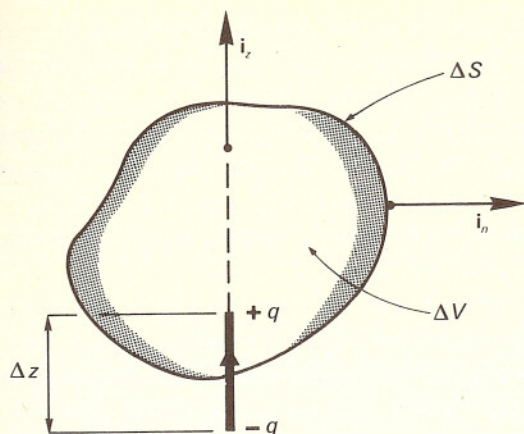


Figura 4.5

Geometria per trovare la relazione tra corrente e momento dipolare.

Le formule precedenti mostrano che i campi sono somma di termini che al crescere della distanza diminuiscono, ma con differente rapidità. A differenza di quanto si è osservato per i potenziali, il caso dinamico non è dunque collegato a quello statico da una relazione semplice. Per $r > \lambda/2\pi$, i termini in $1/r$ (che non esistono nel caso statico; vedi 4.3.3) diventano predominanti rispetto agli altri, e le espressioni dei campi si semplificano. Per $k = \beta$ reale si ha

$$\begin{cases} E_\theta = j\zeta \frac{I\Delta z}{2\lambda r} \sin\theta \exp(-j\beta r) \\ H_\phi = \frac{E_\theta}{\zeta} \end{cases} \quad [6]$$

Questi termini possono quindi esser chiamati *componenti lontane* dei campi; i termini rimanenti, *componenti vicine*.

Una caratterizzazione ulteriore delle componenti lontane e vicine si ottiene calcolando il flusso di potenza attraverso una sfera di raggio r centrata nell'origine; per mezzi senza perdite ($k = \beta$ reale) si ottiene

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{2} \iint \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{i}_r dS = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta r^2 E_\theta H_\phi^* d\theta = \\ &= \frac{\pi}{3} \zeta |I|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 - j \frac{1}{24\pi^2} \zeta |I|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{r} \right)^3. \end{aligned}$$

Il flusso di potenza si compone di una parte reale e una parte immaginaria. La parte reale (*potenza attiva*), in conseguenza della ipotizzata assenza di perdite del mezzo,

è indipendente da r : la media temporale della potenza attiva che fluisce attraverso una superficie sferica di raggio r_1 è pari dunque a quella che fluisce attraverso una superficie sferica di raggio r_2 . E' questa la potenza che dal dipolo si diparte, per r via via crescenti, verso l'infinito; essa coincide con quella irradiata dal dipolo. A formarla contribuiscono tutte e sole le componenti lontane, che pertanto si possono anche definire *termini radiativi*.

La parte immaginaria del flusso di potenza (*potenza reattiva*) dipende invece da r , come conseguenza della variazione con r dello squilibrio tra parte elettrica e magnetica della densità di energia media immagazzinata nel mezzo circostante il dipolo; lo squilibrio è maggiore nelle vicinanze del dipolo e tende ad annullarsi a grande distanza. Il segno della potenza reattiva è negativo, indicando che la densità di energia elettrica, nell'intorno del dipolo, prevale rispetto alla magnetica. Si giustifica così il nome di "dipolo elettrico" per l'elemento di corrente considerato (per la connessione con il dipolo elettrico statico, vedi anche 4.3.3). A formare la potenza reattiva contribuiscono solo le componenti vicine del campo, che pertanto si possono anche denominare *termini reattivi*.

Una terza caratterizzazione delle componenti radiative e reattive può ottenersi considerando il limite al quale le espressioni [5] tendono quando la frequenza tende a zero (vedi 4.3.3). Le componenti reattive tendono a zero più lentamente, e possono quindi essere definite come *quasi statiche*; in contrapposizione, le radiative si possono riguardare come *dinamiche*.

Annotazioni

4.3.1 Calcolo del potenziale vettore associato a un elemento di corrente

Nell'ipotesi $\Delta z \rightarrow 0$, $I\Delta z$ costante, l'equazione per il potenziale vettore diventa

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu I \Delta z \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

Per $r \neq 0$,

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0.$$

Data la simmetria, $A_z = A_z(r)$; in coordinate sferiche,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA_z}{dr} \right) + k^2 A_z = 0.$$

Posto $A_z(r) = f(r)/r$,

si ha

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + k^2 f = 0,$$

da cui

$$f(r) = C \exp(-jkr) + F \exp(jkr).$$

Integrando l'equazione non omogenea su un piccolo volume sferico ΔV , limitato dalla superficie ΔS e centrato nell'origine, si ottiene

$$\oint_{\Delta S} \nabla A_z \cdot \mathbf{i}_r dS + k^2 \iiint_{\Delta V} A_z dV = -\mu I \Delta z.$$

Per $\Delta V \rightarrow 0$ il secondo termine al primo membro tende a zero; se $F = 0$, si ha

$$\oint_{\Delta S} \nabla A_z \cdot \mathbf{i}_r dS = C \oint_{\Delta S} \left[-\frac{1}{r^2} - \frac{jk}{r} \right] \exp(-jkr) dS \rightarrow -4\pi C$$

per $r \rightarrow 0$. Risulta dunque

$$C = \frac{\mu I \Delta z}{4\pi}.$$

Che F debba essere uguale a zero, lo si può vedere imponendo la condizione di radiazione all'infinito [3] (§ 4.2). A questo proposito osserviamo che, per $r \rightarrow \infty$,

$$\frac{d}{dr} \frac{\exp(\pm jkr)}{r} \simeq \pm jk \frac{\exp(\pm jkr)}{r}.$$

Tutti gli operatori differenziali che legano i campi ai potenziali si semplificano, poiché, per $r \rightarrow \infty$,

$$\nabla \simeq \pm jk \mathbf{i}_r,$$

dove il segno superiore è relativo alla funzione $\exp(+jkr)$ e l'inferiore a $\exp(-jkr)$. Pertanto

$$\mathbf{E} \simeq -j\omega \mathbf{A} + j\omega \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{A} = j\omega A_\theta \mathbf{i}_\theta$$

$$\mathbf{H} \simeq \pm \frac{j\omega}{\zeta} A_\theta \mathbf{i}_\phi,$$

dove il segno superiore è relativo al termine contenente la costante C e l'inferiore a quello contenente la costante F . Sostituendo nella [3] (§ 4.2) si verifica subito che solo il primo termine verifica la condizione di radiazione all'infinito (per una giustificazione differente vedi 4.3.2).

4.3.2 Potenziale vettore nel dominio del tempo

Si consideri la soluzione per il potenziale vettore associato a un elemento di corrente (vedi fig. 4.4) nel dominio della frequenza; nel dominio del tempo si ha

$$\begin{aligned} a(r, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{4\pi} \frac{\exp(-j\beta r)}{r} I(\omega) \Delta z \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[j\omega(t-r/c)]}{r} I(\omega) \Delta z d\omega \end{aligned}$$



per un mezzo non dispersivo senza perdite. Posto

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega) \exp(j\omega t) d\omega,$$

si ha

$$a(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i\left(t - \frac{r}{c}\right) \Delta z}{r}.$$

Il potenziale vettore ha dunque la forma di un'onda sferica che si propaga nel verso positivo di r . Se ad esempio $i(t) = I_0 \delta(t)$, l'onda di potenziale è avvertita all'istante r/c . Si giustifica così il termine "potenziale ritardato". Se si fosse considerato il termine di potenziale soppresso nella soluzione data in 4.3.1, si sarebbe ottenuto

$$\frac{F\delta(t + r/c)}{r}.$$

A distanza r questo potenziale appare all'istante $-r/c$, cioè prima dell'accensione della corrente; questo giustifica la denominazione "potenziale anticipato", e anche il porre $F=0$, se si vuole che la causalità sia rispettata. Anche i potenziali anticipati in qualche caso hanno trovato applicazione (Lee e Papas, 1965).

4.3.3 Limite statico

Per trovare le espressioni alle quali si riducono i campi, per $k \rightarrow 0$, conviene utilizzare la relazione [4] tra corrente e momento del dipolo; le espressioni [5] dei campi si trasformano allora nelle seguenti:

$$\begin{cases} E_r = \frac{U}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) \cos\theta \exp(-jkr) \\ E_\theta = \frac{U}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} + \frac{(jk)^2}{r} \right) \sin\theta \exp(-jkr) \\ H_\phi = \frac{U}{4\pi\epsilon\zeta} \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{(jk)^2}{r} \right) \sin\theta \exp(-jkr). \end{cases} \quad [7]$$

Per $k=0$, $H_\phi=0$, e il campo elettrico si riduce a quello di un dipolo statico.

*4.3.4 Dipolo magnetico

Utilizzando il teorema di dualità, le espressioni per i campi associati a un dipolo magnetico U_m si ricavano, a partire dalle precedenti espressioni [7], come segue:

$$\begin{cases} H_r = \frac{U_m}{2\pi\mu} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} \right) \cos\theta \exp(-jkr) \\ H_\theta = \frac{U_m}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{jk}{r^2} + \frac{(jk)^2}{r} \right) \sin\theta \exp(-jkr) \\ E_\phi = -\frac{\zeta U_m}{4\pi\mu} \left(\frac{jk}{r^2} + \frac{(jk)^2}{r} \right) \sin\theta \exp(-jkr). \end{cases} \quad [8]$$

Resta da esaminare come realizzare praticamente un dipolo magnetico; questo problema è esaminato qui di seguito con riferimento al caso statico.

Si consideri una spira di corrente, di raggio R e lungo la quale circoli la corrente I (vedi fig. 4.6). Il potenziale vettore prodotto dall'elemento di corrente $IR d\phi'$ (punto Q sulla spira) nel punto $P(r, \theta, \phi)$ è

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu IR d\phi'}{4\pi r'} \mathbf{i}_{\phi'}.$$

Poiché

$$\begin{aligned} r'^2 &= (r \sin\theta \cos\phi - R \cos\phi')^2 + (r \sin\theta \sin\phi - R \sin\phi')^2 + r^2 \cos^2\theta = \\ &= r^2 + R^2 - 2rR \sin\theta (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi'), \end{aligned}$$

si ha

$$r' \approx r - R \sin\theta (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi'),$$

se si possono trascurare termini di ordine $(R/r)^2$, il che è sempre possibile purché la spira sia sufficientemente piccola; ne segue che

$$d\mathbf{A} \approx \frac{\mu IR}{4\pi r} \left(1 + \frac{R}{r} \sin\theta (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi') \right) \mathbf{i}_{\phi'}.$$

Per calcolare tutto il potenziale vettore associato alla spira, scomponiamo $d\mathbf{A}$ nelle sue componenti cartesiane,

$$d\mathbf{A} = -dA \sin\phi' \mathbf{i}_x + dA \cos\phi' \mathbf{i}_y$$

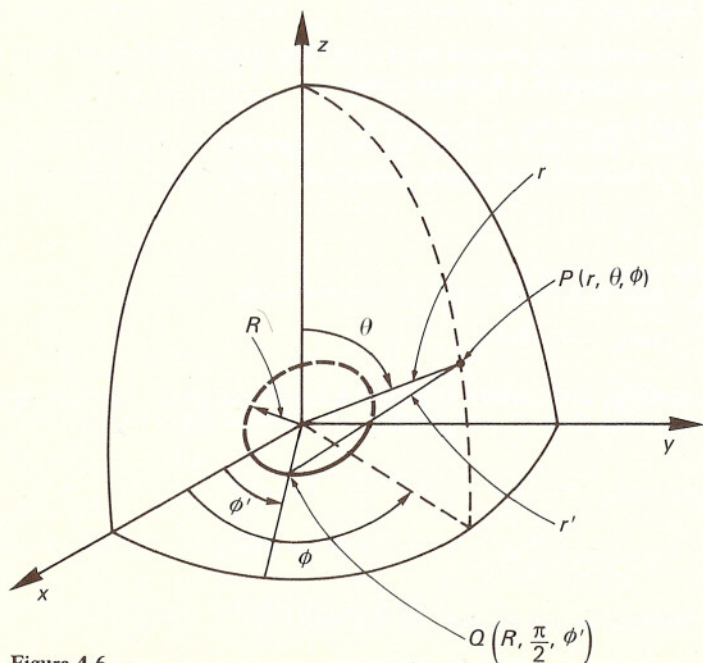


Figura 4.6

Campo associato a una spira di corrente continua.

e integriamo rispetto a ϕ' :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu I R}{4\pi r} \frac{R}{r} \sin\theta \left(-\pi \sin\phi i_x + \pi \cos\phi i_y \right) = \\ &= \frac{\mu I \pi R^2}{4\pi r^2} \sin\theta i_\phi. \end{aligned}$$

Il campo magnetico associato alla spira,

$$\begin{cases} H_r = \frac{I \pi R^2}{2\pi r^3} \cos\theta \\ H_\phi = \frac{I \pi R^2}{4\pi r^3} \sin\theta, \end{cases}$$

coincide con quello di un dipolo magnetico statico (vedi le espressioni [8]), pur di porre $U_m = \mu \pi R^2 I$. Considerando allora una *spira elementare* di corrente, di area S tale che $\mu I S$ rimanga costante quando $S \rightarrow 0$ (in modo che le approssimazioni precedenti siano valide con qualunque r), si può enunciare il seguente principio di equivalenza di Ampère:

Una spira elementare di corrente è equivalente a un dipolo magnetico, ortogonale al piano della spira e di verso tale che la corrente si avvitò lungo il verso del dipolo; l'intensità del dipolo è pari a μSI (in generale, a $N\mu SI$, se si considera un solenoide di N spire).

*4.3.5 Dipolo magnetico dinamico (esercizio)

Si estendano le considerazioni precedenti al caso dinamico; nei calcoli si sviluppino in serie il fattore nell'esponenziale, approssimandolo a

$$kr' \approx kr - kR \sin\theta (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi');$$

per $r \gg \lambda$ risulta

$$kR \gg \frac{R}{r}$$

e quindi, procedendo come in 4.3.4,

$$A = jk \frac{\mu I \pi R^2}{4\pi r} \exp(-jkr) \sin\theta i_\phi.$$

Si mostri, in particolare, che i campi a grande distanza sono dati (nel caso senza perdite $k = \beta$) da

$$\begin{cases} \mathbf{H} = -\frac{I\beta S}{2\lambda r} \sin\theta \exp(-j\beta r) i_\theta \\ \mathbf{E} = -\zeta H i_\phi. \end{cases} \quad [9]$$

*4.3.6 Campo irradiato da una sorgente di Huygens

Si definisce *sorgente di Huygens* una combinazione di dipoli elementari, uno elettrico e uno magnetico, disposti ortogonalmente come nella figura 4.7a, e le cui

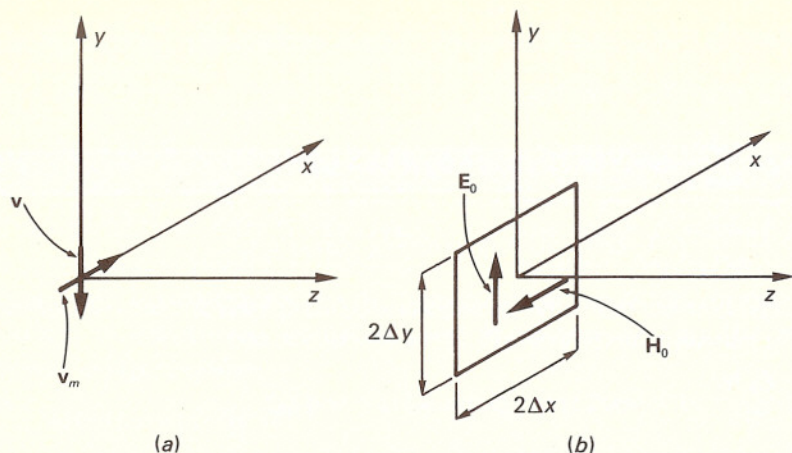


Figura 4.7
Sorgente di Huygens.

ampiezze siano in un rapporto pari all'impedenza intrinseca del mezzo:

$$U_m = \zeta U.$$

In base al teorema di equivalenza, il campo irradato da tale combinazione di sorgenti elementari può anche riguardarsi come quello prodotto da un'areola elementare (vedi fig. 4.7b) investita da un'onda piana propagantesi lungo l'asse z e i cui vettori del campo siano polarizzati come nella figura.³ Infatti, sull'areola vanno disposte correnti superficiali

$$\mathbf{J}_S = \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_0 = -H_0 \mathbf{i}_y$$

$$\mathbf{J}_{mS} = -\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{i}_x;$$

il campo reirradiato dall'areola può quindi esser calcolato come quello prodotto da una coppia di dipoli: quello magnetico, polarizzato secondo $\mathbf{i}_x$ e di corrente magnetica totale

$$\Delta I_m = E_0 2\Delta y,$$

e quello elettrico, polarizzato secondo $\mathbf{i}_y$ e di corrente elettrica totale

$$\Delta I = -\frac{E_0}{\zeta} 2\Delta x.$$

Il campo elettrico irradato dal dipolo magnetico è dato (a grande distanza) da

$$\mathbf{E}_m = -j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} \exp(-j\beta r) (\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_r),$$

e quello magnetico irradato dal dipolo elettrico da

$$\mathbf{H}_e = -j \frac{E_0 \Delta S}{\zeta 2\lambda r} \exp(-j\beta r) (\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_r).$$

³ L'areola dev'essere parte di una superficie chiusa, perché possa applicarsi il teorema di equivalenza.

Il campo elettrico totale irradiato dalla coppia dei dipoli è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_e = \mathbf{E}_m + \zeta \mathbf{H}_e \times \mathbf{i}_r = \\ &= -j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} \exp(-j\beta r) [\mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_r + (\mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_r) \times \mathbf{i}_r] = \\ &= j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) \exp(-j\beta r) (\sin\phi \mathbf{i}_\theta + \cos\phi \mathbf{i}_\phi). \end{aligned} \quad [10]$$

Se il campo elettrico fosse stato polarizzato secondo $\mathbf{i}_x$ e quello magnetico secondo $\mathbf{i}_y$, si sarebbe ottenuto, invece della [10], la nuova espressione

$$\mathbf{E} = j \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} (1 + \cos\theta) \exp(-j\beta r) (\cos\phi \mathbf{i}_\theta - \sin\phi \mathbf{i}_\phi). \quad [11]$$

Questi sono i campi irradiati dalla cosiddetta *areola di Huygens*; le relative espressioni sono note come *formula di Silver* nell'ambito della teoria delle antenne (Silver, 1965). Si noti che l'areola di Huygens non irradia posteriormente ($\theta = \pi$).

4.4 Campo associato a un dipolo elementare: dominio del tempo

Il modo più semplice per ricavare il campo associato a un dipolo elementare nel dominio del tempo è probabilmente quello di partire dalle soluzioni [7], [8] del paragrafo precedente, valide nel dominio della frequenza, e successivamente applicare ad esse una trasformazione di Fourier. Consideriamo un dipolo elementare elettrico di momento $U(\omega)$; il dipolo sia posto nell'origine di un sistema di coordinate sferiche (r, θ, ϕ) e sia orientato parallelamente alla direzione $\theta = 0$ (vedi fig. 4.4). Il momento del dipolo, nel dominio del tempo, è dato da

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Pertanto, trasformando le [7] (§ 4.3), si ha per i campi

$$\begin{cases} e_r(t) = \frac{2\zeta}{4\pi r} \cos\theta \left[\frac{u'(t^*)}{r} + \frac{cu''(t^*)}{r^2} \right] \\ e_\theta(t) = \frac{\zeta}{4\pi r} \sin\theta \left[\frac{u''(t^*)}{c} + \frac{u'(t^*)}{r} + \frac{cu(t^*)}{r^2} \right] \\ h_\phi(t) = \frac{1}{4\pi r} \sin\theta \left[\frac{u''(t^*)}{c} + \frac{u'(t^*)}{r} \right], \end{cases} \quad [1]$$

dove l'apice indica derivazione rispetto al tempo ($u' = du/dt$; $u'' = d^2u/dt^2$) e $t^* = t - r/c$ è il *tempo ritardato*, cioè il tempo misurato dopo l'arrivo di un segnale che si muova con la velocità della luce e percorra la distanza r . Se, ad esempio, il momento

elettrico è del tipo a *gradino*,

$$u(t > 0) = u_0 \mathbf{i}_z$$

$$u(t < 0) = 0$$

(le cariche vengono separate all'istante $t=0$, e lasciate poi in tale posizione), allora $u' = u_0 \delta(t)$, $u'' = u_0 \delta'(t)$. Di conseguenza, il segnale giunge al punto r solo al tempo r/c , propagandosi quindi con velocità c . Le [1] mostrano che, analogamente al caso sinusoidale, ciascuna componente del campo contiene termini con diversa dipendenza spaziale. Al fine di caratterizzarli, si consideri un momento dipolare variabile nel tempo con legge gaussiana:

$$u(t) = u_0 \exp(-2t^2/T^2)$$

(vedi fig. 4.8). La parte predominante del segnale è compresa tra gli istanti $t = -T/2$ e $t = T/2$, in corrispondenza dei quali la curva della figura 4.8 presenta due punti di flesso.

Con questo particolare segnale le [1] si specializzano come segue:

$$\begin{cases} e_r(t) = \frac{2\zeta u(t^*)}{4\pi r c T^2} \left[-4 \frac{cT}{r} \frac{t^*}{T} + \left(\frac{cT}{r} \right)^2 \right] \cos\theta \\ e_\theta(t) = \frac{\zeta u(t^*)}{4\pi r c T^2} \left\{ \left[\left(\frac{4t^*}{T} \right)^2 - 4 \right] - 4 \frac{cT}{r} \frac{t^*}{T} + \left(\frac{cT}{r} \right)^2 \right\} \sin\theta \\ h_\phi(t) = \frac{u(t^*)}{4\pi r c T^2} \left\{ \left[\left(\frac{4t^*}{T} \right)^2 - 4 \right] - 4 \frac{cT}{r} \frac{t^*}{T} \right\} \sin\theta. \end{cases}$$

Evidentemente, i termini che decrescono con la distanza come $1/r^2$ e $1/r^3$ (termini vicini; vedi § 4.3) sono prevalenti per $r < cT$, mentre quelli che decrescono come $1/r$ (termini lontani) sono prevalenti per $r > cT$. Nel dominio del tempo, la frontiera tra componenti lontane e vicine è dunque data dalla durata dell'impulso moltiplicata per la velocità della luce, cioè dalla durata spaziale dell'impulso: a distanze maggiori di cT , dove l'impulso si è completamente distaccato dalla sorgente, solo le componenti lontane sono importanti.

Un'ulteriore caratterizzazione dei vari termini [1] del campo si ha considerando il vettore di Poynting:

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{e}(t) \times \mathbf{h}(t) = s_r(t) \mathbf{i}_r + s_\theta(t) \mathbf{i}_\theta$$

$$s_r(t) = \frac{\zeta \sin^2\theta}{(4\pi c r)^2} \left\{ (u'')^2 + \frac{c}{r} \frac{d}{dt} \left[(u')^2 + \frac{c}{r} u u' + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 u^2 \right] \right\}$$

$$s_\theta(t) = \frac{-2\zeta \sin\theta \cos\theta}{(4\pi c r)^2} \frac{c}{r} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (u')^2 + \frac{c}{r} u u' + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 u^2 \right]$$

dove i calcoli sono stati effettuati partendo dalle [1].

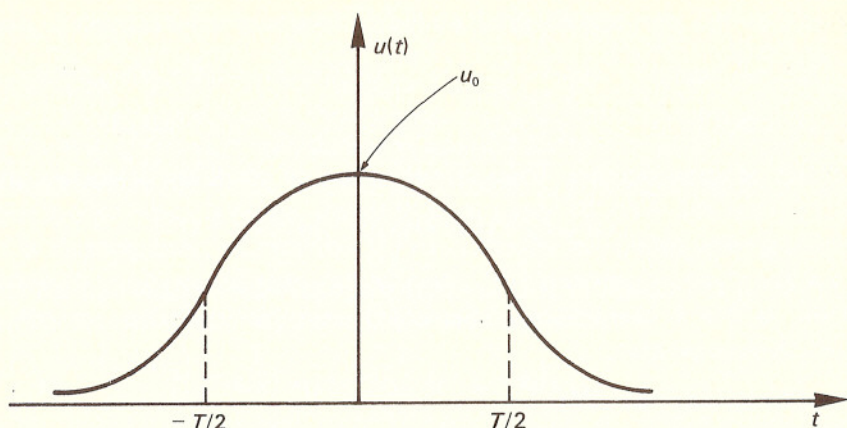


Figura 4.8
Segnale di tipo gaussiano.

Valutiamo ora l'energia elettromagnetica che fluisce attraverso un'arbitraria superficie sferica $r = \text{cost.}$ nell'intervallo di tempo $t_2^* - t_1^*$. Per questo calcoliamo il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie sferica (potenza che attraversa la superficie), e successivamente l'integrale del flusso fra i tempi t_1^* e t_2^* . In quest'ultimo calcolo compare un integrale del tipo

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} [u''(t)]^2 dt,$$

a formare il quale contribuiscono tutte e sole quelle componenti del campo definite "radiative" nel precedente paragrafo. L'integrale è sempre positivo (o nullo, se $u''(t) = 0$ qualunque sia t nell'intervallo considerato) e corrisponde all'energia irradiata dal dipolo nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$; tale energia si propaga verso l'infinito e non può essere recuperata dalla sorgente: ad essa corrisponde un flusso di potenza *irreversibile*. Se il dipolo è costituito da una carica fissa $-q$ e da una carica $+q$ in moto rispetto ad essa,

$$u(t) = qz(t),$$

il dipolo stesso irradia solo quando la carica è accelerata, cioè $z''(t) \neq 0$. Si noti che l'irreversibilità del flusso di potenza verso l'infinito è diretta conseguenza della condizione di radiazione all'infinito [3] (§ 4.2).

Un secondo integrale che compare nell'espressione dell'energia è il seguente:

$$\begin{aligned} \int_{t_1^*}^{t_2^*} \frac{d}{dt} \left[(u')^2 + \frac{c}{r} uu' + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 u^2 \right] dt = \\ = \left[(u')^2 + \frac{c}{r} uu' + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 u^2 \right]_{t_1^*}^{t_2^*}. \end{aligned}$$

Questo integrale dipende *solo* dagli estremi dell'intervallo di integrazione ed è formato dalle sole componenti reattive del campo (vedi § 4.3). Se la funzione $u(t)$ è limitata nel tempo (o anche ciclica), l'integrale può essere reso nullo con una opportuna scelta di t_1^* e t_2^* . L'energia associata all'integrale è pertanto totalmente recuperabile dalle sorgenti. Ad essa corrisponde una potenza *reversibile*.

Annotazioni

4.4.1 Campo transitorio associato a un dipolo magnetico (esercizio)

Utilizzando il teorema di dualità si mostri che il campo associato a un dipolo magnetico di momento $u_m(t)$ è dato da

$$\begin{cases} h_r(t) = \frac{2}{4\pi r \zeta} \cos \theta \left[\frac{u'_m(t^*)}{r^2} + \frac{c u_m(t^*)}{r^2} \right] \cos \theta \\ h_\theta(t) = \frac{1}{4\pi r \zeta} \sin \theta \left[\frac{u''_m(t^*)}{c} + \frac{u'_m(t^*)}{r} + \frac{c u_m(t^*)}{r^2} \right] \sin \theta \\ e_\phi(t) = -\frac{1}{4\pi r} \sin \theta \left[\frac{u''_m(t^*)}{c} + \frac{u'_m(t^*)}{r} \right] \sin \theta \end{cases} \quad [2]$$

4.4.2 Campo associato a due cariche che coalescono (esercizio)

Un modello per studiare il campo transitorio associato a un dipolo elettrico è quello di due cariche elettriche, uguali in modulo e di segno opposto, che, inizialmente ferme e separate da una distanza d , muovono l'una verso l'altra fino a coincidere e quindi annullarsi.

Supposto, per semplicità, che una carica sia fissa e l'altra mobile lungo l'asse z , a quest'ultima (q) corrisponde una densità di corrente

$$\mathbf{j}(z, t) = q \delta(x) \delta(y) \delta\left(t - \frac{z}{v}\right) \mathbf{i}_z, \quad -d \leq z \leq 0, \quad [3]$$

dove v è la velocità della carica. Si trasformi la [3] nel dominio della frequenza, si calcoli il campo dovuto all'armonica generica, e finalmente il campo nel dominio del tempo mediante una trasformata inversa di Fourier (Franceschetti e Papas, 1974).

4.4.3 Campo associato a una carica in moto uniforme

Si consideri una carica in moto uniforme lungo l'asse z e che, al tempo $t=0$, passi per l'origine $z=0$. La densità di corrente associata a tale carica è data da

$$\mathbf{j}(z, t) = q \delta(x) \delta(y) \delta\left(t - \frac{z}{v}\right) \mathbf{i}_z,$$

dove v è la velocità con la quale si muove la carica; nel dominio trasformato,

$$\mathbf{J}(z, \omega) = q \delta(x) \delta(y) \exp\left(-j\omega \frac{z}{v}\right) \mathbf{i}_z.$$

E' questa una densità di corrente corrispondente a quella di un filo, di sezione infinitesima lungo l'asse z e che trasporta (vedi fig. 4.9) una corrente la cui trasformata è $q \exp(-j\omega z/v)$. Un elemento dz di tale filo produce un potenziale vettore dA in $P(\rho, z')$ dato da

$$dA(\rho, z') = \frac{\mu}{4\pi} \frac{q \exp\left[-j\omega \frac{z}{v} - j\omega \frac{n}{c} \sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}\right]}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}} i_z dz$$

dove il mezzo nel quale la carica si muove è caratterizzato da un indice di rifrazione n e c è la velocità della luce nel vuoto.

Il potenziale vettore associato a tutto il filo è dato, nel dominio della frequenza, da

$$A(\rho, z', \omega) = \frac{\mu q}{4\pi} i_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left[-j\omega \left(\frac{z}{v} + \frac{n}{c} \sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}\right)\right]}{\sqrt{(z-z')^2 + \rho^2}} dz$$

e, nel dominio del tempo, da

$$a(\rho, z', t) = \frac{\mu q}{8\pi^2} i_z \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{\exp\left[j\omega \left(t - \frac{z'}{v} - \frac{u}{v} - \frac{n}{c} \sqrt{u^2 + \rho^2}\right)\right]}{\sqrt{u^2 + \rho^2}},$$

dove si è posto $u = z - z'$. Per avere un'idea dell'andamento del potenziale vettore, invertiamo l'ordine di integrazione, ottenendo

$$a(\rho, z', t) = \frac{\mu q}{4\pi} i_z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{z'}{v} - \frac{1}{v} \xi\right)}{\sqrt{u^2 + \rho^2}} du,$$

nell'ipotesi di un mezzo non dispersivo (n costante con ω) e avendo posto

$$\xi = u + \frac{nv}{c} \sqrt{u^2 + \rho^2}. \quad [4]$$

Cambiando la variabile di integrazione da u a ξ , si ottiene

$$a(\rho, z', t) = \frac{\mu q}{4\pi} i_z \int \frac{\delta\left(t - \frac{z'}{v} - \frac{1}{v} \xi\right)}{\sqrt{u^2 + \rho^2} + \frac{nv}{c} u} d\xi, \quad [5]$$

dove $u = u(\xi)$ mediante la [4]. La funzione di Dirac si annulla per

$$\xi_0 = vt - z' = z_0 - z',$$

dove z_0 è la posizione della carica all'istante t , e pertanto l'integrale si calcola per questo valore di ξ . Per questo bisogna tuttavia precisare i limiti d'integrazione.

Un primo caso è quello in cui il parametro $nv/c < 1$: la particella carica si muove nel mezzo con velocità v minore di quella (c/n) della luce (sempre nel mezzo). Questa situazione è detta *subrelativistica*. Al variare di u con continuità da $-\infty$ a $+\infty$, anche

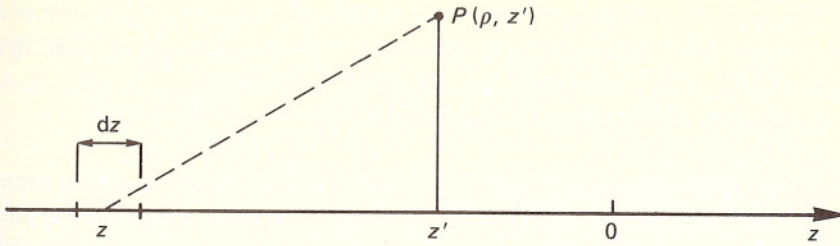


Figura 4.9

Filo di corrente con fase progressiva.

ξ varia con continuità tra gli stessi limiti e quindi l'integrazione nella [5] è ancora tra $-\infty$ e $+\infty$. L'argomento della funzione di Dirac è sempre interno all'intervallo di integrazione; il potenziale vettore, e quindi il campo, è diverso da zero in tutti i punti dello spazio.

Altra è la situazione se $nv/c > 1$ (situazione *superrelativistica*), se cioè la carica si muove con velocità v maggiore di quella della luce nel mezzo. Al variare di u tra $-\infty$ a $+\infty$, ξ varia da $+\infty$ a $\rho\sqrt{(nv/c)^2 - 1}$, e poi nuovamente da questo valore a $+\infty$ (come si vede uguagliando a zero la derivata rispetto a u della [4]). L'integrale [5] è ora diverso da zero solo se

$$\xi_0 = z_0 - z' \geq \sqrt{\left(\frac{nv}{c}\right)^2 - 1} \rho.$$

La disuguaglianza precedente individua un volume limitato dalla superficie conica

$$z' = z_0 - \sqrt{\left(\frac{nv}{c}\right)^2 - 1} \rho. \quad [6]$$

Questo cono ha vertice nella carica ed è tutto alla sinistra di questa se la carica si muove verso la destra. Sul cono inoltre si annulla il denominatore nella [5].

La trattazione precedente mostra che, per $nv/c > 1$, il potenziale vettore, e quindi il campo, sono essenzialmente confinati su una superficie conica che segue la carica e ha come vertice la carica stessa. L'angolo Θ che il cono di luce forma con l'asse z è dato da $\sin \Theta = c/nv$.

Quanto descritto è denominato *effetto Čerenkov*, e il cono viene detto *cono di Čerenkov*.

4.5 Antenne filiformi

Nei precedenti paragrafi sono stati illustrati vari modi in cui può essere calcolato il campo elettromagnetico associato a dipoli elementari. Evidentemente, il campo associato a distribuzioni arbitrarie di corrente può essere calcolato, in base alla sovrappo-

sizione degli effetti, scomponendo tali distribuzioni in successioni di dipoli elementari.

Ad esempio, si consideri il filo percorso da corrente rappresentato nella figura 4.10. A grande distanza, il campo elettromagnetico prodotto dall'elemento di corrente di lunghezza dz , centrato in z , è dato da

$$\begin{cases} dE_{\theta'} = j\zeta \frac{I(z) dz}{2\lambda r'} \sin\theta' \exp(-j\beta r') \\ dH_{\phi'} = \frac{dE_{\theta}}{\zeta}, \quad r'/\lambda \gg 1, \end{cases} \quad [1]$$

dove

$$r'^2 = r^2 + z^2 - 2rz \cos\theta.$$

Sviluppando in serie, risulta

$$r' = r - z \cos\theta + \frac{1}{2} \frac{z^2}{r} \sin^2\theta + \dots$$

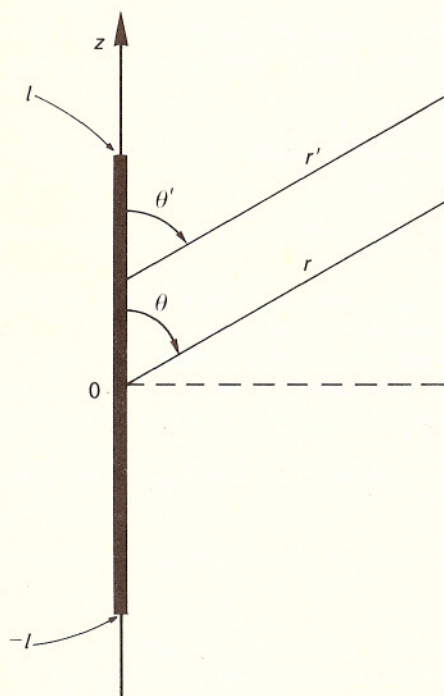


Figura 4.10

Calcolo del campo irradiato da un filo percorso da corrente.

Al denominatore della [1] può senz'altro porsi $r' = r$. Non così nell'argomento dell'esponenziale; infatti

$$\beta r' - \beta r = -\beta z \left[\cos \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r} \right) \sin^2 \theta + \dots \right]$$

assume un valore massimo dato da $\beta l = 2\pi l/\lambda$, che può non esser trascurabile in relazione alle dimensioni lineari dell'antenna. Se $\beta l(l/r) \ll 1$ (*regione di Fraunhofer*; vedi anche 4.5.5), si può porre

$$r' \approx r - z \cos \theta, \quad \theta' \approx \theta,$$

e il campo totale irradiato dal filo di corrente è dato da

$$\begin{cases} E_\theta = j\zeta \frac{\exp(-j\beta r)}{2\lambda r} \sin \theta \int_{-l}^l I(z) \exp(j\beta z \cos \theta) dz \\ H_\phi = \frac{E_\theta}{\zeta} \end{cases} \quad [2]$$

Tale campo può dunque essere calcolato conoscendo la distribuzione di corrente. E' questo un punto centrale nella teoria delle antenne: calcolare la distribuzione di corrente su conduttori di geometria assegnata, quando sia stata specificata l'eccitazione. In pratica vi sono due modi per tentare di risolvere il problema: il metodo dell'espansione modale e quello dell'equazione integrale (per la corrente).

L'espansione modale è stata presentata nel capitolo 3; in particolare (vedi 3.7.2) si è studiata in dettaglio l'antenna sferica. Basta qui ricordare che il metodo è rigoroso, ma permette lo studio di poche geometrie (in particolare, la sferica e la sferoidale; Bucci e Franceschetti, 1974).

In questo paragrafo il metodo dell'equazione integrale è applicato allo studio della distribuzione di corrente lungo un conduttore a sezione cilindrica circolare, metallico, di lunghezza $2l$, eccitato nella parte centrale da una tensione il cui fasore è V_0 (vedi fig. 4.11); è questo il caso dell'antenna filiforme rettilinea. L'antenna è sottile se il cosiddetto *parametro di snellezza*,

$$\Omega = 2 \ln \frac{2l}{a}, \quad [3]$$

è maggiore di 10 (cioè $2l/a > 150$). Per simmetria, la corrente lungo l'antenna è tutta diretta secondo l'asse z , se si trascura quella presente sulle basi terminali dell'antenna (caso di un'antenna molto sottile o di un'antenna tubolare); il potenziale vettore è allora diretto secondo z . Per la componente del campo lungo z , la [13] (§ 4.2), che esprime il campo elettrico in funzione del potenziale vettore, fornisce

$$E_z = -j \frac{\omega}{\beta^2} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \beta^2 A \right).$$

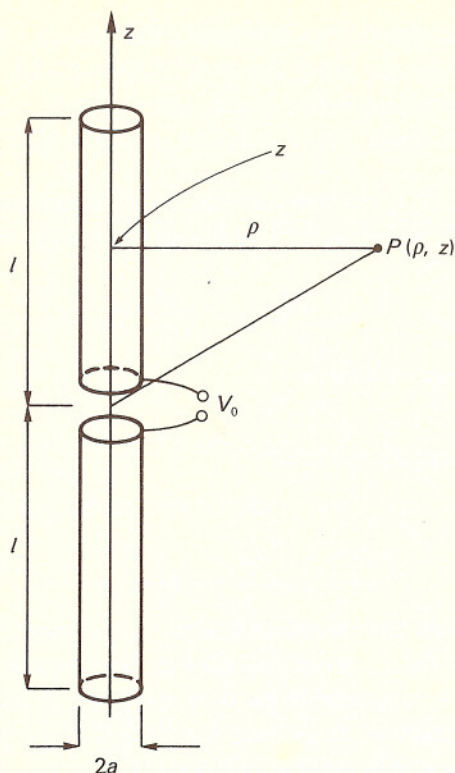


Figura 4.11
Antenna filiforme.

Sulla superficie dell'antenna (supposta realizzata mediante un conduttore elettrico perfetto) $E_z = 0$ ovunque, tranne che nella regione di alimentazione. Come modello di eccitazione si assume un taglio di spessore infinitesimo (δ -gap) al quale sia applicata la tensione di alimentazione. Il campo elettrico applicato è quindi dato da

$$\mathbf{E}_i = -V_0 \delta(z) \mathbf{i}_z.$$

Pertanto, sulla superficie dell'antenna ($\rho = a$),

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + \beta^2 A = \frac{\beta^2}{j\omega} V_0 \delta(z), \quad |z| \leq l,$$

dove il simbolo di derivata totale significa che il potenziale vettore è da riguardare come funzione della sola z , essendo la coordinata ρ fissata e il potenziale, per simmetria, indipendente da ϕ . La soluzione di questa equazione (vedi 4.5.1) è la seguente:

$$A(z) = C \cos \beta z + \frac{\beta V_0}{2j\omega} \sin \beta |z|. \quad [4]$$

D'altra parte, il potenziale vettore si può esprimere in funzione della densità di corrente che scorre lungo la superficie del conduttore. Per il calcolo, supponiamo di poter concentrare tutta la corrente sull'asse dell'antenna; ciò si giustifica intuitivamente in modo tanto più convincente quanto più $a/l \ll 1$ (e fornisce una soluzione asintotica in $1/\Omega$). Si ha quindi, sempre per $\rho = a$,

$$A(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l}^l I(z') \frac{\exp(-j\beta \sqrt{a^2 + (z-z')^2})}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} dz', \quad [5]$$

dove $I(z')$ è la distribuzione incognita di corrente lungo l'antenna.

Uguagliando le [4], [5] si ottiene

$$\int_{-l}^l I(z') \frac{\exp(-j\beta \sqrt{a^2 + (z-z')^2})}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} dz' = -2\pi j \frac{V_0}{\xi} \sin \beta |z| + \frac{4\pi C}{\mu} \cos \beta z, \quad [6]$$

che è l'*equazione integrale di Hallén* nella corrente $I(z)$; risolta tale equazione, la costante C è determinata dalla condizione

$$I(l) = 0 \quad [7]$$

che, data la simmetria del problema, implica anche $I(-l) = 0$. La [6] è una *equazione integrale di Fredholm di prima specie*. A rigore, essa non ammette soluzioni (integrabili) per la corrente $I(z)$: al primo membro, diversamente da quanto accade al secondo, compare una funzione analitica. Ciò si deve alla supposta concentrazione della corrente sull'asse dell'antenna (vedi la [5]) che ha eliminato la singolarità nel kernel dell'integrale.

Da un punto di vista pratico il problema non è grave. La [6] viene approssimativamente trasformata in un'*equazione integrale di Fredholm di seconda specie* e risolta per successive iterazioni (vedi 4.5.2). La prima iterazione, all'ordine $1/\Omega$, è la seguente:

$$I(z) = j \frac{2\pi V_0}{\xi \Omega} \frac{\sin \beta(l-|z|)}{\cos \beta l} = I_0 \frac{\sin \beta(l-|z|)}{\sin \beta l} \quad [8]$$

$$I_0 = I(0).$$

Confrontando la [8] con l'*equazione della corrente lungo una linea di trasmissione aperta agli estremi*, di lunghezza l e impedenza caratteristica Z_0 , eccitata all'ingresso da una tensione V_0 ,

$$I(z) = j \frac{V_0}{Z_0} \frac{\sin \beta(l-z)}{\cos \beta l},$$

si nota che, in prima approssimazione, l'antenna si comporta come una linea di tra-

smissione aperta agli estremi e divaricata, di impedenza caratteristica

$$Z_0 = \zeta \frac{\Omega}{2\pi}.$$

La conclusione è che, in prima approssimazione, la distribuzione della corrente su antenne filiformi sottili è di tipo sinusoidale, e la costante di propagazione β è la stessa del mezzo che circonda l'antenna.

Si noti che la [8] diverge per $\sin \beta l = 0$, cioè per $2l = n\pi$, a meno che $I(0) = 0$. Infatti, in questa prima approssimazione nella soluzione della equazione di Hallén la corrente può annullarsi nel punto di alimentazione; chiaramente il risultato non è accettabile dal punto di vista fisico, perché in tal caso la potenza fornita dal generatore all'antenna,

$$\frac{1}{2} V_0 I_0^*,$$

e da questa trasferita nello spazio circostante, risulterebbe nulla. Nonostante ciò, l'ipotesi di una distribuzione di corrente sinusoidale costituisce, nel caso di antenne sottili, un'approssimazione del tutto accettabile ai fini del calcolo del campo irradiato (vedi 4.5.6, 4.5.7) e della potenza irradiata. L'approssimazione è invece insufficiente per il calcolo della cosiddetta *reattanza d'ingresso* dell'antenna (vedi 4.6.15).

Annotazioni

4.5.1 Potenziale vettore sulla superficie di un'antenna filiforme

Si voglia risolvere l'equazione

$$\frac{d^2 A}{dz^2} + \beta^2 A = \frac{\beta^2}{j\omega} V_0 \delta(z). \quad [9]$$

Per $z \neq 0$ si ha

$$A(z) = C_1 \cos \beta z + S_1 \sin \beta z, \quad z > 0,$$

$$A(z) = C_2 \cos \beta z + S_2 \sin \beta z, \quad z < 0.$$

Data la simmetria della geometria dell'antenna e delle condizioni terminali, il potenziale vettore è pari rispetto a z ; esso è inoltre continuo, quindi:

$$A(z) = C \cos \beta z + S \sin \beta |z|, \quad |z| \leq l.$$

Integrando la [9] nell'intorno di $z = 0$ su un intervallo $\pm \Delta z \rightarrow 0$, si ha

$$\left. \frac{dA}{dz} \right|_{-\Delta z}^{\Delta z} = \frac{\beta^2}{j\omega} V_0,$$

cioè

$$2\beta S = \frac{\beta^2}{j\omega} V_0.$$

*4.5.2 Equazione integrale di Hallén

Si vuole un metodo di soluzione per la [6], equazione integrale di Fredholm di prima specie (perché la funzione incognita compare solo sotto il segno di integrale). Si nota che la funzione che moltiplica $I(z')$ nell'integrale è rapidamente variabile nell'intorno di $z' = z$ se $a \rightarrow 0$ (antenna sottile). Per operare con funzioni più dolci conviene trasformare l'integrale come segue

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l I(z') \frac{\exp(-j\beta\sqrt{a^2 + (z-z')^2})}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} dz' &= \int_{-l}^l \frac{I(z')}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} dz' - \\ &\quad - \int_{-l}^l g(z, z') I(z') dz'; \\ g(z, z') &= \frac{1 - \exp(-j\beta\sqrt{a^2 + (z-z')^2})}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} = \\ &= j\beta \exp\left(-j\beta \frac{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}}{2}\right) \frac{\sin\left(\beta \frac{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}}{2}\right)}{\beta \frac{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}}{2}}. \end{aligned}$$

Si noti come la funzione $g(z, z')$ sia dolcemente variabile con z' anche nell'intorno di $z' = z$. Inoltre il primo integrale può essere approssimativamente calcolato in base al fatto che, per $a \rightarrow 0$, l'integrando presenta un picco in $z' = z$; è quindi l'intorno di $z' = z$ che fornisce il massimo contributo all'integrale stesso. Di conseguenza

$$\int_{-l}^l \frac{I(z')}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} dz' \approx I(z) \int_{-l}^l \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}}.$$

Con il cambio di variabile

$$|z - z'| = u$$

l'integrale si trasforma come segue:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{-l}^l \frac{dz'}{\sqrt{a^2 + (z-z')^2}} = - \int_{z+l}^0 \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} + \int_0^{l-z} \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \\ &= \ln \frac{(l+z) + \sqrt{(l+z)^2 + a^2}}{a} + \ln \frac{(l-z) + \sqrt{(l-z)^2 + a^2}}{a}. \end{aligned}$$

La funzione $f(z)$ è pari rispetto a z ; per $z=0$ assume il valore

$$f(0) = 2 \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{a} \approx 2 \ln \frac{2l}{a} = \Omega;$$

per $z = \pm l$ è invece

$$f(\pm l) = \ln \frac{2l + \sqrt{4l^2 + a^2}}{a} \approx \ln \frac{4l}{a}.$$

La funzione è molto piatta nell'intorno di $z=0$, come si vede dallo sviluppo in serie

$$f(z) \approx \Omega - \sum_n \frac{1}{n} \left(\frac{z}{l} \right)^{2n},$$

avendo posto $a=0$ nel calcolo delle derivate. Se si approssima la $f(z)$ a Ω in tutto l'intervallo delle z , la [6] può essere riscritta come segue:

$$I(z) = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{4\pi C}{\mu} \cos \beta z - 2\pi j \frac{V_0}{\xi} \sin \beta |z| \right) + \frac{1}{\Omega} \int_{-l}^l g(z, z') I(z') dz',$$

equazione integrale non omogenea (funzione nota al secondo membro) di seconda specie (la funzione incognita appare sia fuori sia dentro il segno di integrale). Essa è risolvibile per iterazioni successive; come prima iterazione si può prendere

$$I(z) = \frac{1}{\Omega} \left(\frac{4\pi C}{\mu} \cos \beta z - 2\pi j \frac{V_0}{\xi} \sin \beta |z| \right),$$

che è di ordine $1/\Omega$. Sostituendo nell'integrale, si avrebbe la seconda iterazione, contenente anche un termine di ordine $1/\Omega^2$; e così via. Fermandosi alla prima iterazione, per $\Omega \gg 1$ e imponendo la condizione $I(l)=0$, si ha

$$C = j \frac{\mu V_0}{2\xi} \frac{\sin \beta l}{\cos \beta l},$$

e di conseguenza

$$I(z) \approx j \frac{2\pi V_0}{\xi \Omega} \left(\frac{\sin \beta l \cos \beta z}{\cos \beta l} - \sin \beta |z| \right).$$

4.5.3 Distribuzione di corrente su un'antenna corta (esercizio)

Per $\beta l \ll 1$, sviluppando la [8] al primo ordine si mostri che

$$I(z) \approx j \frac{2\pi V_0}{\xi \Omega} \beta(l - |z|) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{l} \right), \quad [9]$$

cioè che distribuzione di corrente su un'antenna corta è triangolare.

4.5.4 Distribuzione di corrente su un'antenna a mezz'onda (esercizio)

Un'antenna è detta a mezz'onda se $2l = \lambda/2$. Si mostri che

$$I(z) = I_0 \cos \beta z, \quad |z| \leq \lambda/4.$$

4.5.5 Regioni di Fresnel e di Fraunhofer di un'antenna

Nella caratterizzazione delle antenne è importante conoscere il diagramma di radiazione (vedi § 4.6), cioè l'andamento del campo a grande distanza. Detta r la distanza dall'antenna (generalmente dal punto di alimentazione, nel caso di una sola antenna, dal punto di alimentazione di una delle antenne nel caso di un sistema di antenne; vedi § 4.7), si definisce *grande distanza* quella a cui l'intensità dei campi decresce come $1/r$ e la fase decresce linearmente con r , a meno di quantità che si ritengono trascurabili.

A titolo di esempio, si consideri il sistema di antenne della figura 4.12, composto da tre radiatori elementari, alimentati con correnti equifasi e di ampiezza uguale (le periferiche) e doppia (la centrale). Si consideri il campo prodotto dai radiatori in un punto P sull'asse di simmetria del sistema, a distanza $r \gg \lambda$. Il campo totale in P è proporzionale a

$$\frac{\exp(-j\beta r_1)}{r_1} + \frac{\exp(-j\beta r)}{r}.$$

Lo sviluppo in serie di r_1 fornisce

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = r + \frac{d^2}{8r} + \dots$$

E' necessario fissare un criterio di troncamento della serie precedente. Se è lecito arrestarsi al primo termine, si è per definizione nella zona di Fraunhofer (regione a grande distanza); dovendosi considerare due termini, si è nella *zona di Fresnel*; entrambe le zone sono qui definite nelle vicinanze dell'asse.

Per stabilire il suddetto criterio di troncamento, sostituiamo lo sviluppo in serie nell'espressione del campo. Al denominatore si può porre $r_1 \approx r$, non però all'esponentiale, perché $\beta d^2/8r$ può non essere trascurabile rispetto all'unità. Il campo risulta pertanto proporzionale a

$$\frac{\exp(-j\beta r)}{r} \left[1 + \exp\left(-j \frac{\beta d^2}{8r}\right) \right].$$

La variazione dell'ampiezza del campo con la distanza è data dalla funzione

$$f(r) = \frac{\sqrt{2}}{r} \sqrt{1 + \cos \frac{\beta d^2}{8r}} = \frac{2}{r} \left| \cos \frac{\beta d^2}{16r} \right|.$$

A meno di una costante, il decremento logaritmico del campo è dato da

$$-\ln r + \ln \left| \cos \frac{\beta d^2}{16r} \right|.$$

La variazione della fase è data invece dalla funzione

$$f(r) = -\beta r - \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sin \frac{\beta d^2}{8r}}{1 + \cos \frac{\beta d^2}{8r}} \right) = -\beta r - \frac{\beta d^2}{16r}, \quad \frac{\beta d^2}{16r} \leq \pi.$$

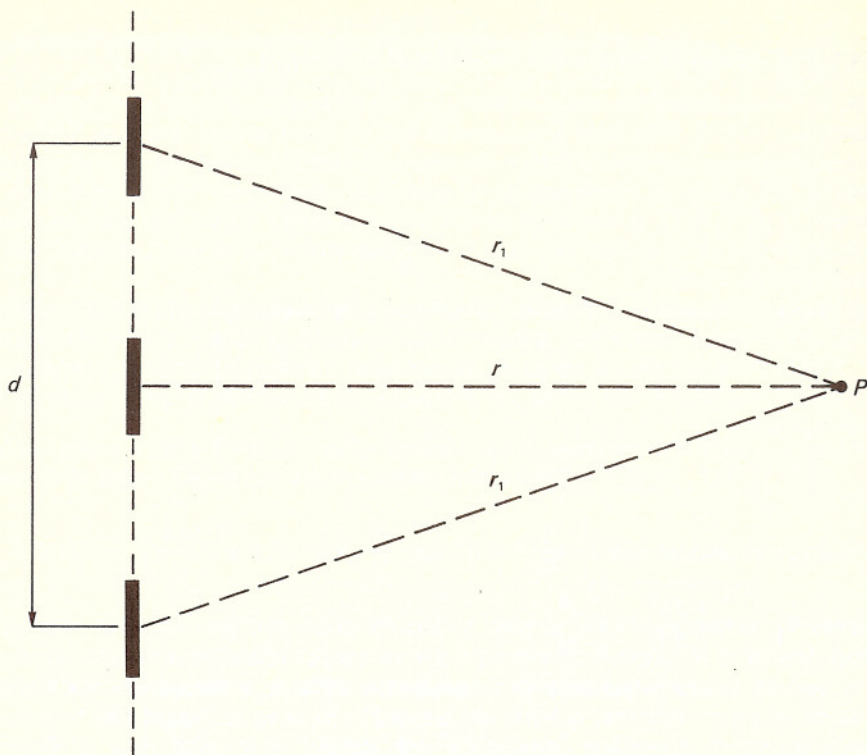


Figura 4.12

Semplice sistema di antenne per la definizione del campo lontano.

Per definire la zona di Fraunhofer occorre fissare un limite superiore per le variazioni di $\ln f(r)$ rispetto a $-\ln r$ e di $f(r)$ rispetto a $-\beta r$. Il criterio generalmente accettato è che sia

$$\frac{\beta d^2}{16r} \leq \frac{\pi}{16}, \quad r \geq \frac{2d^2}{\lambda},$$

con il che lo scostamento di fase non supera 18° e lo scostamento di ampiezza 0,17dB.

L'analisi precedente mostra che, per antenne e sistemi di antenne di dimensioni molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda, la distanza di Fraunhofer può essere tanto grande da rendere difficile la pratica realizzazione della misura del diagramma di radiazione. E' in tali situazioni che tecniche alternative, basate sulla trasformazione "campo vicino-campo lontano" (vedi § 3.7), possono risultare interessanti.

4.5.6 Campo irradiato da un'antenna corta: dominio della frequenza

Si consideri l'antenna corta della figura 4.13, dove è anche rappresentata la distribuzione triangolare di corrente lungo il filo. Poiché

$$r' = r - z \cos \theta, \quad \beta z \cos \theta \ll 1,$$

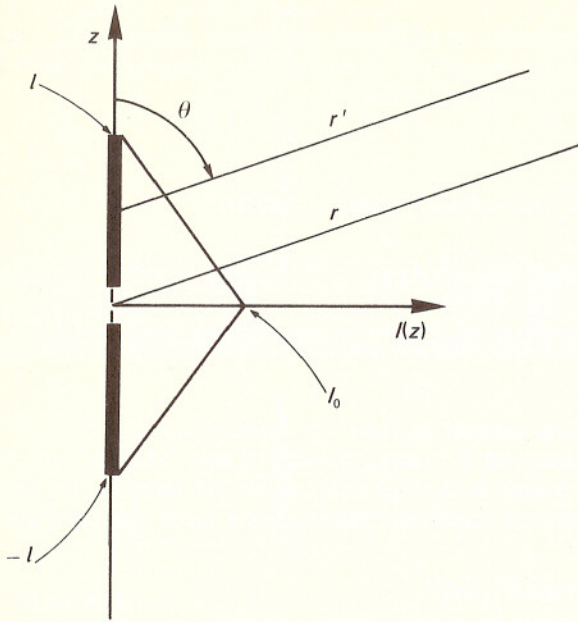


Figura 4.13

i campi elementari prodotti dei singoli elementi dell'antenna si sommano tutti con la stessa fase; pertanto

$$\begin{cases} E_{\theta} = j\zeta \frac{I_0 \exp(-j\beta r)}{2\lambda r} \sin \theta \int_{-l}^l \left(1 - \frac{|z|}{l}\right) dz = j\zeta \frac{I_0 l}{2\lambda r} \sin \theta \exp(-j\beta r) \\ H_{\phi} = \frac{E_{\theta}}{\zeta} \end{cases}$$

Un'antenna corta si comporta quindi come un dipolo elementare di metà lunghezza.

4.5.7 Campo irradiato da un'antenna corta: dominio del tempo

La formula [9] mostra che, in prima approssimazione, i fasori della tensione e della corrente in ingresso a un'antenna corta sono legati dalla relazione

$$I_0 \approx j \frac{2\pi\epsilon l}{\Omega} \omega V_0.$$

Pertanto, l'antenna risponde alla tensione applicata come una capacità

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\Omega}.$$

In base ai risultati del paragrafo 4.4, un'antenna si definisce *corta*, nel dominio del tempo, se la sua lunghezza è molto minore di quella spaziale cT del segnale (di tipo impulso o similare) applicato. In questa ipotesi un'antenna di lunghezza fisica $2l$ equivale a un dipolo elementare di lunghezza l (vedi 4.5.6). Poiché

$$i_0(t) = C v'_0(t), \quad u'(t) = i_0(t) l,$$

dalle [1] (§ 4.4) si ottengono le espressioni del campo irradiato:

$$\begin{cases} e_\theta(t) = \zeta \frac{C v''_0(t^*) l}{4\pi r c} \sin \theta = \zeta \frac{i'_0(t^*) l}{4\pi r c} \sin \theta \\ h_\phi(t) = \frac{e_\theta(t)}{\zeta} \end{cases}$$

Il campo risulta proporzionale alla derivata seconda della tensione applicata.

In maniera analoga può calcolarsi il campo associato a una "piccola" spira di corrente, il cui raggio sia cioè minore della lunghezza spaziale dell'impulso. In questo caso l'antenna risponde alla tensione applicata essenzialmente come una induttanza, e si ha

$$v_0(t) = -L i'_0(t), \quad u_m(t) = \mu \pi R^2 i_0(t)$$

(vedi 4.4.1); di qui, per le [2] (§ 4.4), si ricava

$$\begin{cases} h_\theta(t) = -\frac{v'_0(t)}{4\pi r c} \frac{\pi R^2}{L c} \sin \theta = \frac{i'_0(t)}{4\pi r c} \frac{\pi R^2}{c} \sin \theta \\ e_\phi(t) = -\zeta h_\theta(t). \end{cases}$$

Il campo irradiato risulta pertanto proporzionale alla derivata prima della tensione applicata.

4.5.8 Antenna marconiana

Sia data un'antenna, corta rispetto alla lunghezza d'onda, disposta verticalmente sul suolo (vedi fig. 4.14), e alimentata rispetto a questo. Se il suolo può riguardarsi come perfettamente conduttore, per il teorema delle immagini la lunghezza totale dell'antenna viene raddoppiata ai fini del calcolo del campo al di sopra di essa. L'antenna marconiana si comporta cioè come un dipolo elementare di lunghezza l . Al fine di migliorare la conducibilità del suolo nelle immediate vicinanze dell'antenna, spesso viene disposta sul suolo o in prossimità di esso una raggiera di fili di rame, con centro nell'antenna. Tale antenna, detta *marconiana* dal nome del suo primo utilizzatore, Guglielmo Marconi, è largamente usata nel campo delle basse frequenze.

4.5.9 Antenna a L rovesciata

Consideriamo l'antenna della figura 4.15, dove è anche rappresentata la distribuzione della corrente. Ai fini della irradiazione, il braccio orizzontale della L è inefficace, poiché il relativo campo è in pratica cancellato da quello dell'immagine (per $l \ll \lambda$); tuttavia tale braccio contribuisce positivamente alla distribuzione della cor-

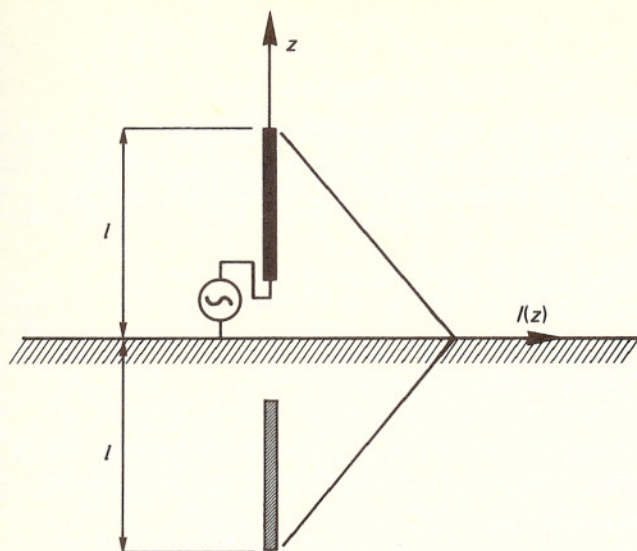


Figura 4.14

rente nel braccio verticale, perché all'estremità di questo essa non deve più annullarsi. Infatti, la distribuzione della corrente nel braccio verticale è data da

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{z}{l+b} \right), \quad 0 \leq z \leq l,$$

sempre che $\beta(l+b) \ll 1$. Tenendo anche conto dell'immagine, l'antenna a L rovesciata

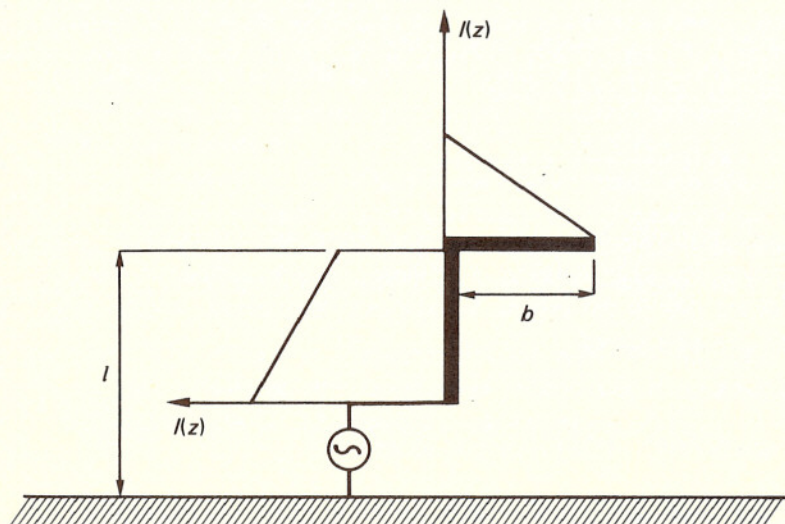


Figura 4.15

equivale a un dipolo elementare di lunghezza

$$l \frac{l+2b}{l+b}.$$

Spesso, al posto di un solo braccio orizzontale in testa all'antenna, si utilizza una raggiera di fili centrata sul conduttore verticale. Si dice allora che l'antenna è *caricata* con capacità terminale; l'effetto della raggiera è infatti equivalente a quello di una capacità posta in testa all'antenna; in tal modo la corrente lungo il braccio verticale può riguardarsi come quasi costante (spazialmente). Ecco una realizzazione pratica di un dipolo elettrico elementare.

4.6 Parametri di un'antenna in trasmissione

Da un punto di vista pratico, per facilitare al progettista del collegamento la scelta dell'antenna, è necessario caratterizzare quest'ultima in modo semplice, per mezzo di parametri possibilmente numerici (al più, di diagrammi).

Un primo parametro caratteristico è il valore del campo (generalmente elettrico) irradiato dall'antenna (a grande distanza da essa):

$$\mathbf{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = \mathbf{E}_\infty(r, \theta, \phi), \quad [1]$$

che per comodità conviene *normalizzare* rispetto a una qualche grandezza; e qui si presentano varie alternative.

Un primo tipo di normalizzazione è conveniente se nell'antenna, o nel sistema di antenne, sono facilmente individuabili dei morsetti ai quali si possa misurare una corrente (o anche una tensione) di riferimento I_0 ; in particolare questo è il caso delle antenne filiformi, dove è naturale assumere come corrente di riferimento quella di alimentazione. Come ulteriore esempio, nel caso di un sistema di antenne filiformi (vedi § 4.7) si può prendere come corrente di riferimento quella di ingresso di una delle antenne. Per definizione, si pone

$$\mathbf{E}_\infty(r, \theta, \phi) = j \zeta \frac{I_0 \mathbf{h}(\theta, \phi)}{2\lambda r} \exp(-j\beta r). \quad [2]$$

La funzione vettoriale $\mathbf{h}(\theta, \phi)$ (dimensionalmente, una lunghezza), che prende il nome di *altezza* (o anche *lunghezza*) *efficace*, descrive completamente il campo irradiato dall'antenna (o dal sistema di antenne). Per il dipolo elementare elettrico di lunghezza Δl risulta quindi

$$\mathbf{h} = \Delta l \sin \theta \mathbf{i}_\theta;$$

per un'antenna filiforme, dalle [2] (§ 4.5) si ricava

$$\mathbf{h} = \sin \theta \mathbf{i}_\theta \int_{-l}^l \frac{I(z)}{I_0} \exp(j\beta z \cos \theta) dz. \quad [3]$$

Un secondo tipo di normalizzazione è quello adottato quando correnti o tensioni non sono facilmente individuabili.⁴ In tal caso si preferisce normalizzare il campo a grande distanza rispetto all'ampiezza di quello irradiato dalla stessa antenna in una direzione (θ_0, ϕ_0) di riferimento (generalmente quella di massimo):

$$E_\infty(\theta, \phi) = f(\theta, \phi) E_\infty(r, \theta_0, \phi_0). \quad [4]$$

Talvolta la normalizzazione viene effettuata rispetto al campo che si avrebbe se tutta la potenza fosse irradiata isotropicamente (vedi la successiva definizione di "diagramma di direttività"). La funzione vettoriale $f(\theta, \phi)$, adimensionale, è detta *vettore di radiazione*.

Altezza efficace e vettore di radiazione sono tra loro proporzionali (vedi 4.6.1) e differiscono solo per una costante (complessa). Ciascuno di essi, ad esempio il vettore di radiazione, può essere riferito a un usuale sistema di coordinate sferiche centrato in un punto opportuno dell'antenna (o del sistema di antenne),

$$\mathbf{f}(\theta, \phi) = f_\theta(\theta, \phi) \mathbf{i}_\theta + f_\phi(\theta, \phi) \mathbf{i}_\phi,$$

o anche a una coppia di vettori ortogonali differenti da $\mathbf{i}_\theta$ e $\mathbf{i}_\phi$ (vedi § 6.1, 6.1.4 e 6.1.5). Il modulo di ogni componente di $\mathbf{f}(\theta, \phi)$ (come anche di $\mathbf{h}$), ad esempio $|f_\theta(\theta, \phi)|$, è rappresentabile in coordinate polari mediante la superficie

$$r = f_\theta(\theta, \phi).$$

In tal modo si individua un volume, detto *solido di radiazione*, che consente di avere una rappresentazione grafica immediata delle caratteristiche radiative dell'antenna (vedi fig. 4.16); il solido si presenta diviso in regioni, ciascuna delle quali prende il nome di *lobo di radiazione*.⁵

La rappresentazione grafica del solido di radiazione può essere data in assonometria (un esempio è fornito nella fig. 4.17), o mediante più sezioni $\phi = \text{cost.}$ (o $\theta = \text{cost.}$); un esempio di sezione è riportato nella figura 4.18. Queste sezioni prendono il nome di *diagrammi di radiazione*.

Il vettore di radiazione o l'altezza efficace descrivono l'andamento angolare del campo irradiato normalizzato rispetto a un valore di riferimento. Si noti che ciascuna loro componente è un fasore. Pertanto essi descrivono totalmente il campo irradiato, fornendone (a meno del riferimento di normalizzazione) ampiezza, fase e polarizzazione.

In molte applicazioni queste informazioni non sono tutte necessarie, bastando la conoscenza del modulo del vettore del campo. Si definisce allora il *solido*, o *diagramma di direttività* (a rigore, il diagramma è una sezione del solido):

⁴ Come generalmente accade nel campo delle antenne a microonde, ad esempio quelle ad apertura (vedi § 3.5).

⁵ Una rappresentazione simile può essere data anche per la fase di $f_\theta(\theta, \phi)$.

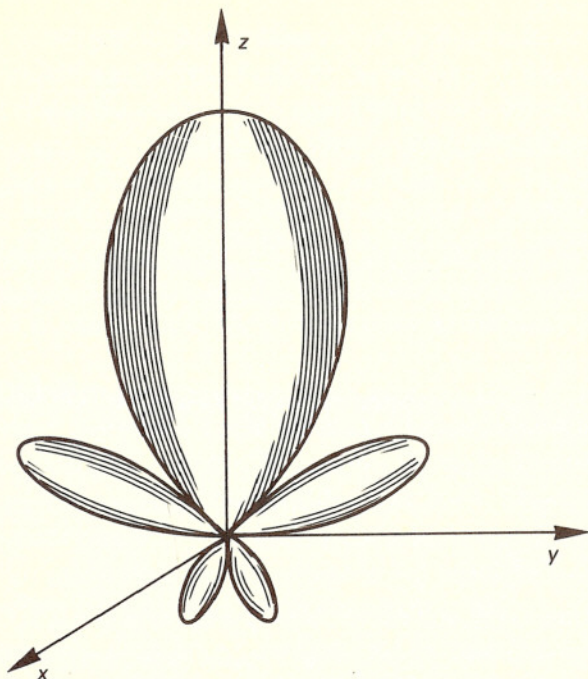


Figura 4.16
Esempio di solido di radiazione.

$$\begin{aligned}
 D(\theta, \phi) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2 4\pi r^2}{\iint_{S_0} |E(r, \theta, \phi)|^2 dS_0} = \frac{|f(\theta, \phi)|^2 4\pi}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta} = \\
 &= \frac{|h(\theta, \phi)|^2 4\pi}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |h(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta}, \quad [5]
 \end{aligned}$$

dove S_0 è la superficie sferica ($r \rightarrow \infty$) che contiene l'antenna (o il sistema di antenne). Nella [4] il denominatore, moltiplicato per $1/2\zeta$, corrisponde alla potenza totale irradiata. Il numeratore, moltiplicato per $1/2\zeta$, rappresenta la potenza che sarebbe irradiata se l'irraggiamento avvenisse isotropicamente in tutto lo spazio con intensità $|E(\theta, \phi)|^2/2\zeta$. In particolare, il valore che $D(\theta, \phi)$ assume nella direzione di massimo irraggiamento (θ_M, ϕ_M),

$$D(\theta_M, \phi_M) = D_M, \quad [6]$$

viene detto *direttività* dell'antenna. La direttività è un numero maggiore dell'unità (non esistendo antenne isotrope, per le quali $D = D_M = 1$) e permette l'immediato

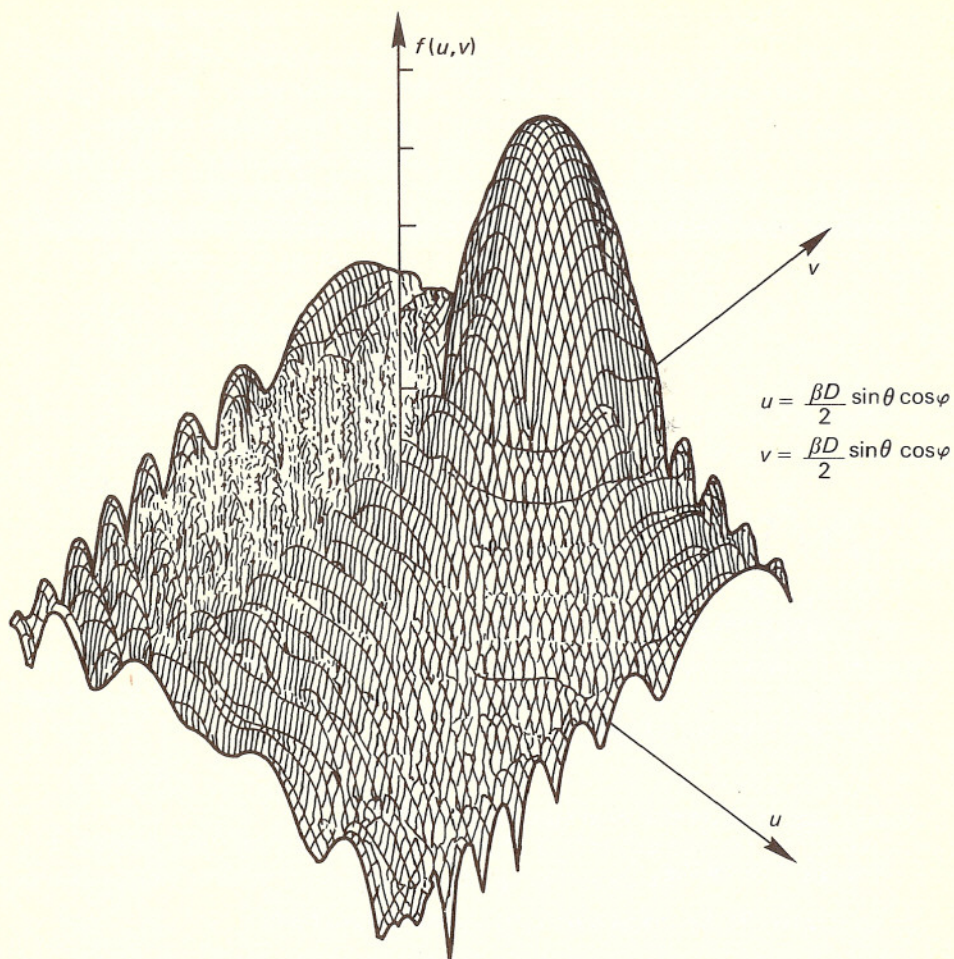


Figura 4.17

Rappresentazione assonometrica di un solido di radiazione (D è il diametro di bocca dell'antenna).

calcolo della densità di potenza irradiata S nella direzione (θ_M, ϕ_M) quando sia nota la potenza totale irradiata:

$$P_{irr} = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{S_0} \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{2\zeta} dS_0.$$

Si ha infatti

$$S(\theta_M, \phi_M) = S_M = \frac{D_M P_{irr}}{4\pi r^2},$$

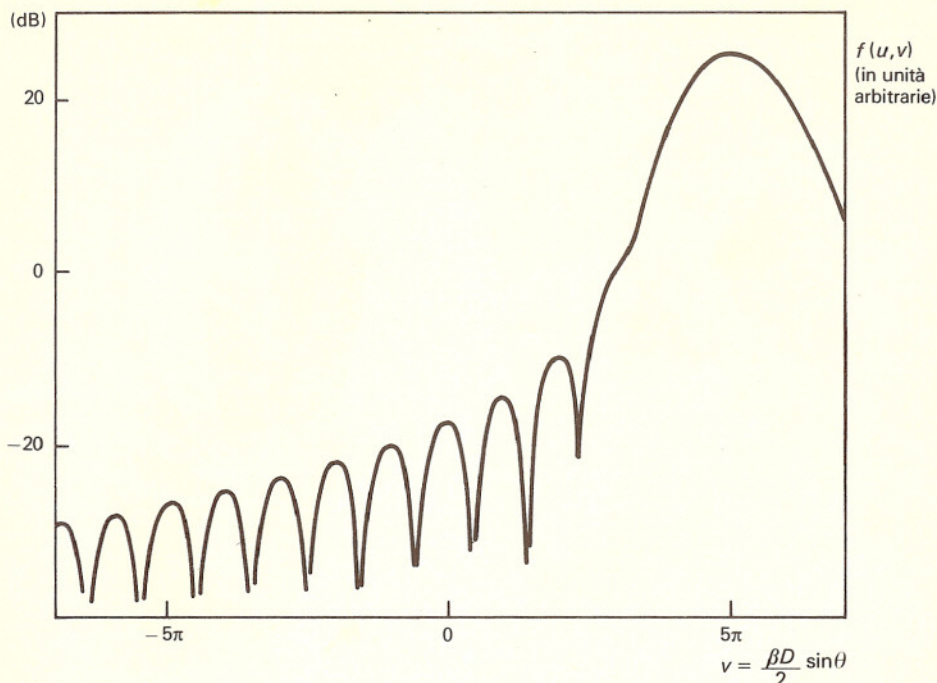


Figura 4.18
Diagramma di radiazione nel piano $u=0$.

In certi casi, la direttività viene espressa in decibel:

$$D_{M(\text{dB})} = 10 \log D_M.$$

In alternativa alla direttività si considera talvolta il *guadagno*:

$$G = D \frac{P_{irr}}{P_T} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2 4\pi r^2 / 2\zeta}{P_T}, \quad [7]$$

dove P_T è la potenza reale consegnata dal generatore ai morsetti dell'antenna. Se questa non ha perdite, $P_{irr} = P_T$, e direttività e guadagno coincidono; in caso contrario, $G < D$. In generale,

$$G \leq D.$$

Anche il guadagno viene talvolta espresso in decibel.

Un altro importante parametro per le antenne per le quali tensione e corrente d'ingresso sono misurabili o definibili (vedi anche § 5.1), in particolare quelle filiformi, è l'*impedenza d'ingresso*, definita come rapporto tra i fasori della tensione e della corrente ai morsetti di alimentazione:

$$Z_i = R_i + jX_i = \frac{V_0}{I_0}. \quad [8]$$

L'impedenza d'ingresso descrive le caratteristiche circuitali dell'antenna: se questa è sostituita da una impedenza Z_i , il generatore continua a erogare la stessa potenza attiva e reattiva. Si noti tuttavia che l'impedenza Z_i non possiede tutte le proprietà delle usuali impedenze dei circuiti a costanti concentrate; ad esempio, non è in generale rappresentata da un rapporto di polinomi.

La *resistenza d'ingresso* è facilmente calcolabile se l'antenna e il mezzo esterno non hanno perdite. Infatti in tale circostanza la potenza (attiva) consegnata ai morsetti deve totalmente ritrovarsi come potenza irradiata, e pertanto

$$\frac{1}{2} R_i |I_0|^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{S_0} \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{2\zeta} dS_0 = P_{irr}, \quad [9]$$

il che permette il calcolo della resistenza d'ingresso. Per tale motivo R_i è anche detta *resistenza di radiazione*, ed è indicata con R_{irr} . Esiste una relazione che lega resistenza di radiazione e direttività:

$$R_{irr} D_M = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|E(r, \theta_M, \phi_M)|^2 4\pi r^2}{\zeta |I_0|^2} = \pi \zeta \frac{|h(\theta_M, \phi_M)|^2}{\lambda^2}. \quad [10]$$

Se invece l'antenna ha perdite, si deve distinguere tra resistenza di radiazione R_{irr} , data dalla [9], e resistenza d'ingresso R_i , data dalla parte reale della [8]. In questo caso la relazione [10] si trasforma nella seguente:

$$R_i G = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|E(r, \theta_M, \phi_M)|^2 4\pi r^2}{\zeta |I_0|^2}.$$

Il calcolo della reattanza d'ingresso (vedi 4.6.16) richiede che venga completamente risolto il problema di valori al contorno dell'antenna.

Annotazioni

4.6.1 Relazione tra altezza efficace e vettore di radiazione

Come si è già notato, si considera il vettore di radiazione quando è più agevole misurare, anziché le correnti o le tensioni di alimentazione, le potenze, in particolare quelle attive:

$$P_{irr} = \frac{4\pi r^2 |E_\infty(\theta_M, \phi_M)|^2 / 2\zeta}{D_M}. \quad [11]$$

Tra $f(\theta, \phi)$ e $h(\theta, \phi)$ esiste comunque una semplice relazione, facilmente ottenibile uguagliando le due diverse espressioni dei moduli dei campi a grande distanza:

$$|E_\infty(\theta, \phi)|^2 = |E_\infty(\theta_M, \phi_M)|^2 |f(\theta, \phi)|^2 = \zeta^2 \frac{|I_0|^2 |h(\theta, \phi)|^2}{4\lambda^2 r^2}.$$

Sostituendo l'espressione di $|E_\infty(\theta_M, \phi_M)|$ ricavata dalla [11] e tenendo conto del-

l'espressione della resistenza d'ingresso dell'antenna, si ha

$$|\mathbf{h}(\theta, \phi)| = \lambda \sqrt{\frac{R_i D_M}{\pi \zeta}} |f(\theta, \phi)| \quad [12]$$

che è la relazione cercata. I due vettori $\mathbf{h}$ e $\mathbf{f}$ hanno ugual direzione e verso; a meno di una fase (il cui valore è però indipendente da θ e ϕ) la [12] determina quindi l'uno in funzione dell'altro.

4.6.2 Altezza efficace di un'antenna corta (esercizio)

Si mostri che per un'antenna corta di lunghezza $2l$ l'altezza efficace è

$$h = l \sin \theta \, i_\theta.$$

4.6.3 Altezza efficace di un'antenna a mezz'onda, per $\theta = \pi/2$ (esercizio)

Si mostri che il valore dell'altezza di un'antenna a mezz'onda è λ/π nella direzione $\theta = \pi/2$, cioè $2/\pi$ volte la lunghezza fisica dell'antenna.

4.6.4 Altezza efficace di un'antenna verticale in presenza del suolo

Sia data un'antenna verticale, di altezza efficace h , in presenza di un suolo che si suppone perfettamente conduttore (vedi fig. 4.19).

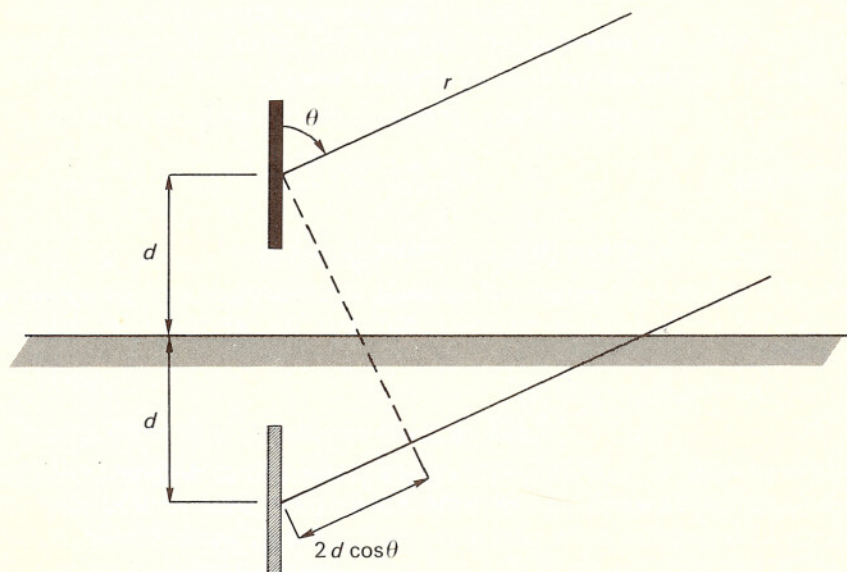


Figura 4.19

Il campo totale irradiato, tenendo conto dell'antenna immagine, è dato da

$$E_{\theta} = j\zeta \frac{Ih}{2\lambda r} \exp(-j\beta r) [1 + \exp(-j2\beta d \cos \theta)];$$

di conseguenza, l'antenna presenta un'altezza efficace data da

$$h_e = 2h \cos(\beta d \cos \theta) \exp(-j\beta d \cos \theta)$$

quando l'origine del riferimento coincide con il punto di alimentazione dell'antenna.

4.6.5 Altezza efficace di un'antenna orizzontale in presenza del suolo (esercizio)

Si mostri che l'altezza efficace di un'antenna orizzontale in presenza del suolo è data da

$$h_e = 2jh \sin(\beta d \sin \theta) \exp(-j\beta d \sin \theta),$$

dove θ è l'angolo di osservazione misurato rispetto al piano orizzontale.

4.6.6 Altezza efficace di una spira

Si è dimostrato (in 4.3.4) che una spira elementare di corrente, giacente nel piano $z=0$, equivale a un dipolo magnetico orientato secondo z , di momento $U_m = \mu A I$, dove $A = \pi R^2$ è l'area della spira e I il fasore della corrente nella spira. Questo risultato è ancora valido per spire fisicamente realizzabili, purché piccole rispetto alla lunghezza d'onda. Se la spira è realizzata mediante N avvolgimenti (sempre sotto l'ipotesi che $2N\pi R \ll \lambda$), il campo irradiato è dato da

$$\begin{cases} H_{\theta} = -\frac{IN\beta A}{2\lambda r} \sin \theta \exp(-j\beta r) \\ E_{\phi} = -\zeta H_{\theta}. \end{cases}$$

Per le antenne di tipo elettrico l'altezza efficace è definita con riferimento al campo elettrico irradiato. Per la spira, antenna certamente di tipo magnetico, l'altezza efficace può essere riferita al campo magnetico irradiato:

$$h_m = N\beta A \sin \theta i_{\theta};$$

nulla vieta tuttavia di riferire l'altezza efficace al campo elettrico, ponendo

$$E_{\phi} = j\zeta \frac{Ih}{2\lambda r} \exp(-j\beta r).$$

Tale definizione è più comoda, perché permette un paragone più semplice tra antenne di tipo elettrico e magnetico; e si ha, per la spira elementare,

$$h = -jN\beta A \sin \theta i_{\phi}.$$

A parità di corrente I , un'antenna elettrica corta, di lunghezza l , e una spira irradiano campi proporzionali a $l/2$ e $2N\pi^2 R^2/\lambda$. Una piccola spira irradia dunque molto meno di un'antenna corta di dimensioni $l \approx R$, a parità di corrente. D'altra parte, una spira può essere sintonizzata mediante una capacità, mentre il sintonizzare l'antenna elettrica richiede l'uso di un'induttanza le cui perdite limitano l'intensità di corrente. La corrente iniettabile in una spira è certamente maggiore di quella che si può far circolare in un filo corto.

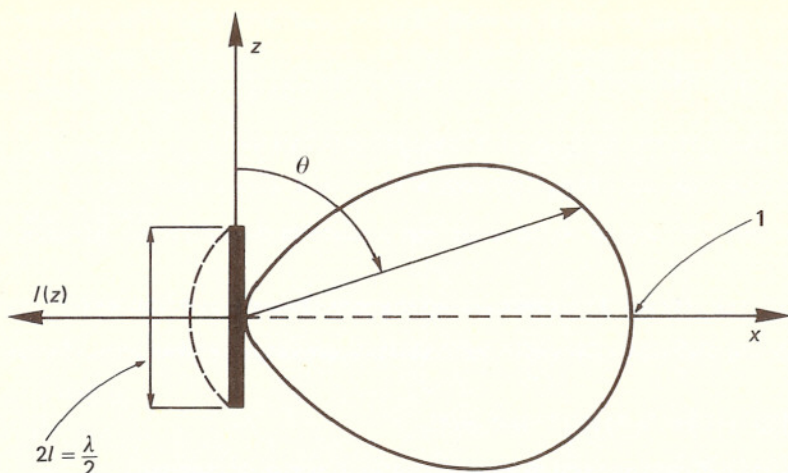


Figura 4.20

4.6.7 Vettore di radiazione di un'antenna a mezz'onda (esercizio)

Si consideri un'antenna di lunghezza $2l = \lambda/2$, alimentata nel centro, con una distribuzione di corrente (vedi 4.5.4)

$$I(z) = I_0 \cos \beta z.$$

Si mostri che il vettore di radiazione è dato da

$$\mathbf{f}(\theta, \phi) = f_\theta(\theta) \mathbf{i}_\theta,$$

con

$$f_\theta(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}.$$

L'intersezione del solido di radiazione con il semipiano $\phi = 0$ (vedi anche 4.6.11) è rappresentata nella figura 4.20; essa è indipendente da ϕ .

4.6.8 Vettore di radiazione di un'antenna filiforme (esercizio)

Utilizzando la formula

$$\int \exp(a\xi) \sin(b\xi + c) d\xi = \frac{\exp(a\xi)}{a^2 + b^2} [a \sin(b\xi + c) - b \cos(b\xi + c)]$$

si mostri che il vettore di radiazione di un'antenna filiforme con distribuzione sinusoidale di corrente (vedi § 4.5, equazione [8]), ha un'unica componente secondo θ , data da

$$f_\theta(\theta) = \frac{\cos(\beta l \cos \theta) - \cos \beta l}{(1 - \cos \beta l) \sin \theta},$$

dove la normalizzazione è rispetto al campo nella direzione $\theta = \pi/2$, e $\beta l \neq 2n\pi$. E'

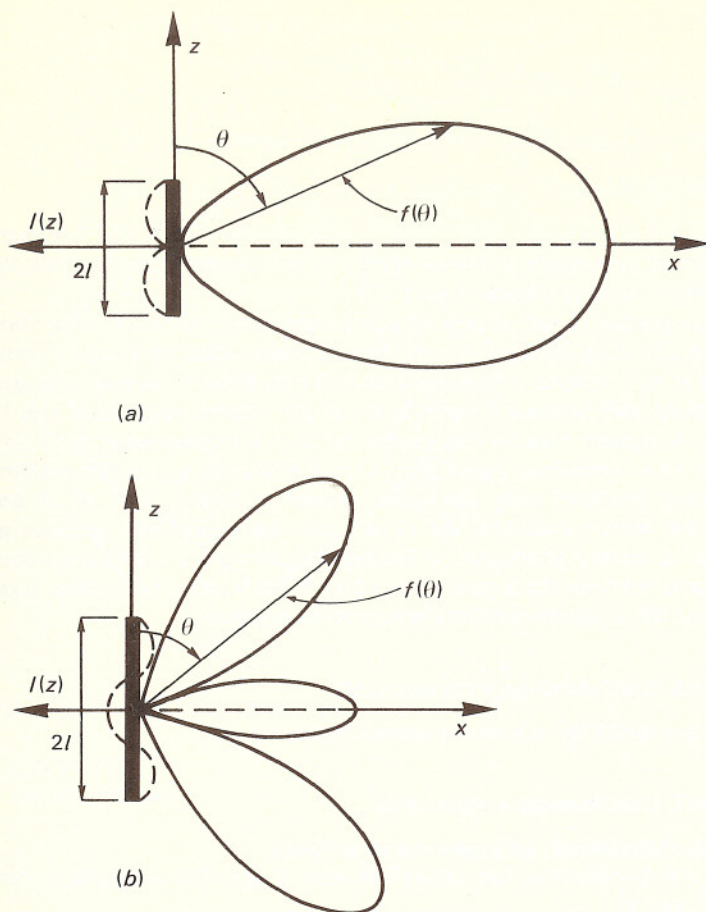


Figura 4.21

Diagramma di radiazione nel semipiano $\phi=0$: (a) per un'antenna di lunghezza λ ; (b) per un'antenna $3\lambda/2$.

poi necessario supporre che l'alimentazione dell'antenna non abbia luogo necessariamente nel centro dell'antenna, in modo da evitare che la corrente di ingresso sia nulla (vedi fig. 4.21 a). I diagrammi di radiazione nel semipiano $\phi=0$ sono rappresentati, per due antenne, nella figura 4.21.

Si noti che, all'aumentare della lunghezza dell'antenna, aumenta il numero di lobi del diagramma di radiazione, e il massimo di radiazione non è più nella direzione $\theta=\pi/2$.

4.6.9 Campo irradiato da un'antenna a onda progressiva

Sia dato un filo percorso da corrente, di lunghezza $2l$, lungo il quale la corrente abbia un andamento del tipo

$$I(z) = I_0 \exp(-j\beta z), \quad -l \leq z \leq l.$$

Il campo irradiato da tale antenna è facilmente calcolabile e risulta pari a

$$E_{\theta} = j\zeta \frac{I_0}{2\pi r} \exp(-j\beta r) \sin\theta \frac{\sin[\beta l(1 - \cos\theta)]}{1 - \cos\theta}.$$

I massimi del vettore di radiazione sono approssimativamente dati da

$$\beta l(1 - \cos\theta) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

dove il massimo valore di n è tale che $2\beta l \geq (2n + 1)\pi/2$ affinché $|\cos\theta| \leq 1$. Il numero dei massimi aumenta all'aumentare del rapporto l/λ , e il massimo assoluto (vedi fig. 4.22) è quello corrispondente al minimo valore di θ .

Una realizzazione pratica di un'antenna a onda progressiva è la cosiddetta *antenna rombica* (vedi fig. 4.23). Essa consiste in una linea di trasmissione divaricata a forma di rombo, adattata al suo estremo a destra in modo che sia presente la sola onda progressiva. La dimensione dell'antenna è scelta in modo che i campi associati ai lobi 1 e 2 (nonché 3' e 4') di ciascun braccio si sommino in fase, e i campi associati ai lobi 3 e 2' (nonché 1' e 4) si cancellino l'un l'altro. Come risultato, si ha una radiazione fortemente anisotropa (*endfire*) nella direzione comune ai lobi 1, 2, 3', 4'. Si noti il verso dei vettori del campo irradiato, che tiene conto del segno della corrente sui bracci dell'antenna. A questo proposito, si immagini di ruotare il conduttore con i lobi 2' e 4' in modo da sovrapporlo a quello con i lobi 2 e 4: a causa del diverso segno della corrente sui due fili, i rispettivi vettori hanno verso opposto.

4.6.10 Direttività di un'antenna corta (esercizio)

Si mostri che la direttività di un'antenna corta è pari a $3/2$.

4.6.11 Direttività di un'antenna a mezz'onda

Dato il vettore di radiazione di un'antenna a mezz'onda,

$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} i_{\theta},$$

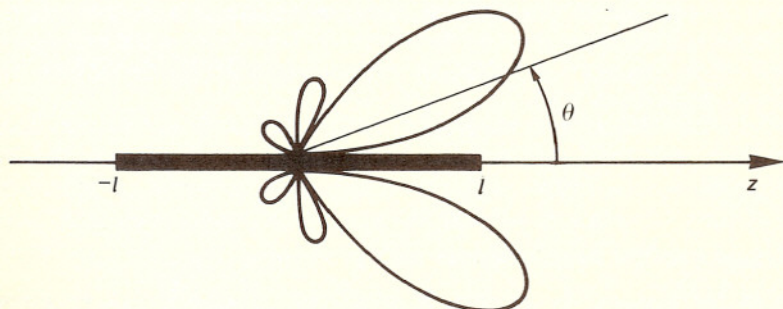


Figura 4.22
Antenna a onda progressiva.

Il campo irradiato da tale antenna è facilmente calcolabile e risulta pari a

$$E_{\theta} = j\zeta \frac{I_0}{2\pi r} \exp(-j\beta r) \sin\theta \frac{\sin[\beta l(1 - \cos\theta)]}{1 - \cos\theta}.$$

I massimi del vettore di radiazione sono approssimativamente dati da

$$\beta l(1 - \cos\theta) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

dove il massimo valore di n è tale che $2\beta l \geq (2n + 1)\pi/2$ affinché $|\cos\theta| \leq 1$. Il numero dei massimi aumenta all'aumentare del rapporto l/λ , e il massimo assoluto (vedi fig. 4.22) è quello corrispondente al minimo valore di θ .

Una realizzazione pratica di un'antenna a onda progressiva è la cosiddetta *antenna rombica* (vedi fig. 4.23). Essa consiste in una linea di trasmissione divaricata a forma di rombo, adattata al suo estremo a destra in modo che sia presente la sola onda progressiva. La dimensione dell'antenna è scelta in modo che i campi associati ai lobi 1 e 2 (nonché 3' e 4') di ciascun braccio si sommino in fase, e i campi associati ai lobi 3 e 2' (nonché 1' e 4) si cancellino l'un l'altro. Come risultato, si ha una radiazione fortemente anisotropa (*endfire*) nella direzione comune ai lobi 1, 2, 3', 4'. Si noti il verso dei vettori del campo irradiato, che tiene conto del segno della corrente sui bracci dell'antenna. A questo proposito, si immagini di ruotare il conduttore con i lobi 2' e 4' in modo da sovrapporlo a quello con i lobi 2 e 4: a causa del diverso segno della corrente sui due fili, i rispettivi vettori hanno verso opposto.

4.6.10 Direttività di un'antenna corta (esercizio)

Si mostri che la direttività di un'antenna corta è pari a $3/2$.

4.6.11 Direttività di un'antenna a mezz'onda

Dato il vettore di radiazione di un'antenna a mezz'onda,

$$f(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} i_{\theta},$$

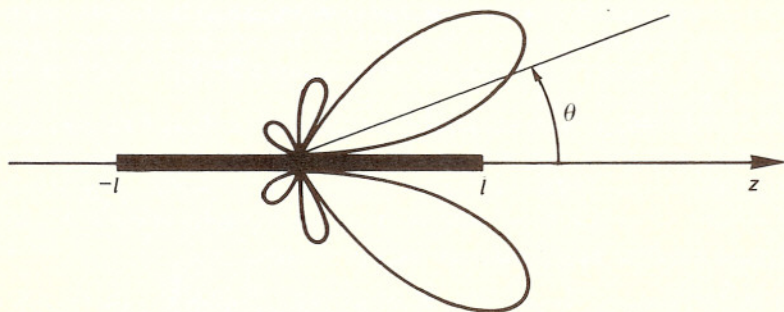


Figura 4.22
Antenna a onda progressiva.

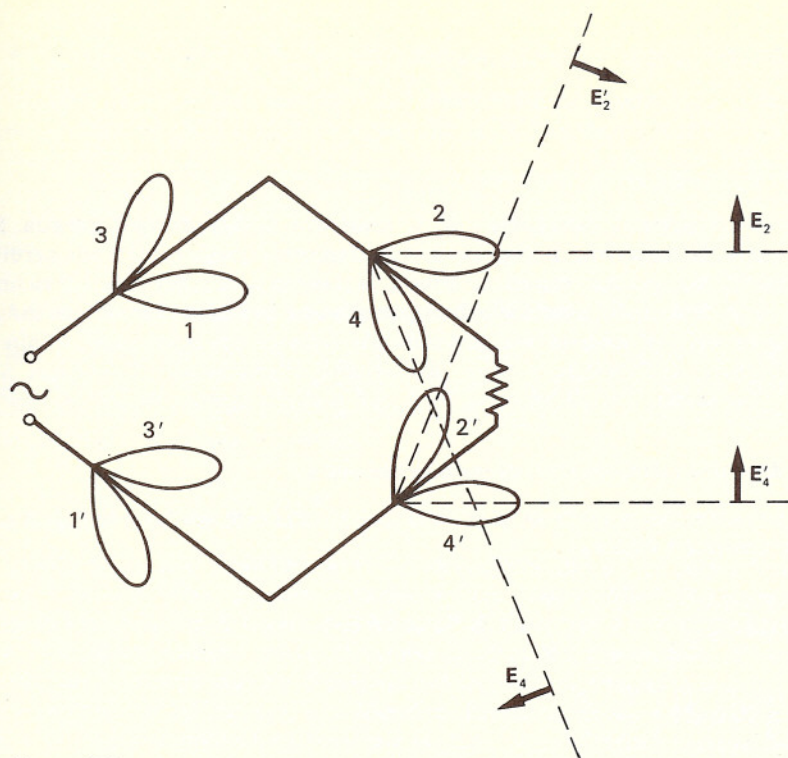


Figura 4.23
Antenna rombica.

ricerchiamone lo sviluppo in serie di Fourier nell'intervallo $(0, \pi)$:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin[(2n+1)\theta].$$

Per il primo coefficiente si ha

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) d\theta = 2J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0,945.$$

In prima approssimazione, e ai fini del calcolo della potenza irradiata,

$$f(\theta) \approx 0,945 \sin \theta,$$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta |f(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} (0,945)^2;$$

sostituendo l'espressione precedente nelle [5] e [6] si ottiene (King, 1941):

$$D_M = \frac{1,5}{(0,945)^2} \approx 1,63.$$

4.6.12 Guadagno di un'antenna corta (elettrica)

Il guadagno di un'antenna corta è dato da

$$G = \frac{3}{2} \frac{P_{irr}}{P_r} \approx \frac{3}{2} \frac{R_{irr}}{R_i},$$

dove R_{irr} è la resistenza di radiazione e R_i la resistenza di ingresso dell'antenna. Se l'antenna è corta, la resistenza di ingresso è essenzialmente quella dovuta alle perdite ohmiche lungo il filo, poiché, rispetto a questa, la resistenza di radiazione è trascurabile. Spesso si include nella resistenza di ingresso anche quella dell'induttore usualmente posto in serie all'antenna per sintonizzarla (questo corrisponde a definire i morsetti di ingresso dell'antenna a monte del circuito di adattamento). Ne segue che il guadagno può essere, per un'antenna corta, un numero molto minore dell'unità.

4.6.13 Resistenza di radiazione di un'antenna corta

Si consideri un'antenna corta di lunghezza $2l$ e altezza efficace $h = l \sin \theta_{i0}$; la potenza totale irradiata è data da

$$\begin{aligned} P_{irr} &= \frac{1}{2} \int \frac{|I_0|^2 l^2}{4\lambda^2 r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^2 \theta \, r^2 \sin \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \int |I_0|^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Posto

$$P_{irr} = \frac{1}{2} R_{irr} |I_0|^2,$$

e risolvendo per la resistenza di irradiazione, si ha

$$R_{irr} = \frac{2\pi}{3} \int \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2,$$

all'incirca uguale (in ohm) a $800 (l/\lambda)^2$.

4.6.14 Resistenza d'ingresso di un'antenna corta in presenza del suolo

Si consideri l'antenna corta della figura 4.24, posta verticalmente su un suolo supposto perfettamente conduttore. Per la presenza dell'immagine dell'antenna, in ogni punto dello spazio al di sopra del suolo l'intensità del campo raddoppia, la densità di potenza quadruplica. Nel calcolo della potenza totale irradiata l'integrazione del flusso di potenza va però estesa solo alla semisfera al di sopra del suolo. In definitiva, la potenza totale irradiata è doppia rispetto a quella di un'antenna corta, di lunghezza $2l$, nello spazio libero. La conclusione è che raddoppia la resistenza di radiazione:

$$R_{irr} = \frac{4\pi}{3} \int \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \approx 1600 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2,$$

dove l'ultima espressione è un valore misurato in ohm.

4.6.15 Resistenza di radiazione di una antenna a metà onda (esercizio)

Utilizzando i risultati visti in 4.6.3 e la relazione [10] tra resistenza di radiazione e direttività, si mostri che la resistenza di radiazione di un'antenna a metà onda è data (in ohm) da

$$R_{irr} \approx \frac{\xi/\pi}{1,63} \approx 73,6.$$

4.6.16 Impedenza d'ingresso di un'antenna filiforme

Secondo l'espressione [8], l'impedenza d'ingresso di un'antenna è il rapporto tra i fasori della tensione e della corrente di ingresso ai morsetti di alimentazione. Se si assume come distribuzione per la corrente la [8] (§ 4.5), cioè la prima iterazione della equazione di Hallén, si ottiene

$$Z_i = \frac{V(0)}{I(0)} = -j\zeta \frac{\Omega}{2\pi} \operatorname{ctg} \beta l.$$

Questa formula è insoddisfacente per due diversi motivi. In primo luogo, l'impedenza è tutta reattiva, mentre certamente deve esistere una componente reale che tenga conto della irradiazione dell'antenna. Inoltre, per $\beta l = n\pi$ (lunghezza dell'antenna pari a un numero intero di lunghezze d'onda), l'impedenza diventa infinita. Quanto sopra mostra che per il calcolo dell'impedenza d'ingresso la prima iterazione dell'equazione di Hallén non è sufficiente. Risultati più soddisfacenti si ottengono con una migliore approssimazione per la distribuzione della corrente sull'antenna, applicando ad esempio il *metodo di King-Middleton*; nella figura 4.25 è riportato il calcolo della impedenza d'ingresso di un'antenna filiforme effettuato per mezzo di detta teoria (King e Middleton, 1946). L'antenna si comporta quindi come un circuito risonante, caratterizzato da successivi nulli della reattanza al crescere della frequenza. Il primo nullo si ha per $\beta l \approx 1,5$, cioè per $2l \approx \lambda/2$, ed è caratterizzato da un valore relativamente basso della resistenza di ingresso. Il secondo nullo, per $\beta l \approx 2,9$, cioè per $2l$ non troppo diverso da λ , è invece caratterizzato da un alto valore della resistenza di ingresso.

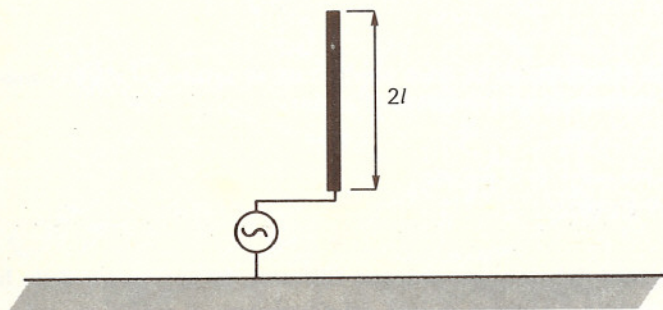


Figura 4.24

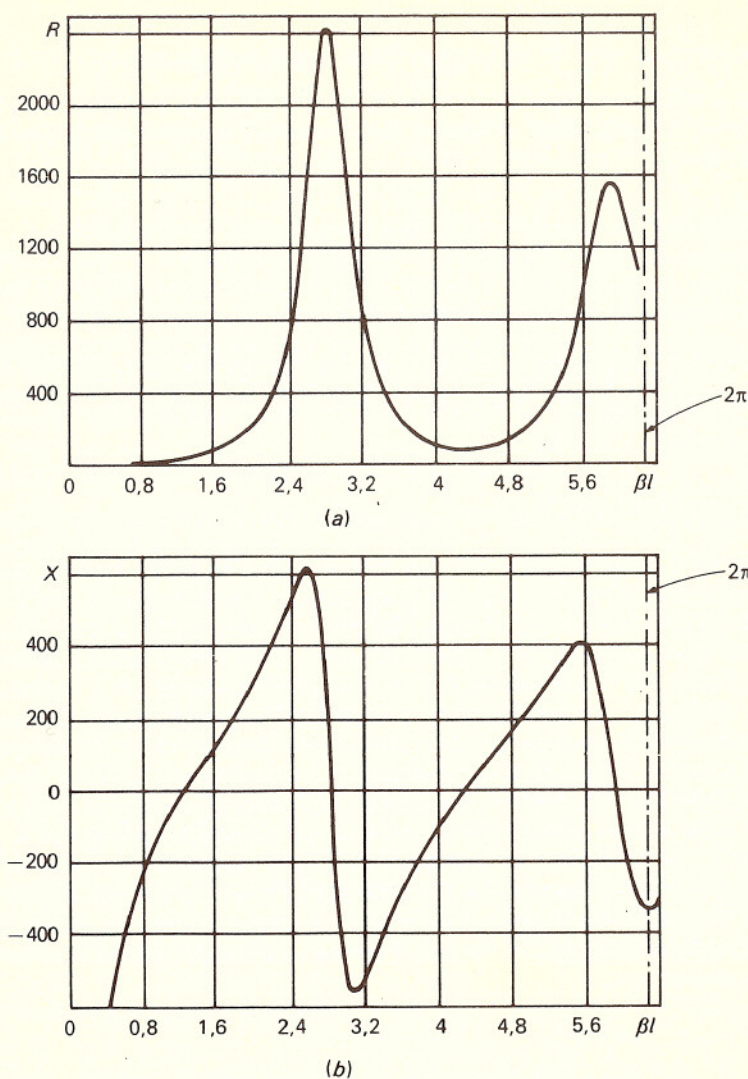


Figura 4.25

Impedenza di ingresso di un'antenna filiforme (coefficiente di snellezza = 10): (a) resistenza di ingresso; (b) reattanza di ingresso (misurate in ohm).

4.7 Allineamenti di antenne

Si è visto nel paragrafo 4.6 che, per antenne filiformi, all'aumentare della lunghezza dell'antenna aumenta il numero di lobi del diagramma di radiazione e il massimo si sposta rispetto alla direzione $\theta = \pi/2$. Risulta così difficile ottenere diagrammi di radiazione caratterizzati da alta direttività, massimo in direzione prefissata e bassi

lobi laterali. La difficoltà può essere superata utilizzando più antenne (*allineamento di antenne*, o *array*) opportunamente spaziate tra loro e percorse ciascuna da una corrente di determinata intensità. Per una realizzazione più efficace delle caratteristiche radiative del sistema di antenne si possono utilizzare, e in effetti si utilizzano, allineamenti di antenne non filiformi (ad esempio, allineamenti di aperture).

Consideriamo l'allineamento rappresentato nella figura 4.26, dove il tipo della singola antenna non è specificato se non per il punto di alimentazione $\mathbf{r}_n$ rispetto al quale è definita l'altezza efficace $\mathbf{h}_n(\theta, \phi)$ dell'antenna stessa. L'antenna n -esima sia alimentata dalla corrente di fasore I_n . Il campo elettrico da essa irradiato, a grande distanza, è dato da

$$K I_n \exp(j\beta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{i}_r) \mathbf{h}_n(\theta, \phi), \quad [1]$$

dove

$$K = j\zeta \frac{\exp(-j\beta r)}{2\lambda r}.$$

L'altezza efficace $\mathbf{h}_n$, in questo contesto, è spesso chiamata *fattore di antenna*; essa descrive le caratteristiche radiative dell'antenna in presenza di tutte le altre. Molto spesso, tuttavia, si suppone che le altre antenne non modifichino sostanzialmente il diagramma di irradiazione dell'antenna considerata, e pertanto $\mathbf{h}_n(\theta, \phi)$ coincide con la funzione che si avrebbe nel caso di un'antenna isolata.

Se le antenne dell'allineamento sono N , il campo elettrico totale irradiato è dato da

$$K \sum_{n=1}^N I_n \mathbf{h}_n(\theta, \phi) \exp(j\beta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{i}_r). \quad [2]$$

Inoltre, se le antenne sono tutte uguali e di caratteristiche radiative caratterizzabili

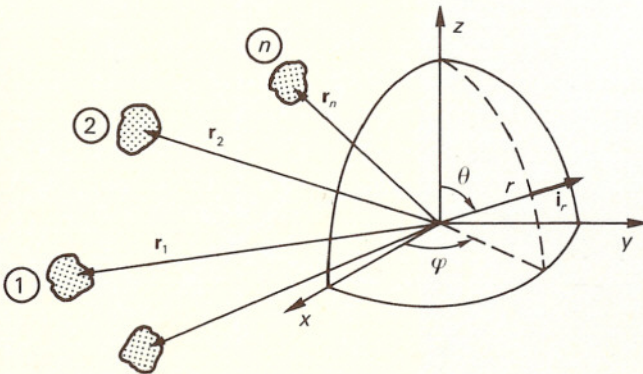


Figura 4.26
Allineamento di antenne.

mediante un'unica funzione $h(\theta, \phi)$, la [2] si trasforma nella seguente espressione:

$$K h(\theta, \phi) \sum_1^N I_n \exp(j\beta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{i}_r) = K h(\theta, \phi) I_0 \sum_1^N a_n \exp(j\beta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{i}_r), \quad [3]$$

dove I_0 è il fasore di un'opportuna corrente di riferimento e a_n è il fasore della corrente di alimentazione dell'antenna n , normalizzato rispetto a I_0 . La grandezza (complessa)

$$F(\theta, \phi) = \sum_1^N a_n \exp(j\beta \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{i}_n) \quad [4]$$

è detta *fattore di allineamento* (*array factor*). Le caratteristiche radiative di un allineamento di antenne di identiche caratteristiche radianti sono quindi descritte dal prodotto del fattore di antenna $h(\theta, \phi)$ e del fattore di allineamento $F(\theta, \phi)$.

Consideriamo ora un allineamento unidimensionale, rappresentato in sezione nella figura 4.27. In questo caso il fattore di allineamento [4] nel piano $\theta = \pi/2$ si esprime

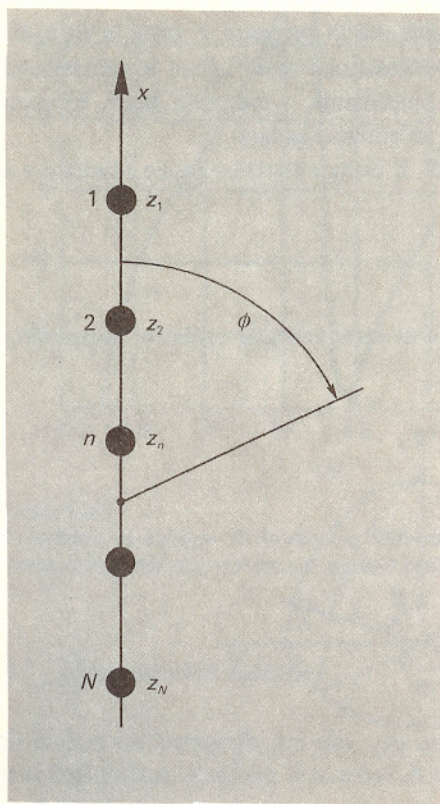


Figura 4.27
Allineamento unidimensionale di antenne.

più semplicemente come

$$F(\phi) = \sum_{n=1}^N a_n \exp(j\beta x_n \cos \phi).$$

L'allineamento è detto *broadside* se si ha il massimo di irradiazione per $\phi = \pi/2$; per questo basta che le a_n abbiano tutte la stessa fase, ad esempio siano reali. Si ha però lo stesso massimo per $\phi = -\pi/2$ (vedi fig. 4.28a).

L'allineamento è detto *endfire* se il massimo di irradiazione si ha per $\phi = 0$, il che accade quando la fase di a_n è uguale a $-\beta x_n$; in questo caso non si ha in generale un massimo per $\phi = \pi$ (vedi fig. 4.28b).

L'allineamento è detto *uniforme* se la spaziatura tra le varie antenne componenti è la stessa. Se le antenne sono N , l'origine è posta in corrispondenza dell'antenna $n=0$ e d è la distanza tra le antenne, si ha

$$F(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \exp(jn\beta d \cos \phi). \quad [5]$$

L'allineamento è *non uniforme* se le distanze tra le varie antenne componenti sono diverse. Per tale allineamento le eccitazioni sono generalmente uguali ($a_n = 1$) e si ha

$$F(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp(j\beta x_n \cos \phi). \quad [6]$$

L'allineamento uniforme è detto anche *allineamento riempito* (*filled array*) in contrasto con l'allineamento non uniforme, o *assottigliato* (*thinned array*): un allinea-

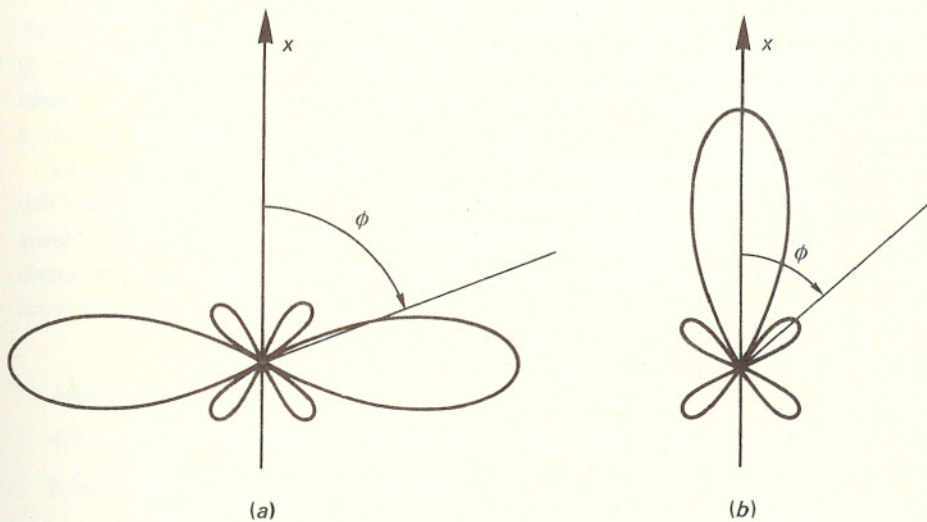


Figura 4.28

Fattori di allineamento: (a) per radiazione *broadside*; (b) per radiazione *endfire*.

mento non uniforme riesce infatti a ottenere la stessa direttività di uno uniforme con un minor numero di elementi. Uno dei grandi vantaggi degli allineamenti non uniformi è la non-apparenza dei cosiddetti *grating lobes*, cioè di quei lobi in cui l'irradiazione è uguale a quella del lobo di massima irradiazione (lobo principale). Sia infatti ϕ_0 la direzione del lobo principale. Per un allineamento uniforme si ha irradiazione uguale a quella lungo ϕ_0 in ogni direzione ϕ_m tale che

$$\beta d \cos \phi_m = \beta d \cos \phi_0 + 2m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

il che certamente avviene per qualche angolo ϕ_m reale, purché βd sia sufficientemente grande ($d \geq \lambda$).

Un metodo per analizzare gli allineamenti uniformi è quello di Schelkunoff (1948). Posto

$$a_n = A_n \exp(j\delta_n)$$

$$\exp(j\beta d \cos \phi) = \eta,$$

la [5] viene riscritta come segue:

$$F(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n \exp(j\delta_n) \eta^n. \quad [6]$$

Il fattore di allineamento viene dunque espresso in forma di polinomio (*polinomio di Schelkunoff*) nella variabile η . Questa, d'altronde, deve giacere su una circonferenza unitaria (fig. 4.29), se la [6] rappresenta un diagramma di array. La parte della

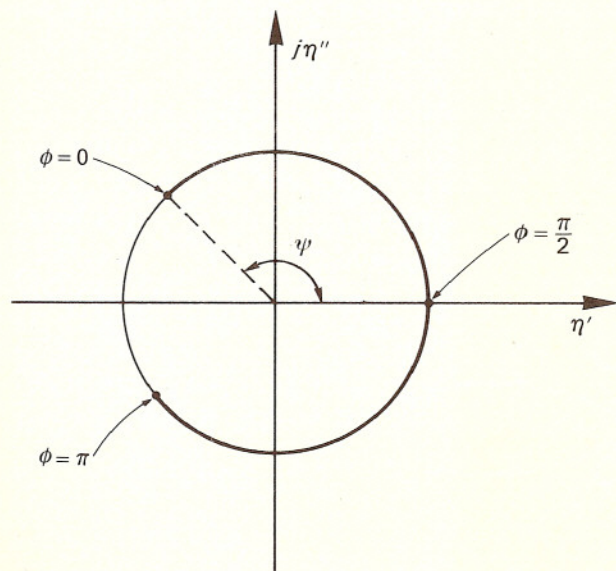


Figura 4.29

Piano della variabile $\eta = \eta' + j\eta''$.

circonferenza corrispondente a valori $|\phi| \leq \pi$ definisce il cosiddetto *spazio visibile*; la restante parte (come anche i successivi percorsi sulla circonferenza stessa) corrisponde a valori complessi di ϕ e definisce lo *spazio invisibile*. L'importanza della [6] risiede nel fatto che, avendo espresso il fattore di allineamento in forma di polinomio, è possibile utilizzare gli appropriati teoremi dell'algebra. Ad esempio, se $\delta_n = 0$:

$$F(\phi) = A_{N-1}(\eta - \eta_0)(\eta - \eta_1) \cdots (\eta - \eta_{N-1}),$$

dove le η_n sono le radici del polinomio [6]. Il fattore di allineamento si annulla solo in corrispondenza di radici η_n di modulo uno e nel dominio visibile. L'importanza di queste considerazioni è evidente ai fini della sintesi, cioè della realizzazione di un assegnato fattore di allineamento.

Le espressioni della direttività e del guadagno, come anche quella dell'impedenza d'ingresso, possono facilmente generalizzarsi al caso degli allineamenti. Per quel che concerne l'impedenza di ingresso va notato che la corrente che circola nella generica antenna dell'allineamento dipende anche dalla presenza delle antenne vicine, poiché esse inducono, se eccitate, forze elettromotrici nell'antenna considerata. Pertanto il fasore tensione di ingresso V_n è legato ai fasori delle correnti di ingresso I_n delle varie antenne da una relazione del tipo

$$V_n = Z_{n1}I_1 + \cdots + Z_{nn}I_n + \cdots + Z_{nN}I_N \quad [7]$$

data la linearità del sistema.

La Z_{nn} è l'impedenza di ingresso dell'antenna n quando tutte le altre antenne hanno correnti di ingresso nulle (antenne con terminali aperti); essa è detta *autoimpedenza*, o *impedenza propria*, dell'antenna. Molto spesso viene identificata con l'impedenza di ingresso dell'antenna nello spazio libero; si suppone cioè che le altre antenne, a circuito di ingresso aperto, non perturbino il campo associato all'antenna in esame. Antenne che godano di questa proprietà di invisibilità quando siano a circuito aperto (o, più in generale, opportunamente terminate) sono dette a *minima diffrazione* (*minimum scattering antennas*; Kahn e Kurss, 1965). Le antenne reali approssimano più o meno questa caratteristica.

La Z_{nm} è definita come il rapporto tra i fasori della tensione indotta ai terminali dell'antenna n e della corrente di eccitazione dell'antenna m quando tutte le antenne siano a terminali aperti e non eccitate, tranne l'antenna m ; essa è denominata *impedenza mutua*. Nel calcolo dell'impedenza mutua si fa spesso l'ipotesi che le antenne siano a minima diffrazione (vedi 5.3.5).

Annotazioni

4.7.1. Allineamento uniforme con eccitazione a fase progressiva

Poniamo $a_n = \exp(jn\delta)$; la [5] diventa

$$F(\phi) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp[jn(\delta + \beta d \cos \phi)] = \sum_{n=0}^{N-1} \exp[jn\gamma] = \frac{1 - \exp(jN\gamma)}{1 - \exp(j\gamma)} =$$

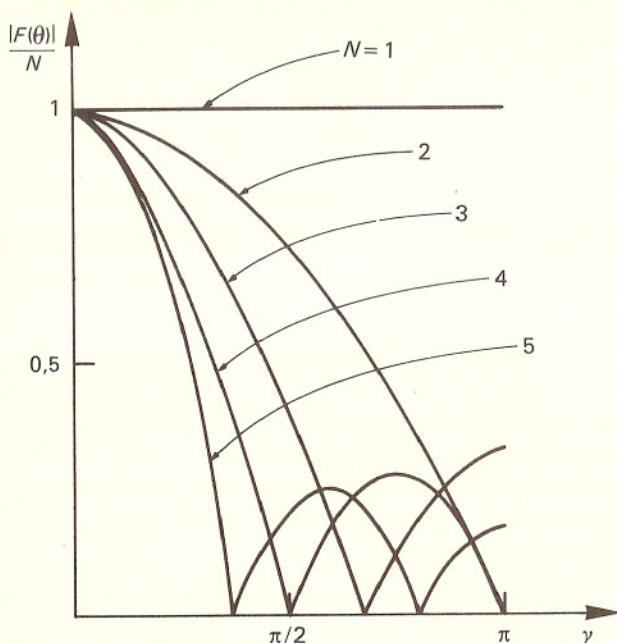


Figura 4.30

Modulo del fattore di allineamento per $N=1, 2, 3, 4, 5$.

$$= \exp \left[j(N-1) \frac{\gamma}{2} \right] \frac{\sin N \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \quad \gamma = \delta + \beta d \cos \phi.$$

Il modulo del fattore di allineamento per vari valori di N è riportato nella figura 4.30. Il massimo del fattore di allineamento si ha per $\gamma=0$ ed è pari a N . Il primo zero si ha per $N\gamma=2\pi$, e il massimo del primo lobo laterale all'incirca per $N\gamma=3\pi$. L'ampiezza del fattore di allineamento in corrispondenza del primo lobo laterale è pari a

$$\frac{1}{\sin \frac{3\pi}{2N}} \approx \frac{2}{3\pi} N$$

se N è sufficientemente grande. Il primo lobo laterale, che è anche il più grande, è solo -13,5 dB al di sotto di quello principale.

4.7.2 Allineamento a distribuzione triangolare di corrente

Consideriamo un allineamento uniforme in cui le varie antenne siano percorse da correnti di ampiezza decrescente linearmente dal centro verso la periferia; tra antenne vicine vi sia differenza di fase costante. Questo allineamento può immaginarsi realizzato mediante più allineamenti nel modo rappresentato nella figura 4.31. Ciascun

allineamento è composto di N elementi; i successivi allineamenti sono spostati lungo l'asse x di una lunghezza pari a d . Il primo ha un fattore di array pari a

$$\exp \left[j(N-1) \frac{\gamma}{2} \right] \frac{\sin N \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} = F_1(\phi),$$

dove l'origine è presa in corrispondenza dell'antenna con $\delta = 0$. Il secondo, se l'origine è in corrispondenza della corrente con fase $-\delta$, ha un fattore di array pari a

$$\exp \left[j(N-1) \frac{\gamma}{2} \right] \frac{\sin N \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \exp(-j\delta) = F_1(\phi) \exp(-j\delta).$$

Se l'origine è spostata in corrispondenza dell'antenna con fase zero, il fattore di allineamento diventa $F_1(\phi) \exp(-j\gamma)$. Analogamente, l'ultimo allineamento presenta un fattore di array (con l'origine sempre in corrispondenza dell'antenna con fase zero) dato da $F_1(\phi) \exp(-jN\gamma)$.

Se ora gli allineamenti vengono traslati verticalmente sino a coincidere, si ha un unico allineamento con una distribuzione di corrente triangolare: l'intensità (normalizzata) del fasore della corrente è pari a N al centro dell'allineamento, e decresce linearmente sino a 1 alle due estremità. Sommando i campi parziali prodotti dagli allineamenti componenti, si ottiene il fattore di allineamento per l'array a distribuzione triangolare di corrente:

$$F(\phi) = F_1^2(\phi) = \left(\frac{\sin N \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right)^2.$$

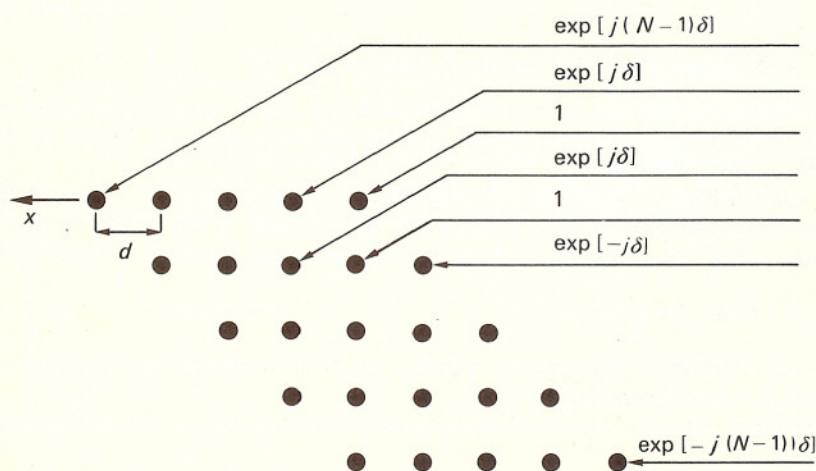


Figura 4.31

Il numero totale di antenne è ora $2N$, il massimo del fattore di allineamento è N^2 , e l'intensità del primo lobo laterale è, per N sufficientemente grande, $(2N/3\pi)^2$.

Il primo lobo laterale è pertanto -27 dB al di sotto di quello principale. Ai fini della riduzione dell'intensità dei lobi laterali il cosiddetto *tapering d'ampiezza*⁶ si dimostra dunque vantaggioso. Al contrario, la larghezza del lobo principale è uguale a quella di un allineamento uniforme con metà elementi e ampiezza spaziale, $(N-1)d$, anch'essa metà. A parità di dimensioni dell'allineamento, il tapering d'ampiezza *allarga* il lobo principale.

4.7.3 Allineamento binomiale

Si consideri un allineamento uniforme i cui coefficienti di eccitazione siano i seguenti:

$$a_0 = \binom{N}{0} = 1, \quad a_1 = \binom{N}{1} \exp(j\delta), \quad a_2 = \binom{N}{2} \exp(2j\delta), \dots$$

$$a_N = \binom{N}{N} \exp(2Nj\delta).$$

Il fattore di array è dato da

$$F(\phi) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \exp(jn\gamma) = [1 + \exp(j\gamma)]^N =$$

$$= 2^N \exp\left(j \frac{N\gamma}{2}\right) \left[\cos \frac{\gamma}{2}\right]^N,$$

poiché la somma è immediatamente identificabile con lo sviluppo della potenza N del binomio; per questo motivo l'allineamento è detto *binomiale*. Si tratta di un allineamento di $N+1$ elementi, con tapering simmetrico rispetto al centro. I lobi laterali possono addirittura scomparire; basta che sia

$$|\delta + \beta d \cos \phi| < \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

4.7.4 Radiazione emessa da aperture in schermi metallici

Consideriamo un'apertura in uno schermo metallico piano, come quella rappresentata nella figura 4.32; per ipotesi, è nota la componente tangenziale del campo elettrico, $E_t(x, y)$, nell'apertura.

Per il calcolo del campo irradiato dall'apertura nel semispazio $z \geq 0$, in alternativa al metodo dello sviluppo in onde piane (vedi § 3.5), può applicarsi il teorema di equivalenza, nella forma in cui compaiono solo correnti magnetiche superficiali:

$$\mathbf{J}_{mS} = 2 \mathbf{E}_t(x, y) \times \mathbf{i}_z.$$

Il campo totale irradiato si riconduce quindi a quello prodotto da una distribuzione superficiale di correnti magnetiche.

Di particolare interesse sono le cosiddette *antenne a fessura (slot antennas)*, carat-

⁶ Cioè l'addolcimento della distribuzione spaziale della corrente, che diminuisce verso gli estremi dell'allineamento.

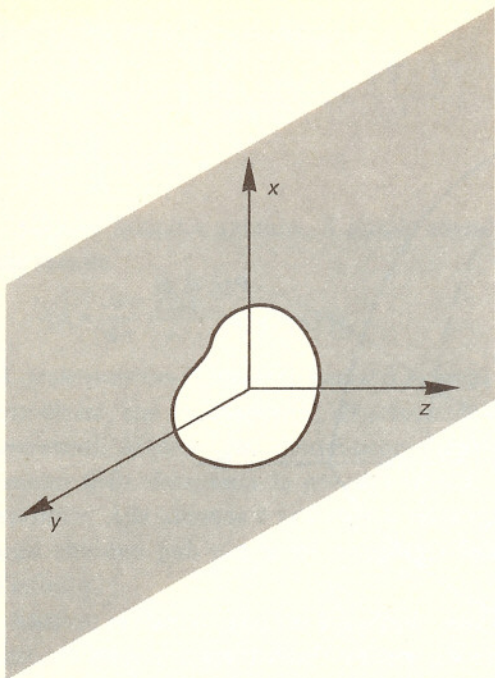


Figura 4.32

terizzate da una dimensione molto più piccola rispetto all'altra (vedi fig. 4.33); in questo caso si ha

$$\mathbf{J}_{mS} = 2E_0(x, y) \mathbf{i}_y \times \mathbf{i}_z = 2E_0(x, y) \mathbf{i}_x,$$

avendo supposto il campo elettrico polarizzato lungo l'asse y : $\mathbf{E}_r(x, y) = E_0(x, y) \mathbf{i}_y$. Se $b \ll \lambda$, all'apertura può sostituirsi (ai fini del calcolo del campo in $z \geq 0$) una corrente magnetica

$$I_m(x) = 2 \int_{-b}^b E_0(x, y) dy = -2V(x) = -2V_0 f(x),$$

dove $-V(x)$ è l'integrale del campo elettrico sull'apertura; V_0 può essere riguardato come una tensione applicata, e la funzione $f(x)$ ne descrive la variazione con x .

Il valore del campo a grande distanza si ottiene dalla [3] (§ 4.6) e applicando il teorema di dualità:

$$\begin{cases} E_\phi = j \frac{V_0 h}{\lambda r} \exp(-j\beta r) \\ H_\theta = -\frac{E_\theta}{\xi}, \end{cases}$$

$$h(\theta) = \sin \theta \mathbf{i}_\phi \int_{-a}^a f(x) \exp(j\beta x \cos \theta) dx.$$

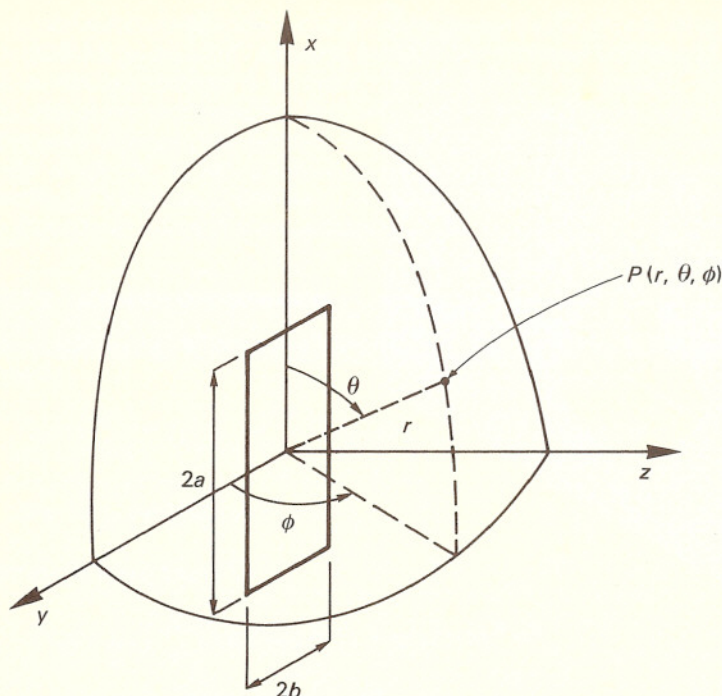


Figura 4.33

L'antenna a fessura, per $z \geq 0$, si comporta dunque come un'antenna filiforme magnetica.

4.8 Riepilogo

In questo capitolo sono stati illustrati i concetti fondamentali concernenti il fenomeno della irradiazione del campo elettromagnetico relativo ad assegnate distribuzioni di corrente. Il problema della effettiva distribuzione della corrente su antenne filiformi è stato considerato solo nel paragrafo 4.5.

Per prima cosa abbiamo mostrato che il calcolo del campo in un mezzo illimitato isotropo omogeneo è semplificato dall'introduzione del *potenziale vettore* $\mathbf{A}$ e del *potenziale scalare* Φ . Questi, collegati dalla *gauge di Lorentz*,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\epsilon\mu\Phi = 0,$$

soddisfano, nel dominio della frequenza, alle equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

I campi sono calcolati come segue:

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \Phi = -j\omega \left(\mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{k^2} \right)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}.$$

Alla più semplice antenna, il *dipolo elementare elettrico*, corrisponde un potenziale vettore

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \Delta z}{r} \exp(-jkr) \mathbf{i}_z$$

dal quale possono facilmente ricavarsi i campi. Questi sono caratterizzati da *componenti vicine*, che diminuiscono, all'aumentare della distanza, almeno come $1/r^2$, e da *componenti lontane*, che diminuiscono come $1/r$. Alle prime sono associate, nel dominio delle frequenze la *potenza reattiva*, e nel dominio del tempo l'*energia reversibile*. Alle seconde è associata la *potenza reale* irradiata, cui corrisponde un'energia che non può più essere recuperata dalle sorgenti, ma viene persa sulla sfera all'infinito.

Analogo al dipolo elettrico è il *dipolo magnetico*, di momento U_m , che può esser realizzato mediante una *spira elementare* tale che

$$U_m = \mu \pi R^2 I.$$

Le *antenne filiformi* possono essere studiate come distribuzione spaziale di dipoli elementari, ove sia nota la distribuzione della corrente. Questa è approssimativamente sinusoidale:

$$I(z) = I_0 \frac{\sin[\beta(l - |z|)]}{\sin \beta l}.$$

In tale ipotesi, si possono calcolare i parametri che caratterizzano il comportamento dalle antenne in trasmissione: *altezza efficace*, *vettore di radiazione*, *direttività*, *guadagno*, nonché il parametro che caratterizza le proprietà circuitali dell'antenna: l'*impedenza d'ingresso*.

Più antenne possono essere collocate con opportuna distribuzione nello spazio, al fine di ottenere un sistema radiante con caratteristiche migliori di quelle della singola antenna. Questi sistemi di antenne vengono detti *allineamenti*, e possono essere a spaziatura *uniforme* o *non uniforme*. L'allineamento è caratterizzato da una funzione, denominata *fattore di allineamento*, che nel caso unidimensionale assume la forma:

$$F(\phi) = \sum_{n=1}^N a_n \exp(j\beta x_n \cos \phi).$$

In molti casi, la somma che compare nell'espressione precedente si riconduce a una funzione semplice. Si nota così che un *tapering* di ampiezza, dal centro dell'allineamento verso la periferia, riduce l'intensità dei *lobi laterali*, allargando nel contempo il *lobo principale*.

Traduzione delle citazioni riportate all'inizio del capitolo

Quando, circa due anni fa, giunse notizia dall'altro lato dell'Atlantico che era stato inventato un metodo per trasmettere mediante l'elettricità i suoni articolati della voce umana, cosicché questa potesse essere udita a centinaia di miglia di distanza da colui che parla, quelli tra noi che avevano ragione di ritenere che tale notizia avesse un fondamento di verità, presero a fantasticare, immaginando che si trattasse di un qualche trionfo di abilità costruttiva. Finalmente, quando apparve questo piccolo strumento, che in effetti consiste in parti con cui ciascuno di noi ha familiarità e che persino un dilettante sarebbe capace di montare, il disappunto dovuto al suo aspetto modesto solo parzialmente fu bilanciato dalla constatazione che si trattava una vera macchina parlante (...)

Infatti, nonostante tutte le possibili considerazioni sull'importanza di procedere, nei nostri studi, in profondità piuttosto che in vastità, e per quanto forte possa essere la richiesta di specialisti in questo nostro tempo, vi sarà sempre lavoro, non solo per chi contribuisce all'edificazione di questa o quella scienza e scrive monografie su di essa, ma anche per chi apre la via alla comunicazione tra i diversi gruppi di ricercatori, sì da facilitare una salutare interazione. Nell'università poi si è specialmente portati a riconoscere non solo l'unità della scienza in quanto tale, ma anche la comunione degli studiosi. Sarebbe troppo semplice supporre che noi siamo qui riuniti solamente per poter usufruire di certe comodità di studio, come musei e laboratori, librerie e conferenzieri, affinché ciascuno possa studiare ciò che più gli aggrada.

J. C. Maxwell, *The Telephone*, Nature, 18 (1878).

L'esistenza di correnti indotte e di azioni elettromagnetiche a distanza dal circuito primario dal quale esse derivano la loro energia ci ha condotto, sotto la guida di Faraday e di Maxwell, a riconoscere che il mezzo in cui il conduttore è immerso svolge un ruolo molto importante nel divenire del fenomeno. Se si crede alla continuità del moto dell'energia, cioè che quando questa scompare in un punto e riappare in un altro dev'essere passata attraverso lo spazio intermedio, si deve per forza concludere che il mezzo [che racchiude il conduttore] ne contiene perlomeno una parte ed è capace di trasferirla da punto a punto (...)

Io penso sia necessario aver ben chiaro che, accettando la teoria di Maxwell, secondo cui l'energia risiede nel mezzo, non si può più considerare una corrente come qualcosa che trasporta energia lungo il conduttore. Una corrente in un conduttore è piuttosto da riguardare come risultante essenzialmente da una convergenza di energia elettrica e magnetica dal mezzo sul conduttore, ove essa si trasforma in altre forme.

J. H. Poynting, *On the Transfer of Energy on the Electromagnetic Field*, Phil. Trans, 175 (1884).

Riferimenti bibliografici

- Bucci O. M. e Franceschetti G., *Input Impedance and Transient Response of Spheroidal Antennas in Dispersive Media*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 22, 526-36 (1974).
- Franceschetti G. e Papas C. H., *Pulsed Antennas*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 22, 651-61 (1974).
- Kahn W. K. e Kurss H., *Minimum Scattering Antennas*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 13, 671-75 (1965).
- King R. W. P., *The Approximate Representation of Distant Field of Linear Radiators*, Proc. IRE, 29, 458-63 (1941).
- Schelkunoff S. A., *A Mathematical Theory of Linear Arrays*, Bell Syst. tech. J., 22, 80-107 (1948).
- Silver S., *Microwave Antenna Theory and Design* (Dover, New York 1965) pp. 158-62.

Capitolo 5

Ricezione

*So soft and uncompounded in their essence pure...
In what shape they choose
Dilated or condensed, bright or obscure
Can execute their aery purposes.*

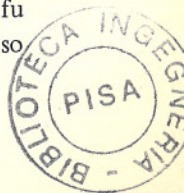
[Così soffici e diffuse nella loro pura essenza...
Qualunque sia la forma,
Espansa o condensata, luminosa od oscura,
Esse eseguono i loro aerei doveri.]

John Milton, *Il paradiso perduto*

Segnali dallo spazio

Nella storia delle esplorazioni spaziali, raramente un evento ha suscitato nella comunità scientifica, come anche tra la gente comune, un interesse pari a quello che, nell'autunno del 1980, destò la trasmissione delle prime immagini ravvicinate di Saturno e dei suoi anelli da parte della sonda americana *Voyager 1* (fig. A). Nel punto di massimo avvicinamento al pianeta, le telecamere della navicella scrutavano l'atmosfera gassosa di Saturno a soli 124 000 km di distanza, ben poca cosa rispetto al miliardo e mezzo di chilometri che separavano la sonda dalla Terra. Propagandosi con la velocità della luce, i segnali da essa irradiati coprivano questa distanza in poco meno di un'ora e mezza (il viaggio di andata era durato quattro anni). La ricezione e l'amplificazione di radiazioni di così debole intensità — l'attenuazione del segnale nel percorso Terra-Saturno raggiunge valori enormi, fino a 200 dB — e nel contempo la necessità di contenere al massimo il rumore di fondo ponevano, com'è anche facile immaginare, problemi tecnici estremamente complessi. E indubbiamente, al successo della missione del *Voyager* contribuirono in misura determinante le non comuni caratteristiche di sensibilità e discriminazione dei sistemi di antenne, usate in ricezione, presenti nelle stazioni di osservazione terrestri.

I problemi connessi alla ricezione di segnali molto deboli si sono presentati per la prima volta agli scienziati da una cinquantina d'anni. E' del 1931 la scoperta di Jansky, che dava inizio alla radioastronomia, di una sorgente di rumore situata nel centro della Galassia (in fig. B è visibile la rudimentale antenna da lui usata). Per lo sviluppo di questa nuova scienza occorre antenne altamente direttive e in grado di ricevere radiazioni entro una larga banda di frequenze. Tali erano i grandi riflettori costruiti nel dopoguerra, e qui bisogna anzitutto menzionare il paraboloide di Jodrell Bank (Inghilterra), assunto agli onori della cronaca in occasione dei primi lanci dei satelliti sovietici, di cui permise di determinare con grande precisione la traiettoria; fu allora che la gigantesca antenna progettata da Bernard Lovell (500 tonnellate di peso



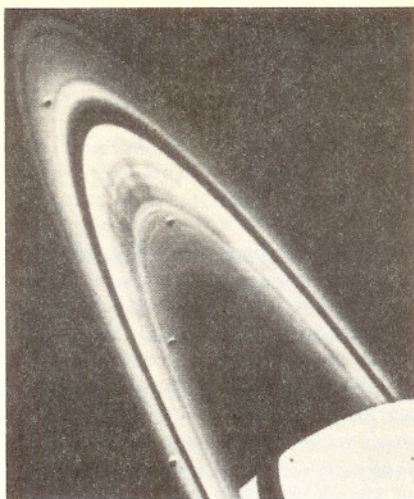


Figura A

e un diametro di 82 m, montatura alto-azimutale) dimostrò appieno la sua versatilità e i vantaggi delle grandi dimensioni. Ben presto altri paraboloidi, anche più grandi, l'affiancarono. La figura C mostra la superficie del riflettore di Effelsberg (Germania occidentale) del Max-Planck-Institut für Radioastronomie (100 m di diametro: il più grande del mondo a montatura equatoriale), lavorata con precisione tale da consentire l'osservazione con onde di un centimetro di lunghezza. Per inciso, ricordiamo che la levigatezza della superficie influisce direttamente sul guadagno dell'antenna; in ogni caso le sue irregolarità, perché essa possa funzionare come riflettore, non dovrebbero superare $1/8$ della lunghezza dell'onda incidente: nel riflettore di Effelsberg, le deviazioni dal paraboloide ideale sono inferiori, in media quadratica, a 0,65 mm!

La tendenza al gigantismo culminò con la costruzione (ultimata nel 1974) dell'antenna di Arecibo (Portorico), una struttura reticolare metallica a forma di calotta sferica racchiusa in una conca naturale e rivestita da 38 778 fogli di alluminio (fig. D). Attualmente si tenta, con tecniche di rilevazione laser, di ridurre la ruvidezza della superficie da 6 a 3 mm (rms) per incrementare ulteriormente le possibilità operative dell'antenna, che con i suoi 305 m di diametro è la più grande in assoluto.

La necessità di avere un potere risolutivo elevato (capacità di distinguere oggetti cosmici relativamente vicini) anche lavorando con onde metriche ha posto peraltro i radioastronomi di fronte a problemi insolubili con antenne di tipo tradizionale: per raggiungere un potere risolutivo di $1'$, quello dell'occhio umano, un'antenna operante su una lunghezza d'onda di 1 m dovrebbe avere un diametro di ben 3,5 km. La tendenza prevalente oggi è di sostituire alla singola antenna a riflettore un allineamento di antenne (*interferometro*). Tipiche disposizioni sono quelle a croce di Mills, di cui un esempio esiste anche in Italia (antenna Croce del Nord a Medicina, presso Bologna), quelle a croce di Christiansen, ad esempio l'interferometro di Calgara in Australia, e i più recenti dispositivi VLBI (*Very Long Base Interferometer*) capaci di risolvere il millisecondo di grado, e che già si sviluppano su distanze di 3000 chilometri negli Stati Uniti.

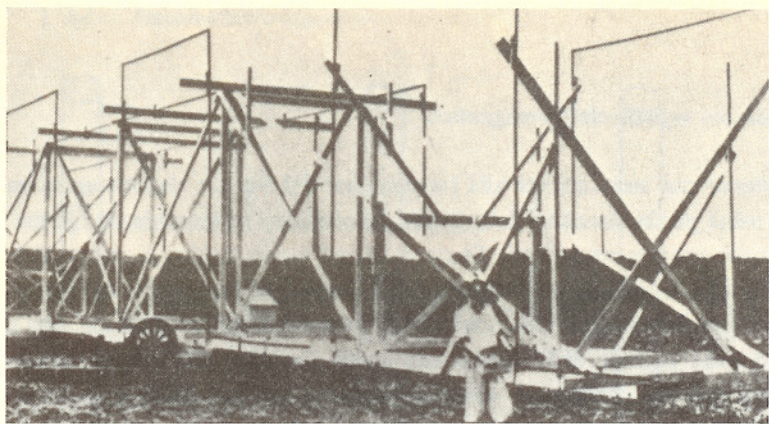


Figura B

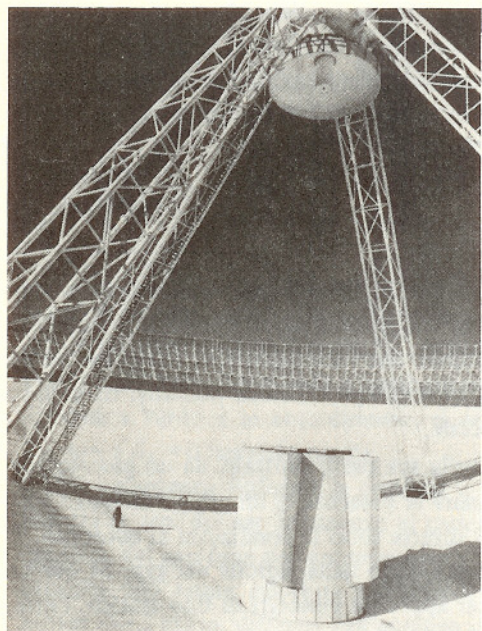


Figura C

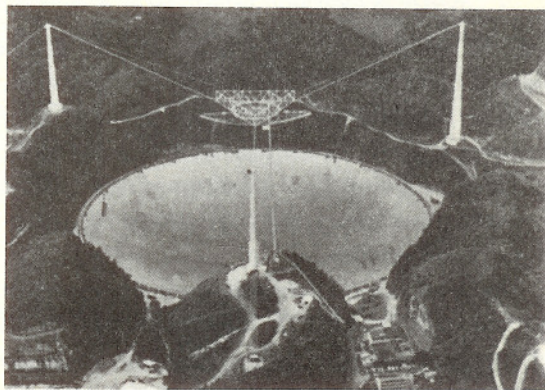


Figura D

5.1 Ricezione del segnale elettromagnetico

Le stesse antenne che sono adibite alla trasmissione del segnale elettromagnetico possono essere usate per la ricezione dello stesso. Si consideri ad esempio un filo metallico, come quello rappresentato nella figura 5.1a, sul quale incida un campo elettromagnetico ($\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$). Questo è, per definizione, il campo che esisterebbe in tutto lo spazio se il filo fosse rimosso (*campo incidente*, o *imperturbato*); in generale, esso è diverso da zero nella regione dello spazio che è poi occupata dal filo. Se questo è realizzato mediante un conduttore elettrico perfetto, nel suo interno il campo elettromagnetico dev'essere nullo e sulla sua superficie deve ancora essere nulla la componente tangenziale del campo elettrico. Queste condizioni non sono verificate dal solo campo incidente. Pertanto deve generarsi un ulteriore campo ($\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$), detto *diffrato* (*scattered field*), che è una misura della perturbazione del campo incidente dovuta alla presenza dell'ostacolo (in questo caso il filo). Il *campo totale* ($\mathbf{E}, \mathbf{H}$) è la somma del campo incidente e di quello diffratto:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s. \quad [1]$$

Esso deve verificare le condizioni sopra esposte, in particolare l'annullarsi della componente tangenziale del campo elettrico, $(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s)_t$, sulla superficie del filo; su questa è indotta una corrente superficiale che assicura che ivi è discontinua la componente tangenziale del campo magnetico $(\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s)_t$. Il campo diffratto può così riguardarsi come sostenuto da questa corrente superficiale.

Se ora il filo è interrotto, ad esempio nella sua parte centrale, da un piccolo *gap* (vedi fig. 5.1b), è ancora necessario postulare la presenza di un campo diffratto, che tuttavia è diverso dal precedente, perché diverse sono le condizioni al contorno. Il campo elettrico tangente non deve più essere nullo nella regione del gap. Se questa regione è sufficientemente piccola da poter applicare concetti di tipo statico, l'integrale di linea del campo elettrico tra i due lembi del gap può essere identificato con la tensione indotta ai morsetti dell'antenna. Se poi il filo metallico è di tipo tubolare cavo, in modo da diminuire la capacità del gap sino a poterla trascurare, la corrente superficiale ai lembi del gap è nulla. E' questa una condizione ben precisa di carico ai morsetti dell'antenna. Essa viene detta "a vuoto", e la differenza di potenziale indotta *tensione a vuoto*. La configurazione rappresentata nella figura 5.1a può essere invece riguardata come quella di un'antenna in cortocircuito, e la corrente (flusso assiale della corrente superficiale), alla stessa ascissa del gap, può essere definita *corrente di cortocircuito* dell'antenna.

Una condizione intermedia tra le due precedentemente esaminate è quella rappresentata nella figura 5.1c, dove i terminali dell'antenna sono collegati, in generale attraverso una sezione di linea di trasmissione, a un *carico*. Nella figura, Z_L è l'impedenza del carico riportata ai morsetti dell'antenna. In questo caso ai terminali dell'an-

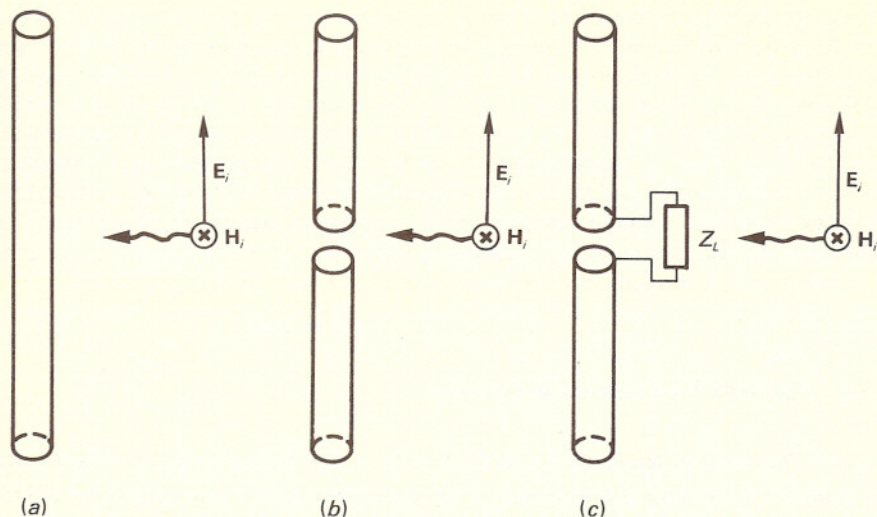


Figura 5.1
Antenna in ricezione.

tenna la corrente non è più nulla (come nel caso di un'antenna a vuoto) ma uguale a quella di ingresso sull'impedenza Z_L ; né è nulla la tensione (come nel caso di un'antenna in cortocircuito), ma uguale a quella presente ai capi dell'impedenza Z_L . I due casi, antenna a vuoto e in cortocircuito, si ottengono da questo, più generale, ponendo $Z_L \rightarrow \infty$ e $Z_L = 0$ rispettivamente.

Per un'antenna filiforme la tensione a vuoto si identifica quasi sempre con quella indotta ai capi del gap in assenza di carichi esterni. Questo comporta il trascurare la capacità del gap (che per antenne sottili è sempre molto piccola); in ogni caso, tale capacità può essere assorbita nell'impedenza del carico (vedi 5.1.1). E' bene anche notare che i campi diffratti dall'antenna differiscono in generale per le due configurazioni di vuoto e di cortocircuito, o ancora, nelle diverse situazioni di carico.

Il processo di ricezione di un'onda elettromagnetica presenta dunque una certa complessità, poiché dipende sia dalle caratteristiche dell'antenna sia da quelle del carico. Ad esso si accompagna invariabilmente un processo di reirradiazione, da parte dell'antenna, che pure dipende dalle caratteristiche summenzionate.

Annotazioni

*5.1.1 Definizione non ambigua di impedenza di ingresso di un'antenna

Per un'antenna, la definizione usuale di "tensione a vuoto", come si è visto, può essere affetta da imprecisione per via dell'incertezza riguardante la capacità del gap.

Si può tentare di ovviare a questo inconveniente includendo nell'antenna un tratto di linea di trasmissione di alimentazione sufficientemente lungo e definendo tutte le grandezze (tensione, corrente, impedenza) in una sezione della linea di trasmissione in cui sia presente il solo modo TEM (per alimentazione con linee bifilari o cavi coassiali). Le grandezze misurate in questa sezione sono poi riportate, con le usuali formule di trasporto delle linee di trasmissione, a una sezione di riferimento opportunamente scelta, che per definizione si assume come quella di *ingresso* dell'antenna. Quest'ultima è dunque "a vuoto" quando l'impedenza di carico nella sezione di riferimento tende all'infinito; è "in cortocircuito" quando l'impedenza riportata è nulla. Nelle condizioni intermedie il carico è dato dall'impedenza nella sezione di riferimento.

5.2 Parametri di un'antenna in ricezione

Come l'antenna in trasmissione, anche quella in ricezione può essere caratterizzata diversamente a seconda che interessi (e sia possibile) rilevare tensioni o correnti ricevute, o non invece potenze trasferite al carico sul quale l'antenna è chiusa.

Nel primo caso l'antenna viene caratterizzata dalla cosiddetta *altezza efficace in ricezione*. Consideriamo ad esempio un'antenna filiforme (ma quanto segue è valido in generale) come quella rappresentata nella figura 5.2. Su di essa incida un'onda piana (o che possa ritenersi tale nella zona occupata dall'antenna) con il campo elettrico polarizzato linearmente e lungo l'asse del filo (vedi fig. 5.2a). Si supponga l'antenna a vuoto; ai capi del gap si induce una tensione (tensione a vuoto V_a) la quale dipende dal campo totale esistente nel gap. Certamente questa tensione indotta è proporzionale al campo incidente (quello che si avrebbe se l'antenna fosse rimossa), data la linearità del sistema. E' pertanto lecito porre

$$V_a = -h_r E_i, \quad [1]$$

dove E_i è il valore del fasore del campo elettrico incidente in corrispondenza del gap. La grandezza h_r , che ha le dimensioni di una lunghezza (m), prende il nome di *altezza efficace in ricezione*: essa è un fattore di proporzionalità che permette di passare dal campo elettrico incidente alla tensione indotta ai terminali dell'antenna quando questa è a vuoto.

La definizione precedente si può estendere al caso più generale in cui il campo incidente abbia una polarizzazione arbitraria (vedi fig. 5.2b). In questo caso può supporre (com'è giustificato nel § 5.3) che l'altezza efficace sia un vettore, $\mathbf{h}_r$, in generale funzione degli angoli θ e ϕ (per l'antenna della fig. 5.2b, la dipendenza è solo con θ), perché non è detto che campi incidenti da diverse direzioni inducano la stessa tensione a vuoto ai morsetti dell'antenna. Per definizione è dunque

$$V_a = \mathbf{h}_r(\theta, \phi) \cdot \mathbf{E}_i, \quad [2]$$

dove, ancora, $\mathbf{E}_i$ è il valore del fasore del campo elettrico incidente in corrispondenza

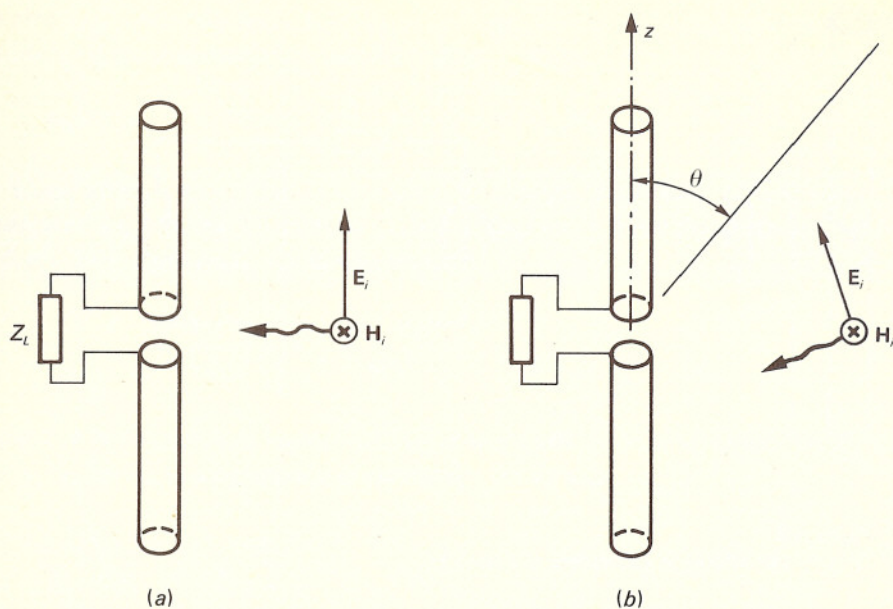


Figura 5.2
Antenna ricevente eccitata da un'onda piana.

del gap. La [2] contiene come caso particolare la [1] quando $\mathbf{E}_i$ è parallelo all'antenna.¹

La conoscenza dell'altezza efficace in ricezione permette il calcolo della tensione che viene indotta ai capi dell'impedenza Z_L quando l'antenna è caricata. Con riferimento alla figura 5.3, si vuol determinare il circuito equivalente dell'antenna in ricezione. Siano A, A' i morsetti di ingresso (veri o equivalenti; vedi 5.1.1.). Ai fini del calcolo dei fasori di tensioni e correnti sul carico Z_L , l'antenna può essere rappresentata mediante un generatore ideale di tensione, in serie con la sua impedenza interna (schema di Thévenin). Il generatore ideale è caratterizzato da una tensione V_a , che è quella che si misura ai morsetti A, A' quando $Z_L \rightarrow \infty$: per definizione, la tensione V_a coincide dunque con la [2]. L'impedenza interna, Z_i , è quella di ingresso ai morsetti A, A' verso sinistra, quando il generatore sia cortocircuitato. Questo implica cortocircuitare le sorgenti che producono il campo elettromagnetico incidente sull'antenna. L'impedenza Z_i coincide allora con quella di ingresso dell'antenna, e la tensione ai capi del carico è data da

$$V_L = \frac{Z_L}{Z_L + Z_i} V_a = \frac{Z_L}{Z_L + Z_i} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r. \quad [3]$$

¹ Per $\theta = \pi/2$, $\mathbf{h}_r = -h_r \mathbf{i}_z$ per l'antenna considerata.

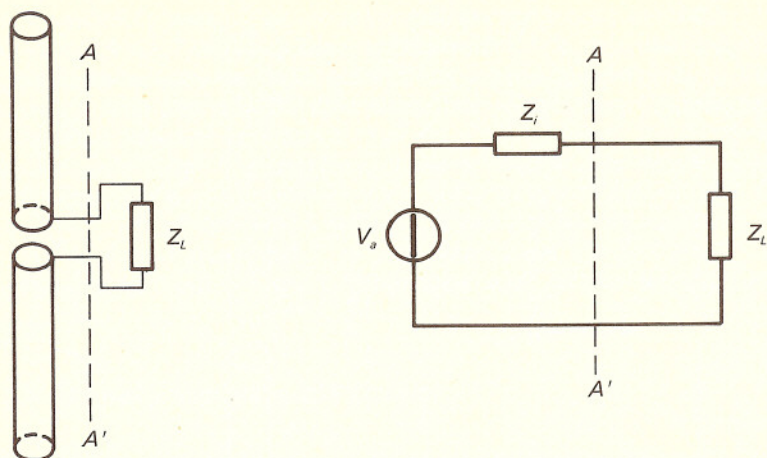


Figura 5.3
Circuito equivalente di un'antenna in ricezione.

In conclusione, il parametro “altezza efficace” è particolarmente adatto per antenne che, come quelle filiformi, sono provviste di morsetti di alimentazione. In ogni caso, come si è visto in 5.1.1, è anche possibile definire morsetti equivalenti riferendosi alla linea, o al sistema di alimentazione, che necessariamente connette l'antenna al carico.

L'antenna in ricezione può essere caratterizzata da un altro parametro che non necessita di morsetti di alimentazione: l'“area efficace”, che ora viene definita.

Consideriamo un'antenna adattata per il massimo trasferimento di potenza al carico. Questa condizione non richiede necessariamente la presenza di morsetti di alimentazione in cui poter definire univocamente una tensione. Tuttavia, se questi morsetti possono essere considerati (come nel caso delle antenne filiformi), allora la condizione di adattamento in potenza richiede che l'impedenza di carico sia la complessa coniugata di quella di ingresso (vedi 4.2.5):

$$R_L + jX_L = Z_L = Z_i^* = R_i - jX_i. \quad [4]$$

Supponiamo che sull'antenna incida un'onda elettromagnetica piana (o localmente piana); ad essa è associato un vettore di Poynting $\mathbf{S}$ e quindi una densità di potenza

$$S = \frac{1}{2} \frac{|E_i|^2}{\xi}. \quad [5]$$

Sul carico (adattato) si dissipa una potenza reale P_M . L'area efficace A è il fattore

di proporzionalità (misurato in m^2) tra la potenza consegnata al carico, in condizioni di *adattamento di potenza*, e la densità di potenza [5]:

$$P_M = SA. \quad [6]$$

L'area efficace è una grandezza (reale) che dipende, in generale, dalla direzione di ricezione: $A = A(\theta, \phi)$. Ovviamente, tale grandezza non è indipendente dall'altezza efficace. Infatti, in condizioni di adattamento

$$P_M = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|Z_i^* + Z_i|^2} R_i = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{4R_i},$$

dove R_i è la resistenza di ingresso dell'antenna (uguale a quella del carico, per la supposta condizione di adattamento in potenza). Dall'uguaglianza

$$\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{4R_i} = \frac{1}{2} \frac{|E_i|^2}{\xi} A$$

segue

$$A = \frac{\xi}{4R_i} \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|E_i|^2} = \frac{\xi}{4R_i} |h_r|^2 \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|E_i|^2 |h_r|^2} \quad [7]$$

che è la relazione cercata. La quantità

$$\chi = \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|E_i|^2 |h_r|^2} \quad [8]$$

prende il nome di *fattore di depolarizzazione*; essa è massima (e pari a uno) quando $\mathbf{E}_i$ è parallelo al *coniugato* di $\mathbf{h}_r$ (vedi 5.2.8). In queste condizioni si ha

$$A = \frac{\xi}{4R_i} |h_r|^2. \quad [9]$$

Con la definizione precedente, A non dipende solo dalle caratteristiche dell'antenna, ma anche, tramite il fattore di depolarizzazione, dalla polarizzazione del campo incidente (rispetto ad essa). Si preferisce allora ritoccare la definizione di area efficace, intendendo con questo termine il fattore di proporzionalità tra potenza consegnata al carico e densità di potenza, in condizioni di *adattamento per il carico* ($Z_L = Z_i^*$) e *per la polarizzazione* ($\chi = 1$). Con la nuova definizione, A è data dalla [9], e la potenza trasferita al carico (adattato) da

$$P_r = SA\chi.$$

Annotazioni

*5.2.1 Altezza efficace (in ricezione) di un dipolo elementare

Volendo calcolare l'altezza efficace di un dipolo elettrico elementare, pensiamo anzitutto a una struttura filiforme ricevente lungo la quale la corrente possa ritenersi spazialmente costante. In linea di principio, un modo per realizzare tale struttura potrebbe essere quello di collocare all'estremità di un filo corto due piatti metallici (vedi fig. 5.4). I due piatti funzionano da "serbatoi" per le cariche elettriche, e la corrente può ritenersi costante lungo il filo. Si noti che in trasmissione le correnti radiali lungo i due piatti sono uguali in ampiezza e opposte in verso, cosicché il campo da esse prodotto si annulla per $l \rightarrow 0$ (dipolo elementare). In trasmissione, quindi, l'altezza efficace è pari a $l \sin \theta i_\theta$.

In ricezione, consideriamo un'onda incidente piana con un campo elettrico polarizzato parallelamente al filo. L'antenna è *elementare* se le dimensioni (lunghezza del filo, diametro dei piatti) tendono a zero; in pratica, se sono molto piccole rispetto alla lunghezza d'onda. In tal caso è lecito applicare concetti di tipo statico, e ai capi dei due piatti, isolati perché l'antenna è a vuoto, considerare una differenza potenziale V . Assumendo $D \gg l$, il campo all'interno dei piatti (ma lontano dal filo) è pari a E_i ; di conseguenza la differenza di potenziale indotta è pari a $-E_i l$. Il valore dell'altezza efficace, per la considerata direzione di incidenza, è quindi pari a l .

Se il campo elettrico incide in direzione diversa da $\theta = \pi/2$ (vedi fig. 5.5), la differenza di potenziale indotta è

$$-l \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{i}_z = -l \mathbf{E}_i \cdot (\cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta) = E_i \cdot l \sin \theta i_\theta = E_i \cdot h_r,$$

dove

$$h_r = l \sin \theta i_\theta.$$

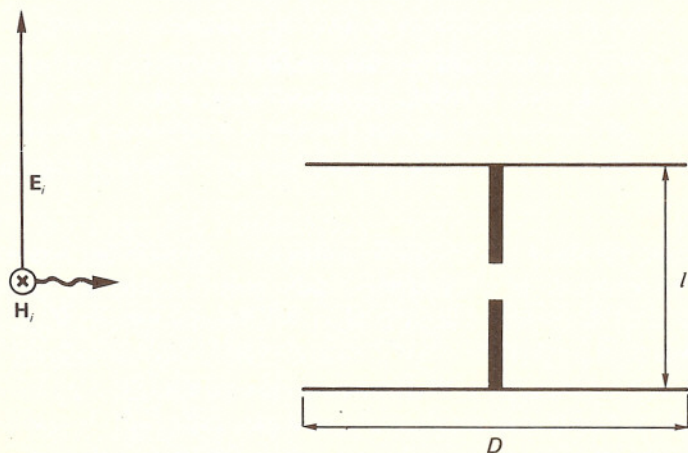


Figura 5.4
Dipolo elementare

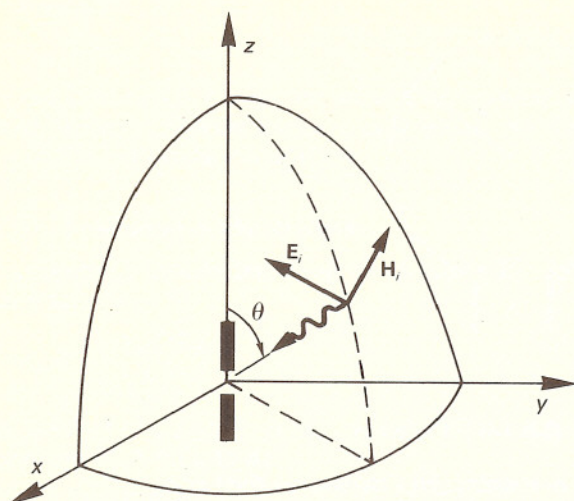


Figura 5.5

Dipolo elementare investito da un'onda con polarizzazione arbitraria.

Le due altezze efficaci, in ricezione e in trasmissione, dunque coincidono. Tale risultato (vedi § 5.3.) è del tutto generale e non limitato al dipolo elementare elettrico.

5.2.2 Altezza efficace (in ricezione) di una spira elementare

Si consideri la spira elementare rappresentata nella figura 5.6, investita da un'onda piana. Dall'annotazione 4.6.6 risulta che l'altezza efficace della spira in trasmissione è pari a $h = -j\beta\pi R^2 \sin\theta i_\phi$.

Per calcolare l'altezza efficace in ricezione si noti che, per spira aperta e $R \rightarrow 0$ (spira elementare), la corrente indotta nella spira è nulla, e pertanto il campo magnetico incidente non è deformato in modo apprezzabile. Quanto alla tensione indotta ai capi della spira, il suo valore può essere calcolato applicando la legge di Neumann-Lenz:

$$-V_a = -j\omega\mu \iint_{\text{spira}} H_i dS = -j\omega\mu\pi R^2 H_i = -j\beta\pi R^2 E_i.$$

L'ampiezza (complessa) dell'altezza efficace in ricezione è data, per la direzione d'incidenza della figura 5.6, da $h_r = -j\beta\pi R^2$. Nel caso generale, procedendo come in 5.2.1, si ottiene

$$\begin{aligned} V_a &= j\omega\mu\pi R^2 \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{i}_z = -j\omega\mu\pi R^2 \sin\theta \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{i}_\theta = \\ &= -j\beta\pi R^2 \sin\theta (\mathbf{E}_i \times \mathbf{i}_r) \cdot \mathbf{i}_\theta = -j\beta\pi R^2 \sin\theta \mathbf{i}_\phi \cdot \mathbf{E}_i \\ h_r &= -j\beta\pi R^2 \sin\theta \mathbf{i}_\phi. \end{aligned}$$

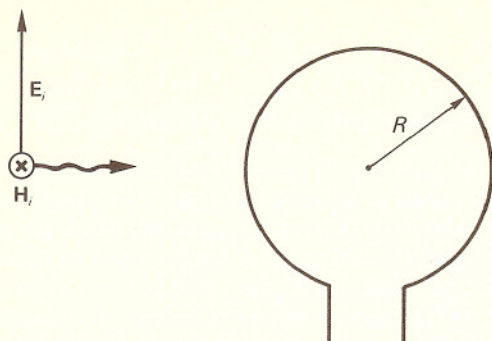


Figura 5.6
Spira elementare di corrente.

5.2.3 Circuito equivalente alternativo per l'antenna in ricezione

Per il calcolo del circuito equivalente dell'antenna in ricezione può applicarsi lo schema di Norton invece di quello di Thévenin. Il generatore ideale dello schema equivalente (vedi fig. 5.7) è caratterizzato dal fasore della corrente ai morsetti A, A' chiusi in cortocircuito. Questa corrente, I_{cc} , coincide con quella ai morsetti dell'antenna chiusa in cortocircuito. L'impedenza (parallela) del generatore è quella che si misura, sempre ai morsetti A, A' , quando il generatore è aperto (quando cioè il campo incidente è rimosso); essa coincide con l'impedenza di ingresso dell'antenna.

I due schemi, di Thévenin e di Norton, devono fornire gli stessi risultati sul carico, e pertanto

$$V_L = \frac{V_a}{Z_i + Z_L} \quad Z_L = \frac{I_{cc}}{Z_i + Z_L} Z_i Z_L.$$

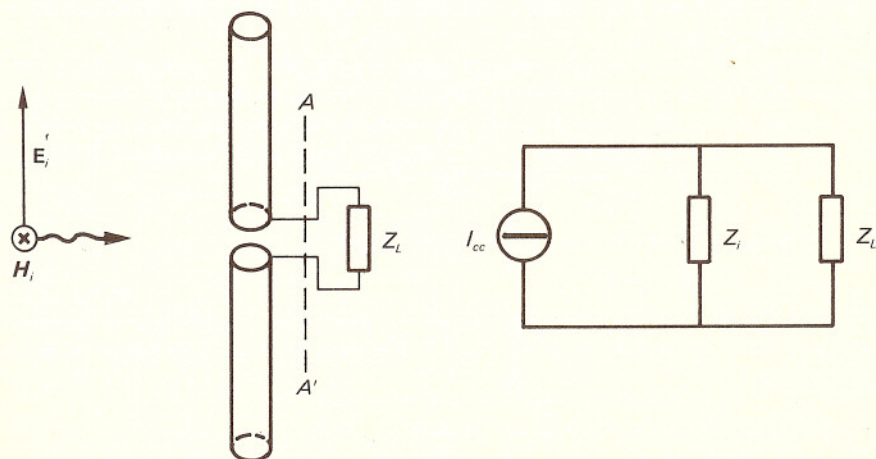


Figura 5.7

Ne consegue che

$$V_a = Z_i I_{cc}. \quad [10]$$

La tensione (indotta) a vuoto ai morsetti dell'antenna uguaglia la corrente (indotta) di cortocircuito, agli stessi morsetti, moltiplicata per l'impedenza di ingresso dell'antenna (sempre agli stessi morsetti).

5.2.4 Condizioni di adattamento

Consideriamo un'antenna chiusa su un carico Z_L . La potenza (reale) trasferita al carico è data da

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_a|^2 R_L}{|Z_i + Z_L|^2}.$$

Se $Z_i = R_i + jX_i$, $Z_L = R_L + jX_L$, al variare della sola X_L la potenza raggiunge un massimo per $X_L = -X_i$, e vale

$$P_L = \frac{1}{2} \frac{|V_a|^2 R_L}{(R_i + R_L)^2}.$$

Al variare di R_L la potenza diventa massima per

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{|V_a|^2}{2} \frac{(R_i + R_L)^2 - 2R_L(R_i + R_L)}{(R_i + R_L)^4} = 0,$$

cioè per $R_L = R_i$.

La precedente condizione è detta di *adattamento per il massimo trasferimento di potenza*: non è detto però che essa sia sempre una condizione ottimale. La tensione sul carico è data (per $\chi = 1$, ma non necessariamente in condizioni di adattamento) da

$$V_L = \frac{E_i h_r}{Z_i + Z_L} Z_L.$$

Se il segnale incidente è caratterizzato da una banda di frequenze, $E_i = E_i(\omega)$, il segnale in uscita, $V_L = V_L(\omega)$, subisce una distorsione lineare a meno che la *funzione di trasferimento*,

$$W(\omega) = \frac{h_r Z_L}{Z_i + Z_L},$$

sia tale che il segnale sia solo scalato in ampiezza ed eventualmente ritardato nel tempo. Perché il segnale non sia distorto, dev'essere quindi

$$W(\omega) = h_0 \exp(-j\omega\tau),$$

dove h_0 e τ sono costanti. Non vi è distorsione se, nella banda di interesse, h_r può ritenersi indipendente dalla frequenza e, nella stessa banda,

$$Z_i(\omega) = Z_L(\omega). \quad [11]$$

La condizione [11] è detta di *adattamento per uniformità*.

I due tipi di adattamento considerati coincidono se $Z_L = R_L$, e cioè se il carico è resistivo, come usualmente accade. Infatti l'antenna è generalmente chiusa su una linea di trasmissione, e Z_L è l'impedenza di ingresso della linea. Ma questa deve essere adattata a valle, e la sua impedenza di ingresso coincide con la sua resistenza caratteristica: si ha $Z_L = R_0$.

Condizioni ancora differenti si ottengono se si vuol massimizzare il rapporto tra la potenza del segnale, misurata in un certo istante T , e la potenza del rumore. Nel dominio del tempo la tensione del segnale ai capi della resistenza di carico è data, all'istante T , da

$$v_R(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i(\omega) \bar{W}(\omega) \exp(j\omega T) d\omega,$$

$$\bar{W}(\omega) = \frac{h_r(\omega)}{Z_i(\omega) + R_0} R_0.$$

La potenza sul carico è proporzionale, nello stesso istante, all'espressione

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} E_i(\omega) \bar{W}(\omega) \exp(j\omega T) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{W}(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |E_i(\omega)|^2 d\omega,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Schwartz. La relazione precedente si trasforma in una uguaglianza se

$$\bar{W}(\omega) = K E_i^*(\omega) \exp(-j\omega T), \quad [12]$$

dove K è un fattore (reale, costante con ω) di proporzionalità.

Se al campo elettrico incidente è associato anche un rumore con *spettro di potenza* costante in ω (*rumore bianco*), la potenza di rumore sul carico è data da

$$\frac{N}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |W(\omega)|^2 d\omega;$$

N è la densità spettrale della potenza di rumore, e il fattore $1/2$ tiene conto del fatto che l'integrale è calcolato tra $-\infty$ e $+\infty$, mentre la potenza di rumore è usualmente considerata per i soli valori positivi di ω . Pertanto, il rapporto segnale/rumore F , all'istante T , è dato da

$$F \leq \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} |E_i(\omega)|^2 d\omega}{N}.$$

Questo rapporto è massimo e dipende solo dall'energia associata al segnale, e non dalla sua forma, se la funzione di trasferimento $\bar{W}(\omega)$ è data dalla [12]. Un sistema che goda di questa proprietà prende il nome di *filtro adattato*, nel senso che esso è dimensionato al particolare segnale in ingresso. Per un filtro adattato risulta

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{W}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E_i(-\omega) \exp[j\omega(t-T)] d\omega =$$

$$= K e_i(T-t),$$

cosicché l'uscita

$$v_R(t) = K \int_{-\infty}^{+\infty} e_i(\tau) e_i(T-t+\tau) d\tau$$

coincide (a parte la costante K) con la *convoluzione* del segnale di ingresso con la replica di sé stesso, invertita (nel tempo) e traslata di T .

5.2.5 Relazione tra potenza diffratta e potenza assorbita da un'antenna

Sia data un'antenna in ricezione a circuito aperto, ai cui terminali si induce una tensione V_a ; lungo l'antenna si stabilisce una distribuzione di corrente $I_a(z)$, cui è associato un campo elettromagnetico reirradiato $\mathbf{E}_a(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{H}_a(r, \theta, \phi)$. Tale campo è in generale diverso da quello irradiato dalla stessa antenna usata in trasmissione. Infatti nel gap la corrente $I_a(z)$ dev'essere nulla, condizione questa non necessariamente verificata dalla corrente associata all'antenna in trasmissione.

Se ora l'antenna viene chiusa sul carico Z_L , ai suoi morsetti si stabilisce la tensione

$$V_i = V_L = V_a \frac{Z_L}{Z_i + Z_L},$$

come si deduce immediatamente dallo schema equivalente dell'antenna in ricezione (vedi fig. 5.3); lungo l'antenna si stabilisce inoltre una distribuzione di corrente $I_r(z)$, cui è associato un campo reirradiato $\mathbf{E}_r(r, \theta, \phi)$, $\mathbf{H}_r(r, \theta, \phi)$.

Consideriamo ora la sovrapposizione delle correnti

$$I(z) = I_a(z) - I_r(z), \quad [13]$$

cui corrisponde la tensione sul gap

$$V(0) = V_a - V_a \frac{Z_L}{Z_i + Z_L} = \frac{Z_i}{Z_i + Z_L} V_a. \quad [14]$$

I campi $(\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a)$ e $(\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r)$ soddisfano a identiche condizioni non omogenee sul contorno dell'antenna: la componente tangenziale del campo elettrico deve annullare quella del campo incidente. Di conseguenza, il campo associato alla corrente $I(z)$ deve avere componente tangenziale nulla sulla superficie dell'antenna. Tale condizione è tipica di un'antenna in trasmissione; per l'unicità della soluzione, questo campo coincide con quello irradiato da un'antenna eccitata dalla tensione [14] applicata agli estremi del gap, o anche con corrente di ingresso

$$I(0) = \frac{V_a}{Z_i + Z_L}.$$

Il campo elettrico diffratto dall'antenna caricata è quindi dato, per la [13], da

$$\mathbf{E}_a(r, \theta, \phi) - \frac{V_a}{Z_i + Z_L} \mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \mathbf{E}_a(r, \theta, \phi) - \frac{Z_i}{Z_i + Z_L} I_c \mathbf{E}(r, \theta, \phi),$$

dove si è sfruttata la [10] ed $\mathbf{E}(r, \theta, \phi)$ è il campo elettrico irradiato dall'antenna con corrente di alimentazione in ingresso unitaria.

In generale, dunque, potenze assorbite e diffratte da un'antenna non sono uguali.

Consideriamo tuttavia la classe di antenne dette *a minima diffrazione* (*minimum scattering antennas*), caratterizzate dall'essere invisibili a un campo elettromagnetico incidente, cioè non reirradianti, quando sono aperte (vedi § 4.7). Una tale antenna è ad esempio il dipolo elementare (vedi 5.2.1 e 5.2.2), dal momento che la corrente $I_a(z)$ è nulla. Per un'antenna a minima diffrazione, $E_a = 0$, e la potenza totale reirradiata è

$$\frac{1}{2} R_i \frac{|V_a|^2}{|Z_i + Z_L|^2} = \frac{R_i}{R_L} P_L,$$

dove P_L è la potenza consegnata al carico. Se $R_i = R_L$, potenza reirradiata e potenza trasmessa al carico sono uguali.

*5.2.6 Area efficace di un dipolo elementare elettrico

Sia dato un dipolo elettrico elementare, di lunghezza l , su cui incide un campo elettrico polarizzato linearmente e parallelamente al dipolo stesso. Per la direzione di incidenza considerata, l'area efficace, tenuto conto dei risultati di 4.6.13 e supponendo $R_{irr} = R_i$, si scrive

$$A = \frac{\zeta}{4R_i} l^2 = \frac{3\lambda^2}{8\pi}.$$

Apparentemente il risultato è assurdo poiché, risultando l'area efficace del dipolo elementare inversamente proporzionale alla frequenza, all'abbassarsi di questa la potenza trasferita al carico aumenterebbe indefinitamente.

Il paradosso si spiega notando che nella definizione di area efficace è implicita la condizione di adattamento. Ora, un dipolo elementare presenta una reattanza di ingresso capacitiva che aumenta (in valore assoluto) al decrescere della frequenza. Per adattare il dipolo è necessario porre in serie ad esso un'induttanza proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda di lavoro. Tale induttanza ha necessariamente una resistenza serie, anch'essa proporzionale al quadrato di λ . La resistenza di ingresso del dipolo decresce invece con il quadrato della lunghezza d'onda. La condizione di adattamento è pertanto puramente teorica, e in pratica non può essere realizzata, perché la resistenza serie dell'induttanza risulta molto maggiore di quella di radiazione (vedi anche 5.3.3, ove si tiene in conto la resistenza ohmica del dipolo).

5.2.7 Area efficace di un dipolo elementare magnetico (esercizio)

In modo analogo a quanto si è fatto per il dipolo elettrico (vedi 4.6.13), si dimostri che la resistenza di radiazione di un piccolo avvolgimento composto da N spire di raggio R è data da

$$R_{irr} = \frac{2\pi}{3} \zeta \left(\frac{N\beta\pi R^2}{\lambda} \right)^2 = \frac{\pi}{6} \zeta (N\beta^2 R^2)^2,$$

e si calcoli l'area efficace seguendo la via indicata in 5.2.6. Si dimostri altresì che in condizioni di adattamento di polarizzazione l'area efficace vale $A = 3\lambda^2/8\pi$, valore che può diventare molto grande alle basse frequenze. Anche in questo caso le perdite nel condensatore necessario per l'adattamento impediscono che la condizione di massimo trasferimento di potenza sia possibile per valori elevati della lunghezza d'onda della

radiazione incidente (vedi anche l'annotazione 5.3.4, in cui si tengono in conto le perdite della spira).

*5.2.8 Potenza trasferita a un'antenna non adattata

La potenza (reale) trasferita sul carico di un'antenna non adattata (in carico e polarizzazione) è data da

$$P_L = SA \chi \xi,$$

dove χ è il fattore di depolarizzazione [8],

$$\chi = \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|E_i|^2 |h_r|^2},$$

e ξ è il fattore di disadattamento:

$$\xi = \frac{4R_i R_L}{|Z_i + Z_L|^2}. \quad [15]$$

La presenza del primo fattore è stata giustificata nel paragrafo 5.2; il secondo si deduce immediatamente considerando il circuito equivalente della figura 5.3.

Sia ξ sia χ sono non superiori all'unità. Com'è facile dedurre dalla [15], il fattore di disadattamento raggiunge il valore massimo $\xi = 1$ per $Z_i = Z_L^*$ (adattamento del carico). A sua volta, il fattore di depolarizzazione raggiunge il valore massimo $\chi = 1$ quando $\mathbf{E}_i$ è parallelo al coniugato di $\mathbf{h}_r$ (adattamento di polarizzazione). Infatti, posto

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i' + j\mathbf{E}_i'' = \alpha \mathbf{h}_r^* = \alpha \mathbf{h}_r' - j\alpha \mathbf{h}_r'',$$

si ha

$$\chi = \frac{(\mathbf{h}_r' \cdot \mathbf{h}_r' + \mathbf{h}_r'' \cdot \mathbf{h}_r'') + j(\mathbf{h}_r' \cdot \mathbf{h}_r'' - \mathbf{h}_r'' \cdot \mathbf{h}_r')^2}{|h_r'|^2 |h_r''|^2} = 1.$$

5.3 Relazione tra i parametri di un'antenna in trasmissione e in ricezione

E' del tutto lecito supporre che le proprietà di un'antenna utilizzata come mezzo trasmittente siano in qualche modo collegate a quelle della stessa antenna utilizzata come mezzo ricevente. Si può ricercare una conferma a questa supposizione mediante il teorema di reciprocità.

Consideriamo le due antenne della figura 5.8, alimentate dai generatori mediante linee di trasmissione. Nella figura, per fissare le idee, le antenne sono filiformi e le linee di trasmissione bifilari, ma in realtà la configurazione può essere molto più generale; in questo caso le linee di trasmissione si intendono equivalenti (vedi § 3.3), e le sezioni di riferimento, S_1 e S_2 , dislocate in posizione tale che, in esse, sia presente un solo modo di trasmissione (vedi § 3.3). Inoltre, trasmettitori e linee di trasmissione si suppongono schermati sino alle sezioni S_1, S_2 .

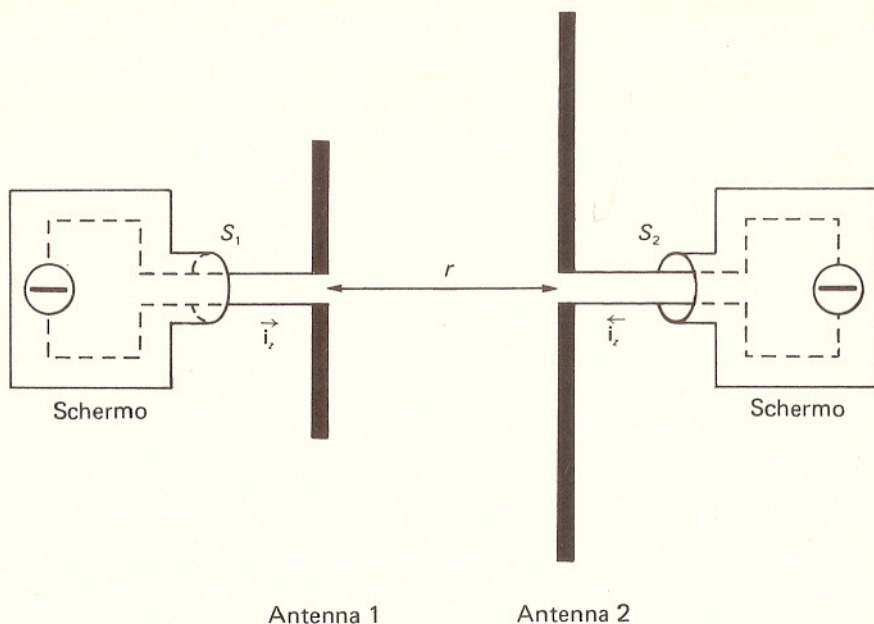


Figura 5.8

Per antenne, linee di trasmissione (per la parte non schermata) e schermi perfettamente conduttivi il teorema di reciprocità fornisce la seguente relazione:

$$\iint_{S_1+S_2} (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{i}_z dS = \iint_{S_2+S_1} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{i}_z dS, \quad [1]$$

dove $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ sono i campi trasversali prodotti rispettivamente dall'antenna 1 e dall'antenna 2.

Ora

$$\mathbf{E}_2 = V_{21} \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{H}_1 \times \mathbf{i}_z = I_1 \mathbf{h}_1 \times \mathbf{i}_z = I_1 \mathbf{e}_1 \quad \text{su } S_1,$$

e

$$\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_2 = V_2 \mathbf{i}_z \times \mathbf{e}_2 = V_2 \mathbf{h}_2, \quad \mathbf{H}_1 = I_{12} \mathbf{h}_2 \quad \text{su } S_2;$$

$\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{h}_1$ sono le funzioni vettoriali modali relative all'unico modo esistente sulle due linee (vere o equivalenti); V_2 e I_1 sono le funzioni scalari modali (tensione e corrente nel caso di linea di trasmissione o cavo coassiale), rispettivamente nelle sezioni S_2 e S_1 , relative ai campi delle antenne nella loro funzione di trasmettenti; V_{21}, I_{12} , le analoghe funzioni scalari modali relative ai campi delle antenne nella loro funzione ricevente.

Sostituendo i valori precedenti nel primo integrale che appare nella [1] si ha

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_z dS = -V_{21} I_1 \iint_{S_1} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 dS = -V_{21} I_1$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{i}_z dS = -V_2 I_{12} \iint_{S_2} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 dS = -V_2 I_{12}.$$

Infatti nel caso di linee di trasmissione e schermi perfettamente conduttori le funzioni $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ possono essere scelte reali, talché

$$\iint_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} dS = \iint_S \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* dS = 1$$

in base alla normalizzazione [6] (§ 3.3).²

In modo perfettamente analogo si calcola il secondo integrale che appare nella [1]. In definitiva, la [1] è equivalente alla relazione

$$V_{21} I_1 + V_2 I_{12} = V_{12} I_2 + V_1 I_{21}. \quad [2]$$

Basta ora scegliere le sezioni S_1 e S_2 in modo che esse siano quelle equivalenti di ingresso delle antenne (vedi 5.1.1), e la lunghezza delle linee di alimentazione in modo che, a generatori spenti,³ le impedenze di ingresso nel verso $-\mathbf{i}_z$ siano infinite,⁴ cosicchè

$$I_{12} = I_{21} = 0.$$

Si ottiene allora

$$V_{21} I_1 = V_{12} I_2, \quad [3]$$

dove ora, per definizione, V_{21} è la tensione a vuoto indotta dall'antenna 2 sulla 1, V_{12} è la tensione a vuoto indotta dall'antenna 1 sulla 2, I_1 e I_2 sono le correnti di alimentazione rispettivamente delle antenne 1 e 2. Se le antenne sono l'una nel campo radiativo dell'altra, si ha

$$V_{21} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{h}_{1r} = K I_2 \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{1r}$$

$$V_{12} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{h}_{2r} = K I_1 \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{2r},$$

e quindi, in base alla [3],

$$\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_{1r} = \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_{2r}. \quad [4]$$

² Si può supporre che le autofunzioni $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ siano reali anche se i conduttori sono buoni, ma non perfetti (linee con piccole perdite). In questo caso la relazione [1] è anch'essa valida, perché campi elettrici e magnetici tangenti ai conduttori sono legati da una relazione di impedenza (condizione di Leontovič; vedi 3.3.9).

³ Aperti se generatori di tensione, cortocircuitati se di corrente.

⁴ Per questo si richiede che i tratti della linea di trasmissione, dalle sezioni S_1 , S_2 sino ai generatori, siano senza perdite.

La [4] è valida per due antenne arbitrarie. Considerando ora come antenna 2 un dipolo elettrico elementare di lunghezza l , orientato secondo l'asse z (in un sistema di coordinate sferiche) si ha subito

$$\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{i}_\theta l \sin \theta = \mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{h}_{1r} l \sin \theta.$$

Analogamente, scegliendo come antenna 2 un dipolo magnetico,

$$\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{i}_\phi = \mathbf{i}_\phi \cdot \mathbf{h}_{1r}.$$

L'altezza efficace in trasmissione ha componente nulla secondo r ; nulla può anche ritenersi la componente omonima dell'altezza efficace in ricezione, in quanto essa non dà contributo alla tensione indotta a vuoto (il campo incidente lungo r non ha mai componente secondo questa direzione). In definitiva

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_{1r}, \quad [5]$$

cioè *altezze efficaci in trasmissione e in ricezione coincidono*, per la stessa antenna.

La relazione [5] è molto importante e permette di stabilire la connessione tra gli altri parametri che descrivono l'antenna in trasmissione e quelli che ne caratterizzano il comportamento in ricezione. In particolare (vedi 5.3.1), se l'antenna è perfettamente conduttrice, diagramma di direttività e area efficace sono legate dalla relazione

$$\frac{D(\theta, \phi)}{A(\theta, \phi)} = \frac{4\pi}{\lambda^2}. \quad [6]$$

Per antenne perfettamente conduttrici, quindi, il rapporto tra direttività e area efficace è una costante che non dipende dal tipo di antenna considerata, ma solo dalla frequenza.

Se invece l'antenna non è perfettamente conduttrice nella [6] alla direttività va sostituito il guadagno (vedi 5.3.2):

$$\frac{G}{A} = \frac{4\pi}{\lambda^2}. \quad [7]$$

Annotazioni

*5.3.1 Relazione tra diagramma di direttività e area efficace

Si consideri un'antenna perfettamente conduttrice (con la sua linea di alimentazione), caratterizzata da un diagramma di direttività $D(\theta, \phi)$ e da un'area efficace $A(\theta, \phi)$. Dalla relazione [10] (§ 4.6) si ricava

$$D = \frac{\pi \zeta}{R_i \lambda^2} |h|^2,$$

e dalla [9] (§ 5.2), tenuto conto che $\chi = 1$ (adattamento di polarizzazione),

$$A = \frac{\zeta}{4R_i} |h|^2,$$

dove non si è più fatta distinzione tra altezze efficaci in trasmissione e in ricezione, data la loro coincidenza. Pertanto

$$\frac{D}{A} = \frac{4\pi}{\lambda^2}.$$

*5.3.2 Relazione tra guadagno e area efficace

Siano date due antenne, per semplicità filiformi, parallele, e orientate in modo che il massimo di radiazione dell'una coincida con la direzione del massimo di ricezione dell'altra (vedi fig. 5.9). Le due antenne siano inoltre l'una nel campo radiativo dell'altra, e adattate in guisa che

$$Z_1 = Z_{i1}^*, \quad Z_2 = Z_{i2}^*,$$

essendo Z_{i1} , Z_{i2} le rispettive impedenze di ingresso. In un primo tempo (vedi fig. 5.9a) l'antenna 1 funziona come trasmittente e l'antenna 2 come ricevente; successivamente i loro ruoli si scambiano. Nel primo modo di funzionamento, la potenza ricevuta dall'antenna 2 è data da

$$P_{R2} = \frac{P_{T1} G_1 A_2}{4\pi r^2},$$

come facilmente si desume dalle definizioni di guadagno e di area efficace (vedi anche § 5.4); la P_{T1} è la potenza (reale) trasmessa dall'antenna 1, e si è usato il guadagno G_1 (invece della direttività) per tener conto di eventuali perdite sull'antenna 1. Analogamente, quando i ruoli di trasmittente e ricevente sono invertiti, si ha

$$P_{R1} = \frac{P_{T2} G_2 A_1}{4\pi r^2};$$

di conseguenza

$$\frac{G_1}{A_1} = \frac{G_2}{A_2} \frac{P_{T2} P_{T1}}{P_{R1} P_{R2}}. \quad [8]$$

Ma

$$P_{R2} = \frac{1}{2} \frac{|E_{12} h_2|^2}{4R_2}, \quad P_{R1} = \frac{1}{2} \frac{|E_{21} h_1|^2}{4R_1},$$

$$P_{T2} = \frac{1}{2} R_2 |I_2|^2, \quad P_{T1} = \frac{1}{2} R_1 |I_1|^2,$$

dove h_1 , h_2 sono le altezze efficaci (uguali in trasmissione e ricezione) delle due antenne; R_1 , R_2 sono le resistenze di carico, uguali a quelle di ingresso, dato l'adattamento; I_1 , I_2 , le correnti di ingresso in trasmissione, e E_{12} , E_{21} i campi imperturbati. Ne consegue

$$\frac{P_{R2} P_{T2}}{P_{R1} P_{T1}} = \left| \frac{E_{12} h_2 I_2}{E_{21} h_1 I_1} \right|^2 = \left| \frac{h_1 I_1 h_2 I_2}{h_2 I_2 h_1 I_1} \right|^2 = 1.$$

Il rapporto [8] tra guadagno e area efficace è quindi una costante che non dipende dal particolare tipo di antenna considerata. Tale rapporto può essere conveniente-

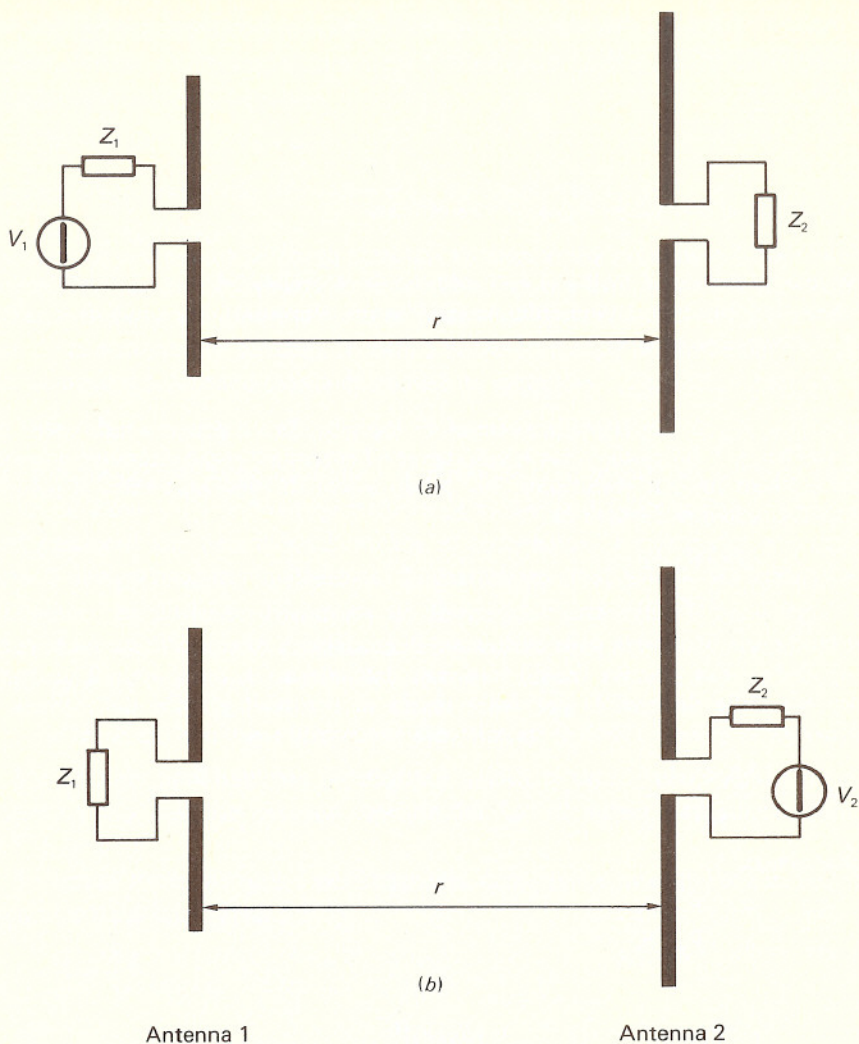


Figura 5.9

Applicazione del teorema di reciprocità a due antenne filiformi parallele.

mente calcolato, una volta per tutte, per una sola antenna. Per il dipolo elettrico elementare (senza perdite) il calcolo dell'area efficace (vedi 5.2.6) fornisce

$$A = \zeta \frac{l^2}{4R_i},$$

e l'espressione del guadagno (vedi § 4.6, [7] e [11]) diventa

$$G = \frac{4\pi r^2 |E|^2 / \zeta}{R_i |I|^2} = \frac{\pi \zeta l^2}{R_i \lambda^2}.$$

In conclusione

$$\frac{G}{A} = \frac{4\pi}{\lambda^2}.$$

Per un'antenna senza perdite si è trovato che il rapporto [6] tra direttività e area efficace è una costante che non dipende dal tipo dell'antenna, ma solo dalla frequenza. Se le antenne hanno perdite, la stessa costante esprime il rapporto tra guadagno e area efficace. A quest'ultimo risultato si è giunti tenendo conto dell'uguaglianza tra altezze efficaci in trasmissione e in ricezione. Tale uguaglianza è vera per una antenna arbitraria (non necessariamente filiforme) e irradiante un campo comunque polarizzato. La relazione tra guadagno (o direttività) e area efficace è pertanto di validità completamente generale.

5.3.3 Potenza trasferita al carico di un'antenna corta adattata

Sia data un'antenna corta, di lunghezza $2l$, adattata. La sua resistenza di ingresso si può ritenere uguale alla serie di quella di radiazione (vedi 4.6.13),

$$R_{irr} = \frac{2\pi}{3} \zeta \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2,$$

e di quella ohmica di ingresso. Per calcolare quest'ultima si noti che la potenza ohmica dissipata lungo il filo è data da

$$P_{\Omega} = 2 \int_0^l \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{|I_0|^2}{\pi a^2} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^2 dz = \frac{1}{2} \frac{2l}{3\sigma} \frac{|I_0|^2}{\pi a^2},$$

dove a è il raggio del filo (per la corrente si è assunta una distribuzione triangolare e si è trascurato l'effetto pelle). Posto

$$P_{\Omega} = \frac{1}{2} R_{\Omega} |I_0|^2,$$

la resistenza ohmica di ingresso è data da

$$R_{\Omega} = \frac{1}{\sigma} \frac{2l}{3\pi a^2}.$$

L'espressione [7] (§ 4.6) diventa

$$G = \frac{3}{2} \frac{R_{irr}}{R_{\Omega} + R_{irr}} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \frac{R_{\Omega}}{\zeta}}.$$

Pur essendo $R_{\Omega}/\zeta \ll 1$, a frequenza sufficientemente bassa il guadagno comincia a decrescere; in tal caso,

$$A = \frac{\lambda^2}{4\pi} G = \frac{\frac{3\lambda^2}{8\pi}}{1 + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \frac{R_{\Omega}}{\zeta}} \approx \frac{1}{4} \frac{\zeta}{R_{\Omega}} l^2$$

e l'area efficace non cresce più al diminuire della frequenza. Naturalmente, come si è visto in 5.2.6, resta valida l'osservazione sull'impossibilità pratica di realizzare l'adattamento in potenza.

5.3.4 Potenza trasferita al carico di un piccolo avvolgimento adattato

Consideriamo un piccolo avvolgimento di raggio R e di sezione del filo πa^2 . Supponendo costante la corrente e trascurabile l'effetto pelle, l'espressione della resistenza ohmica di ingresso si scrive

$$R_{\Omega} = \frac{1}{\sigma} \frac{2NR}{a^2},$$

N essendo il numero di spire; la resistenza di radiazione è data in 5.2.7.

A frequenza sufficientemente bassa il guadagno è dato da

$$G = \frac{3}{2} \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_{\Omega}} \approx \frac{\pi}{4} \frac{\xi}{R_{\Omega}} (N\beta^2 R^2)^2$$

e l'area efficace da

$$A \approx \pi^3 \left(\frac{R}{\lambda} \right)^2 N^2 \pi R^2 \frac{\xi}{R_{\Omega}}$$

poiché $R_{irr} \ll R_{\Omega}$.

L'area efficace, e di conseguenza la potenza trasferita al carico adottato, decrescono al diminuire della frequenza quando vengano realisticamente tenute in conto le perdite ohmiche lungo la spira.

5.3.5 Impedenza mutua tra due antenne corte

Siano date due antenne corte, nella disposizione indicata nella figura 5.10a. L'impedenza mutua Z_{12} è definita come la tensione presente ai morsetti (aperti) dell'antenna 1 quando l'antenna 2 è eccitata da una corrente di ampiezza unitaria. Il campo elettrico prodotto dall'antenna 2 lungo l'antenna 1 (supposta invisibile) è dato da

$$E_{21} = \xi \frac{I_2 l}{2\pi} \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{j\beta z^3} \right) \exp(-j\beta z).$$

Per $d \gg l$, risulta

$$V_{21} = -\xi \frac{I_2 l^2}{2\pi} \left(\frac{1}{d^2} + \frac{1}{j\beta d^3} \right) \exp(-j\beta d),$$

dove si è ancora utilizzata l'altezza efficace in ricezione (pur non avendosi, a rigore, condizioni di onda incidente piana). L'impedenza mutua è dunque data da

$$Z_{12} = -\frac{\xi}{2\pi} \left(\frac{l^2}{d^2} + \frac{l^2}{j\beta d^3} \right) \exp(-j\beta d).$$

In modo analogo, per la configurazione indicata nella figura 5.10b si ottiene

$$Z_{12} = \frac{\xi}{4\pi} \left(\frac{j\beta l^2}{d} + \frac{l^2}{d^2} + \frac{l^2}{j\beta d^3} \right) \exp(-j\beta d).$$

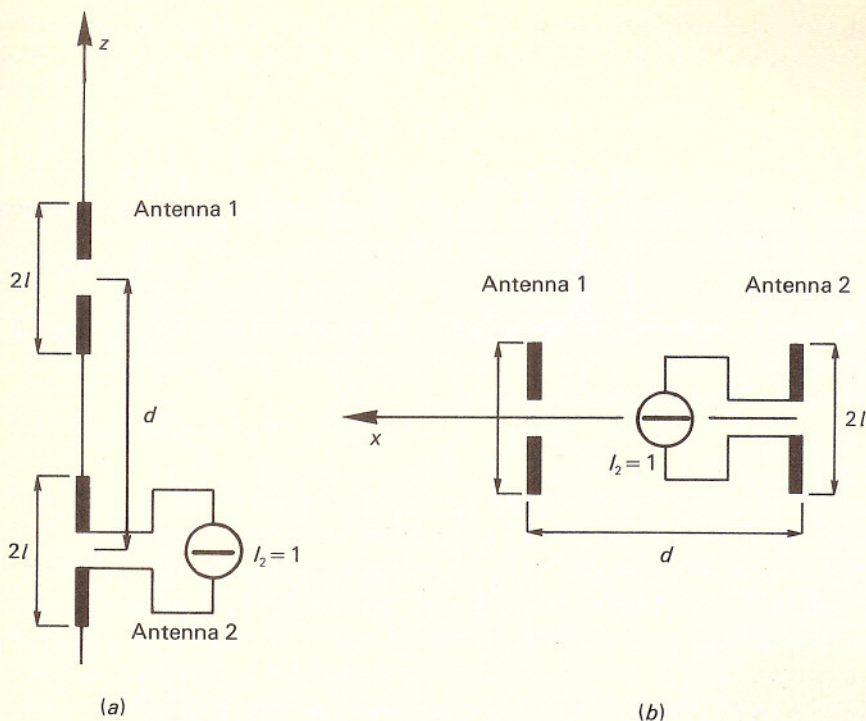


Figura 5.10

5.3.6 Forze meccaniche agenti su un dipolo elementare

Consideriamo il dipolo elettrico elementare rappresentato nella figura 5.11; il dipolo sia fisso, adattato e investito da un'onda piana polarizzata linearmente:

$$\mathbf{e}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{i}_x$$

$$\mathbf{h}(z, t) = \frac{E_0}{\zeta} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{i}_y.$$

Il dipolo è sede di una corrente indotta

$$i(t) = \frac{E_0 l}{2R_i} \cos \omega t, \quad \text{ove} \quad R_i = \frac{2\pi}{3} \zeta \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2,$$

e alle sue estremità compaiono cariche, positive e negative, di valore

$$q(t) = \int i(t) dt = \frac{E_0 l}{2R_i \omega} \sin \omega t.$$

Il campo elettrico agisce sulle cariche, producendo nella direzione dell'asse x due forze uguali e opposte; il campo magnetico agisce invece sulla corrente con forza

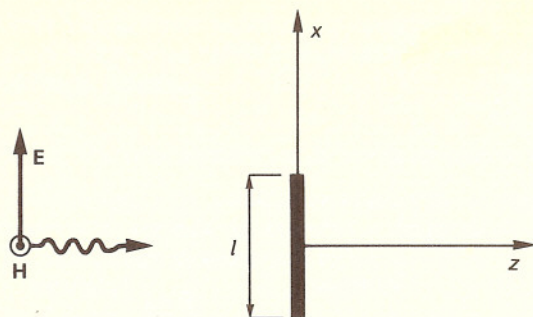


Figura 5.11
Dipolo elementare investito da un'onda piana.

pari a

$$\mathbf{f}(t) = i(t) \mu_0 h(t) l \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_y = \frac{E_0^2 l^2 \mu_0}{2 \zeta R_i} \cos^2 \omega t \mathbf{i}_z,$$

il cui valore medio è dato da

$$\langle \mathbf{f}(t) \rangle = \frac{S}{c} 2A \mathbf{i}_z; \quad [9]$$

nella [9] si sono introdotti il valor medio del vettore di Poynting,

$$S = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{\zeta},$$

e l'area efficace del dipolo,

$$A = \zeta \frac{l^2}{4R_i}.$$

Il dipolo è quindi sottoposto a una spinta (in tutti i casi pratici molto piccola) lungo l'asse z . Si noti che $2AS$ è la potenza media che il dipolo "estrae" dal campo, consegnandone una metà al carico e reirradiando l'altra metà (vedi 5.2.5).

Se il campo incidente è polarizzato circolarmente,

$$\mathbf{e}(z, t) = E_0 (\cos \omega t \mathbf{i}_x + \sin \omega t \mathbf{i}_y)$$

$$\mathbf{h}(z, t) = \frac{E_0}{\zeta} (\cos \omega t \mathbf{i}_y - \sin \omega t \mathbf{i}_x),$$

l'unica componente del campo magnetico efficace, ai fini dell'azione meccanica sul dipolo, è h_y , e il valor medio della forza di natura magnetica è dato da

$$\langle \mathbf{f}(t) \rangle = \frac{S}{c} A \mathbf{i}_z,$$

il valor medio del vettore di Poynting essendo

$$S = \frac{E_0^2}{\zeta}.$$

Diversamente nel caso della polarizzazione lineare, la componente e_y del campo elettrico agisce ora sulle cariche alla estremità del dipolo, esercitando su esso la coppia

$$c(t) = \frac{E_0^2 l^2}{2R_i \omega} \sin^2 \omega t \, i_z,$$

il cui valor medio è dato da

$$\langle c(t) \rangle = \frac{S}{\omega} A \, i_z.$$

Il dipolo, quindi, è sottoposto anche a una coppia (Franceschetti e Papas, 1980).

5.4 Il collegamento radio

Nella trasmissione di un segnale via radio un problema di capitale importanza è quello del calcolo della potenza ricevuta da un'antenna quando sia nota la potenza trasmessa da un'altra antenna. La soluzione a tale problema è data dalla cosiddetta *formula del collegamento*, facilmente deducibile dai parametri delle due antenne.

Consideriamo la figura 5.12, dove l'antenna 1 trasmette la potenza P_T e l'antenna 2, ricevente, è adattata in polarizzazione e potenza. Sia G_1 il guadagno dell'antenna trasmittente nella direzione del collegamento e A_2 l'area efficace dell'antenna ricevente nella stessa direzione.

La densità di potenza incidente sull'antenna 2 è data da

$$S = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_1,$$

e la potenza consegnata al carico adattato da

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_1 A_2.$$

Pertanto

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{G_1 A_2}{4\pi r^2} = G_1 G_2 \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 = \frac{A_1 A_2}{\lambda^2 r^2}, \quad [1]$$

dove i pedici 1 e 2 si riferiscono alle antenne 1 e 2 rispettivamente.

Le formule precedenti (*formule del collegamento*), tutte equivalenti, si applicano al caso di antenne poste in uno spazio omogeneo isotropo illimitato senza perdite, l'una nel campo radiativo dell'altra, e la ricevente adattata. Le limitazioni relative alle caratteristiche del mezzo trasmissivo sono molto spesso eliminabili. Se le antenne sono vicine al suolo, e questo può ritenersi perfettamente conduttore nell'ambito

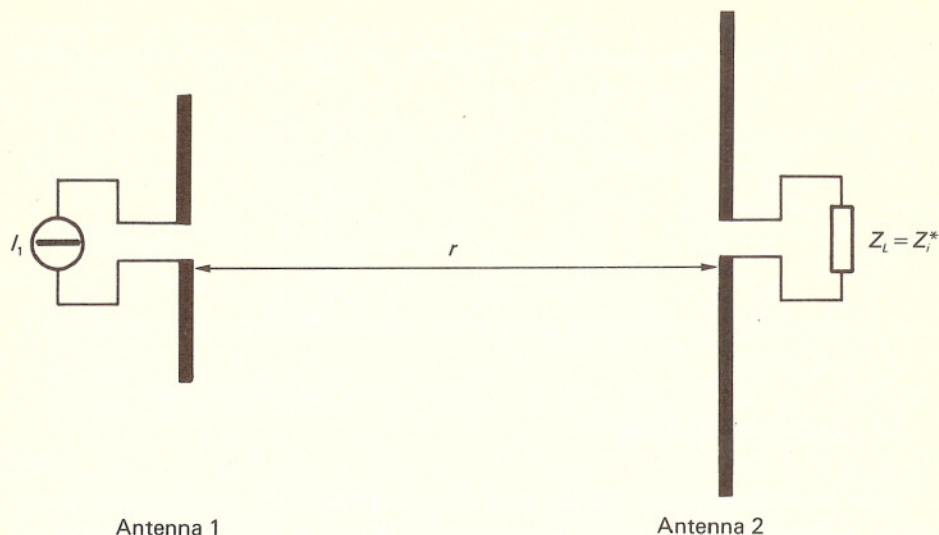


Figura 5.12
Collegamento tra due antenne.

delle frequenze adoperate, può applicarsi il teorema delle immagini (§ 1.6; vedi anche 4.6.4). Se il mezzo è dissipativo, nell'espressione [1] compare un fattore di attenuazione $\exp(-\alpha r)$. Se la polarizzazione dell'onda trasmessa viene modificata (ad esempio a causa della pioggia nella banda dei gigahertz) se ne può tener conto introducendo opportuni fattori di depolarizzazione. Se l'antenna ricevente non è perfettamente adattata, si introducono i fattori di disadattamento e di depolarizzazione (vedi 5.2.8). Tutte le cause che tendono a diminuire la potenza ricevuta sono usualmente conglobate in un fattore di *efficienza* del collegamento, spesso determinato sperimentalmente. Con ciò la [1] si trasforma nell'espressione più generale

$$\frac{P_R}{P_T} = \eta \frac{G_1 A_2}{4\pi r^2}, \quad \eta \leq 1. \quad [2]$$

In alternativa alla [1], non è difficile ricavare una formula più generale, valida anche se le antenne non sono in zona lontana. Il sistema delle due antenne può riguardarsi come un quadripolo, i cui morsetti 1 siano quelli di ingresso dell'antenna 1, e i cui morsetti 2 siano quelli (sempre d'ingresso) dell'antenna 2. Per la linearità del sistema, e con ovvio significato per i simboli, si ha

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2. \end{cases} \quad [3]$$

In particolare, l'impedenza mutua Z_{21} si può calcolare come tensione a vuoto ai

morsetti dell'antenna 2 per corrente unitaria di ingresso all'antenna 1. Se le antenne sono l'una nel campo radiativo dell'altra e sono orientate con le altezze efficaci parallele e in modo da ottenere il massimo di ricezione (come di solito accade nelle applicazioni pratiche), allora

$$Z_{21} = j\zeta \frac{h_1 h_2}{2\lambda r} \exp(-j\beta r). \quad [4]$$

E' facile dimostrare che in generale (e non solo quando vale la [4])

$$Z_{12} = Z_{21}, \quad [5]$$

relazione che esprime, in termini di impedenze mutue, la proprietà di reciprocità del collegamento.

L'impedenza Z_{11} è quella di ingresso (Z_1) per l'antenna 1 e può calcolarsi, se la distanza tra le antenne è sufficiente, come se l'antenna 2 non esistesse. Lo stesso dicasi per l'impedenza Z_{22} .

Note le impedenze del quadripolo, può calcolarsi la tensione ai morsetti dell'antenna ricevente quando siano assegnate la corrente in ingresso all'antenna trasmettente e l'impedenza di carico dell'antenna ricevente. Sussiste infatti la seguente relazione:

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_2 I_2 = -Z_L I_2,$$

dove il segno "meno" all'ultimo membro indica che si considera positiva la corrente entrante nel quadripolo. Ne consegue

$$-I_2 = \frac{Z_{21}}{Z_2 + Z_L} I_1,$$

e quindi

$$V_2 = -Z_L I_2 = \frac{Z_L Z_{21}}{Z_2 + Z_L} I_1. \quad [6]$$

Se, in particolare, le antenne sono l'una nel campo radiativo dell'altra, si ha

$$V_2 = j \frac{\zeta Z_L I_1}{Z_2 + Z_L} \frac{h_1 h_2}{2\lambda r} \exp(-j\beta r). \quad [7]$$

Annotazioni

5.4.1 Calcolo della potenza ricevuta da una antenna usando la rappresentazione quadripolare

Posto che le antenne siano l'una nel campo radiativo dell'altra, la potenza (complessa) trasferita al carico è data da

$$\frac{1}{2} V_2(-I_2)^* = \frac{1}{2} \frac{|h_1|^2 |h_2|^2}{4\lambda^2 r^2} \frac{\xi^2 Z_L}{|Z_2 + Z_L|^2} |I_1|^2.$$

Pertanto, la potenza (reale) sul carico è data da

$$P_R = \frac{1}{2} \frac{|h_1|^2 |h_2|^2}{4\lambda^2 r^2} \frac{\xi^2 R_L}{|Z_2 + Z_L|^2} |I_1|^2;$$

la potenza trasmessa è d'altronde pari a

$$P_T = \frac{1}{2} R_1 |I_1|^2,$$

e di conseguenza risulta

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{|h_1|^2 |h_2|^2}{4\lambda^2 r^2} \frac{R_L}{R_1} \frac{\xi^2}{|Z_2 + Z_L|^2} \quad [8]$$

In condizioni di adattamento, sostituendo le espressioni per G e A , si trova la [1].

*5.4.2 Collegamento tra due antenne in presenza del suolo

Siano date due antenne, per semplicità due dipoli elementari, in presenza di un suolo perfettamente conduttore, come rappresentato nella figura 5.13. Il campo elettrico (imperturbato) prodotto dall'antenna 1 sulla 2 è dato da

$$E_{12} = j\xi \frac{2h_1 I_1}{2\lambda r} \exp(-j\beta r),$$

dove l'altezza efficace in trasmissione è raddoppiata per tener conto della presenza del suolo riflettente. La tensione indotta a vuoto sull'antenna 2 è data da

$$V_{12} = j\xi \frac{h_1 h_2 I_1}{\lambda r} \exp(-j\beta r).$$

Questa tensione è quella esistente tra il morsetto di ingresso del dipolo e la terra

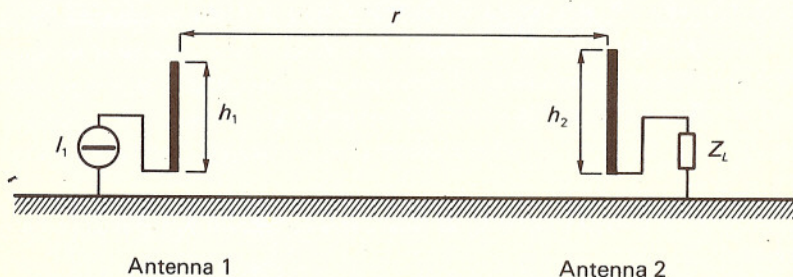


Figura 5.13

(massa). La corrente sul carico è data da

$$I_L = \frac{V_{12}}{Z_L + Z_2},$$

dove Z_2 è l'impedenza di ingresso (tra il morsetto di ingresso e la terra) dell'antenna 2 in presenza del suolo.

*5.4.3 La formula del radar

Il *radar* (*radio detection and ranging*) è un'apparecchiatura capace di misurare distanze (e talvolta velocità) di un oggetto utilizzando emissioni radio. E' opinione comune che sia stato inventato dagli inglesi durante la seconda guerra mondiale; ciò non è del tutto esatto, perché nello stesso periodo apparecchiature simili furono indipendentemente costruite in Germania, e anche in Italia, e utilizzate durante gli ultimi tempi del conflitto. E' però vero che i radar inglesi e americani erano superiori per portata e discriminazione, potendo adoperare frequenze più elevate generate dal magnetron, un particolare generatore di microonde.

Con riferimento alla figura 5.14, consideriamo un'antenna trasmittente e, a distanza r da essa, un oggetto capace di diffrangere le onde elettromagnetiche incidenti. La densità di potenza incidente sull'oggetto è data da

$$S = \frac{P_T G_T}{4\pi r^2}.$$

Le caratteristiche di reirradiazione di questo sono descritte dalla sua *sezione radar*. Il corpo reirradia un campo $E(r, \theta, \phi)$ cui è associata, a grande distanza, una densità di potenza pari a

$$\frac{1}{2} \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{\zeta}.$$

Detta $S(\theta_1, \phi_1)$ la densità di energia della radiazione incidente, la sezione radar σ è definita dalla seguente relazione

$$\frac{S(\theta_1, \phi_1) \sigma(\theta_1, \phi_1; \theta, \phi)}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \frac{|E(r \rightarrow \infty, \theta, \phi)|^2}{\zeta}; \quad [9]$$

essa dipende in generale sia dalla direzione del campo incidente sia dalla direzione lungo la quale viene misurato il campo reirradiato (*sezione radar bistatica*). Se le due direzioni coincidono (e i versi sono opposti) la sezione radar viene detta *monostatica*.

Dalla relazione [9] segue che la densità di potenza reirradiata sull'antenna trasmettente dal corpo diffrangente è data da

$$S' = \frac{P_T G_T}{(4\pi r^2)^2} \sigma,$$

ove σ è la sezione radar monostatica nella direzione di incidenza.

A grande distanza, la potenza captata dall'antenna, che funziona anche come ricevente (è questo in generale il caso del radar) è data da

$$P_R = \frac{P_T G_T A_R}{(4\pi r^2)^2} \sigma. \quad [10]$$

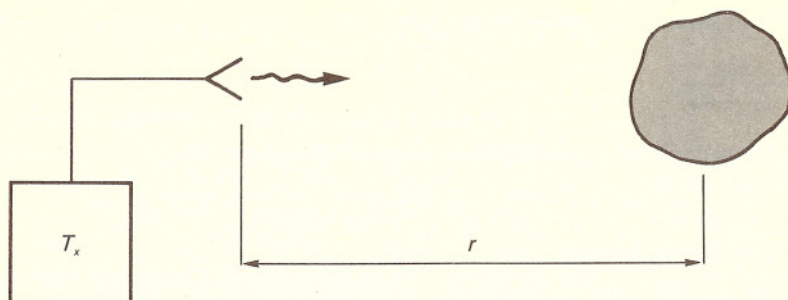


Figura 5.14

La [10] è la desiderata *equazione del radar* (si è implicitamente ammesso che non vi siano perdite di polarizzazione). Come si vede, la potenza ricevuta decresce con la quarta potenza della distanza. La misura di quest'ultima viene effettuata trasmettendo un impulso elettromagnetico e misurando il tempo di arrivo dell'impulso diffratto dall'oggetto. Il tempo che intercorre tra i due impulsi, diviso per la velocità della luce, fornisce il doppio della distanza tra antenna e oggetto.

5.5 Temperatura di rumore di un'antenna

L'intensità minima di segnale che può essere rivelata da un'antenna dipende dal rumore che è associato ad ogni apparecchiatura ricevente. In parte esso si genera nel ricevitore stesso collegato all'antenna, in parte è inerente al segnale trasmesso, in quanto prodotto nel trasmettitore, in parte è ricevuto dall'antenna direttamente dall'ambiente circostante. E' di quest'ultimo tipo di rumore che ci si occupa in questo paragrafo. In pratica si considera il rumore prodotto dall'uomo (ad esempio, quello generato dalla scarica delle candele nei motori della automobili), e il rumore termico prodotto dai corpi (la Terra, il cielo, il Sole ecc.) in presenza dell'antenna. A questo rumore va poi aggiunto quello eventualmente generato dalla stessa antenna e dalla linea di trasmissione che connette antenna e carico.

Consideriamo, con riferimento alla figura 5.15, un'antenna chiusa su un carico puramente resistivo, e (in via provvisoria) l'interazione tra l'antenna stessa e un piccolo *corpo nero* presente nello spazio (la restante parte dello spazio viene supposta momentaneamente incapace sia di irradiare, sia di ricevere). Nella figura l'antenna è filiforme, ma le considerazioni seguenti valgano per qualsiasi tipo di antenna.

In accordo alla legge di Planck che, nel caso delle radiofrequenze che qui si considerano, prende la forma approssimata di Rayleigh-Jeans (vedi 5.5.1), il corpo nero è caratterizzato da una *brillanza* B (misurata in $\text{W/m}^2 \cdot \text{sr} \cdot \text{Hz}$)

$$B = 2KT/\lambda^2,$$

dove $K = 1,380 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$ è la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta

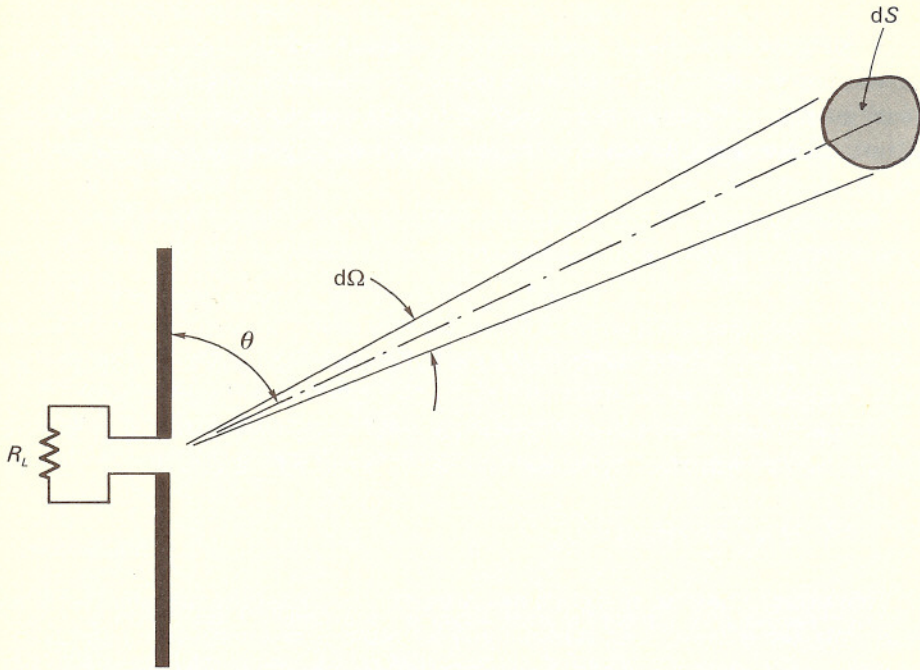


Figura 5.15
Antenna in presenza di un corpo nero.

in gradi Kelvin. La brillantezza è la potenza irradiata dall'unità di superficie del corpo per unità di banda e nell'angolo solido unitario. Un corpo nero di superficie dS irradia in un angolo solido unitario, nella banda Δf , la potenza totale

$$B dS \Delta f = 2KT \frac{dS}{\lambda^2} \Delta f,$$

dove λ è la lunghezza d'onda al centro della banda (molto piccola) Δf . Alla distanza r (vedi fig. 5.15) la densità di potenza irradiata, sempre nella banda Δf , è data da

$$2KT \frac{dS}{\lambda^2} \Delta f \frac{1}{r^2}. \quad [1]$$

La potenza ricevuta dall'antenna e consegnata al carico R_L è data da

$$\begin{aligned} dP_L &= \xi \left[D(\theta, \phi) \frac{\lambda^2}{4\pi} \right] \frac{1}{2} \left[2KT \frac{\Delta f}{\lambda^2} \frac{dS}{r^2} \right] = \\ &= \xi KT \Delta f \frac{D(\theta, \phi) d\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad [2]$$

Nella [2] il primo termine in parentesi quadra è l'area efficace dell'antenna (sup-

posta senza perdite) rispetto alla direzione (θ, ϕ) ; il fattore $1/2$ è stato incluso per tener conto del fatto che l'antenna è in generale sensibile a una sola delle due polarizzazioni in cui il segnale di rumore incidente può venir scomposto (vedi cap. 6); esso viene omissso se l'antenna riceve indifferentemente entrambe le polarizzazioni; il fattore ξ tien conto dell'eventuale disadattamento tra carico e antenna (vedi 5.2.8) e vale in questo caso

$$\xi = \frac{4R_L R_i}{|R_L + Z_i|^2},$$

dove Z_i è l'impedenza d'ingresso dell'antenna riportata ai morsetti del carico. Si noti che $dS/r^2 = d\Omega$ è proprio l'angolo solido sotto il quale l'antenna vede il corpo nero (vedi fig. 5.15).

Se il corpo nero non è perfetto, irradia solo una frazione α della densità di potenza [1]; corrispondentemente, la potenza ricevuta dal resistore R_L è data da

$$dP_L = \xi K T \Delta f D(\theta, \phi) \alpha \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Considerando tutti gli altri corpi neri presenti nello spazio che circonda l'antenna, la potenza totale ricevuta dal resistore può calcolarsi come somma delle potenze elementari. Infatti, trattandosi di rumore, e quindi di sorgenti tra loro incoerenti, vale la regola della sovrapposizione delle potenze. La potenza totale ricevuta dall'antenna e trasmessa al resistore R_L nella banda Δf è quindi data da

$$P_R = \xi \frac{K \Delta f}{4\pi} \int_{4\pi} \alpha(\theta, \phi) D(\theta, \phi) T(\theta, \phi) d\Omega \quad [3]$$

dove si è supposto che, nelle varie direzioni dello spazio, l'antenna possa vedere corpi con diverse emissività α e temperature T .

Alla potenza [3] ricevuta dal resistore R_L , per effetto dell'irradiazione dell'ambiente esterno sull'antenna, va aggiunta la potenza di rumore prodotta dalla stessa antenna e dalla linea di trasmissione, se queste non sono perfettamente conduttrici. In condizioni di equilibrio termodinamico, il resistore restituisce tutta la potenza [3] fornitagli dall'antenna.

E' conveniente attribuire formalmente la potenza di rumore [3] alla resistenza di radiazione dell'antenna, ponendo

$$P_R = \xi K T_R \Delta f. \quad [4]$$

Risolvendo la [4] per l'incognita T_R , si ha

$$T_R = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \alpha(\theta, \phi) D(\theta, \phi) T(\theta, \phi) d\Omega. \quad [5]$$

La grandezza T_R prende il nome di *temperatura di rumore* dell'antenna. Essa è

quella temperatura equivalente che, attribuita alla resistenza di radiazione dell'antenna, fa sì che questa produca lo stesso rumore che l'antenna reale trasmette al carico. Generalmente si incrementa il secondo membro della [5] con l'eventuale potenza di rumore prodotta dall'antenna stessa e dalla linea di trasmissione che connette l'antenna col carico; la temperatura di rumore dell'antenna viene a tener conto anche di questo rumore aggiuntivo.

Se ci si riferisce allo schema equivalente della figura 5.3, la tensione quadratica media di rumore dovuta al rumore che l'antenna riceve dallo spazio circostante risulta

$$V_N^2 = 4 R_i K T_R \Delta f \xi. \quad [6]$$

La [5] mostra come sia importante, ai fini della riduzione della temperatura di rumore, mantenere il più possibile basse le perdite sull'antenna e sulla linea di trasmissione che collega antenna e carico, e mantenere bassi i lobi di radiazione nelle direzioni in cui la temperatura dell'ambiente (generalmente il suolo) è elevata.

Annotazioni

5.5.1 Formula per l'irradiazione del corpo nero nel campo della radiofrequenze

La brillantezza del corpo nero è data dalla formula di Planck

$$B = \frac{2hc/\lambda^3}{\exp(hc/KT\lambda) - 1}, \quad [7]$$

dove h è la costante di Planck. Se $hc/KT\lambda \ll 1$, lo sviluppo in serie della [7] fornisce la formula di Rayleigh-Jeans. La condizione precedente equivale a porre $hf \ll KT$. La formula di Rayleigh-Jeans è dunque valida, quantisticamente, se l'energia del fotone è piccola rispetto a KT .

5.5.2 Temperatura di rumore di un'antenna in uno spazio assorbente a temperatura costante

La formula [5] fornisce, per $\alpha = 1$,

$$T_R = \frac{T}{4\pi} \int_{4\pi} D(\theta, \phi) d\Omega = T$$

perché dalla definizione di direttività (vedi § 4.6, equazione [5]) risulta che l'integrale vale 4π .

5.5.3 Temperatura del cielo, del Sole e della Terra

La Terra è generalmente alla temperatura ambiente ($T \approx 300^\circ \text{K}$). La temperatura del Sole (dal punto di vista del rumore generato in corrispondenza della superficie terrestre) può essere approssimata dalla seguente formula (Hogg e Mumford, 1960):

$$\frac{T}{290} = \frac{675}{f},$$

dove f è la frequenza in gigahertz (la formula è valida tra i 250 MHz e i 35 GHz). La temperatura del cielo è molto variabile ed è abbastanza bassa tra i 10 e i 100 GHz. In questa banda, tuttavia, essendo elevato l'assorbimento atmosferico, la maggior parte del rumore d'antenna è prodotto dall'atmosfera, e la temperatura di rumore dell'antenna è approssimativamente uguale a quella ambiente.

5.6 Riepilogo

In questo capitolo sono state considerate le proprietà dell'antenna legate alla ricezione. A caratterizzare l'antenna sono essenzialmente due parametri: l'*altezza efficace* e l'*area efficace*. La prima (h) è una grandezza che permette di passare dal campo incidente (non perturbato) alla tensione (a vuoto) ai morsetti dell'antenna:

$$V = h \cdot E_i;$$

per il teorema di reciprocità, essa coincide con l'altezza efficace in trasmissione.

La seconda (A) è il fattore di proporzionalità fra la potenza (reale) consegnata al carico, adattato per il massimo trasferimento di potenza, e la densità di potenza incidente sull'antenna, adattata in polarizzazione:

$$P_M = SA.$$

Sempre per il teorema di reciprocità, l'area efficace è proporzionale al guadagno dell'antenna:

$$A = G \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

Area efficace e altezza efficace non sono indipendenti:

$$A = \frac{\zeta}{4R_i} |h|^2.$$

Nota l'altezza efficace è possibile, utilizzando il circuito equivalente dell'antenna in ricezione, calcolare la *tensione sul carico*,

$$V_L = \frac{Z_L}{Z_L + Z_i} E_i \cdot h.$$

e quindi anche il rapporto tra potenze trasmesse e ricevute in un collegamento radio. Se l'antenna ricevente è adattata per il massimo trasferimento di potenza e in polarizzazione, si ha

$$\frac{P_R}{P_T} = G_1 G_2 \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 = \frac{A_1 A_2}{\lambda^2 r^2}.$$

La minima potenza che l'antenna può rivelare dipende dal rumore associato al

segnale in ingresso. Una parte di questo rumore è generato dalla stessa antenna ed eventualmente dalla linea di trasmissione che collega antenna e carico, se questa ha perdite. Un'altra parte è trasmessa all'antenna dall'ambiente. Questa potenza di rumore è data da

$$K T_R \Delta f$$

per un'antenna adattata. La temperatura T_R , che dipende dalle caratteristiche radiative dell'antenna, dalla sua temperatura, dal suo orientamento e dalla temperatura dei corpi circostanti, prende il nome di *temperatura di rumore* dell'antenna.

Riferimenti bibliografici

- Franceschetti G. e Papas C. H., *Mechanical Forces and Torques Associated with Electromagnetic Waves*, J. appl. Phys., 23, 153-61 (1980).
Hogg D. C. e Mumford W. W., *The Effective Noise Temperature of the Sky*, Microwave J., 3, 80-84 (1960).

Capitolo 6

Polarizzazione

I have also been reflecting on the possibility of giving an imperfect explanation of the affection of light which constitutes polarisation, without departing from the genuine doctrine of undulations. It is a principle, in this theory, that all undulations are simply propagated through homogeneous mediums in concentric spherical surfaces, like the undulations of sound, consisting simply in direct and retrograde motions of the particles in the direction of the radius with their concomitant condensation and rarefactions. And yet it is possible to explain in this theory a transverse vibration, propagated also in the direction of the radius, and with equal velocity, the motions of the particles being in certain constant direction with respect to that radius; and this is a polarisation.

Thomas Young, 1817

6.1 Introduzione

Come si è accennato nel paragrafo 2.2, in natura esistono vari fenomeni che per le loro caratteristiche possono essere definiti *di tipo ondoso*. Uno di essi è la propagazione di onde acustiche nell'aria che, com'è noto, è descrivibile in termini delle variazioni spaziotemporali della pressione locale del gas (aria). La propagazione di onde elettromagnetiche in una guida d'onda è un altro esempio di fenomeno ondoso, descrivibile in termini delle variazioni, nel tempo e lungo la guida, del vettore "campo elettrico" (e di quello "magnetico"). La propagazione di onde gravitazionali è un terzo esempio di propagazione ondosa, descrivibile in termini delle variazioni locali del tensore metrico dello spazio. Questi fenomeni hanno tutti un'origine comune, riconducibile matematicamente a uno stesso tipo di equazione (*equazione d'onda*), e fisicamente alla possibile esistenza di perturbazioni propagantisi con velocità finita. E' tuttavia diversa la loro *rappresentazione*, richiedendosi di volta in volta l'uso di funzioni scalari (pressione), vettoriali (campo elettrico), tensoriali (metrica dello spazio).

In questo capitolo si considera il problema della rappresentazione delle caratteristiche vettoriali del campo elettromagnetico (per ora monocromatico).

Nel caso più generale, la polarizzazione del campo è ellittica, cioè, nel dominio del tempo, l'estremo del vettore rappresentativo del campo descrive un'ellisse, ruotando con velocità angolare (rispetto a un asse ortogonale al piano dell'ellisse) non costante, ma tale da descrivere tutta l'ellisse in un tempo $T = 2\pi/\omega$. L'ellisse può degenerare in un segmento (polarizzazione lineare) o in una circonferenza (polarizzazione circolare). D'altra parte, com'è illustrato in 6.1.1, una qualsiasi polarizzazione ellittica può essere scomposta in due polarizzazioni, lineari o circolari (rotanti in senso opposto). Ciascuna di queste due polarizzazioni può essere assunta come *base di rappresentazione*, atta a individuare uno stato di polarizzazione arbitrario.

Nel dominio della frequenza sia:

$$\begin{aligned} L_1 &= a i_x, & L_2 &= b i_y \\ C_1 &= \frac{a+b}{2} (i_x - j i_y), & C_2 &= \frac{a-b}{2} (i_x + j i_y). \end{aligned}$$

E' immediato verificare che

$$L_1 \cdot L_2^* = C_1 \cdot C_2^* = 0;$$

i vettori L_1 , L_2 e C_1 , C_2 sono ortogonali. Due possibili basi di rappresentazione (normalizzate, e usando per semplicità gli stessi simboli) sono

$$\begin{aligned} L_1 &= i_x, & L_2 &= i_y \\ C_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i_x - j i_y), & C_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (i_x + j i_y). \end{aligned}$$

Non è questa però l'unica scelta possibile. Sia dato infatti, più in generale, un campo vettoriale (nel dominio della frequenza) A definito su una superficie S . Sulla stessa superficie si consideri una polarizzazione di riferimento rappresentata dal fasore (in generale complesso) p , convenientemente normalizzato in modo che

$$p \cdot p^* = 1, \quad [1]$$

e la polarizzazione a questa *ortogonale*, rappresentata dal fasore q tale che

$$q \cdot q^* = 1 \quad (\text{normalizzazione}) \quad [2]$$

$$p \cdot q^* = 0 \quad (\text{ortogonalità}). \quad [3]$$

Com'è illustrato in 6.1.3, l'arbitrario vettore A è rappresentabile nella base (p, q) nel modo seguente:

$$A = (A \cdot p^*) p + (A \cdot q^*) q = A_p p + A_q q.$$

Le espressioni [2] e [3] generalizzano al caso di versori di riferimento complessi la nozione di ortogonalità (locale), sulla superficie S , dei versori reali ordinari. Infatti, se

p e q sono reali, le [3] non sono altro che la definizione di versori localmente mutuamente ortogonali. Nelle applicazioni alle antenne si definiscono *componenti co-polari* e *cross-polari* del campo le componenti A_p e A_q (vedi 6.1.4 e 6.1.5); esse individuano completamente lo stato di polarizzazione del campo. L'uso di vettori di riferimento complessi è dettato dalla necessità di considerare polarizzazioni non solo lineari, ma più in generale circolari o ellittiche.

Esistono anche altre rappresentazioni della polarizzazione, in un certo senso più astratte; esse vengono considerate nel paragrafo 6.2.

Annotazioni

6.1.1 Scomposizione di una polarizzazione ellittica in una coppia di polarizzazioni lineari o circolari

Sia dato un vettore $f(t)$ polarizzato ellitticamente. In un sistema d'assi cartesiani coincidenti con gli assi principali dell'ellisse (vedi fig. 6.1) si scrive, com'è ovvio,

$$f(t) = f_x(t) i_x + f_y(t) i_y = l_1(t) + l_2(t)$$

$$\frac{f_x^2}{a^2} + \frac{f_y^2}{b^2} = 1, \quad \text{tg } \gamma(t) = \frac{f_y(t)}{f_x(t)},$$

dove i due vettori

$$l_1(t) = a \cos \omega t i_x$$

$$l_2(t) = b \sin \omega t i_y$$

sono polarizzati linearmente.

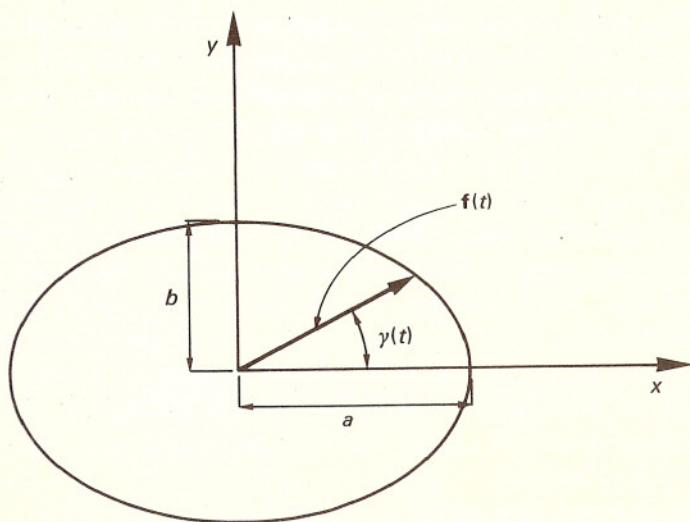


Figura 6.1

Mediante le due polarizzazioni lineari l_1, l_2 si può quindi ricostruire la polarizzazione ellittica $f(t)$. In alternativa, si possono considerare i due nuovi vettori

$$c_1(t) = \frac{a+b}{2} \cos(\omega t) i_x + \frac{a+b}{2} \sin(\omega t) i_y$$

$$c_2(t) = \frac{a-b}{2} \cos(\omega t) i_x - \frac{a-b}{2} \sin(\omega t) i_y;$$

il primo descrive una polarizzazione circolare, di velocità angolare ω e ampiezza $(a+b)/2$, il secondo ancora una polarizzazione circolare, di velocità angolare $-\omega$ e ampiezza $|a-b|/2$.

Dal momento che $c_1 + c_2 = l_1 + l_2$, la composizione dei due vettori $c_1(t), c_2(t)$ riproduce ancora l'originaria polarizzazione ellittica.

6.1.2 Polarizzazione di un segnale a banda stretta

La polarizzazione di un segnale sinusoidale puro è stata studiata nell'annotazione 1.1.12, ove è stato introdotto il concetto di fasore. Il concetto è stato poi generalizzato (in 1.3.4) al caso dei segnali a banda stretta. A un campo a banda stretta, ad esempio elettrico,

$$e(z, t) = e_0(z, t) \cos[\omega_0 t - \beta_0 z + \theta_0(z, t)], \quad [4]$$

corrisponde, nel dominio della frequenza, un fasore

$$E(z, t) = E_0(z, t) \exp(-j\beta_0 z), \quad [5]$$

dove $E_0(z, t)$ è la funzione (vettoriale complessa)

$$\text{Re}\{E_0(z, t) \exp[j(\omega_0 t - \beta_0 z)]\} = e(z, t). \quad [6]$$

Dalle formule precedenti risulta

$$E_0(z, t) = e_0(z, t) \exp[j\theta_0(z, t)],$$

dove sia l'ampiezza $e_0(z, t)$ sia la fase $\theta_0(z, t)$ sono, in accordo all'ipotesi di segnale a banda stretta, funzioni *lentamente variabili* di z e t , rispettivamente nella lunghezza d'onda $\lambda_0 = 2\pi/\beta_0$ e nel periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$ della portante (frequenza spaziale e temporale di centro banda).

Anche per questo segnale a banda stretta può studiarsi la polarizzazione. Consideriamo il vettore

$$e(z, t) = e_x(z, t) i_x + e_y(z, t) i_y, \quad [7]$$

dove nel dominio del tempo

$$e_x(z, t) = a_x(z, t) \cos[\omega_0 t - \beta_0 z + \delta_x(z, t)] \quad [8]$$

$$e_y(z, t) = a_y(z, t) \cos[\omega_0 t - \beta_0 z + \delta_y(z, t)], \quad [9]$$

e nel dominio della frequenza

$$E_x(z, t) = a_x(z, t) \exp[j\delta_x(z, t)] \exp(-j\beta_0 z) = A_x(z, t) \exp(-j\beta_0 z)$$

$$E_y(z, t) = a_y(z, t) \exp[j\delta_y(z, t)] \exp(-j\beta_0 z) = A_y(z, t) \exp(-j\beta_0 z).$$

Le variazioni di $a_x, a_y, \delta_x, \delta_y, A_x, A_y$ sono lente nel senso già precisato.

Com'è facile intuire, la polarizzazione del vettore [7] è lentamente variabile nel tempo (e anche nello spazio). Se ne vogliono ora determinare le caratteristiche al variare del tempo, per un prefissato valore di z (la dipendenza con z è d'ora in poi soppressa, perché irrilevante; nell'argomento delle funzioni circolari il termine $-\beta_0 z$ è assorbito nelle funzioni δ_x, δ_y).

Per eliminare i termini rapidamente variabili, si sviluppa nella [8] il coseno :

$$e_x = a_x [\cos \omega t \cos \delta_x - \sin \omega t \sin \delta_x];$$

dopodiché si esprime $\cos \omega t$ in funzione del $\sin \omega t$, si risolve per quest'ultima funzione e si ottiene

$$\sin \omega t = \frac{-e_x \sin \delta_x \pm \sqrt{a_x^2 - e_x^2} \cos \delta_x}{a_x}.$$

Si ripete il procedimento per $\cos \omega t$:

$$\cos \omega t = \frac{e_x \cos \delta_x \pm \sqrt{a_x^2 - e_x^2} \sin \delta_x}{a_x}$$

Sostituendo queste due espressioni nella [9], quadrando e riordinando i termini si ottiene

$$a_x^2 e_y^2 + a_y^2 e_x^2 - 2e_x e_y a_x a_y \cos \delta = a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta, \quad \delta = \delta_y - \delta_x,$$

che è l'equazione di un'ellisse (vedi fig. 6.2) quando e_x, e_y siano riportati sugli assi x e y rispettivamente.

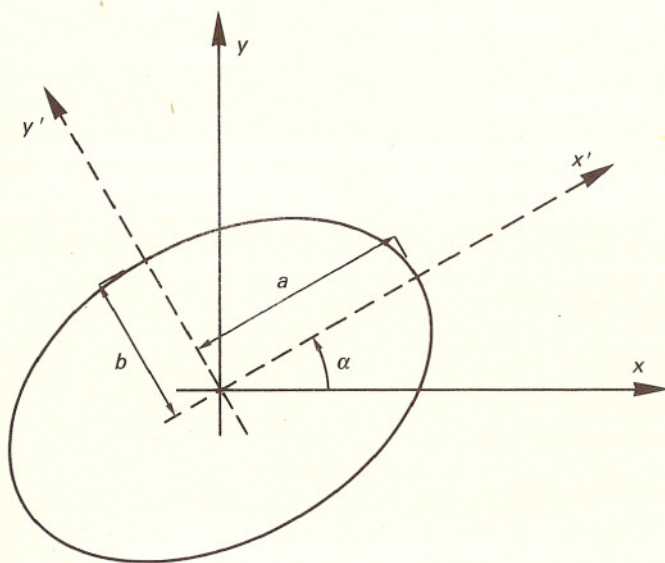


Figura 6.2

Composizione di due vettori di ampiezza e sfasamento reciproco lentamente variabili.

Può essere conveniente operare la rotazione di assi

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{cases}$$

ottenendo la nuova rappresentazione

$$\begin{aligned} & (a_x^2 \sin^2 \alpha + a_y^2 \cos^2 \alpha - a_x a_y \sin 2\alpha \cos \delta) e_x'^2 + \\ & + (a_x^2 \cos^2 \alpha + a_y^2 \sin^2 \alpha + a_x a_y \sin 2\alpha \cos \delta) e_y'^2 + \\ & + (a_x^2 \sin 2\alpha - a_y^2 \sin 2\alpha - 2a_x a_y \cos 2\alpha \cos \delta) e_x' e_y' = \\ & = a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta, \end{aligned}$$

dove e_x' , e_y' sono le componenti del campo elettrico riferite al nuovo sistema di assi. Se

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 - a_y^2}, \quad [10]$$

allora l'ellisse viene riferita a un sistema di assi paralleli ai suoi assi principali e con centro nel centro dell'ellisse (vedi fig. 6.2). Poiché le grandezze al secondo membro della [10] sono funzioni lentamente variabili del tempo, anche l'orientazione dell'ellisse varia lentamente nel tempo.

Rispetto al nuovo riferimento x' , y' , i semiassi dell'ellisse sono dati da

$$\begin{aligned} a &= \frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{a_x^2 \sin^2 \alpha + a_y^2 \cos^2 \alpha - a_x a_y \sin 2\alpha \cos \delta}}, \\ b &= \frac{a_x a_y |\sin \delta|}{\sqrt{a_x^2 \cos^2 \alpha + a_y^2 \sin^2 \alpha + a_x a_y \sin 2\alpha \cos \delta}}, \end{aligned}$$

dove α è dato dalla [10]. Sostituendo questo valore, l'espressione dei semiassi diventa la seguente

$$a = \frac{\sqrt{2} a_x a_y |\sin \delta|}{\left[(a_x^2 + a_y^2) - \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)^2 - 4 a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta} \right]^{1/2}} \quad [11]$$

$$b = \frac{\sqrt{2} a_x a_y |\sin \delta|}{\left[(a_x^2 + a_y^2) + \sqrt{(a_x^2 + a_y^2)^2 - 4 a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta} \right]^{1/2}}. \quad [12]$$

Anche l'ampiezza dei semiassi, dunque, *varia lentamente nel tempo*. Se la variazione lenta è periodica, l'ellisse *pulsa e oscilla*, con lento periodo, in accordo alle [10]-[12].

6.1.3 Scelta dei due vettori di polarizzazione $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$

Vogliamo ora scegliere, su una superficie (localmente) piana, due possibili vettori di polarizzazione $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. Posto

$$\mathbf{p} = p(\mathbf{i}_x + \operatorname{tg} \psi \mathbf{i}_y)$$

$$\mathbf{q} = q(\mathbf{i}_x + \operatorname{tg} \phi \mathbf{i}_y),$$

con ψ e ϕ eventualmente complessi, la condizione di normalizzazione implica che:

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{tg}^2 \psi|}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{1 + |\operatorname{tg}^2 \phi|}}.$$

Inoltre, forzando la condizione di ortogonalità [3],

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^* = p q^* (1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \phi^*) = 0,$$

si ottiene

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \psi^*} = -\operatorname{ctg} \psi^*.$$

In definitiva,

$$\mathbf{p} = \frac{i_x + \operatorname{tg} \psi i_y}{\sqrt{1 + |\operatorname{tg}^2 \psi|}}, \quad \mathbf{q} = \frac{i_x - \operatorname{ctg} \psi^* i_y}{\sqrt{1 + |\operatorname{ctg}^2 \psi|}}.$$

*6.1.4 Componenti copolari e cross-polari del campo (riferimento dipolare)

Nello studio della radiazione da parte di antenne è spesso importante definire e misurare con precisione lo stato di polarizzazione del campo. Il motivo è che a due stati di polarizzazione ortogonali (secondo la [3]) possono essere affidati messaggi diversi, ciascuno dei quali può essere ricevuto indipendentemente da antenne sensibili a una sola delle due polarizzazioni. E' questa la cosiddetta *riutilizzazione di frequenza* (*frequency reuse*), che permette di raddoppiare la capacità del canale senza raddoppiare la banda trasmessa.

Sono state proposte varie sorgenti di riferimento (Ludwig, 1973) per definire lo stato di polarizzazione copolare del campo e quello cross-polare.

Una prima sorgente di riferimento è quella di un dipolo elettrico elementare, che può essere orientato secondo l'asse x (vedi fig. 6.3a) o l'asse y (vedi fig. 6.3b). Si prende come polarizzazione di riferimento quella del campo elettrico a grande distanza; nella figura sono rappresentate le *linee di polarizzazione*, cioè le linee alle quali in ogni punto sono tangenti i vettori $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}'$ (in questo caso reali).

Il modo più semplice per calcolare il campo irradiato dal dipolo elementare orientato secondo i_x è partire dalla espressione del potenziale vettore

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mu \frac{I \Delta l}{4\pi r} \exp(-j\beta r) i_x = \\ &= \mu \frac{I \Delta l}{4\pi r} \exp(-j\beta r) (\cos \phi \sin \theta i_r + \cos \phi \cos \theta i_\theta - \sin \phi i_\phi) \end{aligned}$$

dove (r, θ, ϕ) sono le usuali coordinate sferiche (di asse di riferimento z per gli angoli θ e x per gli angoli ϕ). Calcolando il campo elettrico (a grande distanza) e normalizzandolo all'unità, si definisce il vettore $\mathbf{p}$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} (\cos \theta \cos \phi i_\theta - \sin \phi i_\phi). \quad [13]$$

Il vettore ortogonale $\mathbf{q}$ può calcolarsi utilizzando le condizioni [2] e [3]; si ha

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \phi}} (\sin \phi i_\theta + \cos \theta \cos \phi i_\phi).$$

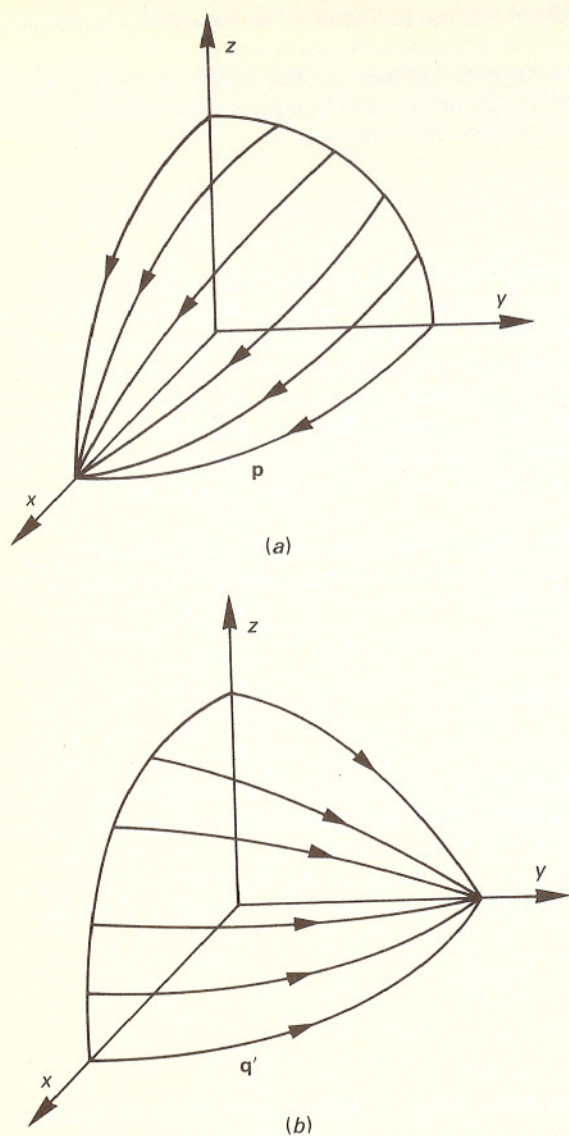


Figura 6.3

Linee di polarizzazione per sorgente di riferimento dipolare: (a) orientate secondo x ; (b) orientate secondo y .

Considerando ora il campo irradiato dal dipolo elettrico orientato secondo l'asse y , si definisce il vettore

$$\mathbf{q}' = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \phi}} (\cos \theta \sin \phi \mathbf{i}_\theta + \cos \phi \mathbf{i}_\phi). \quad [14]$$

Il vettore $\mathbf{q}'$ non è ortogonale al vettore $\mathbf{p}$. Tuttavia l'ortogonalità è verificata per piccoli angoli, che sono quelli che interessano nelle applicazioni. Con buona approssimazione, se non si è troppo discosti dall'asse z , due dipoli elettrici elementari ortogonali forniscono un possibile riferimento per la misura della polarizzazione su una sfera, che è proprio quel che interessa nelle applicazioni.

*6.1.5 Componenti copolari e cross-polari del campo (riferimento: sorgente di Huygens)

La scelta di una sorgente di riferimento dipolare, presentata in 6.1.4 soffre di due limitazioni. Per prima cosa, fissate le componenti copolari del campo, quelle cross-polari non corrispondono esattamente a una sorgente di riferimento ruotata di $\pi/2$ rispetto a quella relativa alle componenti co-polari. Inoltre, cosa più importante, la scelta non si sposa logicamente alle tecniche usuali utilizzate per la misura del diagramma di radiazione di antenne (Hollis, Lyon e Clayton, 1970). Un'altra e migliore definizione fa riferimento a sorgenti di Huygens elementari (vedi 4.3.6), con il relativo dipolo elettrico orientato secondo l'asse x (vedi fig. 6.4a) o l'asse y (vedi fig. 6.4b).

Nel caso di sorgente di Huygens con dipolo elettrico orientato secondo l'asse x , questo produce un campo elettrico (a grande distanza, vedi § 4.3, relazione [11]) che, dopo la normalizzazione, è dato da

$$\mathbf{p} = \cos \phi \mathbf{i}_\theta - \sin \phi \mathbf{i}_\phi. \quad [15]$$

Il vettore ortogonale a $\mathbf{p}$ è dato dunque da

$$\mathbf{q} = \sin \phi \mathbf{i}_\theta + \cos \phi \mathbf{i}_\phi. \quad [16]$$

Considerando ora una sorgente di Huygens col dipolo elettrico diretto secondo $\mathbf{i}_y$ e quello magnetico secondo $-\mathbf{i}_x$, il campo elettrico da essa irradiato a grande distanza (vedi § 4.3, relazione [10]) è dato, una volta normalizzato, esattamente dalla [16]. Con queste definizioni per i vettori $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, le componenti copolari e cross-polari del campo sono dunque riferite a *due sorgenti elementari di Huygens mutuamente ortogonali*.

6.2 I parametri di Stokes

Consideriamo due segnali, ad esempio campi elettrici, puramente sinusoidali, i cui fasori siano dati da

$$\mathbf{E}_x = a_x \exp(j\delta_x) \mathbf{i}_x$$

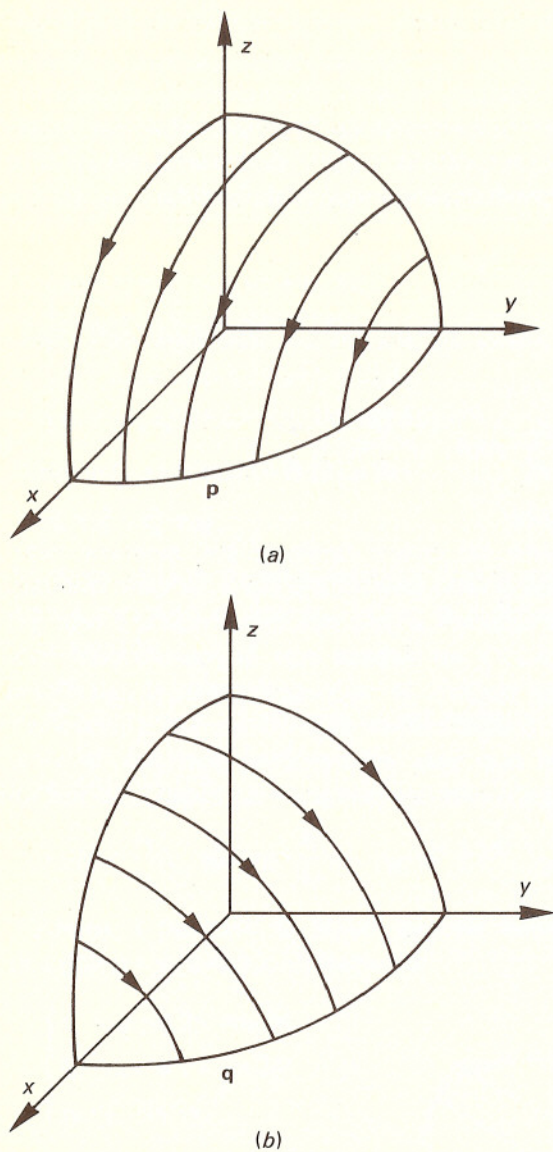
$$\mathbf{E}_y = a_y \exp(j\delta_y) \mathbf{i}_y.$$

Nel dominio del tempo, a questi fasori corrispondono le oscillazioni

$$\mathbf{e}_x(t) = a_x \cos(\omega t + \delta_x) \mathbf{i}_x$$

$$\mathbf{e}_y(t) = a_y \cos(\omega t + \delta_y) \mathbf{i}_y.$$

Si può eliminare il parametro temporale ωt , ottenendo (vedi 6.1.2, dove $a_x, a_y, \delta_x,$

**Figura 6.4**

Linee di polarizzazione (con sorgenti di riferimento di tipo Huygens) con dipolo elettrico: (a) orientato secondo l'asse x , (b) orientato secondo l'asse y .

δ_y sono ora da riguardare come costanti nel tempo, ed eventualmente variabili con la coordinata spaziale):

$$\left(\frac{e_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{a_y}\right)^2 - 2 \frac{e_x}{a_x} \frac{e_y}{a_y} \cos \delta = \sin^2 \delta,$$

dove

$$\delta = \delta_y - \delta_x.$$

Presi e_x e e_y come assi coordinati, è evidente che l'estremo del vettore risultante descrive una ellisse centrata in $e_x = e_y = 0$. Si constata facilmente (vedi 6.1.2) che l'ellisse è caratterizzata da un *angolo di orientazione* ψ (vedi fig. 6.5)

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2} \cos \delta, \quad 0 < \psi < \pi/2, \quad [1]$$

e che i due semiassi maggiore e minore dell'ellisse, a e b , sono legati dalla relazione (vedi 6.2.1)

$$\operatorname{tg} \gamma = \pm \frac{b}{a}, \quad \sin 2\gamma = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 + a_y^2} \sin \delta, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{4}, \quad [2]$$

dove γ è detto *angolo di eccentricità*.

Al variare del tempo, l'estremo del vettore risultante può muoversi, rispetto a un osservatore orientato secondo il verso positivo dell'asse z , in senso antiorario o orario. Nel primo caso, si suol chiamare la polarizzazione *levogira*, e nella [2] si sceglie il segno negativo (vedi 6.2.1); nel secondo caso, la polarizzazione è detta *destrogira*, e viene preso il segno positivo. In modo equivalente, si può affermare che nella polarizzazione levogira, il vettore tende ad avvitarci lungo il verso positivo dell'asse z ; l'opposto accade nel caso della polarizzazione destrogira. Se $\gamma = 0$, la polarizzazione è *lineare*; se $\gamma = \pm \pi/4$ *circolare* (levogira o destrogira); nei casi intermedi, *ellittica*.

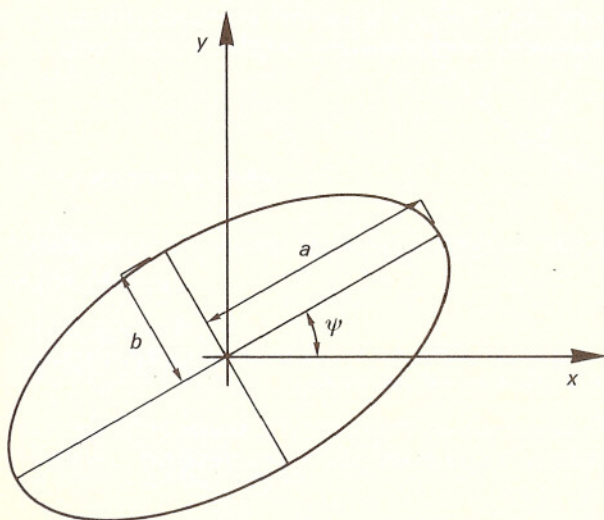


Figura 6.5
Ellisse di polarizzazione.

Per individuare l'ellisse, cioè la polarizzazione dell'onda, è necessario fornire tre parametri, ad esempio le grandezze a_x , a_y e δ , oppure i due semiassi a e b e l'angolo di orientazione ψ . Ovviamente, è anche possibile individuare la polarizzazione mediante un'opportuna combinazione dei precedenti parametri.

Una combinazione molto felice è quella suggerita da Stokes (1852); i parametri che ne derivano, s_0 , s_1 , s_2 , s_3 , sono detti *parametri di Stokes* e sono così definiti:

$$\begin{cases} s_0 = a_x^2 + a_y^2 = E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ s_1 = a_x^2 - a_y^2 = E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ s_2 = 2a_x a_y \cos \delta = E_x E_y^* + E_x^* E_y \\ s_3 = 2a_x a_y \sin \delta = j(E_x E_y^* - E_x^* E_y) \end{cases} \quad [3]$$

Quadrando e sommando le [3] si ha

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad [4]$$

il che mostra che solo tre dei parametri di Stokes sono tra loro indipendenti.

Noti i parametri di Stokes, l'ellisse di polarizzazione è immediatamente individuata, essendo

$$a_x^2 = \frac{s_0 + s_1}{2}, \quad a_y^2 = \frac{s_0 - s_1}{2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{s_3}{s_2}; \quad [5]$$

oppure, dalle [1], [2],

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{s_2}{s_1}, \quad \sin 2\gamma = \frac{s_3}{s_0}, \quad s_0 = a^2 + b^2. \quad [6]$$

Viceversa, i parametri di Stokes possono essere facilmente espressi in termini degli angoli ψ e γ (vedi 6.2.1), ottenendo

$$\begin{cases} s_1 = s_0 \cos 2\gamma \cos 2\psi \\ s_2 = s_0 \cos 2\gamma \sin 2\psi \\ s_3 = s_0 \sin 2\gamma \end{cases} \quad [7]$$

Poiché la polarizzazione lineare corrisponde a $\gamma=0$ ($b=0$), essa è caratterizzata da $s_3=0$. La polarizzazione circolare corrisponde invece a $\gamma=\pm\pi/4$, per essa $s_1=s_2=0$.

In virtù della relazione [4], al variare della polarizzazione dell'onda, il punto di coordinate cartesiane (s_1 , s_2 , s_3) deve giacere su una superficie sferica di raggio s_0 (vedi fig. 6.6). Per le [6], la latitudine del punto è pari a 2γ , e la longitudine a 2ψ . Questa sfera è detta di *Poincaré*; su essa ciascun punto corrisponde a uno stato di polarizzazione. In particolare, la polarizzazione lineare ($s_3=0$) è rappresentata dai punti dell'equatore; la polarizzazione circolare ($s_1=s_2=0$) dai due poli, il polo

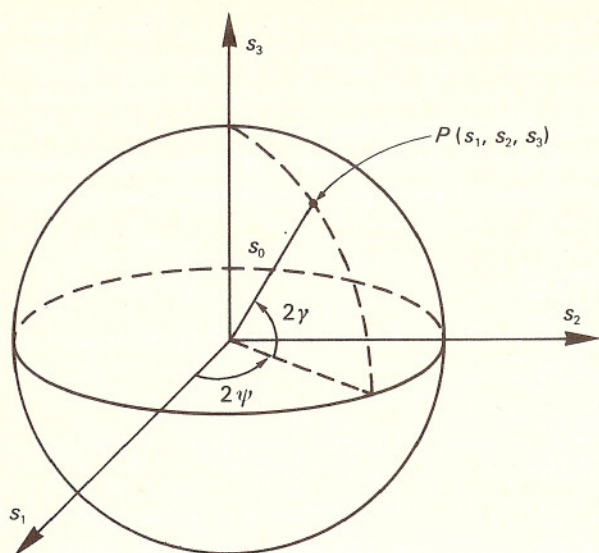


Figura 6.6
Sfera di Poincaré.

nord ($s_3 > 0$) quella destrogira e il polo sud ($s_3 < 0$) quella levogira. Più in generale, l'emisfero nord della sfera rappresenta tutti i possibili casi di polarizzazione ellittica destrogira, l'emisfero sud tutti i possibili casi di polarizzazione ellittica levogira.

Annotazioni

*6.2.1 Parametri dell'ellisse di polarizzazione

Dati due vettori

$$e_x(t) = a_x \cos(\omega t + \delta_x) i_x$$

$$e_y(t) = a_y \cos(\omega t + \delta_y) i_y,$$

la loro composizione $\mathbf{e} = e_x + e_y$ è un vettore che giace nel piano (x, y) ed è polarizzato ellitticamente. L'estremo del vettore giace su un'ellisse e forma, istante per istante, un angolo α con l'asse x dato da

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_y \cos(\omega t + \delta_y)}{a_x \cos(\omega t + \delta_x)}.$$

L'ellisse è percorsa con velocità angolare istantanea

$$\Omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \omega \frac{a_x a_y \sin \delta}{e^2(t)},$$

una rotazione completa effettuandosi in un tempo $T = 2\pi/\omega$.

Un'asse principale dell'ellisse (vedi 6.1.2) forma con l'asse x un angolo ψ , dove

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2a_x a_y}{a_x^2 - a_y^2} \cos \delta = \frac{s_2}{s_1}, \quad [8]$$

l'altro asse formando ovviamente un angolo $\psi + \pi/2$. Gli assi a , b dell'ellisse risultano dati da (vedi 6.1.2)

$$a^2 = \frac{a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta}{a_x^2 \sin^2 \psi + a_y^2 \cos^2 \psi - a_x a_y \sin 2\psi \cos \delta}$$

$$b^2 = \frac{a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta}{a_x^2 \cos^2 \psi + a_y^2 \sin^2 \psi + a_x a_y \sin 2\psi \cos \delta},$$

o anche, in funzione dei parametri di Stokes, da

$$a^2 = \frac{1}{2} \frac{s_3^2}{s_0 - (s_1 \cos 2\psi + s_2 \sin 2\psi)}$$

$$b^2 = \frac{1}{2} \frac{s_3^2}{s_0 + (s_1 \cos 2\psi + s_2 \sin 2\psi)}.$$

Ne consegue

$$\sin 2\gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = \frac{2 \frac{b}{a}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{s_0^2 - (s_1 \cos 2\psi + s_2 \sin 2\psi)^2}}{s_0},$$

e, utilizzando la [4],

$$\sin 2\gamma = \frac{\sqrt{s_3^2 + (s_1 \sin 2\psi - s_2 \cos 2\psi)^2}}{s_0}.$$

In base alle prime due delle [7] la quantità nella parentesi è nulla, e pertanto si ottiene

$$\sin 2\gamma = \frac{s_3}{s_0} = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{a_x^2 + a_y^2}. \quad [9]$$

Dalle [8] e [9] si ha

$$s_3 = s_0 \sin 2\gamma$$

$$s_2 = s_1 \operatorname{tg} 2\psi.$$

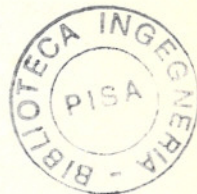
Sostituendo nelle [4]:

$$s_0^2 = s_1^2 (1 + \operatorname{tg}^2 2\psi) + s_0^2 \sin^2 2\gamma,$$

cioè

$$s_1 = s_0 \cos 2\gamma \cos 2\psi.$$

Si ricavano così le relazioni [7] tra i parametri di Stokes e gli angoli di orientazione



ed eccentricità. E' ancora utile notare che

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{s_0 s_3^2}{s_0^2 - (s_1 \cos 2\psi + s_2 \sin 2\psi)^2} = \\ &= \frac{s_0 s_3^2}{(s_1 \sin 2\psi - s_2 \cos 2\psi)^2 + s_3^2} = s_0 = a_x^2 + a_y^2, \end{aligned}$$

dove si è utilizzato prima la [4] e poi le prime due delle [7].

Resta da giustificare il doppio segno che appare nella [2] nella definizione dell'angolo γ ; il segno positivo si ha per $\delta > 0$, e cioè $\delta_y > \delta_x$ se a_x e a_y sono positivi. Al tempo $t = 0$ si ha

$$e_x(0) = a_x \cos \delta_x$$

$$e_y(0) = a_y \cos \delta_y;$$

questi valori sono supposti entrambi positivi. Se $\delta_y > \delta_x$, $e_y(t)$ cambia segno allorché $\omega t = \pi/2 - \delta_y$, prima cioè dell'istante in cui cambia segno $e_x(t)$. Pertanto la polarizzazione è destrogira.

6.2.2 Parametri di Stokes in guida d'onda

Sia data una guida d'onda rettangolare in cui si propagano i due modi TE_{10} e TE_{01} (vedi fig. 6.7). I rispettivi campi elettrici, E_1 e E_2 , sono dati da

$$E_1 = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-j\beta_1 z) i_y, \quad \beta_1^2 = \beta^2 - (\pi/a)^2$$

$$E_2 = A_2 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \exp(-j\beta_2 z) i_x, \quad \beta_2^2 = \beta^2 - (\pi/b)^2$$

Per semplicità, A_1 e A_2 sono supposti reali.

Si ha

$$s_0 = A_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{b} y\right) + A_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

$$s_1 = A_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{b} y\right) - A_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

$$s_2 = 2A_1 A_2 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cos[(\beta_2 - \beta_1) z]$$

$$s_3 = 2A_1 A_2 \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin[(\beta_2 - \beta_1) z].$$

Di conseguenza, sia l'angolo di polarizzazione sia quello di orientazione variano con x , y e z . In particolare, la polarizzazione è lineare nei punti di ascissa z'' ,

$$z'' = \frac{n\pi}{\beta_2 - \beta_1},$$

e circolare nei punti di coordinate

$$z' = \frac{(2n+1)\pi/2}{\beta_2 - \beta_1}, \quad A_2 \sin\left(\frac{\pi}{b} y'\right) = A_1 \sin\left(\frac{\pi}{a} x'\right).$$

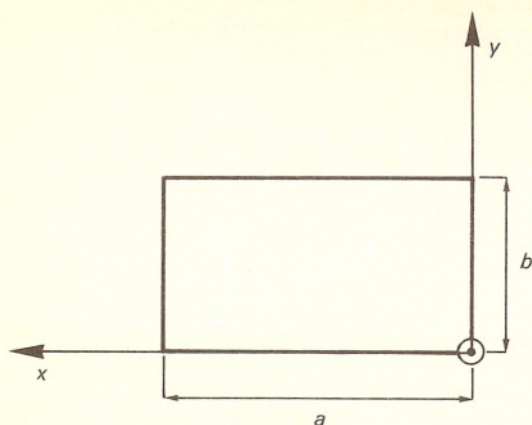


Figura 6.7

Sezione della guida d'onda rettangolare nella quale si propagano i modi TE_{10} e TE_{01} .

6.2.3 Parametri di Stokes nel caso di modi accoppiati

Come si è visto in 6.2.3, la presenza nella guida di due modi, propagantisi con diversa velocità di fase, porta a una *modulazione spaziale* della polarizzazione, con periodo $2\pi/(\beta_2 - \beta_1)$, cioè inversamente proporzionale alla differenza delle costanti di propagazione. Se i due modi si propagassero con identica velocità di fase (*modi degeneri*), la polarizzazione del vettore risultante dalla loro somma, pur variando nella sezione trasversale, non varierebbe con z . In molte situazioni pratiche, tuttavia, la degenerazione dei modi scompare. Un primo esempio è quello delle guide con pareti non perfettamente conduttrici. Modi degeneri (per esempio, i TE e TM con uguali indici in guide d'onda rettangolari), ma con differente distribuzione trasversale, sono modificati in modo diverso dalla presenza delle perdite sulle pareti, e la degenerazione scompare. Un secondo esempio, molto importante per le applicazioni, è quello della propagazione unimodale in *fibra ottica* (cioè della propagazione lungo un cilindro dielettrico).

Con riferimento a quest'ultimo caso (vedi fig. 6.8), il modo fondamentale può propagarsi per una qualunque orientazione iniziale, data la simmetria cilindrica della struttura; nella figura sono rappresentate due possibili orientazioni, l'una ottenuta dall'altra con una rotazione di $\pi/2$. A ciascuna di esse corrispondono due modi, degeneri (perché la costante di propagazione è la stessa) e tra loro disaccoppiati (data l'ortogonalità spaziale dei campi trasversali) se la fibra è ideale. Le inevitabili disomogeneità nella sezione trasversale della guida, dovute ad esempio ad azioni meccaniche (curvatura, torsione), elettrostatiche (campi elettrici di polarizzazione), magnetostatiche (campi magnetici di polarizzazione), hanno due conseguenze: 1) scompare la degenerazione, per la diversa legge con cui variano due costanti di propagazione; 2) i due modi *si accoppiano*. Il secondo fenomeno si giustifica nel modo più semplice osservando le lievi perturbazioni delle caratteristiche della sezione trasversale della fibra possono essere studiate in termini di sorgenti di polarizzazione equivalenti che, eccitate da un modo (relativo alla fibra non perturbata) producono un nuovo campo

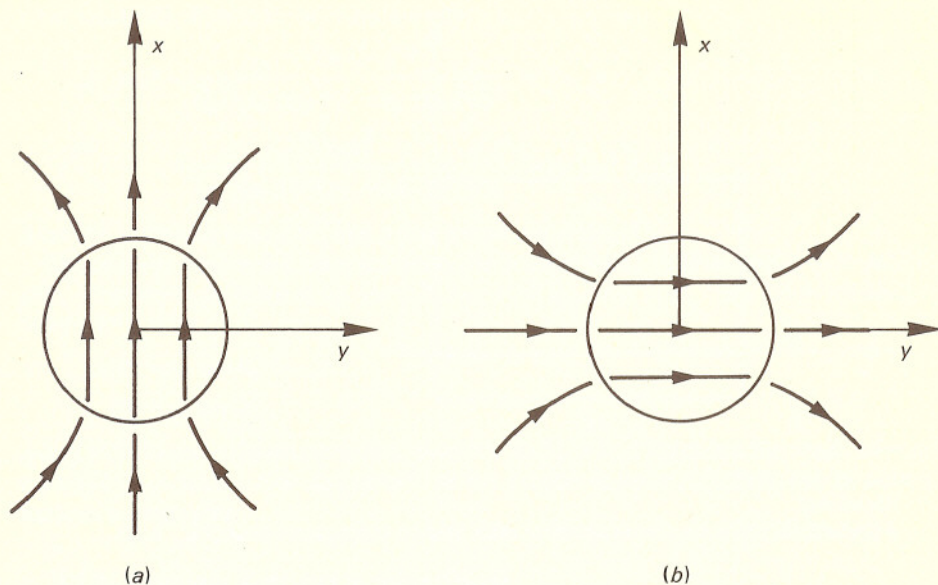


Figura 6.8

Propagazione di due modi spazialmente ortogonali in fibra ottica.

elettromagnetico, sviluppabile anch'esso nei modi della fibra imperturbata. In altri termini, basta sostituire alla sezione perturbata la stessa sezione non perturbata ma contenente generatori equivalenti dipendenti dal campo presente. Si può tener conto dell'accoppiamento tra i modi applicando un processo perturbativo alla soluzione dei modi guidati (Urlich e Simon, 1979). Limitandosi a due soli modi (quelli rappresentati in fig. 6.8a e b) si può usare il modello di due linee da trasmissione accoppiate, ad esempio per induzione (vedi 2.5.13). Dette A_x e A_y le ampiezze dei due modi, il primo polarizzato nell'interno della fibra lungo i_x , il secondo lungo i_y , si ha (Franceschetti e Smith, 1981)

$$\begin{cases} -\frac{dA_x}{dz} = jk_x A_x + j\chi A_y \\ -\frac{dA_y}{dz} = jk_y A_y + j\chi^* A_x \end{cases} \quad [10]$$

k_x , k_y essendo le costanti di propagazione (lungo z) dei due modi e $\chi = \chi_1 + j\chi_2$ la costante di accoppiamento.

Le equazioni [10] sono la generalizzazione delle [29] (§ 2.5). La costante di accoppiamento χ^* è la complessa coniugata dell'omonima costante che compare nella prima equazione. Questo è conseguenza dell'aver supposto che per una fibra senza perdite la potenza reale si conservi lungo l'asse z (come è discusso in 2.5.12).

Derivando le equazioni [3] rispetto a z , e tenuto conto delle [10], si ha (nell'ipotesi di assenza di perdite, cioè per k_x e k_y reali)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_0}{dz} = 0 \\ \frac{ds_1}{dz} = 2\chi_2 s_2 + 2\chi_1 s_3 \\ \frac{ds_2}{dz} = -2\chi_2 s_1 - \kappa s_3 \\ \frac{ds_3}{dz} = -2\chi_1 s_1 + \kappa s_2, \end{array} \right. \quad [11]$$

dove $\kappa = k_x - k_y$.

La prima equazione equivale all'affermare che la potenza totale, proporzionale a $|A_x|^2 + |A_y|^2$, rimane costante lungo z (come dev'essere, dato che la struttura è senza perdite).

Per risolvere il sistema [11] supponiamo che i parametri di Stokes varino con z con una legge del tipo $\exp(-j\eta z)$. Sostituendo nelle [11] si ottiene un sistema omogeneo, il cui determinante deve essere nullo perché si possa avere una soluzione non identicamente nulla:

$$\begin{vmatrix} j\eta & 2\chi_2 & 2\chi_1 \\ -2\chi_2 & j\eta & -\kappa \\ -2\chi_1 & \kappa & j\eta \end{vmatrix} = 0,$$

cioè

$$\eta = 0 \quad \text{oppure} \quad \eta = \pm \sqrt{4|\chi|^2 + \kappa^2} = \pm \tau.$$

Pertanto la soluzione generale per il generico parametro di Stokes è del tipo

$$s_i(z) = A_i + B_i \cos \tau z + C_i \sin \tau z,$$

dove le costanti vanno scelte in base alle condizioni iniziali (i valori dei parametri nel punto di ascissa $z=0$).

6.2.4 Parametri di Stokes nel caso di modi accoppiati: accordo di fase (esercizio)

Se le costanti di propagazione dei due modi sono uguali, se cioè $\kappa=0$, si dice che essi sono in *accordo di fase*. La variazione della polarizzazione lungo l'asse z della fibra è dovuta al supposto accoppiamento tra i modi.

In queste condizioni, si calcoli la legge di variazione dei parametri di Stokes considerando separatamente i due casi $\chi_1=0$, $\chi_2 \neq 0$, e $\chi_1 \neq 0$, $\chi_2=0$. Si trovino quei valori della polarizzazione in ingresso che si propagano indisturbati (*autostati di polarizzazione*).

6.3 Onde polarizzate e onde non polarizzate

Nel paragrafo 6.2 si è mostrato che per un'onda monocromatica lo stato di polarizzazione è perfettamente individuato dai corrispondenti parametri di Stokes. Si è

anche visto (6.1.2) che per un segnale a banda stretta può ancora definirsi un'ellisse di polarizzazione, i cui assi e la cui orientazione, tuttavia, variano lentamente nel tempo (rispetto al periodo della pulsazione di centro banda).

Molto interessante è il caso in cui le variazioni temporali (lente) delle ampiezze e delle fasi delle grandezze che si considerano sono *irregolari*. Dati i due segnali associati a vettori mutuamente ortogonali,

$$\begin{cases} e_x(t) = a_x(t) \cos[\omega t + \delta_x(t)] \\ e_y(t) = a_y(t) \cos[\omega t + \delta_y(t)], \quad \delta(t) = \delta_y(t) - \delta_x(t), \end{cases}$$

dove $a_x(t)$, $a_y(t)$, $\delta(t)$ sono funzioni lentamente variabili, la loro evoluzione temporale non è prevedibile a priori, ma è piuttosto una funzione casuale. Non si deve però ritenere che tra queste grandezze non possa esistere una relazione di correlazione. Nel caso, ad esempio, dell'emissione di luce da una sorgente a bassa coerenza, la frequenza istantanea, l'ampiezza e l'orientamento del campo elettromagnetico variano sì in modo irregolare, ma non tale che i valori di dette grandezze in successivi istanti di tempo siano del tutto incorrelati. Si intuisce che la relazione di correlazione è tanto più stretta quanto maggiore è la coerenza della sorgente; ed è proprio tale correlazione tra le grandezze temporali che determina il grado di polarizzazione del segnale.

Consideriamo ancora i parametri di Stokes, soggetti a variazioni irregolari in funzione del tempo. Per eliminare questa variazione irregolare, si introducono i parametri (si usano per semplicità gli stessi simboli)

$$\begin{cases} s_0 = \langle a_x^2(t) \rangle + \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_1 = \langle a_x^2(t) \rangle - \langle a_y^2(t) \rangle \\ s_2 = 2 \langle a_x(t) a_y(t) \cos \delta(t) \rangle \\ s_3 = 2 \langle a_x(t) a_y(t) \sin \delta(t) \rangle; \end{cases} \quad [1]$$

si considerano cioè i *valori medi* delle [3] (§ 6.2) su tempi lunghi rispetto al periodo caratteristico della variazione irregolare (lenta) delle grandezze. Si constata che i quattro parametri di Stokes [1] (vedi 6.3.1) sono legati dalla relazione

$$s_0^2 \geq s_1^2 + s_2^2 + s_3^2, \quad [2]$$

che generalizza la [4] a questo caso di segnali non esattamente monocromatici.

Con riferimento alla figura 6.9 consideriamo ora la seguente esperienza. Con uno strumento sensibile solo al valore del campo lungo la direzione θ , misuriamone, in tale direzione, il valore istantaneo:

$$e_\theta(t) = e_x(t) \cos \theta + e_y(t) \sin \theta.$$

Supponendo di poter variare la fase di e_y rispetto a e_x di una quantità arbitraria Δ , si ha

$$e_\theta(t) = a_x(t) \cos[\omega t + \delta_x(t)] \cos \theta + a_y(t) \cos[\omega t + \delta_y(t) + \Delta] \sin \theta.$$

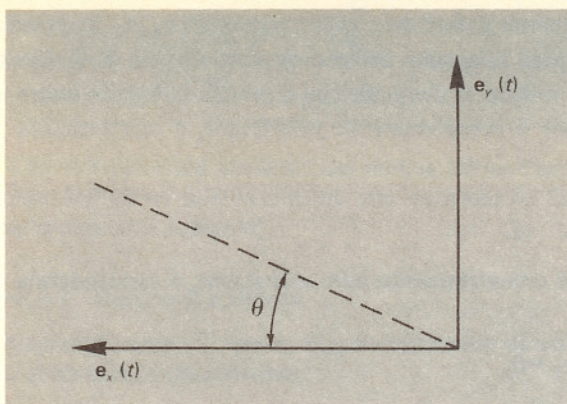


Figura 6.9

Misura del valore istantaneo del fasore del campo elettrico nella direzione θ .

La potenza istantanea del segnale misurato è proporzionale a $e_{\theta}^2(t)$. Il valore medio nel periodo $T=2\pi/\omega$ può essere calcolato ritenendo le grandezze lentamente variabili costanti in T . Per la grandezza $f(t)$ proporzionale a questa potenza media in T , si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{2}{T} \int_0^T e_{\theta}^2(t) dt = \\ &= a_x^2 \cos^2 \theta + a_y^2 \sin^2 \theta + 2a_x a_y \cos \theta \sin \theta \cdot \\ &\quad \cdot [\cos \delta_x \cos(\delta_y + \Delta) + \sin \delta_x \sin(\delta_y + \Delta)] = \\ &= a_x^2 \cos^2 \theta + a_y^2 \sin^2 \theta + a_x a_y \sin 2\theta (\cos \delta \cos \Delta - \sin \delta \sin \Delta). \end{aligned}$$

Questa grandezza è lentamente variabile nel tempo; il suo valore medio è proporzionale alla potenza media, o *intensità*, associata alla parte di campo polarizzato nella direzione θ . Si ha:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \langle f(t) \rangle = \langle a_x^2 \rangle \cos^2 \theta + \langle a_y^2 \rangle \sin^2 \theta + \\ &\quad + [\langle a_x a_y \cos \delta \rangle \cos \Delta - \langle a_x a_y \sin \delta \rangle \sin \Delta] \sin 2\theta = \\ &= \frac{1}{2} \{s_0 + s_1 \cos 2\theta + (s_2 \cos \Delta - s_3 \sin \Delta) \sin 2\theta\}. \end{aligned} \quad [3]$$

L'onda si dice *totalmente non polarizzata* se la sua intensità è sempre la stessa, qualunque siano l'angolo θ lungo il quale viene effettuata la misura e lo sfasamento Δ che può presentare un segnale rispetto all'altro ad esso ortogonale. Perché un'onda sia totalmente non polarizzata dev'essere dunque

$$s_1 = s_2 = s_3 = 0, \quad [4]$$

l'intensità dell'onda essendo data da

$$I = \frac{1}{2} s_0. \quad [5]$$

In generale, l'onda è *parzialmente polarizzata*, cioè i parametri s_1, s_2, s_3 possono essere diversi da zero, essendo però la somma dei loro quadrati minore di s_0^2 . L'onda si può allora decomporre nella somma di due onde che si mostra in seguito essere tra loro *incorrelate*. La prima onda è completamente *polarizzata*, e caratterizzata da parametri di Stokes

$$s_0^{(1)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3;$$

la seconda onda, al contrario, è completamente *non polarizzata*, e caratterizzata da parametri di Stokes

$$s_0^{(2)} = s_0 - s_0^{(1)}, \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0.$$

Si noti che, per le definizioni precedenti di parte polarizzata e non dell'onda, i parametri di Stokes dell'onda totale sono la somma degli omonimi parametri delle due onde parziali. Poiché i parametri di Stokes sono grandezze quadratiche e relative alla potenza media del segnale (vedi equazioni [3]), la precedente proprietà stabilisce che i segnali associati a queste due onde parziali sono tra loro incorrelati.

Annotazioni

6.3.1 Relazione tra i parametri di Stokes per onde non completamente polarizzate

Osserviamo anzitutto che per ogni funzione $f(t) = \langle f(t) \rangle + \Delta f(t)$,

$$\langle f^2(t) \rangle = \langle f(t) \rangle^2 + \langle [\Delta f(t)]^2 \rangle,$$

cosicché

$$\langle f^2 \rangle \geq \langle f \rangle^2,$$

l'uguaglianza avendosi per $f(t)$ costante. Ne consegue

$$\langle (a_x^2 - a_y^2)^2 \rangle = \langle a_x^4 \rangle + \langle a_y^4 \rangle - 2\langle a_x^2 a_y^2 \rangle \geq \langle a_x^2 \rangle^2 + \langle a_y^2 \rangle^2 - 2\langle a_x^2 \rangle \langle a_y^2 \rangle = s_1^2$$

$$4\langle a_x^2 a_y^2 \cos^2 \delta \rangle \geq 4\langle a_x a_y \cos \delta \rangle^2 = s_2^2$$

$$4\langle a_x^2 a_y^2 \sin^2 \delta \rangle \geq 4\langle a_x a_y \sin \delta \rangle^2 = s_3^2,$$

e ancora

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq \langle a_x^4 \rangle + \langle a_y^4 \rangle - 2\langle a_x^2 a_y^2 \rangle + 4\langle a_x^2 a_y^2 \rangle = s_0^2.$$

6.3.2 Stabilità di polarizzazione nel caso di onda policromatica

Poiché per le [6] (§ 6.2), è

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2a_x a_y \cos \delta}{a_x^2 - a_y^2} = \frac{2 \frac{a_y}{a_x}}{1 - \left(\frac{a_y}{a_x}\right)^2} \cos \delta$$

$$\sin 2\gamma = \frac{2a_x a_y \sin \delta}{a_x^2 + a_y^2} = \frac{2 \frac{a_y}{a_x}}{1 + \left(\frac{a_y}{a_x}\right)^2} \sin \delta,$$

se a_y/a_x e δ sono indipendenti dal tempo, allora l'orientazione e il verso di polarizzazione dell'ellisse non cambiano, pur variando le dimensioni degli assi (il cui rapporto si mantiene costante).

*6.3.3 Matrice di coerenza

Alternativamente il grado di polarizzazione di un'onda si esprime attraverso la cosiddetta *matrice di coerenza*

$$\mathcal{C} \rightarrow \begin{vmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{vmatrix}, \quad [7]$$

ove $C_{pq} = \langle a_p a_q^* \rangle$ e le a_p , a_q sono gli stessi parametri che appaiono nelle [1] con p , $q = x, y$.

Ovviamente, $C_{xy} = C_{yx}^*$; $C_x C_x^*$ e $C_y C_y^*$ sono reali, cosicchè $\mathcal{C}$ è hermitiana.

Gli elementi della matrice di coerenza sono immediatamente riconducibili ai parametri di Stokes utilizzando le relazioni [3] (§ 6.2):

$$\begin{aligned} s_0 &= C_{xx} + C_{yy}, & C_{xx} &= \frac{1}{2} (s_0 + s_1) \\ s_1 &= C_{xx} - C_{yy}, & C_{yy} &= \frac{1}{2} (s_0 - s_1) \\ s_2 &= C_{xy} + C_{yx}, & C_{xy} &= \frac{1}{2} (s_2 - js_3) \\ s_3 &= j(C_{xy} - C_{yx}), & C_{yx} &= \frac{1}{2} (s_2 + js_3). \end{aligned} \quad [8]$$

Se l'onda è completamente non polarizzata,

$$\mathcal{C} \rightarrow \frac{s_0}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

se è parzialmente polarizzata

$$C_{xx} C_{yy} - C_{xy} C_{yx} = |\mathcal{C}| = \frac{1}{4} (s_0^2 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2) \geq 0;$$

se è totalmente polarizzata

$$|\mathcal{C}| = 0.$$

La matrice di coerenza può essere formalmente rappresentata in termini dei parametri di Stokes nel modo seguente

$$\mathcal{C} \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ s_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + s_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + s_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + js_3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\}. \quad [9]$$

In meccanica quantistica, le matrici elementari che appaiono nella [9] prendono il nome di *matrici di spin di Pauli*.

6.3.4 Ricezione di onde parzialmente polarizzate

Sia data, per ora, un'onda piana monocromatica che incide su un'antenna adattata per il massimo trasferimento di potenza. Riferendosi a un sistema di coordinate sferiche centrate sull'antenna, l'onda incidente sia caratterizzata da un vettore di Poynting di ampiezza $S(\theta, \phi)$; la polarizzazione del campo elettrico sia data dal versore (eventualmente complesso) $\mathbf{p}_i$. Se l'antenna ricevente è caratterizzata da un guadagno $G(\theta, \phi)$ e irradia nella direzione (θ, ϕ) , con polarizzazione descritta dal versore (eventualmente complesso) $\mathbf{p}_r$, la potenza trasferita al carico è data da

$$P = \frac{\lambda^2}{4\pi} G(\theta, \phi) S(\theta, \phi) |\mathbf{p}_i(\theta, \phi) \cdot \mathbf{p}_r(\theta, \phi)|^2.$$

Il fattore

$$K(\theta, \phi) = |\mathbf{p}_i(\theta, \phi) \cdot \mathbf{p}_r(\theta, \phi)|^2 \quad [10]$$

coincide con quello di depolarizzazione (vedi 5.2.8). Il valore massimo, 1, si ha per

$$\mathbf{p}_r(\theta, \phi) = \mathbf{p}_i^*(\theta, \phi)$$

avendosi, in questo caso,

$$P = \frac{\lambda^2}{4\pi} G(\theta, \phi) S(\theta, \phi) = A(\theta, \phi) S(\theta, \phi).$$

Se l'onda incidente non è più monocromatica, ma tuttavia a banda stretta (sicché l'adattamento del carico all'antenna possa ritenersi tale in tutta la banda e la sua area efficace possa ritenersi ivi costante), la potenza media ricevuta dall'antenna può ottenersi come media temporale, dove le grandezze lentamente variabili sono solo quelle dell'onda incidente.

A tal fine, conviene scrivere l'espressione della potenza ricevuta P in forma diversa, introducendo le diadi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i &\rightarrow \begin{vmatrix} p_{i\theta} p_{i\theta}^* & p_{i\theta} p_{i\phi}^* \\ p_{i\phi} p_{i\theta}^* & p_{i\phi} p_{i\phi}^* \end{vmatrix} \\ \mathcal{A}_r &\rightarrow \begin{vmatrix} p_{r\theta} p_{r\theta}^* & p_{r\theta} p_{r\phi}^* \\ p_{r\phi} p_{r\theta}^* & p_{r\phi} p_{r\phi}^* \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

La potenza ricevuta si esprime così nella forma compatta

$$P = S(\theta, \phi) A(\theta, \phi) \text{Tr}[\mathcal{A}_r \cdot \tilde{\mathcal{A}}_i],$$

dove con il simbolo Tr si indica la traccia della matrice. Il valor medio della potenza è calcolabile come la media temporale della precedente espressione, dove la grandezza lentamente variabile è $\mathcal{A}_i$ (proporzionale alla matrice di coerenza del segnale incidente) e

$$\langle S(\theta, \phi) \rangle = s_0.$$

Scomposta la matrice $\mathcal{A}_i$ nella parte polarizzata e in quella polarizzata, e suppo-

nendo che l'antenna sia adattata per la prima delle due, si ha

$$P = \frac{1}{2} (1 + m) s_0 A(\theta, \phi),$$

dove $m = s_0^{(1)} / s_0$ è detto *grado di polarizzazione*.

6.4 Riepilogo

In questo capitolo sono state illustrate alcune possibili rappresentazioni della *polarizzazione* del campo elettromagnetico. Una prima possibilità è il fare riferimento a una *base di rappresentazione*. Se interessa la polarizzazione del campo su una superficie assegnata, una base è data da due versori $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, eventualmente complessi, giacenti sulla superficie e tali che

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^* = 0.$$

La polarizzazione del campo è allora individuata dalle componenti di questo nella base prescelta. Nelle applicazioni di antenne è utile scegliere per i versori $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ quelli corrispondenti al campo irradiato da due *areole di Huygens*, con dipoli elettrici (e magnetici) mutuamente ortogonali.

Un modo alternativo di rappresentare la polarizzazione è mediante i *parametri di Stokes*

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3$$

legati tra loro dalla relazione (per campi sinusoidali)

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

L'*angolo di orientazione* ψ e quello di *eccentricità* γ dell'ellisse di polarizzazione sono legati ai parametri di Stokes dalle relazioni

$$\begin{cases} s_1 = s_0 \cos 2\gamma \cos 2\psi \\ s_2 = s_0 \cos 2\gamma \sin 2\psi \\ s_3 = s_0 \sin 2\gamma. \end{cases}$$

Le s_1, s_2, s_3 possono geometricamente interpretarsi come le coordinate cartesiane di un punto di coordinate polari $(s_0, \pi/2 - 2\gamma, 2\psi)$ che giace su una sfera detta di *Poincaré*.

Se il segnale non è monocromatico, ma a banda stretta, i parametri di Stokes possono ancora definirsi come i valori medi temporali delle espressioni considerate per il caso monocromatico. Se le variazioni *lente* delle grandezze del campo sono *irregolari*, ma possibilmente tra loro parzialmente correlate, il campo totale può essere scomposto in una *parte polarizzata*, caratterizzata da parametri di Stokes

$$s_0^{(1)} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}, \quad s_1, \quad s_2, \quad s_3,$$

e in una *parte non polarizzata*, caratterizzata da parametri di Stokes

$$s_0^{(2)} = s_0 - s^{(1)}, \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0.$$

Si può così definire il *grado di polarizzazione* dell'onda

$$m = \frac{s_0^{(1)}}{s_0}$$

che svolge un ruolo importante nel caso di ricezione di onde parzialmente polarizzate (ad esempio in radioastronomia).

Traduzione delle citazioni riportate all'inizio del capitolo

Ho anche riflettuto sulla possibilità di fornire una spiegazione imperfetta di quella caratteristica della luce che costituisce la polarizzazione, senza tuttavia discostarmi dalla teoria originale dell'ondulazione. Vi è l'assunto, in questa teoria, che in un mezzo omogeneo tutte le onde si propagano solo secondo superfici sferiche concentriche, come le ondulazioni del suono; esse consisterebbero semplicemente nel moto di va e vieni delle particelle in direzione del raggio, accompagnato da condensazioni e rarefazioni. E' tuttavia possibile spiegare, nell'ambito di tale teoria, la presenza di una vibrazione trasversale, propagantesi anch'essa nella direzione del raggio e con uguale velocità, mentre il moto delle particelle avviene in una certa direzione, costante rispetto al raggio; e questa è la polarizzazione.

Lettera di T. Young a J.-F. D. Arago (1817).

Riferimenti bibliografici

- Ludwig A. C., *The Definition of Cross Polarisation*, IEEE Trans. Antennas Propagat., 21, 116-19 (gennaio 1973).
- Hollis J. S., Lyon T. J. e Clayton L., *Microwave Antenna Measurements*, (Scientific-Atlanta, Atlanta 1970).
- Franceschetti G. e Smith C. P., *Representation of the Polarisation of Single Mode Fibers using Stokes Parameters*, JOSA, 71, 1487-91 (1981).
- Stokes G. G., *On the Composition and Resolution of Streams of Polarized Light from Different Sources*, Trans. Cambridge Phil. Soc., 9, 399 (1852); rist. in *Mathematical and Physical Papers*, vol. 3 (Cambridge University Press, Londra 1883) pp. 233-58.
- Ulrich R. e Simon A., *Polarization Optics of Twisted Single Mode Fibers*, Appl. Opt., 18, 2241-51 (1979).

Formulario

1 Analisi vettoriale

Relazioni di moltiplicazione

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Relazioni differenziali

Nelle formule seguenti $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono funzioni vettoriali; Φ e Ψ sono funzioni scalari (di punto); sia per le une sia per le altre devono essere soddisfatte opportune condizioni di continuità e di derivabilità.

$$\nabla(\Phi + \Psi) = \nabla\Phi + \nabla\Psi$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla(\Phi\Psi) = \Phi\nabla\Psi + \Psi\nabla\Phi$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = \Phi\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla\Phi \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = \nabla\Phi \times \mathbf{A} + \Phi\nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla \cdot \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla \cdot \nabla\Phi = \nabla^2\Phi$$

$$\nabla \times \nabla\Phi = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\nabla f(\Phi) = f'(\Phi)\nabla\Phi$$

$$\nabla^2(\Phi\Psi) = \Phi\nabla^2\Psi + \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi + \Phi\nabla^2\Psi$$

$$\nabla^2(\Phi\mathbf{A}) = \Phi\nabla^2\mathbf{A} + \mathbf{A}\nabla^2\Phi + 2(\nabla\Phi \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\nabla\nabla \cdot (\Phi\mathbf{A}) = (\nabla\Phi) \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} + \Phi\nabla\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla\Phi \times \nabla \times \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\nabla\Phi + (\nabla\Phi \cdot \nabla)\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = & \nabla\Phi \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A}\nabla^2\Phi + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\nabla\Phi + \Phi\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \\ & + \nabla\Phi \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} - (\nabla\Phi \cdot \nabla)\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Relazioni integrali

Nelle formule seguenti V è il volume limitato da una superficie chiusa S ; il versore $\mathbf{n}$ è normale a S e diretto in senso positivo verso l'esterno.

Curve e superfici limitanti i domini di integrazione sono supposte regolari. Le funzioni devono essere monodrome con derivate generalmente continue (esse possono diventare infinite sul contorno, nel qual caso gli integrali vanno intesi come valore principale).

$$\iint_S \mathbf{i}_n \cdot \nabla \times \mathbf{A} dS = \oint_l \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_l dl \quad (\text{teorema di Stokes})$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{i}_n dS \quad (\text{teorema di Gauss})$$

$$\oiint_S \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} dS = \iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Psi) dV \quad (1^\circ \text{ teorema di Green scalare})$$

$$\oiint_S \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = \iiint_V (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) dV \quad (2^\circ \text{ teorema di Green scalare})$$

$$\oiint_S \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B}) dS = \iiint_V (\nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) dV \quad (1^\circ \text{ teorema di Green vettoriale})$$

$$\oiint_S \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \nabla \times \mathbf{A}) dS = \iiint_V (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) dV \quad (2^\circ \text{ teorema di Green vettoriale})$$

$$\iiint_V \nabla \Phi dV = \oiint_S \Phi \mathbf{i}_n dS$$

$$\iiint_V \nabla \times \mathbf{A} dV = \oiint_S \mathbf{i}_n \times \mathbf{A} dS$$

$$\iint_S \mathbf{i}_n \times \nabla \Phi dS = \oint_l \Phi \mathbf{i}_l dl.$$

Coordinate cartesiane

Il loro significato è illustrato dalla figura 1.

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{i}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{i}_z$$

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{i}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{i}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{i}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{i}_z$$

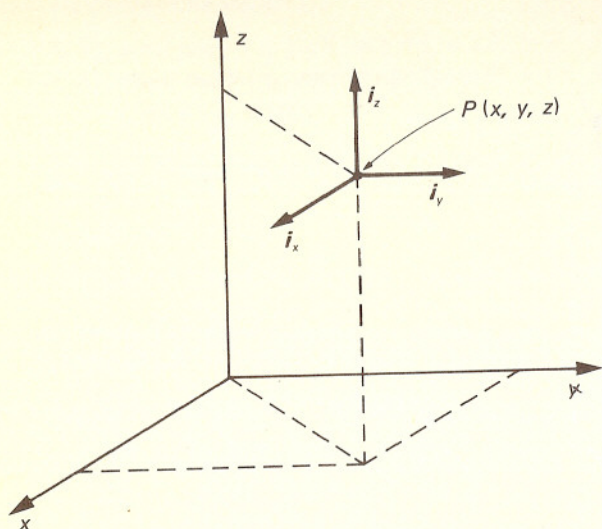


Figura 1

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \mathbf{i}_x + (\nabla^2 A_y) \mathbf{i}_y + (\nabla^2 A_z) \mathbf{i}_z.$$

Coordinate cilindriche

Tali coordinate sono legate alle coordinate cartesiane ortogonali (vedi fig. 2) dalle relazioni

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z, \end{cases}$$

con $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\tan \phi = y/x$.

Le formule di trasformazione per i versori tangenti alle linee coordinate sono

$$\begin{cases} \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_x \cos \phi + \mathbf{i}_y \sin \phi \\ \mathbf{i}_\phi = -\mathbf{i}_x \sin \phi + \mathbf{i}_y \cos \phi \\ \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{i}_x = \mathbf{i}_r \cos \phi - \mathbf{i}_\phi \sin \phi \\ \mathbf{i}_y = \mathbf{i}_r \sin \phi + \mathbf{i}_\phi \cos \phi \\ \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z \end{cases}$$

Le relazioni di moltiplicazione tra i vettori assumono la forma seguente:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\phi B_\phi + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_\phi B_z - A_z B_\phi) \mathbf{i}_r + (A_z B_r - A_r B_z) \mathbf{i}_\phi + (A_r B_\phi - A_\phi B_r) \mathbf{i}_z,$$

e gli operatori differenziali si scrivono

$$\nabla \Phi = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z$$

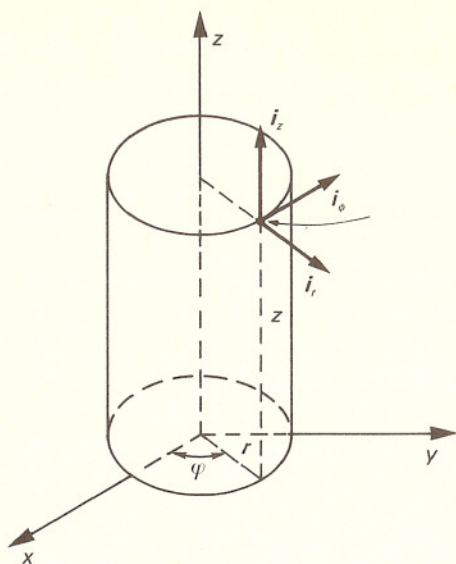


Figura 2

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{i}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{i}_\phi + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right] \mathbf{i}_z$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} = & \left(\nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\delta A_\phi}{\delta \phi} \right) \mathbf{i}_r + \\ & + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{i}_\phi + (\nabla^2 A_z) \mathbf{i}_z. \end{aligned}$$

Coordinate sferiche

Tali coordinate sono legate alle coordinate cartesiane ortogonali dalle relazioni (vedi fig. 3)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

con

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \text{tg } \theta = (x^2 + y^2)^{1/2}/z, \quad \text{tg } \phi = \frac{y}{x}.$$

Per i versori tangenti alle linee coordinate, in ogni singolo punto, valgono le for-

mule di trasformazione seguenti:

$$\begin{cases} i_r = i_x \sin \theta \cos \phi + i_y \sin \theta \sin \phi + i_z \cos \theta. \\ i_\theta = i_x \cos \theta \cos \phi + i_y \cos \theta \sin \phi - i_z \sin \theta \\ i_\phi = -i_x \sin \phi + i_y \cos \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_x = i_r \sin \theta \cos \phi + i_\theta \cos \theta \cos \phi - i_\phi \sin \phi \\ i_y = i_r \sin \theta \sin \phi + i_\theta \cos \theta \sin \phi + i_\phi \cos \phi \\ i_z = i_r \cos \theta - i_\theta \sin \theta. \end{cases}$$

Le espressioni del prodotto scalare e di quello vettoriale diventano

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\phi B_\phi$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_\theta B_\phi - A_\phi B_\theta) i_r + (A_\phi B_r - A_r B_\phi) i_\theta + (A_r B_\theta - A_\theta B_r) i_\phi;$$

mentre gli operatori differenziali si scrivono

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} i_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} i_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} i_\phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] i_r + \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] i_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] i_\phi \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2}.$$

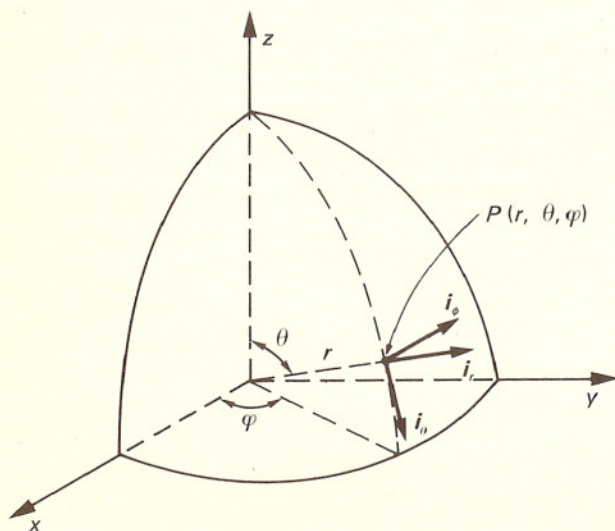


Figura 3

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} = & \left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2 \operatorname{ctg} \theta}{r^2} A_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{i}_r + \\ & + \left(\nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \mathbf{i}_\theta + \\ & + \left(\nabla^2 A_\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\phi + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{i}_\phi.\end{aligned}$$

Coordinate ortogonali generiche

In uno spazio tridimensionale, siano $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$, $u_3(x, y, z)$ coordinate curvilinee ortogonali tali che il volume elementare limitato dalle superfici coordinate sia esprimibile come $dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$. I coefficienti metrici h_i si possono calcolare con la formula

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u_i} \right)^2, \quad i = 1, 2, 3;$$

il loro significato è peraltro chiaro dalla figura 4. I versori tangenti alle linee coordinate in ogni singolo punto sono

$$\mathbf{i}_i = \frac{1}{h_i} \left[\frac{\partial x}{\partial u_i} \mathbf{i}_x + \frac{\partial y}{\partial u_i} \mathbf{i}_y + \frac{\partial z}{\partial u_i} \mathbf{i}_z \right].$$

Le espressioni degli operatori differenziali diventano

$$\begin{aligned}\nabla \Phi &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \mathbf{i}_3 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right] \mathbf{i}_1 + \\ &+ \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{i}_2 + \\ &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{i}_3 \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial u_3} \right).\end{aligned}$$

2 Analisi diadica

Rappresentazione della diade

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= C_{xx} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_x + C_{xy} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_y + C_{xz} \mathbf{i}_x \mathbf{i}_z + C_{yx} \mathbf{i}_y \mathbf{i}_x + C_{yy} \mathbf{i}_y \mathbf{i}_y + C_{yz} \mathbf{i}_y \mathbf{i}_z + \\ &+ C_{zx} \mathbf{i}_z \mathbf{i}_x + C_{zy} \mathbf{i}_z \mathbf{i}_y + C_{zz} \mathbf{i}_z \mathbf{i}_z,\end{aligned}$$

ovvero

$$\mathcal{C} = \mathbf{i}_x \mathbf{C}_x^r + \mathbf{i}_y \mathbf{C}_y^r + \mathbf{i}_z \mathbf{C}_z^r,$$

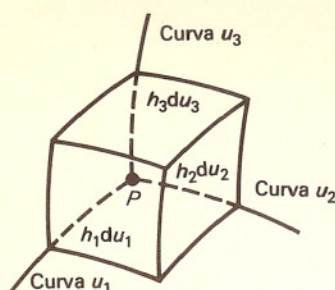


Figura 4

dove

$$\mathbf{C}_x^r = C_{xx} \mathbf{i}_x + C_{xy} \mathbf{i}_y + C_{xz} \mathbf{i}_z$$

...

sono i *vettori riga* della diade.

In alternativa,

$$\mathcal{C} = C_x^c \mathbf{i}_x + C_y^c \mathbf{i}_y + C_z^c \mathbf{i}_z,$$

dove

$$\mathbf{C}_x^c = C_{xx} \mathbf{i}_x + C_{yx} \mathbf{i}_y + C_{zx} \mathbf{i}_z$$

...

sono i *vettori colonna* della diade. La diade *trasposta* $\tilde{\mathcal{C}}$ si ottiene dalla diade $\mathcal{C}$ scambiando le righe con le colonne.

Il *prodotto* di una diade per un vettore è dato da

$$\mathcal{C} \cdot \mathbf{A} = C_x^c A_x + C_y^c A_y + C_z^c A_z$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{C} = A_x C_x^r + A_y C_y^r + A_z C_z^r;$$

un'espressione analoga vale per i prodotti vettoriali. Si noti che le operazioni di prodotto *non* sono commutative, e cioè $\mathcal{C} \cdot \mathbf{A} \neq \mathbf{A} \cdot \mathcal{C}$, a meno che la diade $\mathcal{C}$ non sia *simmetrica*, e cioè $\mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}}$.

Relazioni di moltiplicazione tra vettori e diadi

$\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono vettori; $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono diadi.

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{C} = \tilde{\mathcal{C}} \cdot \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathcal{C}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\mathcal{C} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathcal{C} \cdot \mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathcal{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathcal{C}) = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathcal{C})$$

$$(\mathcal{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathcal{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathcal{C} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}, \text{ ma non } (\mathcal{C} \cdot \mathbf{A}) \times \mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathcal{C}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\mathcal{C} \cdot \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathcal{C}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\mathcal{C} \times \mathbf{B})$$

$$(\mathbf{A} \times \mathcal{C}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\mathcal{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \mathcal{C} \times \mathbf{B}$$

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) \cdot A &= \mathcal{C} \cdot (\mathcal{D} \cdot A) = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D} \cdot A \\
(A \times \mathcal{C}) \cdot \mathcal{D} &= A \times (\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) = A \times \mathcal{C} \cdot \mathcal{D} \\
(\mathcal{C} \cdot \mathcal{D}) \times A &= \mathcal{C} \cdot (\mathcal{D} \times A) = \mathcal{C} \cdot \mathcal{D} \times A \\
(\mathcal{C} \times A) \cdot \mathcal{D} &= \mathcal{C} \cdot (A \times \mathcal{D}) \\
A \cdot \mathcal{C} \cdot B &= B \cdot \mathcal{C} \cdot A \\
(\mathcal{J} \times A) \cdot B &= A \cdot (\mathcal{J} \times B) = A \times B; \mathcal{J} \text{ è la diade unitaria} \\
(\mathcal{J} \times A) \cdot \mathcal{C} &= A \times \mathcal{C} = (A \times \mathcal{J}) \cdot \mathcal{C} \\
\mathcal{J} \times (A \times B) &= BA - AB \\
\mathcal{J} \times A &= A \times \mathcal{J}, \text{ la più generale diade antisimmetrica.}
\end{aligned}$$

Relazioni differenziali tra vettori e diadi

$$\begin{aligned}
\nabla A &= i_x \frac{\partial A}{\partial x} + i_y \frac{\partial A}{\partial y} + i_z \frac{\partial A}{\partial z} \\
\nabla \cdot \mathcal{C} &= (\nabla \cdot C_x^c) i_x + (\nabla \cdot C_y^c) i_y + (\nabla \cdot C_z^c) i_z = \frac{\partial C_x^r}{\partial x} + \frac{\partial C_y^r}{\partial y} + \frac{\partial C_z^r}{\partial z} \\
\nabla \times \mathcal{C} &= (\nabla \times C_x^c) i_x + (\nabla \times C_y^c) i_y + (\nabla \times C_z^c) i_z = \\
&= \left(\frac{\partial C_z^r}{\partial y} - \frac{\partial C_y^r}{\partial z} \right) i_x + \left(\frac{\partial C_x^r}{\partial z} - \frac{\partial C_z^r}{\partial x} \right) i_y + \left(\frac{\partial C_y^r}{\partial x} - \frac{\partial C_x^r}{\partial y} \right) i_z. \\
\nabla^2 \mathcal{C} &= \nabla \nabla \cdot \mathcal{C} - \nabla \times \nabla \times \mathcal{C} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial z^2} \\
\nabla \cdot \nabla \times \mathcal{C} &= 0 \\
\nabla \times \nabla A &= 0 \\
\nabla(A \times B) &= (\nabla A) \times B - (\nabla B) \times A \\
\nabla(\Phi B) &= \nabla \Phi B + \Phi \nabla B \\
\nabla \cdot (AB) &= (\nabla \cdot A) B + A \cdot \nabla B \\
\nabla \cdot (\Phi \mathcal{C}) &= \nabla \Phi \cdot \mathcal{C} + \Phi \nabla \cdot \mathcal{C} \\
\nabla \cdot (A \times \mathcal{C}) &= (\nabla \times A) \cdot \mathcal{C} - A \cdot \nabla \times \mathcal{C} \\
\nabla \times (\Phi \mathcal{C}) &= \nabla \Phi \times \mathcal{C} + \Phi \nabla \times \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Relazioni integrali per le diadi

$$\begin{aligned}
\iint_S i_n \cdot \nabla \times \mathcal{C} dS &= \oint_l i_t \cdot \mathcal{C} dl \\
\iiint_V \nabla \cdot \mathcal{C} dV &= \iint_S i_n \cdot \mathcal{C} dS \\
\iiint_V [A \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathcal{C}) - (\nabla \nabla \cdot A) \cdot \mathcal{C}] dV &= \iint_S [(i_n \cdot A) \nabla \cdot \mathcal{C} - (\nabla \cdot A) (i_n \cdot \mathcal{C})] dS \\
\iiint_V [(\nabla \times \nabla \times A) \cdot \mathcal{C} - A \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathcal{C})] dV &= \iint_S [A \times (\nabla \times \mathcal{C}) - (\nabla \times A) \times \mathcal{C}] dS.
\end{aligned}$$

¹ Dove []_t significa "trasposta".

Glossario

a	lunghezza
$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$	potenziale vettore
$A(\theta, \phi)$	area efficace
$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$	potenziale vettore
$\mathbf{A}_m(\mathbf{r}, \omega)$	potenziale vettore magnetico
$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$	induzione magnetica
B	brillanza
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)$	induzione magnetica
$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega)$	induzione magnetica
c	velocità della luce
$\mathbf{c}(\mathbf{r}, t)$	momento angolare
C	densità lineare di capacità
$\mathcal{C}$	matrice di coerenza
$\cos x$	coseno di argomento x
$\operatorname{ctg} x$	cotangente di argomento x
$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$	induzione elettrica
$D(\theta, \phi)$	diagramma di direttività
D, D_M	direttività
$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega)$	induzione elettrica
$\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega)$	induzione elettrica
$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$	campo elettrico
$\mathbf{e}(t)$	funzione vettoriale modale
$\mathbf{e}_n(\mathbf{r})$	vettore di base
$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$	campo elettrico
$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$	campo elettrico
$\mathbf{E}_\infty(\theta, \phi)$	campo elettrico irradiato per $r \rightarrow \infty$
$\exp x$	esponenziale di argomento x

f	frequenza
$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$	densità di forza
$\mathbf{f}(\theta, \phi)$	vettore di radiazione
$F(\theta, \phi)$	fattore di allineamento
$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega)$	densità di forza
$\mathcal{J}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$	risposta impulsiva (diadica) elettrica
$\mathcal{J}_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$	risposta impulsiva (diadica) magnetica
$g_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$	risposta impulsiva (scalare) elettrica
$g_h(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$	risposta impulsiva (scalare) magnetica
G	guadagno
G	densità lineare di conduttanza
h	costante di Planck
$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$	campo magnetico
$\mathbf{h}(t)$	funzione vettoriale modale
$h(\theta, \phi)$	altezza efficace
$\mathbf{h}_n(\mathbf{r})$	vettore di base
$h_r(\theta, \phi)$	altezza efficace in ricezione
$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)$	campo magnetico
$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega)$	campo magnetico
$\mathbf{H}_0$	campo magnetico statico di polarizzazione
$h_n^{(1)}(x)$	funzione sferica di Hankel di prima specie
$h_n^{(2)}(x)$	funzione sferica di Hankel di seconda specie
$i(z, t)$	corrente
$i^+(z, t)$	corrente diretta
$i^-(z, t)$	corrente riflessa
$\mathbf{i}_b$	versore binormale
$\mathbf{i}_l$	versore tangente a una curva l
$\mathbf{i}_n$	versore normale a una superficie
$\mathbf{i}_t$	versore tangente a una superficie
$\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$	terna di versori cartesiani
$\mathbf{i}_r, \mathbf{i}_\theta, \mathbf{i}_\phi$	terna di versori sferici
I	intensità
$I(z)$	funzione scalare modale
$I(z, \omega)$	corrente
$I^+(z, \omega)$	corrente diretta
$I^-(z, \omega)$	corrente riflessa
I_G	fasore di un generatore ideale di corrente
$\mathcal{J}$	matrice unitaria
$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$	densità di corrente elettrica
$\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$	densità di corrente elettrica sorgente del campo
$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t)$	densità di corrente magnetica
$\mathbf{j}_S(\mathbf{r}, t)$	densità lineare di corrente elettrica

$j_{m0}(\mathbf{r}, t)$	densità di corrente magnetica sorgente del campo
$j_{mS}(\mathbf{r}, t)$	densità lineare di corrente magnetica
$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega)$	densità di corrente elettrica
$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}, \omega)$	densità di corrente elettrica sorgente del campo
$\mathbf{J}_m(\mathbf{r}, \omega)$	densità di corrente magnetica
$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}, \omega)$	densità lineare di corrente elettrica
$\mathbf{J}_t(\mathbf{r}, \omega)$	densità di corrente elettrica trasversale
$\mathbf{J}_{m0}(\mathbf{r}, \omega)$	densità di corrente magnetica sorgente del campo
$\mathbf{J}_{mS}(\mathbf{r}, \omega)$	densità lineare di corrente magnetica
$\mathbf{J}_{mt}(\mathbf{r}, \omega)$	densità di corrente magnetica trasversale equivalente
$\mathbf{J}_t(\mathbf{r}, \omega)$	densità di corrente elettrica trasversale equivalente
$j_n(x)$	funzione sferica di Bessel di prima specie
$J_n(x)$	funzione di Bessel di prima specie
$k = \beta - j\alpha$	costante di propagazione
k_z	costante di propagazione in guida
k_t^2	autovalore trasversale in guida
$\mathbf{k}$	vettore di propagazione
K	costante di Boltzmann
L	densità di induttanza
m	massa
m	grado di polarizzazione
$\mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$	vettore magnetizzazione
M	densità lineare di mutua induttanza
$\mathbf{M}(\mathbf{r}, \omega)$	vettore magnetizzazione
$\mathbf{M}_s$	vettore magnetizzazione di saturazione
n	indice di rifrazione
N	densità di numero di particelle
N_0	densità media del numero di particelle
p	pressione
$p = \alpha + j\omega$	frequenza complessa
p_e	densità media di potenza fornita da sorgenti elettriche
p_m	densità media di potenza fornita da sorgenti magnetiche
$p_0(t)$	potenza fornita da sorgenti elettriche
p_0	pressione media
$\bar{p}_e$	densità media di potenza complessa fornita da sorgenti elettriche
$\bar{p}_m$	densità media di potenza complessa fornita da sorgenti magnetiche
$p_{m0}(t)$	potenza fornita da sorgenti magnetiche
$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$	vettore densità di polarizzazione
$P(z)$	potenza complessa
$P_n(x)$	polinomio di Legendre di argomento x
$P_n^m(x)$	polinomio associato di Legendre di argomento x

q	carica elettrica di una particella
$\mathbf{q}$	vettore di polarizzazione
Q	carica elettrica
Q_n	fattore di merito
$\mathbf{r}$	coordinata spaziale
R	costante universale dei gas
R	densità lineare di resistenza
R_i	resistenza di ingresso
R_{irr}	resistenza di radiazione
R_0	resistenza caratteristica
$R(z)$	resistenza di ingresso
ROS	rapporto d'onda stazionario
$\mathbf{s}(\mathbf{r}, t)$	vettore di Poynting
s_0, s_1, s_2, s_3	parametri di Stokes
S	superficie di integrazione
$\mathbf{S}(\mathbf{r})$	vettore di Poynting
$\mathcal{S}$	tensore degli sforzi di Maxwell
$\operatorname{sgn} x$	segno dell'argomento x
$\sin x$	seno di argomento x
$\operatorname{sinc} x$	$(\sin x)/x$
t	coordinata temporale
$t^* = t - r/c$	tempo ritardato
$\mathbf{t} = x i_x + y i_y$	coordinata trasversale
T	temperatura assoluta
T	periodo di oscillazione
T_R	temperatura di rumore
$\mathbf{T}(\mathbf{r}, t)$	coppia meccanica
$\operatorname{tg} x$	tangente di argomento x
$\operatorname{tg}^{-1} x$	arcotangente di argomento x
Tr	traccia della matrice
u	velocità dell'onda acustica
u	impedenza normalizzata
$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$	momento di dipolo elettrico
$\mathbf{u}_m(\mathbf{r}, t)$	momento di dipolo magnetico
$U(t)$	funzione di Heaviside
$\mathbf{U}(\mathbf{r}, \omega)$	momento di dipolo elettrico
$\mathbf{U}_m(\mathbf{r}, \omega)$	momento di dipolo magnetico
$v(z, t)$	differenza di potenziale
$v^+(z, t)$	differenza di potenziale (onda diretta)
$v^-(z, t)$	differenza di potenziale (onda riflessa)
v_f	velocità di fase

v_g	velocità di gruppo
$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$	velocità
V	volume di integrazione
$V(z)$	tensione
$V(z)$	funzione scalare modale
$V^+(z)$	tensione diretta
$V^-(z)$	tensione riflessa
V_G	fasore del generatore ideale di tensione
$\mathbf{V}(\mathbf{r}, \omega)$	velocità
w	densità di energia
w_c	densità di energia cinetica
w_{em}	densità di energia elettromagnetica
W	energia elettromagnetica
$W(\omega)$	funzione di trasferimento
z	coordinata cartesiana
$Z(z)$	impedenza di ingresso (linea di trasmissione)
Z_i	impedenza di ingresso (antenna)
Z_n	impedenza di ingresso (cavità)
Z_0	impedenza caratteristica
Z_S	impedenza superficiale
x	coordinata cartesiana
X	reattanza
X_i	reattanza di ingresso (antenna)
y	coordinata cartesiana
Y_n	ammettenza di ingresso (cavità)
Y_0	ammettenza caratteristica
Y_S	ammettenza superficiale
$y_n(x)$	funzione sferica di Bessel di seconda specie
α	costante di attenuazione
β	costante di propagazione
β_a	costante di propagazione acustica
β_0	costante di propagazione elettromagnetica
γ	costante di propagazione di Bloch
γ	angolo di perdita
γ	angolo di eccentricità (parametri di Stokes)
Γ (o Γ_v)	coefficiente di riflessione di tensione
Γ_I	coefficiente di riflessione di corrente
$\Gamma_{ }$	coefficiente di riflessione di Fresnel, polarizzazione parallela
$\Gamma_{\perp}$	coefficiente di riflessione di Fresnel, polarizzazione normale

δ	profondità di penetrazione
δ_{nm}	simbolo di Kroneker
$\delta(x)$	funzione di Dirac di argomento x
ϵ	costante dielettrica o permeabilità
ϵ_r	costante dielettrica relativa
ϵ_0	costante dielettrica del vuoto
ϵ	costante dielettrica diadica
ζ	impedenza intrinseca
η	coefficiente di efficienza
$\eta = \cos \theta$	coordinata sferica
θ	angolo
θ	coordinata sferica
θ_B	angolo di Brewster
θ_c	angolo limite
$\bar{\theta}_B$	pseudoangolo di Brewster
λ	lunghezza d'onda
λ_c	lunghezza d'onda critica o di cut-off
λ_g	lunghezza d'onda in guida
μ	costante magnetica o permittività
μ_0	costante magnetica del vuoto
μ_r	costante magnetica relativa
μ	costante magnetica diadica
ξ	fattore di disadattamento
$\Pi(r, \omega)$	potenziale di Hertz
ρ	densità di carica elettrica
ρ_m	densità di carica magnetica
ρ_0	densità di carica elettrica (sorgente)
ρ_S	densità di carica elettrica superficiale
ρ_{m0}	densità di carica magnetica (sorgente)
ρ_{mS}	densità di carica magnetica superficiale
σ	conducibilità
σ	sezione radar
τ	coefficiente di trasmissione

ϕ	coordinata sferica o cilindrica
$\Phi(\mathbf{r}, t)$	potenziale scalare
$\Phi(\mathbf{r}, \omega)$	potenziale scalare
$\Phi(t)$	funzione potenziale in guida (modi TM)
$\Phi(z, t)$	densità lineare di flusso dell'induzione elettrica
ψ	angolo di orientazione (parametri di Stokes)
$\Psi(t)$	funzione potenziale in guida (modi TE)
$\Psi(z, t)$	densità lineare di flusso dell'induzione magnetica
χ	fattore di depolarizzazione

Segni matematici

' (apice)	derivata: $a'(t) = da/dt$
*	complesso coniugato: $(a + jb)^* = a - jb$
$\langle x(t), y(t) \rangle$	$\int x(t) y^*(t) dt$
.	prodotto scalare: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
$\mathbf{x}$	prodotto vettoriale: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
∇	gradiente: ∇a
$\nabla \cdot$	divergenza: $\nabla \cdot \mathbf{a}$
$\nabla \times$	rotore: $\nabla \times \mathbf{a}$
∇^2	laplaciano scalare: $\nabla^2 a = \nabla \cdot \nabla a$
∇^2	laplaciano vettoriale: $\nabla^2 \mathbf{a} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{a} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{a}$
$\approx$	all'incirca uguale
$\simeq$	asintoticamente uguale

Unità di misura

A	ampere
C	coulomb
F	farad
H	henry
Hz	hertz
K	kelvin
kg	kilogrammo
m	metro
Ω	ohm
s	secondo
S	siemens
sr	steradiano
V	volt
W	watt
Wb	weber