

Indice

1	Richiami matematici	5
1.1	Gradiente	5
1.2	Divergenza	6
1.3	Rotore	7
1.4	Laplaciano vettoriale	8
1.5	Laplaciano scalare	8
1.6	Lemmi e formule di Green	9
2	Cariche e correnti elettriche	11
2.1	Cariche elettriche	11
2.1.1	Modelli di distribuzione della carica elettrica . . .	11
2.2	La corrente elettrica	13
2.3	La densità di corrente	14
2.4	Relazioni tra densità ed intensità di corrente	15
2.5	L'equazione di continuità	16
3	I fondamenti dell'elettromagnetismo	19
3.1	La forza di Lorentz	19
3.2	L'esperimento di Faraday e la legge di Gauss	19
3.3	La legge di Faraday	21
3.4	La legge di Ampere	22
3.5	Le equazioni di Maxwell	24
3.6	Le correnti impresse	26
3.7	Relazioni costitutive dei mezzi elettromagnetici	27
3.8	Equazioni di Maxwell in regime armonico	34
3.9	Condizioni sulle superfici di discontinuità	37

4	Primi esempi di risoluzione delle equazioni di Maxwell	43
4.1	La soluzione nel dominio del tempo	43
4.2	La soluzione nel dominio dei vettori complessi: l'equazione di Helmholtz	49
4.3	I potenziali vettoriali	51
4.3.1	La scelta $\phi = 0$	54
4.3.2	La scelta di Coulomb.	55
4.3.3	La scelta di Lorentz.	56
4.4	Potenziale vettore elettrico	59
4.5	Potenziale di Hertz	62
5	I teoremi fondamentali dell'elettromagnetismo	65
5.1	Teoremi energetici	65
5.1.1	Teorema di Poynting nel dominio del tempo	65
5.1.2	Teorema di Poynting nel dominio della frequenza	69
5.1.3	Teorema dell'energia	73
5.2	Teorema di unicità	75
5.2.1	Dominio del tempo	76
5.2.2	Dominio della frequenza	78
5.2.3	Condizioni di radiazione	80
5.3	Teorema di equivalenza di Love	81
5.3.1	Correnti assorbenti	85
5.3.2	Reversibilità del teorema	86
5.3.3	Osservazioni e corollari	87
5.4	Teorema di reciprocità di Lorentz	91
5.4.1	Osservazioni e corollari	93
5.5	Teorema di dualità	94
5.6	Teorema di scomposizione	95
5.7	Teorema delle immagini	96
5.7.1	Osservazioni e corollari	97
5.8	Le relazioni di Kramers–Krönig	99
5.8.1	Proprietà di $\epsilon_r(\omega)$	100
5.8.2	Derivazione delle relazioni	101
6	Linee di trasmissione	105
6.1	Le equazioni del telegrafo	107
6.1.1	Le equazioni in regime armonico	110
6.1.2	Circuito equivalente a costanti concentrate	110
6.2	Le equazioni del telefono e l'impedenza caratteristica	114

6.2.1	Propagazione in presenza di perdite	118
6.3	Impedenza in linea e coefficiente di riflessione	121
6.3.1	L'impedenza in linea	121
6.3.2	Il coefficiente di riflessione	122
6.3.3	Onde progressive, stazionarie e parzialmente stazionarie	126
6.4	Il rapporto d'onda stazionaria (ROS).	130
6.5	La potenza complessa.	132
6.6	Il problema dell'adattamento.	133
6.7	La carta di Smith.	136
6.8	Il progetto di un adattatore.	157
6.8.1	L'adattatore a stub semplice.	158
6.8.2	L'adattatore a doppio stub.	165
6.8.3	L'adattatore a $\lambda/4$	175
6.8.4	Un esercizio riassuntivo	179
7	Onde piane	199
7.0.5	La soluzione con il metodo della separazione delle variabili	200
7.1	I campi elettrico e magnetico dell'onda piana uniforme	204
7.1.1	Campo elettrico	204
7.1.2	Campo magnetico	204
7.2	Classificazione delle onde piane	205
7.3	Equivalenza con le linee di trasmissione	210
7.4	Impedenza d'onda	211
7.5	Velocità di fase delle onde piane	214
7.6	Completezza delle onde piane	217
7.7	Riflessione e rifrazione di onde piane	220
7.7.1	La legge della riflessione e la legge di Snell	221
7.7.2	Il caso del mezzo con perdite	225
7.7.3	Formule di Fresnel	231
7.8	Sovrapposizione di onde piane	239
7.9	Onde stazionarie	239
7.9.1	Andamento nel tempo dei campi elettrico e magnetico	240
7.9.2	Vettore di Poynting ed impedenza d'onda	241
7.10	Mezzi dielettrici multistrato	243
7.10.1	Metodo delle onde parziali	244
7.10.2	Metodo delle matrici di trasferimento	248

7.10.3	L'effetto tunnel elettromagnetico	248
7.11	La velocità di gruppo	248
7.11.1	Dispersione della velocità di gruppo	252
8	Antenne	261
8.1	Dipolo elementare	263
8.1.1	Studio nel dominio della frequenza	263
8.1.2	Studio nel dominio del tempo	269
8.2	Antenna a spira di corrente	275
8.2.1	La sorgente di Huygens	278
8.3	Antenne filiformi	280
8.3.1	L'integrale di Hallen	284
8.4	Antenne ad apertura	295
8.4.1	L'espansione in onde piane	298
8.5	Parametri delle antenne in trasmissione	304
8.5.1	Esempi di calcolo di parametri di trasmissione	313
8.6	Parametri delle antenne in ricezione	325
8.6.1	Esempi di calcolo di aree ed altezze efficaci in ricezione	331
8.7	Le relazioni tra i parametri di trasmissione e ricezione e la formula di Friis	334
8.7.1	La formula di Friis	339
8.7.2	La formula del radar	341
8.8	Schiere di antenne	342
8.8.1	Schiere a fase progressiva	347
8.8.2	Schiere broad-side ed end-fire	350
8.9	L'antenna Yagi-Uda e l'antenna logaritmica	351

Capitolo 1

Richiami matematici

1.1 Gradiente

Si consideri una *funzione scalare derivabile* ϕ (si ricorda che una funzione scalare è una funzione che dà come risultato un numero, come ad esempio la temperatura all'interno di una stanza), definita in una regione dello spazio V racchiusa dalla superficie S .

Il gradiente di ϕ è un **vettore**, funzione delle coordinate nello spazio, che viene indicato con il simbolo $\nabla\phi$, e che è definito come segue:

$$\nabla\phi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \phi \hat{n} dS \quad ,$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale in ogni punto alla superficie S , orientato verso l'esterno di questa.

In particolare, se all'interno del volume V viene introdotto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale (x, y, z) il gradiente risulta essere dato dall'*operatore differenziale lineare*

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \quad ,$$

e le sue componenti definiscono quindi la variazione della funzione ϕ rispetto alle coordinate cartesiane.

Osservazioni

- Sono dette *superfici di livello* le superfici dello spazio sulle quali si ha

$$\phi = \text{costante} \quad .$$

Come è immediato verificare, poichè sulle superfici di livello la funzione ϕ rimane costante, il gradiente è ortogonale alle superfici stesse.

- Data una funzione f (anche *vettoriale*, ovvero che ha come risultato non un numero, ma un vettore), si dice *circuitazione* di f da A a B lungo la linea dello spazio γ l'integrale

$$\text{Circuitazione} = \int_{A,\gamma}^B f \, d\gamma \quad ,$$

e vale

$$\int_{A,\gamma}^B \nabla f \, d\gamma = f(B) - f(A) \quad .$$

1.2 Divergenza

Si consideri una funzione vettoriale $\mathbf{w}$, definita nuovamente in un volume dello spazio V racchiuso dalla superficie S . Si definisce divergenza di $\mathbf{w}$, e la si indica con la scrittura $\nabla \cdot \mathbf{w}$ la quantità scalare

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{w} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\text{Flusso di } \mathbf{w} \text{ attraverso } \Delta S \text{ (dall'interno all'esterno)}}{V} \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{w} \cdot \hat{n} \, dS \quad . \end{aligned}$$

Come si nota, la divergenza non è nulla solo nel caso in cui vi sia un flusso netto uscente (o entrante) nella superficie che racchiude il volume V . In altre parole, la divergenza può essere interpretata come una misura delle *sorgenti* (o dei *pozzi*, nel caso in cui $\nabla \cdot \mathbf{w} < 0$) dai quali scaturisce il campo vettoriale $\mathbf{w}$, o dove esso termina.

Un tipico esempio di natura elettromagnetica è quello che si riscontra quando una carica elettrica viene posta in quiete in un punto dello spazio: essa dà luogo ad un campo elettrico che “nasce” o “muore” in corrispondenza della carica, ciò dipendendo dal segno della carica stessa. In termini matematici la “nascita” o “morte” del campo elettrico è rappresentato da un valore di divergenza non nullo nell'intorno della carica.

Osservazioni

- *Teorema di Gauss.* Scelto un volume V dello spazio racchiuso dalla

superficie chiusa S , risulta

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{w} \, d\tau = \oint_S \mathbf{w} \cdot \hat{n} \, dS \quad .$$

dove, come al solito, $\hat{n}$ indica il versore normale alla superficie S ed orientato verso l'esterno della stessa.

- Ritornando all'espressione ch   d   la misura della divergenza, si pu   dimostrare che, quando viene assunto un sistema di riferimento cartesiano, risulta

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \quad ,$$

dove w_x , w_y e w_z sono le componenti di $\mathbf{w}$ rispettivamente lungo gli assi x , y e z .

1.3 Rotore

Si consideri una funzione vettoriale $\mathbf{u}$ definita in un volume dello spazio V racchiuso da una superficie S orientata dal versore $\hat{n}$ uscente da essa. Si definisce rotore di $\mathbf{u}$, e lo si indica con il simbolo $\nabla \times \mathbf{u}$, la funzione vettoriale,

$$\nabla \times \mathbf{u} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \hat{n} \times \mathbf{u} \, dS \quad .$$

Osservazioni

- *Teorema di Stokes.* Scelta una superficie S dello spazio racchiusa dalla curva chiusa γ , risulta

$$\int_S \nabla \times \mathbf{u} \cdot \hat{n} \, dS = \oint_\gamma \mathbf{u} \, d\gamma = \text{circuitazione di } \mathbf{u} \quad .$$

- In un sistema di coordinate cartesiane il rotore pu   essere formalmente calcolato come determinante della matrice

$$M = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \quad ,$$

e risulta

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad .$$

1.4 Laplaciano vettoriale

Data una funzione vettoriale $\mathbf{v}$, si definisce *laplaciano vettoriale* la funzione vettoriale

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} \quad .$$

In coordinate cartesiane risulta

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{v} \quad .$$

Infatti, se ad esempio si considera la componente lungo $\hat{x}$, si ha

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})_x &= \nabla_x \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] = \\ &= \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{v})_x &= (\nabla \times)_x \left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{y} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{z} \right] = \\ &= \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x} \quad , \end{aligned}$$

la cui differenza coincide con

$$\nabla_x^2 \mathbf{v} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad .$$

1.5 Laplaciano scalare

Data una funzione scalare g , si definisce *laplaciano scalare* la funzione scalare

$$\nabla^2 g = \nabla \cdot \nabla g \quad .$$

È immediato verificare che, se si introduce un sistema di riferimento cartesiano, e si suppone che la funzione g sia una delle componenti di una funzione vettoriale $\mathbf{w}$, ad esempio $g = w_x$, il laplaciano scalare di g coincide con la componente lungo x del laplaciano vettoriale di $\mathbf{w}$.

1.6 Lemmi e formule di Green

Date due funzioni scalari e derivabili ϕ e ψ , valgono le seguenti identità, note come lemmi di Green

Primo lemma

$$\psi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot [\psi \nabla \phi] - \nabla \phi \nabla \psi \quad .$$

Secondo lemma

$$\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi = \nabla \cdot [\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi] \quad .$$

Da questi due lemmi si ricavano due importanti formule integrali. In particolare, dal primo lemma, e dal teorema di Gauss applicato ad un volume V delimitato da una superficie chiusa S orientata secondo la normale $\hat{n}$ da essa uscente, si ottiene la

Prima formula di Green

$$\begin{aligned} \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \nabla \psi) dV &= \int_V \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dV = \\ &= \oint_S \psi \nabla \phi \cdot \hat{n} dS = \\ &= \oint_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \quad , \end{aligned}$$

dove si è indicato con

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \hat{n} \quad .$$

Analogamente, dal secondo lemma di Green e dal teorema di Gauss, si ottiene la

Seconda formula di Green

$$\int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad .$$

Capitolo 2

Cariche e correnti elettriche

2.1 Cariche elettriche

I fenomeni di attrazione e repulsione regolati dalla legge di Coulomb possono essere interpretati attribuendo ai corpi su cui le forze si manifestano una determinata carica elettrica, usualmente indicata con la lettera q , la cui unità di misura è il Coulomb [C].

L'osservazione dei fenomeni fisici che intercorrono tra cariche elettriche porta inoltre a riconoscere che un determinato corpo è in grado di attrarne o respingerne altri, cosicchè risulta naturale distinguere due tipi di carica, che vengono convenzionalmente indicati coi nomi di carica positiva e negativa. Infine, è opportuno ricordare che gli esperimenti di attrazione e repulsione elettrica mostrano che la carica elettrica presente su ogni corpo non ha un valore che varia con continuità nei numeri reali, ma sempre come multiplo di una quantità fissa, che viene assunta come misura della *carica elettrica elementare*, e che vale

$$e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad .$$

2.1.1 Modelli di distribuzione della carica elettrica

Modello corpuscolare

Secondo il modello corpuscolare, lo *stato di elettrizzazione* di un corpo, o di una regione dello spazio, ovvero la sua capacità di attrarre o respingere altri corpi carichi, è interpretato come dovuto alla presenza di una

densità $n(P)$ [m^{-3}] di particelle cariche, ognuna con una carica pari a

$$q_P = N \cdot e \quad [\text{C}] \quad ,$$

che, nell'insieme, concorrono a dar luogo, in ogni volume infinitesimo $d\tau$ dello spazio, ad una carica infinitesima complessiva

$$dq = n(P) q_P d\tau \quad .$$

Quando poi si consideri che nel volume $d\tau$ possono essere contemporaneamente presenti sia cariche positive sia cariche negative, la carica totale immagazzinata nel volume è pari a

$$dq = dq^+ + dq^- = (n^+(P) q_P^+ - n^-(P) q_P^-) d\tau \quad ,$$

dove $n(P)^\pm$ e $q^\pm$ sono, rispettivamente, le densità volumetriche e le cariche delle particelle presenti nel volume $d\tau$, ed aventi carica positiva e negativa.

Modello continuo — Densità di carica

Sebbene il modello corpuscolare abbia una più immediata rispondenza con l'intuito fisico che porta ad immaginare una carica elettrica come formata da una somma di contributi dati da elettroni e protoni, lo studio dei fenomeni elettromagnetici utilizza più di frequente un modello continuo, secondo il quale lo stato di elettrizzazione viene descritto attribuendo a ciascun punto P dello spazio una *densità volumetrica di carica*, espressa in [$\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$] che, in tutta generalità può dipendere sia dal punto P , sia dal tempo. Questa densità è definita come

$$\rho_C(P, t) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q_\tau}{\Delta\tau} \quad ,$$

essendo $\Delta\tau$ un volume infinitesimo attorno al punto P , e Δq_τ la carica ivi contenuta.

In analogia con quanto fatto nel caso del modello corpuscolare, è poi opportuno prendere in considerazione anche il caso in cui nel volume $\Delta\tau$ siano contemporaneamente presenti densità di cariche sia positive sia negative, che possono venire indicate rispettivamente come ρ_C^+ e ρ_C^- , e che danno luogo ad una densità complessiva

$$\rho_C(P, t) = \rho_C^+(P, t) + \rho_C^-(P, t) \equiv \rho_C^+(P, t) - |\rho_C^-(P, t)| \quad .$$

2.2 La corrente elettrica

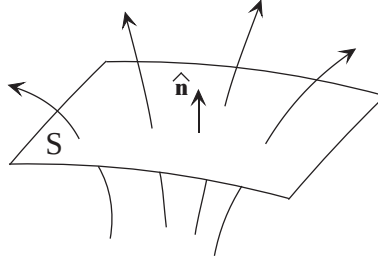


Figura 2.1: Corrente elettrica. Individuata una superficie S orientata dalla normale $\hat{n}$, la corrente è data dalla carica che attraversa nell'unità di tempo la superficie, concordemente o discordemente rispetto alla normale

La grandezza fisica più comunemente utilizzata per descrivere il moto delle cariche elettriche è l'*intensità di corrente elettrica*. Essa è definita con riferimento ad una superficie S ed al versore $\hat{n}$ ad essa normale.

Detta $\Delta q_{S,n}$ la carica *netta* che attraversa nel tempo Δt la superficie S orientata dalla normale $\hat{n}$, si definisce intensità di corrente la quantità

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{S,n}}{\Delta t} ,$$

e la sua unità di misura è l'Ampere [A]. L'intensità di corrente dunque è una quantità *scalare* e come tale essa non ha verso, *ma ha segno*, che cambia se si inverte l'orientazione di S , cioè il verso di $\hat{n}$. Come è immediato pensare, infine, la carica netta $\Delta q_{S,n}$ è data dalla somma degli apporti di carica dei due segni che fluiscono attraverso S concordemente o discordemente rispetto a $\hat{n}$:

$$\Delta q_{S,n} = \Delta q^+(\hat{n}) - |\Delta q^-(\hat{n})| - \Delta q^+(-\hat{n}) + |\Delta q^-(-\hat{n})| .$$

Nel definire la corrente come moto di cariche elettriche, si usa distinguere tra i due seguenti tipi di corrente.

Corrente di convezione

Questa è la corrente che si manifesta quando un corpo elettricamente carico si muove sotto l'azione di determinate forze, di natura elettrica o meno, trascinando nel suo moto anche le cariche su esso depositate.

Corrente di conduzione

Questo tipo di corrente elettrica, che è quella di maggiore interesse nello studio dei fenomeni elettromagnetici, è la corrente che si manifesta nei metalli, negli elettroliti e nei plasmi dove i portatori di carica elettrica si muovono all'interno della struttura in cui si trovano. Si tratta quindi di un moto di cariche *libere* che migrano all'interno del mezzo materiale che le contiene.

Come è noto, nella maggior parte dei metalli la corrente di conduzione è attribuita alla presenza di un “gas di elettroni liberi” ossia di quegli elettroni che, essendo meno vincolati dai legami chimici, possono muoversi all'interno del reticolo atomico del metallo. La più elementare descrizione della conduzione elettrica può quindi essere impostata considerando semplicemente la velocità con cui gli elettroni si spostano all'interno del metallo.

Tuttavia, esistono altri materiali come per esempio alcuni semiconduttori, nei quali la corrente di conduzione è invece attribuita al movimento di portatori di carica positiva. Si tratta di materiali nel cui reticolo atomico vi “è un elettrone in meno” di quanti completerebbero uno dei livelli atomici, e si può pensare a questa mancanza come equivalente alla presenza di una carica positiva fittizia che prende il nome di *lacuna*. Ogni lacuna può essere colmata da un elettrone che abbandoni un reticolo vicino, completando in tal modo un livello atomico, ma contemporaneamente contribuendo alla creazione di una nuova lacuna. Si crea così un moto di lacune (in direzione opposta a quella degli elettroni) che costituisce una corrente di conduzione di cariche positive equivalenti.

2.3 La densità di corrente

Modello corpuscolare

Come si è visto nel precedente paragrafo, quando lo stato di elettrizzazione di un corpo viene descritto tramite un modello corpuscolare si usa definire la densità $n(P)$ di particelle cariche presenti all'interno di un determinato volume. A queste particelle può essere associata una velocità media di migrazione $\mathbf{v}_P$, cosicchè è possibile definire il *vettore densità di corrente elettrica*

$$\mathbf{j}(P, t) = n(P) q_P \mathbf{v}_P \quad .$$

Modello continuo

Quando invece si fa riferimento ad una descrizione elettrica basata sul modello continuo per la carica, il vettore densità di corrente viene definito come segue:

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(P, t) &= \rho_C^+(P, t)\mathbf{v}_P^+(P, t) + \rho_C^-(P, t)\mathbf{v}_P^-(P, t) = \\ &= \rho_C^+(P, t)\mathbf{v}_P^+(P, t) - |\rho_C^-(P, t)|\mathbf{v}_P^+(P, t) \quad ,\end{aligned}$$

dove $\mathbf{v}_P^\pm(P, t)$ sono le velocità medie di migrazione nel punto P all'istante t per le densità di carica positiva e negativa. Le dimensioni fisiche della densità di corrente sono quelle di $[\text{A} \cdot \text{m}^{-2}]$.

2.4 Relazioni tra densità ed intensità di corrente

Al fine di collegare il campo vettoriale densità di corrente $\mathbf{j}(P, t)$ all'intensità $i(t)$ che attraversa una superficie S orientata dalla normale $\hat{n}$ al tempo t è sufficiente osservare che ogni elemento dS di S è attraversato, in un intervallo di tempo Δt da una carica positiva che, avendo velocità $\mathbf{v}_P^+$, occupa un volume con base dS ed altezza

$$d\mathbf{l}^+ = \mathbf{v}_P^+ \Delta t \quad .$$

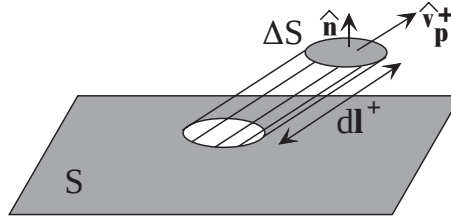


Figura 2.2: Volume occupato dalla carica che attraversa l'elemento di superficie ΔS nell'unità di tempo Δt .

Il volume è quindi pari a

$$\Delta\tau = \mathbf{v}_P^+ \cdot \hat{n} dS \Delta t \quad ,$$

e contiene una carica

$$dq^+ = \rho_C^+ \Delta\tau = \mathbf{v}_P^+ \cdot \hat{n} dS \Delta t \quad .$$

Pertanto, la carica totale positiva $\Delta q_{S,n}^+$ che attraversa la superficie S nell'intervallo di tempo Δt è pari a

$$\Delta q_{S,n}^+ = \Delta t \int_S \rho_C^+ \mathbf{v}_P^+ \cdot \hat{n} dS \quad ,$$

e, analogamente, per la carica negativa

$$\Delta q_{S,n}^- = \Delta t \int_S \rho_C^- \mathbf{v}_P^- \cdot \hat{n} dS \quad .$$

L'intensità della corrente elettrica risulta quindi

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q_{S,n}^+ + \Delta q_{S,n}^-}{\Delta t} = \int_S \left(\rho_C^+ \mathbf{v}_P^+ + \rho_C^- \mathbf{v}_P^- \right) \cdot \hat{n} dS \quad ,$$

e, ricordando che la densità di corrente è data da

$$\mathbf{j}(P, t) = \rho_C^+(P, t) \mathbf{v}_P^+(P, t) + \rho_C^-(P, t) \mathbf{v}_P^-(P, t) \quad ,$$

si ha infine

$$i(t) = \int_S \mathbf{j}(P, t) \cdot \hat{n} dS \quad .$$

2.5 L'equazione di continuità

Nello studio dei fenomeni elettromagnetici, un ruolo di particolare rilievo è assunto dall'intensità di corrente dovuta alle particelle cariche che attraversano una superficie chiusa, che indicheremo con il simbolo S_C .

Per il *principio di conservazione della carica*, la carica Δq_{usc} che esce dalla superficie chiusa S_C nell'intervallo di tempo infinitesimo Δt è uguale ed opposta alla variazione Δq_{int} della carica contenuta nel volume V racchiuso dalla superficie chiusa S_C . Pertanto, se la superficie S_C viene orientata secondo la normale $\hat{n}_{usc}$ ad essa uscente, si può scrivere

$$i_{usc}(t) = \int_{S_C} \mathbf{j}(P, t) \cdot \hat{n}_{usc} dS_C = \frac{\Delta q_{usc}}{dt} = - \frac{\Delta q_{int}}{dt} \quad .$$

Inoltre, se si adotta un modello continuo per descrivere la carica presente nel volume V racchiuso da S_C , risulta

$$q_{int} = \int_V \rho_C(P, t) d\tau \quad ,$$

e quindi, in ultima analisi

$$i_{usc}(t) = \int_{S_C} \mathbf{j}(P, t) \cdot \hat{n}_{usc} dS_C = - \int_V \frac{\partial \rho_C(P, t)}{\partial t} d\tau \quad ,$$

che rappresenta la forma integrale di una equazione che prende il nome di *equazione di continuità*. La forma differenziale dell'equazione può essere ricavata dalla sua forma integrale applicando il teorema di Gauss al primo membro ottenendo

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(P, t) = - \frac{\partial \rho_C(P, t)}{\partial t} \quad .$$

Questa equazione dà una relazione tra grandezze scalari, funzioni del punto P nello spazio e del tempo t , e mostra come i campi densità di corrente di conduzione e densità di carica non siano tra di loro indipendenti. Infatti, in accordo con l'intuito fisico, si riscontra che la densità di corrente elettrica *diverge* (ovvero “nasce” o “muore”) in quei punti dello spazio, o in quegli istanti temporali nei quali si ha una variazione della densità di carica elettrica. Il risultato non è dunque altro che una formalizzazione matematica del concetto stesso di corrente di conduzione che, come si è avuto modo di vedere, si genera quando vi è movimento di cariche elettriche. Con riferimento a coordinate cartesiane, la forma differenziale dell'equazione di continuità si scrive come

$$\frac{\partial J_x(P, t)}{\partial x} + \frac{\partial J_y(P, t)}{\partial y} + \frac{\partial J_z(P, t)}{\partial z} = - \frac{\partial \rho_C(P, t)}{\partial t} \quad .$$

Capitolo 3

I fondamenti dell'elettromagnetismo

3.1 La forza di Lorentz

Sperimentalmente si osserva che una carica puntiforme q in moto con velocità $\mathbf{v}$ in una regione dello spazio ove sia presente un campo elettromagnetico subisce l'azione di una forza, espressa in Newton [N], pari a

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b}) \quad . \quad (3.1)$$

Questa forza prende il nome di *forza di Lorentz*, e l'equazione (3.1) può essere assunta come l'equazione che definisce due vettori che risultano essere funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Questi vettori sono il vettore campo elettrico $\mathbf{e}$, espresso in Volt/metro [V/m], ed il vettore induzione magnetica $\mathbf{b}$, espresso in Tesla [T] o, talvolta, nella scala equivalente dei Weber/m² [W/m²]¹.

3.2 L'esperimento di Faraday e la legge di Gauss

L'esperimento che viene ora richiamato ha una importanza fondamentale nell'elettromagnetismo perchè esso rappresenta la prima osservazione che

¹Si sono scritti i campi elettrico ed induzione magnetica utilizzando lettere minuscole. Qui e nel resto del libro questa notazione indicherà grandezze che sono funzioni delle coordinate spaziali e del tempo. La notazione viene usata per distinguere ogni campo dalla sua corrispondente trasformata di Fourier, che verrà indicata con l'uso di lettere maiuscole.

condusse alla individuazione ed alla definizione del “campo spostamento elettrico” $\mathbf{d}$ ed è dovuta al fisico inglese Michael Faraday. Egli prese una sfera S_1 caricata con una carica $+Q$ e la circondò con una seconda sfera S_2 , di raggio maggiore rispetto a quello di S_1 ed elettricamente isolata (si veda la Fig.(3.1)).

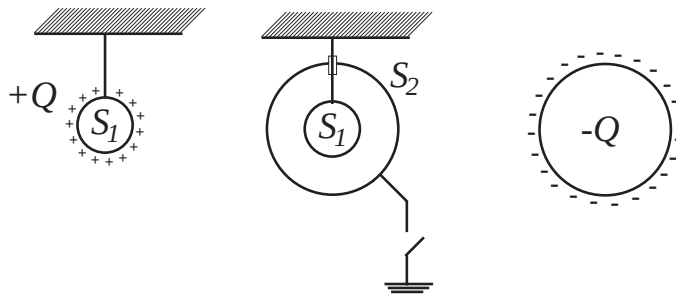


Figura 3.1: L'esperimento di Faraday.

Faraday osservò che, se la sfera esterna veniva prima connessa a terra tramite la chiusura di un interruttore, e successivamente isolata, rimuovendo la sfera interna si trovava, su S_2 una quantità di carica pari a quella inizialmente depositata su S_1 , ma di segno opposto.

Faraday concluse che, durante il processo di connessione a terra e di successivo isolamento, c'era qualcosa che “fuoriusciva” dalla sfera interna per raggiungere quella esterna così da fare in modo che l'insieme delle due sfere apparisse elettricamente neutro come necessario quando la sfera esterna era connessa a terra. Faraday notò inoltre che questo “qualcosa” che fuoriusciva dalla sfera interna non dipendeva né dalle dimensioni fisiche delle due sfere, né dal particolare dielettrico tra esse interposto, ma esclusivamente dalla carica $+Q$ inizialmente depositata sulla sfera interna. Faraday chiamò questo “qualcosa” *vettore (o flusso) spostamento elettrico*, indicato qui con il simbolo $\mathbf{d}$, e stabilì che

- le “linee” del campo vettoriale $\mathbf{d}$ escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative;
- il modulo del vettore è tale che il flusso di $\mathbf{d}$ valutato attraverso una superficie chiusa che racchiude una carica è uguale al valore della carica.

In termini matematici, le osservazioni di Faraday si riassumono nella seguente legge, spesso indicata con il nome di *legge di Gauss*

$$\int_{S_{chiusa}} \mathbf{d}(t) \cdot \hat{n} dS_{chiusa} = q_\ell(t) \quad ,$$

dove $q_\ell(t)$ è la carica (eventualmente variabile nel tempo) contenuta in un volume τ racchiuso dalla superficie chiusa S_{chiusa} , ed $\hat{n}$ è la normale ad essa uscente.

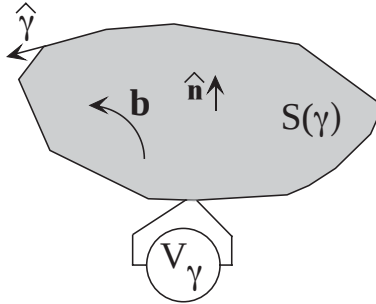
Come di consueto, se la carica q_ℓ è distribuita nel volume τ secondo una densità $\rho_\ell(t)$, si può scrivere

$$\int_{S_{chiusa}} \mathbf{d} \cdot \hat{n} dS_{chiusa} = \int_{\tau} \rho_\ell d\tau \quad ,$$

ed applicando il teorema di Gauss al primo membro, anche

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho_\ell \quad .$$

3.3 La legge di Faraday



Questa legge, dedotta ancora da considerazioni sperimentali, fornisce un legame tra il campo elettrico ed il campo di induzione magnetica. In particolare, si osserva che quando si considera un circuito chiuso γ disposto in una regione dello spazio in cui è presente un campo di induzione magnetica variabile nel tempo, nel circuito γ si manifesta una tensione elettrica che risulta legata alla variazione del flusso di induzione magnetica ad esso concatenato dall'espressione:

$$V_\gamma = -\frac{d\Phi_\gamma}{dt} \equiv -\frac{d}{dt} \int_{S(\gamma)} \mathbf{b} \cdot \hat{n} dS \quad , \quad (3.2)$$

dove si è indicata con $S(\gamma)$ una qualsiasi superficie regolare orlata dalla curva chiusa γ , e con $\hat{n}$ il versore normale a $S(\gamma)$ in ogni suo punto, ed orientato rispetto a γ secondo la regola della vite destrorsa.

La tensione elettrica V_γ può essere attribuita alla presenza del campo elettrico $\mathbf{e}$ tale che, quando la curva γ è assunta ferma ed indeformabile nel tempo, risulti

$$V_\gamma = \oint_\gamma \mathbf{e} \cdot \hat{\gamma} d\gamma = - \int_{S(\gamma)} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad . \quad (3.3)$$

3.4 La legge di Ampere

L'equazione (3.3) non è l'unica relazione esistente tra grandezze elettriche e grandezze magnetiche. Una seconda relazione, dedotta ancora una volta da evidenze sperimentali, mostra infatti che, quando in una regione dello spazio vi sono delle cariche elettriche in movimento, nella stessa regione si manifestano anche dei fenomeni di natura magnetica. In particolare, si osserva che, nel *caso stazionario*, ovvero quando le cariche in movimento danno luogo ad una densità di corrente di conduzione $\mathbf{j}$ che *non* varia nel tempo, risulta

$$\oint_\gamma \mathbf{h} \cdot d\gamma = \int_{S(\gamma)} \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS \quad , \quad (3.4)$$

dove i simboli γ ed $S(\gamma)$ hanno lo stesso significato che era stato loro attribuito nel paragrafo precedente.

In maniera analoga a quanto si era visto a riguardo della forza di Lorentz (3.1), la relazione (3.4), che prende il nome di *legge di Ampere*, introduce un nuovo campo vettoriale, il *campo magnetico* $\mathbf{h}$. Questo campo risulta, in generale, funzione delle coordinate spaziali e del tempo, e la sua unità di misura è quella di Ampere su metro [A/m].

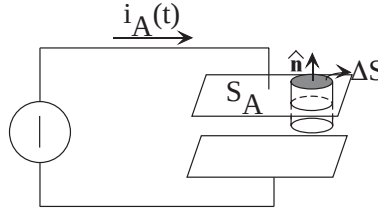
Come appena detto, la relazione (3.4) vale solo nel caso di campi stazionari, come è immediato verificare sulla base delle seguenti considerazioni. Per prima cosa, si applichi il teorema di Stokes al primo membro dell'equazione di Ampere e la si riscriva nella seguente forma differenziale:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad .$$

Successivamente, si calcoli la divergenza di ambo i membri di quest'ultima equazione; ricordando che $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{h} \equiv 0$, $\forall \mathbf{h}$ e che, in base

all'equazione di continuità della corrente, $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial\rho/\partial t$, si riconosce immediatamente quanto affermato in precedenza, ovvero il fatto che la legge di Ampere risulta valida solo in condizioni stazionarie, cioè quando $\partial\rho/\partial t = 0$.

Nel caso di campi variabili nel tempo, la relazione (3.4) va dunque modificata e, al fine di illustrare come ciò vada fatto, risulta utile considerare i fenomeni elettrici che si verificano all'interfaccia tra l'armatura di un condensatore ed il dielettrico che la circonda quando il condensatore viene alimentato con una corrente variabile nel tempo.



Per fissare le idee, si supponga che le armature del condensatore siano ideali, e che ideale sia anche il dielettrico tra esse interposto. Quando il condensatore è alimentato con la corrente $i_A(t)$, sulla superficie S_A della sua armatura superiore si deposita una carica $q_A(t)$ tale che $i_A(t) = dq_A(t)/dt$. Poichè in condizioni di idealità del mezzo che costituisce l'armatura la carica è solo superficiale, essa può essere descritta per mezzo di una densità superficiale $\rho_S(P, t)$ tale che

$$q_A(t) = \int_{S_A} \rho_S(P, t) dS_A \quad , \quad P \in S_A \quad .$$

Si consideri ora la legge di Gauss

$$\oint_{\Delta S} \mathbf{d} \cdot \hat{n} d\Delta S = \int_{\Delta \tau} \rho(P, t) d\Delta \tau \quad ,$$

dove, come di consueto, $\hat{n}$ indica la normale uscente ad una superficie chiusa ΔS che interseca la superficie S_A e che racchiude il volumetto $\Delta \tau$. Si ottiene, per $\Delta \tau \rightarrow 0$,

$$\mathbf{d}(P, t) = \rho_S(P, t) \hat{n} \quad , \quad P \in S_A \quad .$$

Si consideri ora la quantità

$$\mathbf{j}_S = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \hat{n} \quad ,$$

che, come appare evidente, ha le dimensioni di una densità di corrente, detta *di spostamento*, e si ricordi che, nel caso che si sta qui analizzando, si è supposto che sia le armature del condensatore sia il dielettrico tra esse interposto siano ideali. Fisicamente, ciò significa che il campo $\mathbf{d}$ non è presente all'interno delle armature dove non vi è dunque corrente di spostamento. Viceversa, nel dielettrico $\mathbf{d}$ è presente e dà ivi luogo a corrente di spostamento, mentre è nulla la corrente di conduzione. Poichè l'equazione di continuità della corrente è comunque valida, se ne deduce che la $\mathbf{j}_S$ è il termine che permette di prolungare la densità di corrente oltre la regione di conduzione, andando ad invadere la regione dielettrica circostante.

In un caso più realistico nel quale sia le armature del condensatore, sia il dielettrico interposto siano non ideali, entrambi sono sede di corrente sia di conduzione, sia di spostamento, e diviene pertanto significativo definire la *densità di corrente totale*, somma delle densità di corrente di conduzione e di spostamento:

$$\mathbf{j}_{tot} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_S \quad .$$

La correzione da apportare all'equazione (3.4) al fine di riconciliare i risultati che essa descrive con l'evidenza sperimentale è ora facilmente identificabile: al secondo membro di questa equazione non va considerata la sola corrente di conduzione, quanto invece la corrente totale, di modo che l'equazione (3.4) va riscritta nella forma

$$\oint_{\gamma} \mathbf{h} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \int_{S(\gamma)} \mathbf{j}_{tot} \cdot \hat{n} dS = \int_{S(\gamma)} \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS + \int_{S(\gamma)} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \cdot \hat{n} dS \quad . \quad (3.5)$$

e la nuova equazione così riscritta prende il nome di equazione di *Ampere–Maxwell*.

3.5 Le equazioni di Maxwell

Le equazioni (3.3) e (3.5) sono le equazioni di Maxwell che descrivono la propagazione delle onde elettromagnetiche. Così come sono state scritte, esse si presentano nella forma indicata con il nome di *forma integrale*, ovvero in una forma nella quale le grandezze in gioco sono quantità fisiche che risultano osservabili e misurabili su intervalli di tempo e su regioni dello spazio con dimensioni finite.

In una forma alternativa, detta *forma differenziale*, le equazioni possono essere scritte con riferimento a quantità puntuali ed istantanee. La forma differenziale delle equazioni è ricavabile a partire dalla forma integrale mediante l'applicazione dei teoremi di Stokes e di Gauss; ne derivano le seguenti equazioni:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad , \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad . \quad (3.7)$$

Prima di intraprendere lo studio di queste equazioni è ora utile derivare alcune relazioni tra le grandezze elettromagnetiche che in esse compaiono. Si consideri ad esempio l'equazione (3.6) e si calcoli la divergenza di entrambi i membri; si ottiene

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \right) = 0 \quad , \quad (3.8)$$

e, quando $\mathbf{b}$ è una funzione sufficientemente regolare in modo che l'operatore di divergenza commuti con quello di derivazione rispetto al tempo, anche

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{b}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad , \quad (3.9)$$

dal momento che un qualsiasi campo elettromagnetico di pratico interesse è nullo in tutti gli istanti antecedenti l'istante iniziale di analisi. L'equazione (3.9) trova una immediata giustificazione nell'intuito fisico: come si è avuto modo di notare in precedenza, un valore non nullo di divergenza implica infatti la presenza di linee di forza che non si richiudono su sè stesse o, in altri termini, di “sorgenti” o di “pozzi” nei quali nasce o termina il campo in esame. Come è ben noto, tuttavia, le linee di forza del campo di induzione magnetica sono sempre linee *chiuse*, dal momento che non esiste una “carica elementare” magnetica. Ne segue che, correttamente, la divergenza del campo di induzione magnetica deve essere identicamente nulla.

Una seconda relazione di interesse può essere ottenuta in modo analogo a quanto appena fatto calcolando la divergenza di ambo i membri della seconda equazione di Maxwell. Si ottiene in questo caso

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{d}) = -\frac{\partial \rho_C}{\partial t} \quad , \quad (3.10)$$

dove si è nuovamente supposto che il campo $\mathbf{d}$ abbia sufficienti proprietà di regolarità tali da garantire l'intercambiabilità degli operatori di derivata rispetto al tempo e di divergenza, e si è usata la legge di Gauss per esprimere la relazione in termini della densità di carica volumetrica ρ_C . Anche in questo caso la relazione (3.10) appena ricavata trova una semplice giustificazione fisica: essa infatti non è altro che la formulazione differenziale della *equazione di continuità*, già vista nel precedente capitolo.

3.6 Le correnti impresse

Lo studio della propagazione delle onde elettromagnetiche richiede essenzialmente la capacità di risolvere le equazioni di Maxwell. La prima cosa da fare è allora quella di individuare quali delle grandezze che in esse compaiono siano da considerarsi come grandezze incognite, e quali invece possano essere considerate alla stregua di termini noti. La distinzione, che può apparire banale da un punto di vista matematico, richiede invece una certa cura quando applicata ai casi pratici ed anzi, come si vedrà tra breve, nella maggior parte dei casi essa è una distinzione artificiosa che comporta l'introduzione di approssimazioni: nella realtà, infatti, nessuna delle grandezze che compaiono nelle equazioni di Maxwell può essere ritenuta nota a priori, ed indipendente da tutte le altre.

Per chiarire il concetto si immagini di voler studiare il campo elettromagnetico generato da una antenna, per esempio filiforme. Sulla scorta delle nozioni di teoria dei circuiti elettrici si è portati a pensare che, quando l'antenna viene collegata ad un generatore di cui si conosca la caratteristica di tensione-corrente, ed il generatore viene fatto lavorare ad una assegnata tensione, sull'antenna si manifesta un ben determinato valore della corrente. Nella realtà, tuttavia, la distribuzione di corrente che viene a trovarsi sull'antenna genera un campo elettromagnetico che, a sua volta, provoca la presenza di una corrente sulla stessa antenna. In sostanza, la corrente totale che è presente sull'antenna non dipende solo dal generatore, ed a rigore non è dunque corretto ritenere che essa sia un dato del problema noto a priori.

Per poter procedere nello studio delle equazioni di Maxwell la distinzione tra termini noti e termini incogniti è tuttavia indispensabile e ciò che si usa fare è allora introdurre delle approssimazioni, decidendo di *ritenere* noti a priori quei termini che possono essere stimati con buona

approssimazione, o che possono essere misurati sperimentalmente con relativa facilità. Spesso si riscontra che le grandezze che soddisfano a questi requisiti sono le densità di corrente elettrica *impressa*, indicate qui con il simbolo $\mathbf{j}_i$, che sono le densità di correnti presenti in una regione dello spazio che si usa indicare con il nome di *regione delle sorgenti*.

Nello spirito di questa approssimazione, le equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti si scrivono allora come segue:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad , \quad (3.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_i \quad . \quad (3.12)$$

3.7 Relazioni costitutive dei mezzi elettromagnetici

Dal punto di vista matematico, le equazioni (3.11,3.12) rappresentano un sistema con 15 incognite scalari (le tre componenti di ognuno dei cinque campi vettoriali $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{d}$ e $\mathbf{j}$) e 6 equazioni. Per poter procedere alla loro risoluzione è dunque necessario individuare delle ulteriori relazioni che permettano di ridurre il numero delle incognite. Queste relazioni sono le *relazioni costitutive* del mezzo nel quale ha luogo la propagazione.

Per chiarire di cosa si tratta, si analizzi dapprima il caso più semplice possibile, quello di un campo che si propaga nel vuoto in assenza di sorgenti. In questo caso, poichè non vi è corrente di conduzione, le incognite sono “solo” 12, con 6 equazioni. Le relazioni che consentono di chiudere il sistema, riducendo a sei anche il numero delle incognite, sono quelle che legano tra loro il campo elettrico al campo spostamento elettrico ed il campo magnetico al campo di induzione magnetica, secondo le relazioni

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e} \quad , \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m} \quad , \quad (3.13)$$

$$\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h} \quad , \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m} \quad . \quad (3.14)$$

Le costanti ϵ_0 e μ_0 prendono rispettivamente il nome di *permittività dielettrica* e *permeabilità magnetica* (del vuoto) e la loro introduzione mostra come per descrivere la propagazione di un campo nel vuoto non siano in realtà necessari tutti quattro i vettori $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{h}$, ma ne bastino invece solo due, uno di tipo elettrico ed uno di tipo magnetico.

A tale proporsito, va notato che sebbene da un punto di vista puramente formale non vi sia ragione per preferire $\mathbf{e}$ a $\mathbf{d}$, o $\mathbf{h}$ a $\mathbf{b}$, considerazioni di tipo relativistico fanno tuttavia assumere i vettori $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{h}$ come vettori fondamentali, ed i vettori $\mathbf{d}$ e $\mathbf{b}$ come vettori derivati e per questa ragione le equazioni di Maxwell si scrivono usualmente con riferimento ai campi elettrico e magnetico.

Nel caso più generale nel quale la propagazione avviene sempre in assenza di sorgenti, ma all'interno di un mezzo materiale, per procedere alla riduzione del numero delle incognite è necessario individuare delle relazioni più generali che consentano di esprimere il legame tra i campi $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ e $\mathbf{j}$ ed i campi $\mathbf{e}$ ed $\mathbf{h}$. Nella pratica si riscontra che tali relazioni sono dei funzionali del tipo

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{e}) \quad , \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{h}) \quad , \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{e}) \quad , \quad (3.15)$$

che possono essere esplicitati solo analizzando con adeguato dettaglio le proprietà generali dei mezzi materiali. Queste proprietà si dividono in due classi: le proprietà connesse alle simmetrie dei mezzi materiali, e le proprietà connesse alla relazione di causa-effetto che vale in ogni sistema fisico reale. Al primo tipo di proprietà appartengono le seguenti caratteristiche:

- *Omogeneità nel tempo.* Questa caratteristica esprime l'invarianza nel tempo del sistema fisico, ovvero il fatto che il comportamento del sistema stesso è indipendente dal particolare istante nel quale esso viene considerato. In altri termini, una traslazione temporale di una sollecitazione che venga imposta al sistema si riflette solamente in una corrispondente traslazione della risposta che il sistema fornisce, di modo che la scelta dell'origine della coordinata temporale è del tutto arbitraria.
- *Omogeneità nello spazio.* In maniera del tutto analoga, un mezzo gode di questa proprietà se una traslazione spaziale di una sollecitazione ad esso imposta si riflette solamente in una corrispondente traslazione spaziale della risposta del mezzo. Quando ad un mezzo si applica questa proprietà, diventa arbitraria la scelta dell'origine di un sistema di riferimento spaziale.
- *Isotropia.* Questa proprietà, di tipo spaziale, tiene conto del fatto che le sollecitazioni e le risposte di un mezzo materiale possono

avere natura vettoriale. In particolare, si dice che un mezzo è isotropo se ad una rotazione della sollecitazione corrisponde una uguale rotazione della risposta. Da un punto di vista fisico, ciò implica che tutte le direzioni dello spazio sono tra di loro equivalenti, e che sollecitazione e risposta sono tra loro allineate.

Alla seconda classe appartengono invece le seguenti proprietà:

- *Linearità.* Un sistema si dice lineare se ad una sovrapposizione lineare di cause, ognuna pesata per un determinato coefficiente, corrisponde una sovrapposizione lineare degli effetti, pesati secondo gli stessi coefficienti. Quando ad un sistema si applica questa proprietà si usa dire che in quel sistema vale il *principio di sovrapposizione degli effetti*.
- *Dispersività.* Questa caratteristica riguarda la “memoria” temporale o spaziale di un sistema. In particolare, si usa dire che un sistema è dispersivo nel tempo se la risposta che esso presenta in un determinato istante temporale dipende dal valore che la sollecitazione assume *anche in altri istanti temporali*. Si noti che, dovendo valere il principio di causalità, se un mezzo è dispersivo nel tempo, la risposta cui esso dà luogo all’istante $t = t_0$ può dipendere solo dal valore della sollecitazione negli istanti $t \leq t_0$.

In maniera analoga, il mezzo si dice dispersivo nello spazio se alla risposta che esso presenta in un determinato punto dello spazio concorrono i valori degli ingressi applicati anche in altri punti dello spazio. A differenza di quanto accade nel caso temporale, tuttavia, poichè lo spazio è tridimensionale e come tale non ammette un ordinamento univoco, l’effetto in un punto può dipendere dalla causa applicata in un qualsiasi altro punto.

Chiarite queste proprietà generali, si può ora illustrare in maniera esplicita la forma che assumono le generiche relazioni (3.15). In particolare, interessa qui valutare il comportamento di mezzi nei quali valgano le proprietà di *linearità* e di *dispersività*. In questo caso la relazione che esiste tra il campo di spostamento elettrico ed il campo elettrico (e, analogamente, tra il campo di induzione magnetica ed il campo magnetico, e tra il campo di densità di corrente ed il campo elettrico) è data da un operatore lineare che ammette la seguente scrittura formale:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt' \quad , \quad (3.16)$$

dove $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$ sono due generici raggi vettori all'interno del volume di definizione del campo, e t, t' due istanti temporali. La matrice $\underline{\mathbf{G}}$, detta *matrice di Green*, è invece la quantità che descrive matematicamente le proprietà del mezzo all'interno del quale si sviluppa il campo elettromagnetico. Per esteso, questa matrice si scrive nella forma

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_{xx}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') & g_{xy}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') & g_{xz}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \\ g_{yx}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') & g_{yy}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') & g_{yz}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \\ g_{zx}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') & g_{zy}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') & g_{zz}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

e quindi, nel caso più generale possibile, essa dipende da nove funzioni scalari. Il significato di queste funzioni è di immediata comprensione. Basta infatti considerare il caso in cui al mezzo materiale in esame venga applicato un ingresso impulsivo concentrato nello spazio attorno alla coordinata $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ e, nel tempo, all'istante $t = t_0$:

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(t - t_0) \quad .$$

L'equazione (3.16) dà in questo caso

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0, t_0) \cdot \mathbf{e}_0 \quad , \quad (3.18)$$

e si riconosce allora che la matrice non è altro che la risposta che il mezzo presenta nel punto $\{\mathbf{r}, t\}$ quando esso viene sollecitato da un impulso applicato in $\mathbf{r}_0$ all'istante t_0 . Per questa ragione la $\underline{\mathbf{G}}$ viene anche detta *risposta impulsiva* del mezzo.

Fino a questo punto si sono sfruttate solo le proprietà di linearità e di dispersione. È ora ragionevole domandarsi se l'uso delle rimanenti proprietà generali dei mezzi materiali possa aiutare a semplificare la forma delle funzioni che compaiono nella matrice di Green, o a ridurne il numero. In dettaglio si osserva quanto segue:

- *Isotropia.* Quando il mezzo gode di questa proprietà, l'ingresso e l'uscita sono tra loro allineati nello spazio. Per fissare le idee, si immagini che la sollecitazione, cioè il campo $\mathbf{e}$, sia diretto lungo l'asse x . Poichè $\mathbf{d}$ è parallelo a $\mathbf{e}$, ne segue $g_{yx}(\cdot) = g_{zx}(\cdot) \equiv 0$. Ripetendo poi il ragionamento per un campo $\mathbf{e}$ diretto lungo y o lungo z si riconosce che la matrice di Green si semplifica nella forma

$$\underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} g_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & g_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & g_{zz} \end{bmatrix} \quad .$$

Vi è tuttavia di più: si deve infatti avere $g_{xx} = g_{yy} = g_{zz}$. Per dimostrare questo fatto è sufficiente usare la definizione di isotropia in base alla quale una rotazione della causa deve comportare una corrispondente rotazione dell'effetto. Si immagini allora di eseguire una rotazione che porti dall'asse x all'asse z . L'effetto dovuto alla causa lungo x è pari a $g_{xx} e_x$, mentre quando la stessa causa è applicata lungo z l'effetto è $g_{zz} e_z = g_{zz} e_x$. Poichè gli effetti devono coincidere, $g_{xx} \equiv g_{zz}$. Analogamente, poi, $g_{xx} \equiv g_{yy}$. Nel caso di isotropia, dunque, la matrice di Green si semplifica in maniera significativa: essa diviene proporzionale alla matrice identità di ordine tre, e dipende quindi da una sola funzione scalare.

- *Omogeneità nel tempo.* Per definizione, quando un mezzo gode di questa proprietà, la relazione che esso impone tra l'ingresso da cui viene sollecitato e l'uscita che fornisce deve essere invariante rispetto ad una traslazione dell'asse dei tempi. Si consideri allora l'espressione generale (3.16), e si concentri l'attenzione sulla sola integrazione rispetto alla variabile temporale:

$$\mathbf{d}(t) = \int \underline{\mathbf{G}}(t, t') \mathbf{e}(t') dt' \quad .$$

Quando la sollecitazione viene traslata di un tempo T , si ha invece

$$\mathbf{d}_T(t) = \int \underline{\mathbf{G}}(t, t') \mathbf{e}(t' + T) dt' \quad ,$$

e, dovendo risultare $\mathbf{d}_T(t) \equiv \mathbf{d}(t + T)$, segue

$$\underline{\mathbf{G}}(t, t') = \underline{\mathbf{G}}(0, t' - t) \quad . \quad (3.19)$$

Infatti, deve aversi

$$\int \underline{\mathbf{G}}(t, t') \mathbf{e}(t' + T) dt' = \int \underline{\mathbf{G}}(t + T, t') \mathbf{e}(t') dt' \quad ,$$

ovvero, posto $t' + T = \tau$,

$$\int \underline{\mathbf{G}}(t, \tau - T) \mathbf{e}(\tau) d\tau = \int \underline{\mathbf{G}}(t + T, t') \mathbf{e}(t') dt' \quad ,$$

da cui

$$\underline{\mathbf{G}}(t, \tau - T) = \underline{\mathbf{G}}(t + T, t') \quad ,$$

e anche, cambiando τ con t'

$$\underline{\mathbf{G}}(t, t' - T) = \underline{\mathbf{G}}(t + T, t') \quad .$$

Questa relazione deve valere per ogni t , T e t' e quindi, in particolare, per $t = 0$: si è così ritrovata la (3.19).

L'omogeneità nel tempo implica dunque che la matrice di Green, ed ognuna delle funzioni al suo interno, non dipende separatamente dai due istanti temporali t e t' , ma dipende invece dalla loro differenza.

- *Omogeneità nello spazio.* In maniera analoga, quando un mezzo è omogeneo nello spazio, la matrice di Green non dipende separatamente dai raggi vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$, ma dalla differenza $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Si noti che, da un punto di vista computazionale, la proprietà di omogeneità, sia spaziale sia temporale, consente una semplificazione della matrice di Green mediante una riduzione del numero delle variabili indipendenti che in essa compaiono. Infatti, quando un mezzo è non omogeneo, la matrice di Green dipende da 8 variabili indipendenti: le 6 componenti scalari dei due raggi vettori, e i due istanti temporali. Quando invece vale la proprietà di omogeneità rispetto al tempo, il numero di variabili indipendenti scende a 7, e si riduce ulteriormente sino a 4 se insieme alla omogeneità temporale vale anche quella spaziale.

- *Non dispersività.* Si analizzi dapprima il caso di un mezzo non dispersivo rispetto alla variabile temporale. Per definizione, la risposta del mezzo dipende solo dal valore istantaneo dell'ingresso. È allora immediato verificare che, affinché questo possa accadere per ogni istante temporale è necessario che la dipendenza della matrice di Green dalle variabili temporali sia di tipo impulsivo, ovvero che ognuna delle funzioni di Green contenga una distribuzione di Dirac del tipo $\delta(t - t')$. In maniera analoga, se vale la proprietà di non dispersività rispetto alle coordinate spaziali, la dipendenza della matrice di Green da queste si esprime per mezzo di una distribuzione del tipo $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.

Nella maggior parte dei casi che verranno illustrati nei capitoli successivi, i mezzi materiali nei quali si svilupperanno i campi elettromagnetici saranno mezzi lineari, non dispersivi nello spazio, ed omogenei

nel tempo. La relazione tra $\mathbf{d}$ ed $\mathbf{e}$ che più comunemente si utilizzerà è allora una relazione che si scrive come:

$$\mathbf{d}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t \underline{\mathbf{G}}(\mathbf{r}, t - t') \mathbf{e}(\mathbf{r}, t') dt' \quad . \quad (3.20)$$

Si noti che l'estremo superiore di integrazione è t e non $+\infty$ per effetto del principio di causalità, in base al quale il valore assunto da $\mathbf{d}$ al tempo t non può dipendere dai valori di $\mathbf{e}$ negli istanti successivi a t . Si noti altresì che l'integrale (3.20) è un integrale di convoluzione, di modo che se il legame tra $\mathbf{d}$ ed $\mathbf{e}$ viene espresso con riferimento alle corrispondenti trasformate di Fourier $\mathbf{D}$ ed $\mathbf{E}$, si ottiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \underline{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad , \quad (3.21)$$

dove si è indicato con $\underline{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega)$ la matrice delle trasformate di Fourier della risposta impulsiva del mezzo materiale. Essa è ancora detta permittività dielettrica del mezzo.

In maniera del tutto analoga, le relazioni tra le rimanenti grandezze elettromagnetiche si scrivono come

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \underline{\mu}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \quad , \quad (3.22)$$

dove $\underline{\mu}$ è ancora la permeabilità magnetica del mezzo, e

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \omega) = \underline{\gamma}(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \quad , \quad (3.23)$$

dove $\underline{\gamma}$ è la conducibilità del mezzo, misurata in $[\Omega^{-1}\text{m}^{-1}]$. Come è immediato riconoscere, l'ultima relazione scritta non è altro che la legge di Ohm.

Le equazioni (3.21–3.23) possono apparire formalmente analoghe alle (3.13,3.14). Tuttavia, è essenziale notare che tra le due coppie di relazioni vi è in realtà un'importante differenza. Infatti, le (3.13,3.14) sono state scritte con riferimento ai campi nel *dominio del tempo*, e la loro validità è essenzialmente legata al fatto che il vuoto è un mezzo non dispersivo rispetto al tempo ed allo spazio. Le (3.21–3.23) valgono invece nel *dominio della frequenza*, e se si vogliono ottenere le corrispondenti relazioni nel dominio del tempo è necessario il calcolo di un integrale di convoluzione.

Si noti altresì che le (3.21–3.23) sono state ottenute assumendo la *linearità* del mezzo materiale. Il caso più generale di propagazione in

mezzi non lineari comporta ulteriori complicazioni, e verrà qui illustrato solo per sommi capi. Il modo con cui si procede è il seguente. Si è visto all'inizio del paragrafo che per ridurre il numero delle incognite è necessario individuare delle relazioni tra $\mathbf{b}$ e $\mathbf{h}$, e tra $\mathbf{d}$ e $\mathbf{e}$. Si possono allora introdurre due nuovi campi, detti di polarizzazione elettrica, $\mathbf{p}$, e di polarizzazione magnetica, $\mathbf{m}$, definiti come segue:

$$\mathbf{p} = \mathbf{d} - \epsilon_0 \mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{m} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{b} - \mu_0 \mathbf{h}) \quad .$$

Questi nuovi vettori sono diversi da zero nei mezzi materiali, ed identicamente nulli nel vuoto, e racchiudono in sé le proprietà elettromagnetiche dei mezzi in esame. Ovviamente, l'introduzione dei vettori di polarizzazione non è di per sé sufficiente ad ottenere la riduzione del numero delle incognite, che sono sempre 15, ma risulta utile perchè, almeno in alcuni casi di interesse pratico, analizzando il comportamento microscopico della materia che costituisce il mezzo materiale si possono scrivere delle relazioni che forniscono esplicitamente il valore delle polarizzazioni. In generale, si trova che queste possono essere scritte nella forma di una serie di Taylor del tipo

$$\mathbf{p} = \chi^{(1)} \mathbf{e} + \chi^{(2)} \mathbf{e}^2 + \dots$$

dove il generico parametro $\chi^{(n)}$ prende il nome di suscettività elettrica (e magnetica nella corrispondente espansione per $\mathbf{m}$) di ordine n . In particolare, la suscettività del primo ordine, $\chi^{(1)}$, è legata all'indice di rifrazione e alle perdite del mezzo, la $\chi^{(2)}$ è responsabile di processi quali la generazione di seconda armonica e la conversione di frequenza, e la $\chi^{(3)}$ dell'effetto Kerr.

Una ultima osservazione riguarda infine il caso sino a qui escluso, quello della propagazione in *presenza* di sorgenti. Come si nota dalle equazioni (3.11,3.12), dal punto di vista del numero delle incognite l'introduzione delle sorgenti non comporta alcuna ulteriore complicazione: le correnti impresse $\mathbf{j}_i$ sono infatti dei termini noti la cui conoscenza prescinde da tutte le altre grandezze.

3.8 Equazioni di Maxwell in regime armonico

Spesso nello studio dei campi elettromagnetici interessa valutare la propagazione di onde il cui andamento temporale è descritto da una funzione

sinusoidale. In questo caso, l'uso delle equazioni (3.11,3.12) è inutilmente oneroso e complicato. Infatti, le grandezze che in esse compaiono sono trattate come grandezze incognite rispetto alla loro dipendenza *sia* dalle coordinate spaziali, *sia* dalla coordinata temporale. È evidente, invece, che nel caso di campi con andamento sinusoidale, la forma temporale delle soluzioni, lungi dall'essere incognita, è addirittura nota a priori, e le uniche grandezze da determinarsi sono le *ampiezze* e le *fasi* delle funzioni sinusoidali in oggetto.

Diventa allora ragionevole domandarsi se non sia possibile trovare una forma alternativa delle equazioni di Maxwell che valga per i soli campi armonici e nelle quali le incognite siano, per l'appunto, le ampiezze e le fasi dei campi elettromagnetici. La risposta a questo quesito è positiva, e si basa sull'introduzione del cosiddetto *metodo di Steinmetz*, o della rappresentazione complessa delle grandezze sinusoidali. In sostanza, si tratta di introdurre per ogni campo un vettore complesso, indicato qui con una lettera maiuscola, ad esempio $\mathbf{H}$ nel caso del campo magnetico, legato al corrispondente vettore nel dominio del tempo dalla relazione biunivoca

$$\mathbf{h}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right\} \quad (3.24)$$

dove con ω è stata indicata la pulsazione della funzione sinusoidale. Relazioni analoghe alla (3.24) possono essere definite per tutte le rimanenti grandezze elettromagnetiche e, notando che all'operazione di derivazione nel tempo corrisponde, nel dominio dei vettori complessi, l'operazione di prodotto per il fattore $i\omega$, si perviene infine alla seguente forma delle equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} = -i\omega \underline{\mu}(\omega) \mathbf{H} \quad , \quad (3.25)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_i = \underline{\gamma}(\omega) \mathbf{E} + i\omega \underline{\epsilon}(\omega) \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad . \quad (3.26)$$

Analogamente, le equazioni delle divergenze assumono la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad .$$

Nelle (3.25,3.26) si è esplicitamente scritta la dipendenza di tutti i parametri dalla frequenza ω , e si è anche tenuto conto del fatto che essi possono avere natura tensoriale. In realtà, nella quasi totalità dei casi che verranno trattati nel seguito, le equazioni di Maxwell verranno

studiate con riferimento a mezzi isotropi nei quali, come visto, i parametri $\underline{\epsilon}$, $\underline{\mu}$ e $\underline{\gamma}$ si riducono a parametri scalari. Per ciò che concerne la loro dipendenza dalla frequenza è invece necessario aggiungere qualche ulteriore precisazione. In particolare, poichè la conducibilità γ è sostanzialmente costante, e quindi non dispersiva, fino alle frequenze dell'infrarosso, spesso se ne tralascerà la dipendenza da ω . Da un punto di vista fisico ciò corrisponde ad assumere che la risposta della corrente di conduzione all'applicazione di un campo elettrico sia sempre istantanea. Il caso dei parametri ϵ e μ è invece diverso: per ciò che concerne la permittività dielettrica occorre infatti notare che molti dei mezzi di interesse presentano una significativa dispersione temporale, cosicchè la dipendenza di ϵ da ω diventa essenziale ai fini di una corretta modellizzazione della propagazione. Per la permeabilità magnetica, infine, vi sono tre casi da prendere in considerazione. Il primo è quello dei materiali non magnetici, nei quali non vi è dispersione e quindi μ può essere assunta costante ed anzi, con buona approssimazione, coincidente con quella del vuoto. Il secondo caso è quello dei materiali magnetici, sia paramagnetici, sia diamagnetici, nei quali la dispersione è largamente avvertibile, a la dipendenza di μ da ω non può quindi più essere tralasciata. Il terzo ed ultimo caso è quello dei materiali ferromagnetici, nei quali intervengono fenomeni non lineari nel legame tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$.

Prima di concludere il paragrafo, si introducono due nuove grandezze, la *permittività complessa* e l'*angolo di perdita*. Per ciò che concerne il primo di questi parametri, la definizione discende dal fatto che nell'equazione (3.26) compaiono due termini che dipendono dal campo elettrico $\mathbf{E}$. Si indica con il permittività complessa la grandezza

$$\underline{\epsilon}_C = \underline{\epsilon} - i \frac{\underline{\gamma}}{\omega} \quad ,$$

e la sua introduzione nella (3.26) porta a riscrivere la seconda equazione di Maxwell nella seguente forma compatta

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \underline{\epsilon}_C(\omega) \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad .$$

Si noti che, da un punto di vista fisico, la permittività complessa non corrisponde ad una quantità realisticamente misurabile. Essa infatti racchiude in un unico contributo due densità di corrente, quella di conduzione e quella di spostamento, la cui natura fisica è in realtà profondamente diversa. Da un punto di vista puramente matematico, tuttavia,

la definizione di permittività complessa non presenta difficoltà e, come si vedrà nel seguito, il suo uso consente di trattare in modo semplice ed unificato i casi di propagazione in presenza ed in assenza di perdite.

Per ciò che concerne l'angolo di perdita, infine, esso è indicato con la lettera δ , ed è definito come segue (si illustra per semplicità il caso di un mezzo isotropo):

$$\tan(\delta) = \frac{\text{Im}\{\epsilon\} + \gamma}{\text{Re}\{\epsilon\}} \quad \text{con} \quad \epsilon = \text{Re}\{\epsilon\} - i\text{Im}\{\epsilon\} \quad .$$

L'angolo di perdita è nullo per un mezzo con conducibilità nulla e con ϵ puramente reale. Si vedrà nel seguito che quest'ultimo requisito è pressochè impossibile da realizzare in pratica, a meno che il mezzo non sia rigorosamente non dispersivo. Quando invece il mezzo ha perdite, ed è un mezzo passivo, la tangente dell'angolo di perdita è un numero positivo e per convenzione si assume $0 \leq \delta \leq \pi/2$.

3.9 Condizioni sulle superfici di discontinuità

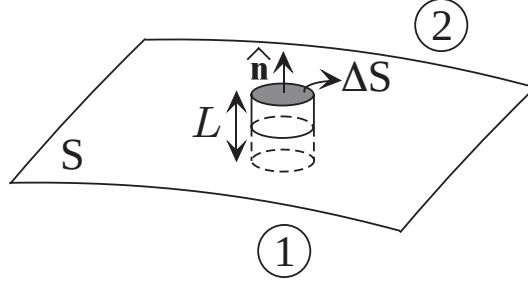
In un contesto fisico reale un campo elettromagnetico si propaga sempre in una regione dello spazio nella quale il mezzo materiale presenta delle disomogeneità. È allora utile sapere come si comportano le componenti del campo in prossimità di queste, ovvero stabilire un'insieme di condizioni che vengono usualmente indicate con il termine di *condizioni sulle superfici di discontinuità*.

Si analizza per primo il comportamento del vettore spostamento elettrico $\mathbf{d}$ nel dominio del tempo. In virtù della legge di Gauss, se si considera una superficie chiusa S che racchiude un volume V nel quale sia presente una carica Q , si ha

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot \hat{n} dS = Q \quad ,$$

dove con $\hat{n}$ si è indicata, come al solito, la normale alla superficie S orientata secondo il verso di uscita da questa.

Si immagini ora che S sia la superficie di discontinuità tra due mezzi materiali rispettivamente indicati con i simboli di mezzo "1" e mezzo "2", e si consideri un volumetto cilindrico ΔV che interseca S . Sia ΔS l'area delle basi del cilindro, L la sua altezza, e ΔQ la carica elettrica in esso racchiusa.



L'applicazione delle legge di Gauss al volumetto ΔV fornisce il seguente risultato:

$$-\Delta S \mathbf{d}_1 \cdot \hat{n} + \Delta S \mathbf{d}_2 \cdot \hat{n} + \Phi_L = \Delta Q \quad .$$

dove con Φ_L si è indicato il flusso di $\mathbf{d}$ attraverso la superficie laterale del cilindro, mentre $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ sono i campi spostamento elettrico rispettivamente nel “mezzo 1” e nel “mezzo 2”. Si faccia ora tendere L a zero, lasciando inalterata ΔS . Il flusso Φ_L tende a zero, e si ottiene così:

$$\Delta S (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \hat{n} = \lim_{L \rightarrow 0} \Delta Q = \Delta Q_S \quad ,$$

dove ΔQ_S è la carica superficiale eventualmente presente su ΔS . Infine, si faccia tendere anche ΔS a zero. Si ottiene:

$$(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_S}{\Delta S} = \rho_S \quad , \quad (3.27)$$

dove ρ_S indica la densità superficiale di carica, misurata in $[\text{C} \cdot \text{m}^{-2}]$. La differenza tra le componenti normali del vettore spostamento elettrico è dunque pari al valore della densità superficiale di carica presente su una eventuale superficie di discontinuità tra mezzi materiali.

Una interessante conseguenza di questo fatto è la seguente: si immagini che la superficie S sia la superficie di un conduttore elettrico perfetto. Come è noto dall'elettrostatica, sulla faccia interna di questa superficie il campo spostamento elettrico $\mathbf{d}_1$ è nullo e quindi, per avere campo al di fuori della superficie metallica è necessario che sul conduttore siano depositate delle cariche elettriche.

Con un procedimento analogo, partendo dall'equazione $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$, si ottiene

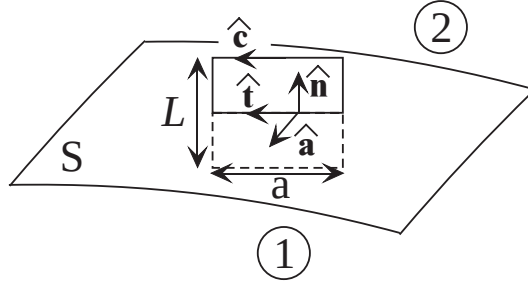
$$(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \hat{n} = 0 \quad . \quad (3.28)$$

Le componenti normali di $\mathbf{b}$ sono dunque sempre continue nell'attraversare una qualsiasi superficie di discontinuità tra mezzi materiali.

Spesso la (3.28) viene scritta nella seguente forma generalizzata:

$$(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \rho_{Ms} \quad ,$$

dove con ρ_{Ms} è indicata una quantità fittizia, e quindi sempre nulla nella realtà, che ha le dimensioni di Tesla e che viene introdotta al solo scopo di rendere simmetriche le equazioni di Maxwell. In queste equazioni, infatti, compaiono solo densità di correnti e di cariche elettriche, come deve essere dal momento che non esiste la carica magnetica elementare. L'introduzione del termine ρ_{Ms} consente di far comparire nelle equazioni un termine di carica magnetica che le rende maggiormente simmetriche. Tale termine è evidentemente un puro artificio matematico, e non ha alcun riscontro fisico misurabile; tuttavia si vedrà nel seguito che, al pari di altri termini solo matematicamente sensati, esso consente una trattazione unificata e semplificata di alcuni problemi di propagazione, e solo a tale scopo esso viene introdotto.



Per ciò che concerne la continuità dei rimanenti campi $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$ si può procedere come segue. Si indichi ancora con S la superficie di discontinuità tra due mezzi materiali e si individui ora un circuito rettangolare chiuso γ che intersechi ortogonalmente S . Sia $\Sigma(\gamma)$ la superficie rettangolare contornata da γ , con lunghezza L ed altezza a . Inoltre, si indichino come $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{t}}$ i versori rispettivamente normale e tangente a S e si applichi la legge di Ampere–Maxwell al circuito γ e alla superficie $\Sigma(\gamma)$. Si ottiene

$$\oint_{\gamma} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{c}} d\gamma = \int_{\Sigma(\gamma)} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Sigma + \int_{\Sigma(\gamma)} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{w}} d\Sigma \quad ,$$

dove $\hat{\mathbf{c}}$ indica il versore tangente al circuito γ in ogni suo punto, e $\mathbf{j}$ la densità di corrente che attraversa $\Sigma(\gamma)$. In particolare, nel “mezzo 2”

$\hat{c}$ risulta parallelo a $\hat{t}$ ed il contributo al primo membro dell'integrale è dunque pari a $L \mathbf{h}_2 \cdot \hat{t}$. Analogamente, nel “mezzo 1” $\hat{c}$ è antiparallelo a $\hat{t}$ di modo che il contributo all'integrale risulta pari a $-L \mathbf{h}_1 \cdot \hat{t}$. Pertanto, indicato con C_a il contributo alla circuitazione che deriva dai tratti verticali di γ , la legge di Ampere–Maxwell si riscrive dunque nella forma

$$L(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \hat{t} + C_a = \frac{\partial \Phi_d}{\partial t} + \Delta I \quad ,$$

dove Φ_d e ΔI sono il flusso di spostamento elettrico e la corrente che fluiscono attraverso $\Sigma(\gamma)$. Si faccia ora tendere a zero l'altezza a di γ : si annullano così C_a e Φ_d (perchè è il flusso attraverso una superficie la cui misura tende a zero), e la relazione di Ampere–Maxwell si semplifica nella forma

$$L(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \hat{t} = \lim_{a \rightarrow 0} \Delta I = \Delta I_S \quad .$$

La quantità ΔI_S rappresenta la corrente superficiale che attraversa la linea di lunghezza L tracciata dall'intersezione di Σ con S . Quando anche L viene infine fatto tendere a zero, si ottiene allora

$$(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot \hat{t} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\Delta I_S}{L} = \mathbf{j}_S \cdot \hat{w} \quad , \quad \text{con } L \mathbf{j}_S \cdot \hat{w} = \Delta I_S \quad .$$

Si riarrangino ora i termini per mezzo delle seguenti operazioni di calcolo vettoriale: poichè per costruzione $\hat{t} = \hat{w} \times \hat{n}$ si ha innanzi tutto, in virtù della regola della permutazione ciclica del prodotto misto

$$(\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) \cdot (\hat{w} \times \hat{n}) \equiv \hat{w} \cdot [\hat{n} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1)] = \mathbf{j}_S \cdot \hat{w} \quad ,$$

da cui anche,

$$[\hat{n} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1)] \cdot \hat{w} = \mathbf{j}_S \cdot \hat{w} \quad ,$$

e poichè questa relazione deve valere comunque sia orientato $\hat{w}$ sulla superficie S ,

$$\hat{n} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = \mathbf{j}_S \quad . \quad (3.29)$$

Al primo membro c'è la differenza tra le componenti di campo magnetico, prodotte esternamente per il versore normale alla superficie: si tratta in sostanza delle componenti di $\mathbf{h}$ *tangenti* alla superficie stessa. La relazione (3.29) si legge allora come segue: su una superficie di discontinuità tra due mezzi materiali la differenza tra le componenti tangenti di $\mathbf{h}$ è pari al valore della densità superficiale di corrente che fluisce sulla

superficie stessa. Chiaramente, se sulla superficie non fluisce corrente il campo magnetico tangente è continuo.

Per ciò che concerne la continuità delle componenti di campo elettrico, infine, l'applicazione delle legge di Faraday porge il seguente risultato:

$$\hat{n} \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 0 \quad . \quad (3.30)$$

Le componenti tangenti di $\mathbf{e}$ sono sempre continue nel passaggio attraverso una qualsiasi superficie di discontinuità tra due mezzi materiali. Spesso, tuttavia, in analogia a quanto fatto nel caso del campo di induzione magnetica, si usa scrivere la (3.30) nella forma generalizzata

$$\hat{n} \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = -\mathbf{j}_{Ms} \quad ,$$

dove $\mathbf{j}_{Ms}$ è una quantità fittizia, e come tale quindi nulla in un qualsiasi contesto fisico reale, che prende il nome di *densità superficiale di corrente magnetica* e che, ancora una volta, viene introdotta al solo scopo di aumentare la simmetria nelle equazioni di Maxwell. Si noti a questo proposito che, proprio per ottenere la maggiore simmetria possibile, questa densità di corrente fittizia viene qui introdotta con il segno negativo.

Capitolo 4

Primi esempi di risoluzione delle equazioni di Maxwell

Si è visto nel capitolo precedente che le equazioni dell'elettromagnetismo rappresentano, nel loro complesso, un insieme di equazioni differenziali alle derivate parziali (che compaiono negli operatori rotore e divergenza) con un numero di incognite che, in generale, è pari a 15 e può eventualmente essere ridotto fino a 6 con l'introduzione delle leggi del legame materiale e con la legge di Ohm.

La risoluzione delle equazioni di propagazione è dunque, in ogni caso, un problema matematico di notevole complessità, e ciò comporta inevitabilmente il fatto che non può essere trovata una soluzione del tutto generale per le equazioni di Maxwell, ma solo soluzioni particolari, ottenute in molti casi introducendo opportune ipotesi semplificative sul mezzo nel quale avviene la propagazione, o sulle sorgenti che generano il campo.

Scopo di questo capitolo è quello di illustrare alcune tecniche matematiche che, nell'ambito di validità di tali ipotesi, consentono la risoluzione delle equazioni, e forniscono una prima esemplificazione dei fenomeni fisici in gioco.

4.1 La soluzione nel dominio del tempo

Si cominci dunque con il considerare le equazioni di propagazione espresse nel dominio temporale e si supponga che siano verificate le seguenti ipotesi:

1. il mezzo nel quale si sviluppa il campo elettromagnetico è un mezzo *lineare, omogeneo, non dispersivo ed isotropo*. Le grandezze ϵ , μ e γ sono quindi delle quantità scalari costanti, che pongono in relazione di diretta proporzionalità il campo elettrico al campo di spostamento dielettrico, ed il campo magnetico al campo di induzione magnetica;
2. il campo elettromagnetico, non nullo, si suppone eccitato da sorgenti che sono *al di fuori* della regione in cui il campo viene studiato.

Come si può notare, le ipotesi sono estremamente restrittive ed ideali, e lasciano fuori una quantità di casi che, invece, sono di larga utilità pratica. Infatti, in base a queste ipotesi, lo studio del campo è ristretto a regioni di spazio nelle quali non vi sono disomogeneità, il che è una evidente limitazione in tutti quei casi nei quali, ad esempio, si intenda analizzare il campo elettromagnetico in un'area nella quale vi siano edifici, automobili ed altri oggetti che possono “interrompere” l'omogeneità del mezzo stesso. In modo del tutto analogo, anche l'ipotesi che richiede l'assenza delle sorgenti nella zona in cui lo studio viene affrontato può rivelarsi troppo restrittiva, escludendo di fatto tutto lo studio dei campi in prossimità di antenne o di altri dispositivi in grado di irradiare radiazioni elettromagnetiche.

Tuttavia, come si accennava in precedenza, questo è il prezzo da pagare al fine di ottenere delle soluzioni per un problema matematico che è, di sua natura, estremamente complesso, e va per altro notato che nel seguito si avrà modo di sottolineare come particolari soluzioni che possono essere trovate con l'introduzione di queste ipotesi restrittive formino in realtà un *insieme completo di soluzioni*. Ciò significa che, mediante una opportuna combinazione degli elementi della famiglia di soluzioni così trovata, è possibile descrivere un *qualsiasi* campo elettromagnetico che si sviluppi in un mezzo lineare, ma non più necessariamente omogeneo e privo di sorgenti.

Si considerino dunque le equazioni nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad , \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \gamma \mathbf{e} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \quad ,\end{aligned}$$

e si supponga, per il momento, $\gamma = 0$. Calcolando il rotore della seconda equazione e sostituendo $\nabla \times \mathbf{e}$ dalla prima si ottiene la nuova relazione

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} \quad ,$$

che è una equazione che coinvolge una sola delle incognite, ma non è di semplice risoluzione per la presenza del doppio rotore. A riguardo di questo doppio operatore differenziale, va notato che esso viene incontrato in molte delle equazioni che descrivono fenomeni elettromagnetici, ed è allora opportuno ricordare che, per definizione di Laplaciano vettoriale, vale per un qualsiasi campo vettoriale $\mathbf{a}$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = -\nabla^2 \mathbf{a} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) \quad .$$

Nel caso in esame si ha allora

$$-\nabla^2 \mathbf{h} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{h}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} \quad .$$

Si ricorda inoltre che l'equazione per la divergenza di $\mathbf{b}$ fornisce

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{h}) = 0 \quad ,$$

e poichè si è supposto che il mezzo sia omogeneo nella regione in cui è definito il campo, ovvero ivi $\mu = \text{costante}$, anche

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0 \quad .$$

Ciò consente di semplificare notevolmente l'equazione differenziale che descrive il comportamento di $\mathbf{h}$, per giungere alla cosiddetta *equazione delle onde vettoriali*, o *equazione di D'Alembert*

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

che, in coordinate cartesiane, diventa

$$\frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0 \quad , \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad .$$

Si illustra ora come una soluzione di questa equazione possa essere individuata con relativa semplicità e, al fine di fornire una idea intuitiva

della propagazione senza appesantire eccessivamente la trattazione, si suppone che il campo $\mathbf{h}$ abbia una sola componente scalare e che esso si sviluppi lungo una sola direzione dello spazio, per esempio la direzione z ; si ottiene così

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

e si può verificare che una soluzione è

$$h(z, t) = f(z - vt) + g(z + vt) \quad ,$$

nella quale $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sono due funzioni arbitrarie. Come era ragionevole attendersi, la soluzione è data dalla sovrapposizione di due forme d'onda che si muovono l'una nel verso delle z crescenti (la funzione f), e l'altra nel verso delle z decrescenti (la funzione g), con velocità pari a v . Ovviamente, la particolare forma delle funzioni f e g è data dalle condizioni al contorno che vanno applicate all'equazione differenziale che fornisce la soluzione per $\mathbf{h}$ e che, fisicamente, rappresentano il modo in cui il campo elettromagnetico viene instaurato dalle sorgenti che, si ricorda, sono al di fuori dell'analisi che si sta conducendo in questo momento. Nella figura viene illustrato il movimento della funzione f con lo scorrere del tempo.

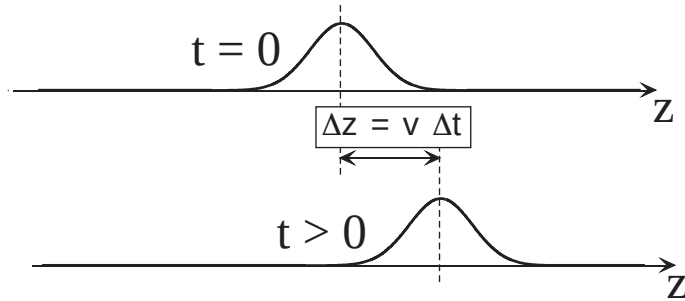


Figura 4.1: Evoluzione della forma d'onda $f(\cdot)$ allo scorrere del tempo.

Velocità della luce

Nel ricavare l'equazione delle onde vettoriali si è posto

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad ,$$

e si è visto che questa è la velocità con cui le funzioni f e g avanzano nel tempo. La velocità v è dunque la velocità dell'onda elettromagnetica nel mezzo caratterizzato dalle costanti ϵ e μ , ed è essa stessa una caratteristica del mezzo. In particolare, se la propagazione avviene nel vuoto, si ha

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m} \quad , \quad \epsilon = \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \quad ,$$

e risulta $v \equiv c_0 \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Campo elettrico

Ritornando alla soluzione delle equazioni di propagazione, si è precedentemente illustrata una serie di calcoli che ha fornito una soluzione per il campo magnetico $\mathbf{h}$. Con procedura analoga è poi possibile ricavare una soluzione anche per il campo elettrico: si ottiene infatti

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{e} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} \quad ,$$

da cui

$$-\nabla^2 \mathbf{e} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} \quad ,$$

e, poichè

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{e}) = \epsilon \nabla \cdot \mathbf{e} = \rho = 0 \quad ,$$

in assenza di cariche libere ed in un mezzo omogeneo, ne risulta nuovamente l'equazione delle onde vettoriali

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

che mostra come anche il campo $\mathbf{e}$ sia costituito dalla somma di due onde, una progressiva e una regressiva, che si muovono con velocità v .

Osservazioni

1. Sebbene ciò non sia stato sottolineato esplicitamente in precedenza, è opportuno notare che, nel derivare l'equazioni delle onde vettoriali, si è fatto uso delle ipotesi inizialmente poste. In particolare, l'ipotesi concernente l'uniformità del mezzo all'interno del dominio di definizione del campo è stata usata per passare rispettivamente dalle equazioni per le divergenze di $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$ a quelle per

$\mathbf{h}$ e $\mathbf{e}$. Si noti che, qualora l'ipotesi venisse a cadere, non sarebbe più possibile eliminare il termine del tipo $\nabla(\nabla \cdot)$ e passare così dal doppio rotore al laplaciano.

Da un punto di vista fisico, ciò si lega al fatto che, in un mezzo non omogeneo, si ha la nascita di nuove componenti di campo nei punti in cui ϵ o μ variano, con il risultato che il campo non può più essere espresso come somma di due sole onde.

In maniera del tutto analoga, si ritroverebbe lo stesso problema qualora fosse la seconda delle ipotesi di partenza a cadere. Infatti, nel caso in cui vi fossero sorgenti all'interno della regione di spazio dove lo studio viene svolto, risulterebbe $\nabla \cdot \mathbf{d} \neq 0$, cosa che, ancora una volta, non consentirebbe più il passaggio dal doppio rotore al laplaciano. Anche in questo caso, la spiegazione fisica del fenomeno è immediata, in quanto la presenza di sorgenti implica la creazione di un nuovo campo elettromagnetico, con il risultato che il campo complessivo non può essere scritto come somma di due sole onde.

2. Nella derivazione delle soluzioni per $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$ si sono usate due equazioni delle onde vettoriali che, apparentemente, sembrano essere indipendenti l'una dall'altra, come se i campi elettrico e magnetico potessero evolvere l'uno indipendentemente dall'altro. Ciò è evidentemente falso, ed è dovuto al fatto che per ottenere le equazioni delle onde vettoriali si è dovuto alzare il grado delle equazioni di partenza, introducendo in tal modo delle soluzioni spurie. La procedura corretta per l'individuazione del campo elettro-magnetico $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$ richiede quindi un procedimento differente, basato sul fatto che uno *solo* dei due campi può essere risolto tramite l'equazione delle onde vettoriali, mentre il secondo va ricavato tramite le equazioni di Maxwell.
3. L'equazione delle onde vettoriali è stata derivata supponendo che sia $\gamma = 0$, cioè che il mezzo sia privo di perdite. Il caso di un mezzo con perdite può, tuttavia, essere facilmente analizzato sulla falsariga di quanto fatto nel caso di mezzo privo di perdite, e si trova

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} - \mu\gamma \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0 \quad .$$

Le perdite compaiono quindi in un termine di derivata prima che

agisce come una forza di attrito che causa smorzamento delle funzioni f e g .

4.2 La soluzione nel dominio dei vettori complessi: l'equazione di Helmholtz

Si considerino ora le equazioni dei rotori nella rappresentazione complessa per un campo in assenza di sorgenti ed in un mezzo lineare, omogeneo ed isotropo. Esse sono

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad ,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C\mathbf{E} \quad .$$

Si noti che, a differenza di quanto accade per le equazioni nel dominio del tempo, l'introduzione della permittività complessa consente uno studio unificato dei casi di mezzi con e senza perdite. Inoltre, non è più necessario supporre il mezzo non dispersivo perchè nel dominio dei vettori complessi il legame tra $\mathbf{D}$ ed $\mathbf{E}$ (e tra $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$) è comunque espresso da una relazione di proporzionalità diretta, almeno fintanto che non intervengono fenomeni non-lineari.

Analogamente a quanto si era fatto nella derivazione dell'equazione delle onde vettoriali, se si sostituisce $\nabla \times \mathbf{E}$ nella seconda equazione, si ricava ora

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C(\nabla \times \mathbf{E}) = i\omega\epsilon_C(-i\omega\mu\mathbf{H}) \quad ,$$

e, utilizzando il fatto che $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, si ottiene infine la seguente equazione, detta di *Helmoltz*:¹

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \sigma^2 \mathbf{H} = 0 \quad , \quad \sigma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon_C \quad .$$

Questa equazione, usata qui per descrivere l'evoluzione della rappresentazione complessa $\mathbf{H}$ del campo magnetico, è una delle equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo. Come si avrà modo di apprezzare nel

¹In maniera del tutto analoga, sostituendo $\nabla \times \mathbf{H}$ nella prima delle equazioni di Maxwell, risulta anche

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma^2 \mathbf{E} = 0 \quad .$$

seguito, infatti, essa rappresenta il formalismo matematico che ricorre in molti dei problemi che si affrontano nello studio dei campi elettromagnetici e, proprio in virtù di questo fatto, nel corso degli anni essa è stata approfonditamente studiata, con il risultato che sono ora disponibili svariate tecniche utili alla sua risoluzione, sia analitica, sia numerica. Per questa ragione d'ora in avanti si cercherà sempre, ove possibile, di ridurre le equazioni della propagazione alla forma di una equazione di Helmholtz, e si considererà quest'ultima come una equazione "trattabile" con la quale lavorare preferibilmente.

Chiarito questo concetto, si può ora illustrare la natura del fenomeno che l'equazione descrive. A tal fine risulta utile procedere ancora una volta in analogia con quanto fatto nel caso della risoluzione per le equazioni nel dominio del tempo, e supporre per semplicità che il campo evolva lungo una sola direzione dello spazio, per esempio quella parallela all'asse z . L'equazione di Helmholtz si semplifica allora nella forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial z^2} - \sigma^2 \mathbf{H} = 0 \quad ,$$

ed ammette una soluzione del tipo

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{01} e^{\sigma z} + \mathbf{H}_{02} e^{-\sigma z} \quad .$$

Si usa anche scrivere

$$\sigma = \omega \sqrt{-\mu \epsilon_C} = \alpha + i\beta \quad ,$$

dove $\alpha \geq 0$ (e $\alpha = 0$ se e solo se $\gamma = 0$) prende il nome di *costante di attenuazione*, mentre β (assunta per convenzione positiva), viene detta *costante di fase* dell'onda. Nel caso di propagazione in un mezzo privo di perdite si ha pertanto

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{01} e^{i\beta z} + \mathbf{H}_{02} e^{-i\beta z} \quad ,$$

ed è facile verificare che, in accordo con quanto trovato nello studio delle equazioni nel dominio del tempo, questa espressione rappresenta la somma di due onde, una progressiva e l'altra regressiva. Infatti, ricordando che il campo nel dominio del tempo può essere ricavato a partire da quello della rappresentazione complessa come

$$\mathbf{h} = \text{Re}[\mathbf{H} e^{i\omega t}] \quad ,$$

si ottiene, per ognuna delle componenti del campo, una espressione del tipo

$$h_\xi = |\mathbf{H}_{01,\xi}| \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{1,\xi}) + |\mathbf{H}_{02,\xi}| \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{2,\xi}), \quad \xi \in \{x, y, z\},$$

nella quale $\varphi_{1,\xi}$ e $\varphi_{2,\xi}$ sono, rispettivamente, le fasi dei numeri complessi $\mathbf{H}_{01,\xi}$ e $\mathbf{H}_{02,\xi}$. Inoltre, in questa espressione, il primo addendo alla destra dell'uguale rappresenta il contributo di onda regressiva, ed il secondo quello di onda progressiva. Si noti che, laddove nel caso delle equazioni nel dominio del tempo si era trovato che l'equazione delle onde vettoriali descriveva la propagazione di una *qualsiasi* forma d'onda in moto nello spazio con velocità v , qui si trova che l'onda che si muove con velocità v ha andamento sinusoidale nel tempo, come deve essere dal momento che si è ora partiti dalle equazioni di Maxwell in regime armonico.

Nel caso di mezzo con perdite, si trova infine

$$h_\xi = |\mathbf{H}_{01,\xi}| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi_{1,\xi}) + |\mathbf{H}_{02,\xi}| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_{2,\xi}),$$

espressione che mostra come la soluzione sia data ancora dalla somma di due onde contropropaganti, ognuna delle quali si attenua rispetto al suo verso di propagazione.

4.3 I potenziali vettori

Nei paragrafi precedenti si è dimostrato che, in un mezzo lineare, omogeneo, isotropo e privo di sorgenti ($\mathbf{J}_i = 0$), il campo elettromagnetico può essere determinato in forma esatta tramite l'equazione delle onde vettoriali se ci si riferisce alla rappresentazione nel dominio del tempo, o tramite l'equazione di Helmholtz nel caso della rappresentazione complessa.

In questo paragrafo si intende allargare lo studio della propagazione al caso in cui il mezzo sia ancora *omogeneo, lineare ed isotropo*, ma ora *in presenza di sorgenti*. Si utilizza allo scopo la rappresentazione complessa e si introducono dei nuovi strumenti matematici che prendono il nome di *potenziali vettori*.

Si considerino dunque nuovamente le equazioni dei rotori, scritte con riferimento alla rappresentazione complessa per un campo in un mezzo lineare, omogeneo, isotropo ed in presenza di sorgenti. Le equazioni sono

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad .$$

Indipendentemente dalla presenza di sorgenti, e dall'omogeneità del mezzo, è poi sempre verificata la relazione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ,$$

che mostra come il campo $\mathbf{B}$ sia un campo solenoidale, e come tale esso può sempre essere espresso come rotore di un altro campo vettoriale, secondo la relazione

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad .$$

Come è immediato verificare, infatti, vale $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad \forall \mathbf{A}$.

Il campo $\mathbf{A}$ così definito prende il nome di *potenziale vettore magnetico* e si dimostra ora che quando esso è noto, è possibile ricavare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ tanto in assenza quanto in presenza delle sorgenti $\mathbf{J}_i$.

Campo magnetico

Direttamente dalla definizione del potenziale vettore magnetico discende

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (4.1)$$

Campo elettrico

Dalla equazione di Maxwell per il rotore di $\mathbf{H}$,

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad ,$$

segue

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = i\omega\epsilon_C \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad ,$$

e quindi

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} - \frac{\mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} \quad . \quad (4.2)$$

Le equazioni (4.1,4.2) mostrano quindi che se il potenziale $\mathbf{A}$ è noto, si può ricavare tutto il campo elettromagnetico $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ tramite semplici operazioni di derivazione. Questo è un risultato tutt'altro che banale, e configura nell'uso di $\mathbf{A}$ un notevole vantaggio dal punto di vista dell'onerosità computazionale richiesta per la risoluzione delle equazioni di Maxwell. Infatti, come si è già più volte sottolineato, se la

propagazione viene studiata tentando di integrare direttamente le equazioni di Maxwell, il problema matematico che ci si trova ad affrontare è quello di un sistema di equazioni differenziali tra loro accoppiate che, in presenza di sorgenti, coinvolge un numero di incognite pari ad almeno sei. Ciò che si è dimostrato ora, invece, è che se si affronta il problema in maniera diversa è possibile ottenere con operazioni semplici tutto il campo elettromagnetico a partire da una unica quantità vettoriale. In vista di ciò risulta allora utile cercare una equazione ed una soluzione per il campo vettoriale $\mathbf{A}$ e, a tal fine, si può utilizzare la prima equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad ,$$

sostituendo in essa le espressioni (4.1,4.2) appena ricavate. Si ottiene così

$$\nabla \times \left[\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} - \frac{\mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} \right] = -i\omega\nabla \times \mathbf{A} \quad ,$$

da cui anche

$$\nabla \times \left[\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} - \frac{\mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} + i\omega\mathbf{A} \right] = 0 \quad . \quad (4.3)$$

La quantità racchiusa nella parentesi quadra è dunque una quantità irrotazionale, e se la regione di spazio nella quale essa è definita è una regione a connessione semplice, si può allora scrivere

$$\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} - \frac{\mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} + i\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi \quad , \quad (4.4)$$

dove ϕ è una *qualsiasi* funzione scalare, che prende il nome di *potenziale scalare elettrico*, ed il cui unico requisito è quello di essere dimensionalmente compatibile con il primo membro dell'uguaglianza, e cioè di avere le dimensioni fisiche dei Volt [V].²

²Si ponga attenzione al fatto che ϕ non deve essere confuso con il potenziale V dell'elettrostatica. Infatti, poichè

$$\mathbf{E} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} - \frac{\mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} \quad ,$$

risulta

$$\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \quad ,$$

che sembra coincidere con la relazione dell'elettrostatica a patto di porre $\omega = 0$. Tuttavia questa operazione non è lecita perchè, per arrivare a scrivere $\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$ si è più volte diviso per ω , cosicchè non lo si può poi porre a zero a posteriori.

Si noti che, data l'arbitrarietà nella scelta della funzione ϕ , esiste all'apparenza una corrispondente arbitrarietà nella definizione di $\mathbf{A}$ e quindi, in ultima analisi, nei campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$, il che è un risultato evidentemente inaccettabile dal punto di vista fisico.

In realtà, occorre notare che, sino ad ora, è stato fissato il solo valore del rotore di $\mathbf{A}$ (che, per definizione, coincide con il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$). L'analisi dei campi vettoriali mostra tuttavia che il fatto di fissare il solo rotore di un campo vettoriale non è sufficiente per determinare univocamente il campo stesso. In altre parole, con le condizioni sin qui poste su $\mathbf{A}$, è possibile variare a piacimento il valore della sua divergenza senza che questo si rifletta in variazioni dei campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$. Se quindi si mostra che l'indeterminazione di ϕ interviene nella divergenza di $\mathbf{A}$ si può concludere che diversi valori di ϕ possono determinare (univocamente) diverse espressioni per $\mathbf{A}$, ma senza che questo influenzi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$, inficiando così la validità e l'utilità della procedura di calcolo basata sul potenziale vettore magnetico.

La dimostrazione del legame tra la funzione ϕ e la divergenza di $\mathbf{A}$ è immediata. Vale infatti

$$\nabla \cdot \left[\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} - \frac{\mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} + i\omega\mathbf{A} \right] = -\nabla \cdot \nabla\phi \quad ,$$

cioè

$$i\omega\nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} = -\nabla^2\phi \quad ,$$

cosicchè appare evidente come al variare di ϕ vari anche $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Avendo chiarito che differenti scelte di ϕ non inficiano la validità del calcolo delle componenti di campo elettrico e magnetico, si può allora sfruttare il grado di libertà offerto da questa indeterminazione al fine di semplificare il più possibile l'equazione che governa l'evoluzione del potenziale vettore $\mathbf{A}$. In particolare, risultano utili a tal fine tre particolari scelte di ϕ che vengono illustrate in dettaglio qui di seguito.

4.3.1 La scelta $\phi = 0$

Questa è, ovviamente, la prima scelta che viene alla mente, ma, come si vedrà tra breve, essa non è necessariamente la più conveniente. Si consideri infatti l'equazione per $\mathbf{A}$ (4.4) e si ponga $\phi = 0$. Si ottiene

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \sigma^2\mathbf{A} = \mu\mathbf{J}_i \quad .$$

Come si è già avuto modo di notare, quando in una equazione differenziale compare l'operatore di doppio rotore, spesso conviene riscrivere l'equazione nella forma

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \sigma^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_i \quad ,$$

per ottenere infine, quando e se $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, una equazione di Helmholtz non omogenea.

Nel caso in esame il procedimento può essere svolto, ma, come viene dimostrato di seguito, esso comporta una perdita di generalità. Infatti, si è visto che la divergenza di $\mathbf{A}$ è espressa dalla relazione

$$i\omega \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{i\omega \epsilon_C} - \nabla^2 \phi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{i\omega \epsilon_C} \quad ,$$

e si ha dunque $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ se e solo se $\nabla \cdot \mathbf{J}_i = 0$. La scelta $\phi = 0$ consente quindi di ottenere una equazione “trattabile” per $\mathbf{A}$ solo se le sorgenti del campo sono a divergenza nulla ovvero, da un punto di vista fisico, se esse sono formate da insiemi di cariche elettriche in moto lungo percorsi chiusi.

Occorre tuttavia ricordare che i potenziali vettori sono stati introdotti con lo scopo di studiare il comportamento di un campo elettromagnetico in presenza di sorgenti generiche, cosicchè l'imporre una condizione restrittiva a priori sulle sorgenti stesse è una limitazione che conviene tentare di evitare, cercando scelte più convenienti per il potenziale ϕ .

4.3.2 La scelta di Coulomb.

Come appena detto, ciò che non soddisfa nella scelta $\phi = 0$ è il fatto che occorre imporre condizioni sulle sorgenti per poter ottenere $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e semplificare così l'operatore di doppio rotore con quello di laplaciano. Tuttavia, si è anche visto che la divergenza di $\mathbf{A}$ è data dall'espressione

$$i\omega \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{i\omega \epsilon_C} - \nabla^2 \phi \quad ,$$

e si può pertanto avere un valore nullo di divergenza se si sceglie ϕ in modo che esso risolva l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{i\omega \epsilon_C} \equiv -\frac{\rho}{\epsilon} \quad . \quad (4.5)$$

La scelta di un potenziale ϕ siffatto prende il nome di *scelta di Coulomb*, ed essa conduce dalla generica espressione per $\mathbf{A}$ (4.4) alla più semplice

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_i + i\omega\mu\epsilon_C \nabla\phi \quad .$$

La scelta di Coulomb consente quindi di ricavare una equazione relativamente semplice per l'evoluzione di $\mathbf{A}$ senza imporre condizioni restrittive sulle sorgenti. Esiste tuttavia un prezzo da pagare per giungere a questo risultato: per il calcolo del campo occorre risolvere, insieme all'equazione per $\mathbf{A}$, una equazione aggiuntiva per determinare il potenziale ϕ .

Si noti altresì che la scelta di Coulomb, e il potenziale ϕ che da essa deriva, non è unica. Infatti, se si indica con ϕ_0 una soluzione dell'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad ,$$

il potenziale $\phi' = \phi + \phi_0$ è ancora soluzione dell'equazione di Poisson (4.5). Chiaramente, se il potenziale ϕ' viene usato al posto di ϕ come termine noto nell'equazione di Helmholtz che dà la soluzione per $\mathbf{A}$, questa quantità cambia, assumendo un nuovo valore che indichiamo come $\mathbf{A}'$.

Il legame che intercorre tra $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ è di facile valutazione ; infatti, poichè dalle (4.2,4.4) vale

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A} - \nabla\phi \quad ,$$

e poichè il campo elettrico non deve dipendere dalla scelta di $\mathbf{A}$ che, si ricorda, è solo uno *strumento matematico* introdotto per semplificare le procedure di calcolo, si deve avere

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A} - \nabla\phi = -i\omega \mathbf{A}' - \nabla\phi' = -i\omega \mathbf{A}' - \nabla\phi - \nabla\phi_0 \quad ,$$

e quindi

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\nabla\phi_0}{i\omega} \quad .$$

4.3.3 La scelta di Lorentz.

La scelta di Coulomb che è stata appena illustrata si basa sul fatto che ϕ è soluzione di

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad .$$

Si consideri ora il primo membro di questa equazione. Come si è ormai già più volte detto, nello studio dei fenomeni elettromagnetici le grandezze in gioco spesso soddisfano ad una equazione differenziale di Helmholtz, omogenea o non omogenea, che è del tipo

$$\nabla^2 \mathbf{Q} - \sigma^2 \mathbf{Q} = \text{secondo membro} \quad ,$$

dove si è indicata con $\mathbf{Q}$ una generica funzione delle coordinate spaziali. Da un punto di vista fisico, questa equazione descrive la propagazione del campo $\mathbf{Q}$ espresso attraverso la sua rappresentazione complessa, ed ha come equivalente per il campo nel dominio del tempo l'equazione delle onde vettoriali

$$\nabla^2 \mathbf{q} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial t^2} = \text{secondo membro} \quad .$$

Se ne deduce che a ciò che nel dominio dei vettori complessi compare indicato come σ^2 corrisponde, nel dominio del tempo, l'operatore differenziale

$$\sigma^2 \Leftrightarrow \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad ,$$

che indica come le grandezze elettromagnetiche si propagano nello spazio con una velocità *finita* pari a v . Ora, nella scelta di Coulomb si è di fatto posto $\sigma^2 = 0$, cosa che, fisicamente, significa aver chiesto al potenziale ϕ di essere una grandezza elettromagnetica capace di diffondersi nello spazio con velocità *infinita*. Questa richiesta rappresenta chiaramente una forzatura rispetto a ciò che è fisicamente ragionevole, e ci si può allora domandare se reintroducendo una velocità finita nel calcolo del potenziale ϕ non si possano trovare dei risultati migliori. La scelta di Lorentz, che discende da queste considerazioni fisiche, è dunque quella che richiede al potenziale ϕ di risolvere una equazione di Helmholtz non omogenea del tipo

$$\nabla^2 \phi - \sigma^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad . \quad (4.6)$$

Così facendo risulta $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$ e ciò potrebbe indurre a pensare che si siano in realtà complicati i calcoli perchè nella (4.4) non è apparentemente più possibile semplificare l'operatore di doppio rotore in quello di laplaciano. Tuttavia, si ricorda che vale

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{i\omega} \left[\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} - \nabla^2 \phi \right] = \frac{1}{i\omega} \left[-\frac{\rho}{\epsilon} - \left(\sigma^2 \phi - \frac{\rho}{\epsilon} \right) \right] \quad ,$$

cioè la divergenza di $\mathbf{A}$ è legata al potenziale ϕ dalla relazione lineare (che prende il nome di *condizione di Lorentz*)

$$i\omega \nabla \cdot \mathbf{A} = -\sigma^2 \phi \quad . \quad (4.7)$$

Vediamo ora che, sebbene la condizione di Lorentz mostri che, in generale, $\mathbf{A}$ non ha divergenza nulla, è tuttavia ancora possibile arrivare ad una equazione di Helmholtz per il potenziale vettore. Se infatti si considera ancora una volta la (4.4) e si sottrae ad ambo i membri la quantità

$$\frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{i\omega\mu\epsilon_C} \quad ,$$

si ottiene

$$-\frac{\nabla^2 \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} - \frac{\mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} + i\omega \mathbf{A} = -\nabla \left[\phi + \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} \right] \quad ,$$

e, poichè il secondo membro si annulla in virtù della (4.7), anche

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_i \quad . \quad (4.8)$$

Come si voleva, il risultato cui si è pervenuti è ancora quello di una equazione di Helmholtz, non omogenea, che, almeno all'apparenza, presenta una difficoltà in meno rispetto al caso della scelta di Coulomb, in quanto ora la soluzione *non dipende più da ϕ* . Si noti anche che la scelta di Lorentz non è unica, e le stesse trasformazioni che consentivano di mettere in relazione tra loro una qualsiasi coppia di soluzioni discendenti dalla scelta di Coulomb valgono anche nel caso presente.

Come si era anticipato più sopra, dunque, l'uso dei potenziali consente una riduzione del numero delle incognite scalari che sono necessarie per la determinazione dell'intero campo elettromagnetico. In particolare la (4.8) sembra indicare che tale numero sia pari a tre. In generale, tuttavia, risulta necessario svolgere anche il calcolo del potenziale elettrico ϕ , e le incognite necessarie sono di fatto quattro. La ragione è la seguente: l'equazione (4.8) è una equazione differenziale alle derivate parziali e come tale essa può essere risolta quando siano assegnate le sue condizioni al contorno. Come si è più volte notato, tuttavia, il campo $\mathbf{A}$ è solo uno strumento matematico utile a semplificare i calcoli, ma non è una quantità fisicamente misurabile. Ne segue che le condizioni al contorno per $\mathbf{A}$ non sono di semplice valutazione, ed è spesso necessario

determinarle per via indiretta. Un modo per procedere è ad esempio quello di usare la relazione $\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$ imponendo le condizioni su $\mathbf{E}$ e trasferendole poi ad $\mathbf{A}$, ma così facendo la valutazione di ϕ risulta per l'appunto necessaria. Il solo caso in cui il calcolo di ϕ può essere evitato è quello in cui $\nabla\phi = 0$, cioè $\phi = \text{costante}$, ma l'unica soluzione costante della (4.6) è quella identicamente nulla, e questa richiede $\rho \equiv 0$. Sebbene si trovino svariati casi in cui questa semplificazione può essere utilizzata, è comunque bene tenere a mente che questo caso non è un caso di carattere generale.

4.4 Potenziale vettore elettrico

Quando si scrivono le equazioni di Maxwell nel dominio delle rappresentazioni complesse,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad ,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad ,$$

è immediato accorgersi che, a parte il termine legato alle correnti impresse, le equazioni presentano una completa simmetria, potendosi scambiare tra di loro i simboli secondo le relazioni

$$\mathbf{E} \Leftrightarrow -\mathbf{H} \quad ,$$

$$\mu \Leftrightarrow \epsilon_C \quad .$$

Come già notato, il termine $\mathbf{J}_i$ sbilancia una simmetria altrimenti completa semplicemente perchè esso descrive l'azione di una corrente (impressa), che è formata ad un flusso di cariche elettriche in movimento, e che, come tale, non ha un equivalente magnetico dal momento che non esiste la “carica elementare” magnetica. Per questa stessa ragione, si può osservare una dissimmetria anche nelle equazioni delle divergenze, che, scritte ancora con riferimento alla rappresentazione complessa per un campo che si sviluppi in un mezzo omogeneo, si leggono come

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_i}{i\omega\epsilon_C} \quad ,$$

con la seconda delle due che, in generale, risulta diversa da zero. Come già accennato in precedenza, esistono tuttavia dei casi di pratica utilità,

quelli nei quali le sorgenti sono fisicamente formate da cariche in moto lungo percorsi chiusi, nei quali si verifica che

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad ,$$

ed in questo modo la simmetria viene ripristinata almeno nelle equazioni alle divergenze. Questa osservazione suggerisce che, in questi casi, ed in analogia a quanto fatto nel paragrafo precedente nel quale si è definito il campo $\mathbf{A}$ basandosi sulla solenoidalità di $\mathbf{B}$, è possibile pensare di esprimere anche $\mathbf{E}$ come rotore di un opportuno campo vettoriale, e di procedere poi alla risoluzione delle equazioni di Maxwell avvalendosi di quest'ultimo e seguendo lo stesso schema di calcolo già intrapreso nel caso del potenziale vettore magnetico. Si usa porre

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_C} \nabla \times \mathbf{F} \quad ,$$

dove il segno meno viene introdotto per conservare le proprietà di simmetria delle equazioni di Maxwell, ed il campo $\mathbf{F}$ prende il nome di *potenziale vettore elettrico* (o *potenziale di Fitzgerald*).

Seguendo lo stesso schema dei paragrafi precedenti, si mostra ora innanzi tutto come i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ possano essere determinati quando sia noto $\mathbf{F}$, ed in seguito si ricava l'equazione cui $\mathbf{F}$ soddisfa.

Campo elettrico

Per definizione,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_C} \nabla \times \mathbf{F} \quad .$$

Campo magnetico

Dalla prima equazione di Maxwell si ha

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}}{i\omega\mu\epsilon_C} \quad .$$

Si vede quindi che, una volta noto $\mathbf{F}$, i campi elettrico e magnetico possono essere ricavati tramite semplici operazioni di derivazione, e si tratta ora di individuare una equazione che fornisca il campo $\mathbf{F}$. A tal fine si ricorda che si è supposto che valga l'ipotesi

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_i = 0 \quad ,$$

ovvero che le sorgenti siano solenoidali e che pertanto possano essere espresse come rotore di un opportuno campo $\mathbf{K}_i$, secondo la relazione

$$\mathbf{J}_i = \nabla \times \mathbf{K}_i \quad .$$

Si consideri ora la seconda equazione di Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C \mathbf{E} + \mathbf{J}_i$$

e si sostituiscano in essa le espressioni che legano i campi $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}_i$ al potenziale $\mathbf{F}$. Si ottiene in tal modo

$$\nabla \times \left[\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}}{i\omega\mu\epsilon_C} + i\omega\mathbf{F} - \mathbf{K}_i \right] = 0 \quad ,$$

e, se il dominio di definizione di $\mathbf{F}$ è a connessione semplice,

$$\frac{\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}}{i\omega\mu\epsilon_C} + i\omega\mathbf{F} - \mathbf{K}_i = -\nabla\psi \quad , \quad (4.9)$$

dove si è introdotta la funzione scalare ψ che è arbitraria, prende il nome di *potenziale scalare magnetico*, ed ha le unità di misura di Ampere. Questa funzione assume il ruolo duale di quella che si era indicata come ϕ nel caso del potenziale vettore magnetico, e l'unica scelta interessante per essa è la scelta di Lorentz

$$\nabla^2\psi - \sigma^2\psi = 0 \quad ,$$

nella quale il secondo membro risulta pari a zero perchè non esiste la carica magnetica elementare. Si noti che, ancora per questa ragione, la soluzione $\psi = 0$ è sempre una soluzione accettabile, a differenza di quanto accade per ϕ , che può risultare una scelta di Lorentz solo se $\rho = 0$. Inoltre, poichè del vettore $\mathbf{K}_i$ è stato fissato il solo valore del rotore, non è restrittivo scegliere $\nabla \cdot \mathbf{K}_i = 0$. Con questa posizione, e con $\psi = 0$, dalla (4.9) si ottiene infine $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, e si può allora semplificare la stessa (4.9), che assume ancora una volta la forma di una equazione di Helmholtz non omogenea, ora scritta come

$$\nabla^2\mathbf{F} - \sigma^2\mathbf{F} = -i\omega\mu\epsilon_C\mathbf{K}_i \quad .$$

4.5 Potenziale di Hertz

Si è visto che il formalismo del potenziale vettore elettrico può essere applicato quando $\nabla \cdot \mathbf{J}_i = 0$, ovvero quando il contesto fisico in esame è tale che in esso le sorgenti del campo elettromagnetico sono cariche in movimento lungo un circuito chiuso. Esistono tuttavia altri casi, propri dello studio dell'elettronica quantistica o della fisica dello stato solido, nei quali le sorgenti del campo sono rappresentate da cariche elettriche in moto oscillatorio attorno ad una posizione di equilibrio. In questi casi si usa scrivere la densità di corrente impressa nella forma

$$\mathbf{J}_i = -i\omega \mathbf{P}_i \quad ,$$

dove il vettore $\mathbf{P}_i$ prende il nome di vettore di *polarizzazione elettrica impressa*. In questi casi, fermo restando il fatto che lo studio del campo può comunque essere affrontato sulla base del potenziale $\mathbf{A}$, si riscontra una semplificazione formale se si introduce il *potenziale vettore di Hertz*, definito come segue:

$$\mathbf{\Pi} = -\frac{\mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon_C} \quad .$$

Con il campo così definito si ottiene infatti dalla (4.3)

$$\nabla \times \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi} + \sigma^2 \mathbf{\Pi} - \frac{\mathbf{P}_i}{\epsilon_C} \right] = 0 \quad ,$$

e, se il dominio di definizione delle grandezze in gioco è a connessione semplice, anche

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Pi} + \sigma^2 \mathbf{\Pi} - \frac{\mathbf{P}_i}{\epsilon_C} = -\nabla \phi \quad , \quad (4.10)$$

dove, come di consueto, ϕ è una qualsiasi funzione scalare con le appropriate dimensioni fisiche, qui quelle dei Volt [V]. Data l'arbitrarietà della funzione ϕ vi è ancora la possibilità di operare delle scelte in modo da semplificare opportunamente l'equazione di evoluzione per $\mathbf{\Pi}$ e la scelta più interessante è quella di Lorentz, con ϕ soluzione di

$$\nabla^2 \phi - \sigma^2 \phi = \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_i}{\epsilon_C} \quad .$$

Calcolando la divergenza di ambo i membri della (4.10) si ottiene infatti la condizione $\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -\phi$ e, sottraendo la quantità $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi})$ ad ambo

i membri della (4.10), si giunge infine alla equazione di Helmholtz non omogenea

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Pi} - \sigma^2 \boldsymbol{\Pi} = -\frac{\mathbf{P}_i}{\epsilon_C} \quad .$$

Capitolo 5

I teoremi fondamentali dell'elettromagnetismo

5.1 Teoremi energetici

5.1.1 Teorema di Poynting nel dominio del tempo

Si considerino le equazioni di Maxwell nel dominio del tempo e le si scrivano per un mezzo isotropo con sorgenti e, in generale, dispersivo; esse sono:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad , \\ \nabla \times \mathbf{h} &= \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \gamma \mathbf{e} + \mathbf{j}_i \quad .\end{aligned}$$

Si moltiplichino internamente la prima delle equazioni per $\mathbf{h}$, la seconda per $\mathbf{e}$ e si esegua la sottrazione membro a membro della seconda dalla prima. Si ottiene così

$$\mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h} = -\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} - \gamma |\mathbf{e}|^2 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i \quad ,$$

ed utilizzando l'identità vettoriale $\nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h}$, anche

$$-\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i = \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \gamma |\mathbf{e}|^2 + \nabla \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \quad .$$

Questa relazione è una uguaglianza tra funzioni di punto, ed essa rimane valida anche quando entrambi i suoi membri vengono integrati in un

volume V racchiuso da una superficie chiusa S . Si ha cioè

$$-\int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i dV = \int_V \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) dV + \int_V \gamma |\mathbf{e}|^2 dV + \oint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \hat{n} dS \quad , \quad (5.1)$$

dove si è indicato con $\hat{n}$ la normale uscente alla superficie S , e si è applicato il teorema di Gauss all'ultimo addendo alla destra dell'uguale.

L'identità scritta va sotto il nome di *teorema di Poynting* e, come è immediato verificare, essa rappresenta un *bilancio di potenze*. Vediamo dunque di individuare di quali potenze si tratta.

◇ $-\int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i dV$. È la potenza ceduta dai generatori del campo elettromagnetico al campo stesso. Infatti, la corrente $\mathbf{j}_i$ può essere pensata come dovuta ad una densità di carica ρ_i che si muove con velocità $\mathbf{v}$: $\mathbf{j}_i = \rho_i \mathbf{v}$. La densità di carica in moto genera un campo $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$ che dà luogo, sulle sorgenti stesse, ad una densità di forza (di Lorentz)

$$\mathbf{f} = \rho_i \mathbf{e} + \mathbf{j}_i \times \mathbf{b} \quad .$$

Affinchè sia possibile mantenere in moto la densità di carica alla velocità $\mathbf{v}$, è necessario che al mezzo in esame venga applicata dall'esterno (cioè per via non elettromagnetica) una densità di forza uguale e contraria. Questa densità di forza compie, per ogni spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$, una densità di lavoro

$$dL = -\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -\rho_i \mathbf{e} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{j}_i \times \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r} \quad ,$$

e la densità di lavoro per unità di tempo, ovvero la densità di potenza, è allora

$$\begin{aligned} dW = -\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} &= -\rho_i \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} - (\rho_i \mathbf{v}) \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \\ &= -\rho_i \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i \quad . \end{aligned}$$

La potenza totale che i generatori devono erogare affinché possa sussistere la densità di carica ρ_i in moto con velocità $\mathbf{v}$ è dunque

$$W = -\int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_i dV \quad .$$

◇ $\int_V \gamma |\mathbf{e}|^2 dV$. Questo termine, che ha naturalmente ancora le dimensioni di una potenza, dipende dalla conducibilità γ del mezzo nel quale il campo è definito, ed esso rappresenta dunque la potenza che viene dissipata nel volume V per effetto Joule.

◇ $\int_V \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) dV$. Questo termine si presta ad una interpretazione chiara ed inequivocabile solo se il mezzo nel quale è definito il campo è un mezzo *non dispersivo* nello spazio e nel tempo, e *linerare*. In questo caso, infatti, vale

$$\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e} \quad , \quad \mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad ,$$

e l'integrale può essere riscritto come

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \mu |\mathbf{h}|^2 + \frac{1}{2} \epsilon |\mathbf{e}|^2 \right) dV \quad ,$$

dove si è supposto che il volume V sia fisso nel tempo e si è così potuto portare l'operatore di derivata rispetto al tempo al di fuori del segno di integrale.

Il termine $\epsilon |\mathbf{e}|^2/2$ ricorda un termine visto nello studio dell'elettrostatica, termine che, quando integrato su tutto il volume di interesse, rappresenta l'*energia elettrostatica* del sistema che è immagazzinata in quel determinato volume. Fisicamente questa è legata al lavoro che si deve compiere per creare in maniera *reversibile* il campo elettrico presente nella regione V . Analogo è poi il significato del termine $\mu |\mathbf{h}|^2/2$, che si lega al contributo di energia *magnetostatica* necessaria ad instaurare il campo.

Quando cade l'ipotesi di non dispersività, il termine in oggetto non può più essere interpretato con certezza come termine di energia elettromagnetica immagazzinata nel volume V , perchè non è detto che la trasformazione che ha portato all'instaurazione del campo sia in questo caso ancora una trasformazione di tipo *reversibile*. In altre parole, affinchè l'integrando sia effettivamente interpretabile come energia interna del sistema è necessario che esso si presenti nella forma di un *differenziale esatto*, di modo che il suo integrale nel tempo dipenda esclusivamente dagli estremi di integrazione, e non dal percorso (temporale) che è stato seguito per connetterli.

Questo accade certamente nel caso di mezzi non dispersivi, nei quali i campi $\mathbf{e}$ e $\mathbf{h}$ sono legati in maniera temporalmente locale a $\mathbf{d}$ e $\mathbf{b}$ ed ogni trasformazione ciclica riporta quindi nel punto da cui si era partiti. Viceversa, in presenza di dispersione, questo risultato non è più garantito a priori, e l'identificazione del termine in oggetto con l'energia interna cade.

Chiarito questo aspetto fondamentale, si può allora affermare che quando è chiaro il significato fisico del primo termine a destra dell'uguale nella equazione (5.1), l'interpretazione del teorema di Poynting è la seguente: il teorema afferma che la potenza ceduta dai generatori al campo può

1. essere dissipata per effetto Joule;
2. essere impiegata per variare l'energia elettromagnetica accumulata nel volume V ;
3. essere *trasferita* verso l'esterno del volume V . Questo contributo è rappresentato dal termine

$$\oint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \hat{n} dS \equiv \oint_S \mathbf{p} \cdot \hat{n} dS \quad ,$$

dove il vettore $\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ è detto *vettore di Poynting*. Per definizione, dunque, esso è un vettore tale che il suo integrale esteso alla superficie S dà il contributo di potenza che fluisce attraverso il contorno della regione di definizione del campo $\mathbf{e}$, a tal proposito, vi sono da fare due annotazioni importanti:

- la prima riguarda il fatto che può risultare naturale cercare di interpretare il vettore di Poynting in modo “locale”, attribuendogli cioè, punto per punto, il significato di densità di potenza che transita attraverso la superficie S . In generale, questa interpretazione *non è però corretta*. Infatti, si è potuto dimostrare il teorema di Poynting, e definire l'omologo vettore solo perchè si è applicato il teorema di Gauss al fine di passare da un integrale di volume ad un integrale di superficie, ma perchè ciò sia matematicamente corretto è *necessario* che l'integrale di superficie sia esteso ad una superficie *chiusa*,

e non aperta come dovrebbe essere per poter attribuire al vettore di Poynting un significato locale. In altri termini, il teorema di Poynting assicura solo del significato fisico dell'*intero integrale*, non del significato dell'integrando.

Tuttavia, in molti dei problemi pratici che si incontreranno nel seguito, ciò che interesserà valutare sarà il campo irradiato a grande distanza da opportuni insiemi di sorgenti. Si vedrà allora che, in questi casi, la propagazione avviene essenzialmente per onde sferiche nelle quali l'energia associata al campo viaggia proprio nella direzione radiale che coincide con la direzione in cui è orientato $\mathbf{p}$. In questi casi sarà allora lecito dare all'integrando il significato di densità locale di potenza, ed affermare che il flusso di potenza è maggiore lì dove $|\mathbf{p}|$ risulta maggiore.

- Il secondo punto importante da notare è che, come detto, il teorema di Poynting ha una interpretazione chiara ed univoca solo quando il primo termine al secondo membro della (5.1) può essere letto come variazione dell'energia elettromagnetica immagazzinata e, come visto, questo richiede che il mezzo sia *non dispersivo*.

Nel caso della propagazione in un mezzo dispersivo, una interpretazione del teorema del tutto generale, che prescindendo dal particolare legame che intercorre tra $\mathbf{d}$ e $\mathbf{e}$ (o tra $\mathbf{b}$ e $\mathbf{h}$) non può essere data. Ciò che è possibile fare, invece, è discutere i risultati che si possono ottenere in due casi ben specifici; questi sono il caso delle grandezze sinusoidali, ovvero il caso in cui tutte le componenti del campo elettromagnetico hanno spettro rigorosamente impulsivo, e si parla in questo caso di *teorema di Poynting nel dominio della frequenza*, ed il caso dei segnali a banda stretta, e si parla allora di *teorema dell'energia*.

5.1.2 Teorema di Poynting nel dominio della frequenza

Prima di discutere il teorema è opportuno porre in evidenza che la dicitura che viene comunemente usata, quella di “teorema nel dominio della frequenza” rappresenta in realtà un abuso di linguaggio perchè non si applicherà il teorema alle trasformate di Fourier dei campi nel dominio del tempo, quanto piuttosto ai *fasori* del campo, che sono quantità matematiche rappresentative di grandezze puramente sinusoidali.

Chiarita questa premessa, si richiamano allora le equazioni di Maxwell nel dominio della rappresentazione complessa e si ricorda che, nel caso di propagazione in un mezzo lineare, isotropo e non dispersivo nello spazio, esse si scrivono nella forma

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu(\omega)\mathbf{H} \quad , \\ \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E} + \gamma\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad .\end{aligned}$$

Moltiplicando internamente la prima delle equazioni per $\mathbf{H}^*$ e la complessa coniugata della seconda equazione per $\mathbf{E}$ e sottraendo membro a membro la seconda dalla prima si ottiene allora

$$\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* = -i\omega\mu|\mathbf{H}|^2 + i\omega\epsilon^*|\mathbf{E}|^2 - \gamma|\mathbf{E}|^2 - \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^* \quad ,$$

dove si è omessa la dipendenza dei parametri costitutivi del mezzo dalla frequenza per non appesantire eccessivamente la notazione.

Come già nel caso del teorema nel dominio del tempo, l'identità scritta rappresenta una uguaglianza tra funzioni di punto, che rimane tale quando integrata sul volume in cui il campo è definito. Si ottiene così:

$$\begin{aligned}- \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} dV &= 2i\omega \int_V \left(\frac{\mu|\mathbf{H}|^2}{4} - \frac{\epsilon^*|\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV + \int_V \gamma \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} dV + \\ &+ \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{n} dS \quad ,\end{aligned}\tag{5.2}$$

dove si è definito il *vettore di Poynting complesso*

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \quad ,$$

e si è applicato il teorema di Gauss all'ultimo addendo della (5.2). Si noti che il vettore di Poynting complesso **non** è la trasformata di Fourier del vettore di Poynting nel dominio del tempo, una quantità che, d'altra parte, non sarebbe nemmeno definita dal momento che, per ipotesi, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ hanno spettro impulsivo. Il legame tra la quantità nel dominio del tempo e quella nel dominio della frequenza è invece la seguente: la parte reale di $\mathbf{P}$ coincide con il valor medio di $\mathbf{p}$ calcolato sulla durata di un periodo delle grandezze sinusoidali in oggetto. A tal proposito, si noti anche che nella definizione del vettore di Poynting, e di tutti gli altri

addendi della (5.2), si è introdotto un fattore due al denominatore: ciò è stato fatto solamente perchè nello scrivere i fasori rappresentativi dei campi sinusoidali si è fatto uso delle ampiezze di picco, e non di quelle efficaci, di modo che la potenza elettromagnetica associata al campo va calcolata producendo il campo elettrico per il complesso coniugato del campo magnetico, e dividendo il tutto per due.

L'equazione (5.2) è una uguaglianza tra numeri complessi, ed essa deve dunque valere contemporaneamente sia per la sua parte reale, sia per quella immaginaria. Si consideri dapprima la parte reale di ambo i membri: fisicamente, l'uguaglianza che così si ottiene rappresenta il bilancio per i valori medi della potenza messa in gioco dai generatori, ed utilizzata dal campo. Infatti, se si scrive

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_R + i\mathbf{P}_I \quad , \quad W \equiv - \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_i^*}{2} dV = W_R + iW_I \quad ,$$

e

$$\epsilon = \epsilon_R - i\epsilon_I \quad , \quad \mu = \mu_R - i\mu_I \quad ,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} W_R = & 2\omega \int_V \left(\frac{\mu_I |\mathbf{H}|^2}{4} + \frac{\epsilon_I |\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV + \int_V \gamma \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} dV + \\ & + \oint_S \mathbf{P}_R \cdot \hat{n} dS \quad , \end{aligned} \quad (5.3)$$

e questa identità può essere letta come segue: il valor medio della potenza ceduta dai generatori al campo (W_R) viene impiegato in parte per effetti dissipativi, rappresentati dall'integrale dipendente dalla conducibilità γ che dà la potenza dissipata per effetto Joule in un periodo del campo, in parte per trasferire potenza attiva attraverso la superficie S (si ricordi che P_R è il valor medio di $\mathbf{p}$ nel dominio del tempo), ed in parte per l'insieme dei fenomeni legati al termine

$$2\omega \int_V \left(\frac{\mu_I |\mathbf{H}|^2}{4} + \frac{\epsilon_I |\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV \quad ,$$

che è il valor medio di

$$\int_V \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) dV \quad (5.4)$$

Si era visto in precedenza che, nel caso di un mezzo *non dispersivo*, questo termine rende conto della variazione di energia elettromagnetica accumulata nel volume V dove è definito il campo. Ora, se le grandezze in gioco hanno andamento temporale di tipo sinusoidale, e si valuta la variazione netta di energia nel loro periodo, essa deve risultare identicamente nulla. Questa conclusione è consistente con il risultato derivato adesso perchè, come si dimostrerà nel seguito, se un mezzo è non dispersivo, risulta $\epsilon \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$, ovvero $\epsilon_I = \mu_I \equiv 0$, ed allora la variazione di energia media in un periodo si annulla.

In altre parole, quando nelle equazioni dell'elettromagnetismo compaiono dei parametri costitutivi ϵ e μ complessi, la loro parte immaginaria non nulla è la traccia della presenza di dispersione e, fisicamente, essa rappresenta il fatto che l'integrale (5.4) contiene dei contributi dissipativi che ne precludono l'interpretazione in termini di energia interna del sistema (infatti, l'integrale lungo un "percorso chiuso" nel tempo, come ad esempio quello su un periodo del campo, non dà più un valore identicamente nullo). Chiaramente, i contributi dissipativi di cui si sta ora discutendo non possono essere attribuiti a cause connesse alla conducibilità del mezzo che è già tenuta in considerazione dal secondo addendo alla destra dell'uguale nella (5.2), e si usa allora indicare queste perdite di natura *non conduttiva* con il termine di *perdite per isteresi dielettrica e/o magnetica*.

Va ancora notato che, sebbene questi contributi siano qui indicati con la dicitura di "perdite", l'integrale di volume (5.4) può avere segno sia positivo sia negativo, il che corrisponde a dire che lo scambio di energia tra il mezzo nel quale è definito il campo ed i generatori può avvenire in entrambi i versi. Se però, come accade nella maggior parte dei casi di interesse, il mezzo in esame è un *mezzo passivo*, cioè esso è solo in grado di dissipare energia convertendola in calore, le costanti ϵ_I e μ_I devono essere maggiori di zero per le frequenze $\omega > 0$, e minori di zero per $\omega < 0$. Si è dunque trovata una interessante conseguenza del teorema di Poynting: sulla base di elementari considerazioni energetiche esso ha permesso di fissare il segno delle parti immaginarie delle costanti del mezzo, un segno che non era prevedibile a priori.

Sino a questo momento si è dunque scritto ed interpretato un bilancio di potenze che risulta valido anche nel caso dei mezzi dispersivi, e che ha permesso di identificare il fatto che parte della potenza attiva che è ceduta dai generatori può essere utilizzata per fenomeni di isteresi

elettrica e magnetica. Ciò che rimane ancora da studiare è ora solo il bilancio che coinvolge le parti immaginarie delle (5.2), e che si scrive come

$$W_I = 2\omega \int_V \left(\frac{\mu_R |\mathbf{H}|^2}{4} - \frac{\epsilon_R |\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV + \oint_S \mathbf{P}_I \cdot \hat{n} dS \quad . \quad (5.5)$$

In questa espressione, l'unico termine che si presta ad una interpretazione fisica immediata è quello che dipende dalla frequenza ω . Infatti, se il mezzo è non dispersivo questo termine rappresenta la differenza tra l'energia elettrica e magnetica media immagazzinata nel volume V in un periodo del campo. Quando invece il mezzo è dispersivo, e come si è già sottolineato più volte, questa lettura non è più corretta, e si usa definire i termini sotto il segno di integrale rispettivamente con i nomi di *pseudoenergia* magnetica ed elettrica.

L'interpretazione dei rimanenti termini della (5.5) è infine la seguente: il termine W_I rappresenta la potenza reattiva ceduta dai generatori al campo, mentre il termine dipendente dalla parte immaginaria del vettore di Poynting descrive il valor medio del flusso di potenza reattiva che attraversa la superficie S in un periodo del campo.

A titolo di considerazione conclusiva, è infine interessante illustrare la ragione per cui viene introdotto il concetto di potenza reattiva, e l'utilità pratica cui può portare la sua conoscenza. Ad un primo sguardo superficiale, infatti, la potenza reattiva può apparire come un semplice artificio matematico dal momento che ciò che conta nella realtà è il bilancio delle potenze attive e dunque, una volta che sia stata fissata la parte reale della potenza, il bilancio energetico non cambia se cambiano le parti immaginarie della (5.2). Tuttavia, quello che cambia quando cambia la parte immaginaria è lo squilibrio tra la media dell'energia magnetica ed elettrica che sono immagazzinate nel volume V in un periodo del campo. È allora evidente che quando ciò accade, almeno uno tra i campi $\mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ ha una ampiezza “maggiore di quella che sarebbe strettamente necessaria” per avere la stessa potenza attiva cui il campo sta in realtà dando luogo: un valore elevato di W_I indica dunque che si stanno utilizzando i generatori in modo improprio ed inefficiente.

5.1.3 Teorema dell'energia

Come accennato in precedenza, con la dicitura “teorema dell'energia” si intende il teorema di Poynting applicato a mezzi dispersivi nel tempo

nei quali si propaghi un campo *a banda stretta*, cioè un campo con una estensione spettrale molto inferiore alla frequenza della sua portante o, nel dominio del tempo, un campo le cui variazioni temporali abbiano luogo su una scala dei tempi molto maggiore del periodo della portante. Per illustrare come si scriva il teorema di Poynting per questo tipo di campi è innanzi tutto opportuno riscrivere le equazioni di Maxwell in una forma più appropriata. A tal fine, si consideri ad esempio il termine

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int i\omega \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad .$$

Poichè per ipotesi il campo $\mathbf{E}(\omega)$ ha una banda stretta, centrata attorno ad una frequenza che verrà indicata come ω_0 , si può sviluppare la funzione $\omega \epsilon(\omega)$ intorno ad ω_0 , ricavando

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \simeq \int i\omega_0 \epsilon(\omega_0) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int i \frac{\partial(\epsilon\omega)}{\partial \omega} (\omega - \omega_0) \mathbf{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad ,$$

e poichè al prodotto per $i(\omega - \omega_0)$ corrisponde l'operatore di derivazione rispetto al tempo, ottenere così

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \simeq i\omega_0 \epsilon(\omega_0) \mathbf{e}(t) + \frac{\partial(\epsilon\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{e}(t)}{\partial t} \quad .$$

Se il campo $\mathbf{e}$ fosse perfettamente sinusoidale, esso potrebbe essere scritto mediante la sua rappresentazione complessa introducendo il fasore $\mathbf{E}$ che, si ricorda, è legato al campo nel dominio del tempo dalla relazione

$$\mathbf{e}(t) = \text{Re} \left[\mathbf{E} e^{i\omega_0 t} \right] \quad ,$$

nella quale il fasore $\mathbf{E}$ è un numero complesso indipendente dal tempo. Quando invece si tratta con segnali a banda stretta, si può ancora immaginare di rappresentare il campo per mezzo di una notazione fasoriale, ma si deve ora lasciare ad $\mathbf{E}$ la libertà di essere una grandezza *dipendente dal tempo*, anche se con variazioni lente rispetto al periodo $T = 2\pi/\omega_0$. Le equazioni di Maxwell per questi fasori generalizzati si scrivono allora nella forma

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{H} - \frac{\partial(\omega\mu)}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad , \\ \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega\epsilon\mathbf{E} + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \end{aligned}$$

A partire da queste equazioni si possono a questo punto ripetere tutti i passaggi che erano serviti per la derivazione del teorema di Poynting nel dominio della frequenza e, notando che si è ora immaginato di essere in un mezzo privo di perdite e di sorgenti, ottenere infine la seguente espressione

$$\oint_S \mathbf{P}_R \cdot \hat{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega} \frac{|\mathbf{H}|^2}{4} + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega} \frac{|\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV = 0 \quad ,$$

che rappresenta ancora una conservazione della potenza, e nella quale l'integrale di volume può essere identificato con l'energia elettromagnetica contenuta nel mezzo dispersivo nel caso di un segnale a banda stretta.

5.2 Teorema di unicità

Una volta che si sia data una formulazione matematicamente corretta al problema dell'elettromagnetismo, è importante capire se questo ammette soluzioni e se, quando ciò accade, le soluzioni trovate sono uniche o meno. Per ciò che concerne l'esistenza delle soluzioni, essa verrà qui data per scontata dal momento che le equazioni con cui si sta trattando sono equazioni che descrivono fenomeni fisici che l'esperienza dimostra essere esistenti. Più importante è invece il problema dell'unicità delle soluzioni perchè si può essere sicuri di aver descritto in maniera completa tutti gli aspetti dei fenomeni fisici in oggetto solo quando si è in grado di affermare con certezza che la soluzione che si è trovata è l'unica possibile.

Da un punto vista matematico, il problema si pone come segue: le equazioni di Maxwell sono equazioni differenziali alle derivate parziali e l'unicità delle loro soluzioni dipende quindi dalle condizioni al contorno che ad esse vengono applicate.

Si devono distinguere i casi delle equazioni nel dominio del tempo ed in quello della frequenza: nel dominio del tempo, infatti, le condizioni al contorno da applicare sono di due diversi tipi. Un primo tipo, che è più correttamente indicato con il termine di *condizioni iniziali*, specifica i valori che il campo assume nell'istante iniziale a partire dal quale esso viene calcolato. In aggiunta a queste condizioni vi sono poi delle vere e proprie *condizioni al contorno*, che sono quelle cui il campo deve soddisfare sulla superficie S che delimita il volume V in cui esso è definito. In

particolare, se il volume V è un volume *finito*, lo studio delle equazioni di Maxwell viene indicato con la dicitura di *problema interno*, mentre nel caso contrario, quello in cui V si estende all'infinito, si usa dire che il problema è un *problema esterno*. Per ciò che concerne le equazioni nel dominio della frequenza, infine, le uniche condizioni da imporre sono quelle al contorno giacchè i campi sono sinusoidali e cioè esistenti da tempo infinito, e la nozione di condizione iniziale perde quindi di significato.

Scopo del presente paragrafo è dunque quello di illustrare quali siano le condizioni iniziali e/o le condizioni al contorno che devono essere applicate alle equazioni di Maxwell per garantirne l'unicità delle soluzioni.

5.2.1 Dominio del tempo

Si consideri per il momento il caso del problema interno. Si dimostra ora che, se lo studio delle equazioni viene affrontato nel dominio del tempo, la soluzione è unica quando sono determinate in maniera univoca le seguenti grandezze:

1. le correnti impresse $\mathbf{j}_i$;
2. il campo elettromagnetico nell'istante iniziale in ogni punto del volume V : $\mathbf{e}(P, t = 0)$, $\mathbf{h}(P, t = 0)$, $\forall P \in V$;
3. la componente tangente del campo elettrico *oppure* del campo magnetico in ogni punto P del contorno S per ogni istante di tempo $t \geq 0$: $\mathbf{e}_{tan}(P, t \geq 0)$ o $\mathbf{h}_{tan}(P, t \geq 0)$, $\forall P \in S$.

Dimostrazione

La dimostrazione procede per assurdo: si suppone che esistano due soluzioni $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1\}$, e $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2\}$, entrambe soddisfacenti alle tre ipotesi sopra esposte, e si dimostra che se esse non coincidono si realizza un assurdo. Infatti, si indichi con

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 \quad ,$$

la differenza tra le due soluzioni $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1\}$, ed $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2\}$. Attesa la linearità delle equazioni di Maxwell, il campo $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$ è ancora un campo elettromagnetico, ora alimentato da sorgenti nulle dal momento che, per

ipotesi, sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1\}$ sia $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2\}$ sono sostenuti dalle stesse sorgenti $\mathbf{j}_i$. Si applichi ora il teorema di Poynting al campo $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$: si ottiene così

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon |\mathbf{e}|^2}{2} + \frac{\mu |\mathbf{h}|^2}{2} \right) dV + \int_V \gamma |\mathbf{e}|^2 dV + \oint_S (\mathbf{e} \times \mathbf{h}) \cdot \hat{n} dS \quad .$$

L'ipotesi 3. sopra esposta afferma che per entrambi i campi $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1\}$ ed $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2\}$ è nota la componente tangente del campo elettrico o del campo magnetico sul contorno S ; ne segue che $\mathbf{e}_{tan}(P, t \geq 0) \equiv 0$ o $\mathbf{h}_{tan}(P, t \geq 0) \equiv 0$ in ogni punto $P \in S$. Si consideri allora il terzo addendo alla destra dell'uguale nell'ultima equazione scritta, quello che coinvolge il flusso del vettore di Poynting. Dal momento che in questo vi è l'operazione di prodotto interno per il versore $\hat{n}$ che è ortogonale alla superficie S , le uniche componenti di campo che contano sono le componenti del campo elettrico e del campo magnetico che risultano *tangenti* a S . In virtù del fatto che almeno una di esse è nulla, si può allora affermare che il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie S non dà contributo al bilancio di potenze espresso dal teorema di Poynting, che si semplifica dunque nella forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon |\mathbf{e}|^2}{2} + \frac{\mu |\mathbf{h}|^2}{2} \right) dV = - \int_V \gamma |\mathbf{e}|^2 dV \quad .$$

Si integrino ora entrambi i membri di questa espressione rispetto alla coordinata temporale nell'intervallo di tempo compreso tra l'istante iniziale ed un generico istante t_0 . Si ottiene:

$$\begin{aligned} \left[\int_V \left(\frac{\epsilon |\mathbf{e}|^2}{2} + \frac{\mu |\mathbf{h}|^2}{2} \right) dV \right]_{t=t_0} - \left[\int_V \left(\frac{\epsilon |\mathbf{e}|^2}{2} + \frac{\mu |\mathbf{h}|^2}{2} \right) dV \right]_{t=0} = \\ = - \int_{t=0}^{t=t_0} d\tau \int_V \gamma |\mathbf{e}(P, \tau)|^2 dV \quad (5.6) \end{aligned}$$

Il secondo addendo al primo membro, cioè il valore dell'integrale di volume nell'istante $t = 0$ è nullo perchè, in virtù dell'ipotesi 2., $\mathbf{e}(P, t = 0) \equiv \mathbf{h}(P, t = 0) \equiv 0$ in ogni punto $P \in V$. Se il campo $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$ non fosse identicamente nullo, ovvero se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1\}$ non coincidesse con $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2\}$ si sarebbe allora realizzato un assurdo: la quantità al primo membro della (5.6) sarebbe infatti una quantità strettamente positiva, mentre quella al secondo membro sarebbe strettamente negativa. L'unico modo in

cui queste due quantità possono coincidere è che il campo $\{\mathbf{e}, \mathbf{h}\}$ sia un campo identicamente nullo, ovvero che $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1\}$ coincida con $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2\}$, come si voleva dimostrare.

5.2.2 Dominio della frequenza

In analogia a quanto fatto nel caso dei campi definiti nel dominio del tempo, per il momento si consideri ancora il caso del problema interno. Si intende dimostrare che la soluzione delle equazioni di Maxwell è unica se sono rispettate le seguenti ipotesi:

1. sono note le sorgenti del campo $\mathbf{J}_i$;
2. è nota la componente tangente del campo elettrico *oppure* del campo magnetico in ogni punto della superficie S che contorna il volume di definizione del campo: $\mathbf{E}_{tan}(P)$ *oppure* $\mathbf{H}_{tan}(P)$ in ogni punto $P \in S$;
3. il dielettrico racchiuso nel volume V *deve avere perdite*, indifferentemente dal fatto che queste vengano da fenomeni dissipativi legati ad una conducibilità $\gamma \neq 0$, o da fenomeni di isteresi, rappresentati da costanti ϵ e μ complesse, con parte immaginaria diversa da zero.

Dunque, come già anticipato in precedenza, non vi è più un'ipotesi che coinvolga il valore del campo nell'istante iniziale, istante che, d'altra parte, non avrebbe nemmeno più senso definire, ma vi è invece una condizione che riguarda il fatto che il mezzo materiale non può essere privo di perdite. La ragione fisica alla base di questa condizione verrà chiarita nel seguito.

Dimostrazione

La dimostrazione procede per assurdo di pari passo con quella eseguita nel caso dei campi nel dominio del tempo. Si definisce il campo differenza $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} = \{\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2\}$ e si applica ad esso il teorema di Poynting; si ottengono in tal modo le due relazioni

$$0 = \int_V \gamma \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} dV + 2\omega \int_V \left(\frac{\mu_I |\mathbf{H}|^2}{4} + \frac{\epsilon_I |\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV + \oint_S \mathbf{P}_R \cdot \hat{n} dS \quad (5.7)$$

$$0 = 2\omega \int_V \left(\frac{\mu_R |\mathbf{H}|^2}{4} - \frac{\epsilon_R |\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV + \oint_S \mathbf{P}_I \cdot \hat{n} dS \quad , \quad (5.8)$$

nelle quali il primo membro è nullo perchè entrambi i campi $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ ed $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ sono sostenuti dalle medesime sorgenti $\mathbf{J}_i$ e la loro differenza ha quindi sorgenti nulle. Inoltre, in virtù dell'ipotesi 2. sopra esposta, si annullano anche i contributi che coinvolgono il flusso del vettore di Poynting e le relazioni (5.7,5.8) si semplificano dunque nella forma

$$0 = \int_V \gamma \frac{|\mathbf{E}|^2}{2} dV + 2\omega \int_V \left(\frac{\mu_I |\mathbf{H}|^2}{4} + \frac{\epsilon_I |\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV \quad , \quad (5.9)$$

$$0 = 2\omega \int_V \left(\frac{\mu_R |\mathbf{H}|^2}{4} - \frac{\epsilon_R |\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV \quad . \quad (5.10)$$

Si consideri ora la prima di queste due relazioni, la (5.9): essa si presenta nella forma di una somma di tre contributi, ognuno dei quali intrinsecamente non negativo dal momento che, come mostrato nel paragrafo 5.1.2, nei mezzi passivi vale $\gamma > 0$ e $\mu_I, \epsilon_I > 0$ per $\omega > 0$.

Vi sono allora due diverse situazioni da prendere in considerazione. La prima è quella di un mezzo che, come nelle ipotesi, presenti delle perdite. Dalla (5.9) è evidente che in questo caso, indifferentemente dal fatto che le perdite siano di tipo dissipativo o isteretico, l'uguaglianza può essere soddisfatta se e solo se $\mathbf{E} \equiv \mathbf{H} \equiv 0$, e questo prova allora il teorema, perchè assicura che i campi $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ ed $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ coincidono.

La seconda situazione da considerare è invece quella di un mezzo privo di perdite, ovvero con $\gamma = \epsilon_I = \mu_I = 0$. In questo caso la (5.9) si riduce ad una identità banale, ma la (5.10) mostra invece che vi può essere una soluzione non identicamente nulla, ovvero il campo può non essere univocamente determinato, a patto che risulti

$$\int_V \frac{\mu_R |\mathbf{H}|^2}{4} dV = \int_V \frac{\epsilon_R |\mathbf{E}|^2}{4} dV \quad .$$

Fisicamente, questa relazione si legge come segue: il campo non è univocamente determinato se l'energia magnetica media immagazzinata nel volume V in un suo periodo coincide con l'energia elettrica media. Si tratta dunque di un *campo risonante* il cui equivalente a parametri concentrati è un circuito del tipo di quello indicato in Fig.(5.1): infatti, come è ben noto dall'elettrotecnica, in un circuito siffatto può esistere un

campo non sorretto da alcuna sorgente, e questo ha la caratteristica che l'energia ad esso associata viene continuamente scambiata tra l'induttore ed il condensatore con una frequenza caratteristica che dipende dai valori di L e C . L'equivalente a parametri concentrati del caso di mezzo con perdite è invece schematizzato dal circuito di Fig.(5.1.b) nel quale il resistore rappresenta il meccanismo di perdita, qui pensata di tipo dissipativo. In questo circuito non può evidentemente esistere alcun campo sorretto da sorgenti nulle perchè il resistore dissipa l'energia al passare del tempo.

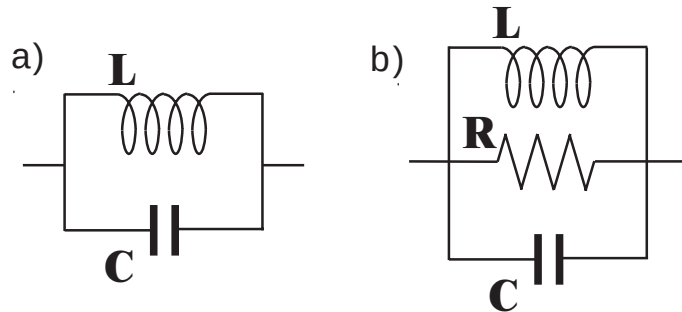


Figura 5.1: Equivalenti a parametri concentrati dei mezzi considerati nella dimostrazione del teorema di unicità.

5.2.3 Condizioni di radiazione

Sino a questo momento si sono dimostrati i teoremi di unicità nei due domini di rappresentazione facendo riferimento al caso del problema interno. L'estensione al caso del problema esterno è tuttavia semplice sia nel caso dell'unicità nel dominio del tempo, sia in quello nel dominio della frequenza, e viene esposta qui di seguito.

Da un punto di vista formale, ciò che cambia nel passare dal caso del problema interno a quello del problema esterno è il fatto che, in quest'ultimo, non può più essere definita l'ipotesi che riguarda le componenti tangenti del campo sul contorno del volume di definizione dal momento che quando questo va all'infinito non ha nemmeno più senso parlare di una superficie che racchiuda il volume.

Per comprendere come si debbano modificare le ipotesi iniziali è allora opportuno ricordare come la condizione sulla superficie S era stata

utilizzata nel corso della dimostrazione relativa al caso interno: essa era servita per poter affermare che il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie S era nullo. Ora, il caso del problema esterno può essere pensato come il caso limite di una successione di problemi interni nei quali la superficie che racchiude il volume di definizione del campo è una sfera il cui raggio r tende all'infinito. Quando si calcola il flusso del vettore di Poynting in questa successione di casi, ci si trova quindi ad affrontare un problema nel quale l'integrale è esteso ad una superficie che diverge con il quadrato del raggio e se si vuole essere certi che al tendere di $r \rightarrow \infty$ vi sia un flusso del vettore di Poynting comunque nullo, è dunque necessario che risulti

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 |\mathbf{P}(r)| = 0 \quad . \quad (5.11)$$

Occorre tuttavia notare che per come si è deciso di interpretare il problema esterno, il campo elettromagnetico che è presente sulla superficie sferica che diverge può essere pensato come il campo irraggiato *a grande distanza* da un opportuno insieme di sorgenti e nel seguito si vedrà che, indipendentemente da come queste sono fatte, il campo elettrico e quello magnetico tendono a diventare l'uno proporzionale all'altro, e a disporsi in modo da formare una terna trirettangola con il versore radiale di un sistema di coordinate sferiche centrato nelle sorgenti stesse. La relazione (5.11) si traduce dunque nelle seguenti condizioni, dette *condizioni di radiazione di Sommerfeld*, per il campo elettrico e per il campo magnetico

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r |\mathbf{E}| = \lim_{r \rightarrow \infty} r |\mathbf{H}| = 0 \quad . \quad (5.12)$$

Il teorema di unicità per il problema esterno si enuncia dunque sostituendo, tanto nel caso del dominio della frequenza quanto in quello del tempo, le ipotesi sulle componenti tangenti con la condizione (5.12).

5.3 Teorema di equivalenza di Love

Questo teorema è la formulazione rigorosa del principio noto in ottica con il nome di *principio di Huygens*, il quale afferma che quando si intende analizzare la propagazione di un'onda in una determinata regione dello spazio, invece che impostare lo studio a partire dalle vere sorgenti del campo elettromagnetico, si può considerare un fronte d'onda, cioè una superficie chiusa che circonda le sorgenti, e supporre che da ogni

elemento di questa superficie si irradia una onda sferica con ampiezza e fase opportune. In sostanza, il principio afferma che si può sostituire alle vere sorgenti del campo un insieme di *sorgenti fittizie* per poi ricostruire il campo totale come sovrapposizione delle singole onde dovute a queste sorgenti fittizie.

Chiaramente, così come è enunciato il principio non dà alcuna informazione costruttiva per la risoluzione delle equazioni di Maxwell, perchè esso non specifica quale legame intercorra tra le sorgenti vere e quelle fittizie. Scopo del presente paragrafo è quello di illustrare questo punto, ovvero di chiarire come si possano costruire le sorgenti fittizie a partire da quelle vere. Si noti che, una volta che questo sarà stato fatto, il teorema di equivalenza rappresenterà uno strumento di grande utilità perchè esso fornirà un metodo di risoluzione delle equazioni di Maxwell nel quale vi è completa libertà per ciò che riguarda la scelta della superficie su cui disporre le sorgenti fittizie.

Da un punto di vista pratico, ciò significa che in ogni problema di propagazione elettromagnetica è sempre possibile sostituire le sorgenti, per quanto complicate esse siano, con altre sorgenti definite su quella superficie dello spazio che, di volta in volta, permette la massima semplificazione dei calcoli. Si vedrà altresì nel seguito che vi è un prezzo da pagare per ottenere queste semplificazioni, e questo è legato al fatto che le soluzioni che si possono trovare per mezzo del teorema di equivalenza sono *soluzioni approssimate* delle equazioni di Maxwell.

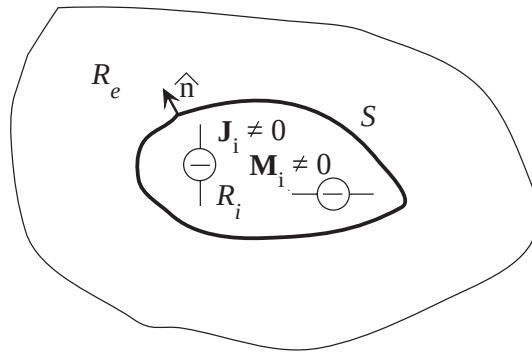


Figura 5.2: Disposizione delle sorgenti nel teorema di equivalenza.

Con riferimento al caso delle equazioni nel dominio della rappresentazione complessa, si immagini allora di voler analizzare il comportamento di un campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ sorretto da un insieme di sorgenti $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$

che, in tutta generalità, possono essere di tipo sia elettrico sia magnetico e si assuma che il dominio V in cui è definito il campo sia tale da assicurare l'unicità delle soluzioni del problema di Maxwell. Inoltre, si consideri una superficie chiusa S , *arbitraria*, che racchiuda le sorgenti, e si supponga di voler trovare un insieme di sorgenti *equivalenti* a quelle originarie che, quando disposte sulla superficie S consentano di ottenere, nella regione esterna a S , lo stesso campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ cui danno luogo le sorgenti originarie. A tal fine, si dispongano su S le seguenti densità di corrente superficiali:

$$\mathbf{J}_S = \hat{n} \times \mathbf{H}_{tan} \quad , \quad \mathbf{M}_S = \mathbf{E}_{tan} \times \hat{n} \quad ,$$

dove $\hat{n}$ è la normale alla superficie S , orientata nel verso della regione nella quale si vuole provare l'equivalenza.

Il teorema di equivalenza afferma che se si dispongono queste sorgenti fittizie su S e si “spengono” le vere sorgenti $\mathbf{J}_i$ ed $\mathbf{M}_i$, si ottiene un campo

$$\{\mathbf{E}_{eq}, \mathbf{H}_{eq}\} = \begin{cases} \{\mathbf{E}_{in}, \mathbf{H}_{in}\} & \text{nella regione } R_i \text{ interna a } S; \\ \{\mathbf{E}_{out}, \mathbf{H}_{out}\} & \text{nella regione } R_e \text{ esterna a } S; \end{cases}$$

che è

1. identicamente nullo nella regione R_i interna a S : $\{\mathbf{E}_{in}, \mathbf{H}_{in}\} \equiv \{0, 0\}$;
2. coincidente con il campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ generato dalle vere sorgenti nella regione R_e esterna a S : $\{\mathbf{E}_{out}, \mathbf{H}_{out}\} \equiv \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$.

Dimostrazione

Si supponga che il teorema sia vero, e quindi che il campo che è generato dalle sorgenti fittizie sia effettivamente il campo $\{\mathbf{E}_{eq}, \mathbf{H}_{eq}\}$ specificato nelle ipotesi. Poichè si è supposto che il volume dello spazio nel quale è definito il campo è tale da assicurare l'unicità delle soluzioni, se si dimostra che questo campo:

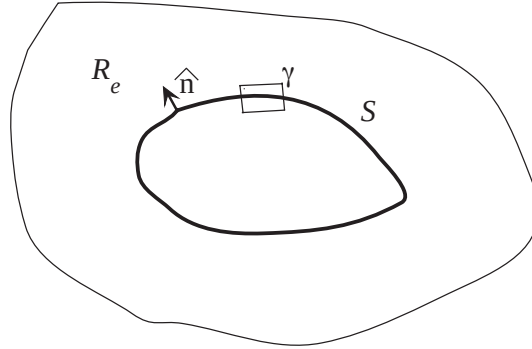
- è una soluzione accettabile delle equazioni di Maxwell;
- rispetta tutte le condizioni al contorno;

si sarà dimostrato che esso è *l'unico* campo che può esistere e quindi, in definitiva, si sarà dimostrato il teorema.

Si consideri dunque dapprima il problema di determinare se il campo in oggetto è una soluzione accettabile delle equazioni di Maxwell. Per ciò che concerne la regione all'interno della superficie S va notato che, avendo posto $\mathbf{J}_i \equiv \mathbf{M}_i \equiv 0$, la regione è priva di sorgenti ed in essa il campo è quindi descritto dalle equazioni di Maxwell omogenee, che sono risolte dal campo identicamente nullo $\{\mathbf{E}_{in}, \mathbf{H}_{in}\}$.

Analogamente, per ciò che concerne l'esterno della superficie S , si verifica subito che $\{\mathbf{E}_{out}, \mathbf{H}_{out}\}$ è una soluzione accettabile, semplicemente perchè in quella regione esso coincide, per ipotesi, con il campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ che è per definizione una soluzione delle equazioni di Maxwell. Dunque, l'intero campo $\{\mathbf{E}_{eq}, \mathbf{H}_{eq}\}$ è soluzione delle equazioni di Maxwell.

Si passi ora a considerare il problema delle condizioni al contorno, che sono due: le prime sono quelle che vanno applicate sulla superficie S ; le seconde sono quelle che riguardano il bordo della regione V di definizione del campo originario se tale bordo esiste, o le condizioni di radiazione di Sommerfeld se V diverge all'infinito.



Per ciò che concerne le prime, è sufficiente applicare la legge di circuitazione di Ampere ad un percorso chiuso γ che intersechi la superficie S come indicato in figura; risulta infatti (si vedano anche le condizioni di continuità espresse nel capitolo 3):

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_{out,tan} - \mathbf{H}_{in,tan}) = \text{densità di corrente elettrica superficiale},$$

e poichè $\mathbf{H}_{in} \equiv 0$, e $\mathbf{H}_{out} \equiv \mathbf{H}$, anche

$$\hat{n} \times \mathbf{H}_{tan} = \text{densità di corrente elettrica superficiale} \quad .$$

La densità di corrente superficiale da considerarsi è quella che rappresenta la sorgente elettrica fittizia, ovvero

$$\text{densità di corrente elettrica superficiale} = \mathbf{J}_S,$$

e poichè, per ipotesi, questa è stata scelta proprio in modo che $\mathbf{J}_S \equiv \hat{n} \times \mathbf{H}$, non resta che concludere che il campo $\mathbf{H}_{eq}$ rispetta la condizione al contorno su S . In maniera del tutto analoga, per effetto della simmetria nelle equazioni di Maxwell deve poi risultare anche

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_{out,tan} - \mathbf{E}_{in,tan}) = - \text{densità di corrente magnetica superficiale} \quad ,$$

ovvero

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_{tan} = - \text{densità di corrente magnetica superficiale} \quad ,$$

che è automaticamente verificata per la scelta che si è fatta per $\mathbf{M}_S$.

Infine, per quanto concerne le condizioni al contorno sul bordo esterno della regione V (o le condizioni di radiazione di Sommerfeld), anche queste sono automaticamente soddisfatte perchè, per ipotesi, il campo $\{\mathbf{E}_{out}, \mathbf{H}_{out}\}$ coincide con $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ al di fuori di S .

In virtù dell'unicità della soluzione delle equazioni di Maxwell, il campo $\{\mathbf{E}_{eq}, \mathbf{H}_{eq}\}$ è dunque *l'unica* soluzione ammissibile e questa constatazione dimostra il teorema.

5.3.1 Correnti assorbenti

Si supponga ora che sulla superficie S vengano fatte fluire delle correnti uguali ed opposte a quelle delle sorgenti equivalenti:

$$\mathbf{J}_A = -\hat{n} \times \mathbf{H}_{tan} \quad , \quad \mathbf{M}_A = -\mathbf{E}_{tan} \times \hat{n} \quad .$$

Se le condizioni al contorno sul bordo del volume V sono invarianti rispetto ad un cambio di segno nel campo elettrico e magnetico, ovvero se esse risultano soddisfatte anche da $\{-\mathbf{E}, -\mathbf{H}\}$, è immediato verificare che le correnti $\mathbf{J}_A, \mathbf{M}_A$ sostengono il campo

$$\{\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a\} = -\{\mathbf{E}_{eq}, \mathbf{H}_{eq}\} = \begin{cases} \{0, 0\} & \text{in } R_i; \\ \{-\mathbf{E}, -\mathbf{H}\} & \text{in } R_e. \end{cases}$$

Allora, se si suppone che siano contemporaneamente presenti sia le sorgenti $\mathbf{J}_A, \mathbf{M}_A$, sia le sorgenti originarie $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$, per il principio di sovrapposizione degli effetti si trova che il campo totale presente nel volume V è

$$\{\mathbf{E}_{tot}, \mathbf{H}_{tot}\} = \{\mathbf{E}_a, \mathbf{H}_a\} + \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} = \begin{cases} \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} & \text{in } R_i; \\ \{0, 0\} & \text{in } R_e. \end{cases}$$

Dunque, il campo coincide con quello di partenza all'interno della superficie S , ed è identicamente nullo al di fuori di essa: l'effetto delle correnti $\mathbf{J}_A, \mathbf{M}_A$ è stato quello di “intrappolare” il campo all'interno della regione delimitata dalla superficie S e, per questa ragione, esse sono dette *correnti assorbenti*.

5.3.2 Reversibilità del teorema

Il risultato appena mostrato si presta tuttavia anche ad un'altra interpretazione: si può infatti immaginare di essere partiti dallo studio di un generico campo sorretto dalle sorgenti $\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i$ e di aver cercato di applicare il teorema di equivalenza alla regione R_i interna ad S .

Infatti, ai fini della dimostrazione esposta in precedenza, in questo caso si sarebbero dovuto spegnere le sorgenti nella regione R_e , dove in realtà esse sono già nulle, e sostituire il loro effetto su S con le sorgenti fittizie $\mathbf{J}_A, \mathbf{M}_A$; si noti a questo proposito che le sorgenti fittizie sono proprio le $\mathbf{J}_A, \mathbf{M}_A$ e non le $\mathbf{J}_S, \mathbf{M}_S$ perchè nelle ipotesi del teorema la superficie S deve essere orientata da una normale che “punta” verso la regione nella quale si vuole applicare l'equivalenza, qui la R_i , mentre il versore $\hat{n}$ che si sta ora utilizzando è diretto verso l'esterno di S .

Il teorema avrebbe allora fornito il seguente risultato: il campo è nullo nella regione esterna a S , ed identicamente coincidente con quello generato dalle sorgenti vere all'interno di S . Questo è esattamente il risultato ottenuto con l'introduzione delle correnti assorbenti, e la sua vera importanza non risiede tanto nell'aspetto puramente geometrico legato alle regioni interne ed esterne a S , quanto piuttosto nel fatto che, per quanto è stato mostrato adesso, il teorema può essere applicato *anche a regioni dello spazio che contengano delle sorgenti*. Di più, se si decide di orientare sempre la normale $\hat{n}$ verso la regione all'interno della quale si vuole applicare l'equivalenza, si è anche provato che l'insieme di sorgenti fittizie da applicare ha sempre la forma $\mathbf{J}_S = \hat{n} \times \mathbf{H}$ e $\mathbf{M}_S = \mathbf{E} \times \hat{n}$.

5.3.3 Osservazioni e corollari

1. In una forma alternativa, estremamente utile perchè consente di eliminare una delle due sorgenti $\mathbf{J}_S$ o $\mathbf{M}_S$, il teorema di equivalenza può anche essere dimostrato sulla base del fatto che per poter invocare l'unicità non è necessaria la conoscenza delle componenti tangenti di *entrambi* i campi elettrico e magnetico, ma è invece sufficiente una sola delle due.

Si immagini allora di voler applicare l'equivalenza alla regione esterna alla superficie S e si supponga di operare come segue: si modifichi la regione interna ad S sostituendola con un *conduttore elettrico perfetto*, e si applichi su di essa la *sola densità di corrente magnetica* $\mathbf{M}_S = \mathbf{E} \times \hat{n}$. È immediato verificare che il teorema di equivalenza può ancora essere dimostrato, essenzialmente perchè la densità di corrente così definita fa ancora sì che vengano rispettate le condizioni al contorno per $\mathbf{E}$ su S e, come menzionato in precedenza, ciò è sufficiente per poter applicare i risultati del teorema di unicità.

In una forma duale poi, si può anche immaginare di sostituire la regione interna ad S con un mezzo che, idealmente, si comporti come un *conduttore magnetico perfetto*, e far fluire sulla sua superficie la densità di corrente elettrica $\mathbf{J}_S = \hat{n} \times \mathbf{H}$. Anche in questo caso, il teorema può essere dimostrato in virtù delle ipotesi richieste dal teorema di unicità.

2. La formulazione del teorema che è stata appena proposta consente di costruire una perfetta corrispondenza con il *teorema di sostituzione* introdotto nei corsi di elettrotecnica.

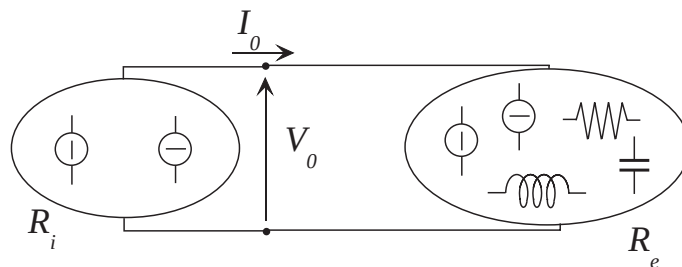


Figura 5.3: Schema di principio di una rete elettrica.

Per illustrare come ciò possa essere fatto, si immagini che sia assegnata una rete elettrica, e che sia possibile isolare al suo interno una regione che contenga solo generatori ideali di corrente e/o di tensione. Si indichi con R_i questa regione, e con R_e la sua complementare (si veda la Fig.(5.3)). Ora, si assuma di aver risolto la rete, cioè di aver determinato la tensione e la corrente che è presente in ogni nodo e ramo della rete e, in particolare, si indichino come V_0 ed I_0 la tensione e la corrente ai morsetti di connessione tra le regioni R_i e R_e .

Il teorema di sostituzione afferma che nulla cambia nella regione R_e se si chiudono in cortocircuito i morsetti che connettono questa regione alla regione R_i e si introduce al loro posto un generatore ideale di tensione che imponga il valore V_0 (si veda la Fig.(5.4)).

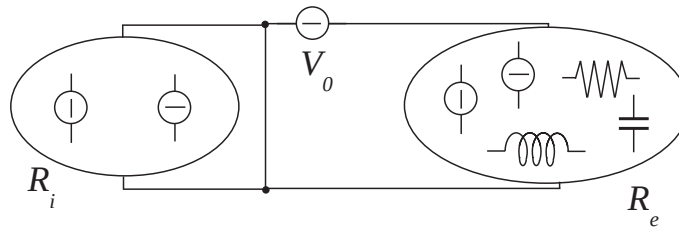


Figura 5.4: Teorema di sostituzione: vengono cortocircuitati i morsetti, e viene introdotto un generatore ideale di tensione.

La corrispondenza con il teorema di equivalenza che si sta discutendo è allora provata: il corto circuito ideale dell'elettrotecnica non è altro che il conduttore elettrico perfetto che racchiude la regione R_i , mentre il generatore ideale di tensione è l'equivalente a parametri concentrati della densità di corrente magnetica M_S . In maniera analoga, si possono poi provare le corrispondenze con gli altri casi discussi più sopra. Ad esempio, il caso del conduttore elettrico perfetto e della densità di corrente elettrica J_S è quello che, nell'elettrotecnica, sarebbe enunciato come segue: nulla cambia nella regione R_e se i morsetti di connessione tra R_i ed R_e vengono aperti e, contemporaneamente, viene introdotto al loro posto un generatore ideale di corrente che imponga il valore I_0 (si veda la Fig.(5.5)).

L'ultimo caso, infine, è quello nel quale non viene modificata la topologia della rete, e cioè non viene modificata la regione R_i medi-

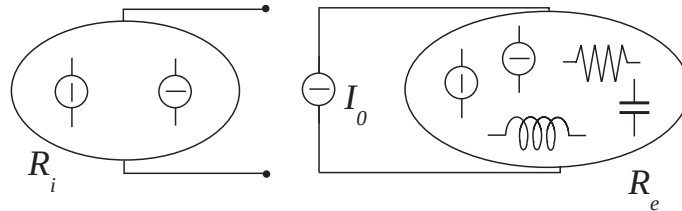


Figura 5.5: Teorema di sostituzione: vengono aperti i morsetti, e viene introdotto un generatore ideale di corrente.

ante introduzione di conduttori perfetti: in questo caso, il teorema di sostituzione afferma che nulla cambia nella regione R_e se, ai suoi morsetti di connessione con R_i vengono introdotti contemporaneamente sia il generatore ideale di tensione sia quello di corrente (si veda la Fig.(5.6)).

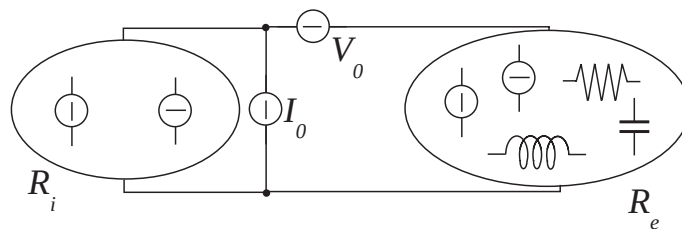


Figura 5.6: Teorema di sostituzione: non viene modificata la rete, e vengono introdotti due generatori ideali.

3. Come si evince anche dagli esempi precedenti, il teorema di sostituzione è uno strumento utile perchè consente di semplificare i calcoli, ma esso non dà una procedura costruttiva per la soluzione di una rete elettrica. Essenzialmente, ciò è dovuto al fatto che, se si vuole sostituire una porzione di una rete con un generatore di tensione o di corrente, è necessario conoscere il valore della tensione o della corrente nel ramo della rete nel quale si intende operare la sostituzione. In altre parole, per operare la sostituzione, è prima necessario risolvere la rete. Nell'ambito dei campi elettromagnetici, lo stesso problema si ripresenta in maniera del tutto analoga: infatti, quelle che sono state indicate come sorgenti equivalenti, e che sono state intese e trattate come se fossero dei termini noti, sono in realtà delle incognite dal momento che esse dipendono dai valori

di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ che, per l'appunto, sono le incognite di ogni problema di propagazione. Detto ciò, ci si potrebbe allora lecitamente domandare per quale ragione sia necessario o utile introdurre e dimostrare il teorema di equivalenza. La risposta a questo quesito risiede nel fatto che, come sottolineato in precedenza, vi è totale libertà nella scelta della superficie su cui applicare le sorgenti equivalenti. In pratica, ciò significa che si può scegliere di applicare il teorema con riferimento a superfici sulle quali si possa stimare il valore del campo con ragionevole cura senza dover veramente risolvere l'intero problema della propagazione.

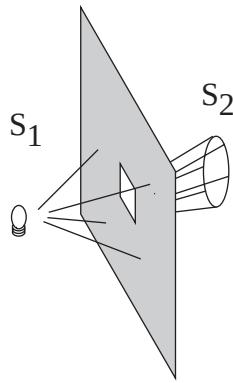


Figura 5.7: Schema di un esperimento di diffrazione.

Un tipico caso nel quale si evidenzia questo tipo di utilizzo è, ad esempio, quello rappresentato dal calcolo del campo diffratto da una apertura praticata in uno schermo opaco (si veda la Fig.(5.7)). A rigore, il campo diffratto dovrebbe essere calcolato risolvendo le equazioni di Maxwell tanto nella regione S_1 quanto nella S_2 , raccordando le due attraverso le condizioni al contorno da applicarsi sulla superficie dello schermo opaco. Tuttavia, quando la fenditura che dà luogo alla diffrazione è sufficientemente piccola, è possibile ipotizzare il valore che il campo ha su di essa (ad esempio, immaginando che tale campo sia la porzione dell'onda sferica centrata nella sorgente che non viene intercettata dallo schermo) e procedere poi al calcolo del campo diffratto utilizzando questo come termine di sorgente equivalente.

Dunque, come si accennava nell'introduzione al teorema, questo

modo di procedere può senz'altro consentire di semplificare i calcoli, ma è bene tenere a mente che esso fornisce dei risultati *approssimati* perchè fa uso di una *stima* del campo come punto di partenza.

5.4 Teorema di reciprocità di Lorentz

Scopo di questo teorema è quello di mettere in relazione le proprietà di campi che coesistono nella stessa regione dello spazio e che sono generati da diversi insiemi di sorgenti. Il teorema viene enunciato e dimostrato nel dominio dei vettori complessi, e con riferimento ad un numero di campi interagenti pari a due.

Si considerino dunque due insiemi di sorgenti, $\mathbf{J}_{i1}, \mathbf{M}_{i1}$ e $\mathbf{J}_{i2}, \mathbf{M}_{i2}$ e si supponga che essi irradiano in uno stesso volume V dello spazio i campi $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ e $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$, rispettivamente soluzione di

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -i\omega\mu\mathbf{H}_1 - \mathbf{M}_{i1} \quad , \quad (5.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = i\omega\epsilon_C\mathbf{E}_1 + \mathbf{J}_{i1} \quad , \quad (5.14)$$

e di

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -i\omega\mu\mathbf{H}_2 - \mathbf{M}_{i2} \quad , \quad (5.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = i\omega\epsilon_C\mathbf{E}_2 + \mathbf{J}_{i2} \quad , \quad (5.16)$$

nelle quali i parametri costitutivi ϵ_C e μ sono gli stessi, perchè i due campi sono definiti nello stesso volume. Si assuma inoltre che valgano le seguenti ipotesi:

1. il volume V è sede di un mezzo lineare ed isotropo;
2. se il volume V si estende fino all'infinito, i campi definiti al suo interno rispettano le condizioni di radiazione di Sommerfeld. Se invece V è un volume finito, racchiuso dalla superficie S , su questa superficie vale la seguente condizione al contorno:

$$\mathbf{E}_{tan,i} = Z \mathbf{H}_{tan,i} \times \hat{n} \quad , \quad i = 1, 2 \quad ,$$

dove $\hat{n}$ è la normale alla superficie S , mentre il parametro Z , che ha le dimensioni di Ohm, prende il nome di *impedenza di parete*. Il significato fisico di questa grandezza può apparire al momento oscuro,

e verrà chiarito nel seguito. Per il momento, basti ricordare che al fine di dimostrare il teorema in oggetto nel caso di un problema interno, è necessario che il bordo del volume di definizione “imponga” la relazione che deve esistere tra il campo magnetico ed il campo elettrico, indipendentemente da come questi sono generati.

Il teorema afferma che, quando sono verificate queste ipotesi, la *reazione* del campo $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ sulle sorgenti $\mathbf{J}_{i2}, \mathbf{M}_{i2}$ coincide con la reazione del campo $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ sulle sorgenti $\mathbf{J}_{i1}, \mathbf{M}_{i1}$. Matematicamente:

$$\int_V \left(\frac{\mathbf{J}_{i2} \cdot \mathbf{E}_1}{2} - \frac{\mathbf{M}_{i2} \cdot \mathbf{H}_1}{2} \right) dV = \int_V \left(\frac{\mathbf{J}_{i1} \cdot \mathbf{E}_2}{2} - \frac{\mathbf{M}_{i1} \cdot \mathbf{H}_2}{2} \right) dV \quad (5.17)$$

Dimostrazione

Si moltiplichino scalarmente l'equazione (5.13) per $\mathbf{H}_2$, la (5.14) per $\mathbf{E}_2$, la (5.15) per $\mathbf{H}_1$ e la (5.16) per $\mathbf{E}_1$. In seguito si esegua la somma algebrica membro a membro delle quattro equazioni così ottenute, prendendo con segno positivo quelle che contengono i rotori del campo $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$, e con il segno negativo quelle che contengono i rotori di $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \nabla \times \mathbf{H}_2 = \\ & = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_{i1} - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{i2} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_{i1} + \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_{i2} \quad , \end{aligned} \quad (5.18)$$

nella quale il primo membro coincide con $\nabla \cdot (\mathbf{H}_1 \times \mathbf{E}_2 - \mathbf{H}_2 \times \mathbf{E}_1)$. La (5.18) esprime una uguaglianza tra funzioni di punto, ed essa rimane quindi valida anche quando si calcola l'integrale esteso a V di entrambi i membri. Applicando il teorema di Gauss alla sinistra dell'uguale si ottiene allora

$$\begin{aligned} \oint_S \left(\frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2}{2} - \frac{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1}{2} \right) \cdot \hat{n} dS &= \int_V \left(\frac{\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}_{i1}}{2} - \frac{\mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{M}_{i1}}{2} \right) dV + \\ &- \int_V \left(\frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}_{i2}}{2} - \frac{\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{M}_{i2}}{2} \right) dV \quad . \end{aligned} \quad (5.19)$$

Si faccia ora uso della regola della permutazione ciclica del prodotto misto, applicandola ai termini al primo membro della (5.19): in virtù dell'ipotesi 2. sopra esposta è allora immediato verificare che tale membro si annulla, ed il teorema è dimostrato.

5.4.1 Osservazioni e corollari

1. Da un punto di vista pratico, il significato del teorema è il seguente: si supponga che, in un determinato momento, una sorgente $\mathbf{J}_{i1}$ stia irradiando un campo $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ in una regione dello spazio dove una diversa sorgente $\mathbf{J}_{i2}$ sta irradiando il campo $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. Il teorema afferma che i valori che assume il campo $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ *non possono essere indipendenti* da quelli assunti dal campo $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$, perchè deve valere la relazione (5.17). Il teorema rappresenta una versione generalizzata di un analogo teorema visto nei corsi di elettrotecnica. Anche in quella sede si usa infatti definire il concetto di reciprocità che, in sostanza, afferma quanto segue: quando in una rete elettrica vengono scambiati tra di loro un amperometro ed un generatore di tensione (o, dualmente, un voltmetro ed un generatore di corrente), la lettura dell'amperometro non cambia.
2. Si immagini di applicare il teorema ad una regione dello spazio finita, *priva di sorgenti*, e contornata da una superficie chiusa S *arbitraria*, ovvero non necessariamente tale che su di essa valga l'ipotesi 2. sopra esposta. In questo caso il teorema fornisce ancora una nozione di reciprocità, che si esprime ora nella forma di una uguaglianza tra integrali di superficie. Infatti, dalla (5.19) discende immediatamente

$$\oint_S \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2}{2} \cdot \hat{n} dS = \oint_S \frac{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1}{2} \cdot \hat{n} dS \quad .$$

3. Si è dimostrato il teorema supponendo che il campo sia definito in una regione dello spazio *isotropa*, ovvero caratterizzata da costanti ϵ , μ e γ scalari. Tale ipotesi è tuttavia solo sufficiente, ma non necessaria nel senso che non è detto che ogni mezzo anisotropo violi la reciprocità. In particolare, si dimostra che il teorema vale ancora in presenza di anisotropie a patto che quando i parametri costitutivi vengono descritti in un sistema di riferimento ortogonale reale, i rispettivi tensori si presentino nella forma di matrici diagonali. Mezzi con queste caratteristiche sono, ad esempio, i mezzi *birifrangenti*, nei quali $\mathbf{D}$ ed $\mathbf{E}$ sono tra loro allineati, ma il valore numerico della costante che lega i due campi dipende dalla direzione di allineamento. Per contro, una classe di mezzi nei quale *non vale* la reciprocità è costituita dall'insieme dei *mezzi girotropici* cui appartengono, ad esempio, le ferriti che proprio in virtù

di questa loro caratteristica trovano impiego nella realizzazione di particolari dispositivi *non reciproci* quali ad esempio i rotatori di Faraday e gli isolatori.

4. Occorre prestare attenzione al fatto che la reazione non va confusa con una potenza complessa: infatti, nella reazione vi è il prodotto scalare tra un campo elettrico ed una densità di corrente, non tra il campo ed *il complesso coniugato* della densità di corrente. È facile verificare che se si tenta di dimostrare il teorema con le potenze invece che con le reciprocità, si ottiene il risultato (5.17) solo se $\gamma \equiv 0$. Sarebbe però sbagliato ritenere che il teorema valga allora se il mezzo è privo di perdite: si tratta in realtà di un teorema non fisico, perchè esso varrebbe *solo* in questo caso, ovvero rappresenterebbe un risultato che *non può essere ottenuto con continuità* analizzando il comportamento di una successione di casi relativi a mezzi con perdite via via più piccole, cioè con $\gamma \rightarrow 0$.

5.5 Teorema di dualità

Quando si sono dimostrate le condizioni di continuità per i campi alle superfici di discontinuità tra due mezzi materiali si sono introdotte delle grandezze fittizie, le densità di carica e di corrente magnetica, sottolineando come queste venissero definite al solo scopo di rendere le equazioni di Maxwell simmetriche sia dal punto di vista delle incognite che in esse compaiono, sia da quello delle sorgenti. Con l'introduzione di questi termini le equazioni risultano infatti

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{M}_i \quad , \quad (5.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C\mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad . \quad (5.21)$$

Il teorema che si suole indicare con il nome di *teorema di dualità* è, in realtà, la seguente osservazione. Si supponga che $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ sia una soluzione delle equazioni (5.20,5.21). È immediato verificare che se si eseguono le seguenti trasformazioni formali

$$\mathbf{E}_d = -\mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{H}_d = \mathbf{E} \quad , \quad \mathbf{J}_{di} = -\mathbf{M}_i \quad , \quad \mathbf{M}_{di} = \mathbf{J}_i \quad ,$$

$$\epsilon_{dC} = \mu \quad , \quad , \mu_d = \epsilon_C \quad ,$$

il nuovo campo $\{\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d\}$, che prende il nome di *campo duale*, è ancora una soluzione delle equazioni di Maxwell, anche se queste si riferiscono ad un mezzo diverso da quello originale, e con sorgenti diverse (duali) rispetto a quelle originarie.

Il teorema può al momento apparire come una pura curiosità formale, senza alcuna utilità pratica. Nell'affrontare la teoria delle antenne si vedrà invece che esso consente la rapida determinazione dell'andamento del campo elettromagnetico in un caso di notevole interesse. Infatti, quando si intraprenderà lo studio delle antenne, uno dei primi calcoli che si impareranno a fare sarà quello relativo al campo irradiato da un *dipolo elettrico*. In seguito, si studierà poi *l'antenna a spira di corrente* mostrando che la spira è elettricamente equivalente ad un *dipolo magnetico* di opportuna orientazione. Sulla scorta dei risultati del teorema appena esposto, il calcolo del campo irradiato dalla spira sarà allora immediato: per dualità basterà infatti considerare il campo irradiato dal dipolo *elettrico* e scambiare formalmente tra loro le espressioni del campo elettrico e di quello magnetico.

5.6 Teorema di scomposizione

Questo teorema, che viene qui solo enunciato e non dimostrato, si applica al caso della propagazione in regioni dello spazio lineari, omogenee, isotrope e prive di sorgenti.

Si supponga dunque che in una regione con queste caratteristiche sia presente un campo elettromagnetico $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$: il teorema afferma che, scelta ad arbitrio una direzione dello spazio individuata dal versore $\hat{a}$, è sempre e comunque possibile scomporre il campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ nella forma

$$\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} = \{\mathbf{E}_L, \mathbf{H}_L\} + \{\mathbf{E}_T, \mathbf{H}_T\} \quad ,$$

dove $\{\mathbf{E}_L, \mathbf{H}_L\}$ ed $\{\mathbf{E}_T, \mathbf{H}_T\}$ sono soluzioni delle equazioni di Maxwell tali che

$$\mathbf{E}_L \cdot \hat{a} \equiv 0 \quad , \quad \mathbf{H}_T \cdot \hat{a} \equiv 0 \quad .$$

ed esse vengono rispettivamente indicate con i nomi di

$$\begin{array}{ll} \{\mathbf{E}_L, \mathbf{H}_L\} & : \quad \text{campo trasverso elettrico (TE),} \\ \{\mathbf{E}_T, \mathbf{H}_T\} & : \quad \text{campo trasverso magnetico (TM).} \end{array}$$

Il teorema afferma inoltre che i campi TE e TM possono essere ottenuti mediante opportune operazioni di calcolo vettoriale a partire da

due soluzioni indipendenti, dette *prepotenziali*, dell'equazione di Helmholtz scalare omogenea:

$$\nabla^2 \mathcal{L} - \sigma^2 \mathcal{L} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \mathcal{T} - \sigma^2 \mathcal{T} = 0 \quad .$$

Da un punto di vista fisico il significato del teorema è il seguente: quando la propagazione ha luogo in un mezzo omogeneo, isotropo, privo di sorgenti e lineare, sono sufficienti due funzioni scalari per determinare completamente l'intero campo elettromagnetico. A priori, questo risultato non è ovvio, dal momento che il numero di incognite del problema di Maxwell è pari a sei, e si sta invece qui affermando che esso può essere ridotto sino a due e che le rimanenti quattro possono poi essere ricavate a partire da queste due.

Si noti a tal proposito che, quando si era illustrata la procedura di risoluzione delle equazioni di Maxwell basata sul formalismo del potenziale vettore magnetico, e si era visto che, con la scelta di Lorentz, l'equazione da risolvere si scriveva nella forma

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_i \quad ,$$

ed essa conteneva dunque tre incognite scalari. È allora ragionevole chiedersi come sia stato possibile diminuire ulteriormente il numero di incognite, fino a farle diventare soltanto due. La risposta a questo quesito risiede nel fatto che nel problema che si sta esaminando ora vale per ipotesi $\mathbf{J}_i \equiv \rho \equiv 0$ e ciò implica che

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad .$$

Si può dimostrare che la riduzione del numero delle incognite discende da questa condizione.

5.7 Teorema delle immagini

Si consideri un mezzo omogeneo ed isotropo, sede di un campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ sostenuto dall'insieme di sorgenti $\{\mathbf{J}_i, \mathbf{M}_i\}$. Si introduca una sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{x, y, z\}$ e si esegua la trasformazione di coordinate che rappresenta la riflessione dal piano $z = 0$, introducendo le nuove variabili

$$x' = x \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = -z \quad .$$

È immediato verificare che nel nuovo sistema di coordinate il campo

$$\{\mathbf{E}', \mathbf{H}'\} : \begin{cases} E_x' = -E_x \\ E_y' = -E_y \\ E_z' = E_z \end{cases}, \quad \begin{cases} H_x' = H_x \\ H_y' = H_y \\ H_z' = -H_z \end{cases},$$

è soluzione delle equazioni di Maxwell con sorgenti

$$\{\mathbf{J}_i', \mathbf{M}_i'\} : \begin{cases} J_{ix}' = -J_{ix} \\ J_{iy}' = -J_{iy} \\ J_{iz}' = J_{iz} \end{cases}, \quad \begin{cases} M_{ix}' = M_{ix} \\ M_{iy}' = M_{iy} \\ M_{iz}' = -M_{iz} \end{cases}.$$

La dimostrazione è banale: è sufficiente scrivere per esteso le equazioni di Maxwell nel sistema di coordinate cartesiane, e notare che esse risultano invarianti rispetto alla riflessione dal piano z purchè i campi e le sorgenti siano modificati come nelle ipotesi.

5.7.1 Osservazioni e corollari

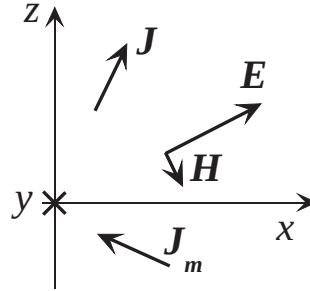


Figura 5.8: Disposizione di campi e densità di corrente per l'illustrazione del teorema delle immagini.

Il teorema illustra il fatto che se il campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ è del tipo di quello indicato in Fig.(5.8), la nuova soluzione è l'immagine riflessa dal piano $z = 0$ secondo le relazioni sopra illustrate, ed essa risulta come in Fig.(5.9).

Se ora si considera il campo $\{\mathbf{E}_{tot}, \mathbf{H}_{tot}\} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\} + \{\mathbf{E}', \mathbf{H}'\}$ si ha, sul piano $z = 0$

$$E_{tot,x} = 0 \quad , \quad E_{tot,y} = 0 \quad , \quad H_{tot,z} = 0 \quad ,$$

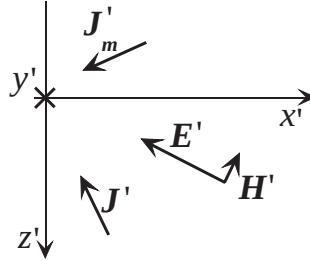


Figura 5.9: Immagine riflessa del campo di Fig.(5.8).

che sono le condizioni cui deve soddisfare un campo per essere compatibile con la presenza di un conduttore elettrico perfetto che metallizzi il piano $z = 0$. Questa osservazione fornisce un risultato che può essere utilizzato per il calcolo del campo prodotto da sorgenti poste in un semispazio omogeneo limitato da un piano conduttore (si veda la Fig.(5.10)).

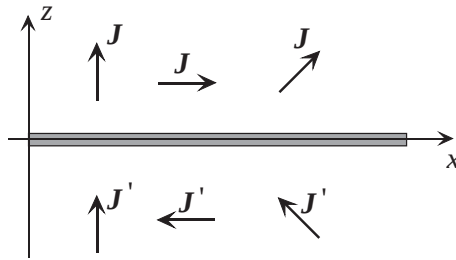


Figura 5.10: Insieme delle sorgenti (vere più fittizie) per un problema di propagazione nel quale le sorgenti vere del campo siano in prossimità di un conduttore elettrico perfetto.

Esso è il campo $\{\mathbf{E}_{tot}, \mathbf{H}_{tot}\}$: infatti, questo campo è soluzione delle equazioni di Maxwell nel semispazio $z > 0$ in quanto costruito come somma di due campi che sono entrambi soluzioni accettabili. Inoltre, poichè esso soddisfa le condizioni al contorno sul conduttore metallico, è, per unicità, l'unica soluzione ammissibile del problema di Maxwell in esame.

Come già nel caso del teorema di dualità, anche il risultato appena esposto trova un impiego di rilievo nell'ambito della teoria delle antenne, in quanto esso consente di calcolare in modo semplice il campo irradiato

da quelle antenne che lavorano a bassa frequenza in prossimità del suolo terrestre. Infatti, per ragioni che risulteranno chiare nel seguito, si vedrà che, *a bassa frequenza*, il suolo tende a diventare elettricamente equivalente ad un conduttore metallico, modificando in tal modo le proprietà di radiazione di una antenna. Queste potranno tuttavia essere calcolate con semplicità immaginando in un primo momento che l'antenna non si trovi in prossimità del suolo, per reintrodurre poi l'effetto del suolo utilizzando i risultati qui esposti.

5.8 Le relazioni di Kramers–Krönig

Nei capitoli precedenti si è menzionato il fatto che in un mezzo temporalmente dispersivo i parametri costitutivi sono complessi, ovvero hanno sia parte reale sia parte immaginaria non identicamente nulle. Le relazioni di Kramers–Krönig, che sono l'oggetto del presente paragrafo, permettono di stabilire che le parti reale ed immaginaria non sono tra di loro indipendenti, ma risultano invece legate attraverso delle formule integrali che verranno ora dimostrate. In particolare, si tratterà in esteso il caso di un mezzo *non conduttore* nel quale vi sia dispersione nella costante dielettrica, essenzialmente perchè questo caso è quello di maggiore interesse pratico. L'estensione ai casi di mezzi conduttori o di mezzi con permeabilità magnetica dispersiva sono lasciati al lettore come esercizi.

Per dimostrare le relazioni di Kramers–Krönig è innanzi tutto opportuno richiamare il fatto che in un mezzo con dispersione del dielettrico, cioè tale che $\epsilon = \epsilon(\omega)$, i campi $\mathbf{d}(\mathbf{r}, t)$ ed $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ risultano legati da una relazione *non locale* rispetto alla variabile temporale. Tralasciando la dipendenza dalle variabili spaziali, vale infatti

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathbf{D}(\omega) e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) e^{-i\omega t} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \epsilon(\omega) e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dT \mathbf{e}(T) e^{i\omega T} \quad . \end{aligned}$$

Posto $T = t - \tau$, vale allora anche

$$\mathbf{d}(t) = \epsilon_0 \mathbf{e}(t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau) \mathbf{e}(t - \tau) d\tau \quad ,$$

dove¹

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\epsilon_r(\omega) - 1] e^{-i\omega\tau} d\omega \quad .$$

Vi è ora una importante annotazione da fare: per effetto del *principio di causalità*, ogni andamento fisicamente accettabile di $\epsilon_r(\omega)$ deve essere tale che esso fornisca

$$G(\tau) \equiv 0 \quad , \quad \text{per } \tau < 0 \quad ,$$

di modo che

$$\mathbf{d}(t) = \epsilon_0 \mathbf{e}(t) + \epsilon_0 \int_0^{+\infty} G(\tau) \mathbf{e}(t - \tau) d\tau \quad ,$$

e quindi anche

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \int_0^{+\infty} G(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad . \quad (5.22)$$

Quest'ultima relazione che, si sottolinea, discende *esclusivamente dal principio di causalità* ed è quindi di carattere estremamente generale, è una relazione fondamentale perchè, come si vedrà nel prossimo paragrafo, essa conferisce ad $\epsilon_r(\omega)$ delle importanti proprietà matematiche.

5.8.1 Proprietà di $\epsilon_r(\omega)$

1. Poichè $\mathbf{d}, \mathbf{e} \in \mathbb{R}$, segue $G(\tau) \in \mathbb{R}$. È allora immediato dimostrare che

$$\epsilon(-\omega) \equiv \epsilon^*(\omega) \quad . \quad (5.23)$$

Dunque, la parte reale di ϵ è una funzione pari della frequenza, mentre la parte immaginaria è una funzione dispari. Si noti che questo risultato è in accordo con quanto era stato affermato nel paragrafo 5.1.2 quando si era discusso del teorema di Poynting e si era osservato che, in base a sole considerazioni di tipo energetico, era necessario che la parte immaginaria di $\epsilon(\omega)$ sia, per l'appunto, una funzione dispari della frequenza.

¹Non si confonda $\epsilon_r(\omega)$ con la parte reale di $\epsilon(\omega)$. La $\epsilon_r(\omega)$ è la permittività dielettrica *relativa*, definita come il rapporto tra la permittività assoluta e la permittività del vuoto. Per evitare confusione nella notazione, quando si vorrà indicare la parte reale o la parte immaginaria della permittività si userà in questo paragrafo la notazione $\text{Re}\{\epsilon_r\}$ e $\text{Im}\{\epsilon_r\}$.

Una relazione più generale della (5.23) può essere derivata se si immagina di prolungare la $\epsilon_r(\omega)$ al corpo complesso, cioè se si immagina che $\epsilon_r(\omega)$ sia una funzione della variabile complessa $\omega = \text{Re}\{\omega\} + i\text{Im}\{\omega\}$. Si ottiene in tal caso

$$\epsilon(-\omega) \equiv \epsilon^*(\omega^*) \quad .$$

2. Se il mezzo è non dispersivo, vale $G(\tau) = \delta(\tau)$ e quindi, dalla (5.22), $\epsilon_r(\omega) \in \mathbb{R}$. Anche in questo caso, è utile richiamare un fatto che era stato osservato nel corso dell'illustrazione del teorema di Poynting: quando nei parametri costitutivi compare la parte immaginaria, questa è la “traccia” della dispersione.
3. Se, come accade in un mezzo dielettrico, $G(\tau) \rightarrow 0$ per $\tau \rightarrow \infty$ e $|G(\tau)| < +\infty, \forall \tau$, la funzione $\epsilon_r(\omega)$ risulta *analitica* nel semipiano $\text{Im}\{\omega\} > 0$.
4. Dal teorema del valore finale, si ha

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon_r(\omega) - 1 &= \left(\frac{i}{\omega}\right) G(\tau = 0^+) + \left(\frac{i}{\omega}\right)^2 \frac{dG}{d\tau} \Big|_{\tau=0^+} + \\ &+ \left(\frac{i}{\omega}\right)^3 \frac{d^2 G}{d\tau^2} \Big|_{\tau=0^+} + \dots, \end{aligned}$$

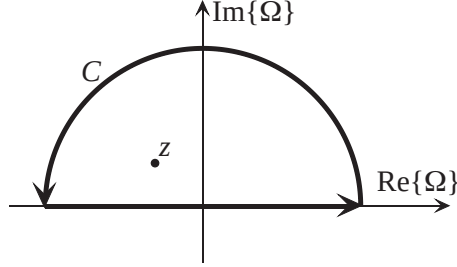
e poichè non è fisicamente sensato immaginare che sia $G(\tau = 0^-) = 0$ e $G(\tau = 0^+) \neq 0$, il primo termine alla destra dell'uguale è in realtà nullo; ne segue che $\epsilon_r(\omega)$ ha il seguente comportamento asintotico:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Re}\{\epsilon_r(\omega) - 1\} \sim \frac{1}{\omega^2} \quad , \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{Im}\{\epsilon_r(\omega)\} \sim \frac{1}{\omega^3} \quad .$$

5.8.2 Derivazione delle relazioni

Ora che si sono stabilite le proprietà della costante dielettrica, si può passare alla derivazione vera e propria delle relazioni di Kramers-Krönig. A tal fine si può notare che, essendo $\epsilon_r(\omega)$ analitica in $\text{Im}\{\omega\} > 0$, si può applicare il teorema di Cauchy e scrivere

$$\epsilon_r(z) - 1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\epsilon_r(\Omega) - 1}{\Omega - z} d\Omega \quad ,$$

Figura 5.11: Percorso di integrazione C .

dove C è un percorso che si richiude nel semipiano superiore del piano complesso, come illustrato in Fig(5.11).

In particolare, se il teorema di Cauchy viene applicato ad un punto ω dell'asse reale, si ha

$$\begin{aligned}
 2\pi i [\epsilon_r(\omega) - 1] &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_r(\Omega) - 1}{\Omega - \omega} d\Omega + \\
 &+ \int_{C_\lambda} \frac{\epsilon_r(\Omega) - 1}{\Omega - \omega} d\Omega + \int_{C_{ext}} \frac{\epsilon_r(\Omega) - 1}{\Omega - \omega} d\Omega \quad ,
 \end{aligned}$$

dove si è indicato con il simbolo $v.p.$ il valor principale dell'integrale, ed i contorni C_{ext} e C_λ sono quelli illustrati in Fig.(5.12).

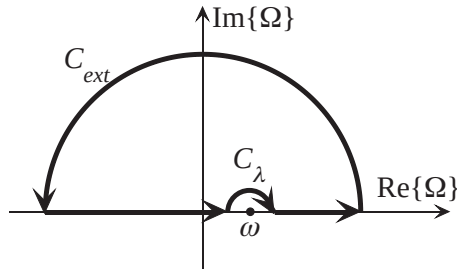


Figura 5.12: Cammino di integrazione per il caso di un punto disposto sull'asse reale.

Si noti che l'integrale sul contorno C_{ext} tende a zero quando il contorno diverge all'infinito in virtù del comportamento asintotico di ϵ_r posto in evidenza in precedenza. Per quanto concerne l'integrale sul contorno C_λ , invece, si può procedere come segue: si ponga $\Omega = \omega + \lambda e^{i\theta}$

con $-\pi \leq \theta \leq 0$. Si ha allora $d\Omega = i\theta\lambda e^{i\theta}d\theta = i\theta(\Omega - \omega)d\theta$, e l'integrale risulta:

$$\int_{C_\lambda} \frac{\epsilon_r(\Omega) - 1}{\Omega - \omega} d\Omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\pi}^0 d\theta i\theta [\epsilon_r(\Omega) - 1] = i\pi[\epsilon_r(\Omega) - 1] \quad .$$

Scritto $\epsilon_r(\omega) = \text{Re}\{\epsilon_r(\omega)\} - i \text{Im}\{\epsilon_r(\omega)\}$, si hanno così infine le *relazioni di Kramers-Krönig*, che si scrivono nella forma

$$\begin{aligned} \text{Re}\{\epsilon(\omega)\} &= 1 - \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}\{\epsilon(\omega)\}}{\Omega - \omega} d\Omega \quad , \\ \text{Im}\{\epsilon(\omega)\} &= +\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}\{\epsilon(\omega)\} - 1}{\Omega - \omega} d\Omega \quad . \end{aligned}$$

Capitolo 6

Linee di trasmissione

Nei capitoli precedenti si è visto come si derivano le equazioni di Maxwell, e se ne sono indagate alcune caratteristiche generali. A partire da questo capitolo si comincia invece lo studio delle applicazioni delle equazioni a casi di utilità pratica ed in particolare si analizzano le proprietà dei campi guidati e di quelli irradiati e le caratteristiche ed i criteri di progetto dei dispositivi e dei circuiti che trovano impiego nel campo delle microonde e in quello dell'ottica.

La prima applicazione che viene studiata è quella delle *linee di trasmissione*: si tratta di strutture che guidano la radiazione elettromagnetica ed il cui scopo, come è facile intuire, è quello di consentire il trasferimento di energia elettrica da un apparato generatore ad uno ricevente. Le strutture devono essere disegnate in modo che il trasferimento di energia possa avvenire con la minima dispersione possibile, ed a tal fine è necessario che esse siano in grado di realizzare il confinamento del campo elettromagnetico all'interno di una regione dello spazio piccola ed orientata nella direzione desiderata. In altre parole, ciò che bisogna evitare in questo contesto è che le linee si comportino come delle *antenne* e che, come tali, esse perdano potenza utile al collegamento tra trasmettitore e ricevitore per effetto di irraggiamento verso altre direzioni dello spazio. Si noti a tal proposito che, in virtù della reciprocità che esiste tra il comportamento che una antenna presenta quando essa viene usata per la trasmissione o per la ricezione (una caratteristica della radiazione elettromagnetica che sarà studiata in dettaglio nel seguito) se una linea è in grado di interferire con altre apparecchiature irradiando verso di esse, essa ne può al contempo assorbire potenza con il risultato che il

segnale che trasporta può venire distorto.

Le strutture che garantiscono un trasferimento efficiente in accordo con queste considerazioni sono, in generale, quelle costituite da conduttori metallici, idealmente privi di perdite, tali che una delle loro dimensioni (quella longitudinale) sia molto superiore alle altre (quelle trasversali). A questi tipi di strutture appartengono, solo per menzionarne alcune, il cavo coassiale o le cosiddette *linee bifilari*, quali sono ad esempio la piattina ed il doppino usato nella telefonia.

È importante sottolineare che, da un punto di vista elettromagnetico, queste strutture hanno una caratteristica che le accomuna tra loro e che, allo stesso tempo, le differenzia da altre strutture che realizzano il trasporto di un campo elettromagnetico lungo una direzione prefissata e che sono dette *guide d'onda*. La caratteristica comune è quella di *essere costituite da due conduttori*, invece che da uno solo come accade nel caso delle guide d'onda, e la distinzione è importante perchè come si avrà modo di apprezzare nel seguito, quando una struttura guidante è costituita da due conduttori (ed anzi, più in generale, da *almeno* due conduttori), essa permette la propagazione di un campo elettromagnetico particolarmente “semplice”, il campo *trasverso elettromagnetico*. Si tratta di un campo, spesso indicato brevemente con l'acronimo di *campo TEM*, che è costituito solo da componenti trasverse rispetto alla direzione di propagazione o, in altri termini, di un campo che non presenta alcuna componente allineata lungo la direzione di propagazione.

Al momento il lettore troverà probabilmente oscuri i motivi per cui la mancanza delle componenti longitudinali possa rendere il campo particolarmente “semplice” da studiare, utile nella pratica, e possibile da riscontrare in una guida solo se questa ha più di un conduttore. La dimostrazione di queste affermazioni richiede infatti l'introduzione di alcuni concetti che non sono ancora stati discussi ed al momento ci si limita allora solo a menzionare il fatto che, da un punto di vista puramente matematico, la mancanza delle componenti longitudinali del campo consente di ridurre le equazioni di Maxwell alla forma di un problema scalare.

Da un punto di vista più fisico, invece, ciò che si riscontra è il fatto che se il campo che si propaga *non* è un campo TEM, esso risulta inevitabilmente soggetto a distorsioni che tendono ad alterarlo. Per contro, queste distorsioni non sono avvertite da una onda TEM che, per questa ragione, risulta preferibile se si vuole fare in modo che il segnale rilevato

dal ricevitore di un qualsiasi collegamento sia il più possibile simile a quello inviato dal trasmettitore.

Chiarite queste considerazioni di carattere generale, si passa ora ad illustrare in modo formale lo studio della propagazione in una linea di trasmissione e, per evitare una esposizione eccessivamente astratta, si analizza in dettaglio il caso della linea bifilare. È tuttavia bene tenere a mente che i risultati che si otterranno sono di validità più generale, e si applicano in realtà a tutte le strutture guidanti con le caratteristiche geometriche sopra esposte.

6.1 Le equazioni del telegrafo

Si consideri dunque la linea rappresentata in Fig.(6.1), e si immagini che i conduttori metallici che la costituiscono siano conduttori ideali disposti rettilineamente lungo un asse dello spazio individuato dal versore $\hat{x}$. Inoltre, si supponga che il dielettrico che circonda i conduttori sia lineare, non dispersivo nello spazio, ed omogeneo nel tempo, e che il campo che si propaga sia un campo TEM.

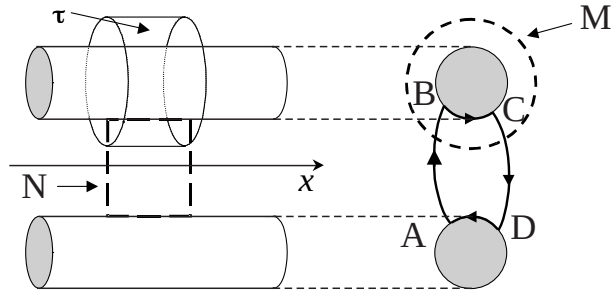


Figura 6.1: Schema di una linea di trasmissione bifilare.

Per definizione, la componente longitudinale del campo di induzione magnetica è allora nulla ($b_x \equiv 0$), e se si calcola la circuitazione del campo elettrico su un circuito chiuso disposto in un piano ortogonale a $\hat{x}$ (ad esempio il percorso ABCD di Fig.(6.1)) si ottiene

$$\oint_{ABCD} \mathbf{e} \cdot d\ell = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S(ABCD)} \mathbf{b} \cdot \hat{n}_S dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S(ABCD)} b_x dS = 0 \quad ,$$

dove si è indicato con $S(ABCD)$ la superficie racchiusa dalla curva ABCD, e con $\hat{n}_S$ il versore ad essa normale. Tenendo conto del fatto che i tratti BC e DA dell'integrale sono tratti che si sviluppano su una curva tangente ad un conduttore elettrico perfetto, si ha dunque anche

$$\int_A^B \mathbf{e} \cdot d\ell = \int_D^C \mathbf{e} \cdot d\ell \equiv v(x, t) \quad .$$

La quantità indicata come $v(x, t)$ ha le dimensioni di una tensione elettrica che risulta essere funzione della coordinata x lungo la linea e del tempo, ma non del particolare cammino di integrazione che si sceglie per connettere una qualsiasi coppia di punti disposti sui due conduttori perfetti alla stessa ascissa x .

In maniera analoga, poichè per ipotesi di campo TEM si ha anche $d_x \equiv 0$, la circuitazione del campo magnetico lungo una curva chiusa M che abbracci uno solo dei conduttori e che giaccia interamente in un piano ortogonale a $\hat{x}$ dà

$$\oint_M \mathbf{h} \cdot d\ell = \int_{S(M)} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \right) \cdot \hat{n}_S dS \equiv i(x, t) \quad ,$$

dove $i(x, t)$ ha le dimensioni di una corrente elettrica, ed essa rappresenta il flusso di densità di corrente lineare che fluisce sulla superficie del conduttore. Anch'essa risulta una grandezza dipendente solo dalla coordinata lungo la linea, e dal tempo.

Si sono così definite, in modo univoco, la corrente e la tensione lungo la linea e lo studio della propagazione può allora essere notevolmente semplificato se l'analisi viene svolta con riferimento a queste grandezze invece che ai campi elettromagnetici ad esse associati. Il vantaggio è duplice: come accennato in precedenza, dal punto di vista matematico si tratta infatti di calcolare l'evoluzione di grandezze scalari che si sviluppano lungo una sola dimensione dello spazio; dal punto di vista pratico, invece, vi è la possibilità di misurare le grandezze oggetto dell'analisi teorica (tramite amperometri e voltmetri) guadagnando così la possibilità di verificare la rispondenza del modello teorico con l'evidenza sperimentale.

Le equazioni per l'evoluzione della tensione e della corrente lungo la linea possono essere ricavate come segue: si calcoli innanzi tutto la circuitazione del campo elettrico lungo la linea chiusa N di Fig.(6.1) nella quale, per costruzione, i tratti verticali sono disposti ortogonalmente alle

linee. Si ottiene:

$$\oint_N \mathbf{e} \cdot d\ell = v(t, x_2) - v(t, x_1) = -\frac{\partial \Phi(\mathbf{b})}{\partial t} \quad ,$$

dove $\Phi(\mathbf{b})$ è il flusso di induzione magnetica concatenato dal circuito N . Posto ora $x_2 = x_1 + \Delta x$ e $\phi(\mathbf{b})$ il flusso di induzione per unità di lunghezza, si ha, al tendere di Δx a zero,

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = -\frac{\partial \phi(\mathbf{b})}{\partial t} \quad . \quad (6.1)$$

Successivamente, si integri l'equazione di continuità della corrente nel volume τ di Fig.(6.1). Si ha in questo caso:

$$\int_{\tau} \left[\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\tau = 0 \quad ,$$

da cui anche

$$i(x_2, t) - i(x_1, t) = -\frac{\partial Q}{\partial t} \quad ,$$

dove Q è la carica totale presente tra le ascisse x_1 e x_2 . Posto ancora $x_2 = x_1 + \Delta x$ ed indicata con q la carica per unità di lunghezza si ha allora, al tendere di Δx a zero,

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad . \quad (6.2)$$

Le (6.1,6.2) sono le equazioni che descrivono l'evoluzione della tensione e della corrente lungo la linea, ed esse possono essere ulteriormente semplificate utilizzando le relazioni costitutive del sistema in oggetto, ovvero le relazioni che legano tra loro i flussi di induzione elettrica o magnetica alla tensione o alla corrente. Nel caso di mezzi lineari e non dispersivi, queste relazioni si scrivono come segue:

$$q = c v \quad , \quad \phi = \ell i \quad , \quad (6.3)$$

dove c è la capacità per unità di lunghezza, misurata in Farad/m [F/m], ed ℓ l'induttanza per unità di lunghezza, misurata in Henry/m [H/m]. Inserendo le (6.3) nelle (6.1,6.2) si ottiene allora la seguente forma alternativa delle equazioni per la tensione e per la corrente

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -\ell \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad , \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -c \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad . \quad (6.5)$$

Queste equazioni sono usualmente indicate con il nome di *equazioni del telegrafo*.

6.1.1 Le equazioni in regime armonico

Le equazioni (6.4,6.5) descrivono la propagazione di onde di tensione e corrente aventi una generica dipendenza dal tempo. In molti casi, ed in maniera simile a quanto si era fatto con le equazioni di Maxwell, risulta tuttavia utile determinare le caratteristiche di propagazione di onde con andamento nel tempo di tipo sinusoidale. A tal fine, si possono associare alle grandezze nel dominio del tempo i corrispondenti fasori complessi che, quando scritti secondo la rappresentazione di Steinmetz, prendono la forma

$$V(x) \quad \Leftrightarrow \quad v(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ V(x) e^{i\omega t} \right\} \quad ,$$

$$I(x) \quad \Leftrightarrow \quad i(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ I(x) e^{i\omega t} \right\} \quad .$$

Come già nel caso delle equazioni di Maxwell, si sono indicati con lettere maiuscole i fasori complessi, riservando le minuscole alle grandezze definite nel dominio del tempo. Inoltre, si è tralasciata la dipendenza dalla frequenza ω per non appesantire eccessivamente la notazione. Le equazioni del telegrafo, scritte per i fasori complessi, sono allora

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -ZI(x) \quad , \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -YV(x) \quad , \quad (6.7)$$

dove l'impedenza Z e l'ammettenza Y risultano rispettivamente $Z = i\omega \ell$ e $Y = i\omega c$.

6.1.2 Circuito equivalente a costanti concentrate

È immediato trovare una interpretazione circuitale delle equazioni (6.6) e (6.7). Si immagini infatti di suddividere la linea di trasmissione in tanti tratti infinitesimi di lunghezza Δx , ognuno dei quali elettricamente equivalente ad un circuito a quattro porte come quello illustrato in Fig(6.2). Le quantità indicate con $Z \Delta x$ e $Y \Delta x$ rappresentano rispettivamente l'impedenza e l'ammettenza che si avvertono nell'attraversare

il tratto di linea di lunghezza Δx , cioè Z e Y hanno le dimensioni di una impedenza e di una ammettenza per unità di lunghezza.

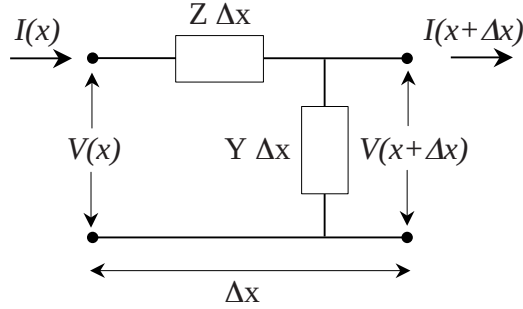


Figura 6.2: Circuito equivalente a costanti concentrate.

Applicando i principi di Kirchhoff alle maglie ed ai nodi del circuito in figura si ottengono le seguenti relazioni tra le tensioni e le correnti all'ingresso e all'uscita del bipolo:

$$V(x) = [Z \Delta x] I(x) + V(x + \Delta x) \quad ,$$

$$I(x) = [Y \Delta x] V(x + \Delta x) + I(x + \Delta x) \quad ,$$

e poichè per ipotesi Δx è una quantità infinitesima, le stesse espressioni valgono anche se la tensione e la corrente vengono scritte mediante una serie di Taylor arrestata al primo termine:

$$V(x + \Delta x) = V(x) + \frac{dV}{dx} \Delta x \quad ,$$

$$I(x + \Delta x) = I(x) + \frac{dI}{dx} \Delta x \quad .$$

Si ottiene così

$$V(x) = [Z \Delta x] I(x) + V(x) + \frac{dV}{dx} \Delta x \quad ,$$

$$I(x) = [Y \Delta x] \left\{ V(x) + \frac{dV}{dx} \Delta x \right\} + I(x) + \frac{dI}{dx} \Delta x \quad .$$

Semplificando le equazioni in modo da trascurare i termini infinitesimi che in esse ancora compaiono, ed identificando la Z con l'impedenza per unità di lunghezza offerta alla frequenza ω da un induttore con induttanza (per unità di lunghezza) ℓ , e l'ammettenza Y con l'ammettenza di un condensatore con capacità (per unità di lunghezza) c , si ritrovano infine così le (6.6,6.7).

Lo studente che affronti per la prima volta questi concetti può a questo punto domandarsi per quale ragione una coppia di conduttori metallici vada pensata come una successione di circuiti infinitesimi, ognuno dei quali contenente una impedenza serie ed una ammettenza parallelo, quando invece nello studio delle reti proposto nei corsi elementari di elettrotecnica essi vengono sempre considerati alla stregua di cortocircuiti ideali.

La spiegazione di questa apparente diversità risiede nella relazione che intercorre tra le dimensioni fisiche dei circuiti oggetto di studio e la frequenza della radiazione elettromagnetica che in essi si propaga. Come si vedrà tra breve, infatti, le equazioni del telegrafo indicano che la tensione e la corrente presenti nella linea di trasmissione hanno un andamento *spaziale di tipo sinusoidale*, con un periodo che risulta inversamente proporzionale alla frequenza del campo. Se questa è sufficientemente elevata, il periodo delle onde di tensione e di corrente può allora risultare comparabile con le lunghezze dei conduttori che realizzano il circuito e, quando questo accade, non è più lecito modellare i conduttori come dei cortocircuiti nei quali la tensione e la corrente siano spazialmente costanti.

Nell'ambito delle reti studiate in elettrotecnica il problema non viene usualmente messo in rilievo semplicemente perchè le frequenze di lavoro lì considerate sono nell'ordine delle decine di Hertz e ad esse corrispondono onde di tensione e di corrente il cui periodo è di migliaia chilometri. In questo caso le dimensioni di un qualsiasi circuito sono quindi sempre e comunque molto inferiori alla lunghezza d'onda, e le variazioni di ampiezza che la tensione e la corrente presentano nei diversi punti lungo i conduttori possono essere trascurate.

Da un punto di vista più fisico, la spiegazione dei diversi approcci che sono usati alle basse ed alle altre frequenze è ugualmente semplice. Infatti, ciò che fisicamente accoppia due conduttori disposti l'uno in prossimità dell'altro è la variazione nel tempo del flusso di induzione elettrica o magnetica. Alle basse frequenze, il flusso varia "lentamente"

nel tempo e l'accoppiamento può essere trascurato. Viceversa, al crescere della frequenza, esso diventa via via più rilevante ed il suo effetto sulla propagazione non può più essere ignorato.

Va infine puntualizzata una considerazione sull'ipotesi da cui si è partiti per ricavare le equazioni, quella che riguardava il fatto che le onde che si propagano nella linea di trasmissione siano onde TEM. Da un lato, si è già avuto modo di sottolineare come questo tipo di onde possano esistere solo in linee che presentino ben determinate configurazioni geometriche, quelle costituite da più di un conduttore. Una analisi più approfondita della propagazione porta tuttavia a riconoscere che nemmeno queste strutture sono a rigore sempre compatibili con la presenza di onde TEM perchè condizione necessaria per l'esistenza delle onde TEM è che i conduttori che le costituiscono siano *strettamente privi di perdite*. Infatti, questo è l'unico modo per rendere possibile lo scorrimento di una corrente superficiale sui conduttori in presenza di una componente longitudinale di campo elettrico identicamente nulla.

Se lo studio della propagazione in una linea di trasmissione dovesse essere affrontato con rigore, esso richiederebbe dunque una notevole complicazione del formalismo e dei calcoli, cosa che ridurrebbe la facilità di comprensione dei fenomeni fisici che entrano in gioco. Per evitare ciò, si preferisce qui limitare lo studio al caso ideale di conduttori privi di perdite, e si accenna solo brevemente ad un metodo approssimato che può essere utilizzato nel caso dei conduttori non ideali. Tale metodo sfrutta ancora l'ipotesi (non vera) che le onde siano TEM, ma tiene anche conto dell'attenuazione che queste subiscono quando si propagano utilizzando una rappresentazione della linea formata da un circuito equivalente che è ancora del tipo di quello illustrato in Fig.(6.2), ma nel quale la Z è ora l'impedenza di una serie di un induttore con induttanza (per unità di lunghezza) ℓ e di un resistore con resistenza (per unità di lunghezza) r , e l'ammettenza Y è quella del parallelo tra un condensatore di capacità c e di un resistore di conduttanza g , come illustrato in Fig.(6.3). Fisicamente, i resistori r e g rappresentano rispettivamente la resistenza per unità di lunghezza offerta dal conduttore non ideale con cui è realizzata la linea, e la conduttanza per unità di lunghezza del dielettrico interposto tra i conduttori, e pensato anch'esso non ideale.

Per ciò che concerne il metodo di analisi che si usa in questo contesto, esso è di tipo perturbativo: in un primo momento si studia la propagazione come se questa avvenisse per onde TEM in assenza di

perdite, utilizzando gli strumenti di calcolo che sono l'oggetto del prossimo paragrafo. In un secondo momento, si introducono poi le perdite, valutando quale effetto esse abbiano sul campo che si è calcolato in precedenza. I dettagli del metodo sono esposti più avanti nel capitolo, precisamente nel paragrafo 6.2.1.

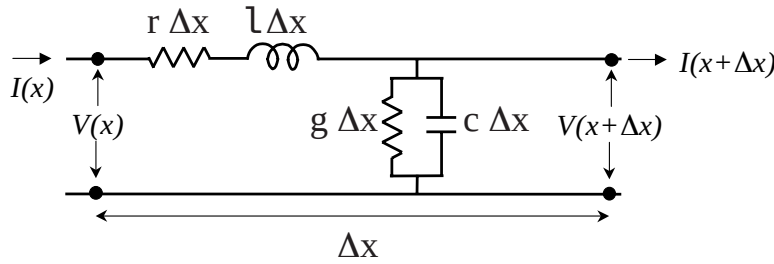


Figura 6.3: Circuito equivalente con perdite a costanti concentrate.

6.2 Le equazioni del telefono e l'impedenza caratteristica

Ora che si sono descritte le equazioni di rilievo nello studio della propagazione nelle linee, e se ne sono chiariti i limiti di applicabilità, si passa a valutarne le soluzioni. A tal fine, si considerano le equazioni del telegrafo (6.6,6.7) e le si derivano rispetto alla coordinata x , ottenendo in tal modo una nuova coppia di equazioni che vengono indicate con il nome di *equazioni del telefono* e che si scrivono nella seguente forma:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = ZY V \quad , \quad (6.8)$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} = ZY I \quad . \quad (6.9)$$

Si noti che, a differenza di quanto accade nelle equazioni del telegrafo, la tensione e la corrente sembrano ora essere grandezze tra loro indipendenti, ed in questo senso le nuove equazioni che si sono trovate sono più semplici da risolvere rispetto a quelle da cui si è partiti. È tuttavia

evidente che l'indipendenza tra la tensione e la corrente non può essere reale, se non altro per il fatto che queste grandezze erano tra loro accoppiate nelle equazioni (6.6,6.7) da cui si è partiti per ricavare le (6.8,6.9).

Matematicamente, la differenza che si riscontra nelle due coppie di equazioni è da ricercarsi in una argomentazione simile a quella usata nel Cap. 4, quando si erano studiate le prime risoluzioni elementari delle equazioni di Maxwell, ed essa discende in sostanza dal fatto che per ottenere le equazioni del telefono si è alzato l'ordine di derivazione, e si sono introdotte in questo modo delle soluzioni spurie. In altre parole, non è vero che una qualsiasi soluzione delle equazioni del telefono sia anche soluzione delle equazioni del telegrafo e se si sceglie di studiare gli andamenti della tensione e della corrente per mezzo delle equazioni del telefono è poi necessario utilizzare anche quelle del telegrafo per capire quali tra le soluzioni trovate siano accettabili e quali no.

Operativamente, si può procedere come segue: per prima cosa si risolvono le equazioni (6.8,6.9), e si ottengono i seguenti andamenti:

$$V(x) = V_+ e^{-\Gamma x} + V_- e^{\Gamma x} \quad , \quad (6.10)$$

$$I(x) = I_+ e^{-\Gamma x} + I_- e^{\Gamma x} \quad , \quad (6.11)$$

dove, nel caso più generale di propagazione in presenza di perdite, il parametro Γ assume la forma

$$\Gamma = \sqrt{ZY} = \sqrt{(r + i\omega\ell)(g + i\omega c)} \quad .$$

Nella soluzione (6.10,6.11) compaiono quattro parametri: V_+ , V_- , I_+ ed I_- . Se le onde di tensione e corrente fossero tra loro indipendenti, questi quattro parametri sarebbero arbitrari, e non vi sarebbe alcun legame tra essi.

Viceversa, il fatto che le due grandezze elettriche in oggetto siano dipendenti l'una dall'altra si traduce nel fatto che i quattro parametri sono tra di loro legati per mezzo di relazioni che possono essere individuate con l'uso delle equazioni del telegrafo. Si ottiene infatti:

$$\frac{dV}{dx} = -ZI \quad : \quad -\Gamma V_+ e^{-\Gamma x} + \Gamma V_- e^{\Gamma x} = -ZI_+ e^{-\Gamma x} - ZI_- e^{\Gamma x} \quad ,$$

$$\frac{dI}{dx} = -YV \quad : \quad -\Gamma I_+ e^{-\Gamma x} + \Gamma I_- e^{\Gamma x} = -YV_+ e^{-\Gamma x} - YV_- e^{\Gamma x} \quad .$$

Moltiplicando la prima delle equazioni per Y , la seconda per Γ , e sommando membro a membro si ha allora

$$\Gamma Y V_- e^{\Gamma x} - \Gamma^2 I_+ e^{-\Gamma x} + \Gamma^2 I_- e^{\Gamma x} = -ZY I_+ e^{-\Gamma x} - ZY I_- e^{\Gamma x} - Y \Gamma V_- e^{\Gamma x} ,$$

e poichè $\Gamma^2 = ZY$, anche

$$V_- = -I_- \frac{Z}{\Gamma} = -I_- \frac{Z}{\sqrt{ZY}} = -\sqrt{\frac{Z}{Y}} I_- .$$

In maniera analoga si trova poi anche la relazione

$$V_+ = \sqrt{\frac{Z}{Y}} I_+ .$$

Si nota dunque che, così come era ragionevole attendersi, solo due delle quattro costanti che compaiono nelle espressioni della tensione e della corrente sono costanti arbitrarie, mentre le rimanenti due possono essere ricavate da queste attraverso un nuovo parametro che si usa indicare con il nome di *impedenza caratteristica* della linea e che si scrive nella forma

$$Z_C = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{r + i\omega\ell}{g + i\omega c}} .$$

Le dimensioni fisiche dell'impedenza caratteristica sono quelle degli Ohm e, come si vede, questa grandezza dipende solo dalla frequenza del campo e dai parametri elettrici ℓ , c , r e g della linea, ovvero dalla conformazione geometrica che quest'ultima presenta e dalla natura dei conduttori e dei dielettrici con cui essa è realizzata.

Con l'introduzione dell'impedenza caratteristica gli andamenti della tensione e della corrente possono essere riscritti nella seguente forma che mette in maggior evidenza l'esistenza di due sole costanti arbitrarie:

$$V(x) = V_+ e^{-\Gamma x} + V_- e^{\Gamma x} , \quad (6.12)$$

$$I(x) = \frac{V_+}{Z_C} e^{-\Gamma x} - \frac{V_-}{Z_C} e^{\Gamma x} . \quad (6.13)$$

Si vuole ora dare una interpretazione fisica a queste espressioni, e si comincia a tal fine dal primo addendo che compare nella (6.12), quello scritto come

$$V_+ e^{-\Gamma x} .$$

Si ricorda che questo termine rappresenta il fasore complesso di una grandezza sinusoidale con pulsazione ω , cui corrisponde l'andamento reale nel dominio del tempo

$$v_+(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ V_+ e^{-\Gamma x} e^{i\omega t} \right\} .$$

Si supponga in un primo momento che la linea nella quale avviene la propagazione sia priva di perdite, di modo che

$$\Gamma = \sqrt{(r + i\omega\ell)(g + i\omega c)} = i\omega\sqrt{\ell c} = i\beta .$$

con β che prende il nome di *costante di fase*. Ne segue:

$$v_+(x, t) = |V_+| \cos(\beta x - \omega t + \phi_+) , \quad (6.14)$$

dove si è indicata con ϕ_+ la fase nel numero complesso V_+ .

Vi sono tre osservazioni da fare a riguardo dell'espressione (6.14).

1. La prima riguarda il fatto che essa rappresenta una onda che si muove nel verso delle x crescenti allo scorrere del tempo, ovvero, da un punto di vista fisico, una *onda progressiva* che avanza dal generatore verso il carico.
2. La seconda osservazione riguarda invece la velocità u ed il periodo spaziale λ di questa onda. Essi sono, rispettivamente,

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\ell c}} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\ell c}} .$$

Si nota allora che, come era stato anticipato in precedenza, nella tensione (ed in modo del tutto analogo anche nella corrente) compare un termine ondulatorio con un periodo spaziale che risulta inversamente proporzionale alla frequenza del campo che si propaga: è per effetto di questo termine che non è lecito trattare i conduttori come dei cortocircuiti ideali quando si aumenta la frequenza della radiazione.

3. L'ultima osservazione, infine, si riferisce al fatto che può essere notata un'analogia formale tra il risultato che si è ottenuto qui e quello che si era ricavato quando si erano studiate le prime soluzioni elementari delle equazioni di Maxwell, in particolare quelle valide

in un mezzo omogeneo e privo di sorgenti. Infatti, si era visto in quella sede che la velocità delle onde elettromagnetiche dipendeva esclusivamente dai parametri costitutivi ϵ e μ del mezzo. In maniera del tutto simile, si trova ora che l'onda che si propaga nella linea di trasmissione avanza in questa con una velocità che dipende solo dai parametri ℓ e c . Come si avrà modo di apprezzare nel seguito, ed in particolare quando si affronterà lo studio delle *onde piane*, questa analogia non è casuale; al contrario, essa ha delle motivazioni rigorose che consentono di costruire una perfetta corrispondenza tra la propagazione nelle linee di trasmissione ideali e nei mezzi omogenei privi di sorgenti e di perdite.

Ora che è stata chiarita la natura fisica del termine $V_+e^{-\Gamma x}$, l'interpretazione dell'altro addendo, $V_-e^{\Gamma x}$, è immediata: tale termine rappresenta infatti un'onda regressiva che viaggia dal carico verso il generatore, ed in generale, quindi, tanto la tensione quanto la corrente nella linea sono esprimibili come somma di due onde che viaggiano in direzioni opposte e con ampiezze V_+ e V_- che dipendono dal tipo di carico e dal generatore che la linea connette.

6.2.1 Propagazione in presenza di perdite

A completamento della discussione sulla natura fisica delle onde presenti nella linea, si analizza ora il caso della presenza di perdite. Come accennato in precedenza, in questo caso lo studio può essere condotto in maniera approssimata usando una tecnica perturbativa nella quale l'effetto delle perdite viene trattato come un "effetto piccolo". Ciò consente di procedere come segue: si consideri nuovamente la costante di propagazione

$$\Gamma^2 = (r + i\omega\ell)(g + i\omega c) \equiv \alpha + i\beta \quad ,$$

dove il parametro β è ancora detto costante di fase, mentre α viene indicato con il nome di *costante di attenuazione*. Per definizione, essi sono dati da

$$\alpha^2 - \beta^2 = rg - \omega^2\ell c \quad , \quad 2\alpha\beta = \omega(rc + \ell g) \quad ,$$

e dunque risultano

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{r^2 + \omega^2\ell^2}(g^2 + \omega^2c^2) - (\omega^2\ell c - rg)} \quad , \quad (6.15)$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{r^2 + \omega^2 \ell^2} (g^2 + \omega^2 c^2) + (\omega^2 \ell c - rg)} \quad . \quad (6.16)$$

Quando la linea è a *basse perdite*, cioè quando i coefficienti r e g sono tali che, a tutte le frequenze di interesse

$$\frac{r}{\omega \ell} \ll 1 \quad , \quad \frac{g}{\omega c} \ll 1 \quad ,$$

le (6.15,6.16) possono essere sviluppate in serie e forniscono il seguente risultato:

$$\alpha = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{c}{\ell}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{\ell}{c}} = \frac{r}{2} \frac{1}{Z_C} + \frac{g}{2} Z_C \quad , \quad (6.17)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\ell c} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\omega \ell} - \frac{g}{\omega c} \right)^2 \right] \quad . \quad (6.18)$$

Come si può notare, le perdite introducono una correzione al primo ordine sulla costante di attenuazione ed al secondo ordine nella costante di fase. Inoltre, la variazione della costante di attenuazione con la frequenza è legata solo alla variazione dei parametri della linea.

Va anche sottolineato che, come si era anticipato in precedenza, le (6.17,6.18) sono espressioni approssimate non tanto perchè esse derivano da una espansione in serie arrestata ai primi termini, ma piuttosto perchè il punto di partenza che si è usato per calcolarle è l'espressione della costante di propagazione valida per un modo TEM e, come sottolineato all'inizio del capitolo, questo modo in realtà non si può propagare nella linea se vi sono le perdite.

In modo analogo a quello appena illustrato, si può poi procedere al calcolo dell'impedenza caratteristica, che risulta

$$Z_C = \frac{\ell}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\omega \ell} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{g}{\omega c} \right)^2 + \frac{rg}{4\omega^2 \ell c} + j \left(\frac{g}{2\omega c} - \frac{r}{2\omega \ell} \right) \right] \quad ,$$

e come si vede, dunque, il termine correttivo al primo ordine risulta in quadratura con il termine principale.

Facendo uso di una tecnica perturbativa abbinata ad una espansione in serie si è dunque in grado di valutare, almeno in linea di principio, tutti gli ordini di correzione che vanno introdotti nella costante di propagazione e di fase per effetto delle perdite.

In alternativa a questa tecnica, ve ne è una più semplice che consente il calcolo della costante di attenuazione *al solo primo ordine*. Questa seconda tecnica usa come punto di partenza le espressioni della tensione e della corrente valide nel caso privo di perdite, e ricava il coefficiente α in funzione dei parametri dissipativi r e g . Operativamente, si procede come segue: si osserva che, quando nella linea sono presenti delle perdite, la potenza associata ad una onda puramente progressiva varia con la coordinata di propagazione secondo una legge esponenziale del tipo

$$P(x) = P_0 e^{-2\alpha x} \quad ,$$

e la potenza che viene “perduta” nel corso della propagazione deve uguagliare la potenza dissipata. In termini matematici, se si indica con P_d la potenza dissipata per unità di lunghezza, si deve cioè avere

$$\frac{dP(x)}{dx} = -P_d \quad ,$$

e dunque

$$\alpha = \frac{P_d}{2P} \quad .$$

La potenza dissipata è dovuta alla presenza dei parametri r e g . Nello spirito della teoria perturbativa discusso più sopra si ha allora

$$P_d = \frac{1}{2} (r|I|^2 + g|V|^2) \quad ,$$

dove V e I sono le ampiezze delle onde di corrente e tensione presenti nella linea in condizioni ideali, ovvero in assenza di perdite. Per ciò che concerne la potenza trasportata P , in modo analogo, vale anche

$$P = \frac{1}{2} Z_C |I|^2 \quad ,$$

e poichè in assenza di perdite la tensione e la corrente sono legate dalla relazione $V = Z_C I$, si ottiene infine

$$\alpha = \frac{r}{2} \frac{1}{Z_C} + \frac{g}{2} Z_C \quad ,$$

risultato che coincide con quello valutato tramite il primo approccio perturbativo che è stato illustrato.

6.3 Impedenza in linea e coefficiente di riflessione

La metodologia di calcolo esposta nel paragrafo precedente ha dunque consentito di risolvere le equazioni della propagazione in una linea di trasmissione, ed ha mostrato come la tensione e la corrente siano rappresentabili nella forma di una somma di due onde che viaggiano in direzioni opposte. In questo paragrafo, e nei due successivi, si approfondisce la descrizione della propagazione introducendo delle nuove grandezze elettriche che risultano utili ai fini della descrizione dei fenomeni che hanno luogo nella linea. Queste grandezze sono l'impedenza in linea, il coefficiente di riflessione, il rapporto d'onda stazionaria e la potenza complessa.

6.3.1 L'impedenza in linea

Essa è naturalmente definita come rapporto tra tensione e corrente, ma poichè la tensione e la corrente variano al variare della coordinata lungo la linea, anche l'impedenza risulta essere una funzione della coordinata di propagazione, che evolve secondo l'espressione

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_C \frac{V_+ e^{-\Gamma x} + V_- e^{\Gamma x}}{V_+ e^{-\Gamma x} - V_- e^{\Gamma x}} \quad .$$

Si noti la differenza che intercorre tra l'impedenza caratteristica Z_C della linea e l'impedenza $Z(x)$ avvertita in ogni punto della linea dall'onda che in essa si propaga. L'impedenza Z_C è una *caratteristica della linea di trasmissione* e, come si è visto in precedenza, essa dipende esclusivamente dalla frequenza del campo e dalla geometria della linea. L'impedenza $Z(x)$ è invece il rapporto tra la tensione e la corrente ed essa varia al variare della coordinata lungo la linea secondo un andamento che dipende dalle costanti V_+ e V_- e quindi, in ultima analisi, dal tipo di generatore e dal carico che vengono impiegati. La Z_C compare in $Z(x)$ solamente come un parametro di scala e per questa ragione essa viene spesso trascurata nelle applicazioni mediante l'introduzione del concetto di *impedenza normalizzata*, definita come

$$z(x) = \frac{Z(x)}{Z_C} = \frac{V_+ e^{-\Gamma x} + V_- e^{\Gamma x}}{V_+ e^{-\Gamma x} - V_- e^{\Gamma x}} \quad .$$

In maniera analoga, si usa definire anche l'*ammettenza normalizzata*, che risulta

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{Z_C}{Z(x)} = Y(x) \cdot Z_C = \frac{V_+ e^{-\Gamma x} - V_- e^{\Gamma x}}{V_+ e^{-\Gamma x} + V_- e^{\Gamma x}} \quad .$$

6.3.2 Il coefficiente di riflessione

Questo parametro che, come si vedrà nel seguito, trova ampio impiego nella pratica, è definito come il rapporto esistente, in ogni punto della linea, tra l'ampiezza dell'onda regressiva e quella dell'onda progressiva di tensione, secondo la relazione

$$\rho(x) = \frac{V_- e^{\Gamma x}}{V_+ e^{-\Gamma x}} \quad .$$

Vi è da accennare ad una convenzione che è comunemente accettata: in genere, nelle applicazioni, lo studio della propagazione in una linea di trasmissione viene effettuato con riferimento a circuiti che, in linea di principio, possono essere schematizzati come in Fig(6.4).

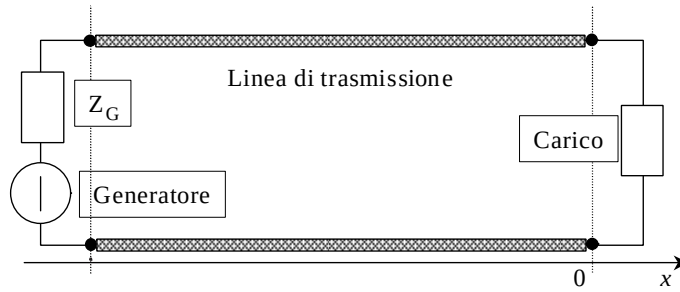


Figura 6.4: Schema a blocchi dei circuiti studiati con la teoria delle linee.

Usualmente si conviene di fissare l'origine dell'asse x in corrispondenza al carico, e risulta allora

$$\rho(x) = \rho_L e^{2\Gamma x} \quad ,$$

dove

$$\rho_L = \frac{V_-}{V_+}$$

è il *coefficiente di riflessione del carico*.

Come è immediato verificare, il coefficiente di riflessione e l'impedenza (o l'ammettenza) normalizzate sono tra loro legati dalle relazioni

$$z(x) = \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} \quad , \quad y(x) = \frac{1 - \rho(x)}{1 + \rho(x)} \quad ,$$

e

$$\rho(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1} = \frac{1 - y(x)}{1 + y(x)} \quad .$$

Linee prive di perdite

Le espressioni viste sin qui si semplificano notevolmente se si considerano linee prive di perdite, per le quali

$$Z_C = \sqrt{\frac{r + i\omega\ell}{g + i\omega c}} = \sqrt{\frac{\ell}{c}}$$

e

$$\rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{\ell c} \quad .$$

Vi sono tre importanti osservazioni da fare:

- In una linea priva di perdite il coefficiente di riflessione ha modulo costante al variare della coordinata di propagazione lungo la linea:

$$|\rho(x)| = |\rho_L e^{2i\beta x}| = |\rho_L| \quad .$$

- Se si riporta graficamente $\rho(x)$ nel piano complesso, al variare di x esso descrive un cerchio del tipo di quello indicato in Fig.(6.5), e poichè per convenzione si assume $\beta > 0$, un incremento positivo nell'asse x , ovvero un movimento che sposti il punto di osservazione dal generatore verso il carico, comporta una rotazione del punto rappresentativo di $\rho(x)$ sulla circonferenza *in senso antiorario*. Viceversa, un movimento dal carico verso il generatore comporta una rotazione in senso orario.
- Come si è già visto più sopra, la tensione e la corrente sono grandezze periodiche nello spazio con periodo

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad .$$

Ora, poichè

$$\rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} \quad ,$$

il coefficiente di riflessione $\rho(x)$, e quindi anche $z(x)$ e $y(x)$ risultano allora anch'esse grandezze periodiche, ma con periodo pari a $\lambda/2$.

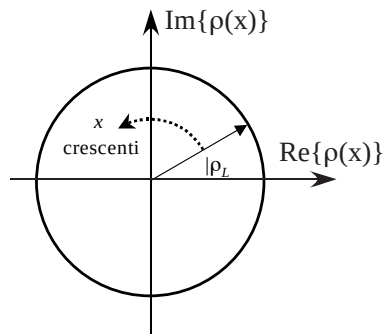


Figura 6.5: Rotazione del punto rappresentativo di ρ_L nel piano complesso nel caso di propagazione in assenza di perdite.

Un esempio

Si consideri il circuito di Fig.(6.6), costituito da una linea alimentata da un generatore di tensione sinusoidale, e chiusa su un *cortocircuito*.

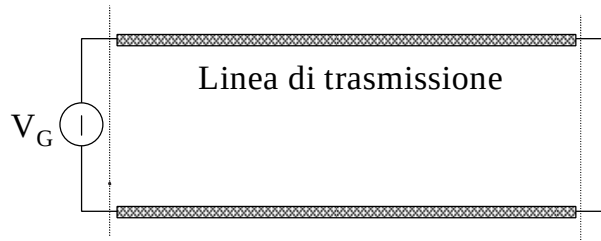


Figura 6.6: Linea chiusa su un cortocircuito.

Chiaramente, se la frequenza del generatore fosse bassa così come è tipico dei casi analizzati nei corsi di elettrotecnica, lo schema rappresenterebbe un circuito di scarsa significatività, visto che una tensione chiusa su una impedenza nulla comporterebbe un valore infinito per la corrente nei conduttori.

Se però il circuito viene pensato come sede di un campo ad alta frequenza, la situazione appare completamente diversa. In questo caso, infatti, il circuito va caratterizzato per mezzo delle onde progressive e regressive, o di uno qualsiasi degli altri parametri sopra introdotti. Si supponga ad esempio di voler fare riferimento al coefficiente di riflessione

$$\rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} \quad , \quad \rho_L = \frac{V_-}{V_+} \quad .$$

Nel caso in esame, il carico è costituito da un cortocircuito per il quale $V(0) \equiv 0$, e poichè l'espressione generale per la tensione lungo la linea è del tipo

$$V(x) = V_+ e^{-\Gamma x} + V_- e^{\Gamma x} \quad ,$$

si deve allora avere

$$V_+ + V_- = 0 \quad \Rightarrow \quad V_+ = -V_- \quad \Rightarrow \quad \rho_L = \frac{V_-}{V_+} = -1 \quad .$$

Il coefficiente di riflessione è dunque

$$\rho(x) = -e^{2i\beta x} \quad ,$$

e l'impedenza avvertita dalle onde nella linea risulta allora

$$Z(x) = Z_C \frac{1 + \rho_L e^{2i\beta x}}{1 - \rho_L e^{2i\beta x}} = \frac{1 - e^{2i\beta x}}{1 + e^{2i\beta x}} \quad .$$

Si consideri nel dettaglio questa impedenza, e la si valuti, in particolare, in due punti di significativo rilievo:

- $x = 0$. Vale $Z(0) = 0$, così come deve essere, visto che $x = 0$ è la coordinata del carico, e questo è un cortocircuito.
- $2i\beta x = -i\pi$. In corrispondenza a questo punto, ovvero quando ci si sposta dal carico verso il generatore di una distanza

$$x = -\frac{\pi}{2\beta} = -\frac{\pi}{2\frac{2\pi}{\lambda}} = -\frac{\lambda}{4} \quad ,$$

l'impedenza non è più nulla come sul cortocircuito, ma essa vale invece

$$Z\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = Z_C \frac{1 - \rho_L}{1 + \rho_L} = \infty \quad .$$

Dunque, solo per effetto di uno spostamento di $\lambda/4$ lungo la linea l'impedenza avvertita dall'onda, lungi dall'essere ancora nulla, è addirittura *infinita*, come se la linea, in quel punto, fosse un *circuito aperto*. Da un punto di vista pratico, ciò significa che nulla cambia se i conduttori vengono fisicamente tagliati alla distanza $\lambda/4$ dal carico, nel senso che questa operazione non viene avvertita dal generatore.

Evidentemente, questo comportamento è alquanto diverso da quello che si è soliti considerare nell'elettrotecnica, ed esso deriva esclusivamente dal fatto che l'impedenza va ora calcolata come rapporto tra *onde* di tensione e di corrente la cui ampiezza cambia lungo la linea. Nel caso in esame si la corrente si annulla alla distanza $\lambda/4$ dal carico e per questa ragione il comportamento della linea appare lì essere quello di un circuito aperto.

Ancora una volta si sottolinea come questo comportamento non venga usualmente posto in luce nell'ambito dell'elettrotecnica solamente per una questione di lunghezza d'onda delle radiazioni che sono in gioco. Infatti, con le frequenze tipiche dell'elettrotecnica ($f = 50$ Hz) la lunghezza d'onda è dell'ordine di $\lambda \simeq 6000$ km, e questo effetto non può allora mai avere rilievo in quel contesto, giacchè esso risulterebbe avvertibile solo per circuiti con lunghezze dell'ordine dei 1500 km.

6.3.3 Onde progressive, stazionarie e parzialmente stazionarie

A completamento del tipo di descrizione della propagazione che si può ottenere facendo uso del coefficiente di riflessione, si introduce ora una classificazione delle onde che sono presenti in una linea.

La classificazione viene fatta distinguendo tre diversi regimi di propagazione, che corrispondono ad altrettanti valori che possono essere assunti dal rapporto tra le ampiezze V_+ e V_- delle onde di tensione progressiva e regressiva, e cioè dal coefficiente di riflessione al carico.

Si considera a tal fine il caso della propagazione in una linea priva di perdite e si ricorda che l'espressione per la tensione è

$$V(x) = V_+ e^{-i\beta x} + V_- e^{i\beta x} \quad ,$$

o anche, esprimendo tutte le grandezze secondo il loro modulo e fase

$$V(x) = |V_+| e^{i\phi_+} \left[e^{-i\beta x} + |\rho_L| e^{i\beta x + i\phi_L} \right] \quad .$$

A questa espressione ne corrisponde poi una nel dominio del tempo che è ricavabile dalla prima secondo la relazione

$$v(x, t) = \text{Re} \left\{ V(x) e^{i\omega t} \right\} \quad .$$

I tre casi che si usa distinguere sono i seguenti:

Onde progressive

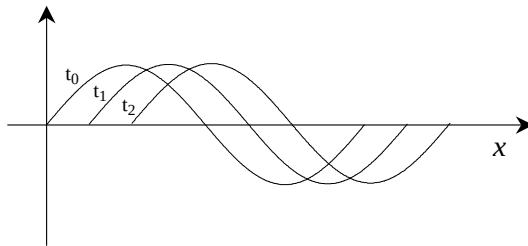
Sia $\rho_L = 0$; allora

$$V(x) = |V_+| e^{i\phi_+} e^{-i\beta x} \quad ,$$

e

$$v(x, t) = |V_+| \cos(\omega t - \beta x + \phi_+) \quad .$$

Come già notato, questa espressione rappresenta il caso di un'onda progressiva, nella quale la variabile temporale e quella spaziale compaiono nell'argomento del coseno tramite una differenza. Se si rappresenta graficamente l'onda con riferimento ad istanti temporali diversi e per esempio crescenti ($t_2 > t_1 > t_0$), essa si presenta nella seguente forma



ed ha quindi la caratteristica che ognuno dei suoi punti (massimi, minimi, punti di zero, ecc.) scorre nello spazio con il passare del tempo.

Onde stazionarie

Si consideri ora il caso in cui $|\rho_L| = 1$. Si ha allora

$$V(x) = |V_+| \left[e^{+i(\phi_+ - \beta x)} + e^{+i(\phi_- + \beta x)} \right] ,$$

da cui

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \operatorname{Re} \left[V(x) e^{i\omega t} \right] = \\ &= 2|V_+| \cos \left(\beta x + \frac{\phi_- - \phi_+}{2} \right) \cos \left(\omega t + \frac{\phi_- + \phi_+}{2} \right) . \end{aligned}$$

Le variabili temporali e spaziali sono ora separate, nel senso che esse non compaiono più nell'argomento della stessa funzione sinusoidale. Si usa dire che, in questo caso, nella linea si è instaurata una *onda stazionaria*: non si tratta più di un'onda che si muove nello spazio al passare del tempo, quanto piuttosto di una *oscillazione* la cui ampiezza cambia nel tempo senza muoversi di posizione. Si noti che, in base alla relazione

$$\rho(x) = \frac{z(x) - 1}{z(x) + 1} = \frac{1 - y(x)}{1 + y(x)} ,$$

si deduce che si può avere $|\rho_L| = 1$ solo nei tre casi di

1. circuito aperto: $z_L = \infty$,
2. corto circuito: $z_L = 0$,
3. reattanza pura: $z_L = i x_L$.

dove z_L rappresenta l'impedenza normalizzata di carico.

Al fine di chiarire ulteriormente la natura fisica delle onde stazionarie, si considera nuovamente il caso del *corto circuito* per il quale $\rho_L = -1$ e quindi

$$V(x) = |V_+| e^{i\phi_+} \left[e^{-i\beta x} - e^{i\beta x} \right] .$$

Ne segue

$$v(x, t) = 2|V_+| \sin(\beta x) \sin(\omega t + \phi_+) .$$

Graficamente, l'andamento dell'onda di tensione allo scorrere del tempo è quindi del tipo indicato in figura (6.7) ed esso presenta la caratteristica che la posizione dei vari punti (minimi, massimi, zeri, ecc.) è *fissa* nel

tempo, e dipende solo da x . Ad esempio, nella coordinata $x = 0$ dove si trova il cortocircuito si ha, ovviamente, $v(0, t) \equiv 0, \forall t$. Questo punto, e quelli omologhi che si trovano a distanze multiple di $\lambda/2$ da esso, sono detti *nodi di tensione*. Tra ogni coppia di nodi, a distanza $\lambda/4$ da ognuno di essi, vi è invece una successione di punti nei quali l'onda di tensione è massima in modulo; questi punti sono detti *ventri di tensione*.

Si sottolinea nuovamente come questi punti siano fissi nel tempo: ciò che cambia al variare del tempo è solo *l'ampiezza* che l'onda presenta.

Un calcolo del tutto analogo a quello appena svolto può poi essere svolto anche per la corrente, e si può così vedere che anch'essa presenta massimi e minimi tra loro distanziati di $\lambda/4$ e con distanza $\lambda/2$ tra ogni coppia di massimi e minimi consecutivi. Inoltre, si può verificare che lì dove la corrente è massima in modulo, la tensione è nulla, e viceversa.

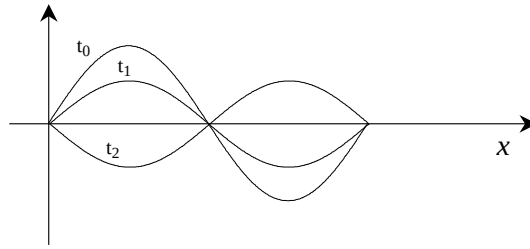


Figura 6.7: Andamento nel tempo delle onde di tensione in prossimità di un corto circuito.

Onde parzialmente stazionarie

Il terzo ed ultimo caso considerato è quello nel quale il modulo del coefficiente di riflessione è un qualsiasi numero reale strettamente compreso tra zero e uno. Per illustrare la natura fisica dell'onda che si propaga in questo caso si consideri nuovamente l'espressione per l'onda di tensione

$$V(x) = |V_+|e^{i(\phi_+ - \beta x)} + |V_-|e^{i(\phi_- + \beta x)} \quad ,$$

e si aggiunga e tolga la quantità $|V_-|e^{i(\phi_+ - \beta x)}$. Si ottiene così

$$V(x) = \{|V_+| - |V_-|\} e^{i(\phi_+ - \beta x)} + |V_-| \left[e^{i(\phi_- + \beta x)} + e^{i(\phi_+ - \beta x)} \right] \quad ,$$

e si nota allora che l'onda è costituita dalla somma di due termini, il primo dei quali è un'onda progressiva con ampiezza $|V_+| - |V_-|$, ed il secondo un'onda stazionaria. In generale quindi, l'onda di tensione, ma anche quella di corrente, si presenta come sovrapposizione di un'onda stazionaria e di una progressiva, e per questa ragione essa viene indicata con il nome di *onda parzialmente stazionaria*.

6.4 Il rapporto d'onda stazionaria (ROS).

Si consideri il modulo della tensione lungo la linea. Esso vale

$$\begin{aligned} |V(x)|^2 &= V(x) V(x)^* = \\ &= \left| |V_+| \left[e^{-i\beta x} + |\rho_L| e^{i(\phi_L + \beta x)} \right] \right|^2 = \\ &= |V_+|^2 \left(1 + |\rho_L|^2 \right) + 2|V_+|^2 |\rho_L| \cos(2\beta x + \phi_L) \quad . \end{aligned}$$

Il modulo della tensione è dunque costituito dalla somma di due contributi, il primo dei quali è indipendente dalla coordinata x ed ha una ampiezza direttamente proporzionale a quella dell'onda progressiva di tensione. Il secondo termine, invece, varia con la distanza di propagazione secondo una legge sinusoidale, ed ha una ampiezza che dipende sia da V_+ , sia dal coefficiente di riflessione del carico ρ_L .

In altri termini, il modulo della tensione è quindi costante sulla linea quando $\rho_L = 0$, mentre in tutti gli altri casi esso varia tra un valore minimo ed un valore massimo che possono essere determinati come segue: il modulo raggiunge il suo massimo valore nelle sezioni in cui $2\beta x_M + \phi_L = 2\kappa\pi$, e lì vale

$$|V_{MAX}| = |V_+| + |V_-| \quad ,$$

mentre nelle sezioni in cui $2\beta x_m + \phi_L = (2\kappa + 1)\pi$ esso è minimo, e vale

$$|V_{min}| = |V_+| - |V_-| \quad .$$

La distanza tra una sezione di massimo ed una di minimo immediatamente adiacente è pari a $\lambda/4$, mentre due sezioni di massimo (o di minimo) consecutive distano tra loro di $\lambda/2$.

Per quanto concerne la corrente, è facile verificare che risulta

$$I(x)^2 = \left(\frac{|V_+|}{Z_C} \right)^2 \left[1 + |\rho_L|^2 - 2|\rho_L| \cos(2\beta x + \phi_L) \right] \quad .$$

Quindi $|I|$ assume il valore minimo

$$|I_{min}| = \frac{|V_+| - |V_-|}{Z_C}$$

in corrispondenza alle sezioni di massimo della tensione, ed il valore massimo

$$|I_{MAX}| = \frac{|V_+| + |V_-|}{Z_C}$$

in corrispondenza alle sezioni di minima tensione.

Si usa introdurre la quantità

$$S = \frac{|V_{MAX}|}{|V_{min}|} ,$$

che prende il nome di *rapporto d'onda stazionaria* (ROS) e che risulta legata al coefficiente di riflessione è dalla relazione

$$S = \frac{|V_+| + |V_-|}{|V_+| - |V_-|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} .$$

Si noti che, poichè con carichi passivi

$$|\rho| \leq 1 ,$$

risulta

$$1 \leq S < +\infty \quad \text{e} \quad S = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 0 .$$

È inoltre possibile mettere in relazione il rapporto d'onda stazionario con il valore assunto dall'impedenza della linea in corrispondenza alle sezioni di massima e minima tensione. Ad esempio, in una sezione di massima tensione (e quindi di minima corrente), l'impedenza presenta il suo valore massimo, dato da

$$Z_{MAX} = \frac{|V_{MAX}|}{|I_{min}|} = \frac{|V_+| + |V_-|}{|V_+| - |V_-|} Z_C = Z_C S ,$$

e, analogamente, in una sezione di minima tensione (e quindi di massima corrente), l'impedenza è minima e vale

$$Z_{min} = \frac{|V_{min}|}{|I_{MAX}|} = \frac{|V_+| - |V_-|}{|V_+| + |V_-|} Z_C = \frac{Z_C}{S} .$$

6.5 La potenza complessa.

In una linea priva di perdite, essa è definita come

$$P(x) = \frac{1}{2} V(x) I(x)^* \quad ,$$

con

$$\begin{aligned} V(x) &= V_+ e^{-i\beta x} + V_- e^{i\beta x} \quad , \\ I(x) &= \frac{1}{Z_C} [V_+ e^{-i\beta x} - V_- e^{i\beta x}] \quad , \end{aligned}$$

ed essa risulta quindi

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{2} V_+ [e^{-i\beta x} + \rho_L e^{i\beta x}] \frac{V_+^*}{Z_C} [e^{i\beta x} - \rho_L^* e^{-i\beta x}] = \\ &= \frac{|V_+|^2}{2Z_C} [1 - |\rho_L|^2 + \rho_L e^{2i\beta x} - \rho_L^* e^{-2i\beta x}] = \\ &= \frac{|V_+|^2}{2Z_C} [1 - |\rho_L|^2] + i \frac{|\rho_L| |V_+|^2}{Z_C} \sin(2\beta x + \phi_L) \quad . \end{aligned}$$

La potenza complessa può dunque essere scritta come

$$P(x) = P_A + iQ_A(x) \quad ,$$

dove

$$P_A = \frac{|V_+|^2}{2Z_C} [1 - |\rho_L|^2] \quad ,$$

è la *potenza attiva* che, come si vede, **non varia lungo la linea**. Questo risultato doveva essere atteso: infatti, si sta qui studiando il caso della propagazione in una linea priva di perdite nella quale dunque non ha luogo alcun fenomeno dissipativo. Per il principio di conservazione dell'energia è allora necessario che la potenza attiva che transita in una qualsiasi sezione della linea sia sempre la stessa.

Per ciò che concerne il secondo addendo che compare nell'espressione della potenza, quello scritto come

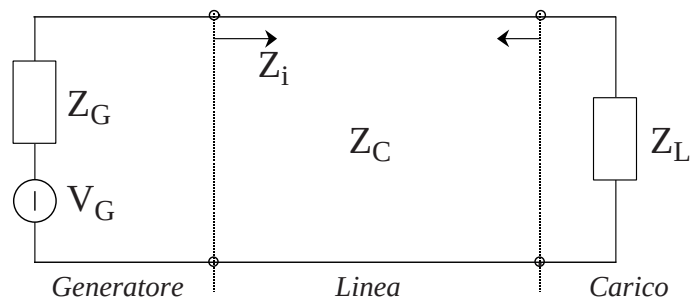
$$Q_A = \frac{|\rho_L| |V_+|^2}{Z_C} \sin(2\beta x + \phi_L) \quad ,$$

esso rappresenta il contributo di *potenza reattiva* erogato dai generatori e, come si vede, esso **varia lungo la linea**, ovvero **non si conserva**.

Si noti infine anche come i due contributi di potenza abbiano diverse dipendenze dal coefficiente di riflessione del carico ρ_L . In particolare, quando $\rho_L = 0$ la potenza complessa è in realtà costituita dalla sua sola parte reale, ovvero essa è interamente una potenza attiva. Viceversa, se $|\rho_L| = 1$, e cioè in presenza di uno dei carichi che danno luogo ad un'onda puramente stazionaria nella linea, la potenza complessa è immaginaria pura o, in altri termini, non vi è flusso di potenza attiva. Ciò è d'altra parte ben giustificato dall'intuito fisico, dal momento che, come visto, gli unici carichi che sono in grado di instaurare una onda puramente stazionaria sono il circuito chiuso e quello aperto o una reattanza pura, e come è ben noto nessuno di questi carichi è in grado di assorbire potenza attiva, che dunque non transita in alcuna sezione della linea.

6.6 Il problema dell'adattamento.

Si consideri un generico circuito del tipo di quello indicato in figura:



Come è noto dall'elettrotecnica, si ha il massimo trasferimento di potenza dal generatore all'impedenza che esso vede ai propri morsetti (Z_i) quando

$$Z_g = Z_i^* \quad ,$$

e quando questo accade si usa dire che si ha la condizione di *adattamento in potenza*.

Quando si studia il problema della propagazione di segnali ad alta frequenza in linee di trasmissione, vi è tuttavia un secondo problema di

adattamento da tenere in considerazione, e questo è legato al rapporto che esiste tra l'impedenza del carico e l'impedenza caratteristica della linea con cui il carico viene alimentato. In generale le due non coincidono, ovvero

$$Z_C \neq Z_L \quad ,$$

e quando si presenta questa situazione, al carico esiste un coefficiente di riflessione

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_C}{Z_L + Z_C} \neq 0 \quad .$$

Si vuole ora mostrare quali problemi possano sorgere in una linea di trasmissione quando ciò accade. Come si è visto, il fatto che ρ_L sia diverso da zero fa sì che, nel tratto di linea che connette il generatore al carico si instaura una onda che, in tutta generalità, è un'onda parzialmente stazionaria (e diventa stazionaria pura se $|\rho_L| = 1$). Si è anche visto che, in presenza di un'onda di questo tipo il modulo della tensione non si mantiene costante lungo la linea, ma varia invece tra un valore massimo ed uno minimo. Si consideri, in particolare, quello che accade nella sezione dove il modulo della tensione è massimo (e quindi, contemporaneamente, il modulo della corrente è minimo). Vale lì

$$|V_{MAX}| = |V_+| + |V_-| \quad , \quad |I_{min}| = \frac{|V_+| - |V_-|}{Z_C} \quad ,$$

ed in quella sezione la potenza complessa è quindi

$$P = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} \frac{(|V_+| + |V_-|)^2}{Z_C} \frac{|V_+| - |V_-|}{|V_+| + |V_-|} = \frac{1}{2} \frac{|V_{MAX}|^2}{Z_C S} \quad .$$

Si osservi che, in base a questa scrittura, la tensione massima nella linea può essere legata alla potenza attiva tramite la relazione

$$|V_{MAX}| = \sqrt{2PZ_C S} \quad .$$

Ora, si immagini di voler realizzare un circuito per trasferire una determinata potenza P_0 ad un carico connesso al generatore da una linea con impedenza Z_C . Se vi è adattamento tra linea e carico il massimo modulo della tensione (che coincide anche con il minimo modulo, dal momento che il modulo è spazialmente costante) vale $|V| = \sqrt{2P_0 Z_C}$.

Viceversa, se il carico non è adattato, il massimo del modulo di tensione è $\sqrt{S}$ volte maggiore di questo, cioè per trasportare la stessa

quantità di potenza utile la linea deve tollerare una tensione di picco che è $\sqrt{S}$ volte maggiore di quella che sarebbe necessaria con il carico adattato.

Nei due casi vi è inoltre una seconda differenza. Infatti, come si è visto in precedenza, se il carico è adattato la potenza nella linea è una potenza solo attiva. Quando invece $\rho_L \neq 0$ la potenza erogata dal generatore è in generale complessa, cioè essa risulta formata sia da una parte reale, sia da una immaginaria. Si richiama a questo proposito una osservazione che era stata fatta quando si erano commentati i risultati relativi al teorema di Poynting, e che, in sostanza, coincide con quanto si sta dicendo ora: la comparsa di una componente immaginaria di potenza è il segno che si stanno utilizzando i generatori in modo improprio ed inefficace perchè li si “costringe” a generare un campo nel quale qualcuna delle grandezze elettromagnetiche è maggiore di quanto essa dovrebbe necessariamente essere al fine di trasportare la stessa potenza attiva che sta trasportando.

Questi effetti negativi si hanno dunque se $\rho_L \neq 0$, ed è quindi opportuno domandarsi se, una volta che siano stati assegnati il carico e la linea di trasmissione, e che questi abbiano impedenze non coincidenti, non sia possibile agire in qualche maniera sul circuito per ottenere un valore nullo del coefficiente di riflessione al carico, $\rho_L = 0$, realizzando ciò che usualmente viene indicato con il nome di *adattamento di uniformità*.

La risposta al quesito è positiva, e questo tipo di adattamento viene di norma effettuato mediante l’inserimento di una rete di componenti passivi, che prende il nome di *adattatore*

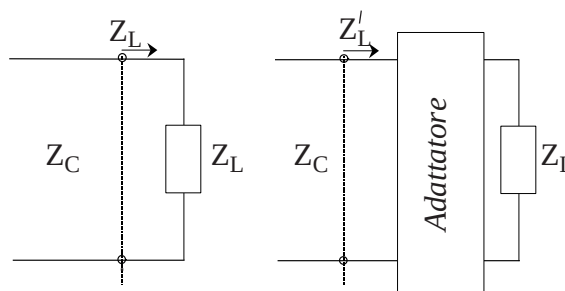


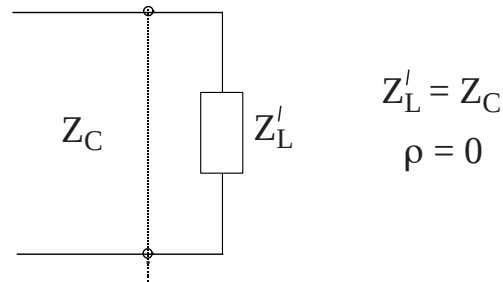
Figura 6.8: Inserimento di un adattatore prima del carico.

e che va progettata in modo che, quando inserita prima del carico, essa

faccia in modo che l'impedenza vista ai morsetti di uscita della linea coincida con quella della linea stessa, ovvero

$$Z'_L = Z_C \quad .$$

In questo modo, infatti, il nuovo carico costituito dall'insieme del carico originale e della rete adattatrice appare alla linea come un carico adattato e l'insieme di linea, adattatore e carico diventa elettricamente equivalente ad un circuito del tipo



che non dà luogo alla nascita di una onda parzialmente stazionaria nella linea.

Il progetto dell'adattatore è l'argomento dei prossimi paragrafi. In particolare, si studierà la realizzazione di *adattatori privi di perdite*, cioè di adattatori costituiti da reti con elementi non resistivi, che consentono l'adattamento in uniformità *ad una determinata frequenza*.

6.7 La carta di Smith.

Un sistema particolarmente semplice di progetto di un adattatore può essere sviluppato avvalendosi di una opportuna *rappresentazione grafica* delle impedenze e dei coefficienti di riflessione, che prende il nome di *carta di Smith*. Prima di procedere all'analisi del progetto di un adattatore, si introduce quindi questo tipo di rappresentazione delle impedenze.

Si immagini che sia stata assegnata una impedenza complessa

$$Z = R + iX \quad ,$$

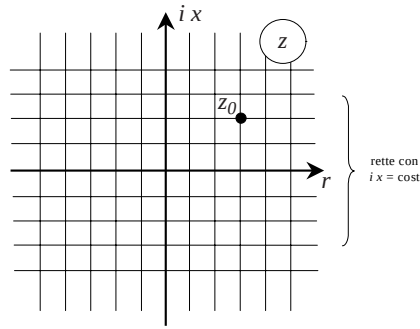
o, in maniera del tutto equivalente, una ammettenza complessa

$$Y = G + i B \quad .$$

Si normalizzino queste grandezze rispetto ad una impedenza di riferimento Z_C : si ottiene, rispettivamente,

$$z = \frac{Z}{Z_C} = r + i x \quad , \quad y = Y Z_C = g + i b \quad .$$

Se ora si vuole rappresentare una di queste grandezze normalizzate per via grafica, il modo più naturale che viene alla mente è quello di disporle in un grafico cartesiano nel quale vi sia la parte reale sull'asse delle ascisse, e la parte immaginaria su quello delle ordinate.



In questo modo, la generica impedenza $z_0 = r_0 + ix_0$ viene individuata in modo univoco nel piano complesso z come intersezione tra una retta del tipo $r = r_0$ ed una del tipo $ix = ix_0$.

Esiste tuttavia una rappresentazione che, se pur meno intuitiva, è però più conveniente per il progetto di adattatori senza perdite. Questa seconda rappresentazione si basa, essenzialmente, su una rappresentazione delle impedenze (o delle ammettenze) normalizzate nel piano complesso ρ (invece che z), e sfrutta i legami espressi dalle relazioni bilineari

$$\rho = \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{1 - y}{1 + y} \quad .$$

Queste due relazioni hanno infatti l'importante proprietà di trasformare le rette del piano z del tipo $r = \text{costante}$ e $ix = \text{costante}$ (e le analoghe del piano y) in due famiglie di *circonferenze* del piano ρ . La dimostrazione di questo fatto è semplice e viene illustrata qui di seguito.

Si indichi il coefficiente di riflessione come $\rho = u + iw$. Poichè

$$z \equiv r + ix = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad ,$$

segue

$$r = \frac{1 - u^2 - w^2}{(1 - u)^2 + w^2} \quad , \quad x = \frac{2w}{(1 - u)^2 + w^2} \quad . \quad (6.19)$$

Si consideri ora la prima di queste relazioni, e si valuti la curva che si ottiene nel piano ρ quando $r = r_0 = \text{costante}$. Si ha

$$(1 - u)^2 r_0 + w^2 r_0 = 1 - u^2 - w^2 \quad ,$$

da cui anche

$$\left(u - \frac{r_0}{1 + r_0}\right)^2 + w^2 = \left(\frac{1}{1 + r_0}\right)^2 \quad .$$

Come volevasi dimostrare, questa espressione rappresenta una famiglia di circonferenze con centro $(r_0/(1 + r_0), 0)$, e raggio $1/(1 + r_0)$. Graficamente, tale famiglia appare come in fig.(6.9).

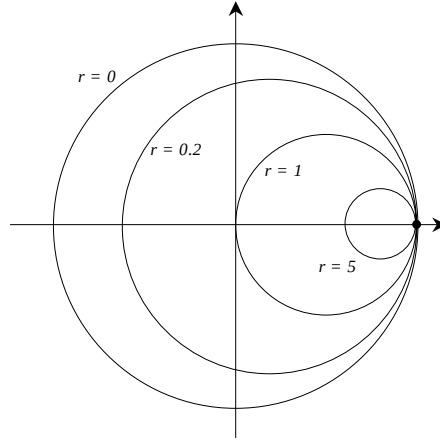


Figura 6.9: Famiglia di circonferenza $r = \text{costante}$ nel piano ρ .

Im maniera simile, dalla seconda delle (6.19) si ha anche, per $x = x_0 = \text{costante}$,

$$(u - 1)^2 + \left(w - \frac{1}{x_0}\right)^2 = \frac{1}{x_0^2} \quad ,$$

e si tratta dunque ancora di una famiglia di corconferenze, ora con centro $(1, 1/x_0)$ e raggio $1/|x_0|$. Graficamente, questa seconda famiglia appare come in fig.(6.10).

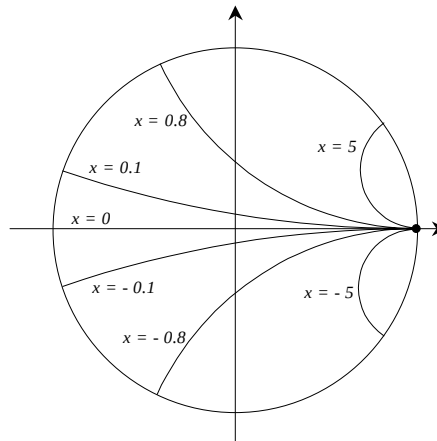


Figura 6.10: Famiglia di circonferenza $x = \text{costante}$ nel piano ρ .

Analoghe curve sono poi ottenute se invece di trasformare le rette del piano z vengono trasformate quelle del piano y e le carte che si ottengono eseguendo le trasformazioni dei due insiemi di rette sono dette, rispettivamente, *carta di Smith per le impedenze*, e *carta di Smith per le ammettenze*. Per ragioni che verranno illustrate tra breve, la rappresentazione grafica delle due carte può essere fatta coincidere, ed essa è riportata in Fig.(6.11).

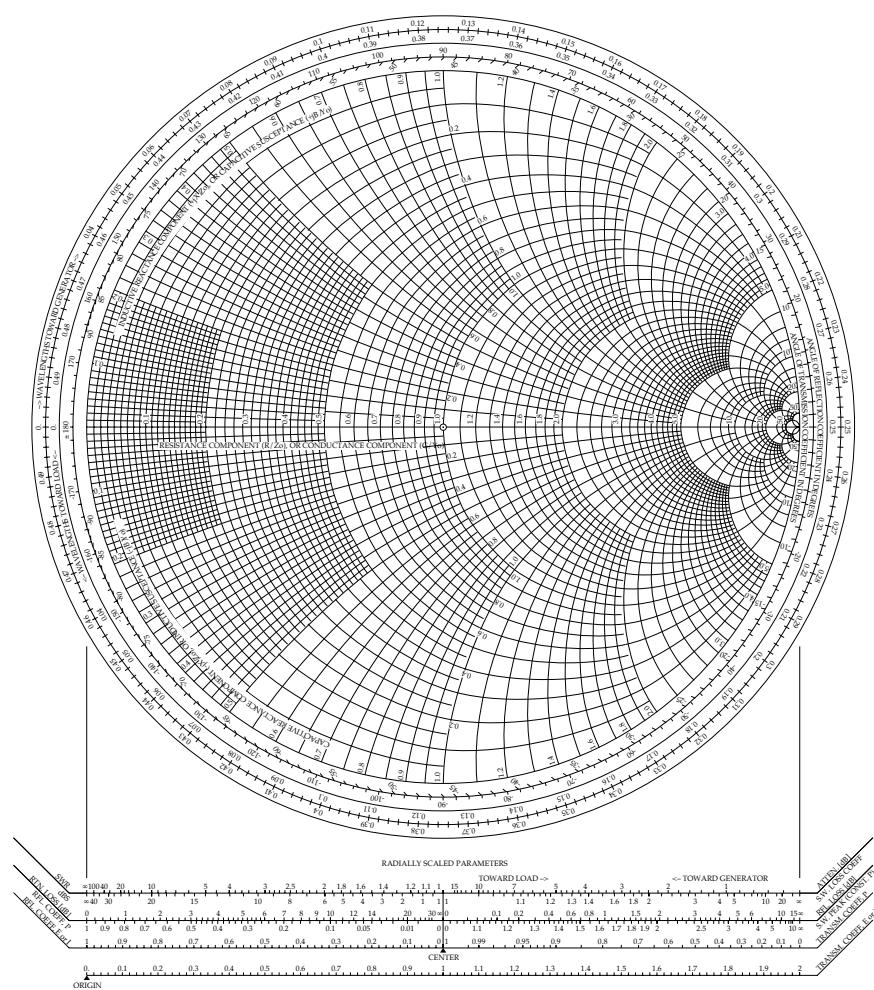


Figura 6.11: La carta di Smith.

Da un punto di vista pratico, il fatto che vi sia questa corrispondenza biunivoca tra i punti del piano z (o y) e quelli del piano ρ significa che quando un generico carico di impedenza z_0 (o ammettenza y_0) viene disegnato sul piano ρ , esso è ancora determinato univocamente dall'intersezione di due curve coordinate, anche se queste non sono più delle rette, ma delle circonferenze.

Il principale vantaggio fornito dall'utilizzo della carta di Smith è essenzialmente legato alla estrema facilità con cui può essere calcolato il valore dell'impedenza avvertita nelle diverse sezioni della linea di trasmissione da un'onda che in essa si propaghi. Infatti, si è visto che l'impedenza normalizzata è legata al coefficiente di riflessione dalla relazione

$$z(x) = \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} \quad ,$$

con

$$\rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} \quad , \quad \rho_L = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \quad ,$$

nell'ipotesi di linea priva di perdite.

Come si è già avuto modo di notare, quindi, il coefficiente di riflessione descrive, al variare di x , una circonferenza del piano complesso che viene percorsa in senso antiorario se x cresce ed in senso orario se x cala, e questo fatto comporta due conseguenze:

1. il valore dell'impedenza avvertita dall'onda coincide con z_L sul carico, ma poi esso varia quando ci si muove lungo la linea. Questo fatto era d'altra parte stato mostrato dall'esempio che si era considerato in precedenza, e che si riferiva al caso di un carico costituito da un corto circuito, quando si era visto che il valore di impedenza variava da zero sul carico ad un valore infinito quando ci si spostava da questo di un tratto pari ad un quarto di lunghezza d'onda;
2. la valutazione del valore $z(x)$ al variare della coordinata lungo la linea può essere eseguita per via grafica con estrema semplicità. Infatti, una volta che si sia posizionato sulla carta di Smith il valore z_L , è poi sufficiente tracciare la circonferenza del piano ρ che passa per z_L per avere automaticamente tutti i valori che l'impedenza presenta al variare di x . L'unico aspetto cui è necessario prestare qualche attenzione è quello che riguarda il modo in cui si deve

tradurre la distanza x dal carico in una opportuno arco di circonferenza. Ciò va fatto usando la relazione che lega la fase del numero complesso $\rho(x)$ ad x , relazione che si scrive nella forma

$$\Delta\phi = 2\beta\Delta x = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda/2} \quad . \quad (6.20)$$

Questa relazione va usata come segue: se si intende valutare il valore dell'impedenza ad una distanza Δx dal carico è necessario compiere una rotazione che copra l'angolo $\Delta\phi$ di cui alla (6.20). Si noti, in particolare, che se lo spostamento dal carico è $\Delta x = \lambda/2$ (o un multiplo intero di questa quantità), la rotazione è pari a 2π (o a suoi multipli interi). Graficamente, ciò corrisponde a dire che si deve compiere un intero giro della carta di Smith, terminando così nello stesso punto da cui si era partiti. Questo risultato non deve sorprendere: si è solo ritrovato, per via grafica, il fatto che l'impedenza avvertita dall'onda lungo la linea è una funzione periodica nello spazio, con periodo pari a metà della lunghezza d'onda.

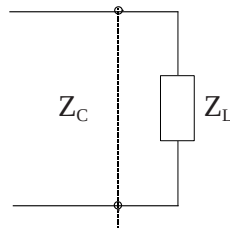
Per facilitare la conversione tra archi di circonferenze e distanze la carta di Smith è usualmente corredata da una ghiera esterna nella quale vengono riportate le distanze normalizzate alla lunghezza d'onda. Come si può notare un giro intero della carta corrisponde ad una rotazione pari a "0.5" nella ghiera esterna, e questo valore va inteso nel senso che la rotazione corrisponde a "0.5" volte una lunghezza d'onda. Inoltre, nella carta viene anche indicato il senso di rotazione orario con la dicitura *wavelengths toward generator*, in accordo con quanto si diceva prima a riguardo del verso di percorrenza della circonferenza rappresentativa di $\rho(x)$ al decrescere di x .

Carta delle ammettenze

Come già accennato, se si applica un procedimento analogo a quello illustrato in precedenza, è possibile determinare anche le famiglie di cerchi che rappresentano la trasformazione delle rette a parte reale o parte immaginaria costante dell'ammettenza di un generico carico y_0 . Si può fare in modo che la rappresentazione grafica che si ottiene in questo caso coincida con quella usata per le impedenze; a tal fine è sufficiente che siano osservate le seguenti convenzioni:

- *carta delle impedenze*: in questa carta la parte superiore si riferisce a carichi complessi con parte immaginaria $x > 0$. Si tratta in sostanza di carichi che presentano una componente reattiva di tipo induttivo;
- *carta delle ammettenze*: anche in questa carta la parte superiore si riferisce a carichi complessi con parte immaginaria $b > 0$. Tuttavia, occorre tenere presente che, trattandosi di una rappresentazione di ammettenze, si tratta ora di carichi che presentano una suscettanza di tipo capacitivo.

Un esempio di uso della carta di Smith.



Si consideri una linea con impedenza caratteristica $Z_C = 50 \Omega$ e costante di fase pari a quella del vuoto, chiusa su un carico RL serie con $R = 100 \Omega$ e $L = 79.6 \text{ nH}$. La frequenza di lavoro è $f = 100 \text{ MHz}$. Si chiede di

1. di individuare z_L sulla carta di Smith;
2. di valutare z alla distanza $x_1 = -0.375 \text{ m}$;
3. di valutare z alla distanza $x_2 = -0.75 \text{ m}$;
4. di valutare z alla distanza $x_3 = -1.5 \text{ m}$.

Soluzione.

Per prima cosa, bisogna valutare l'impedenza. Essa risulta

$$Z_L = R + i\omega L \quad , \quad \omega = 2\pi f \quad .$$

Quindi

$$Z_L = (100 + i 2\pi \times 10^8 79.6 \times 10^{-9}) \Omega \simeq (100 + i50) \Omega \quad .$$

Si ricorda tuttavia che sulla carta di Smith vanno riportate *impedenze normalizzate*, e va quindi eseguita la normalizzazione, che porge

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_C} = \frac{(100 + i50) \Omega}{50 \Omega} = 2 + i1 \quad .$$

Il carico z_L viene quindi riportato nel punto A della carta di Smith di figura (6.12) (si noti che, interpretando la carta di Smith come carta delle impedenze, il punto A cade nella *parte superiore* della carta, in quanto $\text{Im}\{z_L\} > 0$.)

Per ciò che concerne gli altri quesiti proposti nell'esempio, si richiama il fatto che il calcolo delle impedenze a determinate distanze dal carico può essere svolto sulla carta di Smith con estrema facilità ricordando che, nelle linee prive di perdite risulta

$$\rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} \quad .$$

Come già notato, sul piano ρ (in cui è disegnata la carta di Smith) il movimento del coefficiente di riflessione al variare della coordinata lungo la linea è quindi descritto da una circonferenza, centrata nell'origine, e con verso di rotazione orario se il movimento avviene dal carico verso il generatore. Si usano ora questi fatti per valutare l'impedenza alla distanza $x = -0.375$ m. A tal fine va innanzi tutto notato che la lunghezza d'onda è

$$\lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ m} \quad ,$$

e si tratta quindi di calcolare il valore del carico ad una distanza

$$\frac{x_1}{\lambda} = \frac{0.375}{3} = \frac{1}{8} \quad , \quad x_1 = \frac{\lambda}{8} \quad .$$

Il valore dell'impedenza a questa distanza può quindi essere calcolato eseguendo una rotazione di $\lambda/8$ verso il generatore a partire dal punto A di Fig.(6.12). Ciò può essere fatto con l'aiuto della ghiera esterna alla carta di Smith, e si trova così che il punto sulla carta di Smith rappresentativo dell'impedenza alla distanza $x_1 = -0.375$ m è il punto B, con impedenza normalizzata

$$z_B = 1 - i1 \quad .$$

In termini reali, l'impedenza vale quindi

$$Z_B = z_B Z_C = (50 - i50) \Omega \quad .$$

Ovviamente, questo valore può essere trovato anche eseguendo tutti i calcoli analitici basati sulla dipendenza del coefficiente di riflessione dalla distanza, e sul legame tra coefficiente di riflessione e impedenza. Infatti, si ha

$$Z(x) = Z_C \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} \quad , \quad \rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} \quad ,$$

con

$$\rho_L = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} = \frac{2 + i - 1}{2 + i + 1} = \frac{1 + i}{3 + i} \quad .$$

Quindi

$$\rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} = \frac{1 + i}{3 + i} (-i) = \frac{1 - i}{3 + i} \quad .$$

Ne deriva

$$Z(x) = Z_C \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} = Z_C (1 - i) = (50 - i50) \Omega \quad ,$$

che coincide con il valore trovato in precedenza per via grafica.

Si passi ora a valutare il carico avvertito dall'onda nella linea alla distanza $x_2 = -0.75$ m. Si ha $x_2/\lambda = -0.25$ e si tratta quindi di operare una rotazione che conduca, sulla ghiera esterna della carta di Smith, dal valore 0.214 che è quello in corrispondenza al carico, al valore $0.214 + 0.25 = 0.464$. Si individua così il punto indicato come punto C in Fig.(6.12), che rappresenta un carico con impedenza normalizzata

$$z_{punto C} = 0.4 - i0.2 \quad ,$$

cui corrisponde l'impedenza

$$Z_{punto C} = z_{punto C} Z_C = (20 - i10) \Omega \quad .$$

Si noti che risulta

$$z_{punto C} = 0.4 - i0.2 = \frac{1}{2 + i} = \frac{1}{z_A} \quad ,$$

ed è quindi lecito domandarsi se sia strano aver trovato una impedenza **normalizzata** che, alla distanza $x_2 = -\lambda/4$, è il reciproco del valore iniziale. La risposta è **no**, dal momento che, in generale, vale

$$Z(x) = Z_C \frac{1 + \rho(x)}{1 - \rho(x)} \quad , \quad \rho(x) = \rho_L e^{2i\beta x} \quad ,$$

cosicchè quando $x = -\lambda/4$, si trova

$$2\beta x = 2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4} = \pi \quad ,$$

e quindi

$$\rho\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \rho_L e^{-i\pi} = -\rho_L \quad .$$

Pertanto, se inizialmente vale

$$z_L = \frac{1 + \rho_L}{1 - \rho_L} \quad ,$$

si ha, alla distanza $\lambda/4$ dal carico

$$z\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1 - \rho_L}{1 + \rho_L} = \frac{1}{z_L} \quad .$$

Si sottolineano due fatti:

1. questo risultato generalizza quello che si era trovato quando si era studiato il caso di una linea chiusa su un cortocircuito: infatti, si era allora osservato che, nello spostarsi di una distanza pari a $\lambda/4$ si passava da un valore di impedenza nullo ad uno infinito;
2. la relazione $z(x - \lambda/4) = 1/z(x)$ vale ovviamente solo con riferimento alle *grandezze normalizzate*. Non si deve compiere l'errore, frequente quando non si ha sufficiente dimestichezza con lo studio della propagazione nelle linee, di tentare di applicare questa relazione alle grandezze non normalizzate: ne deriverebbe un legame che risulta insostenibile almeno dal punto di vista dimensionale.

Il terzo e ultimo quesito posto dall'esercizio è infine quello relativo al calcolo del valore dell'impedenza alla distanza $x_3 = -1.5$ m. Questo calcolo è immediato, notando che $x_3 = -\lambda/2$ e quindi, poichè le grandezze che compaiono nella carta di Smith sono periodiche di periodo $\lambda/2$,

$$Z\left(-\frac{\lambda}{2}\right) = Z_L \quad .$$

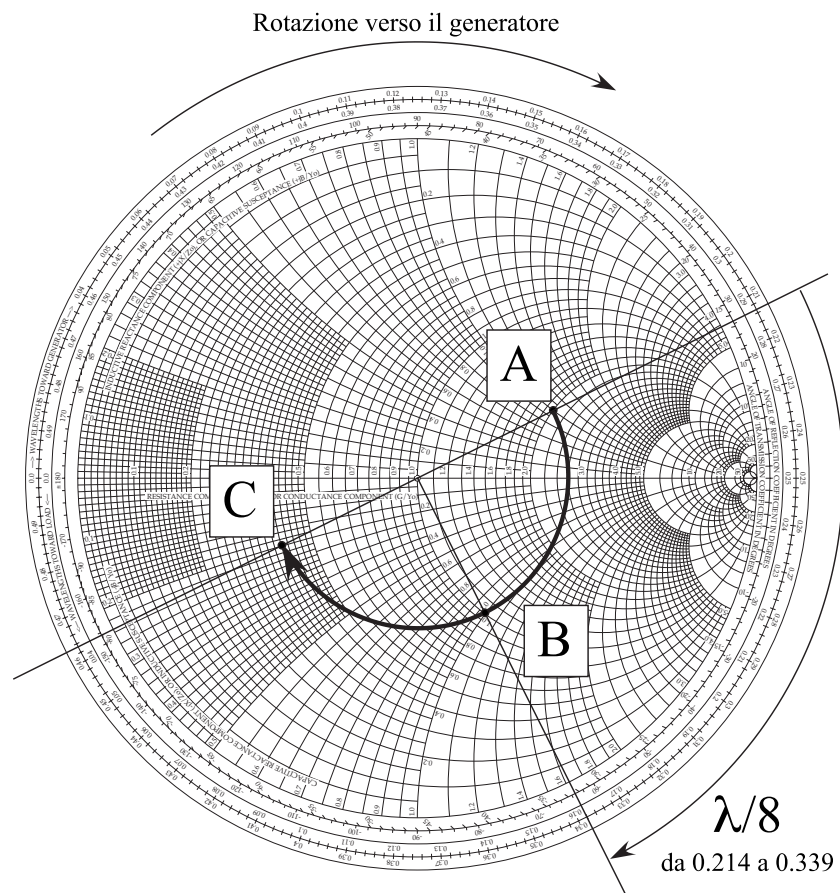
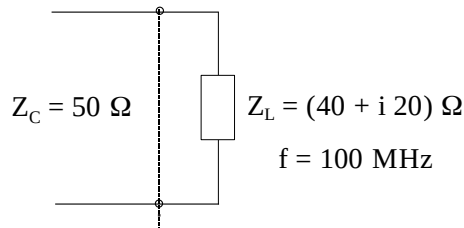


Figura 6.12: Carta di Smith relativa al primo esempio.

Secondo esempio di utilizzo della carta di Smith.

Si illustra ora un secondo esempio di utilizzo della carta di Smith, e si fa questa volta riferimento al caso della carta delle ammettenze. Si consideri dunque il circuito in figura, nel quale la costante di fase è pari a quella del vuoto



e si calcoli l'ammettenza alla distanza $d = -0.3 \, \text{m}$.

Soluzione.

Per prima cosa, si calcoli l'ammettenza del carico. Essa risulta

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{40 + i20} \, \Omega^{-1} = \frac{40 - i20}{(40)^2 + (20)^2} \, \Omega^{-1} = (0.02 - i0.01) \, \Omega^{-1} \quad .$$

L'ammettenza normalizzata è quindi

$$y_L = Y_L Z_C = 1 - i0.5 \quad .$$

Si riporti questo punto sulla carta delle ammettenze. Essa si trova nel punto A della carta riportata in figura (6.13). Si noti che il punto A si trova nella parte inferiore della carta, perchè $\text{Im}\{y_L\} < 0$.

L'esercizio chiede di valutare l'ammettenza ad una distanza $d = -0.3 \, \text{m}$. Si ricorda che le rotazioni sulla carta di Smith sono sempre riferite alla lunghezza d'onda che risulta ora

$$\lambda = \frac{c}{f} = 3 \, \text{m} \quad .$$

Quindi, l'ammettenza richiesta può essere ricavata operando una rotazione pari a $d/\lambda = 0.1$ nel senso orario che indica il movimento dal carico verso il generatore. Con l'ausilio dell'ghiera esterna, si vede che il punto A è in corrispondenza al valore 0.356, ed occorre quindi ruotare

sulla ghiera esterna fino a che si incontra il valore $0.356 + 0.1 = 0.456$. Questo porta a riconoscere che il punto rappresentativo dell'ammettenza alla distanza d dal carico è

$$y(-d) = 0.65 - i0.15 \quad ,$$

cui corrisponde il valore reale

$$Y(-d) = \frac{y(-d)}{Z_C} = \frac{0.65 - i0.15}{50} \Omega^{-1} = (0.013 - i0.003) \Omega^{-1} \quad .$$

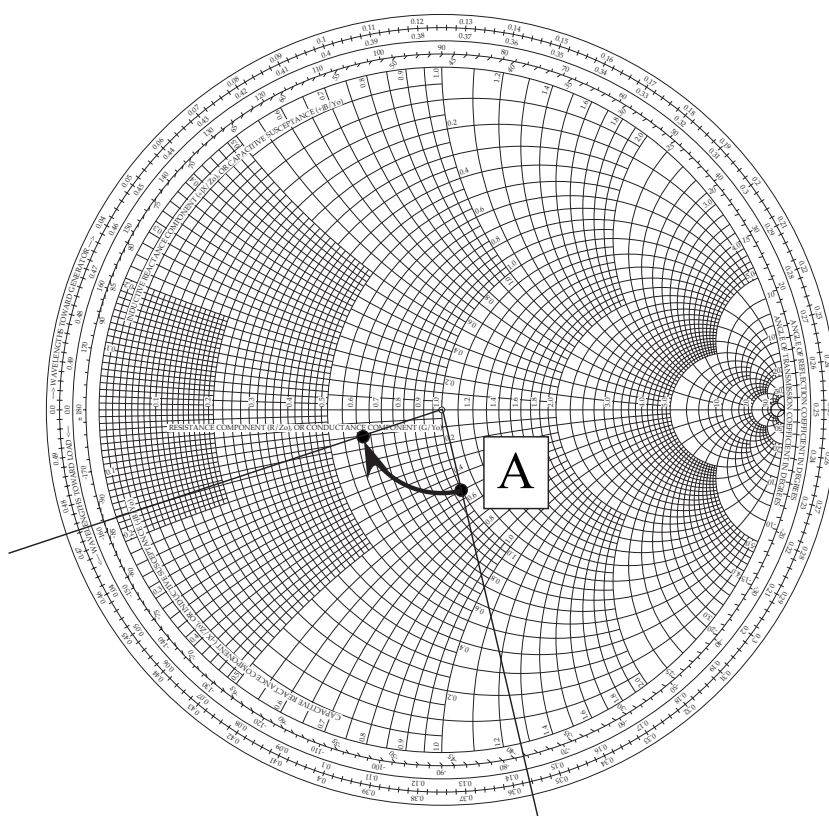
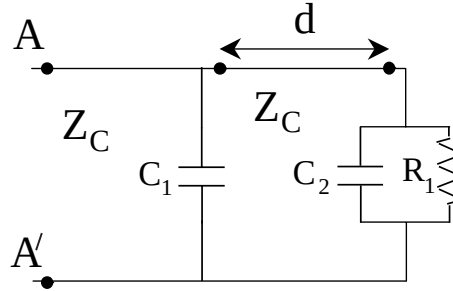


Figura 6.13: Carta di Smith relativa al secondo esempio.

Esercizio n.1

Sia dato il circuito in figura



nel quale la costante di fase è pari a quella del vuoto, $f = 200$ MHz, $Z_C = 50 \Omega$, $d = 30$ cm, $R_1 = 25 \Omega$ e $C_1 = C_2 = 16$ pF. Si chiede di valutare l'impedenza che si misura alla frequenza f ai morsetti AA'.

Soluzione.

Innanzitutto, si valuti il carico costituito dal parallelo tra R_1 e C_2 . Risulta comodo valutare l'ammettenza che vale

$$Y_L = Y_{R_1} + Y_{C_2} \quad ,$$

con

$$Y_{R_1} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{25 \Omega} = 0.04 \Omega^{-1} \quad ,$$

$$Y_{C_2} = i\omega C_2 = i(2\pi f) C_2 \simeq i0.02 \Omega^{-1} \quad .$$

Pertanto, l'ammettenza di carico normalizzata risulta

$$y_L = Y_L Z_C = (0.04 \Omega^{-1} + i0.02 \Omega^{-1}) 50 \Omega = 2 + i1 \quad .$$

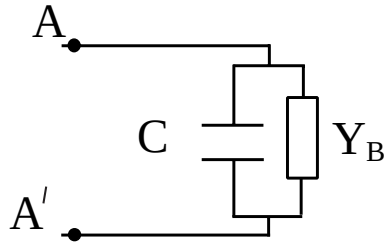
Si riporti questo valore sulla carta delle ammettenze (punto A di figura (6.14)). Per valutare quanto richiesto è necessario riportare il carico in parallelo al condensatore C_1 . Come di consueto, questo può essere fatto con l'ausilio della ghiera esterna alla carta di Smith, ma ricordando che le rotazioni vanno calcolate in rapporto alla lunghezza d'onda, che risulta

$$\lambda = \frac{c}{f} = 1.5 \text{ m} \quad .$$

La rotazione è quindi di $d/\lambda = 0.2$, e porta al punto B di figura (6.14) con

$$y_B = 0.5 - i0.5 \quad \Rightarrow \quad Y_B = \frac{y_B}{Z_C} = (0.01 - i0.01) \Omega^{-1} \quad .$$

Il circuito è quindi equivalente ad un circuito con il parallelo di due ammettenze, del tipo di quello indicato in figura



e l'ammettenza ai morsetti AA' è allora data dal parallelo tra l'ammettenza Y_B e l'ammettenza del condensatore C_1 , ovvero essa risulta

$$Y_{AA'} = Y_{C_1} + Y_B = Y_{C_2} + Y_B = (0.01 + i0.01) \Omega^{-1} \quad .$$

L'impedenza cercata è quindi

$$Z_{AA'} = \frac{1}{Y_{AA'}} = (50 - i50) \Omega \quad .$$

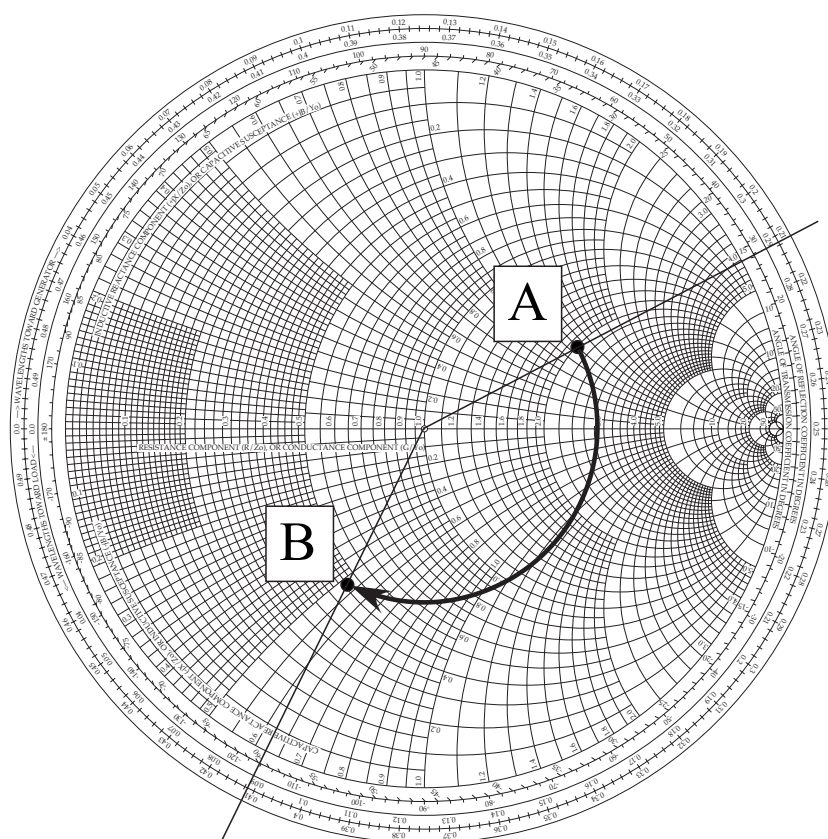
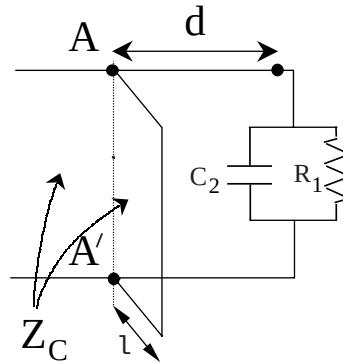


Figura 6.14: Carta di Smith relativa all'esercizio n.1

Esercizio n. 2

È dato il circuito di figura



nel quale la costante di fase è pari a quella del vuoto, $f = 200$ MHz, $Z_C = 50 \Omega$, $d = 30$ cm, $R_1 = 25 \Omega$ e $C_2 = 16$ pF. Si chiede di valutare l'impedenza vista ai morsetti AA' quando agli stessi morsetti è connesso, in parallelo, uno spezzone di linea di impedenza Z_C , chiuso in cortocircuito, e di lunghezza

1. $\ell_1 = 0.3$ m,
2. $\ell_2 = 1.3125$ m.

Soluzione.

Si è visto nell'esercizio n.1 che il parallelo tra R_1 e C_2 riportato ai morsetti AA' ha ammettenza

$$y_b = 0.5 - i0.5 \quad .$$

Si consideri ora lo spezzone di linea in parallelo ai morsetti AA'. Esso può essere considerato come un secondo carico (in parallelo) con ammettenza

$$Y_s = \infty \quad \Rightarrow \quad y_s = Y_s Z_C = \infty \quad .$$

Nella carta di Smith esso appare dunque nel punto A di figura (6.15). Per calcolare quanto chiede l'esercizio, è necessario valutare l'ammettenza del cortocircuito posto in parallelo ai morsetti AA' quando essa viene riportata ai morsetti stessi.

- *Caso 1).* In questo caso $\ell_1 = 0.3 \text{ m}$ e cioè $\ell_1/\lambda = 0.2$. Eseguendo la rotazione si termina quindi nel punto D_1 di figura (6.15) con ammettenza

$$y_{d_1} = -i0.33 \quad ,$$

cosicchè

$$y_{AA'} = Y_b + Y_{d_1} = 0.5 - i0.83 \quad ,$$

$$Y_{AA'} = \frac{y_{AA'}}{Z_C} = (0.01 - i0.0166) \Omega^{-1} \quad ,$$

e dunque

$$Z_{AA'} = \frac{1}{Y_{AA'}} = (26.62 + i44.2) \Omega \quad .$$

- *Caso 2).* In questo caso $\ell_2/\lambda = 0.875$ e si termina nel punto D_2 con ammettenza normalizzata

$$y_{D_2} = i1 \quad .$$

Si nota quindi che il comportamento elettrico del tratto di linea di lunghezza ℓ_2 è lo stesso del condensatore C_1 del precedente esercizio, di modo che (si veda l'esercizio n.1)

$$Z_{AA'} = (50 - i50) \Omega \quad .$$

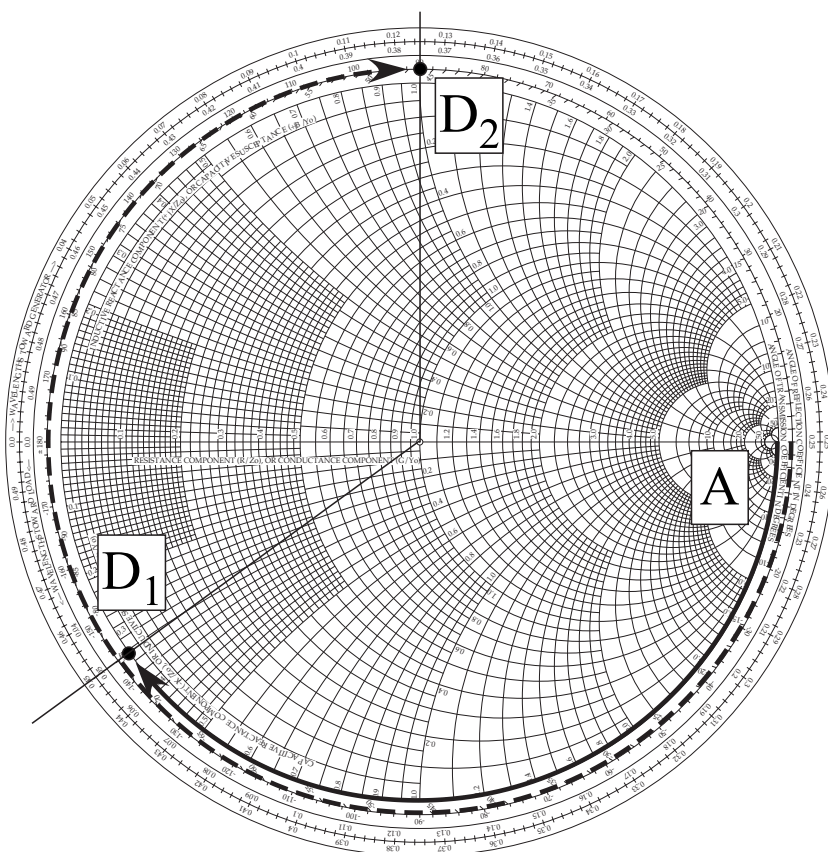


Figura 6.15: Carta di Smith relativa all'esercizio n.2

6.8 Il progetto di un adattatore.

Introdotta la carta di Smith, si passa ora ad illustrarne l'uso ai fini del progetto di un adattatore privo di perdite. Come si è visto, quando è assegnato un carico generico di impedenza Z_L , esso può essere normalizzato rispetto all'impedenza caratteristica della linea su cui è chiuso secondo l'espressione

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_C} \quad \text{o} \quad y_L = Y_L Z_C \quad ,$$

e poi posizionato sulla carta di Smith. Se il carico è adattato all'impedenza della linea risulta quindi

$$r = 1 \quad , \quad i x = 0 \quad ,$$

nella rappresentazione di impedenza, o

$$g = 1 \quad , \quad i b = 0 \quad ,$$

in quella dell'ammettenza e, in entrambi i casi, esso si posiziona nel centro della carta stessa. Per contro, ogni altro carico *non adattato* alla linea risulta rappresentato da un punto della carta di Smith che non giace nel suo centro.

Dal punto di vista grafico, che è quello che si utilizza quando ci si avvale della carta di Smith, il progetto di un adattatore può quindi essere considerato come un problema che si pone nei seguenti termini: è assegnato un carico che non si trova nel centro della carta di Smith, e si tratta di capire come l'uso di tratti di linea e/o di componenti passivi possa consentire di operare sulla carta uno spostamento che conduca dal punto rappresentativo del carico sino al centro della carta stessa.

Come si vedrà tra breve, esistono essenzialmente tre metodi in cui questo può venire fatto. Essi sono i metodi di adattamento che utilizzano, rispettivamente, adattatori:

1. a singolo *stub*;
2. a doppio *stub*;
3. a quarto di lunghezza d'onda o, brevemente, a $\lambda/4$.

6.8.1 L'adattatore a stub semplice.

Si tratta di un adattatore del tipo illustrato in figura (6.16)

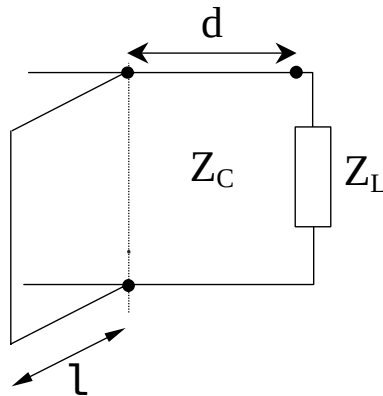


Figura 6.16: Schema di principio dell'adattatore a singolo stub.

e, come si vede, esso è realizzato connettendo in parallelo al carico, e ad una distanza d da esso, un tratto di linea chiusa in cortocircuito. Questo tratto di linea è detto *stub*, e la sua impedenza caratteristica può essere, indifferentemente, uguale o diversa da quella della linea che costituisce il collegamento.

Il progetto di questo tipo di adattatore prevede essenzialmente l'individuazione di due parametri, che sono

- la distanza d dal carico a cui va fatta l'inserzione, e
- la lunghezza l dello stub che si inserisce.

L'illustrazione del dimensionamento di questi due parametri viene ora svolta tramite un esempio.

Esercizio n.3

Si consideri il circuito di fig.(6.17), nel quale $J = 0.1 \text{ A}$, $Z_G = 50 \Omega$, $Z_C = 50 \Omega$, $d_{TOT} = 1.5 \text{ m}$, $R = 125 \Omega$, $L = 132.63 \text{ nH}$ e la frequenza di lavoro è $f = 300 \text{ MHz}$. La costante di fase è pari a quella del vuoto.

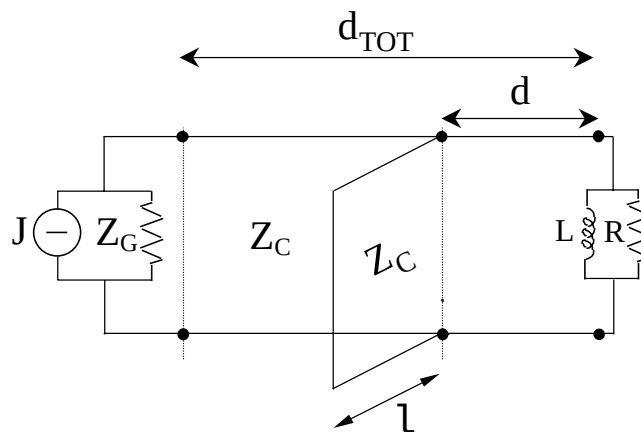


Figura 6.17: Schema del circuito utilizzato nell'esercizio n. 3.

Si chiede di

1. dimensionare un adattatore a stub semplice;
2. valutare la potenza erogata dal generatore
 - (a) prima di avere inserito l'adattatore;
 - (b) dopo aver inserito l'adattatore;

Soluzione.

Poichè lo stub è realizzato ponendo in *parallelo* uno spezzone di linea, è preferibile lavorare con le ammettenze. Si calcoli dunque l'ammettenza di carico. Questo è formato dal parallelo di un resistore ed un induttore, e vale quindi

$$Y_L = \frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L} = \left(\frac{1}{125} + \frac{1}{i250} \right) \Omega^{-1} = (8 - i4) \times 10^{-3} \Omega^{-1} \quad ,$$

e l'ammettenza normalizzata vale quindi

$$y_L = Y_L Z_C = 0.4 - i0.2 \quad .$$

Si riporti questo valore sulla carta di Smith: esso si colloca nel punto A di figura (6.18).

Si consideri ora il comportamento elettrico dello stub. Si è visto nell'esercizio n.2 che un tratto di linea posto in parallelo ad una linea di trasmissione presenta, ai morsetti cui è connesso, una ammettenza y_S che è un numero immaginario puro (lo stub ha cioè comportamento puramente reattivo, come deve essere dal momento che essendo realizzato con un cortocircuito esso non può dissipare potenza), che dipende dalla lunghezza ℓ del tratto di linea con cui esso è realizzato.

Nell'adattatore a stub semplice, l'ammettenza così costituita viene posta in parallelo a quella che il carico presenta dopo un tratto di lunghezza d , $y(-d)$, e quello che si vuole ottenere è che il parallelo di queste due ammettenze realizzi l'adattamento, ovvero che

$$y(-d) + y_S = 1 + 0i \quad .$$

In altre parole, il parallelo delle due ammettenze deve avere parte reale unitaria e parte immaginaria nulla, ovvero, tenendo conto che y_S è una ammettenza immaginaria pura, deve risultare

$$\operatorname{Re}\{y(-d)\} + \operatorname{Re}\{y_S\} = \operatorname{Re}\{y(-d)\} = 1 \quad , \quad \operatorname{Im}\{y(-d)\} + \operatorname{Im}\{y_S\} = 0 \quad .$$

La prima condizione permette quindi di stabilire la distanza d a cui posizionare lo stub dal carico. Questa distanza è infatti quella a cui *il carico presenta parte reale unitaria*, ed essa può essere individuata tramite una semplice rotazione sulla carta di Smith.

Si ricorda infatti che, muovendosi lungo la linea dal carico al generatore, il punto rappresentativo dell'ammettenza compie, sulla carta di Smith, una rotazione circolare in senso orario. La rotazione andrà quindi compiuta per una lunghezza tale da portare il punto sulla carta di Smith dal carico fino al cerchio a parte reale dell'ammettenza costante e pari a uno.

Con riferimento ai dati dell'esercizio, ciò significa una rotazione che dà luogo a due soluzioni. La prima è quella che conduce dal punto A al punto B di figura (6.18). In questo punto si ha

$$y_{\text{punto B}} = 1 + i1 \quad ,$$

ed esso è raggiunto tramite una rotazione che può essere letta sulla ghiera esterna della carta di Smith, e che vale

$$\frac{d}{\lambda} = B' - A' = 0.162 + 0.037 \simeq 0.2 \quad .$$

Si faccia attenzione che il valore così individuato è il rapporto tra d e la lunghezza d'onda, di modo che il valore reale della distanza cui va inserito lo stub semplice è

$$d = 0.2 \lambda \quad .$$

In particolare, poichè nell'esercizio si ha $f = 300$ MHz, vale $\lambda = 1$ m e quindi $d = 20$ cm.

Come illustrato nella carta, questa soluzione non è l'unica possibile, ma ne esiste invece una seconda, indicata con la lettera C in figura (6.18). Per questa vale

$$y_{\text{punto C}} = 1 - i1 \quad ,$$

ed essa è ottenuta per mezzo di una rotazione con

$$\frac{d}{\lambda} = C' - A' = 0.337 + 0.037 \simeq 0.375 \quad ,$$

ovvero $d = 37.5$ cm.

Entrambe le soluzioni sono accettabili, ma in genere si tende a preferire quella che prevede il valore minore di d perchè questa è la soluzione che dà luogo al più breve tratto di linea non adattato.

Per completare l'adattamento, si deve ora dimensionare la lunghezza dello stub in modo che esso compensi la parte immaginaria dell'ammittenza di carico riportata alla distanza $-d$, come espresso dalla relazione

$$\text{Im}\{y(-d)\} + \text{Im}\{y_S\} = 0 \quad .$$

Se si fa riferimento alla prima delle due soluzioni individuate in precedenza, ovvero a quella con ammettenza $y_{\text{punto B}} = 1 + i1$ si dovrà quindi realizzare uno stub che presenti, ai morsetti ove esso è connesso in parallelo, una suscettanza

$$b_S = \text{Im}\{y_S\} = -1 \quad .$$

Questa suscettanza è ottenuta con un tratto di linea la cui lunghezza può essere valutata, una volta ancora, per mezzo della carta di Smith. Il procedimento è il seguente. Lo stub è un corto circuito, e come tale presenta impedenza nulla, ed ammettenza infinita. Quando esso viene riportato sulla carta di Smith delle ammettenze, si trova quindi nel punto di estrema destra (punto S_0 in Fig.(6.18)). La lunghezza dello stub è quella che consente di spostarsi da quel punto fino al punto di suscettanza

$b_S = -1$, indicato come S_1 in figura (6.18). La rotazione necessaria è dunque

$$\frac{\ell}{\lambda} = 0.375 - 0.25 = 0.125 \quad \Rightarrow \quad \ell = 12.5 \text{ cm} \quad .$$

Nel caso del punto indicato con C, si deve invece avere

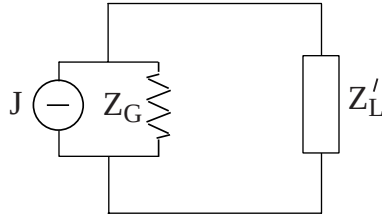
$$y_S = +i1 \quad ,$$

e questo valore può essere ottenuto con una rotazione pari a

$$\frac{\ell}{\lambda} = 0.25 + 0.125 = 0.375 \quad \Rightarrow \quad \ell = 37.5 \text{ cm} \quad .$$

Calcolo delle potenze.

Al fine di calcolare la potenza impiegata dal generatore, sia prima sia dopo l'inserimento dell'adattatore, conviene riportare lo schema del circuito ad un equivalente del tipo



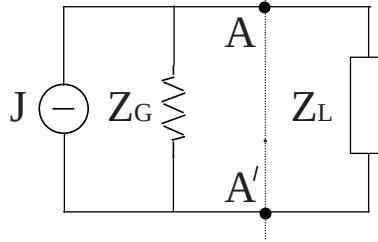
Prima dell'adattamento. Lo schema equivalente richiede di riportare il carico ai morsetti del generatore, cosa che si può fare con la carta di Smith, operando una rotazione

$$\frac{d_{TOT}}{\lambda} = \frac{1.5 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 1.5 \quad .$$

Si vede quindi che d_{TOT} è un multiplo intero di mezza lunghezza d'onda di modo che

$$Z'_L = Z_L \quad .$$

Il circuito equivalente è dunque il seguente



e la potenza erogata dal generatore è quella che esce dai morsetti AA'. Essa è data da

$$P_{AA'} = \frac{1}{2} V_{AA'} (I_{AA'})^* \quad ,$$

con (regole del partitore di corrente)

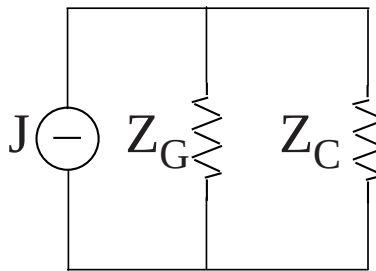
$$I_{AA'} = J \frac{Z_G}{Z_G + Z_L} \quad , \quad V_{AA'} = J \frac{Z_G Z_L}{Z_G + Z_L} \quad .$$

Pertanto

$$P_{AA'} = 50 \text{ mW} + 25 \text{ mVA} \quad .$$

Prima dell'adattamento il generatore eroga quindi potenza sia attiva, sia reattiva.

Dopo l'adattamento. Poichè la linea è adattata, il circuito equivalente è



e quindi

$$P_{AA'} = \frac{1}{2} |J|^2 \left| \frac{Z_G}{Z_G + Z_C} \right|^2 Z_C = \frac{|J|^2}{8} Z_C = 62.5 \text{ mW} \quad .$$

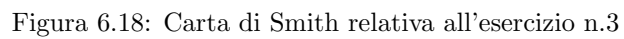
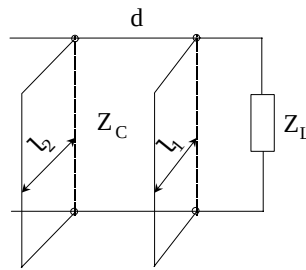


Figura 6.18: Carta di Smith relativa all'esercizio n.3

6.8.2 L'adattatore a doppio stub.

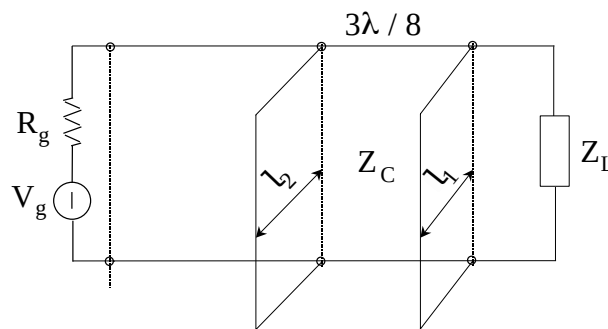
Questo tipo di adattatore è realizzato connettendo in parallelo alla linea di trasmissione *due stub*, il primo dei quali è collegato direttamente sul carico, ed il secondo ad una distanza d che può assumere i valori

$$d = \left\{ \frac{\lambda}{8}, \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{8} \right\} .$$



Ciò che rimane da stabilire sono dunque solo le lunghezze ℓ_1 e ℓ_2 dei due stub, e ciò viene svolto secondo i criteri illustrati tramite il seguente esempio.

Esercizio n.4



Una linea di trasmissione avente costante di fase pari a quella del vuoto, impedenza caratteristica $Z_C = 50 \Omega$ e lunghezza $l_{TOT} = 2.25 \text{ m}$ è

chiusa su un carico che, alla frequenza $f = 300$ MHz, risulta caratterizzato da un coefficiente di riflessione ρ_L con

$$|\rho_L| = 0.5 \quad , \quad \text{fase}(\rho_L) = 50^\circ \quad .$$

Si chiede di determinare:

1. le lunghezze ℓ_1 e ℓ_2 dei due elementi di un doppio stub che, connesso sul carico e con distanza tra gli stub pari a $d = 3\lambda/8$, realizza l'adattamento in uniformità.
2. La potenza erogata da un generatore adattato in potenza ($R_g = 50 \Omega$) con tensione di picco $V_g = 50$ V, prima e dopo l'adattamento.

Soluzione.

Per prima cosa, occorre individuare il carico. Espresso secondo la sua ammettenza normalizzata, esso è

$$y_L = \frac{1 - \rho_L}{1 + \rho_L} \quad ,$$

con

$$\rho_L = |\rho_L| \exp \{i \text{fase}(\rho_L)\} = 0.32 + i0.38 \quad .$$

Risulta quindi

$$y_L = 0.4 - i0.4 \quad ,$$

e questo valore può essere riportato sulla carta di Smith, dove esso appare nel punto A di figura (6.19).

Si consideri ora il problema dell'adattamento. Al fine di comprendere la procedura che consente il dimensionamento delle lunghezze degli stub è opportuno rifarsi a quanto si è visto nello studio dell'adattatore a singolo stub. Si consideri infatti il doppio stub, e, per il momento, si concentri l'attenzione sul secondo degli stub, cioè su quello che non è connesso direttamente sul carico. Analogamente a quanto si è visto nel caso dell'adattatore a singolo stub, anche in questo caso quello che si sta cercando di fare è di avere, a sinistra del secondo stub, il carico adattato, cioè

$$y_{sx}^{(2)} = y(\text{a sinistra del secondo stub}) = 1 \quad ,$$

e va tenuto conto che il secondo stub ha una ammettenza y_{S2} che è puramente immaginaria. Si può cioè scrivere

$$y_{sx}^{(2)} = 1 = y_{S2} + y_{dx}^{(2)} \quad ,$$

dove $y_{dx}^{(2)}$ è l'ammettenza che si ha subito a destra del secondo stub. Scritta per esteso, questa relazione si divide in

$$1 = \operatorname{Re} \left\{ y_{dx}^{(2)} \right\} \quad ,$$

e

$$0 = \operatorname{Im} \{ y_{S2} \} + \operatorname{Im} \left\{ y_{dx}^{(2)} \right\} \quad .$$

Si sono quindi ottenute due relazioni che indicano quanto segue:

- la prima che occorre fare in modo di avere, a destra del secondo stub, una ammettenza con parte reale unitaria, ovvero una ammettenza che, riportata sulla carta di Smith, giaccia sulla circonferenza a parte reale costante $g = 1$;
- la seconda dà invece il criterio di dimensionamento per il secondo stub, indicando che questo deve avere una suscettanza tale da compensare la parte immaginaria dell'ammettenza presente a destra dello stub.

Il dimensionamento del secondo stub è dunque del tutto identico a quello visto nel caso dell'adattatore a singolo stub, e può essere fatto individuando, tramite la carta di Smith, la lunghezza che deve avere un tratto di linea per presentare una suscettanza pari a quella desiderata.

Ciò che va invece capito è come soddisfare la prima delle due relazioni sopra esposte. La relazione dice infatti che la parte reale dell'ammettenza del carico a destra del secondo stub deve essere unitaria, ma quello che interessa sapere è come si fa ad ottenere questo valore *a partire dai dati che si hanno in possesso*, ovvero dal carico ed eventualmente dal primo stub.

La domanda da porsi è allora la seguente: se a destra del secondo stub l'ammettenza deve essere rappresentata da un punto sulla carta di Smith che giace sulla circonferenza $g = 1$, dove si deve trovare il punto rappresentativo dell'ammettenza a *sinistra del primo stub*? Ovviamente, la risposta è che esso si deve trovare in un punto della carta di Smith tale che quando si parta da esso e si compia una rotazione corrispondente alla distanza tra i due stub, si termini sul cerchio $g = 1$.

L'insieme dei possibili punti che soddisfano questa richiesta è di facile individuazione sulla carta di Smith. È infatti sufficiente disegnare una circonferenza uguale a quella con $g = 1$, ruotata in senso *antiorario* di una distanza d rispetto a questa. I punti della circonferenza così

disegnata sono infatti quei punti che il tratto di linea interposta fra i due stub fa poi terminare sul cerchio $g = 1$.

Si è così in grado di stabilire come debba essere fatta l'ammettenza a sinistra del primo stub, ed essa deve dunque essere rappresentata da un punto della carta di Smith che giaccia sulla circonferenza $g = 1$ ruotata di una quantità pari a d verso il carico. In particolare, quindi, se $d = \lambda/8$, la curva $g = 1$ va ruotata di 90 gradi in senso antiorario, mentre con $d = \lambda/4$ la rotazione deve essere di 180 gradi, e con $d = 3\lambda/8$ di 270 gradi. Si indichi con $y_{sx}^{(1)}$ l'ammettenza a sinistra del primo stub così individuata.

Il dimensionamento del doppio stub è a questo punto quasi completo: a sinistra del primo stub c'è l'ammettenza $y_{sx}^{(1)}$ mentre a destra c'è l'ammettenza di carico y_L . Il legame tra le due ammettenze è (parallelo di ammettenze)

$$y_{sx}^{(1)} = y_{S1} + y_{dx}^{(1)} = y_{S1} + y_L \quad ,$$

dove y_{S1} è l'ammettenza del primo stub. Sulla carta di Smith il punto a destra del primo stub è il punto rappresentativo del carico, mentre $y_{sx}^{(1)}$ giace sulla curva $g = 1$ ruotata. Lo stub connette questi due punti, e poichè esso ha ammettenza puramente immaginaria, opera questa connessione tramite *un movimento lungo le curve a parte reale costante*, ed in particolare lungo la curva a parte reale costante uguale alla parte reale dell'ammettenza del carico.

Operativamente quindi, l'ammettenza $y_{sx}^{(1)}$ sarà individuata dai punti della carta di Smith nei quali la circonferenza $g = 1$ ruotata incrocia la curva a parte reale uguale alla parte reale del carico, ed il dimensionamento del secondo stub andrà svolto sulla base della relazione sopra scritta e che, espansa nella sua parte reale ed immaginaria, si legge come

$$\operatorname{Re} \{y_{sx}^{(1)}\} = \operatorname{Re} \{y_L\} \quad , \quad \operatorname{Im} \{y_{sx}^{(1)}\} = \operatorname{Im} \{y_{S1}\} + \operatorname{Im} \{y_L\} \quad .$$

Il primo stub deve quindi avere suscettanza

$$b_{S1} = \operatorname{Im} \{y_{S1}\} = \operatorname{Im} \{y_{sx}^{(1)}\} - \operatorname{Im} \{y_L\} \quad ,$$

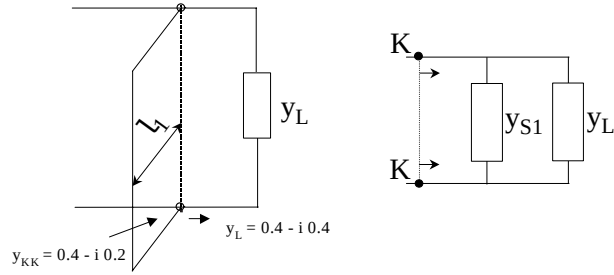
e, come di consueto, esso può essere realizzato con un tratto di linea la cui lunghezza va individuata con l'ausilio della ghiera esterna alla carta di Smith.

Si consideri l'esempio dell'esercizio proposto. In questo esercizio la distanza tra i due stub è $d = 3\lambda/8$ e quindi come prima cosa, si deve riportare sulla carta di Smith la circonferenza $g = 1$ ruotata di 270 gradi in senso antiorario, come mostrato in figura (6.19).

Succeivamente, si individuano i punti nei quali la circonferenza ruotata incrocia la curva a parte reale costante uguale alla parte reale di y_L . Questi due punti, indicati con le lettere B_1 e B_2 in figura (6.19) sono le ammettenze $y_{sx}^{(1)}$ ammissibili. Esse risultano

$$B_1 : y_{B_1} = 0.4 - i0.2 \quad ; \quad B_2 : y_{B_2} = 0.4 - i1.8 \quad .$$

Il dimensionamento del primo stub va quindi fatto come segue: nel primo caso la situazione è quella illustrata in figura



ovvero

$$y_{KK} = y_{B_1} = 0.4 - i0.2 = y_{S1} + y_L = y_{S1} + (0.4 - i0.4) \quad ,$$

da cui

$$y_{S1} = i0.2 \quad .$$

Questo valore di suscettanza è ottenuto con un tratto di linea di lunghezza (si veda il punto B'_1 di figura (6.19))

$$\frac{\ell_1}{\lambda} = 0.25 + 0.03 = 0.28 \quad ,$$

e poichè $\lambda = c/f = 1 \text{ m}$

$$\ell_1 = 28 \text{ cm} \quad .$$

Analogamente, se viene scelta la seconda soluzione si ha

$$y_{S1} = y_{B_2} - y_L = -i1.4 \quad ,$$

e questa suscettanza può essere ottenuta con una linea di lunghezza (si veda il punto B'_2 in figura (6.20))

$$\frac{\ell_1}{\lambda} = 0.349 - 0.25 = 0.095 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = 9.5 \text{ cm} \quad .$$

Individuate le due soluzioni ammissibili, e le relative lunghezze del primo stub, si esegue la rotazione pari a $d = 3\lambda/8$. Per semplicità, si esegue solo il calcolo relativo al caso della soluzione che fornisce il valore minimo di ℓ_1 , cioè quella corrispondente al punto B_2). La rotazione conduce al punto indicato con la lettera C nella figura (6.19), che ha ammettenza

$$y_{\text{punto } C} = 1 + i3 \quad .$$

Il secondo stub deve quindi compensare una suscettanza pari a $i3$, ovvero avere

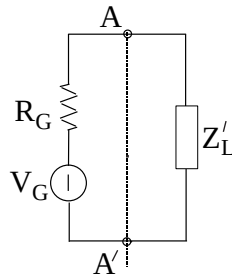
$$y_{S2} = -i3$$

Questa può essere ottenuta con una linea di lunghezza

$$\frac{\ell_2}{\lambda} = 0.302 - 0.25 = 0.052 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = 5.2 \text{ cm} \quad .$$

Calcolo delle potenze

Prima dell'adattamento. Conviene, come di consueto, fare riferimento ad uno schema equivalente del tipo



e poichè la linea ha lunghezza l_{TOT} che è multipla di $\lambda/4$ risulta

$$y'_L = \frac{1}{y_L} \quad ,$$

(si faccia attenzione che la relazione è vera solo con le ammettenze *normalizzate*, se non altro per ragioni di dimensioni fisiche). Pertanto

$$y'_L = \frac{1}{0.4 - i0.4} = 1.25 + i1.25 \quad ,$$

e quindi anche

$$z'_L = \frac{1}{y'_L} = 0.4 - i0.4 \quad .$$

In termini reali

$$Z'_L = z'_L Z_C = (20 - i20) \Omega \quad .$$

La potenza richiesta è quella che esce dai morsetti AA', ed è data da

$$P_{AA'} = \frac{1}{2} V_{AA'} (I_{AA'})^* \quad ,$$

con (partitore di tensione)

$$V_{AA'} = V_g \frac{Z'_L}{R_g + Z'_L} \quad , \quad I_{AA'} = \frac{V_g}{R_g + Z'_L} \quad .$$

Pertanto

$$P_{AA'} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_g}{R_g + Z'_L} \right|^2 Z'_L = 4.71 \text{ W} - i4.71 \text{ VA} \quad .$$

Dopo dell'adattamento. Dopo l'adattamento il circuito equivalente si chiude su un carico $Z'_L = Z_C = R_g$ e quindi

$$P_{AA'} = \frac{1}{2} \left| \frac{V_g}{2R_g} \right|^2 R_g = 6.25 \text{ W} \quad .$$

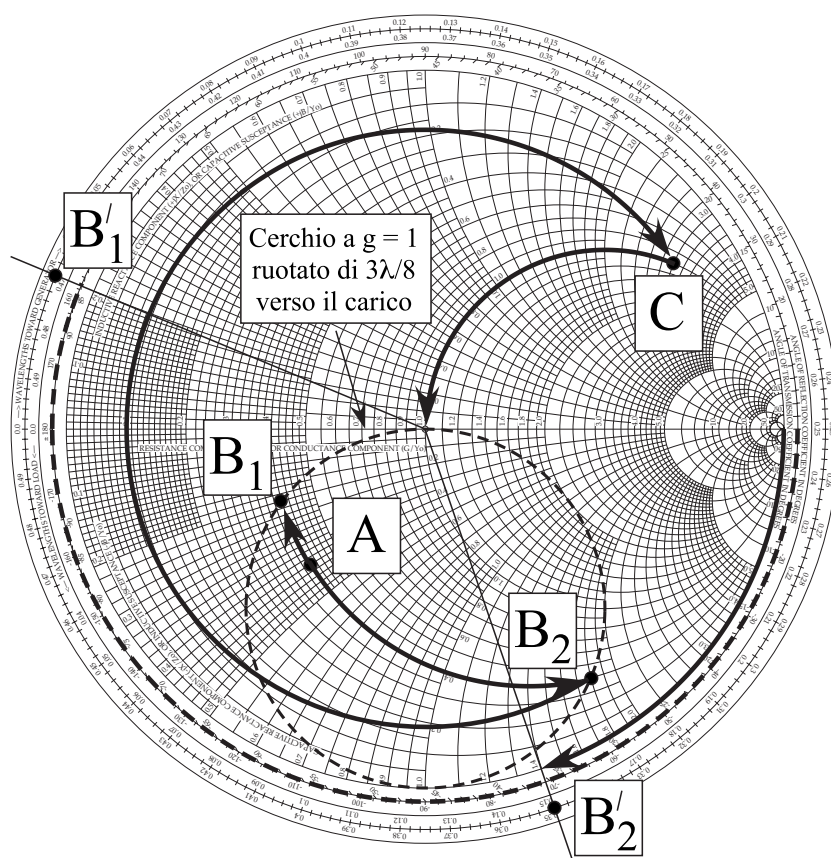


Figura 6.19: Carta di Smith relativa all'esercizio n.4.

Come ulteriore esempio di progettazione di un adattatore a doppio stub, si esegue qui di seguito l'adattamento del carico del precedente esercizio con un adattatore a doppio stub avente distanza tra gli stub paria $d = \lambda/4$ invece che $d = 3\lambda/8$.

In questo caso, si dovrà quindi tracciare sulla carta di Smith il cerchio $g = 1$ ruotato di 180 gradi (in senso antiorario, anche se, come ovvio, con una rotazione di 180 gradi la cosa è irrilevante), come illustrato in figura (6.20).

Si individuano poi i punti di intersezione tra il cerchio così tracciato e la circonferenza a parte reale costante, ed uguale alla parte reale dell'ammittenza di carico, $\text{Re}\{y_L\} = 0.4$. Essi sono i punti indicati come B_1 e B_2 in figura (6.20), e risultano rispettivamente caratterizzati dai valori di ammettenza

$$B_1 \quad : \quad y_{B_1} = 0.4 - i0.5 \quad ; \quad B_2 \quad : \quad y_{B_2} = 0.4 + i0.5 \quad .$$

La suscettanza del primo stub è allora, nei due casi

$$B_1 \quad : \quad y_{B_1} = 0.4 - i0.5 = y_{S1} + y_L \quad \Rightarrow \quad y_{S1} = -i0.1 \quad ,$$

$$B_2 \quad : \quad y_{B_2} = 0.4 + i0.5 = y_{S1} + y_L \quad \Rightarrow \quad y_{S1} = +i0.9 \quad .$$

Queste suscettanze possono essere realizzate con tratti di linea di lunghezza rispettivamente pari a

$$B_1 \quad : \quad \frac{\ell_1}{\lambda} = 0.486 - 0.25 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = 23.6 \text{ cm} \quad ,$$

$$B_2 \quad : \quad \frac{\ell_1}{\lambda} = 0.25 + 0.116 \quad \Rightarrow \quad \ell_1 = 36.6 \text{ cm} \quad .$$

Supposto di scegliere la soluzione B_2 , si può ora compiere la rotazione di 180 gradi, per raggiungere il punto C di figura (6.20), che risulta caratterizzato dall'ammittenza

$$y_{\text{punto C}} = 1 - i1.2 \quad .$$

Il secondo stub deve quindi avere suscettanza

$$b_{S2} = 1.2 \quad ,$$

che può essere ottenuta per mezzo di un tratto di linea di lunghezza

$$\frac{\ell_2}{\lambda} = 0.25 + 0.14 \quad \Rightarrow \quad \ell_2 = 39 \text{ cm} \quad .$$

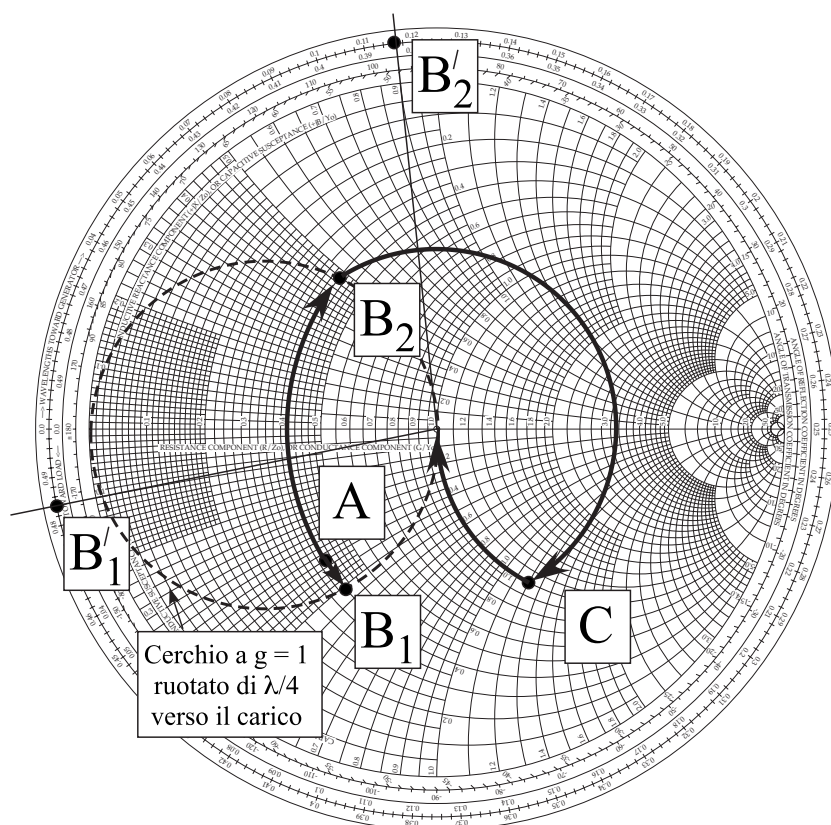
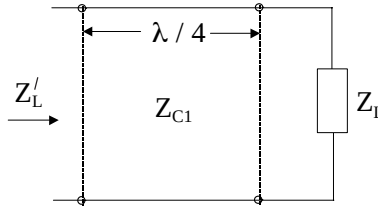


Figura 6.20: Carta di Smith relativa all'adattatore a doppio stub proposto nell'esercizio 4, con distanza $d = \lambda/4$ tra gli stub.

6.8.3 L'adattatore a $\lambda/4$.

Si consideri un tratto di linea di lunghezza $\lambda/4$, con impedenza caratteristica Z_{C1} chiuso su un carico con impedenza Z_L .



Con riferimento alle *impedenze normalizzate*, si ha

$$z'_L = \frac{Z'_L}{Z_{C1}} = \frac{1}{z_L} = \frac{1}{Z_L/Z_{C1}} \quad ,$$

e pertanto

$$Z'_L = \frac{Z_{C1}^2}{Z_L} \quad .$$

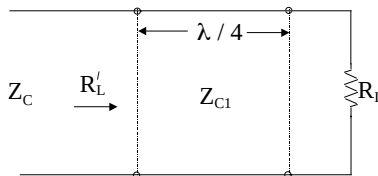
Il tratto di linea di lunghezza $\lambda/4$ si comporta quindi come un *invertitore di impedenza*, e fa sì che il carico presenti un nuovo valore di impedenza, Z'_L , che dipende da Z_{C1} .

Un oggetto di questo tipo permette dunque di *adattare una impedenza ad un'altra impedenza*, e può quindi essere utilizzato per realizzare l'adattamento di uniformità.

Infatti, si supponga in un primo momento di voler adattare un *carico reale*

$$Z_L = R_L \quad ,$$

ad una linea con impedenza caratteristica Z_C . È sufficiente a tal fine introdurre un tratto di linea di lunghezza $\lambda/4$



che faccia in modo che

$$R'_L = Z_C \quad .$$

L'unico parametro su cui si può agire è, ovviamente, l'impedenza caratteristica Z_{C1} del tratto di lunghezza $\lambda/4$, ed il dimensionamento va fatto in base alla relazione

$$R'_L = \frac{Z_{C1}^2}{R_L} = Z_C \quad .$$

Quindi

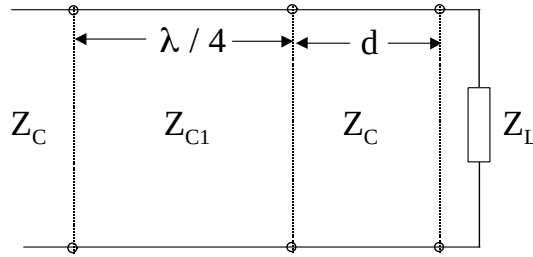
$$Z_{C1} = \sqrt{R_L Z_C} \quad .$$

Questo valore di impedenza caratteristica del tratto $\lambda/4$ permette dunque di adattare un *carico reale* R_L . La domanda che sorge spontanea è allora se questo adattatore sia utilizzabile anche con carichi *non reali*, e la risposta è affermativa.

Infatti, se si ha un carico con parte immaginaria non nulla, è sufficiente interporre il tratto di linea $\lambda/4$ *non direttamente sul carico*, ma ad una distanza d dove *esso risulta reale*. Si consideri per esempio l'adattamento di un carico con impedenza

$$Z_L = (50 + i25) \Omega \quad ,$$

ad una linea con impedenza caratteristica $Z_C = 50 \Omega$. Lo schema dell'adattatore è



e ciò che bisogna individuare sono la distanza d e l'impedenza caratteristica Z_{C1} .

Il dimensionamento di questi due parametri risulta immediato quando si usi la carta di Smith. Occorre innanzi tutto riportare il carico sulla carta; a tal fine si calcola il valore normalizzato,

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_C} = 1 + i0.5 \quad ,$$

che compare sulla carta di Smith *delle impedenze* in un punto A come quello rappresentato in figura (6.21). La distanza d viene individuata imponendo che, a quella distanza, il carico abbia componenti immaginaria nulla. Dalla lettura della carta di Smith si trovano due soluzioni,

$$B_1 \quad : \quad z_{B_1} = 1.65 \quad ,$$

ottenuto con una rotazione

$$\frac{d}{\lambda} = 0.25 - 0.146 = 0.104 \quad ,$$

ed una seconda soluzione che può essere ricavata dalla prima con una rotazione di metà carta di Smith, ed ha quindi

$$B_2 \quad : \quad z_{B_2} = \frac{1}{z_{B_1}} = 0.6 \quad , \quad \frac{d}{\lambda} = \left(\frac{d}{\lambda} \right)_{B_1} + 0.25 \quad .$$

Per calcolare le impedenze caratteristiche Z_{C1} del $\lambda/4$ è necessario ritornare ai valori dimensionali per le impedenze di carico riportate alla distanza $x = -d$. Si ottiene:

$$B_1 \quad : \quad Z_{B_1} = z_{B_1} Z_C = 82.5 \, \Omega \quad , \quad B_2 \quad : \quad Z_{B_2} = z_{B_2} Z_C = 30 \, \Omega$$

Nei due casi, quindi

$$B_1 \quad : \quad Z_{C1} = \sqrt{Z_{B_1} Z_C} = 64.2 \, \Omega \quad ,$$

$$B_2 \quad : \quad Z_{C1} = \sqrt{Z_{B_2} Z_C} = 38.7 \, \Omega \quad .$$

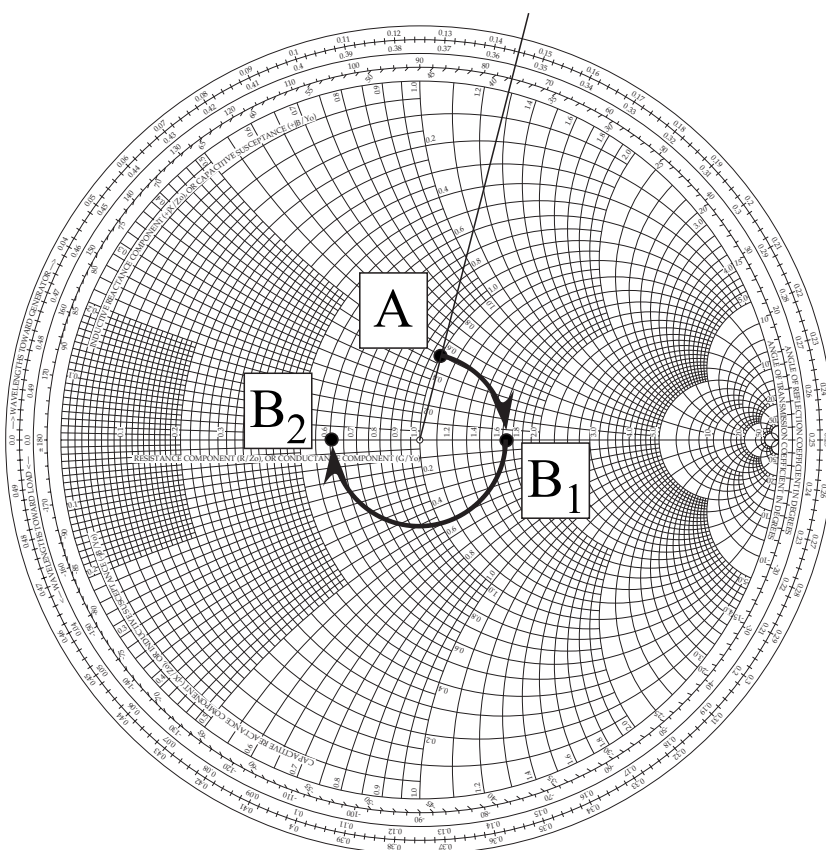
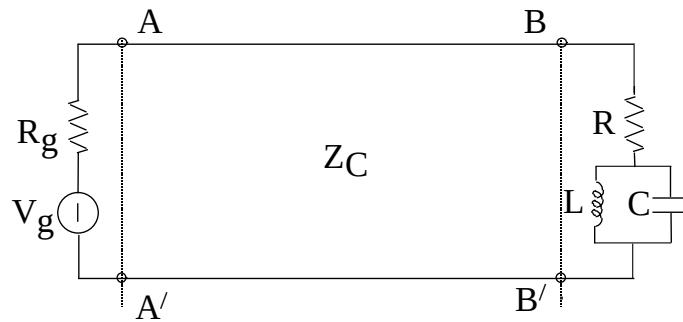


Figura 6.21: Carta di Smith relativa all'adattatore a $\lambda/4$.

6.8.4 Un esercizio riassuntivo

A conclusione del capitolo si propone un esercizio riassuntivo dove vengono rivisitati i criteri di adattamento dei tre tipi di adattatori proposti, e viene anche illustrato come si possa valutare l'andamento dei moduli di tensione e corrente lungo la linea. Si consideri dunque il circuito di figura

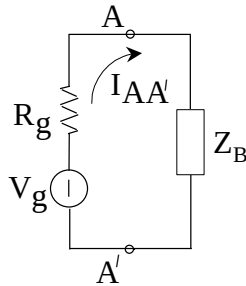


nel quale la linea ha costante di fase pari a quella del vuoto, $R_g = Z_C = 50 \Omega$, $V_g = 10 \text{ V}$, $R = 37.5 \Omega$ e $L = 3 \text{ nH}$, $C = 147.42 \text{ pF}$ e $\overline{AB} = 15.10 \text{ m}$. La frequenza è $f = 200 \text{ MHz}$.

1. Si determini la potenza complessa erogata dal generatore.
2. Si dimensioni un adattatore che, inserito ai morsetti BB' realizzi l'adattamento in uniformità, e che sia
 - uno stub semplice;
 - uno stub doppio con distanza $3\lambda/8$ tra i due elementi;
 - un adattatore a $\lambda/4$.
3. In condizioni di adattamento, si calcoli la potenza complessa erogata dal generatore, e la potenza complessa su ogni elemento del carico;
4. Con l'adattatore a doppio stub inserito, si tracci l'andamento del modulo della tensione e della corrente lungo la linea (si consideri il solo doppio stub che rende minimo il valore della lunghezza d_1 del primo stub).

Soluzione.

Per calcolare la potenza complessa erogata dal generatore, è necessario valutare l'impedenza del carico, e riportarla ai morsetti AA' del generatore, in modo che il circuito possa essere rappresentato in una forma equivalente del tipo



Si valuti quindi innanzi tutto l'impedenza del carico, che è costituito da una resistenza R posta in serie al parallelo di L e C . Quindi

$$Z_L = R + Z_{Cond. \parallel Ind.} \quad ,$$

con

$$Z_{Cond. \parallel Ind.} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{Cond}} + \frac{1}{Z_{Ind}}} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL} \quad .$$

Risulta allora

$$Z_L = R + \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL} = (37.5 + i12.5) \Omega \quad .$$

Si normalizzi questo valore rispetto a Z_C ; si ottiene

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_C} = 0.75 + i0.25 \quad .$$

Si riporti questo valore sulla carta di Smith, dove esso appare nel punto A di figura (6.22). Il carico può essere ora riportato al generatore mediante una rotazione (verso il generatore, e cioè in senso orario) corrispondente ad un tratto di linea con lunghezza $\overline{AB} = 15.10$ m. Si ricorda che sulla

carta di Smith le rotazioni sono espresse rispetto alla lunghezza d'onda, che risulta

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{200 \times 10^6 \text{ Hz}} = 1.5 \text{ m} \quad .$$

La rotazione che è necessario compiere è pertanto

$$\frac{\overline{AB}}{\lambda} = \frac{15.10 \text{ m}}{1.5 \text{ m}} = 10 + 0.066 \quad .$$

La rotazione di 10λ corrisponde a 20 giri completi della carta di Smith, e non ha quindi effetto, mentre la rimanente rotazione conduce dal punto A di figura (6.22) con impedenza $z_A = 0.75 + i0.25$ al punto B con impedenza

$$z_B = 1 + i0.4 \quad \Rightarrow \quad Z_B = z_B Z_C = (50 + i20) \Omega \quad .$$

La potenza generata, che è la potenza che esce dai morsetti AA', è dunque pari a

$$P_1 = \frac{1}{2} V_{AA'} (I_{AA'})^* \quad ,$$

con (leggi del partitore di tensione)

$$V_{AA'} = V_g \frac{Z_B}{Z_B + R_g} \quad , \quad I_{AA'} = \frac{V_g}{Z_B + R_g} \quad .$$

Pertanto

$$P_1 = \frac{1}{2} \left| \frac{V_g}{Z_B + R_g} \right|^2 Z_B = 240 \text{ mW} + i96 \text{ mVA}$$

Come è ovvio, a questo risultato si sarebbe potuti giungere anche utilizzando l'ammettenza del carico al posto della sua impedenza. In questo caso, si sarebbe infatti trovato

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = (0.024 - i0.008) \Omega^{-1} \quad ,$$

che, normalizzata rispetto a Z_C dà

$$y_L = Y_L Z_C = 1.2 - i0.4 \quad .$$

Questo valore di ammettenza normalizzato compare sulla carta di Smith nel punto C di figura (6.22). La rotazione di 0.066λ indotta dalla linea

conduce poi al punto indicato con D e caratterizzato dal valore di ammettenza normalizzata

$$y_D = 0.86 - i0.34 \quad \Rightarrow \quad Y_D = \frac{y_D}{Z_C} = (0.0172 - i0.0068) \Omega^{-1} \quad ,$$

e si può verificare che, come ci si deve aspettare

$$\frac{1}{Y_D} = \frac{1}{(0.0172 - i0.0068) \Omega^{-1}} = (50 + i20) \Omega = Z_B \quad .$$

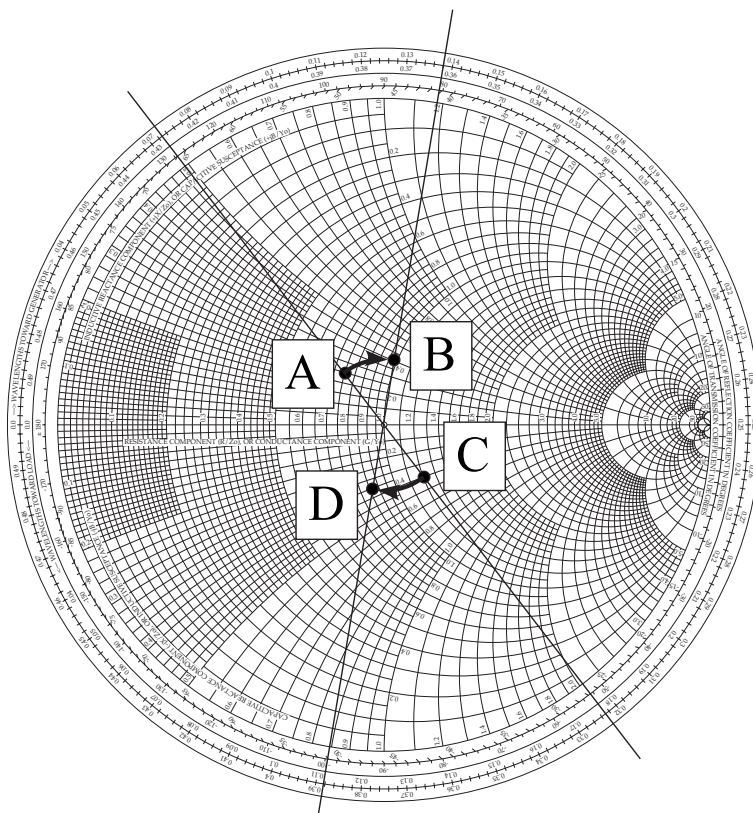
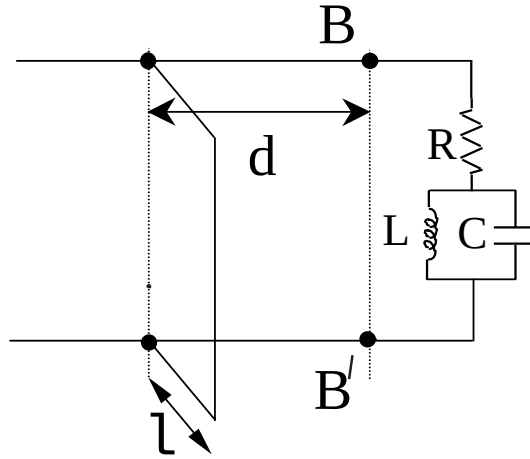


Figura 6.22: Carta di Smith relativa all'esercizio riassuntivo. Calcolo della potenza complessa erogata dal generatore.

Adattamento con lo stub semplice. Come più volte sottolineato, al fine di eseguire l'adattamento, sia con uno stub singolo, sia con il doppio stub, risulta conveniente lavorare con le ammettenze. Si posizioni quindi sulla carta di Smith l'ammettenza di carico, che, come visto, compare nel punto C di figura (6.22), ed è stata riportata anche nella figura (6.23), che verrà utilizzata per l'illustrazione dell'adattamento.



Lo stub semplice è inserito ad una distanza d dal carico tale che, a questa distanza, l'ammettenza normalizzata del carico giaccia sulla curva $g = 1$. Ciò avviene per due valori di d , individuati dai punti C_1 e C_2 di figura (6.23). Questi sono i punti con ammettenza normalizzata

$$C_1 \quad : \quad y_{C_1} = 1 - i0.42 \quad ,$$

che è ottenuto con una rotazione

$$\frac{d}{\lambda} = 0.359 - 0.323 = 0.036 \quad , \quad d = 5.4 \text{ cm} \quad ,$$

e

$$C_2 \quad : \quad y_{C_2} = 1 + i0.42 \quad ,$$

ottenuto con una rotazione

$$\frac{d}{\lambda} = (0.5 - 0.323) + 0.14 = 0.317 \quad , \quad d = 47.55 \text{ cm} \quad .$$

L'elemento in parallelo che costituisce lo stub deve poi essere dimensionato in modo da compensare la parte immaginaria delle ammettenze che si sono appena trovate. Nei due casi, esso deve quindi avere suscettanza b_S tale che

$$C_1 : b_S = 0.42 \quad , \quad C_2 : b_S = -0.42 \quad ,$$

e questi valori di suscettanza possono essere ottenuti con un tratto di linea di lunghezza rispettivamente pari a (si vedano i punti C'_1 e C'_2 di figura (6.23))

$$b_S = 0.42 : \frac{\ell}{\lambda} = 0.25 + 0.063 = 0.313 \quad \Rightarrow \quad \ell = 46.95 \text{ cm} \quad ,$$

$$b_S = -0.42 : \frac{\ell}{\lambda} = 0.437 - 0.25 = 0.187 \quad \Rightarrow \quad \ell = 28.05 \text{ cm} \quad .$$

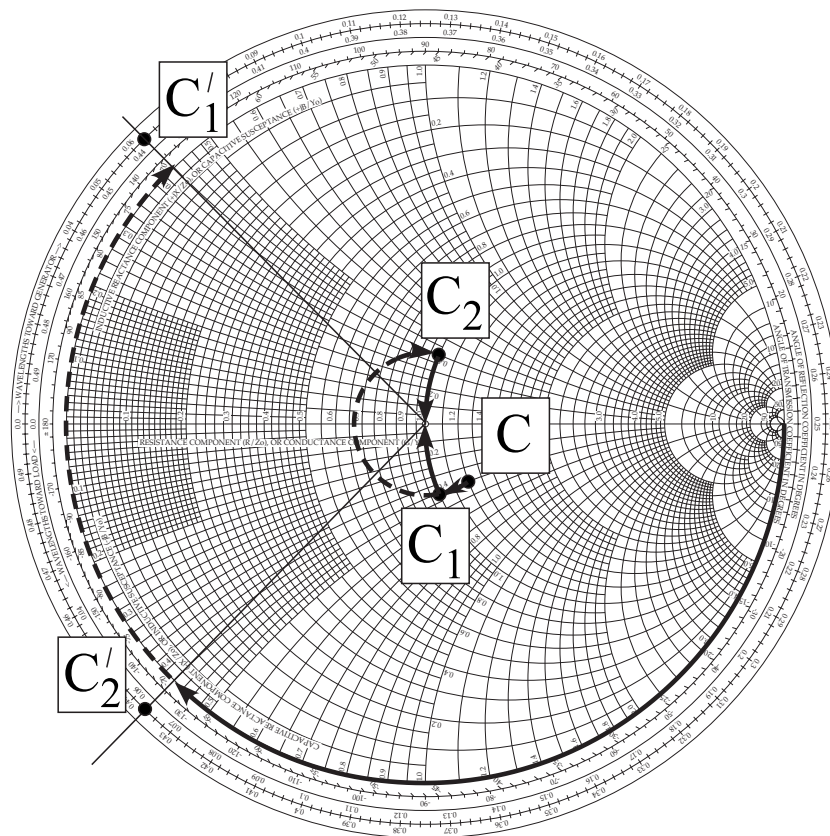
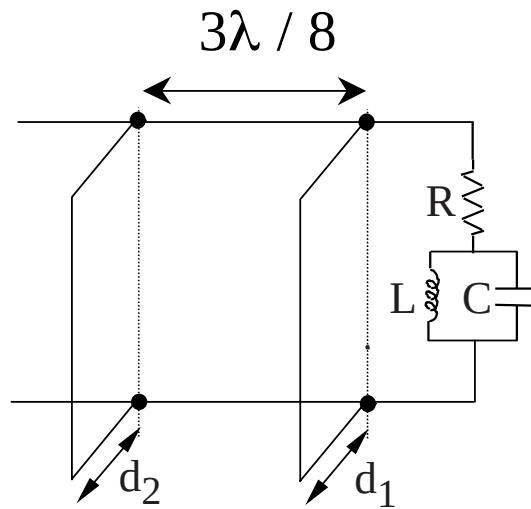


Figura 6.23: Carta di Smith relativa all'adattamento con stub semplice.

Adattamento con il doppio stub. Lo stub doppio che si chiede di progettare ha distanza $3\lambda/8$ tra i due elementi. Come prima cosa, si riporti quindi sulla carta di Smith il cerchio $g = 1$ ruotato di $3\lambda/8$ verso il carico, cioè in senso *antiorario* (si veda la figura (6.24)).



Il primo stub, connesso direttamente sul carico, deve servire a spostare il punto rappresentativo del carico sulla carta di Smith in modo tale che, muovendosi sulla circonferenza a parte reale costante, si intercetti il cerchio $g = 1$ ruotato che si è tracciato in precedenza. Si individuano così due soluzioni, indicate come D_1 e D'_1 in figura (6.24), che risultano caratterizzate dai valori di ammettenza normalizzata

$$D_1 : y_{D_1} = 1.2 - i0.02 \quad , \quad D'_1 : y_{D'_1} = 1.2 - i2 \quad .$$

Si può ora individuare l'ammettenza y_{S1} del primo stub, procedendo come segue. Nel caso della soluzione D_1 , si ha

$$y_{D_1} = 1.2 - i0.02 = y_{S1} + y_L = y_{S1} + 1.2 - i0.4 \quad ,$$

e l'ammettenza normalizzata del primo stub è dunque

$$y_{S1} = i0.38 \quad .$$

Questo valore di suscettanza può essere ottenuto con un tratto di linea di lunghezza (si veda il punto A_1 di figura (6.24))

$$\frac{d_1}{\lambda} = 0.25 + 0.058 = 0.308 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 46.2 \text{ cm} \quad .$$

Analogamente, nel caso della soluzione D'_1 , si ha

$$y_{S1} = y_{D'_1} - y_L = -i1.6 \quad ,$$

che è ottenuto con un tratto di linea di lunghezza (si veda il punto A'_1 di figura (6.24))

$$\frac{d_1}{\lambda} = 0.339 - 0.25 = 0.089 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 13.35 \text{ cm} \quad .$$

Dopo aver dimensionato il primo stub, si può eseguire la rotazione di $3\lambda/8$, ottenendo i due nuovi punti

$$D_1 \rightarrow D_2 \quad : \quad y_{D_2} = 1 + i0.2 \quad ,$$

$$D'_1 \rightarrow D'_2 \quad : \quad y_{D'_2} = 1 + i1.8 \quad .$$

In entrambi i casi, il secondo stub deve compensare la parte immaginaria delle ammettenze normalizzate così individuate, e deve quindi avere suscettanza b_{S2} rispettivamente pari a

$$D_2 \quad : \quad b_{S2} = -0.2 \quad ,$$

ottenibile con un tratto di linea di lunghezza

$$\frac{d_2}{\lambda} = 0.469 - 0.25 = 0.219 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 32.85 \text{ cm} \quad ,$$

e

$$D'_2 \quad : \quad b_{S2} = -1.8 \quad ,$$

ottenibile con un tratto di linea di lunghezza

$$\frac{d_2}{\lambda} = 0.331 - 0.25 = 0.081 \quad \Rightarrow \quad d_2 = 12.15 \text{ cm} \quad .$$

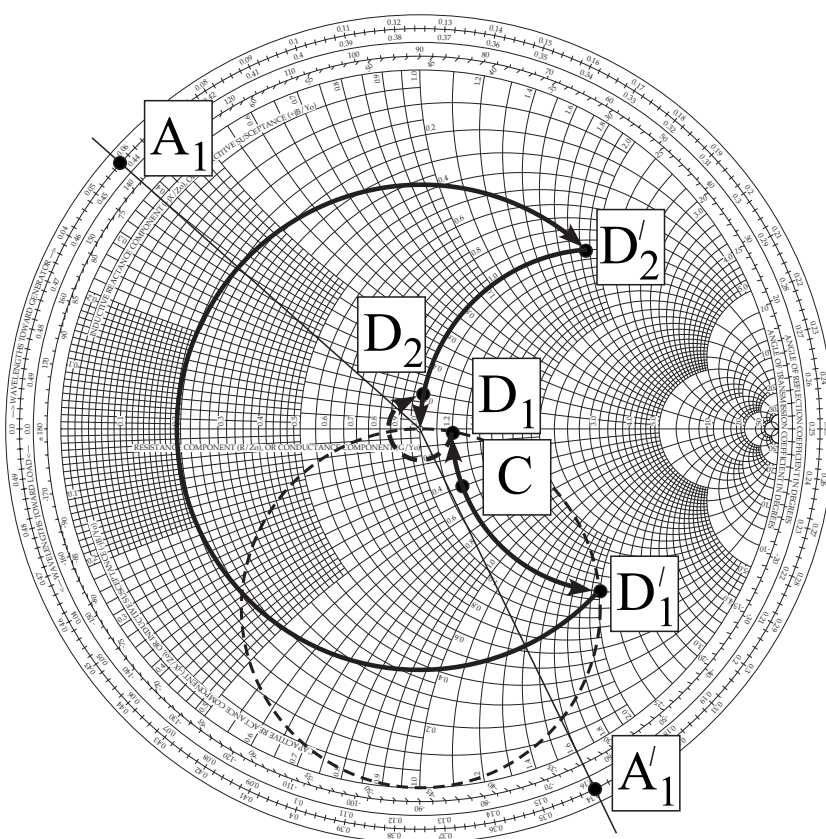
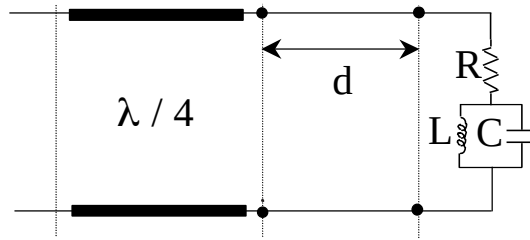


Figura 6.24: Carta di Smith relativa all'adattamento con doppio stub.

Adattamento con adattatore a $\lambda/4$. Per dimensionare questo tipo di adattatore risulta conveniente lavorare con le impedenze piuttosto che con le ammettenze. Si riporti quindi sulla carta di Smith il valore dell'impedenza normalizzata del carico, che appare nel punto A ($z_A = 0.75 + i0.25$) di figura (6.25).



Si ricorda che l'adattatore a $\lambda/4$ è costituito da un tratto di linea di lunghezza $\lambda/4$ ed impedenza caratteristica $Z_{C(\lambda/4)}$ posto ad una distanza d dal carico, tale che, a questa distanza, esso presenti una impedenza reale. Si cominci quindi con l'individuare questa distanza d per mezzo della carta di Smith. Ruotando il carico, si individuano due punti:

$$E_1 \quad : \quad z_{E_1} = 1.5 \quad ; \quad E'_1 \quad : \quad z_{E'_1} = 0.66 \quad ,$$

ottenuti, rispettivamente, con rotazioni

$$E_1 \quad : \quad \frac{d}{\lambda} = 0.25 - 0.074 = 0.176 \quad \Rightarrow d = 26.4 \text{ cm} \quad ,$$

$$E'_1 \quad : \quad \frac{d}{\lambda} = 0.176 + 0.25 = 0.426 \quad \Rightarrow d = 63.9 \text{ cm} \quad .$$

In unità dimensionali, le impedenze a destra dell'adattatore $\lambda/4$ valgono dunque

$$E_1 \quad : \quad Z_{E_1} = z_{E_1} Z_C = 75 \Omega \quad ,$$

$$E'_1 \quad : \quad Z_{E'_1} = z_{E'_1} Z_C = 33.3 \Omega \quad .$$

L'adattatore $\lambda/4$ deve quindi avere impedenza caratteristica che nei due casi è rispettivamente uguale a

$$E_1 \quad : \quad Z_{C(\lambda/4)} = \sqrt{Z_C Z_{E_1}} = 61.23 \Omega \quad ,$$

$$E'_1 \quad : \quad Z_{C(\lambda/4)} = \sqrt{Z_C Z_{E'_1}} = 40.82 \Omega \quad .$$

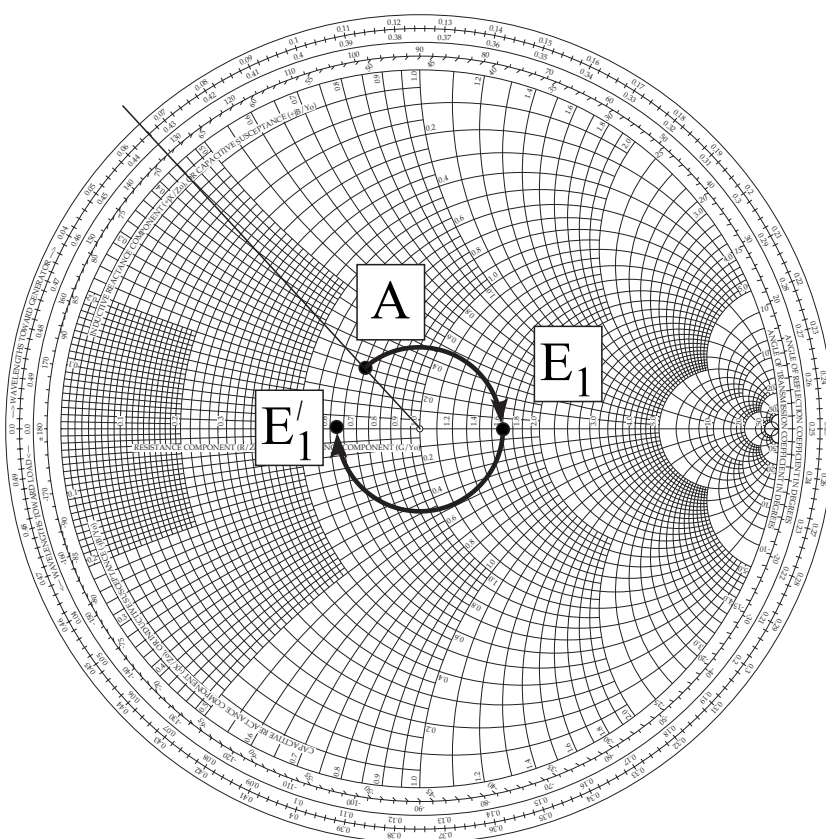
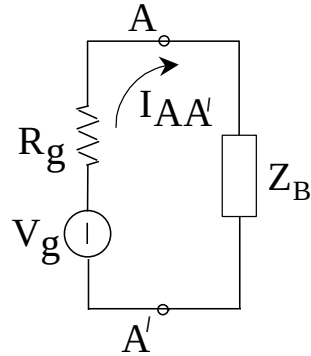


Figura 6.25: Carta di Smith relativa all'adattamento con adattatore a $\lambda/4$.

Calcolo della potenza in condizioni di adattamento. In condizioni di adattamento il circuito è equivalente ad un circuito del tipo



e la potenza generata vale dunque

$$P_2 = \frac{1}{2} \left| \frac{V_g}{Z_C + R_g} \right|^2 Z_c = 250 \text{ mW} \quad .$$

Poichè la resistenza R è l'unico elemento dissipativo del circuito, ne deriva anche

$$P_R = 250 \text{ mW} \quad .$$

Tuttavia, poichè vale anche

$$P_R = \frac{1}{2} R |I_R|^2 \quad ,$$

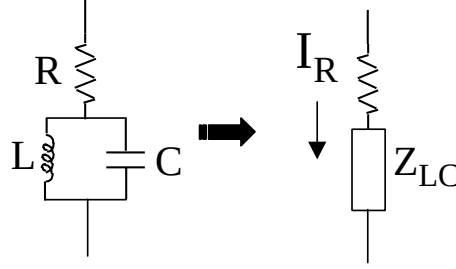
se ne deduce che la resistenza è percorsa da una corrente

$$|I_R|^2 = \frac{2 P_R}{R} = 13.33 \times 10^{-3} \text{ A}^2 \quad .$$

Per ciò che concerne l'induttore ed il condensatore, che sono posti in parallelo, risulta conveniente fare riferimento alla tensione che vi è ai loro capi e che può essere calcolata come segue. Il parallelo tra L e C ha impedenza

$$Z_{LC} = \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = i 12.5 \Omega \quad ,$$

e ai capi di questa impedenza parallelo vi è dunque una tensione tale che



$$|V_{LC}|^2 = |Z_{LC}|^2 |I_{LC}|^2 = |Z_{LC}|^2 |I_R|^2 = 2.083 V^2 \quad .$$

La potenza reattiva sui due componenti è dunque

$$Q_L = \frac{1}{2} \frac{|V_{LC}|^2}{X_L} = \frac{1}{2} \frac{|V_{LC}|^2}{\omega L} = 276 \text{ mVA} \quad ,$$

$$Q_C = \frac{1}{2} \frac{|V_{LC}|^2}{X_C} = -\frac{1}{2} \omega C |V_{LC}|^2 = -193 \text{ mVA} \quad .$$

Tensione e corrente lungo la linea. Al fine di illustrare come tracciare correttamente gli andamenti dei moduli di tensione e corrente nei vari punti della linea, è opportuno richiamare brevemente alcuni aspetti già visti durante la discussione della teoria riguardante la propagazione nelle linee prive di perdite. In particolare, si era visto che

1. in ogni tratto di linea omogeneo (cioè non interrotto da carichi, stub, o altri elementi), il modulo della tensione e della corrente è una funzione periodica
 - (a) con periodo pari a $\lambda/2$
 - (b) che presenta massimi e minimi assoluti tra loro intercalati, e con distanza $\lambda/4$ tra ognuna delle sezioni di massimo (minimo) e ognuna delle sezioni di minimo (massimo) adiacente;
 - (c) infine, nelle sezioni in cui è massimo il modulo della tensione è minimo il modulo della corrente, e viceversa.

2. In corrispondenza ai massimi del modulo della tensione, la sezione della linea presenta il massimo valore di impedenza, che è reale e vale

$$Z_{MAX} = \frac{|V_{MAX}|}{|I_{min}|} = Z_C S \quad ,$$

dove S è il rapporto d'onda stazionaria nella linea.

3. Analogamente, in corrispondenza ai minimi del modulo di tensione vi è il minimo valore di impedenza, dato da

$$Z_{min} = \frac{|V_{min}|}{|I_{MAX}|} = \frac{Z_C}{S} \quad .$$

Questi risultati di carattere generale danno le linee guida per il tracciamento degli andamenti del modulo della tensione e della corrente. Infatti, si tratta di tracciare, in ogni sezione omogenea della linea, delle funzioni periodiche di periodo $\lambda/2$ comprese tra valori estremi dati da $|V_{MAX}|$ e $|V_{min}|$ per la tensione, e $|I_{MAX}|$ e $|I_{min}|$ per la corrente.

Le note dei precedenti punti 2) e 3) indicano poi che le sezioni di minimo e massimo modulo sono quelle nelle quali la linea presenta impedenza reale, e sono quindi facilmente individuabili attraverso la carta di Smith.

Si consideri il caso dell'esercizio in esame, con l'adattatore a doppio stub inserito. Vi sono, in questo caso, tre sezioni omogenee della linea, e cioè il carico (subito a destra del primo stub), la sezione di lunghezza $3\lambda/8$ tra i due elementi dello stub, e quella di lunghezza $\overline{AB} - 3\lambda/8$ a sinistra del secondo stub. Si analizzano ora nel dettaglio le tre sezioni.

- *Carico.* In questa sezione, di dimensione “nulla”, non si deve, ovviamente, determinare dove si trovino massimi o minimi, ma solo quali siano i valori del modulo della tensione e della corrente. Quest'ultima è quella già calcolata, ovvero la corrente $|I_R|$ che fluisce nella resistenza R (e nell'impedenza parallelo di L e C), e che vale

$$|I(x = 0^+)| = |I_R| = \sqrt{\frac{2P_R}{R}} = 0.12 \text{ A} \quad .$$

Per quanto concerne la tensione, si ha poi

$$|V(x = 0^+)| = |I_R| |R + Z_{LC}| = 4.56 \text{ V} \quad .$$

- *Sezione tra gli stub.* In questa sezione, che ha lunghezza $3\lambda/8$ le onde di tensione e corrente sono onde parzialmente stazionarie, ed occorre quindi individuare le sezioni di massimo e minimo modulo, ed i corrispondenti valori di $|I|$ e $|V|$. Inoltre, al fine di tracciare gli andamenti di tensione e corrente in tutti i punti della sezione, è necessario valutare anche i valori di $|I|$ e $|V|$ nei punti estremi della sezione stessa, ovvero immediatamente a sinistra del primo stub, ed immediatamente a destra del secondo.

- *A sinistra del primo stub ($x = 0^-$).* In questo punto l'ammettenza normalizzata è

$$y = y_{D'_1} = 1.2 - i2 \quad ,$$

e si trova, nella carta di Smith, nel punto D'_1 di figura (6.27). L'ammettenza *non normalizzata* risulta quindi

$$Y_{D'_1} = \frac{y_{D'_1}}{Z_C} = (0.024 - i0.04) \Omega^{-1} \quad .$$

La parte reale di questa ammettenza consente di calcolare il modulo della tensione che è presente alla coordinata $x = 0^-$, ovvero subito a sinistra del primo stub. Infatti, *dal momento che la linea è priva di perdite, la potenza attiva si conserva* in ogni sezione della linea e si può allora scrivere

$$P_{attiva} = \frac{1}{2} |V(x)|^2 \operatorname{Re} \{Y(x)\} \quad ,$$

dove $V(x)$ e $Y(x)$ sono la tensione e l'ammettenza alla generica coordinata x . In particolare, quindi, nel punto $x = 0^-$ immediatamente a sinistra del primo stub, si ha

$$|V(x = 0^-)| = |V_{D'_1}| = \sqrt{\frac{2 P_{attiva}}{\operatorname{Re} \{Y(x = 0^-)\}}} = 4.56 \text{ V} \quad .$$

Si noti che, non a caso, questo valore del modulo di tensione coincide con quello calcolato per $x = 0^+$, cioè sul carico posto immediatamente a *destra* del primo stub. Infatti, tra le sezioni $x = 0^-$ e $x = 0^+$ è interposto solo un elemento in *parallelo*, che quindi non altera il valore della tensione.

Per quanto concerne la corrente, essa è data da

$$|I(x = 0^-)| = |I_{D'_1}| = |V_{D'_1}| |Y_{D'_1}| = 0.21 \text{ A} \quad .$$

A differenza della tensione, questo valore non coincide con quello calcolato a destra del primo stub, perchè solo una parte della corrente che c'è nella sezione D'_1 va sul carico, mentre la rimanente va nel primo stub.

- *Massimi e minimi.* Ci si interessa ora della tensione e della corrente nei punti compresi tra i due stub, dove la presenza di onde parzialmente stazionarie dà luogo a massimi e minimi del modulo di tensione e corrente. La prima cosa da fare è individuare le sezioni della linea dove le tensioni e le correnti presentano valori massimi o minimi. Come si accennava in precedenza, questo può essere fatto con semplicità usando la carta di Smith, ed in particolare valutando le distanze alle quali ruotando il carico $y_{D'_1}$ si trova una ammettenza normalizzata reale, e cioè quando il punto sulla carta di Smith intercetta la retta a parte immaginaria nulla. Come illustrato in figura (6.27), una rotazione

$$\frac{d}{\lambda} = 0.5 - 0.308 = 0.192 \quad \Rightarrow \quad d = 28.8 \text{ cm} \quad ,$$

conduce ad esempio al punto H_1 con ammettenza

$$y_{H_1} = 0.2 \quad \Rightarrow \quad Y_{H_1} = \frac{y_{H_1}}{Z_C} = 0.004 \Omega^{-1} \quad ,$$

che è un valore minimo di ammettenza, cioè massimo di impedenza. La sezione $x = x_1 = -28.8 \text{ cm}$ è quindi una sezione di massimo per il modulo di tensione, e quindi anche di minimo per il modulo di corrente. I valori di questi massimi e minimi possono essere calcolati, ancora una volta, ricorrendo alla conservazione della potenza attiva, e cioè scrivendo

$$|V(x_1)| = |V(-28.8 \text{ cm})| = \sqrt{\frac{2 P_{attiva}}{Y_{H_1}}} = 11.18 \text{ V} \quad ,$$

e

$$|I(x_1)| = |I(-28.8 \text{ cm})| = |V(x_1)| |Y_{H_1}| = 0.045 \text{ A} \quad .$$

La successiva sezione nella quale l'ammettenza ritorna ad essere reale (ed uguale a $y_{H_2} = 5$) si ha ad una distanza

$$x_2 = x_1 - \frac{\lambda}{4} = -66.3 \text{ cm} \quad .$$

Si noti tuttavia che il tratto di linea omogenea compresa tra i due stub ha una lunghezza $3\lambda/8 = -56.25 \text{ cm}$, e quindi il punto x_2 cade al di fuori di questa sezione e non può essere accettato (questo fatto può, d'altra parte, essere notato anche nella carta di Smith. Si vede infatti che, nel ruotare da H_1 verso H_2 si incontra il punto D'_2 prima di arrivare ad H_2 . Il punto D'_2 è però il valore dell'ammettenza normalizzata che si ha subito a destra del secondo stub, ed il fatto che questo punto venga raggiunto prima del punto H_2 sta ad indicare che si trova il secondo stub prima della sezione nella quale vi è un estremo dei moduli di tensione e corrente.)

Nella sezione di lunghezza $3\lambda/8$ c'è dunque *solo un massimo del modulo della tensione* (e, corrispondentemente, solo un minimo del modulo della corrente).

- *A destra del secondo stub* ($x = -3\lambda/8^+$). In questo punto, che è il punto indicato come D'_2 in figura (6.27) si ha

$$y_{D'_2} = 1 + i1.8 \quad \Rightarrow \quad Y_{D'_2} = \frac{y_{D'_2}}{Z_C} = (0.02 + i0.036) \Omega^{-1} \quad ,$$

e pertanto

$$\left| V \left(-\frac{3\lambda}{8} \right) \right| = |V_{D'_2}| = \sqrt{\frac{2 P_{attiva}}{\text{Re}\{Y_{D'_2}\}}} = 5 \text{ V} \quad ,$$

e

$$\left| I \left(-\frac{3\lambda}{8} \right) \right| = |V_{D'_2}| |Y_{D'_2}| = 0.21 \text{ A} \quad .$$

- *Sezione a sinistra del secondo stub.* In questa sezione, dove vi è adattamento in uniformità, si instaurano onde progressive di tensione e di corrente, e rimangono quindi costanti i moduli sia della tensione sia della corrente. Essi sono rispettivamente dati da

$$|V| = \sqrt{\frac{2 P_{attiva}}{Z_C}} = 5 \text{ V} \quad ,$$

$$|I| = |V| Z_c = 0.1 \text{ A} \quad .$$

Ancora una volta, si nota che nell'attraversare il secondo stub, ovvero nel passare da $x = -3\lambda/8^-$ a $x = -3\lambda/8^+$ vi è continuità del modulo di tensione, ma non di quello della corrente.

Gli andamenti dei moduli di tensione e corrente sono quelli disegnati in figura (6.26).

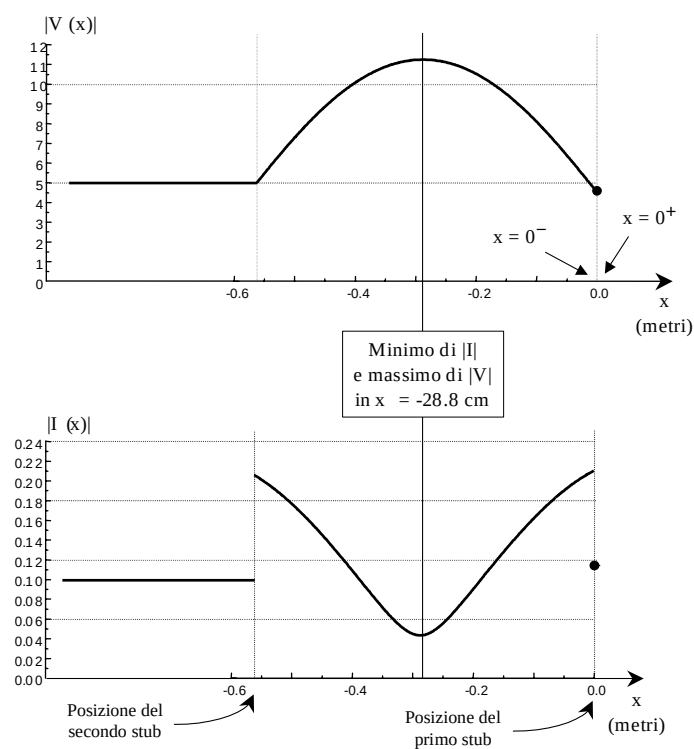


Figura 6.26: Tensione e corrente lungo il circuito adattato con un adattatore a doppio stub.

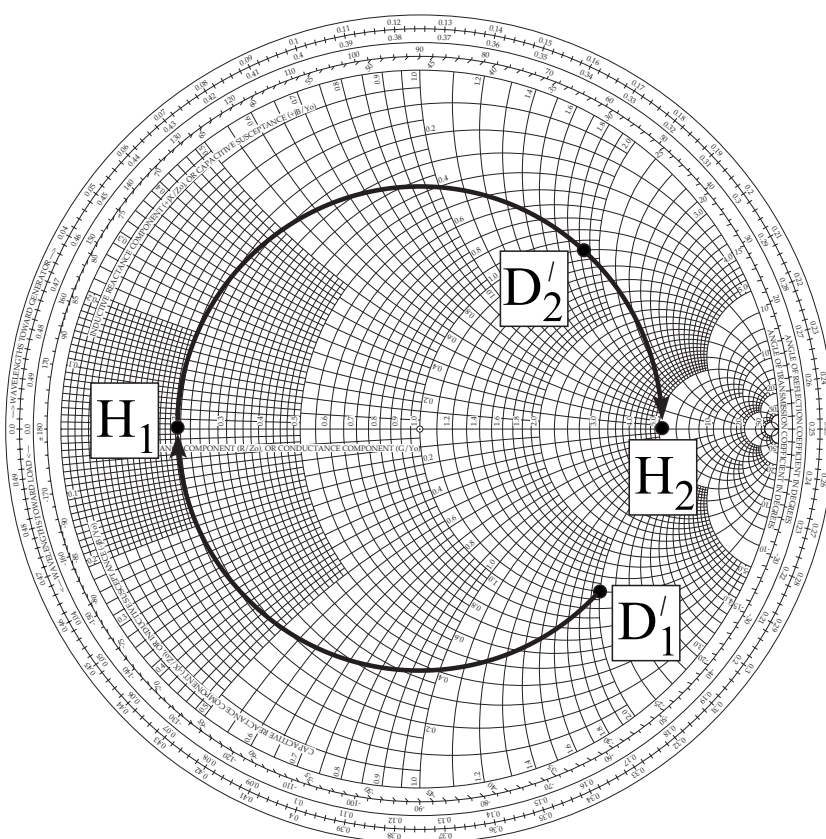


Figura 6.27: Carta di Smith relativa all'esercizio riassuntivo. Calcolo delle sezioni di massimo e minimo modulo per le correnti e le tensioni.

Capitolo 7

Onde piane

Nel capitolo 4 si è mostrato che quando le equazioni di Maxwell vengono studiate in una regione dello spazio priva di sorgenti ed omogenea, la loro soluzione è data dalla sovrapposizione di due onde le cui caratteristiche dipendono dalle condizioni al contorno che vanno poste sul bordo della regione di interesse, e che fisicamente descrivono il modo in cui i generatori eccitano il campo elettromagnetico.

Scopo di questo capitolo è lo studio più approfondito di una particolare famiglia di soluzioni che si ottengono qualora si immagini che la regione dello spazio sede del mezzo omogeneo nel quale il campo si sviluppa sia *tutto lo spazio*. Come è facile immaginare, questo modello per la propagazione, e i risultati che da esso derivano, sono una astrazione che non potrà mai corrispondere ad un caso reale sia perchè non è ragionevole ipotizzare che tutto lo spazio presenti le stesse caratteristiche elettromagnetiche, sia perchè in un siffatto modello non vi sarebbe spazio per le sorgenti che al campo danno luogo.

Tuttavia, la famiglia di soluzioni che si ottiene con questo modello, e che prende il nome di famiglia delle *onde piane*, ha un ruolo centrale nella teoria dei campi elettromagnetici. Infatti, si vedrà innanzi tutto che le soluzioni di questo problema di propagazione sono estremamente semplici e facili da utilizzare, ma soprattutto che esse formano ciò che, in termini matematici, viene detto un *insieme completo* di soluzioni.

Questo termine sta ad indicare che la soluzione di un *qualsiasi* problema di propagazione, che abbia luogo in un mezzo lineare anche non indefinitamente omogeneo, può *sempre* essere espressa attraverso una opportuna combinazione di più onde piane. In altre parole, con lo stu-

dio che si effettua in questo capitolo si acquisisce una *base* di soluzioni semplici delle equazioni di Maxwell che possono servire, con molta generalità, a modellare campi che si propagano in strutture anche molto complicate.

Si consideri dunque la propagazione di un'onda elettromagnetica in una regione dello spazio indefinitamente estesa ed omogenea, ed in assenza di sorgenti. Lo studio del campo in questa regione può essere affrontato nel dominio della rappresentazione complessa tramite il formalismo del potenziale vettore magnetico, che in questo caso risulta essere la soluzione dell'equazione di Helmholtz omogenea

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_i = 0 \quad ,$$

in quanto si è supposto che non vi siano sorgenti. I campi elettrico e magnetico sono poi dati da:

Campo elettrico

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A} - \nabla \phi \quad ,$$

con ϕ soluzione di

$$\nabla^2 \phi - \sigma^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} = 0 \quad ,$$

per l'assenza di sorgenti. Una possibile soluzione per ϕ è allora $\phi = 0$ e risulta così

$$\mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A} \quad .$$

Campo magnetico

Direttamente dalle equazioni di Maxwell,

$$\mathbf{H} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{i\omega\mu} \quad .$$

7.0.5 La soluzione con il metodo della separazione delle variabili

Si consideri dunque l'equazione

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{A} = 0 \quad ,$$

ed al fine di trovarne la soluzione si introducano le due seguenti ipotesi:

1. assunto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ si supponga che

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A(x, y, z) \hat{x} \quad .$$

Si noti che questa ipotesi che, come si vedrà tra breve, consente una semplificazione dei calcoli, *non è un'ipotesi restrittiva*. Infatti, poichè il mezzo nel quale è definito il campo è stato assunto essere lineare, qualsiasi sia $\mathbf{A}$ è sempre possibile operare una scomposizione lungo i tre assi cartesiani, per ricostruire infine la soluzione tramite il principio di sovrapposizione degli effetti.

2. Si supponga inoltre che la funzione scalare $A(x, y, z)$ possa essere scritta *separando* tra loro le variabili, ovvero nella forma

$$A(x, y, z) = A_0 f_1(x) f_2(y) f_3(z) \quad .$$

A differenza della precedente, questa è, almeno in linea di principio, un'ipotesi restrittiva. Infatti, in base a questa ipotesi si limita la ricerca delle soluzioni nell'ambito di quelle che risultano esprimibili come prodotto di tre funzioni, una dipendente dalla sola x , una dalla sola y e l'ultima dalla sola z .

L'ipotesi è restrittiva perchè, in tutta generalità, non si può affermare a priori che operando in tal modo si riescano ad individuare *tutte* le soluzioni del problema in oggetto, ovvero essere sicuri che così facendo non si perdano delle soluzioni altrimenti accettabili.

La giustificazione della validità di questa ipotesi verrà data più avanti nel capitolo, precisamente nel paragrafo 7.6, dove si dimostrerà quella proprietà cui si accennava in precedenza, la *completezza* dell'insieme di soluzioni che l'ipotesi consente di trovare.

Con l'introduzione di queste due ipotesi l'equazione per $\mathbf{A}$ può allora essere riscritta come segue

$$A_0 \left[\frac{d^2 f_1}{dx^2} f_2 f_3 + f_1 \frac{d^2 f_2}{dy^2} f_3 + f_1 f_2 \frac{d^2 f_3}{dz^2} \right] = \sigma^2 A_0 f_1 f_2 f_3 \quad ,$$

da cui si ha anche

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2} + \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} + \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} = \sigma^2 = \text{costante} \quad , \quad (7.1)$$

dal momento che il mezzo è indefinitamente omogeneo, cioè ϵ e μ non dipendono dalle coordinate $\{x, y, z\}$.

L'equazione (7.1) può essere letta come segue: quando si separano le variabili si trova una soluzione che è formata dalla somma di tre termini, il primo dei quali dipende solo dalla coordinata x , il secondo solo dalla y ed il terzo solo dalla z , e la somma di questi tre termini deve essere uguale ad un valore costante, cioè ad un numero indipendente da x , y e z .

Evidentemente, dovendo ciò valere per ogni $\{x, y, z\}$, l'unico modo in cui questo può risultare possibile è che ognuna delle tre funzioni sia singolarmente uguale ad una costante, ovvero che sia

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{dx^2} = S_1^2 \quad , \quad \frac{1}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dy^2} = S_2^2 \quad , \quad \frac{1}{f_3} \frac{d^2 f_3}{dz^2} = S_3^2 \quad ,$$

con le costanti S_1 , S_2 e S_3 , dette *costanti di separazione*, tali che

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \sigma^2 \quad .$$

L'intero problema elettromagnetico si è quindi ridotto allo studio di una equazione differenziale del tipo

$$\frac{d^2 f_i}{d\xi^2} = S_i^2 f_i \quad , \quad \xi = \{x, y, z\} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ,$$

che ha come soluzione la funzione

$$f_i(\xi) = C_i e^{-S_i \xi} + D_i e^{+S_i \xi} \quad .$$

Si potrebbe quindi pensare di scrivere $\mathbf{A}(x, y, z)$ come prodotto di tre di quelle funzioni, ottenendo così una espressione data dalla combinazione di otto termini. In realtà ciò è inutile perchè, pur non sapendo quanto valgano gli S_i e pur non avendo specificato se con S_i si intende il ramo positivo o negativo di $\sqrt{S_i^2}$, gli S_i sono pur sempre legati tra loro dalla relazione $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \sigma^2$. Si può verificare allora che è sufficiente scrivere la generica soluzione come

$$\mathbf{A}(x, y, z) = A_0 e^{-(S_1 x + S_2 y + S_3 z)} \hat{x} = A_0 e^{-\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}} \hat{x} \quad ,$$

dove si è indicato con $\mathbf{r}$ il raggio vettore che ha come coordinate $\{x, y, z\}$, e con

$$\mathbf{S} = S_1 \hat{x} + S_2 \hat{y} + S_3 \hat{z} \quad ,$$

un vettore che ha $\{S_1, S_2, S_3\}$ come componenti lungo i tre assi coordinati, e che prende il nome di *vettore di propagazione*. Esso ha la proprietà che

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \sigma^2 \quad .$$

Si noti a tal proposito che, poichè σ^2 è, in generale, una quantità complessa, anche $\mathbf{S}$ lo è, e si usa scrivere

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} + i \mathbf{k} \quad ,$$

con $\mathbf{a}$ che prende il nome di *vettore di attenuazione*, e $\mathbf{k}$ quello di *vettore di fase*. Con l'introduzione di questi due vettori il campo $\mathbf{A}$ si scrive dunque come

$$\mathbf{A} = A_0 e^{-\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}} \hat{x} = A_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{x} \quad ,$$

e si nota che il primo dei due termini agisce sull'ampiezza dell'onda, ed il secondo sulla fase. Questa osservazione è utile perchè quando nello studio di un fenomeno ondulatorio si riescono ad isolare i termini che intervengono sull'ampiezza o sulla fase dell'onda, è poi possibile determinare le superfici dello spazio sulle quali *l'ampiezza o la fase rimangono costanti*, e ciò è importante perchè, storicamente, si usa caratterizzare le onde (non solo quelle elettromagnetiche) proprio in base alla forma che le loro superfici equifase assumono.

Nel caso in esame, le superfici equifase, che sono per definizione quelle superfici dello spazio sulle quali risulta

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{costante} \quad ,$$

sono dunque superfici *piane* dello spazio, precisamente le superfici ortogonali al vettore $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$. Per questa ragione la famiglia di soluzioni che sono state trovate viene indicata con il nome di famiglia della *onde piane*.

Accanto alle superfici equifase si possono poi determinare anche le superfici equiampiezza, che sono definite come l'insieme di quei punti dello spazio tali che

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \text{costante} \quad ,$$

e, come è immediato verificare, anche in questo caso le superfici sono dei piani, ora ortogonali al vettore $\mathbf{a}$. Si faccia attenzione che, in generale, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{k}$ possono avere orientazioni differenti, e quindi i piani equiampiezza possono non coincidere con quelli equifase.

7.1 I campi elettrico e magnetico dell'onda piana uniforme

Avendo derivato una forma analitica per il potenziale vettore magnetico, si ricavano ora da questo le corrispondenti espressioni per il campo elettrico e per il campo magnetico.

7.1.1 Campo elettrico

Come visto all'inizio del capitolo, questo è legato al potenziale vettore dall'espressione

$$\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} \quad ,$$

e risulta quindi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}} \quad .$$

Il campo elettrico è quindi una funzione delle coordinate spaziali dello stesso tipo di quella già incontrata per $\mathbf{A}$, ed ha quindi piani equifase e piani equiampiezza rispettivamente coincidenti con quelli di $\mathbf{A}$.

7.1.2 Campo magnetico

Il campo magnetico è dato da

$$\mathbf{H} = -\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{i\omega\mu} = -\frac{\nabla \times [\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}}]}{i\omega\mu} \quad ,$$

e si tratta quindi di calcolare il rotore del prodotto tra un vettore ($\mathbf{E}_0$) ed una funzione scalare (il termine esponenziale). Si può usare a tal fine l'identità vettoriale

$$\nabla \times (\mathbf{w} f) = f \nabla \times \mathbf{w} + \nabla f \times \mathbf{w} \quad ,$$

valida per una qualsiasi funzione differenziabile f e per un qualsiasi vettore $\mathbf{w}$. Nel caso in esame, poichè $\mathbf{E}_0$ è un vettore costante, risulta allora

$$\nabla \times [\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}}] = \nabla (e^{-\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 = -\mathbf{S} e^{-\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_0 \quad ,$$

e pertanto

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E}}{i\omega\mu} \quad .$$

Anche il campo magnetico ha quindi gli stessi piani equifase ed equiampiezza del potenziale $\mathbf{A}$, e del campo elettrico $\mathbf{E}$.

7.2 Classificazione delle onde piane

Nel paragrafo precedente si è utilizzata una delle equazioni di Maxwell al fine di ricavare il campo magnetico a partire dal campo elettrico.

Si mostra ora che, utilizzando anche l'altra delle equazioni di Maxwell, si possono ottenere delle ulteriori informazioni a riguardo della natura fisica dell'onda piana: in particolare, è possibile stabilire come i vettori $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ed $\mathbf{S}$ sono tra loro mutuamente orientati nello spazio, e si può introdurre una *classificazione* delle onde piane.

Si consideri dunque l'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon_C \mathbf{E} \quad .$$

Quando $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sono onde piane si ha allora

$$\mathbf{E} = -\frac{\nabla \times (\mathbf{S} \times \mathbf{E})}{\omega^2 \mu \epsilon_C} = -\frac{\mathbf{S} \times \mathbf{S} \times \mathbf{E}}{-\omega^2 \mu \epsilon_C} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E} \times \mathbf{S}}{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \quad .$$

Si considerino ora i vettori

$$\mathbf{S} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E}}{i\omega\mu} \quad , \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E} \times \mathbf{S}}{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} \quad .$$

A prima vista, i tre vettori sembrano formare una terna trirettangola, dal momento che, apparentemente $(\mathbf{S} \times \mathbf{E}) \perp \{\mathbf{S}, \mathbf{E}\}$ e $(\mathbf{S} \times \mathbf{E} \times \mathbf{S}) \perp \mathbf{S}$. Tuttavia, occorre tenere presente che, come detto più sopra, il vettore $\mathbf{S}$ è in generale un *vettore complesso*, e la nozione di ortogonalità tra vettori complessi non è altrettanto semplice di quella che risulta valida per i vettori reali. Nel caso in esame si può dimostrare che la terna $\mathbf{S}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ è trirettangola *solo se* il vettore $\mathbf{S}$ risulta parallelo al suo complesso coniugato, il che è vero solo se

$$\mathbf{S} = \mathbf{a} \quad \text{o} \quad \mathbf{S} = i\mathbf{k} \quad .$$

Si mostra ora che il primo di questo due casi, quello con $\mathbf{S} = \mathbf{a}$, cioè con $\mathbf{k} \equiv 0$ non è tuttavia un caso fisicamente realizzabile. Infatti, vale

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{k}|^2 + 2i\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \sigma^2 = -\omega^2 \mu \left(\epsilon - i\frac{\gamma}{\omega} \right) \quad ,$$

e si ottiene dunque

$$\begin{cases} |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{k}|^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad , \\ 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \omega \mu \gamma \quad . \end{cases} \quad (7.2)$$

Deve pertanto essere

$$|\mathbf{k}|^2 > |\mathbf{a}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{k}|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{k}| \neq 0 \quad .$$

Come volevasi dimostrare, non può dunque essere $\mathbf{k} \equiv 0$. Da un punto di vista fisico, d'altra parte, ciò è ben giustificato: porre $\mathbf{k} \equiv 0$ significa infatti richiedere che il campo elettromagnetico abbia la stessa fase in tutti i punti dello spazio o, in altri termini, che esso si propaghi a velocità infinita in tutte le direzioni dello spazio.

La terna $\mathbf{S} = i\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ è dunque una terna trirettangla solo se il mezzo nel quale avviene la propagazione è tale da rendere nullo il vettore $\mathbf{a}$, ovvero se esso è *privo di perdite*. Più avanti nel capitolo si vedrà come la direzione individuata dal vettore $\mathbf{k}$ sia la direzione in cui “fluisce” la potenza attiva associata ad un’onda piana, di modo che essa può essere identificata con la *direzione di propagazione* dell’onda. Quando il mezzo è privo di perdite il fatto che $\mathbf{k}, \mathbf{E}$ ed $\mathbf{H}$ siano tra loro mutuamente ortogonali rappresenta allora, in termini matematici, l’idea intuitiva che si ha delle onde elettromagnetiche: onde che si propagano in una data direzione dello spazio, e nelle quali il campo elettrico e quello magnetico giacciono su un piano ortogonale alla direzione di propagazione e sono, anch’essi, disposti ortogonalmente tra loro. Si sottolinea ancora una volta che, tuttavia, questa visione intuitiva della propagazione delle onde elettromagnetiche è ben giustificata solo quando il mezzo nel quale il campo si propaga è *rigorosamente* privo di perdite.

Ora che si sono chiarite queste caratteristiche generali delle onde piane, se ne propone una classificazione. A tal fine, si comincia con il supporre che il mezzo nel quale avviene la propagazione sia un mezzo privo di perdite, ovvero con $\gamma = 0$. Dalle relazioni (7.2) si ha allora

$$2\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \omega\mu\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad ,$$

e questa condizione può essere realizzata in due diversi modi. Il primo è quello che si ha quando

- $\mathbf{a} = 0$.

In questo caso risulta

$$|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{k}|^2 = \omega^2\mu\epsilon \quad ,$$

ovvero

$$|\mathbf{k}| = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{2\pi\nu}{c_{\mu\epsilon}} \equiv \frac{2\pi}{\lambda_{\mu\epsilon}} \quad ,$$

dove $c_{\mu\epsilon}$ è la velocità della radiazione elettromagnetica nel mezzo con costanti $\{\mu, \epsilon\}$ e

$$\lambda_{\mu\epsilon} = \frac{c_{\mu\epsilon}}{\nu} \quad ,$$

è la lunghezza d'onda che la radiazione presenta in quel mezzo. Si noti che, a differenza della frequenza del campo, che è una quantità indipendente dal mezzo in cui il campo si propaga¹, la lunghezza d'onda invece *dipende dalle caratteristiche del mezzo*.

Le onde così definite prendono il nome di *onde piane uniformi*, e per esse vale

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E} \times \mathbf{S}}{\sigma^2} \quad , \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{E}}{i\omega\mu} \quad ,$$

con

$$\mathbf{S} = i\mathbf{k} = i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{k} \quad . \quad (7.3)$$

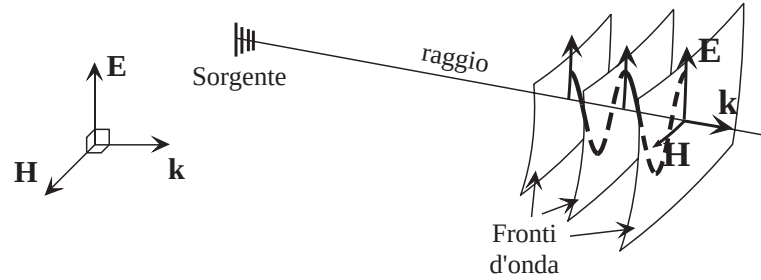


Figura 7.1: Disposizione dei vettori $\hat{k}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ per l'onda piana uniforme e raffigurazione della sua propagazione.

Ora, poichè risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \times \mathbf{E} \times \mathbf{S} &= (i\omega\sqrt{\mu\epsilon})\hat{k} \times \mathbf{E} \times (i\omega\sqrt{\mu\epsilon})\hat{k} = \sigma^2 \hat{k} \times \mathbf{E} \times \hat{k} \\ \mathbf{S} \times \mathbf{E} &= (i\omega\sqrt{\mu\epsilon})\hat{k} \times \mathbf{E} \end{aligned}$$

¹Questa affermazione è in accordo con un noto risultato dell'elettrodinamica quantistica che, modellando i fenomeni elettromagnetici in termini di fotoni invece che di onde, assegna ad ogni fotone una energia che è direttamente proporzionale alla sua frequenza. Per la conservazione dell'energia, la frequenza non deve quindi cambiare se anche si cambia il mezzo nel quale ha luogo la propagazione.

si ha dunque

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \hat{k} \times \mathbf{E} \times \hat{k} & , \\ \mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{k} \times \mathbf{E} & . \end{cases} \quad (7.4)$$

Come già anticipato in precedenza, quindi, in questo caso la terna $\hat{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ è una terna trirettangola, con i tre vettori che risultano disposti come in figura (7.1).

È interessante calcolare anche il vettore di Poynting dell'onda piana uniforme; esso risulta

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times \hat{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{k} \quad ,$$

e vi sono allora due osservazioni da fare:

1. $\mathbf{P}$ è un vettore puramente reale, il che indica che l'onda piana “trasporta” solo potenza attiva;
2. $\mathbf{P} \propto \hat{k}$, cioè, come si era anticipato in precedenza, la potenza attiva “si muove” nella direzione individuata dal vettore $\mathbf{k}$ e questa direzione può quindi essere identificata con la direzione di propagazione dell'onda. Il campo dell'onda piana è dunque un *campo TEM* rispetto alla direzione di propagazione.

Si noti altresì che le locuzioni “trasporta” e “si muove” sono state indicate usando le virgolette, e ciò è stato fatto per una ragione ben precisa, che viene esposta qui di seguito. Si immagini infatti di applicare il teorema di Poynting all'onda piana uniforme in un qualsiasi volume V dello spazio, racchiuso da una superficie S . Poichè il mezzo nel quale è definita l'onda è omogeneo, privo di sorgenti e di perdite, e $\mathbf{P}$ è puramente reale, il teorema fornisce il seguente risultato

$$0 = 2\omega \int_V \left(\mu_R \frac{|\mathbf{H}|^2}{4} - \epsilon_R \frac{|\mathbf{E}|^2}{4} \right) dV + \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{n} dS \quad ,$$

dove con $\hat{n}$ si è indicata, come di consueto, la normale uscente dalla superficie S . Ora, poichè in base alla (7.4) il campo dell'onda piana uniforme è, ovunque, *localmente riso-*
*nante*², l'integrale di volume si annulla e quindi si ottiene

²Si noti che, se il mezzo è privo di perdite, così come nelle ipotesi del caso che si sta trattando, $\mu \equiv \mu_R$ e $\epsilon \equiv \epsilon_R$.

la seguente conclusione: il flusso del vettore di Poynting attraverso una qualsiasi superficie chiusa dello spazio è sempre e comunque nullo. In altri termini, nell'onda piana uniforme non vi è un vero trasporto di potenza, e non vi è quindi nemmeno un campo che si muove nello spazio: per effetto delle ipotesi molto irrealistiche che sono state poste all'inizio della trattazione, infatti, l'onda piana è *già* distribuita in tutti i punti dello spazio e dunque, a rigore, non si potrebbe parlare di direzione di propagazione o di movimento di energia. In realtà, come si vedrà nel seguito, in molti casi reali, tipicamente quelli che coinvolgono il calcolo del campo irradato dalle antenne, quando il campo stesso viene valutato a grande distanza dalle sorgenti, esso può essere localmente approssimato con le espressioni valide per le onde piane; in quei casi avrà senso identificare la direzione di propagazione della potenza, e si vedrà che in effetti questa coincide con la direzione individuata dal vettore $\mathbf{k}$.

• $\mathbf{a} \perp \mathbf{k}$.

Il secondo modo in cui è possibile annullare il prodotto interno tra $\mathbf{a}$ e $\mathbf{k}$ è quello che si ha quando i due vettori in oggetto sono disposti secondo due direzioni tra loro ortogonali. In questo caso, allora, l'onda piana ha i piani equifase che sono ortogonali ai piani equiampiezza, ed essa viene indicata con il nome di *onda piana evanescente*.

Al contrario di quello che potrebbe sembrare a prima vista, questo tipo di onda non è una pura curiosità matematica, ma essa gioca invece un ruolo fondamentale nella comprensione di alcuni effetti fisici che verranno illustrati nel seguito; in particolare, si vedrà che essa è essenziale per descrivere un fenomeno molto noto, quello della cosiddetta *riflessione totale*, ed altri analoghi fenomeni che si verificano, ad esempio, nella propagazione delle onde all'interno delle guide metalliche.

Rimandando dunque al seguito per l'esemplificazione dell'utilità di questa onda, ci si limita ora solo a discuterne alcune proprietà. In particolare, si osserva che se si calcola il vettore di Poynting, esso risulta essere complesso, con la sua parte reale diretta secondo $\hat{\mathbf{k}}$,

e la sua parte immaginaria secondo $\hat{a}$. Inoltre, poichè vale

$$|\mathbf{k}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad ,$$

il modulo del vettore d'onda $\mathbf{k}$ risulta maggiore di quello che un'onda piana uniforme presenta nel mezzo con parametri ϵ e μ .

Proseguendo nella descrizione della classificazione delle onde piane, si passa ora ad analizzare il caso in cui il mezzo materiale in cui avviene la propagazione sia un mezzo con perdite di tipo dissipativo, cioè tale che $\gamma \neq 0$. In questo caso si ha allora

$$2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \omega \mu \gamma > 0 \quad ,$$

e quindi, indicato con θ l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{k}$, risulta $|\theta| < \pi/2$. In particolare, se $\theta = 0$ si ritrova un'onda con piani equifase e piani equiampiezza coincidenti, ma per la quale l'ampiezza non rimane costante in tutto lo spazio. Questa onda prende ancora il nome di *onda piana uniforme*. In tutti gli altri casi nei quali i piani equifase non coincidono con i piani equiampiezza, l'onda viene invece indicata con il nome di *onda dissociata*.

7.3 Equivalenza con le linee di trasmissione

Si è visto in precedenza che quando si considera la propagazione di un'onda piana uniforme in un mezzo privo di perdite si ottiene un campo che è trasverso elettromagnetico (TEM) rispetto alla direzione di propagazione. Questa caratteristica ne ricorda una analoga che era stata posta in evidenza quando si era introdotto lo studio della propagazione nelle linee di trasmissione e si vuole ora dimostrare che l'analogia non è casuale, ma deriva invece dal fatto che si può costruire una perfetta corrispondenza tra il problema di propagazione che si sta analizzando qui e quello che riguarda le linee.

A tal fine si considerino le equazioni di Maxwell scritte nel dominio della frequenza per un mezzo omogeneo, isotropo e privo di sorgenti

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu \mathbf{H} \quad ,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon \mathbf{E} \quad .$$

e si supponga per semplicità che la direzione di propagazione coincida con quella identificata dal versore $\hat{z}$. Poichè si intende analizzare la propagazione di *onde piane*, il campo elettrico e quello magnetico delle onde in oggetto devono essere funzione della sola coordinata z , cioè essi non devono dipendere dalle coordinate trasverse x e y :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z) \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(z) \quad .$$

Dalle equazioni di Maxwell si ricava allora

$$i\omega\mu H_z \equiv i\omega\epsilon E_z \equiv 0 \quad ,$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_x}{dz} = -i\omega\mu H_y \\ \frac{dH_y}{dz} = -i\omega\epsilon E_x \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dE_y}{dz} = i\omega\mu H_x \\ \frac{dH_x}{dz} = i\omega\epsilon E_y \end{array} \right. .$$

Il sistema delle equazioni di Maxwell si separa dunque in due sottosistemi che coinvolgono solo le componenti trasverse dei campi elettrico e magnetico, e che sono tra loro indipendenti: nel primo vi sono solo le componenti E_x ed H_y e, nel secondo, solo le E_y ed H_x .

Si consideri ora nel dettaglio il primo di questi sottosistemi e si ponga

$$\mathbf{E}(z) = V(z) \hat{x} \quad , \quad \mathbf{H}(z) = I(z) \hat{y} \quad .$$

Le equazioni che descrivono la propagazione dell'onda sono allora

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV}{dz} = -ZI \\ \frac{dI}{dz} = -YV \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = i\omega\mu \\ Y = i\omega\epsilon \end{array} \right. ,$$

e, come è immediato verificare, esse coincidono formalmente con le equazioni del telegrafo derivate per le linee di trasmissione, così come volevasi dimostrare.

7.4 Impedenza d'onda

L'analogia appena descritta può essere estesa ulteriormente, e si possono allora definire anche per l'onda piana i concetti di costante di fase,

β , e di impedenza intrinseca, η . Queste due grandezze risultano rispettivamente uguali a

$$i\beta = \sqrt{ZY} = i\omega\sqrt{\mu\epsilon} \quad , \quad \eta = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad . \quad (7.5)$$

Si individuano così due quantità che sono entrambe caratteristiche del mezzo nel quale avviene la propagazione; per la prima valgono le considerazioni già esposte in precedenza, in particolare il fatto che la lunghezza d'onda delle onde di tensione e di corrente dipende dai parametri elettrici del mezzo materiale. Per ciò che concerne l'impedenza, invece, essa è una grandezza che ha le dimensioni fisiche degli Ohm, e che, nel vuoto, vale $\eta \equiv \eta_0 \simeq 120\pi [\Omega]$. Come è mostrato anche dalle equazioni (7.4), questa grandezza risulta pari al rapporto tra le ampiezze dei campi elettrico e magnetico dell'onda piana, ed in questo senso la sua definizione coincide con quella che viene usualmente data nell'ambito dell'elettrotecnica, dove l'impedenza è calcolata come rapporto tra tensione e corrente.

Va tuttavia sottolineato che a questo risultato si è giunti essenzialmente perchè nel caso delle onde piane si può ridurre il problema delle equazioni di Maxwell ad un problema *scalare*, e ciò consente di interpretare i campi elettrico e magnetico nella forma delle tipiche grandezze dell'elettrotecnica, ovvero in termini di tensione e di corrente.

Con tutta evidenza, questo è tuttavia un caso particolare, e la corrispondenza tra campi e circuiti che è qui così naturale diventa meno immediata quando lo studio delle equazioni di Maxwell viene affrontato nella sua completa generalità, e cioè quando si deve trattare con campi vettoriali. In questo caso, naturalmente, l'impedenza non può più essere definita semplicemente come rapporto tra le ampiezze dei campi elettrico e magnetico, giacchè questi hanno natura vettoriale, ma va invece introdotta come segue.

Si indica con $\hat{u}$ una generica direzione dello spazio e si definisce *impedenza d'onda nella direzione $\hat{u}$* la quantità

$$\eta(\hat{u}) \quad | \quad \hat{u} \times \mathbf{E} \times \hat{u} = \eta(\hat{u}) \mathbf{H} \times \hat{u} \quad .$$

Si noti che, nel caso dell'onda piana, l'impedenza calcolata in precedenza coincide con quella definita qui a patto che quest'ultima venga valutata nella direzione di propagazione, cioè con $\hat{u} \equiv \hat{z}$. Si ha infatti in questo caso

$$\hat{u} \times \mathbf{E} \times \hat{u} = V(z) \hat{z} \times \hat{x} \times \hat{z} = V(z) \hat{y} \times \hat{z} \quad ,$$

$$\mathbf{H} \times \hat{u} = I(z) \hat{y} \times \hat{z} \quad ,$$

da cui, per l'appunto, $\eta(\hat{z}) = I(z)/V(z) = \sqrt{\mu/\epsilon}$. A riguardo di questa espressione vi sono da fare due osservazioni importanti:

1. l'impedenza d'onda è reale, e questo fatto non deve trarre in inganno. Infatti, sulla scorta dell'analogia con l'elettrotecnica che è stata prima posta in rilievo, si potrebbe erroneamente pensare che vi sia incongruenza tra il fatto di aver trovato una impedenza reale ed il fatto che la propagazione è stata considerata in un mezzo privo di perdite, e come tale non dissipativo. In realtà, un valore reale dell'impedenza indica solamente che il campo elettrico e quello magnetico sono tra loro in fase, di modo che l'onda “trasporta” *solo potenza attiva*. Si è di fatto ritrovato un risultato già visto nello studio della propagazione nelle linee di trasmissione: come ora, se accade che in una determinata sezione della linea l'impedenza è puramente reale, ciò significa che lì vi è transito di sola potenza attiva, indipendentemente dal fatto che in quella sezione vi sia o non vi sia un vero resistore fisico dove la potenza attiva si possa dissipare.
2. Se si calcola l'impedenza d'onda in direzione $\hat{u} = -\hat{z}$ si trova $\eta(-\hat{z}) = -\eta(\hat{z})$. Anche in questo caso il risultato si presta ad una immediata interpretazione circuitale: esso infatti è l'analogo di quanto si trova nella teoria dei circuiti se si cambia convenzione ad una tensione o ad una corrente alla porta di ingresso di un generico bipolo.

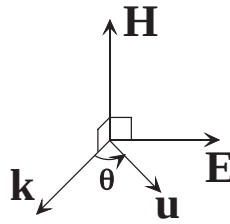


Figura 7.2: Disposizione dei vettori per il calcolo dell'impedenza d'onda nel caso di campo con polarizzazione TM.

Accanto al caso del campo TEM, è poi interessante valutare l'impedenza d'onda anche per campi TE e TM. Si consideri dapprima il

caso illustrato in fig.(7.2), nel quale si valuta l'impedenza d'onda in una di direzione $\hat{u}$ appartenente al piano che contiene i vettori $\mathbf{k}$ e $\mathbf{E}$. È immediato verificare che risulta

$$\eta_{TM}(\hat{u}) = \eta \cos(\theta) \quad ,$$

dove si è usato il pedice TM per indicare che l'impedenza è stata valutata in una direzione che giace nel piano trasverso rispetto al campo magnetico.

Analogamente, nel caso rappresentato in Fig.(7.3) risulta anche

$$\eta_{TE}(\hat{u}) = \frac{\eta}{\cos(\theta)} \quad ,$$

e si è usato il pedice TE ad indicare che, questa volta, il calcolo dell'impedenza d'onda è stato eseguito rispetto ad una direzione che appartiene al piano ortogonale al vettore di campo elettrico.

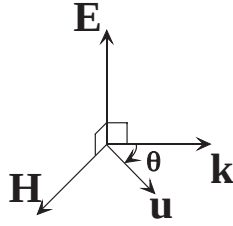


Figura 7.3: Disposizione dei vettori per il calcolo dell'impedenza d'onda nel caso di campo con polarizzazione TE.

7.5 Velocità di fase delle onde piane

La trattazione che è stata fin qui presentata ha riguardato l'analisi della rappresentazione complessa del campo elettromagnetico che si sviluppa in un mezzo indefinitamente esteso in assenza di sorgenti. Il corrispondente campo espresso nel dominio del tempo può essere ricavato secondo le consuete relazioni del tipo

$$\mathbf{e}(t, \mathbf{r}) = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\omega t} \right] \quad ,$$

che forniscono, nella direzione individuata dal generico versore $\hat{\xi}$,

$$e_{\xi}(t, \mathbf{r}) = |E_{0,\xi}| e^{-\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_{\xi}) \quad , \quad \xi \in \{x, y, z\} \quad .$$

Come si nota, quando si studia l'onda nel dominio del tempo, si riconosce in sostanza che essa è una “versione tridimensionale” delle onde che si erano trovate nel capitolo 4, e nelle quali comparivano funzioni del tipo $f(kz - \omega t)$. In analogia a quanto si era fatto allora, quando si era mostrato che la dipendenza del tipo $(kz - \omega t)$ configurava un fenomeno ondulatorio che si muove nello spazio al passare del tempo, e per il quale può quindi essere definita una velocità, si usano ora le espressioni più generali del campo nel dominio del tempo che sono state derivate in questa sede per approfondire il concetto di *velocità di fase delle onde elettromagnetiche*.

A tal fine, si può procedere come segue: si immagini di fissare l'attenzione in un particolare punto della funzione coseno, ad esempio sul punto di massimo di questa, e di muoversi insieme all'onda con una velocità tale che il punto sotto osservazione appaia “fermo” rispetto al sistema di riferimento solidale con l'onda. Quando ciò accade, si può scrivere

$$d(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 0 \quad ,$$

e questa relazione indica che il punto sotto osservazione appare fermo se in ogni intervallo di tempo infinitesimo dt ci si è spostati nello spazio di una quantità $d\mathbf{r}$ tale che

$$\omega dt - \mathbf{k} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Posto ora

$$d\mathbf{r} = \hat{u}|d\mathbf{r}| \quad , \quad \mathbf{k} = \hat{k}|\mathbf{k}| \quad ,$$

con $\hat{u}$ versore della direzione in cui ci si muove, si ha allora

$$\omega dt - \hat{k} \cdot \hat{u}|\mathbf{k}||d\mathbf{r}| = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega dt - \cos(\theta)|\mathbf{k}||d\mathbf{r}| = 0 \quad ,$$

dove θ è l'angolo tra i versori $\hat{k}$ e $\hat{u}$. Si definisce allora *velocità di fase dell'onda nella direzione $\hat{u}$* la quantità

$$v_f(\hat{u}) = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}| \cos(\theta)} \quad . \quad (7.6)$$

Si noti che la velocità di fase dipende dunque dalla direzione di osservazione ed essa è data da una espressione che induce ad alcune considerazioni. In particolare, si può notare che vi è un termine del tipo $\cos(\theta)$ al *denominatore* della (7.6), cosa che implica una velocità $v_f \rightarrow \infty$ per

$\theta \rightarrow \pi/2$. Questo risultato, apparentemente in contrasto con i principi della relatività è, in realtà, un risultato corretto e facilmente interpretabile. Per come è stata definita, infatti, la quantità $v_f(\hat{u})$ è la velocità con cui è necessario muoversi lungo la direzione $\hat{u}$ al fine di mantenersi in un sistema di riferimento in moto solidale con l'onda. Quindi, innanzi tutto essa è *solo la velocità con cui si vede la fase evolvere nello spazio* rispetto ad una determinata direzione, ovvero, come verrà anche chiarito con maggior dettaglio nel paragrafo 7.11, essa *non è la velocità con cui si muove l'energia del campo elettromagnetico* e per questa ragione il fatto di trovare che essa può eccedere la velocità della luce nel vuoto non costituisce nessuna violazione di principi fisici fondamentali. Inoltre, poichè v_f è una misura di quanto rapidamente “scorrono” i piani equifase rispetto alla direzione di osservazione $\hat{u}$, è ragionevole attendersi che, quanto più è grande l'angolo di osservazione, tanto più rapido sembri essere il movimento dei piani equifase.

Normalmente, quando non si specifica in modo esplicito la direzione di osservazione $\hat{u}$, si sottointende che questa coincida con la direzione individuata dal vettore di fase $\mathbf{k}$, e la velocità di fase è il valore minimo della (7.6), ovvero

$$v_f = \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} \quad .$$

Seguendo la classificazione delle onde che si è introdotta in precedenza, si valuta ora la velocità di fase per i vari tipi di onde piane:

Onde piane uniformi in mezzi privi di perdite.

Per queste onde risulta $\mathbf{k} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ e dunque

$$v_f(\hat{u}) = \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c_{\mu,\epsilon}}{\cos(\theta)} \quad .$$

La velocità dell'onda è dunque pari a quella che nel capitolo 4 era stata indicata con il termine di *velocità della luce* nel mezzo con costanti ϵ e μ se essa viene valutata lungo la direzione di propagazione; in tutte le altre direzioni, invece, la velocità di fase risulta maggiore della “velocità della luce”.

Onde evanescenti.

Per queste onde, come si è visto, risulta $|\mathbf{k}| > \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. Ne segue che in alcune direzioni dello spazio si ha $v_f < c_{\mu,\epsilon}$. Per questa ragione le onde

piane evanescenti sono anche dette *onde lente*.

Onde in mezzi con perdite.

Anche in questo caso, poichè $\mathbf{a} \neq 0$ si ha $|\mathbf{k}| > \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ed esistono quindi direzioni dello spazio lungo le quali la velocità di fase risulta inferiore alla “velocità della luce”. Anche le onde presenti nei mezzi con perdite sono dunque onde lente.

7.6 Completezza delle onde piane

Si dimostra ora che la famiglia delle onde piane che sono state sin qui descritte forma un *insieme completo* di soluzioni delle equazioni di Maxwell.

A tal fine, si considerano campi definiti in regioni di spazio isotrope, lineari, prive di sorgenti ed omogenee *a tratti*, e si sottolinea, in particolare, quest’ultima caratteristica: essa è di particolare rilievo perchè quando si sarà dimostrata l’espandibilità in onde piane di un campo definito in una regione con queste proprietà si sarà di fatto mostrato quanto era stato anticipato in precedenza, cioè il fatto che le onde piane possono servire per rappresentare campi che si sviluppano in mezzi “realistici”, nei quali possono trovare spazio anche disomogeneità dei parametri costitutivi.

È facile verificare che, quando il mezzo nel quale è definito il campo ha queste caratteristiche, il campo stesso

1. soddisfa quasi ovunque (cioè tolto al più un insieme di misura nulla) all’equazione di Helmholtz omogenea

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma^2 \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \sigma^2 \mathbf{H} = 0 \quad ,$$

dove σ^2 è una funzione costante a tratti;

2. ha componenti che sono funzioni costanti a tratti.

Ciò che si intende dimostrare, dunque, è che quando valgono queste ipotesi sul mezzo materiale, e quando si considera un campo *fisicamente sensato*, cioè tale che la sua energia accumulata e la sua potenza trasportata siano finite, questo campo è *sempre rappresentabile* per mezzo di una combinazione di onde piane.

Matematicamente, richiedere che il campo abbia potenza ed energia finite significa limitare lo studio ai campi rappresentati da funzioni a quadrato sommabili, cioè tali che per esse esista almeno una direzione dello spazio, indicata come direzione $\hat{z}$, tale che

$$\iint_N \frac{1}{4} \left(\mu |\mathbf{H}|^2 + \epsilon |\mathbf{E}|^2 \right) dx_1 dx_2 < +\infty \quad ,$$

dove N è un qualsiasi piano ortogonale a $\hat{z}$, e (x_1, x_2) è una coppia di generiche coordinate ortogonali ivi definite. La dimostrazione della completezza comincia mostrando innanzi tutto che il campo elettrico è espandibile nella forma di una opportuna combinazione di onde piane, e ciò viene fatto osservando che quando il campo gode della proprietà della sommabilità del quadrato, per ognuna delle sue componenti E_i è possibile definire la trasformata di Fourier bidimensionale

$$\mathcal{E}_i(\kappa_1, \kappa_2, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 E_i e^{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2)} \quad , \quad \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R} \quad ,$$

e questa risolve l'equazione

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_i}{dz^2} = \sigma^2 \mathcal{E}_i + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \mathcal{E}_i \equiv h^2 \mathcal{E}_i \quad , \quad h^2 = \sigma^2 + (\kappa_1^2 + \kappa_2^2) \quad .$$

che ammette la soluzione

$$\mathcal{E}_i = f_i(h) e^{-hz} \quad ,$$

dove $f_i(h)$ è una opportuna funzione di h . Antitrasformando si ha dunque

$$E_i = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa_2 f_i(h) e^{-i\kappa_1 x_1 - i\kappa_2 x_2 - hz} \quad , \quad (7.7)$$

espressione che dimostra come la componente E_i del campo elettrico possa essere espansa nella forma di una somma di onde piane, così come si intendeva mostrare.

Al fine di completare la dimostrazione è però necessario mostrare che *tutto* il campo elettro-magnetico può essere scritto nella forma di una somma di onde piane e a questo riguardo è necessario notare che ciò non può essere fatto semplicemente cambiando $\mathbf{E}$ con $\mathbf{H}$ nei passaggi che sono appena stati eseguiti. Se così si facesse, infatti, si dimostrerebbe

solamente che è possibile trovare una espansione in onde piane per $\mathbf{H}$, mentre quello che occorre vedere è che l'espansione per $\mathbf{H}$ è la *stessa* che è stata utilizzata per $\mathbf{E}$, ovvero che essa ha esattamente gli stessi coefficienti che compaiono nell'espansione del campo elettrico. A tal fine, si deve considerare l'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{-i\omega\mu} \quad ,$$

ed inserire in questa l'espansione (7.7) usata per rappresentare il campo elettrico $\mathbf{E}$. Dimostrare che l'espansione per $\mathbf{H}$ contiene gli stessi coefficienti di quella per $\mathbf{E}$ significa allora dimostrare che si possono scambiare tra loro l'operatore di derivazione rispetto alle coordinate spaziali che compare nel rotore con l'operazione di integrale rispetto ai vettori d'onda κ_1 e κ_2 che compare nella (7.7). Ciò è lecito e corretto se l'integrale di espansione *converge uniformemente* ad $\mathbf{E}$, cosa che qui si verifica dal momento che le componenti di campo elettrico sono continue all'interno di ognuno dei mezzi omogenei che concorrono a formare il dominio di definizione del campo stesso. Questa osservazione prova dunque che anche $\mathbf{H}$ è espandibile in onde piane, con gli stessi coefficienti che compaiono nell'espansione di $\mathbf{E}$, e ciò conclude allora la dimostrazione.

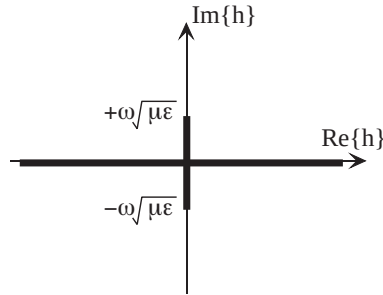


Figura 7.4: Valori che possono essere assunti dal parametro h nell'espansione (7.7).

A titolo di considerazione finale, si sottolinea in ultimo una particolarità che riguarda il vettore d'onda della generica onda piana che costituisce l'espansione (7.7); esso è

$$\mathbf{S} = ik_1 \hat{x} + i\kappa_2 \hat{y} + h \hat{z} \quad .$$

Se per semplicità si suppone ora che il mezzo nel quale è definito il campo sia un mezzo privo di perdite, essendo $\kappa_1^2 \geq 0$ e $\kappa_2^2 \geq 0$, risulta dunque

$$-\omega^2 \mu \epsilon \leq h^2 < +\infty \quad ,$$

ed i valori che h può assumere sono quindi quelli disegnati in Fig.(7.4): si tratta di tutti i punti dell'asse reale e di quei punti dell'asse immaginario che, in modulo, sono minori di $\omega\sqrt{\mu\epsilon}$. In virtù di questo fatto, l'espansione (7.7) indica dunque che per ottenere la completezza dell'insieme di funzioni rappresentato dalla famiglia delle onde piane è necessario prendere in considerazione *sia* le onde piane uniformi, *sia* le onde piane evanescenti che si attenuano nella direzione $\hat{z}$.

7.7 Riflessione e rifrazione di onde piane

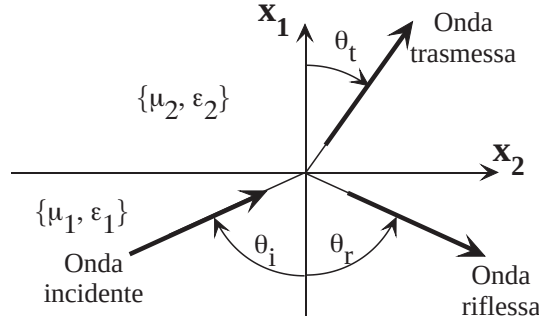


Figura 7.5: Onda elettromagnetica che incide sulla superficie di separazione tra due mezzi.

Si passa ora ad illustrare il comportamento di un'onda piana uniforme che incide sulla superficie di separazione tra due mezzi semi-infiniti, ognuno dei quali omogeneo e privo di sorgenti. I due mezzi sono caratterizzati dalle loro costanti elettromagnetiche, ϵ_1 e μ_1 per il mezzo da cui si suppone provenire l'onda piana, ed ϵ_2 e μ_2 per l'altro dei due. La conducibilità del mezzo "1" è assunta essere $\gamma_1 = 0$, mentre per ciò che concerne γ_2 , si suppone in un primo momento che anch'essa sia nulla, e si espone nel seguito la trattazione relativa al caso del mezzo con perdite.

Si noti che, da un punto di vista pratico, il problema che si sta qui affrontando è un problema estremamente noto, che si presenta ad

esempio quando un fascio di luce proviene dall'aria e viene fatto incidere su un vetro o sull'acqua. L'esperienza insegna che, in questi casi, il raggio incidente che raggiunge la superficie di separazione tra i due mezzi “sembra dividersi” in un “raggio riflesso” che si propaga nello stesso mezzo da cui proviene il raggio incidente, ed in un “raggio rifratto” che si trasmette nel secondo dei due mezzi semi infiniti.

Scopo di quanto viene esposto qui di seguito è quello di illustrare le leggi che legano i campi riflesso e rifratto al campo incidente. In particolare, nei paragrafi 7.7.1 e 7.7.2 ci si interessa di valutare quale sia la relazione che intercorre tra le *direzioni di propagazione* dei vari raggi in gioco, cioè si stabiliscono i legami tra l'angolo di incidenza θ_i e quelli di riflessione θ_r e di trasmissione θ_t . Successivamente, nel paragrafo 7.7.3 si valutano invece i legami tra le *ampiezze* E_r ed E_t dei campi riflesso e trasmesso e l'ampiezza E_i del campo incidente.

7.7.1 La legge della riflessione e la legge di Snell

Come menzionato più sopra, si supponga in un primo momento che il mezzo “2” sia un mezzo privo di perdite.

All'interfaccia di separazione tra i due mezzi materiali i campi elettrico e magnetico devono rispettare le condizioni di continuità delle componenti tangenti, che si scrivono nella seguente forma indicata anche con il nome di insieme delle *equazioni di Fresnel* (si veda la Fig.(7.5))

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 \times [\mathbf{E}_i e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}_r e^{-i\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{r}}] &= \hat{x}_1 \times \mathbf{E}_t e^{-i\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{r}} \\ \hat{x}_1 \times [\mathbf{H}_i e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{H}_r e^{-i\mathbf{S}_r \cdot \mathbf{r}}] &= \hat{x}_1 \times \mathbf{H}_t e^{-i\mathbf{S}_t \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad , \quad \mathbf{r} \in (0, x_2, x_3) \quad , \quad (7.8)$$

dove $\mathbf{E}_i$ ed $\mathbf{H}_i$ sono, rispettivamente, le ampiezze complesse del campo elettrico e del campo magnetico dell'onda incidente, e analoghe notazioni sono poi state usate anche per le onde riflesse e trasmesse (o “rifratte”).

Si noti anche che si è scritto esplicitamente che l'onda incidente è un'onda piana uniforme, avendo posto $\mathbf{S}_i = i\mathbf{k}_i$. Per contro, poichè a priori non è possibile ipotizzare la natura fisica delle onde riflesse e rifratte, i loro vettori d'onda sono stati scritti nella forma più generale possibile, rispettivamente $\mathbf{S}_r = \mathbf{a}_r + i\mathbf{k}_r$ e $\mathbf{S}_t = \mathbf{a}_t + i\mathbf{k}_t$, lasciando in tal modo aperta la possibilità al fatto che queste onde siano indifferentemente piane uniformi o evanescenti.

Dal punto di vista matematico, le equazioni di Fresnel (7.8) rappresentano un sistema omogeneo di equazioni lineari nelle incognite $\mathbf{E}_r$,

$\mathbf{H}_r$, $\mathbf{E}_t$ ed $\mathbf{H}_t$, e si tratta dunque di un sistema nel quale sono presenti 12 incognite, che possono essere ridotte a 6 usando le espressioni che mettono in relazione le ampiezze dei campi elettrico e magnetico attraverso l'impedenza d'onda. Come è noto dall'algebra lineare, il sistema può ammettere una soluzione non banale se e solo se il numero di equazioni indipendenti da cui esso è costituito è inferiore al numero delle incognite. È allora immediato verificare che ciò accade solo se

$$i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{S}_r \cdot \mathbf{r} \equiv \mathbf{S}_t \cdot \mathbf{r} \quad , \quad \forall \mathbf{r} \in (0, x_2, x_3) \quad . \quad (7.9)$$

Infatti, se così non fosse, si potrebbero costruire infinite equazioni lineari semplicemente cambiando il raggio vettore $\mathbf{r}$, ed il sistema non ammettere allora alcuna soluzione. Si mostra ora che usando questa condizione si possono ricavare tutte le informazioni utili alla descrizione delle relazioni che intercorrono tra l'angolo di incidenza e gli angoli di riflessione e di rifrazione.

Onda riflessa

Si consideri dapprima l'onda riflessa. Al riguardo, si dimostrano i seguenti fatti:

1. l'onda riflessa non può essere un'onda evanescente, ma *deve necessariamente* essere una onda piana uniforme;
2. l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza: $\theta_r \equiv \theta_i$.

Dimostrazioni

1. La dimostrazione di questo fatto procede per assurdo: si suppone che l'onda riflessa sia un'onda piana evanescente, e si dimostra che si trova una condizione non sostenibile. Infatti, se l'onda riflessa fosse evanescente, dalle (7.9) si dovrebbe avere

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{r} = 0 \text{ con } \mathbf{a}_r \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \mathbf{r} = (0, x_2, x_3) \quad . \quad (7.10)$$

e, per ipotesi di onda evanescente, anche $\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{k}_r = 0$.

La seconda delle (7.10) indica che il vettore $\mathbf{a}_r$ sarebbe allora ortogonale al piano di separazione tra i mezzi materiali, cioè esso risulterebbe disposto parallelamente all'asse $\hat{x}_1$. Ne seguirebbe

anche che, dovendo essere $\mathbf{a}_r$ ortogonale a $\mathbf{k}_r$, quest'ultimo vettore apparterebbe al piano $(\hat{x}_2, \hat{x}_3)$ e più precisamente, poichè per costruzione $\mathbf{k}_i$ non ha componenti lungo $\hat{x}_3$, $\mathbf{k}_r$ sarebbe parallelo a $\hat{x}_2$.

Si ricorda tuttavia che se l'onda riflessa fosse un'onda evanescente per essa risulterebbe $|\mathbf{k}_r| > \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} = |\mathbf{k}_i|$. Come è immediato verificare, questa posizione sarebbe allora incompatibile con la prima delle (7.10) calcolata per un raggio vettore $\mathbf{r} = (0, x_2, 0)$: non è infatti possibile che la proiezione del vettore $\mathbf{k}_i$ sull'asse $\hat{x}_2$ coincida con la proiezione di $\mathbf{k}_r$ se, come mostrato, $|\mathbf{k}_r| > |\mathbf{k}_i|$ e $\mathbf{k}_r \parallel \hat{x}_2$. Si è dunque giunti ad un risultato assurdo, e non rimane allora che concludere che sono insostenibili le ipotesi da cui si è partiti: come volevasi dimostrare, l'onda riflessa non può essere un'onda evanescente e poichè il mezzo in cui essa si propaga è privo di perdite, essa è necessariamente *un'onda piana uniforme*.

2. Ora che si è stabilito che l'onda riflessa è piana uniforme, la dimostrazione del secondo fatto in oggetto è immediata. Per l'onda riflessa vale infatti

$$|\mathbf{k}_r| \equiv |\mathbf{k}_i| = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} \quad ,$$

e la prima delle (7.10), che risulta ancora valida, si legge allora come

$$|\mathbf{k}_r| \sin(\theta_r) = |\mathbf{k}_i| \sin(\theta_i) \quad ,$$

da cui segue immediatamente $\theta_r \equiv \theta_i$, come intendevasi dimostrare.

Onda trasmessa

Per ciò che concerne l'onda trasmessa, si dimostra invece quanto segue:

1. l'onda trasmessa può essere evanescente, ma a tal fine è necessario che $\epsilon_1 > \epsilon_2$ e che

$$\theta_i > \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad ,$$

dove

$$n_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}} \quad , \quad n_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_0}} \quad ,$$

sono gli *indici di rifrazione* dei mezzi "1" e "2", rispettivamente, ed ϵ_0 è la permittività dielettrica del vuoto;

2. quando l'onda trasmessa non è un'onda evanescente, il legame tra l'angolo di incidenza e quello di trasmissione è espresso dalla *legge di Snell*

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \quad .$$

Dimostrazioni

1. Con lo stesso procedimento già usato nella dimostrazione dell'assurdo che si realizza nel caso dell'onda riflessa, si trova ancora che se l'onda trasmessa è evanescente

- il vettore di attenuazione $\mathbf{a}_t$ è diretto parallelamente a $\hat{x}_1$, ed il vettore di fase $\mathbf{k}_t$ parallelamente a $\hat{x}_2$;
- il modulo del vettore di fase è $|\mathbf{k}_t| > \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$.

Proiettando la prima delle (7.9) sull'asse $\hat{x}_2$ si ha allora

$$\omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} \sin(\theta_i) = |\mathbf{k}_i| \sin(\theta_i) = |\mathbf{k}_t| > \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} \quad , \quad (7.11)$$

ma a differenza di quanto accadeva nel caso dell'onda riflessa questa uguaglianza non rappresenta più un assurdo perchè i parametri costitutivi dei mezzi “1” e “2” sono tra loro diversi. In particolare, poichè in tutti i mezzi di interesse μ è costante (e praticamente coincidente con la permeabilità μ_0 del vuoto), si osserva che affinché l'onda trasmessa sia evanescente è condizione *necessaria* che le permittività dei mezzi siano $\epsilon_2 < \epsilon_1$. Questa condizione è tuttavia solo necessaria, perchè la (7.11) può essere soddisfatta solo se

$$\sin(\theta_i) > \frac{|\mathbf{k}_t|}{|\mathbf{k}_i|} \quad \Rightarrow \quad \theta_i > \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad ,$$

così come volevasi dimostrare.

Si noti che quando nel mezzo “2” si instaura una onda evanescente, lì non si ha propagazione di potenza attiva: è questo il ben noto fenomeno della *riflessione totale*, e ciò che si è dimostrato, quindi, è che questo può avere luogo solo quando un'onda elettromagnetica si propaga da un mezzo “più denso” verso uno “meno denso” (cioè, ad esempio dall'acqua verso l'aria, ma non viceversa), e a patto che l'angolo di incidenza sia maggiore di un angolo minimo, che viene detto *angolo critico*, e che è usualmente indicato con il simbolo θ_c .

2. Quando invece l'onda nel mezzo "2" non è un'onda evanescente, e quindi è un'onda piana uniforme perchè il mezzo è privo di perdite, la proiezione della prima delle (7.9) sull'asse $\hat{x}_2$ dà

$$|\mathbf{k}_i| \sin(\theta_i) = |\mathbf{k}_t| \sin(\theta_t) \quad ,$$

con $|\mathbf{k}_i| = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$ e $|\mathbf{k}_t| = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$, e segue allora immediatamente la legge di Snell

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \quad . \quad (7.12)$$

Insieme al caso della riflessione totale, questa legge costituisce uno dei principali esempi dell'utilità delle onde evanescenti: infatti, se ci si limitasse a studiare il comportamento di un campo elettromagnetico in presenza di una discontinuità dei mezzi materiali sulla base di un semplice approccio geometrico, poichè la legge di Snell non può fornire una soluzione accettabile in condizioni di riflessione totale, se ne dovrebbe concludere che, in quel caso, nel mezzo "2" non vi è alcun campo elettromagnetico. Questa conclusione, come mostrato in precedenza, è tuttavia errata. Quando si è in presenza del fenomeno della riflessione totale, infatti, non è vero che nel mezzo complementare rispetto a quello da cui proviene l'onda non vi sia alcun campo: vi è una onda evanescente.

7.7.2 Il caso del mezzo con perdite

La trattazione del paragrafo precedente ha riguardato la caratterizzazione della propagazione di onde piane tra due mezzi privi di perdite. Lo studio che si svolge in questo paragrafo riguarda invece il caso in cui il mezzo complementare a quello da cui proviene l'onda sia un mezzo con *perdite*, cioè con conducibilità $\gamma_2 \neq 0$.

Il punto di partenza per questo studio è ancora la coppia di relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{r} = 0 \text{ con } \mathbf{a}_t \neq 0 \end{cases} \quad , \quad \mathbf{r} = (0, x_2, x_3) \quad ,$$

con $\mathbf{a}_t \cdot \mathbf{k}_t \neq 0$. Nel mezzo "2" si instaura quindi un'onda *dissociata* il cui vettore di attenuazione è ortogonale al piano di separazione tra i mezzi materiali, ed il cui vettore di fase non è parallelo a questo. (Si veda la Fig.(7.6)).

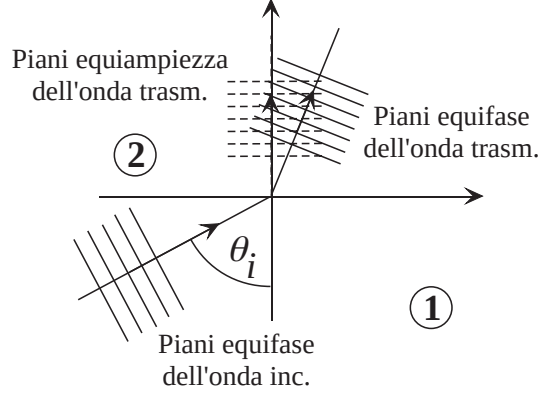


Figura 7.6: Onda dissociata trasmessa in un mezzo con perdite $\gamma_2 \neq 0$.

Scrivendo le condizioni di continuità in modo esplicito si trova che, in luogo della legge di Snell, il legame tra l'angolo di trasmissione θ_t e quello di incidenza θ_i è dato dalla relazione implicita

$$\sin(\theta_t) = \frac{n_1}{n_2} \frac{\sin \theta_i}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_2}{\omega \epsilon_2 \cos(\theta_t)} \right)^2} \right]}},$$

che mostra come il legame tra gli angoli non dipenda più solo dagli indici di rifrazione, ma anche dalla conducibilità del mezzo “2”.

Un caso di particolare rilievo è quello in cui il mezzo “2” è un cosiddetto *mezzo buon conduttore*, cioè un mezzo tale che

$$\gamma_2 \gg \omega \epsilon_2, \quad ,$$

e quindi un mezzo nel quale la corrente di conduzione risulta di gran lunga prevalente sulla corrente di spostamento. Con riferimento a questo tipo di mezzo, si osserva che

$$\lim_{\gamma_2/\omega \epsilon_2 \rightarrow +\infty} \sin(\theta_t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_t = 0, \quad ,$$

e quindi l'onda che si propaga all'interno di questo mezzo presenta dei piani equifase che tendono a ritornare a coincidere con i piani equampiezza, cioè l'onda diventa una onda piana uniforme che si attenua esponenzialmente man mano che si propaga all'interno del conduttore. Il calcolo del

valore dei moduli dei vettori di attenuazione e di fase può essere svolto come segue: si ricorda che, come per qualsiasi altra onda piana, anche per quella in oggetto valgono le relazioni

$$\begin{cases} |\mathbf{k}_t|^2 - |\mathbf{a}_t|^2 = \omega^2 \mu \epsilon_2 & , \\ 2 \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{k}_t = \omega \mu \gamma & , \end{cases} \quad (7.13)$$

e, quindi, per definizione di mezzo conduttore, risulta anche

$$|\mathbf{k}_t|^2 - |\mathbf{a}_t|^2 = \omega \mu (\omega \epsilon_2) \ll \omega \mu (\gamma_2) = 2 \mathbf{a}_t \cdot \mathbf{k}_t \quad .$$

Poichè i vettori $\mathbf{a}_t$ e $\mathbf{k}_t$ sono tra loro paralleli, la differenza tra i loro moduli quadrati può risultare molto inferiore al loro prodotto interno solo se

$$|\mathbf{k}_t| \simeq |\mathbf{a}_t| \quad ,$$

e dalla seconda delle (7.13) segue allora

$$|\mathbf{k}_t| \simeq |\mathbf{a}_t| = \sqrt{\pi \mu f \gamma_2} \quad .$$

L'onda trasmessa all'interno del buon conduttore è quindi del tipo

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \exp \left\{ -(1+i) \frac{x_1}{\delta} \right\} \quad ,$$

dove si è indicato, come già in precedenza, con $\hat{x}_1$ il versore ortogonale alla superficie di separazione tra i mezzi materiali, e con $\mathbf{E}_{0t}$ il valore del campo sulla superficie di separazione, e si è introdotto il parametro

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu f \gamma_2}}$$

che prende il nome di *spessore di penetrazione*. Il grafico dell'andamento del modulo del campo elettrico all'interno del buon conduttore è riportato in Fig.(7.7).

Da un punto di vista fisico, ciò che accade è quanto segue: l'onda che proviene dal mezzo "1" incide sul mezzo buon conduttore, dove penetra e si attenua con legge esponenziale. Come è consuetudine fare in presenza di fenomeni fisici descritti da leggi esponenziali, la rapidità con cui ha luogo l'attenuazione viene caratterizzata per mezzo della costante di decadimento esponenziale, qui lo spessore di penetrazione, che è un indice di quanto il campo riesce ad entrare nel mezzo buon conduttore:

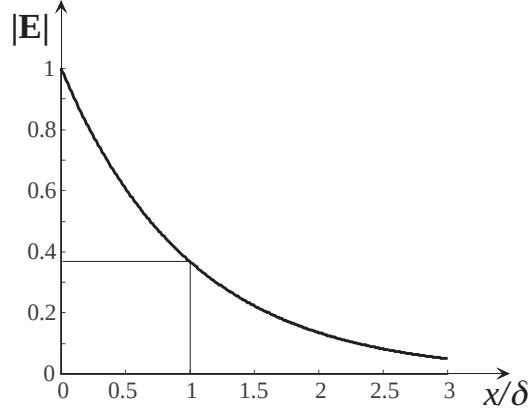


Figura 7.7: Attenuazione del campo elettrico che penetra in un mezzo buon conduttore.

alla distanza caratteristica $x_1 = \delta$ il valore del campo è pari a $e^{-1} = 0.36$ volte il suo valore iniziale. In termini di potenza, che varia secondo la legge

$$P(x_1) = P(0) \exp \left\{ -\frac{2x_1}{\delta} \right\} \quad ,$$

alla distanza $x_1 = \delta$ si ha $P(x_1) \simeq 0.13P_0$, ovvero a questa distanza la potenza subisce una attenuazione pari a 8.68 dB, che salgono a 26 dB ad una distanza pari a tre volte lo spessore di penetrazione.

È importante notare che lo spessore di penetrazione dipende dalla frequenza e, per la precisione, esso diminuisce con la radice quadrata della frequenza del campo; ciò significa che più è alta la frequenza della radiazione che incide sul buon conduttore, più è “sottile” lo strato superficiale di conduttore dove il campo ha ampiezza significativa: è il ben noto fenomeno usualmente indicato con il nome di *effetto pelle*. Direttamente collegato a questo fenomeno ve ne è un secondo di notevole rilievo, e questo è quello che riguarda l’aumento della resistenza, e quindi delle perdite, che si osserva in un conduttore metallico all’aumentare della frequenza dei campi che si propagano in sua prossimità. La giustificazione formale di questa caratteristica è ricavabile come segue.

Nel mezzo conduttore, come si è visto, il campo elettrico è del tipo

$$\mathbf{E}_t = E_{0t} \exp \left\{ -(1 + i) \frac{x_1}{\delta} \right\} \hat{x} \quad ,$$

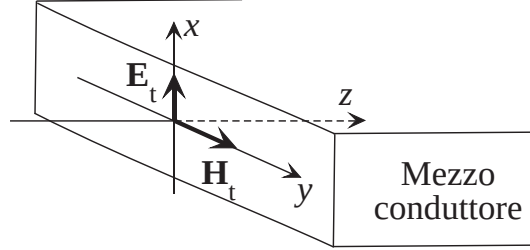


Figura 7.8: Campo elettrico e magnetico trasmesso nel mezzo buon conduttore.

e solo per comodità esso è stato assunto essere polarizzato lungo l'asse $\hat{x}$ di Fig.(7.8). Il corrispondente campo magnetico è allora

$$\mathbf{H}_t = \frac{(1+i)\hat{z} \times \mathbf{E}_t}{i\omega\mu\delta} = \frac{1-i}{2} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\pi\mu f}} E_{0t} \exp\left\{-(1+i)\frac{x_1}{\delta}\right\} \hat{y} \quad ,$$

e quindi, *indipendentemente dall'angolo di incidenza*, nel mezzo conduttore si instaura un'onda che ha impedenza d'onda in direzione $\hat{z}$

$$\eta(\hat{z}) = Z_s = R_s + iX_s = (1+i) \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\gamma_2}} \quad .$$

Si noti che questa impedenza, che è detta *impedenza di parete*, dipende solo dalla frequenza e dalle caratteristiche fisiche del conduttore, ma non dalla direzione o dalla natura dell'onda incidente. Tra poco si ritornerà su questo punto, spiegando l'importanza che esso assume in alcuni contesti di grande rilievo pratico.

Per il momento, invece, si vuole completare la discussione a riguardo della dipendenza dalla frequenza della resistenza di un conduttore, ed a tal fine si nota che l'impedenza di parete è costituita dalla serie di una resistenza e di una ammettenza induttiva di uguale valore. In particolare, la resistenza può essere riscritta come

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi\mu f}{\gamma_2}} = \frac{1}{\gamma_2 \delta} \quad ,$$

e si osserva allora che essa coincide con la resistenza che presenterebbe un conduttore piano di profondità δ ad una radiazione continua. Poichè la profondità δ decresce al crescere della frequenza, l'effetto che si ottiene è equivalente a quello che si osserverebbe in continua se si facesse fluire

una corrente in un conduttore che va via via assottigliandosi: come è ben noto, in questo caso la resistenza aumenterebbe in maniera proporzionale alla diminuzione dello spessore del conduttore, in accordo con quanto si intendeva provare.

Si ritorna ora alla questione lasciata precedentemente in sospenso, ovvero all'importanza di aver trovato che, indipendentemente dalla direzione dell'onda incidente, il mezzo buon conduttore si presenta come un mezzo che *impone* l'impedenza di parete Z_s . L'importanza pratica di questo fatto risiede in quanto segue: poichè l'impedenza di parete "è la stessa" per qualsiasi onda incida sul conduttore, essa può essere usata come una *condizione al contorno* per lo studio della propagazione in presenza di mezzi conduttori. Un esempio di particolare importanza di questo tipo di studi è quello rappresentato dal caso della propagazione nelle guide metalliche "reali", cioè nelle guide contornate da pareti metalliche con conducibilità diversa da zero. Se la propagazione in queste strutture volesse essere studiata con rigore, sarebbe necessario risolvere le equazioni di Maxwell nel dielettrico interno alla guida e nelle pareti della guida e, successivamente, applicare le condizioni di continuità per le componenti di campo tangenti al profilo della guida. Questa strada si rivela tuttavia molto onerosa, con il risultato che solo raramente si riescono a svolgere tutti i calcoli di interesse in forma chiusa.

La strada alternativa che si può allora seguire è quella che coinvolge l'impedenza di parete, ed operativamente si può procedere come segue: nel mezzo conduttore è presente un'onda piana uniforme con i campi elettrico e magnetico le cui ampiezze sono legate dalla relazione $E_t = Z_s H_t$. Si scrivano ora le condizioni di continuità per le componenti tangenti del campo all'interno della guida (E_{it}, H_{it}) sulla superficie del conduttore. Poichè $\mathbf{E}_t$ ed $\mathbf{H}_t$ sono tangenti alla guida, vale

$$E_{it} \equiv E_t \quad , \quad H_{it} \equiv H_t \quad .$$

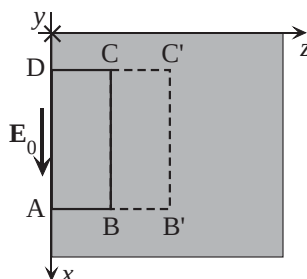
La presenza del conduttore impone allora la seguente condizione al contorno (detta *condizione di Leontovic*) sulle componenti tangenti alla guida *del campo nel dielettrico*

$$E_{it} = Z_s H_{it} \quad . \quad (7.14)$$

La condizione di Leontovic può allora essere usata come segue: si considera *solo il campo all'interno del dielettrico* e si risolvono le equazioni di Maxwell soggette alla condizione al contorno (7.14). Ciò è sufficiente

per poter caratterizzare la propagazione nella guida, senza che sia più necessario considerare *sia* il campo nel dielettrico, *sia* quello nel conduttore.

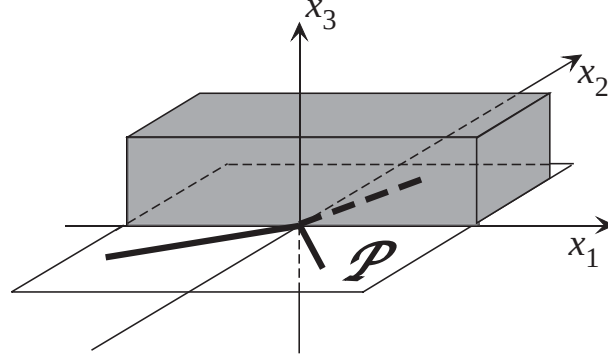
Prima di concludere il paragrafo si vuole infine fornire una giustificazione “più fisica” (e meno matematica) del motivo per cui il campo si attenua man mano che esso penetra nel conduttore. Si immagini a tal fine di eseguire il seguente esperimento: si ponga una sorgente ad alta frequenza in prossimità di un mezzo conduttore, e si indichi con E_0 l'ampiezza dell'onda di campo elettrico impresso che essa impone sulla superficie del conduttore.



Poichè il campo elettrico varia nel tempo, esso produce un campo magnetico (anch'esso variabile nel tempo) che risulta disposto ortogonalmente al campo elettrico (e, per la precisione, in direzione uscente dal foglio nel sistema di riferimento della figura). Anche il campo magnetico variabile nel tempo dà luogo, a sua volta, ad un nuovo campo elettrico indotto E_1 che *tende ad opporsi* a E_0 . Si consideri ora la circuitazione di E_1 lungo i percorsi ABCDA e AB_1C_1DA . Il percorso che include i vertici B_1 e C_1 concatena un maggior flusso magnetico e la tensione elettrica indotta nel tratto B_1C_1 è dunque maggiore di quella indotta nel tratto BC. Ne segue che, tanto più si penetra nel conduttore, tanto minore è il campo disponibile $E_0 + E_1$.

7.7.3 Formule di Fresnel

Avendo completato la discussione sulle direzioni di propagazione dei raggi riflesso e rifratto si passa ora ad analizzare le relazioni che intercorrono tra le ampiezze E_r ed E_t dei campi riflesso e trasmesso e l'ampiezza E_i del campo incidente. Si suppone dapprima che l'onda trasmessa sia piana uniforme, rimandando ad un secondo il caso della



riflessione totale.

Campo con polarizzazione TM

Si individui il piano $\mathcal{P}$ dello spazio che contiene le onde incidente, riflessa e trasmessa, ovvero il piano su cui giacciono i vettori $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_r$ e $\mathbf{k}_t$ e si fissi un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel quale gli assi coordinati x_1 e x_2 appartengono al piano, con x_1 parallelo alla superficie di separazione. L'asse x_3 , infine, è l'asse ortogonale a $\mathcal{P}$.

Si scelga l'asse x_2 come asse rispetto al quale applicare il teorema di scomposizione. Per definizione, quando si considera la componente TM del campo, le tre onde in esame hanno allora

- campo magnetico $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{H}_r$ e $\mathbf{H}_t$ ortogonale al piano $\mathcal{P}$, ovvero orientato lungo l'asse x_3 ;
- campo elettrico che, dovendo valendo per ognuna delle onde in esame la relazione

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E (\hat{k} \times \hat{\mathbf{E}}) = \frac{E}{\eta(\hat{k})} (\hat{k} \times \hat{\mathbf{E}}) \quad ,$$

giace sul piano $\mathcal{P}$.

Una possibile disposizione delle terne di vettori $\{\hat{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ è illustrata in figura 7.9, dove, una volta assegnato il verso ai campi elettrici $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$ ed $\mathbf{E}_t$, i corrispondenti campi magnetici sono orientati in modo conforme alla “regola della mano destra”. In particolare, quindi, con la scelta dei vettori $\mathbf{E}$ illustrata nella figura 7.9, si verifica che i campi $\mathbf{H}_i$ e $\mathbf{H}_t$ sono

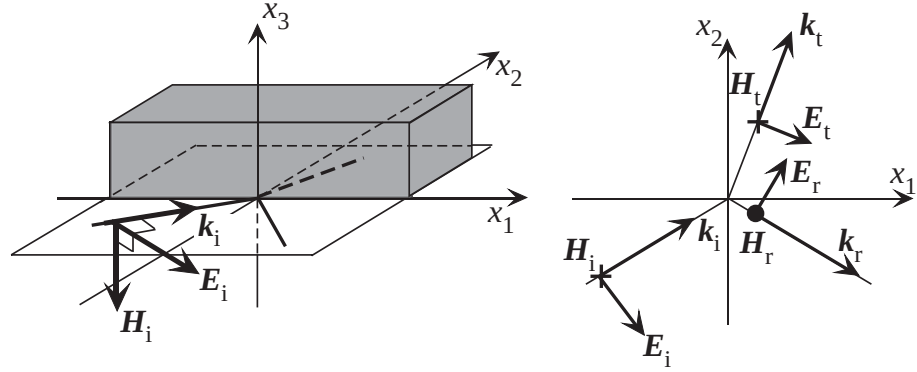


Figura 7.9: Disposizione dei campi elettrico e magnetico per un'onda con polarizzazione TM.

entranti nel piano del foglio, e vengono rappresentati tramite una croce, mentre il campo $\mathbf{H}_r$ esce dal foglio, ed è rappresentato da un circoletto.

Stabilita la corretta orientazione dei vettori, si possono applicare le condizioni di continuità per i campi elettrico e magnetico in corrispondenza alla superficie di separazione tra i due mezzi materiali. Si noti che, per come sono disposti i vettori campo elettrico e campo magnetico, si applicheranno le condizioni di continuità di campo elettrico solo lungo l'asse x_1 , e le condizioni sul campo magnetico solo lungo x_3 .

Continuità lungo x_1 .

La componente del campo elettrico incidente che risulta parallela a x_1 è pari a $E_i \cos(\theta_i)$. Analogamente, le componenti lungo x_1 delle onde riflesse e trasmesse sono rispettivamente pari a $E_r \cos(\theta_r)$ e $E_t \cos(\theta_t)$. Ne segue che la continuità delle componenti di campo elettrico si scrive come

$$E_i \cos(\theta_i) + E_r \cos(\theta_r) = E_t \cos(\theta_t) \quad .$$

Continuità lungo x_3 .

Si ricorda che, per costruzione, lungo l'asse x_3 ci sono solo componenti di campo magnetico che, in accordo con la quanto visto in precedenza a riguardo della loro disposizione secondo la regola della mano destra, danno luogo ad una condizione di continuità che si scrive come

$$H_i - H_r = H_t \quad ,$$

nella quale il segno $-$ della componente del campo magnetico riflesso è dovuta al fatto che esso ha verso discorde rispetto alle altre due.

Inoltre, poichè le onde in gioco sono onde piane uniformi, per ognuna di esse vale la seguente relazione tra i moduli dei campi elettrico e magnetico

$$H_i = \frac{E_i}{\eta_1} \quad , \quad H_r = \frac{E_r}{\eta_1} \quad \text{e} \quad H_t = \frac{E_t}{\eta_2} \quad .$$

Le condizioni di continuità per i campi elettrico e magnetico possono quindi essere riassunte come

$$\begin{cases} E_i \cos(\theta_i) + E_r \cos(\theta_r) = E_t \cos(\theta_t) & , \\ \frac{E_i}{\eta_1} - \frac{E_r}{\eta_1} = \frac{E_t}{\eta_2} & , \end{cases}$$

e ciò che ci si propone di valutare è

- il coefficiente di riflessione $\rho_{TM} = E_r/E_i$,
- il coefficiente di trasmissione $\tau_{TM} = E_t/E_i$.

A tal fine è sufficiente moltiplicare la seconda delle equazioni di continuità per $\eta_2 \cos(\theta_t)$, e sottrarre la quantità così ottenuta alla prima. Si ottiene

$$E_i \left[-\cos(\theta_i) + \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos(\theta_t) \right] = E_r \left[\cos(\theta_r) + \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos(\theta_t) \right] \quad ,$$

e quindi, ricordando che $\theta_r = \theta_i$, anche

$$\rho_{TM} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\eta_2 \cos(\theta_t) - \eta_1 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_t) + \eta_1 \cos(\theta_i)} = \frac{\eta_{2TM}(\hat{x}_1) - \eta_{1TM}(\hat{x}_1)}{\eta_{2TM}(\hat{x}_1) + \eta_{1TM}(\hat{x}_1)} \quad .$$

Si noti che quando $\theta_i = \theta_t = 0$, il coefficiente di riflessione si riduce a

$$\rho_{TM} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad ,$$

che coincide con l'espressione trovata nell'ambito delle linee di trasmissione a riguardo del comportamento di un campo di tensione o di corrente che, proveniendo da una linea con impedenza caratteristica η_1 , incide su un carico con impedenza η_2 .

Per quanto concerne la valutazione del coefficiente di trasmissione, si può poi considerare la seconda delle equazioni di continuità e, usando il fatto che $E_r \equiv \rho_{TM} E_i$, ricavare direttamente

$$\tau_{TM} = \frac{\eta_2}{\eta_1}(1 - \rho_{TM}) = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_t) + \eta_1 \cos(\theta_i)} \quad .$$

È interessante verificare che le onde riflessa e trasmessa con ampiezze regolate dai coefficienti ρ_{TM} e τ_{TM} appena determinati sono tali da soddisfare il principio della conservazione della potenza, valido nei mezzi privi di perdite. Infatti, se si calcola il vettore di Poynting per l'onda incidente si trova

$$\mathbf{P}_i = \frac{\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i^*}{2} = \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2\eta_1} \hat{k}_i \quad ,$$

di modo che la potenza che attraversa una superficie unitaria disposta parallelamente al piano di separazione tra i due mezzi semi infiniti è pari a

$$W_i = \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2\eta_1} \cos(\theta_i) \quad .$$

Analogamente, si trova per le onde riflessa e trasmessa

$$W_r = \frac{|\mathbf{E}_r|^2}{2\eta_1} \cos(\theta_r) \quad , \quad W_t = \frac{|\mathbf{E}_t|^2}{2\eta_2} \cos(\theta_t) \quad .$$

La conservazione della potenza richiede che si abbia $W_i = W_r + W_t$ ovvero

$$\frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2\eta_1} \cos(\theta_i) = \frac{|\mathbf{E}_r|^2}{2\eta_1} \cos(\theta_r) + \frac{|\mathbf{E}_t|^2}{2\eta_2} \cos(\theta_t) \quad .$$

Ricordando che $\theta_i = \theta_r$ si deve allora avere anche

$$1 = \rho_{TM}^2 + \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_i)} \tau_{TM}^2 \quad ,$$

relazione che, così come deve, risulta verificata dai coefficienti ρ_{TM} e τ_{TM} sopra derivati.

Campo con polarizzazione TE

Nel caso di un campo a polarizzazione TE, le componenti del campo elettrico sono orientate lungo x_3 , mentre le componenti di campo magnetico giacciono sul piano $\mathcal{P}$. Una possibile scelta per le orientazioni

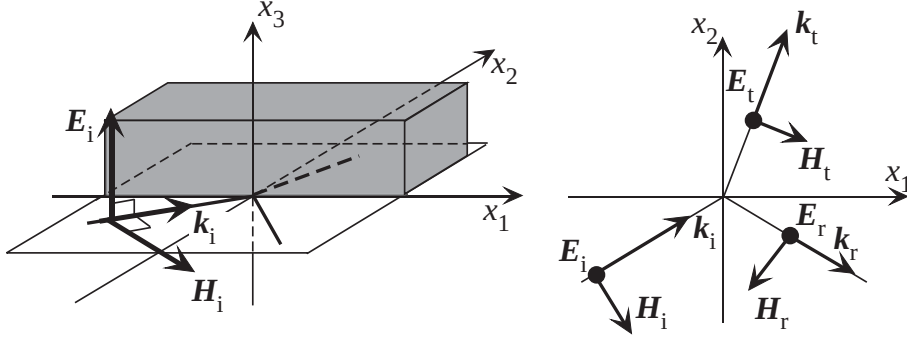


Figura 7.10: Disposizione dei campi elettrico e magnetico per un'onda con polarizzazione TE.

dei campi elettrici e magnetici, che rispetta la regola della mano destra rispetto ai vettori di propagazione, è quella illustrata in figura 7.10 e analogamente a quanto fatto in precedenza, anche in questo caso si applicano ora le condizioni di continuità per i campi elettrico e magnetico in corrispondenza alla superficie di separazione tra i due mezzi semi infiniti.

Continuità lungo x_1 .

Con l'orientazione dei campi magnetici illustrata in figura 7.10, la condizione di continuità lungo l'asse x_1 si scrive come

$$H_i \cos(\theta_i) - H_r \cos(\theta_r) = H_t \cos(\theta_t) \quad ,$$

o, ricordando la relazione esistente tra i moduli dei campi elettrico e magnetico, anche

$$\frac{E_i}{\eta_1} \cos(\theta_i) - \frac{E_r}{\eta_1} \cos(\theta_r) = \frac{E_t}{\eta_2} \cos(\theta_t) \quad .$$

Continuità lungo x_3 .

In questo caso, essendo i tre vettori di campo elettrico tutti orientati nello stesso modo, la continuità si scrive semplicemente come

$$E_i + E_r = E_t \quad .$$

Con procedimento analogo a quello usato nel precedente caso dei campi con polarizzazione TM, si ottiene ora

$$\rho_{TE} = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\frac{\eta_2}{\cos(\theta_t)} - \frac{\eta_1}{\cos(\theta_i)}}{\frac{\eta_2}{\cos(\theta_t)} + \frac{\eta_1}{\cos(\theta_i)}} = \frac{\eta_{2TE}(\hat{x}_1) - \eta_{1TE}(\hat{x}_1)}{\eta_{2TE}(\hat{x}_1) + \eta_{1TE}(\hat{x}_1)} .$$

Anche in questo caso, come ci si può aspettare, l'espressione del coefficiente di riflessione coincide con quella valida per le linee di trasmissione quando $\theta_i = \theta_t = 0$. Infine, per ciò che concerne il coefficiente di trasmissione, si ha

$$\tau_{TE} = \frac{E_t}{E_i} = \frac{2 \frac{\eta_2}{\cos(\theta_t)}}{\frac{\eta_2}{\cos(\theta_t)} + \frac{\eta_1}{\cos(\theta_i)}} .$$

L'angolo di Brewster

Si considerino i coefficienti ρ_{TE} e ρ_{TM} appena calcolati. Come si può vedere, se non c'è discontinuità di indice di rifrazione, risulta $\rho_{TE} = \rho_{TM} = 0$ (infatti, in questo caso $\theta_i = \theta_t$ e $\eta_1 = \eta_2$; d'altra parte il risultato è ovvio, visto che, se non c'è discontinuità di indice di rifrazione non c'è ragione per cui debba generarsi un'onda riflessa). Esiste tuttavia un caso in cui, pur essendoci discontinuità di indice di rifrazione, non c'è onda riflessa. Si consideri infatti il caso del coefficiente di riflessione TM

$$\rho_{TM} = \frac{\eta_2 \cos(\theta_t) - \eta_1 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_t) + \eta_1 \cos(\theta_i)} ,$$

e si ricordi che vale

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_1}{\mu_0\epsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2} ,$$

dal momento che la permittività magnetica è, con buona approssimazione, costante in tutti i mezzi di interesse, e praticamente coincidente con quella del vuoto. Usando la legge di Snell è allora immediato verificare che il coefficiente di riflessione può essere scritto nella forma equivalente

$$\rho_{TM} = \frac{\sin(\theta_t) \cos(\theta_t) - \sin(\theta_i) \cos(\theta_i)}{\sin(\theta_t) \cos(\theta_t) + \sin(\theta_i) \cos(\theta_i)} = \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} ,$$

e si trova quindi ancora $\rho_{TM} = 0$ se $\theta_t = \theta_i$, ovvero se non c'è discontinuità di indice di rifrazione, ma anche

$$\rho_{TM} = 0 \quad \text{quando} \quad \theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2} \quad .$$

Si chiama *angolo di Brewster* θ_{iB} quell'angolo di incidenza che dà luogo ad un angolo di trasmissione

$$\theta_{tB} = \frac{\pi}{2} - \theta_{iB} \quad ,$$

e che *non genera onda riflessa* alla superficie di discontinuità tra i due mezzi semi infiniti per un campo con polarizzazione TM. Come è immediato verificare ricorrendo ancora alla legge di Snell, esso è legato agli indici di rifrazione dei mezzi materiali in gioco dalla relazione

$$\tan(\theta_{iB}) = \frac{n_2}{n_1} \quad .$$

Il caso dell'onda evanescente.

Ora che si sono analizzati i coefficienti di riflessione e di trasmissione che si ottengono quando nel mezzo complementare a quello da cui proviene l'onda incidente si instaura un'onda piana uniforme, rimane da esaminare il caso della riflessione totale, e cioè il caso in cui nel secondo dei due mezzi semi infiniti si propaga un'onda evanescente. Si dimostra che, in questo caso, i coefficienti di riflessione risultano

$$\rho_{TE} = \frac{\frac{i\omega\mu}{|\mathbf{a}_t|} - \frac{\eta_1}{\cos(\theta_i)}}{\frac{i\omega\mu}{|\mathbf{a}_t|} + \frac{\eta_1}{\cos(\theta_i)}} \quad , \quad \rho_{TM} = \frac{\frac{|\mathbf{a}_t|}{i\omega\epsilon} - \eta_1 \cos(\theta_i)}{\frac{|\mathbf{a}_t|}{i\omega\epsilon} + \eta_1 \cos(\theta_i)} \quad ,$$

dove $\mathbf{a}_t$ è, come di consueto, il vettore di attenuazione dell'onda evanescente, orientato in direzione ortogonale alla superficie di separazione tra i due mezzi semi-infiniti. Si nota che risulta

$$|\rho_{TE}| = 1 \quad , \quad |\rho_{TM}| = 1 \quad ,$$

come ci si poteva aspettare dal momento che si è in presenza di riflessione totale, e non vi è quindi passaggio di potenza attiva dal mezzo da cui proviene l'onda incidente verso l'altro dei due. Tuttavia, è importante

notare che, sebbene il modulo dei coefficienti di riflessione sia unitario, questi hanno in realtà valori diversi a seconda delle caratteristiche del mezzo in cui si instaura l'onda evanescente. Infatti, se questo mezzo è, ad esempio, un conduttore elettrico perfetto, si ha $\mathbf{a}_t = 0$, e così $\rho_{TE} = -1$, $\rho_{TM} = 1$, ovvero i due coefficienti di riflessione hanno modulo pari a uno, e fasi rispettivamente uguali a π e a zero. Altri mezzi possono invece far sì che le fasi dei coefficienti ρ_{TE} e ρ_{TM} siano comprese tra zero e π , dando così luogo a onde riflesse che risultano sfasate rispetto a quella incidente, come se la riflessione avesse avuto luogo su un conduttore perfetto posto dietro la superficie di separazione tra i mezzi semi infiniti (*effetto Goos-Haenchen*).

7.8 Sovrapposizione di onde piane

Sino a questo momento si sono considerati i fenomeni fisici che si osservano quando si considera la propagazione di una *singola onda piana* che, come visto, può eventualmente dividersi nella composizione di onde trasmesse e riflesse se essa si propaga in una regione dello spazio che non sia infinitamente omogenea.

Nei prossimi paragrafi saranno invece analizzate alcune caratteristiche della propagazione per onde piane che si osservano quando si supponga che nella regione di definizione del campo sia presente *più di una sola onda piana*. In particolare, i fenomeni di interesse che saranno studiati sono quelli che riguardano la formazione di *onde stazionarie*, discusse nel paragrafo 7.9, la propagazione in mezzi dielettrici multistrato, esposta nel paragrafo 7.10 e, da ultimo, il concetto di *velocità di gruppo* delle onde elettromagnetiche, esposto nel paragrafo 7.11.

7.9 Onde stazionarie

Si supponga che in una stessa regione dello spazio siano presenti due onde piane uniformi e, per semplicità, si assuma che queste abbiano la stessa ampiezza e la stessa polarizzazione; per esempio, con riferimento al campo elettrico delle due onde, si indichi l'ampiezza con E_0 , e si supponga che la polarizzazione sia rettilinea e disposta parallelamente all'asse $\mathbf{x}$ di una terna cartesiana ortogonale. Si supponga inoltre che le onde viaggino in direzioni *opposte*, entrambe allineate rispetto all'asse $\mathbf{z}$ del sistema cartesiano introdotto in precedenza. Si intende ora valutare

l'andamento nel tempo del campo elettrico e magnetico generato dalla sovrapposizione delle due onde piane e, in seguito, le espressioni del vettore di Poynting e dell'impedenza d'onda nella direzione $\hat{z}$.

7.9.1 Andamento nel tempo dei campi elettrico e magnetico

Nel dominio della rappresentazione complessa i campi elettrico e magnetico della sovrapposizione delle due onde piane sono

$$\mathbf{E}(z) = E(z) \hat{x} = E_0 \left[e^{-i\beta z} + e^{+i\beta z} \right] \hat{x} \quad ,$$

e

$$\mathbf{H}(z) = \frac{i\beta \hat{z} \times \mathbf{E}(z)}{i\omega\mu} = H(z) \hat{y} = \frac{E_0}{\eta} \left[e^{-i\beta z} - e^{+i\beta z} \right] \hat{y} \quad ,$$

dove, come di consueto, $\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, e $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Le corrispondenti espressioni nel dominio del tempo sono allora

$$\mathbf{e}(z, t) = \text{Re} \left[\mathbf{E}(z) e^{i\omega t} \right] = 2 E_0 \cos(\omega t) \cos(\beta z) \hat{x} \quad ,$$

$$\mathbf{h}(z, t) = \text{Re} \left[\mathbf{H}(z) e^{i\omega t} \right] = 2 \frac{E_0}{\eta} \sin(\omega t) \sin(\beta z) \hat{y} \quad ,$$

dove si è supposto $E_0 \in \mathbb{R}$ senza perdita di generalità. L'andamento grafico dei campi allo scorrere del tempo è illustrato in Fig.(7.11).

Nelle espressioni dei campi le variabili temporali e spaziali compaiono dunque separatamente, cioè negli argomenti di funzioni diverse. Come si è già avuto modo di vedere quando si sono studiate le linee di trasmissione, questo fatto rappresenta una configurazione del campo elettromagnetico nel quale le onde non si spostano nello spazio allo scorrere del tempo, ma esse danno invece luogo ad un *fenomeno di pulsazione*, cioè ad una *onda stazionaria*.

L'analogia con il caso delle linee di trasmissione è d'altra parte evidente: due onde contropaganti di uguale ampiezza e polarizzazione sono quelle che si trovano in una linea quando questa è chiusa su un carico non resistivo e, come si è visto, questi carichi comportano, per l'appunto, la formazione di un'onda stazionaria nella linea stessa.

Anche nel caso che si sta ora analizzando, inoltre, si può verificare che i campi elettrico e magnetico sono tra loro in quadratura sia nel tempo sia nello spazio, così come accadeva alle onde di tensione e di corrente di una linea chiusa su un carico reattivo.

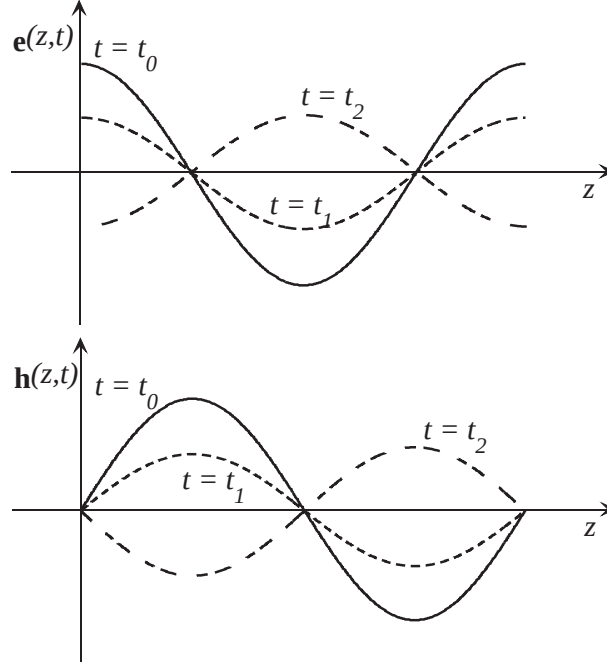


Figura 7.11: Andamento nel tempo del campo elettrico e magnetico di un'onda stazionaria.

7.9.2 Vettore di Poynting ed impedenza d'onda

Queste due grandezze risultano rispettivamente pari a

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} = 2i \frac{|E_0|^2}{\eta} \sin(2\beta z) \hat{z} \quad ,$$

e

$$\eta_{OS}(\hat{z}) = \frac{E(z)}{H(z)} = i\eta \cotg(\beta z) \quad .$$

Si può notare quanto segue

1. Il vettore di Poynting è diretto lungo $\hat{z}$, così come era ragionevole attendersi dal momento che entrambe le onde si propagano lungo la direzione individuata da questo versore;
2. inoltre, il vettore di Poynting è *immaginario puro*. Sebbene alla luce dell'analogia con le linee di trasmissione che è stata posta in

luce in precedenza questo risultato non stupisce, è tuttavia importante sottolineare il seguente aspetto: si è considerata la sovrapposizione di due onde piane uniformi, ognuna delle quali “trasporta” una potenza puramente attiva, e si è trovato che la loro somma *non trasporta potenza attiva*, ma trasporta invece una potenza puramente reattiva.

Da un punto di vista matematico questo risultato si spiega come segue: il calcolo della potenza è una operazione *non lineare* rispetto alle ampiezze dell’onda di campo elettrico e/o magnetico, ed è quindi sbagliato pensare che la potenza associata alla somma di due onde debba coincidere con la somma delle potenze delle due onde. Fisicamente, invece, il risultato è di immediata comprensione non appena si pensi all’analogia con le linee, in particolare al caso della linea chiusa su un corto-circuito: anche in quel caso l’onda che incide sul corto circuito, se vista da sola, trasporta una potenza attiva; tuttavia, in corrispondenza al corto circuito si crea un’onda riflessa che “riporta indietro” tutta la potenza attiva nella direzione opposta a quella dell’onda incidente giacché il corto-circuito non può assorbire potenza reale. La potenza attiva netta che transita in ogni sezione della linea in condizioni di regime è dunque nulla.

3. Il coefficiente dell’immaginario che compare nell’espressione del vettore di Poynting cambia segno con una periodicità pari a metà della lunghezza d’onda del campo di ognuna delle onde progressive che costituiscono l’onda stazionaria. Ancora una volta, la spiegazione matematica di questo fatto risiede nella natura non-lineare del calcolo che è necessario svolgere per la valutazione della potenza; dal punto di vista fisico, invece, un coefficiente dell’immaginario positivo o negativo è il segno del fatto che in alcuni punti dello spazio prevale il comportamento magnetico (cioè induttivo) del campo, mentre in altri punti prevale quello elettrico.
4. Le stesse considerazioni possono poi essere fatte se al posto del vettore di Poynting si analizza l’impedenza d’onda. Anche questa, infatti, è immaginaria pura a significare che all’onda stazionaria è associata solo potenza reattiva, con segno che cambia ogni quarto di lunghezza d’onda e periodicità pari a metà della lunghezza d’onda, in accordo con i risultati derivati nello studio delle linee di trasmiss-

sione. Infine, si nota anche che vi sono punti dello spazio in cui l'impedenza d'onda è nulla, ed altri nei quali essa diverge: questi punti sono, rispettivamente, i punti nei quali si annulla il campo elettrico o quello magnetico, cioè, con la stessa terminologia usata nelle linee di trasmissione, sono i punti nei quali cadono i *nod*i del campo elettrico o del campo magnetico.

7.10 Mezzi dielettrici multistrato

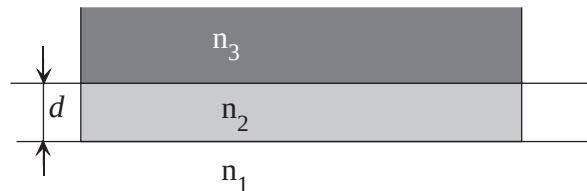


Figura 7.12: Mezzo dielettrico multistrato.

In questo paragrafo si considera la propagazione di un'onda piana attraverso una struttura dielettrica multistrato, dove con questo termine si intende una struttura nella quale le proprietà del mezzo sono costanti nei piani ortogonali ad una certa direzione, e possono invece variare lungo quella stessa direzione. Un esempio particolarmente semplice di questo tipo di struttura è quello riportato in Fig.(7.12), dove è rappresentato un mezzo nel quale uno strato di materiale di spessore d ed indice di rifrazione n_2 è interposto tra due mezzi semi-infiniti con indici n_1 e n_3 .

Lo studio di questo tipo di mezzi è di fondamentale importanza specialmente nel campo dell'ottica, dove i dielettrici multistrato trovano impiego per la realizzazione di *film antiriflesso*, cioè di materiali che riducono la riflessione da una data superficie o, al contrario, anche per la realizzazione di strutture che permettono invece di *aumentare* la riflessione stessa, o di renderla dipendente dalla polarizzazione dell'onda incidente. Si realizzano in questo modo degli utili dispositivi ottici quali divisori di fascio, filtri, e polarizzatori.

Vengono qui proposte due metodologie di studio: la prima è basata sul computo delle *onde parziali*, cioè delle onde che sono riflesse da ognuna delle superficie che concorrono a costituire il mezzo multistrato. Per semplicità, il metodo verrà illustrato con riferimento al mezzo di

Fig.(7.12) supponendo che l'onda incidente si propaghi in direzione perpendicolare alle superfici di discontinuità tra i mezzi materiali.

Nel seguito, nel paragrafo 7.10.2, verrà invece proposto un metodo di studio più generale, basato sul formalismo delle *matrici di trasferimento*, ed esso verrà dapprima applicato ancora al caso della Fig.(7.12), e poi esteso al caso di un mezzo costituito da più strati e con una onda incidente di polarizzazione e direzione arbitraria.

Nel paragrafo 7.10.3 verrà infine discusso un particolare caso di propagazione in mezzi stratificati che coinvolge la sovrapposizione di *onde evanescenti* e che è usualmente indicato con il nome di *effetto tunnel elettromagnetico*.

7.10.1 Metodo delle onde parziali

Si consideri dunque il mezzo di Fig.(7.12). Nel seguito si farà spesso uso dei coefficienti di riflessione e trasmissione alle interfacce tra i tre dielettrici in gioco, e conviene allora scriverne espressamente i valori. Essi sono

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad , \quad \rho_{21} = -\rho_{12} \quad , \quad \rho_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} \quad , \\ \tau_{12} &= 2 \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad , \quad \tau_{21} = 2 \frac{n_2}{n_1 + n_2} \quad , \quad \tau_{23} = 2 \frac{n_2}{n_2 + n_3} \quad ,\end{aligned}$$

dove si è indicato con ρ_{12} il coefficiente di riflessione per il passaggio dal mezzo con indice n_1 al mezzo con indice n_2 , ed una simbologia analoga è poi anche usata per tutti gli altri coefficienti.

Come illustrato nella Fig.(7.13), l'onda trasmessa nel mezzo con indice n_3 è costituita dalla somma di più termini, che risultano, rispettivamente

$$\begin{aligned}E_{t1} &= E_0 \tau_{12} \tau_{23} e^{-i\beta_2 d} \quad , \\ E_{t2} &= E_0 \tau_{12} \tau_{23} \rho_{23} \rho_{21} e^{-3i\beta_2 d} \quad , \\ E_{t3} &= E_0 \tau_{12} \tau_{23} \rho_{23}^2 \rho_{21}^2 e^{-5i\beta_2 d} \quad , \\ &\dots \quad , \\ E_{tn} &= E_0 \tau_{12} \tau_{23} \rho_{23}^{2(n-1)} \rho_{21}^{2(n-1)} e^{-i(2n+1)\beta_2 d} \quad ,\end{aligned}$$

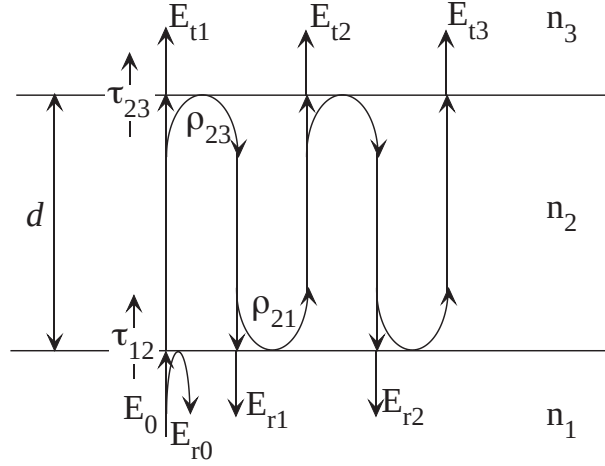


Figura 7.13: Composizione delle onde trasmessa e riflessa in un mezzo dielettrico multistrato.

e vale dunque

$$E_t = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{tn} = E_0 \frac{\tau_{12} \tau_{23} e^{-i\beta_2 d}}{1 - \rho_{23} \rho_{21} e^{-2i\beta_2 d}} . \quad (7.15)$$

In maniera analoga, l'onda riflessa è data dalla somma delle seguenti onde parziali

$$\begin{aligned} E_{r0} &= E_0 \rho_{12} , \\ E_{r1} &= E_0 \tau_{12} \tau_{21} \rho_{23} e^{-2i\beta_2 d} , \\ E_{r2} &= E_0 \tau_{12} \tau_{21} \rho_{23}^2 \rho_{21} e^{-4i\beta_2 d} , \\ &\dots , \\ E_{rn} &= E_0 \tau_{12} \tau_{21} \rho_{23}^n \rho_{21}^{(n-1)} e^{-i2n\beta_2 d} , \end{aligned}$$

ed essa risulta quindi pari a

$$E_r = \rho_{12} E_0 + \rho_{23} \frac{\tau_{21}}{\tau_{23}} e^{-i\beta_2 d} E_t . \quad (7.16)$$

Le espressioni (7.15) e (7.16) vengono ora specializzate a due casi di particolare rilievo.

Strato a mezzo'onda.

Il primo caso che si considera è quello di un mezzo nel quale lo strato con indice n_2 ha dimensione

$$d = \frac{\lambda_0}{2n_2} \quad ,$$

cioè il suo spessore è pari a metà della lunghezza d'onda che la radiazione presenta in corrispondenza all'indice di rifrazione n_2 . È facile verificare che in questo caso le (7.15,7.16) risultano rispettivamente

$$E_t = -2 E_0 \frac{n_1}{n_1 + n_3} \quad , \quad E_r = E_0 \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \quad ,$$

e, come si nota, i coefficienti di trasmissione e di riflessione sono dunque *indipendenti dall'indice n_2* . La ragione di questo risultato è presto spiegata se si considera l'analogia che esiste tra il mezzo multistrato di Fig.(7.12) e la linea di trasmissione illustrata in Fig.(7.14).

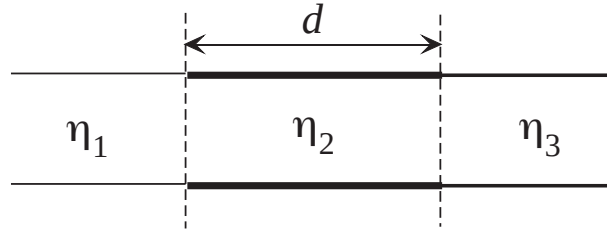


Figura 7.14: Linea di trasmissione equivalente al mezzo multistrato di Fig.(7.12).

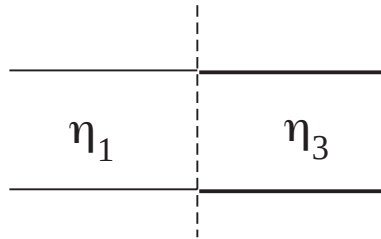


Figura 7.15: Linea di trasmissione equivalente al mezzo multistrato di Fig.(7.12) quando il tratto con indice n_2 ha spessore $d = \lambda_0/n_2$.

Quando la lunghezza fisica del tratto con impedenza η_2 è pari a metà della lunghezza d'onda della radiazione *in quel mezzo*, la linea è elettricamente equivalente a quella mostrata in Fig.(7.15), e le ampiezze delle onde trasmessa e riflessa dipendono allora solo dai valori delle impedenze η_1 e η_3 , cioè degli indici n_1 e n_3 .

Strato a quarto d'onda.

Il secondo caso di rilievo è invece quello in cui

$$d = \frac{\lambda_0}{4 n_2} \quad ,$$

per il quale vale

$$E_t = -2i E_0 \frac{n_2 n_1}{n_2^2 + n_1 n_3} \quad , \quad E_r = E_0 \frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2} \quad .$$

In questo caso, quindi, il coefficiente di riflessione si annulla quando $n_2^2 = n_1 n_3$: si è realizzato un adattatore a quarto d'onda che adatta l'impedenza η_3 all'impedenza η_1 .

Quando si è studiata la propagazione nelle linee di trasmissione si è infatti visto che, con riferimento alla Fig.(7.14), l'impedenza ai morsetti di uscita della linea con impedenza intrinseca η_1 è

$$R_{eq} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3} \quad ,$$

ed il coefficiente di riflessione è dunque

$$\rho = \frac{R_{eq} - \eta_1}{R_{eq} + \eta_1} = \frac{n_1 n_3 - n_2^2}{n_1 n_3 + n_2^2} \quad ,$$

ed esso si annulla, per l'appunto, quando $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$.

Come si accennava all'inizio del paragrafo, questa tecnica di adattamento trova impiego nella pratica, in particolare nel campo dell'ottica e dell'optoelettronica, quando si vuole accoppiare della radiazione a dei dispositivi realizzati su substrati di semiconduttore. I semiconduttori hanno infatti indici di rifrazione che, tipicamente, sono nell'ordine di $n \simeq 3 \div 3.5$, e darebbero quindi luogo ad una forte riflessione per un fascio luminoso che incida su di essi provenendo dall'aria. Per evitare che ciò accada, si usa depositare sulla faccia di ingresso del dispositivo a

semiconduttore uno strato di materiale con indice opportuno che viene detto *coating antiriflesso* ed il cui scopo è quello di adattare le impedenze ed annullare, o quanto meno ridurre, in tal modo la riflessione in oggetto.

7.10.2 Metodo delle matrici di trasferimento

7.10.3 L'effetto tunnel elettromagnetico

7.11 La velocità di gruppo

L'ultimo dei risultati che riguardano il comportamento di onde piane che si sovrappongono è quello che consente di trarre utili indicazioni circa la *velocità di propagazione* delle onde stesse.

Infatti, si è già avuto modo di notare che, per effetto dell'ipotesi che vuole le onde piane definite *a priori* in tutto lo spazio, a rigore non è possibile parlare di trasporto di energia, e non è quindi nemmeno possibile individuare la velocità con cui l'energia associata alle onde piane si muove nello spazio. Questo fatto è d'altra parte ben giustificabile con una semplice osservazione: in un'onda piana uniforme la potenza è proporzionale al modulo quadro del campo elettrico e questo è costante rispetto alle coordinate dello spazio: il movimento dell'onda non può quindi essere rilevato dal momento che il campo ha sempre lo stesso valore costante di potenza in ogni punto dello spazio, ed in ogni istante temporale.

Da questa osservazione è allora facile intuire che se si vuole misurare la velocità di spostamento dell'energia è necessario prendere in considerazione campi che presentino una qualche forma di *modulazione di ampiezza*, ovvero che *non abbiano* un inviluppo spaziale costante, di modo che sia possibile studiare il modo in cui l'inviluppo si muove nello spazio al passare del tempo, e dedurre così la sua velocità.

Si consideri dunque un campo modulato in ampiezza, e si scelga il più semplice di tutti: quello formato dalla sovrapposizione di due onde piane uniformi che viaggino nella stessa direzione dello spazio (cioè che abbiano vettori di fase $\mathbf{k}$ tra loro paralleli), ma diverse frequenze, ad esempio le frequenze $\omega_0 + \Delta\omega$ e $\omega_0 - \Delta\omega$. Per non appesantire inutilmente la trattazione, si supponga anche che le ampiezze e le polarizzazioni dei due campi coincidano, e che la propagazione avvenga lungo la direzione dello spazio individuata dal versore $\hat{z}$. Indicate rispettivamente con $\beta_+ =$

$\beta(\omega + \Delta\omega)$ e $\beta_- = \beta(\omega - \Delta\omega)$ le costanti di fase alle frequenze $\omega + \Delta\omega$ e $\omega - \Delta\omega$, e posto

$$\beta_+ = \beta_m + \Delta\beta \quad , \quad \beta_- = \beta_m - \Delta\beta \quad , \quad \beta_m = \omega_0 \sqrt{\mu\epsilon} \quad ,$$

il campo risultante dalla sovrapposizione delle due onde piane è

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = 2 \mathbf{E}_0 \cos(\omega_0 t - \beta_m z) \cos(\Delta\beta z - \Delta\omega t) \quad . \quad (7.17)$$

La (7.17) ricorda l'espressione valida per un'onda progressiva, nella quale la dipendenza dalle variabili temporali e spaziali compare nell'argomento della medesima funzione tramite una differenza. Nel caso in esame, tuttavia, ci sono due diversi contributi: il primo, quello espresso dal termine $\cos(\omega_0 t - \beta_m z)$ è il contributo già analizzato in precedenza, e rappresenta una onda piana con frequenza ω_0 e costante di fase β_m che si muove con la velocità di fase $v_f = \omega_0 / \beta_m$.

Il secondo contributo nella (7.17) è invece il termine di modulazione di ampiezza dovuto alla sovrapposizione delle onde piane, ed è il contributo che si stava cercando al fine di determinare la velocità con cui si sposta l'energia. Come è immediato verificare, questa velocità è

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad .$$

Ora, se la costante di fase $\beta(\omega)$ è sufficientemente regolare in un opportuno intorno di ω_0 , essa può essere scritta nella forma di una serie di Taylor del tipo

$$\Delta\beta \equiv \beta(\omega) - \beta(\omega_0) = \beta_1(\Delta\omega) + \beta_2(\Delta\omega)^2 + \dots \quad , \quad (7.18)$$

dove si è posto

$$\beta_n = \left. \frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right|_{\omega=\omega_0} \quad ,$$

e quando la distanza spettrale $\Delta\omega$ tra le due onde piane con cui si è costruita la modulazione di ampiezza tende a zero, la velocità di gruppo può dunque essere scritta come

$$v_g(\omega_0) = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0}} \quad . \quad (7.19)$$

Questa velocità viene indicata con il nome di *velocità di gruppo* dell'onda piana uniforme alla frequenza ω_0 e, per come è stata ricavata, essa rappresenta la *velocità con cui si muove la modulazione di ampiezza* di un'onda a banda stretta ($\Delta\omega \ll \omega_0$) che si propaghi in un mezzo nel quale $\beta(\omega)$ sia una funzione sufficientemente regolare della frequenza.

Nel prossimo paragrafo si estenderà lo studio che è stato appena proposto al caso di campi il cui spettro sia più complicato di quello considerato qui, e si mostreranno così anche gli effetti che sono legati ai termini dell'espansione in serie (7.18) che sono stati sin qui trascurati. Per il momento si vuole invece concludere il presente paragrafo mostrando come la quantità definita nell'equazione (7.19) possa essere interpretata anche in un diverso modo, precisamente quello che permette di identificarla con la velocità con cui viene trasportata nello spazio l'energia attiva associata al campo elettromagnetico. A tal fine, si considerano le equazioni di Maxwell scritte nel dominio della frequenza per un mezzo dispersivo e privo di perdite

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu(\omega)\mathbf{H} \quad , \\ \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E} \quad .\end{aligned}$$

Come si è mostrato in precedenza, qualsiasi sia il campo $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ soluzione di queste equazioni, esso può sempre essere espanso sull'insieme completo delle onde piane, per ognuna delle quali vale la relazione vettoriale

$$\nabla \times = -i\mathbf{k} \times = -i\beta(\omega)\hat{k} \times \quad , \quad \beta(\omega) = \omega\sqrt{\mu(\omega)\epsilon(\omega)} \quad .$$

Le equazioni di Maxwell possono allora essere riscritte nella forma

$$\begin{aligned}-i\beta(\omega)\hat{k} \times \mathbf{E} &= -i\omega\mu(\omega)\mathbf{H} \quad , \\ -i\beta(\omega)\hat{k} \times \mathbf{H} &= i\omega\epsilon(\omega)\mathbf{E} \quad .\end{aligned}$$

Si derivino ora ambo i membri di queste equazioni rispetto alla frequenza; si ottiene

$$\begin{aligned}-i\frac{d\beta}{d\omega}\hat{k} \times \mathbf{E} - i\beta\hat{k} \times \frac{d\mathbf{E}}{d\omega} &= -i\frac{\partial(\omega\mu)}{\partial\omega}\mathbf{H} - i\omega\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\omega} \quad , \\ -i\frac{d\beta}{d\omega}\hat{k} \times \mathbf{H} - i\beta\hat{k} \times \frac{d\mathbf{H}}{d\omega} &= +i\frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial\omega}\mathbf{E} + i\omega\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\omega} \quad .\end{aligned}$$

In seguito, si moltiplichino la prima di queste equazioni per $\mathbf{H}^*$, la seconda per $\mathbf{E}^*$ e si operi la sottrazione membro a membro tra le due. Quando si compie questa operazione, tra gli altri termini compare anche il seguente:

$$-i\beta \hat{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{H}^* + i\omega\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}^* \quad ,$$

ed è immediato verificare che questo termine è identicamente nullo. Infatti, usando la regola della permutazione ciclica del prodotto misto, esso può essere riscritto come

$$\left[i\beta \hat{k} \times \mathbf{H}^* + i\omega\epsilon \mathbf{E}^* \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} = \left[\nabla \times \mathbf{H}^* + i\omega\epsilon \mathbf{E}^* \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \omega} \quad ,$$

e risulta dunque nullo dal momento che il termine racchiuso nella parentesi quadra alla destra dell'uguale altro non è che il complesso coniugato della seconda delle equazioni di Maxwell. In maniera analoga, si può poi dimostrare che risulta anche

$$i\beta \hat{k} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}^* + i\omega\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \omega} \cdot \mathbf{E}^* \equiv 0 \quad ,$$

e dall'operazione di sottrazione membro a membro si ricava dunque la seguente identità

$$-i \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \left[\hat{k} \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^* - \hat{k} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^* \right] = -i \left[\frac{\partial(\mu\omega)}{\partial \omega} |\mathbf{H}|^2 + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial \omega} |\mathbf{E}|^2 \right] \quad .$$

Usando ancora la regola della permutazione ciclica, si ottiene allora infine

$$\text{Re} \left[\mathbf{P} \cdot \hat{k} \right] = v_g \left[\frac{\partial(\mu\omega)}{\partial \omega} \frac{|\mathbf{H}|^2}{4} + \frac{\partial(\omega\epsilon)}{\partial \omega} \frac{|\mathbf{E}|^2}{4} \right] \quad . \quad (7.20)$$

L'equazione (7.20) va letta come segue: il termine al primo membro è il flusso della parte reale del vettore di Poynting attraverso una superficie di area unitaria, mentre quello racchiuso dalle parentesi quadre al secondo membro è, come si è visto quando si è discusso il teorema dell'energia, la densità di energia di un campo a banda stretta che si propaghi in un mezzo dispersivo. Le due quantità sono tra loro in relazione di diretta proporzionalità tramite la velocità di gruppo v_g ed allora, in analogia a quanto è consuetudine fare nella dinamica dei fluidi, si può interpretare la velocità v_g come la *velocità di trasporto dell'energia attiva*, così come si intendeva dimostrare.

Si noti che nel caso in cui la propagazione avvenga per onde piane in un mezzo non dispersivo con parametri ϵ e μ , la velocità di gruppo è

$$v_g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}(\omega\sqrt{\mu\epsilon})} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = c_{\mu\epsilon} \equiv v_f \quad ,$$

cioè essa coincide con la velocità di fase. Questa osservazione spiega il motivo per cui la quantità $c_{\mu\epsilon}$ viene indicata con il nome di *velocità della luce*, senza che venga posta alcuna enfasi particolare sul fatto che essa sia la velocità di fase o quella di gruppo.

Va tuttavia sottolineato che il fatto che la definizione non dia adito ad ambiguità è una peculiarità della propagazione per onde piane, legata essenzialmente al fatto che per questo tipo di onde le due velocità coincidono; tuttavia, questa proprietà non è assolutamente una caratteristica generale dell'elettromagnetismo perchè, come si avrà modo di apprezzare meglio nel seguito, le due velocità sono in generale diverse tra loro, e ciò che si riscontra è che la velocità di fase può essere indifferentemente maggiore, minore o uguale a $c_{\mu\epsilon}$, mentre deve necessariamente risultare

$$v_g \leq c_{\mu\epsilon} \quad ,$$

per non violare la teoria della relatività, che, come si usa dire con linguaggio improprio, afferma che “la velocità di propagazione non può superare la velocità della luce”.

Sulla scorta delle nozioni che si sono qui espone, si può riconoscere che questo modo di enunciare il risultato relativistico è poco preciso, perchè quella che si usa indicare con il termine di velocità della luce è in realtà la *velocità di un'onda piana* in un mezzo con parametri μ ed ϵ , ed il risultato della teoria della relatività andrebbe allora enunciato più correttamente dicendo che ogni onda elettromagnetica che non sia un'onda piana deve trasportare la sua energia con una velocità che non può eccedere quella dell'onda piana uniforme.

7.11.1 Dispersione della velocità di gruppo

Come si è anticipato più sopra, si intende ora analizzare il comportamento di un campo che risulti formato da uno spettro più “ricco” di quello costituito da due sole armoniche, e si incentra l'attenzione sull'evoluzione nello spazio e nel tempo dell'involuppo del campo al fine

di illustrare gli effetti cui danno luogo quei termini dell'espansione in serie (7.18) che erano stati precedentemente trascurati.

A tal fine, si scrive la generica componente del campo elettromagnetico utilizzando la nozione di inviluppo complesso, ovvero nella forma

$$\psi(t, \mathbf{r}) = A(t, \mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}}$$

e si suppone che $A(t, \mathbf{r})$ sia *lentamente variabile* rispetto al periodo dell'onda portante a frequenza ω_0 (cioè, si assume che lo spettro di $A(t, \mathbf{r})$ sia stretto attorno alla portante). Fisicamente, $A(t, \mathbf{r})$ rappresenta dunque l'inviluppo, ovvero la modulazione, di un campo altrimenti monocromatico alla frequenza ω_0 , e ciò che ci si propone di individuare ora è una equazione che descriva il modo in cui $A(t, \mathbf{r})$ varia nel tempo man mano che il campo si propaga. Conviene riferirsi al dominio della frequenza dove la trasformata $\hat{\psi}(\omega, \mathbf{r})$ di $\psi(t, \mathbf{r})$ risolve l'equazione di Helmholtz omogenea³

$$\nabla^2 \hat{\psi}(\omega, \mathbf{r}) = -\beta^2(\omega) \hat{\psi}(\omega, \mathbf{r}) \quad .$$

Per semplicità, si supponga che l'onda si propaghi lungo la direzione dello spazio individuata dal versore $\hat{z}$, e che essa sia indipendente dalle coordinate x ed y . L'equazione di Helmholtz si riscrive allora nella forma

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}(\omega, \mathbf{r})}{\partial z^2} = -\beta^2(\omega) \hat{\psi}(\omega, \mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{k}_0 = \beta_0 \hat{z} \quad ,$$

e vale quindi anche

$$\frac{\partial^2 \hat{A}(\omega, z)}{\partial z^2} + 2i\beta_0 \frac{\partial \hat{A}(\omega, z)}{\partial z} = [\beta_0^2 - \beta^2(\omega)] \hat{A} \quad , \quad \beta_0 = \beta(\omega_0) \quad ,$$

dove si è indicata con $\hat{A}(\omega, z)$ la trasformata di Fourier di $A(t, z)$. Poichè si è supposto che A sia lentamente variabile, si può trascurare la derivata seconda rispetto a z e semplificare l'equazione per $\hat{A}$ nella forma

$$i \frac{\partial \hat{A}(\omega, z)}{\partial z} = \frac{(\beta_0 - \beta(\omega))(\beta_0 + \beta(\omega))}{2\beta_0} \hat{A}(\omega, z) \simeq (\beta_0 - \beta(\omega)) \hat{A} \quad .$$

³La coppia trasformata-antitrasformata di Fourier è così definita:

$$\hat{\psi}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} dt \quad , \quad \psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{\psi}(\omega, \mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega \quad .$$

Applicando ora l'espansione in serie di Taylor (7.18) per la costante di propagazione $\beta(\omega)$, si ha ancora

$$\frac{\partial \hat{A}(\omega, z)}{\partial z} = +i\beta_1(\omega - \omega_0)\hat{A} + \frac{i}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2\hat{A} \dots ,$$

di modo che quando si antitrasforma e si usa il fatto che alla moltiplicazione per il fattore $(\omega - \omega_0)$, corrisponde, nel dominio del tempo, l'operatore $+i\partial/\partial t$, si ottiene infine l'equazione di evoluzione cercata, che si scrive come segue

$$\frac{\partial A(t, z)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A(t, z)}{\partial t} + \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A(t, z)}{\partial t^2} + \dots = 0 \quad . \quad (7.21)$$

In questa equazione i vari termini dell'espansione (7.18) compaiono in una forma chiara ed è allora semplice valutare gli effetti fisici cui ognuno di essi dà luogo. In particolare, si discute qui di seguito la natura dei fenomeni legati ai parametri β_1 e β_2 , cioè si assume che $\beta_n \equiv 0$, per $n \geq 3$.

- β_1 . Per valutare l'effetto di questo termine, ovvero per dimostrare che esso descrive gli stessi fenomeni che sono già stati illustrati in precedenza, si ponga $\beta_2 = 0$ nell'equazione (8.52). In questo caso, l'equazione si semplifica nella forma

$$\frac{\partial A(t, z)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A(t, z)}{\partial t} = 0 \quad ,$$

ed essa è risolta da un campo con un qualsiasi profilo temporale, purchè in esso le variabili spazio e tempo appaiano nella forma

$$A(z, t) = A_0(z - t/\beta_1) \quad , \quad A_0 = A(z = 0, t) \quad .$$

Si ritrova così il fatto che β_1 è pari all'inverso della velocità con cui si sposta la modulazione del campo, così come era stato mostrato nel paragrafo precedente.

- β_2 . Per definizione, questo parametro, che viene detto *dispersione della velocità di gruppo* o *dispersione cromatica*, è pari a

$$\beta_2 = \left. \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\left. \frac{\partial \beta}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} \right) = -\frac{1}{v_g^2} \frac{\partial v_g}{\partial \omega} \quad .$$

Dunque, quando in un problema di elettromagnetismo si trova che la derivata seconda della costante di propagazione non è nulla, dal punto di vista fisico ciò significa che *la velocità delle onde dipende dalla frequenza che esse hanno*. Ora, poichè lo spettro di un segnale modulato è composto da un insieme di onde con diverse frequenze, è ragionevole attendersi che in presenza di dispersione vi sia una *distorsione* dell'involuppo del campo man mano che questo si propaga.

Per dimostrare questo fatto conviene studiare l'equazione di propagazione (8.52) in un sistema di riferimento temporale in moto con la stessa velocità $v_g = 1/\beta_1$ del campo. Ciò può essere ottenuto introducendo la variabile temporale $\tau = t - \beta_1 z$ nella (8.52), cosa che consente di modificare l'equazione come segue

$$\frac{\partial u(\tau, z)}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 u(\tau, z)}{\partial \tau^2} = 0 \quad , \quad u(\tau, z) = u(t - \beta_1 z, z) \quad . \quad (7.22)$$

Questa equazione, che è detta *equazione di Schrödinger*, è una equazione di fondamentale importanza nello studio dei fenomeni ondulatori e, oltre che nel campo dell'elettromagnetismo, essa è ampiamente utilizzata anche nella meccanica quantistica, dove consente di modellare in termini probabilistici il moto di una particella non soggetta a forze esterne.

Per ciò che concerne l'effetto che si vuole qui illustrare, cioè la distorsione dell'involuppo del campo, è ora opportuno non tentare di procedere in modo del tutto generale, ma concentrare invece l'attenzione su un caso particolare che ha il pregio di consentire una valutazione in forma chiusa di tutti i calcoli di rilievo. Questo caso è quello di un campo che presenti un profilo temporale iniziale della modulazione di ampiezza di tipo gaussiano:

$$u(\tau = 0, z) = U_0 \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2T_0^2} \right\} \quad .$$

L'evoluzione di questo campo è agevolmente studiata ritornando nel dominio delle trasformate, dove l'equazione di Schrödinger appare nella forma

$$\frac{\partial \hat{u}(\Omega, z)}{\partial z} - \frac{i}{2} \beta_2 \Omega^2 \hat{u}(\Omega, z) = 0 \quad , \quad \Omega = \omega - \omega_0 \quad ,$$

con condizione iniziale

$$\hat{u}(\Omega, z = 0) = U_0 T_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Omega^2 T_0^2 \right\} .$$

La soluzione è di immediata individuazione e porge

$$\hat{u}(\Omega, z) = \hat{u}(\Omega, 0) e^{i \frac{\beta_2}{2} \Omega^2 z} = U_0 T_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \Omega^2 [T_0^2 - i \beta_2 z] \right\} ,$$

da cui, antitrasformando,

$$u(\tau, z) = \frac{U_0 e^{\frac{i}{2} \arctan\{D(z)\}}}{\sqrt[4]{1 + D^2(z)}} \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2 T_0^2} \frac{1 + i D(z)}{1 + D^2(z)} \right\} , \quad (7.23)$$

dove si è indicato con $D(z)$ la quantità

$$D(z) = \frac{\beta_2 z}{T_0^2} .$$

L'espressione (7.23) induce alle seguenti osservazioni:

1. si consideri innanzi tutto la durata temporale dell'impulso di modulazione: essa *dipende dalla coordinata z* , secondo l'espressione

$$T(z) = T_0 \sqrt{1 + D^2(z)} = T_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2} \right)^2} .$$

Come ci si aspettava, dunque, la dispersione cromatica causa la distorsione della modulazione, che si manifesta nella forma di un *allargamento* temporale dell'impulso che si osserva man mano che questo si propaga. Va anche notato che esistono due possibili regimi di dispersione, caratterizzati dai parametri

$$\beta_2 < 0 : \quad \text{dispersione } \textit{anomala} \quad \partial v_g / \partial \omega > 0 \quad ,$$

$$\beta_2 > 0 : \quad \text{dispersione } \textit{normale} \quad \partial v_g / \partial \omega < 0 \quad ,$$

e, come si vede, l'allargamento temporale ha luogo nella stessa maniera in entrambi i casi;

2. è facile trovare una spiegazione intuitiva di quanto appena affermato, ovvero del fatto che entrambi i regimi di dispersione danno luogo ad allargamento temporale. A tal fine è sufficiente osservare che il campo $\psi(t, z)$ può essere scritto nella forma

$$\psi(\tau, z) = \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2T_0^2[1 + D^2(z)]} \right\} e^{-i[\omega_0 + \Delta\omega(\tau, z)]\tau + i\alpha(z)} ,$$

dove

$$\Delta\omega(\tau, z) = \frac{\tau}{2T_0^2} \frac{D(z)}{1 + D^2(z)} = \frac{\beta_2 z}{T_0^2} \frac{\tau}{2T^2(z)} .$$

Questa espressione mostra che, man mano che il campo si propaga in presenza di dispersione cromatica, la sua modulazione di ampiezza presenta una *frequenza istantanea* che varia al variare dell'istante temporale; in altri termini, la frequenza della radiazione che costituisce il fronte di salita dell'impulso di modulazione ($\tau < 0$) è *differente* da quella della radiazione che ne costituisce il fronte di discesa ($\tau > 0$). Ad esempio, se la propagazione avviene nel regime di dispersione normale ($\beta_2 > 0$) il fronte di salita ha una frequenza istantanea *inferiore* a quella del fronte di discesa. Occorre tuttavia ricordare che si sta trattando il problema della propagazione in un mezzo con dispersione cromatica, ovvero di un mezzo nel quale la velocità di propagazione delle onde *dipende dalla loro frequenza*. Nel regime di dispersione normale, in particolare, la velocità di gruppo diminuisce al crescere della frequenza: ne segue che, man mano che l'impulso si propaga, il suo fronte di salita ha una velocità che tende a diventare sempre più grande rispetto a quella del fronte di discesa, e ciò si riflette nell'allargamento temporale dell'impulso che è stato precedentemente messo in evidenza. In maniera analoga, nel regime di dispersione anomala, la frequenza istantanea del fronte di salita è maggiore di quella del fronte di discesa, ma poichè in questo regime di dispersione la velocità cresce al crescere della frequenza, il fronte di salita tende ancora ad avere velocità superiore a quella del fronte di discesa, e ciò si riflette nuovamente in un allargamento temporale.

3. Si definisce lunghezza di dispersione la quantità

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|} \quad ,$$

e come è immediato verificare, essa rappresenta la distanza alla quale la larghezza temporale dell'impulso di modulazione aumenta di $\sqrt{2}$ volte rispetto al suo valore iniziale. Si noti che L_D scala con il quadrato della durata iniziale T_0 : quanto più è breve l'impulso iniziale, tanto più rapidamente esso si allarga quando si propaga.

Al pari di quanto fatto nel precedente punto 2., anche questa caratteristica della propagazione in presenza di dispersione può essere chiarita con una semplice spiegazione intuitiva. Infatti, un impulso breve nel dominio del tempo ha necessariamente uno spettro costituito da un grande numero di armoniche. Ora, poichè in presenza di dispersione la differenza di velocità tra le armoniche è direttamente proporzionale alla loro separazione in frequenza, appare evidente che la rapidità con cui aumenta la durata temporale dell'impulso dipende dalla sua estensione in frequenza e quindi, in ultima analisi, dal suo valore iniziale.

Va per altro notato che la proprietà appena esposta non è peculiare della propagazione in presenza di dispersione, ma è invece di carattere molto più generale perchè discende da un principio fondamentale della fisica, il *principio di indeterminazione di Heisemberg*. Questo principio si applica a tutti i fenomeni fisici che coinvolgono *coppie di variabili coniugate* quali sono, per l'appunto, la durata temporale e l'estensione spettrale, ma anche, ad esempio, l'estensione spaziale e lo spettro dei vettori d'onda di un generico campo elettromagnetico. È dunque ragionevole attendersi che fenomeni simili a quelli appena illustrati si possano ritrovare anche in altri contesti che riguardano la propagazione delle onde elettromagnetiche: un caso ben noto, che verrà illustrato in dettaglio nel seguito, è ad esempio quello della *diffrazione*, cioè di quel fenomeno che si osserva quando un campo elettromagnetico viene fatto transitare attraverso una fenditura spaziale "stretta".

4. L'ultimo aspetto di interesse nella (7.23) riguarda infine il fattore di ampiezza

$$\frac{U_0 e^{\frac{i}{2} \arctan\{D(z)\}}}{\sqrt[4]{1 + D^2(z)}}$$

che compare nell'espressione del campo. Come si vede, per effetto di questo termine l'ampiezza del campo non rimane costante nel corso della propagazione, ma diminuisce all'aumentare di z . La ragione fisica di questa diminuzione di ampiezza non è quella di una attenuazione, giacchè il mezzo nel quale avviene la propagazione è stato assunto essere privo di perdite, quanto piuttosto la *conservazione dell'energia*. Infatti, poichè, come si è visto, la durata temporale dell'impulso di modulazione aumenta man mano che il campo si propaga, l'energia si può conservare solo se l'ampiezza della modulazione diminuisce all'aumentare di z .

Capitolo 8

Antenne

Lo studio dell'irradiazione di un campo elettromagnetico da parte di un insieme di sorgenti è uno dei problemi più classici dell'elettromagnetismo, e può essere idealmente diviso in due categorie, che verranno presentate qui di seguito nel seguente ordine: l'irradiazione da parte di antenne filiformi, e quella da parte di antenne ad apertura.

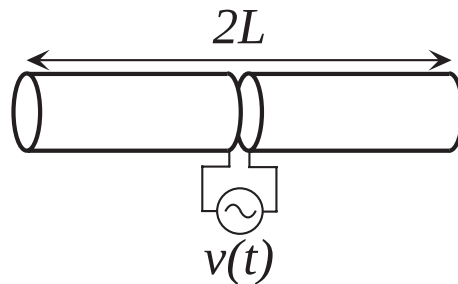


Figura 8.1: Antenna filiforme alimentata nel *gap* da una tensione $v(t)$.

Per fornire un'idea delle problematiche che entrano in gioco, si consideri il primo di questi due casi, quello delle antenne filiformi. Si tratta di analizzare il comportamento di un filo metallico, che viene troncato nel mezzo, ed alimentato con una tensione $v(t)$ (si veda la Fig.(8.1)). In linea di principio, la valutazione del campo irradiato da questa sorgente è “semplice”: si risolvono le equazioni di Maxwell e si impongono le seguenti condizioni al contorno:

- $\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0$ sulla superficie esterna del conduttore metallico;

- le condizioni di radiazione di Sommerfeld per il campo all'infinito;
- si chiede infine che l'integrale di linea del campo elettrico su un percorso che unisce tra loro la superficie inferiore e quella superiore del *gap* che è stato praticato nel centro dell'antenna sia uguale alla tensione $v(t)$ ad esso applicata.

Il problema che si riscontra all'atto pratico è però il fatto che, in generale, la tensione $v(t)$ *non può essere considerata* come un termine noto, giacché essa dipende *sia* dal generatore che viene usato per alimentare l'antenna, *sia* dal campo irradiato, che è l'incognita del problema. Si osservi che le cose non cambierebbero sostanzialmente nemmeno se si considerasse un'antenna alimentata da un generatore ideale di tensione (di modo che la tensione non dipende dal carico, ed è dunque pari ad un valore fissato): in questo caso, infatti, vi sarebbe pur sempre da considerare il fatto che la connessione tra generatore ed antenna viene realizzata per mezzo di una linea di trasmissione, e questo rende subito chiaro che ci si ritrova così con un problema del tutto analogo rispetto a quello che si cercava di evitare: nota la tensione fornita dal generatore, e le caratteristiche geometriche e fisiche della linea di trasmissione, calcolare $v(t)$ ai capi dell'antenna. In sostanza, dunque, il calcolo del campo irradiato è solo una parte di un problema più complesso, che è quello della *propagazione in presenza di sorgenti*.

D'altra parte, poichè non è possibile pensare di risolvere singolarmente ogni problema di eccitazione di ciascuna particolare antenna, è opportuno ricorrere alla caratterizzazione di un certo numero di antenne "canoniche" per poi procedere al calcolo di casi più complessi basandosi sulle informazioni che si sono ottenute con questo studio.

L'esposizione che viene presentata in questo capitolo segue questa metodologia, e comincia con il caso più semplice, che è quello dell'irradiazione da parte di un *dipolo elettrico elementare*, e cioè di un filo di corrente di lunghezza infinitesima, percorso da una corrente nota. Nel seguito, per mezzo del principio di sovrapposizione degli effetti, i risultati del dipolo vengono poi estesi al caso di antenne a spira e di antenne filiformi di lunghezza generica.

Successivamente, nel paragrafo 8.4, viene affrontato lo studio dell'emissione da parte di antenne ad apertura, e si illustra come trattare una problematica che è del tutto analoga a quella cui si accennava in precedenza, e cioè il fatto che, nemmeno in questo tipo di antenne,

è possibile ipotizzare la conoscenza a priori del campo sull'apertura, giacchè questa dipende *anche* dall'incognita del problema, che è il campo irradiato.

Il capitolo prosegue poi illustrando come sia possibile riassumere le proprietà di irradiazione di una antenna in forma sintetica e semplice mediante l'introduzione di un insieme di *parametri* di trasmissione e ricezione; i paragrafi conclusivi, infine, sono dedicati allo studio delle *schiere di antenne*.

8.1 Dipolo elementare

8.1.1 Studio nel dominio della frequenza

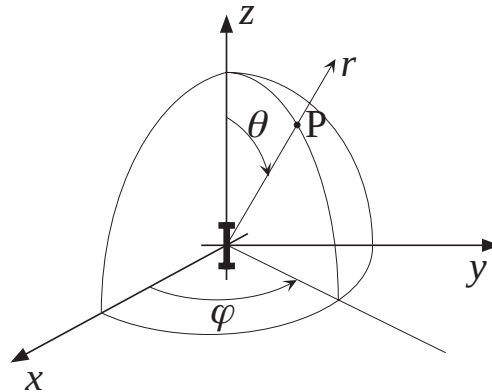


Figura 8.2: Dipolo corto con i sistemi di coordinate cartesiane ortogonali e sferiche.

Si consideri dunque un filo di corrente di lunghezza Δz infinitesima (e cioè, in pratica, tale che $\Delta z \ll \lambda$), disposto parallelamente all'asse z di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, e percorso da una corrente I che, dato che $\Delta z \ll \lambda$, può essere considerata costante rispetto a z . Lo studio in frequenza dell'irradiazione da parte di questa sorgente può essere affrontato utilizzando il formalismo del potenziale elettromagnetico, e cioè risolvendo l'equazione

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \sigma^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_i \quad , \quad (8.1)$$

dove $\mathbf{J}_i$ è la densità di corrente impressa che, nel caso in esame, vale

$$\mathbf{J}_i = I \delta(x) \delta(y) f(z) \hat{z} \quad , \quad f(z) = \begin{cases} 1 & |z| \leq \Delta z/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad ,$$

con $\delta(\cdot)$ la funzione di Dirac, utilizzata qui perchè si assume che il filo di corrente abbia sezione trascurabile nel piano $\{x, y\}$.

Proiettando la (8.1) sui tre assi del sistema di coordinate cartesiane si ottiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x - \sigma^2 A_x &= 0 \quad , \\ \nabla^2 A_y - \sigma^2 A_y &= 0 \quad , \\ \nabla^2 A_z - \sigma^2 A_z &= -\mu I \delta(x) \delta(y) f(z) \quad . \end{aligned}$$

Le prime due equazioni sono risolte da $A_x = A_y \equiv 0$. Per ciò che concerne la terza, invece, si può osservare che, quando la lunghezza Δz del filo di corrente tende a zero, e viene però mantenuto costante il prodotto $I \Delta z$, essa diventa

$$\nabla^2 A_z - \sigma^2 A_z = -\mu I \delta(\mathbf{r}) \quad , \quad (8.2)$$

e, come è dimostrato nell'appendice 1 di questo capitolo, fornisce la soluzione

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \Delta z}{r} e^{-\sigma r} \hat{z} \quad . \quad (8.3)$$

Questo risultato è di importanza fondamentale: esso dà il valore del potenziale vettore magnetico per il campo irradiato da un elemento infinitesimo di corrente e permette dunque di stimare l'emissione di campo da parte di una antenna filiforme con estrema semplicità. A tal fine, infatti, è sufficiente eseguire da un lato quelle operazioni di derivazione che permettono di passare dal potenziale vettore ai campi elettrico e magnetico; dall'altro applicare la sovrapposizione degli effetti per passare da un'antenna infinitesima ad una di lunghezza finita.

Per prima cosa, vediamo dunque le espressioni dei campi, che sono ottenute per mezzo delle seguenti relazioni

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu} \quad , \quad \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \mathbf{A}}{i\omega \mu \epsilon} \quad .$$

Esprimendo le componenti nel sistema di coordinate sferiche, si ottiene

$$\mathbf{H} = H_\varphi \hat{\varphi} \quad , \quad \mathbf{E} = E_\theta \hat{\theta} + E_r \hat{r} \quad ,$$

con

$$H_\varphi = I \Delta z \frac{\sin(\theta) e^{-\sigma r}}{4\pi} \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r^2} \right) , \quad (8.4)$$

$$E_\theta = Z_0 I \Delta z \frac{\sin(\theta) e^{-\sigma r}}{4\pi} \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma r^3} \right) , \quad (8.5)$$

$$E_r = Z_0 I \Delta z \frac{\cos(\theta) e^{-\sigma r}}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\sigma r^3} \right) , \quad (8.6)$$

Il campo non ha alcuna dipendenza dall'angolo φ , così come ci si poteva attendere dato che la sorgente ha simmetria di rotazione attorno all'asse z ; per ciò che concerne la dipendenza dalle altre coordinate, invece, vi sono delle peculiarità che è opportuno analizzare nel dettaglio.

- **Dipendenza dalla coordinata r .** Nelle componenti del campo compaiono più addendi che presentano una diversa dipendenza dalla distanza r . In particolare, se si suppone che il mezzo che circonda l'antenna sia privo di perdite, di modo che $\sigma = i2\pi/\lambda$ (come, ad esempio, se l'antenna è nel vuoto), e si considera l'espressione di H_φ , si osserva che sono presenti i due addendi con dipendenza

$$\frac{\sigma}{r} = i \frac{2\pi}{\lambda r} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r^2} ,$$

e pertanto, se accade che il punto nel quale interessa valutare il campo è posto ad una distanza $r \gg \lambda$ dalla sorgente, è lecito trascurare il termine $1/r^2$ rispetto a $2\pi/r\lambda$, e dunque approssimare l'espressione del campo magnetico con la seguente

$$H_\varphi \simeq i \frac{I \Delta z}{2\lambda r} \sin(\theta) e^{-\sigma r} . \quad (8.7)$$

In maniera analoga, il campo elettrico può essere approssimato come segue

$$\begin{cases} E_\theta = Z_0 H_\varphi \simeq i Z_0 \frac{I \Delta z}{2\lambda r} \sin(\theta) e^{-\sigma r} , \\ E_r \simeq 0 . \end{cases} \quad (8.8)$$

dove $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ è l'impedenza d'onda del vuoto (ovvero del mezzo che circonda l'antenna).

La regione in cui valgono queste approssimazioni che, come si è detto, è caratterizzata da valori di $r \gg \lambda$, è detta regione di *campo lontano*, mentre quella complementare è detta regione di *campo vicino* ed i relativi campi sono detti, rispettivamente, *campo lontano* e *campo vicino*.

Si osservi che, proprio per definizione, le componenti di campo lontano dipendono dalla distanza solo attraverso il termine $1/r$, mentre quelle di campo vicino hanno dipendenze di tipo $1/r^2$ o $1/r^3$, e questo fatto ha una interessante conseguenze che riguarda la *potenza* irradiata dall'antenna. Infatti, se si calcola il vettore di Poynting, si ottiene¹

$$\mathbf{P} = \frac{|I|^2 (\Delta z)^2}{4\lambda^2} Z_0 \sin^2(\theta) \left[\frac{1}{r^2} - i \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^3 \frac{1}{r^2} \right] \hat{r} \quad ,$$

e dunque si osserva che le componenti di campo lontano contribuiscono *solamente alla parte reale del vettore di Poynting* (dal momento che questo è calcolato come prodotto di campo elettrico e magnetico, e la sua parte reale scala con $1/r^2$), mentre le componenti di campo vicino danno luogo alla parte immaginaria di $\mathbf{P}$. In altre parole, le componenti di campo lontano sono quelle che “trasportano” la potenza attiva, mentre le componenti di campo vicino sono responsabili di accumulo di energia elettrica o magnetica in prossimità del dipolo. Per questa ragione le prime vengono anche dette *componenti radiative* del campo, e le seconde *componenti reattive*.

Se si integra il vettore di Poynting su una superficie sferica centrata nell'origine, si ottiene la seguente espressione per la potenza irradiata dall'antenna²

$$W = \frac{\pi}{3} Z_0 |I|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \left[1 - i \left(\frac{\lambda}{2\pi r} \right)^3 \right] \quad . \quad (8.9)$$

¹Il vettore di Poynting contiene in realtà anche una componente diretta lungo θ , ma questa non conta ai fini della potenza irradiata.

²Si ricorda che l'integrale su una superficie sferica va operato come segue:

$$\int_{\text{Sup.sf.}} f(r, \theta, \varphi) d\text{Sup.sf.} = r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin(\theta) f(r, \theta, \varphi)$$

dove r è il raggio della sfera.

La potenza attiva irradiata dall'antenna è dunque indipendente dal raggio della sfera su cui si è operata l'integrazione, così come ci si doveva aspettare, dal momento che il mezzo che circonda l'antenna è privo di perdite e la potenza si deve conservare; la potenza reattiva scala invece con $(\lambda/2\pi r)^3$, ed è quindi addirittura predominante nel campo vicino, mentre decresce rapidamente a zero appena ci si allontana dall'antenna. Inoltre, come si può osservare, essa ha il segno negativo, ad indicare che il comportamento elettrico dell'antenna a dipolo corto è di tipo *capacitivo*.

Si osservi anche che la potenza attiva dipende dal fattore $(\Delta z/\lambda)^2$ e dunque, poichè per ipotesi $\Delta z \ll \lambda$, l'antenna a dipolo corto trasmette una potenza molto piccola.

Un commento conclusivo riguarda infine le espressioni (8.7,8.8): nella regione di campo lontano, sono presenti solo le componenti di campo allineate rispetto ai versori angolari θ e φ , ed esse sono tra loro in fase, e di modulo uguale a meno dell'impedenza d'onda Z_0 . La parte reale del vettore di Poynting è invece diretta lungo $\hat{r}$ e quindi, nella regione lontana il campo elettromagnetico tende ad essere un campo che, *punto per punto*, può essere approssimato da un'onda piana che si propaga lungo le direzioni che si allontanano radialmente dall'antenna.

La spiegazione intuitiva di questo fatto è immediata: infatti, a grande distanza, l'antenna tende a confondersi con una antenna puntiforme che, per ragioni di simmetria, irradia un'onda sferica. Più è grande il raggio di quest'onda, più è lecito approssimare localmente ogni singola porzione della superficie sferica con un piano, ed il campo elettromagnetico con quello di un'onda piana che si propaga lungo la direzione radiale.

- **Dipendenza dalla coordinata θ .**

Per ciò che concerne la dipendenza da questa coordinata, si può osservare che le componenti di campo che sono allineate rispetto ai versori angolari $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$ contengono il fattore $\sin(\theta)$, mentre la componente di campo elettrico radiale contiene il termine $\cos(\theta)$. Ora, come si è visto, le componenti di maggior rilievo ai fini pratici sono quelle angolari, dal momento che esse contengono i termini di campo lontano, e si può dunque concludere che, a grande distanza dall'antenna, il campo elettromagnetico è proporzionale al seno

dell'angolo azimutale θ . Ne segue che l'irradiazione è massima nel piano che taglia a metà l'antenna (e cioè nel piano $z = 0$), mentre tende ad essere nulla o trascurabile sull'asse z , e cioè sulla perpendicolare all'antenna.

Come vedremo nel prosieguo del capitolo, questa caratteristica è comune a molte antenne, ma va ricordato che essa vale solo nella regione di campo lontano; in altre parole, non è sempre corretto dire che in prossimità dell'antenna non vi è campo al di sopra (o al di sotto) dell'antenna stessa e, come è facile immaginare, questo può essere un aspetto di rilievo, ad esempio quando si installa una antenna sul tetto di un edificio, o in prossimità del suolo.

Il limite statico

Prima di concludere lo studio nel dominio della frequenza, è opportuno vedere quali espressioni assumano i campi elettrico e magnetico quando la frequenza del campo tende a zero, e cioè quando si tende a ricadere nel cosiddetto *limite statico*.

A tal fine si supponga di intersecare il dipolo con una superficie chiusa S e si integri l'equazione di continuità della corrente nel volume V contenuto in essa, assegnando il segno positivo alla corrente che entra nel volume (si veda la Fig.(8.3)).

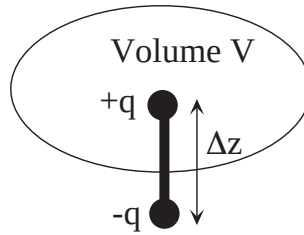


Figura 8.3: Disposizione del dipolo e del volume V per la definizione del campo nel limite statico.

Si ottiene

$$-I + i\omega q = 0 \quad ,$$

e quindi anche $I \Delta z = i\omega \mathcal{U}$, dove $\mathcal{U} = q\Delta z$ è, per definizione, il *momento* del dipolo elettrico. Sostituendo questa quantità nelle (8.4–8.6),

si ottiene allora

$$H_\varphi = \frac{\mathcal{U}}{4\pi\epsilon} \frac{1}{Z_0} \left(\frac{i\beta}{r^2} + \frac{(i\beta)^2}{r} \right) \sin(\theta) e^{-i\beta r} \quad , \quad (8.10)$$

$$E_\theta = \frac{\mathcal{U}}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\beta}{r^2} + \frac{(i\beta)^2}{r} \right) \sin(\theta) e^{-i\beta r} \quad , \quad (8.11)$$

$$E_r = \frac{\mathcal{U}}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\beta}{r^2} \right) \cos(\theta) e^{-i\beta r} \quad . \quad (8.12)$$

Si noti in particolare che, se $\omega \rightarrow 0$, si ha $H_\varphi \rightarrow 0$, ed il campo elettrico si riduce a quello ben noto dai corsi di Elettrotecnica, con la sola dipendenza dall'inverso del cubo della distanza.

8.1.2 Studio nel dominio del tempo

A completamento dell'analisi, si rivisita ora lo studio dell'irradiazione da parte dell'antenna a dipolo corto nel dominio del tempo.

Il potenziale vettore magnetico

Come si è visto, nel dominio della frequenza ed in assenza di perdite, il potenziale vettore magnetico soluzione del problema di propagazione in presenza della sorgente a dipolo corto si scrive come segue

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I \Delta z}{r} e^{-i\beta r} \hat{z} \quad .$$

La corrispondente grandezza nel dominio del tempo è allora

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(r, t) &= \frac{\hat{z}}{2\pi} \int \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-i\beta r}}{r} I(\omega) \Delta z e^{i\omega t} d\omega = \\ &= \hat{z} \frac{\mu}{8\pi^2} \Delta z \int I(\omega) \frac{\exp \{i\omega (t - \frac{r}{c})\}}{r} d\omega \quad . \end{aligned}$$

Si osservi che, per passare dalla prima alla seconda di queste espressioni è necessario assumere che il mezzo in cui avviene la propagazione sia un mezzo *non dispersivo*, altrimenti non è vero che vi è una dipendenza lineare di β da ω .

Si ponga ora

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int I(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad .$$

Si ottiene così

$$\mathbf{a}(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{i \left(t - \frac{r}{c}\right) \Delta z}{r} \hat{\mathbf{z}} \quad .$$

Nel dominio del tempo, il potenziale vettore ha dunque la forma di *un'onda sferica* che si propaga nel verso delle r crescenti: infatti, il valore di corrente che era presente ad un dato istante t sull'antenna viene ritrovato ad una distanza r da essa dopo che è trascorso un intervallo di tempo pari a r/c . Per questa ragione, il potenziale $\mathbf{a}(r, t)$ viene anche indicato con il nome di *potenziale ritardato*.

Si osservi anche che questa interpretazione fornisce una ulteriore giustificazione al motivo per cui, nel derivare la (8.3) si è posto a zero il termine che dipende da $\exp\{+i\beta z\}$ (si veda l'Appendice 1 di questo capitolo): questo darebbe luogo ad un termine del tipo $i(t + \frac{r}{c})$, e cioè ad un termine che comparirebbe alla distanza r nell'istante temporale $-r/c$, e cioè “prima dell'accensione” della corrente. Si tratterebbe allora di un *potenziale anticipato*, che deve essere trascurato in virtù del principio di causalità.

I campi elettrico e magnetico ed il vettore di Poynting

Per ciò che concerne le componenti del campo nel dominio del tempo, conviene assumere come punto di partenza le espressioni nel dominio della frequenza che sono state scritte con riferimento al momento di dipolo $\mathcal{U}(\omega)$. Ad esempio, per la componente radiale del campo, si ha

$$E_r(\omega) = \frac{\mathcal{U}(\omega)}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\omega}{cr^2} \right) \cos(\theta) e^{-i\omega r/c} \quad ,$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$e_r(t) = \frac{Z_0}{2\pi r} \cos(\theta) \left[\frac{cu(t^*)}{r^2} + \frac{u'(t^*)}{r} \right] \quad , \quad (8.13)$$

dove si è indicato con l'apice l'operazione di derivazione rispetto all'argomento, e si è introdotto il tempo ritardato $t^* = t - r/c$ che rappresenta il tempo misurato a partire dall'istante in cui, nel punto di coordinata r , arriva un segnale che viaggia con velocità c .

Analogamente, le componenti azimutali del campo risultano

$$e_\theta(t) = \frac{Z_0}{4\pi r} \sin(\theta) \left[\frac{cu(t^*)}{r^2} + \frac{u'(t^*)}{r} + \frac{u''(t^*)}{c} \right] \quad , \quad (8.14)$$

e

$$h_{\varphi}(t) = \frac{1}{4\pi r} \sin(\theta) \left[\frac{u'(t^*)}{r} + \frac{u''(t^*)}{c} \right] . \quad (8.15)$$

Parallelamente a quanto accade nel dominio della frequenza, anche qui si riscontra la presenza di termini che hanno diverse dipendenze dalle coordinate spaziali ed allora, per fornire una più chiara visione dei fenomeni che entrano in gioco, conviene abbandonare una trattazione del tutto generale, e concentrarsi invece su un caso particolare, quello di un dipolo alimentato con un momento la cui espressione consenta di eseguire i calcoli in forma chiusa. Si scelga, ad esempio,

$$u(t) = u_0 \exp \left\{ -2 \frac{t^2}{T^2} \right\} .$$

Si ottiene così

$$u'(t) = -\frac{4t}{T^2} u(t) \quad , \quad u''(t) = \frac{4}{T^2} \left[\frac{4t^2}{T^2} - 1 \right] ,$$

e quindi

$$\begin{aligned} e_r(t) &= \frac{2Z_0 u(t^*)}{4\pi r c T^2} \left[\left(\frac{cT}{r} \right)^2 - 4 \frac{cT}{r} \frac{t^*}{T} \right] \cos(\theta) \quad , \\ e_{\theta}(t) &= \frac{Z_0 u(t^*)}{4\pi r c T^2} \left\{ \left[\left(\frac{4t^*}{T} \right)^2 - 4 \right] - 4 \frac{cT}{r} \frac{t^*}{T} + \left(\frac{cT}{r} \right)^2 \right\} \sin(\theta) \quad , \\ h_{\varphi}(t) &= \frac{u(t^*)}{4\pi r c T^2} \left\{ \left[\left(\frac{4t^*}{T} \right)^2 - 4 \right] - 4 \frac{cT}{r} \frac{t^*}{T} \right\} \sin(\theta) \quad . \end{aligned}$$

I termini di campo vicino (e cioè quelli che dipendono da $1/r^2$ o da $1/r^3$) risultano dominanti fino alla distanza $r < cT$, mentre quelli di campo lontano prevalgono per $r > cT$. Dunque, nel dominio del tempo la “frontiera” tra campo vicino e campo lontano è data dalla quantità cT , e cioè dal prodotto della durata dell’impulso con cui viene alimentata l’antenna per la velocità della luce. In altre parole, la frontiera coincide con l’estensione spaziale dell’impulso, e si può cominciare a parlare di campo lontano a partire da quella coordinata nella quale l’impulso si è completamente staccato dalla sorgente.

Per ciò che concerne il vettore di Poynting, infine, è immediato verificare che la sua componente radiale (che è l’unica a contribuire al flusso di

potenza attraverso una suiperficie chiusa disposta attorno alla sorgente) risulta

$$s_r(t) = \frac{Z_0 \sin^2(\theta)}{(4\pi r c)^2} \left\{ (u'')^2 + \frac{c}{r} \frac{d}{dt} \left[\frac{(u')^2}{2} + \frac{c}{r} u u' + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 u^2 \right] \right\} ,$$

di modo che, se si valuta l'energia che fluisce attraverso una superficie sferica di raggio r nell'intervallo di tempo $t_2^* - t_1^*$ si trovano due contributi di tipo diverso:

- il primo è quello che dipende da un integrale del tipo $\int (u'')^2(\tau) d\tau$, e diventa predominante per distanze $r > cT$, e cioè nella regione di campo lontano. Questo contributo è sempre positivo (a meno che non si abbia $u''(t) \equiv 0$), e corrisponde all'energia irradiata dal dipolo nell'intervallo di tempo $t_2^* - t_1^*$. Questa energia si propaga verso l'infinito (per effetto delle condizioni di radiazione di Sommerfeld) e ad essa corrisponde un flusso di potenza *irreversibile*, e cioè tale da non poter essere recuperato dalla sorgente una volta che questa l'abbia irradiato.

Si noti che, se il dipolo è realizzato per mezzo di una carica fissa ed una (di segno opposto) in moto verso di essa, il momento di dipolo è

$$u(t) = q \Delta x(t) ,$$

e quindi vi è potenza irradiata solo se $\Delta x''(t) \neq 0$, e dunque solo se la carica è accelerata, ovvero non in moto rettilineo uniforme.

- Il secondo contributo che compare nell'energia è invece dato da un termine che è proporzionale a

$$\int_{t_1^*}^{t_2^*} \frac{d}{dt} \left[\frac{(u')^2}{2} + \frac{c}{r} u u' + \frac{u^2}{2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 \right] dt = \left[\frac{(u')^2}{2} + \frac{c}{r} u u' + \frac{u^2}{2} \left(\frac{c}{r} \right)^2 \right]_{t_1^*}^{t_2^*} .$$

Questo termine è funzione dei soli estremi di integrazione e, contenendo termini di derivata prima e addendi pesati per (c/r) o $(c/r)^2$, dipende dalle componenti reattive del campo. Se il momento di dipolo $u(t)$ è una funzione limitata del tempo (come, ad esempio, una funzione ciclica), l'integrale può essere reso nullo con una opportuna scelta di t_1^* e t_2^* : ne segue che l'energia associata a questo termine è di natura *reversibile*, ovvero essa può essere completamente recuperata dalla sorgente.

Il campo irradiato da una carica in moto

Come ultimo esempio di studio dell'irradiazione nel dominio del tempo si analizza ora il comportamento di una carica in moto uniforme lungo l'asse z di un opportuno sistema di riferimento cartesiano. Sia $t = 0$ l'istante temporale nel quale la carica transita per l'origine del riferimento; la densità di corrente associata alla carica in moto è allora

$$\mathbf{j}_i(t) = q\delta(x)\delta(y)\delta\left(t - \frac{z}{v}\right) \hat{z} \quad ,$$

dove v è la velocità della carica. Nel dominio di Fourier si ha allora

$$\mathbf{J}_i = q\delta(x)\delta(y)e^{-i\omega z/v} \hat{z} \quad ,$$

espressione che mostra come la densità di corrente possa anche essere pensata come dovuta alla densità di corrente che vi è all'interno di un conduttore filiforme, disposto parallelamente a $\hat{z}$, e percorso da una corrente di modulo costante, e fase variabile secondo l'andamento periodico dato da $\exp\{-i\omega z/v\}$.

L'elemento infinitesimo di questa corrente che è centrato attorno alla posizione ξ nel filo, ed ha lunghezza Δz , produce allora, nel punto $P = (\rho, z')$ il potenziale vettore

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} q e^{-i\omega \xi/v} \Delta z \frac{\exp\{-i\omega n d/c\}}{d} \hat{z}$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo che circonda il conduttore elettrico, e

$$d = \sqrt{\rho^2 + (z' - \xi)^2} \quad ,$$

è la distanza del punto P dall'elemento di corrente considerato.

Il potenziale vettore dovuto alla corrente dell'intero filo è allora

$$\mathbf{A} = \frac{\mu q}{4\pi} \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{\exp\left\{-i\omega \left[\frac{\xi}{v} + \frac{n}{c} \sqrt{\rho^2 + (z' - \xi)^2}\right]\right\}}{\sqrt{\rho^2 + (z' - \xi)^2}} \quad ,$$

cui corrisponde, nel dominio del tempo,

$$\mathbf{a} = \frac{\mu q}{8\pi^2} \hat{z} \int_{-\infty}^{+\infty} du \, 2\pi \frac{\delta\left[t - \frac{u + z'}{v} - \frac{n}{c} \sqrt{\rho^2 + u^2}\right]}{\sqrt{\rho^2 + u^2}} \quad ,$$

avendo supposto che il mezzo sia non dispersivo, di modo che n non dipende da ω .

Analizziamo ora il comportamento della funzione di Dirac all'interno dell'integrale, e poniamo a tal fine $w = u + (nc/v)\sqrt{\rho^2 + u^2}$. La funzione è allora

$$\delta \left[\frac{1}{v} (vt - z' - w) \right] ,$$

ed il suo argomento si annulla per $w = vt - z' = z_0 - z'$, z_0 essendo la posizione della particella al tempo t . Occorre distinguere due casi:

- *caso sub-relativistico*: $(nv/c) < 1$, ovvero $v < c/n$, e quindi il caso di una particella che si muove con velocità inferiore alla velocità della radiazione elettromagnetica nel mezzo considerato. Al variare di u da meno infinito a più infinito, anche w cambia con continuità tra questi estremi e quindi, qualsiasi sia la posizione iniziale z_0 , è sempre possibile trovare un valore di z' che annulli l'argomento della funzione di Dirac. Ne segue che il potenziale vettore è diverso da zero in tutti i punti dello spazio.
- *caso super-relativistico*: $(nv/c) > 1$, ovvero $v > c/n$. In questo caso, al variare di u da meno infinito a più infinito, si ha

$$w \geq \rho \sqrt{\left(\frac{nv}{c}\right)^2 - 1} ,$$

e l'integrale che contiene la funzione di Dirac può allora assumere valori non nulli solo se

$$z_0 - z' \geq \rho \sqrt{\left(\frac{nv}{c}\right)^2 - 1} .$$

Si individua così un volume dello spazio, delimitato dalla superficie conica

$$z' = z_0 + \rho \sqrt{\left(\frac{nv}{c}\right)^2 - 1}$$

all'interno del quale $\mathbf{a} \neq 0$: se la particella si muove nel verso delle z crescenti, il campo elettromagnetico è diverso da zero solo all'interno di un cono che ha il vertice nella particella, e giace interamente a sinistra di essa. Questo effetto prende il nome di *effetto Cerenkov*.

8.2 Antenna a spira di corrente

Dalle (8.10–8.12), applicando il teorema di dualità, si possono ricavare le espressioni del campo irradiato da un *dipolo magnetico* (invece che elettrico). Esse si ottengono cambiando formalmente il campo magnetico $\mathbf{H}$ con un nuovo campo elettrico, $\mathbf{E}'$, il campo elettrico $\mathbf{E}$ con un campo magnetico, $\mathbf{H}'$, la costante dielettrica ϵ con μ' , quella magnetica μ con ϵ' , ed il momento di dipolo elettrico $\mathcal{U}_e$ con il momento di dipolo magnetico, $\mathcal{U}_m$. Omettendo gli apici per semplicità di notazione si trovano allora le seguenti espressioni per il campo irradiato

$$E_\varphi = -\frac{\mathcal{U}_m}{4\pi\epsilon} Z_0 \left(\frac{i\beta}{r^2} + \frac{(i\beta)^2}{r} \right) \sin(\theta) e^{-i\beta r} , \quad (8.16)$$

$$H_\theta = \frac{\mathcal{U}_m}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\beta}{r^2} + \frac{(i\beta)^2}{r} \right) \sin(\theta) e^{-i\beta r} , \quad (8.17)$$

$$H_r = \frac{\mathcal{U}_m}{2\pi\mu} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{i\beta}{r^2} \right) \cos(\theta) e^{-i\beta r} . \quad (8.18)$$

Ciò che rimane da chiarire, ora, è che cosa rappresenti $\mathcal{U}_m$ dal punto di vista fisico: infatti, mentre nel caso del dipolo elettrico è semplice definire il momento $\mathcal{U}_e$, che è dato dal prodotto di una carica per una lunghezza, la stessa cosa non si può dire per $\mathcal{U}_m$, dal momento che non esiste una carica magnetica elementare.

Quello che è possibile fare, tuttavia, è costruire un *dipolo magnetico equivalente* e ciò che si dimostra qui di seguito è che questo può essere ottenuto se si realizza una *antenna a spira di corrente*.

La dimostrazione procederà come segue: per semplicità dei calcoli, ci si limiterà al caso statico, e si considererà una spira di raggio R percorsa da una corrente I (si veda la Fig.(8.4)). Utilizzando la sovrapposizione degli effetti, e le conoscenze che sono state acquisite nel corso dello studio del comportamento del dipolo elettrico, si calcolerà il campo prodotto dalla spira, che verrà pensata come la giustapposizione di tanti conduttori elettrici di lunghezza infinitesima, disposti a formare un cerchio. Per confronto con le (8.16–8.18), ridotte al loro limite statico, si vedrà allora che la spira di corrente si comporta effettivamente come un dipolo magnetico equivalente di opportuna ampiezza, e si potrà così inferire che le (8.16–8.18) sono le espressioni dei campi prodotti, anche al di là del limite statico, da una distribuzione circolare di corrente.

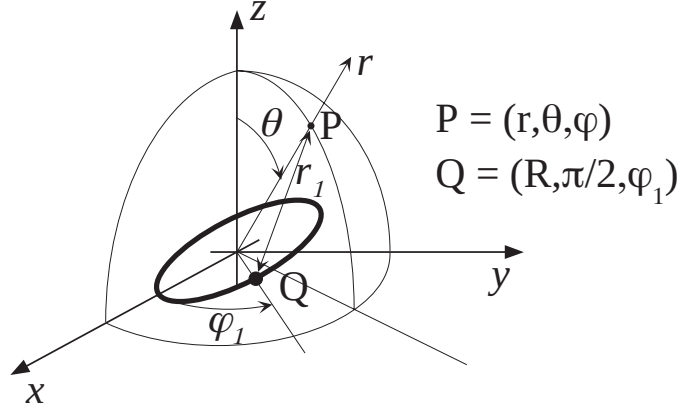


Figura 8.4: Spira di corrente in un sistema di coordinate sferiche.

Si consideri dunque la distribuzione di corrente di Fig.(8.4) e, in particolare, si concentri l'attenzione sull'elemento infinitesimo di corrente che è disposto attorno al punto Q di coordinate sferiche $r = R, \theta = \pi/2, \varphi = \varphi_1$. Il potenziale vettore che questo elemento di corrente eccita nel punto $P = \{R, \theta, \varphi\}$ è

$$d\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{IRd\varphi_1}{r_1} \hat{\varphi}_1 \quad ,$$

dove r_1 è la distanza del punto P dal punto Q . Si osservi che questa espressione risulta valida in virtù dei seguenti fatti:

1. la direzione di $d\mathbf{A}$ è $\hat{\varphi}_1$ perchè, come si è visto nello studio proposto nel paragrafo precedente, il potenziale vettore è parallelo alla direzione lungo la quale fluisce la corrente;
2. poichè la corrente fluisce su un conduttore circolare di raggio R , la lunghezza infinitesima del dipolo elettrico centrato nel punto Q può essere scritta come $\Delta z = R d\varphi_1$;
3. non vi è il termine $\exp\{-i\beta r\}$ perchè, per ipotesi, i calcoli vengono svolti nel limite statico.

Si esprima ora $d\mathbf{A}$ nel riferimento sferico centrato nell'origine: a tal fine si può utilizzare il teorema di Carnot per approssimare la distanza

r_1 come segue:

$$r_1 \simeq r - R \cos(\varphi - \varphi_1) \sin(\theta) \quad .$$

Si ottiene così

$$d\mathbf{A} \simeq \frac{\mu I R}{4\pi r} \left[1 + \frac{R}{r} \cos(\varphi - \varphi_1) \sin(\theta) \right] \hat{\varphi}_1 d\varphi_1 \quad . \quad (8.19)$$

Il potenziale vettore dovuto all'intera distribuzione di corrente può ora essere ottenuto semplicemente, integrando la (8.19) su tutta la spira. A tal fine conviene scomporre $d\mathbf{A}$ nelle sue componenti cartesiane, ottenendo (si veda la Fig.(8.5))

$$d\mathbf{A} = -dA \sin(\varphi_1) \hat{x} + dA \cos(\varphi_1) \hat{y} \quad .$$

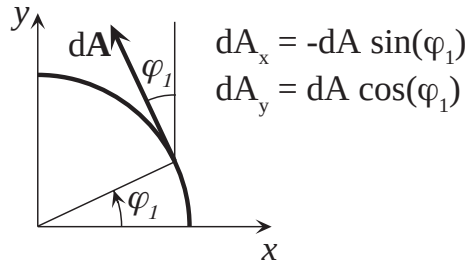


Figura 8.5: Componenti cartesiane del potenziale vettore $d\mathbf{A}$.

Scritto anche il versore $\hat{\varphi}_1$ mediante le sue componenti cartesiane, $\hat{\varphi}_1 = -\sin(\varphi_1)\hat{x} + \cos(\varphi_1)\hat{y}$, si tratta dunque di integrare rispetto a φ_1 la seguente quantità

$$\mathbf{A} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu I R}{4\pi r} \left[1 + \frac{R}{r} \cos(\varphi - \varphi_1) \sin(\theta) \right] \left[-\sin(\varphi_1)\hat{x} + \cos(\varphi_1)\hat{y} \right] d\varphi_1 \quad .$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu I R}{4\pi r} \pi \sin(\theta) \left[-\frac{R}{r} \sin(\varphi)\hat{x} + \frac{R}{r} \cos(\varphi)\hat{y} \right] = \\ &= \frac{\mu I R^2}{4\pi r^2} \sin(\theta) \pi \hat{\varphi} \quad , \end{aligned}$$

da cui, mediante derivazione

$$H_r = \frac{I\pi R^2}{2\pi r^3} \cos(\theta) \quad , \quad H_\theta = \frac{I\pi R^2}{4\pi r^3} \sin(\theta) \quad ,$$

espressioni che coincidono con le (8.16–8.18) ridotte nel loro limite statico, a patto che si ponga

$$\mathcal{U}_m = \pi\mu IR^2 = \mu IS \quad ,$$

S essendo la superficie della spira.

Si ritrova così un risultato già visto nell’ambito dell’Elettrotecnica: una spira elementare di corrente è equivalente ad un dipolo magnetico ortogonale al piano della spira, e di verso tale che la corrente si “avviti” lungo di esso. L’intensità del dipolo è pari a μIS , o a $N\mu IS$ se la struttura in esame è un solenoide costituito da N spire (*principio di Ampere*).

8.2.1 La sorgente di Huygens

Si definisce sorgente di Huygens una antenna costituita dalla combinazione di due dipoli, uno elettrico ed uno magnetico, disposti tra loro ortogonalmente, e con ampiezze il cui rapporto è pari all’impedenza intrinseca del mezzo (si veda la Fig.(8.6))

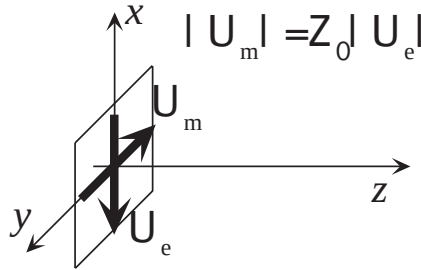


Figura 8.6: Sorgente di Huygens.

Si osservi che, in base al teorema di equivalenza³, il campo irradiato da questa sorgente è uguale a quello che viene prodotto da un’areola elementare investita da un’onda piana che si propaga lungo $\hat{z}$ e con

³Si faccia attenzione che, per poter applicare il teorema di equivalenza è necessario che la superficie sulla quale sono definite le sorgenti equivalenti sia una superficie chiusa. L’areola che viene investita dall’onda piana di cui si discute nel testo deve quindi essere parte di una superficie che si richiude attorno alle vere sorgenti del campo.

campo elettrico e magnetico dati, rispettivamente, da

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \quad , \quad \mathbf{H} = H_0 \hat{y} = \frac{E_0}{Z_0} \hat{y} \quad .$$

Infatti, il teorema di equivalenza afferma che, quando l'areola elementare viene investita da un'onda piana con questi campi, è possibile attribuire l'irradiazione che ne deriva alla presenza di densità superficiali di corrente sull'areola, che risultano pari a

$$\mathbf{J}_S = \hat{z} \times \mathbf{H} = -H_0 \hat{x} \quad , \quad \mathbf{M}_S = \mathbf{E} \times \hat{z} = -E_0 \hat{y} \quad ,$$

e che si comportano, rispettivamente, come un dipolo elettrico ed uno magnetico, disposti come in figura, e con rapporto tra le ampiezze pari all'impedenza d'onda del mezzo nel quale l'onda piana si propaga.

Il calcolo del campo irradiato dalla sorgente di Huygens può essere svolto per mezzo del principio di sovrapposizione degli effetti come segue. Il dipolo magnetico dà luogo ad una corrente magnetica pari a

$$\Delta I_{DM} = E_0 2\Delta y (-\hat{y}) \quad , \quad |x| \leq \Delta x \quad ,$$

e quello elettrico ad una corrente elettrica

$$\Delta I_{DE} = \frac{E_0}{Z_0} 2\Delta x (-\hat{x}) \quad , \quad |y| \leq \Delta y \quad ,$$

dove Δx e Δy sono, rispettivamente, la larghezza e l'altezza dell'areola elementare.

Calcoliamo dunque il campo magnetico prodotto da queste distribuzioni di corrente. In generale, in presenza di un dipolo elettrico orientato secondo una direzione arbitraria $\hat{a}$, si ha

$$\mathbf{H} = \frac{\nabla \times \mathbf{A}}{\mu} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \left[\frac{\mu I}{4\pi} \frac{e^{-\sigma r}}{r} \hat{a} \right] \quad ,$$

e, usando l'identità vettoriale (nella quale f è una funzione, e $\mathbf{v}$ un vettore)

$$\nabla \times (f \mathbf{v}) = f \nabla \times \mathbf{v} + \nabla f \times \mathbf{v} \quad ,$$

si ottiene

$$\mathbf{H} = \frac{e^{-\sigma r}}{r} \nabla \times \left(\frac{I}{4\pi} \hat{a} \right) + \frac{I}{4\pi} \nabla \left(\frac{e^{-\sigma r}}{r} \right) \times \hat{a} \quad .$$

Ora, poichè la quantità racchiusa nella prima parentesi tonda è costante, si ha ancora

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \left(-\sigma - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-\sigma r}}{r} \hat{r} \times \hat{a} \quad ,$$

e quindi, a grande distanza dalla distribuzione di corrente (ed in un mezzo privo di perdite)

$$\mathbf{H} \simeq -i \frac{I}{2\lambda r} e^{-i\beta r} \hat{r} \times \hat{a} \quad .$$

Nel caso che si sta analizzando qui, la corrente elettrica è pari a $I = -E_0 \Delta x \Delta y / Z_0 \hat{x}$ e quindi il contributo al campo magnetico che deriva dal dipolo elettrico è

$$\mathbf{H}_{DE} = -i \frac{1}{Z_0} \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} e^{-i\beta r} \left(\hat{r} \times (-\hat{x}) \right) \quad , \quad \Delta S = \Delta x \Delta y \quad .$$

Analogamente, una distribuzione di corrente magnetica dà luogo ad un contributo di campo elettrico che vale

$$\mathbf{E}_{DM} = +i \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} e^{-i\beta r} \left(\hat{r} \times (-\hat{x}) \right) \quad ,$$

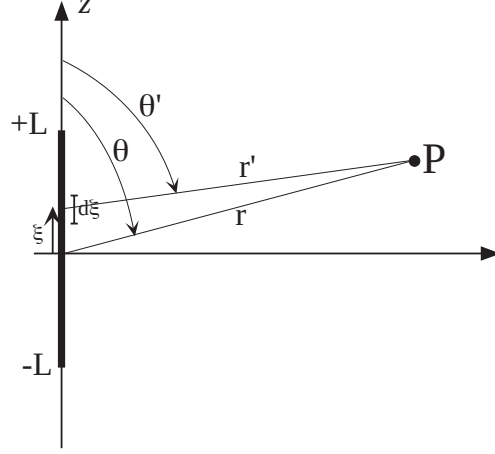
e dunque il campo elettrico totale prodotto dalla sorgente di Huygens risulta dato dalla seguente espressione (nota anche come *formula di Silver*):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{DM} + Z_0 \mathbf{H}_{DE} \times \hat{r} = \\ &= i \frac{E_0 \Delta S}{2\lambda r} e^{-i\beta r} \left(1 + \cos(\theta) \right) \left(\cos(\varphi) \hat{\theta} - \sin(\varphi) \hat{\varphi} \right) \quad . \end{aligned}$$

Si osservi che, per $\theta = \pi$, vale $\mathbf{E} \equiv 0$: l'antenna di Huygens non irradia posteriormente.

8.3 Antenne filiformi

Ora che si è visto come si calcola il campo elettromagnetico che è prodotto da un elemento infinitesimo di corrente, si può procedere allo studio del campo irradiato da un'antenna filiformi di lunghezza generica. A tal fine, si considererà l'antenna schematicamente illustrata in Fig.(8.7): si tratta di un conduttore elettrico, di lunghezza $2L$, diposto

Figura 8.7: Campo irradiato da un'antenna filiforme di lunghezza $2L$ generica.

parallelamente all'asse $\hat{z}$ di un riferimento cartesiano ortogonale, ed alimentato al centro.

Ciò che interessa valutare è il campo in un generico punto P posto a *grande distanza* dall'antenna ($r \gg \lambda$), e questo calcolo viene effettuato riguardando l'antenna come la giustapposizione di tanti dipoli elementari disposti lungo $\hat{z}$, ed applicando la sovrapposizione degli effetti.

Si cominci dunque con il calcolare il campo prodotto dal generico elemento di corrente infinitesimo centrato attorno alla coordinata ξ sull'antenna. Esso vale

$$dE_\theta \simeq iZ_0 \frac{I(\xi) d\xi}{2\lambda r'} \sin(\theta') e^{-i\beta r'} \quad , \quad dH_\varphi = \frac{dE_\theta}{Z_0} \quad , \quad (8.20)$$

dove r' e θ' sono, rispettivamente, la distanza del punto P dall'elemento di corrente centrato nel punto ξ , e l'angolo che il raggio vettore $\mathbf{r}'$ forma con l'asse $\hat{z}$.

Per poter applicare la sovrapposizione degli effetti, è ora necessario esprimere questo campo in un sistema di riferimento che sia comune anche a tutti gli altri contributi che derivano dai diversi punti dell'antenna, e cioè nel sistema che è centrato nella sua origine. A tal fine, si può utilizzare il teorema di Carnot e scrivere

$$(r')^2 = r^2 + \xi^2 - 2\xi r \cos(\theta) \quad .$$

Si osservi ora che la dimensione $2L$ di un'antenna è tipicamente dello stesso ordine di grandezza della lunghezza d'onda, e quindi, poichè si sta qui calcolando il campo a grande distanza, è senz'altro ragionevole assumere che la posizione ξ , che può al più essere uguale a metà della lunghezza dell'antenna, sia di molto inferiore a r , ed approssimare quindi la distanza r' come segue:

$$\begin{aligned} r' &= r \sqrt{1 - 2\frac{\xi}{r} \cos(\theta) + \left(\frac{\xi}{r}\right)^2} \simeq \\ &\simeq r \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[-2\frac{\xi}{r} \cos(\theta) + \left(\frac{\xi}{r}\right)^2 \right] - \frac{1}{8} \left[4\frac{\xi^2}{r^2} \cos^2(\theta) + \dots \right] \right\} \\ &\simeq r - \xi \cos(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\xi^2}{r} \sin^2(\theta) + \dots \end{aligned}$$

avendo usato lo sviluppo di Taylor

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots \quad , \quad |x| \ll 1 \quad .$$

Vediamo ora nel dettaglio come usare questa approssimazione. La distanza r' compare infatti in due punti diversi della (8.20), e questi due punti hanno diversa natura fisica, e diverso impatto sulla valutazione globale del campo:

- il primo punto in cui essa compare è al denominatore della (8.20): si tratta di un termine che rende conto *dell'ampiezza* che ha l'onda irradiata dall'elemento centrato attorno alla coordinata ξ quando essa raggiunge il punto di osservazione P . È allora evidente che confondere r' con il solo valore r è, senza dubbio, un'approssimazione più che sufficiente. Per rendersene conto, si consideri un esempio pratico, quello dell'antenna di un telefono cellulare. La dimensione dell'antenna è dell'ordine di pochi centimetri, mentre la distanza tipica a cui interessa calcolare il campo è quella che può esistere tra l'antenna ed una stazione radio base, quindi nell'ordine delle decine o centinaia di metri. Approssimare la distanza r' con r significa quindi trascurare centimetri a fronte di centinaia di metri, il che è, senza alcun dubbio, sempre largamente accettabile.
- Il secondo punto in cui compare r' è nell'esponenziale $\exp\{-i\beta r'\}$ e questo termine richiede un'approssimazione più raffinata di quella

usata in precedenza perchè esso agisce sulla *fase* del campo, non sulla sua ampiezza. In altre parole, questo termine rende conto della fase con cui l'onda irradiata dalla coordinata ξ raggiunge il punto P , e poichè la fase evolve sulla scala della lunghezza d'onda, non è più possibile trascurare la posizione ξ da cui l'onda viene irradiata perchè, come detto, questa può essere proprio dello stesso ordine di grandezza di λ . In prima approssimazione, si deve dunque tenere almeno il primo termine dell'espansione di Taylor, e scrivere allora⁴

$$\beta r' \simeq \beta r - \beta \xi \cos(\theta) \quad .$$

Il campo elettrico e magnetico irradiato dalla totalità dell'antenna filiforme è dunque il seguente

$$\begin{cases} E_\theta \simeq iZ_0 \frac{e^{-i\beta r}}{2\lambda r} \sin(\theta) \int_{-L}^{+L} I(\xi) e^{i\beta \cos(\theta)\xi} d\xi \\ H_\varphi = \frac{E_\theta}{Z_0} \end{cases}, \quad (8.21)$$

⁴Come detto, questa approssimazione richiede che il campo sia valutato a grande distanza dalla sorgente, e cioè per $r \gg \lambda$, una regione che viene anche indicata con la dicitura di *zona di Fresnel*. Avendo scelto di trascurare i termini dell'espansione in serie con potenze di ξ maggiori di uno, si stanno tuttavia imponendo altre condizioni per la validità dei calcoli che seguiranno. Infatti, per poter accettare questa approssimazione è necessario che risulti anche

$$\frac{\beta \xi^2}{r} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad r \gg \frac{L^2}{\lambda} \quad .$$

Questa regione dello spazio viene detta *zona di Fraunhofer* ed occorre porre attenzione al fatto che non è detto che la zona di Fraunhofer sia sempre racchiusa nella zona di Fresnel, e dunque che l'approssimazione proposta sia valida. Ciò dipende, essenzialmente, dalle dimensioni dell'antenna e dalla lunghezza d'onda del campo irradiato. Nelle applicazioni alle radiofrequenze, ad esempio, si ha tipicamente $f \simeq 100$ MHz, ovvero $\lambda \simeq 3$ m, e $L \simeq 1$ m di modo che

$$r_{\text{Fresnel}} \simeq 1 \text{ m} \quad , \quad r_{\text{Fraunhofer}} \simeq 10 \text{ cm} \quad ,$$

e l'approssimazione è quindi valida. Se invece si considera l'irradiazione alle frequenze ottiche, quando $\lambda \simeq 1 \mu\text{m}$, e $L \simeq 1$ mm si ha

$$r_{\text{Fresnel}} \simeq 1 \mu\text{m} \quad , \quad r_{\text{Fraunhofer}} \simeq 1 \text{ m} \quad ,$$

coscicchè la zona di Fraunhofer non è più racchiusa in quella di Fresnel, ed i calcoli proposti nel testo non sono più validi.

dove si è approssimato θ' con θ ancora una volta in virtù del fatto che il punto di osservazione P è a grande distanza dall'antenna.

Si osserva dunque un fatto di rilievo: per poter calcolare il campo irradiato da un'antenna di lunghezza generica è necessario conoscere il modo in cui la corrente $I(\xi)$ si distribuisce su di essa, e questo è un punto tutt'altro che banale perchè, come si diceva all'inizio del capitolo, questa corrente dipende *sia* dal generatore, *sia* dallo stesso campo irradiato, e cioè essa non può essere assunta come un dato del problema, ma va invece calcolata.

Esistono due diverse metodologie utili a questo calcolo:

1. *l'espansione modale*: si tratta, in sostanza, di scrivere il campo e la corrente sull'antenna per mezzo di un'opportuna espansione in armoniche sferiche. Questo metodo è rigoroso, e fornisce una soluzione esatta del problema, ma, nella pratica, si riesce ad applicare solo a poche geometrie molto particolari, quelle nelle quali sono coinvolte antenne sferiche o sferoidali, e non è dunque un approccio che consenta uno studio generale della problematica in esame;
2. *l'equazione integrale di Hallen*: questo è il metodo che verrà analizzato con dettaglio nel seguito, con particolare riguardo al caso di una antenna formata da un conduttore metallico alimentato nel suo centro.

8.3.1 L'integrale di Hallen

Consideriamo dunque un conduttore metallico, di lunghezza $2L$, e diametro $2a$, eccitato nella parte centrale dalla tensione V_0 . Ci occupiamo, in particolare, di antenne “sottili”, antenne cioè nelle quali il *parametro di snellezza*

$$\Omega = 2 \ln \left(\frac{2L}{a} \right) \gg 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{2L}{a} \gg 150 \quad .$$

In queste antenne, per ragioni di simmetria, e trascurando ciò che avviene sulle basi terminali, la corrente è diretta lungo l'asse dell'antenna (e cioè l'asse $\hat{z}$; si veda la Fig.(8.8)), di modo che anche il potenziale vettore è parallelo a $\hat{z}$.

La determinazione dell'andamento della corrente sull'antenna viene eseguita come segue: si calcola il potenziale vettore $\mathbf{A}$ che è presente sulla

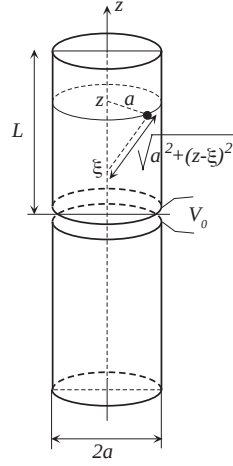


Figura 8.8: Antenna filiforme.

superficie laterale dell'antenna per mezzo di due approcci differenti; li si confronta, e se ne deriva un'equazione integrale nella quale l'incognita è, per l'appunto, la distribuzione di corrente $I(\xi)$.

Il primo modo in cui si può calcolare il potenziale sulla superficie dell'antenna è quello che usa la relazione che lo lega al campo elettrico $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla\nabla \cdot \mathbf{A}}{i\omega\mu\epsilon}$$

che qui, data la simmetria del problema, si particolarizza come

$$E_z = -i\omega A_z + \frac{1}{i\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -i\frac{\omega}{\beta^2} \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \beta^2 A_z \right] \quad .$$

Se l'antenna è costituita da un conduttore perfetto si ha però $E_z \equiv 0$ in ogni punto che non appartiene al *gap* centrale di alimentazione; inoltre, se questo è sufficientemente sottile rispetto alla lunghezza d'onda, di modo che si possano applicare concetti di tipo quasi statico, si può anche dire che l'integrale di linea del campo elettrico lungo un percorso che congiunge i due terminali del *gap* deve essere uguale all'opposto della tensione V_0 ad essi applicata. In sostanza, si ha allora

$$E_z = -V_0\delta(z) \quad ,$$

e l'equazione per il potenziale A_z diviene così la seguente

$$-V_0\delta(z) = -i\frac{\omega}{\beta^2} \left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \beta^2 A_z \right] .$$

Ora, se si calcola il potenziale sulla sola superficie esterna dell'antenna, dove la coordinata radiale è fissata, ed il campo è indipendente dall'angolo φ per ragioni di simmetria, la derivata parziale è in realtà una derivata totale, ed il potenziale A_z è allora soluzione della seguente equazione

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + \beta^2 A_z = \frac{\beta^2}{i\omega} V_0 \delta(z) ,$$

che porge

$$A_z = C \cos(\beta z) + \frac{\beta V_0}{2i\omega} \sin(\beta|z|) , \quad (8.22)$$

dove C è una costante di integrazione, che verrà determinata nel seguito imponendo le opportune condizioni al contorno.

Per il momento, invece, si procede al calcolo del potenziale vettore anche per la seconda delle due possibili strade che si erano menzionate più sopra. Questa si rifà alla metodologia che è stata proposta nello studio della radiazione emessa da un dipolo corto, e procede come segue. Si supponga che la corrente sia interamente distribuita sull'asse dell'antenna, cosa che tende ad essere tanto più vera quanto più l'antenna è sottile; sulla superficie dell'antenna si ha allora

$$A(z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L}^{+L} I(\xi) \frac{\exp \left\{ -i\beta \sqrt{a^2 + (z - \xi)^2} \right\}}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} d\xi . \quad (8.23)$$

Uguagliando la (8.22) con la (8.23), si giunge così alla seguente equazione, che è detta *equazione integrale di Hallen*:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} I(\xi) \frac{\exp \left\{ -i\beta \sqrt{a^2 + (z - \xi)^2} \right\}}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} d\xi &= -2\pi i \frac{V_0}{Z_0} \sin(\beta|z|) + \\ &+ \frac{4\pi C}{\mu} \cos(\beta z) , \end{aligned} \quad (8.24)$$

con la condizione al contorno $I(\pm L) = 0$.

Dal punto di vista matematico, questa è una equazione integrale di Fredholm di prima specie, e cioè nella quale l'incognita, che è la

distribuzione di corrente $I(\xi)$, compare solo sotto il segno di integrale e, a rigore, essa non ammette soluzioni integrabili dal momento che a primo membro è presente una funzione analitica di z , mentre al secondo membro no. Ciò è legato al fatto che si è supposto che la corrente sia concentrata sul solo asse dell'antenna, mentre, nella realtà, essa è presente anche al di fuori di esso, ma, dal punto di vista pratico questa apparente inconsistenza matematica non comporta delle complicazioni insormontabili. La soluzione dell'equazione viene infatti trovata dapprima trasformando l'equazione in una equazione di Fredholm di seconda specie, e cioè nella quale l'incognita compare sia sotto il segno di integrale, sia all'esterno di esso, e operando poi delle approssimazioni successive. Vediamo del dettaglio come fare.

Per prima cosa si può notare che, al tendere di $a \rightarrow 0$, il termine

$$\frac{\exp\{-i\beta\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}\}}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} \simeq \frac{1 - i\beta\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} ,$$

è rapidamente variabile nell'intorno di $\xi = z$. Conviene allora separare gli andamenti lentamente e rapidamente variabili scrivendo

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{+L} I(\xi) \frac{\exp\{-i\beta\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}\}}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} d\xi &= \int_{-L}^{+L} \frac{I(\xi)}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} d\xi + \\ &- \int_{-L}^{+L} I(\xi)g(z, \xi) d\xi . \end{aligned}$$

dove si è introdotta la funzione

$$g(z, \xi) = \frac{1 - \exp\{-i\beta\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}\}}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}}$$

che risulta lentamente variabile nell'intorno di $\xi = z$. Il primo integrale, invece, è fortemente piccato nell'intorno di $\xi = z$, e può quindi essere approssimato come segue

$$\int_{-L}^{+L} \frac{I(\xi)}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} d\xi \simeq I(z) \int_{-L}^{+L} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}} = I(z)f(z) ,$$

con

$$f(z) = \ln \frac{(L + z) + \sqrt{a^2 + (L + z)^2}}{a} + \ln \frac{(L - z) + \sqrt{a^2 + (L - z)^2}}{a} .$$

La funzione $f(z)$ è pari rispetto a z , in $z = 0$ assume il valore

$$f(0) = 2 \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + a^2}}{a} \simeq 2 \ln \left(\frac{2L}{a} \right) = \Omega \quad ,$$

e, in $z = \pm L$,

$$f(\pm L) = \ln \frac{2L + \sqrt{4L^2 + a^2}}{a} \simeq \ln \left(\frac{4L}{a} \right) \quad .$$

La funzione è molto piatta nell'intorno di $z = 0$, come si evince dal suo sviluppo in serie che, quando $a = 0$, si scrive come

$$f(z) \simeq \Omega - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z}{L} \right)^n \quad ,$$

e dunque, se si approssima la $f(z)$ con Ω in tutto l'intervallo delle z , si ottiene

$$\begin{aligned} I(z) &\simeq \frac{1}{\Omega} \left[\frac{4\pi C}{\mu} \cos(\beta z) - 2\pi i \frac{V_0}{Z_0} \sin(\beta|z|) \right] + \\ &+ \frac{1}{\Omega} \int_{-L}^{+L} I(\xi) g(z, \xi) d\xi \quad . \end{aligned} \quad (8.25)$$

Questa espressione appare ora nella forma di un'equazione di Fredholm di seconda specie, e si presta ad una soluzione iterativa: infatti, il primo addendo a secondo membro ha ordine di grandezza $1/\Omega$, e quindi anche la corrente $I(z)$ è di ordine $1/\Omega$. Ne segue che il secondo membro a destra dell'uguale è di ordine $1/\Omega^2$ e, almeno in prima istanza, può essere trascurato rispetto al primo.

Si ottiene così la soluzione al primo ordine di iterazione, che fornisce il seguente valore per la corrente $I(z)$:

$$I(z) \simeq \frac{1}{\Omega} \left[\frac{4\pi c}{\mu} \cos(\beta z) - 2\pi i \frac{V_0}{Z_0} \sin(\beta|z|) \right] \quad . \quad (8.26)$$

Gli ordini successivi possono essere calcolati inserendo la (8.26) all'interno della (8.25) ed iterando poi il procedimento.

Rimane ora da valutare la costante di integrazione, cosa che può essere fatta applicando le condizioni al contorno, e cioè imponendo che la corrente si annulli per $z = \pm L$. Si ottiene così

$$C = i \frac{\mu V_0}{2Z_0} \frac{\sin(\beta L)}{\cos(\beta L)} \quad ,$$

da cui l'espressione finale per la corrente

$$I(z) = I_0 \frac{\sin[\beta(L - |z|)]}{\sin(\beta L)} \quad , \quad I_0 = i \frac{2\pi}{\Omega Z_0} \tan(\beta L) V_0 \quad . \quad (8.27)$$

Vi sono due osservazioni da fare:

1. La corrente diverge per $\sin(\beta L) = 0$ e cioè per $\beta L = 2k\pi$, a meno che non sia $I(0) = 0$. Questo fatto è dovuto alle approssimazioni che sono state introdotte nella derivazione della (8.27) e, in particolare, all'aver arrestato la procedura di risoluzione iterativa al solo primo passo. Chiaramente, una soluzione nella quale $I(0) = 0$ non è fisicamente accettabile, perchè se così fosse sarebbe nulla la potenza $(1/2)V_0 I_0^*$ che viene trasferita dai generatori all'antenna e da questa allo spazio circostante. Nonostante ciò, nella pratica si riscontra che l'ipotesi di distribuzione di corrente sinusoidale costituisce un'approssimazione del tutto accettabile *per ciò che concerne il calcolo del campo irradiato* e, data la sua semplicità, viene utilizzata di sovente. Come vedremo nel seguito, l'approssimazione è invece del tutto insufficiente se ciò che si intende valutare è l'*impedenza di ingresso* dell'antenna.
2. L'espressione della corrente mostra che, in prima approssimazione, la distribuzione della corrente è la stessa che si avrebbe in una linea di trasmissione di lunghezza L , aperta agli estremi e divaricata, con impedenza caratteristica

$$Z_C = Z_0 \frac{\Omega}{2\pi} \quad .$$

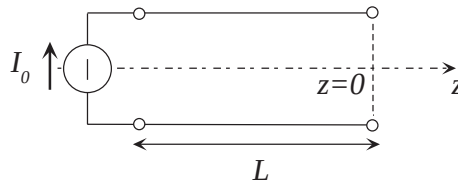


Figura 8.9: Illustrazione dell'equivalenza tra un'antenna ed una linea lasciata aperta agli estremi.

Questo fatto è istruttivo e facile da verificare: si consideri infatti una linea di trasmissione alimentata da un generatore ideale di

corrente che impone il valore I_0 . La corrente nella linea è pari a

$$I(z) = I_+ e^{-i\beta z} + I_- e^{+i\beta z} \quad ,$$

e poichè alla coordinata $z = 0$ è presente un circuito aperto, deve aversi

$$I(z = 0) = I_+ + I_- = 0 \quad \Rightarrow \quad I_+ = -I_- \quad ,$$

di modo che

$$I(z) = I_+ e^{-i\beta z} - I_+ e^{+i\beta z} = -2i I_+ \sin(\beta z) \quad .$$

Alla coordinata $z = -L$ la corrente deve coincidere con quella imposta dal generatore:

$$I(-L) = 2i I_+ \sin(\beta L) = I_0 \quad \Rightarrow \quad I_+ = -i \frac{I_0}{2 \sin(\beta L)} \quad ,$$

e dunque

$$I(z) = -I_0 \frac{\sin(\beta z)}{\sin(\beta L)} \quad .$$

Operiamo ora un cambio di coordinate per rappresentare il caso dell'antenna, e poniamo $z = \xi - L$ per $\xi > 0$, e $z = -\xi - L$ per $\xi < 0$ (perchè nell'aprire i due tratti di linea in modo che essi si presentino come un'antenna filiforme, occorre tener conto che in uno dei bracci dell'antenna la corrente fluisce in verso opposto rispetto a quello che faceva nella corrispondente linea di trasmissione).

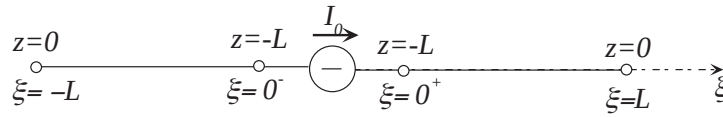


Figura 8.10: Rappresentazione equivalente della linea in Fig.(8.9).

Si ottiene così (si veda la Fig.(8.10))

$$\begin{aligned} \xi > 0 \quad : \quad I(\xi) &= -I_0 \frac{\sin[\beta(\xi - L)]}{\sin(\beta L)} = I_0 \frac{\sin[\beta(L - \xi)]}{\sin(\beta L)} \quad , \\ \xi < 0 \quad : \quad I(\xi) &= -I_0 \frac{\sin[\beta(-\xi - L)]}{\sin(\beta L)} = I_0 \frac{\sin[\beta(L + \xi)]}{\sin(\beta L)} \quad , \end{aligned}$$

e quindi, in definitiva,

$$I(z) = I_0 \frac{\sin[\beta(L - |z|)]}{\sin(\beta L)} ,$$

in accordo con la (8.27). Il fatto che vi sia questa perfetta coincidenza illustra però un aspetto di rilievo: infatti, quando si è studiata la propagazione nelle linee di trasmissione si è sottolineato come quello studio fosse valido nell'ipotesi che non vi fosse *alcuna irradiazione* da parte della linea. Al contrario, in questa sede lo studio viene effettuato proprio per descrivere l'emissione da parte di una distribuzione di corrente, ed il fatto che i due risultati coincidano significa che almeno una delle due trattazioni (ma in realtà entrambe) è approssimata. Come si è già avuto modo di dire, nell'ambito dell'equazione di Hallen l'approssimazione deriva dal fatto di avere arrestato la procedura iterativa al solo primo ordine, ed il risultato che si ottiene non è per nulla soddisfacente se si guarda all'impedenza di antenna, e dunque alla potenza irradiata perchè, di fatto, si tratta l'antenna come una linea di trasmissione *che non irradia*.

Si mostra ora l'utilizzo del risultato fornito dall'equazione di Hallen per il calcolo della corrente in alcune antenne di particolare rilievo.

Antenna corta

È un'antenna per la quale vale

$$\beta L \ll 1 \quad .$$

Ne segue che, nell'espressione (8.27) che dà l'andamento della corrente, si può approssimare la funzione seno con il suo argomento, di modo che si ottiene

$$I(z) \simeq I_0 \frac{\beta L - \beta |z|}{\beta L} = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{L}\right) \quad .$$

La corrente ha dunque un andamento triangolare, che converge a zero sugli estremi dell'antenna, come illustrato nella Fig.(8.11).

Nota la distribuzione di corrente, è possibile utilizzare la (8.21) per valutare il campo irradiato dall'antenna, che risulta

$$\begin{cases} E_\theta = iZ_0 \frac{\sin(\theta) e^{-i\beta r}}{2\lambda r} \int_{-L}^{+L} I_0 \left(1 - \frac{|\xi|}{L}\right) e^{-i\beta \xi \cos(\theta)} d\xi \\ H_\varphi = E_\theta / Z_0 \end{cases} ,$$

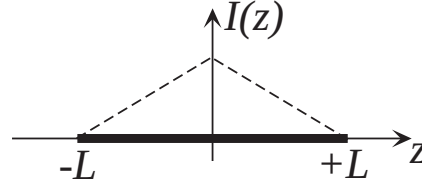


Figura 8.11: Antenna corta con distribuzione triangolare di corrente.

e poichè con $\beta L \ll 1$ si ha anche $\exp\{-i\beta\xi \cos(\theta)\} \simeq 1$ il che, fisicamente, significa che i contributi al campo che derivano dai diversi punti dell'antenna si sommano tutti in fase, e si ottiene così

$$E_\theta \simeq iZ_0 \frac{I_0 L}{2\lambda r} \sin(\theta) e^{-i\beta r} \quad .$$

Dunque, l'antenna corta si comporta come un dipolo corto, *ma di metà lunghezza*. Ciò è dovuto al fatto che, mentre nel dipolo corto la corrente è costante su tutta la lunghezza (infinitesima) dell'antenna, qui la corrente ha distribuzione triangolare, ed i diversi punti dell'antenna non contribuiscono alla formazione del campo nello stesso modo.

È ora interessante valutare il comportamento dell'antenna anche nel dominio del tempo. Infatti, la distribuzione della corrente

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{L}\right) = i \frac{2\pi V_0}{Z_0 \Omega} \beta(L - |z|) \quad ,$$

mostra che la relazione tra la corrente e la tensione di ingresso è

$$I_0 = i \frac{2\pi\epsilon L}{\Omega} \omega V_0 \quad ,$$

ovvero, nel dominio del tempo

$$i_0(t) = C \frac{dv_0(t)}{dt} \quad , \quad C = \frac{2\pi\epsilon L}{\Omega} \quad .$$

Come già nel caso del dipolo elementare, anche l'antenna a dipolo corto ha dunque un comportamento elettrico di tipo *capacitivo*. Inoltre, il suo momento equivalente è

$$\mathcal{U} = \frac{I_0 L}{i\omega} \quad ,$$

e dunque, nel dominio del tempo

$$\frac{du(t)}{dt} = i_0(t)L = C \frac{dv_0(t)}{dt} L \quad ,$$

e poichè il campo a grande distanza è legato alla derivata seconda del momento di dipolo (si veda la (8.14)), ne risulta che l'irradiazione dell'antenna corta è proporzionale alla derivata seconda della tensione che è applicata ai suoi capi.

In maniera analoga, si può vedere che il campo associato ad una piccola spira di corrente è proporzionale alla derivata prima della tensione applicata, e che l'antenna risponde a questa con un comportamento induttivo.

Antenna marconiana

È una antenna largamente utilizzata nel campo delle basse frequenze: essa è costituita da un filo metallico, corto rispetto alla lunghezza d'onda, che viene disposto verticalmente al suolo, ed alimentato usando il suolo come riferimento.

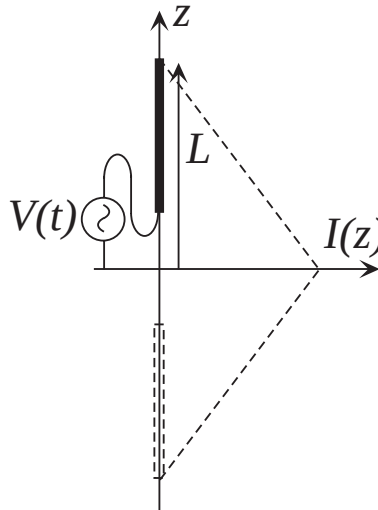


Figura 8.12: Antenna marconiana con la sua distribuzione di corrente.

Se il suolo può essere approssimato con un conduttore perfetto (e, nella pratica, ciò avviene da un lato perchè, a bassa frequenza, esso tende

effettivamente a comportarsi come tale, e comunque perchè usualmente ne viene esaltata la conducibilità disponendo al di sotto dell'antenna una raggiera di fili di rame), per il teorema delle immagini la lunghezza totale dell'antenna viene raddoppiata ai fini del calcolo del campo irradato al di sopra di essa: l'antenna marconiana realizza dunque proprio il comportamento di un'antenna corta.

Antenna a L rovesciata

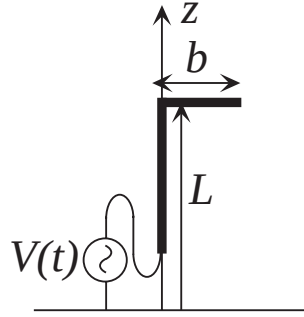


Figura 8.13: Antenna a L rovesciata.

Rispetto all'antenna marconiana, si ottiene una maggiore irradiazione di campo se si realizza una “antenna a L rovesciata”, come quella in Fig.(8.13). Infatti, in questa antenna il braccio orizzontale non conta ai fini dell'irradiazione, dal momento che il suo effetto è annullato da quello dell'antenna immagine, ma esso contribuisce invece alla distribuzione di corrente perchè questa non deve più annullarsi in $z = L$, come succedeva nel caso dell'antenna marconiana, ma piuttosto in $z = L + b$. Ne deriva una distribuzione

$$I(z) = I_0 \left(1 + \frac{|z|}{L + b} \right) ,$$

che dà luogo al campo

$$E_\theta \simeq iZ_0 \frac{I_0}{2\lambda r} \left(L \frac{L + 2b}{L + B} \right) \sin(\theta) e^{-i\beta r} .$$

L'antenna si comporta dunque come un dipolo di lunghezza

$$L \frac{L + 2b}{L + B} > L .$$

Spesso, al posto di un solo braccio orizzontale, si utilizza una raggiera di fili centrata sul conduttore verticale, e si dice che l'antenna è *caricata* con capacità terminale. Infatti, la raggiera costituisce un serbatoio per l'accumulo di carica, ed il suo effetto è quello di una capacità posta in testa all'antenna; in questo modo, la corrente sul braccio verticale dell'antenna diventa quasi costante, e l'antenna realizza dunque una sorta di *dipolo elettrico elementare*.

Antenna $\lambda/2$

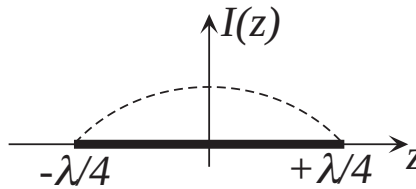


Figura 8.14: Antenna a $\lambda/2$ con la sua distribuzione di corrente.

In questa antenna, si ha $L = \lambda/4$, $\beta L = \pi/2$ e la distribuzione di corrente è dunque

$$I(z) = I_0 \cos(\beta z) \quad .$$

8.4 Antenne ad apertura

Questo paragrafo conclude la trattazione dell'emissione di campo da sorgenti assegnate, e tratta il caso di antenne nelle quali l'irradiazione avviene attraverso un'apertura praticata in una struttura che altrimenti è chiusa, come ad esempio accade se si tronca una guida d'onda metallica.

Al pari di quanto accade nel caso delle antenne filiformi, anche nel caso delle antenne ad apertura lo studio rigoroso delle proprietà di irradiazione si presenta, per ben che vada, difficile, se non impossibile perchè esso richiederebbe la risoluzione *contemporanea* delle equazioni di Maxwell sia nella struttura chiusa che realizza l'antenna, sia nella regione esterna che è sede del campo irradiato.

Di fatto, un calcolo del genere risulta praticabile solo per alcune geometrie molto particolari (una guida circolare troncata, o due piatti

piani indefiniti e paralleli) e quindi, in generale, risulta necessario avvalersi di metodi approssimati che si basano sulla divisione del problema in due passi:

1. determinazione delle correnti che vengono eccitate sull'antenna;
2. valutazione del campo irradiato.

È evidente che il più delicato tra i due passi è il primo, giacché una volta che questo è stato risolto, il secondo discende automaticamente, ed ai fini della sua risoluzione conviene avvalersi del *teorema di equivalenza*, che afferma quanto segue: considerata una regione di spazio sede di un campo elettromagnetico sostenuto da certe sorgenti, e racchiusa le sorgenti dentro ad una superficie *arbitraria* S , orientata dalla normale esterna $\hat{n}$, nulla cambia all'esterno di S se si spengono le sorgenti del campo e le si sostituisce con le densità superficiali di corrente

$$\mathbf{J}_S = \hat{n} \times \mathbf{H}_{\text{tan}} \quad , \quad \mathbf{M}_S = \mathbf{E}_{\text{tan}} \times \hat{n} \quad ,$$

che devono essere disposte su S .

Si osservi che, dal punto di vista pratico, questo teorema non fornisce un metodo costruttivo per la risoluzione del problema di Maxwell, perchè esso afferma solamente che è possibile sostituire le vere sorgenti del campo con altre sorgenti fittizie che, tuttavia, sono incognite dal momento che dipendono dai campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ che, per l'appunto, sono le incognite del problema. L'utilità del teorema risiede però nel fatto che è *possibile scegliere S ad arbitrio*, e ciò può facilitare di molto i calcoli quando questa superficie viene scelta in modo che sia *ragionevole ipotizzare* il valore che il campo assume su di essa. Ad esempio, nel caso della guida d'onda troncata, una buona scelta per S è quella costituita dall'insieme della superficie esterna della guida, unita alla sua apertura. Infatti, se la guida è costituita di un materiale conduttore, vale $\mathbf{M}_S \equiv 0$ sulla superficie esterna dell'antenna, dal momento che lì la componente tangente del campo elettrico è nulla; inoltre, poichè l'irradiazione avviene essenzialmente attraverso l'apertura, è ragionevole ipotizzare che il campo magnetico sia molto più intenso sulla stessa apertura che non sulla superficie esterna della guida, e quindi ritenere che anche la densità di corrente elettrica $\mathbf{J}_S$ sia per lo meno trascurabile su quest'ultima superficie. Si osservi tuttavia che questa ipotesi introduce un'approssimazione nel calcolo, che dà luogo a risultati ragionevolmente

corretti nel semispazio che non contiene la guida, e comunque a grande distanza da essa, ma che risulta invece inaccettabile se si tenta di calcolare il campo in prossimità della guida.

Chiarito questo aspetto, l'approssimazione introdotta mostra comunque che per calcolare il campo irradiato è necessario valutare solo le correnti sull'apertura dell'antenna, e dunque il campo elettromagnetico che è presente su di essa. Questo viene usualmente fatto usando due diverse approssimazioni:

- **Approssimazione di Kirchhoff, o dell'ottica fisica**

Questa approssimazione può essere utilizzata quando la lunghezza d'onda della radiazione nella guida è molto inferiore alle dimensioni dell'apertura. In questo caso, è lecito ritenere che il campo sull'apertura sia lo stesso che si avrebbe se la guida, invece di essere troncata, continuasse indefinitamente. Ciò perchè l'effetto di bordo che è introdotto dalla troncatura della guida si risente fino ad una distanza dal bordo stesso che è dell'ordine di due o tre volte la lunghezza d'onda e dunque, se l'apertura è molto maggiore della lunghezza d'onda, la porzione di superficie dell'apertura sulla quale il campo differisce da quello imperturbato è percentualmente piccola.⁵

- **Approssimazione di Bethe**

Questa approssimazione viene utilizzata nella situazione complementare alla precedente, e cioè quando la lunghezza d'onda della radiazione è molto maggiore delle dimensioni dell'apertura. Il caso tipico in cui ciò avviene è quello illustrato dalla Fig.(8.15), che mostra un'antenna a fessure, ottenuta realizzando delle fessure longitudinali disposte lungo una guida d'onda di larghezza⁶ $\lambda/2$. L'approssimazione di Bethe consiste, essenzialmente, nel ritenere che le fessure non vi siano: in questo modo, la guida è costituita ovunque da un conduttore elettrico perfetto, e quindi si ha $\mathbf{M}_S \equiv 0$ dappertutto, mentre si ha $\mathbf{J}_S \neq 0$ sulle fessure, ed il valore di

⁵In realtà, è stato dimostrato che l'approssimazione vale anche per dimensioni di apertura comparabili con la lunghezza d'onda, ma solo quando si calcola il valore del campo nei punti in cui esso è massimo.

⁶Si osservi che le fessure vanno praticate vicino ai bordi, perchè al centro della guida esse non alterano significativamente il campo, e dunque non danno luogo ad irradiazione.

questa densità di corrente superficiale può essere calcolato utilizzando il campo magnetico che è presente nella guida imperturbata.

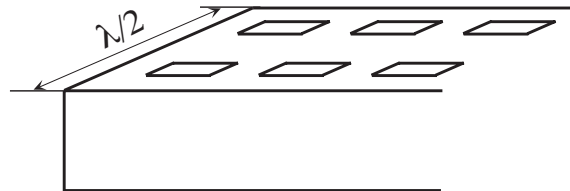


Figura 8.15: Antenna a fessure.

L'approssimazione ha però un punto debole, che risiede nell'aver ritenuto nulle le correnti elettriche e magnetiche in tutti i punti della guida che non appartengono alle fessure. Infatti, laddove questo è corretto per le correnti magnetiche perchè, come detto poco sopra, la componente tangente del campo elettrico è nulla sulla superficie della guida, non è invece nulla la componente di campo magnetico, che viene generato dalla stessa radiazione che fuorisce dalle fessure e che può risultare addirittura comparabile con il campo che è presente su di queste. Si può tuttavia dimostrare che queste correnti non alterano la forma del campo, ma ne modificano solo il valore, e dunque l'approssimazione risulta accettabile fintanto che ci si accontenta di una descrizione sommaria delle proprietà di irradiazione dell'antenna, non quando si tenta un calcolo preciso del campo irradiato.

Una volta che il campo sull'apertura sia stato approssimato come è maggiormente appropriato, il calcolo del campo irradiato può essere svolto utilizzando la *completezza delle onde piane*, come viene illustrato qui di seguito.

8.4.1 L'espansione in onde piane

La Fig.(8.16) illustra l'antenna che si intende studiare: si tratta di una antenna che occupa il semispazio $z < 0$, e la cui apertura, sita nel piano $z = 0$ si affaccia verso il semispazio $z > 0$ che è sede di un mezzo lineare *omogeneo* ed isotropo, con costanti ϵ e μ .

Poichè l'apertura ha dimensioni finite, il campo elettromagnetico che è presente sul piano $z = 0$ ha necessariamente potenza finita e, in virtù di

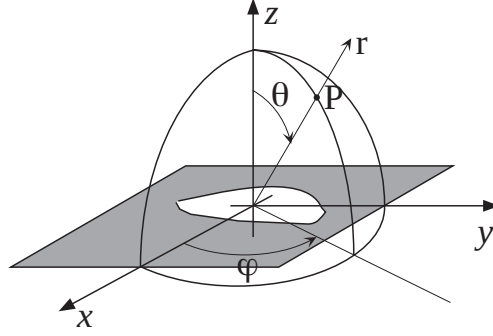


Figura 8.16: Schema dell'antenna ad apertura studiata mediante l'espansione in onde piane.

questo fatto, può essere sempre rappresentato come una sovrapposizione di onde piane, secondo la seguente scrittura

$$\mathbf{E}(x, y, z > 0) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d\kappa_x \int d\kappa_y \hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y) e^{-i\kappa_x x - i\kappa_y y - hz} \quad , \quad (8.28)$$

dove

$$h^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 - \omega^2 \mu \epsilon \quad , \quad (8.29)$$

è la componente del vettore d'onda che è allineata lungo l'asse z , e $\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y)$ è lo *spettro di onde piane* (del campo sul piano $z = 0$), dato da

$$\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y) = \int dx \int dy \mathbf{E}(x, y, z = 0) \exp\{i\kappa_x x + i\kappa_y y\} \quad . \quad (8.30)$$

Si osservi come la (8.28) rappresenti effettivamente una espansione del campo in onde piane: essa mostra infatti che il campo elettrico irradiato dall'antenna nel punto P di coordinate cartesiane $\{x, y, z > 0\}$ può essere scritto come la somma di infinite onde piane, alcune delle quali sono onde piane uniformi (quelle per cui h è un numero immaginario puro), ed altre onde piane evanescenti (per le quali h è un numero reale puro).

Si noti inoltre come ognuna delle onde dello spettro è univocamente determinata da *tre grandezze*:

- la sua ampiezza complessa, che vale $\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y)$;

- le due componenti del vettore d'onda che sono allineate rispetto agli assi x e y : infatti, una volta che queste due componenti sono state fissate, la terza, diretta lungo z , non può più essere assegnata ad arbitrio, giacchè essa deve sottostare alla relazione (8.29).

Si noti infine come la (8.28) sia una espressione di grande utilità e generalità: essa permette infatti di valutare il campo elettrico irradato da una qualsiasi antenna ad apertura in un qualsiasi punto P del semispazio omogeneo $z > 0$ che giace davanti all'antenna: a tal fine è infatti sufficiente calcolare la trasformata di Fourier bidimensionale (8.30) del campo che è presente sull'apertura dell'antenna, ed utilizzare questo valore nell'integrale (8.28).

Sebbene il calcolo di questo integrale possa essere svolto per via numerica, è ora opportuno vedere come esso si possa in realtà semplificare, al fine di apprezzare maggiormente la natura dei fenomeni fisici che entrano in gioco. Si riscrivano allora le coordinate del generico punto P nella seguente forma $x = r u_x$, $y = r u_y$ e $z = r u_z$, dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ è la distanza del punto P dall'origine delle coordinate, e u_x , u_y , u_z sono i coseni direttori del versore che punta verso P , tali che $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$.

La (8.28) si riscrive allora come segue

$$\mathbf{E} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int d\kappa_x \int d\kappa_y \hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y) e^{-r(i\kappa_x u_x + i\kappa_y u_y + h u_z)} \quad , \quad (8.31)$$

e questa scrittura permette di apprezzare come l'integrando dipenda dalla distanza r del punto P solo attraverso il fattore di fase che appare nel termine esponenziale. Per poter semplificare in maniera significativa l'integrale di espansione, è ora necessario distinguere due casi.

Onde piane evanescenti: h reale

Quando il vettore d'onda lungo z risulta reale, l'onda piana con ampiezza $\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y)$ e vettori d'onda κ_x e κ_y è un'onda piana evanescente.

Ora, se si calcola il campo irradato dall'antenna nella regione di *campo lontano*, e cioè se si fa crescere indefinitamente il valore di r nell'integrale di espansione, il contributo legato all'onda evanescente in esame diventa sempre meno importante perchè il termine $\exp\{-h r u_z\}$ converge rapidamente a zero. Fisicamente ciò ha un significato molto chiaro: a grande distanza dall'apertura dell'antenna, non rimane alcuna

traccia di tutte quelle componenti spettrali del campo sull'apertura che sono costituite da onde evanescenti. D'altra parte, non può che essere così: le onde evanescenti, infatti, si attenuano esponenzialmente man mano che si propagano e dunque, a distanza sufficientemente grande dall'apertura dell'antenna, la loro ampiezza si riduce ad un valore del tutto trascurabile.

Onde piane uniformi: h immaginario

Quando invece h assume un valore immaginario, l'onda piana con ampiezza $\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y)$ è un'onda piana uniforme, ed è dunque in grado di propagarsi senza attenuarsi nel semispazio omogeneo $z > 0$ che si trova di fronte all'antenna; in termini matematici, ciò significa che il suo contributo all'integrale di espansione (8.31) non è nullo, ed esso può essere valutato come segue.

Si consideri il termine di fase che compare nella (8.31): scritto in forma estesa, esso risulta pari a

$$\begin{aligned} r\phi(r, \kappa_x, \kappa_y) &= r \left(\kappa_x u_x + \kappa_y u_y + \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \kappa_x^2 - \kappa_y^2} u_z \right) \\ &\equiv r (\kappa_x u_x + \kappa_y u_y + \kappa_z u_z) \quad , \end{aligned}$$

dove è stato esplicitamente indicata la componente κ_z del vettore d'onda dell'onda piana.

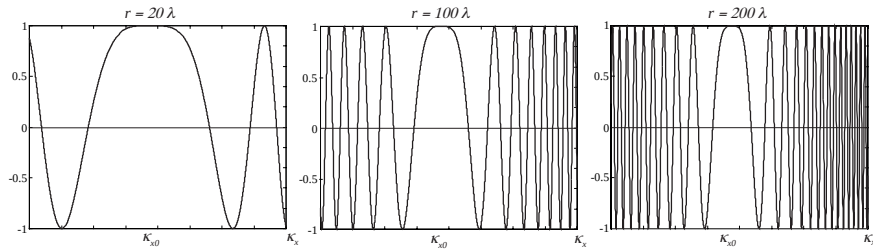


Figura 8.17: Andamento di $\cos(r\phi)$ al variare di κ_x (per $\kappa_y = 0$) e, da sinistra a destra, per $r = 20, 100, 200\lambda$.

La Fig.(8.17) mostra il tipico andamento della parte reale di $e^{ir\phi}$ al variare di κ_x , quando $\kappa_y = 0$, e la distanza r è pari a 20, 100 o 200 lunghezze d'onda. Si osserva il seguente fatto: esiste un punto, che è indicato con il simbolo κ_{x0} nella figura, attorno al quale la fase rimane pressochè costante al variare di κ_x , indipendentemente dal valore di r ;

per valori di κ_x sostanzialmente diversi da κ_{x0} , invece, la fase varia rapidamente al variare di κ_x , e la variazione è tanto più rapida quanto maggiore è la distanza r del punto in cui si valuta il campo.

L'andamento della parte immaginaria di $\exp\{ir\phi\}$ è sostanzialmente analogo a questo, e presenta ancora il punto κ_{x0} attorno al quale la fase rimane pressochè costante al variare di κ_x , indipendentemente dal valore di r .

Il punto in cui la fase rimane pressochè costante al variare di κ_x (o di κ_y) viene indicato con la dicitura di *punto di fase stazionaria*, ed è di facile valutazione: basta infatti considerare le derivate parziali

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial\kappa_x} &= u_x - \frac{\kappa_x}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \kappa_x^2 - \kappa_y^2}} u_z \quad , \\ \frac{\partial\phi}{\partial\kappa_y} &= u_y - \frac{\kappa_y}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \kappa_x^2 - \kappa_y^2}} u_z \quad ,\end{aligned}$$

ed annullarle, per trovare che detto punto è quello individuato dai valori κ_{x0} e κ_{y0} tali che

$$\begin{cases} \frac{u_x}{u_z} = \frac{\kappa_{x0}}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \kappa_{x0}^2 - \kappa_{y0}^2}} = \frac{\kappa_{x0}}{\kappa_{z0}} \\ \frac{u_y}{u_z} = \frac{\kappa_{y0}}{\sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \kappa_{x0}^2 - \kappa_{y0}^2}} = \frac{\kappa_{y0}}{\kappa_{z0}} \end{cases} \quad , \quad (8.32)$$

e dunque per

$$\kappa_{x0} = u_x \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad , \quad \kappa_{y0} = u_y \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad , \quad \kappa_{z0} = u_z \omega \sqrt{\mu\epsilon} \quad . \quad (8.33)$$

Ora, poichè nell'integrale (8.31) il termine $\exp\{ir\phi\}$ compare come un fattore che moltiplica lo spettro $\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y)$, si deduce che, al crescere di r , gli unici termini che contribuiscono in maniera significativa al valore dell'integrale sono quelli che si trovano in prossimità del punto di fase stazionaria, giacchè tutti gli altri vengono rapidamente mediati a zero dalle oscillazioni della fase. In altre parole, è lecito approssimare l'integrale (8.31) come segue: si scrive l'espansione della fase attorno al punto di fase stazionaria per mezzo della serie di Taylor

$$\phi(\kappa_x, \kappa_y) \simeq \phi(\kappa_{x0}, \kappa_{y0}) + \xi(\kappa_x, \kappa_y) \quad ,$$

dove

$$\begin{aligned}\xi(\kappa_x, \kappa_y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa_x^2} (\kappa_x - \kappa_{x0})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa_y^2} (\kappa_y - \kappa_{y0})^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa_x \partial \kappa_y} (\kappa_x - \kappa_{x0})(\kappa_y - \kappa_{y0}) + \dots\end{aligned}$$

Usando la (8.33), e tenendo conto che i coseni direttori u_x , u_y e u_z sono tali che $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1$, si ha anche

$$r\phi(r, \kappa_{x0}, \kappa_{y0}) = r\omega\sqrt{\mu\epsilon} \equiv \beta r \quad ,$$

di modo che l'integrale (8.31) può essere riscritto come segue

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z > 0) &\simeq \frac{\hat{\mathbf{E}}(\kappa_{x0}, \kappa_{y0}) e^{-i\beta r}}{(2\pi)^2} \int d\kappa_x \int d\kappa_y e^{-ir\xi(\kappa_x, \kappa_y)} \quad , \\ &= i \cos(\theta) \frac{\hat{\mathbf{E}}(\kappa_{x0}, \kappa_{y0})}{\lambda r} e^{-i\beta r} \quad ,\end{aligned}\tag{8.34}$$

dove θ è l'angolo azimutale mostrato in Fig.(8.16).

Vi sono alcune osservazioni da fare:

1. nel passare dalla (8.31) alla prima delle (8.34), lo spettro di onde piane $\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y)$ è stato portato al di fuori del doppio integrale, ed è stato valutato nel solo punto di fase stazionaria, $\kappa_x = \kappa_{x0}$, $\kappa_y = \kappa_{y0}$. Ciò è stato fatto in virtù di quanto si è osservato più sopra, e cioè del fatto che tutti i termini dello spettro con vettori d'onda differenti da κ_{x0} e κ_{y0} vengono mediati a zero dal termine esponenziale;
2. la derivazione della seconda delle (8.34) richiede alcuni passaggi algebrici non banali, che sono riportati nell'Appendice 2 di questo capitolo;
3. l'espressione finale cui si è giunti mostra che il campo a grande distanza dall'antenna dipende, tra l'altro, dal coseno dell'angolo azimutale θ : ne segue che l'irradiazione è nulla sul piano che contiene l'apertura dell'antenna (sul quale $\theta = \pi/2$), e tende ad essere tanto maggiore quanto più il punto di osservazione è di fronte all'antenna; si osservi come si sia ritrovata, ancora una volta, la caratteristica tipica dell'emissione di molte antenne: l'irradiazione

tende ad essere massima “davanti” all’antenna, e tende invece ad essere trascurabile nella direzione o nel piano che contiene l’antenna (così come succedeva con le antenne filiformi, la cui irradiazione è massima nel piano che taglia in due l’antenna, ed è invece nulla al di sopra o al di sotto dell’antenna stessa);

4. l’ampiezza del campo dipende dalla distanza del punto di osservazione tramite il fattore $1/r$ e, ancora una volta, questo fatto può essere spiegato con semplicità: più è grande la distanza dall’antenna, più l’apertura può essere confusa con una sorgente puntiforme, ed il fattore $1/r$ esprime il fatto che l’onda irradiata tende ad essere sferica, e la potenza deve essere conservata;
5. l’ampiezza del campo è proporzionale *alla trasformata di Fourier del campo sull’apertura* e, più precisamente, nel punto sotteso dai coseni direttori u_x ed u_y , all’ampiezza dell’onda piana con vettori d’onda

$$\kappa_{x0} = \beta u_x \quad , \quad \kappa_{y0} = \beta u_y \quad .$$

In certo modo, questo risultato doveva essere atteso. Infatti, la (8.30) mostra che il campo sull’apertura può essere pensato come la somma di infinite onde piane, che si differenziano tra di loro per i diversi valori di κ_x e κ_y , e cioè, in sostanza, per la *diversa direzione di propagazione* giacchè, come si è visto quando si è affrontato lo studio delle onde piane, la direzione del vettore di propagazione coincide con la direzione lungo la quale si “propaga” la potenza attiva che è associata ad un’onda piana.

Il risultato che abbiamo trovato qui si può quindi leggere come segue: l’ampiezza del campo irradiato verso il punto P è proporzionale all’ampiezza dell’onda piana dello spettro *che si propaga in quella direzione*. Tutte le altre onde piane si propagano lungo direzioni diverse e, nel punto P , si compongono in modo da elidersi a vicenda.

8.5 Parametri delle antenne in trasmissione

Fino ad ora si è visto quali calcoli sia necessario fare al fine di valutare il campo prodotto da una generica antenna, filiforme o ad apertura che sia; da un punto di vista pratico, tuttavia, il progetto di un collegamento

radio è grandemente facilitato se si riesce a caratterizzare le proprietà di irradiazione dell'antenna per mezzo di grandezze che siano di più immediata comprensione che non delle formule, tipicamente dei numeri o dei diagrammi. I parametri che risultano utili a questo scopo vengono usualmente indicati con la dicitura di *parametri delle antenne in trasmissione*, ed essi vengono analizzati nel dettaglio qui di seguito.

Come è facile immaginare, la grandezza che interessa caratterizzare è il campo (elettrico) che viene irradiato a grande distanza dall'antenna e, al fine di poter confrontare tra loro diversi tipi di antenna, conviene introdurre delle *grandezze normalizzate*. Si distinguono due casi

1. se nell'antenna è facile individuare una coppia di morsetti ai capi dei quali si può misurare una tensione o una corrente di riferimento, che indicheremo come I_0 , si usa porre

$$\mathbf{E}_\infty(r, \theta, \varphi) \equiv \mathbf{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi) = iZ_0 \frac{I_0 \mathbf{h}(\theta, \varphi)}{2\lambda r} e^{-i\beta r} \quad , \quad (8.35)$$

dove la funzione $\mathbf{h}(\theta, \varphi)$ è complessa, ha le dimensioni di metri, e prende il nome di *altezza (o lunghezza) efficace in trasmissione*.

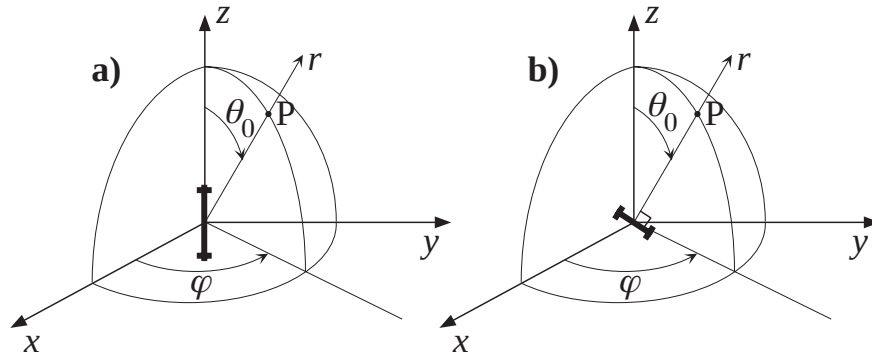


Figura 8.18: a) Antenna di lunghezza $2L$ che non è orientata in maniera ottimale rispetto al punto di osservazione P ; b) antenna più corta, orientata in maniera ottimale, che irradia nel punto P lo stesso campo irradiato dall'antenna del pannello a).

Il suo significato è di immediata comprensione se si considera l'esempio riportato nella Fig.(8.18). Nel pannello a) vi è un'antenna corta, di lunghezza $2L$, disposta nel centro di un sistema

di coordinate sferiche, ed allineata lungo $\hat{z}$, ed un osservatore che misura il campo elettromagnetico irradiato in un generico punto P di coordinate sferiche $P = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$. Come è stato mostrato nel paragrafo 8.3, il campo ricevuto nel punto P ha modulo

$$E = iZ_0 \frac{I_0 L_{\text{eff}}}{2\lambda r} \quad , \quad L_{\text{eff}} = L \sin(\theta_0)$$

Si consideri ora la situazione mostrata nel pannello b) della figura, dove vi è un'antenna di lunghezza L_{eff} orientata ortogonalmente al raggio vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento con il punto P . Il campo ricevuto in questo caso coincide con il precedente: infatti, è vero che l'antenna è più corta, ma essa è ora disposta in modo che la sua irradiazione è massima proprio nella direzione del punto P .

Si evince dunque che, agli occhi dell'osservatore, è impossibile distinguere se il campo che esso riceve è stato irradiato da un'antenna più lunga, disposta in maniera non ottimale, o da una più corta, ma orientata correttamente. In altre parole, per l'osservatore, *tutto va come se* il campo fosse stato irradiato da un'antenna di lunghezza L_{eff} , ovvero, utilizzando la (8.35), egli può affermare che il comportamento dell'antenna può essere riassunto immaginando che l'antenna abbia una *lunghezza efficace* pari a $\mathbf{h}(\theta, \varphi)$.

Si osservi che, poichè la definizione di questo parametro comporta la conoscenza della corrente di alimentazione I_0 , l'altezza efficace è un parametro che si adatta meglio al caso delle antenne filiformi più che non a quello delle antenne ad apertura. Non vi è però ragione per ritenere che esso possa essere utilizzato *unicamente* con le antenne filiformi: infatti, esso dà solo un mezzo per rappresentare in maniera convenzionale l'emissione di un'antenna e, come tale, può essere utilizzato con completa generalità.

2. Il secondo parametro che si usa definire viene utilizzato quando non è immediata l'individuazione di una corrente di alimentazione come avviene, ad esempio, nel caso delle antenne a microonde. In questo caso si preferisce allora normalizzare il campo a grande distanza rispetto al valore che esso assume in una direzione di riferimento che, tipicamente, viene assunta essere quella di massima irradiazione. Si scrive allora

$$\mathbf{E}_\infty(r, \theta, \varphi) = \mathbf{f}(\theta, \varphi) E_\infty(r, \theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}}) \quad ,$$

dove la funzione $\mathbf{f}(\theta, \varphi)$ è complessa ed adimensionale, e prende il nome di *vettore di radiazione*.

Nel seguito si vedrà che l'altezza efficace ed il vettore di radiazione non sono indipendenti l'uno dall'altro, come è d'altra parte ragionevole attendersi, dal momento che essi sono solo due diversi modi per esprimere la stessa grandezza fisica.

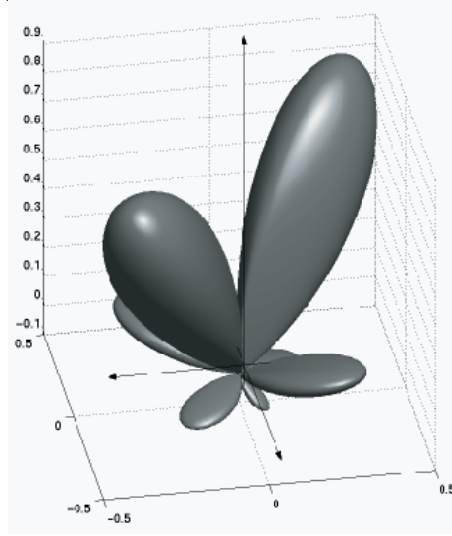


Figura 8.19: Esempio di solido di direttività.

Per ora tuttavia, risulta utile definire alcuni altri parametri di interesse; infatti, sia l'altezza efficace sia il vettore di radiazione sono quantità complesse e vettoriali e, come tali, esse offrono una rappresentazione molto completa del campo, perchè ne forniscono ampiezza, fase e polarizzazione. In molte applicazioni, però, queste informazioni sono addirittura sovrabbondanti, perchè spesso basta la sola conoscenza del modulo del campo e, per questa ragione, viene introdotto il *solido di direttività* dell'antenna, che è definito come segue:

$$\begin{aligned}
 D(\theta, \varphi) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{|\mathbf{E}(r, \theta, \varphi)|^2 4\pi r^2}{\int_{S(r)} |\mathbf{E}(r, \theta, \varphi)|^2 dS} = \frac{|\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 \sin(\theta)} = \\
 &= \frac{|\mathbf{h}(\theta, \varphi)|^2 4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta |\mathbf{h}(\theta, \varphi)|^2 \sin(\theta)} \quad , \quad (8.36)
 \end{aligned}$$

dove $S(r)$ è la superficie sferica (con $r \rightarrow \infty$) che contiene l'antenna (o l'insieme di antenne) che si vuole caratterizzare.

La Fig.(8.19) mostra la tipica forma di un solido di direttività: esso si presenta in genere diviso in regioni, ciascuna delle quali prende il nome di *lobo di radiazione* e, come è facile intuire, serve a dare una rappresentazione molto immediata dell'ampiezza e delle direzioni lungo le quali si ha l'emissione da parte dell'antenna.

Insieme al solido di direttività si definiscono anche i *diagrammi di direttività*, che sono ottenuti sezionando il solido di direttività con dei piani. Tipicamente, nel caso delle antenne filiformi si usa rappresentare il diagramma di direttività nel piano che taglia l'antenna, ed in quello che la contiene; nel caso delle antenne ad apertura, invece, si rappresenta il diagramma su un piano posto davanti all'antenna che, ad esempio, potrebbe rappresentare la facciata di un edificio posto di fronte a questa; oppure, si rappresenta il diagramma su piani orizzontali e questo tipo di caratterizzazione serve, ad esempio, ad avere una misura del campo che si riscontra in prossimità del suolo, o ad una certa altezza da esso.

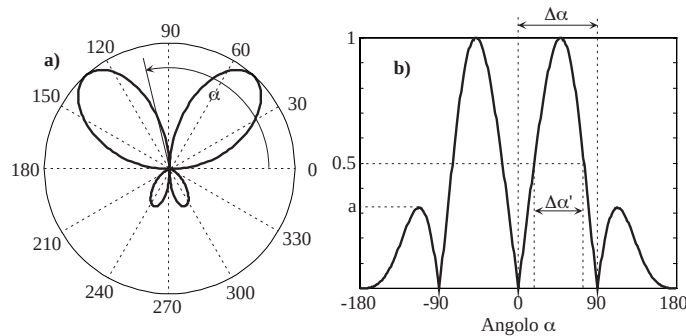


Figura 8.20: Esempio di diagrammi di direttività, in coordinate polari (a), e cartesiane (b).

I diagrammi di direttività vengono normalmente disegnati in coordinate polari o cartesiane, come illustrato nella Fig.(8.20), e presentano ancora i *lobi di radiazione*, divisi tra loro dalle *direzioni di zero*. Nella figura, vengono poi evidenziati alcuni altri parametri di interesse, che sono la *larghezza del lobo principale*, $\Delta\alpha$, e la *larghezza ai 3 dB* del lobo principale, $\Delta\alpha'$. Si osservi che se la quantità che viene rappresentata per mezzo di un diagramma del tipo di quelli in Fig.(8.20) è una quantità legata al modulo del campo elettrico o magnetico, e non al *modulo*

quadro del campo, la larghezza ai 3 dB va misurata in corrispondenza al punto in cui il diagramma assume il valore $1/\sqrt{2}$. Da ultimo, si definisce anche il *rapporto tra i lobi*, indicato come a in figura, che è il rapporto esistente tra il primo lobo secondario ed il lobo principale. Come è facile immaginare, queste tre grandezze permettono di dare un'idea di quanto confinata è la radiazione rispetto ad una certa direzione dello spazio, e di quanto l'antenna irradia in direzioni al di fuori di quella di massimo.

Se accade che, su un dato piano, il diagramma di radiazione è un cerchio, l'antenna è detta *onnidirettiva* in quel piano; se poi esso è un cerchio su tutti i piani, e cioè se il solido di rotazione è una sfera, l'antenna è detta *isotropa*. Si osservi tuttavia che, affinché ciò avvenga, l'antenna deve essere perfettamente puntiforme: nella realtà dunque, non è possibile realizzare un'antenna con questa proprietà.

Insieme ai diagrammi per la quantità $D(\theta, \varphi)$, vengono poi disegnati anche analoghi diagrammi per una quantità che è più direttamente legata alla densità di potenza che è irradiata da una data antenna: si tratta dell'*intensità di radiazione*, definita come

$$I_r(\theta, \varphi) = \frac{|\mathbf{E}_\infty|^2}{2Z_0} r^2 \quad .$$

Accanto a questa, viene poi anche definita per l'*intensità di radiazione normalizzata*,

$$i_r = \frac{I_r}{\max\{I_r\}} \quad .$$

Si sono dunque visti due insiemi di parametri delle antenne di trasmissione: il primo insieme, formato dall'altezza efficace e dal vettore di radiazione, permette una caratterizzazione completa dell'emissione poichè fornisce ampiezza, modulo e fase del campo; il secondo insieme è quello formato dai diagrammi e dai solidi di radiazione, che forniscono informazioni sul solo modulo del campo, per via grafica. Ora, si introducono degli altri parametri, che sono assegnati in forma numerica, e che, quindi, da un lato forniscono una rappresentazione ancor più immediata delle proprietà di irradiazione, dall'altro, meno puntuale e meno dettagliata.

A questo insieme di parametri appartengono la *direttività*, il *guadagno in potenza*, e l'*impedenza d'antenna*. Vediamo nel dettaglio come sono definiti.

La direttività, D_M , è definita come il valore massimo che viene assunto dal solido di direttività, e quindi

$$\begin{aligned} D_M = D(\theta_{\max}, \varphi_{\max}) &= \frac{|\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta_{\max}, \varphi_{\max})| 4\pi r^2}{\int_{S(r)} |\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)|^2 dS} \equiv \\ &= \frac{|\mathbf{E}_{\max}|^2 4\pi r^2}{\int_{S(r)} |\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)|^2 dS} . \end{aligned} \quad (8.37)$$

Si osservi che, poichè per definizione si ha $|\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)| \leq |\mathbf{E}_{\max}|$, risulta $D_M \geq 1$ e $D_M = 1$ solo per un'antenna che sia idealmente isotropa (cioè, per un'antenna puntiforme). La direttività consente il calcolo immediato della *densità di potenza* irradiata dall'antenna nella sua direzione di massimo: si ha infatti

$$\begin{aligned} S_{\max}(r) = \frac{|E_{\max}|^2}{2Z_0} &= \frac{|E_{\max}|^2}{2Z_0} \frac{4\pi r^2}{4\pi r^2} \frac{\int_{S(r)} |\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)|^2 dS}{\int_{S(r)} |\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)|^2 dS} = \\ &= D_M \frac{P_{\text{irr}}}{4\pi r^2} , \end{aligned} \quad (8.38)$$

dove P_{irr} è la potenza totale irradiata dall'antenna. Questo risultato si può leggere come segue: se l'antenna fosse isotropa, la densità di potenza sarebbe uguale in ogni direzione dello spazio, e pari al rapporto tra la potenza irradiata e la superficie sferica su cui essa viene valutata perchè l'antenna isotropa irradia un'onda che è perfettamente sferica. Se invece si usa un'antenna non isotropa, la densità di potenza nella direzione di massimo aumenta di un fattore che è proprio pari alla direttività.

Si osservi anche che, dividendo e moltiplicando la (8.37) per $4\pi r^2$, si può riscrivere la direttività nella forma di un *rapporto di potenze*:

$$D_M = \frac{P_0}{P_{\text{irr}}} .$$

Di queste potenze, P_{irr} è ancora la potenza irradiata dall'antenna che si sta caratterizzando; P_0 , invece, è la potenza che sarebbe irradiata da un'antenna isotropa che ecciti un campo di intensità uguale a quello eccitato dall'antenna sotto esame nella sua direzione di massimo.

In altre parole, la direttività ha il significato che segue: si immagini di voler irradiare in un dato punto dello spazio un certo campo elettromagnetico e che, a tal fine, si possa disporre di due antenne, una isotropa, ed una non isotropa. D_M indica allora qual'è il “risparmio” in termini di potenza che si ha utilizzando l'antenna direttiva al posto dell'antenna isotropa per ottenere il campo desiderato.

Il “risparmio” deriva dal fatto che l'antenna direttiva è in grado di confinare la radiazione verso una direzione privilegiata dello spazio di modo che, quando essa eccita il campo desiderato lungo quella direzione, l'irradiazione è poi inferiore lungo tutte le altre direzioni. L'antenna isotropa, invece, irradia in ugual misura lungo tutte le direzioni dello spazio, e deve quindi impiegare una potenza superiore per eccitare lo stesso campo massimo dell'antenna direttiva.

In alternativa alla direttività viene spesso fornito il *guadagno in potenza* dell'antenna, dato da

$$G = \frac{P_0}{P_{\text{alim}}} = \frac{P_0}{P_{\text{irr}}} \frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{alim}}} = \eta D \quad ,$$

dove

$$P_{\text{alim}} = P_{\text{irr}} + P_{\text{diss}} \quad ,$$

è la potenza con cui viene alimentata l'antenna, data dalla somma di potenza irradiata e potenza dissipata, e η è il *rendimento* dell'antenna.

Si osservi che il guadagno in potenza è più facile da misurare che non la direttività, essenzialmente perchè esso richiede la conoscenza della potenza di alimentazione e non della potenza irradiata. La potenza di alimentazione, infatti, può essere valutata con relativa semplicità misurando la tensione e la corrente ai morsetti dell'antenna; la potenza irradiata, invece, richiede una misura più complicata, da farsi posizionando l'antenna in un luogo che deve essere privo di ostacoli, e sufficientemente ampio da poter essere considerato alla stregua dello “spazio libero”.

Si osservi inoltre che l'antenna ha rendimento unitario se la potenza irradiata coincide con la potenza di alimentazione, e quindi se l'antenna è priva di dissipazioni interne o, come si usa dire, se essa è *priva di perdite*.

La direttività ed il guadagno in potenza vengono spesso forniti nella scala dei decibel e, poichè essi esprimono rapporti di potenza, si scrivono rispettivamente come

$$D_{M(dB)} = 10 \log_{10} D_M \quad , \quad G_{dB} = 10 \log_{10} G \quad .$$

L'ultimo dei parametri numerici che vengono usualmente forniti per la caratterizzazione di un'antenna è l'*impedenza d'antenna*, che è definita come il rapporto tra i fasori di tensione e di corrente che sono presenti ai morsetti dell'antenna:

$$Z_i = R_i + iX_i = \frac{V_{\text{morsetti}}}{I_{\text{morsetti}}} \quad .$$

Naturalmente, l'impedenza di ingresso descrive l'antenna dal punto di vista circuitale nel senso che se si sostituisce l'antenna con un bipolo di impedenza Z_i , il generatore che alimenta l'antenna continua ad erogare la medesima potenza attiva e reattiva che erogava prima della sostituzione. Si osservi tuttavia che, in generale, la Z_i non possiede tutte le proprietà delle impedenze dei circuiti a parametri concentrati: ad esempio, essa non è sempre esprimibile nella forma di un rapporto di polinomi.

La parte reale dell'impedenza di ingresso, detta *resistenza di ingresso*, è il parametro di maggior interesse pratico, ed è facilmente misurabile se l'antenna ed il mezzo esterno sono privi di perdite. In tal caso, infatti, la potenza irradiata coincide con la potenza di alimentazione, e si può scrivere

$$\frac{1}{2}R_i |I_{\text{morsetti}}|^2 = P_{\text{alim}} = P_{\text{irr}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\int_{S(r)} |E(r, \theta, \varphi)|^2 dS}{2Z_0} \quad .$$

Si osservi che, poichè in questo caso R_i è direttamente legata alla potenza irradiata, essa è anche detta *resistenza di radiazione*, e viene indicata con la scrittura R_{irr} . Invece, se l'antenna ha perdite, la resistenza di radiazione non coincide con la resistenza di ingresso, e quest'ultima è data dalla somma della prima e della resistenza parassita che è presente all'interno dell'antenna e che è responsabile dei fenomeni di dissipazione.

La conoscenza della resistenza di radiazione (o della resistenza di ingresso) permette di completare un'osservazione che era stata sollevata all'inizio del paragrafo, e cioè l'esistenza di un legame tra l'altezza efficace $\mathbf{h}(\theta, \varphi)$ ed il vettore di radiazione $\mathbf{f}(\theta, \varphi)$. Infatti, per definizione di vettore di radiazione si ha

$$|\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)|^2 = |E_{\text{max}}|^2 |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 \quad ,$$

mentre, per definizione di altezza efficace

$$|\mathbf{E}_{\infty}(r, \theta, \varphi)|^2 = Z_0^2 \frac{|I_0|^2 |\mathbf{h}(\theta, \varphi)|^2}{4\lambda^2 r^2} \quad .$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{h}(\theta, \varphi)|^2 &= \frac{2Z_0 4\pi r^2 |E_{\max}|^2}{2Z_0} \frac{\lambda^2 |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2}{|I_0|^2 Z_0^2} = P_0 \frac{2\lambda^2}{\pi |I_0|^2 Z_0^2} |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 = \\
 &= P_{\text{irr}} D_M \frac{2\lambda^2}{\pi |I_0|^2 Z_0^2} |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 = \\
 &= \frac{1}{2} R_{\text{irr}} |I_0|^2 D_M \frac{2\lambda^2}{\pi |I_0|^2 Z_0^2} |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 \quad ,
 \end{aligned}$$

da cui discende subito

$$|\mathbf{h}(\theta, \varphi)| = \lambda \sqrt{\frac{R_{\text{irr}} D_M}{\pi Z_0}} |\mathbf{f}(\theta, \varphi)| \quad . \quad (8.39)$$

I vettori $\mathbf{h}$ e $\mathbf{f}$ hanno dunque ugual direzione e verso, ma diverso modulo, ed il rapporto tra i moduli dipende dalla lunghezza d'onda, dalla resistenza di radiazione e dalla direttività dell'antenna.

Si osservi anche che, se la (8.39) viene valutata nella direzione di massimo dove, per definizione vale $\mathbf{f}(\theta_{\max}, \varphi_{\max}) = 1$, si ottiene

$$R_{\text{irr}} D_M = \frac{\pi Z_0}{\lambda^2} |\mathbf{h}(\theta_{\max}, \varphi_{\max})|^2 \quad , \quad (8.40)$$

relazione che lega tra loro la direttività e la resistenza di radiazione attraverso il modulo dell'altezza efficace, valutato nella direzione di massima irradiazione.

Si osservi infine che, se l'antenna ha perdite, vale una relazione analoga alla precedente, nella quale però compaiono il guadagno in potenza al posto della direttività, e la resistenza di ingresso al posto della resistenza di radiazione:

$$R_i G = \frac{\pi Z_0}{\lambda^2} |\mathbf{h}(\theta_{\max}, \varphi_{\max})|^2 \quad .$$

Ora che si sono definiti tutti i parametri di interesse, se ne analizzano alcuni esempi relativi ad antenne di particolare riguardo.

8.5.1 Esempi di calcolo di parametri di trasmissione

Lunghezza efficace di un dipolo corto

Si ricorda che l'altezza efficace è definita in base alla relazione

$$\mathbf{E}_{\infty} = iZ_0 \frac{I_0 \mathbf{h}(\theta, \varphi)}{2\lambda r} e^{-i\beta r} \quad ,$$

e poichè il campo irradiato da un dipolo corto di lunghezza Δz è

$$\mathbf{E}_\infty = iZ_0 \frac{I_0 \Delta z \sin(\theta)}{2\lambda r} \hat{\theta} e^{-i\beta r} ,$$

si ottiene

$$\mathbf{h}(\theta, \varphi) = \Delta z \sin(\theta) \hat{\theta} . \quad (8.41)$$

Analogamente, un'antenna corta di lunghezza $2L$ ha altezza efficace

$$\mathbf{h}(\theta, \varphi) = L \sin(\theta) \hat{\theta} .$$

Lunghezza efficace di un'antenna a mezz'onda

Per semplicità, calcoliamo questa lunghezza efficace nel piano di massima irradiazione dell'antenna, e cioè per $\theta = \pi/2$.

In questa antenna la distribuzione della corrente è

$$I(z) = I_0 \cos(\beta z) ,$$

ed il campo irradiato a grande distanza (nel piano $\theta = \pi/2$) è allora

$$\mathbf{E}_\infty = iZ_0 \frac{e^{-i\beta r}}{2\lambda r} \hat{\theta} \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} I_0 \cos(\beta \xi) d\xi = iZ_0 \frac{e^{-i\beta r}}{2\lambda r} I_0 \frac{\lambda}{\pi} \hat{\theta} ,$$

da cui segue

$$\mathbf{h}_{\lambda/2}(\pi/2, \varphi) = \frac{\lambda}{\pi} \hat{\theta} = -\frac{\lambda}{\pi} \hat{z} .$$

Si osservi che, poichè la lunghezza fisica dell'antenna è $2L = \lambda/2$, la lunghezza efficace risulta pari a $2/\pi$ volte la lunghezza fisica dell'antenna.

Lunghezza efficace di un'antenna verticale al suolo

Si consideri un'antenna di altezza efficace $\mathbf{h}$ posta in prossimità del suolo, e si supponga che questo possa venir riguardato come un mezzo perfettamente conduttore. Con riferimento alla Fig.(8.21), l'antenna numero "1" irradia un campo che risulta pari a

$$\mathbf{E}_1 = iZ_0 \frac{I_0 \mathbf{h}(\theta, \varphi)}{2\lambda r} e^{-i\beta r} ,$$

mentre il campo dovuto all'antenna immagine è

$$\mathbf{E}_2 = iZ_0 \frac{I_0 \mathbf{h}(\theta, \varphi)}{2\lambda r} e^{-i\beta r} e^{-i\beta 2d \cos(\theta)} .$$

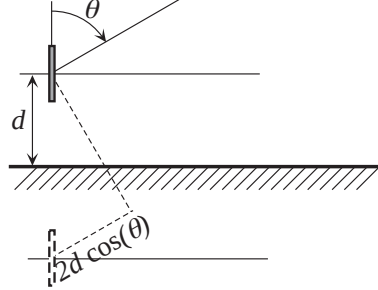


Figura 8.21: Antenna verticale al suolo.

Il campo totale è quindi

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = iZ_0 \frac{I_0 \mathbf{h}(\theta, \varphi)}{2\lambda r} e^{-i\beta r} [1 + e^{-i\beta 2d \cos(\theta)}]$$

e l'altezza efficace, valutata rispetto al punto di alimentazione dell'antenna

$$\mathbf{h}_{\text{tot}} = 2\mathbf{h} e^{-i\beta d \cos(\theta)} \cos[\beta d \cos(\theta)] \quad .$$

Lunghezza efficace di un'antenna a spira di corrente

Il campo irradiato a grande distanza da questa antenna è

$$\begin{aligned} H_\theta &= \frac{\mathcal{U}_m}{4\pi\mu} \frac{(i\beta)^2}{r} \sin(\theta) e^{-i\beta r} = -\frac{\pi R^2 I_0 \beta}{2\lambda r} \sin(\theta) e^{-i\beta r} \quad , \\ E_\varphi &= -Z_0 H_\theta = \frac{\pi R^2 I_0 \beta}{2\lambda r} Z_0 \sin(\theta) e^{-i\beta r} \quad , \end{aligned}$$

dove R è il raggio della spira. Ne segue dunque

$$\mathbf{h} = -i\beta\pi R^2 \sin(\theta) \hat{\varphi} \quad . \quad (8.42)$$

È interessante confrontare i campi prodotti da un'antenna corta e da una a spira alimentata dalla stessa corrente I_0 : l'antenna corta irradia un campo che è proporzionale alla semilunghezza L , mentre la spira a $\beta\pi R^2 = 2\pi^2 R^2/\lambda$. Dunque, se le dimensioni della spira sono confrontabili con quelle dell'antenna corta, e cioè se $L \simeq R \ll \lambda$, la radiazione emessa dalla spira è molto inferiore a quella emessa dall'antenna corta. Tuttavia, nelle applicazioni (ad esempio nel caso delle antenne televisive) si tende a preferire l'uso di un'antenna a spira perchè essa

ha un comportamento elettrico di tipo induttivo e quindi necessita dell'aggiunta di un condensatore per la sintonizzazione. L'antenna corta, invece, ha un comportamento capacitivo e viene quindi sintonizzata per mezzo di un induttore che, in generale, è un componente con delle resistenze parassite molto superiori a quelle che si riscontrano in un condensatore. In definitiva, a parità di corrente erogata dal generatore, si riesce a far circolare una corrente maggiore in una spira piuttosto che in un'antenna corta, e la radiazione è quindi superiore nella prima antenna che non nella seconda.

Vettore di radiazione di un'antenna a mezz'onda

Si ricorda che il vettore di radiazione è definito in base alla relazione

$$\mathbf{E}_\infty(r, \theta, \varphi) = \mathbf{f}(\theta, \varphi) E_{\max} \quad .$$

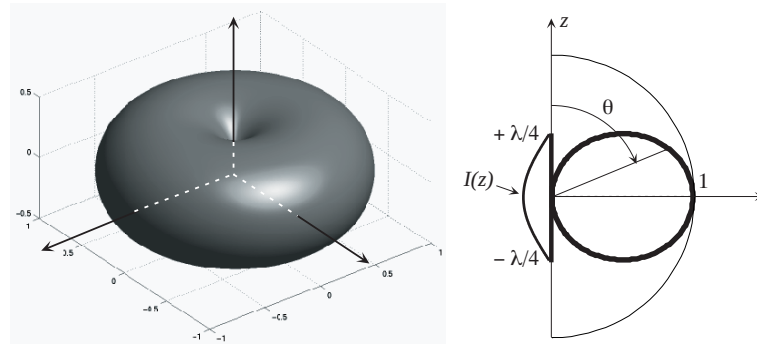


Figura 8.22: Solido e diagramma di direttività per un'antenna $\lambda/2$.

In un'antenna $\lambda/2$ il campo è

$$\begin{aligned} E_\theta &= i Z_0 \frac{e^{-i\beta r}}{2\lambda r} \int_{-\lambda/4}^{+\lambda/4} I_0 \cos(\beta\xi) e^{i\beta\xi \cos(\theta)} d\xi = \\ &= i Z_0 \frac{2 e^{-i\beta r}}{\lambda\beta r} I_0 \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right]}{\sin(\theta)} \quad , \end{aligned}$$

e la direzione di massima irradiazione si ha per $\theta = \pi/2$, dove vale

$$E_{\max} = i Z_0 \frac{2 e^{-i\beta r}}{\lambda\beta r} I_0 \quad .$$

Ne segue che il vettore di radiazione è

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta) \right]}{\sin(\theta)} \hat{\theta} \quad .$$

La figura (8.22) mostra il solido di direttività ed il diagramma di direttività (nel piano $\varphi = 0$, ma questo non cambierebbe al cambiare di φ) per questo tipo di antenna. Si noti che, come era stato anticipato nel corso della discussione sull'irradiazione da parte delle antenne filiformi, anche questa antenna ha il massimo di radiazione nel piano che la taglia a metà, ed non irradia invece nella direzione verticale che è posta al di sopra o al di sotto di essa.

Vettore di radiazione di un'antenna filiforme generica

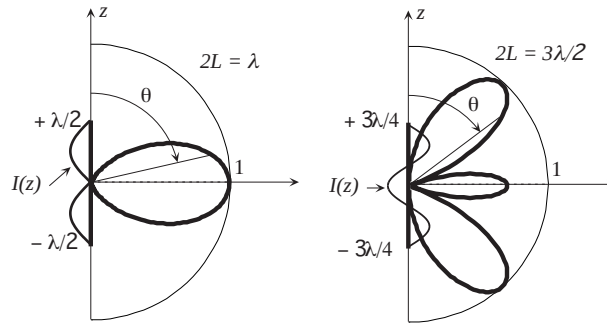


Figura 8.23: Diagrammi di direttività per un'antenna λ e $3\lambda/2$.

In un'antenna di lunghezza $2L$ generica, la corrente è

$$I(z) = I_0 \frac{\sin [\beta(L - |z|)]}{\sin(\beta L)} \quad ,$$

e si ottiene

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = \frac{\cos [\beta L \cos(\theta)] - \cos(\beta L)}{\sin(\theta) [1 - \cos(\beta L)]} \hat{\theta} \quad ,$$

dove la normalizzazione è stata eseguita rispetto al valore del campo nella direzione $\theta = \pi/2$, e si è assunto $\beta L \neq 2k\pi$.

Si distinguono due casi di particolare interesse, quelli delle antenne con lunghezza $2L = \lambda$ e $2L = 3\lambda/2$, i cui diagrammi di direttività, nel piano $\varphi = 0$, sono riportati nella Fig.(8.23).

Si osservi come, nel caso dell'antenna di lunghezza λ la corrente è nulla in $z = 0$, il che comporterebbe un trasferimento nullo di potenza dal generatore all'antenna e da questa allo spazio circostante. Nella pratica, dunque, un'antenna di lunghezza λ non deve essere alimentata nel suo centro; si osservi inoltre come, all'aumentare della lunghezza dell'antenna aumentano i lobi del diagramma, ed il massimo di radiazione non si trova più nel piano $\theta = \pi/2$.

Vettore di radiazione per un'antenna ad onda progressiva

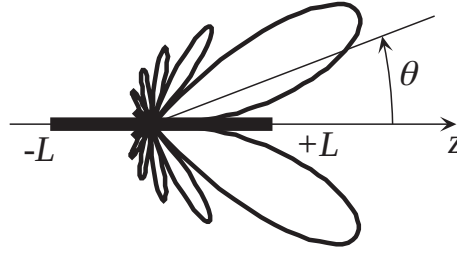


Figura 8.24: Diagramma di direttività per un'antenna ad onda progressiva.

Si tratta di una antenna costituita da un filo, di lunghezza $2L$ percorso dalla corrente

$$I(z) = I_0 e^{-i\beta z} \quad , \quad -L \leq z \leq L \quad .$$

Il campo irradiato è

$$E_\theta = i Z_0 \frac{I_0}{2\lambda r} e^{-i\beta r} \sin(\theta) \frac{\sin[\beta L(1 - \cos(\theta))]}{1 - \cos(\theta)} \quad ,$$

ed i massimi del vettore di radiazione si hanno per

$$\beta L(1 - \cos(\theta)) = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad , \quad k = 0, 1, \dots \quad ,$$

con k che può arrivare fino al valore in corrispondenza al quale $\beta L \geq (2k + 1)\pi/2$. Il numero di massimi aumenta all'aumentare di L/λ ed il massimo assoluto si ha in corrispondenza al minimo degli θ .

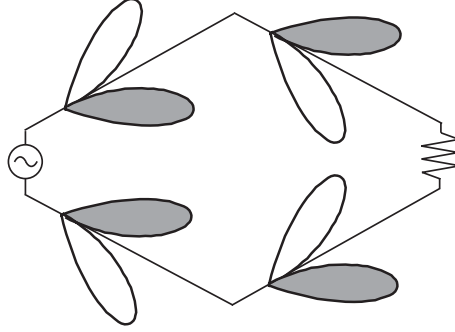


Figura 8.25: Antenna a rombo.

Una realizzazione pratica di questa antenna è la cosiddetta *antenna a rombo*: si tratta di un'antenna costituita da quattro conduttori disposti a rombo, e terminati su un carico adattato (si veda la Fig.(8.25)). La dimensione dell'antenna è scelta in modo che i campi generati dai lobi orizzontali si sommino in fase, mentre quelli degli altri lobi si elidano. In questo modo si ottiene un'antenna fortemente anisotropa nella direzione dei lobi orizzontali.

Vettore di radiazione per un'antenna ad apertura rettangolare

Si consideri l'irradiazione da parte di un'antenna ad apertura rettangolare, di dimensione $2a$ rispetto ad x e $2b$ rispetto ad y , posta nel piano $z = 0$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Si assuma che il campo elettromagnetico sull'apertura sia costante:

$$\mathbf{E}(x, y, z = 0) = \begin{cases} \mathbf{E}_0 & \text{per } |x| \leq a, |y| \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Il suo spettro è quindi

$$\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y) = \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \mathbf{E}_0 e^{i\kappa_x x + i\kappa_y y} = 4ab \frac{\sin(\kappa_x a)}{\kappa_x a} \frac{\sin(\kappa_y b)}{\kappa_y b} \mathbf{E}_0.$$

e dunque, nel generico punto $P = (x, y, z)$ a grande distanza dall'antenna il campo è

$$\mathbf{E}_\infty \propto 4ab \mathbf{E}_0 \frac{\sin\left(\beta \frac{x}{z} a\right)}{\beta(x/z)a} \frac{\sin\left(\beta \frac{y}{z} b\right)}{\beta(y/z)b} \cos(\theta) =$$

$$= 4ab\mathbf{E}_0 \frac{\sin\left(2\pi\frac{xa}{z\lambda}\right)}{\beta(x/z)a} \frac{\sin\left(2\pi\frac{yb}{z\lambda}\right)}{\beta(y/z)b} \cos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) ,$$

e risulta formato da un lobo principale, di ampiezza $\Delta x = \lambda z/(2a)$ rispetto ad x , e $\Delta y = \lambda z/(2b)$ rispetto a y , e da una serie di lobi secondari, di ampiezza via via decrescente.

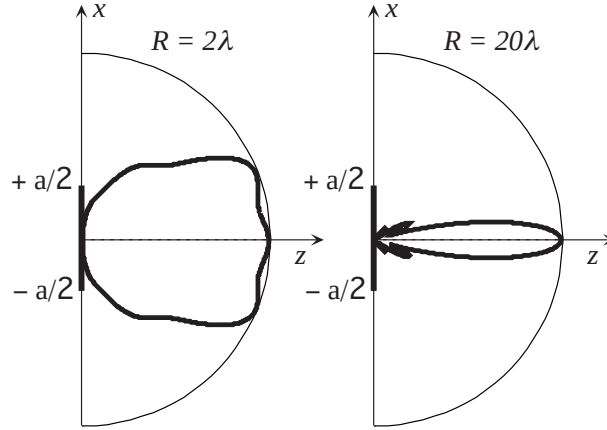


Figura 8.26: Diagramma di direttività per un'antenna ad apertura rettangolare, nel piano $y = 0$, disegnato su un cerchio di raggio $R = 2\lambda$ (sinistra), e $R = 20\lambda$ (destra).

Si osservi che, aumentando la dimensione dell'apertura e/o della frequenza, si può riscaldare il diagramma di radiazione avvicinando la posizione dei lobi verso l'origine; ciò significa che, in questo modo, è possibile confinare la radiazione in una regione di spazio più circoscritta, ma non si può invece aumentare il rapporto tra i lobi dell'antenna.

La Fig.(8.26) mostra il diagramma di radiazione che si ottiene nel piano $y = 0$ per diversi valori di $R = \sqrt{x^2 + z^2}$. La figura è stata ottenuta eseguendo l'integrazione numerica dell'equazione (8.28), ed illustra il fatto che, nelle vicinanze dell'antenna, è ben visibile l'effetto delle onde evanescenti che concorrono a formare lo spettro di onde piane del campo sull'apertura. Infatti, mentre nel diagramma a grande distanza (pannello di destra) sono ben visibili i lobi dovuti all'andamento di tipo $\sin(u)/u$ che si è trovato poco più sopra, nelle vicinanze dell'antenna (pannello di sinistra) il diagramma di radiazione ha un andamento meno netto, dovuto alla presenza di onde evanescenti che non si sono ancora

attenuate.

Vettore di radiazione per un'apertura ad apertura circolare

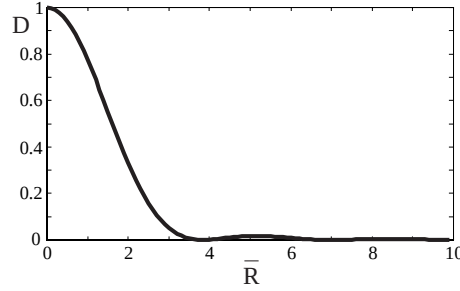


Figura 8.27: Diagramma di direttività per un'antenna ad apertura circolare.

Come è facile immaginare, la radiazione da questo tipo di antenna ad apertura ha caratteristiche simili a quella dell'antenna rettangolare; infatti, se si considera un campo con distribuzione iniziale

$$\mathbf{E}(x, y, z = 0) = \begin{cases} \mathbf{E}_0 & \text{per } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

si ottiene uno spettro (vedi Appendice 3) dato da

$$\hat{\mathbf{E}}(\kappa_x, \kappa_y) = \frac{2\pi R}{\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}} J_1 \left(R \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \right),$$

dove J_1 è la funzione di Bessel di ordine 1. Introducendo la quantità normalizzata

$$\overline{R} = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} R,$$

si ottiene così che il diagramma di direttività a grande distanza dall'apertura è proporzionale alla quantità

$$D(\theta, \varphi) \propto \left| \frac{J_1(\overline{R})}{\overline{R}} \right|^2 \cos^2(\theta),$$

il cui andamento, indicato anche con il nome di *diagramma di Airy*, è riportato in Fig.(8.27). Si osservi come esso sia sostanzialmente analogo

a quello di un'apertura rettangolare, con l'unica differenza formale rappresentata dal fatto che, mentre nel caso dell'apertura rettangolare si erano ottenute dipendenze funzionali del tipo $|\sin(u)/u|^2$, qui si ottengono andamenti espressi tramite opportune funzioni di Bessel.

Direttività dell'antenna corta

Si ricorda che la direttività è definita come segue

$$D_M = 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{h}(\theta_{\max}, \varphi_{\max})|^2}{\int_{S(r)} |\mathbf{h}(\theta, \varphi)|^2 dS} = \frac{4\pi r^2}{\int_{S(r)} |\mathbf{f}(\theta, \varphi)|^2 dS} ,$$

e poichè per un'antenna corta

$$\mathbf{h}(\theta, \varphi) = L \sin(\theta) \hat{\theta} ,$$

si ottiene

$$D_M = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin^3(\theta)} = \frac{4\pi}{8\pi/3} = \frac{3}{2} .$$

Direttività dell'antenna $\lambda/2$

Per questa antenna vale

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right]}{\sin(\theta)} \hat{\theta} .$$

Lo sviluppo in serie di Fourier di questa funzione, nell'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi$, risulta

$$\mathbf{f}(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin[(2n+1)\theta] \hat{\theta} ,$$

con

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin[(2n+1)\theta] \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right]}{\sin(\theta)} d\theta .$$

In particolare,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos\left[\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right] d\theta = 2J_0\left(\frac{\pi}{2}\right) \simeq 0.945 .$$

In prima approssimazione, ai fini della potenza irradiata si può allora approssimare $\mathbf{f} \simeq 0.945 \sin(\theta) \hat{\theta}$ e si ottiene così

$$D_M = \frac{4\pi}{8\pi/3 (0.945)^2} \simeq 1.63 \quad .$$

Si osservi che, nel passare da una antenna corta (o, addirittura, infinitesima come il dipolo corto) ad una antenna $\lambda/2$, la direttività cambia molto poco, da 1.5 a 1.63. Si ottiene così un risultato di interesse: nelle antenne filiformi la direttività è *sostanzialmente indipendente* dalla lunghezza d'onda, e quindi dalla frequenza.

Guadagno di un'antenna corta

Il guadagno di un'antenna corta è dato da

$$G = \frac{3}{2} \frac{R_{\text{irr}}}{R_i} \quad ,$$

dove, come di consueto, R_{irr} è la resistenza di radiazione, e R_i la resistenza di ingresso dell'antenna. Si osservi che, se l'antenna è corta, la resistenza di ingresso è data quasi esclusivamente dalla resistenza ohmica del conduttore che costituisce l'antenna, giacchè la resistenza di radiazione è quasi trascurabile. Inoltre, nella resistenza di ingresso occorre conteggiare anche la resistenza parassita dell'induttore che viene utilizzato per sintonizzare l'antenna di modo che, spesso, il guadagno può risultare un numero molto inferiore all'unità.

Resistenza di radiazione dell'antenna a dipolo corto

Come si è visto, la potenza attiva irradiata da un'antenna a dipolo corto è

$$P_{\text{att}} = \frac{\pi}{3} Z_0 |I_0|^2 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \quad ,$$

e quindi, per definizione, la sua resistenza di radiazione è

$$R_{\text{irr}} = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \simeq 800 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \text{ Ohm} \quad .$$

Se l'antenna è disposta in prossimità del suolo, e questo può essere riguardato come un mezzo conduttore, la presenza dell'antenna immagine fa sì che, in ogni punto dello spazio al di sopra del suolo, il campo

raddoppi e quindi la potenza quadruplichi. Ciò potrebbe indurre a pensare che anche la resistenza di radiazione quadruplichi, ma ciò è errato: infatti, nel calcolare la potenza irradiata occorre tenere presente che l'integrazione del flusso di potenza va eseguita solo sulla semisfera al di sopra del suolo, e quindi la resistenza di radiazione aumenta solo di un fattore due.

Resistenza di radiazione dell'antenna $\lambda/2$

Per il calcolo di questa resistenza di radiazione si può utilizzare l'espressione (8.40) che la lega alla direttività; si ha infatti

$$R_{\text{irr}} D_M = \pi Z_0 \frac{|\mathbf{h}(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})|^2}{\lambda^2} \quad ,$$

e poichè $D_M \simeq 1.63$, $|\mathbf{h}(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})| = \lambda/\pi$, si ottiene

$$R_{\text{irr}} \simeq \frac{Z_0}{1.63 \pi} \simeq 73.6 \text{ Ohm} \quad .$$

Impedenza di ingresso di un'antenna filiforme generica

L'impedenza di ingresso di una generica antenna è

$$Z_i = \frac{V(0)}{I(0)} \quad ,$$

e, per un'antenna filiforme di lunghezza generica vale

$$I(z) = i \frac{2\pi V_0}{\Omega z_0} \frac{\sin[\beta(L - |z|)]}{\cos(\beta L)} = I_0 \frac{\sin[\beta(L - |z|)]}{\sin(\beta L)} \quad .$$

Risulta quindi

$$Z_i = -i Z_0 \frac{\Omega}{2\pi} \cotg(\beta L) \quad .$$

Questa formula è insoddisfacente per due diversi motivi: da un lato, l'impedenza è sempre immaginaria pura, il che vorrebbe dire che l'antenna non è mai in grado di irradiare potenza attiva. Inoltre, l'impedenza diventa infinita per lunghezze di antenna pari a multipli interi della lunghezza d'onda. La causa di queste inconsistenze va ricercata nel fatto che la corrente nell'antenna che è stata utilizzata per il calcolo dell'impedenza è stata ricavata arrestando la procedura iterativa della

soluzione dell'equazione integrale di Hallen al solo primo passaggio. Risultati più soddisfacenti si ottengono con una migliore approssimazione della corrente, che può essere ottenuta con un metodo noto con il nome di *metodo di King-Middleton*. Questo porta a dimostrare che l'antenna si comporta come una sorta di circuito risonante, caratterizzato da successivi nulli di reattanza al crescere della frequenza. Il primo nullo si ha per una lunghezza (totale) d'antenna pari a circa $\lambda/2$, ed è caratterizzato da un valore relativamente basso della resistenza di ingresso, che è nell'ordine di circa un centinaio di Ohm. Il secondo nullo si ha per $2L \simeq \lambda$, ed esso è invece caratterizzato da un alto valore di resistenza di ingresso, dell'ordine di circa 2000 Ohm.

8.6 Parametri delle antenne in ricezione

Le stesse antenne che sono usate per la trasmissione del segnale elettromagnetico possono essere usate anche per la sua ricezione, e l'applicazione tipica che si considera è la seguente: un'antenna viene posta in una regione dello spazio che è sede di un campo elettromagnetico, ed "estrae" da questo della potenza che invia ad un circuito cui è connessa.

Se tutti gli elementi di cui è costituita l'apparato di ricezione sono lineari, l'antenna può quindi essere riguardata come un *bipolo attivo lineare* che, per il teorema di Thevenin, può essere a sua volta schematizzato (si veda la Fig.(8.28)) come un generatore di tensione V_0 , pari alla tensione misurabile ai capi della struttura in assenza del carico, ed un'impedenza interna Z_i , che è quella che si misura ai capi della struttura quando il generatore è cortocircuitato e che, come dimostrato nell'appendice 4 di questo capitolo, coincide con l'impedenza interna che è stata definita per le antenne in trasmissione.

Ciò che interessa valutare è la potenza che l'antenna è in grado di consegnare al carico cui è connessa e, come è immediato riconoscere, questo tipo di problema presenta delle peculiarità che lo rendono più complicato di quello relativo alla trasmissione del segnale elettromagnetico.

Per illustrare la questione, si consideri infatti la più semplice delle antenne possibili, quella costituita da un filo metallico, e si immagini che su di essa incida un campo⁷ $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$; per prima cosa è subito necessario

⁷Usualmente, si assume che il campo incidente sia costituito da un'onda piana perchè, tipicamente, la distanza che esiste tra la sorgente che lo ha generato e l'antenna

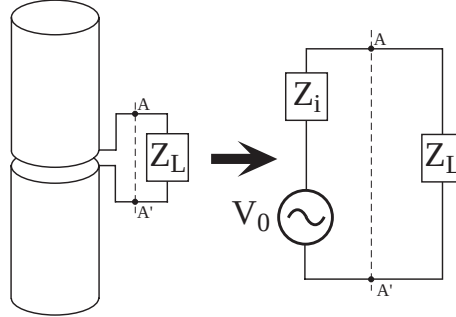


Figura 8.28: Antenna di ricezione connessa ad un carico Z_L , e suo equivalente elettrico.

specificare che questo campo è da intendersi come il campo che ci sarebbe nella zona dell'antenna *in assenza di questa*, perchè la presenza stessa dell'antenna perturba l'ambiente dal punto di vista elettromagnetico e comporta quindi una variazione del campo.

Infatti, se l'antenna è costituita, ad esempio, da un filo perfettamente conduttore, il campo deve risultare nullo all'interno dell'antenna e deve avere componente tangente nulla sulla sua superficie esterna. In generale, queste condizioni non sono assicurate dal solo campo incidente che è stato irradiato da qualche altra sorgente, e ciò significa che, localmente, deve generarsi un *campo diffratto* $\{\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s\}$ tale che il campo totale

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \quad , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s \quad ,$$

verifichi le condizioni sopra espote.

Una situazione ancora diversa si ha se, come in Fig.(8.28), l'antenna ricevente ha un piccolo *gap* nel suo centro perchè, in questo caso, la componente tangente del campo non deve più annullarsi in prossimità della regione del *gap*. Piuttosto, se questa regione è sufficientemente piccola da poter essere trattata come un "elemento concentrato" a cui applicare

di ricezione è molto maggiore della lunghezza d'onda e delle dimensioni dell'antenna stessa, per cui l'onda irradiata, che tende ad essere in realtà un'onda sferica, viene avvertita dall'antenna di ricezione come se fosse un "pezzo" di onda piana. D'altra parte, anche se questa approssimazione non fosse accettabile, vale sempre il fatto che le onde piane costituiscono un insieme completo di soluzioni delle equazioni di Maxwell, e quindi, noto il comportamento in presenza di una onda piana, attraverso la sovrapposizione degli effetti è in realtà noto il comportamento in presenza di qualsiasi campo.

concetti di elettrostatica, si deve richiedere che l'integrale di linea del campo attraverso il *gap* coincida con la tensione che viene indotta ai morsetti dell'antenna, tensione che è pari a V_0 nel caso in cui il circuito a valle dell'antenna venga disconnesso, e ad un valore diverso se questo viene lasciato connesso.

Si capisce quindi che la complicazione che si incontra nel caratterizzare il processo di ricezione di un'onda elettromagnetica deriva essenzialmente dal fatto che il campo ricevuto non dipende solo dal tipo di antenna che si sta considerando, ma anche dal carico cui essa è connessa, e da queste due entità dipende anche il campo che è inevitabilmente diffratto nel processo di ricezione.

Scopo di questo paragrafo è quello di illustrare come sia comunque possibile caratterizzare con un certo grado di generalità un'antenna nella sua funzione di antenna di ricezione e, a tal fine, si procede parallelamente a quanto si era fatto nel caso della trasmissione, distinguendo due casi:

1. il primo riguarda quelle antenne nelle quali è agevole individuare dei morsetti ai quali misurare una tensione o una corrente. In questo caso, la caratterizzazione dell'antenna di ricezione viene effettuata introducendo il concetto di *altezza efficace in ricezione*, che è definita in base alle seguenti considerazioni.

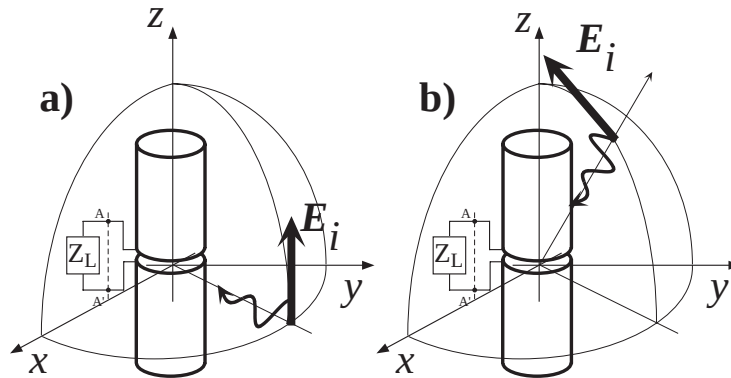


Figura 8.29: Antenna di ricezione eccitata da un'onda piana.

Per fissare le idee, si supponga inizialmente di avere a che fare con un'antenna filiforme investita da un campo elettromagnetico

polarizzato linearmente, e nel quale il campo elettrico è parallelo all'asse dell'antenna (Fig.(8.29.a)). Se l'antenna è a vuoto, ai suoi morsetti si manifesta una tensione che è lecito supporre proporzionale al campo che è presente nella zona dell'antenna quando questa non c'è, e si può allora porre

$$V_0 = -h_r E_i \quad , \quad (8.43)$$

dove h_r è una quantità che ha le dimensioni di metri, e prende il nome di *altezza efficace in ricezione*: essa è un fattore di proporzionalità che consente di passare dal valore del campo nella zona dell'antenna alla tensione che si manifesta ai suoi morsetti *quando essa è lasciata a vuoto*.

La definizione può poi estesa con facilità al caso più generale in cui il campo incidente abbia polarizzazione arbitraria (si veda la Fig.(8.29.b)). In questo caso, infatti, si suppone che l'altezza efficace sia un vettore, $\mathbf{h}_r$, funzione degli angoli θ e φ , perchè in questo modo:

- (a) attraverso la dipendenza dagli angoli si può tenere in conto il fatto che campi provenienti da diverse direzioni possono indurre diverse tensioni a vuoto;
- (b) e, attraverso la natura vettoriale di $\mathbf{h}_r$, anche del fatto che la tensione indotta da campi che provengono dalla stessa direzione potrebbe dipendere dalla loro polarizzazione.

Si pone così

$$V_0 \equiv \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r \quad . \quad (8.44)$$

Si osservi che il vettore $\mathbf{h}_r$ ha due sole componenti, allineate lungo $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$: infatti, come è stato notato più sopra, il campo che incide sull'antenna può essere approssimato con un'onda piana, che si richiude sull'antenna viaggiando lungo la direzione $-\hat{r}$. Ne segue che $\mathbf{E}_i$ non ha componenti lungo $\hat{r}$ e quindi, nella definizione di $\mathbf{h}_r$, la componente radiale di questo vettore può essere assunta pari a zero.

Si osservi inoltre che la (8.44) ricomprende la (8.43): infatti, quando $\mathbf{E}_i$ è parallelo all'antenna, l'unica componente di $\mathbf{h}_r$ che conta ai fini del calcolo è la componente allineata lungo $\hat{\theta}$ e si ha

$$\mathbf{h}_r \cdot \mathbf{E}_i = E_i h_r \hat{\theta} \cdot \hat{z} = E_i h_r (-\hat{z} \cdot \hat{z}) = -E_i h_r \quad .$$

Una volta che $\mathbf{h}_r$ è stata determinata, il problema che ci si era posti in partenza, quello della valutazione della potenza trasferita dall'antenna al suo carico, può essere risolto con facilità. Infatti, la tensione che è presente ai capi del carico, e la corrente che lo attraversa, sono rispettivamente pari a (si veda la Fig.(8.28))

$$V_L = V_{AA'} = \frac{Z_L}{Z_i + Z_L} V_0 = \frac{Z_L}{Z_i + Z_L} \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r \quad ,$$

$$I_L = \frac{V_L}{Z_L} = \frac{\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r}{Z_i + Z_L} \quad ,$$

e la potenza trasferita è quindi

$$P + iQ = \frac{V_L (I_L)^*}{2} = \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{2|Z_i + Z_L|^2} Z_L \quad .$$

2. Quando invece non si vuole o non si può caratterizzare l'antenna in base a tensioni e correnti ai morsetti, si ricorre al concetto di *area efficace*. Per illustrarlo, si consideri un'antenna adattata per il massimo trasferimento di potenza al carico (e quindi un'antenna chiusa su un carico che è il complesso coniugato dell'impedenza interna), e si supponga che sull'antenna incida un'onda localmente piana con densità di potenza

$$W_i = \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2Z_0} \quad .$$

Questa densità di potenza è ricevuta dall'antenna e trasferita al carico, dove si dissipa una potenza attiva P_{att} . L'area efficace è definita come il fattore di proporzionalità che esiste, in *condizioni di adattamento* tra la potenza consegnata al carico e la densità di potenza che esiste nella regione dell'antenna

$$A_{\text{eff}} = \frac{P_{\text{att}}}{W_i} = \frac{P_{\text{att}}}{|\mathbf{E}_i|^2/2Z_0} \quad .$$

Essa è una quantità reale e scalare che dipende dalla direzione da cui proviene il campo elettromagnetico incidente perchè è questo che, in ultima analisi, determina la potenza attiva P_{att} . Inoltre,

essa non è indipendente dall'altezza efficace in ricezione, giacchè si può scrivere

$$P_{\text{att}} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|Z_i^* + Z_i|^2} \text{Re}\{Z_i\} = \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{8R_i} \equiv \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2Z_0} A_{\text{eff}} \quad .$$

Ne segue

$$A_{\text{eff}} = \frac{Z_0}{4R_i} \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|\mathbf{E}_i|^2} = \frac{Z_0}{4R_i} |\mathbf{h}_r|^2 \chi \quad , \quad (8.45)$$

dove si è definito il parametro

$$\chi = \frac{|\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{h}_r|^2}{|\mathbf{E}_i|^2 |\mathbf{h}_r|^2} \quad ,$$

che prende il nome di *fattore di depolarizzazione*. Come si vede, esso dipende dal prodotto interno tra il campo elettrico e l'altezza efficace in ricezione e quindi dalla loro mutua orientazione, ed è un numero reale compreso tra zero e uno. Il valore massimo viene assunto quando è verificata la cosiddetta condizione di *adattamento in polarizzazione*, e cioè quando $\mathbf{E}_i \parallel \mathbf{h}_r^*$.

Come si vede, dunque, la definizione di area efficace che abbiamo dato è, in certo modo, ambigua, giacchè essa verrebbe a dipendere non solo dalle caratteristiche dell'antenna, ma anche dalla polarizzazione del campo. Al fine di poter dare una definizione non ambigua, si conviene allora di definire l'area efficace come il fattore di proporzionalità che esiste tra la potenza attiva consegnata al carico e la densità di potenza presente nella zona dell'antenna (e valutata in assenza di questa), quando

- (a) l'antenna è adattata in potenza;
- (b) l'antenna è orientata in maniera ottimale.

Con questa definizione, la potenza attiva consegnata ad un generico carico Z_L da un campo con polarizzazione arbitraria vale

$$P_{\text{att}} = \frac{|\mathbf{E}_i|^2}{2Z_0} A_{\text{eff}} \chi \xi \quad ,$$

dove χ è il fattore di depolarizzazione definito in precedenza, e

$$\xi = 4 \frac{R_i R_L}{|Z_i + Z_L|^2} \quad ,$$

prende il nome di *fattore di disadattamento* (in potenza).

8.6.1 Esempi di calcolo di aree ed altezze efficaci in ricezione

Altezza efficace in ricezione di un'antenna a dipolo elementare

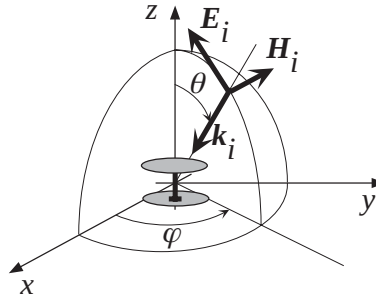


Figura 8.30: Dipolo elementare in ricezione.

Per caratterizzare l'altezza efficace di un dipolo elementare è innanzi tutto importante stabilire come sia possibile realizzare il dipolo, e cioè una struttura filiforme nella quale la corrente sia costante. A tal fine si ricorda un risultato che si era trovato quando si era introdotta l'antenna a *L* rovesciata, e cioè il fatto che una realizzazione pratica del dipolo può essere ottenuta disponendo un filo tra due piatti metallici che si comportano come serbatoi di carica; in questa struttura, infatti, le correnti radiali sui piatti tendono a cancellarsi a vicenda, e l'antenna ha una altezza efficace (in trasmissione) pari a

$$\mathbf{h}_t = L \sin(\theta) \hat{\theta} \quad .$$

Per ciò che concerne la ricezione, si può considerare una struttura come quella appena descritta, e supporre, almeno inizialmente, che essa sia investita da un campo elettrico polarizzato rettilineamente e parallelo all'asse del filo. Il dipolo è *elementare* se le dimensioni di tutti i componenti (piatti e filo metallico) sono molto inferiori alla lunghezza d'onda e, quando questo accade, è lecito applicare concetti di tipo statico, e parlare di differenza di potenziale tra i due piatti, che risulta

$$V = -E_i L \quad .$$

L'altezza efficace in ricezione è dunque pari a L .

Se il campo incidente non è parallelo al conduttore, ma forma con questo un angolo θ , la differenza di potenziale vale

$$-\int_{\text{conduttore}} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{z} \hat{\mathbf{z}} \simeq -L \mathbf{E}_i \cdot \hat{\mathbf{z}} = -L \mathbf{E}_i \cdot [-\sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{r}}] = L \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad ,$$

dove si è usato il fatto che il campo incidente si propaga lungo la direzione $-\hat{\mathbf{r}}$ e quindi, essendo formato da un'onda piana uniforme, non ha componente lungo $\hat{\mathbf{r}}$. Per il dipolo corto, la lunghezza efficace in ricezione coincide dunque con quella in trasmissione.

Altezza efficace in ricezione di un'antenna a spira di corrente

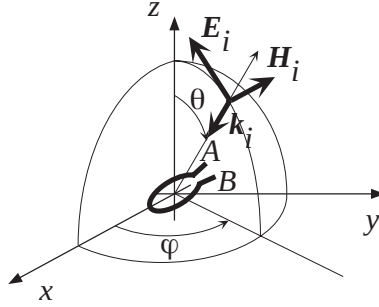


Figura 8.31: Spira elementare in ricezione.

In trasmissione, l'altezza efficace della spira vale (si veda l'espressione (8.42))

$$\mathbf{h}_t = -i\beta\pi R^2 \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad .$$

Per ciò che concerne il calcolo in ricezione, va notato innanzi tutto che se la spira è *elementare* (e cioè $R \rightarrow 0$), ed aperta, la corrente indotta su di essa è nulla, e pertanto il campo magnetico incidente non è deformato in modo apprezzabile. La tensione indotta ai capi della spira può essere calcolata applicando la legge di Neumann–Lentz, che porge

$$\begin{aligned} \int_{A \rightarrow B} \mathbf{E}_i \cdot d\bar{\ell} &= -i\omega\mu \int_{S(A \rightarrow B)} \mathbf{H}_i \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = -\frac{i\omega\mu}{Z_0} \int_S dS (-\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_i) \cdot \hat{\mathbf{z}} = \\ &= -\frac{i\omega\mu}{Z_0} \int_S (\mathbf{E}_i \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{z}} dS \quad (\text{supponendo la spira piccola}) \\ &= -\frac{i\omega\mu}{Z_0} \pi R^2 (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{E}_i = i\beta\pi R^2 \sin(\theta) \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{E}_i \quad , \end{aligned}$$

dove si è usato $\hat{z} = -\sin(\theta) \hat{\theta} + \cos(\theta) \hat{\phi}$.

Ora, poichè $V_0 = V_B - V_A$, si ha

$$V_0 = -i\beta\pi R^2 \sin(\theta) \hat{\phi} \cdot \mathbf{E}_i \quad ,$$

e quindi

$$\mathbf{h}_t \equiv \mathbf{h}_r = -i\beta\pi R^2 \sin(\theta) \hat{\phi} \quad .$$

Anche per l'antenna a spira di corrente, quindi, l'altezza efficace in ricezione coincide con quella in trasmissione; questo fatto, insieme a quello analogo che si era riscontrato nel caso dell'antenna a dipolo corto non è casuale: in realta, come è dimostrato nell'appendice 5 di questo capitolo, l'uguaglianza tra l'altezza efficace in ricezione ed in trasmissione è una proprietà generale che *vale per qualsiasi antenna*.

Area efficace di un'antenna a dipolo elementare

Come si è visto, in condizioni di adattamento in polarizzazione (cosa che è necessaria per definire in maniera non ambigua l'area efficace), vale la seguente relazione

$$A_{\text{eff}} = \frac{Z_0}{4R_i} |\mathbf{h}_{r,\text{max}}|^2 \quad .$$

Nel caso dell'antenna a dipolo elementare, si ha

$$R_i = \frac{2\pi}{3} Z_0 \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \quad , \quad |\mathbf{h}_{r,\text{max}}|^2 = (\Delta z)^2 \quad ,$$

e dunque

$$A_{\text{eff}} = \frac{3\lambda^2}{8\pi} \quad .$$

Si osservi che questo risultato necessita di qualche commento. Infatti, almeno apparentemente, esso sembrerebbe indicare che abbassando la frequenza l'area efficace cresce monotonicamente, e diverge per $f \rightarrow 0$. Nella realtà, il comportamento in ricezione di un dipolo corto non è certamente questo, ed il motivo è da ricercarsi nel fatto che la definizione di area efficace implica la condizione di adattamento in potenza, ed un dipolo elementare presenta una componente capacitiva dell'impedenza di ingresso che, si può dimostrare, scala come f^{-2} . Per ottenere l'adattamento, è quindi necessario inserire ai capi del dipolo un'induttanza $L \propto f^{-2}$ e questa introduce inevitabilmente una resistenza parassita $R_{\text{par}} \propto f^{-2}$ che, di fatto, riduce di molto l'efficienza di ricezione dell'antenna. Si

ritornerà più avanti su questo punto, calcolando con esattezza il valore di area efficace che può essere ottenuto quando si tiene in considerazione la resistenza parassita di ingresso.

8.7 Le relazioni tra i parametri di trasmissione e ricezione e la formula di Friis

Come è mostrato nell'appendice 5 di questo capitolo, per effetto del teorema di reciprocità il comportamento di un'antenna in ricezione non è indipendente da quello in trasmissione, tanto che l'altezza efficace in ricezione coincide con quella in trasmissione. In questo paragrafo, questa proprietà viene usata per ricavare delle altre espressioni che pongono in relazione tra loro i parametri delle antenne in trasmissione ed in ricezione e, in particolare, viene mostrato che

1. per un'antenna priva di perdite, vale

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_M \quad , \quad (8.46)$$

2. per un'antenna con perdite,

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad . \quad (8.47)$$

Vediamo nel dettaglio la dimostrazione di queste due relazioni.

1. *Antenna priva di perdite.* In questo caso, dalla (8.40) si ha

$$D_M = \frac{\pi Z_0}{\lambda^2 R_{\text{irr}}} |\mathbf{h}_t(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})|^2 \quad ,$$

e, dalla (8.45), anche

$$A_{\text{eff}} = \frac{Z_0}{4R_i} |\mathbf{h}_r(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})|^2 \quad ,$$

in quanto la definizione di area efficace prevede che vi sia adattamento in polarizzazione, e quindi che $\chi = 1$. Ora, poichè $\mathbf{h}_r \equiv \mathbf{h}_t$, e poichè in assenza di perdite la resistenza di radiazione R_{irr} coincide con la resistenza di ingresso R_i , si ottiene subito

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_M \quad ,$$

che è la relazione che si intendeva provare.

2. *Antenna con perdite.* Per ciò che concerne la relazione che vale in questo caso, si può considerare il comportamento di due antenne filiformi, disposte parallelamente, orientate in modo ottimale l'una rispetto all'altra, ed entrambe adattate, ovvero chiuse su un carico con impedenza $Z_{L1,2} = Z_{i1,2}^*$.

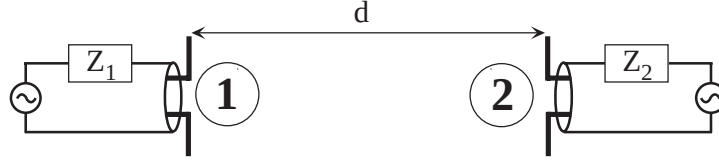


Figura 8.32: Disposizione di due antenne in un radiocollegamento.

In un primo momento si supponga che l'antenna numero "1" stia trasmettendo, e la numero "2" ricevendo. Per definizione di area efficace (dell'antenna "2"), la potenza che questa antenna riceve può essere scritta come

$$P_{R2} = A_{\text{eff},2} W_{1 \rightarrow 2} \quad ,$$

dove $W_{1 \rightarrow 2}$ è la densità di potenza dovuta al campo prodotto dall'antenna "1" e presente nella zona dell'antenna "2" quando questa non c'è. Essa è legata alla potenza $P_{\text{alim},1}$ con cui viene alimentata l'antenna "1" dalla relazione

$$W_{1 \rightarrow 2} = G_1 \frac{P_{\text{alim},1}}{4\pi d^2} \quad ,$$

dove G_1 è il guadagno in potenza dell'antenna "1", e d la distanza tra le due antenne. In definitiva, quindi

$$P_{R2} = P_{\text{alim},1} \frac{A_{\text{eff},2} G_1}{4\pi d^2} \quad . \quad (8.48)$$

In maniera analoga, se l'antenna "2" è l'antenna in trasmissione, e la "1" quella in ricezione, si ha anche

$$P_{R1} = P_{\text{alim},2} \frac{A_{\text{eff},1} G_2}{4\pi d^2} \quad .$$

Ne segue che

$$\frac{G_1}{A_{\text{eff},1}} = \frac{G_1}{A_{\text{eff},1}} \frac{P_{R2} P_{\text{alim},2}}{P_{R1} P_{\text{alim},1}} \quad . \quad (8.49)$$

Questa relazione può ora essere utilizzata per provare la (8.47). A tal fine si mostrerà innanzi tutto che risulta

$$\frac{P_{R2} P_{\text{alim},2}}{P_{R1} P_{\text{alim},1}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{G_1}{A_{\text{eff},1}} = \frac{G_2}{A_{\text{eff},2}} \quad ,$$

si sarà così dimostrato che il rapporto tra il guadagno e l'area efficace è una costante uguale per tutte le antenne, e l'unica cosa rimasta da provare sarà solo il fatto che questo rapporto risulta proprio pari a $(\lambda^2/4\pi)$. Si sceglierà allora l'antenna che più rende semplici i calcoli, ad esempio l'antenna a dipolo corto, e si mostrerà che questo fatto è vero.

Si cominci dunque con l'analizzare il rapporto di potenze che compare al secondo membro della (8.49). Usando la definizione di lunghezza efficace in ricezione, ed il fatto che le antenne sono disposte in maniera ottimale l'una rispetto all'altra, ed entrambe chiuse su un carico adattato, è possibile riscrivere le potenze ricevute come segue

$$P_{R1} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_{2 \rightarrow 1}|^2 |\mathbf{h}_{r1}|^2}{4 R_{i1}} \quad , \quad P_{R2} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{E}_{1 \rightarrow 2}|^2 |\mathbf{h}_{r2}|^2}{4 R_{i2}} \quad ,$$

dove $\mathbf{E}_{1 \rightarrow 2}$ è il campo prodotto dall'antenna "1" e presente nella zona dell'antenna "2", e analoga definizione vale per $\mathbf{E}_{2 \rightarrow 1}$. Inoltre, R_{i1} e R_{i2} sono, rispettivamente, le resistenze di ingresso dell'antenna "1" e della "2".

Le potenze di alimentazione possono essere invece riscritte come

$$P_{\text{alim},1} = \frac{1}{2} R_{i1} |I_1|^2 \quad , \quad P_{\text{alim},2} = \frac{1}{2} R_{i2} |I_2|^2 \quad ,$$

ed il rapporto di potenze in oggetto risulta quindi pari a

$$\frac{P_{R2} P_{\text{alim},2}}{P_{R1} P_{\text{alim},1}} = \frac{|\mathbf{E}_{1 \rightarrow 2}|^2 |\mathbf{h}_{r2}|^2 |I_2|^2}{|\mathbf{E}_{2 \rightarrow 1}|^2 |\mathbf{h}_{r1}|^2 |I_1|^2} \quad .$$

Si usi ora la definizione di altezza efficace in trasmissione: essa permette di scrivere

$$\frac{|\mathbf{E}_{1 \rightarrow 2}|^2}{|\mathbf{E}_{2 \rightarrow 1}|^2} = \frac{|\mathbf{h}_{t1} I_1|^2}{|\mathbf{h}_{t2} I_2|^2} \quad ,$$

di modo che si ottiene

$$\frac{P_{R2} P_{\text{alim},2}}{P_{R1} P_{\text{alim},1}} = \frac{|\mathbf{h}_{t1}|^2 |\mathbf{h}_{r2}|^2}{|\mathbf{h}_{r1}|^2 |\mathbf{h}_{t2}|^2} = 1 \quad ,$$

dal momento che l'altezza efficace in trasmissione coincide con quella in ricezione per qualsiasi antenna.

Dunque, dalla (8.49) segue

$$\frac{G_1}{A_{\text{eff},1}} = \frac{G_2}{A_{\text{eff},2}} \quad ,$$

e cioè, come anticipato più sopra, il rapporto tra guadagno ed area efficace è indipendente dal tipo di antenna considerata. Il suo valore può essere calcolato facendo riferimento ad un'antenna qualsiasi, ad esempio il dipolo corto, per il quale vale

$$A_{\text{eff}} = Z_0 \frac{(\Delta z)^2}{4R_i} \quad ,$$

mentre il guadagno può essere ricavato a partire dalla relazione

$$\begin{aligned} G &= D_M \frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{alim}}} = \frac{P_0}{P_{\text{alim}}} = \frac{|\mathbf{E}_\infty(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})|^2}{2Z_0} \frac{4\pi d^2}{P_{\text{alim}}} = \\ &= \frac{4\pi d^2}{2Z_0} \left| Z_0 \frac{\mathbf{h}_t(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}}) I_0}{2\lambda r} \right|^2 \frac{2}{R_i |I_0|^2} = \\ &= \frac{\pi Z_0}{R_i \lambda^2} |\mathbf{h}_t(\theta_{\text{max}}, \varphi_{\text{max}})|^2 = \pi \frac{Z_0}{R_i} \left(\frac{\Delta z}{\lambda} \right)^2 \quad . \end{aligned}$$

Dal confronto tra queste due espressioni discende quindi subito

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \quad ,$$

che è la relazione che si intendeva provare.

Area efficace e guadagno di un'antenna corta reale

Si ritorna ora su quanto era stato osservato alla fine del precedente paragrafo, e cioè sul fatto che se si valuta l'area efficace di un'antenna corta trascurando la resistenza parassita di ingresso, si trova un valore che diverge all'infinito al decrescere della frequenza. Ciò che si mostra

ora è che, utilizzando la (8.47), si può invece ottenere un valore finito che è fisicamente sensato.

A tal fine, si indichi con R_Ω la resistenza parassita, e con R_{irr} quella di radiazione. Il guadagno è legato alla direttività dalla relazione

$$G = D \frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{alim}}} = D \frac{R_{\text{irr}}}{R_\Omega + R_{\text{irr}}} = \frac{3}{2} \frac{1}{1 + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 \frac{R_\Omega}{Z_0}} \quad ,$$

e quindi, anche se $R_\Omega \ll Z_0$, a frequenza sufficientemente bassa esso può essere approssimato come segue

$$G \simeq \frac{3}{2} \frac{2\pi}{3} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \frac{Z_0}{R_\Omega} = \pi \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \frac{Z_0}{R_\Omega} \quad .$$

Dalla (8.47) segue allora

$$A_{\text{eff}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G \simeq \frac{1}{4} \frac{Z_0}{R_\Omega} L^2 \quad ,$$

e dunque l'area efficace non diverge più all'infinito.

Area efficace e guadagno di un'antenna ad apertura

Si può dimostrare che se si considera un'antenna ad apertura circolare di raggio R , e si calcola la sua direttività, si ottiene il seguente risultato

$$D = \frac{4\pi}{\lambda^2} \left(\pi R^2\right) \quad ,$$

da cui segue

$$A_{\text{eff}} = \pi R^2 \equiv A_{\text{geom}} \quad .$$

Quindi, in un'antenna ad apertura l'area efficace coincide con l'area geometrica, e questo risultato pone in luce una differenza importante tra le antenne ad apertura e le antenne filiformi: nelle antenne filiformi la direttività (o il guadagno) è sostanzialmente indipendente dalla frequenza, mentre nelle antenne ad apertura è l'area efficace ad essere tale: dalle (8.46,8.47) segue quindi che il *guadagno* di un'antenna ad apertura *cresce con il quadrato della frequenza*.

8.7.1 La formula di Friis

La (8.47) può essere utilizzata anche per ottenere un'importante formula, detta *formula di Friis*, che esprime la relazione che intercorre tra la potenza trasmessa e la potenza ricevuta da una coppia di antenne di un radiocollegamento. Il punto di partenza è l'equazione (8.48), che dà la potenza ricevuta dall'antenna di ricezione in funzione della sua area efficace, della potenza di alimentazione dell'antenna di trasmissione, e del guadagno di quest'ultima. La relazione si scrive

$$P_{RX} = P_{\text{alim,TX}} \frac{A_{\text{eff,RX}} G_{TX}}{4\pi d^2} .$$

Utilizzando la (8.47) si ha dunque anche

$$P_{RX} = G_{RX} \left(G_{TX} P_{\text{alim,TX}} \right) \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 , \quad (8.50)$$

che è, per l'appunto, la formula di Friis. Si noti che, per come è stata ricavata, essa vale *solo* se le due antenne del radiocollegamento sono l'una nel campo lontano dell'altra, e se il mezzo interposto tra di esse è *omogeneo*, e cioè privo di qualsiasi ostacolo, ed anche *privo di perdite*.

Il fattore $(\lambda/4\pi d)^2$ che compare nella formula è detto *attenuazione di spazio libero* e questa dicitura non deve trarre in inganno: infatti, esso è sì un fattore che mostra come la potenza ricevuta diminuisca all'aumentare della lunghezza d del radiocollegamento, ma questa diminuzione non deve essere imputata a fenomeni dissipativi, giacchè il mezzo tra le antenne è, per ipotesi, privo di perdite. La ragione della diminuzione sta semplicemente nel fatto che qualsiasi antenna emette delle onde che, nella regione di campo lontano, tendono ad essere sferiche, e solo una porzione di queste onde raggiunge l'antenna di ricezione.

Il termine $(G_{TX} P_{\text{alim,TX}})$ è stato invece posto in evidenza perchè esso racchiude il ruolo dell'antenna di trasmissione ai fini della potenza ricevuta. Come si vede, questo termine è dato dalla prodotto della potenza di alimentazione per il guadagno dell'antenna di trasmissione, ed esso mostra come, dal punto di vista del ricevitore, sia impossibile discernere tra il campo irradiato da un'antenna a basso guadagno alimentata con alta potenza, o da una ad alto guadagno e bassa potenza. Per questa ragione, questo termine viene indicato con la dicitura di *effective radiated power* (ERP, potenza irradiata efficace), ed esso viene comunemente

usato come parametro di riferimento per specificare le caratteristiche che sono richieste al trasmettitore di un radiocollegamento.

Si osservi che la dipendenza dalla frequenza della potenza ricevuta cambia a seconda che il radiocollegamento sia effettuato tramite antenne ad apertura o filiformi. Infatti, nelle antenne filiformi il guadagno è indipendente dalla frequenza e quindi, a parità di potenza trasmessa, la potenza ricevuta è proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda. Viceversa, nel caso delle antenne ad apertura, il guadagno è proporzionale a λ^{-2} e quindi, per effetto dei due guadagni che compaiono nella (8.50), e dell'attenuazione di spazio libero, a parità di potenza trasmessa, la potenza ricevuta è *inversamente* proporzionale al quadrato della lunghezza d'onda:

Collegamento tra	G_{RX}	G_{TX}	P_{RX}/P_{TX}
Antenne filiformi	indip. da λ	indip. da λ	$\propto \lambda^2$
Antenne ad apertura	$\propto \lambda^{-2}$	$\propto \lambda^{-2}$	$\propto \lambda^{-2}$

A titolo di considerazione finale, si osservi anche che, come è stato detto, la formula di Friis dà la relazione fondamentale per ogni collegamento radio, ma se si vuole avere una descrizione più accurata dello stesso è necessario tenere conto che un'antenna di ricezione riceve *inevitabilmente* anche del rumore sovrapposto al segnale utile, tanto che la specifica che viene chiesta più normalmente all'atto della realizzazione di un collegamento è il *rapporto segnale disturbo* che il collegamento stesso è in grado di assicurare.

Occorre dunque fornire anche una descrizione statistica del segnale e, usualmente ed *indipendentemente da qual'è la vera sorgente del rumore*, si conviene di caratterizzare questo nella forma di un *processo aleatorio gaussiano bianco*, con potenza media

$$\sigma_\eta^2 = k T_a B \quad , \quad (8.51)$$

dove $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$ è la costante di Boltzmann, B la banda del ricevitore, e T_a la *temperatura di rumore*, che è definita dalla (8.51) e che viene valutata misurando sperimentalmente la σ_η^2 . Un valore tipico nei radiocollegamenti terrestri è quello di $T_a \simeq 300^\circ\text{K}$, cioè la temperatura di rumore è circa coincidente con la temperatura dell'ambiente, e questo avviene principalmente perchè in questi collegamenti i lobi delle antenne sono paralleli al suolo, ed il rumore captato è quello di radiazione di corpo nero emesso dalla Terra.

Se invece le antenne sono puntate verso il cielo, come accade, ad esempio, in un collegamento verso un satellite, la temperatura di rumore scende sensibilmente anche se, come è stato dimostrato dai premi Nobel Penzias e Wilson, essa non può comunque scendere al di sotto dei 4°K, che è la temperatura di corpo nero dell'universo.

8.7.2 La formula del radar

Si intende ricavare la relazione che esiste tra la potenza trasmessa e la potenza ricevuta da un radar (*radio detection and imaging*) che “illumina” un dato oggetto.

A tal fine, si consideri un'antenna trasmittente e, a distanza r da essa, un oggetto che sia in grado di diffrangere le onde elettromagnetiche che incidono su di esso. Se l'antenna di trasmissione ha un guadagno G_{TX} , e viene alimentata con una potenza P_{TX} , l'oggetto viene raggiunto da una densità di potenza che vale

$$W_{\text{inc}} = \frac{P_{\text{TX}} G_{\text{TX}}}{4\pi r^2} \quad .$$

Il modo in cui l'oggetto reirradia il campo che lo colpisce può essere caratterizzato introducendo la sua *sezione radar*: si tratta di una grandezza che ha le dimensioni di un'area, e che esprime il rapporto tra la potenza reirradiata e la densità di potenza della radiazione incidente, nel seguente modo.

Quando l'oggetto viene investito dalla radiazione elettromagnetica incidente, esso reirradia un campo $\mathbf{E}_R$ cui è associata, a grande distanza, la densità di potenza

$$W_r(\theta_R, \varphi_R) = \frac{|\mathbf{E}(\theta_R, \varphi_R)|^2}{2Z_0} \quad .$$

Si sono scritte in maniera esplicita le coordinate $\{\theta_R, \varphi_R\}$ di un sistema sferico centrato nell'oggetto diffrangente per porre in evidenza come la forma stessa dell'oggetto che reirradia il campo possa far sì che la diffrazione sia fortemente anisotropa, e cioè tale che la sua intensità risulti significativamente differente a seconda della direzione in cui essa viene misurata.

Si definisce allora *sezione radar* il rapporto

$$\sigma(\theta_R, \varphi_R, \theta_{\text{inc}}, \varphi_{\text{inc}}) = \frac{4\pi r^2 |\mathbf{E}_R(\theta_R, \varphi_R)|^2 / 2Z_0}{W_{\text{inc}}(\theta_{\text{inc}}, \varphi_{\text{inc}})} \quad ,$$

dove θ_{inc} e φ_{inc} sono le coordinate angolari da cui proviene il campo di illuminazione, che possono non coincidere con quelle lungo le quali viene misurato il campo reirradiato. Se accade che $\theta_R \equiv \theta_{\text{inc}}$ e $\varphi_R \equiv \varphi_{\text{inc}}$, e cioè se le antenne di trasmissione e ricezione del radar coincidono, la sezione radar viene detta *monostatica*, altrimenti *bistatica*.

La densità di potenza che è reirradiata dall'oggetto e che raggiunge l'antenna ricevente è dunque

$$W_{\text{RX}} = \frac{W_{\text{inc}} \sigma(\theta_R, \varphi_R, \theta_{\text{inc}}, \varphi_{\text{inc}})}{4\pi r^2} = \frac{P_{\text{TX}} G_{\text{TX}}}{(4\pi r^2)^2} \sigma \quad ,$$

e quindi, come si osserva, essa dipende dalla *quarta potenza* della distanza tra l'antenna e l'oggetto illuminato dal radar.

8.8 Schiere di antenne

La necessità di adoperare schiere di antenne deriva dal fatto che le caratteristiche di irradiazione delle singole antenne (sia filiformi, sia ad apertura) sono poco flessibili: ad esempio, nel caso delle antenne filiformi, una volta che è assegnata la lunghezza dell'antenna, la distribuzione di corrente su di essa è fissata, e questa genera un campo nel quale non è possibile controllare nè la posizione nè l'ampiezza dei lobi.

Per ottenere un sistema radiante che generi un campo confacente a esigenze fissate a priori sarebbe dunque necessario poter intervenire sulla corrente di alimentazione, e poichè questo non si può fare sempre sulla singola antenna⁸, si realizzano *schiere* nelle quali le antenne sono

⁸Questa affermazione può essere dimostrata in modo più formale ricorrendo alla definizione di lunghezza efficace in trasmissione:

$$h(\theta) = \int_{-L}^{+L} I(\xi) e^{i\beta\xi \cos(\theta)} d\xi \quad .$$

Posto $u = \beta \cos(\theta)$ e definito $I(\xi)$ al di fuori dell'intervallo $([-L, L])$ attraverso la posizione $I(\xi) \equiv 0 \quad \forall |\xi| \geq L$, si ha infatti

$$h(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi) e^{iu\xi} d\xi \quad ,$$

e cioè l'altezza efficace in trasmissione, che è il parametro che descrive come un campo irradiato viene distribuito nello spazio, è pari alla trasformata di Fourier della corrente sull'antenna.

Erroneamente, questo risultato potrebbe far pensare che questo provi già l'affermazione che si voleva formalizzare, e cioè il fatto che comunque sia assegnato un

alimentate con correnti indipendenti l'una dall'altra.

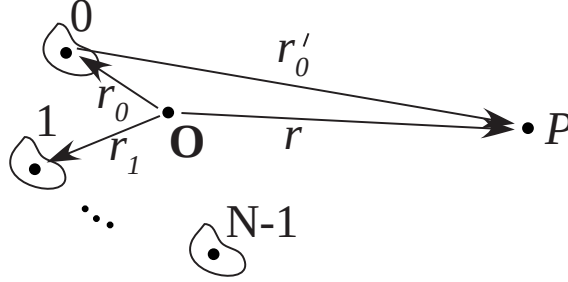


Figura 8.33: Disposizione delle antenne in una schiera generica.

Si consideri dunque un sistema di N antenne, alimentate nei punti $\mathbf{r}_n$, $n = 1 \dots N$. Ognuna delle antenne è caratterizzata dalla sua altezza efficace $\mathbf{h}_n$ che, in questo contesto, viene anche indicata con il termine di *fattore di antenna* per porre in evidenza il fatto che, a rigore, $\mathbf{h}_n$ non coincide con l'altezza efficace di cui si è discusso nei paragrafi precedenti, giacchè le altre antenne della schiera agiscono come fattore di perturbazione. Tuttavia, spesso è lecito supporre che questa perturbazione sia piccola, e far quindi coincidere il fattore di antenna con l'altezza efficace.

Il campo elettrico totale irradiato a grande distanza dalla schiera di antenne è allora pari a

$$\mathbf{E}_{\text{Sch.}} = \sum_{n=0}^{N-1} i Z_0 \frac{e^{-i\beta r'_n}}{2\lambda r'_n} I_n \mathbf{h}_n \quad , \quad (8.52)$$

diagramma di radiazione, esiste sempre un modo per generarlo, a patto che si possa agire in modo opportuno sulla corrente di alimentazione dell'antenna. A rigore, invece, non è ancora lecito trarre questa conclusione: infatti, le distribuzioni di campo fisicamente sensate sono definite solo per valori di u compresi nell'intervallo $([-\beta, \beta])$, e non già per $u \in \mathbb{R}$ come nella trasformata di Fourier comunemente definita; inoltre, è anche necessario che la restrizione di $h(u)$ all'intervallo $-\beta \leq u \leq \beta$ sia ottenibile trasformando secondo Fourier una funzione $I(\cdot)$ a supporto compatto. Come si vede quindi, esistono delle notevoli limitazioni sulle scelte possibili per $h(u)$, ma si può comunque dimostrare che, essendo gli esponenziali complessi una base di funzioni dense in $\mathcal{L}^2$, almeno in linea teorica è sempre possibile realizzare una qualsivoglia $h \in \mathcal{L}^2([-\beta, \beta])$ attraverso funzioni a supporto compatto. In pratica, però, può accadere che ne risultino delle distribuzioni di corrente talmente complicate da essere tecnicamente irrealizzabili, di modo che non è possibile avere sempre un'antenna che irradia secondo il diagramma desiderato.

dove r'_n è la distanza tra l' n -esima ed il punto di osservazione P . Attraverso il teorema di Carnot, si esprima ora la distanza r'_n come segue

$$(r'_n)^2 = r^2 + r_n^2 - 2rr_n \cos(\psi_n) \quad ,$$

dove ψ_n è l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{r}_n$ e $\mathbf{r}$ e si osservi che, se, come nelle ipotesi, il punto di osservazione è a grande distanza, e cioè se $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_n|$, si ha anche

$$r'_n \simeq r - r_n \cos(\psi) = r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n \quad .$$

Si sostituisca ora questo valore nella (8.52), ponendo attenzione al fatto che esso compare in due diversi punti, al denominatore della frazione, dove ha un ruolo che agisce sull'ampiezza del campo irradiato dall' n -esima antenna, ed all'esponente del termine al numeratore, dove invece agisce sulla fase dello stesso campo.

Come si era già visto quando si era affrontato lo studio dell'irradiazione da parte di un'antenna filiforme di lunghezza generica, è bene usare due diversi ordini di approssimazione in questi due punti, e scrivere quindi il campo totale irradiato come segue

$$\mathbf{E}_{\text{Sch.}} = i Z_0 \frac{e^{-i\beta r}}{2\lambda r} \sum_{i=0}^{N-1} I_n \mathbf{h}_n e^{i\beta \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n} \quad . \quad (8.53)$$

Questa formula è di carattere molto generale, dal momento che essa esprime il campo irradiato da un generico insieme di N antenne, che possono essere anche tutte diverse tra di loro, e posizionate in punti dello spazio del tutto arbitrari.

Una notevole semplificazione si ottiene se si considera una schiera nella quale le antenne sono tra loro *tutte uguali*, ed allineate lungo una retta. In tal caso, infatti, il fattore di antenna $\mathbf{h}_n$ è lo stesso per tutte le antenne, e può essere portato al di fuori della sommatoria; inoltre, si può scrivere $I_n = \alpha_n I_0$, dove I_0 è una corrente arbitraria, ed α_n un numero complesso che tiene conto del rapporto (in ampiezza e fase) tra la corrente sull' n -esima antenna e la corrente I_0 . Infine, il prodotto interno $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n$ è, anch'esso, uguale per tutte le antenne, e pari a

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_n = r_n \cos(\psi) \quad ,$$

con ψ l'angolo tra la direzione di allineamento e la direzione lungo cui giace il punto di osservazione del campo (si veda la Fig.(8.34)).

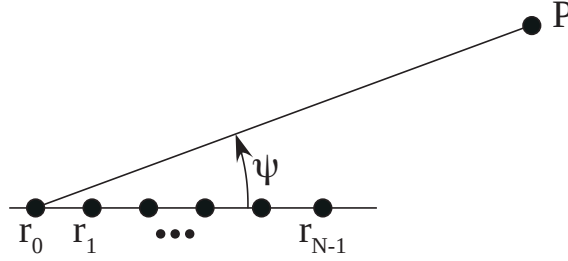


Figura 8.34: Allineamento di antenne lungo una retta.

La (8.53) si scrive allora come

$$\mathbf{E}_{\text{Sch.}} = \mathbf{E}_0 F(\theta, \varphi) \quad , \quad \begin{cases} \mathbf{E}_0 = i Z_0 \frac{e^{-i\beta r}}{2\lambda r} I_0 \mathbf{h}_0 \\ F(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n e^{i\beta r_n \cos(\psi)} \end{cases} ,$$

dove $\mathbf{E}_0$ è il campo irradiato dalla singola antenna della schiera, e $F(\theta, \varphi)$ prende il nome di *fattore di allineamento* (o di *composizione*), ed è il termine che rende conto dell'azione combinata delle antenne nella schiera. Le coordinate θ e φ che compaiono al suo interno sono le coordinate angolari del sistema sferico centrato nell'origine di riferimento.

Un caso di particolare interesse si ottiene quando la schiera è *uniforme*, e cioè quando la distanza tra un'antenna e la successiva è sempre la stessa:

$$r_n = n d \quad , \quad d = \text{passo della schiera} \quad .$$

Si ottiene

$$F = \sum_{\ell=0}^{N-1} \alpha_\ell \eta^\ell \quad , \quad \eta = e^{i\beta d \cos(\psi)} \quad , \quad (8.54)$$

e cioè il fattore di composizione compare nella forma di un *polinomio* (detto di Schelkunoff) di grado $N - 1$ nella variabile complessa η , e questo fatto ha alcune importanti conseguenze pratiche:

1. il teorema fondamentale dell'algebra afferma infatti che un polinomio di grado $(N - 1)$ ha $(N - 1)$ zeri nel piano complesso, e cioè F può essere riscritto nella forma

$$F = (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \cdot (\eta - \eta_{N-1}) \quad .$$

Se accade che uno degli zeri cade sul cerchio unitario del piano complesso, $|\eta_j| = 1$, ad esso corrisponde una *direzione di zero* del campo totale irradiato che è sottesa dall'angolo

$$\cos(\psi) = \frac{\log(\eta_j)}{i\beta d} \in \mathbb{R} \quad .$$

Si osservi che, dato che la funzione coseno è pari, se ψ è una direzione di zero, lo è anche $-\psi$.

2. Questo fatto può essere convenientemente usato in fase di realizzazione di un sistema radiante. Si immagini infatti di voler progettare una schiera di antenne che non emette lungo certe direzioni dello spazio; ciò significa attribuire a priori gli zeri del polinomio di Schelkunoff e quindi, in ultima analisi, il numero delle antenne nella schiera e la loro alimentazione relativa.

Un esempio pratico può aiutare a comprendere meglio la procedura di dimensionamento della schiera. Si assuma ad esempio di voler realizzare, per mezzo di antenne a dipolo corto allineate lungo l'asse x di una terna cartesiana, un sistema radiante che non emette lungo le direzioni $\varphi_1 = 28.95^\circ$ e $\varphi_2 = 104.48^\circ$ del piano che taglia a metà le antenne. Si assuma inoltre che il passo della schiera sia $d = \lambda/2$.

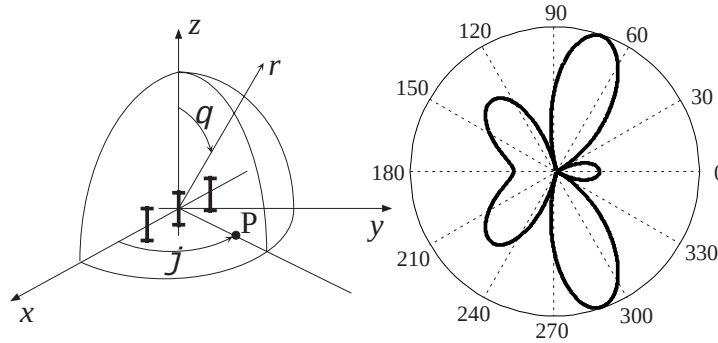


Figura 8.35: Esempio di allineamento di tre dipoli corti, e relativo diagramma di radiazione nel piano $z = 0$ quando le alimentazioni sono scelte in modo da dare luogo a direzioni di zero negli angoli $\varphi_1 = 28.95^\circ$ e $\varphi_2 = 104.48^\circ$.

Per prima cosa, si osserva subito che, dovendo essere due le direzioni di zero, il minimo numero di antenne con cui è necessario

realizzare la schiera è

$$N - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad N = 3 \quad .$$

Nella variabile η , le direzioni di zero risultano

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \cos(28.95^\circ) \right\} = \exp \left\{ i \frac{7\pi}{8} \right\} \\ \eta_2 &= \exp \left\{ i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \cos(104.48^\circ) \right\} = \exp \left\{ -i \frac{2\pi}{8} \right\} \end{aligned}$$

e quindi si ottiene

$$\begin{aligned} F &= (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) = \eta^2 - \eta \left(e^{i7\pi/8} + e^{-i2\pi/8} \right) + e^{i5\pi/8} \\ &\simeq \eta^2 + \left(0.39 e^{i56.25^\circ} \right) \eta + e^{i112.5^\circ} \end{aligned}$$

Per confronto con la (8.54), si osserva quindi che la prima antenna deve essere alimentata con una corrente di ampiezza arbitraria; la seconda antenna con una corrente di ampiezza pari a 0.39 volte l'ampiezza della corrente della prima antenna, e con uno sfasamento di 56.25 gradi, e la terza antenna con una corrente di modulo uguale a quella della prima antenna, ma sfasata di 112.5 gradi. La figura (8.35) mostra l'allineamento delle antenne, ed il relativo diagramma di radiazione nel piano $z = 0$.

3. Poichè $|\cos(\psi)| \leq 1$, si riescono ad imporre direzioni di zero solo all'interno del settore angolare che è compreso tra $-\beta d$ e $+\beta d$, e che prende il nome di *spazio visibile* dell'allineamento di antenne.

8.8.1 Schiere a fase progressiva

In queste schiere, le correnti di alimentazione delle antenne tutte uguali in modulo, e sfasate di una quantità costante nel passaggio da un'antenna alla successiva. Si ha cioè

$$\alpha_\ell = -i\ell\delta \quad ,$$

ed il fattore di composizione risulta

$$F = \sum_{\ell=0}^{N-1} \left[e^{i\beta d \cos(\psi) - \delta} \right]^\ell = e^{i(N-1)\nu} \frac{\sin(N\nu)}{\sin(\nu)} \quad ,$$

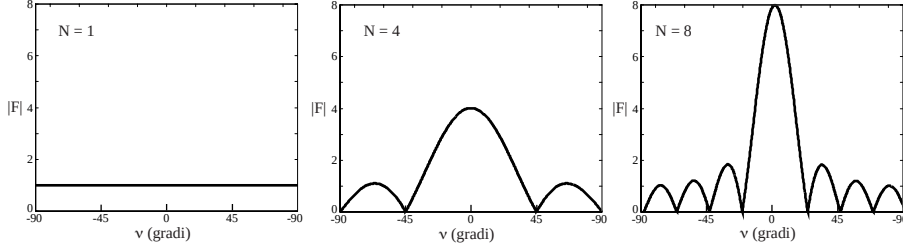


Figura 8.36: Modulo del fattore di composizione di una schiera a fase progressiva con un numero di elementi $N = 1, 4, 8$.

con

$$\nu = \frac{1}{2} \left[\beta d \cos(\psi) - \delta \right] = \frac{\pi d}{\lambda} \cos(\psi) - \frac{\delta}{2} \quad .$$

La figura (8.36) mostra l'andamento del modulo del fattore di composizione all'aumentare di N ($N = 1, 4, 8$ in figura): come si può osservare, la funzione è periodica di periodo π nella variabile ν ed il suo valore massimo, che è raggiunto per $\nu = 0$, vale N . Ciò significa che, se esiste una direzione ψ lungo la quale risulta $\nu = 0$, in quella direzione il campo elettromagnetico totale irradiato dalla schiera è N volte maggiore di quello irradiato da ogni singola antenna, e quindi la densità di potenza è N^2 volte maggiore di quella ottenibile con una sola antenna.

Il lobo principale ha larghezza delimitata dai valori di $\nu = \pm\pi/N$, e la sua ampiezza è quindi pari a

$$\Delta\nu = \frac{2\pi}{N} \quad .$$

Per ciò che concerne l'ampiezza dei primi lobi laterali, invece, è sufficiente porre a zero la quantità

$$\frac{d}{d\nu} \left| \frac{\sin(N\nu)}{\sin(\nu)} \right| = 0 \quad ,$$

e, per semplificare i calcoli, si può notare che quando N è sufficientemente grande, la variazione del numeratore è molto più rapida di quella del denominatore, e si può quindi approssimare la derivata con la seguente

$$\frac{d}{d\nu} \left| \frac{\sin(N\nu)}{\sin(\nu)} \right| \simeq \frac{d}{d\nu} \sin(N\nu) = 0 \quad .$$

Questa si annulla per

$$N\nu = \frac{\pi}{2}(2p+1) \quad , \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad ,$$

e, scartando la soluzione con $p = 0$, che non è valida, ed è dovuta all'approssimazione introdotta, si trova allora che i primi lobi laterali sono siti in corrispondenza dei valori

$$\nu \simeq \pm \frac{3\pi}{2N} \quad ,$$

e la loro ampiezza è

$$|F(\nu = \pm 3\pi/2N)| = \left| \frac{\sin(3\pi/2)}{\sin(3\pi/2N)} \right| \simeq \frac{2N}{3\pi} \quad .$$

Dunque, all'aumentare di N si restringe l'ampiezza del lobo principale che, almeno in linea di principio, può essere mandata a zero al divergere di N ; ciò che non può invece essere reso grande a piacere è il *rapporto tra i lobi*, che vale

$$a = \frac{\text{ampiezza del primo lobo secondario}}{\text{ampiezza del lobo principale}} \simeq \frac{2N/3\pi}{N} = \frac{2}{3\pi} \quad .$$

Con questo tipo di schiera, quindi, non è possibile costruire un sistema radiante *superdirettivo*, e cioè con lobo principale stretto a piacere e rapporto tra i lobi grande a piacere; quest'ultimo può al più valere $20 \log_{10}[2/(3\pi)] \simeq -13.5$ dB.

Condizioni di esistenza e unicità del lobo principale

Come si è visto, affinché esista il lobo principale, è necessario che il parametro ν assuma il valore zero. Ora, poichè i valori massimo e minimo di ν sono

$$\nu_{\max} = \frac{\pi d}{\lambda} - \frac{\delta}{2} \quad , \quad \nu_{\min} = -\frac{\pi d}{\lambda} - \frac{\delta}{2} \quad ,$$

l'esistenza è assicurata quando

$$\frac{\pi d}{\lambda} - \frac{\delta}{2} > 0 \quad , \quad -\frac{\pi d}{\lambda} - \frac{\delta}{2} < 0 \quad ,$$

e quindi quando

$$\left| \frac{\delta}{2} \right| < \frac{\pi d}{\lambda} \quad .$$

Per ciò che concerne l'unicità, invece, è sufficiente notare che il lobo è unico se l'intervallo di valori coperto da ν è inferiore a π , e quindi se

$$\left(\frac{\pi d}{\lambda} - \frac{\delta}{2}\right) - \left(-\frac{\pi d}{\lambda} - \frac{\delta}{2}\right) \leq \pi \quad \Rightarrow \quad d \leq \frac{\lambda}{2} \quad .$$

8.8.2 Schiere broad-side ed end-fire

Sono, rispettivamente, schiere nelle quali il lobo principale è ortogonale o parallelo alla direzione di allineamento. Queste due condizioni possono essere ottenute come segue.

Schiere broad-side

Il massimo ($\nu = 0$) deve essere raggiunto per $\psi = \pi/2$; dunque

$$\frac{\pi d}{\lambda} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\delta}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = 0 \quad .$$

La larghezza del lobo principale, $\Delta\psi$, può essere ricavata imponendo che

$$\frac{\pi d}{\lambda} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\Delta\psi}{2}\right) - \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \frac{\Delta\psi}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{N} \quad ,$$

e quindi, supponendo $\Delta\psi$ piccolo,

$$\Delta\psi \simeq \frac{2\lambda}{Nd} \quad .$$

Schiere end-fire

In queste schiere il massimo deve essere raggiunto per $\psi = 0$; dunque

$$\frac{\pi d}{\lambda} \cos(0) - \frac{\delta}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda} = \beta d \quad .$$

La larghezza del lobo principale è data dalla relazione

$$\frac{\pi d}{\lambda} \cos\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right) - \frac{\pi d}{\lambda} = \frac{\pi}{N} \quad ,$$

e risulta

$$\Delta\psi \simeq 2\sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}} \quad ,$$

ovvero, al crescere di N , esso si restringe meno rapidamente che nelle schiere broad-side.

8.9 L'antenna Yagi–Uda e l'antenna logaritmica

Sono due tipi di antenne a schiera molto utilizzate nell'ambito televisivo, e vengono qui descritte solo per sommi capi.

L'antenna Yagi–Uda

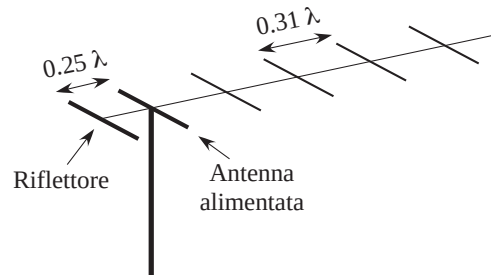


Figura 8.37: Antenna Yagi–Uda a 6 elementi.

L'antenna Yagi–Uda, dai nomi dei due inventori, è stata sperimentata per la prima volta nel 1926 ed è formata da un riflettore, un'antenna filiforme alimentata, ed una ulteriore serie di antenne filiformi, parallele a quella alimentata, e disposte in modo da consentire il controllo delle caratteristiche di emissione. Gli studi di Yagi e Uda hanno dimostrato che le prestazioni migliori in termini di guadagno si hanno con antenne di lunghezze pari a circa $\lambda/2$ e disposte in modo che la prima, quella alimentata, sia disposta ad una distanza $\lambda/4$ dal riflettore, mentre tutte le rimanenti sono spaziate di circa $\lambda/3$.

Una valutazione qualitativa delle caratteristiche di emissione di quest'antenna può essere eseguita come segue: si immagini che tutti gli elementi della schiera siano spazati con passo $d = \lambda/4$, e si osservi che, in prima approssimazione, si può ritenere che sulle antenne non alimentate si instauri una corrente che è uguale a quella dell'antenna alimentata, a meno di un fattore di fase dato dalla distanza di propagazione, e quindi pari a $\beta d = \pi/2$.

L'antenna è quindi di tipo end-fire, e può essere dimensionata in modo che essa non irradi (né riceva) nella direzione $\psi = \pi$. A tal fine è sufficiente imporre che

$$\sin \left[N \left(\frac{\pi}{4} \cos(\pi) - \frac{\delta}{2} \right) \right] = \sin \left[N \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right] = 0 \quad ,$$

e dunque che N sia un qualsiasi numero pari.

L'antenna logaritmica

Uno dei principali difetti delle schiere di antenne è il fatto che le loro caratteristiche dipendono fortemente dalla frequenza, perchè dalla frequenza dipende ν e quindi, in ultima analisi F . Negli anni si è quindi sviluppata una intensa attività di ricerca tesa ad individuare quali strutture potessero assicurare allo stesso tempo sia un guadagno maggiore di quello ottenibile con una singola antenna, sia una banda sufficientemente larga; uno dei principali contributi in questo senso fu dato, nel 1949 da Y. Mushiake, che osservò come una antenna *auto-complementare* presentasse sempre la stessa impedenza, pari a metà dell'impedenza d'onda nel vuoto, a qualsiasi frequenza.

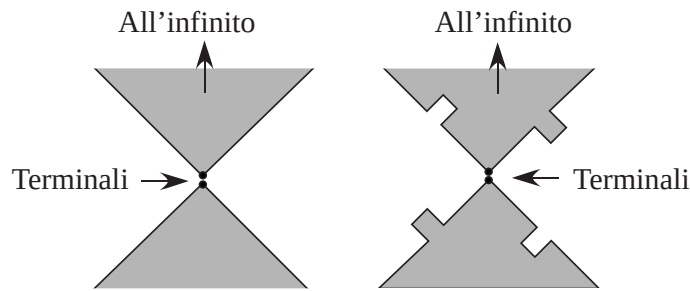


Figura 8.38: Esempi di antenne auto-complementari.

La Fig.(8.38) mostra alcuni esempi di antenne auto-complementari, ma è evidente che questi sono solo alcuni di quelli che è possibile immaginare, ed in questo senso l'osservazione di Mushiake è fondamentale, perchè aprì la strada ad un nuovo modo di guardare alle schiere di antenne. In particolare, seguendo questa indicazione, V. H. Rumsey postulò negli anni cinquanta il seguente principio: l'impedenza ed il diagramma di radiazione di un'antenna può essere indipendente dalla frequenza solo se il profilo dell'antenna *può essere descritto attraverso degli angoli*.

Un esempio di questo tipo di antenna è quella a *spirale logaritmica*, il cui profilo è descritto dall'equazione

$$r = \text{costante}^{\theta} ,$$

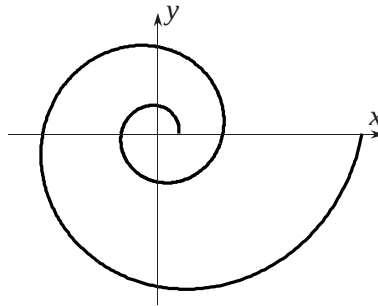


Figura 8.39: Antenna a spirale logaritmica.

dove r è la distanza del punto sulla spirale dall'origine, e θ è l'angolo misurato rispetto all'asse x (si veda la Fig.(8.39)).

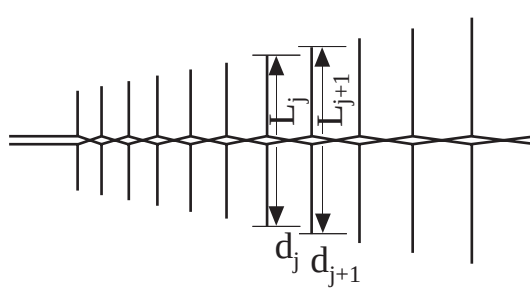


Figura 8.40: Antenna a dipolo log-periodico.

Studi successivi mostrarono anche che caratteristiche sufficientemente indipendenti dalla frequenza possono essere ottenute anche con antenne non auto-complementari e, in particolare, con antenne nelle quali le dimensioni degli elementi si espandono in maniera graduale. Un esempio di questo tipo di antenna fu introdotta nel 1960 da D. Isbell, ed è l'antenna a dipolo log-periodica (si veda la Fig.(8.40): si tratta di un'antenna nella quale la lunghezza di ogni dipolo, e la distanza dal successivo, scala secondo la legge

$$\frac{L_{j+1}}{L_j} = \frac{d_{j+1}}{d_j} = \text{costante} \quad .$$

Il funzionamento si basa sul principio che, in prima approssimazione, si ha irradiazione solo da parte dell'elemento la cui lunghezza è circa

pari a metà della lunghezza d'onda, perchè gli elementi di lunghezza maggiore presentano una grande componente induttiva dell'impedenza di ingresso, mentre quelli più corti una capacitiva, e sono quindi alimentati con correnti molto inferiori a quelle che circolano negli elementi di lunghezza appropriata.

Appendice 1: risoluzione della (8.2).

Per $r \neq 0$, l'equazione in esame è

$$\nabla^2 A_z - \sigma^2 A_z = 0 \quad ,$$

ovvero, in coordinate sferiche

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dA_z}{dr} \right) - \sigma^2 A_z = 0 \quad ,$$

dal momento che, data la simmetria del problema, è ragionevole attendersi che non vi sia alcuna dipendenza dalle coordinate angolari θ e φ .

Posto $A_z(r) = f(r)/r$ si ha allora

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} - \sigma^2 f(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(r) = Ce^{-\sigma r} + De^{+\sigma r} \quad ,$$

dove C e D sono due costanti arbitrarie, che possono essere determinate imponendo le condizioni al contorno.

A tal fine, mostriamo innanzi tutto che, nel problema che stiamo considerando qui deve essere $D \equiv 0$. Infatti, se il mezzo è privo di perdite, di modo che $\sigma = i\beta$, i termini $\exp\{-i\beta r\}/r$ e $\exp\{+i\beta r\}/r$ rappresentano, rispettivamente, un'onda sferica che viaggia nel verso delle r crescenti, ed una che viaggia in quello delle r decrescenti. Dunque, l'addendo che dipende da C è un'onda che “esplode” allontanandosi dalla sorgente, mentre quello che dipende da D è un'onda che “implode” verso di essa provenendo dall'infinito.

Questo termine ha pertanto un significato fisico che è accettabile, perchè indica che è possibile che vi siano delle onde che sono state irradiate da qualche altra sorgente e che vengono a “chiudersi” sull'antenna a dipolo corto che occupa l'origine del sistema di coordinate sferiche. Tuttavia, queste onde non sono la soluzione del nostro problema, perchè noi stiamo studiando quello che accade quando si dispone *una sola sorgente* nel centro di un sistema di coordinate sferiche, ed è dunque necessario porre $D \equiv 0$.

Per ciò che concerne C , invece, si può procedere come segue. Si integra l'equazione di partenza su un volume infinitesimo ΔV centrato attorno all'origine del sistema di coordinate sferiche. Si ottiene

$$\int_{\Delta V} (\nabla^2 A_z - \sigma^2 A_z) d\Delta V = -\mu I \Delta z \quad ,$$

e dunque anche

$$\int_{S(\Delta V)} (\nabla A_z \cdot \hat{r}) \, dS - \sigma^2 \int_{\Delta V} A_z \, d\Delta V = -\mu I \Delta z \quad ,$$

dove $S(\Delta V)$ è la superficie chiusa che racchiude il volume ΔV . Quando questo viene ridotto attorno all'origine, il secondo integrale a primo membro converge a zero perchè, se è pur vero che esso contiene un fattore $1/r$ in A_z , l'elemento di volume va a zero più rapidamente di r . Rimane così

$$C \int_{S(\Delta V)} \left(-\frac{\sigma}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \, dS = -\mu I \Delta z \quad ,$$

e, immaginando che $S(\Delta V)$ sia una superficie sferica di raggio r ,

$$C \left(-\frac{1}{r^2} \right) r^2 4\pi = -\mu I \Delta z \quad ,$$

da cui discende subito la (8.3).

Appendice 2: valutazione dell'integrale (8.34).

Si intende valutare l'integrale

$$\frac{\hat{\mathbf{E}}(\kappa_{x0}, \kappa_{y0}) e^{-i\beta r}}{(2\pi)^2} \int d\kappa_x \int d\kappa_y e^{-ir\xi(\kappa_x, \kappa_y)}$$

dove

$$\begin{aligned} \xi(\kappa_x, \kappa_y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa_x^2} (\kappa_x - \kappa_{x0})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa_y^2} (\kappa_y - \kappa_{y0})^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa_x \partial \kappa_y} (\kappa_x - \kappa_{x0})(\kappa_y - \kappa_{y0}) = \\ &= \frac{1}{2\beta \kappa_z^2} \left\{ (\kappa_z^2 + \kappa_x^2)(\kappa_x - \kappa_{x0})^2 + (\kappa_z^2 + \kappa_y^2)(\kappa_y - \kappa_{y0})^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2\kappa_x \kappa_y (\kappa_x - \kappa_{x0})(\kappa_y - \kappa_{y0}) \right\} . \end{aligned}$$

Ciò può essere fatto come segue: per prima cosa, si trasla l'origine delle coordinate nel punto di fase stazionaria, ponendo $k_x = \kappa_x - \kappa_{x0}$ e $k_y = \kappa_y - \kappa_{y0}$. Successivamente si introduce una rotazione di coordinate, definita dalle relazioni

$$\begin{cases} k_x = w_x \cos(\delta) + w_y \sin(\delta) \\ k_y = -w_x \sin(\delta) + w_y \cos(\delta) \end{cases} .$$

nelle quali si sceglie δ in modo da annullare i termini che dipendono dal prodotto misto $w_x w_y$:

$$\tan(2\delta) = \frac{2\kappa_x \kappa_y}{\kappa_y^2 - \kappa_x^2} \Rightarrow \tan(\delta) = \frac{\kappa_x}{\kappa_y} \quad \text{e} \quad \sin^2(\delta) = \frac{\kappa_x^2}{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} .$$

Si ottiene così

$$\begin{aligned} \xi(w_x, w_y) &= \frac{w_x^2}{2\beta} + \frac{w_y^2}{2\beta} \left[1 + \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{\kappa_z^2} \right] = \\ &= \frac{w_x^2}{2\beta} + \frac{w_y^2}{2\beta} \left[1 + \frac{u_x^2 + u_y^2}{u_z^2} \right] = \\ &= \frac{w_x^2}{2\beta} + \frac{w_y^2}{2\beta} \frac{1}{u_z^2} = \frac{w_x^2}{2\beta} + \frac{w_y^2}{2\beta \cos(\theta)^2} \end{aligned}$$

e l'integrale nella (8.34) si fattorizza dunque nel prodotto di due integrali del tipo

$$\int \exp \left\{ -ia^2 v^2 \right\} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{i\pi/4} \quad .$$

che forniscono

$$\mathbf{E}(x, y, z > 0) \simeq \frac{\hat{\mathbf{E}}(\beta u_x, \beta u_y) e^{-i\beta r}}{(2\pi)^2} i \frac{2\pi\beta}{r} \cos(\theta) \quad ,$$

da cui discende direttamente la seconda delle (8.34).

Appendice 3: valutazione dello spettro di un'antenna ad apertura circolare.

Si consideri l'integrale

$$I_C = \int \int_{C(R)} dx dy \exp\{i\kappa_x x + i\kappa_y y\} \quad , \quad C = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}.$$

Si trasformino le coordinate ponendo

$$x = r \cos(\varphi) \quad , \quad y = r \sin(\varphi) \quad ,$$

si ottiene allora

$$I_C = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \exp\{i\kappa_x r \cos(\varphi) + i\kappa_y r \sin(\varphi)\} \quad .$$

Si ponga poi

$$\kappa_x = K \cos(\alpha) \quad , \quad \kappa_y = K \sin(\alpha) \quad , \quad K = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} \quad .$$

L'integrale diventa

$$I_C = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\{iKr \cos(\varphi - \alpha)\} \quad ,$$

ed essendo

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{iu \cos(\xi - \xi_0)\} d\xi \quad ,$$

anche

$$I_C = 2\pi \int_0^R dr r J_0(Kr) \quad .$$

Usando ora l'integrale notevole

$$\int_0^x d\xi \xi J_0(\xi) = x J_1(x) \quad ,$$

si ha infine

$$I_C = \frac{2\pi R}{K} J_1(KR) = \frac{2\pi R}{\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}} J_1\left(R\sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}\right) \quad ,$$

che è l'espressione riportata nel testo.

Appendice 4: dimostrazione dell'equivalenza tra impedenza interna in trasmissione e ricezione

Si consideri un'antenna in ricezione, investita da un campo prodotto da sorgenti poste a grande distanza da essa

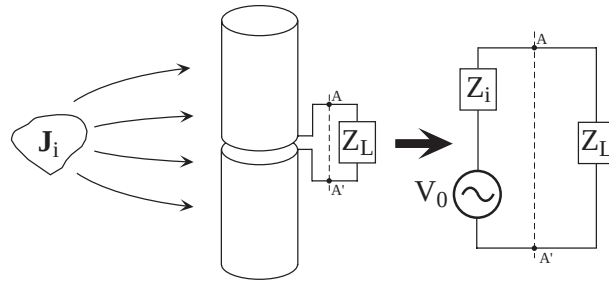


Figura 8.41: Antenna di ricezione, e suo equivalente elettrico.

Per definizione, l'impedenza interna in ricezione è l'impedenza che si vede guardando dai morsetti AA' verso sinistra quando i *generatori equivalenti di tensione* sono cortocircuitati. Nello schema di Fig.(8.41), ciò significa spegnere le correnti $\mathbf{J}_i$, di modo che la situazione fisica che si presenta diventa quella di Fig.(8.42).

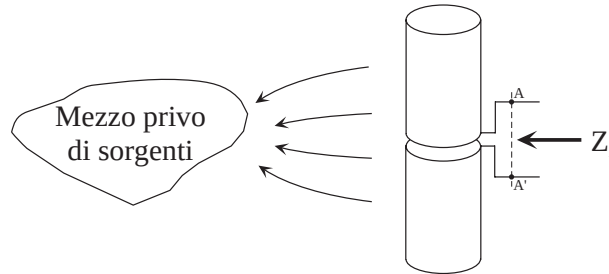


Figura 8.42: Come in Fig.(8.41), quando vengono spente le sorgenti $\mathbf{J}_i$.

L'impedenza che si avverte è dunque l'impedenza dell'antenna che è usata come un trasmettitore verso un mezzo privo di sorgenti, e cioè proprio l'impedenza interna che era stata definita per una antenna di trasmissione.

Appendice 5: dimostrazione dell'uguaglianza tra l'altezza efficace in trasmissione ed in ricezione

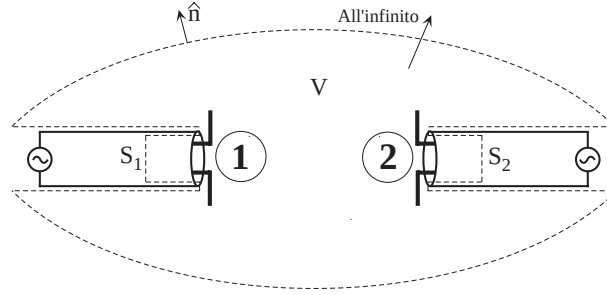


Figura 8.43: Disposizione delle antenne e della superficie di integrazione nell'applicazione del teorema di reciprocità.

Si considerino due antenne alimentate da generatori *ideali* di tensione tramite due linee di trasmissione schermate e prive di perdite, e si applichi il teorema di reciprocità al volume V che, per costruzione, è privo di sorgenti. Si ottiene

$$\int_S (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} dS = 0 \quad ,$$

dove $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ e $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$ sono i campi prodotti dalle due antenne, S è la superficie chiusa che racchiude il volume V (disegnata con linea tratteggiata in Fig.(8.43)), e $\hat{n}$ la sua normale uscente.

All'integrale non contribuiscono le porzioni di superficie che sono parallele alle linee di trasmissione, perchè le componenti di campo elettrico tangente sono ivi nulle, nè la superficie che diverge all'infinito, perchè il campo deve rispettare le condizioni di radiazione di Sommerfeld. Ne deriva che si ha anche

$$\int_{S_1} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} dS_1 = \int_{S_2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} dS_2 \quad ,$$

dove S_1 e S_2 sono due sezioni disposte all'interno delle linee di trasmissione che alimentano, rispettivamente, l'antenna "1" e l'antenna "2".

Si supponga ora che le due linee di trasmissione siano *monomodali*, e si indichino con $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{h}_1\}$ ed $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{h}_2\}$ le rispettive funzioni modali, e cioè le disposizioni che il campo assume all'interno di esse.

Si consideri poi l'integrale sulla sezione S_1 e si ponga

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 V_1 \quad , \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{h}_1 I_1 \quad ,$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 V_{21} \quad , \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{h}_2 I_{21} \quad ,$$

dove V_1 ed I_1 rappresentano la tensione e la corrente presenti nell'antenna "1" quando questa è alimentata dal suo generatore e viene fatta lavorare nella sua funzione di antenna di trasmissione, mentre V_{21} e I_{21} sono la tensione e la corrente che sono presenti nell'antenna "1" quando questa è usata come antenna di ricezione, e viene investita dal campo prodotto dall'antenna "2". Con queste definizioni si ottiene

$$\int_{S_1} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} dS_1 = (V_1 I_{21} - V_{21} I_1) \int_{S_1} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_1) \cdot \hat{n} dS_1 .$$

In maniera analoga, l'integrale sulla superficie S_2 può essere scritto come

$$\int_{S_2} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) \cdot \hat{n} dS_1 = (V_{12} I_2 - V_2 I_{12}) \int_{S_2} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_2) \cdot \hat{n} dS_2 .$$

e, scegliendo in modo opportuno le normalizzazioni per le funzioni modali, talchè

$$\int_{S_1} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{h}_1) \cdot \hat{n} dS_1 = \int_{S_2} (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{h}_2) \cdot \hat{n} dS_2 = 1 ,$$

anche

$$V_1 I_{21} - V_{21} I_1 = - (V_{12} I_2 - V_2 I_{12}) \quad .$$

Ora, poichè si è detto che le antenne sono alimentate da generatori *ideali*, è sempre possibile trovare due sezioni nelle quali risulta

$$I_{12} = I_{21} \equiv 0 \quad .$$

Infatti, un generatore ideale di tensione ha impedenza interna nulla, ed è allora sufficiente spostarsi di un tratto pari ad un quarto di lunghezza d'onda per avere corrente pari a zero.

Su queste sezioni si ha quindi

$$I_1 V_{21} = I_2 V_{12} \quad . \quad (8.55)$$

Si osservi che, avendo scelto una sezione sulla quale $I_{21} = 0$, la tensione V_{21} è la tensione dovuta all'antenna "2" e presente nell'antenna "1",

quando in quest'ultima *non circola corrente*; in altre parole, V_{21} è la *tensione a vuoto* indotta dall'antenna "2" nella "1" e, per definizione di lunghezza efficace in ricezione, essa può quindi essere scritta come segue:

$$V_{21} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{h}_{r1} \quad .$$

Inoltre, per definizione di lunghezza efficace in trasmissione (dell'antenna "2") vale anche

$$\mathbf{E}_2 = i Z_0 \frac{I_2 \mathbf{h}_{t2}}{2\lambda d} e^{-i\beta d} \quad ,$$

con d la distanza tra le due antenne. Ripetendo queste considerazioni anche per gli altri termini della (8.55) si ottiene allora

$$i Z_0 \frac{I_1 I_2}{2\lambda d} e^{-i\beta d} \mathbf{h}_{t2} \cdot \mathbf{h}_{r1} = i Z_0 \frac{I_2 I_1}{2\lambda d} e^{-i\beta d} \mathbf{h}_{t1} \cdot \mathbf{h}_{r2} \quad ,$$

da cui segue

$$\mathbf{h}_{t2} \cdot \mathbf{h}_{r1} = \mathbf{h}_{t1} \cdot \mathbf{h}_{r2} \quad . \quad (8.56)$$

Si osservi che questo risultato è stato derivato solamente come conseguenza del teorema di reciprocità, ed esso vale quindi *per qualsiasi coppia di antenne* "1" e "2". In particolare, si è dimostrato che se l'antenna "2" è un'antenna a dipolo corto, vale

$$\mathbf{h}_{r2} \equiv \mathbf{h}_{t2} = L \sin(\theta) \hat{\theta} \quad ,$$

di modo che dalla (8.56) si ottiene

$$\mathbf{h}_{t1} \cdot \hat{\theta} = \mathbf{h}_{r1} \cdot \hat{\theta} \quad . \quad (8.57)$$

Analogamente, se l'antenna "2" è un'antenna a spira di corrente, per la quale

$$\mathbf{h}_{r2} \equiv \mathbf{h}_{t2} = -i\beta\pi R^2 \sin(\theta) \hat{\varphi} \quad ,$$

dalla (8.56) segue anche

$$\mathbf{h}_{t1} \cdot \hat{\varphi} = \mathbf{h}_{r1} \cdot \hat{\varphi} \quad . \quad (8.58)$$

Si ricordi ora che l'altezza efficace, sia in ricezione, sia in trasmissione, è un parametro definito per il *campo a grande distanza*, e cioè in quella regione nella quale il campo irradiato può essere localmente approssimato con un'onda piana. Ne segue che né $\mathbf{h}_{t1}$ né $\mathbf{h}_{r1}$ hanno componenti radiali

e quindi, poichè le (8.57) e (8.58) mostrano che deve essere contemporaneamente verificata una uguaglianza nella quale compaiono i prodotti interni per $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}$, deve necessariamente risultare

$$\mathbf{h}_{r1} \equiv \mathbf{h}_{t1} \quad ,$$

come si voleva dimostrare.