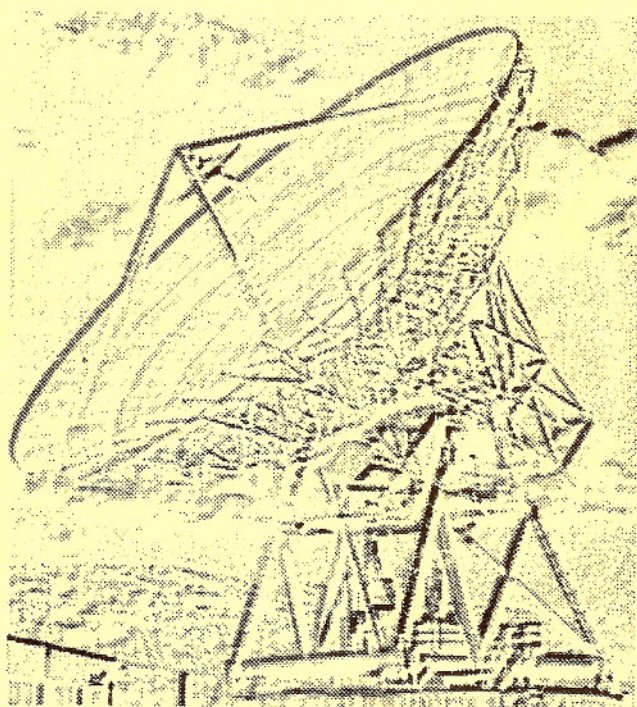


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Giuliano Manara Agostino Monorchio Paolo Nepa

**Appunti di
Campi Elettromagnetici**



SEU

Servizio Editoriale Universitario di Pisa

SOMMARIO

Introduzione	v
1. Leggi fondamentali dell'elettromagnetismo	1
1.1 Equazioni di Maxwell	1
- 1.1.1 Equazioni di Maxwell in forma differenziale	3
- 1.1.2 Equazioni di Maxwell in forma integrale nel dominio del tempo	5
1.1.3 Equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza	11
- 1.2 Relazioni costitutive	12
- 1.3 Equazioni di Maxwell in un mezzo non omogeneo: condizioni di continuità	17
1.3.1 Condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico	17
1.3.2 Condizioni di continuità delle componenti normali dei vettori induzione $\underline{d}$ e $\underline{b}$	20
1.4 Considerazioni energetiche sui campi	22
- 1.4.1 Teorema di Poynting nel dominio del tempo	22
- 1.4.2 Teorema di Poynting nel dominio della frequenza	25
2. Onde piane	29
2.1 Onde piane nel dominio del tempo	29
2.1.1 Soluzione delle equazioni di Maxwell nel D.T. nello spazio libero, in assenza di sorgenti	29
2.1.2 Polarizzazione delle onde piane nel dominio temporale	37
2.2 Onde piane nel dominio della frequenza	44
2.2.1 Costante di propagazione e velocità di fase	44
2.2.2 Velocità di gruppo	48
2.3 Riflessione e trasmissione di onde piane alla superficie di separazione fra mezzi con caratteristiche diverse	51
2.3.1 Riflessione e trasmissione di un'onda piana all'interfaccia tra due dielettrici: incidenza ortogonale	51
2.3.2 Riflessione e trasmissione di un'onda piana all'interfaccia dielettrico conduttore: incidenza normale	53
2.3.3 Condizioni al contorno alla superficie di separazione con un mezzo conduttore elettrico perfetto	56
2.3.4 Riflessione e trasmissione di un'onda piana all'interfaccia tra due dielettrici: incidenza obliqua	57

3. Linee di trasmissione	63
3.1 Introduzione	63
3.2 Linee di trasmissione nel dominio del tempo	64
3.3 Linee di trasmissione nel dominio della frequenza	69
3.3.1 Caratteristiche della soluzione di tipo viaggiante	73
3.3.2 Caratteristiche della soluzione stazionaria	78
3.3.3 Condizioni di carico particolari	81
3.4 Interconnessione di più linee di trasmissione	97
3.5 Carta di Smith	99
3.5.1 Determinazione del coefficiente di riflessione dall'impedenza e viceversa	101
3.5.2 Trasformazione di impedenza lungo la linea	103
3.5.3 Determinazione del ROS e della posizione del massimo di tensione	105
3.5.4 Uso della Carta di Smith come carta delle impedenze	107
3.6 Adattamento di impedenza	110
3.6.1 Trasformatore a $\lambda/4$	110
3.6.2 Stub parallelo	112
3.6.3 Stub serie	114
3.7 Linee con piccole perdite	117
3.7.1 Esempio di calcolo dell'attenuazione lungo una linea con perdite	119
4. Propagazione guidata	121
4.1 Configurazioni modali	121
4.2 Guide d'onda rettangolari	129
4.2.1 Propagazione e cut-off	134
4.2.2 Distorsioni in guida d'onda	139
4.2.3 Velocità di fase e velocità di gruppo	142
4.3 Guide d'onda circolari	147
4.4 Linee a microstriscia	153
4.4.1 Dispersione in una linea a microstriscia	158
4.4.2 Attenuazione su una linea a microstriscia	159
4.4.3 Limitazioni in frequenza	160
4.4 Matrice di diffusione	162
5. Antenne	171
5.1 Introduzione	171

5.2 Dipolo elettrico elementare	172
5.3 Campo generato da una distribuzione lineare di corrente	175
5.4 Campo associato ad una spira elementare di corrente	179
5.4.1 Teorema di dualità	181
5.5 Parametri di un'antenna in trasmissione.	183
5.5.1 Altezza efficace	183
5.5.2 Diagrammi di irradiazione	185
5.5.3 Direttività, guadagno ed efficienza di radiazione	190
NO → 5.6 Teorema delle immagini	195
5.6.1 Antenne a stilo o marconiane	198
5.7 Antenne in ricezione	200
5.7.1 Altezza efficace in ricezione	201
5.7.2 Area efficace	203
5.7.3 Teorema di reciprocità	205
5.7.4 Relazione tra parametri dell'antenna in trasmissione e in ricezione	209
5.8 Formula del collegamento	210
Appendice A – Richiami di analisi vettoriale	A1-A11
Appendice B – Rappresentazione fasoriale	B1-B5
Appendice C – Richiami sulla potenza nei circuiti in regime sinusodale	C1-C4
Appendice D – Linee di trasmissione nel dominio del tempo	D1-D5
Appendice E – I potenziali nella teoria dell'irradiazione	E1-E5

CAPITOLO 1

LEGGI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO

§1.1 - EQUAZIONI DI MAXWELL

Le equazioni di Maxwell possono essere introdotte in modo "deduttivo" mostrando come esse descrivano in forma differenziale tutte le leggi fondamentali dell'elettrologia e del magnetismo (teorema di Gauss per l'elettrostatica e la magnetostatica, legge di Ampere, legge dell'induzione di Faraday-Lenz).

L'impostazione che adotteremo, alternativa alla precedente, consiste nell'assumere le equazioni di Maxwell come postulato dei fenomeni elettromagnetici; le varie leggi sperimentali saranno ottenute passando dalle equazioni di Maxwell in forma differenziale a quelle in forma integrale.

1.1.1. - Equazioni di Maxwell in forma differenziale.

Ogni fenomeno elettromagnetico può essere descritto mediante le equazioni di Maxwell. Tali equazioni differenziali studiano il campo elettromagnetico, presentando come incognita l'insieme dei vettori ($\underline{e}$, $\underline{h}$, $\underline{d}$, $\underline{b}$) che descrivono i fenomeni elettromagnetici. In particolare, indicheremo con: $\underline{e}(\underline{r}, t)$ il campo elettrico che si misura in V/m; $\underline{h}(\underline{r}, t)$ il campo magnetico che si misura in A/m; $\underline{d}(\underline{r}, t)$ il campo di induzione elettrica che si misura in C/m²; $\underline{b}(\underline{r}, t)$ l'induzione magnetica che si misura in Wb/m². I precedenti vettori, definiti in tutto lo spazio, soddisfano in modo univoco le equazioni di Maxwell quando siano anche specificate le condizioni iniziali e al contorno. In questo tipo di descrizione le cariche libere e le correnti rappresentano le "sorgenti" del campo.

Nella successiva trattazione faremo implicitamente uso dei seguenti assiomi:

- i) esistono in natura due tipi di cariche elettriche, cariche positive e cariche negative; qualunque carica è un multiplo intero della carica dell'elettrone $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$;
- ii) non è possibile isolare in natura una carica magnetica. Da ciò deriva che, mentre esiste una corrente elettrica, non esiste una corrente magnetica.

E' importante osservare che le equazioni di Maxwell nella forma che presenteremo sono applicabili a fenomeni macroscopici (andrebbero dunque chiamate in modo più esatto: equazioni macroscopiche di Maxwell).

Le densità di carica $\rho(\underline{r}, t)$ e di corrente elettrica $\underline{j}(\underline{r}, t)$ sono misurate rispettivamente in C/m^3 e in A/m^2 e possono essere definite come segue:

$$\begin{aligned} \text{densità di carica} &\rightarrow \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{carica contenuta in } \Delta V}{\Delta V}, & \left[\frac{C}{m^3} \right] \\ \text{densità di corrente} &\rightarrow \underline{j} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\text{corrente che fluisce attraverso } \Delta S}{\Delta S}. & \left[\frac{A}{m^2} \right] \end{aligned}$$

In particolare si assume che queste grandezze abbiano un andamento continuo quando il volume ΔV o la superficie ΔS si riducono a zero. A causa della natura granulare dell'elettricità, quanto assunto non è verificato in volumi o su superfici troppo piccoli; pertanto, le equazioni macroscopiche di Maxwell, in volumi del tipo detto, non saranno valide; in generale esse forniscono i valori medi del campo macroscopico, valori ottenuti mediando su volumi sufficientemente grandi, che ai fini pratici sono dell'ordine di $0,1 \div 1 \mu m^3$.

Assumiamo quindi come postulato dei fenomeni elettromagnetici le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \times \underline{e}(\underline{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(\underline{r}, t), & (1.1) \\ \nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) + \underline{j}(\underline{r}, t), & (1.2) \\ \nabla \cdot \underline{d}(\underline{r}, t) &= \rho(\underline{r}, t), & (1.3) \\ \nabla \cdot \underline{b}(\underline{r}, t) &= 0. & (1.4) \end{aligned} \right.$$

La densità di corrente $\underline{j}(\underline{r}, t)$ può essere scissa in due parti:

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}'(\underline{r}, t) + \underline{j}_0(\underline{r}, t)$$

dove $\underline{j}'(\underline{r}, t)$ è il contributo sostenuto dal campo elettromagnetico, mentre $\underline{j}_0(\underline{r}, t)$ è quello sostenuto dai generatori. Si può osservare che le equazioni di Maxwell (1.1)-(1.4) mettono in relazione i vettori del campo con le sorgenti del campo stesso. Esse costituiscono un insieme di quattro equazioni (due vettoriali e due scalari)

corrispondenti a otto equazioni scalari. Risulta subito evidente che il numero delle incognite è superiore al numero delle equazioni. Infatti, se sono assegnate la densità di carica libera ρ e la densità di corrente sostenuta dai generatori $j_0(x,t)$, le incognite risultano rappresentate dalle componenti dei vettori $\underline{e}$, $\underline{h}$, $\underline{d}$, $\underline{b}$, $\underline{j}$. Inoltre, è opportuno osservare che le equazioni di Maxwell non sono tutte linearmente indipendenti. La (1.4) ad esempio può essere ricavata dalla (1.1) nel seguente modo. Applicando l'operatore divergenza alla (1.1) ed osservando che la divergenza di un rotore è nulla (vedi Appendice A), si ottiene:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} = 0.$$

Infine, invertendo l'ordine di derivazione nella relazione precedente (operazione lecita se si fa riferimento a volumi fissi nel tempo), si ricava:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{b}) = 0.$$

Risulta dunque che $\nabla \cdot \underline{b}$ è costante nel tempo. Di conseguenza, se i campi sono nulli per $t < t_0$, con t_0 istante di tempo in cui vengono attivate le sorgenti, risulta $\underline{b}(t < t_0) = 0$ e quindi $\nabla \cdot \underline{b}(t < t_0) = 0$. Di conseguenza $\nabla \cdot \underline{b} = 0$, dovendo essere $\nabla \cdot \underline{b}$ costante per qualunque istante.

Il sistema di equazioni di Maxwell (1.1)-(1.4) è dunque indeterminato; esso risulta determinato se vengono considerate altre relazioni che forniscano informazioni sul mezzo in cui i campi vengono a determinarsi (relazioni costitutive). Anche la seconda e la terza equazione di Maxwell sono in relazione; se applichiamo l'operatore divergenza alla (2):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{h}) = \nabla \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j}.$$

Ricordando che la divergenza di un rotore è nulla, otteniamo:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0;$$

invertendo poi l'ordine di derivazione (con riferimento a volumi fissi nel tempo) e utilizzando infine la (1.3), ricaviamo la seguente equazione:

$$\nabla \cdot \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \underline{d}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0, \quad (1.5)$$

che prende il nome di equazione di continuità della corrente elettrica (generalizzazione della prima legge di Kirchhoff).

La connessione tra fenomeni elettrici e fenomeni meccanici è data da un'ulteriore equazione indipendente:

$$\underline{f} = \rho \underline{e} + \underline{j} \times \underline{b}, \quad (1.6)$$

detta equazione della forza di Lorentz, dove $f [N/m^3]$ è una densità volumetrica di forza. Nell'ipotesi in cui venga riferita ad una carica finita q , la (1.6) può essere riscritta come segue:

$$\underline{f} = Kq(\underline{e} + \underline{v} \times \underline{b})$$

dove K è una costante di proporzionalità dipendente dal sistema di misura (è uguale ad 1 nel sistema MKSA) e $\underline{v}$ è la velocità della carica. Osservando quest'ultima espressione, possiamo immediatamente notare che il campo magnetico non ha effetto sulle cariche ferme, ma solo sulle cariche in movimento. In particolare, se una carica è inizialmente ferma in un campo magnetico, essa rimane in quiete.

A questo punto, può risultare conveniente simmetrizzare le equazioni di Maxwell, introducendo delle fittizie densità di carica e di corrente magnetica: $\rho_m [Wb/m^3]$ e $\underline{j}_m [V/m^2]$. Le equazioni di Maxwell assumono così la seguente forma:

$$\nabla \times \underline{e}(\underline{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{b}(\underline{r}, t) - \underline{j}_m(\underline{r}, t), \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{d}(\underline{r}, t) + \underline{j}(\underline{r}, t), \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \underline{d}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t), \quad (1.9)$$

$$\nabla \cdot \underline{b}(\underline{r}, t) = \rho_m(\underline{r}, t). \quad (1.10)$$

L'equazione della forza di Lorentz può essere a sua volta generalizzata come segue:

$$\underline{f} = \rho \underline{e} + \underline{j} \times \underline{b} + \rho_m \underline{h} - \underline{j}_m \times \underline{d},$$

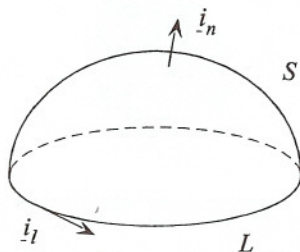
mentre quella di continuità della corrente "magnetica" assume la forma:

$$\nabla \cdot \underline{j}_m + \frac{\partial}{\partial t} \rho_m = 0.$$

Il motivo principale dell'introduzione delle densità di carica e di corrente magnetica è dato dal fatto che esistono distribuzioni di campo che possono formalmente attribuirsi a sorgenti magnetiche; in tali casi però i campi sono in realtà generati da particolari distribuzioni di carica e di corrente elettriche.

1.1.2. Equazioni di Maxwell in forma integrale nel dominio del tempo.

Il significato delle equazioni di Maxwell e dell'equazione di continuità della carica diviene chiaro una volta che queste equazioni siano trasformate nelle corrispondenti relazioni integrali. Ricaviamo dunque le equazioni di Maxwell in forma integrale in un mezzo con caratteristiche uniformi. Consideriamo a questo proposito una superficie S con versore normale $\underline{i}_n$ che si appoggia ad un percorso chiuso L di versore tangente $\underline{i}_l$. Si suppongano inoltre $\rho_m = 0$ e $j_m = 0$.



$\underline{f}_{mcc} \rightarrow$ densità volumetrica di carica magnetica
 $\underline{j}_m \rightarrow$ densità volumetrica di corrente magnetica

Fig.1.1 - Percorso di integrazione chiuso e superficie S che si appoggia allo stesso percorso.

Consideriamo la prima e la seconda equazione di Maxwell e calcoliamone il flusso attraverso la superficie S :

$$\iint_S \nabla \times \underline{e} \cdot \underline{i}_n dS = - \iint_S \frac{\partial b}{\partial t} \cdot \underline{i}_n dS,$$

$$\iint_S \nabla \times \underline{h} \cdot \underline{i}_n dS = \iint_S \frac{\partial d}{\partial t} \cdot \underline{i}_n dS + \iint_S \underline{j} \cdot \underline{i}_n dS.$$

Se supponiamo che la superficie S sia fissa nel tempo, possiamo scambiare l'operazione di derivazione con quella integrale e, applicando il teorema di Stokes (vedi Appendice A) al primo membro, si ottiene:

$$\oint_L \underline{e} \cdot \underline{i}_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \underline{b} \cdot \underline{i}_n dS \quad (1.11)$$

$$\oint_L \underline{h} \cdot \underline{i}_l dl = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \underline{d} \cdot \underline{i}_n dS + \iint_S \underline{j} \cdot \underline{i}_n dS \quad (1.12)$$

La (1.11) e la (1.12) rappresentano rispettivamente la forma integrale della prima e della seconda equazione di Maxwell.

Consideriamo ora un volume V delimitato da una superficie chiusa S (Fig. 1.2). Sia $\underline{i}_n$ il versore normale alla superficie S . Integriamo la terza e la quarta equazione di Maxwell sul volume V :

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{d} \, dV = \iiint_V \rho \, dV,$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{b} \, dV = 0.$$

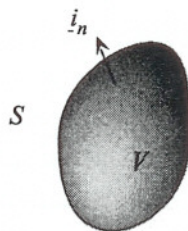


Fig.1.2 - Geometria per l'applicazione del teorema della divergenza.

Applicando il teorema della divergenza (o di Gauss) agli integrali nei primi membri di queste equazioni si ottiene:

$$\oiint_S \underline{d} \cdot \underline{i}_n \, dS = \iiint_V \rho \, dV, \quad (1.13)$$

$$\oiint_S \underline{b} \cdot \underline{i}_n \, dS = 0. \quad (1.14)$$

La (1.13) e la (1.14) rappresentano rispettivamente la forma integrale della terza e dalla quarta equazione di Maxwell.

Se ora integriamo l'equazione di continuità della corrente in un volume V racchiuso da una superficie S

$$\iiint_V (\nabla \cdot \underline{j}) \, dV = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV,$$

seguendo una procedura simile a quelle precedenti si ottiene:

$$\oiint_S \underline{j} \cdot \underline{i}_n \, dS = - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dV, \quad (1.15)$$

che rappresenta la forma integrale dell'equazione di continuità della corrente.

Definiamo adesso alcune quantità che saranno utili nel seguito:

a) carica contenuta in un volume assegnato V :

$$q(t) = \iiint_V \rho(\underline{r}, t) dV;$$

b) flusso del vettore induzione magnetica attraverso una superficie assegnata S :

$$\phi_m(t) = \iint_S \underline{b}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS;$$

c) flusso del vettore induzione elettrica attraverso una superficie assegnata S :

$$\phi_e(t) = \iint_S \underline{d}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS;$$

d) flusso della densità di corrente attraverso una superficie S :

$$i(t) = \iint_S \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS.$$

Tenendo conto di queste definizioni la prima equazione integrale di Maxwell (1.11) può essere riscritta nel modo seguente:

$$\oint_L \underline{e}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_l dl = - \frac{\partial}{\partial t} \phi_m(t) \quad (1.16)$$

dove l'integrale a primo membro rappresenta una forza elettromotrice. La (1.16) è nota come legge di Faraday-Lenz (generalizzazione della seconda legge di Kirchhoff nel caso di induzioni e tensioni variabili nel tempo); essa esprime l'uguaglianza tra la variazione nel tempo del flusso magnetico concatenato con un circuito e la forza elettromotrice che in esso si induce a causa della variazione temporale del flusso stesso. Dalla terza equazione di Maxwell segue ancora che:

$$\phi_e(t) = q(t). \quad (1.17)$$

Questa ultima relazione rappresenta la legge di Gauss per le cariche elettriche: essa esprime l'uguaglianza tra il flusso del vettore induzione elettrica attraverso una superficie chiusa S e la carica totale q racchiusa dalla superficie stessa. Dalla quarta equazione di Maxwell si ricava l'analoga della (1.17):

$$\phi_m(t) = 0 \quad (1.18)$$

e cioè la legge di Gauss per le cariche magnetiche, da cui risulta l'assenza di cariche magnetiche libere. Dall'equazione di continuità della corrente segue inoltre che:

EQUAZIONI DI MAXWELL

$$i(t) = -\frac{\partial}{\partial t} q(t) \quad (1.19)$$

La (1.19) esprime il principio di conservazione della carica elettrica: da essa infatti si deduce che la corrente che esce dal volume V nel tempo dt , cioè $i(t)dt$, rappresenta la diminuzione di carica, $-dq(t)$, all'interno del volume V stesso.

Consideriamo adesso la seconda equazione di Maxwell in forma integrale:

$$\oint_L \underline{h} \cdot \underline{i}_l dl = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \underline{d} \cdot \underline{i}_n dS + \iint_S \underline{j} \cdot \underline{i}_n dS.$$

Tenuto conto delle definizioni date in precedenza, questa si può anche esprimere nel seguente modo:

$$\oint_L \underline{h} \cdot \underline{i}_l dl = \frac{\partial}{\partial t} \phi_e(t) + i(t). \quad (1.20)$$

Se ora consideriamo il caso di campi statici risulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_e(t) = 0$$

e dunque:

$$i(t) = \oint_L \underline{h} \cdot \underline{i}_l dl. \quad (1.21)$$

Quest'ultima relazione è nota come la legge della circuitazione di Ampere. Maxwell aveva notato che la legge della circuitazione di Ampere era inconsistente per i campi dinamici nei riguardi dell'equazione di continuità della corrente. La legge di Ampere in termini differenziali è infatti data da:

$$\nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}, t)$$

(è uguale alla seconda equazione di Maxwell, priva del termine $\partial \underline{d}(\underline{r}, t) / \partial t$). Se a quest'ultima equazione applichiamo l'operatore divergenza, $\nabla \cdot \nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) = \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t)$, considerando che la divergenza di un rotore è nulla, otteniamo $\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t) = 0$, e passando alla forma integrale ricaviamo:

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{j} dV = \iint_S \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS = 0.$$

Ciò implica che il flusso di $\underline{j}$ uscente da una qualunque superficie chiusa è nullo, risultato che è in disaccordo con il principio di conservazione della carica espresso, nel caso di campi dinamici, dalla relazione che segue:

$$i(t) = \iint_S \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS = -\frac{\partial q(t)}{\partial t}.$$

L'incongruenza della legge di Ampere nel caso di campi dinamici è evidente se si fa riferimento al seguente esempio: consideriamo un condensatore a piatti paralleli alimentato da un generatore di tensione alternata mediante un cavo (Fig. 1.3).

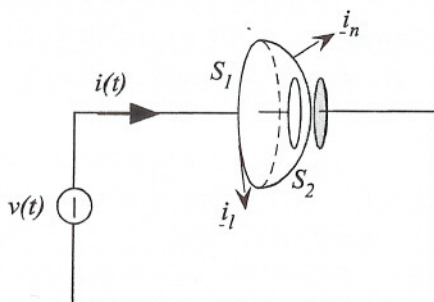


Fig.1.3 - Esempio riguardante la verifica della legge di Ampere.

Consideriamo inoltre due superfici S_1 e S_2 , appoggiate al percorso chiuso L , che immaginiamo coincidere con una circonferenza avvolgente completamente il filo. Assumiamo la convenzione tipica della regola della vite destra (il versore $\underline{i}_n$ vede $\underline{j}$ ruotare in verso antiorario). Integriamo l'equazione differenziale di Ampere, calcolandone in prima istanza il flusso attraverso la superficie S_1 che taglia il filo (superficie tratteggiata in Fig. 1.3); applicando il teorema di Stokes risulta:

$$\oint_L \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_l dl = \iint_{S_1} \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS = i(t),$$

dove $i(t)$ è la corrente che scorre lungo il filo. Se il calcolo viene effettuato relativamente alla superficie S_2 allora si trova:

$$\oint_L \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_l dl = \iint_{S_2} \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS = 0$$

(questo è vero se si suppone che tra le due armature del condensatore vi sia il vuoto, o un dielettrico senza perdite, in modo che la corrente associata ad un moto di cariche elettriche, detta di conduzione o di convezione a seconda che le cariche si muovano in un materiale allo stato solido o nel vuoto, sia nulla). I due risultati ottenuti sono ovviamente incompatibili. La legge di Ampere porta dunque a risultati diversi a seconda della scelta della superficie. Sostituendo però all'equazione di Ampere la seconda equazione di Maxwell (che presenta un termine di corrente correttivo dovuto alla variazione temporale del vettore induzione elettrica) si ricava :

$$\oint_L \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_l d\ell = \iint_{S_1} \underline{j}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_n dS = i(t),$$

$$\oint_L \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_l d\ell = \iint_{S_2} \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \cdot \underline{i}_n dS.$$

Questo ci porta a concludere che all'interno della zona compresa tra le armature del condensatore la densità di corrente $\underline{j}(\underline{r}, t)$ è nulla, ma è sostituita dal termine $\partial \underline{d} / \partial t$, che rappresenta una densità di "corrente di spostamento". Dunque la seconda equazione di Maxwell in forma integrale

$$\oint_L \underline{h} \cdot \underline{i}_l d\ell = \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \underline{d} \cdot \underline{i}_n dS + \iint_S \underline{j} \cdot \underline{i}_n dS$$

rappresenta la legge di Ampere generalizzata al caso di grandezze variabili nel tempo: a secondo membro abbiamo un termine che rappresenta il flusso della densità di corrente di spostamento e un altro termine che rappresenta il flusso di una densità di corrente di conduzione. Supponiamo ad esempio che la tensione del generatore sia $V = V_0 \sin \omega t$. La capacità di un condensatore a piastre piane parallele è data da: $C = \epsilon_0 A / d$, dove si è indicato con A l'area dell'armatura del condensatore, con d la distanza fra le armature e con ϵ_0 la permittività dielettrica del vuoto (supponendo che tra le armature vi sia il vuoto):

$$\epsilon_0 = 1/(36\pi) \cdot 10^{-9} \quad [\text{F/m}]$$

Considerando la corrente di spostamento, la legge di Ampere diviene:

$$\oint_L \underline{h}(\underline{r}, t) \cdot \underline{i}_l d\ell = i_c(t) + i_s(t),$$

con:

$$i_c(t) = C \frac{dV}{dt} = CV_0 \omega \cos \omega t.$$

Valutiamo la corrente di spostamento tra le armature del condensatore. In particolare, supponiamo che la regione di esistenza del vettore induzione elettrica sia limitata alla regione compresa tra le armature del condensatore, questo si verifica ad esempio quando il condensatore ha anelli di guardia e lavora a frequenza sufficientemente piccola ma non nulla, in modo che il campo resti confinato tra le armature e gli stessi anelli di guardia; in tal caso risulta:

$$i_s(t) = j_s A = A \frac{\partial d}{\partial t} = \epsilon_0 A \frac{\partial e}{\partial t},$$

ma $e = V/d$ e dunque:

$$i_s(t) = \epsilon_0 \frac{A}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{A}{d} V_0 \omega \cos \omega t = \omega C V_0 \cos \omega t.$$

Dunque i_c e i_s sono uguali, per cui tenendo conto della corrente di spostamento non si ha più ambiguità rispetto alla scelta della superficie che si appoggia sulla curva L .

Concludiamo che mentre per Ampere la corrente era dovuta solamente a migrazione di cariche, per Maxwell essa assume il significato più generale di variazione di induzione elettrica, oltre che di migrazione di cariche.

1.1.3. Equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza.

Trasformando le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza si ottengono le seguenti relazioni:

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \underline{B}(\underline{r}, \omega) \quad (1.22)$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega) = j\omega \underline{D}(\underline{r}, \omega) + \underline{J}(\underline{r}, \omega) \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}, \omega) = \rho(\underline{r}, \omega) \quad (1.24)$$

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, \omega) = 0 \quad (1.25)$$

Il vantaggio dell'analisi nel dominio della frequenza consiste nel fatto che le derivazioni e le integrazioni rispetto al tempo vengono sostituite da espressioni algebriche. Importante per le applicazioni è il caso dei segnali puramente sinusoidali nel tempo, in considerazione del fatto che ad alta frequenza ci troviamo spesso in presenza di segnali modulati a banda relativa molto stretta, così che per il dimensionamento di una linea di trasmissione o la progettazione di un'antenna (almeno in prima approssimazione) si adotta un'analisi a singola frequenza pari a quella della portante.

➤ Nel seguito ci riferiremo quindi ad una trattazione mediante fasori. ➤

Conoscendo la soluzione delle equazioni di Maxwell nel dominio trasformato (fasoriale), la soluzione nel dominio del tempo si può subito ottenere utilizzando una operazione di antitrasformazione che consiste nel moltiplicare il fasore corrispondente per un fattore $\exp(j\omega t)$ e prendere la parte reale del risultato.

L'equazione di continuità della corrente diventa nel dominio della frequenza:

$$\nabla \cdot \underline{J}(\underline{r}, \omega) + j\omega \rho(\underline{r}, \omega) = 0. \quad (1.26)$$

E' opportuno infine mettere in evidenza che le (1.22)-(1.25) possono essere scritte in modo simmetrico introducendo, al solito, fittizie densità di carica e corrente magnetica. E' possibile scrivere inoltre nel dominio della frequenza l'equivalente della (1.26) per correnti e cariche magnetiche.

Le espressioni differenziali nel dominio della frequenza possono poi essere scritte in forma integrale, analogamente a quanto fatto nel dominio del tempo.

§1.2 - RELAZIONI COSTITUTIVE

Le equazioni di Maxwell non contengono alcuna informazione riguardo alle proprietà del mezzo. Tuttavia, sotto l'azione del campo elettromagnetico il mezzo si polarizza, si magnetizza e, se è conduttore, viene attraversato da correnti di conduzione. Questi effetti influenzano a loro volta il campo e devono essere tenuti in conto attraverso ulteriori equazioni, dette *relazioni costitutive*.

Dal momento che i meccanismi microscopici che determinano la polarizzazione, la magnetizzazione e la conduzione dei materiali sono molteplici, la forma delle relazioni costitutive non è unica. Essa deve essere dedotta caso per caso mediante opportune esperienze.

Nel caso particolare del vuoto, che non si polarizza nè conduce, le equazioni costitutive non riflettono alcun fenomeno fisico e dipendono solo dalla scelta del sistema di unità di misura. Nel sistema MKSA si ha:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}, \quad \underline{B} = \mu_0 \underline{H}, \quad (1.27a)$$

dove $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] e $\varepsilon_0 \cong 1/(36\pi) \cdot 10^{-9}$ [F/m].

Di seguito viene riportata una descrizione sintetica dei tre meccanismi sopra citati.

Conduzione – Certi materiali presentano un numero elevato di elettroni liberi (elettroni di conduzione) rispetto a quelli legati agli atomi. In assenza di un campo applicato dall'esterno, il moto degli elettroni di conduzione è completamente casuale. La velocità media dovuta all'agitazione termica su scala macroscopica è nulla così che non c'è una corrente apprezzabile. Sotto l'azione di un campo elettromagnetico, nasce una ulteriore velocità sovrapposta a quella casuale che provoca una deriva della posizione media degli elettroni in una direzione opposta a quella del campo elettrico applicato. A causa dei meccanismi di frizione dovute alle collisioni degli elettroni con il reticolo atomico, gli elettroni, invece di accelerare sotto l'influenza del campo elettrico, migrano con velocità media di deriva proporzionale all'intensità del campo elettrico applicato. Tale fenomeno è noto come 'conduzione' e la corrispondente corrente come 'corrente di conduzione'. In termini quantitativi, se il numero di elettroni di conduzione per metro cubo è pari ad N_e , allora la densità di corrente di conduzione è data da:

$$\underline{j}' = N_e q_e \underline{v}_d$$

dove q_e è la carica dell'elettrone, e $\underline{v}_d$ rappresenta la velocità di deriva. Tale velocità varia da un conduttore ad un altro, dipendentemente dal tempo medio di collisione degli elettroni con il reticolo atomico. Essa dipende dal campo elettrico applicato secondo la:

$$\underline{v}_d = -\mu_e \underline{e}$$

dove μ_e è la mobilità dell'elettrone. Sostituendo l'ultima relazione nella relazione precedente, si ottiene

$$\underline{j}' = -\mu_e N_e q_e \underline{e} = \mu_e N_e |q_e| \underline{e}$$

Definendo la quantità σ , *conducibilità* del materiale:

$$\sigma = \mu_e N_e |q_e|$$

si ottiene la relazione

$$\underline{j}' = \sigma \underline{e}$$

che esprime la *legge di Ohm* in forma differenziale. La conducibilità σ si misura in S/m o in Ω^{-1}/m (mho/m).



Fig. 1.4 – Polarizzazione dell'atomo (a) e polarizzazione dovuta all'applicazione di un campo elettrico $\underline{e}$ (b).

Polarizzazione dielettrica – Nel caso dei materiali dielettrici, gli elettroni legati agli atomi sono quelli predominanti. Sotto l'effetto di un campo elettrico, gli elettroni che ruotano intorno al nucleo subiscono uno spostamento tale che il baricentro della nube elettronica è diverso da quello del nucleo. L'insieme della nube elettronica e del nucleo formano così un dipolo elettrico e l'atomo risulta polarizzato (Fig. 1.4a). Questa è la polarizzazione elettronica. Certi materiali presentano una polarizzazione anche in assenza di un campo elettrico applicato. Tale polarizzazione è comunque orientata in maniera casuale e quindi la polarizzazione netta su scala macroscopica risulta nulla. Esiste anche un tipo di polarizzazione (polarizzazione ionica) che si verifica a livello molecolare anziché atomico. L'applicazione di un campo esterno produce delle coppie di forze che agiscono sui singoli dipoli, risultando in una polarizzazione parzialmente coerente lungo la direzione del campo elettrico $\underline{e}$ (Fig. 1.4b). Da un punto di vista quantitativo, si può definire un vettore $\underline{P}$, vettore di polarizzazione elettrica, la cui intensità e direzione dipendono dal mezzo, tale che:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

Il primo termine a secondo membro rappresenta l'induzione che esisterebbe nello spazio libero, il secondo misura l'effetto dovuto alla polarizzazione del materiale. Per materiali isotropici e lineari vale:

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

dove χ_e prende il nome di suscettività elettrica. Esprimendo tutto in funzione del solo campo elettrico si ha:

$$\underline{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \epsilon \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}$$

Il parametro adimensionale $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 = 1 + \chi_e$ prende il nome di *permettività dielettrica o costante dielettrica relativa*.

Magnetizzazione – Il moto di rivoluzione degli elettroni intorno al nucleo e il moto di spin dei singoli elettroni originano delle spire elementari di corrente elettrica. Sommando gli effetti prodotti dalle singole spire elementari si ottiene un campo magnetico risultante per unità di volume $\underline{M}$, detto magnetizzazione o polarizzazione magnetica. Tale campo si somma al campo magnetico impresso $\underline{H}$ per cui si può pensare che

$$\underline{B} = \mu_0 (\underline{H} + \underline{M})$$

dove il primo termine a secondo membro rappresenta il contributo che si verrebbe a determinare nel vuoto. La magnetizzazione $\underline{M}$ può dare un contributo statico che nel seguito non verrà considerato. Dato che il vettore di magnetizzazione $\underline{M}$ rappresenta la somma vettoriale sull'unità di volume dei momenti magnetici elementari associati al moto degli elettroni, è ragionevole pensare che quando si applichi un campo magnetico dall'esterno la magnetizzazione aumenti a seguito della rotazione dei momenti magnetici elementari. In particolare, il vettore di magnetizzazione si può scrivere come prodotto di un parametro adimensionale χ_m , detto suscettività magnetica, ed il campo magnetico applicato $\underline{H}$. Sostituendo nella relazione precedente si ottiene nel caso di un mezzo isotropo:

$$\underline{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H} = \mu \underline{H} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

dove μ_r è la permeabilità magnetica o *costante magnetica relativa*. Molti materiali hanno un comportamento non lineare per cui χ_m e μ risultano funzione dell'intensità del campo $\underline{H}$. Si noti che, al contrario del fenomeno della polarizzazione dielettrica dove risulta sempre $\chi_e > 0$ e conseguentemente $\epsilon_r > 1$, esistono certi materiali (materiali diamagnetici) per i quali risulta $\chi_m < 0$ anche se il valore è molto prossimo allo zero, per cui risulta $\mu_r < 1$.

In definitiva, è possibile descrivere le proprietà del mezzo mediante le semplici relazioni costitutive del tipo:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}, \quad \underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}, \quad \underline{J} = \sigma \underline{E}, \quad (1.27b)$$

Evidentemente, le (1.27b) possono valere solo se il mezzo è *isotropo*, cioè se le sue caratteristiche fisiche sono uguali in tutte le direzioni; infatti i vettori che figurano in ciascuna di queste relazioni sono allineati e in rapporto costante, qualunque sia la loro direzione. Relazioni analoghe alle (1.27b) ma adatte a rappresentare il comportamento di un mezzo *anisotropo*, sono le seguenti:

$$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon_r} \underline{E}, \quad \underline{B} = \mu_0 \underline{\mu_r} \underline{H}, \quad \underline{J} = \underline{\sigma} \underline{E}, \quad (1.27c)$$

dove le permeabilità e la conducibilità sono di tipo tensoriale. Ad esempio, introducendo le componenti cartesiane di $\underline{D}$ ed $\underline{E}$ e del tensore ε_r , la relazione $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon_r} \underline{E}$ si traduce nel seguente sistema di equazioni:

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} (\varepsilon_r)_{xx} & (\varepsilon_r)_{xy} & (\varepsilon_r)_{xz} \\ (\varepsilon_r)_{yx} & (\varepsilon_r)_{yy} & (\varepsilon_r)_{yz} \\ (\varepsilon_r)_{zx} & (\varepsilon_r)_{zy} & (\varepsilon_r)_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}.$$

Con una relazione di questo tipo $\underline{D}$ ed $\underline{E}$ non sono generalmente allineati; inoltre il disallineamento e il rapporto delle intensità dipende dalla direzione.

Le relazioni costitutive del tipo (1.27b) e (1.27c) non sono valide in generale, essendo esse inadatte a rappresentare il comportamento di materiali in presenza di campi intensi e/o rapidamente variabili nello spazio o nel tempo.

Le equazioni in questione implicano che le induzioni e la densità di corrente siano legate ai vettori del campo da relazioni lineari; quindi, in un mezzo descritto dalle (1.27b) o dalle (1.27c), le induzioni e la densità di corrente dovrebbero crescere linearmente con il campo, indipendentemente dall'intensità da esso raggiunta. Un simile comportamento è però irrealistico perchè, al crescere dell'intensità, si manifestano fenomeni che modificano la polarizzabilità e le proprietà di conduzione dei materiali (per esempio scariche, saturazione, surriscaldamento, ecc.). Solo approssimativamente, quando il campo è "sufficientemente debole", i materiali si comportano in modo lineare.

Si osserva inoltre che le (1.27b) e le (1.27c) mettono in relazione vettori presi nello stesso istante e dunque esse sottintendono l'ipotesi che le intensità di polarizzazione e la densità di corrente dipendano in ogni istante dai valori dei vettori del campo considerati nello stesso istante. In realtà l'inerzia delle strutture atomiche e/o dei portatori meccanici fa sì che le variazioni temporali delle induzioni e/o delle densità di corrente seguano con un certo ritardo le variazioni temporali del campo, con ritardi che divengono apprezzabili quando le variazioni sono tanto rapide da essere sensibili in tempi paragonabili a quelli che caratterizzano la dinamica delle strutture atomiche (periodi delle oscillazioni proprie degli elettroni, tempi di rilassamento delle molecole

polari, ecc.). Per tener conto di questi effetti dinamici le equazioni costitutive devono coinvolgere non solo i vettori del campo - come avviene nelle (1.27b) e (1.27c) - ma anche i loro integrali. I mezzi che richiedono di essere rappresentati da equazioni costitutive di questo genere vengono detti "con memoria", perchè in essi le induzioni e/o la densità di corrente in un certo istante dipendono dall'evoluzione del campo negli istanti precedenti. Solo quando le variazioni del campo sono "sufficientemente lente" la memoria del mezzo può essere trascurata.

Si osserva infine che le (1.27b) e (1.27c) collegano i vettori del campo presi nello stesso punto e dunque esse implicano l'ipotesi che le induzioni e la densità di corrente siano indipendenti dalla rapidità delle variazioni del campo nell'intorno del punto considerato. Sebbene questa ipotesi sia spesso ben verificata, esistono esempi di mezzi per i quali è importante tenere conto della rapidità delle variazioni spaziali del campo (*mezzi dispersivi nello spazio*). Le equazioni costitutive di questi mezzi devono coinvolgere, oltre ai vettori del campo, anche loro integrali.

Le precedenti considerazioni indicano che, in linea di principio, le relazioni costitutive del tipo (1.27b) e (1.27c) possono essere accettabili solo quando i campi sono "sufficientemente deboli" e quando le variazioni spaziali e temporali sono "sufficientemente lente". Le stesse considerazioni mostrano inoltre che, per rimuovere queste limitazioni bisognerebbe considerare relazioni costitutive molto più complicate, rappresentate da equazioni non lineari, che coinvolgono integrali nello spazio e nel tempo dei vettori del campo.

Fortunatamente, nella maggior parte delle applicazioni relative alle onde le intensità dei campi sono sufficientemente deboli per poter trascurare la non-linearità del mezzo; inoltre la dispersività spaziale è un effetto che raramente ha importanza. Invece, tener conto della memoria è necessario perchè spesso i tempi che caratterizzano le variazioni dei campi divengono paragonabili ai tempi che caratterizzano la risposta del mezzo, già nella gamma di frequenze delle microonde. Per questa ragione, nello studio intrapreso, è sufficiente considerare la sola classe dei *mezzi lineari, non dispersivi nello spazio, con memoria*, per i quali le relazioni costitutive sono espresse da equazioni differenziali lineari, contenenti solo derivate temporali e coefficienti indipendenti dal tempo. Infine è importante osservare che, aggiungendo le tre tipiche relazioni costitutive precedentemente discusse alle equazioni di Maxwell, il problema inerente la determinazione del campo elettromagnetico diviene determinato, uguagliando il numero delle equazioni a disposizione il numero delle incognite.

§ 1.3 - EQUAZIONI DI MAXWELL IN UN MEZZO NON OMOGENEO: CONDIZIONI DI CONTINUITÀ

Per determinare in modo univoco la soluzione delle equazioni di Maxwell in situazioni di interesse pratico è necessario conoscere il comportamento dei campi elettromagnetici su eventuali superfici di separazione fra mezzi con caratteristiche elettriche diverse.

Vediamo le condizioni che devono soddisfare i campi elettromagnetici alla superficie di separazione tra due mezzi diversi. Consideriamo cioè il più semplice esempio di mezzo non omogeneo: l'insieme di due mezzi omogenei diversi, separati da una superficie Σ (Fig. 1.5).

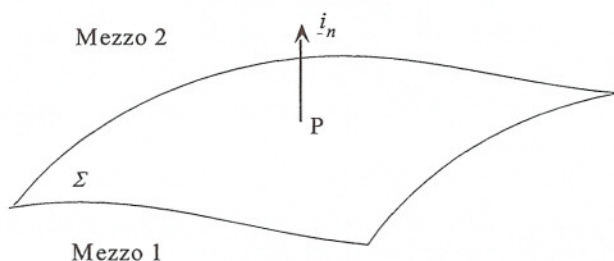


Fig. 1.5 - Interfaccia fra due mezzi dielettrici diversi.

In prossimità della superficie Σ i campi possono essere discontinui, pertanto non è possibile utilizzare le equazioni di Maxwell in forma differenziale; quindi, per ricavare la relazione tra le soluzioni nelle due regioni adiacenti, si utilizzano le equazioni di Maxwell in forma integrale (1.11)-(1.14). Nella seguente trattazione l'insieme dei vettori $(\underline{e}_1, \underline{h}_1, \underline{d}_1, \underline{b}_1)$ caratterizzerà il mezzo 1, mentre l'insieme $(\underline{e}_2, \underline{h}_2, \underline{d}_2, \underline{b}_2)$ caratterizzerà il mezzo 2.

1.3.1. Condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico.

Scelto un punto P su Σ , consideriamo una superficie rettangolare A posta a cavallo della superficie di separazione Σ stessa. Siano l e δ sufficientemente piccoli in modo da poter considerare costanti i campi nell'intorno del punto P (Fig. 1.6). Siano inoltre $\underline{i}_A$ e $\underline{i}_c$ due versori ortogonali appartenenti al piano tangente a Σ in P, di cui $\underline{i}_c$ giacente nel piano che include la superficie rettangolare A ; per essi vale:

$$\underline{i}_c \times \underline{i}_A = \underline{i}_n$$

Consideriamo la prima equazione di Maxwell in forma integrale:

$$\oint_L \underline{e} \cdot \underline{i}_l d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \underline{b} \cdot \underline{i}_n dS.$$

Se l e δ sono sufficientemente piccoli possiamo scrivere:

$$(\underline{e}_2 \cdot \underline{i}_c)l + (\underline{e}_1 \cdot (-\underline{i}_c))l = - \frac{\partial}{\partial t} (l\delta \underline{b}_1) - \frac{\partial}{\partial t} (l\delta \underline{b}_2).$$

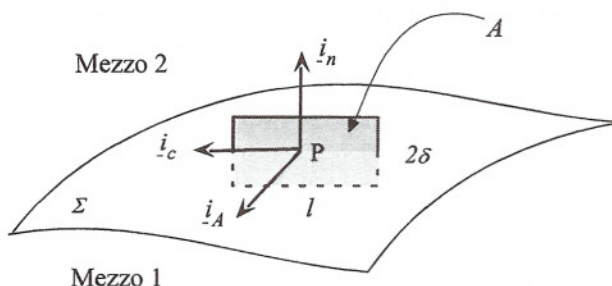


Fig. 1.6 - Applicazione delle equazioni integrali di Maxwell all'interfaccia fra due mezzi con diverse caratteristiche elettriche.

Facendo tendere δ a zero e ipotizzando che i campi siano finiti (possono essere discontinui ma comunque limitati), si ottiene:

$$\underline{i}_c \cdot \underline{e}_2 = \underline{i}_c \cdot \underline{e}_1.$$

Quest'ultima relazione deve essere valida $\forall \underline{i}_c$ ovvero per ogni vettore $\underline{i}_c$ tangente a Σ nel punto P. Dal momento che $\underline{i}_c = \underline{i}_A \times \underline{i}_n$, possiamo scrivere:

$$\underline{e}_2 \cdot (\underline{i}_A \times \underline{i}_n) = \underline{e}_1 \cdot (\underline{i}_A \times \underline{i}_n)$$

e dunque $\underline{i}_A \cdot (\underline{i}_n \times \underline{e}_2) = \underline{i}_A \cdot (\underline{i}_n \times \underline{e}_1)$, comunque sia orientato $\underline{i}_A$ sul piano tangente a Σ nel punto P. Si perviene dunque alla seguente relazione finale:

$$(\underline{i}_n \times \underline{e}_2) = (\underline{i}_n \times \underline{e}_1),$$

che esprime la continuità della componente tangenziale del campo elettrico attraverso la superficie Σ , ossia:

$$(\underline{e}_2)_{\text{tangenziale}} = (\underline{e}_1)_{\text{tangenziale}}.$$

Analogamente, applicando lo stesso procedimento alla seconda equazione di Maxwell in forma integrale, nell'ipotesi di campi finiti, si ottiene:

$$\underline{i}_A \cdot (\underline{i}_n \times (\underline{h}_2 - \underline{h}_1)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\underline{j} \cdot \underline{i}_A) \delta \quad (1.28)$$

La quantità a secondo membro $\lim_{\delta \rightarrow 0} j\delta = \underline{j}_s$ rappresenta una densità di corrente superficiale; dovendo la (1.28) valere per direzioni $\underline{i}_A$ arbitrarie, possiamo scrivere: $\underline{i}_n \times (\underline{h}_2 - \underline{h}_1) = \underline{j}_s$. Osserviamo che, se in P esiste una corrente superficiale, la densità di corrente $\underline{j}$ (A/m²) tende all'infinito, ma il prodotto $\underline{j}\delta$ resta limitato per $\delta \rightarrow 0$. Infatti, una corrente superficiale si può localizzare su un conduttore elettrico perfetto, per il quale risulta $\sigma \rightarrow \infty$; se però la conducibilità σ è finita, anche $\underline{j}$ resta finita, visto che $\underline{j} = \sigma \underline{e}$, e in tal caso dunque la quantità $\lim_{\delta \rightarrow 0} j\delta = \underline{j}_s$ va a zero.

Ricapitolando possiamo concludere che, se in P non è presente una corrente superficiale, valgono le seguenti relazioni:

$$(\underline{i}_n \times \underline{e}_2) = (\underline{i}_n \times \underline{e}_1), \quad (1.29)$$

$$(\underline{i}_n \times \underline{h}_2) = (\underline{i}_n \times \underline{h}_1), \quad (1.30)$$

mentre, se $\underline{j}_s$ risulta diversa da zero (è ciò che accade se uno dei due mezzi presenta conducibilità infinita, $\sigma \rightarrow \infty$), le relazioni da considerare sono:

$$\begin{aligned} (\underline{i}_n \times \underline{e}_2) &= (\underline{i}_n \times \underline{e}_1), \\ \underline{i}_n \times (\underline{h}_2 - \underline{h}_1) &= \underline{j}_s. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ciò significa che la componente del campo elettrico tangente alla superficie Σ è continua, mentre, per quanto riguarda la componente tangenziale di $\underline{h}$, questa risulta discontinua in presenza di una $\underline{j}_s$ diversa da zero e finita, oppure continua in assenza di correnti superficiali.

Le relazioni (1.29)-(1.31) esprimono dunque le condizioni di continuità delle componenti del campo elettrico e del campo magnetico tangenziali alla superficie di separazione Σ nel punto P.

Se si introducono anche le correnti magnetiche si può ricavare l'espressione più generale:

$$\begin{aligned} \underline{i}_n \times (\underline{e}_2 - \underline{e}_1) &= -\underline{j}_{ms} [\text{V/m}] \\ \underline{i}_n \times (\underline{h}_2 - \underline{h}_1) &= \underline{j}_s [\text{A/m}] \end{aligned} \quad (1.32)$$

($\underline{j}_{ms}$ è diversa da zero e finita se si ipotizza $\sigma_m \rightarrow \infty \Rightarrow$ conduttore magnetico perfetto, duale di un conduttore elettrico perfetto).

1.3.2. Condizioni di continuità delle componenti normali dei vettori induzione $\underline{d}$ e $\underline{b}$.

Consideriamo un volume cilindrico a cavallo dell'interfaccia Σ (Fig.1.7). Se si suppone che δ e Δs siano sufficientemente piccoli, si possono considerare i campi ($\underline{e}_1, \underline{h}_1$) costanti nel mezzo 1 e i campi ($\underline{e}_2, \underline{h}_2$) costanti all'interno del volume e sulla sua superficie.

Consideriamo ora la quarta equazione di Maxwell in forma integrale:

$$\oint_S \underline{b} \cdot \underline{i}_n dS = 0,$$

dove S è la superficie che racchiude il volume.

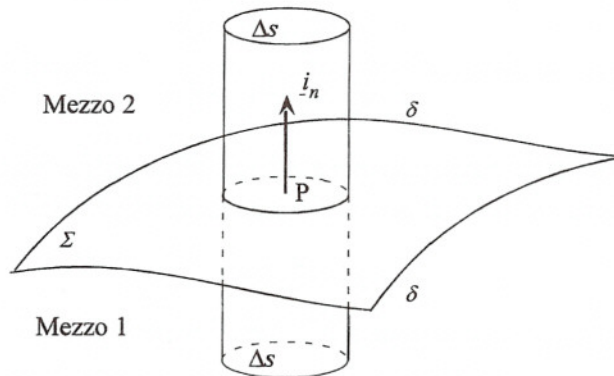


Fig.1.7 - Geometria per la derivazione della condizione di continuità per le componenti normali delle induzioni.

Se δ e Δs sono sufficientemente piccoli, il contributo dei flussi attraverso le pareti laterali è trascurabile e si ottiene:

$$\underline{b}_2 \cdot \underline{i}_n \Delta s - \underline{b}_1 \cdot \underline{i}_n \Delta s = 0$$

e dunque:

$$\underline{b}_2 \cdot \underline{i}_n = \underline{b}_1 \cdot \underline{i}_n. \quad (1.33)$$

La (1.33) esprime la continuità della componente normale dell'induzione magnetica attraverso la superficie di separazione di due mezzi. Si può ragionare in maniera analoga per la terza equazione di Maxwell in forma integrale:

$$\oiint_S \underline{d} \cdot \underline{i}_n dS = \iiint_V \rho dV.$$

Nell'ipotesi che la densità di carica ρ all'interno del cilindro non sia infinita (ovvero nell'ipotesi che non vi sia una densità di carica elettrica superficiale sulla superficie Σ), ipotesi che è verificata se la conducibilità σ dei due mezzi è finita, ricaviamo la relazione seguente:

$$\underline{d}_2 \cdot \underline{i}_n = \underline{d}_1 \cdot \underline{i}_n, \quad (1.34)$$

relazione che esprime la continuità della componente normale dell'induzione elettrica in assenza di una densità di carica superficiale.

Se invece nel punto P esiste una carica superficiale (una carica finita distribuita su uno spessore infinitesimo $\delta \rightarrow 0$), $\rho \rightarrow \infty$ e quindi dalla terza equazione di Maxwell in forma integrale si ricava:

$$\underline{i}_n \cdot (\underline{d}_2 - \underline{d}_1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho \delta = \rho_s. \quad (1.35)$$

Dunque, in presenza di una carica superficiale la componente normale dell'induzione elettrica è discontinua (una distribuzione di carica superficiale si può manifestare su un conduttore elettrico perfetto). Se si considerano anche conduttori magnetici perfetti e densità di carica magnetica superficiale, si ottiene la formulazione più generale:

$$\begin{aligned} \underline{i}_n \cdot (\underline{b}_2 - \underline{b}_1) &= \rho_{ms} \left[\text{Wb/m}^2 \right] \\ \underline{i}_n \cdot (\underline{d}_2 - \underline{d}_1) &= \rho_s \left[\text{C/m}^2 \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

Osserviamo infine che quando si vanno a risolvere le equazioni di Maxwell nelle due regioni 1 e 2 è sufficiente imporre sulla superficie di separazione fra i due mezzi le condizioni sulle componenti tangenziali dei campi, dato che quelle sulle induzioni saranno automaticamente soddisfatte (ciò è dovuto al fatto che la terza e la quarta equazione di Maxwell si ricavano rispettivamente dalla prima e dalla seconda). E' importante notare inoltre che le relazioni ricavate in questa sezione sono valide anche nel dominio della frequenza (basta sostituire i vettori con i relativi fasori).

§ 1.4 - CONSIDERAZIONI ENERGETICHE SUI CAMPI

In questo paragrafo, ci interesseremo dell'energia associata ad un campo elettromagnetico. In particolare verrà enunciato un importante teorema, il Teorema di Poynting, che rappresenta una formalizzazione del trasporto di energia elettromagnetica ed una sua quantificazione in termini di campo elettrico e magnetico.

1.4.1. Teorema di Poynting nel dominio del tempo.

Consideriamo un mezzo lineare, omogeneo, isotropo e non dispersivo sia nello spazio, che nel tempo. Possiamo definire il vettore di Poynting come segue:

$$\underline{s} = \underline{e} \times \underline{h}. \quad (1.37)$$

Valutiamone la divergenza:

$$\nabla \cdot \underline{s} = \nabla \cdot (\underline{e} \times \underline{h}) = \underline{h} \cdot \nabla \times \underline{e} - \underline{e} \cdot \nabla \times \underline{h}. \quad (1.38)$$

Combinando la (1.38) con le prime due equazioni di Maxwell in forma differenziale (1.1) e (1.2), otteniamo:

$$\nabla \cdot \underline{s} = -\underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} - \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} - \underline{e} \cdot \underline{j}. \quad (1.39)$$

Poniamo ora:

$$\underline{j} = \sigma \underline{e} + \underline{j}_0 \quad (1.40)$$

dove $\underline{j}_0$ è la densità di corrente impressa mediante l'applicazione di generatori e σ è la conducibilità del mezzo. Integriamo la (1.39) in un volume V racchiuso da una superficie S . Tenendo conto della (1.40) si ottiene:

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{s} dV + \iiint_V \left(\underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} + \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \right) dV + \iiint_V \sigma e^2 dV = - \iiint_V \underline{e} \cdot \underline{j}_0 dV.$$

Applicando a quest'ultima relazione il teorema della divergenza, si ricava:

$$\iint_S \underline{s} \cdot \underline{i}_n dS + \iiint_V \left(\underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} + \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \right) dV + \iiint_V \sigma e^2 dV = - \iiint_V \underline{e} \cdot \underline{j}_0 dV, \quad (1.41)$$

che rappresenta la forma canonica del teorema di Poynting.

La quantità a secondo membro ha le dimensioni di una potenza (essendo l'integrale di volume di una densità volumetrica di potenza); osserviamo che tale quantità diventa nulla se $\underline{j}_0 = 0$. E' ragionevole quindi pensare che tale termine rappresenti la potenza istantanea fornita dai generatori.

In particolare, la densità di corrente impressa $\underline{j}_0$, sorgente del campo elettromagnetico, può essere pensata come dovuta ad una densità di carica ρ_0 che si muove con velocità assegnata $\underline{v}$

$$\underline{j}_0 = \rho_0 \underline{v}. \quad (1.42)$$

La stessa corrente $\underline{j}_0$ genera un campo elettromagnetico, di conseguenza sulle sorgenti agisce una densità di forza:

$$\underline{f} = \rho_0 \underline{e} + \rho_0 \underline{v} \times \underline{b}. \quad (1.43)$$

Dunque, per mantenere in moto la densità di carica ρ_0 alla velocità $\underline{v}$, è necessario applicare ad essa una densità di forza di pari intensità, ma opposta rispetto alla precedente. Per ogni spostamento $d\underline{r}$ tale densità di forza compie una densità di lavoro:

$$-\underline{f} \cdot d\underline{r} = -\rho_0 \underline{e} \cdot d\underline{r} - \rho_0 \underline{v} \times \underline{b} \cdot d\underline{r}. \quad (1.44)$$

Nel tempo dt , la corrispondente densità di potenza è data da:

$$-\underline{f} \cdot \underline{v} = -\underline{e} \cdot \underline{j}_0 - \rho_0 \underline{v} \times \underline{b} \cdot \underline{v} = -\underline{e} \cdot \underline{j}_0. \quad (1.45)$$

Tutto questo ci porta a concludere che la potenza:

$$P_o = -\iiint_V \underline{e} \cdot \underline{j}_o dV \quad (1.46)$$

può essere interpretata come la potenza istantanea che i generatori devono erogare affinché possa sussistere la densità di corrente $\underline{j}_0$ e dunque il campo elettromagnetico. L'integrale al secondo membro della (1.41) rappresenta perciò la potenza fornita dalle sorgenti presenti nel volume V .

Consideriamo adesso il terzo integrale al primo membro della (1.41):

$$\iiint_V \sigma e^2 dV, \quad (1.47)$$

esso ha ancora le dimensioni di una potenza e rappresenta la potenza istantanea dissipata nel volume V per effetto Joule.

Per quanto riguarda il secondo integrale a primo membro della (1.41), per interpretarne il significato poniamo:

$$\underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} = \frac{\partial w_m}{\partial t}, \quad (1.48)$$

$$\underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} = \frac{\partial w_e}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Dal punto di vista dimensionale, entrambi i termini rappresentano ancora delle densità volumetriche di potenza. Di conseguenza, w_e ha le dimensioni di una densità di energia. Stesso discorso si può fare per w_m . Inoltre, nel caso di mezzi lineari, isotropi e non dispersivi valgono le relazioni:

$$\underline{d} = \epsilon \underline{e}, \quad \underline{b} = \mu \underline{h}, \quad (1.50)$$

per cui:

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \underline{e} \cdot \epsilon \frac{\partial \underline{e}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \underline{e} \cdot \underline{e} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon e^2 \right), \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \underline{h} \cdot \mu \frac{\partial \underline{h}}{\partial t} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \underline{h} \cdot \underline{h} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu h^2 \right). \quad (1.52)$$

Nel caso di campi statici, i termini: $\epsilon e^2 / 2$ e $\mu h^2 / 2$ rappresentano rispettivamente la densità di energia immagazzinata in un campo elettrostatico e la densità di energia immagazzinata in un campo magnetostatico. Si può dunque supporre che la grandezza scalare

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon e^2 + \frac{1}{2} \mu h^2, \quad (1.53)$$

funzione del tempo nel caso dinamico, coincida con l'energia immagazzinata nel campo elettromagnetico (d'altra parte, un campo dinamico può essere pensato come una successione di stati di equilibrio, cioè di campi statici). Dunque il termine

$$\iiint_V \left(\underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} + \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_e + w_m) dV \quad (1.54)$$

rappresenta la variazione dell'energia immagazzinata nei campi elettrico e magnetico all'interno del volume V . Nel caso di mezzi per cui non valgono le semplici relazioni costitutive (1.50), ad esempio per mezzi dispersivi, si parla dei termini $\underline{h} \cdot (\partial \underline{b} / \partial t)$ e $\underline{e} \cdot (\partial \underline{d} / \partial t)$ come di "pseudoenergie" magnetica ed elettrica, rispettivamente.

Rimane a questo punto da interpretare solo il primo integrale al primo membro della (1.41):

$$\oiint_S \underline{s} \cdot \underline{i}_n dS,$$

dove S è la superficie chiusa che racchiude il volume V , $\underline{i}_n$ la normale esterna, e $\underline{s} = \underline{e} \times \underline{h}$ il vettore di Poynting. Anche quest'ultimo integrale deve avere le dimensioni di una potenza; ciò porta a interpretare il vettore di Poynting $\underline{s}$ come un vettore "densità di flusso di potenza", misurato in Watt/m².

Il teorema di Poynting, espresso dalla (1.41), rappresenta dunque un bilancio energetico. Esso stabilisce infatti che la potenza istantanea fornita dalle sorgenti presenti nel volume V uguaglia la somma di tre termini:

- a) la potenza dissipata per effetto Joule;
- b) la variazione temporale dell'energia elettromagnetica;
- c) la potenza che fluisce attraverso la superficie S .

TH
Di
Poynting

1.4.2. Teorema di Poynting nel dominio della frequenza.

Esiste una formulazione del teorema di Poynting anche per campi sinusoidali. Consideriamo un mezzo lineare, isotropo, al più dispersivo nel tempo, caratterizzato dalle seguenti funzioni complesse della variabile ω

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_1(\omega) - j\epsilon_2(\omega), \quad (1.55)$$

$$\mu(\omega) = \mu_1(\omega) - j\mu_2(\omega). \quad (1.56)$$

Risulterà dal seguito che i termini ϵ_2 e μ_2 sono associabili a perdite nel mezzo e devono risultare sempre positivi. Si definisca poi nel dominio fasoriale, il vettore di Poynting complesso:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{E} \times \underline{H}^* = \underline{S}_r + j\underline{S}_i. \quad (1.57)$$

Valutiamone la divergenza:

$$\nabla \cdot \underline{S} = \frac{1}{2} [\underline{H}^* \cdot \nabla \times \underline{E} - \underline{E} \cdot \nabla \times \underline{H}^*] \quad (1.58)$$

e consideriamo le prime due equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega(\mu_1 - j\mu_2)\underline{H}, \quad (1.59)$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega(\epsilon_1 - j\epsilon_2)\underline{E} + \sigma\underline{E} + \underline{J}_0. \quad (1.60)$$

Coniugando la (1.60)

$$\nabla \times \underline{H}^* = -j\omega(\epsilon_1 + j\epsilon_2)\underline{E}^* + \sigma\underline{E}^* + \underline{J}_0^* \quad (1.61)$$

e sostituendo la (1.59) e la (1.61) nella (1.58), otteniamo:

$$\nabla \cdot \underline{S} + j\omega \left(\frac{\mu_1 |\underline{H}|^2}{2} - \frac{\epsilon_1 |\underline{E}|^2}{2} \right) + \frac{\omega\mu_2 |\underline{H}|^2}{2} + \frac{\omega\epsilon_2 |\underline{E}|^2}{2} + \frac{\sigma |\underline{E}|^2}{2} = -\frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \quad (1.62)$$

La (1.62) è una relazione di tipo complesso, perciò, uguagliando separatamente le parti reali e le parti immaginarie, otteniamo:

$$\nabla \cdot \underline{S}_r + \frac{\omega \mu_2 |\underline{H}|^2}{2} + \frac{\omega \varepsilon_2 |\underline{E}|^2}{2} + \frac{\sigma |\underline{E}|^2}{2} = -\Re \left\{ \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \right\}, \quad (1.63)$$

$$\nabla \cdot \underline{S}_i + 2\omega \left(\frac{\mu_1 |\underline{H}|^2}{4} - \frac{\varepsilon_1 |\underline{E}|^2}{4} \right) = -\Im \left\{ \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \right\}. \quad (1.64)$$

Le relazioni precedenti rappresentano uguaglianze fra densità di potenza medie, rispetto ad un periodo $T = 2\pi / \omega$ dell'oscillazione. *pot. medie in (w)*

Consideriamo la relazione (1.63); è immediato verificare che il termine a secondo membro $-\Re \{ \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* / 2 \}$ rappresenta l'espressione nel dominio della frequenza del valor medio temporale di $-\underline{e} \cdot \underline{j}_0$:

$$-\frac{1}{T} \int_0^T \underline{e} \cdot \underline{j}_0 dt = -\Re \left\{ \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* \right\}. \quad (1.65)$$

Dunque il secondo membro della (1.63) rappresenta la densità di potenza media (o attiva) fornita dalle sorgenti (si consulti l'appendice B per un confronto con un circuito RLC in regime sinusoidale). Analogamente, l'ultimo termine al primo membro nella (1.63) può essere così espresso¹:

$$\sigma |\underline{E}|^2 / 2 = -\Re \{ \sigma \underline{E} \cdot \underline{E}^* / 2 \} = \langle \sigma \underline{e} \cdot \underline{e} \rangle; \quad (1.66)$$

esso rappresenta il valor medio temporale della potenza dissipata per effetto Joule. Inoltre, si può verificare che:

¹ a) $\langle \underline{f} \cdot \underline{g} \rangle =$ valor medio temporale del prodotto scalare nel dominio del tempo $= \Re \left\{ \frac{1}{2} \underline{F} \cdot \underline{G}^* \right\}$;

infatti sia $\underline{f} = \Re \{ \underline{F} e^{j\omega t} \} = \frac{\underline{F} e^{j\omega t} + \underline{F}^* e^{-j\omega t}}{2}$, $\underline{g} = \Re \{ \underline{G} e^{j\omega t} \} = \frac{\underline{G} e^{j\omega t} + \underline{G}^* e^{-j\omega t}}{2}$, allora

$$\underline{f} \cdot \underline{g} = \frac{\underline{F} e^{j\omega t} + \underline{F}^* e^{-j\omega t}}{2} \cdot \frac{\underline{G} e^{j\omega t} + \underline{G}^* e^{-j\omega t}}{2} = \frac{\underline{F} \cdot \underline{G}^* + \underline{F}^* \cdot \underline{G}}{4} + \frac{\underline{F} \cdot \underline{G} e^{2j\omega t} + \underline{F}^* \cdot \underline{G}^* e^{-2j\omega t}}{4} =$$

$$= \Re \left\{ \frac{\underline{F} \cdot \underline{G}^*}{2} \right\} + \Re \left\{ \frac{\underline{F} \cdot \underline{G}}{2} e^{2j\omega t} \right\} \Rightarrow \langle \underline{f} \cdot \underline{g} \rangle = \Re \left\{ \frac{\underline{F} \cdot \underline{G}^*}{2} \right\};$$

b) $\langle \underline{f} \times \underline{g} \rangle = \Re \left\{ \frac{1}{2} \underline{F} \times \underline{G}^* \right\};$

c) se $\underline{g}_1 = \partial \underline{g} / \partial t$, allora si ha: $\langle \underline{f} \cdot \underline{g}_1 \rangle = \Re \left\{ -\frac{j\omega}{2} \underline{F} \cdot \underline{G}^* \right\}.$

$$\left\langle \underline{e} \cdot \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \right\rangle = -\Re \left\{ \frac{j\omega}{2} \underline{E} \cdot \underline{D}^* \right\} = -\Re \left\{ \frac{j\omega}{2} \underline{E} \cdot [(\epsilon_1 - j\epsilon_2) \underline{E}]^* \right\} =$$

$$= \Re \left\{ -\frac{j\omega}{2} \underline{E} \cdot [(\epsilon_1 + j\epsilon_2) \underline{E}^*] \right\} = \frac{\omega \epsilon_2}{2} |\underline{E}|^2$$

e analogamente che:

$$\left\langle \underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\omega \mu_2}{2} |\underline{H}|^2$$

Ricordiamo a questo punto la (1.48) e la (1.49), dove w_e e w_m hanno le dimensioni di una densità di energia e $\partial w_e / \partial t$ e $\partial w_m / \partial t$ di una densità di potenza. Dalle ultime relazioni possiamo dunque dedurre che i termini $\omega \epsilon_2 |\underline{E}|^2 / 2$ e $\omega \mu_2 |\underline{H}|^2 / 2$ corrispondono ai valori medi delle densità di potenza dissipate per meccanismi diversi da quelli connessi alla conducibilità del materiale. Queste ulteriori perdite, di natura non conduttiva, sono riferite a un'isteresi dielettrica e magnetica, rispettivamente. Esse sono da ricollegare a forze di attrito che ostacolano la polarizzazione di un dielettrico e la magnetizzazione di un materiale magnetico.

L'equazione (1.63) mostra anche che, affinché i due termini $\omega \epsilon_2 |\underline{E}|^2 / 2$ e $\omega \mu_2 |\underline{H}|^2 / 2$ rappresentino potenze dissipate, i termini ϵ_2 e μ_2 devono essere positivi. Da ciò discende che le parti immaginarie di ϵ e μ devono essere quantità negative².

Analizziamo adesso l'equazione (1.64) relativa alla parte immaginaria. Si tenga presente che vale la seguente relazione:

$$\langle w_e \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \underline{e} \cdot \underline{d} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \underline{e} \cdot \underline{d} \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D}^* \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{1}{2} \underline{E} \cdot [(\epsilon_1 + j\epsilon_2) \underline{E}^*] \right\} = \frac{\epsilon_1 |\underline{E}|^2}{4}$$

e allo stesso modo:

$$\langle w_m \rangle = \frac{\mu_1 |\underline{H}|^2}{4}$$

Ora $\langle w_e \rangle$ e $\langle w_m \rangle$ rappresentano il valor medio temporale della densità di energia elettrica e magnetica, quindi osserviamo che il secondo termine a primo membro nella (1.64) rappresenta la differenza tra i valori medi delle densità di energia di tipo magnetico e di tipo elettrico rispettivamente. Integriamo ora le relazioni (1.63) e (1.64)

² I materiali comunemente utilizzati nelle applicazioni elettromagnetiche vengono caratterizzati dal cosiddetto angolo di perdita δ , definito come $\tan \delta = \epsilon_2 / \epsilon_1$. Nel caso in cui il materiale presenti sia una conducibilità σ sia delle perdite per isteresi dielettrica ϵ_2 , allora si ha: $\tan \delta = (\sigma / \omega + \epsilon_2) / \epsilon_1$.

su un volume V che contiene le sorgenti, racchiuso da una superficie S di normale esterna $\underline{i}_n$. Poniamo inoltre

$$-\iiint_V \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{J}_0^* dV = P_r + jP_i, \quad (1.69)$$

dividendo cioè in parte reale P_r e immaginaria P_i la potenza fornita dalle sorgenti. Applicando il teorema della divergenza, otteniamo:

$$\oiint_S \underline{S}_r \cdot \underline{i}_n dS + \iiint_V \left(\frac{\omega \mu_2 |\underline{H}|^2}{2} + \frac{\omega \varepsilon_2 |\underline{E}|^2}{2} \right) dV + \iiint_V \frac{\sigma |\underline{E}|^2}{2} dV = P_r, \quad (1.70)$$

$$\oiint_S \underline{S}_i \cdot \underline{i}_n dS + 2\omega \iiint_V \left(\frac{\mu_1 |\underline{H}|^2}{4} - \frac{\varepsilon_1 |\underline{E}|^2}{4} \right) dV = P_i. \quad (1.71)$$

Il secondo membro della (1.70) corrisponde alla potenza media attiva fornita dalle sorgenti presenti nel volume V ; al primo membro della (1.70) troviamo invece la potenza media dissipata per effetto Joule nel volume V , la potenza media dissipata in V per isteresi dielettrica e magnetica, la potenza media, o attiva, che fluisce attraverso la superficie S .

Dalla relazione (1.71) discende che alle sorgenti è richiesta anche una potenza reattiva; dividiamo tale relazione per 2ω :

$$\frac{1}{2\omega} \oiint_S \underline{S}_i \cdot \underline{i}_n dS + \iiint_V \left(\frac{\mu_1 |\underline{H}|^2}{4} - \frac{\varepsilon_1 |\underline{E}|^2}{4} \right) dV = \frac{P_i}{2\omega}. \quad (1.72)$$

Quest'ultima relazione ci dice che la potenza reattiva fornita dalle sorgenti divisa per 2ω uguaglia la differenza fra i valori medi delle energie magnetica ed elettrica (per un mezzo non dispersivo) o pseudoenergie (per un mezzo dispersivo), immagazzinate in V ed esterne alla superficie S (flusso di $\underline{S}_i$ attraverso la superficie S).

La potenza reattiva, divisa per 2ω , rappresenta quindi un'energia di scambio tra sorgenti ed ambiente esterno: questa energia è successivamente immagazzinata sotto forma di energia magnetica ed elettrica (per un mezzo non dispersivo). Se nel periodo considerato i valori medi delle due forme di energia non sono uguali, devono essere i generatori ad assicurare l'equilibrio, fornendo energia all'ambiente esterno durante una parte del periodo, e ricevendola nella restante parte.

Può succedere, in condizioni di risonanza, che il secondo termine al primo membro della (1.72) sia nullo; in tal caso risulta:

$$\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle. \quad (1.73)$$

CAPITOLO 2**ONDE PIANE****§ 2.1 - ONDE PIANE NEL DOMINIO DEL TEMPO**

In questo capitolo verrà ricavata una particolare soluzione delle equazioni di Maxwell: la soluzione di tipo onda piana. Questa soluzione, pur essendo particolarmente semplice, riveste una notevole importanza in quanto l'onda irradiata da un'antenna ad una distanza sufficientemente grande ha una struttura che almeno localmente coincide con quella di un'onda piana. Inoltre la soluzione di onda piana consente di introdurre i parametri caratteristici della propagazione elettromagnetica e alcuni fenomeni ad essa associati quali, ad esempio, quelli della riflessione e della rifrazione delle onde elettromagnetiche.

2.1.1 Soluzione delle equazioni di Maxwell nel D.T. nello spazio libero, in assenza di sorgenti.

Supponiamo di essere nello spazio libero (mezzo lineare, isotropo, omogeneo e non dispersivo). In tale mezzo le relazioni costitutive assumono la forma più semplice:

$$\underline{d}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \underline{e}(\underline{r}, t) \quad (2.1)$$

$$\underline{b}(\underline{r}, t) = \mu_0 \underline{h}(\underline{r}, t) \quad (2.2)$$

Il sistema delle equazioni di Maxwell in forma differenziale in assenza di sorgenti ($\underline{j}(\underline{r}, t) = 0$, $\rho(\underline{r}, t) = 0$) risulta:

$$\nabla \times \underline{e}(\underline{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{h}(\underline{r}, t) \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \underline{h}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{e}(\underline{r}, t) \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot [\epsilon_0 \underline{e}(\underline{r}, t)] = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot [\mu_0 \underline{h}(\underline{r}, t)] = 0 \quad (2.6)$$

Ipotizziamo che i campi $\underline{e}$ ed $\underline{h}$, in generale funzioni di x, y, z e t , dipendano solo da z e t , cioè andiamo a vedere quali sono le caratteristiche di un campo, soluzione delle equazioni di Maxwell, che dipende solo dall'ascissa z e dal tempo t .

(N.B.: studiando il sistema in assenza di sorgenti si ottiene una soluzione generale delle equazioni di Maxwell; se invece si considerano anche le sorgenti si ottiene una soluzione particolare).

Consideriamo dapprima la prima equazione di Maxwell (2.3); essendo:

$$\nabla \times \underline{e} = \begin{vmatrix} \underline{i}_x & \underline{i}_y & \underline{i}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ e_x & e_y & e_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial e_y}{\partial z} \underline{i}_x + \frac{\partial e_x}{\partial z} \underline{i}_y \quad (2.7)$$

e sostituendo questo risultato nella (2.3), otteniamo:

$$-\frac{\partial e_y}{\partial z} \underline{i}_x + \frac{\partial e_x}{\partial z} \underline{i}_y = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (h_x \underline{i}_x + h_y \underline{i}_y + h_z \underline{i}_z) \quad (2.8)$$

Analogamente, dalla seconda equazione di Maxwell (2.4) ricaviamo:

$$-\frac{\partial h_y}{\partial z} \underline{i}_x + \frac{\partial h_x}{\partial z} \underline{i}_y = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (e_x \underline{i}_x + e_y \underline{i}_y + e_z \underline{i}_z) \quad (2.9)$$

(N.B.: prenderemo in considerazione solo le prime due equazioni di Maxwell, perchè quelle alle divergenze dipendono da queste).

Le equazioni (2.8) e (2.9) sono due equazioni di tipo vettoriale; da esse si ricavano sei equazioni scalari:

$$\begin{cases} \frac{\partial e_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial h_x}{\partial t} \\ \frac{\partial h_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial e_y}{\partial t} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial e_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial h_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial h_y}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial e_x}{\partial t} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h_z}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial e_z}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Dunque, introducendo l'ipotesi che i campi dipendano solo da z e da t , ci siamo ricondotti a risolvere 3 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite, invece di un sistema di 6 equazioni in 6 incognite. I tre sistemi (2.10), (2.11) e (2.12) sono indipendenti l'uno dall'altro, quindi la soluzione è molto più semplice. E' evidente inoltre l'analogia

esistente fra il primo ed il secondo sistema, (2.10) e (2.11); tale analogia implica che è sufficiente risolvere il primo per conoscere la soluzione anche del secondo.

Dal terzo sistema (2.12) si vede subito che le componenti e_z e h_z devono essere costanti nel tempo, cioè si tratta di componenti statiche; tali componenti possono essere considerate nulle, dato che siamo interessati solo ai campi dinamici.

Consideriamo il sistema (2.11): per ricavare una soluzione, deriviamo la prima equazione rispetto a z e la seconda rispetto al tempo

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 h_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 h_y}{\partial z \partial t} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} \end{cases} \quad (2.13)$$

Operando per sostituzione, troviamo:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} \quad (2.14)$$

L'equazione precedente è nota come equazione di D'Alembert, la cui soluzione generale è la seguente:

$$e_x = f_1(z - ct) + f_2(z + ct) \quad (2.15)$$

dove f_1 e f_2 sono funzioni che dipendono dal problema specifico che si sta trattando, mentre

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (2.16)$$

ha le dimensioni di una velocità. Per verificare che la soluzione della (2.14) è data proprio dalla (2.15), basta sostituire quest'ultima nella seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

che è uguale alla (2.14), dove però adesso figura espressamente la velocità c .

Dal momento che il mezzo preso in esame è lineare, vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Possiamo dunque considerare solo la prima parte della soluzione

$$e_x = f_1(z - ct) \quad (2.18)$$

ponendo:

$$u = z - ct. \quad (2.19)$$

f_1 è una funzione di due variabili; esisterà dunque un insieme di coppie di valori di z e di ct per cui f_1 assume sempre lo stesso valore. Fissato un particolare valore di u , $u_0 = z_0 - ct_0$,

in corrispondenza del quale il campo elettrico assuma il valore $e_x(u_0)$, si incrementino ora i valori di z e t in modo tale che il campo resti costante, cioè in modo tale che:

$$(z_0 + \Delta z) - c(t_0 + \Delta t) = z_0 - ct_0 = u_0 \quad (2.20)$$

Da quest'ultima relazione si ricava che:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = c \quad (2.21)$$

Ciò vuol dire che se ci spostiamo di una quantità Δz sull'asse z e per un ritardo temporale Δt , con Δz e Δt tali da soddisfare la (2.21), u resta costante e quindi resta costante anche f_1 ; questo significa che la funzione f_1 trasla lungo l'asse z con velocità c . Dunque, la forma d'onda $e_x(z-ct)$, trasla rigidamente senza deformarsi nel verso positivo dell'asse z con velocità c .

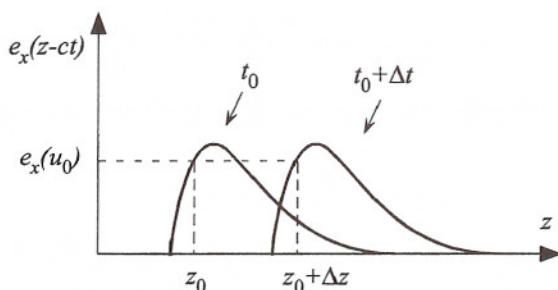


Fig. 2.1 Rappresentazione di un segnale associato ad un'onda piana che si propaga nella direzione $z > 0$.

Se esaminiamo la seconda parte della soluzione (2.15), ovvero $f_2(z+ct)$ anch'essa rappresenta "un'onda", che però si propaga nel verso negativo dell'asse z , sempre con velocità c .

A questo punto dobbiamo cercare una soluzione per h_y . A tal fine, potremmo operare nello stesso modo sul sistema (2.11), ottenendo che h_y si può esprimere nel seguente modo:

$$h_y = f_3(z-ct) + f_4(z+ct). \quad (2.22)$$

Tale relazione non fornisce però informazioni ulteriori utili alla determinazione della soluzione; esiste invece un altro modo di operare che ci consente di determinare una relazione fra campo magnetico ed elettrico.

Dal sistema (2.11) si ha:

$$\frac{\partial h_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial e_x}{\partial t}; \quad (2.23)$$

supponendo che h_y sia funzione di u al pari di e_x , si può scrivere:

$$\frac{\partial h_y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial e_x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.24)$$

D'altra parte $u=z-ct$ (si veda l'eq. 2.19), per cui:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c$$

e quindi la (2.24) si riduce a:

$$\frac{\partial h_y}{\partial u} = \varepsilon_0 c \frac{\partial e_x}{\partial u} \quad (2.25)$$

tenendo poi conto della (2.16) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_y}{\partial u} - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\partial e_x}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial u} \left[h_y - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e_x \right] &= 0 \end{aligned}$$

e infine:

$$h_y - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e_x = \text{costante rispetto ad } u \quad (2.26)$$

Per stabilire il valore di tale costante, osserviamo che, essendo il campo un fenomeno fisico, si può sempre supporre che esso sia nullo all'esterno di un certo intervallo di tempo e di spazio (si supponga ad esempio il campo nullo all'esterno di un intervallo $[z_1, z_2]$ ad un certo istante t ; ne segue che il campo, come funzione di u è nullo all'esterno dell'intervallo $[z_1-ct, z_2-ct]$); la costante deve dunque essere uguale a zero e quindi:

$$h_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} e_x \quad (2.27)$$

Il fattore $\sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}$ ha le dimensioni di un'ammettenza, detta "ammettenza intrinseca del mezzo". Al suo inverso, si dà il nome di "impedenza intrinseca del mezzo" ζ_0 :

$$\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cong 377 \Omega \cong 120 \pi \Omega \quad (2.28)$$

Dai risultati ottenuti segue che le componenti del campo elettrico e magnetico diverse da zero (o meglio dinamiche), soluzioni del sistema (2.11), sono perpendicolari alla direzione di propagazione e perpendicolari fra di loro; inoltre, i loro moduli sono legati dalla relazione (2.27).

Questa particolare soluzione del sistema di equazioni di Maxwell è quindi un'onda polarizzata linearmente nel piano xy , che si propaga lungo l'asse z , conservando la sua forma, con velocità

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec} \quad (2.29)$$

A questa onda si dà il nome di "onda piana", poichè i campi sono uniformi sui piani ortogonali alla direzione di propagazione.

Risolvendo l'altro sistema di equazioni (2.10), si trovano relazioni analoghe per h_x ed e_y . In particolare per il contributo $f_1(z - ct)$, cioè per l'onda viaggiante in direzione i_z , si ha:

$$e_y = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} h_x = -\zeta_0 h_x \quad (2.30)$$

In conclusione risulta:

$$\frac{e_x}{h_y} = -\frac{e_y}{h_x} = \zeta_0 \quad (2.31)$$

per cui, istante per istante, si ha la situazione rappresentata nella figura 2.2.

La soluzione di tipo onda piana ha la seguenti proprietà:

- il campo elettrico $\underline{e}$ e il campo magnetico $\underline{h}$ sono perpendicolari fra di loro;
- i moduli di $\underline{e}$ ed $\underline{h}$ sono legati tra loro dalla costante di proporzionalità ζ_0 ;
- il loro prodotto vettoriale $\underline{e} \times \underline{h}$ è un vettore orientato lungo l'asse z : per l'onda che viaggia nel verso positivo dell'asse z , ossia per $f_1(z - ct)$, $\underline{e} \times \underline{h}$ risulta diretto nel verso positivo dell'asse z , mentre per l'onda che viaggia nel verso negativo dell'asse z , ossia per $f_2(z + ct)$, $\underline{e} \times \underline{h}$ risulta diretto nel verso negativo dell'asse z . Per l'onda che si propaga in direzione $z > 0$ si ha:

$$\underline{h} = \frac{1}{\zeta_0} i_z \times \underline{e} \Rightarrow \underline{e} = \zeta_0 \underline{h} \times i_z,$$

mentre per l'onda che si propaga in direzione $z < 0$ si ha:

$$\underline{h} = \frac{1}{\zeta_0} (-i_z) \times \underline{e} \Rightarrow \underline{e} = \zeta_0 \underline{h} \times (-i_z)$$

Inoltre, ad ogni istante di tempo t , i campi $\underline{e}$ ed $\underline{h}$ sono costanti su ogni piano perpendicolare alla direzione di propagazione (si parla di onde "piane uniformi").

N.B.: l'ipotesi di dipendenza dei campi solo da z e da t è un'ipotesi semplificativa utilizzata per agevolare i calcoli. Se avessimo considerato anche una dipendenza da x e y , si sarebbero trovati gli stessi risultati con una direzione di propagazione non coincidente con uno degli assi coordinati.

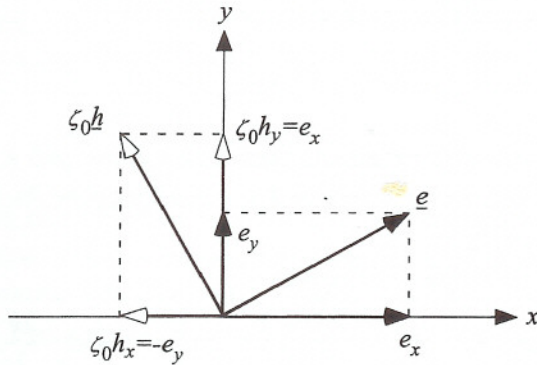


Fig. 2.2 Rappresentazione dei vettori campo elettrico e campo magnetico appartenenti al piano perpendicolare alla direzione di propagazione e mutuamente ortogonali.

Per capire che senso abbia, da un punto di vista fisico, la soluzione di tipo "onda piana" e quale sia la sua utilità pratica, facciamo ora le seguenti osservazioni: il campo associato ad un'onda piana è uniforme su piani perpendicolari alla direzione di propagazione; quindi, ritenendo tali piani infiniti, all'onda piana verrebbe associata una potenza infinita, il che da un punto di vista fisico è assurdo; ciò però non significa che la rappresentazione del campo mediante onde piane sia inutile. Infatti, da un punto di vista pratico, campi di tipo "onda piana" possono esistere in regioni limitate dello spazio. Ad esempio, il campo irradiato da un'antenna è formato da onde sferiche ma, ad una distanza sufficientemente grande dall'antenna e limitatamente ad una certa zona del fronte d'onda, possiamo considerare l'onda come piana (onda localmente piana). Inoltre, l'ipotesi di assenza di sorgenti può essere interpretata come una situazione in cui le sorgenti si trovano a grande distanza dal punto in cui vogliamo valutare i campi (Fig.2.3).

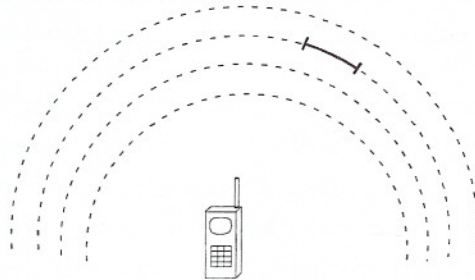


Fig. 2.3 Approssimazione dell'onda sferica irradiata dall'antenna con un'onda localmente piana.

Vediamo ora un esempio riguardante i concetti ora esposti. Consideriamo la seguente struttura per il campo elettrico (funzione solo di z e t):

$$e_x = 0; e_z = 0; e_y = b \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right]$$

e_y è funzione periodica di z con periodo di ripetizione spaziale pari a λ ed è anche funzione periodica rispetto al tempo di periodo $T = \lambda / c$ (si suppone che il mezzo sia il vuoto per il quale $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$).

La frequenza di tale segnale risulta $f = 1/T = c/\lambda$ da cui:

$$e_y = b \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right] = b \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} z - 2\pi f t \right] = b \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} z \right)$$

es. 1 pari

con $\omega = 2\pi f$ pulsazione del segnale e $\beta = 2\pi/\lambda$, costante di fase o di propagazione. Questo campo elettrico soddisfa l'equazione delle onde; infatti, svolgendo i calcoli, si trova:

$$\frac{\partial e_y}{\partial z} = -b \frac{2\pi}{\lambda} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right]$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} = -b \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right]$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial t} = bc \frac{2\pi}{\lambda} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right]$$

$$\frac{\partial^2 e_y}{\partial t^2} = -bc^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (z - ct) \right]$$

e, sostituendo le espressioni di $\partial^2 e_y / \partial z^2$ e $\partial^2 e_y / \partial t^2$ nell'equazione di D'Alembert, si vede che quest'ultima è soddisfatta. Non c'è dipendenza del campo elettrico da x e da y e quindi si tratta di un'onda piana, pertanto per il campo magnetico si ha:

$$h_y = 0$$

$$h_z = 0$$

$$h_x = -\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} e_y$$

Osserviamo che, per quanto riguarda e_y , si ha:

$$\text{per } t=0, e_y = b \cos \beta z,$$

$$\text{per } t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{\omega} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2\omega}, e_y = b \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta z \right) = b \sin \beta z;$$

ciò vuol dire che il punto P (si veda Fig.2.4) in un intervallo di tempo pari a un quarto di periodo, $\Delta t = T/4 = \lambda/4c$, avanza in direzione i_z di un tratto

$$\Delta z = \frac{\pi/2}{\beta} = \frac{cT}{4} = \frac{\lambda}{4}$$

$$= c \Delta t = \frac{c \lambda}{4c} = \frac{\lambda}{4}$$

Dunque l'onda è un'onda piana uniforme (campi indipendenti da x e da y), che si propaga in direzione i_z con velocità pari a c , velocità della luce nel vuoto. Siccome poi $\underline{e}$ ed $\underline{h}$ non cambiano direzione, l'onda si dice polarizzata linearmente; nel caso in questione l'onda è polarizzata linearmente lungo l'asse x (si prende come riferimento la direzione del campo elettrico).

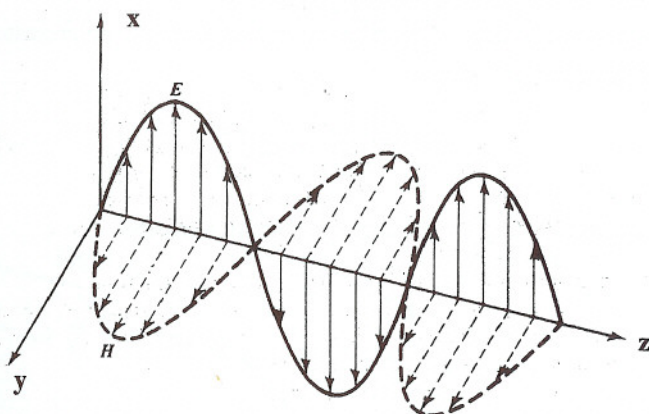


Fig. 2.4 Andamenti dei vettori campo elettrico e campo magnetico associati ad un'onda piana che si propaga nella direzione $z > 0$ ed è polarizzata linearmente lungo x .

2.1.2 Polarizzazione delle onde piane nel dominio temporale

La polarizzazione di un'onda piana, da non confondersi con la polarizzazione di un dielettrico, è quella proprietà dell'onda che descrive la direzione e la relativa ampiezza del vettore campo elettrico. Per definire univocamente la polarizzazione di un'onda bisogna considerare una posizione fissata nello spazio e osservare lungo la direzione di propagazione: in questo modo, la polarizzazione è la figura (curva) tracciata dall'estremità del vettore campo elettrico in funzione del tempo.

Nel caso più generale, il campo elettrico $\underline{e}$, associato ad un'onda piana, ha entrambe le componenti e_x ed e_y diverse da zero.

Consideriamo la situazione su un piano perpendicolare all'asse z : per semplicità consideriamo il piano $z=0$. Supponiamo che le due componenti e_x e e_y abbiano il seguente andamento sinusoidale nel tempo:

$$\begin{aligned} e_x &= a \cos(\omega t - \beta z) = a \cos(\omega t) \\ e_y &= b \cos(\omega t - \beta z + \delta) = b \cos(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

Sempre osservando la situazione nel piano $z=0$, il vettore campo elettrico totale sarà dato da

$$\underline{e} = e_x \underline{i}_x + e_y \underline{i}_y = a \cos(\omega t) \underline{i}_x + b \cos(\omega t + \delta) \underline{i}_y$$

Analizziamo ora l'andamento temporale del campo elettrico $\underline{e}$ al variare del parametro δ .

Caso particolare $\delta=0$: POLARIZZAZIONE LINEARE

Se le due componenti del campo elettrico sono in fase, $\underline{e}$ risulta polarizzato linearmente in una direzione che forma un angolo

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{e_y}{e_x} \right) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b}{a}$$

rispetto all'asse x . Infatti, l'angolo α è costante rispetto al tempo.

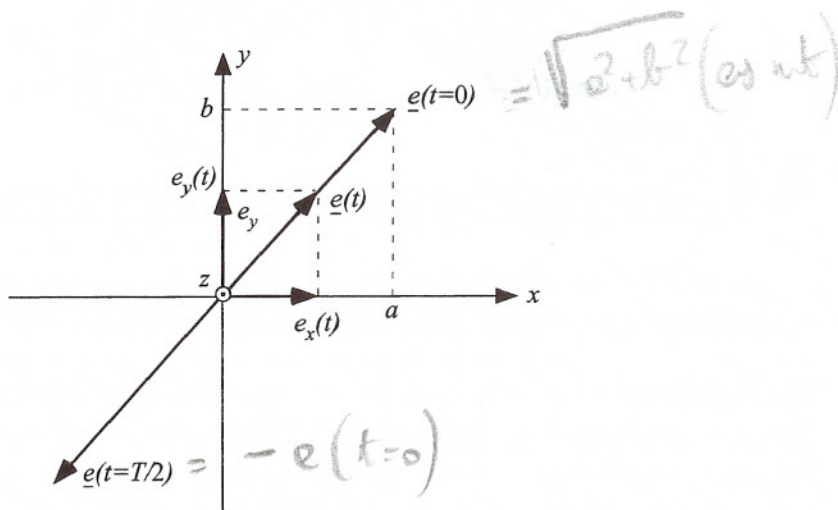


Fig. 2.5 Onda piana polarizzata linearmente

Caso particolare $a=b$ e $\delta = \pm\pi/2$: POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

$$\begin{aligned}
 \underline{e} &= a \cos(\omega t) \underline{i}_x + a \cos\left(\omega t \pm \frac{\pi}{2}\right) \underline{i}_y = \\
 &= a \cos(\omega t) \underline{i}_x \pm a \sin(\omega t) \underline{i}_y \\
 \Rightarrow |\underline{e}| &= a \text{ in qualunque istante di tempo } t.
 \end{aligned}$$

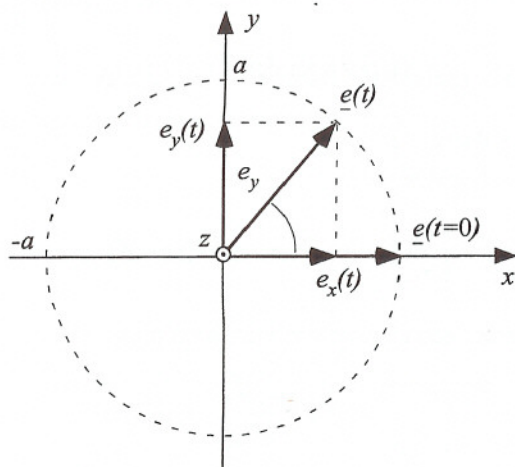


Fig. 2.6 Onda piana polarizzata circolarmente.

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{e_y}{e_x}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\mp \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t}\right) = \mp \omega t$$

per determinare il senso di rotazione basta considerare due diversi istanti di tempo.

1) se $\delta = \pi/2$ si ha la seguente situazione:

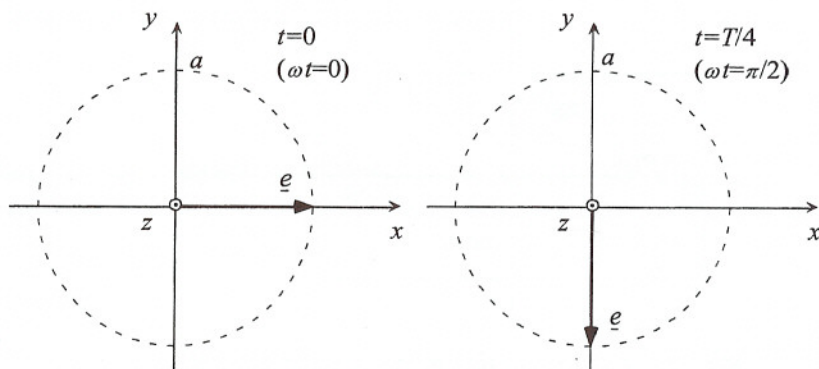


Fig. 2.7 Onda piana con polarizzazione circolare destrorsa

il vettore $\underline{e}$ ruota in senso orario rispetto ad un osservatore posto lungo la direzione di propagazione $\hat{i}_z$ e il suo estremo descrive una circonferenza. L'onda piana presenta una polarizzazione circolare destrorsa (il vettore $\underline{e}$ ruota con velocità angolare costante $-\omega$).

2) se $\delta = -\pi/2$, il vettore $\underline{e}$ ruota invece in senso antiorario: $\Rightarrow$ polarizzazione circolare levogira (il vettore $\underline{e}$ ruota con velocità angolare costante $+\omega$).

Caso generale $a \neq b$ e $\delta \neq \pm\pi/2$: POLARIZZAZIONE ELLITTICA

(RIPRISLA SPIEGARE)

$$e_x = a \cos(\omega t)$$

$$e_y = b \cos(\omega t + \delta)$$

$$\left(\frac{e_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{b}\right)^2 = \cos^2 \omega t + \cos^2(\omega t + \delta)$$

Eliminando $\cos \omega t$ si ottiene l'equazione di un'ellisse sul piano xy :

$$\left(\frac{e_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{b}\right)^2 - 2 \cos \delta \frac{e_x}{a} \frac{e_y}{b} - \sin^2 \delta = 0$$

Risolviendo la precedente equazione di secondo grado nei seguenti casi particolari si ha:

$$1) \text{ se } e_x = a \Rightarrow e_y = b \cos \delta$$

$$2) \text{ se } e_x = -a \Rightarrow e_y = -b \cos \delta$$

$$3) \text{ se } e_y = b \Rightarrow e_x = a \cos \delta$$

$$4) \text{ se } e_y = -b \Rightarrow e_x = -a \cos \delta$$

$$\begin{aligned} & \omega t = 0 \\ & \omega t = 180^\circ \\ & \omega t = -\delta \\ & \omega t + \delta = 180^\circ \end{aligned}$$

Tali punti appartengono all'ellisse (Fig. 2.8); inoltre è sempre $|e_x| < a$ e $|e_y| < b$.

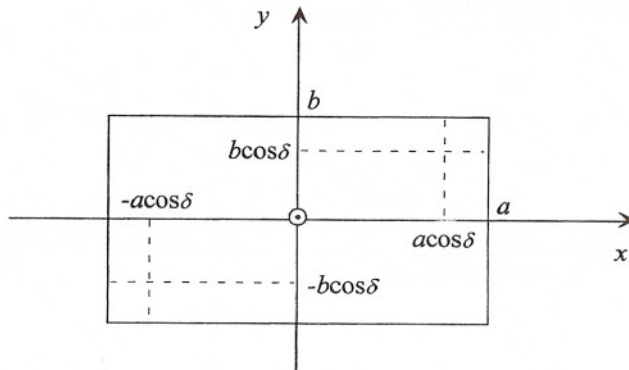


Fig. 2.8 – Costruzione dell'ellisse di polarizzazione

Dunque le rette $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$ sono tangenti alla curva nei punti precedenti. Se si cambia sistema di riferimento ruotando il sistema di assi xy di un angolo θ tale che:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos \delta$$

allora l'equazione precedente diviene:

$$(e_{x'}/a')^2 + (e_{y'}/b')^2 = 1$$

e questa è l'equazione di un'ellisse con assi x' e y' (Fig. 2.9).

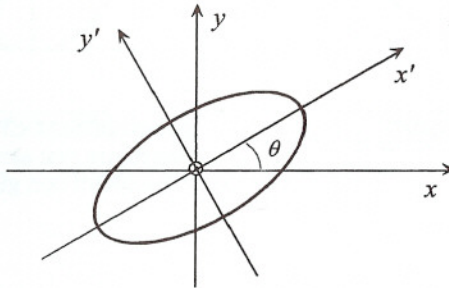


Fig. 2.9 Onda piana polarizzata ellitticamente

L'angolo che il vettore $\underline{e}$ forma con l'asse x è dato stavolta da:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_y}{e_x} = \frac{b \cos(\omega t + \delta)}{a \cos(\omega t)}$$

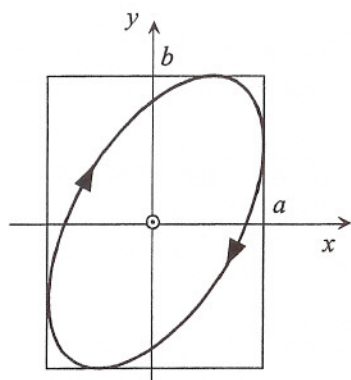
L'ellisse è percorsa con velocità angolare istantanea:

$$\Omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} = -\omega \frac{ab \sin \delta}{e^2(t)}$$

ed una rotazione completa viene effettuata in un periodo $T = 2\pi/\omega$.

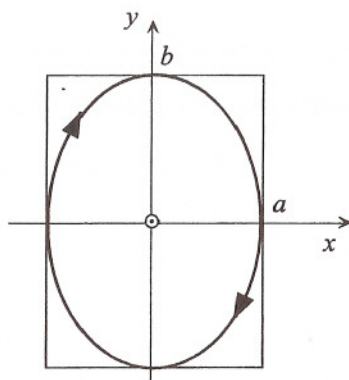
Supponiamo ora che sia $a < b$ e rappresentiamo la situazione per diversi valori di δ .

1) $\delta = \pi/4$



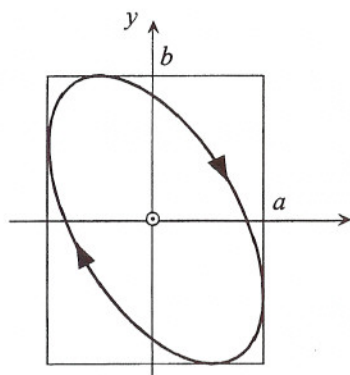
polarizzazione ellittica destrogira

2) $\delta = \pi/2$



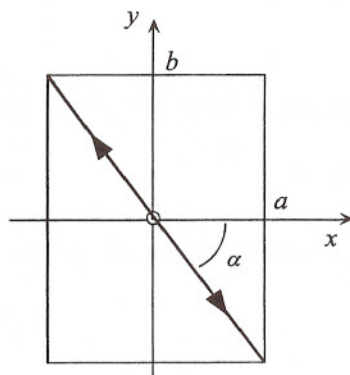
polarizzazione ellittica
destrogira con assi x e y
coincidenti con gli assi dell'ellisse

3) $\delta = 3/4\pi$



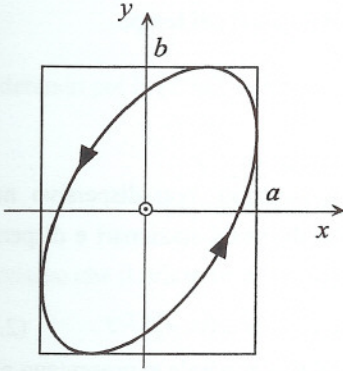
polarizzazione ellittica destrogira

4) $\delta = \pi$



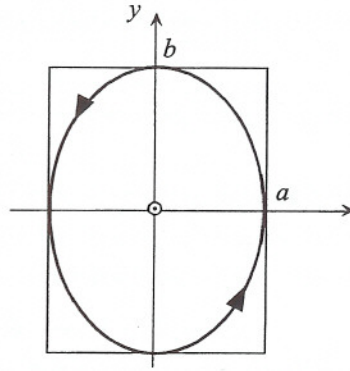
polarizzazione lineare
(l'ellisse di polarizzazione
degenera in una retta)

5) $\delta = -\pi/4$



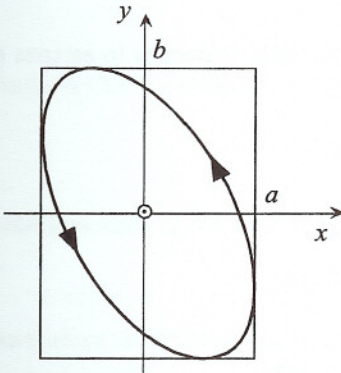
polarizzazione ellittica levogira

6) $\delta = -\pi/2$



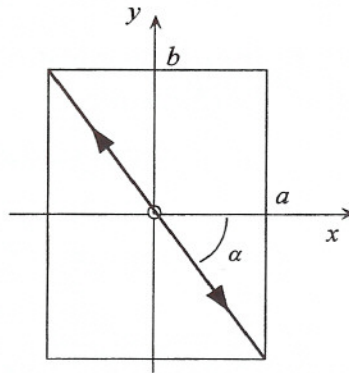
polarizzazione ellittica levogira
con assi x e y
coincidenti con gli assi dell'ellisse

7) $\delta = -3/4\pi$



polarizzazione ellittica levogira

8) $\delta = -\pi$



polarizzazione lineare

Dunque per $0 < \delta < \pi$ si ha una polarizzazione destrorsa. Per $-\pi < \delta < 0$ si ha una polarizzazione levogira (è equivalente al caso $\pi < \delta < 2\pi$).

§ 2.2 - ONDE PIANE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

In questo capitolo la soluzione di tipo onda piana verrà ricavata risolvendo le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza. Ciò consentirà di analizzare la propagazione delle onde elettromagnetiche in mezzi dissipativi e/o dispersivi nel tempo.

2.2.1 Costante di propagazione e velocità di fase

Consideriamo un mezzo lineare, omogeneo, isotropo, non dispersivo nello spazio, eventualmente dispersivo nel tempo. Nel caso di mezzi stazionari e dispersivi nel tempo vale la seguente relazione:

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \quad (2.32)$$

in tal caso cioè ε e μ risultano funzioni della frequenza e in generale si presentano nella forma:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) - j\varepsilon_2(\omega)$$

$$\mu(\omega) = \mu_1(\omega) - j\mu_2(\omega)$$

(la parte immaginaria tiene conto di eventuali perdite presenti nel mezzo).

Nel dominio della frequenza valgono le seguenti relazioni costitutive:

$$\begin{cases} \underline{D}(\underline{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega) \\ \underline{B}(\underline{r}, \omega) = \mu(\omega) \underline{H}(\underline{r}, \omega) \end{cases} \quad (2.33)$$

Consideriamo ora le equazioni di Maxwell nel dominio della frequenza in assenza di sorgenti ($\underline{J}(\underline{r}, \omega) = 0$, $\rho(\underline{r}, \omega) = 0$):

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \underline{B}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega) = j\omega \underline{D}(\underline{r}, \omega)$$

$$\nabla \cdot (\underline{D}(\underline{r}, \omega)) = 0$$

$$\nabla \cdot (\underline{B}(\underline{r}, \omega)) = 0$$

Quest'ultime, tenendo conto delle (2.33), si trasformano così:

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega) = -j\omega \mu \underline{H}(\underline{r}, \omega) \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r}, \omega) = j\omega \varepsilon \underline{E}(\underline{r}, \omega) \quad (2.35)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon \underline{E}(\underline{r}, \omega)) = 0 \quad (2.36)$$

$$\nabla \cdot (\mu \underline{H}(\underline{r}, \omega)) = 0 \quad (2.37)$$

Ricavando $\underline{H}(\underline{r}, \omega)$ dalla (2.34) e sostituendo nella (2.35) otteniamo:

$$\frac{-1}{j\omega\mu(\omega)} \nabla \times (\nabla \times \underline{E}(\underline{r}, \omega)) = j\omega\varepsilon(\omega)\underline{E}(\underline{r}, \omega)$$

che può essere riscritta:

$$-\nabla^2 \underline{E}(\underline{r}, \omega) + \nabla(\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega)) = \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega);$$

considerando poi la (2.36), si ricava che $\nabla(\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, \omega)) = 0$ e dunque si ha:

$$\nabla^2 \underline{E}(\underline{r}, \omega) + \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \underline{E}(\underline{r}, \omega) = 0 \quad (2.38)$$

(equazione di Helmholtz vettoriale omogenea)

Osserviamo che il primo termine della (2.38) può essere così sviluppato:

$$\nabla^2 \underline{E}(\underline{r}, \omega) = \nabla^2 E_x(\underline{r}, \omega) \underline{i}_x + \nabla^2 E_y(\underline{r}, \omega) \underline{i}_y + \nabla^2 E_z(\underline{r}, \omega) \underline{i}_z$$

e quindi dalla (2.38), considerando solo le componenti lungo l'asse x del primo e del secondo termine, possiamo ricavare:

$$\nabla^2 E_x(\underline{r}, \omega) + \omega^2 \varepsilon(\omega) \mu(\omega) E_x(\underline{r}, \omega) = 0$$

e dunque:

$$\nabla^2 E_x(\underline{r}, \omega) + k^2 E_x(\underline{r}, \omega) = 0 \quad (2.39)$$

Se ora supponiamo una dipendenza di $\underline{E}$ solo dall'ascissa z e dalla frequenza, si avrà:

$$E_x(\underline{r}, \omega) = E_x(z, \omega)$$

e dunque la (2.39) può essere riscritta:

$$\frac{\partial^2 E_x(z, \omega)}{\partial z^2} + k^2 E_x(z, \omega) = 0 \quad (2.40)$$

La soluzione della (2.40) è del tipo seguente:

$$E_x(z, \omega) = E_{x+} e^{-jkz} + E_{x-} e^{jkz} \quad (2.41)$$

In particolare, osserviamo che anche nel dominio della frequenza è possibile stabilire una relazione fra il campo elettrico e la componente ad esso normale del campo magnetico; infatti dalla (2.34), sempre nell'ipotesi di dipendenza di $\underline{E}$ solo da z e dalla frequenza, si ricava:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x(z, \omega)}{\partial z} = -j\omega\mu H_y(z, \omega) \\ \frac{\partial E_y(z, \omega)}{\partial z} = -j\omega\mu H_x(z, \omega) \end{cases} \quad (2.42)$$

Il mezzo in esame è lineare e vale il principio di sovrapposizione degli effetti; allora se consideriamo solo la prima parte della soluzione (2.41), cioè la parte progressiva, e la sostituiamo nella prima equazione del sistema (2.42), otteniamo la relazione che stavamo cercando:

$$E_x^+ = \zeta_0 H_y^+ \quad \text{OK!} \quad (2.43)$$

dove ζ_0 rappresenta l'impedenza caratteristica del mezzo.

Dal momento che la soluzione (2.41) dipende dalla radice quadrata di k^2 , e cioè da $k = \omega \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}$, se k^2 è un numero complesso, quando ne estraiamo la radice si ottengono due possibili soluzioni date da due valori simmetrici rispetto all'origine sul piano complesso. Per ragioni energetiche, che verranno dimostrate nel seguito, deve essere scelta la soluzione con parte immaginaria negativa. Dunque possiamo scrivere:

$$k = \omega \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)} = \beta - j\alpha \quad (2.44)$$

β prende il nome di costante di fase (ad essa è legata la variazione di fase dell'onda) mentre α è detta costante di attenuazione. Sostituendo nell'esponentiale si ottiene:

$$e^{-jkz} = e^{-j(\beta - j\alpha)z} = e^{-j\beta z} e^{-\alpha z}$$

N.B.: L'ampiezza di un'onda che si propaga all'interno di un mezzo con perdite deve attenuarsi; se avessimo scelto la soluzione della (2.44) con parte immaginaria positiva si sarebbe ottenuto il fattore $e^{\alpha z}$ (invece di $e^{-\alpha z}$): un fattore del genere non va bene da un punto di vista fisico poichè implicherebbe una amplificazione del segnale.

Se ϵ e μ sono reali allora: $k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \beta$ ($\alpha = 0$).

Consideriamo ora solo la prima parte della soluzione (2.41) e torniamo nel dominio temporale (supponiamo $\alpha = 0$):

$$e_x(z, t) = E_x^+ \operatorname{Re} \{ e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \} = E_x^+ \cos(\omega t - \beta z)$$

L'argomento del coseno $\phi(z, t) = \omega t - \beta z$ è la fase della componente di campo elettrico $e_x(z, t)$.

Si consideri ora la fase di $e_x(z, t)$ nel punto z all'istante t e nel punto $z + \Delta z$ all'istante $t + \Delta t$. La variazione di fase $\Delta\phi$ è data da:

$$\Delta\phi = [\omega(t + \Delta t) - \beta(z + \Delta z)] - (\omega t - \beta z) = \omega\Delta t - \beta\Delta z \quad (2.45)$$

Dunque, se vogliamo che $\Delta\phi$ sia uguale a zero dovrà valere la relazione:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.46)$$

La quantità nella (2.46) rappresenta una velocità a cui si dà il nome di velocità di fase:

$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.47)$$

Un osservatore che si sposta lungo l'asse z con questa velocità misura sempre lo stesso valore della fase.

Se $\alpha=0$, $\varepsilon(\omega)$ e $\mu(\omega)$ sono reali e si ha:

$$v_f = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}} \quad (2.48)$$

La (2.48) rappresenta la velocità con cui trasla la fase di un'onda piana. E' evidente che nel caso in cui il mezzo sia il vuoto la velocità di fase v_f coincide con la velocità della luce e non dipende dalla frequenza.

E' utile considerare il diagramma $\omega = \omega(\beta)$ (relazione di dispersione) detto diagramma di Brillouin. Se ε e μ sono costanti, e quindi si è nel caso di mezzo non dispersivo, la curva di dispersione $\omega = \omega(\beta)$ diventa una retta (curva tratteggiata in Fig. 2.11).

Se il mezzo è dispersivo la curva non è più una retta. Per esempio per il plasma freddo senza collisioni: $\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 \beta^2}$ (curva continua in Fig. 2.11). *$\beta=0, \omega=\omega_p$*

Si noti che ad ogni assegnato valore di ω corrisponde un valore della velocità di fase che coincide con la tangente dell'angolo sotteso dal segmento che unisce il punto considerato all'origine. La dipendenza dalla frequenza implica che un segnale che si propaga in tale mezzo dispersivo subisce una distorsione di fase. I valori assunti dalla velocità di fase, come si vede dal diagramma, possono essere superiori alla velocità della luce. Questo però non contrasta con alcuna legge fisica, dal momento che la v_f è la velocità della fase, cioè di un ente geometrico e non dell'energia.

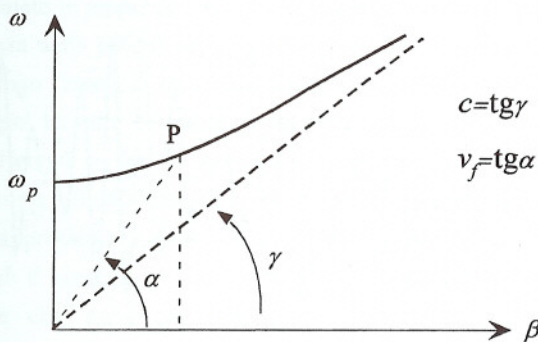


Fig. 2.11 Diagramma di Brillouin

(relazione di dispersione)

2.2.2 Velocità di gruppo

Consideriamo ora una distribuzione di campo dovuta alla sovrapposizione di due onde piane di eguale ampiezza, caratterizzate da pulsazioni $(\omega + \Delta\omega/2)$ e $(\omega - \Delta\omega/2)$: se $\Delta\omega$ è sufficientemente piccola si può approssimare la curva di dispersione con la retta tangente nel punto di coordinate (ω, β) . Sia il mezzo lineare, omogeneo, isotropo, senza perdite, al più dispersivo nel tempo.

$$\begin{aligned} e(z, t) &= E \cos \left[\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(\beta - \frac{\Delta\beta}{2} \right) z \right] + E \cos \left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2} \right) t - \left(\beta + \frac{\Delta\beta}{2} \right) z \right] \\ \Rightarrow e(z, t) &= 2E \cos(\omega t - \beta z) \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} z \right) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Nella (2.49) sono presenti due funzioni sinusoidali, una rapidamente variabile con pulsazione ω e l'altra lentamente variabile con pulsazione $\Delta\omega/2$.

L'oscillazione lentamente variabile rappresenta l'involuppo del segnale e le sue superfici equifase si spostano con velocità che può essere valutata in modo analogo a quanto fatto in precedenza (Fig. 2.12). Questa velocità è nota come velocità di gruppo (del gruppo di due sinusoidi):

$$v_g = \Delta\omega / \Delta\beta \quad (2.50)$$

Al limite per $\Delta\omega$ e $\Delta\beta$ tendenti a zero si ha:

$$v_g = \partial\omega / \partial\beta \quad (2.51)$$

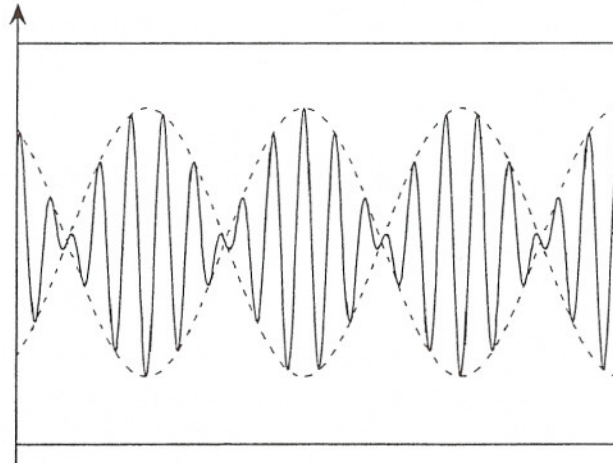


Fig. 2.12 – Segnale risultante dalla somma di due oscillazioni a frequenza diversa

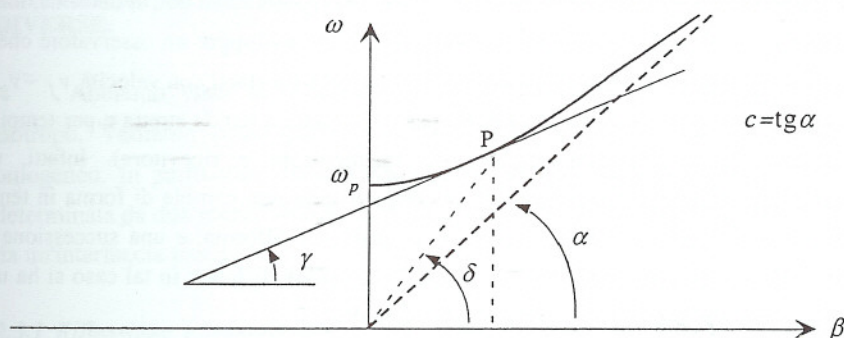


Fig. 2.13- Velocità di fase e di gruppo sul diagramma di Brillouin

La velocità di gruppo è rappresentata dalla tangente alla curva di dispersione sul diagramma di Brillouin. Se il mezzo è non dispersivo $v_f = v_g$ e la relazione fra ω e β (curva di dispersione) è una retta. Se il mezzo è dispersivo $v_f \neq v_g$. In particolare, con riferimento alla Fig. 2.13, la velocità di fase nel punto P è data da $\text{tg} \delta$ mentre la velocità di gruppo è data dal coefficiente angolare della retta tangente alla curva $\omega = \omega(\beta)$ nello stesso punto P.

Si noti poi che all'interno dell'involuppo la sinusoidale di pulsazione ω si sposta con velocità di fase $v_f = \omega / \beta$: c'è quindi un mutuo scorrimento fra l'oscillazione lenta e quella rapida.

Quanto esposto può essere generalizzato al caso di una distribuzione continua di onde piane con costanti di propagazione di poco diverse, e quindi anche con frequenze di poco diverse. Si parla in questo caso di pacchetto d'onda: si può pensare ad esempio ad un segnale modulato in ampiezza con una banda molto stretta rispetto alla frequenza centrale (o frequenza della modulante) $f_0 = \omega_0 / 2\pi$. Supponiamo che queste onde si propaghino tutte lungo l'asse z in un mezzo lineare, omogeneo, isotropo, senza perdite, dispersivo nel tempo; le varie componenti spettrali del segnale si propagheranno con velocità di fase differenti $v_f(\omega)$. Tuttavia se il segnale è a banda stretta è possibile approssimare la curva di dispersione con la retta tangente nel punto (ω_0, β_0) ; utilizzando questa approssimazione si ricava una espressione del segnale in funzione di z e t in cui compare il prodotto tra una oscillazione rapida con pulsazione ω_0 con un segnale modulante che varia più lentamente. Quest'ultimo, ovvero l'involuppo contenente l'informazione, trasla rigidamente (senza subire distorsioni) con una velocità v_g (è la velocità di gruppo calcolata per $\beta = \beta_0$). L'oscillazione più rapida trasla invece con una velocità pari alla velocità di fase $v_f = \omega_0 / \beta_0$.

E' opportuno mettere in evidenza che il pacchetto spostandosi non si deforma, ma le oscillazioni del segnale modulante slittano rispetto all'involuppo: un osservatore che si muovesse con velocità di gruppo v_g vedrebbe il segnale spostarsi con velocità $v_f - v_g$.

Le considerazioni precedenti valgono per un segnale a banda stretta e per tempi di trasmissione brevi (distanze limitate tra trasmettitore e ricevitore). Infatti, nel propagarsi in un mezzo dispersivo un pacchetto d'onda non cambia di forma in tempi brevi, ma, al contrario, in tempi lunghi si allarga e si deforma, e una successione di impulsi tende a divenire meno riconoscibile (distorsione di fase): in tal caso si ha una degradazione del contributo informativo del segnale.

Si ricorda che se il mezzo fosse non dispersivo allora la velocità di fase sarebbe costante per qualunque componente sinusoidale ($\omega = c\beta$ come nel vuoto): ne consegue che il pacchetto d'onda si sposterebbe con velocità c senza deformarsi. In particolare, nel caso del vuoto si ha:

$$\omega = \beta c$$

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

§2.3 - RIFLESSIONE E TRASMISSIONE DI ONDE PIANE ALLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE FRA MEZZI CON CARATTERISTICHE DIVERSE.

Abbiamo visto la soluzione di tipo onda piana in un mezzo omogeneo e isotropo. Vediamo come può essere analizzato il caso in cui il mezzo non sia omogeneo. In particolare faremo riferimento ad una disomogeneità molto semplice, determinata da due mezzi omogenei di caratteristiche elettromagnetiche diverse separati da un'interfaccia piana.

2.3.1 Riflessione e trasmissione di un'onda piana all'interfaccia tra due dielettrici: incidenza ortogonale

In questa sezione analizzeremo il caso in cui un'onda piana uniforme incide perpendicolarmente sulla superficie di separazione tra due mezzi dielettrici, senza perdite, lineari, isotropi e stazionari. Consideriamo la superficie di separazione coincidente con il piano $z=0$. Siano ε_1 e μ_1 la permittività e la permeabilità del primo mezzo (mezzo che occupa il semispazio $z<0$), e ε_2 e μ_2 quelle del secondo mezzo ($z>0$). Opereremo nel dominio della frequenza, facendo riferimento in particolare ad un'onda monocromatica con pulsazione ω .

In ciascuno dei due mezzi avremo come possibili soluzioni libere delle onde piane. Se supponiamo che le sorgenti siano nel mezzo 1 (se cioè supponiamo che l'onda incidente provenga dal semispazio $z<0$), è ovvio assumere come soluzione onde dirette e riflesse nel mezzo 1, solo onde dirette nel mezzo 2.

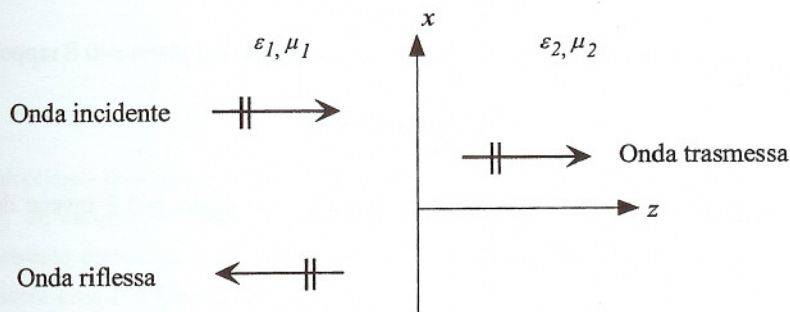


Fig. 2.14 *Onda piana incidente perpendicolarmente all'interfaccia piana tra due mezzi dielettrici*

Le impedenze intrinseche dei due mezzi sono: $\zeta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$ e $\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$

e le costanti di propagazione: $k_1 = \beta_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ e $k_2 = \beta_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$.

Supponendo ad esempio che il campo sia polarizzato linearmente lungo l'asse x , nel mezzo 1 si ha:

$$\begin{aligned} E_1(z)\underline{i}_x &= E_1^+ e^{-j\beta_1 z} \underline{i}_x + E_1^- e^{+j\beta_1 z} \underline{i}_x \\ H_1(z)\underline{i}_y &= \frac{E_1^+}{\zeta_1} e^{-j\beta_1 z} \underline{i}_y - \frac{E_1^-}{\zeta_1} e^{+j\beta_1 z} \underline{i}_y \end{aligned}$$

mentre nel mezzo 2 si ha:

$$\begin{aligned} E_2(z)\underline{i}_x &= E_2^+ e^{-j\beta_2 z} \underline{i}_x \\ H_2(z)\underline{i}_y &= \frac{E_2^+}{\zeta_2} e^{-j\beta_2 z} \underline{i}_y \end{aligned}$$

N.B.: il teorema di unicità assicura, a posteriori, che la soluzione trovata è anche l'unica.

Dobbiamo a questo punto imporre le condizioni di continuità delle componenti tangenziali dei campi sulla superficie di separazione fra i due mezzi (piano $z=0$). In particolare nel passaggio dal mezzo 1 al mezzo 2 dovranno conservarsi le componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico.

$$\begin{cases} \underline{E}_1 \times \underline{i}_z \big|_{z=0} = \underline{E}_2 \times \underline{i}_z \big|_{z=0} \\ \underline{H}_1 \times \underline{i}_z \big|_{z=0} = \underline{H}_2 \times \underline{i}_z \big|_{z=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1^+ + E_1^- = E_2^+ \\ \frac{E_1^+}{\zeta_1} - \frac{E_1^-}{\zeta_1} = \frac{E_2^+}{\zeta_2} \end{cases}$$

Risolvendo rispetto a E_1^- e ad E_2^+ si ha:

$$\begin{aligned} E_2^+ &= 2 \frac{\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} E_1^+ \\ E_1^- &= 2 E_1^+ \frac{\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} - E_1^+ \end{aligned}$$

Si definisce coefficiente di riflessione per il campo elettrico nel piano $z=0$ il rapporto:

$$\Gamma_E = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{\zeta_2 + \zeta_1}$$

Il coefficiente di trasmissione per il campo elettrico nel piano $z=0$ è invece definito così:

$$\tau_E = \frac{E_2^+}{E_1^+} = 2 \frac{\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}$$

Per il campo magnetico il coefficiente di riflessione è

$$\Gamma_H = \frac{H_1^-}{H_1^+} = \frac{-E_1^- / \zeta_1}{E_1^+ / \zeta_1} = -\Gamma_E$$

e quello di trasmissione:

$$\tau_H = \frac{H_2^+}{H_1^+} = \frac{E_2^+ / \zeta_2}{E_1^+ / \zeta_1} = \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \tau_E$$

Dalle relazioni precedenti si può ricavare che:

$$1 + \Gamma_E = \tau_E \quad \text{e} \quad 1 + \Gamma_H = \tau_H$$

2.3.2 Riflessione e trasmissione di un'onda piana all'interfaccia dielettrico conduttore: incidenza normale

Vediamo cosa accade quando il mezzo 2 presenta una certa conducibilità (mezzo con perdite). In particolare, consideriamo il mezzo 2 caratterizzato da una costante dielettrica relativa ϵ_r e da una conducibilità σ ($\mu = \mu_0$). L'impedenza caratteristica ζ_2 e la costante complessa di propagazione saranno perciò date da:

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)}}$$

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)} = \beta_2 - j \alpha_2$$

In base alle relazioni precedentemente trovate si ottiene:

$$E_2 = E_2^+ e^{-jk_2 z} = E_2^+ e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}$$

$$E_2 = \frac{2\zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} E_1^+ e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}$$

Calcoliamo la corrente indotta nel mezzo 2 dal campo elettrico trasmesso E_2 . Essendo $\underline{E}_2$ un vettore parallelo all'asse x ed il mezzo isotropo, la densità di corrente $\underline{J}$ sarà anch'essa diretta secondo x . Integriamo il vettore densità di corrente $\underline{J} = \sigma \underline{E}_2$ in una striscia avente larghezza unitaria lungo l'asse y :

$$I = \iint_S \underline{J} \cdot \underline{i}_n dS = \int_0^\infty \underline{J} \cdot \underline{i}_x dz = \int_0^\infty \sigma E_2^+ e^{-jk_2 z} dz = \frac{2\sigma \zeta_2 E_1^+}{jk_2 (\zeta_1 + \zeta_2)} \quad (2.52)$$

I è una densità lineare di corrente di conduzione (una corrente per strisce di larghezza unitaria in y : $I [A/m]$).

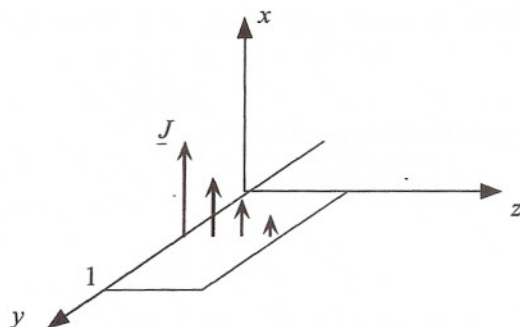


Fig. 2.15 Corrente indotta nel mezzo conduttore.

Supponiamo ora che il mezzo 2 sia un buon conduttore: ciò significa che è verificata la condizione $\sigma \gg \omega \epsilon_0 \epsilon_r$ ¹. In tale ipotesi le espressioni della costante di propagazione e dell'impedenza caratteristica per il mezzo 2 si semplificano come segue:

$$k_2 = \omega \sqrt{\mu_0 \left(\epsilon_0 \epsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega} \right)} = \omega \sqrt{\mu_0 \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r - j\sigma}{\omega}} \cong \omega \sqrt{\frac{-j\sigma \mu_0}{\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}} \sqrt{-2j}$$

$$\zeta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \left(\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_r - j\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)}} \cong \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \left(-\frac{j\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{2 \left(\frac{\sigma}{\omega} \right)}} \sqrt{2j}$$

ma $(1-j)^2 = -2j$ e $(1+j)^2 = 2j$ e dunque:

$$\begin{cases} k_2 \cong \sqrt{\frac{\sigma \mu_0 \omega}{2}} (1-j) \\ \zeta_2 \cong \sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{2\sigma}} (1+j) \end{cases} \quad (2.53)$$

Si definisce profondità di penetrazione la seguente quantità:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}} \quad (2.54)$$

¹ N.B.: lo stesso materiale può così essere considerato un buon conduttore o un cattivo conduttore a seconda della frequenza:

$\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} < \frac{1}{100}$ dielettrico; $\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} < 100$ quasi conduttore; $\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon_r} > 100$ conduttore.

I metalli ($\sigma \cong 10^7$ S/m), fino alle frequenze ottiche, si comportano come buoni conduttori ($\epsilon_0 = 8.85$ pF/m).

δ ha le dimensioni di una lunghezza e il suo nome si giustifica osservando che il campo si attenua nel conduttore secondo la legge $\exp\{-z/\delta\}$: la costante δ corrisponde dunque ad uno spessore di conduttore tale che l'intensità del campo a un estremo risulti ridotta di un fattore $1/e$ rispetto a quella sull'altro estremo (circa -8.69 dB).

Quindi il campo trasmesso E_2 , rispetto al valore $E_2|_{z=0}$, si riduce di $1/e$ dopo un tratto δ . L'ampiezza di tale campo è rappresentata in figura 2.16.

Il parametro δ è significativo di quanto le onde elettromagnetiche penetrino in un mezzo di conducibilità finita σ .

Tenendo conto della (2.53), la (2.52) diventa:

$$I = \zeta_2 \cdot \frac{2\sigma E_1^+}{(\zeta_1 + \zeta_2)} \cdot \frac{1}{jk_2} \cong \frac{2\sigma E_1^+}{(\zeta_1 + \zeta_2)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{2E_1^+}{(\zeta_1 + \zeta_2)}$$

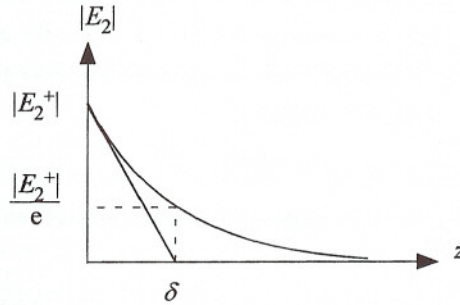


Fig. 2.16 Decadimento esponenziale del campo elettrico nel mezzo conduttore

Ora, se la conducibilità del mezzo tende all'infinito, ζ_2 diventa trascurabile rispetto a ζ_1 e la corrente I viene ad assumere un valore che dipende solamente dall'ampiezza dell'onda incidente e dall'impedenza intrinseca del mezzo 1:

$$I \cong \frac{2E_1^+}{\zeta_1} \quad (2.55)$$

Si conclude che, per σ grande ($\sigma \gg \omega\epsilon_0\epsilon_r$), la profondità di penetrazione δ tende a zero, come si vede dalla (2.54), mentre la densità lineare di corrente I rimane costante e viene compressa alla superficie del conduttore. La densità di corrente volumetrica J (A/m^2) invece non è più finita, in quanto è data dal rapporto fra la corrente I ed una superficie infinitesima ($\delta \rightarrow 0$).

Nel caso di un metallo lo spessore di penetrazione è sempre molto piccolo; ad esempio per l'alluminio $\sigma = 3,54 \cdot 10^7$ S/m e la penetrazione è di solo 8,5 mm già a 100 Hz e si riduce a 0,85 μm a 10 GHz. Nei metalli, quindi, solo la parte esterna viene

interessata al fenomeno elettromagnetico (ad esempio, per ridurre le perdite nelle guide d'onda, si ricoprono le pareti interne con un sottile strato di metalli ad alta conducibilità come ad esempio l'argento).

La profondità di penetrazione può essere rilevante in altre situazioni; ad esempio per l'acqua di mare si ha $\sigma = 5 \text{ S/m}$ e $\delta = 13 \text{ m}$ a 300 Hz : questo spiega l'uso di basse frequenze per i dispositivi di comunicazione adottati dai sommergibili.

Possiamo concludere che quanto visto in questa sezione da un lato giustifica la denominazione "effetto pelle" (*skin effect*) che viene utilizzata per l'insieme dei fenomeni associati a un conduttore immerso in un campo elettromagnetico; dall'altro spiega come, nel passaggio dal mezzo esterno al conduttore, all'andamento continuo della componente tangenziale del campo magnetico si possa sostituire un andamento discontinuo (approssimativo): infatti la componente tangenziale del campo magnetico diventa trascurabile dopo pochi spessori δ , per cui non si commette un errore elevato nel supporre che il campo magnetico tangente passi, in modo discontinuo, da un valore diverso da zero sulla superficie esterna ad un valore nullo all'interno. Per quanto riguarda la componente tangenziale del campo elettrico essa può essere considerata nulla sulla superficie di un buon conduttore.

2.3.3 Condizioni al contorno alla superficie di separazione con un mezzo conduttore elettrico perfetto. (P.E.)

Si definisce conduttore elettrico perfetto quel mezzo ideale caratterizzato da una conducibilità elettrica σ infinita.

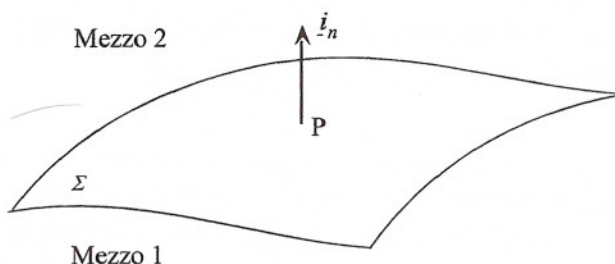


Fig. 2.17 Interfaccia aria-conduttore

Supponiamo che il mezzo 2 sia un dielettrico e che il mezzo 1 sia perfettamente conduttore ($\sigma_1 \rightarrow \infty$): $\underline{e}_1$ deve essere nullo perché altrimenti ci sarebbero correnti

infinite nel mezzo 1. La condizione di continuità per la componente tangenziale del campo elettrico alla superficie di separazione dielettrico-conduttore diviene dunque:

$$\underline{i}_n \times \underline{e}_2 = 0$$

Se i campi sono variabili nel tempo, dalle equazioni di Maxwell segue che anche il campo magnetico $\underline{h}_1$ è nullo all'interno del conduttore. Si è però visto in precedenza che sulla superficie del mezzo conduttore nasce una densità di corrente lineare finita, per cui la densità di corrente $\underline{j}$ (A/m^2) risulta infinita e, per $\delta \rightarrow 0$, sulla superficie vale la relazione:

$$\underline{i}_n \times \underline{h}_2 = \underline{j}_s$$

$\underline{j}_s$ è una corrente superficiale (si misura in A/m , densità lineare di corrente).

Con ragionamento analogo si trova:

$$\underline{d}_2 \cdot \underline{i}_n = \rho_s$$

dove ρ_s rappresenta una densità superficiale di carica elettrica (C/m^2), e:

$$\underline{b}_2 \cdot \underline{i}_n = 0$$

N.B. Ricordiamo infine che per le condizioni di continuità tra due mezzi diversi è sufficiente imporre solo le condizioni sulle componenti tangenziali dei campi elettrico e magnetico; si può poi dimostrare che nel caso di mezzi conduttori basta imporre la sola condizione sulla componente tangenziale di $\underline{e}$ (condizione al contorno), mentre le condizioni su $\underline{d}$ e $\underline{h}$ possono servire a determinare le distribuzioni di carica e di corrente indotte dai campi esterni sulla superficie stessa.

2.3.4 Riflessione e trasmissione di un'onda piana all'interfaccia tra due dielettrici: incidenza obliqua

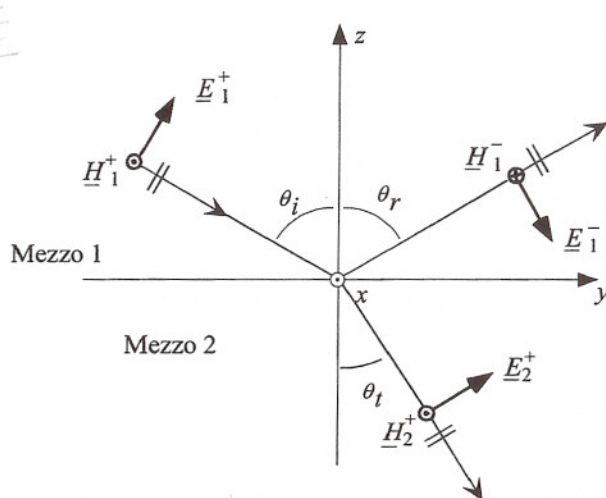
Consideriamo due dielettrici separati da una superficie coincidente con il piano xy di un sistema di riferimento ortogonale. Consideriamo poi un'onda piana monocromatica che provenendo dal mezzo 1 incida sulla superficie di separazione, formando un angolo θ_i con l'asse z (la direzione di propagazione giace nel piano yz).

Si definisce piano di incidenza quel piano individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale al piano di separazione.

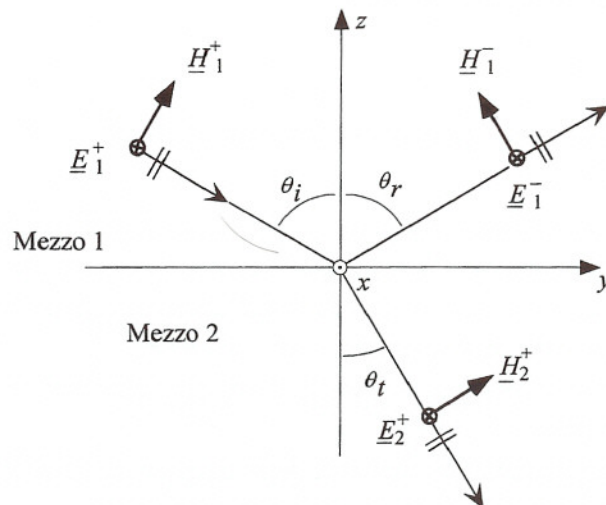
In Fig. 2.18 è rappresentato il caso di polarizzazione parallela o polarizzazione TM: in tale caso il campo elettrico è contenuto nel piano di incidenza. 

In Fig. 2.19 è invece rappresentato il caso di polarizzazione perpendicolare o polarizzazione TE: il campo elettrico è perpendicolare al piano di incidenza.

In entrambi i casi, la presenza dell'interfaccia determina, oltre ad un'onda piana trasmessa nel mezzo 2 (onda rifratta), anche un'onda piana riflessa nel mezzo 1. Sia la direzione dell'onda riflessa che quella dell'onda trasmessa appartengono al piano di incidenza; θ_r e θ_t sono rispettivamente gli angoli che tali direzioni formano con la normale alla superficie, cioè con l'asse z .



TM Fig. 2.18 Polarizzazione parallela



TE Fig. 2.19 Polarizzazione perpendicolare

condiz. di continuità

Imponendo le condizioni di continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico all'interfaccia $z=0$, si ricavano le relazioni tra gli angoli θ_i , θ_r e θ_t , e i valori del coefficiente di trasmissione e del coefficiente di riflessione (coefficienti di Fresnel):

1) $\sin \theta_i = \sin \theta_r \Rightarrow \theta_i = \theta_r$ ← legge della riflessione

questa è la legge della riflessione: l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza.

2) $k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t$ ovvero $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ ← legge di Snell
e questa è la ben nota legge di Snell, con $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ e:

$$n_1 = \frac{c_0}{v_{f1}} = \frac{1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{1/\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \sqrt{\epsilon_{r1} \mu_{r1}} = \text{indice di rifrazione assoluto del mezzo 1}$$

$$n_2 = \frac{c_0}{v_{f2}} = \frac{1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{1/\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \sqrt{\epsilon_{r2} \mu_{r2}} = \text{indice di rifrazione assoluto del mezzo 2}$$

(c_0 = velocità della luce nel vuoto, v_{fi} = velocità della luce nel mezzo)

Per i mezzi non ferromagnetici si ha $\mu_{r1} = \mu_{r2} \cong 1$ e dunque $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ e $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$.

3) Coefficienti di Fresnel

Per ricavare i coefficienti di Fresnel consideriamo separatamente i due casi di polarizzazione parallela e polarizzazione perpendicolare.

Polarizzazione parallela:

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\zeta_2 \cos \theta_t - \zeta_1 \cos \theta_i}{\zeta_2 \cos \theta_t + \zeta_1 \cos \theta_i} \quad \tau_{\parallel} = \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2\zeta_2 \cos \theta_i}{\zeta_2 \cos \theta_t + \zeta_1 \cos \theta_i}$$

Polarizzazione perpendicolare:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_1^-}{E_1^+} = \frac{\zeta_2 \cos \theta_i - \zeta_1 \cos \theta_t}{\zeta_2 \cos \theta_i + \zeta_1 \cos \theta_t} \quad \tau_{\perp} = \frac{E_2^+}{E_1^+} = \frac{2\zeta_2 \cos \theta_i}{\zeta_2 \cos \theta_i + \zeta_1 \cos \theta_t}$$

Si fa notare che i coefficienti di Fresnel soddisfano le seguenti relazioni:

$$1 + \Gamma_{\parallel} = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \tau_{\parallel} \quad 1 + \Gamma_{\perp} = \tau_{\perp}$$

Dalla legge di Snell si ricava:

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \quad (2.56)$$

$n_2 > n_1$ Pertanto, tenendo presente che $|\sin \theta| < 1$, si deduce che se $n_2 > n_1$ (passaggio da un mezzo meno denso ad uno più denso, ad esempio da aria a vetro), allora il secondo membro della (2.56) è inferiore all'unità e dunque esisterà sempre un angolo θ_t reale che soddisfa la precedente equazione. Viceversa, se $n_2 < n_1$ (passaggio da un mezzo più denso ad uno meno denso, ad es. da vetro ad aria), non è detto che l'angolo θ_t sia sempre definito, poiché il secondo membro della (2.56) potrebbe risultare maggiore dell'unità per condizioni di incidenza quasi radente rispetto alla superficie. Definiamo angolo critico di incidenza θ_c quell'angolo di incidenza in corrispondenza del quale si ha $\theta_t = \pi/2$ (condizione limite) e dunque $\cos \theta_t = 0$ e $\sin \theta_t = 1$. Per $\theta_i = \theta_c$ si ricava dalla (2.56):

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \big|_{\theta_i = \theta_c} = 1$$

e dunque:

$$\theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \quad (2.57)$$

Per angoli di incidenza $\theta_i > \theta_c$, l'angolo θ_t risulta essere puramente immaginario. Si può verificare che per $\theta_i \geq \theta_c$ il modulo del coefficiente di riflessione è unitario per entrambe le polarizzazioni ($|\Gamma_{\parallel}| = |\Gamma_{\perp}| = 1$), il che implica che tutta la potenza incidente viene riflessa nel mezzo 1; per angoli di incidenza $\theta_i \geq \theta_c$ si parla infatti di riflessione totale.

Dunque per $\theta_i \geq \theta_c$ non si ha trasmissione di potenza dal mezzo 1 al mezzo 2, tuttavia nel mezzo 2 in prossimità dell'interfaccia esistono campi non nulli che devono garantire la continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e del campo magnetico; tali campi decrescono esponenzialmente con la distanza dalla interfaccia.

Osserviamo infine che le fibre ottiche, le microstrip e i dispositivi ad onde superficiali sono basati proprio sul fenomeno della riflessione totale.

incidenza ortogonale

Consideriamo ora il caso particolare $\theta_i = 0$ (incidenza normale). In tal caso, dalla legge di Snell si ricava che anche $\theta_t = 0$ e, dalle espressioni precedentemente trovate per i coefficienti di Fresnel, si ricava che per incidenza normale risulta, in accordo con la simmetria del problema: $\Gamma_{\parallel} = \Gamma_{\perp}$ e $\tau_{\parallel} = \tau_{\perp}$. OK

Ci chiediamo a questo punto se esiste un particolare valore dell'angolo di incidenza in corrispondenza del quale si verifica il fenomeno della "assenza di onda riflessa". Si può dimostrare che nel caso di polarizzazione perpendicolare non esiste nessun angolo di incidenza per cui risulti nullo il coefficiente di riflessione $\Gamma_{\perp}$. Pertanto nel caso di polarizzazione perpendicolare il fenomeno dell'assenza di onda riflessa non si può verificare. // KPO

Nel caso di polarizzazione parallela invece è possibile trovare un angolo di incidenza $\theta_i = \theta_B$ (detto angolo di Brewster), per cui si annulla il coefficiente di riflessione $\Gamma_{\parallel}$. Questo angolo di Brewster ha la seguente espressione: // KPO

$$\theta_B = \arctg\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}\right) \quad \leftarrow \text{angolo di Brewster}$$

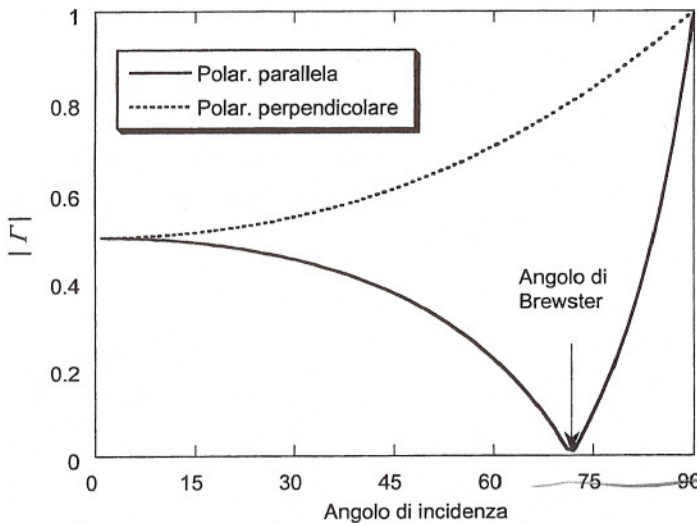


Fig. 2.20 Andamento del modulo di $\Gamma_{\perp}$ e di $\Gamma_{\parallel}$ al variare dell'angolo di incidenza ($\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1} = 9$).

Quanto detto finora può essere sintetizzato nella figura 2.20. Se riportiamo il modulo del coefficiente di riflessione per entrambe le polarizzazioni, parallela e perpendicolare,

in funzione dell'angolo di incidenza, si può notare come il $|r_{\parallel}|$ presenti un valore nullo in corrispondenza dell'angolo di Brewster. Agli estremi dell'intervallo, cioè per incidenza normale $\theta_i=0^\circ$ e per $\theta_i=90^\circ$ i due coefficienti di riflessione assumono lo stesso valore.

N.B.: Se l'onda incidente è polarizzata arbitrariamente e l'angolo di incidenza coincide con l'angolo di Brewster, l'onda riflessa avrà solo la componente polarizzata perpendicolarmente rispetto al piano di incidenza, perchè la componente del campo incidente polarizzata linearmente viene totalmente trasmessa nel semispazio inferiore. L'onda riflessa risulta pertanto polarizzata linearmente; su tale fenomeno si basa il funzionamento di alcuni filtri polarizzatori.

CAPITOLO 3

LINEE DI TRASMISSIONE

§ 3.1 - INTRODUZIONE

Uno dei mezzi più semplici per convogliare il segnale elettromagnetico in una certa direzione è la cosiddetta "linea di trasmissione". Le strutture guidanti per il segnale elettromagnetico possono essere di vario tipo. In generale con il termine "linee di trasmissione" si intendono linee uniformi a due conduttori, quali ad esempio la classica linea bifilare oppure il cavo coassiale, le quali permettono la trasmissione di onde caratterizzate da componenti nulle dei campi e delle induzioni lungo la direzione secondo cui si estende la linea (si parla anche di "modo" TEM, trasverso elettromagnetico; un modo è una particolare configurazione di campo che, su una data struttura, è abilitata alla propagazione). Se la linea si estende lungo l'asse z , si avrà:

$$e_z=0, h_z=0, d_z=0, b_z=0.$$

Esempi di linee di trasmissione uniformi, formate da superfici cilindriche perfettamente conduttrici, sono riportate in Fig. 3.1:

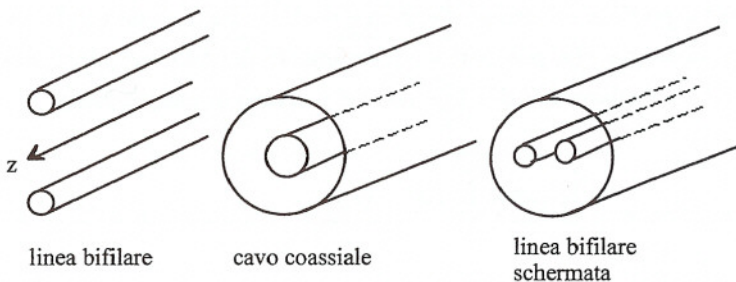


Fig. 3.1 Alcune linee di trasmissione

§ 3.2 - LINEE DI TRASMISSIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO

Lo studio delle diverse linee di trasmissione è riconducibile allo stesso tipo di equazioni; possiamo perciò riferirci, senza perdere di generalità, alla linea bifilare.

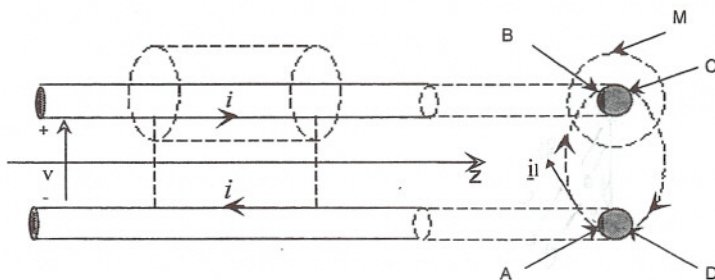


Fig. 3.2 Tensione e corrente in una linea bifilare

Consideriamo una sezione trasversale di una linea uniforme lungo l'asse z e in cui si propaga per ipotesi il solo modo TEM (come usualmente accade nel range di frequenze in cui tali linee di trasmissione vengono utilizzate). Dalla prima equazione di Maxwell in forma integrale si ricava:

$$\oint_{ABCD} \underline{e} \cdot \underline{i}_l d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \iint_S \underline{b} \cdot \underline{i}_z dS = 0.$$

Infatti, $b_z = 0$ per il modo TEM e quindi il flusso di induzione magnetica concatenato al percorso chiuso ABCD è nullo (si veda Fig. 3.2). Inoltre, nei tratti BC e AD la componente tangenziale del campo elettrico è nulla (si tratta di un conduttore elettrico perfetto); ne consegue che può essere univocamente definito, nel piano trasverso, un potenziale $v(z, t)$, funzione solo di z e t e non del percorso di integrazione:

$$\int_B^A \underline{e} \cdot \underline{i}_l d\mathbf{l} = \int_C^D \underline{e} \cdot \underline{i}_l d\mathbf{l} = v(z, t).$$

Per la circuitazione del campo magnetico lungo un circuito chiuso M arbitrario, contenuto nel piano trasverso e avvolgente un solo conduttore, si ha

$$\oint_M \underline{h} \cdot \underline{i}_l d\mathbf{l} = i(z, t).$$

dato che il flusso elettrico concatenato è nullo ($d_z=0$). La corrente $i(z,t)$, flusso della densità di corrente che scorre attraverso la sezione di uno dei due conduttori della linea, dipende anch'essa solo dalle coordinate z e t , e non dal percorso di integrazione. E' inoltre possibile dimostrare che, nella stessa sezione trasversale, le correnti che scorrono nei due conduttori sono uguali e di segno opposto.

Invece che studiare le equazioni per i campi, conviene ricercare le equazioni che devono soddisfare la tensione $v(z,t)$ e la corrente $i(z,t)$. Si ha infatti il vantaggio di dover trattare con un problema monodimensionale e con grandezze scalari più facilmente misurabili. E' inoltre possibile, almeno in linea di principio, misurare le suddette grandezze direttamente: la tensione fra i due conduttori mediante un voltmetro, la corrente con un amperometro. L'analisi classica delle linee di trasmissione segue un approccio di tipo circuitale. La linea è un circuito a parametri elettrici distribuiti, ma, se si considera un tratto infinitesimo dz (ovvero un tratto di linea sufficientemente piccolo rispetto alla lunghezza d'onda in linea, $dz < \lambda/20$), essa può essere schematizzata mediante il circuito equivalente a parametri concentrati riportato in Fig. 3.3.

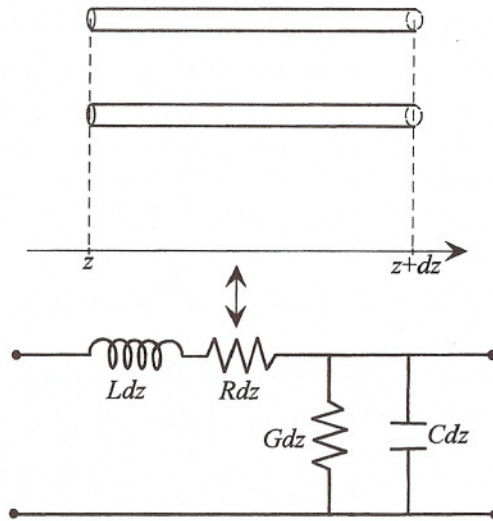


Fig. 3.3 Circuito elettrico equivalente di un tratto di linea bifilare

R , G , L , C sono le costanti primarie della linea. Esse rappresentano quantità riferite all'unità di lunghezza, ed hanno le seguenti dimensioni:

R (Ω/m)	L (H/m)
G (Ω^{-1}/m , S/m)	C (F/m)

R tiene conto delle perdite per effetto Joule nei conduttori che costituiscono la linea e G di eventuali perdite per effetto Joule o per isteresi nel dielettrico che separa i due conduttori. Inoltre, l'induttanza L rappresenta gli effetti di tensione indotta dal flusso di induzione magnetica che si concatena con i conduttori, mentre la capacità C tiene conto della capacità parassita tra i due conduttori; in altri termini si può dire che L tiene conto dell'energia immagazzinata nel campo magnetico, C di quella immagazzinata nel campo elettrico, R e G della potenza dissipata lungo la linea. Se la linea è ideale (conduttori con conducibilità $\sigma \rightarrow \infty$, dielettrico ideale con ϵ e μ reali) $R=0$ e $G=0$.

Le costanti primarie R e G legate alle perdite verranno considerate nulle nel seguito. Ciò fra l'altro non rende i risultati di interesse puramente accademico, dato che in parecchi problemi relativi alle linee di trasmissione in alta frequenza, gli effetti delle suddette perdite sono spesso trascurabili.

Riferiamoci ora esplicitamente al caso ideale (linea non dissipativa):

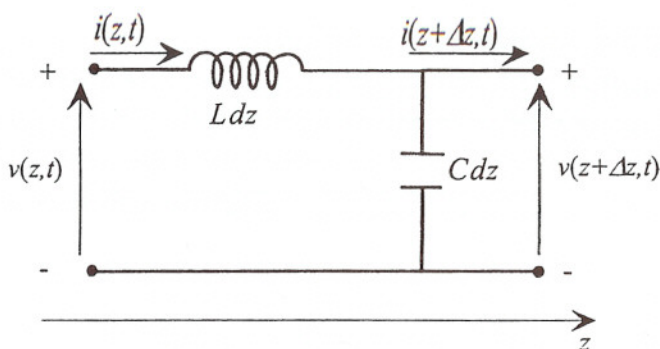


Fig. 3.4 Circuito elettrico equivalente di una linea ideale.

Per questo circuito si possono scrivere due equazioni applicando i due principi di Kirchhoff alle maglie e ai nodi. Con riferimento alla Fig. 3.4 possiamo dunque scrivere:

$$\begin{cases} v(z,t) - v(z+dz,t) = Ldz \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \\ i(z,t) - i(z+dz,t) = Cdz \frac{\partial v(z+dz,t)}{\partial t} \end{cases} \quad (3.1)$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial z} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial z} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases} \quad (3.2)$$

(nella seconda equazione del sistema (3.1) possiamo assumere:

$$v(z+dz) = v(z) + \frac{dv(z)}{dz} dz$$

e trascurando il termine $\frac{dv(z)}{dz} dz$ rispetto a $v(z)$ si ricava la seconda equazione del sistema (3.2).

Derivando ora la prima equazione del sistema (3.2) rispetto a z e la seconda rispetto a t :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 i}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

dove si è posto $c = 1/\sqrt{LC}$ (c ha le dimensioni di una velocità).

Le equazioni del sistema (3.3) hanno entrambe la forma dell'equazione d'onda già incontrata nell'analisi della soluzione di tipo onda piana nel dominio del tempo. Le soluzioni possono dunque essere espresse nel seguente modo:

$$v(z, t) = v^+(z - ct) + v^-(z + ct)$$

$$i(z, t) = i^+(z - ct) + i^-(z + ct)$$

$v^+(z - ct) \Rightarrow$ onda che si propaga nel verso $z > 0$, senza deformarsi, alla velocità c (ONDA DIRETTA o PROGRESSIVA)

$v^-(z + ct) \Rightarrow$ onda che si propaga nel verso $z < 0$, senza deformarsi, alla velocità c (ONDA RIFLESSA o REGRESSIVA)

Poniamo ora $u = z - ct$ e consideriamo solo l'onda progressiva. Si ottiene dunque:

$$\frac{\partial v^+}{\partial z} = \frac{\partial v^+}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = -L \frac{\partial i^+}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.4)$$

D'altra parte $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$ e $\frac{\partial u}{\partial t} = -c$, per cui sostituendo nella (3.4) otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[v^+(u) - \sqrt{\frac{L}{C}} i^+(u) \right] = 0 \Rightarrow \left[v^+(u) - \sqrt{\frac{L}{C}} i^+(u) \right] = \text{cost. rispetto ad } u.$$

Come nel caso delle onde piane, considerando una linea infinitamente estesa lungo z e rappresentando v ed i fenomeni fisici, si può sempre supporre che essi siano nulli all'esterno di un certo intervallo di tempo e di spazio (si supponga, ad esempio, che v ed i siano nulli all'esterno di un intervallo $[z_1(t), z_2(t)]$ per ogni istante t ; ne segue che v ed i sono nulle nell'intervallo $[z_1 - ct], [z_2 - ct]$). La costante deve dunque essere uguale a zero, da cui si ricava:

$$v^+(z - ct) = \sqrt{\frac{L}{C}} i^+(z - ct) \quad (3.5)$$

La grandezza:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (3.6)$$

ha le dimensioni di un'impedenza è detta resistenza caratteristica della linea. Analogamente si trova:

$$v^-(z - ct) = -R_0 i^-(z - ct) \quad (3.7)$$

N.B.: E' evidente l'analogia fra questa trattazione e quella delle onde piane polarizzate linearmente. Essa deriva dal fatto che in entrambi i casi si tratta di una configurazione di campo, ovvero di una soluzione dell'equazione di Maxwell, di tipo TEM.

Si noti che la forma dell'impulso di tensione progressivo $v^+(z - ct)$ e di quello regressivo $v^-(z - ct)$ dipendono rispettivamente dalla forma dell'impulso trasmesso dal generatore e dal tipo di carico su cui è chiusa la linea di trasmissione.

Si noti inoltre che entrambi gli impulsi si propagano lungo la linea senza modificarsi (è semplicemente una traslazione). Infatti, la linea di trasmissione ideale non è dissipativa e quindi il segnale non viene attenuato durante la propagazione; inoltre, essendo la velocità di propagazione c costante, la linea risulta essere un mezzo di trasmissione non dispersivo e il segnale non subirà una distorsione di fase.

Una caratterizzazione delle linee di trasmissione nel dominio del tempo con riferimento al tipo di carico è riportata in Appendice D.

§ 3.3 - LINEE DI TRASMISSIONE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Particolarmente importante è lo studio delle linee di trasmissione nel caso di segnali sinusoidali. Ciò è utile per i seguenti motivi:

- a) nel caso in cui i parametri della linea siano stazionari (caso più comune nelle applicazioni pratiche), la soluzione in regime sinusoidale permette lo studio di eccitazioni arbitrarie nel tempo utilizzando la trasformata continua o serie di Fourier;
- b) l'analisi nel dominio della frequenza semplifica trattazione delle linee con perdite e delle linee dissipative.
- c) molto spesso i sistemi di comunicazione utilizzano segnali a banda stretta ($\text{Banda}/f_{\text{centrale}} \ll 1$), quindi la conoscenza delle prestazioni del sistema alla frequenza di centro banda fornisce già la maggior parte delle informazioni necessarie per il corretto dimensionamento della linea e di eventuali adattatori.

Si analizza, al solito, il caso di strutture guidanti uniformi rispetto a z , con due conduttori ideali. Il problema da risolvere è illustrato nella figura 3.5:

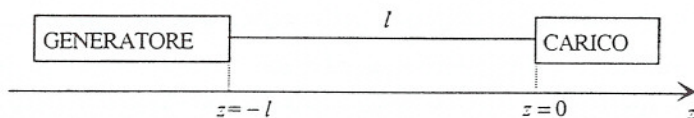
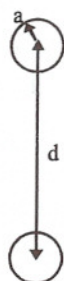


Fig. 3.5 Collegamento tra generatore e carico mediante una linea di trasmissione di lunghezza l

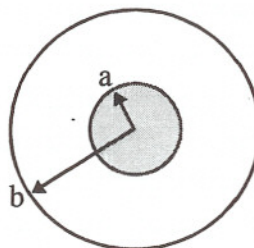
Si vuol trovare la distribuzione dei fasori della tensione $V(z)$ e della corrente $I(z)$ lungo la linea alla frequenza di lavoro f .

Le equazioni che debbono essere soddisfatte da $V(z)$ e $I(z)$ possono essere ricavate in modo semplice, facendo riferimento ad un tratto della linea in questione molto corto rispetto alla lunghezza d'onda in linea. Per il modo TEM si può ricorrere, come fatto nel dominio del tempo, ad una schematizzazione mediante il circuito equivalente a parametri concentrati in cui sono presenti le costanti primarie della linea L , C , R e G . Nel seguito vengono riportate le espressioni di alcune di queste grandezze per una linea bifilare e per un cavo coassiale.

Linea bifilare nell'ipotesi $d \gg a$:



Cavo coassiale:



Linea bifilare	Cavo coassiale
$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln(d/a)} \text{ (F/m)}$	$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(b/a)} \text{ (F/m)}$
$L = \frac{\mu}{\pi} \ln(d/a) \text{ (H/m)}$	$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \text{ (H/m)}$
$R = \frac{2}{a} \sqrt{\frac{\rho\mu f}{\pi}} \text{ (\Omega/m)}$	$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho\mu f}{\pi}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \text{ (\Omega/m)}$

Tabella 3.1 – Costanti primarie di una linea bifilare e di un cavo coassiale (ρ è la resistività del conduttore, μ ed ϵ sono rispettivamente la permeabilità magnetica e la costante dielettrica del mezzo che separa i due conduttori).

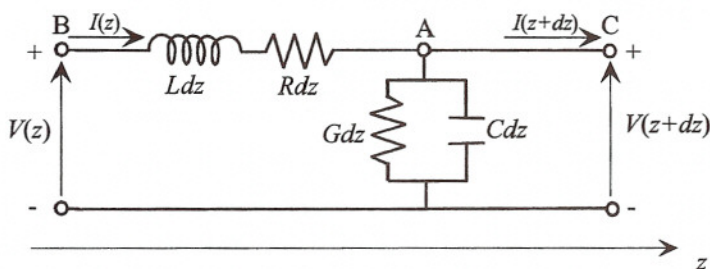


Fig. 3.6 Circuito elettrico equivalente di una linea bifilare.

Riconsideriamo ora il circuito equivalente precedentemente definito (si veda Fig. 3.6). Scriviamo l'equazione della continuità della corrente nel nodo A e l'equazione della caduta di tensione lungo il tratto BC, scegliendo come verso positivo per la corrente quello coincidente con la direzione z :

$$I(z+dz) - I(z) + V(z+dz)(G + j\omega C)dz = 0$$

$$V(z) - V(z+dz) = I(z)(R + j\omega L)dz$$

Nella prima equazione si può esplicitare:

$$V(z+dz) = V(z) + \frac{dV}{dz} dz$$

e dunque:

$$I(z+dz) - I(z) + V(z)(G + j\omega C)dz + \frac{dV}{dz}(G + j\omega C)dz^2 = 0$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore al primo si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dz} = -(G + j\omega C)V(z) = -j\omega \left(C - j\frac{G}{\omega} \right) V(z) \\ \frac{dV}{dz} = -(R + j\omega L)I(z) = -j\omega \left(L - j\frac{R}{\omega} \right) I(z) \end{cases} \quad (3.8)$$

e ponendo:

$$L_{eq} = \left(L - j\frac{R}{\omega} \right), \quad (3.9)$$

$$C_{eq} = \left(C - j\frac{G}{\omega} \right), \quad (3.10)$$

si ricava infine:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dz} = -j\omega C_{eq}V(z) \\ \frac{dV}{dz} = -j\omega L_{eq}I(z) \end{cases} \quad (3.11)$$

In assenza di perdite ($R=0$, $G=0$) si ha $C_{eq}=C$ e $L_{eq}=L$.

D'ora in poi useremo solo i parametri L e C , sottintendendo con ciò che essi devono essere sostituiti con C_{eq} e L_{eq} se non siamo in condizioni di assenza di perdite.

Otteniamo dunque il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dz} = -j\omega CV \\ \frac{dV}{dz} = -j\omega LI \end{cases} \quad (3.12)$$

note come *equazioni dei telegrafisti o dei telefonisti*.

Deriviamo ora la seconda equazione del sistema (3.12) rispetto a z

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = -j\omega L \frac{dI}{dz},$$

sostituendo la prima equazione del sistema al termine dI/dz si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{dz^2} + \omega^2 LC V &= 0, \\ \frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

con $k^2 = \omega^2 LC$.

Allo stesso modo si può determinare la seguente equazione per il fasore della corrente:

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + k^2 I = 0. \quad (3.14)$$

Le (3.13) e (3.14) sono le equazioni di Helmholtz scalari, ovvero le equazioni d'onda nel dominio della frequenza; le loro soluzioni sono state già analizzate nello studio delle onde piane, e possono essere scritte nel modo seguente:

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz}, \quad (3.15)$$

$$I(z) = I^+ e^{-jkz} + I^- e^{jkz}, \quad (3.16)$$

k è la costante di propagazione della linea di trasmissione:

$$k = \omega \sqrt{LC}. \quad (3.17)$$

La soluzione (3.15)-(3.16) è nota come "soluzione dell'equazione di Helmholtz di tipo viaggiante". Essa infatti mette in evidenza l'esistenza di un'onda progressiva (che si propaga in direzione $z > 0$) e di un'onda regressiva (che si propaga in direzione $z < 0$)
Se le perdite non sono trascurabili:

$$k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}} = \omega \sqrt{\left(L - j \frac{R}{\omega} \right) \left(C - j \frac{G}{\omega} \right)} = \beta - j\alpha \quad (3.18)$$

la costante di propagazione k presenta una parte reale β , costante di fase, e una parte immaginaria α , costante di attenuazione (N.B.: la parte immaginaria deve essere negativa per ragioni fisiche che saranno chiarite in seguito).

Le costanti complesse V^+ , V^- , I^+ e I^- presenti nelle soluzioni (3.15) e (3.16), sono le ampiezze complesse (fasori) delle onde dirette e riflesse di tensione e corrente e vanno determinate imponendo le condizioni al contorno all'ingresso della linea ($z = -l$) e sul carico ($z = 0$). Tali costanti non sono però tutte indipendenti fra di loro; sostituendo

infatti la (3.15) e la (3.16) nella prima equazione del sistema (3.12) e tenendo conto solo dell'onda progressiva, si ricava:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(I^+ e^{-jkz}) &= -j\omega C(V^+ e^{-jkz}) \\ \Rightarrow V^+ &= \frac{k}{\omega C} I^+\end{aligned}$$

e considerando la (3.17), otteniamo:

$$V^+ = \sqrt{\frac{L}{C}} I^+ = R_0 I^+ \quad (3.19)$$

(R_0 , come già visto nella (3.6), è la resistenza caratteristica della linea).

Procedendo analogamente per l'onda regressiva si ottiene

$$V^- = -\sqrt{\frac{L}{C}} I^- = -R_0 I^- \quad (3.20)$$

Tutto ciò vale per linee ideali (senza perdite). In presenza di perdite si parla di impedenza caratteristica della linea:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{\left(L - j\frac{R}{\omega}\right)}{\left(C - j\frac{G}{\omega}\right)}} = R_0 + jX_0 \quad (3.21)$$

N.B.: Nel seguito utilizzeremo sempre R_0 , sottintendendo che, se non siamo in condizioni di assenza di perdite, essa deve essere sostituita con Z_0 . La resistenza caratteristica di una linea bifilare varia tra 70 e 600 Ω , mentre per i cavi coassiali essa è compresa tra 20 e 150 Ω .

3.3.1 Caratteristiche della soluzione di tipo viaggiante

Le soluzioni (3.15) e (3.16), per il sistema formato dalle relazioni (3.13) e (3.14), mettono in luce gli aspetti del segnale legati alla propagazione. Tenendo conto delle relazioni fra le costanti V^+ , V^- , I^+ e I^- , tali soluzioni assumono la forma seguente:

$$V(z) = V^+ e^{-jkz} + V^- e^{jkz} \quad (3.22)$$

$$I(z) = \frac{V^+}{R_0} e^{-jkz} - \frac{V^-}{R_0} e^{jkz} \quad (3.23)$$

LINEE DI TRASMISSIONE NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

Le due costanti V^+ e V^- si trovano risolvendo un sistema lineare ottenuto imponendo le condizioni al contorno in $z=0$ e $z=-l$. Analizziamo il comportamento dell'onda progressiva nel dominio del tempo; ponendo:

$$V^+ = |V^+| e^{j\phi^+}$$

nel dominio del tempo si ha:

$$v^+(z, t) = \Re \{ |V^+| e^{-jkz} e^{-j\omega t} \} = |V^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+)$$

con $k = \beta - j\alpha$.

Se la linea è dissipativa ($\alpha \neq 0$), l'ampiezza $|V^+| e^{-\alpha z}$ dell'onda decresce al crescere di z (si nota che ciò accade perchè tra le due soluzioni complesse della (3.18) è stata scelta quella con parte immaginaria negativa). Inoltre risulta evidente che:

- a) l'onda ha un periodo temporale $T = 2\pi / \omega$, definito come il tempo in cui si verifica una variazione di fase pari a 2π , in una misura fatta su una sezione a z costante;
- b) l'onda ha un periodo di ripetizione nello spazio $\lambda = 2\pi / \beta$, che prende il nome di lunghezza d'onda; λ è definita come la distanza fra due punti lungo la linea per cui si ha una differenza di fase pari a 2π ad un istante di tempo t fissato.

Nel caso in cui sia $\alpha=0$, $v^+(z, t)$ assume gli stessi valori in istanti di tempo t_1, t_2 e in punti di ascissa z_1, z_2 tali che

$$\omega t_1 - \beta z_1 = \omega t_2 - \beta z_2 \quad (3.24)$$

Posto: $z_2 = z_1 + \Delta z$ e $t_2 = t_1 + \Delta t$, sostituendo nella (3.24), si trova la relazione che deve intercorrere tra Δz e Δt affinché la (3.24) stessa sia verificata.

$$\begin{aligned} \omega t_1 - \beta z_1 &= \omega t_1 - \beta z_1 - \beta \Delta z \\ \Rightarrow \frac{\Delta z}{\Delta t} &= \frac{\omega}{\beta} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si può al solito interpretare tale fatto dicendo che quel certo valore della fase, nel tempo Δt , si è spostato di un tratto Δz , cioè con velocità $\Delta z / \Delta t$. Tale velocità è detta velocità di fase v_f dell'onda che si propaga lungo la linea:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} \quad (3.26)$$

β è detta costante di fase.

L'equazione di dispersione del sistema, nel caso di assenza di perdite, è la seguente:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \beta \quad (3.27)$$

Costruiamo il diagramma di Brillouin:

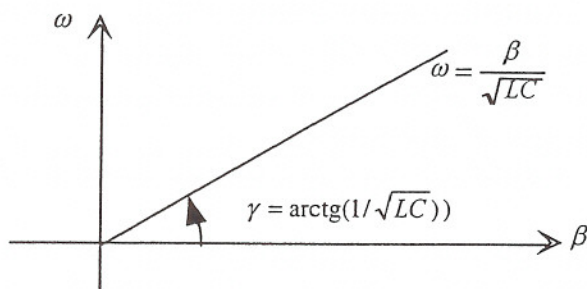


Fig. 3.7 Curva di dispersione per una linea ideale.

La tangente dell'angolo γ rappresenta la velocità di fase

$$\operatorname{tg} \gamma = v_f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.29)$$

Si nota che una linea di trasmissione priva di perdite non è dispersiva. La velocità di fase infatti non dipende dalla frequenza del segnale. In tal caso la velocità di gruppo coincide con la velocità di fase e non si hanno fenomeni di "dispersione" del segnale (nel caso che questo presenti più componenti spettrali). Nel caso in cui siano presenti delle perdite, il mezzo di trasmissione diventa dissipativo ed anche dispersivo.

Si noti che la costante di propagazione per un modo TEM in una struttura guidante coincide con quella di un'onda che si propaga in un dielettrico uguale a quello interposto tra i conduttori:

$$k = \omega \sqrt{LC} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

dove ϵ e μ sono i parametri del dielettrico interposto tra i conduttori (vedi tabella 3.1). Questo implica che la velocità di fase dell'onda non dipende dalla forma della linea, ma solo dai parametri elettromagnetici del dielettrico. Ciò non si verifica per i modi TE (trasverso elettrico) e TM (trasverso magnetico), in cui la velocità di fase dipende anche dalle dimensioni della struttura guidante e dalla frequenza (vedi Capitolo 4).

Ritornando alle relazioni (3.22) e (3.23) si può notare che la costante V^+ rappresenta l'ampiezza complessa dell'onda di tensione diretta (o progressiva) nel punto di ascissa $z=0$. Analogamente V^- rappresenta l'ampiezza complessa dell'onda di tensione riflessa nel punto di ascissa $z=0$.

Nella precedente espressione il primo termine corrisponde alla potenza attiva, il secondo alla potenza reattiva; inoltre,

$$\frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0} = \text{potenza attiva incidente all'ascissa } z,$$

e

$$\frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0} |\Gamma(z)|^2 = \text{potenza attiva riflessa all'ascissa } z$$



Pertanto il flusso netto di potenza attiva nella direzione $z > 0$ è dato dalla differenza tra la potenza attiva associata all'onda incidente e quella associata all'onda riflessa valutate all'ascissa z .

Se a destra dell'ascissa z non vi sono generatori (carico passivo) la potenza attiva riflessa non può essere maggiore di quella incidente; di conseguenza si ricava:

$$|\Gamma(z)| \leq 1. \quad (3.36)$$

Si noti che nella condizione di adattamento (assenza di onda riflessa) si ha

$$\Gamma(z) = 0, \quad (3.37)$$

mentre $|\Gamma(z)| = 1$ se il carico non assorbe potenza attiva (carico puramente reattivo). Si

noti infine che $|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)| = \text{costante}$ se la linea è non dissipativa, essendo $|e^{j2kz}| = 1$ se $\alpha = 0$.

3.3.2 Caratteristiche della soluzione stazionaria

Sviluppando gli esponenziali complessi presenti nella soluzione di tipo viaggiante (3.22)-(3.23), si ottiene una rappresentazione alternativa:

$$\begin{aligned} V(z) &= (V^+ + V^-) \cos kz - j(V^+ - V^-) \sin kz \\ I(z) &= \frac{(V^+ - V^-)}{R_0} \cos kz - j \frac{(V^+ + V^-)}{R_0} \sin kz \end{aligned}$$

Poniamo ora:

$$V_u = (V^+ + V^-) = V(0) \quad (3.38)$$

$$I_u = \frac{(V^+ - V^-)}{R_0} = I(0) \quad (3.39)$$

V_u è il valore del fasore della tensione nel punto di ascissa $z=0$ (si indica con V_u poichè in genere si usa porre il carico in $z=0$ per cui $V(0)$ rappresenta la tensione sul carico); I_u è il valore del fasore della corrente nella stessa sezione $z=0$.

Si ha dunque:

$$V(z) = V_u \cos(kz) - jR_0 I_u \sin(kz) \quad (3.40)$$

$$I(z) = I_u \cos(kz) - j \frac{V_u}{R_0} \sin(kz) \quad (3.41)$$

Le equazioni (3.40) (3.41) costituiscono la *soluzione di tipo stazionario*.

Sia nella soluzione di tipo viaggiante, sia in quella di tipo stazionario, le costanti primarie della linea L , C , R , G non compaiono più esplicitamente, bensì attraverso la costante di propagazione:

$$k = \omega \sqrt{LC} \quad (k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}})$$

e l'impedenza caratteristica:

$$R_0 = \sqrt{L/C} \quad (Z_0 = \sqrt{L_{eq}/C_{eq}})$$

I parametri k e R_0 vengono detti costanti secondarie della linea di trasmissione.

Le equazioni che regolano il funzionamento della linea (equazioni dei telegrafisti) possono essere riscritte in termini di k e R_0 , nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dz} = -j \frac{k}{R_0} V \\ \frac{dV}{dz} = -j R_0 k I \end{cases}$$

I due insiemi di parametri, primari e secondari, sono dunque equivalenti.

A partire dalla soluzione di tipo stazionario si può definire l'impedenza d'ingresso della linea nella sezione di ascissa z (l'impedenza costituita dal carico e dalla parte di linea che compresa fra l'ascissa z e il carico):

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_u \cos(kz) - jR_0 I_u \sin(kz)}{I_u \cos(kz) - j \frac{V_u}{R_0} \sin(kz)}$$

da cui, dividendo numeratore e denominatore per $I_u \cos kz$ otteniamo:

$$Z(z) = R_0 \frac{Z(0) - jR_0 \operatorname{tg}(kz)}{R_0 - jZ(0) \operatorname{tg}(kz)} \quad (3.42)$$

dove $Z(0)$ è l'impedenza all'ascissa $z=0$

$$Z(0) = \frac{V(0)}{I(0)} = R_0 \frac{V^+ + V^-}{V^+ - V^-} = Z_u$$

L'impedenza $Z(z)$ è in generale un numero complesso:

$$Z(z) = R(z) + jX(z) \quad (3.43)$$

Essa si può mettere in relazione con la potenza complessa che transita attraverso la sezione z nel seguente modo:

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z) = \frac{1}{2} Z(z) I(z) I^*(z) = \frac{1}{2} Z(z) |I(z)|^2 =$$

Pot. ATTIVA
Pot. REATTIVA

$$= \frac{1}{2} R(z) |I(z)|^2 + j \frac{1}{2} X(z) |I(z)|^2 \quad (3.44)$$

Se a valle della sezione di ascissa z non vi sono generatori la potenza attiva che transita deve essere non negativa ($Z(z)$ è l'impedenza d'ingresso all'ascissa z), e ciò implica che:

$$R(z) \geq 0. \quad (3.45)$$

Si ritrova dunque una nota proprietà della resistenza di un elemento passivo a parametri concentrati.

Utilizzando la (3.42) con $z = -l$ si ottiene l'impedenza d'ingresso di un tronco di linea, chiuso sul carico $Z(0) = Z_u$, in funzione della lunghezza l della linea (*formula di trasformazione dell'impedenza*):

$$Z(l) = R_0 \frac{Z_u + jR_0 \operatorname{tg} kl}{R_0 + jZ_u \operatorname{tg} kl} \quad (3.46)$$

Quindi un tratto di linea di lunghezza l , collegata ad un carico Z_u , presenta una impedenza funzione dell'impedenza caratteristica della linea R_0 e del prodotto $kl = 2\pi l / \lambda$ (ovvero della lunghezza della linea espressa in unità di lunghezza d'onda = lunghezza elettrica della linea, l / λ).

Si può inoltre legare fra di loro l'impedenza $Z(z)$ e il coefficiente di riflessione alla stessa ascissa:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+ e^{-jkz} [1 + \Gamma(z)]}{I^+ e^{-jkz} [1 - \Gamma(z)]} = R_0 \frac{[1 + \Gamma(z)]}{[1 - \Gamma(z)]} \quad (3.47)$$

e invertendo la (3.4.7):

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - R_0}{Z(z) + R_0} \quad (3.48)$$

Si noti che, essendo $R(z) \geq 0$, si ha $|\Gamma(z)| \leq 1$, come era stato già verificato precedentemente.

3.3.3 Condizioni di carico particolari

Vogliamo analizzare in dettaglio l'andamento di alcune grandezze relative ad un tronco di linea uniforme, quando l'impedenza di carico Z_u assume valori particolari.

Ci si pone nell'ipotesi di assenza di perdite ($R=0$, $G=0$). L'impedenza caratteristica della linea risulta dunque reale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$$

come pure la costante di propagazione:

$$k = \omega\sqrt{LC} = \beta \in R^+ \quad (\alpha=0)$$

A) LINEA ADATTATA: $Z(0) = Z_u = R_0$

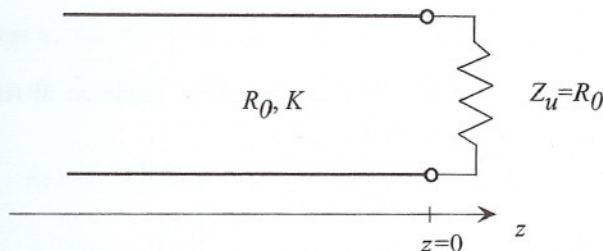


Fig. 3.9 Linea adattata

Si definisce linea adattata una linea in cui è assente l'onda riflessa ($V^- = 0$);
dunque dalla relazione

$$\Gamma(0) = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_u - R_0}{Z_u + R_0}$$

si vede che tale condizione se la linea è chiusa su un carico che ha l'impedenza uguale all'impedenza caratteristica della linea ($Z_u = R_0$).

Le distribuzioni di tensione e di corrente si semplificano come segue

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} = |V^+| e^{+j\phi^+} e^{-j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{R_0} e^{-j\beta z} = \left| \frac{V^+}{R_0} \right| e^{+j\phi^+} e^{-j\beta z}$$

Si noti che $V^- = 0$ implica anche l'assenza dell'onda riflessa di corrente $I^- = 0$.

3.3.3 Condizioni di carico particolari

Vogliamo analizzare in dettaglio l'andamento di alcune grandezze relative ad un tronco di linea uniforme, quando l'impedenza di carico Z_u assume valori particolari.

Ci si pone nell'ipotesi di assenza di perdite ($R=0$, $G=0$). L'impedenza caratteristica della linea risulta dunque reale:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_0$$

come pure la costante di propagazione:

$$k = \omega\sqrt{LC} = \beta \in R^+ \quad (\alpha=0)$$

A) LINEA ADATTATA: $Z(0) = Z_u = R_0$

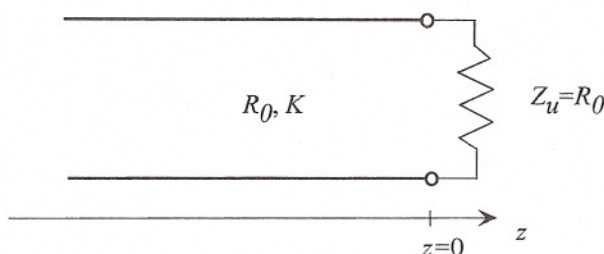


Fig. 3.9 Linea adattata

Si definisce linea adattata una linea in cui è assente l'onda riflessa ($V^- = 0$);
dunque dalla relazione

$$\Gamma(0) = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_u - R_0}{Z_u + R_0}$$

si vede che tale condizione se la linea è chiusa su un carico che ha l'impedenza uguale all'impedenza caratteristica della linea ($Z_u = R_0$).

Le distribuzioni di tensione e di corrente si semplificano come segue

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} = |V^+| e^{+j\phi^+} e^{-j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{V^+}{R_0} e^{-j\beta z} = \left| \frac{V^+}{R_0} \right| e^{+j\phi^+} e^{-j\beta z}$$

Si noti che $V^- = 0$ implica anche l'assenza dell'onda riflessa di corrente $I^- = 0$.

Dall'espressione dell'impedenza all'ascissa generica z si ha

$$Z(z) = \frac{V^+ e^{-jkz}}{I^+ e^{-jkz}} = R_0$$

Riassumendo, nel caso in cui l'impedenza di carico sia pari all'impedenza caratteristica della linea:

- 1) manca l'onda riflessa (sia di tensione che di corrente) e manca quindi ogni interferenza con l'onda diretta. Il modulo di $V(z)$ e di $I(z)$ sono costanti lungo la linea e varia soltanto la loro fase ($-\beta z$);
- 2) l'impedenza $Z(z)$ è uguale all'impedenza caratteristica R_0 in qualunque sezione della linea stessa.

Nelle figure seguenti vengono riportati gli andamenti delle ampiezze di tensione e corrente, e l'impedenza per il caso in esame (Fig. 3.10).

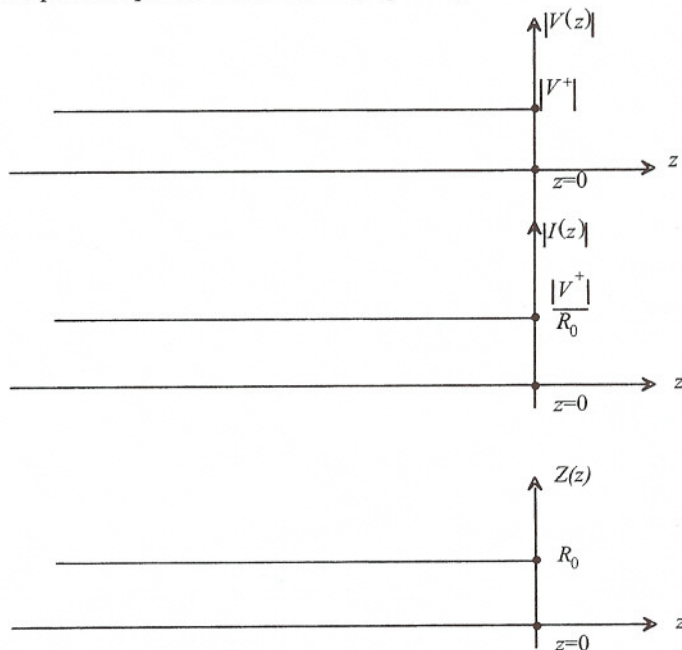


Fig. 3.10 Andamenti delle ampiezze di tensione e corrente, e dell'impedenza lungo una linea adattata.

La fase è la stessa sia per $V(z)$ che per $I(z)$ (tensione e corrente sono in fase in ogni sezione della linea); essa varia linearmente lungo la linea ed assume il valore ϕ^+ assunto in corrispondenza del carico:

$$\phi(z) = \phi^+ - \beta z$$

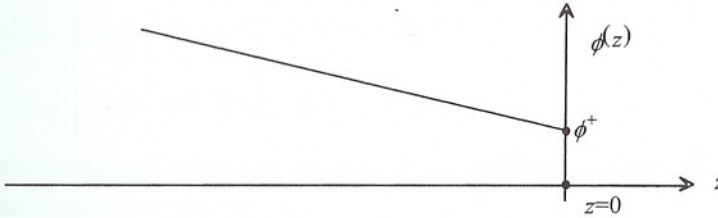


Fig. 3.11 Andamento della fase dell'onda di tensione lungo una linea adattata.

Vediamo cosa accade nel dominio del tempo:

$$v(z, t) = \Re\{V(z)e^{j\omega t}\} = |V^+| \cos(\omega t - \beta z + \phi^+)$$

$$i(z, t) = \Re\{I(z)e^{j\omega t}\} = \frac{|V^+|}{R_0} \cos(\omega t - \beta z + \phi^+)$$

Ad un determinato istante di tempo la distribuzione di $v(z, t)$ e $i(z, t)$ lungo la linea è di tipo sinusoidale, di ampiezza indipendente dall'istante considerato. Analogamente, in una prefissata sezione della linea, tensione e corrente variano sinusoidalmente con una ampiezza costante (indipendente da z).

Se si fa riferimento alla distribuzione della tensione lungo la linea (o in modo equivalente della corrente) all'istante t_1 :

$$v(z) = v(z, t_1) = |V^+| \cos(\omega t_1 - \beta z + \phi^+)$$

(linea continua in Fig. 3.12). Se si considera poi la distribuzione di tensione in un istante successivo $t_1 + \Delta t$ (linea tratteggiata), si vede come tale distribuzione sia traslata di una lunghezza Δz . Ovviamente la relazione fra Δz e Δt è

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = v_f = \frac{\omega}{\beta}$$

La velocità di fase può essere definita come la velocità con cui traslano lungo una linea adattata le distribuzioni di tensione e di corrente.

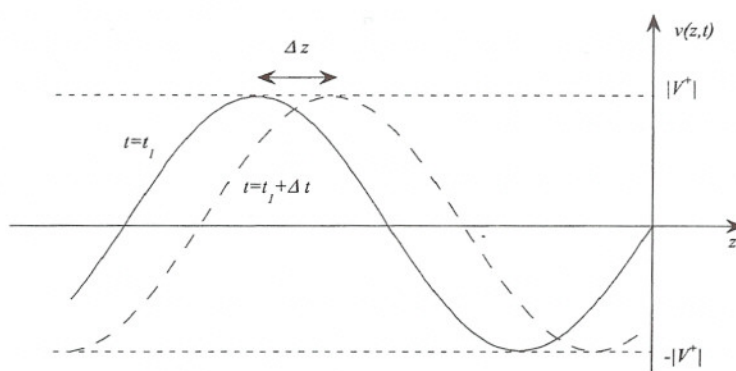


Fig. 3.12 Andamento della tensione in una linea adattata

N.B.: Come nel caso delle onde piane la velocità con cui si sposta un segnale con varie componenti spettrali lungo la linea è la velocità di gruppo, che solo nel caso di linee senza perdite ($R=0$, $G=0$) e non dispersive (L e C indipendenti dalla frequenza) è uguale alla velocità di fase.

B) LINEA CHIUSA IN CORTO CIRCUITO: $Z(0) = Z_u = 0$

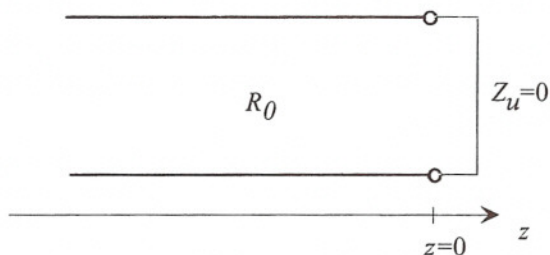


Fig. 3.13 Linea chiusa in corto circuito.

Essendo la linea chiusa in un corto circuito si ha tensione nulla all'estremità della linea ($V_u=0$). La soluzione stazionaria assume allora la forma seguente:

$$V(z) = -jR_0 I_u \sin(\beta z)$$

$$I(z) = I_u \cos(\beta z)$$

e quindi:

$$Z(z) = -jR_0 \operatorname{tg}(\beta z) = jX(z)$$

In Fig.3.14 sono stati riportati i grafici relativi agli andamenti di $|V(z)/V^+|$, $|I(z)/I^+|$ e $X(z)$. I moduli della tensione e della corrente hanno andamenti sinusoidali. Una rotazione di fase di 2π nell'argomento delle funzioni circolari si verifica in una distanza pari alla lunghezza d'onda. Risultano quindi evidenti gli andamenti riportati in Fig. 3.14. Le ampiezze di $V(z)$ e di $I(z)$ dipendono da I_u , corrente sul carico, che risulta determinata dai parametri V_G e Z_G del generatore e dalla lunghezza della linea. Indipendente dal generatore è invece l'impedenza

$$Z(z) = jX(z)$$

che risulta puramente reattiva: di tipo induttivo nelle zone in cui $X(z) > 0$, di tipo capacitivo in quelle in cui $X(z) < 0$.

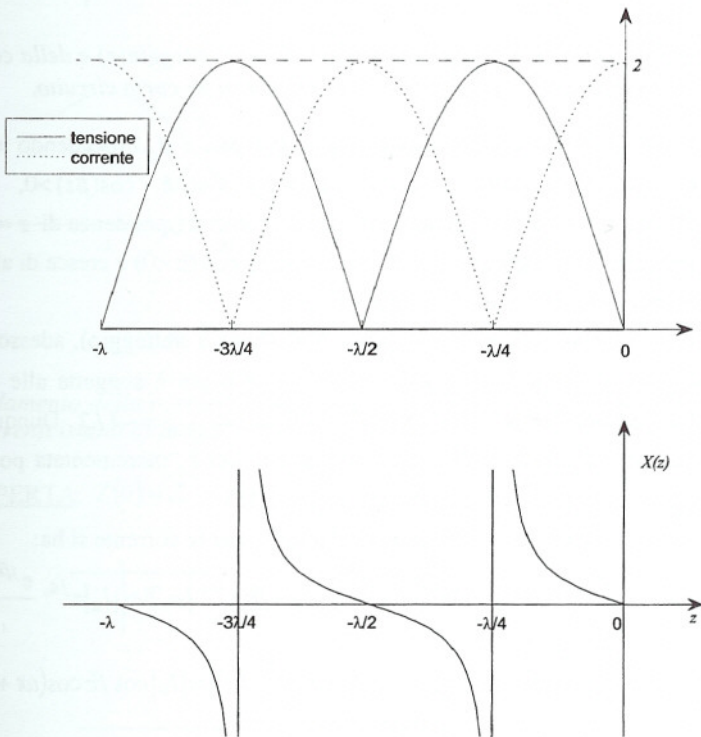


Fig. 3.14 Andamenti delle ampiezze normalizzate di tensione e corrente, e della reattanza in una linea chiusa su un corto circuito.

Vediamo ora la fase della corrente

$$I(z) = I_u \cos(\beta z)$$

La fase di una quantità reale come $\cos(\beta z)$, interpretata come un numero complesso di modulo $|\cos \beta z|$, è $0+2n\pi$ oppure $\pi+2n\pi$ radianti, secondo che ci si trovi in intervalli di z in cui $\cos \beta z > 0$ oppure $\cos \beta z < 0$.

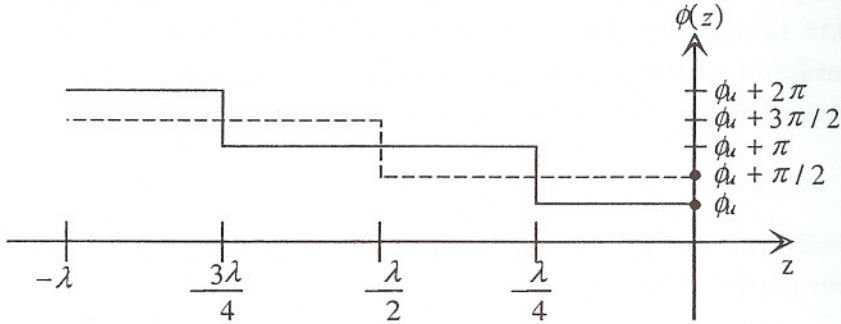


Fig. 3.15 Andamento della fase della tensione (linea tratteggiata) e della corrente (linea a tratto continuo) lungo una linea chiusa su un corto circuito.

La fase di $I(z)$ (a tratto continuo) all'ascissa $z=0$ è pari a ϕ_u . Procedendo lungo la linea nel verso $z < 0$ essa resta costante ($\phi(z) = \phi_u$) finchè $\cos(\beta z) > 0$, cioè finchè $\beta z > -\pi/2 \Rightarrow z > -\lambda/4$; la fase aumenta poi di π in corrispondenza di $z = -\lambda/4$, resta costante per una semilunghezza d'onda (finchè cioè $\cos \beta z < 0$) e cresce di altri π radianti in corrispondenza di $z = -3\lambda/4$, e così via.

Analogo discorso vale per la tensione $V(z)$ (linea a tratteggio), adesso però la fase ha uno sfasamento iniziale di $-\pi/2$ rispetto a ϕ_u e poi è soggetta alle variazioni di segno della funzione $\sin \beta z$. Ora il $\sin \beta z$ è < 0 da $z=0$ a $z = -\lambda/2$. Dunque il risultato è che la fase di $V(z)$ è $\phi_u + \pi/2$ da $z = 0$ a $z = -\lambda/2$, incrementata poi di π fino a $z = -\lambda$ e così via (vedi curva a tratteggio in Fig. 3.15).

Vediamo ora gli andamenti nel dominio del tempo. Per la corrente si ha:

$$\begin{aligned} i(z, t) &= \Re \{ I(z) e^{j\omega t} \} = \Re \{ I_u \cos \beta z e^{j\omega t} \} = \Re \left\{ |I_u| e^{j\phi_u} \frac{e^{j\beta z} + e^{-j\beta z}}{2} \right\} = \\ &= \frac{|I_u|}{2} [\cos(\omega t + \beta z + \phi_u) + \cos(\omega t - \beta z + \phi_u)] = |I_u| \cos \beta z \cos(\omega t + \phi_u) \quad (3.49) \end{aligned}$$

Nel caso di linea chiusa in corto circuito dunque la distribuzione di corrente lungo la linea, ad un fissato istante t_1 , ha un andamento cosinusoidale rispetto a z , di ampiezza pari a:

$$|I_u| \cos(\omega t_1 + \phi_u);$$

Perciò risulta che l'ampiezza della distribuzione dipende dal particolare istante di tempo t_1 . Analogamente, in una prefissata sezione della linea $z=z_1$, la corrente varia nel tempo con legge sinusoidale ma con ampiezza dipendente dalla particolare sezione z_1 .

Dall'espressione (3.49) di $i(z,t)$ si vede inoltre che in questo caso la distribuzione della corrente lungo la linea $i(z)$ non trasla mantenendo costante il valore dell'ampiezza, ma pulsa mantenendo massimi (ventri) e nulli (nodi) in corrispondenza sempre delle stesse sezioni della linea (vedi Fig.3.16). Esiste dunque, nel caso di linea chiusa in corto circuito, una configurazione stazionaria di corrente. Tale configurazione può però sempre considerarsi anche come somma di due onde viaggianti in direzioni opposte (vedi relazione (3.49)). Infatti abbiamo visto che si può scrivere:

$$i(z,t) = \frac{|I_u|}{2} \cos(\omega t - \beta z + \phi_u) + \frac{|I_u|}{2} \cos(\omega t + \beta z + \phi_u).$$

Considerazioni analoghe a quelle svolte per la corrente valgono anche per la tensione.

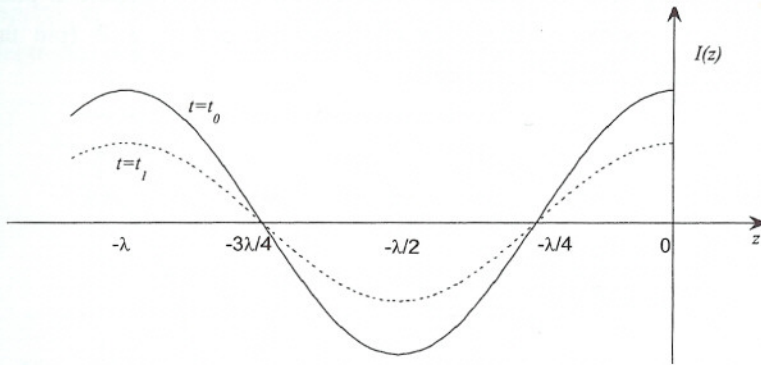


Fig. 3.16 Andamento della corrente lungo una linea chiusa su un corto circuito in due differenti istanti di tempo.

C) LINEA APERTA: $Z(0) = Z_u = \infty$

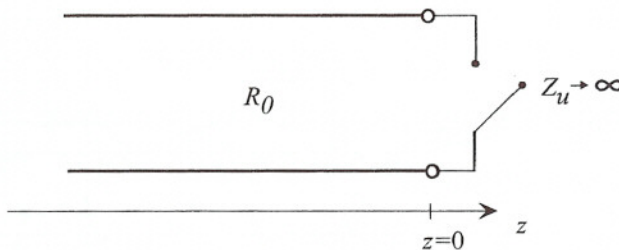


Fig. 3.17 Linea chiusa su un circuito aperto.

Essendo $Z_u = \infty$ risulta $I_u = 0$, quindi deve essere $I^+ - I^- = 0$, ovvero l'onda diretta di corrente e quella riflessa all'estremità della linea sono in fase ed hanno la stessa ampiezza. Abbiamo quindi

$$V(z) = V_u \cos(\beta z)$$

$$I(z) = -j \frac{V_u}{R_0} \sin(\beta z)$$

$$Z(z) = jR_0 \cotg(\beta z) = jX(z)$$

dell'origine, riotteniamo esattamente gli stessi andamenti. L'impedenza $Z(z)$ in una linea priva di perdite e chiusa in corto circuito, o aperta, è sempre puramente reattiva e può assumere, per diversi valori di z , tutti i valori compresi tra $-\infty$ e $+\infty$. Pertanto con una linea priva di perdite, chiusa in corto o aperta, è possibile realizzare un qualsiasi carico puramente reattivo dimensionando opportunamente la sua lunghezza. Ad esempio, per realizzare un carico induttivo (reattanza positiva) si può utilizzare un tronco di linea chiusa in corto circuito, di lunghezza compresa tra 0 e $\lambda/4$, oppure si può usare un tronco di linea aperta, di lunghezza compresa tra $\lambda/4$ e $\lambda/2$ (più un numero qualunque di mezze lunghezze d'onda).

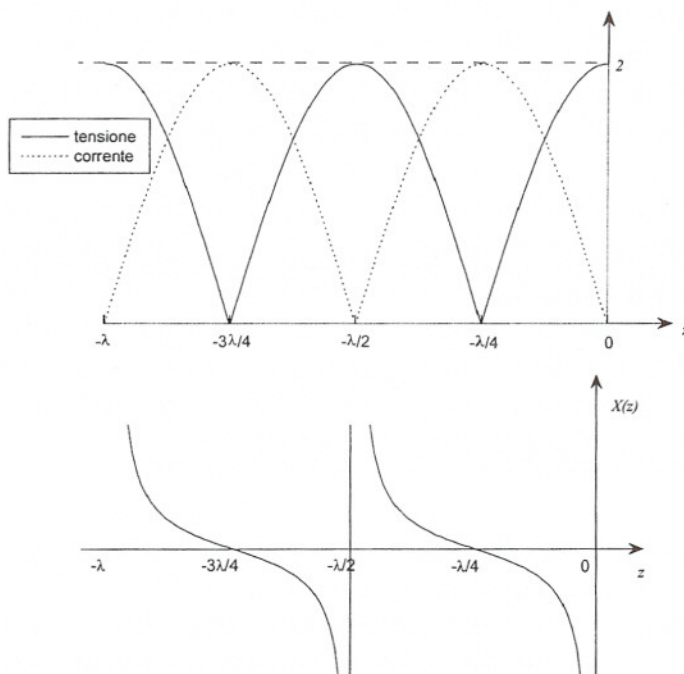


Fig. 3.18 Andamenti delle ampiezze normalizzate di tensione e corrente, e della reattanza in una linea chiusa su un circuito aperto.

D) LINEA CHIUSA SU UN CARICO REATTIVO

Sia data una linea priva di perdite, terminata su un carico reattivo generico. Risulta sempre possibile sostituire al carico un tronco di linea priva di perdite, di caratteristiche uguali a quelle della linea di partenza, chiuso in corto circuito (o chiuso su un circuito aperto) e di lunghezza elettrica opportuna. Ad esempio, per realizzare un carico induttivo (reattanza positiva) si può utilizzare un tronco di linea chiusa in corto circuito, di lunghezza compresa tra 0 e $\lambda/4$, oppure si può usare un tronco di linea aperta, di lunghezza compresa tra $\lambda/4$ e $\lambda/2$ (più un numero qualunque di mezze lunghezze d'onda). Quindi gli andamenti di $V(z)$, $I(z)$ e $Z(z)$ per una linea priva di perdite, chiusa su un carico reattivo generico, coincidono con quelli relativi alla linea chiusa in corto circuito o aperta; si tratta solo di traslare l'origine dell'asse z tenendo conto della lunghezza del tronco di linea che è stata utilizzata per realizzare la reattanza del carico.

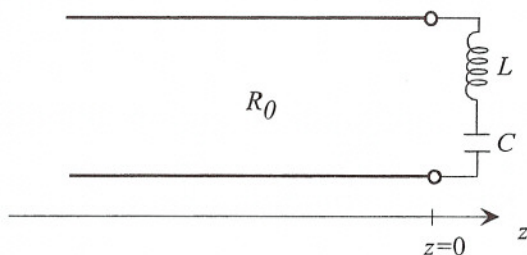


Fig. 3.19 Linea di trasmissione terminata su carico reattivo.

Consideriamo ad esempio una linea di trasmissione con impedenza caratteristica R_0 chiusa su un carico costituito dalla serie di un induttanza e di una capacità. Supponiamo, dapprima, che la frequenza di lavoro coincida con la frequenza di risonanza della serie LC ovvero:

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

In questo caso l'impedenza del carico diviene un corto circuito. Infatti considerando l'equivalente serie di capacità e induttanza si ottiene:

$$Z = j\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) \text{ che per } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ diventa nulla.}$$

L'andamento della tensione sulla linea è analogo a quello rappresentato in Fig. 3.14 per linea chiusa su un corto circuito. Si nota che il minimo della tensione si trova in corrispondenza del carico, mentre il massimo del modulo della tensione si ha ad una distanza pari a $\lambda/4$ dal carico stesso.

Aumentando la frequenza di lavoro l'impedenza serie LC assume un comportamento induttivo; consideriamo ad esempio $f = 2f_0$, si trova che l'impedenza equivalente vale

$$Z = j\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) = j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = 3/4 \cdot j\omega L = j \frac{3}{2} \omega_0 L.$$

In questo caso il valore massimo della tensione si trova ad una distanza minore di $\lambda/4$. (In Fig. 3.20 il periodo di ripetizione, $\lambda/2$, si è dimezzato in quanto la frequenza del segnale è raddoppiata)

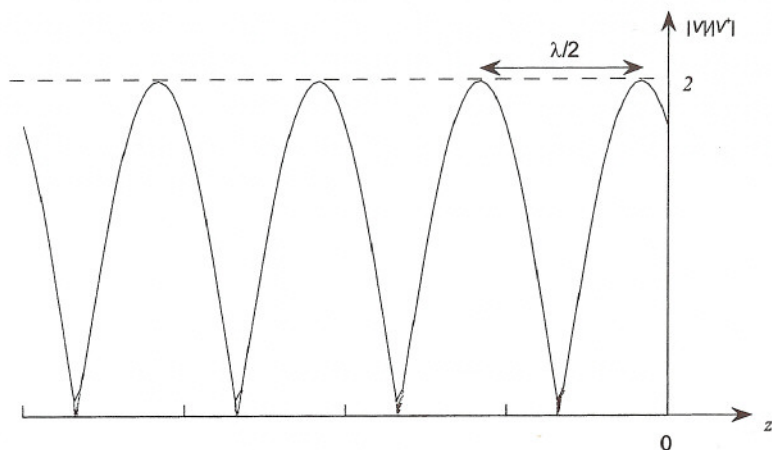


Fig. 3.20 Andamento della tensione con $f=2f_0$.

Diminuendo la frequenza di lavoro l'impedenza serie LC assume un comportamento capacitivo; consideriamo ad esempio $f = f_0/2$, si trova che l'impedenza equivalente vale

$$Z = j\omega L \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right) = j\omega L \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = -3j\omega L = -j \frac{3}{2} \omega_0 L.$$

In questo caso il valore massimo della tensione si trova ad una distanza maggiore di $\lambda/4$. Inoltre si può notare che il modulo del coefficiente di riflessione si mantiene costante e unitario poiché il carico è sempre puramente reattivo.

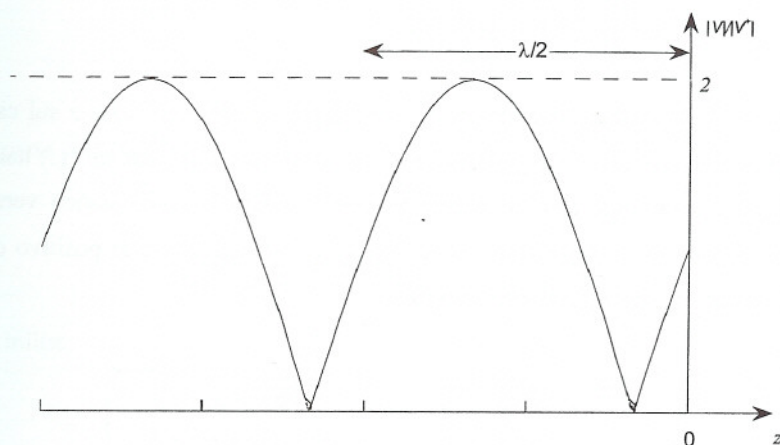


Fig. 3.21 Andamento della tensione con $f=f_0/2$.

E) LINEA CHIUSA SU UN CARICO GENERICO Z_u

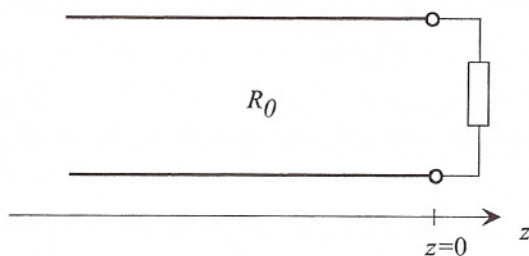


Fig. 3.22 Linea chiusa su un carico generico.

Per il coefficiente di riflessione vale la relazione:

$$\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{+j2\beta z} = \frac{V^-}{V^+}e^{+j2\beta z} \quad (3.50)$$

Dalla (3.50) si deduce che lungo una linea priva di perdite il modulo di $\Gamma(z)$ resta costante e pari a quello calcolato sul carico $\Gamma(0)$ e, nel caso di carico passivo, il modulo di $\Gamma(z)$ sarà inferiore all'unità perchè l'onda riflessa da un carico passivo non può avere ampiezza maggiore di quella dell'onda diretta. Quindi:

$$0 \leq \frac{|V^-|}{|V^+|} = |\Gamma(0)| = |\Gamma(z)| \leq 1$$

Dalla relazione (3.50), conseguentemente all'aver scelto l'origine dell'asse z sul carico ed il verso positivo dell'asse z dal generatore al carico, si ha che la fase di $\Gamma(z)$ tende a valori negativi, sempre maggiori in valore assoluto, spostandosi dal carico verso il generatore. Riferiamoci al piano complesso $\Re\{\Gamma(z)\}$, $\Im\{\Gamma(z)\}$. Il verso positivo degli argomenti è, come di consueto, quello antiorario.

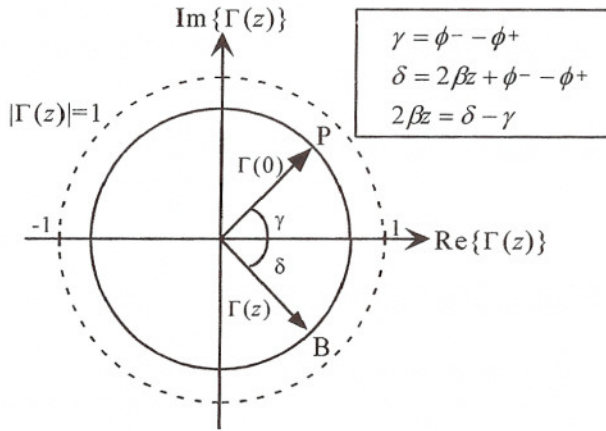


Fig. 3.23 Rappresentazione del coefficiente di riflessione sul piano complesso.

Spostandosi dal carico (corrispondente a $\Gamma(0)$) verso il generatore, il secondo estremo B di $\Gamma(z)$ si muove lungo una circonferenza, con centro nell'origine e raggio pari a $|\Gamma(0)|$, ruotando in senso orario. Nel generico punto corrispondente a $\Gamma(z)$, l'angolo fra $\Gamma(z)$ e $\Gamma(0)$ è pari a $2\beta z$ (angolo $\gamma + \delta$ in figura).

Il punto B ritorna sul punto P quando

$$2\beta z = -2\pi m$$

con m intero, ovvero per

$$z = -m \frac{\lambda}{2},$$

cioè per z pari a un multiplo intero di $\lambda/2$ ($\Gamma(z)$ è periodico di periodo $\lambda/2$).

Determiniamo l'andamento di $|V(z)|$ e $|I(z)|$ lungo la linea. Si ha che:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}$$

$$I(z) = \frac{1}{R_0} (V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z})$$

D'altra parte $\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{j2\beta z}$ per cui:

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} [1 + \Gamma(z)]$$

$$I(z) = \frac{V^+}{R_0} e^{-j\beta z} [1 - \Gamma(z)]$$

Risulta infine:

$$|V(z)| = |V^+| |1 + \Gamma(z)|$$

$$|I(z)| = \left| \frac{V^+}{R_0} \right| |1 - \Gamma(z)|$$

Riconsideriamo il piano del coefficiente di riflessione. Dalla figura 3.24 si ha:

$$|AB| = |1 + \Gamma(z)|, \text{ proporzionale a } |V(z)|;$$

$$|AC| = |1 - \Gamma(z)|, \text{ proporzionale a } |I(z)|$$

Facendo ruotare il punto B sulla circonferenza di raggio $|\Gamma(z)|$ si può prevedere dove si hanno dei massimi ($\Gamma(z)$ reale e positivo) e dove si hanno dei minimi ($\Gamma(z)$ reale e negativo), sia di tensione sia di corrente lungo la linea. In particolare, essendo il punto C diametralmente opposto a B, si vede che in corrispondenza di un minimo di tensione c'è un massimo della corrente e viceversa.

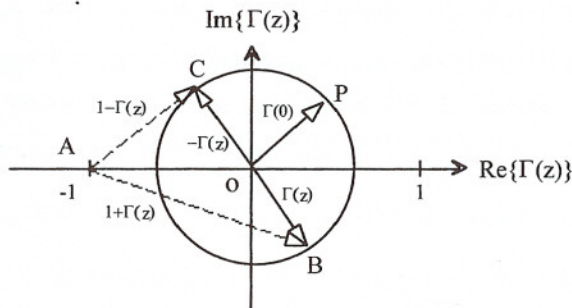


Fig. 3.24 Relazione tra il coefficiente di riflessione e le ampiezze di tensione e corrente.

Nelle figure seguenti vengono riportati gli andamenti di $|V(z)/V^+|$ e $|R_0 I(z)/V^+|$:

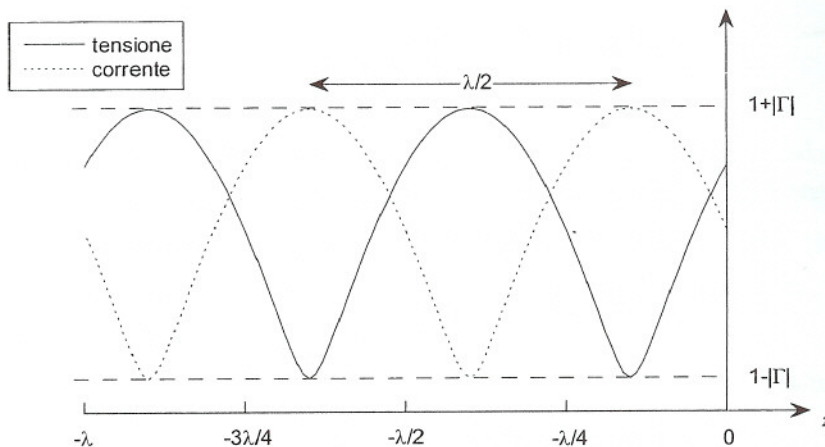


Fig. 3.25 Andamenti delle ampiezze normalizzate di tensione e corrente in una linea chiusa su un carico generico.

Si noti che tali andamenti sono periodici di periodo $\lambda/2$ ma non sono sinusoidali.

Alla luce delle considerazioni ora svolte, riconsideriamo i casi particolari precedentemente analizzati.

1) $Z_u = R_0 \Rightarrow V^- = 0 \Rightarrow |\Gamma(0)| = 0 \Rightarrow$ la circonferenza ha raggio nullo e degenera quindi in un punto coincidente con l'origine degli assi; di conseguenza i moduli della tensione e della corrente sono costanti lungo la linea ($1+|\Gamma| \rightarrow 1$, $1-|\Gamma| \rightarrow 1$).

2) $Z_u = 0$: linea chiusa in corto circuito

$Z_u = \infty$: linea aperta

In questi casi l'ampiezza dell'onda riflessa e di quella incidente sono uguali per cui il modulo del coefficiente di riflessione risulta unitario ($|\Gamma(z)| = 1$). La circonferenza su cui si muove il secondo estremo del vettore che rappresenta il coefficiente di riflessione passa per il punto A; muovendosi sulla circonferenza $|\Gamma(z)| = 1$ i moduli di $V(z)$ e $I(z)$ toccano nel punto di minimo l'asse delle ascisse ($1-|\Gamma| \rightarrow 0$) con una cuspid e raggiungono il massimo ($1+|\Gamma| \rightarrow 2$) con pendenza orizzontale. Si ritrovano così le curve trovate per i moduli della tensione e della corrente nel caso di linee aperte o chiuse in corto circuito.

Per analizzare l'andamento dell'impedenza, centriamo la circonferenza di raggio $|\Gamma(0)|$ sul punto $O' \equiv (1,0)$ del piano complesso.

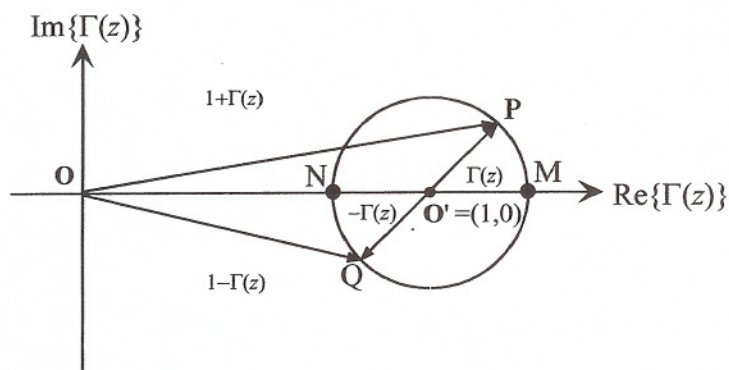


Fig. 3.26 Relazione tra il coefficiente di riflessione e l'impedenza normalizzata lungo la linea

Si ha

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+ e^{-j\beta z} (1 + \Gamma(z))}{(V^+ / R_0) e^{-j\beta z} (1 - \Gamma(z))} = R_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

(come pag. 80
3.47)

Risulta dunque che l'angolo POQ è l'argomento dell'impedenza $Z(z)$.

Si nota che per $P \equiv M$ si ha un massimo del modulo dell'impedenza, il cui valore è reale pari a:

$$|Z(z)|_{\max} = R_0 \frac{1 + |\Gamma(0)|}{1 - |\Gamma(0)|}$$

tale massimo si verifica nel punto M ($\Gamma(z)$ è reale e positivo) che corrisponde anche a un massimo di tensione ($|V(z)|$ proporzionale a $|1 + \Gamma(z)|$) e un minimo di corrente ($|I(z)|$ proporzionale a $|1 - \Gamma(z)|$).

Per $P \equiv N$ ($\Gamma(z)$ è reale e negativo) si ha invece un minimo del modulo dell'impedenza, di valore sempre reale pari a:

$$|Z(z)|_{\min} = R_0 \frac{1 - |\Gamma(0)|}{1 + |\Gamma(0)|}$$

il minimo dell'impedenza si verifica nel punto N che definisce anche un minimo di tensione e un massimo di corrente.

Definizione del ROS (RAPPORTO D'ONDA STAZIONARIA):

si definisce rapporto d'onda stazionaria (ROS) il rapporto tra l'ampiezza massima e quella minima della tensione lungo la linea:

$$ROS = \frac{|V(z)|_{\max}}{|V(z)|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma(0)|}{1 - |\Gamma(0)|}. \quad (3.51)$$

Essendo $0 \leq |\Gamma(0)| \leq 1$ si ha che:

$$1 \leq ROS \leq \infty$$

In particolare $ROS = 1$ nel caso in cui la circonferenza degenera nel centro O ($\Gamma = 0 \Rightarrow$ adattamento), mentre $ROS = \infty$ quando il raggio della circonferenza è unitario, ossia $|\Gamma(0)| = 1$ (linea in corto circuito o aperta, o chiusa su un carico puramente reattivo).

Invertendo l'espressione (3.51) si può esprimere $|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)|$ in funzione del ROS :

$$|\Gamma(z)| = |\Gamma(0)| = \frac{ROS - 1}{ROS + 1}$$

Inoltre risulta

$$|Z(z)|_{\max} = R_0 \cdot ROS, \quad |Z(z)|_{\min} = \frac{R_0}{ROS}$$

§ 3.4 - INTERCONNESSIONE DI PIU' LINEE DI TRASMISSIONE.

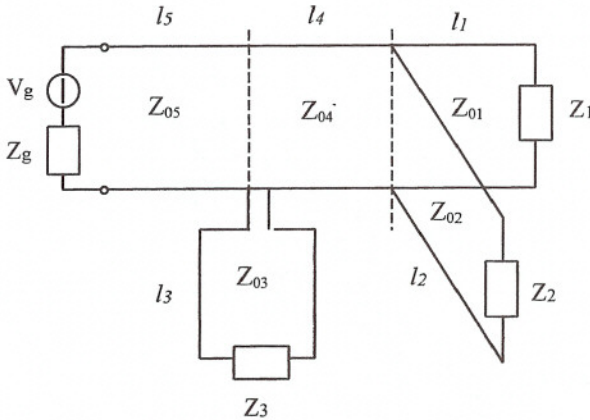


Fig. 3.27 Interconnessione di più linee di trasmissione.

Le relazioni scritte fino a questo punto valgono per strutture che, per lo meno a tratti, possono essere viste come circuiti a costanti uniformemente distribuite. La presenza di eventuali diramazioni può essere tenuta in conto nel modo seguente:

1 – mediante la relazione

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z(0) - jZ_0 \operatorname{tg} \beta z}{Z_0 - jZ(0) \operatorname{tg} \beta z} \quad (3.52)$$

si valutano le impedenze relative alle estremità di ingresso di ogni tronco di linea con caratteristiche (Z_{0i}, k_i) , lunghezza l_i e chiuse su un carico Z_i ;

2 – le varie impedenze d'ingresso dei vari tronchi confluenti in un punto di diramazione si compongono con le ordinarie regole dei circuiti a costanti concentrate;

3 – si assume l'impedenza risultante dalla precedente operazione quale carico del tronco di linea "a monte" (cioè che sta verso il generatore);

4 – si fissa un nuovo riferimento con $z=0$ in corrispondenza di tale carico; si riutilizza la (3.52) ripetendo le operazioni descritte, fino a determinare l'impedenza che si "vede" dal generatore.

NOTA: Ricordiamo che per tutte le linee senza perdite la costante di propagazione è $k = \beta = \omega\sqrt{LC}$ e l'impedenza caratteristica è reale $R_0 = \sqrt{L/C}$. In particolare risulta anche:

$$k = \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

dove ε e μ sono le costanti del mezzo che circonda i conduttori costituenti la linea. Questo risultato può essere verificato con le espressioni di L e C determinate per la linea bifilare e la linea coassiale, ma è comunque un risultato di tipo generale valido per ogni struttura guidante in cui si propaga il modo TEM.

Risulta dunque $\sqrt{LC} = \sqrt{\varepsilon\mu}$ e quindi:

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{C^2}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{C^2}} = \zeta \frac{\varepsilon}{C}$$

dove ζ è l'impedenza caratteristica del mezzo che circonda i conduttori. L'impedenza caratteristica della linea è perciò diversa dall'impedenza caratteristica del mezzo per un fattore ε/C che dipende dai parametri geometrici della linea.

§ 3.5 - CARTA DI SMITH

In questa sezione verrà introdotto uno strumento grafico di uso molto comune nell'analisi delle linee di trasmissione: la Carta di Smith.

Consideriamo una linea di trasmissione uniforme (per cui cioè le costanti primarie non variano con z) e priva di perdite. Supponiamo che essa sia chiusa su una impedenza di carico Z_u .

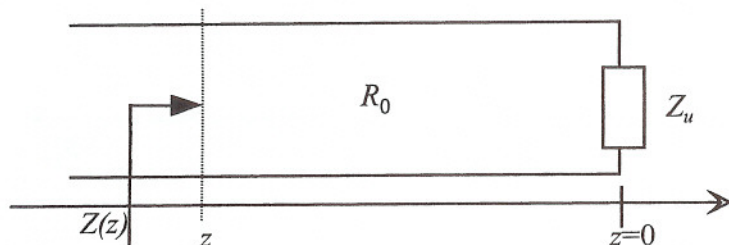


Fig. 3.28 Linea di trasmissione chiusa su un carico generico.

Con riferimento all'impedenza che si vede verso il carico dalla sezione di ascissa z , si ha:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}$$

La quantità:

$$z_n(z) = \frac{Z(z)}{R_0} = r + jx \quad (3.53)$$

rappresenta l'impedenza normalizzata rispetto alla resistenza caratteristica della linea in corrispondenza della sezione di ascissa z , con:

r = resistenza normalizzata

x = reattanza normalizzata

Per quanto riguarda il coefficiente di riflessione

$$\Gamma(z) = \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \gamma_r + j\gamma_i,$$

sappiamo che esso è legato all'impedenza tramite la relazione seguente:

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - R_0}{Z(z) + R_0} = \frac{Z(z)/R_0 - 1}{Z(z)/R_0 + 1}$$

e quindi:

$$\begin{cases} \Gamma(z) = \frac{z_n(z) - 1}{z_n(z) + 1} \\ z_n(z) = \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \end{cases} \quad (3.54)$$

Esiste dunque una corrispondenza biunivoca tra $\Gamma(z)$ e $z_n(z)$.

➔ Consideriamo ora il piano complesso $\Re\{z_n\} = r$, $\Im\{z_n\} = x$ per $z_n(z)$, e quello $\Re\{\Gamma\} = \gamma_r$, $\Im\{\Gamma\} = \gamma_i$ per $\Gamma(z)$:

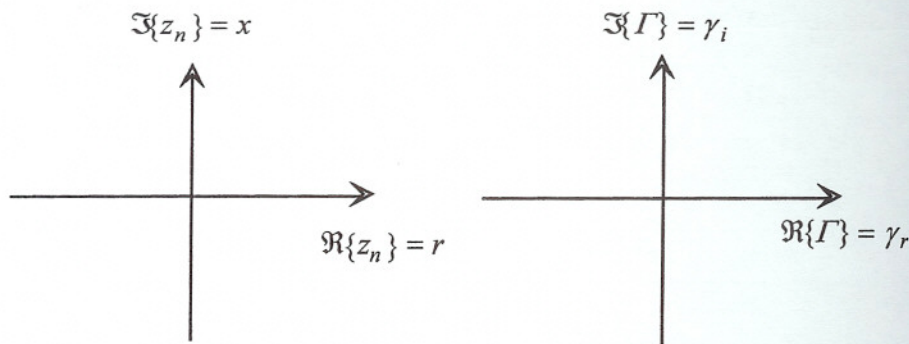


Fig. 3.29 Piano dell'impedenza normalizzata e piano del coefficiente di riflessione.

- Si può dimostrare che rette a $r = \text{cost.}$ (resistenza normalizzata costante) nel piano delle impedenze normalizzate corrispondono, nel piano del coefficiente di riflessione, a circonferenze con centro $C \equiv [r/(r+1); 0]$ e raggio $(1/(r+1))$: tutte queste circonferenze (vedi Fig. 3.30) passano per il punto $(\gamma_r = 1; \gamma_i = 0)$ e il loro centro appartiene all'asse γ_r (appartiene al segmento che unisce il punto $(1,0)$ con l'origine), quindi esse sono tutte tangenti alla retta passante per il punto $(1,0)$ e perpendicolare all'asse γ_r .

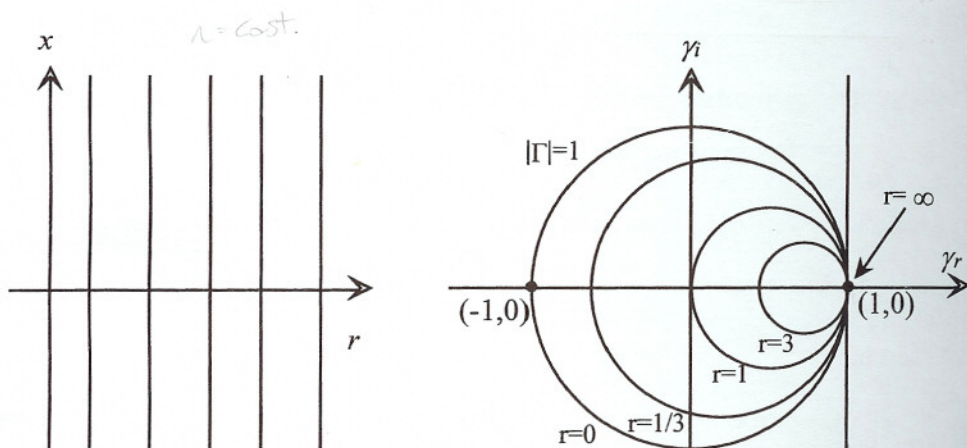


Fig. 3.30 Curve a resistenza normalizzata costante sul piano dell'impedenza normalizzata e sul piano del coefficiente di riflessione.

Le rette a $x = \text{cost.}$ (reattanza normalizzata costante) nel piano delle impedenze normalizzate ($\Re\{z_n\}; \Im\{z_n\}$) corrispondono invece, nel piano del coefficiente di riflessione ($\Re\{\Gamma\}; \Im\{\Gamma\}$), a circonferenze con centro $C \equiv [1; 1/x]$ e raggio $1/x$: tali circonferenze (vedi Fig. 3.31) passano anche loro tutte per il punto ($\gamma_r = 1; \gamma_i = 0$), ma il loro centro appartiene alla retta $\gamma_r = 1$; inoltre esse sono tangenti all'asse γ_r .

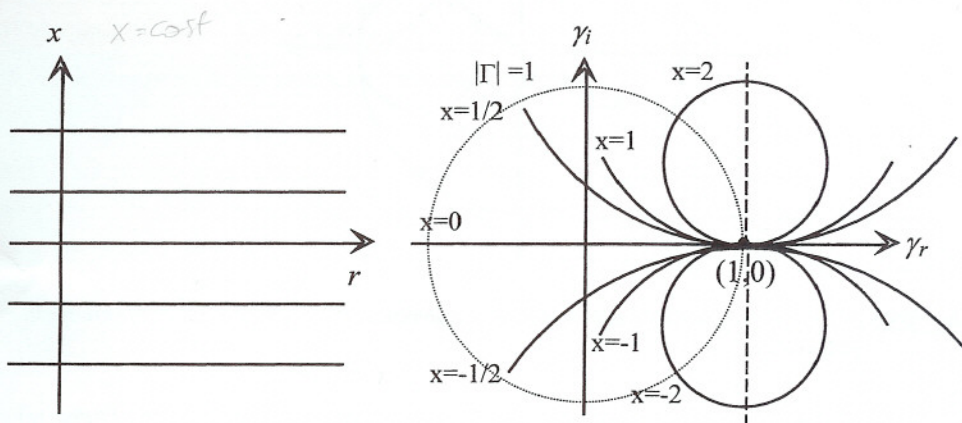


Fig. 3.31 Curve a reattanza normalizzata costante sul piano dell'impedenza normalizzata e sul piano del coefficiente di riflessione.

In base a queste ultime considerazioni si può costruire un grafico, detto Carta di Smith, che fornisce un semplice mezzo per passare da valori di impedenza normalizzata a valori di coefficiente di riflessione e viceversa; in definitiva, la Carta di Smith si presenta come una mappa polare del coefficiente di riflessione, su cui sono riportate curve a resistenza e reattanza normalizzate costanti limitatamente ai punti che cadono all'interno del cerchio $|\Gamma| \leq 1$ (ovvero $r \geq 0$).

N.B.: nel piano ($\Re\{\Gamma\}; \Im\{\Gamma\}$), in ogni punto le curve a resistenza costante e le curve a reattanza costante sono perpendicolari fra di loro (la trasformazione che lega la variabile complessa $\Gamma(z)$ alla variabile complessa $z_n(z)$ è una trasformazione conforme e pertanto conserva gli angoli).

3.5.1 Determinazione del coefficiente di riflessione dall'impedenza e viceversa

Nota l'impedenza normalizzata in corrispondenza di una certa sezione della linea di trasmissione, si può subito localizzare sulla carta di Smith il punto corrispondente a

quella posizione, utilizzando le famiglie di circonferenze a resistenza e reattanza normalizzate costanti. Ciò può essere fatto con ragionevole accuratezza utilizzando le scale riportate sulla carta di Smith stessa.

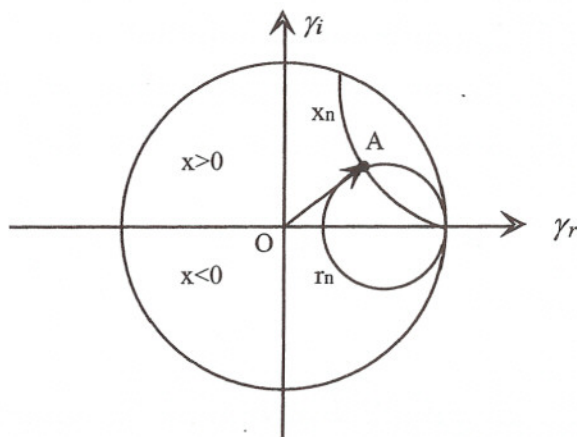


Fig. 3.32 Punto corrispondente all'impedenza normalizzata e vettore del coefficiente di riflessione.

Vale la pena mettere in evidenza che il semicerchio superiore (sopra l'asse γ_r) corrisponde a impedenze normalizzate con reattanza positiva (di tipo induttivo), quello inferiore a impedenze normalizzate con reattanza negativa (di tipo capacitivo).

Una volta individuato il punto dato dall'intersezione dei cerchi $r = r_n$ e $x = x_n$ (il punto A nella Fig. 3.32), il coefficiente di riflessione relativo alla sezione considerata è rappresentato dal vettore OA: il modulo del coefficiente di riflessione riferito alla particolare sezione in esame è dato dalla distanza fra il punto A e l'origine O (in rapporto al raggio della circonferenza $| \Gamma | = 1$); la fase è data dall'angolo che il vettore OA forma con la direzione positiva dell'asse γ_r , misurato in senso antiorario a partire dall'asse γ_r stesso. La lettura dell'angolo di fase in gradi può essere fatta direttamente sulla carta prolungando il segmento OA ed utilizzando un'apposita scala predisposta sulla circonferenza più esterna della carta stessa. Per il modulo del coefficiente di riflessione a volte è disponibile un'opportuna scala lineare riportata al di fuori della carta.

La procedura per ottenere $Z(z)$, una volta noto $\Gamma(z)$, è altrettanto ovvia.

3.5.2 Trasformazione di impedenza lungo la linea

Nel paragrafo §3.2 abbiamo visto che lungo una linea ideale il modulo del coefficiente di riflessione deve rimanere costante e uguale al modulo che il coefficiente di riflessione ha in corrispondenza del carico, cioè uguale a $|\Gamma(0)|$ (vedi formula 3.50).

Nel piano (γ_r, γ_i) possiamo dunque immaginare anche un'altra famiglia di circonferenze, con centro nell'origine e raggio pari a $|\Gamma(0)|$: tale famiglia di circonferenze non è però riportata sulla carta di Smith.

Facciamo riferimento alla Fig. 3.33: l'impedenza di carico Z_u può essere normalizzata rispetto alla resistenza caratteristica della linea ed è possibile determinarne il punto rappresentativo sulla carta di Smith; osserviamo che in tal modo si determina allo stesso tempo il coefficiente di riflessione $\Gamma(0)$. Se ci si muove lungo la linea, il vettore rappresentativo di $\Gamma(z)$ ruota intorno all'origine degli assi mantenendo il suo secondo estremo sulla circonferenza di raggio $|\Gamma(0)|$.

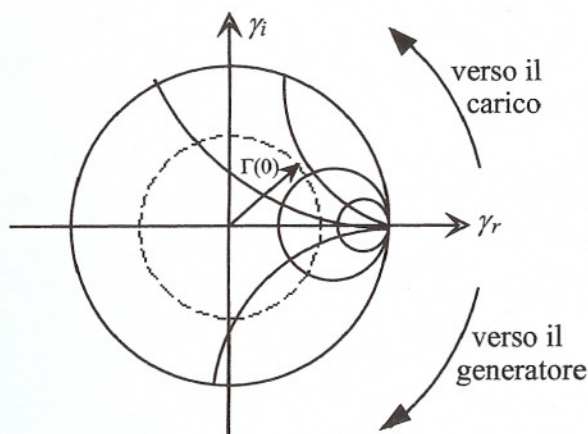


Fig. 3.33 Spostamento del coefficiente di riflessione sulla carta di Smith.

Per uno spostamento dal carico verso il generatore, l'angolo di fase di $\Gamma(z)$ diventa sempre più negativo (perché in tal caso z diminuisce):

$$\Gamma(z) = \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \frac{|V^-|}{|V^+|} e^{(2\beta z + \phi^- - \phi^+)}$$

Dunque, se ci si sposta verso il generatore, $\Gamma(z)$ ruota in senso orario, mentre se ci si sposta verso il carico, a partire da un punto generico, si ha una rotazione in senso antiorario; in entrambi i casi un giro completo sulla circonferenza di raggio $|\Gamma(0)|$ corrisponde a percorrere un tratto di linea pari a $\lambda/2$.

Sulla circonferenza più esterna della carta di Smith è riportata una scala calibrata in frazioni di lunghezza d'onda, in modo da poter individuare immediatamente la nuova posizione del coefficiente di riflessione se si conosce l'entità dello spostamento in frazioni della lunghezza d'onda. Si fa notare che sulla carta è riportata una scala per gli spostamenti verso il generatore e una scala per gli spostamenti verso il carico: entrambe partono dal punto ($r = 0, x = 0$), che corrisponde alla condizione di corto circuito.

Dunque, a partire dall'impedenza normalizzata relativa ad una certa sezione della linea (o equivalentemente a partire dalla conoscenza del coefficiente di riflessione relativo ad una certa sezione della linea) posso costruire la circonferenza a $|\Gamma(z)|$ costante e trovare il coefficiente di riflessione (o l'impedenza normalizzata corrispondente) in una sezione della linea a distanza qualsiasi dal carico.

● ESEMPIO:

Una linea di trasmissione ideale, con $R_0 = 50 \Omega$ è chiusa su un'impedenza di carico $Z_u = 150 + j40 \Omega$.

Determinare il coefficiente di riflessione sul carico e l'impedenza della linea a distanza di 5,5 cm rispetto al carico nell'ipotesi che la lunghezza d'onda sulla linea sia pari a 8 cm.

Troviamo l'impedenza normalizzata (punto A):

$$(Z_u)_n = \frac{150 + j40}{R_0} = 3 + j0,8$$

Determiniamo il coefficiente di riflessione. Sulla scala per la misura degli angoli leggo una fase di $10,5^\circ$. Sulla scala lineare riportata in fondo alla carta si legge il modulo del coefficiente di riflessione

$$|\Gamma(0)| \cong 0,525$$

Dunque

$$\Gamma(0) = 0,525e^{j10,5^\circ}$$

→ Procedendo analiticamente si otterrebbe

impedance come si fa.

N.B. 6

$$\Gamma(0) = \frac{Z(0) - R_0}{Z(0) + R_0} = \frac{100 + j40}{200 + j40} \cong 0,528e^{j10,49^\circ}$$

Per trovare ora l'impedenza della linea a distanza 5,5 cm dal carico occorre trovare a quale frazione di lunghezza d'onda corrispondono 5,5 cm: $\lambda = 8$ cm
 $\Rightarrow l/\lambda = 0,687 \Rightarrow l = 0,687\lambda$

Dobbiamo ruotare di $0,687\lambda$ in senso orario (verso il generatore) su una circonferenza a $|\Gamma| = 0,525$. Poiché ad uno spostamento di $0,5\lambda$ corrisponde un giro completo sulla circonferenza $|\Gamma| = 0,525$, è sufficiente ruotare di $0,187\lambda$ a partire dal punto A. Il punto A si trova a

$$S_A = 0,235\lambda$$

Sulla scala verso il generatore, si deve arrivare ad una ascissa

$$S_B = (0,235 + 0,187)\lambda = 0,422\lambda$$

Si trova il punto B e si legge l'impedenza normalizzata corrispondente

$$Z_n \cong 0,38 - j0,47$$

da cui

$$Z_B \cong 50(0,38 - j0,47) = 19 - j23,5 \Omega$$

→ Con la formula di trasformazione dell'impedenza si sarebbe ottenuto:

$$\begin{aligned} Z_B &= R_0 \frac{150 + j40 + j50 \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} 0,6875\lambda\right)}{50 + j(150 + j40) \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{\lambda} 0,6875\lambda\right)} = \\ &= 30,105 e^{-j50,35^\circ} = 19,2 - j23,18 \Omega \end{aligned}$$

3.5.3 Determinazione del rapporto d'onda stazionaria (ROS) e della posizione del massimo di tensione

Per determinare il ROS in una linea di trasmissione ideale terminata su un'impedenza di carico nota, possiamo utilizzare quanto osservato nel paragrafo §3.2 relativamente all'impedenza d'ingresso di una linea ideale chiusa su un carico generico. In particolare abbiamo trovato che il punto di massima impedenza lungo la linea, che è anche di massima tensione e di minima corrente, è il punto indicato con M nella figura 3.34.

In tale punto l'impedenza è puramente resistiva e vale

$$|Z|_{MAX} = R_0 \cdot ROS \rightarrow |Z|_{MAX} / R_0 = ROS$$

Sulla carta di Smith il punto M corrisponde al punto in cui la circonferenza a $|\Gamma|$ costante interseca l'asse γ_r positivo (vedi punto B in Fig. 3.35). Per risalire al valore del ROS basta dunque leggere il valore della resistenza normalizzata relativa alla circonferenza tangente (in B) alla circonferenza a $|\Gamma|$ costante.

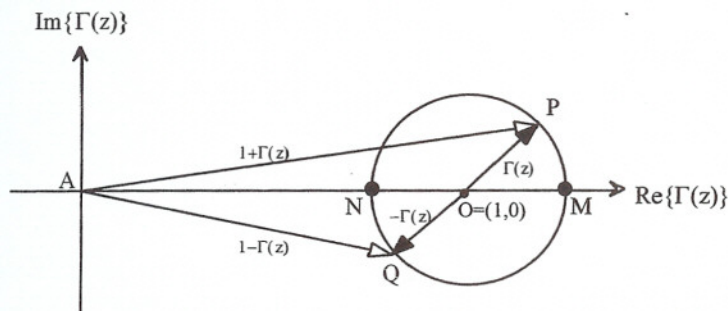


Fig. 3.34 Relazione tra il coefficiente di riflessione e l'ampiezza della tensione e della corrente.

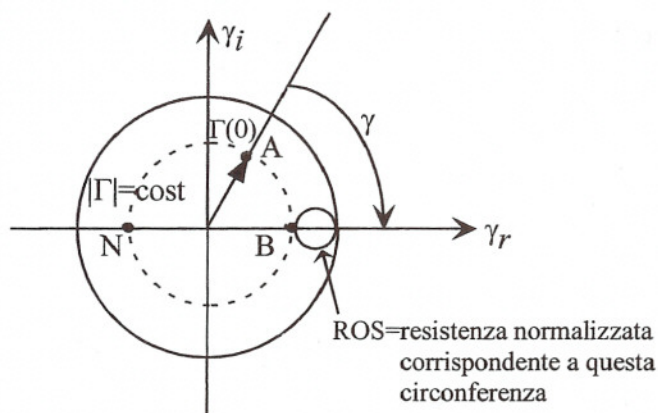


Fig. 3.35 Determinazione del ROS mediante la Carta di Smith.

L'angolo $\gamma = -\beta d$, corrispondente alla rotazione effettuata rispetto alla posizione dell'impedenza di carico (rappresentata in figura dal punto A) fino al punto B, indica la distanza d ($d > 0$) di cui ci si deve spostare per andare dal carico alla sezione in cui c'è il massimo di tensione. Il punto N, diametralmente opposto a B, rappresenta il punto ad impedenza minima sulla linea e corrisponde ad un minimo di tensione e a un massimo di corrente. L'impedenza relativa alla sezione corrispondente a N è puramente resistiva e vale:

$$|Z|_{MIN} = R_0 / ROS \rightarrow |Z|_{MIN} / R_0 = ROS$$

Il ROS può anche essere letto in modo diverso sfruttando una scala a volte presente in fondo alla carta. In tal caso si può prendere con un compasso il raggio della circonferenza a $|\Gamma|$ costante (che è anche una circonferenza a ROS costante), riportarlo sulla scala per il ROS , esterna alla carta, e leggerne direttamente il valore sulla scala stessa.

3.5.4 Uso della Carta di Smith come carta delle ammettenze

Si può dimostrare che l'ammettenza si trasforma lungo una linea ideale esattamente come l'impedenza. Infatti:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{Z(z)} = \frac{1}{R_0} \frac{R_0 - jZ_u \operatorname{tg} \beta z}{Z_u - jR_0 \operatorname{tg} \beta z} = \\ &= G_0 \frac{(1/G_0) - j(1/Y_u) \operatorname{tg} \beta z}{(1/Y_u) - j(1/G_0) \operatorname{tg} \beta z} = G_0 \frac{Y_u - jG_0 \operatorname{tg} \beta z}{G_0 - jY_u \operatorname{tg} \beta z} \end{aligned}$$

(G_0 è la conduttanza caratteristica della linea di trasmissione, $G_0 = 1/R_0$ e $Y_u = 1/Z_u$).

È quindi evidente che si può usare la stessa carta per trasformare le ammettenze usando la medesima procedura vista per le impedenze.

Osserviamo che la relazione che lega l'ammettenza normalizzata al coefficiente di riflessione si può ottenere da quella valida per z_n semplicemente cambiando $\Gamma(z)$ in $-\Gamma(z)$; si ha infatti:

$$\frac{Y(z)}{G_0} = y_n = \frac{1}{z_n} = \frac{1 - \Gamma(z)}{1 + \Gamma(z)},$$

Dunque, come prima cosa, una volta noto il valore dell'impedenza $Z(z)$ relativa ad una certa sezione della linea, si determina z_n e il punto P che la rappresenta sulla carta di Smith; si trova poi il punto P' diametralmente opposto a P ($\Gamma \rightarrow -\Gamma$) e si leggono i valori corrispondenti di resistenza normalizzata e di reattanza normalizzata: tali valori vanno interpretati in termini di conduttanza normalizzata g e suscettanza normalizzata b , per cui si ha:

$$y_n = g + jb$$

Per trovare $Y(z)$ basta a questo punto moltiplicare y_n per G_0 .

In base alle osservazioni fatte si può quindi pensare di utilizzare la carta di Smith come carta delle ammettenze interpretando:

$$r = \operatorname{Re}\{z_n\} \text{ come } g = \operatorname{Re}\{y_n\} \quad \text{e} \quad x = \operatorname{Im}\{z_n\} \text{ come } b = \operatorname{Im}\{y_n\}.$$

Le differenze da ricordare sono riportate nel seguito:

a) la fase del coefficiente di riflessione corrispondente ad una data ammettenza normalizzata, letta direttamente, differisce di π rispetto a quella dell'effettivo coefficiente di riflessione di tensione ($\Gamma \rightarrow -\Gamma$);

b)

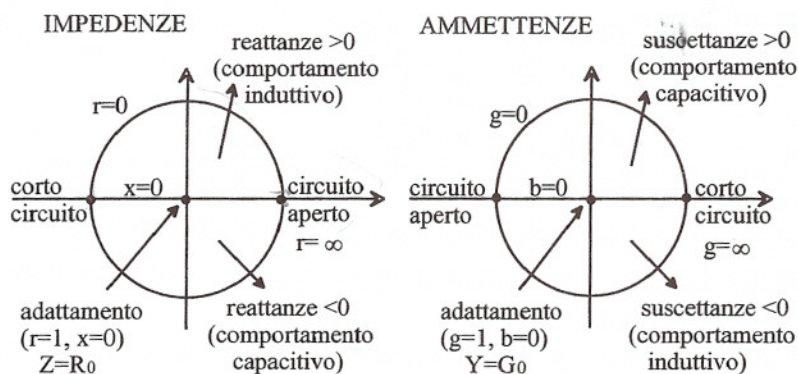


Fig. 3.36

c) consideriamo una circonferenza a $|\Gamma|$ costante:

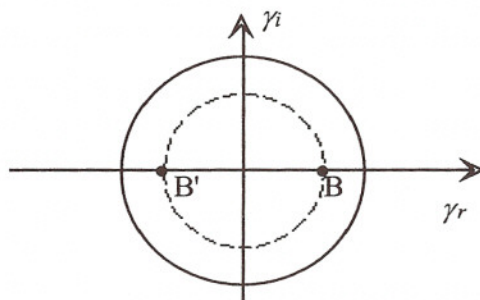


Fig. 3.37

Se guardiamo la carta in termini di carta delle ammettenze, il punto B rappresenta ora un massimo di ammettenza, e perciò un massimo di corrente e un minimo di tensione.

LINEE DI TRASMISSIONE

Parallelamente il punto B' rappresenta un minimo di ammettenza, e quindi un minimo di corrente e un massimo di tensione. In particolare in B si ha:

$$|Y|_{MAX} = 1/|Z|_{MIN} = ROS / R_0 = G_o ROS$$

da cui:

$$|y_n|_{MAX} = ROS$$

mentre in B' si ha:

$$|Y|_{MIN} = 1/|Z|_{MAX} = \frac{1}{R_0 ROS} = G_o / ROS$$

§ 3.6 - ADATTAMENTO D'IMPEDENZA

Quando una linea di trasmissione è chiusa su un carico una parte della potenza incidente viene generalmente riflessa dal carico stesso. Questo fenomeno è indesiderato, prima di tutto perchè a causa della riflessione la quantità di potenza assorbita dal carico risulta inferiore rispetto alla potenza ottenibile dalla sorgente; inoltre sulla linea di trasmissione si ha un'onda stazionaria che può risultare dannosa nei sistemi ad alta potenza, poichè le tensioni più elevate che vengono a stabilirsi sulla linea possono condurre a perforazioni del dielettrico e l'onda riflessa potrebbe danneggiare il generatore. Infine nei sistemi di comunicazione la presenza di onde riflesse sulla linea di trasmissione può condurre a distorsioni del segnale. A causa di tutti questi inconvenienti, affinchè sulla linea di trasmissione non siano presenti onde riflesse, si ricorre all'utilizzo di adattatori. Gli adattatori sono dispositivi che vengono interposti tra le linee e il carico, in modo che la linea risulti chiusa su un carico uguale alla sua impedenza caratteristica.

N.B.: Le tecniche utilizzate per adattare il carico alla linea possono poi essere utilizzate anche per l'adattamento del generatore alla linea.

I tre adattatori più usati sono:

- 1) trasformatore a $\lambda/4$;
- 2) stub parallelo;
- 3) stub serie.

3.6.1 Trasformatore a $\lambda/4$

Consideriamo una linea senza perdite di resistenza caratteristica R_0 , chiusa su un carico puramente resistivo $R_u \neq R_0$ (la linea non è adattata). Consideriamo ora un'altra linea, di resistenza caratteristica R'_0 , chiusa su un'impedenza generica Z_u ; l'impedenza di ingresso di questa linea, al variare dell'ascissa z lungo la linea stessa, è data da:

$$Z(z) = R'_0 \frac{Z_u - jR'_0 \operatorname{tg}(\beta z)}{R'_0 - jZ_u \operatorname{tg}(\beta z)}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

In quest'ultima formula, osserviamo che per $z = -\lambda/4$, cioè a distanza $\lambda/4$ dal carico, l'argomento delle tangenti è pari a $-\pi/2$, per cui risulta:

$$Z\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{(R'_0)^2}{Z_u} \quad \leftarrow \text{Ricordare}$$

Ora, nel caso particolare in cui l'impedenza di carico sia puramente resistiva, $Z_u = R_u$, si ottiene:

$$Z\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{(R'_0)^2}{R_u}$$

Quindi, in tal caso, a distanza $\lambda/4$ dal carico si vede un carico resistivo. In particolare, scegliendo:

$$R'_0 = \sqrt{R_0 R_u}$$

all'ingresso del tronco di linea di resistenza caratteristica R'_0 e lungo $\lambda/4$ si vede una resistenza pari a R_0 :

$$Z\left(-\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{(R'_0)^2}{R_u} = \frac{R_0 R_u}{R_u} = R_0$$

Basandoci sulle considerazioni precedenti possiamo affermare dunque che l'adattamento della linea si può ottenere inserendo, fra il carico (puramente resistivo) e la linea, un tratto di linea senza perdite lungo $\lambda/4$ (si parla infatti di "trasformatore a $\lambda/4$ ") e di resistenza caratteristica pari alla media geometrica tra la resistenza di carico e la resistenza caratteristica della linea da adattare (vedi Fig. 3.38).

➔ Se il carico Z_u non è resistivo, è sufficiente inserire lo stub in una sezione $z = -d$ in cui l'impedenza vista è puramente resistiva. Se si inserisce in una sezione in cui c'è un massimo di tensione ($Z(-d) = R_0 \cdot ROS$) si ha:

$$R'_0 = \sqrt{R_0 \cdot R_0 \cdot ROS} = R_0 \cdot \sqrt{ROS}$$

Viceversa, se si inserisce in una sezione in cui c'è un minimo di tensione ($Z(-d) = R_0 / ROS$) si ha:

$$R'_0 = \sqrt{\frac{R_0 \cdot R_0}{ROS}} = R_0 / \sqrt{ROS}$$

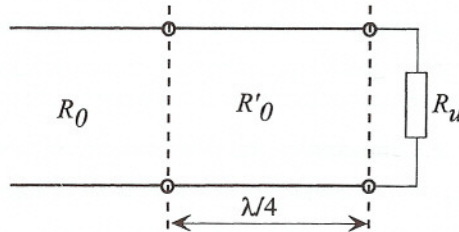


Fig. 3.38 Adattamento di impedenza mediante trasformatore a $\lambda/4$.

Il trasformatore a $\lambda/4$ richiede la disponibilità di tronchi con un particolare valore di resistenza caratteristica. Ciò non è facilmente realizzabile con cavi coassiali o linee bifilari, poiché è necessario modificare i parametri geometrici e/o elettrici della linea. Al contrario, trasformatori a $\lambda/4$ sono facilmente realizzabili in circuiti a microstriscia. In genere, si preferisce operare con gli *stub*, tronchi di linea chiusi in corto circuito (o chiusi su un circuito aperto) e disposti in parallelo o in serie rispetto alla linea principale.

3.6.2 Stub parallelo

Consideriamo al solito una linea di trasmissione senza perdite, di resistenza caratteristica R_0 , chiusa su un carico generico Z_u . Per il dimensionamento dello *stub* parallelo conviene ragionare in termini di ammettenze; facciamo riferimento dunque all'ammettenza normalizzata, ricordando che la normalizzazione viene effettuata rispetto alla conduttanza caratteristica della linea $G_0 = 1/R_0$. Riportiamo su una carta di Smith l'ammettenza di carico normalizzata (punto A in Fig 3.39):

$$y_n = Y_u / G_0 = R_0 / Z_u = 1 / z_n$$

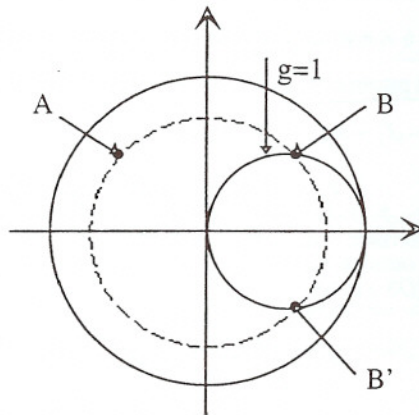


Fig. 3.39 Adattamento mediante *stub* parallelo.

Nella figura precedente è mostrata anche la circonferenza a $| \Gamma |$ costante, che in pratica descrive la variazione dell'ammettenza normalizzata lungo la linea. Tale circonferenza incontra la circonferenza $g=1$ in due punti: B e B'. Consideriamo il punto B, in corrispondenza del quale si ha una ammettenza normalizzata:

$$(y_n)_B = 1 + jb$$

e quindi un'ammettenza:

$$(Y)_B = G_0 + jB$$

NOTA: Discorsi analoghi a quelli che faremo nel seguito si possono ripetere per il punto B'.

Il punto B sulla carta di Smith corrisponderà sulla linea ad una certa sezione, che chiameremo 11'. Per realizzare l'adattamento è quindi sufficiente disporre in parallelo alla linea una ammettenza Y_s puramente immaginaria e con suscettanza pari a $-B$ (Fig. 3.40).

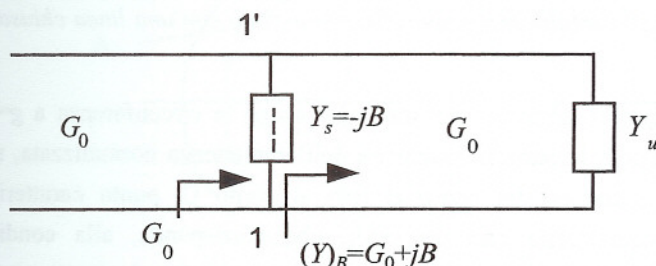


Fig. 3.40 Adattamento mediante ammettenza puramente reattiva collegata in parallelo rispetto alla linea principale

L'ammettenza puramente reattiva può essere realizzata inserendo nella sezione 11' un tronco di linea senza perdite, chiusa in corto circuito (o aperta), di lunghezza opportuna. Abbiamo infatti visto che con una linea ideale chiusa in corto circuito o aperta è possibile realizzare qualunque reattanza (e quindi qualunque suscettanza) variando la lunghezza della linea stessa.

N.B.: In genere, per motivi pratici vengono utilizzati tronchi di linea chiusi in cortocircuito, in quanto con essi si conseguono i seguenti vantaggi:

- da un punto di vista pratico è più semplice ad alte frequenze realizzare un corto circuito che non un circuito aperto;
- inoltre, riferendoci ad un linea chiusa in corto, si ha la possibilità di realizzare, utilizzando dei contatti striscianti, un corto circuito scorrevole lungo la linea, e quindi, potendo variare la lunghezza del tratto derivato e chiuso in corto, è possibile realizzare qualunque valore di ammettenza;
- infine, nel caso di linee schermate, quali ad esempio il cavo coassiale o la linea bifilare schermata, un tratto di linea aperta, al contrario di una linea chiusa in corto circuito, irradierebbe.

In definitiva si ha la seguente situazione illustrata in Fig. 3.41. Dal punto di vista della carta di Smith si ha un primo passaggio (da A a B) in cui, se ci si muove lungo la linea

dal carico alla sezione 11', il punto rappresentativo sulla carta si sposta sulla circonferenza a $|r|$ costante, fino a posizionarsi sulla circonferenza a $g=1$.

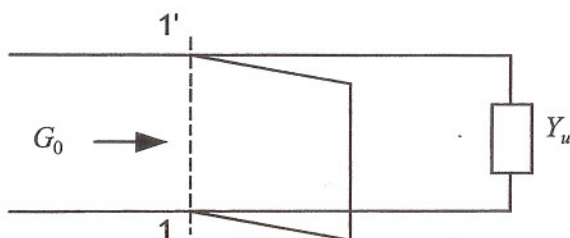


Fig. 3.41 Adattamento mediante stub parallelo realizzato con una linea chiusa in corto circuito.

Il secondo passaggio consiste poi nel muoversi lungo la circonferenza a $g=1$ (in tal modo infatti varia solo la parte immaginaria dell'ammettenza normalizzata, mentre la parte reale resta costante), dal punto B fino al punto C, punto caratterizzato da un'ammettenza normalizzata pari a $(1+j0)$, che corrisponde, alla condizione di adattamento. Denormalizzando si ottiene infatti nel punto C un'ammettenza pari alla conduttanza caratteristica della linea G_0 .

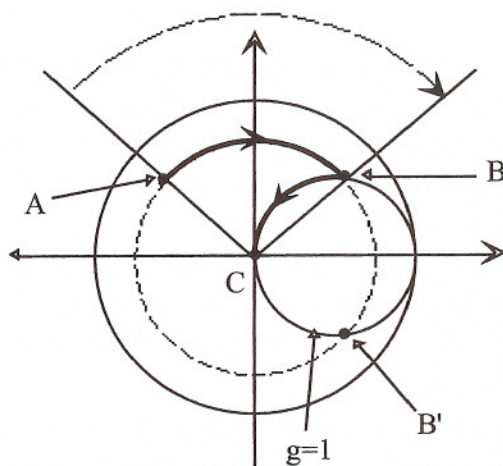


Fig. 3.42 Illustrazione dell'adattamento mediante stub parallelo sulla Carta di Smith.

3.6.3 Stub serie

Altra possibilità è quella di utilizzare uno *stub* di tipo serie, cioè derivato in serie rispetto alla linea principale su cui si vuol realizzare l'adattamento. Concettualmente si procede come nel caso dello *stub* parallelo, lavorando però questa volta sulle impedenze

invece che sulle ammettenze. A partire dall'impedenza di carico si può infatti determinare sulla linea una sezione, che chiameremo ancora 11', in corrispondenza della quale, guardando verso il carico, si vede una impedenza con parte reale pari alla resistenza caratteristica della linea. Ci si può rendere conto di questo fatto riferendosi alla carta di Smith.

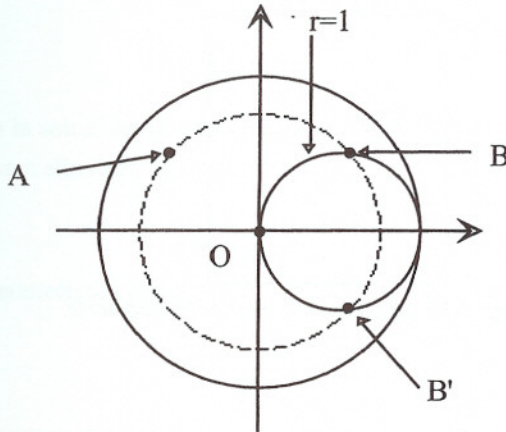


Fig. 3.43 Adattamento mediante stub serie.

Supponiamo che il punto A in figura rappresenti l'impedenza di carico normalizzata. Tracciata la circonferenza di raggio $\overline{OA}$, questa intersecherà la circonferenza $r=1$ in due punti: B e B'. Consideriamo ad esempio il punto B; in corrispondenza di B si vede un'impedenza:

$$Z(z)_B = R_0 + jX_B$$

Per realizzare l'adattamento basta disporre in serie alla linea un'impedenza

$$Z_s = -jX_B$$

con una reattanza cioè uguale e di segno contrario a quella in B. Quello che serve è dunque una reattanza pura e questa può essere realizzata mediante uno *stub*, cioè mediante un tronco di linea chiuso in corto circuito (o aperto) di lunghezza opportuna.

La situazione è quella riportata nella figura 3.44. Chiaramente si dovrà supporre che le sezioni 11' e 22' siano sovrapposte, cioè, in termini pratici, che la distanza tra 11' e 22' sia molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda in linea.

ADATTAMENTO DI IMPEDENZA

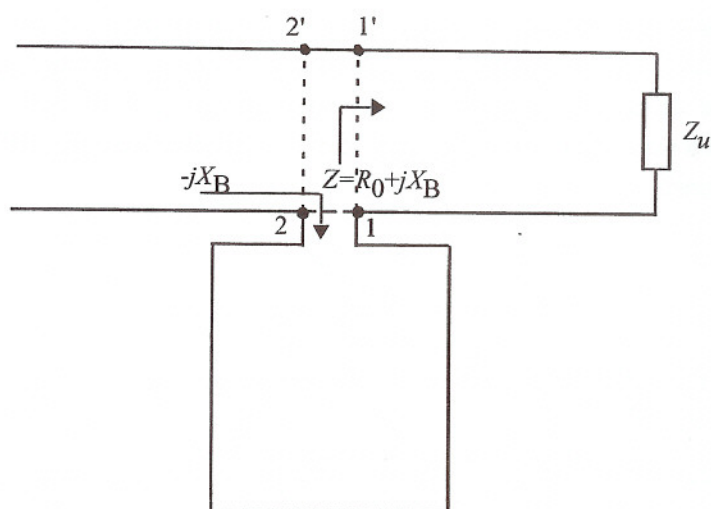


Fig. 3.44 *Adattamento mediante stub serie.*

§ 3.7 – LINEE CON PICCOLE PERDITE

Nel caso in cui siano presenti delle perdite sulla linea basta sostituire le costanti L e C con quantità complesse pari a:

$$L_{eq} = L - j \frac{R}{\omega}$$

$$C_{eq} = C - j \frac{G}{\omega}$$

Valgono ancora sia la soluzione di tipo viaggiante sia la soluzione di tipo stazionario, a patto che si attribuisca alla linea una costante di propagazione complessa

$$k = \omega \sqrt{L_{eq} C_{eq}}$$

ed un'impedenza caratteristica complessa

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}}$$

Esplicitando l'espressione di k si ha

$$k = \omega \sqrt{\left(L - j \frac{R}{\omega}\right) \left(C - j \frac{G}{\omega}\right)} = \omega \sqrt{LC} \left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)^{1/2}$$

Nel caso in cui

$$R \ll \omega L,$$

$$G \ll \omega C,$$

cioè nell'ipotesi di piccole perdite, ai fattori $(1 + R/j\omega L)^{1/2}$ e $(1 + G/j\omega C)^{1/2}$ si possono sostituire i rispettivi sviluppi in serie di Mac Laurin arrestati al secondo termine. In particolare si ha $\sqrt{1+x} \cong 1 + x/2 + \dots$, per $x \ll 1$, per cui:

$$\begin{aligned} k &\cong \omega \sqrt{LC} \left(1 + \frac{R}{2j\omega L}\right) \left(1 + \frac{G}{2j\omega C}\right) \cong \omega \sqrt{LC} - j \frac{\sqrt{LC}}{2} \left(\frac{G}{C} + \frac{R}{L}\right) = \\ &= \omega \sqrt{LC} - \frac{j}{2} \left(GR_0 + \frac{R}{R_0}\right) = \beta - j\alpha. \end{aligned}$$

La costante di attenuazione α è diversa da zero e positiva: pertanto l'onda diretta di tensione e quella di corrente hanno un'ampiezza decrescente secondo il fattore $\exp(-\alpha z)$.

Il valore della costante di fase β coincide con quello che si ha nel caso di assenza di perdite. Occorre però precisare che quando negli sviluppi in serie vengono considerati

termini superiori al primo (il che è necessario quando le perdite non possono essere considerate piccole), la costante di fase risulta dipendente da ω con legge non lineare. Per quanto riguarda l'impedenza caratteristica, con considerazioni analoghe a quelle svolte per il calcolo della costante di propagazione, si ottiene:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L_{eq}}{C_{eq}}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\sqrt{1 - j \frac{R}{\omega L}}}{\sqrt{1 - j \frac{G}{\omega C}}} \cong \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\left(1 - j \frac{R}{2\omega L}\right)}{\left(1 - j \frac{G}{2\omega C}\right)} \cong \\ &\cong \sqrt{\frac{L}{C}} + j \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{G}{C} - \frac{R}{L}\right) = R_0 + jX_0 \end{aligned}$$

Quindi la parte reale coincide con l'impedenza caratteristica che si avrebbe in assenza di perdite. Inoltre è presente una reattanza X_0 che risulta in genere di tipo capacitivo poichè nella maggior parte dei casi pratici si verifica che $G/C < R/L$. Se le perdite sono molto piccole si può sempre porre

$$Z_0 \cong R_0$$

Il fatto di considerare Z_0 complesso equivarrebbe a tenere in conto un piccolo sfasamento costante rispetto a z fra la tensione $V(z)$ e la corrente $I(z)$ lungo la linea. Una simile approssimazione non è lecita per la costante di propagazione k : infatti, il termine di attenuazione $e^{-\alpha l}$ può diventare significativo per lunghezze della linea sufficientemente grandi.

E' infine opportuno mettere in evidenza come sia possibile realizzare esattamente una condizione di impedenza caratteristica reale anche in presenza di perdite non trascurabili, compensando le perdite serie e le perdite parallelo:

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L} \quad \text{Condizione di Heaviside}$$

In tal caso anche la costante di fase dipende linearmente dalla frequenza e la linea torna a comportarsi come un mezzo non dispersivo (rimane sempre il fattore di attenuazione diverso da zero).

3.7.1 Esempio di calcolo dell'attenuazione lungo una linea con perdite

Un metodo per misurare l'attenuazione di una linea con perdite è quello di chiudere su un corto circuito un tratto di linea di lunghezza nota l . Misurando il coefficiente di riflessione o il ROS si ottiene il valore dell'attenuazione. Se la linea fosse priva di perdite si avrebbe:

$$|\Gamma| = 1 \quad \Rightarrow \quad ROS = \infty$$

ma poichè vi sono delle perdite si ha:

$$|\Gamma_{in}| = |\Gamma_L| e^{-2\alpha z}$$

essendo $|\Gamma(0)| = 1$ si ottiene:

$$\alpha = -\frac{1}{2l} \ln |\Gamma(z=l)| \text{ m}^{-1}.$$

L'attenuazione di un segnale che si propaga lungo una linea adattata di lunghezza l vale:

$$Att|_{dB} = 20 \log_{10}(e^{-2\alpha l}) = -l \cdot 20 \log_{10}(e^{2\alpha}) = -l \cdot \alpha_{dB/m}$$

essendo $\alpha_{dB/m}$ l'attenuazione (in dB) per unità di lunghezza.

CAPITOLO 4

PROPAGAZIONE GUIDATA

§4.1 – CONFIGURAZIONI MODALI

Si parla di propagazione guidata, in alternativa a quella nello spazio libero, quando esiste una struttura che supporta la propagazione, nel senso che tutta o la maggior parte dell'energia elettromagnetica trasmessa resta confinata in prossimità della suddetta struttura.

L'impiego dei vari tipi di struttura guidante (linee, cavi coassiali, guide d'onda, etc.) dipende soprattutto dalla frequenza in gioco e dai problemi che al crescere di quest'ultima assumono rilievo: interazione con altri circuiti vicini, perdite per irradiazione, perdite nel dielettrico, etc. Ad esempio, risulta che le linee bifilari hanno un comportamento non soddisfacente alle alte frequenze, in quanto all'aumentare della frequenza aumentano le perdite per irradiazione. Per quanto riguarda i cavi coassiali, osserviamo che l'energia rimane confinata nella struttura guidante, perciò non si verificano perdite per irradiazione, però la struttura del cavo coassiale presenta un conduttore interno, (conduttore elettrico quasi perfetto) sostenuto da un dielettrico, nel quale si verificano delle perdite per isteresi che risultano proporzionali alla frequenza (tali perdite dipendono da quante volte viene percorso il ciclo di isteresi: l'area da esso racchiusa può essere piccola, ma se il ciclo viene percorso molte volte le perdite possono diventare apprezzabili); per questo motivo anche il cavo coassiale non è adatto per l'impiego ad alte frequenze.

Le strutture guidanti che invece consentono la propagazione di onde elettromagnetiche ad alta frequenza senza eccessive perdite sono le guide d'onda. Tra i vari tipi di guide d'onda, faremo riferimento in questo capitolo a strutture guidanti costituite da tubi metallici cavi (guide d'onda metalliche), a sezione rettangolare o circolare, assumendo le seguenti ipotesi:

- a) le strutture guidanti risultano a *sezione uniforme* e costituite da pareti metalliche perfettamente conduttrici ($\sigma_{PARETI} \rightarrow \infty$);

- b) lo spazio interno a tali strutture, o più in generale che circonda tali strutture, è sia un dielettrico omogeneo (ϵ e μ indipendenti dal punto), isotropo (ϵ e μ quantità scalari) e privo di perdite (ϵ e μ reali) ¹

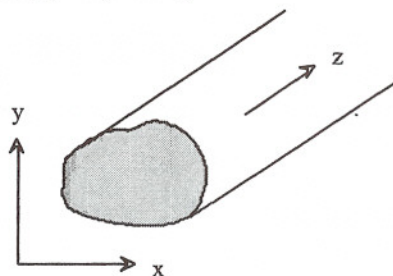


Fig. 4.1 - Generica struttura guidante con sezione trasversale arbitraria

Per determinare le condizioni e le modalità generali di propagazione, conviene fare riferimento alle equazioni di Maxwell. Le soluzioni verranno cercate in assenza di sorgenti ($J_0 = 0$). Ipotizziamo inoltre che il dielettrico che riempie la guida sia l'aria; in tal caso, la conducibilità del mezzo risulta nulla ($\sigma = 0$) e dunque le equazioni da studiare si riducono alle seguenti:

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{E} &= -j\omega\mu_0 \underline{H}, \\ \nabla \times \underline{H} &= j\omega\epsilon_0 \underline{E}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Queste ultime si traducono in un sistema di 6 equazioni scalari in 6 incognite, per cui il problema è perfettamente determinato. Osserviamo però che, ai fini dell'analisi del campo, risulta conveniente una decomposizione dello stesso secondo due direzioni: la direzione longitudinale $\underline{i}_z$, lungo la quale si estende la struttura, e la direzione trasversa normale a $\underline{i}_z$ (Fig. 4.1.). In tal modo si ottengono rispettivamente le componenti longitudinali E_z e H_z e le componenti trasverse $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ dei campi:

$$\begin{aligned}\underline{E} &= \underline{E}_t + E_z \underline{i}_z, \\ \underline{H} &= \underline{H}_t + H_z \underline{i}_z.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Se si fissa una terna di riferimento cartesiana con asse z coincidente con la direzione longitudinale alla struttura, il piano trasverso coincide con il piano xy e si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{E}_t &= E_x \underline{i}_x + E_y \underline{i}_y, \\ \underline{H}_t &= H_x \underline{i}_x + H_y \underline{i}_y.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Si può a questo punto procedere a quell'operazione nota come "operazione di trasversalizzazione delle equazioni di Maxwell"; essa consiste nel moltiplicare le

¹ La trattazione che presenteremo resta però valida anche se si considera un dielettrico omogeneo sulla sezione trasversale, con caratteristiche che variano lungo z .

equazioni ai rotori (4.1), con i campi decomposti secondo le (4.2), dapprima scalarmente per $\underline{i}_z$ e poi vettorialmente sempre per $\underline{i}_z$. Riusciamo in tal modo ad ottenere un sistema di equazioni nelle sole incognite $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ (4 equazioni nelle 4 incognite E_x, E_y, H_x, H_y), più due equazioni che esprimono le componenti longitudinali E_z e H_z in funzione delle componenti trasversali $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$. Omettendo i dettagli analitici, le espressioni finali sono date da²:

$$\frac{\partial}{\partial z} \underline{E}_t = -j\omega\mu \left[(\underline{H}_t \times \underline{i}_z) + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{i}_z) \right], \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \underline{H}_t = -j\omega\varepsilon \left[(\underline{i}_z \times \underline{E}_t) + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \cdot (\underline{i}_z \times \underline{E}_t) \right]. \quad (4.4b)$$

Per le componenti lungo z si ha:

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{i}_z), \quad (4.5a)$$

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot (\underline{i}_z \times \underline{E}_t). \quad (4.5b)$$

Dato che E_z e H_z sono ricavabili una volta note $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$, ci possiamo limitare a studiare il sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite E_x, E_y, H_x, H_y insieme alle assegnate condizioni al contorno che, per un conduttore elettrico perfetto, consistono nell'annullarsi della componente tangenziale del campo elettrico sulle pareti della struttura guidante.

Si applica quindi il metodo della separazione delle variabili, esprimendo i campi trasversali $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ come prodotto di due funzioni

$$\begin{aligned} \underline{E}_t &= \underline{e}(\underline{t}) V(z), \\ \underline{H}_t &= \underline{h}(\underline{t}) I(z). \end{aligned} \quad (4.6)$$

l'una dipendente dalla sola coordinata longitudinale z e l'altra funzione della coordinata trasversale $\underline{t}$ che in coordinate cartesiane è pari a

$$\underline{t} = x\underline{i}_x + y\underline{i}_y \quad (4.7)$$

($\underline{t}$ è un vettore completamente contenuto nel piano trasverso).

² Il simbolo ∇_t fa riferimento ad un operatore bidimensionale che opera sul piano trasverso; ad esempio, in coordinate cartesiane risulta:

$$\nabla_t \Psi = \frac{\partial}{\partial x} \Psi \underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \Psi \underline{i}_y \quad (\text{gradiente trasverso}),$$

$$\nabla_t^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \quad (\text{Laplaciano trasverso}).$$

L'ipotesi (4.6) implica che, nella generica sezione trasversale, l'andamento dei campi rimane sempre lo stesso, per qualunque sezione, e che però, nel passare da una sezione all'altra, l'ampiezza (*complessa*) dei campi varia. In corrispondenza della sezione di ascissa z la configurazione dei campi è data da $\underline{e}(t)$ e $\underline{h}(t)$, variabili sulla sezione al variare di t , e moltiplicati rispettivamente per $V(z)$ e $I(z)$, costanti per ogni punto della sezione. Per z variabile la distribuzione trasversa del campo si mantiene costante, perchè $\underline{e}(t)$ e $\underline{h}(t)$ non sono funzioni di z , ma l'entità del campo varia perchè variano $V(z)$ e $I(z)$.

Le funzioni $\underline{e}(t)$ e $\underline{h}(t)$ si dicono “*funzioni vettoriali di modo*”, e godono dell'importante proprietà secondo la quale i vettori $\underline{e}$ ed $\underline{h} \times \underline{i}_z$ sono sempre allineati:

$$\underline{e} \equiv \underline{h} \times \underline{i}_z, \quad (4.8)$$

cioè i due vettori associati ad $\underline{e}(t)$ ed $\underline{h}(t)$ sono tra loro ortogonali e risultano entrambi ortogonali alla direzione di propagazione.

Le funzioni $V(z)$ e $I(z)$ vengono invece dette “*funzioni scalari di modo*” ed assumono valori, in generale, complessi.

In particolare, definiamo “*modo*” una struttura elementare di campo (una particolare configurazione di campo) elettrico e magnetico, che può coesistere con una data struttura guidante e che può propagarsi all'interno della struttura guidante stessa. Osserviamo che, data una certa struttura guidante in cui siano state definite le componenti trasversali e longitudinali del campo elettrico e magnetico, si possono individuare tre classi di *modi* fondamentali:

modo trasverso elettromagnetico (TEM) per cui risulta: $E_z = 0$, $H_z = 0$

modo trasverso elettrico (TE) per cui risulta: $E_z = 0$, $\Rightarrow \underline{E} = \underline{E}_t$

modo trasverso magnetico (TM) per cui si ha: $H_z = 0$, $\Rightarrow \underline{H} = \underline{H}_t$

Consideriamo separatamente i tre modi ora introdotti.

Modi TE

Dalla (4.5a) essendo $E_z = 0$ si ricava³:

$$\nabla_t \times \underline{h} = 0 \quad (4.9)$$

(con $\nabla_t \times \underline{h}$ rotore trasverso di $\underline{h}$); questo significa che è possibile esprimere $\underline{h}$ come gradiente trasverso di una funzione potenziale scalare $\psi(x, y)$:

³ Infatti, deve essere $\nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{i}_z) = \underline{i}_z \cdot \nabla_t \times \underline{H}_t - \underline{H}_t \cdot \nabla_t \times \underline{i}_z = \underline{i}_z \cdot \nabla_t \times \underline{H}_t = 0$; poichè $\nabla_t \times \underline{H}_t$ è parallelo a $\underline{i}_z$ allora $\nabla_t \times \underline{H}_t = I(z) \nabla_t \times \underline{h} = 0$, che, dovendo essere valida per qualunque valore di z , porta alla (4.9).

$$\underline{h} = -\frac{1}{k_{tH}} \nabla_t \psi(x, y) \quad (4.10)$$

dove k_{tH} è un'opportuna costante. Sostituendo nelle equazioni di Maxwell trasversalizzate, la funzione $\psi(x, y)$ risulta soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\nabla_t^2 \psi(x, y) + k_{tH}^2 \psi(x, y) = 0. \quad (4.11)$$

Per quanto riguarda la condizione al contorno, osserviamo che deve essere verificata la condizione $\underline{i}_n \times \underline{E} = 0$ sul contorno C della sezione trasversa della struttura guidante (Fig. 4.2). Per i modi TE la condizione diventa $\underline{i}_n \times \underline{E}_t = 0$. Per ciò che concerne la funzione ψ si ha:

$$\begin{aligned} \underline{i}_n \times \underline{E}_t &= V \underline{i}_n \times \underline{e} = V \underline{i}_n \times (\underline{h} \times \underline{i}_z) = V [\underline{h} (\underline{i}_n \cdot \underline{i}_z) - \underline{i}_z (\underline{i}_n \cdot \underline{h})] = \\ &= -V \underline{i}_z \left(-\frac{1}{k_{tH}} \nabla_t \psi \cdot \underline{i}_n \right) = \frac{V}{k_{tH}} \underline{i}_z \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C. \end{aligned}$$

In definitiva, la condizione al contorno è esprimibile come:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_C = 0. \quad (4.12)$$

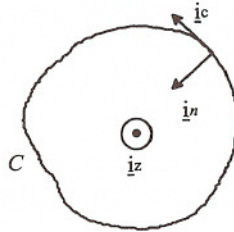


Fig. 4.2: Generica sezione trasversa della struttura guidante considerata.

Conseguentemente per il modo TE, la determinazione delle funzioni vettoriali di modo è ricondotta alla determinazione delle soluzioni dell'equazione differenziale (4.11), che è nota come equazione di Helmholtz bidimensionale, con la condizione al contorno (4.12), detta condizione al contorno di Neumann.

Modi TM

Per il modo TM ($H_z = 0$), si trova in modo duale che

$$\nabla_t \times \underline{e} = 0, \quad (4.13)$$

per cui $\underline{e}$ è esprimibile come gradiente trasverso di una opportuna funzione potenziale $\phi(x, y)$:

$$\underline{e} = -\frac{1}{k_{tE}} \nabla_t \phi(x, y), \quad (4.14)$$

con k_{tE} costante. La funzione $\phi(x, y)$ risulta soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\nabla_t^2 \phi(x, y) + k_{tE}^2 \phi(x, y) = 0, \quad (4.15)$$

con condizione al contorno esprimibile nel seguente modo:

$$\phi|_C = 0. \quad (4.16)$$

Infatti, sul contorno deve risultare adesso $E_z = 0$ e, contemporaneamente, $\underline{i}_l \cdot \underline{E}_t = 0$. Segue che:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \underline{i}_z) = \frac{1}{j\omega\epsilon} I \nabla_t \cdot (\underline{h} \times \underline{i}_z) = \frac{I}{j\omega\epsilon} \nabla_t \cdot \underline{e} = \\ &= -\frac{I}{j\omega\epsilon k_{tE}} \nabla_t \cdot \nabla_t \phi = -\frac{I}{j\omega\epsilon k_{tE}} \nabla_t^2 \phi. \end{aligned}$$

Dovendo la precedente condizione valere per ogni z ed essendo $k_{tE} \neq 0$, allora risulta $\nabla_t^2 \phi = 0$. Utilizzando la (4.15), si ottiene proprio la condizione (4.16). Applicando l'altra condizione ($\underline{i}_l \cdot \underline{E}_t = 0$), si ottiene $\phi|_C = \text{cost}$, che è già contenuta nella (4.16).

In definitiva, per il modo TM, la determinazione delle funzioni vettoriali di modo è ricondotta alla determinazione delle soluzioni dell'equazione di Helmholtz bidimensionale (4.15) con la condizione al contorno (4.16), detta condizione al contorno di Dirichlet.

L'equazione (4.11), con la sua condizione al contorno (4.12), e l'equazione (4.15), con la sua condizione al contorno (4.16), ammettono soluzioni (diverse da quelle identicamente nulle) solo per particolari valori di k_{tH} e k_{tE} , valori che vengono detti *autovalori trasversi* mentre le soluzioni ad essi associate vengono dette *autofunzioni*; sia relativamente al modo TE che relativamente al modo TM questi autovalori sono infiniti. Ad ogni autovalore trasverso è associato un modo di propagazione nella struttura guidante. Per definizione, due modi di propagazione cui sia associato lo stesso autovalore si dicono *degeneri*.

Per quanto riguarda la determinazione delle funzioni scalari di modo $V(z)$ e $I(z)$, sia per i modi TE che per i modi TM essi devono risultare soluzione del sistema:

$$\begin{cases} -\frac{dV(z)}{dz} = jk_z Z_0 I(z) \\ -\frac{dI(z)}{dz} = jk_z \frac{1}{Z_0} V(z) \end{cases} \quad (4.17)$$

dove i parametri k_z e Z_0 possono essere calcolati, a partire dalla conoscenza degli autovalori trasversi. In particolare, per i modi TE si ha:

$$k_z = k_{z_{TE}} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_{t_H}^2}, \quad (4.18)$$

$$Z_0 = Z_{0_{TE}} = \frac{\omega \mu}{k_{z_{TE}}}. \quad (4.19)$$

Per i modi TM, si ha invece:

$$k_z = k_{z_{TM}} = \sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - k_{t_E}^2}, \quad (4.20)$$

$$Z_0 = Z_{0_{TM}} = \frac{k_{z_{TM}}}{\omega \epsilon} \quad (4.21)$$

Osserviamo che le equazioni del sistema (4.17) sono formalmente identiche alle equazioni dei telegrafisti, già incontrate nello studio delle linee di trasmissione, per cui la distribuzione delle grandezze scalari $V(z)$ e $I(z)$ è dello stesso tipo della distribuzione della tensione e della corrente lungo una linea di trasmissione. Di conseguenza, ad esempio $V(z)$ avrà un'espressione del tipo seguente:

$$V(z) = V^+ e^{-jk_z z} + V^- e^{+jk_z z}. \quad (\text{sol. viaggiante})$$

Ciò significa che per ogni modo TE (cioè per ogni possibile autovalore trasversale k_{t_H}) e analogamente per ogni modo TM (cioè per ogni possibile autovalore trasversale k_{t_E}), la propagazione in guida può essere descritta mediante lo studio di una linea di trasmissione equivalente, facendo riferimento ad una costante di propagazione k_z , ad un'impedenza caratteristica Z_0 e ad una lunghezza d'onda λ_g in guida, che sono funzioni dell'autovalore relativo al modo di cui si sta studiando la propagazione.

In particolare, la lunghezza d'onda in guida λ_g misura il periodo spaziale di ripetizione del campo lungo l'asse z e si esprime nel seguente modo:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_z}. \quad (4.22)$$

Osserviamo che, relativamente alla propagazione di un certo modo in guida, il valore di λ_g risulta ben diverso dal valore della lunghezza d'onda che, in corrispondenza della stessa frequenza di lavoro, si avrebbe per la propagazione di un'onda piana uniforme nello spazio libero riempito dallo stesso mezzo che riempie la guida.

Infine, si fa notare che le funzioni $V(z)$ e $I(z)$ ricavate dalla risoluzione del sistema (4.17), sono completamente determinabili solo dopo aver assegnato le condizioni agli estremi (cioè sul carico e sul generatore). È importante anche sottolineare che, per i modi TE e TM, non è immediata l'identificazione di $V(z)$ e $I(z)$ con tensioni e correnti effettivamente misurabili sulla struttura reale.

Modi TEM

Per quanto riguarda la propagazione dei modi TEM ($E_z = 0$ e $H_z = 0$) si dimostra che essi possono esistere solo in strutture moltiplicemente connesse (come il *cavo coassiale* ad esempio); dunque la propagazione di un modo TEM non è consentita in una struttura a sezione semplicemente connessa quale quella delle guide d'onda rettangolari e circolari, che esamineremo in dettaglio nei seguenti paragrafi.

L'equazione risolvente è adesso del tipo:

$$\nabla_t^2 \varphi(x, y) = 0 \quad (4.23)$$

con condizioni al contorno esprimibile nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \varphi|_{C_1} &= \varphi_1 = \text{costante} \\ \varphi|_{C_2} &= \varphi_2 = \text{costante} \end{aligned} \quad (4.24)$$

In altre parole, il potenziale deve essere costante su ciascun contorno, ma diverso per contorni diversi (Fig.4.3). Nel caso del modo TEM, il significato di $V(z)$ e $I(z)$ coincide con quello della tensione e della corrente effettivamente misurabili con un voltmetro o un amperometro sulla generica sezione della struttura reale. Dalla (4.23), e' immediato verificare, che la soluzione per il modo TEM può essere considerata un caso particolare di un modo TE o TM, con autovalore trasverso nullo.

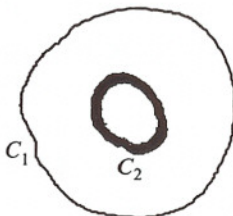


Fig. 4.3 – Struttura duplicemente connessa

§4.2 - GUIDE D'ONDA RETTANGOLARI

Consideriamo il caso particolare in cui la sezione della guida è rettangolare. Sia a la dimensione della sezione lungo l'asse x e b la dimensione della sezione lungo l'asse y , con $a > b$ (Fig. 4.4). a e b possono assumere qualunque valore, ma in base a criteri che verranno esposti nel seguito, nelle guide rettangolari standard si fissa $a=2b$. Risolvendo l'equazione di Helmholtz in coordinate cartesiane, è possibile ricavare la soluzione modale per i campi, secondo cui gli autovalori trasversi relativi ai modi TE hanno la seguente espressione:

$$k_{tH}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad (4.25)$$

con m e n indici interi positivi ($m=0, 1, 2, 3, \dots$; $n=0, 1, 2, 3, \dots$).

È importante mettere in evidenza che l'equazione (4.11), con la condizione al contorno di Neumann (4.12) e i k_{tH} dati dalla (4.25), ammette una duplice infinità numerabile di soluzioni. Ad ogni valore particolare che l'autovalore $k_{tH\,m,n} = k_{tH}$ può assumere, è associata una soluzione particolare $\psi_{m,n} = \psi$ (autofunzione), da cui è possibile ricavare le relative funzioni vettoriali di modo $\underline{h}$ ed $\underline{e}$. Nel caso di guida rettangolare, le $\psi_{m,n}$ hanno la seguente espressione:

$$\psi_{m,n}(x,y) = A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (4.26)$$

con A costante arbitraria. Osserviamo che, per la particolare forma assunta dalle autofunzioni ψ per i modi TE, almeno uno degli indici m ed n deve essere diverso da zero. *(altri modi E_t e $H_t = 0$)*

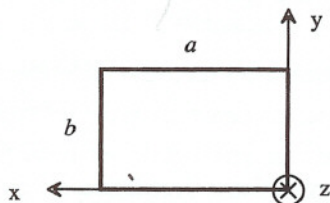


Fig. 4.4 - Sezione trasversale di una guida d'onda rettangolare

Una volta determinati i gli autovalori trasversi, è quindi possibile determinare le funzioni scalari di modo che risultano soluzioni della (4.17) con k_z e Z_0 date rispettivamente dalle (4.18) e (4.19). Dalle funzioni scalari e vettoriali di modo così ottenute, si ricavano le componenti trasverse dei campi, $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$, e da queste ultime si

risale infine alle componenti longitudinali E_z e H_z . È quindi individuabile una duplice infinità numerabile di configurazioni di campo di tipo TE: $TE_{m,n}$.

Per i modi TM la procedura è analoga (cambia solo la condizione al contorno da imporre). In particolare si determinano gli stessi autovalori:

$$k_{tE}^2 = k_{tH}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = k_t^2, \quad (4.27)$$

per cui anche nel caso TM esiste una duplice infinità numerabile di soluzioni ($m=0, 1, 2, 3, \dots, n=0, 1, 2, 3, \dots$). In questo caso va risolta l'equazione (4.15), con la condizione al contorno di Dirichlet (4.16) e gli autovalori dati dalla (4.27). Dalle soluzioni $\varphi_{m,n} = \varphi$ si ricavano le funzioni vettoriali di modo $\underline{h}$ ed $\underline{e}$, mentre le funzioni scalari di modo $V(z)$ e $I(z)$ si ricavano ancora dalla risoluzione del sistema (4.17), con k_z e Z_0 date adesso dalle (4.20) e (4.21). Nel caso TM, le soluzioni $\varphi_{m,n}$ sono esprimibili come:

$$\varphi_{m,n}(x, y) = B \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (4.28)$$

con B costante arbitraria. Data la particolare forma delle soluzioni φ per i modi TM, entrambi gli indici devono essere diversi da zero. *(Ma sono diversi di TE)*

Per l'importanza pratica che ricopre, illustriamo adesso la distribuzione del modo TE caratterizzato da indici $m=1$ e $n=0$, detto modo fondamentale (TE_{10}). Le espressioni delle componenti dei campi elettrici e magnetici sono le seguenti:

$$\underline{E}_t = -A V(z) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \underline{i}_y,$$

$$\underline{H}_t = A I(z) \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \underline{i}_x,$$

$$H_z = A I(z) \frac{1}{j\omega\mu a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right).$$

Se riportiamo il modulo delle componenti sul piano trasverso, otteniamo le distribuzioni riportate in Fig. 4.5. In particolare, si può notare come il campo elettrico trasverso ed il campo magnetico trasverso hanno lo stesso andamento sul piano trasverso, mentre le direzioni sono tra loro ortogonali. Si noti pure come la componente tangenziale del campo elettrico sia nulla in prossimità delle pareti per rispettare la condizione al contorno. La forma della distribuzione del campo si mantiene inalterata lungo tutta la guida, ma viene pesata dalle funzioni scalari di modo, in dipendenza delle condizioni di carico e sul generatore.

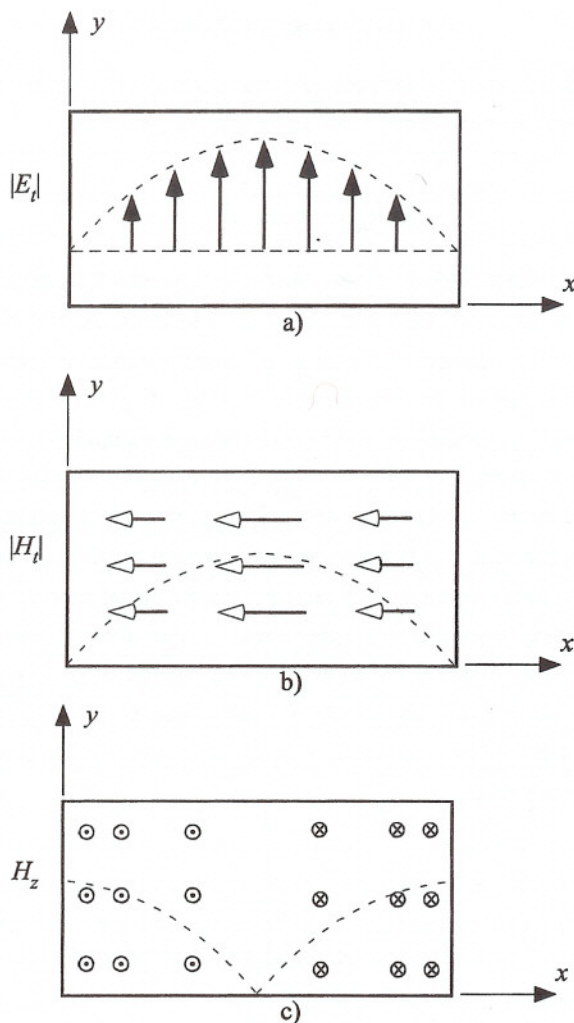


Fig. 4.5 – Distribuzione del modo fondamentale TE_{10} sul piano trasverso: a) distribuzione del campo elettrico trasverso; b) campo magnetico trasverso; c) componente longitudinale del campo magnetico.

Vogliamo a questo punto discutere il significato fisico delle funzioni scalari di modo $V(z)$ e $I(z)$. Osserviamo che, relativamente ad un determinato modo di propagazione cui sia associato l'autovalore k_t , $V(z)$ e $I(z)$ non rappresentano una tensione e una corrente direttamente misurabili lungo la guida (perchè non sono accessibili fisicamente), ma rappresentano rispettivamente la tensione e la corrente relative alla linea di trasmissione equivalente cui si fa riferimento per descrivere la

propagazione del modo in questione; nel caso delle guide d'onda rettangolari, per tale linea di trasmissione equivalente, la costante di propagazione è:

$$k_z = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 - k_t^2},$$

con k_t dato dalla (4.27), mentre l'impedenza caratteristica Z_0 è data dalla (4.19) o dalla (4.21) a seconda del modo, TE o TM, che si sta considerando.

Osserviamo che le espressioni di ψ e φ sono definite a meno di una costante moltiplicativa (si vedano le formule 4.26 e 4.28). È però possibile attribuire a tali costanti dei valori opportuni, in modo tale che le autofunzioni, da cui si ricavano le funzioni vettoriali di modo, risultino tra loro ortonormali⁴. Questo è importante perché si dimostra che diretta conseguenza dell'ortogonalità tra le autofunzioni è il fatto che i modi di propagazione in guida risultano disaccoppiati tra di loro, nel senso che essi si propagano nella guida senza influenzarsi a vicenda. In tal caso si ha che il flusso del vettore di Poynting associato al campo dovuto a due diversi modi di propagazione è dato dalla somma dei flussi associati ai campi dei singoli modi. Il risultato è estendibile anche al caso di più di due modi, i quali dunque risultano tutti disaccoppiati. Naturalmente, perché ciò sia vero, è necessario che le pareti della guida siano perfettamente conduttrici.

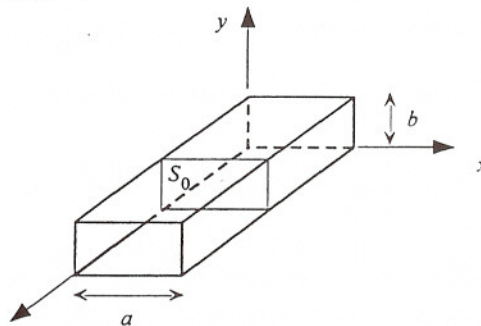


Fig. 4.6

Come conseguenza della ortonormalità delle autofunzioni, se consideriamo la propagazione di un singolo modo in guida, dette $V(z)$ e $I(z)$ le funzioni scalari di modo ad esso relative, si dimostra che il flusso di potenza attraverso una generica sezione di ascissa z della guida è dato dalla seguente espressione:

⁴ Ad esempio, si può dimostrare che per il modo fondamentale in guida rettangolare TE₁₀, la costante A che figura nelle espressioni del campo deve valere $2/(ab)^{1/2}$.

$$P(z) = \frac{1}{2} V(z) I^*(z). \quad (4.29)$$

È evidente a questo punto che la potenza complessa che attraversa la generica sezione della guida può essere valutata analizzando singolarmente le linee di trasmissione equivalenti associate ai singoli modi. In altre parole, detta $P(z)$ la potenza complessa che attraversa una generica sezione S_0 di ascissa z della guida (Fig. 4.6), invece di riutilizzare ogni volta la formula:

$$P(z) = \iint_{S_0} S_z \cdot \underline{i}_z \cdot \underline{i}_z dS = \iint_{S_0} \frac{1}{2} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \underline{i}_z dS, \quad (4.30)$$

cioè invece di calcolare il flusso del vettore di Poynting attraverso la sezione S_0 , si fa riferimento alle linee di trasmissione equivalenti associate ai singoli modi, calcolando per ognuna il singolo contributo mediante la (4.29).

Descriviamo infine la tecnica utilizzata per prelevare il segnale da una guida d'onda; a tal fine, si inserisce nella guida l'anima di un cavo coassiale, saldando la calza esterna ad una delle pareti laterali della guida stessa. Si ottiene in tal modo una sonda di campo elettrico che si comporta come un'antenna a stilo (vedi Fig. 4.7). Questa antenna è sensibile alla componente del campo elettrico tangenziale all'anima del cavo inserita all'interno della guida. Se per esempio vogliamo prelevare il campo $\underline{E}_t$ da una guida rettangolare in cui l'unico modo in propagazione è quello fondamentale, è conveniente inserire l'antenna dove si manifesta il massimo della distribuzione del modulo del campo elettrico, cioè al centro (vedi Fig. 4.8 a); in questo modo si preleva il massimo segnale. Una volta nota la distribuzione del campo in guida, possiamo posizionare correttamente l'antenna, secondo il criterio visto e questo vale per tutti i tipi di guida d'onda. Con analoghe considerazioni, si posizionano le sonde sensibili al campo magnetico. Esse si possono realizzare ripiegando l'anima interna del cavo coassiale e saldandola alla parete della guida: si crea così una spira che si concatena con il campo magnetico del modo con cui la sonda si accoppia (Fig. 4.8b).

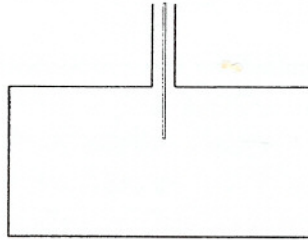


Fig. 4.7 Sonda di campo elettrico per prelevare il segnale da una guida d'onda.

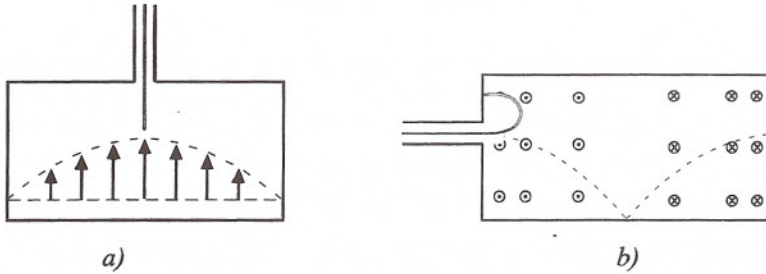


Fig. 4.8 Possibili posizionamenti di una sonda di campo elettrico e magnetico in una guida rettangolare.

4.2.1 – Propagazione e cut-off

Il fatto che la forma delle equazioni (4.17) sia identica a quella delle equazioni dei telegrafisti ci consente di applicare alle guide tutti i risultati ottenuti per le linee di trasmissione nel dominio della frequenza. E' importante notare però che i parametri k_z e Z_0 hanno un comportamento ben diverso al variare della frequenza da quello degli stessi parametri relativi ad una vera linea di trasmissione priva di perdite. Per prima cosa k_z non varia linearmente con ω :

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2}, \quad (4.31)$$

con $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ e k_t autovalore trasverso. La guida si comporta quindi come un "mezzo dispersivo" nel tempo. Inoltre, se la permittività ϵ e la permeabilità μ del mezzo che riempie la guida sono reali (assenza di perdite), la costante di propagazione k_z risulta reale o puramente immaginaria a seconda che k sia maggiore o minore di k_t .

Sempre con riferimento al caso di assenza di perdite, si ponga:

$$\lambda_t = \frac{2\pi}{k_t} \quad (4.32)$$

$$\omega_t = \frac{k_t}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (4.33)$$

ω_t è definita come quella pulsazione in corrispondenza della quale risulta $k_z = 0$. Rivolgiamo l'attenzione alla variabilità di k_z e delle grandezze collegate a questo parametro (come ad esempio l'impedenza caratteristica Z_0) rispetto alla pulsazione ω . Occorre prima di tutto mettere in evidenza che la soluzione dell'equazione delle linee che discende dal sistema (4.17) è esprimibile come combinazione lineare di funzioni del tipo $\exp(\pm jk_z z)$. Ora, nel caso in cui la guida presenti delle perdite, per k_z occorre scegliere la determinazione della radice che sta nel quarto quadrante del piano

complesso $\Re\{k_z\}$, $\Im\{k_z\}$, quindi, coerentemente, nel caso senza perdite la determinazione da scegliere giace sull'asse reale positivo per $k^2 > k_t^2$ o sull'asse immaginario negativo se $k^2 < k_t^2$. Nel caso senza perdite, per $\omega > \omega_t$ risulta quindi che k_z è reale e positiva, per cui essa descrive un fenomeno propagativo privo di attenuazione, viceversa per $\omega < \omega_t$ la costante di propagazione k_z risulta puramente immaginaria e negativa per cui $\exp\{-jk_z z\} = \exp\{-\alpha_z z\}$; dunque in quest'ultimo caso non si ha propagazione ma attenuazione. Ricapitolando, nel caso senza perdite per $\omega > \omega_t$ si ha propagazione: $k_z = \beta_z$; per $\omega < \omega_t$ si ha attenuazione: $k_z = -j\alpha_z$.

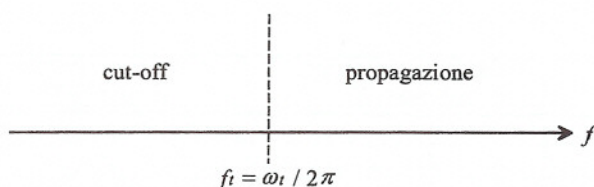


Fig. 4.9 – Frequenza di taglio come limite fra regioni di propagazione e cut-off.

Al variare della frequenza, k_z ha un comportamento molto diverso rispetto a quello che la costante di propagazione k presenta in spazio libero. La pulsazione ω_t , la corrispondente frequenza $f_t = \omega_t / 2\pi$ e la lunghezza d'onda che corrisponderebbe a quest'ultima in uno spazio illimitato prendono il nome di *pulsazione*, *frequenza* e *lunghezza d'onda di taglio* o di “*cut-off*”, rispettivamente. Per ciascun modo esiste una pulsazione critica ω_t , tale che la propagazione avviene solo per $\omega > \omega_t$. La guida d'onda dunque si comporta come un filtro passa-alto (Fig. 4.9), con ω_t che assume il significato di parametro caratteristico tipico del modo considerato e delle caratteristiche della guida.

E' poi possibile definire un ordinamento dei modi di propagazione (che sono una doppia infinità) in base ad un ordinamento crescente degli autovalori. Infatti la frequenza di taglio f_t dei vari modi è direttamente legata agli autovalori trasversi secondo la relazione:

$$f_t = \frac{\omega_t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{k_t}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4.34)$$

Un ordinamento dei modi rispetto alle relative frequenze o pulsazioni di taglio è del tutto equivalente ad un ordinamento (per valori crescenti) rispetto agli autovalori trasversi. Nel caso di una guida d'onda rettangolare, ricordiamo che l'espressione per gli autovalori è la seguente:

$$k_t = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2};$$

tale espressione vale sia per i modi TE che per i modi TM, con m ed n indici interi positivi: $m=0, 1, 2, 3, \dots$ e $n=0, 1, 2, 3, \dots$ per i modi TE; $m=1, 2, 3, \dots, n=1, 2, 3, \dots$ per i modi TM (ricordiamo che nel caso TE non esiste un modo per cui sia contemporaneamente $m=0$ ed $n=0$, mentre per i modi TM non esistono tutti quei modi per cui uno almeno dei due indici m ed n risulti uguale a zero).

Tenendo conto del fatto che nella pratica è sempre $a > b$, gli autovalori possono essere ordinati come in Tab. 4.1.

m,n	autovalori associati ai modi TE	autovalori associati ai modi TM
0,0	-	-
1,0	$(\pi/a)^2$	-
0,1	$(\pi/b)^2$	-
1,1	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$
2,0	$(2\pi/a)^2$	-
0,2	$(2\pi/b)^2$	-
2,1	$\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$	$\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$
1,2	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2$	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2$

Tab. 4.1 – Ordinamento dei modi di una guida d'onda rettangolare rispetto ai valori crescenti degli autovalori.

Osserviamo che al crescere di k_t aumenta la corrispondente frequenza di taglio; più si sale in frequenza, più configurazioni elementari di campo risultano abilitate alla propagazione all'interno della guida.

Si definisce “banda unimodale” quella banda di dove è abilitato alla propagazione un solo modo: tale modo è detto *modo fondamentale*. Al modo fondamentale è associato ovviamente l'autovalore più piccolo. Nel seguito verrà illustrata il motivo per cui le guide d'onda rettangolari comunemente utilizzate (guide standard) presentano una dimensione che è doppia dell'altra. Supponiamo di scegliere $a = b$ (guida quadrata): consideriamo l'asse delle frequenze normalizzato rispetto alla frequenza di taglio del modo TE₁₀, sul quale riportiamo l'ordinamento dei modi di ordine superiore per la guida in esame (Fig. 4. 10). Si noti che a frequenza nulla ($f=0$) la

$$k_t = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2};$$

tale espressione vale sia per i modi TE che per i modi TM, con m ed n indici interi positivi: $m=0, 1, 2, 3, \dots$ e $n=0, 1, 2, 3, \dots$ per i modi TE; $m=1, 2, 3, \dots$, $n=1, 2, 3, \dots$ per i modi TM (ricordiamo che nel caso TE non esiste un modo per cui sia contemporaneamente $m=0$ ed $n=0$, mentre per i modi TM non esistono tutti quei modi per cui uno almeno dei due indici m ed n risulti uguale a zero).

Tenendo conto del fatto che nella pratica è sempre $a > b$, gli autovalori possono essere ordinati come in Tab. 4.1.

m,n	autovalori associati ai modi TE	autovalori associati ai modi TM
0,0	-	-
1,0	$(\pi/a)^2$	-
0,1	$(\pi/b)^2$	-
1,1	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$
2,0	$(2\pi/a)^2$	-
0,2	$(2\pi/b)^2$	-
2,1	$\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$	$\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2$
1,2	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2$	$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{b}\right)^2$

Tab. 4.1 – Ordinamento dei modi di una guida d'onda rettangolare rispetto ai valori crescenti degli autovalori.

Osserviamo che al crescere di k_t aumenta la corrispondente frequenza di taglio; più si sale in frequenza, più configurazioni elementari di campo risultano abilitate alla propagazione all'interno della guida.

Si definisce “*banda unimodale*” quella banda di dove è abilitato alla propagazione un solo modo: tale modo è detto *modo fondamentale*. Al modo fondamentale è associato ovviamente l'autovalore più piccolo. Nel seguito verrà illustrata il motivo per cui le guide d'onda rettangolari comunemente utilizzate (guide standard) presentano una dimensione che è doppia dell'altra. Supponiamo di scegliere $a = b$ (guida quadrata): consideriamo l'asse delle frequenze normalizzato rispetto alla frequenza di taglio del modo TE₁₀, sul quale riportiamo l'ordinamento dei modi di ordine superiore per la guida in esame (Fig. 4. 10). Si noti che a frequenza nulla ($f=0$) la

guida è in *cut-off*, mentre per $f > f_{TE_{10}}$ si hanno già due modi in propagazione; appare quindi evidente che in tal caso non si avrebbe banda unimodale⁵.

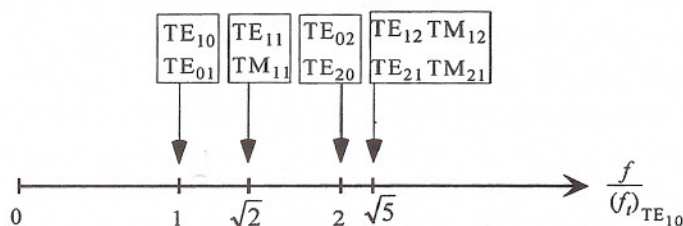


Fig. 4.10 – Ordinamento dei modi per una guida d'onda quadrata

Diminuiamo adesso le dimensioni di b rispetto ad a ; al diminuire di b , le frequenze relative ai modi con secondo indice diverso da zero traslano verso destra, mentre quelle relative ai modi con secondo indice uguale a zero restano costanti (Fig. 4.11).

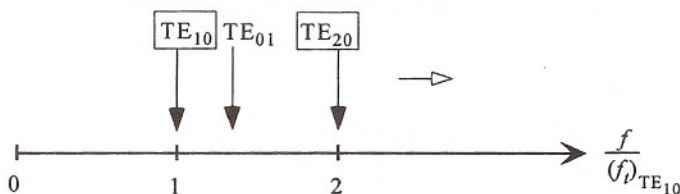


Fig. 4.11 – Traslazione delle frequenze di taglio dei modi con secondo indice diverso da zero

La traslazione verso destra della frequenza di taglio del modo TE_{01} ha come conseguenza la creazione di una banda unimodale tra $(f_t)_{TE_{10}}$ e $(f_t)_{TE_{01}}$; per una guida d'onda rettangolare dunque il modo fondamentale è il TE_{10} . La banda unimodale risulta massima per $b=a/2$: in tal caso si ha $(f_t)_{TE_{01}} = (f_t)_{TE_{20}}$. Una guida rettangolare con $b=a/2$ si dice *rettangolare standard* e la banda unimodale è pari alla frequenza di taglio $(f_t)_{TE_{10}}$: su tale banda di frequenza si può propagare al più il modo TE_{10} .

⁵ Le guide d'onda quadrate vengono infatti impiegate utilizzando i modi TE_{10} e TE_{01} ; la discriminazione tra i due modi viene effettuata spazialmente grazie alla ortogonalità geometrica delle due configurazioni di campo. In questo caso la banda di utilizzo è compresa tra 1 e $\sqrt{2}$ volte la frequenza di taglio del TE_{10} (TE_{01}).

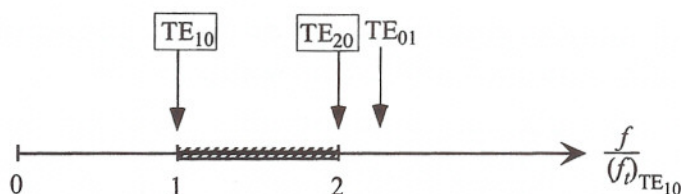


Fig. 4.12 – Estensione massima della banda unimodale per una guida d'onda rettangolare.

Osserviamo a questo punto che ridurre ancora b , rispetto ad a , non comporta alcun vantaggio dato che, diminuendo b al di sotto di $a/2$ non si ha un ulteriore aumento della larghezza della banda unimodale, che resta limitata dalla frequenza di taglio del TE_{20} (la frequenza di taglio del TE_{20} resta fissa mentre quella del TE_{01} si sposta alla sua destra, si veda Fig. 4.12). Ci sono inoltre altri aspetti per cui non conviene ridurre troppo b . Infatti, minore è b (a parità di tutti gli altri parametri) maggiore risulterebbe il campo elettrico attraverso la guida per lo stesso trasferimento di potenza, per cui il pericolo di scarica (nel vuoto o attraverso il dielettrico che riempie la guida stessa) è maggiore. Si ricorda infatti che la potenza che attraversa la generica sezione della guida è data da:

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \iint_S \frac{1}{2} \underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \cdot \underline{i}_n dS \right\}. \quad (4.35)$$

Se b diminuisce, diminuisce la sezione S della guida e, a parità di potenza trasmessa, aumentano le intensità dei campi elettrico e magnetico. In applicazioni di alta potenza dunque può accadere che diminuendo troppo b , e dunque S , l'intensità del campo elettrico raggiunga e superi la rigidità dielettrica dell'aria, in tal modo l'aria si ionizza e si possono innescare delle scariche fra la parete superiore e quella inferiore nella zona centrale della guida, dove il modulo del campo elettrico è massimo; si verifica quindi un corto circuito istantaneo per cui il coefficiente di riflessione diventa unitario e la potenza torna al trasmettitore, con il rischio di danneggiarlo.

E' importante infine notare che la larghezza della banda unimodale è certamente considerevole. La frequenza di taglio del modo fondamentale TE_{10} è:

$$(f_t)_{TE_{10}} = \frac{(k_t)_{TE_{10}}}{2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{2a\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{2a}$$

con c velocità della luce, pari a $3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$. Ad esempio, per $a = 2 \text{ cm}$, si ottiene $(f_t)_{TE_{10}} = 7,5 \text{ GHz}$ e la banda unimodale va da f_t a $2f_t$, cioè da 7,5 GHz a 15 GHz.

Le dimensioni delle guide sono standardizzate a livello internazionale. Le dimensioni sono scelte opportunamente in maniera che sia possibile coprire tutta la banda delle frequenze delle microonde con un numero finito di guide standardizzate.

4.2.2 - Distorsioni in guida d'onda

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la costante di propagazione k_z relativa ad una guida d'onda ha, al variare della frequenza, un comportamento molto diverso rispetto a quello della costante di propagazione k che si ha per un'onda che si propaga in spazio libero. In particolare, per le guide prive di perdite abbiamo trovato che k_z risulta o reale o puramente immaginario e che, associato ad ogni modo di propagazione, esiste un certo valore della pulsazione, detto pulsazione di taglio ω_t , tale che per $\omega > \omega_t$ si ha propagazione ($k_z = \beta_z$), mentre per $\omega < \omega_t$ si ha attenuazione ($k_z = -j\alpha_z$).

Per le guide prive di perdite è consuetudine riportare l'andamento del k_z in funzione della pulsazione in un diagramma che prende il nome di *diagramma di Brillouin*; quest'ultimo è un diagramma *multiramo*, nel senso che ogni ramo corrisponde ad un possibile modo di propagazione, e in esso viene messo in evidenza in particolare il comportamento di k_z per $\omega > \omega_t$ e per $\omega < \omega_t$. Consideriamo dapprima il caso in cui risulti k_z reale:

$$k_z = \beta_z = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_t^2}.$$

In tal caso, se grafichiamo l'andamento di k_z in funzione di ω , si trova un ramo d'iperbole con asintoto obliquo passante per l'origine: ad ogni modo di propagazione è associato un particolare di k_t e dunque un particolare valore di ω_t ; per ogni modo è possibile tracciare un ramo d'iperbole nel piano $\omega - k_z$. Il diagramma di Brillouin assume quindi l'aspetto mostrato nel primo quadrante di Fig. 4.13. Si hanno in particolare infiniti rami d'iperbole, che identificano i vari modi; ciascun ramo parte da una pulsazione che corrisponde alla pulsazione critica del modo e tende asintoticamente, per $\beta_z \rightarrow \infty$, alla retta $\omega = \beta_z c$, dove c è la velocità della luce.

Per ogni modo di propagazione si può poi considerare l'andamento di k_z , in funzione della pulsazione, quando questo risulti puramente immaginario:

$$k_z = -j\alpha_z = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_t^2}.$$

Associato ad ogni modo troviamo ora un ramo di ellisse, con assi principali dati dagli assi coordinati (si veda il secondo quadrante del diagramma di Brillouin in Fig. 4.13).

Dal diagramma di Brillouin completo (Fig. 4.13) è possibile individuare immediatamente, per ogni assegnata pulsazione ω , quanti e quali modi si propagano (basta tracciare delle linee parallele all'asse delle ascisse e passanti per l'ordinata corrispondente alla pulsazione ω in questione). E' peraltro immediato verificare che per $\omega < \omega_{t1}$ non si propaga alcun modo (a meno che la struttura non consenta il modo TEM per cui si ha $k_t = 0$). Per $\omega_{t1} < \omega < \omega_{t2}$ si propaga solo il primo modo (modo fondamentale). Per $\omega_{t2} < \omega < \omega_{t3}$ si propagano il primo e il secondo modo, e così via. La velocità di fase in guida è così definita :

$$v_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_t^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_t^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_t^2 / \omega^2}} \quad (4.36)$$

$$\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_t^2}{\omega^2}}}$$

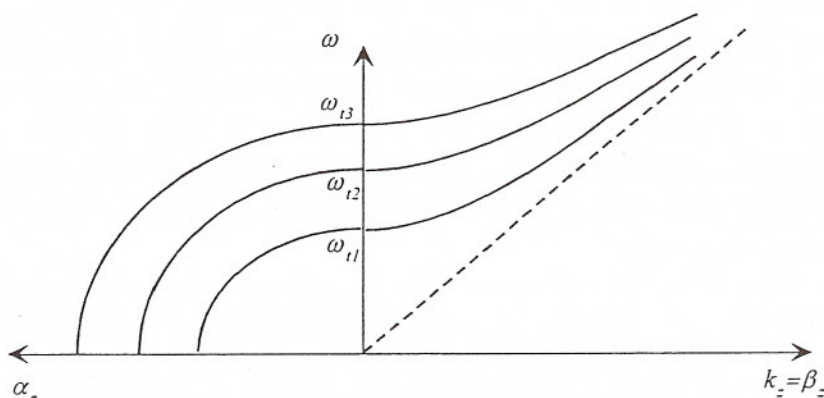


Fig. 4.13 - Diagramma di Brillouin.

Questa espressione mette in evidenza il fatto che ad ogni modo di propagazione è associata una specifica velocità di fase. Supponiamo adesso di dover trasmettere un segnale in guida e supponiamo che tale segnale sia costituito, ad esempio, dalla combinazione lineare di tre diversi modi di propagazione, come mostrato in Fig. 4.14 (le costanti di propagazione β_{zi} relative ai vari modi sono le ascisse delle intersezioni fra la retta orizzontale di assegnata ordinata ω_0 con le diverse curve). In tal caso, il segnale si propagerà in guida con tre diverse velocità di fase. Il segnale parte dalla sezione di alimentazione con una certa relazione di fase tra le componenti associate ai tre modi ed arriva alla sezione del ricevitore con una situazione di fase diversa fra le tre componenti (supponendo la guida senza perdite, le ampiezze non cambiano). Ciò

comporta sul segnale finale una distorsione di fase, che è ovviamente un effetto indesiderato.

Risulta poco pratico anche utilizzare più modi associati a più segnali diversi dato che, nel caso di guide con perdite, i modi non risultano disaccoppiati in potenza. Inoltre, anche se le pareti della guida potessero essere considerate perfettamente conduttrici, basterebbe una imperfezione o discontinuità lungo la linea per creare delle condizioni di accoppiamento tra modi con un trasferimento di energia da un modo all'altro, facendo venire meno l'ipotesi di ortogonalità dei modi.

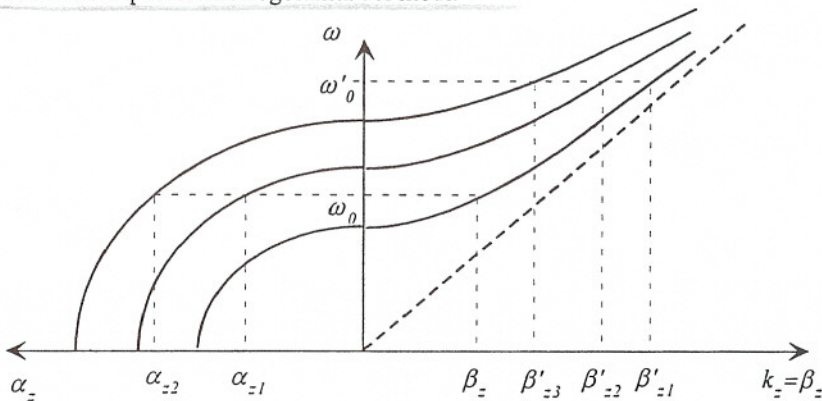


Fig. 4.14 – Determinazione delle costanti di fase sul diagramma di Brillouin.

Quando si utilizza una guida d'onda per la trasmissione coerente di segnali è opportuno evitare la presenza di più configurazioni di campo (modi) caratterizzate da velocità di fase diverse e quindi è conveniente porsi nella condizione di eccitare un solo modo di propagazione, il primo o fondamentale, lavorando ad una frequenza ω , compresa tra la frequenza di taglio del modo fondamentale e quella del modo immediatamente superiore: $\omega_{t1} < \omega < \omega_{t2}$ (si parla in tal caso di *trasmissione in banda unimodale*). Da un punto di vista analitico, si può pensare che una qualunque distribuzione di campo dentro una guida può essere espressa in termini di una sommatoria infinita di modi: (qualunque sia il campo, i modi costituiscono una base completa per la sua rappresentazione)

$$\underline{E}_t = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \underline{e}_{ti} \exp\{-jk_{zi}z\}. \quad (4.37)$$

Si verifica che, effettuando una trasmissione in banda unimodale, se ci si pone ad una distanza di qualche lunghezza d'onda λ_z dalla sezione d'ingresso della guida, dal momento che l'unico modo che può propagarsi è il modo fondamentale, della sommatoria (4.37) resta solo il primo termine; questo termine è quello associato al

modo fondamentale, mentre tutti gli altri termini, essendo associati ai modi in *cut-off*, presentano ampiezze estremamente piccole, in quanto sono termini contenenti esponenziali decrescenti che tendono ad annullarsi. In particolare, per i modi in *cut-off* si ha $k_{zi} = -j\alpha_{zi}$, per cui $\exp\{-jk_{zi}z\} = \exp\{-\alpha_{zi}z\}$; per tali modi la guida si comporta da filtro, attenuandoli in maniera diversa a seconda del loro ordine. Più alto è l'ordine del modo in *cut-off* maggiore è il valore del coefficiente di attenuazione α . Si evitano così i problemi precedentemente citati.

4.2.3 - Velocità di fase e velocità di gruppo

Parallelamente alla velocità di fase, per una guida d'onda è possibile anche definire una velocità di gruppo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} \quad (4.38)$$

Ad ogni modo di propagazione è associata una specifica v_g , che risulta diversa dalla velocità di fase, essendo la guida d'onda un mezzo dispersivo. In particolare, relativamente ad uno stesso autovalore, il legame tra la velocità di fase e di gruppo risulta:

$$v_f \cdot v_g = c^2 \quad (4.39)$$

In figura 4.15 viene riportato l'andamento di v_f e di v_g in funzione della pulsazione ω relativamente ad uno stesso autovalore, cioè allo stesso modo di propagazione.

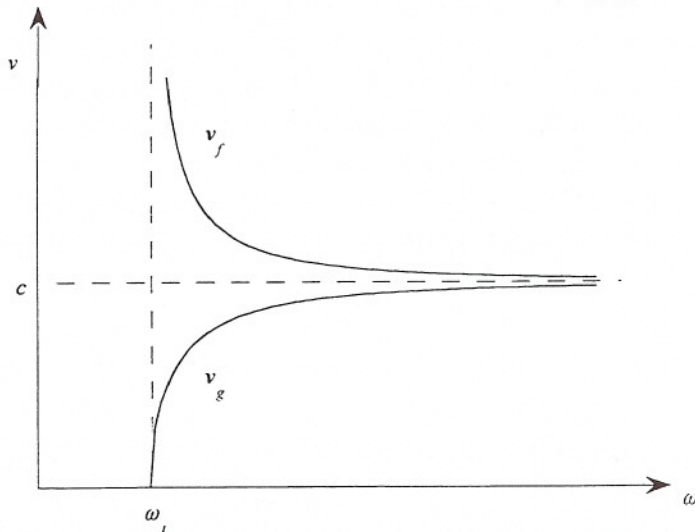


Fig. 4.15 – Andamento delle velocità di fase e di gruppo in funzione della pulsazione ω

- Supponiamo di voler trasmettere un segnale a distanza, mediante una guida d'onda. In particolare, consideriamo un segnale del seguente tipo:

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t) \frac{\sin(\Delta \omega t)}{\Delta \omega t}$$

che rappresenta un segnale modulato in ampiezza (ω_0 è la frequenza della portante). Lo spettro e l'andamento nel tempo del segnale sono riportati nelle figure 4.16a e 4.16b, rispettivamente.

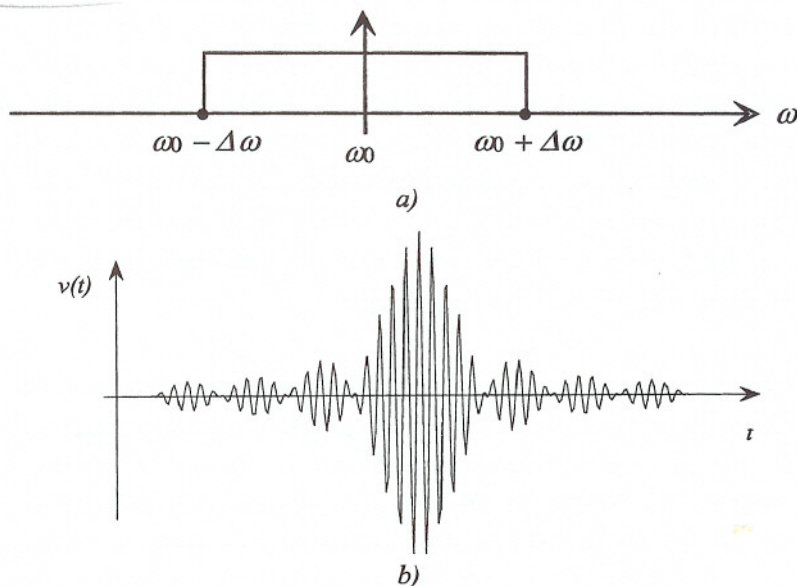


Fig. 4.16 Spettro (a) e andamento temporale (b) del segnale trasmesso

Supponiamo inoltre che il segnale sia a banda stretta; in tal caso possiamo sviluppare la relazione di dispersione $\omega = \omega(k_z)$ in serie di Taylor rispetto a k_z (si considera il caso di guida priva di perdite, per cui $k_z = \beta_z$), ottenendo:

$$\omega \cong \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial \beta_z} \right|_{\beta_z = \beta_{z0}} (\beta_z - \beta_{z0}), \quad (4.40)$$

con $\beta_{z0} = \sqrt{\omega_0^2 \epsilon_0 \mu_0 - k_t^2}$.

Se la banda del segnale è stretta, il termine $(\beta_z - \beta_{z0})$ è piccolo; di conseguenza, arrestando lo sviluppo al primo ordine si ottiene una buona approssimazione. Ciò implica anche che all'interno della banda del segnale, la velocità di fase e quella di gruppo possono ritenersi costanti:

$$v_f = \frac{\omega_0}{\beta_{0z}}, \quad v_g = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \beta_z} \right|_{\beta_z = \beta_{0z}}$$

Con lo sviluppo in serie (4.40) abbiamo in pratica linearizzato la relazione $\omega = \omega(k_z)$ nei dintorni del punto di lavoro, cioè nell'intorno della pulsazione ω_0 della portante (Fig. 4.17). Nell'ambito di tale approssimazione, la portante del segnale modulato trasla con velocità pari alla velocità di fase, mentre l'involuppo trasla con una velocità pari alla velocità di gruppo e, dal momento che l'informazione è contenuta nell'involuppo (infatti in uscita dal demodulatore di ampiezza si troverà un segnale proporzionale all'involuppo del segnale modulato), il fatto che sia $v_f \neq v_g$ non crea problemi di indecisione o ambiguità. I problemi nascono quando l'approssimazione (4.40) non è valida. Questo può verificarsi sia se il segnale da trasmettere non è a banda stretta, sia se, pur essendo il segnale a banda stretta, il trasmettitore e il ricevitore si trovano a grande distanza, per cui il tempo di trasmissione diventa molto lungo.

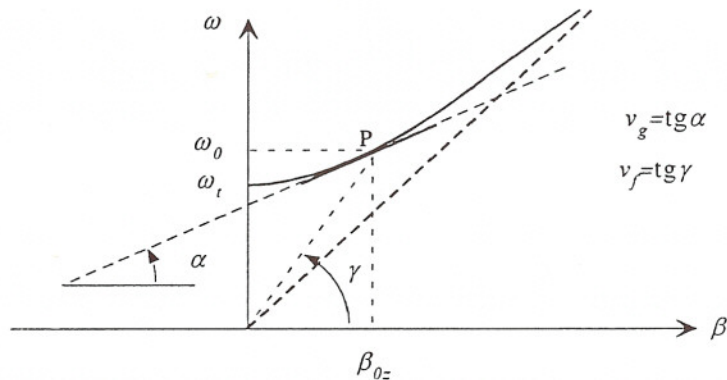


Fig. 4.17 Linearizzazione della curva di dispersione

Nel caso in cui il segnale da trasmettere non sia a banda stretta, non è più lecito trascurare i termini di ordine superiore al primo nello sviluppo in serie di ω e questo comporta una distorsione sulla fase (ricordiamo che il termine che tiene conto della fase è del tipo $\exp\{j\omega x\}$, per cui, se si considerano anche i termini di ordine superiore dello sviluppo in serie di ω , il segnale ricevuto risulterà distorto). Il risultato è un effetto di dispersione sul segnale, per cui l'involuppo si appiattisce e si "disperde" rispetto al punto più significativo (picco); in particolare, il segnale può arrivare nel punto di ricezione talmente deformato da non essere più riconoscibile. Un esempio di come il segnale si possa deformare lungo la guida è riportato in Fig. 4.18; in modo più specifico, si può immaginare che il campo elettrico associato al modo fondamentale di una guida d'onda rettangolare abbia un modulo che varia nel tempo come riportato in

figura (segnale modulato in ampiezza con spettro di ampiezza gaussiano). Il campo osservato a due diverse sezioni z_1 e z_2 , con $z_2 > z_1$, lungo la guida appare deformato proprio per la diversa velocità di fase delle varie componenti frequenziali. Se si considerassero i due stessi segnali nel dominio della frequenza, si otterrebbero in z_1 e z_2 due spettri uguali in modulo (infatti non vi è dissipazione lungo la guida) ma diversi in fase.

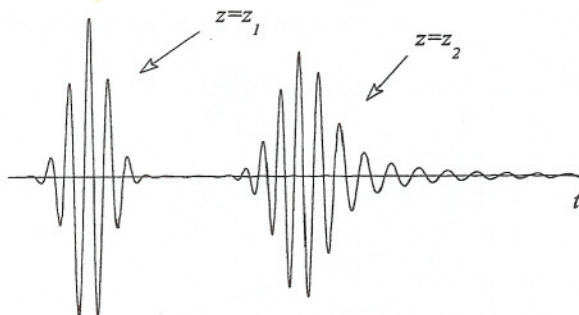


Fig. 4.18

La stessa cosa accade quando il segnale è a banda stretta ma il tempo necessario per la trasmissione è lungo, ovvero per trasmissioni su lunghi tratti di guida; infatti, se si va a sostituire lo sviluppo in serie di ω nel termine di fase $\exp\{j\omega t\}$, anche se i termini di ordine superiore al primo fossero piccoli, questi, una volta moltiplicati per un tempo grande darebbero luogo a contributi di fase in assoluto non più trascurabili, generando una distorsione di fase del segnale.

È chiaro comunque che la distorsione risulta tanto maggiore quanti più sono i modi abilitati alla propagazione nella guida. Osserviamo inoltre che, benché per evitare i problemi di dispersione sia necessario che la banda del segnale sia stretta, non conviene comunque lavorare a frequenze troppo vicine alla frequenza di taglio, perché per $\omega \rightarrow \omega_t$ si ha $v_g \rightarrow 0$ (e dunque il segnale si propagherebbe troppo lentamente); inoltre, in tal caso si andrebbe a lavorare in una zona di forte variabilità della velocità di fase con la frequenza. Per evitare il problema della dispersione sarebbe opportuno lavorare a frequenze elevate, perché per alte frequenze la curva di dispersione tende asintoticamente alla retta $\omega = \beta_z c$, dove c rappresenta la velocità della luce. In tal modo però si verrebbero a innescare modi di ordine superiore, mentre per la trasmissione coerente di un segnale è opportuno lavorare in banda unimodale.

Per una guida d'onda rettangolare standard, un compromesso tra le diverse esigenze si raggiunge se si lavora a frequenze superiori a $1,25 \div 1,35 f_c$.

Un altro parametro importante relativo alle guide è l'impedenza caratteristica del modo; anch'essa varia al variare della pulsazione del segnale ω . Ricordiamo che le espressioni dell'impedenza caratteristica relative ad un modo TE o ad un modo TM sono le seguenti:

$$Z_{0TE} = \frac{\omega \mu_0}{k_z},$$

$$Z_{0TM} = \frac{k_z}{\omega \epsilon_0}.$$

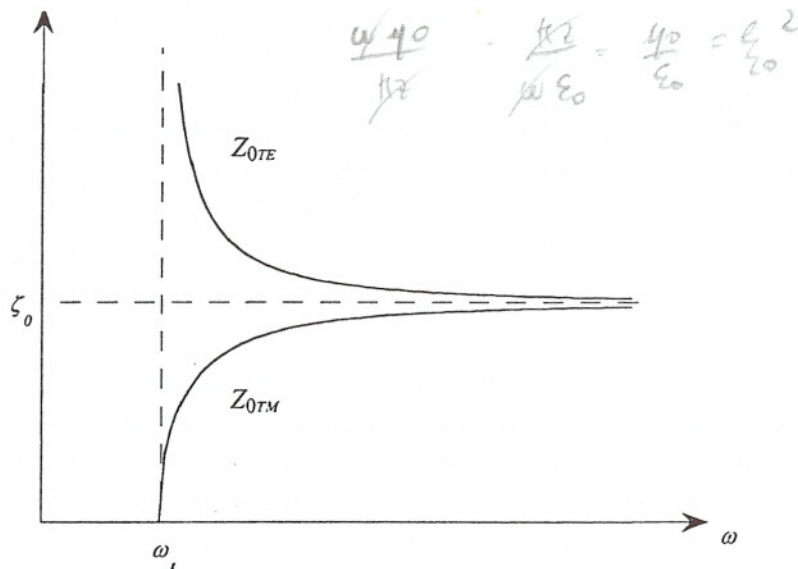


Fig. 4.19 – Andamento dell'impedenza caratteristica di un modo TE o TM al variare della pulsazione angolare

Al variare della frequenza, Z_{0TE} e Z_{0TM} assumono valori puramente immaginari per $\omega < \omega_t$; l'andamento per $\omega > \omega_t$ è invece riportato in Fig. 4.19, dove ζ_0 rappresenta l'impedenza caratteristica dello spazio libero (si suppone che la guida sia in aria).

Se consideriamo una coppia di modi degeneri, di cui uno TE e uno TM (cioè una coppia di modi cui sia associato lo stesso autovalore), è semplice verificare che tra le impedenze caratteristiche associate a questi due modi, rispettivamente Z_{0TE} e Z_{0TM} , esiste la seguente relazione:

$$Z_{0TE} \cdot Z_{0TM} = \zeta_0^2.$$

§ 4.3 - GUIDE D'ONDA CIRCOLARI

Nel caso di una guida d'onda circolare con pareti perfettamente conduttrici (Fig. 4.18) la determinazione delle funzioni vettoriali di modo (e degli autovalori trasversi) è ricondotta alla soluzione dell'equazione di Helmholtz:

$$\nabla_t^2 \psi + k_t^2 \psi = 0 \quad (4.41)$$

in un dominio circolare con condizioni al contorno date da:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C = 0, \quad \text{per i modi TE,} \quad (4.42)$$

$$\psi|_C = 0, \quad \text{per i modi TM.} \quad (4.43)$$

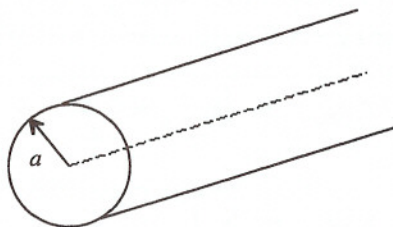


Fig. 4.18 - Guida d'onda circolare

Vista la simmetria geometrica del problema è opportuno far riferimento ad un sistema di coordinate cilindrico. In tale sistema, la (4.41) risulta espressa come:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k_t^2 \psi = 0 \quad (4.44)$$

Si può procedere al solito applicando il metodo della separazione delle variabili, andando a ricercare soluzioni del tipo:

$$\psi(\rho, \phi) = \psi_1(\rho) \psi_2(\phi). \quad (4.45)$$

Procedendo in modo analogo a quanto fatto nel caso di una guida d'onda rettangolare, si ottiene una soluzione generale del tipo:

$$\psi(\rho, \phi) = [A_1 J_n(k_t \rho) + A_2 Y_n(k_t \rho)] [B_1 \sin n\phi + B_2 \cos n\phi], \quad (4.46)$$

dove A_1 , A_2 , B_1 e B_2 rappresentano costanti arbitrarie, J_n indica la funzione di Bessel di prima specie di ordine n e Y_n quella di seconda specie di ordine n . Per ragioni fisiche, la costante A_2 deve essere nulla; se così non fosse la soluzione fornirebbe un valore infinito del potenziale ψ in $\rho=0$, poichè le funzioni $Y_n(x)$ divergono quando

l'argomento x tende a zero. L'imposizione delle condizioni al contorno per $\rho=a$ porta alla determinazione dei valori di k_t , cioè degli autovalori trasversi associati ai vari modi di propagazione. In particolare, per i modi TE si ha:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_C = 0 \Rightarrow J'_n(k_t a) = 0, \quad (4.47)$$

dove J'_n indica la derivata prima di J_n rispetto al suo argomento.

Per i modi TM risulta invece:

$$\psi|_C = 0 \Rightarrow J_n(k_t a) = 0. \quad (4.48)$$

Dalle (4.47) e (4.48) discende l'ordinamento dei modi in guida d'onda circolare. Indicando con $p_{n,m}$ l' m -esimo zero della funzione di Bessel di prima specie di ordine n , $J_n(x)$, e con $p'_{n,m}$ l' m -esimo zero della derivata prima, $J'_n(x)$, gli autovalori associati ai modi $TE_{n,m}$ e $TM_{n,m}$ per una guida di raggio a , sono dati rispettivamente da:

$$TM_{n,m} \Rightarrow (k_t)_{n,m} = \frac{p_{n,m}}{a} \quad (4.49)$$

$$TE_{n,m} \Rightarrow (k_t)_{n,m} = \frac{p'_{n,m}}{a} \quad (4.50)$$

E' opportuno dare alcune indicazioni sulla numerazione dei modi. Il primo pedice, sia per i modi TE che per i modi TM, può essere nullo, dato che esiste la funzione di Bessel di prima specie di ordine zero, $J_0(x)$. Il secondo pedice invece non è mai nullo, perchè il conteggio degli zeri di J_n e di J'_n viene sempre conteggiato da $m=1$. Infatti, se $n \neq 0$, allora $J_n(x)$ ha uno zero in $x=0$; questo zero però non va considerato, dato che uno zero nell'origine per J_n significherebbe campo identicamente nullo. In conclusione, al pedice $m=1$ è associato il primo zero che non si verifica nell'origine.

Il primo tra tutti gli zeri distinti da $x=0$ delle funzioni $J_n(x)$ è il primo zero di $J_0(x)$ (Fig. 4.21), che si manifesta in corrispondenza del seguente valore dell'argomento della funzione:

$$p_{0,1} = 2.405. \quad (4.51)$$

Di conseguenza, la frequenza di taglio più piccola tra quelle associate a modi TM è quella del modo corrispondente a $m=0, n=1$ ($f_{TM_{01}}$). Ricordando la relazione che esiste tra frequenza di taglio e autovalore trasverso si ha:

$$f_{t_{TM01}} = \frac{k_{t_{TM01}}}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{2,405 c}{2\pi a} \quad (4.52)$$

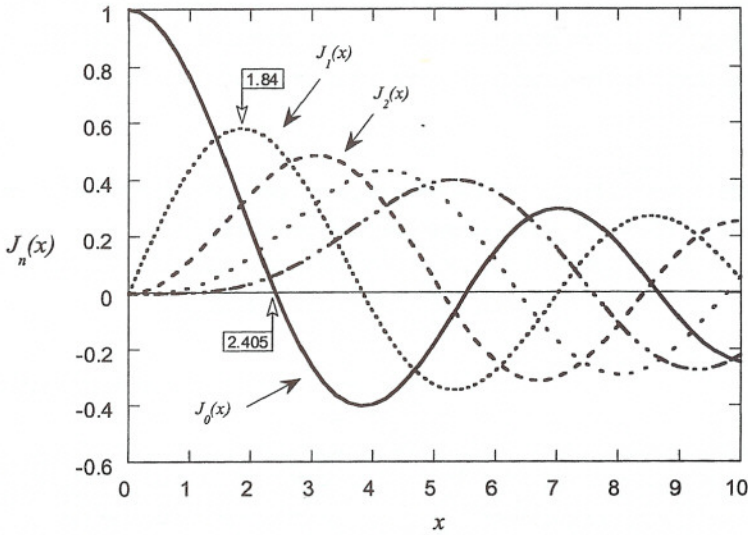


Fig. 4.19 – Funzioni di Bessel di prima specie di ordine intero.

D'altra parte, $p_{0,1}$ risulta essere maggiore del primo zero della derivata $J_1'(x)$, per cui si ha:

$$p'_{1,1} = 1.84, \quad (4.53)$$

da cui si evince che il modo fondamentale in guida d'onda circolare è il TE_{11} , con frequenza di taglio:

$$f_{t_{TE11}} = \frac{1.84 \cdot c}{2\pi a}. \quad (4.54)$$

In Fig. 4.20, la successione delle frequenze di taglio dei modi più bassi è riportata sull'asse delle frequenze normalizzate rispetto alla frequenza di taglio del modo fondamentale.

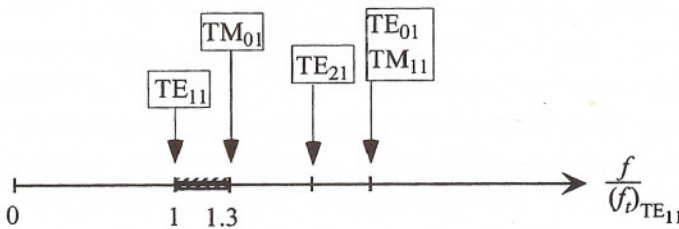


Fig. 4.20 – Ordinamento dei modi per una guida d'onda circolare.

Risulta evidente che la larghezza relativa alla banda unimodale risulta modesta, rispetto a quella che si ha per una guida d'onda rettangolare e che inoltre essa non dipende dal raggio della guida. Si può notare la degenerazione tra i modi TE_{01} e TM_{11} . A questo proposito va detto che, dalla seguente proprietà delle funzioni di Bessel

$$J'_{n-1}(x) = -J_n(x), \quad (4.55)$$

discende che i modi TE_{0m} e TM_{1m} sono degeneri per qualunque valore di m . Si può infine osservare che per la guida rettangolare standard si ha:

$$\frac{f_{TE_{20}}}{f_{TE_{10}}} = 2,$$

mentre per la guida circolare risulta:

$$\frac{f_{TM_{01}}}{f_{TE_{11}}} = 1.3.$$

A parità delle frequenze di taglio dei modi fondamentali, risulta quindi che la banda unimodale della guida rettangolare è maggiore. Inoltre, imponendo che sia:

$$(f_{TE_{10}})_{rett.} = (f_{TE_{11}})_{circ.},$$

ovvero:

$$(k_{TE_{10}})_{rett.} = (k_{TE_{11}})_{circ.},$$

si ricava che il diametro della guida circolare deve essere 1.17 volte maggiore della dimensione maggiore della guida rettangolare. Si può concludere che, a parità di frequenza di taglio dei modi fondamentali, la guida circolare risulta anche più ingombrante rispetto a quella rettangolare. Tuttavia, le guide circolari sono caratterizzate da perdite minori rispetto a quelle rettangolari; inoltre, la guida circolare permette di realizzare dei giunti rotanti, largamente utilizzati nel campo dei sistemi radar dove l'antenna ruota (radar di scoperta).

La distribuzione dei campi elettrico e magnetico trasversi, associati al modo fondamentale TE_{11} della guida, è rappresentata in Fig. 4.21a e 4.21b, rispettivamente, in termini delle linee di forza corrispondenti. Il campo magnetico è in ogni punto della sezione trasversa perpendicolare al campo elettrico. La polarizzazione del campo elettrico trasverso dipende dalla posizione della sonda utilizzata per l'innesco del modo. Si nota che, pur essendo la banda unimodale della guida circolare più piccola di quella di una guida d'onda rettangolare standard, la struttura della guida circolare consente di inviare nella guida due segnali diversi contemporaneamente, sfruttando la diversità di polarizzazione. Affinché i due segnali risultino effettivamente disaccoppiati, occorre che le polarizzazioni dei due campi elettrici corrispondenti risultino perpendicolari.

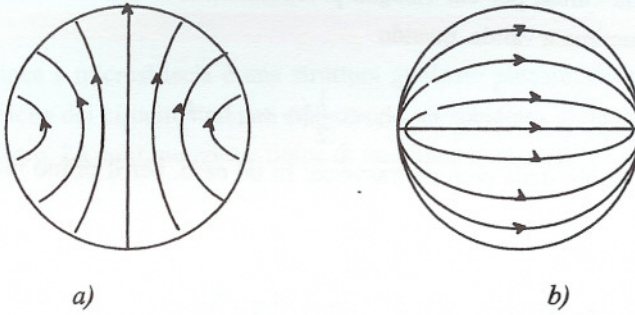


Fig. 4. 21 - Linee di forza del campo elettrico (a) e del campo magnetico (b) in guida d'onda circolare per il modo fondamentale TE_{11} .

4.3.1 Modi di ordine superiore in cavo coassiale

Anche nelle strutture duplicemente connesse, come i cavi coassiali, si possono propagare dei modi di ordine superiore di tipo TE e TM, oltre al modo fondamentale TEM. Quest'ultimo, infatti, può essere visto come un caso particolare di un modo TE o TM per cui l'autovalore trasverso k_t è nullo. Per la determinazione dei modi di ordine superiore si procede come nel caso delle guide d'onda circolari: il dominio di indagine presenta infatti una simmetria cilindrica. La soluzione generale è, anche in questo caso, esprimibile nella forma (4.46). Rispetto al caso precedente, però, non è lecito assumere nulla la costante A_2 . Infatti, adesso l'origine è esclusa dal dominio di indagine per cui anche la seconda parte della sottofunzione dipendente dall'ascissa ρ che coinvolge la funzione di Bessel di seconda specie Y_n deve essere presa in esame. Applichiamo quindi le condizioni al contorno di Dirichlet e di Neumann sulle pareti laterali della sezione trasversa; in questo caso il contorno è definito da $\rho=r_1$ e $\rho=r_2$ (r_1 e r_2 rappresentano rispettivamente il raggio del conduttore interno e di quello esterno). Dall'imposizione della condizione di Dirichlet, valida per i modi TM, discende:

$$\frac{Y_n(k_t r_1)}{J_n(k_t r_1)} = \frac{Y_n(k_t r_2)}{J_n(k_t r_2)},$$

mentre da quella di Neumann, valida per i modi TE, si ottiene:

$$\frac{Y'_n(k_t r_1)}{J'_n(k_t r_1)} = \frac{Y'_n(k_t r_2)}{J'_n(k_t r_2)}.$$

Dalle relazioni ora ricavate è possibile determinare i valori degli autovalori trasversi k_t . Nel caso generale, la soluzione delle due equazioni precedenti non è

esprimibile in forma chiusa per cui bisogna procedere numericamente. Esiste tuttavia una soluzione approssimata valida quando

$$r_2 - r_1 \ll \frac{1}{2}(r_2 + r_1) = R,$$

dove R è il raggio medio della sezione trasversa. In tal caso, per il primo modo TM si ha:

$$k_t \cong \frac{\pi}{r_2 - r_1} \Rightarrow \lambda_t = \frac{2\pi}{k_t} \cong 2(r_2 - r_1)$$

Per il primo modo TE si ottiene invece:

$$k_t \cong \frac{1}{R} \Rightarrow \lambda_t = \frac{2\pi}{k_t} \cong 2\pi R = \pi(r_2 + r_1)$$

In questo caso il primo modo di ordine superiore risulta quindi essere un modo TE.

Come considerazione finale riportiamo in Fig. 4.22 il diagramma di Brillouin per un cavo coassiale. È evidente che in questo caso la banda unimodale (il modo fondamentale è il modo TEM) si estende da $\omega = 0$ (caso statico) fino alla pulsazione di taglio del primo modo di ordine superiore.

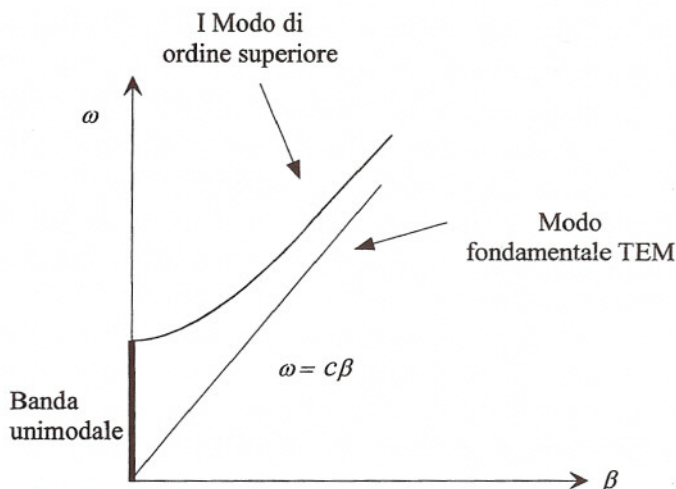


Fig. 4.22 – Diagramma di Brillouin per un cavo coassiale.

§ 4.4 - LINEE A MICROSTRISCIA

Una linea a microstriscia è una struttura guidante planare, ricavata mediante le tecniche classiche dei circuiti stampati utilizzando un substrato dielettrico con piano di massa conduttore. La configurazione tipica di una linea a microstriscia è mostrata nella figura 4.23.

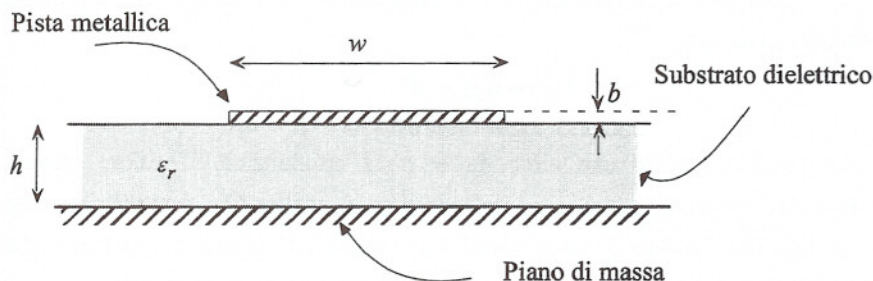


Fig. 4.23 - Sezione trasversale di una linea a microstriscia

La struttura della linea a microstriscia viene realizzata in modo da mantenere uniformi le caratteristiche elettriche e geometriche lungo l'asse longitudinale secondo cui la linea si sviluppa.

Sul piano trasverso alla direzione di propagazione il problema si presenta invece con caratteristiche non omogenee: ciò è dovuto alla presenza di un'interfaccia dielettrico-aria che genera una distribuzione di campo elettrico il cui andamento qualitativo è rappresentato in figura Fig. 4.24. L'intensità del campo è maggiore nel dielettrico, ma le linee di forza del campo elettrico si sviluppano anche in aria e ciò dà luogo ad un effetto di dispersione delle linee di forza del campo elettrico noto *Fringing effect*. Per limitare il più possibile tale dispersione, è necessario aumentare ϵ_r e diminuire lo spessore del substrato dielettrico. Le perdite per irradiazione però aumentano comunque all'aumentare della frequenza; di conseguenza, se si lavora alle frequenze delle onde millimetriche, per evitare tale irradiazione si è soliti inserire la microstriscia all'interno di una guida d'onda, che in tal caso costituisce uno schermo metallico che scherma elettromagneticamente la struttura dal mondo esterno (Fig. 4.25).

A causa della disomogeneità della sezione trasversa, i modi puramente trasversi (TEM, TE, TM) non sono a rigore propagarsi sulla linea a microstriscia; in realtà, si ottiene la propagazione di un modo ibrido, con componenti longitudinali del campo elettrico e del campo magnetico molto piccole. Questa configurazione di campo nella microstriscia può essere pensata come una opportuna perturbazione del modo TEM (si

parla infatti di modo "quasi TEM"). Essa può essere ricondotta ad un modo TEM se si fa riferimento sul piano trasverso ad una situazione equivalente omogenea. Da un punto di vista teorico non è possibile definire univocamente una tensione $V(z)$ e una corrente $I(z)$. Se infatti si applicasse la legge di Faraday per ricavare la tensione tra due punti A e B appartenenti rispettivamente al piano di massa e alla pista conduttrice:

$$V(z) = \int_A^B \underline{E} \cdot \underline{i}_l dl,$$

si troverebbe un valore non univoco ma dipendente dal percorso scelto. La stessa cosa succederebbe per la corrente:

$$I(z) = \oint_L \underline{H} \cdot \underline{i}_l dl,$$

dove L è un percorso chiuso che circonda la pista conduttrice. Il valore trovato dipenderebbe anche in quest'ultimo caso dal percorso L scelto. Ciò è essenzialmente dovuto all'esistenza delle suddette componenti longitudinali di campo sia elettrico che magnetico.

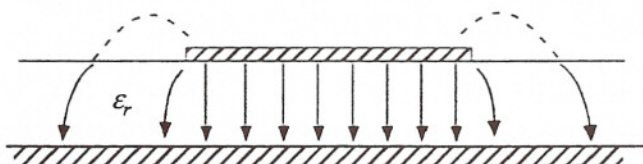


Fig. 4.24 - Distribuzione delle linee di forza del campo elettrico per una linea a microstriscia

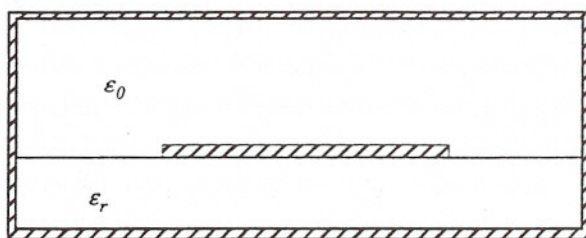


Fig. 4.25 - Microstriscia schermata

Per quanto detto non è possibile in via teorica definire univocamente una impedenza caratteristica della linea, e quindi una induttanza o una capacità per unità di lunghezza, così come non è possibile definire una costante di propagazione. In letteratura sono state fornite almeno tre diverse definizioni di impedenza caratteristica di una linea a microstriscia. Quella comunemente accettata è quella che riconduce l'impedenza caratteristica della microstriscia a quella di una linea di trasmissione

equivalente a sezione trasversa omogenea, dove si propaga il modo TEM. In questo senso, la microstriscia viene modellizzata pensando alla struttura equivalente di Fig. 4.26, che risulta omogenea sul piano trasverso essendo composta da due conduttori (piano di massa e pista metallica) immersi in un unico dielettrico di permittività ε_{eq} (ε_{eq} assume un valore intermedio tra 1 e ε_r).

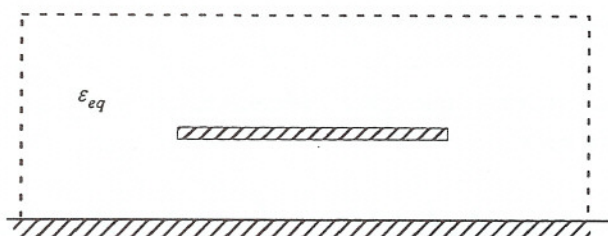


Fig. 4.26 – Linea equivalente alla microstriscia per un modo quasi-TEM.

Per quanto riguarda i parametri caratteristici della microstriscia, si può osservare preliminarmente che:

- 1) lo spessore b riguarda la parte stampata del circuito e in prima approssimazione si può trascurare;
- 2) lo spessore h del substrato è dell'ordine di frazioni di millimetro;
- 3) la larghezza w della pista risulta circa uguale ad h o al massimo di un ordine di grandezza maggiore ($0.1 \leq w/h \leq 10$);
- 4) la costante dielettrica ε_r è in genere di valore piuttosto elevato (per ridurre le perdite per irradiazione);
- 5) il valore dell'impedenza caratteristica associata al modo "quasi-TEM" può essere controllato variando i valori dei parametri w , h e ε_r ;
- 6) la costante dielettrica equivalente ε_{eq} può essere calcolata per via approssimata mediante le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_{eq} \cong \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12 h/w}} + 0.04(1 - w/h)^2 \right], \quad \text{per } \frac{w}{h} \leq 1,$$

$$\varepsilon_{eq} \cong \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 12 h/w}} \right], \quad \text{per } \frac{w}{h} > 1.$$

Con le precedenti approssimazioni, la struttura del campo all'interno della microstriscia può essere ritenuta a tutti gli effetti quella di un modo TEM e si possono calcolare sia la

velocità di fase che la costante di propagazione (e quindi la lunghezza d'onda) sulla struttura guidante nel seguente modo:

$$v_f = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{eq}}}, \quad \beta = k_0 \sqrt{\epsilon_{eq}} \quad \left(\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{eq}}} \right),$$

dove $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$ e λ_0 rappresentano la velocità di propagazione e la lunghezza d'onda nello spazio libero, rispettivamente.

Per quello che concerne l'impedenza caratteristica, si fa riferimento alle seguenti relazioni approssimate:

$$Z_0 \cong \frac{\zeta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{eq}}} \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right), \quad \text{per } \frac{w}{h} \leq 1,$$

$$Z_0 \cong \frac{\zeta_0}{\sqrt{\epsilon_{eq}}} \left[\frac{w}{h} + 1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{w}{h} + 1.444 \right) \right]^{-1}, \quad \text{per } \frac{w}{h} > 1,$$

dove ζ_0 rappresenta l'impedenza caratteristica dello spazio libero. In base a queste ultime formule è possibile effettuare una operazione di analisi, che consiste nel ricavare, conoscendo i parametri della microstriscia w , h ed ϵ_r , un valore approssimato per l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione associata alla propagazione del modo "quasi TEM". Le formule precedentemente illustrate sono state ottenute in prima battuta ricorrendo ad una approssimazione quasi statica e poi ulteriormente modificate per diminuire gli errori rispetto ai valori misurati. Secondo questo tipo di procedura, si può ragionare nel modo seguente: consideriamo la microstriscia come se fosse immersa in aria, non teniamo cioè conto della presenza del substrato e valutiamo la corrispondente impedenza caratteristica Z_0^a . Risulta in particolare: $Z_0^a = \sqrt{L_a/C_a}$; conseguentemente anche la velocità di fase è esprimibile come $v_f = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_a C_a}$. Se sostituiamo allo spazio libero il materiale dielettrico, l'induttanza per unità di lunghezza non varia, mentre varia la capacità per unità di lunghezza; si ha cioè

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_d}{C_d}} = \sqrt{\frac{L_a}{C_d}} = \sqrt{\frac{L_a C_a}{C_a C_d}} = Z_0^a \sqrt{\frac{C_a}{C_d}}.$$

In particolare, il rapporto $C_d/C_a = \epsilon_{eq}$ può essere visto come la costante dielettrica equivalente (o effettiva), per cui risulta

$$Z_0 = \frac{Z_0^a}{\sqrt{\epsilon_{eq}}}.$$

velocità di fase che la costante di propagazione (e quindi la lunghezza d'onda) sulla struttura guidante nel seguente modo:

$$v_f = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_{eq}}}, \quad \beta = k_0 \sqrt{\epsilon_{eq}} \left(\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_{eq}}} \right),$$

dove $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$ e λ_0 rappresentano la velocità di propagazione e la lunghezza d'onda nello spazio libero, rispettivamente.

Per quello che concerne l'impedenza caratteristica, si fa riferimento alle seguenti relazioni approssimate:

$$Z_0 \cong \frac{\zeta_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_{eq}}} \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right), \quad \text{per } \frac{w}{h} \leq 1,$$

$$Z_0 \cong \frac{\zeta_0}{\sqrt{\epsilon_{eq}}} \left[\frac{w}{h} + 1.393 + 0.667 \ln \left(\frac{w}{h} + 1.444 \right) \right]^{-1}, \quad \text{per } \frac{w}{h} > 1,$$

dove ζ_0 rappresenta l'impedenza caratteristica dello spazio libero. In base a queste ultime formule è possibile effettuare una operazione di analisi, che consiste nel ricavare, conoscendo i parametri della microstriscia w , h ed ϵ_r , un valore approssimato per l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione associata alla propagazione del modo "quasi TEM". Le formule precedentemente illustrate sono state ottenute in prima battuta ricorrendo ad una approssimazione quasi statica e poi ulteriormente modificate per diminuire gli errori rispetto ai valori misurati. Secondo questo tipo di procedura, si può ragionare nel modo seguente: consideriamo la microstriscia come se fosse immersa in aria, non teniamo cioè conto della presenza del substrato e valutiamo la corrispondente impedenza caratteristica Z_0^a . Risulta in particolare: $Z_0^a = \sqrt{L_a/C_a}$; conseguentemente anche la velocità di fase è esprimibile come $v_f = \omega/\beta = 1/\sqrt{L_a C_a}$. Se sostituiamo allo spazio libero il materiale dielettrico, l'induttanza per unità di lunghezza non varia, mentre varia la capacità per unità di lunghezza; si ha cioè

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_d}{C_d}} = \sqrt{\frac{L_a}{C_d}} = \sqrt{\frac{L_a C_a}{C_a C_d}} = Z_0^a \sqrt{\frac{C_a}{C_d}}.$$

In particolare, il rapporto $C_d/C_a = \epsilon_{eq}$ può essere visto come la costante dielettrica equivalente (o effettiva), per cui risulta

$$Z_0 = \frac{Z_0^a}{\sqrt{\epsilon_{eq}}}.$$

Il problema è quindi riconducibile alla determinazione delle costanti primarie di una linea di trasmissione e in particolare all'analisi di un modo TEM in assenza e in presenza del dielettrico. A questo fine è possibile utilizzare i metodi classici già impiegati per il caso delle guide d'onda a dominio duplicemente connesso.

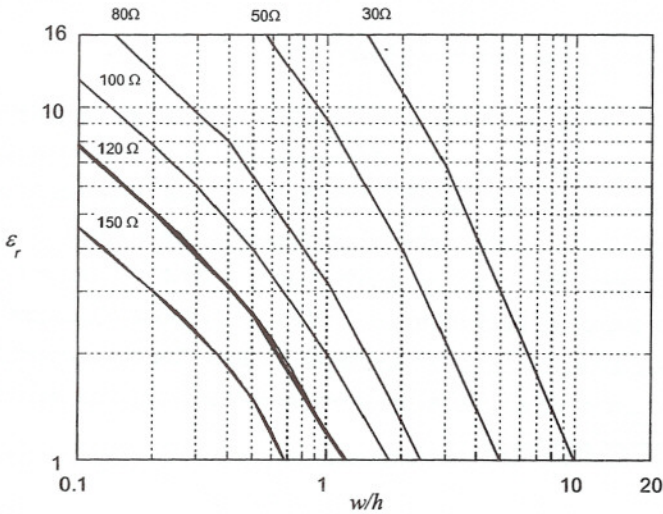


Fig. 4.26 – Variazione dell'impedenza caratteristica in funzione del rapporto w/h e della costante dielettrica relativa ϵ_r .

Utilizzando opportuni metodi numerici, si è in grado di risalire in maniera più accurata al valore Z_0 dell'impedenza caratteristica della linea in funzione del rapporto w/h e della permittività ϵ_r . Solitamente, i valori ricavati vengono presentati in forma grafica. L'uso di questi grafici permette anche di effettuare una operazione di sintesi, che consiste nel ricavare, fissata la permittività dielettrica ϵ_r , il valore del rapporto w/h necessario per ottenere un certo valore di impedenza caratteristica. I grafici in questione, un esempio dei quali è riportato in Fig. 4.27, si ricavano dalle seguenti relazioni approssimate:

$$\frac{w}{h} \cong 4 \left[\frac{e^A}{2} - e^{-A} \right]^{-1}, \quad \text{per } \frac{w}{h} \leq 2,$$

con $A = \pi \sqrt{2(\epsilon_r + 1)} \frac{Z_0}{\zeta_0} + \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(0.23 + \frac{0.11}{\epsilon_r} \right)$. Viceversa:

$$\frac{w}{h} \cong \frac{\epsilon_r - 1}{\pi \epsilon_r} \left[\ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\epsilon_r} \right] + \frac{2}{\pi} [B - 1 - \ln(2B - 1)], \quad \text{per } \frac{w}{h} > 2,$$

$$\text{con } B = \frac{\pi}{2\sqrt{\epsilon_r}} \frac{\zeta_0}{Z_0}.$$

Tali relazioni garantiscono un errore percentuale inferiore all' 1% nel range di variabilità del rapporto w/h .

4.4.1 - Dispersione in una linea a microstriscia

La propagazione su una linea a microstriscia è in prima approssimazione equivalente alla propagazione su una linea di trasmissione. Se il modo che si propaga all'interno della microstriscia fosse proprio il modo TEM, così come per le linee non dovrebbe verificarsi il fenomeno della dispersione; in realtà però il modo di propagazione in microstriscia è un modo "quasi TEM". Conseguentemente, all'aumentare della frequenza la distribuzione delle linee di flusso del campo elettrico varia, concentrandosi tutta all'interno del dielettrico. Questo effetto può essere tenuto in conto utilizzando una formula approssimata che evidenzia la dipendenza dalla frequenza della costante dielettrica equivalente ϵ_{eq} :

$$\epsilon_{eq}(f) \cong \epsilon_r - \left[\frac{\epsilon_r - (\epsilon_{eq})_{appr.}}{1 + G \cdot (f/f_d)^2} \right],$$

dove $f_d = \frac{1}{2\mu_0} \frac{Z_0}{h}$, $G = 0.6 + 9 \cdot 10^{-3} Z_0$ ed $(\epsilon_{eq})_{appr.}$ è la costante dielettrica equivalente che si calcola con l'analisi approssimata.

Nella figura 4.28 è riportato il diagramma di Brillouin per una linea a microstriscia, con la curva di dispersione relativa al modo fondamentale "quasi-TEM" e la curve di dispersione relative ai modi di ordine superiore. Si noti come il fattore di propagazione dato da

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_{eq} \epsilon_0 \mu_0} = \beta(f),$$

dipenda dalla frequenza in modo non lineare, riproducendo un comportamento del dispersivo del mezzo in analogia a quanto accade nelle guide d'onda. A bassa frequenza il comportamento del modo dominante è invece lineare, giustificando l'appellativo di modo quasi-TEM.

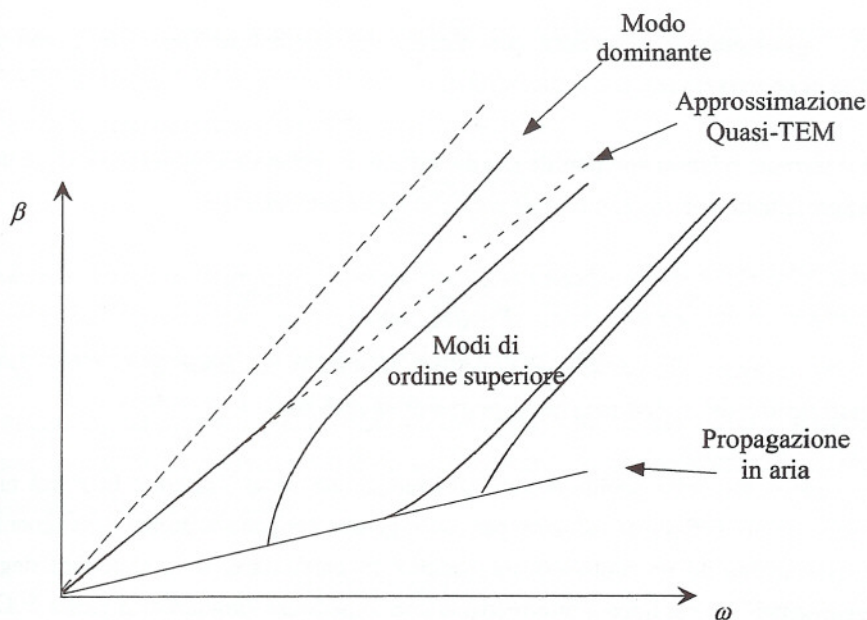


Fig. 4.28 – Diagramma di dispersione tipico per una linea a microstriscia.

4.4.2 - Attenuazione su una microstriscia

L'attenuazione che si manifesta su una microstriscia è molto maggiore rispetto a quella che si ha su di una guida d'onda; ciò è dovuto al fatto che all'interno della struttura è presente un dielettrico che introduce delle perdite. Inoltre, essendo la microstriscia una struttura aperta, si verificano ulteriori perdite a causa dell'irradiazione verso l'esterno. Per questo motivo le linee a microstriscia non vengono mai utilizzate per la trasmissione di segnali a grandi distanze (vengono invece utilizzate ogni qual volta ci sia bisogno di realizzare circuiti a microonde con costi contenuti e sono ottime per realizzare interconnessioni).

La costante di attenuazione relativa ad una microstriscia può essere pensata come composta da tre termini:

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_d + \alpha_{irr} .$$

In particolare, è importante sottolineare i punti riportati nel seguito.

i) α_c è dovuta alle perdite che si verificano nei conduttori; una buona approssimazione per tale termine è la seguente:

$$\alpha_c \cong 8.686 \frac{R_s}{w Z_0} \quad [\text{dB/m}]$$

dove R_s rappresenta la resistenza superficiale del conduttore ($R_s = 1/\sigma\delta$, con δ profondità di penetrazione e σ conducibilità)¹;

ii) α_d è il termine relativo alle perdite nel dielettrico. In generale risulta $\alpha_d \ll \alpha_c$ e un valore approssimato per α_d si può ricavare dalla seguente relazione:

$$\alpha_d \cong 27.3 \frac{\epsilon_{eq}(f)-1}{\epsilon_r-1} \frac{\epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_{eq}}} \frac{tg\gamma}{\lambda_0} \quad [\text{dB/m}]$$

dove la $tg\gamma$ è legata alle perdite del dielettrico tramite la relazione $tg\gamma = \epsilon''/\epsilon'$ (γ è l'angolo di perdita del dielettrico che ha permittività dielettrica $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$).

iii) α_{irr} tiene conto delle perdite dovute all'irradiazione verso l'esterno; in realtà tali perdite sono molto difficili da valutare, per cui in genere vengono misurate direttamente facendo riferimento ad un prototipo del circuito. In particolare, sono stati fatti degli studi sperimentali su una linea a microstriscia con impedenza caratteristica pari a 50Ω e si è trovata la seguente relazione di proporzionalità:

$$\alpha_{irr} \propto \frac{(hf)^2}{\sqrt{\epsilon_r}}.$$

Questa relazione mette in evidenza il fatto che per ridurre le perdite per irradiazione bisogna utilizzare substrati con alta permittività dielettrica e con spessori h del substrato sottili. Si noti come le perdite per irradiazione diventino maggiori all'aumentare della frequenza.

4.4.3 - Limitazioni in frequenza

Il limite superiore della frequenza che può essere utilizzata nelle microstrisce dipende essenzialmente da tre effetti: l'insorgenza di modi di ordine superiore, l'innescio di onde superficiali, l'effetto di irradiazione dovuto ai modi di ordine superiore. Analizziamo separatamente i tre effetti.

i) Il primo modo di ordine superiore ha una frequenza di *cut-off* pari a:

$$f_c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}(2w + 0.8h)}.$$

¹ Il fattore 8,686 deriva nel passaggio tra valori di α espressi in Neper/m a dB/m, in particolare si ha: $\alpha_{dB} = (20/\ln 10)\alpha_{Np} = 8,686\alpha_{Np}$.

Il campo corrispondente è sempre essenzialmente confinato nel dielettrico e pone solo il problema della distinzione tra i modi.

ii) Per frequenze superiori ad un certo valore f_s dato da:

$$f_s = \frac{c_0 \tan^{-1}(\epsilon_r)}{\sqrt{2\pi h} \sqrt{\epsilon_r - 1}},$$

si possono innescare delle onde superficiali che producono effetti indesiderati (perdita di potenza, irradiazione indesiderata prodotta dalle stesse onde superficiali, accoppiamenti indesiderati tra punti diversi del circuito, etc.).

iii) Si verifica infine il fenomeno della radiazione prodotta dai modi di ordine superiore in presenza di discontinuità. Un valore approssimato per la frequenza alla quale tale radiazione diventa significativa è:

$$f[\text{GHz}]h[\text{mm}] > 2.14 \sqrt[4]{\epsilon_r}.$$

In relazione alle caratteristiche geometriche ed elettriche del circuito a microstriscia in esame, a partire da una certa frequenza può insorgere uno dei tre diversi meccanismi ora illustrati. Ciò ovviamente limita l'utilizzazione delle microstrisce ad alta frequenza. Il progettista deve quindi considerare il caso peggiore e mantenere la frequenza del segnale al di sotto di tale valore.

§ 4.5 - MATRICE DI DIFFUSIONE

Alle frequenze tipiche delle microonde risulta spesso difficile misurare una tensione e una corrente, o addirittura non è possibile definirle. Si ha infatti bisogno di almeno due terminali per definire la differenza di potenziale; se questo è possibile nelle linee di trasmissione che supportano un modo TEM, risulta invece impossibile nelle linee dove vengono considerati modi TE o TM (quali ad esempio le guide d'onda rettangolari o circolari). Per i circuiti a microonde si è soliti fornire una descrizione alternativa che fa uso dei concetti di onda incidente, riflessa e trasmessa. Consideriamo quindi un dispositivo a microonde i cui terminali di ingresso e uscita (porte d'accesso o bocche) siano alimentati attraverso una generica struttura guidante (guida d'onda, cavo coassiale, linea a microstriscia...). Nel seguito supporremo che alle bocche del dispositivo considerato sia presente solo il modo fondamentale risultando quelli di ordine superiore in *cut-off*.

Nel caso di dispositivo ad una sola porta è sempre possibile definire una linea di trasmissione equivalente chiusa su una impedenza equivalente del carico Z (Fig. 4.29).

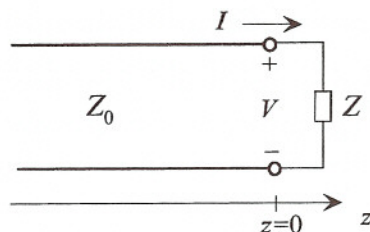


Fig. 4.29

A questo proposito è utile ricordare la definizione di coefficiente di riflessione in corrispondenza di una sezione della linea di ascissa z :

$$\Gamma(z) = \Gamma(0)e^{j2\beta z}$$

con

$$\Gamma(0) = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

Inoltre ricordiamo che, in corrispondenza dell'ascissa z , tensione e corrente possono essere espresse, in generale, nel seguente modo:

$$\begin{cases} V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z} \\ I(z) = I^+ e^{-j\beta z} + I^- e^{+j\beta z} \end{cases}$$

Per poter dare, del nostro dispositivo ad una porta, una descrizione che sia svincolata dal particolare tipo di linea che lo alimenta, è utile effettuare le seguenti normalizzazioni rispetto ai parametri caratteristici della linea stessa:

$$z = \frac{Z}{Z_0} \quad \text{impedenza normalizzata} \quad (4.5.1)$$

$$y = Y Z_0 \quad \text{ammettenza normalizzata} \quad (4.5.2)$$

$$v = \frac{V}{\sqrt{Z_0}} \quad \text{tensione normalizzata} \quad (4.5.3)$$

$$i = \frac{I}{\sqrt{Z_0}} \quad \text{corrente normalizzata} \quad (4.5.4)$$

Nelle (4.5.3) e (4.5.4), V e I rappresentano tensione e corrente sul carico Z , come in Fig. 4.29:

$$V = (V^+ + V^-)$$

$$I = (I^+ + I^-)$$

Definiamo ora le seguenti quantità:

$$a = \frac{V^+}{\sqrt{Z_0}} = I^+ \sqrt{Z_0} \quad \text{intensità d'onda entrante} \quad (4.5.5)$$

$$b = \frac{V^-}{\sqrt{Z_0}} = -I^- \sqrt{Z_0} \quad \text{intensità d'onda uscente} \quad (4.5.6)$$

Dalle precedenti relazioni si ricava dunque:

$$\begin{cases} v = a + b \\ i = a - b \end{cases} \quad (4.5.7)$$

Se si considera $Z_0 = R_0$ (linea ideale), è possibile esprimere la potenza entrante nel dispositivo in termini delle quantità a e b :

$$P = \frac{1}{2} V I^* = \frac{1}{2} (V^+ + V^-) (I^+ + I^-)^* = \frac{1}{2} \frac{|V^+|^2}{R_0} - \frac{1}{2} \frac{|V^-|^2}{R_0} = \frac{|a|^2}{2} - \frac{|b|^2}{2}.$$

Le quantità a e b sono legate tra loro tramite il coefficiente di riflessione dalla relazione:

$$b = \Gamma a \quad (4.5.8)$$

con $\Gamma = \Gamma(0)$, e rappresentano dei parametri, diversi da V e I , mediante i quali è possibile caratterizzare il dispositivo. Inoltre, si ha:

$$|a|^2 / 2 = \text{potenza attiva entrante nel dispositivo} \quad [\text{Watt}]$$

$$|b|^2 / 2 = \text{potenza attiva uscente dal dispositivo} \quad [\text{Watt}]$$

per cui $[a] = [b] = \sqrt{\text{Watt}}$.

Consideriamo ora il caso di un dispositivo a più porte; in generale possiamo pensare che su ciascuna porta sia connessa una linea di trasmissione, e che dunque su ogni porta sia possibile definire e calcolare una tensione e una corrente (nel caso in cui la connessione tra le bocche e il dispositivo sia effettuata mediante delle guide d'onda, si fa riferimento alle linee di trasmissione equivalenti; se su una di tali guide si hanno più modi in propagazione, la guida è schematizzabile con tante linee di trasmissione equivalenti quanti sono i modi in propagazione). Una caratterizzazione del multipolo può essere ottenuta dalla valutazione della matrice delle impedenze (o della matrice delle ammettenze).

Ad esempio, per un quadripolo (dispositivo a due porte) e in presenza del solo modo fondamentale, la situazione è come in Fig. 4.30.

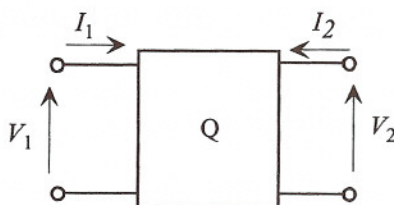


Fig. 4.30

Se il quadripolo è lineare, è possibile utilizzare una caratterizzazione in termini di matrice delle impedenze:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (4.5.9)$$

con:

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}, \quad Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}, \quad Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}.$$

In modo analogo, la descrizione può essere fatta mediante la matrice delle ammettenze:

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$$

con:

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0}, \quad Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}, \quad Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0}, \quad Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}.$$

In generale, possiamo dire che per un dispositivo lineare con n porte d'ingresso e comunque complesso (Fig. 4.31), la descrizione potrà essere data mediante una matrice $\underline{Z}$ ($n \times n$) tale che:

$$\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}$$

dove $\underline{V}$ e $\underline{I}$ rappresentano i vettori rispettivamente delle tensioni e delle correnti (effettive o equivalenti) sulle n porte. I parametri necessari per la descrizione del dispositivo possono dunque essere ricavati o facendo direttamente delle misure di tensione e corrente sulle n porte del dispositivo, oppure facendo riferimento ad un suo circuito elettrico equivalente.

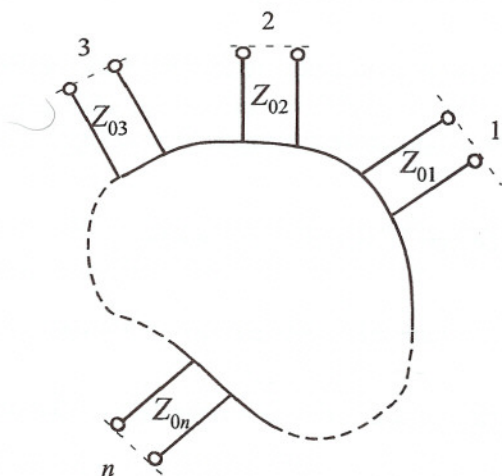


Fig. 4.31 - Schematizzazione di un dispositivo a n porte.

Così come nel caso di una giunzione ad una bocca, si farà riferimento ai seguenti parametri normalizzati:

$$v_i = \frac{V_i}{\sqrt{Z_{0i}}} = \text{tensione normalizzata relativa alla porta } i\text{-esima } (i=1,2,\dots,n);$$

$$i_i = I_i \sqrt{Z_{0i}} = \text{corrente normalizzata relativa alla porta } i\text{-esima } (i=1,2,\dots,n);$$

secondo i quali è possibile costruire i relativi vettori:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 / \sqrt{Z_{01}} \\ V_2 / \sqrt{Z_{02}} \\ \dots \\ V_n / \sqrt{Z_{0n}} \end{pmatrix} = \text{vettore di tensione normalizzato};$$

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \sqrt{Z_{01}} \\ I_2 \sqrt{Z_{02}} \\ \dots \\ I_n \sqrt{Z_{0n}} \end{pmatrix} = \text{vettore di corrente normalizzato}.$$

I vettori di corrente e di tensione normalizzati sono quindi legati dalla relazione:

$$\underline{v} = \underline{Z} \underline{i}$$

essendo gli elementi della matrice $\underline{Z}$ definiti come:

$$z_{ii} = \frac{Z_i}{Z_{0i}} = \text{impedenza d'ingresso normalizzata relativa alla porta } i\text{-esima};$$

$$z_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{0i}} \sqrt{Z_{0j}}} = \text{impedenza mutua normalizzata tra le porte } i \text{ e } j.$$

A questo punto, possiamo definire su ogni porta le quantità:

$$a_i = \frac{V_i^+}{\sqrt{Z_{0i}}} = I_i^+ \sqrt{Z_{0i}} = \text{intensità d'onda entrante nella porta } i\text{-esima} \quad (4.5.10)$$

$$b_i = \frac{V_i^-}{\sqrt{Z_{0i}}} = -I_i^- \sqrt{Z_{0i}} = \text{intensità d'onda uscente dalla porta } i\text{-esima} \quad (4.5.11)$$

Valgono dunque le relazioni:

$$\underline{v} = \underline{a} + \underline{b},$$

$$\underline{i} = \underline{a} - \underline{b}.$$

Perciò possiamo scrivere:

$$(\underline{a} + \underline{b}) = \underline{z}(\underline{a} - \underline{b}). \quad (4.5.12)$$

Si definisce matrice di diffusione o di *scattering* $\underline{S}$ la matrice che lega il vettore delle intensità d'onda uscenti con il vettore delle intensità d'onda entranti:

$$\underline{b} = \underline{S}\underline{a}. \quad (4.5.13)$$

Gli elementi della matrice vengono detti parametri di *scattering*. Come precedentemente citato, la rappresentazione in termini di matrice di *scattering* è alternativa a quella data in termini di matrice delle impedenze o delle ammettenze. Il legame tra i vari tipi di rappresentazione si può ricavare dalla (4.5.12):

$$\underline{S} = (\underline{z} + \underline{I})^{-1}(\underline{z} - \underline{I}) \quad (4.5.14)$$

o, in modo equivalente:

$$\underline{S} = (\underline{I} + \underline{y})^{-1}(\underline{I} - \underline{y}) \quad (4.5.15)$$

dove $\underline{I}$ è la matrice identità $n \times n$.

E' importante osservare che nel caso di reti lineari, la matrice $\underline{S}$ può essere sempre definita, mentre in alcune particolari situazioni può accadere che le matrici $\underline{Z}$ e $\underline{Y}$ non siano definibili.

Per capire meglio il significato degli elementi della matrice $\underline{S}$, facciamo riferimento al caso di un circuito a due porte, per cui si ha:

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

Le equazioni che descrivono il dispositivo sono:

$$\begin{cases} b_1 = s_{11}a_1 + s_{12}a_2 \\ b_2 = s_{21}a_1 + s_{22}a_2 \end{cases}$$

I termini della matrice $\underline{S}$ dunque possono essere così espressi:

$$s_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}, \quad s_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}, \quad s_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}, \quad s_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}.$$

s_{11} è detto riflettenza propria della prima porta e si calcola ponendo $a_2 = 0$, cioè chiudendo la linea 2 sul proprio carico adattato (vedi Fig. 4.32). In pratica, s_{11} è il coefficiente di riflessione proprio della linea 1, quando la linea 2 è adattata.

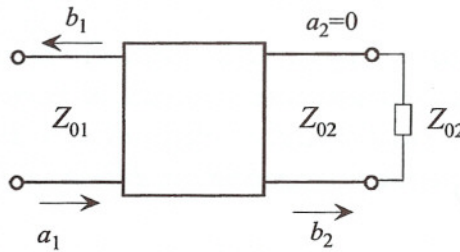


Fig. 4.32 Configurazione per la determinazione della riflettenza propria della bocca 1.

s_{12} è detto trasmettenza dalla porta 2 alla porta 1 e si ottiene valutando l'intensità dell'onda uscente dalla bocca 1, quando si alimenta la bocca 2 con la linea 1 chiusa sul proprio carico adattato (vedi Fig. 4.33).

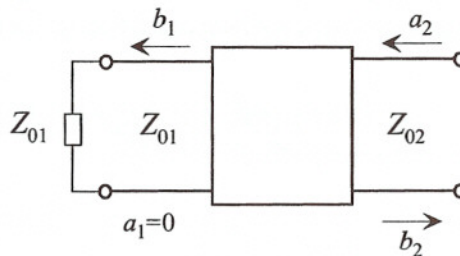


Fig. 4.33 Configurazione per la determinazione della trasmettenza dalla bocca 2 alla bocca 1.

In generale, per una giunzione a n bocche si definisce:

$s_{ii} = \left. \frac{b_i}{a_i} \right|_{\substack{a_j=0 \\ j \neq i}}$ = riflettenza propria della bocca i = coefficiente di riflessione proprio della linea i , con tutte le altre $n-1$ linee chiuse sul proprio carico adattato;

$s_{ij} = \left. \frac{b_i}{a_j} \right|_{\substack{a_k=0 \\ k \neq j}}$ = trasmettenza dalla bocca j alla bocca i , che si ottiene valutando

l'intensità dell'onda uscente dalla bocca i quando si alimenta la porta j , con tutte le altre porte adattate.

La matrice $\underline{\underline{S}}$ lega i vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ in un rapporto biunivoco; ai fini della descrizione di un multipolo lineare, essa costituisce uno strumento equivalente alla matrice delle impedenze o a quella delle ammettenze, ma alle alte frequenze risulta assai più conveniente caratterizzare i dispositivi attraverso la matrice di scattering. Assegnato il dispositivo e assegnate le caratteristiche delle linee di trasmissione che collegano ogni bocca al dispositivo, è assegnata in modo univoco la matrice di diffusione $\underline{\underline{S}}$.

CAPITOLO 5

ANTENNE

§ 5.1 - INTRODUZIONE

Def. Col termine antenna si indica un qualunque dispositivo (trasduttore) in grado di trasformare un segnale elettrico in un segnale elettromagnetico, che a grande distanza dall'antenna stessa assume la struttura di un'onda elettromagnetica che si propaghi nello spazio libero. Le considerazioni precedenti mettono chiaramente in evidenza la possibilità di trasmettere a distanza un'informazione senza utilizzare alcuna struttura di supporto alla propagazione stessa (cavo o fibra ottica): il segnale elettromagnetico prodotto da un'antenna trasmittente sarà riconvertito in segnale elettrico mediante un'ulteriore antenna alla stazione ricevente. In base al principio di reciprocità si può inoltre affermare che ogni antenna trasmittente può funzionare anche come antenna ricevente, e viceversa.

È noto che, in base alle equazioni di Maxwell, distribuzioni di corrente variabili nel tempo possono essere interpretate come sorgenti per il campo elettromagnetico. Le distribuzioni di corrente prodotte su un'antenna sono essenzialmente di due tipi: distribuzioni lineari e distribuzioni superficiali. Le prime sono caratterizzate da una corrente che è funzione di una ascissa, mentre le altre da una densità lineare di corrente superficiale funzione di una coppia di coordinate; corrispondentemente si hanno pertanto le antenne lineari e le antenne ad apertura. Una volta note le distribuzioni di corrente, è possibile ottenere le espressioni del campo elettromagnetico in un punto qualunque dello spazio: dapprima si ricava l'espressione del campo prodotto da un elemento infinitesimo di corrente; successivamente si ottengono, mediante opportuna integrazione, le espressioni del campo prodotto da una distribuzione qualsiasi. 1490

def. support. In molti casi pratici l'antenna è costituita semplicemente da un conduttore filiforme in cui la corrente varia da punto a punto; scomponendo l'antenna in tratti sufficientemente corti o considerandola come una successione di elementi di lunghezza infinitesima, il campo da essa prodotto può essere calcolato come risultante vettoriale dei campi dovuti ai singoli elementi infinitesimi.

Il campo elettromagnetico prodotto da un dipolo elettrico elementare costituisce quindi l'elemento base per lo studio di qualsiasi tipo di antenna. Per questa ragione nel

successivo paragrafo vengono date le espressioni dei campi generati da un dipolo elettrico elementare.

§ 5.2 - DIPOLO ELETTRICO ELEMENTARE

Per dipolo elettrico elementare si intende un tratto di conduttore di lunghezza $\Delta l \ll \lambda$, su cui la corrente si può considerare di ampiezza costante. In particolare, si suppone di far riferimento a segnali sinusoidali, così che la corrente può essere rappresentata mediante il corrispondente fasore I . Consideriamo un dipolo di lunghezza Δz , disposto lungo l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con il centro nell'origine (Fig. 5.1).

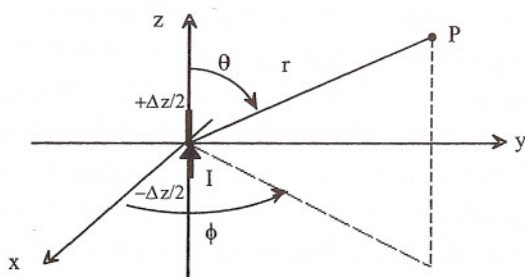


Fig. 5.1 - Sistema di coordinate sferico associato ad un dipolo elementare.

In tal caso, il campo elettromagnetico nel generico punto P dello spazio circostante il dipolo può essere espresso in un sistema di riferimento sferico come segue:

$$E_r = \zeta \frac{I \Delta z}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \cos \theta e^{-jkr}, \quad (5.1)$$

$$E_\theta = \zeta \frac{I \Delta z}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{jkr^3} \right) \sin \theta e^{-jkr}, \quad (5.2)$$

$$E_\phi = 0, \quad (5.3)$$

$$H_r = 0, \quad (5.4)$$

$$H_\theta = 0, \quad (5.5)$$

$$H_\phi = \frac{I \Delta z}{4\pi} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta e^{-jkr}. \quad (5.6)$$

Come conseguenza della simmetria assiale del dipolo, il campo risulta indipendente dall'angolo di azimuth ϕ . Si osservi che le varie componenti del campo presentano termini dipendenti da differenti potenze inverse della distanza r del punto di osservazione dall'elemento radiante. È immediato notare che i termini di tipo $1/r$ prevarranno a grande distanza dall'antenna rispetto a quelli di tipo $1/r^2$ e $1/r^3$. Viceversa, nella regione di spazio vicina al dipolo predominano i termini di tipo $1/r^2$ e $1/r^3$. Di conseguenza, i termini di tipo $1/r$ vengono detti componenti di campo lontano, mentre quelli di tipo $1/r^2$ e $1/r^3$ vengono detti componenti di campo vicino. È importante mettere in evidenza che a grande distanza dal dipolo ($r \gg \lambda/2\pi$) le componenti più significative del campo sono le seguenti:

$$E_\theta \cong \zeta \frac{I\Delta z}{4\pi} \frac{jk}{r} \sin\theta e^{-jkr} = j\zeta \frac{I\Delta z}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr}, \quad (5.7)$$

$$H_\phi \cong j \frac{I\Delta z}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr} = \frac{E_\theta}{\zeta}. \quad (5.8)$$

La struttura del campo irradiato a grande distanza dal dipolo è di tipo molto particolare. Infatti, se si calcola il rapporto E_θ/H_ϕ , è pari, in ogni punto, all'impedenza caratteristica del mezzo ζ . Si vede poi semplicemente che $\underline{E}$, $\underline{H}$ e $\underline{i}_r$ sono perpendicolari fra di loro ed individuano una terna destrorsa, cosicché $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ soddisfano le caratteristiche tipiche di un'onda elettromagnetica piana che si propaga lungo la direzione $\underline{i}_r$. Rimanendo nel caso di campi sinusoidali, il ritardo di fase tra campo irradiato e corrente sul dipolo dipende evidentemente dalla distanza r del punto di osservazione dal dipolo stesso, attraverso il termine di ritardo e^{-jkr} . Di conseguenza, tutti i punti appartenenti alla stessa superficie sferica con centro sul dipolo e raggio r presentano la stessa fase per il campo elettromagnetico. I fronti d'onda dunque sono costituiti da superfici sferiche centrate sul dipolo, che si comporta come una sorgente puntiforme. A grande distanza e in un intorno del punto considerato il fronte d'onda sferico può confondersi con il piano tangente alla superficie equifase nel punto stesso.

→ Si parla in questo caso di onda localmente piana. Se si calcola il vettore di Poynting in un punto a grande distanza dall'antenna, il vettore stesso risulta orientato in direzione radiale ($\underline{i}_r$) e puramente reale:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{E}|^2}{\zeta_0} \underline{i}_r. \quad (5.9)$$

In particolare, se si calcola il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie sferica centrata sul dipolo di raggio arbitrario, purché molto grande rispetto alla

lunghezza d'onda, il risultato è puramente reale e indipendente dal raggio della superficie sferica considerata. Si deduce quindi che esiste un flusso continuo di potenza attiva dal dipolo all'infinito. Tale potenza, detta potenza irradiata, è definitivamente ceduta dal dipolo all'ambiente circostante e può essere valutata mediante il seguente integrale:

$$P_{irr} = \oint\oint_A \underline{S} \cdot \underline{i}_r dS, \quad (5.10)$$

dove A è la superficie di una sfera di raggio molto grande, tale che i suoi punti appartengono alla regione di campo lontano, dove le componenti di tipo $1/r$ prevalgono rispetto alle altre. Poiché le intensità dei campi a grande distanza variano con la distanza come $1/r$, la densità di potenza irradiata (5.9) varia con la distanza come $1/r^2$, cioè è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dall'antenna. L'indipendenza da r della potenza irradiata in (5.10) è legata al fatto che l'elemento di superficie dS in coordinate sferiche è proporzionale al quadrato della distanza ($dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$), e dunque l'integrando della (5.10) risulta di fatto indipendente dal raggio della spirale.

Se si calcola il vettore di Poynting in vicinanza del dipolo, le componenti di campo vicino (cioè i termini che dipendono da $1/r^2$ e da $1/r^3$) danno luogo a delle densità di flusso di potenza reattiva che si attenuano velocemente all'aumentare della distanza dal dipolo. Per le ragioni suddette, le componenti di tipo $1/r$, che abbiamo già definito come componenti di campo lontano, vengono anche dette componenti radiative, dal momento che danno origine alla parte reale (radiale) del vettore di Poynting a grande distanza dal dipolo. Le componenti vicine di tipo $1/r^2$ e $1/r^3$, vengono invece dette anche componenti reattive, dato che producono potenza reattiva nell'intorno dell'antenna.

Se esplicitissimo il campo rispetto alla frequenza, ci renderemmo conto che le componenti lontane, o radiative, dipendono dal quadrato della frequenza, mentre quelle vicine, o reattive, o sono costanti o dipendono dalla frequenza f alla prima potenza. È consuetudine quindi definire le componenti lontane o radiative anche come componenti dinamiche, e le componenti vicine o reattive come componenti quasi statiche. Queste ultime definizioni sottolineano che il fenomeno dell'irradiazione è fortemente legato alla dinamicità del campo: è tanto più semplice irradiare un segnale nello spazio quanto più alta è la sua frequenza, cioè la sua velocità di variazione nel tempo.

§ 5.3 - CAMPO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE LINEARE DI CORRENTE

Consideriamo ora un'antenna filare costituita da un filo rettilineo; osserviamo che il campo elettromagnetico prodotto da questa in un punto dello spazio libero che si trovi a grande distanza dall'antenna (distanza grande sia rispetto alla lunghezza d'onda λ , sia rispetto alla massima dimensione dell'antenna), si può calcolare considerando l'antenna composta da una successione di dipoli elementari e sommando vettorialmente i singoli campi da essi prodotti.

Sia l'antenna in esame costituita da un conduttore rettilineo filiforme, di lunghezza $2l$, posto lungo l'asse z , con gli estremi in $z=l$ e in $z=-l$, e sul quale esista una distribuzione di corrente $I(z)$ (vedi Fig.5.2). Nel sovrapporre i campi elementari prodotti dai singoli elementi dell'antenna, si deve tenere conto delle differenze di fase relative ai contributi di ciascun dipolo elementare: tali differenze di fase sono dovute alle differenti distanze esistenti tra ciascun dipolo e il punto dello spazio in cui si calcola il campo.

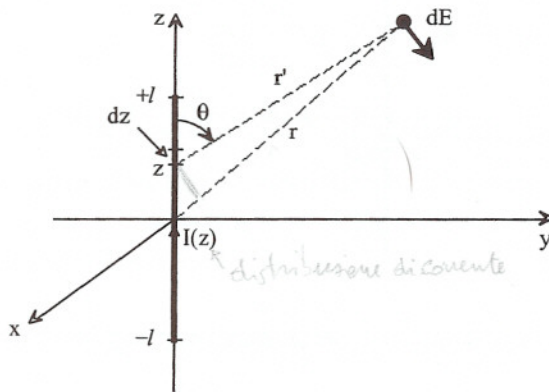


Fig. 5.2 - Irradiazione da un'antenna filare.

Considerando il generico dipolo elementare di lunghezza dz , posto a distanza z dal centro dell'antenna e percorso dalla corrente $I(z)$, il campo elementare dE da esso prodotto in un punto a distanza r' , in una direzione che forma un angolo θ con l'asse z , si può ottenere dalla (5.7), sostituendo in essa $I\Delta z$ con $I(z)dz$ e r con r' . Si ha:

$$dE_{\theta} = j\zeta \frac{I(z)dz}{2\lambda r'} \sin \theta e^{-j\beta r'}. \quad (5.11)$$

La distanza r' dal generico dipolo elementare al punto in cui si calcola il campo può essere espressa in funzione della distanza di questo punto dal centro dell'antenna. In realtà, dato che il campo viene calcolato in punti a grande distanza, le direzioni

rappresentate da r e da r' si possono ritenere parallele (vedi Fig. 5.3) e quindi si può scrivere: $r' = r - z \cos \theta$ dove $z \cos \theta$ rappresenta la differenza di percorso dei campi elementari prodotti dal generico dipolo posto a distanza z dal centro dell'antenna stessa. La (5.11) dunque può essere riscritta nella forma seguente:

$$dE_\theta = j\zeta \frac{e^{-j\beta r}}{2\lambda r} \sin \theta I(z) e^{j\beta z \cos \theta} dz \quad (5.12)$$

in cui a denominatore anziché porre $r' = r - z \cos \theta$ si è sostituita la distanza r dal centro dell'antenna poiché in tutti i casi pratici si ha $|z \cos \theta|_{\max} = l \ll r$. Una tale semplificazione non è ovviamente lecita nel termine di fase, perché nell'argomento dell'esponente $(2\pi(r/\lambda) \cos \theta)$ l'errore introdotto dall'approssimazione con r' deve essere confrontato con la lunghezza d'onda, e non con la distanza r .

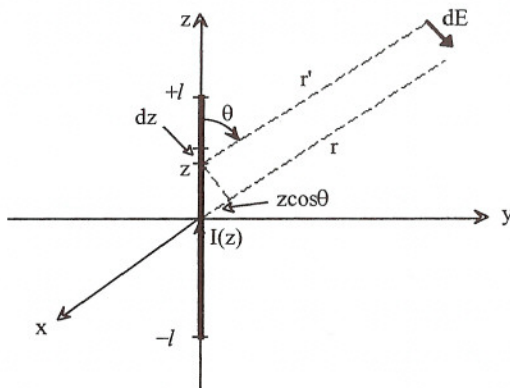


Fig. 5.3 - Geometria per l'approssimazione a raggi paralleli.

Integrando la (5.12) su tutta la lunghezza dell'antenna, da $z = -l$ a $z = l$, cioè sommando gli infiniti contributi infinitesimi dei dipoli elementari, si ottiene il campo totale $\underline{E}$ prodotto dall'antenna in un punto generico dello spazio. Si ha:

$$\underline{E} = \left(j\zeta \frac{e^{-j\beta r}}{2\lambda r} \sin \theta \int_{-l}^{+l} I(z) e^{j\beta z \cos \theta} dz \right) \underline{i}_\theta. \quad (5.13)$$

La determinazione della distribuzione di corrente $I(z)$ che compare nella (5.13) viene determinata utilizzando metodi numerici, quali ad esempio il metodo dei momenti, oppure dei metodi analitici approssimati.

Se l'antenna è sottile (raggio della sezione del filo molto minore di λ), la distribuzione di corrente può essere considerata longitudinale (si possono trascurare le

componenti trasversali). Inoltre, se indichiamo con $2l$ la lunghezza totale del dipolo filare di partenza (Fig. 5.4) e con a il raggio della sezione del filo metallico con cui è realizzata l'antenna, è possibile definire il coefficiente di snellezza nel seguente modo:

$$\Omega = 2 \ln \frac{2l}{a} \quad (5.14)$$

In particolare, l'antenna sarà definita snella se $\Omega > 10$ il che significa $2l/a > 150$.

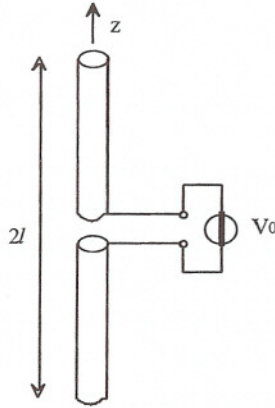


Fig. 5.4 - Dipolo filare di lunghezza $2l$.

In tale ipotesi di "antenna snella", la distribuzione di corrente sul dipolo si trova riferendosi ad una linea di trasmissione equivalente chiusa su un circuito aperto (Fig. 5.5), di lunghezza l e impedenza caratteristica pari a:

$$Z_0 = \frac{\zeta_0 \Omega}{2\pi} \quad (5.15)$$

Il calcolo della distribuzione di corrente viene eseguito come su una linea bifilare ordinaria; successivamente la linea viene divaricata per riottenere il dipolo originario.

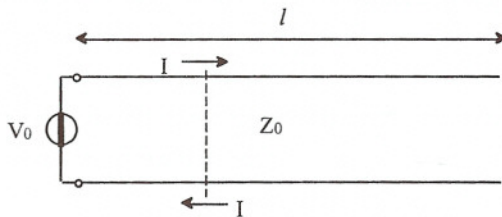


Fig. 5.5 Linea di trasmissione chiusa su un circuito aperto.

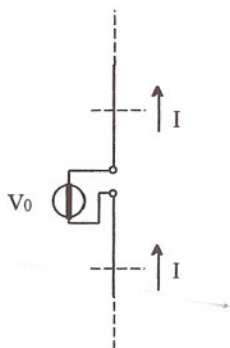


Fig. 5.6 - Dipolo filare ottenuto divaricando la linea di trasmissione equivalente.

Il verso della corrente viene individuato come indicato schematicamente nelle Figg. 5.5 e 5.6. Dall'espressione della corrente lungo la linea chiusa su un circuito aperto, è immediato verificare che se $l \ll \lambda$ la distribuzione di corrente è quasi lineare:

$$I(z) = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{l} \right), \quad -l < z < l. \quad (5.16)$$

Se invece $2l = \lambda/2$ (dipolo a mezz'onda) risulta:

$$I(z) = I_0 \cos(kz), \quad -l < z < l. \quad (5.17)$$

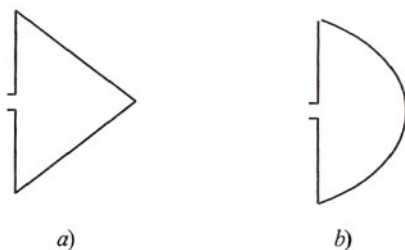


Fig. 5.7 - Andamenti della distribuzione di corrente per:
a) dipolo elettrico corto; b) dipolo a mezz'onda.

Calcolando i campi lontani con la procedura descritta precedentemente, risulta che il dipolo corto ($l \ll \lambda$) irradia in pratica un campo elettrico che ha la stessa distribuzione di quello irradiato da un dipolo elementare e cioè:

$$\underline{E} = j\zeta_0 \frac{I_0 l}{2\lambda r} \sin\theta e^{-jkr} \underline{i}_\theta. \quad (5.18)$$

Per il dipolo a mezz'onda si ha invece:

$$\underline{E} = j\zeta_0 \frac{I_0}{2\lambda r} \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} e^{-jkr} \underline{i}_\theta. \quad (5.19)$$

È importante osservare che, da un punto di vista qualitativo, dal momento che il campo, generato da distribuzioni di corrente lineari o addirittura più complesse, è dato dalla sovrapposizione dei campi prodotti da tanti dipoli elettrici elementari, tutte le osservazioni fatte per i campi generati dal dipolo elementare (componenti reattive e radiative, componenti di campo vicino...) valgono in generale per qualunque tipo di antenna.

E' importante infine mettere in evidenza che per un'antenna di dimensioni finite, indicata con d_{max} la dimensione lineare massima della stessa, la zona di campo lontano, dove le componenti vicine del campo diventano trascurabili rispetto a quelle lontane e dove vale l'approssimazione a raggi paralleli, viene individuata dalle seguenti condizioni:

$$r > \frac{2d_{max}^2}{\lambda}, \quad r \gg \lambda. \quad (5.20)$$

§ 5.4 - CAMPO ASSOCIATO AD UNA SPIRA ELEMENTARE DI CORRENTE

Consideriamo una spira circolare di raggio R , lungo la quale circoli una corrente, spazialmente costante, con andamento sinusoidale nel tempo e di ampiezza I . Affinchè la corrente sia spazialmente costante è necessario che la spira sia elementare, ovvero che sia soddisfatta la condizione $2\pi R \ll \lambda$. Supponiamo che la spira giaccia sul piano x, y (vedi Fig. 5.8). Il campo elettromagnetico generato da tale distribuzione di corrente può essere espresso nel seguente modo:

$$E_r = 0, \quad (5.21)$$

$$E_\theta = 0, \quad (5.22)$$

$$E_\phi = -\zeta \frac{\mu\pi R^2 I}{4\pi\mu} \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{j\omega}{cr^2} \right) \sin\theta e^{-jkr}, \quad (5.23)$$

$$H_r = \frac{\mu\pi R^2 I}{2\pi\mu} \left(\frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) \cos\theta e^{-jkr}, \quad (5.24)$$

$$H_\theta = \frac{\mu\pi R^2 I}{4\pi\mu} \left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{j\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3} \right) \sin\theta e^{-jkr}, \quad (5.25)$$

$$H_\phi = 0, \quad (5.26)$$

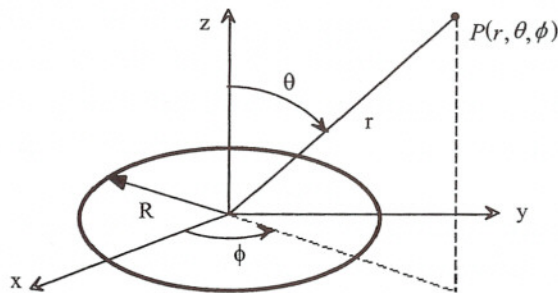


Fig. 5.8 - Geometria e sistemi di coordinate di una spira elementare.

Osserviamo che, ai fini del calcolo dei campi, la spira elementare di corrente può essere sostituita con un dipolo magnetico corto, cioè con un elemento infinitesimo di corrente magnetica I_m (Fig. 5.9).

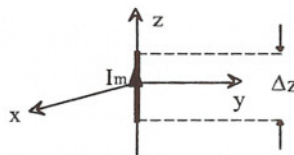


Fig. 5.9 - Geometria di un dipolo magnetico elementare

In particolare, la corrente I_m deve soddisfare la seguente condizione (equivalenza di Ampere): $I_m \Delta z = j\omega\mu SI$, dove μ è la permeabilità magnetica del mezzo circostante e $S = \pi R^2$ è la sezione della spira elementare.

Al risultato rappresentato nelle (5.21)-(5.26) si può pervenire per due strade differenti; nella prima, si scompone la spira in elementi di corrente percorsi dalla corrente I e si integra lungo la circonferenza di raggio R . Nella seconda maniera si ammette l'esistenza di correnti e cariche magnetiche e si utilizza il teorema di dualità che viene di seguito enunciato.

5.4.1 Teorema di dualità

Sia dato un sistema di sorgenti di tipo elettrico ($\underline{J}_1, \rho_1$) che irradiano in un mezzo lineare, omogeneo, isotropo caratterizzato dalle costanti ε_1, μ_1 . Il campo ($\underline{E}_1, \underline{H}_1$) prodotto da tale sistema di sorgenti è ovviamente soluzione delle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E}_1 = -j\omega\mu_1 \underline{H}_1 \\ \nabla \times \underline{H}_1 = j\omega\varepsilon_1 \underline{E}_1 + \underline{J}_1 \\ \nabla \cdot \mu_1 \underline{H}_1 = 0 \\ \nabla \cdot \varepsilon_1 \underline{E}_1 = \rho_1 \end{cases} \quad (5.27)$$

Consideriamo quindi un sistema fittizio di sorgenti magnetiche ($\underline{J}_{m2}, \rho_{m2}$) che generano, in un mezzo di costanti ε_2, μ_2 , un campo ($\underline{E}_2, \underline{H}_2$) che è a sua volta soluzione delle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E}_2 = -j\omega\mu_2 \underline{H}_2 - \underline{J}_{m2} \\ \nabla \times \underline{H}_2 = j\omega\varepsilon_2 \underline{E}_2 \\ \nabla \cdot \mu_2 \underline{H}_2 = \rho_{m2} \\ \nabla \cdot \varepsilon_2 \underline{E}_2 = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

Sostituendo le quantità che compaiono nel primo sistema (5.27) con le rispettive quantità indicate nella seconda colonna della tabella 5.1, si ottiene un sistema identico alle (5.28). Segue quindi che la soluzione del sistema (5.28) è duale della soluzione del sistema (5.27), nel senso che la soluzione del sistema (5.28) può essere ottenuta da quella del primo sistema operando le trasformazioni riportate in Tab. 5.1.

Applicando il teorema di dualità è quindi possibile calcolare il campo irradiato da un dipolo magnetico elementare partendo dalle espressioni del campo irradiato dal dipolo elettrico elementare. Infine, utilizzando l'equivalenza di Ampere, si determinano le espressioni del campo irradiato da una spira elementare.

Sistema di sorgenti elettriche	Sistema di sorgenti magnetiche
$\underline{J}_1$	$\underline{J}_{m2}$
ρ_1	ρ_{m2}
ε_1	μ_2
μ_1	ε_2
$\underline{E}_1$	$\underline{H}_2$
$\underline{H}_1$	$-\underline{E}_2$

Tab. 5.1

§ 5.5 - PARAMETRI DI UN'ANTENNA IN TRASMISSIONE

Da un punto di vista pratico, per facilitare al progettista di un collegamento radio la scelta dell'antenna, è necessario caratterizzare quest'ultima in modo semplice, per mezzo di parametri numerici e di diagrammi.

Un primo parametro caratteristico è l'espressione del campo irradiato dall'antenna a grande distanza da essa (generalmente si fa riferimento al campo elettrico):

$$\underline{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = \underline{E}_\infty(r, \theta, \phi) \quad (5.29)$$

dove il limite $r \rightarrow \infty$ serve per indicare che la (5.29) vale nella regione di campo lontano dell'antenna.

Risulta però conveniente normalizzare tale campo rispetto ad una qualche grandezza; qui di seguito verranno presentati due importanti parametri caratteristici di un'antenna in trasmissione, l'altezza efficace ed i diagrammi di irradiazione, derivanti da due diverse normalizzazioni del campo irradiato in zona lontana.

5.5.1. Altezza efficace.

Un primo tipo di normalizzazione è conveniente se nell'antenna (o nel sistema di antenne) sono facilmente individuabili dei morsetti ai quali si possa misurare una corrente di riferimento I_0 (o anche una tensione di riferimento V_0). E' questo ad esempio il caso delle antenne filiformi. Per esse è naturale assumere come corrente di riferimento quella di alimentazione (corrente di ingresso). In tali condizioni si pone:

$$\underline{E}_\infty(r, \theta, \phi) = j\zeta \frac{I_0 \underline{h}(\theta, \phi)}{2\lambda r} e^{-j\beta r}. \quad (5.30)$$

La funzione vettoriale $\underline{h}(\theta, \phi)$, che dimensionalmente è una lunghezza (vedi dipolo elettrico), prende il nome di "altezza efficace". Si noti inoltre che $h_r = 0$, essendo l'altezza efficace proporzionale al campo irradiato nella regione di campo lontano in cui l'onda elettromagnetica è localmente piana. Essa descrive completamente il campo irradiato dall'antenna. Per il dipolo elettrico elementare di lunghezza Δz risulta:

$$\underline{h} = \Delta z \sin \theta \underline{i}_\theta \quad (5.31)$$

Per un'antenna filiforme di lunghezza complessiva $2l$ si ha invece:

$$\underline{h} = \sin \theta \left(\int_{-l}^{+l} \frac{I(z)}{I_0} e^{j\beta z \cos \theta} dz \right) \underline{i}_\theta. \quad (5.32)$$

In generale $\underline{h}$ è una funzione vettoriale complessa, dipendente da θ , da ϕ e dalla frequenza. Ai fini pratici, molto spesso per altezza efficace in trasmissione si intende il modulo della funzione vettoriale $\underline{h}$ precedentemente definita, valutato nella direzione di massima irradiazione (dato che, per i calcoli relativi ad un collegamento, l'antenna si suppone utilizzata nella direzione di massima irradiazione).

Per un'antenna filiforme corta (è dipolo elettrico corto), la distribuzione di corrente è di tipo triangolare (vedi formula 5.16) ed essendo l'antenna elettricamente corta si ha che $\beta z \ll 1$, per cui nella (5.32) si può porre $\exp\{j\beta z \cos \theta\} \cong 1$ e quindi si ottiene:

$$h_\theta = l \sin \theta \quad (5.33)$$

In questo caso quindi h_θ non dipende dalla frequenza. Nella direzione di massima irradiazione si ha:

$$(h_\theta)_M = l \quad (5.34)$$

e tenendo conto della (5.32) per $\theta = \pi/2$ si ha:

$$I_0 \cdot (h_\theta)_M = \int_{-l}^{+l} I(z) dz \quad (5.35)$$

Si vede immediatamente che, per l'antenna filiforme corta, l'altezza efficace moltiplicata per il valore massimo della corrente fornisce l'area sottesa dalla distribuzione di corrente $I(z)$. Quindi, in questo caso, l'altezza efficace valutata nella direzione di massima irradiazione rappresenta l'altezza di un dipolo elementare, che attraversato da una corrente costante pari a quella di alimentazione, genera, nella direzione di massima irradiazione, lo stesso campo dell'antenna filiforme (Fig. 5.10a).

Per un dipolo a mezz'onda, dalla (5.17), si ha:

$$h_\theta = \sin \theta \int_{-l}^{+l} \cos \beta z \exp\{j\beta z \cos \theta\} dz,$$

ossia

$$h_\theta = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\beta \sin \theta} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (5.36)$$

Nella direzione di massima irradiazione si ha:

$$(h_{\theta})_M = h_{\theta} \left(\theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{\beta} = \frac{\lambda}{\pi} \cong 0,31831\lambda \quad (5.37)$$

In tale direzione si può interpretare $(h_{\theta})_M$ come l'altezza del dipolo elementare equivalente che, percorso da I_0 , irradia lo stesso campo nella direzione di massima irradiazione (Fig. 5.10b).

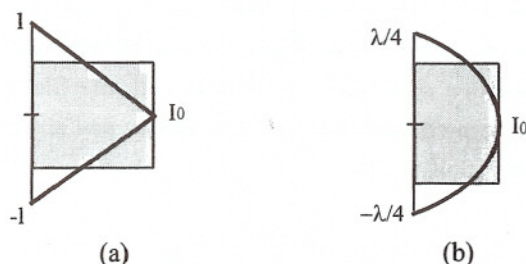


Fig. 5.10 - Aree sottese dalla distribuzione di corrente su un dipolo elettrico corto (a) e su un'antenna a mezz'onda (b).

Con considerazioni analoghe si riesce a ricavare che l'altezza efficace di una spira elementare con il proprio asse parallelo all'asse z vale:

$$\underline{h} = -j\beta S \sin \theta \underline{i}_{\phi}.$$

dove $\beta = 2\pi/\lambda$, e $S = \pi R^2$ è l'area sottesa dalla spira. Si noti come, in questo caso, l'altezza efficace è disposta lungo $\underline{i}_{\phi}$. Si sottolinea, infine, che un'antenna filare parallela all'asse z irradia un campo polarizzato linearmente lungo $\underline{i}_{\theta}$, mentre una spira elementare con asse parallelo all'asse z irradia un campo polarizzato linearmente lungo $\underline{i}_{\phi}$.

5.5.2. Diagrammi di irradiazione.

Quando non sia possibile individuare una corrente o una tensione di riferimento (come accade ad esempio per le antenne alimentate in guida d'onda), si preferisce normalizzare il campo a grande distanza rispetto all'ampiezza del campo irradiato dalla stessa antenna in una direzione di riferimento (θ_0, ϕ_0) (generalmente quella di massima irradiazione). Si ha:

$$\underline{E}(r \rightarrow \infty, \theta, \phi) = \underline{E}_{\infty}(r, \theta, \phi) = E_{\theta}(\theta, \phi) \underline{i}_{\theta} + E_{\phi}(\theta, \phi) \underline{i}_{\phi}. \quad (5.38)$$

La normalizzazione può essere effettuata componente per componente, dividendo il modulo di ciascuna componente di campo lontano (E_{θ} o E_{ϕ}) per i valori massimi

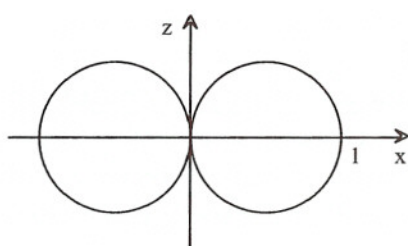
assunti dagli stessi moduli delle due componenti, rispettivamente. Un diagramma d'irradiazione viene in generale riferito ad un sistema di coordinate sferiche centrato in un punto opportuno dell'antenna, detto centro di fase. Riportando dal centro dell'antenna, in coordinate polari, i moduli normalizzati delle componenti E_θ ed E_ϕ , si individuano i relativi "solidi di radiazione". Questi ultimi ci consentono di avere una rappresentazione grafica immediata delle caratteristiche radiative dell'antenna. La rappresentazione grafica del solido di radiazione può essere data in assionometria o mediante più sezioni (a $\theta = \text{cost.}$ o a $\phi = \text{cost.}$). Queste sezioni prendono il nome di "diagrammi di irradiazione in campo". Ovviamente è possibile tracciare il diagramma di irradiazione per qualsiasi tipo di antenna, ivi comprese quelle filari, che abbiamo caratterizzato mediante l'altezza efficace. Nel caso ad esempio dell'antenna filare corta ($l \ll \lambda$, dipolo elettrico corto), si ha:

$$\underline{E}_\infty(r, \theta, \phi) = j\zeta \frac{I_0 l \sin \theta}{2\lambda r} e^{-j\beta r} \underline{i}_\theta$$

per cui il corrispondente diagramma di irradiazione è diverso da zero solo per la componente lungo $\underline{i}_\theta$, componente che inoltre è funzione soltanto di θ :

$$|f_\theta(\theta)| = \frac{|E_\theta|}{|E_\theta(\theta = \pi/2)|} = \sin \theta, \quad (5.39)$$

dove si è messo in evidenza che il massimo di $|E_\theta|$ si verifica in corrispondenza di $\theta = \pi/2$. Riportando il modulo di $f_\theta(\theta)$ su un diagramma polare, si ottiene il solido di radiazione. Osserviamo che, dal momento che f_θ non dipende da ϕ , si avrà simmetria di rivoluzione intorno all'asse z . Il diagramma di radiazione sul piano $\phi = 0$ (piano xz) è riportato in Fig. 5.11. In pratica si hanno due circonferenze tangenti all'asse z .



$$\begin{aligned} \text{se } \theta = 0 \quad & \frac{E_\theta}{E_{\theta_{\text{MAX}}}} = 0 \\ \text{se } \theta = \frac{\pi}{6} \quad & \frac{E_\theta}{E_{\theta_{\text{MAX}}}} = \frac{1}{2} \\ \text{se } \theta = \frac{\pi}{4} \quad & \frac{E_\theta}{E_{\theta_{\text{MAX}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{se } \theta = \frac{\pi}{2} \quad & \frac{E_\theta}{E_{\theta_{\text{MAX}}}} = 1 \end{aligned}$$

Fig. 5.11 - Diagramma di irradiazione sul piano di elevazione per un dipolo elettrico corto.

Nel piano xy ($\theta = \pi/2$) invece, il diagramma di radiazione è una circonferenza di raggio unitario (Fig. 5.12). Tale diagramma è uguale a quello di una antenna omnidirezionale, solo che per l'antenna omnidirezionale il diagramma è lo stesso qualunque sia il piano scelto, in altre parole il solido di radiazione per una antenna omnidirezionale è dato da una sfera di raggio unitario.

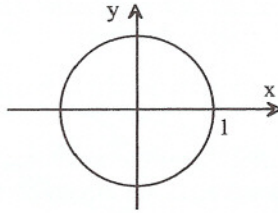


Fig. 5.12 - *Diagramma di irradiazione sul piano di azimuth per un dipolo elettrico corto.*

● Vediamo adesso il diagramma di radiazione di un'antenna filare a mezz'onda, in un piano a ϕ costante. Anche in questo caso, in base alla (5.19), il campo lontano generato dall'antenna ha solo una componente lungo i_θ , che risulta indipendente da ϕ , e il valore massimo di $|E_\theta|$ si ottiene per $\theta = \pi/2$. Il diagramma di irradiazione è dunque diverso da zero solo per la componente E_θ , che non dipende da ϕ (c'è dunque simmetria di rivoluzione intorno all'asse z):

$$|f_\theta(\theta)| = \frac{|E_\theta|}{|E_\theta(\theta = \pi/2)|} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (5.40)$$

Il diagramma di radiazione per un'antenna filare a $\lambda/2$ è simile a quello del dipolo elettrico corto, ma è più schiacciato; per mettere in evidenza questa caratteristica in Fig. 5.13 sono sovrapposti i diagrammi d'irradiazione sul piano di elevazione di un dipolo a mezz'onda (linea continua) e di un dipolo corto (linea tratteggiata).

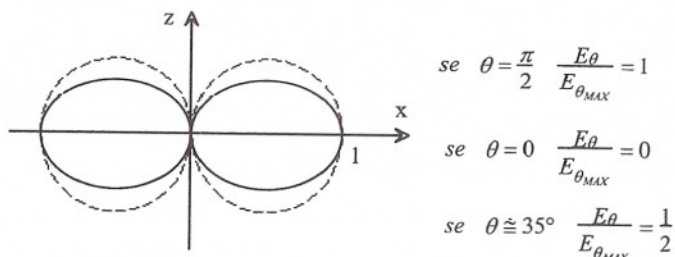


Fig. 5.13 - Confronto fra i diagrammi di irradiazione sul piano di elevazione di un dipolo a mezz'onda (curva continua) e di un dipolo corto (curva tratteggiata).

Ad esempio, è possibile verificare che il punto $|E_{\theta}|/|E_{\theta}|_{\max} = 1/2$ corrisponde ad un valore di θ circa pari a 35° , mentre nel caso del dipolo corto tale valore si ottiene per $\theta = 30^{\circ}$, il che conferma che l'antenna a mezz'onda è più direttiva (diagramma d'irradiazione più stretto) del dipolo corto. Nel piano xy il diagramma è omnidirezionale. E' importante infine osservare che se il campo lontano ha due componenti, allora per caratterizzare l'antenna occorre sia un diagramma d'irradiazione per ogni componente, oppure direttamente per il campo totale $|\underline{E}|$.

Vediamo ora di definire le principali caratteristiche di un diagramma d'irradiazione. Un tipico diagramma di irradiazione è riportato in Fig. 5.14, in forma polare e con una scala di riferimento di tipo lineare.

Si definisce lobo principale d'irradiazione il lobo del diagramma contenente la direzione di massima irradiazione. Ci sono poi una serie di "lobi secondari" o "lobi laterali

Un parametro importante è il livello relativo dei lobi secondari ("relative side lobe level"), che è dato dal rapporto fra il valore assunto dal diagramma di radiazione nel massimo di un lobo secondario rispetto al valore assunto dal diagramma nella direzione di massima irradiazione. Il valore più grande di questo rapporto su tutto il diagramma è il cosiddetto "massimo livello relativo dei lobi laterali" (*maximum relative side lobe level*), indicato con la sigla SLL. Esso è fornito spesso in dB e rappresenta un'indicazione di come la potenza irradiata è concentrata nel lobo principale:

$$SLL_{dB} = 20 \log \frac{|f_{\theta}|_{\text{lobo laterale}}}{|f(\theta)|_{\text{direz. di max irradiaz.}}} \quad (5.41)$$

Altro parametro importante è l'angolo di apertura a metà potenza (*Half Power Beamwidth* - *HPBW* o θ_{3dB}), che è definito come l'angolo compreso fra le due direzioni del lobo principale in corrispondenza di cui la densità di potenza irradiata risulta diminuita della metà (-3 dB) rispetto al suo valore nella direzione di massima irradiazione. Nel diagramma di campo il modulo del campo si riduce di $1/\sqrt{2}$ rispetto al valore nella direzione di massima irradiazione.

Ultimo parametro da mettere in evidenza è l'angolo di apertura fra i primi due nulli del diagramma di radiazione *BWFN* (*Beam Width between First Nulls*).

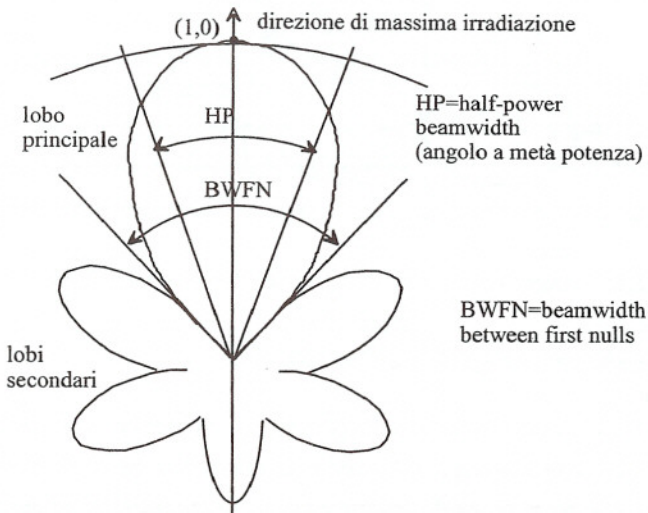


Fig. 5.14 - Parametri caratteristici di un diagramma di irradiazione.

Valutiamo l'angolo a metà potenza per una antenna filiforme corta. Esso corrisponde alla larghezza angolare del fascio fra le direzioni per cui il campo si riduce di $1/\sqrt{2}$. Il diagramma normalizzato è $|E_\theta|/|E_\theta|_{\max} = \sin \theta$ e dunque si ha un valore $1/\sqrt{2}$ per $\theta = 45^\circ$ (Fig. 5.15), da cui $HPBW = 90^\circ$.

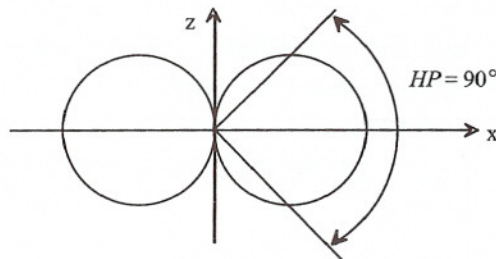


Fig. 5.15 - Angolo di apertura a metà potenza per un dipolo elettrico corto.

Vediamo ora l'antenna a $\lambda/2$; in base alla (5.40), dobbiamo trovare il valore di θ per cui:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) / \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si trova che ciò si verifica per $\theta \cong 51^\circ$; ovviamente, vista la simmetria del diagramma, si ha che anche per $\theta = 180^\circ - 51^\circ$ la relazione precedente è ancora verificata. La situazione è dunque quella riportata in Fig. 5.16, con $\text{HPBW} \cong 78^\circ$.

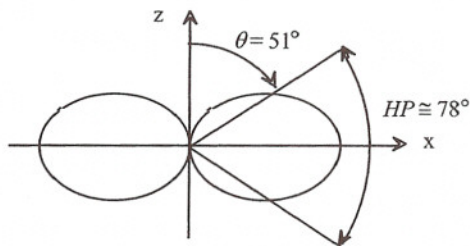


Fig. 5.16 - Angolo a metà potenza per un dipolo a mezz'onda.

5.5.3. Direttività, guadagno ed efficienza d'irradiazione.

La direttività è un altro importante parametro caratteristico di un'antenna in trasmissione: essa descrive l'antenna relativamente alla sua capacità di concentrare la potenza irradiata nell'intorno di una determinata direzione (rispetto ad un'antenna ideale isotropica). Ricordiamo che la potenza irradiata può essere valutata calcolando il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie sferica con raggio r molto grande rispetto alla lunghezza d'onda e alle dimensioni dell'antenna. Supponiamo che l'antenna sia posta nell'origine del un sistema di riferimento (Fig. 5.17). Si ha dunque:

$$P_r = \Re \left\{ \frac{1}{2} \oint_S (\underline{E} \times \underline{H}^*) \cdot \underline{i}_r dS \right\}, \quad (5.42)$$

Dal momento che i campi nella regione di campo lontano hanno una struttura di onda localmente piana su S , la (5.42) può essere così riscritta:

$$P_r = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \oint_S \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{\zeta} dS \right), \quad (5.43)$$

dove P_r rappresenta una potenza media attiva e si esprime in Watt, e $r \rightarrow \infty$ indica che la sfera S deve trovarsi nella regione di campo lontano dell'antenna.

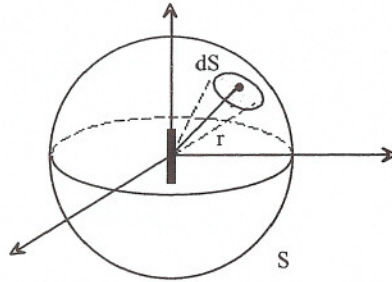


Fig. 5.17 - Elemento infinitesimo dS della superficie della sfera.

Consideriamo un punto generico di osservazione $P(r, \theta, \phi)$, nella regione di campo lontano, si definisce direttività nella direzione (θ, ϕ) il rapporto tra la densità di potenza irradiata nel punto P dall'antenna in esame e la densità di potenza media nello stesso punto:

$$D(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} |E(r, \theta, \phi)|^2}{\frac{P_r}{4\pi r^2}}. \quad (5.44)$$

In particolare, il numeratore della (5.44) rappresenta la parte reale del vettore di Poynting generato dall'antenna in esame nel punto di osservazione a grande distanza P , ossia una densità di potenza attiva per unità di superficie (W/m^2). Il denominatore della (5.44) rappresenta invece la densità media di potenza attiva sempre nel punto P ; essa può essere interpretata come quella densità di potenza per unità di superficie che sarebbe prodotta in P qualora si utilizzasse un'antenna isotropica radiante complessivamente la stessa potenza P_r . Spesso si intende per direttività il valore assunto dalla funzione direttività $D(\theta, \phi)$ nella direzione di massimo irraggiamento, cioè $D(\theta_{\max}, \phi_{\max}) = D_M$. La direttività massima è un numero maggiore di uno, dal momento che non esistono antenne completamente isotrope, per le quali risulterebbe $D(\theta, \phi) = 1$. E' importante osservare che la conoscenza della direttività di un'antenna in una generica direzione (θ, ϕ) consente il calcolo immediato della densità di potenza irradiata nella stessa direzione ed a grande distanza, quando sia nota la potenza totale irradiata (5.43). Si ha infatti:

$$S(r, \theta, \phi) = D(\theta, \phi) \frac{P_r}{4\pi r^2}. \quad (5.45)$$

E' immediato verificare che se l'antenna presenta ad esempio una direttività pari a 5 in una certa direzione, essa è in grado di produrre nella stessa direzione, a distanza r nella zona di campo lontano, una densità di potenza attiva che risulta pari a cinque volte quella prodotta da un'antenna isotropa che lavori a parità di potenza complessivamente irradiata. Spesso la direttività è espressa in dB come $D(\theta, \phi)_{dB} = 10 \text{Log } D(\theta, \phi)$.

In alternativa alla direttività si considera a volte la funzione guadagno di potenza dell'antenna:

$$G(\theta, \phi) = D(\theta, \phi) \frac{P_r}{P_t}, \quad (5.46)$$

dove P_r è data dalla (5.43) e P_t rappresenta la potenza attiva consegnata dal generatore ai morsetti d'ingresso dell'antenna (potenza trasmessa). Nel caso di antenne senza perdite si ha $P_r = P_t$ e quindi le funzioni guadagno e direttività coincidono. In presenza di perdite sarà invece $G(\theta, \phi) < D(\theta, \phi)$.

La funzione guadagno $G(\theta, \phi)$ può anche essere definita come il rapporto tra la potenza che dovrebbe essere complessivamente irradiata da un'antenna isotropa per creare l'intensità di campo $|E(r, \theta, \phi)|$ a distanza r , nella regione di campo lontano, e la potenza attiva che si deve invece fornire ai morsetti di ingresso dell'antenna oggetto di studio per creare, in direzione (θ, ϕ) , la stessa intensità di campo $|E(r, \theta, \phi)|$ alla stessa distanza:

$$G(\theta, \phi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{\zeta} 4\pi r^2}{P_t}, \quad (5.47)$$

dove la quantità:

$$\left(\frac{1}{2} \frac{|E(r, \theta, \phi)|^2}{\zeta} 4\pi r^2 \right)$$

rappresenta proprio la potenza complessivamente irradiata da un'antenna isotropa per creare un campo di intensità $|E(r, \theta, \phi)|$ a distanza r . Spesso per guadagno d'antenna si intende il valore massimo G_M , assunto dalla funzione $G(\theta, \phi)$ in corrispondenza della direzione di massimo irraggiamento. Anche la funzione guadagno viene a volte espressa in dB come $G(\theta, \phi)_{dB} = 10 \text{Log } G(\theta, \phi)$.

Il rapporto tra guadagno e direttività prende il nome di "rendimento d'antenna" o "efficienza d'irradiazione":

$$\eta = \frac{G}{D} = \frac{P_r}{P_r + P_d}, \quad (5.48)$$

dove P_r è la potenza totale irradiata, mentre P_d è la potenza dissipata sull'antenna per effetto Joule o a causa di perdite nelle parti dielettriche dell'antenna.

L'efficienza di radiazione può anche essere espressa in termini di altri due importanti parametri, la resistenza di radiazione R_r e la resistenza di perdita R_p , che vengono definite come quelle resistenze che, attraversate dalla corrente di alimentazione dell'antenna I_0 , dissipano rispettivamente una potenza uguale alla potenza complessivamente irradiata ed a quella dissipata per sull'antenna. In formule risulta:

$$P_r = \frac{1}{2} R_r |I_0|^2, \quad (5.49)$$

$$P_d = \frac{1}{2} R_p |I_0|^2, \quad (5.50)$$

per cui si può scrivere:

$$\eta = \frac{R_r}{R_r + R_p}. \quad (5.51)$$

Per quanto riguarda l'impedenza d'ingresso dell'antenna essa è costituita anche dalla reattanza d'ingresso X_{in} del, che tiene conto dell'energia immagazzinata sotto forma di campi elettrici e magnetici nella regione di spazio circostante l'antenna. L'impedenza d'ingresso di una antenna è costituita dalla serie della resistenza di irradiazione R_r , della resistenza di perdita R_p e della reattanza d'ingresso X_{in} ; essa è l'impedenza che si potrebbe misurare con un impedenzimetro vettoriale ai morsetti d'ingresso dell'antenna.

Esempio applicativo: calcolo della resistenza di irradiazione e della direttività di un dipolo elettrico corto

Per calcolare la resistenza di irradiazione R_r di un dipolo elettrico si considera il campo irradiato nella regione di campo lontano:

$$\underline{E} = j\zeta \frac{I_0 l}{2\lambda r} \sin \theta e^{-jkr} \underline{i}_\theta,$$

A tale campo è associabile una densità di potenza pari a

$$S = \frac{1}{2\zeta} |E|^2 = \frac{1}{2} \zeta \frac{|I_0|^2 l^2}{4\lambda^2 r^2} \sin^2 \theta,$$

La potenza globalmente irradiata risulta quindi

$$\begin{aligned} P_r = \iint_s S dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{8} \zeta \frac{|I_0|^2 l^2}{\lambda^2 r^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\phi d\theta =, \\ &= \frac{\zeta}{8} \frac{|I_0|^2 l^2}{\lambda^2} 2\pi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\pi}{3} \zeta |I_0|^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \end{aligned}$$

Nel calcolo precedente si è sfruttato il fatto che $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$, che $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ e

$$\text{che } \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4/3^1.$$

Secondo la definizione di resistenza di irradiazione (5.49) si ottiene che, per un dipolo elettrico corto, tale resistenza vale:

$$R_r = \frac{2}{3} \pi \zeta \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2.$$

Si noti la dipendenza dalla frequenza tramite la lunghezza d'onda λ .

Una volta nota la potenza irradiata, è possibile poi calcolare la direttività sfruttando la definizione (5.44). In particolare, sia per il dipolo elettrico elementare che per quello corto risulta:

$$D(\theta, \phi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta.$$

Nella direzione di massima irradiazione $D_M = 1.5$ ($D_M \text{ dB} \cong 1.76 \text{ dB}$).

Per l'antenna a $\lambda/2$ risulta $R_r \cong 73.13 \Omega$ e

$$D(\theta, \phi) \cong 1.642 \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta}.$$

Nella direzione di massima irradiazione $D_M \cong 1.642$ ($D_M \text{ dB} \cong 2.148 \text{ dB}$).

¹ Basta infatti operare il cambiamento di variabile $t = \cos \theta$, per cui $dt = -\sin \theta d\theta$ ed esprimere $\sin^3 \theta d\theta$ come $\sin^2 \theta \sin \theta d\theta = -(1-t^2)dt$.

§ 5.6 - TEOREMA DELLE IMMAGINI

Fino ad ora abbiamo analizzato le antenne supponendo che esse fossero poste nello spazio libero; in realtà le antenne operano in presenza di altre strutture e la presenza di un ostacolo, specialmente quando esso è vicino all'elemento radiante, può alterare in modo significativo le proprietà radiative del sistema d'antenna (impedenza di ingresso e diagramma d'irradiazione).

Una situazione di estremo interesse è quella in cui un'antenna irradia in presenza di un piano metallico (piano di massa). Anche se un piano di massa infinito in pratica non è realizzabile, esso rappresenta una buona approssimazione per l'analisi di situazioni in cui un'antenna irradia in presenza di un piano conduttore di dimensioni grandi rispetto a quelle dell'antenna. Osserviamo, per esempio, che le antenne operano nella maggior parte dei casi in presenza del terreno e quest'ultimo si comporta come un mezzo con perdite, la cui conducibilità σ aumenta al crescere della frequenza. Le sue caratteristiche elettriche possono inoltre dipendere, oltre che dalla costituzione del terreno stesso, anche dalle condizioni ambientali, dall'umidità, dalla presenza di ghiaccio, etc. Per certe frequenze però si può supporre, in prima approssimazione, che il terreno agisca come un piano di massa perfettamente conduttore (a volte per realizzarlo si dispongono delle reti metalliche con maglie piccole rispetto alla lunghezza d'onda λ).

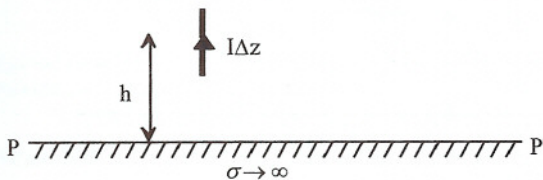


Fig. 5.18 - *Dipolo elettrico elementare su un piano di massa perfettamente conduttore.*

Consideriamo, per quanto detto, il caso particolare di un dipolo elettrico elementare posto in presenza di un piano di massa perfettamente conduttore e orientato perpendicolarmente al piano stesso (Fig. 5.18). Siamo interessati a determinare i campi $\underline{E}$ ed $\underline{H}$ al di sopra del piano PP' . Il problema può essere ricondotto allo studio di un sistema equivalente come quello di Fig. 5.19, dove due sorgenti (la sorgente reale e la sorgente immagine) irradiano in spazio libero. In particolare, è possibile dimostrare che i due problemi soddisfano le stesse condizioni al contorno sul piano PP' cioè le componenti tangenziali di campo elettrico sono in entrambi i casi nulle. Una volta che si sia dimostrato questo, il problema nel semispazio superiore avrà la stessa soluzione di

quello di partenza rappresentato in Fig. 5.18 perché si risolve un sistema di equazioni differenziali (le equazioni da risolvere nel nostro caso sono quelle di Maxwell o l'equazione d'onda) con le medesime condizioni al contorno sul piano PP' e con le stesse sorgenti (quelle reali poste al di sopra dello stesso piano). Ora, per l'unicità della soluzione di una equazione differenziale una volta che siano state fissate le condizioni al contorno e le sorgenti, le due soluzioni sono coincidenti.

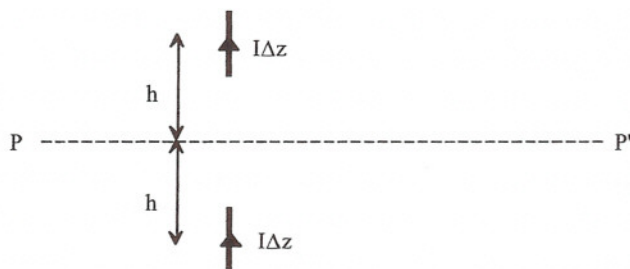


Fig. 5.19 - Sorgente reale e sorgente immagine

Tale sistema, che produce nel semispazio sopra il piano PP' gli stessi campi del sistema di Fig. 5.18, presenta una sorgente immagine nel semispazio inferiore, a distanza h da PP' pari alla distanza da PP' della sorgente reale; questa sorgente immagine è costituita da un dipolo elementare con la stessa polarità di quello reale.

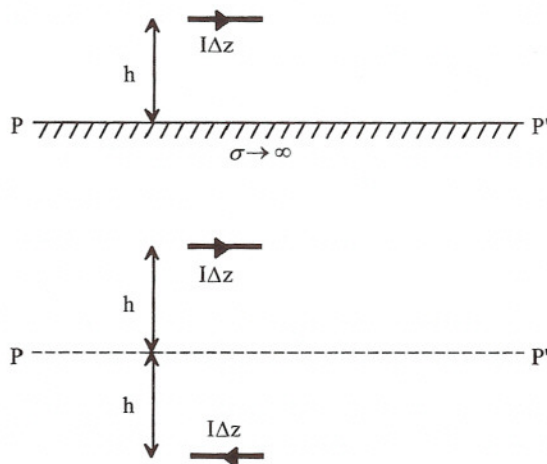


Fig. 5.20 - Sorgente immagine di un dipolo elementare disposto orizzontalmente.

Si può quindi concludere che il principio che sta alla base del teorema delle immagini è il seguente: i campi irradiati da una sorgente in presenza di un piano

perfettamente conduttore possono essere determinati sommando i contributi di campo dovuti alla sorgente primaria con quelli provenienti dalla sorgente immagine, considerando entrambe le sorgenti irradianti nello spazio libero. Ovviamente i due sistemi (sorgente reale in presenza del piano di massa - sorgente reale più sorgente immagine in spazio libero) si dicono *equivalenti* ai fini della determinazione del campo nel solo semispazio contenente la sorgente reale (le correnti sui due piani sono in opposizione di fase).

Se il dipolo è orientato parallelamente al piano perfettamente conduttore (Fig. 5.20) allora l'immagine è ancora equidistante dal piano ma questa volta è diretta in verso opposto rispetto alla sorgente reale.

I possibili casi di irradiazione in presenza di un piano di massa perfettamente conduttore dispocoincidente con il piano PP' sono riportati sinteticamente in Fig. 5.21, dove viene considerato anche il caso di elementi di corrente magnetica.

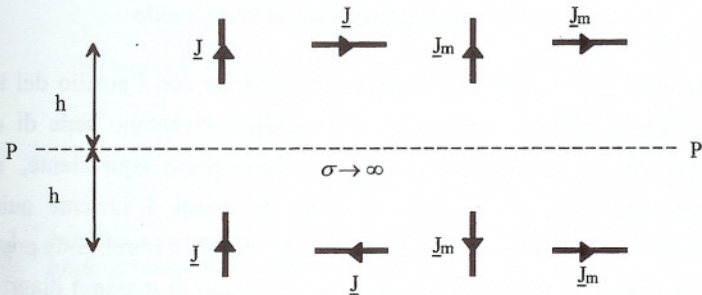


Fig. 5.21 - Sorgenti immagine per dipoli elementari elettrici e magnetici su un piano di massa perfettamente conduttore.

Per giustificare i versi delle correnti magnetiche sui dipoli immagine si può immaginare ciascun elemento di corrente magnetica realizzato mediante una spirale di corrente elettrica equivalente e applicare a questa corrente i risultati dell'analisi precedente. È evidente che per una spirale reale con corrente in verso per esempio orario, si ha una spirale immagine con corrente in verso antiorario (Fig. 5.22), ovvero le correnti magnetiche si dipoli elementari devono essere in opposizione di fase..

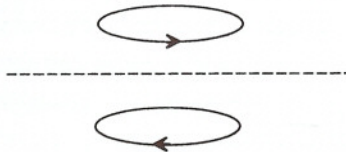


Fig. 5.22 - Sorgente immagine di una spirale elementare di corrente.

5.6.1. Antenne a stilo o marconiane.

Le antenne marconiane, costituite da un conduttore verticale ed alimentate alla base applicando una tensione rispetto a massa, sono molto utilizzate per la radiodiffusione. In Fig. 5.23 è rappresentata un'antenna marconiana di altezza pari a $\lambda/4$, detta anche monopolo filare verticale su piano di massa o antenna a stilo.

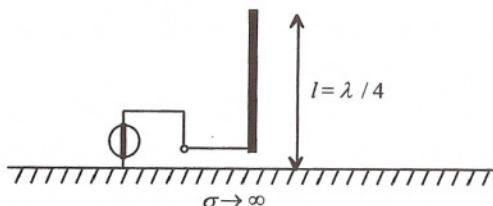


Fig. 5.23 - Configurazione di una antenna a stilo.

Le caratteristiche di questa antenna possono essere studiate con l'ausilio del teorema delle immagini. Infatti, tenendo conto che fili metallici diventano sede di correnti indotte, possiamo ricondurci a studiare una configurazione equivalente, attenuata considerando l'immagine del filo rispetto al piano di massa. L'insieme quindi del monopolo originale e della sua immagine equivale a un dipolo a mezz'onda posto nello spazio libero e pertanto, nel semispazio al di sopra del piano di massa, i diagrammi di radiazione sono gli stessi di quelli di un dipolo a mezz'onda in spazio libero. In Fig. 5.24 viene appunto rappresentata l'antenna marconiana a $\lambda/4$, con la sua immagine nel semispazio al di sotto del piano di massa e con il diagramma di irradiazione relativo ad un qualunque piano verticale passante per l'antenna.

Osserviamo che l'irradiazione è massima nella direzione parallela al terreno e diminuisce, su piani verticali, fino ad annullarsi nella direzione verticale; nel piano orizzontale il diagramma di radiazione è costante (omnidirezionale). Per il monopolo, essendo la potenza irradiata distribuita su una semisfera anziché su una sfera come per il dipolo a mezz'onda in spazio libero, la potenza irradiata dal monopolo è uguale alla metà di quella che irradia il dipolo a mezz'onda equivalente in spazio libero per produrre, in un punto dello spazio a grande distanza dall'antenna, la stessa densità di potenza e quindi lo stesso campo. Di conseguenza, il guadagno del monopolo verticale è doppio di quello del corrispondente dipolo a mezz'onda in spazio libero ($D^{mon} = 2D^{dip}$), mentre la resistenza di radiazione è uguale alla metà di quella del dipolo a mezz'onda ($R_r^{mon} = R_r^{dip}/2$).

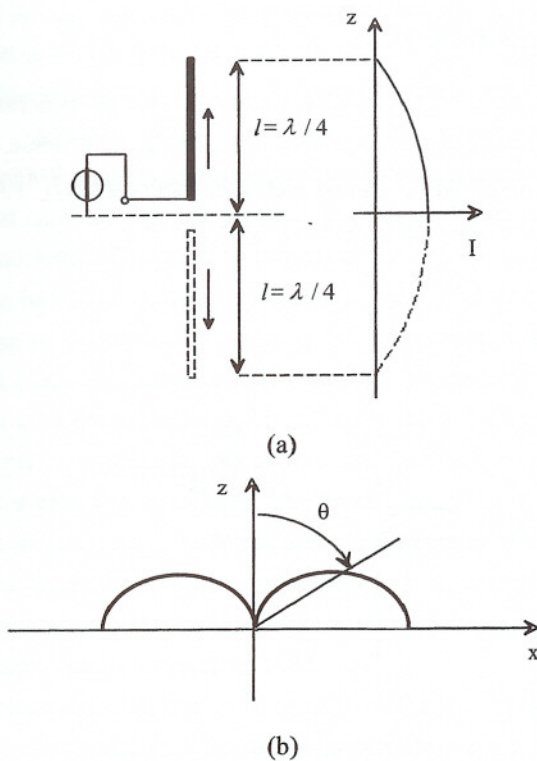


Fig. 5.24 - *Antenna a stilo verticale: a) dipolo equivalente in spazio libero; b) diagramma d'irradiazione.*

§ 5.7 - ANTENNE IN RICEZIONE

Gli stessi dispositivi che vengono utilizzati per la generazione di onde elettromagnetiche vengono utilizzati anche per la ricezione delle stesse. Per focalizzare le idee facciamo riferimento ad un campo elettromagnetico $(\underline{E}^i; \underline{H}^i)$ con struttura di onda piana, incidente su un'antenna filiforme (Fig. 5.25).

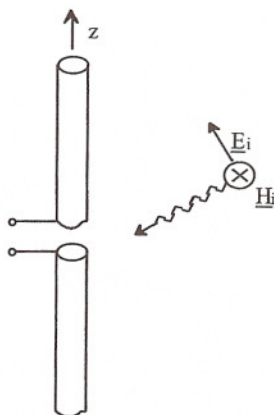


Fig. 5.25 - Antenna filare in ricezione.

Il campo incidente $(\underline{E}^i; \underline{H}^i)$ è per definizione il campo che esisterebbe in tutto lo spazio se l'antenna filiforme fosse rimossa (campo imperturbato): in generale esso è diverso da zero nella regione dello spazio occupata dal filo. Supponiamo che il filo sia costituito da materiale perfettamente conduttore; in tal caso il campo elettromagnetico all'interno del filo deve essere nullo, inoltre deve essere nulla la componente tangenziale del campo elettrico sulla superficie del filo. Queste condizioni non possono essere verificate dal solo campo incidente; deve pertanto generarsi un altro campo $(\underline{E}^d; \underline{H}^d)$, che è detto "campo diffratto" (o diffuso). Esso è dovuto alla presenza dell'"ostacolo" antenna. Il campo totale $(\underline{E}, \underline{H})$ è dato dalla somma del campo incidente e di quello diffratto:

$$\underline{E} = \underline{E}^i + \underline{E}^d,$$

$$\underline{H} = \underline{H}^i + \underline{H}^d.$$

Il campo totale deve verificare le condizioni precedentemente dette; in particolare dovrà essere nulla la componente tangenziale del campo elettrico totale $\underline{E}$ sulla superficie dell'antenna. Sulla superficie del filo è inoltre indotta una corrente superficiale elettrica, necessaria proprio perché siano verificate le condizioni al contorno sulla superficie

dell'antenna, dato che la componente tangenziale del campo magnetico è discontinua (il campo magnetico totale $\underline{H}$ è nullo all'interno del filo). In particolare il campo diffratto può considerarsi generato da tale distribuzione di corrente.

Il campo elettrico totale sarà non nullo all'interno del *gap* (zona centrale dell'antenna). Il campo elettromagnetico incidente genera quindi una differenza di potenziale V_a ai capi del *gap* dell'antenna. V_a è detta "tensione a vuoto" dato che essa è indotta ai morsetti dell'antenna in assenza di carichi esterni. Nella condizione "a vuoto" la corrente indotta ai morsetti d'antenna è nulla. Nel caso più generale in cui l'antenna sia chiusa su un carico di impedenza Z_L , la corrente ai terminali dell'antenna non è più nulla ma è uguale a quella che scorre su Z_L . In generale, si può affermare che la distribuzione di corrente superficiale che si stabilisce sull'antenna nella condizione "a vuoto" è diversa da quella che si instaura con il carico, di conseguenza i campi diffratti dall'antenna nelle due condizioni sono diversi.

Il processo di ricezione di un'onda elettromagnetica presenta dunque una certa complessità, poichè dipende sia dalle caratteristiche dell'antenna sia dalle condizioni di carico. Ad esso si accompagna un processo di reirradiazione da parte dell'antenna, dipendente anch'esso dalle caratteristiche suddette.

Analogamente alle antenne in trasmissione, anche le antenne in ricezione possono essere caratterizzate in modo diverso a seconda che sia possibile, oppure no, individuare una porta d'ingresso e definire delle correnti e delle tensioni su tale porta. Nel caso in cui ciò sia possibile, il parametro utilizzato per caratterizzare l'antenna è la cosiddetta "altezza efficace in ricezione".

5.7.1 Altezza efficace in ricezione.

Riferiamoci ad esempio ad un'antenna filiforme (le considerazioni che seguono sono però valide in generale). Supponiamo che su di essa incida un'onda piana (o che possa ritenersi tale nella zona occupata dall'antenna), con il campo elettrico polarizzato linearmente lungo l'asse del filo (vedi Fig. 5.26). Supponiamo inoltre che l'antenna sia a "vuoto". Ai capi del *gap* si induce una tensione V_a , "tensione a vuoto" appunto, che dipende dal campo totale presente nel *gap*. Data la linearità del sistema la suddetta tensione indotta è proporzionale al campo incidente (cioè al campo che si avrebbe se l'antenna fosse rimossa). La relazione tra V_a e il campo incidente è la seguente:

$$V_a = -h_r E^i \quad (5.52)$$

dove E^i è il valore del fasore del campo elettrico incidente e la grandezza h_r , che ha le dimensioni di una lunghezza, prende il nome di altezza efficace in ricezione.

Quest'ultima costituisce un fattore di proporzionalità, che permette di passare dal campo elettrico incidente alla tensione indotta ai terminali dell'antenna quando questa è a vuoto.

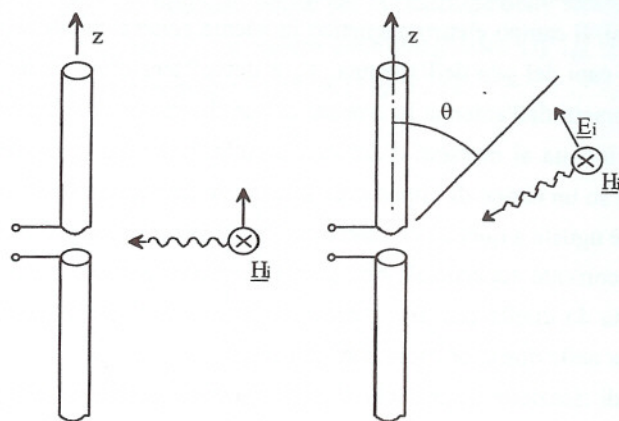


Fig. 5. 28 - Diverse condizioni di illuminazione di un'antenna filare.

La definizione precedente può essere estesa al caso più generale in cui il campo incidente abbia una polarizzazione arbitraria. In tal caso avremo che l'altezza efficace è data da un vettore $\underline{h}_r$, in generale funzione degli angoli θ e ϕ (infatti non è detto che campi incidenti da diverse direzioni inducano la stessa tensione a vuoto ai morsetti d'antenna). Per definizione si pone dunque:

$$V_a = \underline{h}_r(\theta, \phi) \cdot \underline{E}^i, \quad (5.53)$$

dove $\underline{E}^i$ è il fasore del campo elettrico incidente. Ovviamente la (5.53) contiene come caso particolare la (5.52) quando $\underline{E}^i$ è parallelo all'antenna².

Ora, a partire dalla conoscenza dell'altezza efficace in ricezione, è possibile calcolare la tensione indotta ai capi di una generica impedenza di carico Z_L , collegata ai morsetti dell'antenna. Si può infatti determinare un circuito equivalente in ricezione dell'antenna (a tal proposito è opportuno mettere in evidenza che, dato che l'antenna è in generale collegata al carico mediante una linea di trasmissione, i suoi morsetti possono essere identificati con una opportuna sezione della linea di trasmissione stessa). Per calcolare i fasori delle tensioni e delle correnti sul carico Z_L , si può rappresentare l'antenna, operando secondo il teorema di Thevenin, mediante un generatore ideale di tensione e un'impedenza in serie.

² per l'antenna considerata si ha infatti: $\underline{h}_r(\theta = \pi/2) = -h_r \underline{i}_z$.

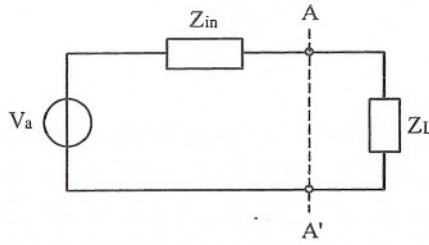


Fig. 5.27 - *Circuito equivalente in ricezione di un'antenna.*

In particolare il generatore ideale di tensione sarà caratterizzato da una tensione pari a quella che si determina ai terminali AA' a circuito aperto ($Z_L \rightarrow \infty$). Per definizione tale tensione coincide quindi con quella indotta "a vuoto" sull'antenna (vedi relazione (5.53)). L'impedenza serie è quella che si vede ai morsetti AA' verso l'antenna, quando tutti i generatori indipendenti sono cortocircuitati. Ciò nel nostro caso significa cortocircuitare tutte le sorgenti che producono il campo elettromagnetico incidente sull'antenna, ovverosia porre $\underline{E}^i = 0$. L'impedenza serie coincide quindi con l'impedenza d'ingresso dell'antenna. La tensione V_L ai capi del carico è data dalla relazione seguente:

$$V_L = \frac{Z_L}{Z_{in} + Z_L} V_a = \frac{Z_L}{Z_{in} + Z_L} \underline{h}_r \cdot \underline{E}^i. \quad (5.54)$$

Si vede quindi come l'altezza efficace sia particolarmente adatta per caratterizzare antenne provviste di morsetti di alimentazione, rispetto a cui sia possibile identificare una tensione e una corrente.

5.7.2. Area efficace.

Un altro parametro utile per caratterizzare le antenne in ricezione è la cosiddetta "area efficace"; tale parametro può essere definito anche per antenne che non presentano morsetti d'ingresso su cui sia possibile individuare una tensione o una corrente (antenne alimentate in guida d'onda). Per definire il parametro "area efficace", consideriamo un'antenna adattata per il massimo trasferimento di potenza al carico (notare che questa condizione non richiede necessariamente la presenza di morsetti di alimentazione su cui poter definire univocamente una tensione). Supponiamo che sull'antenna incida un'onda elettromagnetica piana (o localmente piana); ad essa sarà associato un vettore di Poynting $\underline{S}$ e quindi una densità di potenza data da:

$$S = \frac{1}{2} \frac{|E_i|^2}{\zeta}. \quad (5.55)$$

Sia P_M la potenza attiva fornita al carico nella condizione di adattamento (potenza disponibile). Si definisce "area efficace" A il fattore di proporzionalità (misurato in m^2) che lega la potenza consegnata al carico in condizioni di adattamento di potenza (potenza disponibile) e la densità di potenza espressa dalla (5.55):

$$P_M = AS. \quad (5.56)$$

L'area efficace è dunque una grandezza reale che dipende in generale dalla direzione di ricezione:

$$A = A(\theta, \phi). \quad (5.57)$$

Molto spesso comunque con il termine "area efficace" si intende il valore che la funzione $A(\theta, \phi)$ assume nella direzione di massima ricezione; considerazioni analoghe valgono per il parametro altezza efficace. Ovviamente, i due parametri area efficace e altezza efficace possono essere messi in relazione. Supponiamo che per l'antenna in esame sia definibile l'altezza efficace: vale dunque il circuito equivalente precedentemente determinato (Fig. 5.27) e in tal caso la condizione di adattamento in potenza richiede che l'impedenza di carico Z_L (che in genere rappresenta l'impedenza del carico all'ingresso della linea di trasmissione che lo collega all'antenna) sia pari al complesso coniugato dell'impedenza d'ingresso dell'antenna:

$$Z_L = Z_{in}^*$$

e dunque:

$$R_L + jX_L = R_{in} - jX_{in}.$$

La potenza attiva P fornita al carico è data da:

$$P = \frac{1}{2} R_L |I_L|^2 = \frac{1}{2} R_L \frac{|V_a|^2}{|z_{in} + z_L|^2}$$

e da quest'ultima relazione si ricava:

$$P_M = \frac{1}{2} R_L \frac{|\underline{h}_r \cdot \underline{E}_i|^2}{|Z_{in} + Z_{in}^*|^2} = \frac{1}{2} \frac{|\underline{h}_r \cdot \underline{E}_i|^2}{4R_{in}} = \frac{|V_a|^2}{8R_{in}} \quad (5.58)$$

dove R_{in} è la resistenza d'ingresso dell'antenna.

Combinando le relazioni (5.55), (5.56) e (5.58), si ottiene:

$$A = \frac{\zeta}{4R_{in}} |\underline{h}_r|^2 \frac{|\underline{h}_r \cdot \underline{E}_i|^2}{|\underline{E}_i|^2 |\underline{h}_r|^2}.$$

La quantità:

$$\chi = \frac{|h_r \cdot E_i|^2}{|E_i|^2 |h_r|^2}, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad (5.59)$$

è detta “fattore di depolarizzazione”. In generale dunque si ha:

$$A = \frac{\zeta}{4R_{in}} |h_r|^2 \chi. \quad (5.60)$$

Quando $\underline{E}^i$ risulta proporzionale a $\underline{h}_r^*$, il fattore χ è massimo e vale 1; in tali condizioni si ha “adattamento di polarizzazione” e l’area efficace risulta:

$$A = \frac{\zeta}{4R_{in}} |\underline{h}_r|^2. \quad (5.61)$$

La definizione (5.60) mette in evidenza il fatto che l’area efficace non dipende solo dalle caratteristiche dell’antenna, ma, tramite il fattore di depolarizzazione, anche dalla polarizzazione del campo incidente. In realtà si preferisce per l’area efficace una definizione diversa, che faccia riferimento a condizioni di adattamento sia per il carico che per la polarizzazione. Più in generale si intende quindi per “area efficace dell’antenna” il rapporto tra la potenza attiva erogata al carico e la densità di potenza incidente sull’antenna in condizioni: *i)* di adattamento del carico per massimo trasferimento di potenza ($Z_L = Z_{in}^*$); *ii)* di adattamento di polarizzazione ($\chi = 1$). Con questa nuova definizione, il legame tra area efficace e altezza efficace è dato dalla relazione (5.60) e la potenza disponibile al carico viene espressa nel seguente modo:

$$P_M = \chi AS \quad (5.62)$$

se non è soddisfatta la condizione per il massimo trasferimento di potenza.

5.7.3. Teorema di reciprocità

Il teorema di reciprocità permette di stabilire una connessione tra il funzionamento delle antenne in trasmissione e in ricezione.

Siano assegnate delle correnti elettriche e magnetiche ($\underline{J}_1, \underline{J}_{m1}$) alle quali sia associato il campo elettromagnetico ($\underline{E}_1, \underline{H}_1$). Le relazioni che legano campi e sorgenti sono le equazioni di Maxwell riportate nel seguito:

$$\nabla \times \underline{E}_1 = -j\omega\mu \underline{H}_1 - \underline{J}_{m1} \quad (5.63a)$$

$$\nabla \times \underline{H}_1 = j\omega\varepsilon \underline{E}_1 + \underline{J}_1 \quad (5.63b)$$

Consideriamo poi un altro insieme di sorgenti ($\underline{J}_2, \underline{J}_{m2}$) che irradiano nello stesso mezzo i campi ($\underline{E}_2, \underline{H}_2$). Anche per questi campi e queste correnti devono essere verificate le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{E}_2 = -j\omega\mu\underline{H}_2 - \underline{J}_{m2} \quad (5.64a)$$

$$\nabla \times \underline{H}_2 = j\omega\varepsilon\underline{E}_2 + \underline{J}_2 \quad (5.64b)$$

Nelle (5.63) e nelle (5.64) si è assunto che il mezzo sia lineare e isotropo.

Moltiplichiamo scalarmene la (5.63a) per $\underline{H}_2$, la (5.63b) per $\underline{E}_2$, la (5.64a) per $\underline{H}_1$ e la (5.64b) per $\underline{E}_1$. Si ottiene:

$$\underline{H}_2 \cdot \nabla \times \underline{E}_1 = -j\omega\mu\underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1 - \underline{H}_2 \cdot \underline{J}_{m1} \quad (5.65a)$$

$$\underline{E}_2 \cdot \nabla \times \underline{H}_1 = j\omega\varepsilon\underline{E}_2 \cdot \underline{E}_1 + \underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 \quad (5.65b)$$

$$\underline{H}_1 \cdot \nabla \times \underline{E}_2 = -j\omega\mu\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2 - \underline{H}_1 \cdot \underline{J}_{m2} \quad (5.65c)$$

$$\underline{E}_1 \cdot \nabla \times \underline{H}_2 = j\omega\varepsilon\underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 + \underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 \quad (5.65d)$$

Sommiamo ora la (5.65a) e la (5.65b) alle (5.65c) e (5.65d) cambiate di segno:

$$\begin{aligned} & (\underline{H}_2 \cdot \nabla \times \underline{E}_1 - \underline{E}_1 \cdot \nabla \times \underline{H}_2) + (\underline{E}_2 \cdot \nabla \times \underline{H}_1 - \underline{H}_1 \cdot \nabla \times \underline{E}_2) = \\ & = -\underline{H}_2 \cdot \underline{J}_{m1} - \underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 + \underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 + \underline{H}_1 \cdot \underline{J}_{m2} \end{aligned} \quad (5.66)$$

dato che i primi termini dei secondi membri delle (5.65) si elidono.

Applicando la relazione vettoriale $\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \cdot \nabla \times \underline{B}$ si ottiene

$$\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = \underline{H}_2 \cdot \nabla \times \underline{E}_1 - \underline{E}_1 \cdot \nabla \times \underline{H}_2 + \underline{E}_2 \cdot \nabla \times \underline{H}_1 - \underline{H}_1 \cdot \nabla \times \underline{E}_2 \quad (5.67)$$

Sostituendo la (5.67) nella (5.66) si ottiene:

$$\nabla \cdot (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) = (\underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 - \underline{H}_2 \cdot \underline{J}_{m1}) - (\underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 - \underline{H}_1 \cdot \underline{J}_{m2}) \quad (5.68)$$

Si integri ora la (5.68) su un volume V , limitato da una superficie S di normale uscente $\underline{i}_n$. Applicando il teorema della divergenza, si ottiene:

$$\oint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{i}_n dS = \iiint_V (\underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 - \underline{H}_2 \cdot \underline{J}_{m1}) dV - \iiint_V (\underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 - \underline{H}_1 \cdot \underline{J}_{m2}) dV \quad (5.69)$$

La (5.69) è la formulazione più generale del teorema di reciprocità. I due integrali a secondo membro sono detti "integrali di reazione" ed in particolare il primo integrale è detto "reazione" della sorgente 2 sulla 1, e il secondo "reazione" della sorgente 1 sulla sorgente 2.

Esistono casi particolari, importanti per le applicazioni, in cui l'integrale di superficie nella (5.69) risulta nullo. Un primo caso importante è quello in cui il volume V è racchiuso da un conduttore elettrico perfetto. Per rispettare le condizioni al contorno, deve essere nulla la componente tangenziale del campo elettrico su S , dunque:

$$(\underline{E}_1 \times \underline{H}_2) \cdot \underline{i}_n = (\underline{i}_n \times \underline{E}_1) \cdot \underline{H}_2 = 0,$$

poiché $(\underline{i}_n \times \underline{E}_1) = 0$; inoltre

$$(\underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{i}_n = (\underline{i}_n \times \underline{E}_2) \cdot \underline{H}_1 = 0$$

dato che anche $(\underline{i}_n \times \underline{E}_2) = 0$. In tal caso le due reazioni sono uguali:

$$\iiint_{V_1} (\underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 - \underline{H}_2 \cdot \underline{J}_{m1}) dV = \iiint_{V_2} (\underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 - \underline{H}_1 \cdot \underline{J}_{m2}) dV \quad (5.70)$$

Nella (5.70) gli integrali sono estesi ai volumi V_1 e V_2 in cui sono definite le sorgenti del sistema 1 e del sistema 2, rispettivamente. Il risultato in (5.70) vale anche nel caso in cui si consideri V racchiuso da un conduttore magnetico perfetto. Dovrà, in tale situazione, essere nulla la componente tangenziale del campo magnetico su S ($\underline{i}_n \times \underline{H}_1 = 0$, $\underline{i}_n \times \underline{H}_2 = 0$).

Altro caso di importanza è quello in cui il volume V comprende tutto lo spazio e le sorgenti sono tutte al finito. Si può dimostrare, applicando la condizione di radiazione all'infinito all'integrale di superficie che compare al primo membro della (5.69), che l'integrale stesso risulta nullo. Infatti, la condizione di radiazione all'infinito stabilisce che:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r [\underline{E} - \zeta \underline{H} \times \underline{i}_r] = 0 \quad (5.71)$$

Ciò equivale a dire che a grande distanza dalle sorgenti le onde irradiate devono essere localmente piane e che devono propagarsi verso l'infinito. Le relazioni fra i campi elettrico e magnetico devono quindi essere le seguenti:

$$\underline{E}_1 = \zeta (\underline{H}_1 \times \underline{i}_r)$$

$$\underline{E}_2 = \zeta (\underline{H}_2 \times \underline{i}_r)$$

Sostituendo nell'integrale di superficie (S è una superficie nella regione di campo lontano)

$$\oint_S (\underline{E}_1 \times \underline{H}_2 - \underline{E}_2 \times \underline{H}_1) \cdot \underline{i}_n dS = \zeta \oint_S [(\underline{H}_1 \times \underline{i}_r) \times \underline{H}_2 - (\underline{H}_2 \times \underline{i}_r) \times \underline{H}_1] \cdot \underline{i}_n dS. \quad (5.72)$$

Utilizzando la relazione vettoriale:

$$(\underline{A} \times \underline{B}) \times \underline{C} = \underline{B} (\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{A} (\underline{B} \cdot \underline{C})$$

quindi:

$$(\underline{H}_1 \times \underline{i}_r) \times \underline{H}_2 = \underline{i}_r (\underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2) - \underline{H}_1 (\underline{i}_r \cdot \underline{H}_2) \quad (5.73)$$

$$(\underline{H}_2 \times \underline{i}_r) \times \underline{H}_1 = \underline{i}_r (\underline{H}_2 \cdot \underline{H}_1) - \underline{H}_2 (\underline{i}_r \cdot \underline{H}_1) \quad (5.74)$$

Gli ultimi termini delle (5.73) e (5.74) risultano nulli per l'ipotesi di onda localmente piana. Essendo le (5.73) e (5.74) valide per qualunque punto appartenente alla superficie S , l'integrale (5.72) risulta nullo. Risulta quindi anche in questo caso:

$$\iiint_{V_1} (\underline{E}_2 \cdot \underline{J}_1 - \underline{H}_2 \cdot \underline{J}_{m1}) dV = \iiint_{V_2} (\underline{E}_1 \cdot \underline{J}_2 - \underline{H}_1 \cdot \underline{J}_{m2}) dV$$

Un'applicazione del teorema di reciprocità è il "metodo delle sorgenti di prova" per il calcolo del campo elettromagnetico irradiato da assegnate distribuzioni di corrente.

Supponiamo siano assegnate delle distribuzioni di densità di corrente elettrica e magnetica $\underline{J}$ e $\underline{J}_m$. Si voglia calcolare la componente del campo elettrico da essa generata nel punto P e nella direzione individuata dal versore $\underline{i}_p$. Posizioniamo in P un dipolo elettrico elementare diretto secondo $\underline{i}_p$. La densità di corrente (di prova) associata al dipolo può essere espressa ricorrendo alle funzioni impulsive di Dirac:

$$\underline{J}_p = \underline{i}_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p) \delta(z - z_p) \quad (5.75)$$

dove x_p , y_p e z_p sono le coordinate del punto di osservazione P . Occorre prima di tutto osservare che la valutazione del campo generato dalle sorgenti $\underline{J}$ e $\underline{J}_m$ in P può essere in generale molto complessa, e P può anche trovarsi nella regione di campo vicino delle sorgenti. Siano $(\underline{E}, \underline{H})$ i campi generati da $(\underline{J}, \underline{J}_m)$

$$(\underline{J}, \underline{J}_m) \longrightarrow (\underline{E}, \underline{H})$$

ed $(\underline{E}_p, \underline{H}_p)$ i campi generati dal dipolo elettrico elementare $\underline{J}_p$ (sorgente di prova):

$$(\underline{J}_p, \underline{J}_{mp} = 0) \longrightarrow (\underline{E}_p, \underline{H}_p)$$

I campi $(\underline{E}_p, \underline{H}_p)$ (di prova) sono ovviamente noti (campi generati da un dipolo elementare elettrico in un mezzo omogeneo). Il campo $(\underline{E}, \underline{H})$ deve essere invece calcolato. Appliciamo il teorema di reciprocità:

$$\iiint_V (\underline{E}_p \cdot \underline{J} - \underline{H}_p \cdot \underline{J}_m) dV = \iiint_V (\underline{E} \cdot \underline{J}_p) dV$$

che per le proprietà delle funzioni impulsive di Dirac diventa:

$$\iiint_{V_1} (\underline{E}_p \cdot \underline{J} - \underline{H}_p \cdot \underline{J}_m) dV = \underline{E} \cdot \underline{i}_p \quad (5.76)$$

dove V_1 è il volume di definizione delle densità di corrente $\underline{J}$ e $\underline{J}_m$. Cambiando l'orientazione del dipolo di prova (tre direzioni mutuamente ortogonali) si può ricavare il valore di tutte le componenti del campo incognito $\underline{E}$ nel punto P . L'integrale a primo membro della (5.76) può essere valutato per via analitica, quando ciò sia possibile, o per via numerica.

Per il calcolo del campo magnetico $\underline{H}$, basterà assumere come "sorgente di prova" un dipolo elementare magnetico unitario. Oppure, se il punto P si trova nella regione di campo lontano della sorgente $(\underline{J}, \underline{J}_m)$, è possibile ricavare $\underline{H}$ da $\underline{E}$ mediante la relazione $\underline{E} = \zeta \underline{H} \times \underline{i}_r$, valida per le onde piane

5.7.4. Relazione fra parametri dell'antenna in trasmissione e in ricezione.

In base al teorema di reciprocità, le caratteristiche di un'antenna utilizzata per la ricezione di onde elettromagnetiche sono strettamente legate alle corrispondenti caratteristiche relative al caso in cui l'antenna sia usata in trasmissione. In particolare, si può dimostrare che, per una stessa antenna, l'altezza efficace in ricezione è uguale all'altezza efficace in trasmissione:

$$\underline{h}_r = \underline{h}. \quad (5.77)$$

Inoltre, se l'antenna ha un'efficienza unitaria, il diagramma di direttività e la funzione area efficace sono legate dalla seguente relazione:

$$\frac{D(\theta, \phi)}{A(\theta, \phi)} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \quad (5.78)$$

che stabilisce che il rapporto tra la direttività di una antenna e la sua area efficace è una costante che non dipende dal tipo di antenna considerata, ma solo dalla frequenza. Si

può poi dimostrare che, nel caso in cui l'antenna presenti delle perdite, la relazione (5.78) vale ancora se si sostituisce alla direttività il guadagno dell'antenna:

$$\frac{G(\theta, \phi)}{A(\theta, \phi)} = \frac{4\pi}{\lambda^2}. \quad (5.79)$$

§ 5.8 - FORMULE DEL COLLEGAMENTO

In un sistema di radiocomunicazione occorre determinare la potenza ricevuta da un'antenna quando sia nota quella trasmessa da un'altra antenna. La soluzione a tale problema è data dalla cosiddetta "formula del collegamento".

Siano date un'antenna trasmittente ed un'antenna ricevente, adattata in polarizzazione e potenza. Sia poi r la distanza tra le due antenne (Fig. 5.30). Indichiamo con P_T la potenza fornita dal trasmettitore ai morsetti d'ingresso dell'antenna trasmittente.

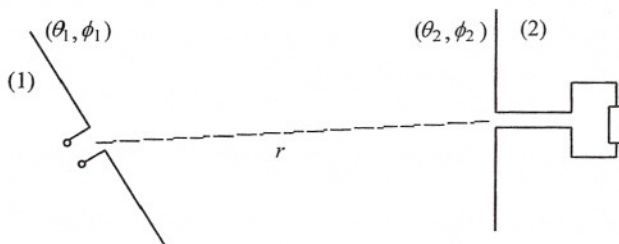


Fig. 5.28 - Geometria del collegamento fra due antenne.

Se G_T è il guadagno dell'antenna trasmittente (antenna 1 in Fig. 5.30) nella direzione generica (θ_1, ϕ_1) dell'antenna ricevente (antenna 2), si ha che la densità di potenza incidente sull'antenna ricevente è:

$$S = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_T(\theta_1, \phi_1).$$

Conseguentemente, la potenza attiva disponibile al carico dall'antenna 2 in condizione di adattamento di polarizzazione è:

$$P_R = \frac{P_T}{4\pi r^2} G_T(\theta_1, \phi_1) A_R(\theta_2, \phi_2),$$

dove A_R è l'area efficace dell'antenna ricevente, nella direzione (θ_2, ϕ_2) da cui è vista l'antenna trasmittente.

Il rapporto tra la potenza consegnata al carico e quella trasmessa risulta pari a :

$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{G_T A_R}{4\pi r^2} = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 = \frac{A_T A_R}{\lambda^2 r^2}, \quad (5.80)$$

in base anche alla relazione $G/A = 4\pi/\lambda^2$.

La quantità:

$$\left(\frac{\lambda}{4\pi r} \right)^2 \quad (5.81)$$

viene usualmente detta “attenuazione di spazio libero”. Le relazioni (5.80) sono dette “formule del collegamento” e sono tutte equivalenti. Esse si applicano al caso di antenne poste in uno spazio omogeneo, isotropo, illimitato, senza perdite, quando ciascuna antenna sia posta nella regione di campo lontano dell'altra, con l'antenna ricevente adattata (in polarizzazione e potenza). Le limitazioni imposte all'applicazione della (5.80) dal mezzo trasmissivo considerato (che si suppone omogeneo, isotropo, illimitato, senza perdite) sono molto spesso eliminabili. Se per esempio le antenne operano in presenza del suolo, e questo può ritenersi perfettamente conduttore per le frequenze utilizzate per il collegamento, allora la presenza del terreno può essere tenuta in conto modificando i parametri caratteristici delle antenne mediante l'applicazione del teorema delle immagini. Se il mezzo è con perdite, nella (5.80) comparirà un fattore di attenuazione $\exp(-2\alpha r)$ dovuto alla propagazione. Se la polarizzazione dell'onda trasmessa viene modificata (come succede per esempio per frequenze di qualche Ghz a causa della pioggia), se ne può tenere conto introducendo il fattore di depolarizzazione. In generale tutte le cause che tendono a diminuire la potenza ricevuta sono usualmente conglobate in un fattore η , “fattore di efficienza del collegamento”, spesso determinato sperimentalmente. La (5.80) può quindi essere riscritta come:

$$\frac{P_R}{P_T} = \eta \frac{G_T A_R}{4\pi r^2} \quad (5.82)$$

con $\eta \leq 1$.

È infine opportuno mettere in evidenza che la relazione (5.80) è valida solo quando le antenne sono sufficientemente distanti. Infatti le definizioni di guadagno e di direttività sono relative ai campi radiativi e la definizione di area efficace assume che l'antenna sia investita da un'onda piana.

APPENDICE A

RICHIAMI DI ANALISI VETTORIALE

§ A.1 - SISTEMI DI RIFERIMENTO

La soluzione di un qualunque tipo di problema è chiaramente indipendente dalla scelta del sistema di riferimento; talvolta però, sfruttando particolari simmetrie del problema, il calcolo può essere notevolmente semplificato con una corretta scelta del sistema di riferimento stesso.

Conviene qui richiamare brevemente i tre principali sistemi che saranno utilizzati, tenendo presente che questi non sono i soli disponibili. Ciò è utile più che altro per uniformare le notazioni.

Un sistema di coordinate stabilisce una convenzione per specificare univocamente la posizione di un qualsivoglia punto dello spazio rispetto ad un punto di riferimento detto "origine del sistema".

Ogni punto dello spazio è individuato dall'intersezione di tre particolari superfici, i versori degli assi coordinati sono individuati dalle normali a queste superfici nel punto di intersezione.

SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO ORTOGONALE

In tale sistema un punto è individuato dall'intersezione di tre piani mutuamente ortogonali. Gli assi coordinati sono ortogonali ai seguenti piani:

- a) l'asse x è perpendicolare a piani a x costante;
- b) l'asse y è perpendicolare a piani a y costante;
- c) l'asse z è perpendicolare a piani a z costante.

Una volta fissata l'origine O ogni altro punto dello spazio è determinato dalle distanze dall'origine (x, y, z) dei piani che lo individuano.

Per convenzione si utilizza in genere una terna di coordinate destrorsa (regola della mano destra o della vite destra).

Le direzioni coordinate sono rappresentate dai versori $\underline{i}_x, \underline{i}_y, \underline{i}_z$.

N.B.: Nel sistema cartesiano ortogonale i versori non cambiano direzione al variare del punto P nello spazio.

In coordinate cartesiane ortogonali le quantità differenziali hanno le seguenti espressioni:

- a) area elementare perpendicolare al versore $\underline{i}_x$: $dS_x = dy dz$;
- b) area elementare perpendicolare al versore $\underline{i}_y$: $dS_y = dx dz$;
- c) area elementare perpendicolare al versore $\underline{i}_z$: $dS_z = dx dy$;
- d) volume differenziale: $dV = dx dy dz$;
- e) $d\underline{l} = dx \underline{i}_x + dy \underline{i}_y + dz \underline{i}_z$.

COORDINATE CILINDRICHE

→ Sono utili quando esiste simmetria rispetto ad una retta (asse z). Le tre superfici che individuano il generico punto (fra di loro perpendicolari nell'intorno del punto) sono: una superficie cilindrica di raggio ρ , un piano a z costante, un piano a ϕ costante appartenente alla stella di piani passante per l'asse z .

Per convenzione la terna $\underline{i}_\rho, \underline{i}_\phi, \underline{i}_z$ deve essere destrorsa.

Vediamo le espressioni in coordinate cilindriche delle quantità differenziali:

- a) area elementare perpendicolare a $\underline{i}_\rho$: $dS_\rho = \rho d\phi dz$;
- b) area elementare perpendicolare a $\underline{i}_\phi$: $dS_\phi = \rho d\rho dz$;
- c) area elementare perpendicolare a $\underline{i}_z$: $dS_z = \rho d\rho d\phi$;
- d) volume differenziale: $dV = \rho d\rho d\phi dz$;
- e) $d\underline{l} = d\rho \underline{i}_\rho + \rho d\phi \underline{i}_\phi + dz \underline{i}_z$.

COORDINATE SFERICHE

→ Sono utili quando c'è simmetria rispetto ad un punto (origine). Il generico punto P è individuato dall'intersezione di una sfera di raggio r , di un piano a ϕ costante e di un cono, centrato nell'origine, con angolo di apertura θ (rispetto all'asse z) costante.

I versori $\underline{i}_r, \underline{i}_\theta, \underline{i}_\phi$ sono perpendicolari alle suddette superfici e formano fra di loro una terna destrorsa. In particolare l'orientamento dei tre versori varia al variare del punto P.

Vediamo le espressioni delle quantità differenziali in coordinate sferiche:

- a) area elementare perpendicolare a $\underline{i}_r$: $dS_r = r^2 \sin\theta d\theta d\phi$;
- b) area elementare perpendicolare a $\underline{i}_\theta$: $dS_\theta = r \sin\theta dr d\phi$;
- c) area elementare perpendicolare a $\underline{i}_\phi$: $dS_\phi = r d\theta dr$;
- d) volume differenziale: $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$;
- e) $d\underline{l} = dr \underline{i}_r + r d\theta \underline{i}_\theta + r \sin\theta d\phi \underline{i}_\phi$.

APPENDICE A

Qui di seguito vengono riportate le tabelle che mostrano le corrispondenze tra i sistemi di riferimento fin qui descritti:

CARTESIANE	CILINDRICHE	SFERICHE
x	$\rho \cos \phi$	$r \sin \theta \cos \phi$
y	$\rho \sin \phi$	$r \sin \theta \sin \phi$
z	z	$r \cos \theta$
$\underline{i}_x$	$\cos \phi \underline{i}_\rho - \sin \phi \underline{i}_\phi$	$\sin \theta \cos \phi \underline{i}_r + \cos \theta \cos \phi \underline{i}_\theta - \sin \phi \underline{i}_\phi$
$\underline{i}_y$	$\sin \phi \underline{i}_\rho + \cos \phi \underline{i}_\phi$	$\sin \theta \sin \phi \underline{i}_r + \cos \theta \sin \phi \underline{i}_\theta + \cos \phi \underline{i}_\phi$
$\underline{i}_z$	$\underline{i}_z$	$\cos \theta \underline{i}_r - \sin \theta \underline{i}_\theta$

CILINDRICHE	CARTESIANE	SFERICHE
ρ	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$r \sin \theta$
ϕ	$\arctan(y/x)$	ϕ
z	z	$r \cos \theta$
$\underline{i}_\rho$	$\cos \phi \underline{i}_x + \sin \phi \underline{i}_y$	$\sin \theta \underline{i}_r + \cos \theta \underline{i}_\theta$
$\underline{i}_\phi$	$-\sin \phi \underline{i}_x + \cos \phi \underline{i}_y$	$\underline{i}_\phi$
$\underline{i}_z$	$\underline{i}_z$	$\cos \theta \underline{i}_r - \sin \theta \underline{i}_\theta$

SFERICHE	CARTESIANE	CILINDRICHE
r	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\rho^2 + z^2}$
θ	$\cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$	$\cos^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right)$
ϕ	$\text{arccotg}(x/y)$	ϕ
$\underline{i}_r$	$\sin \theta \cos \phi \underline{i}_x + \sin \theta \sin \phi \underline{i}_y + \cos \theta \underline{i}_z$	$\sin \theta \underline{i}_r + \cos \theta \underline{i}_\theta$
$\underline{i}_\theta$	$\cos \theta \cos \phi \underline{i}_x + \cos \theta \sin \phi \underline{i}_y - \sin \theta \underline{i}_z$	$\cos \theta \underline{i}_r - \sin \theta \underline{i}_\theta$
$\underline{i}_\phi$	$-\sin \phi \underline{i}_x + \cos \phi \underline{i}_y$	$\underline{i}_\phi$

§ A.2 - OPERAZIONI DIFFERENZIALI SUI CAMPI SCALARI E VETTORIALI

Cerchiamo prima di tutto di chiarire che cosa si intende per "campo" scalare o vettoriale.

Un "campo" è in generale associato ad una certa regione dello spazio. Diremo che in una regione dello spazio esiste un "campo" se esiste un fenomeno fisico associato ai punti appartenenti a quella regione.

Si può parlare del campo associato a qualsivoglia quantità fisica come una descrizione matematica (o grafica) di come tale quantità vari da un punto ad un altro nella regione di campo e rispetto al tempo (o alla frequenza).

Si può parlare di campi scalari o vettoriali dipendentemente dal fatto che la quantità di interesse sia uno scalare o un vettore. Si può parlare di campi statici o di campi variabili nel tempo a seconda che la quantità di interesse sia dipendente o meno dal tempo.

Esempi di campi scalari possono essere la distribuzione di temperatura o di pressione all'interno di una certa regione: il campo è assegnato in funzione del generico punto appartenente alla regione di spazio considerato:

$$u = u(P) = u(x, y, z, t)$$

Le superfici su cui esso è costante sono dette "curve di livello" (isoterme, isobare).

Il campo può essere inoltre statico, nel caso in cui la distribuzione (per esempio di temperatura) non varia nel tempo, dinamico nel caso opposto. Un semplice esempio di campo scalare variabile nel tempo può essere il campo di temperatura in una stanza che viene riscaldata (o raffreddata). La presenza di una fonte di calore fa sì che la distribuzione di temperatura evolva nel tempo. Ad esempio si può visualizzare tale evoluzione con un insieme di rappresentazioni istantanee delle superfici isoterme. Queste ultime varieranno forma al variare dell'istante considerato.

Quanto detto per i campi scalari può essere esteso a quelli vettoriali semplicemente tenendo presente che una quantità vettoriale è associata con una direzione nello spazio (versore) e con un modulo. Per descrivere un campo vettoriale occorrerà assegnare ad ogni punto della regione di definizione un vettore che rappresenta modulo, direzione e verso della quantità in esame in quel particolare punto. Poiché un vettore, associato ad un certo punto dello spazio, è esprimibile come somma delle sue componenti per i versori degli assi coordinati in quel punto, una descrizione matematica del campo vettoriale implica semplicemente la descrizione di tre campi scalari, che altro non sono che le tre componenti del campo vettoriale. Così per un

campo vettoriale $\underline{F}$, variabile nel tempo, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale si ha:

$$\underline{F}(x, y, z, t) = F_x(x, y, z, t)\underline{i}_x + F_y(x, y, z, t)\underline{i}_y + F_z(x, y, z, t)\underline{i}_z$$

Espressioni simili valgono nel caso di sistemi di riferimento cilindrici e sferici. In tali casi però è bene mettere in evidenza che i versori del sistema di riferimento (2 nel caso del sistema cilindrico, 3 in quello sferico) sono essi stessi funzione delle coordinate spaziali.

GRADIENTE DI UN CAMPO SCALARE

Consideriamo un campo scalare $f(x, y, z)$ e supponiamo di volerne studiare il comportamento nell'intorno di un punto. La variazione incrementale df di f per un piccolo spostamento da (x, y, z) a $(x + dx, y + dy, z + dz)$ è data da:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad \text{OK} \quad (\text{A.1})$$

Il generico vettore distanza incrementale $d\underline{l}$ è definito come:

$$d\underline{l} = dx\underline{i}_x + dy\underline{i}_y + dz\underline{i}_z \quad \text{OK}$$

per cui la (A.1) può essere scritta in termini di prodotto scalare:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{i}_z \right) \cdot d\underline{l}$$

ecco come si arriva al gradiente!!
 $\nabla f = \frac{df}{d\underline{l}}$

dove il termine in parentesi, contenente le derivate rispetto allo spazio, è detto gradiente di f :

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \underline{i}_z \right) \quad (\text{A.2})$$

Il simbolo ∇ può essere visto come un operatore differenziale vettoriale, detto operatore "nabla":

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{i}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{i}_y + \frac{\partial}{\partial z} \underline{i}_z \right) \quad (\text{A.3})$$

Di per se stesso l'operatore nabla non ha significato ma quando esso moltiplica una funzione scalare risulta definito il gradiente. Il prodotto scalare e vettoriale dell'operatore nabla per un vettore definiscono altre operazioni.

Dunque la variazione di f , cioè df è data dal prodotto scalare del gradiente di f e del vettore $d\mathbf{l}$; per un dato elemento di lunghezza dl il valore massimo di df si ottiene quando $d\mathbf{l}$ è orientato in modo da coincidere con la direzione del vettore gradiente. Si ha:

$$df = \nabla f \cdot d\mathbf{l} = (\nabla f) dl \cos \sigma$$

dove σ è l'angolo compreso fra ∇f e il vettore $d\mathbf{l}$; df è massimo quando $\sigma=0$. Il gradiente ha quindi la direzione di massima variazione di f . Se ci si muove lungo linee con $\sigma = \pi/2 \Rightarrow df = 0$ e quindi siamo su linee a f costante. Il gradiente di f è perpendicolare alle superfici a f costante e diretto verso curve di livello crescente

PROPRIETÀ DEL GRADIENTE:

1. $\nabla(c_1 v + c_2 v) = c_1 \nabla v + c_2 \nabla v$
2. $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$
3. $\nabla(u/v) = (v \nabla u - u \nabla v) / v^2$

Consideriamo ora il seguente integrale di linea:

$$\int_a^b df = f(b) - f(a) = \int_a^b \nabla f \cdot d\mathbf{l}$$

Poichè df è un differenziale esatto l'integrale di linea non dipende dal contorno scelto per andare da a a b . Se l'integrale è chiuso:

$$\oint \nabla f \cdot d\mathbf{l} = 0 = f(a) - f(a)$$

Operatore gradiente in coordinate cilindriche:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{i}_z \right) \quad (\text{A.4})$$

Operatore gradiente in coordinate sferiche:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi \right) \quad (\text{A.5})$$

ROTORE DI UN CAMPO VETTORIALE

Consideriamo un campo vettoriale $\underline{A}(P) = A_x \underline{i}_x + A_y \underline{i}_y + A_z \underline{i}_z$; si definisce rotore del campo vettoriale $\underline{A}(P)$ la seguente espressione differenziale (in coordinate cartesiane):

def:
$$\text{rot } \underline{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \underline{i}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \underline{i}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \underline{i}_z \quad (\text{A.6})$$

Usando l'operatore nabla ∇ si ha:

$$\text{rot } \underline{A} = \nabla \times \underline{A} = \begin{vmatrix} \underline{i}_x & \underline{i}_y & \underline{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Def // In generale, si definisce rotore di $\underline{A}$ e si indica con $\nabla \times \underline{A}$ quel vettore la cui componente secondo una generica direzione $\underline{i}_n$ è data da:

$$\underline{i}_n \cdot \nabla \times \underline{A} = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{\oint \underline{A} \cdot d\underline{l}}{dS} \quad (\text{A.8})$$

(KpO) // dove il verso di $d\underline{l}$ è di rotazione destrorsa rispetto a $\underline{i}_n$ (vedi figura A.1a).

Consideriamo ora una superficie S che si appoggia su un contorno L e sia $\underline{i}_n$ il versore normale alla superficie S stessa (Fig. A.1b). Si può dimostrare che vale:

$$\oint_L \underline{A} \cdot d\underline{l} = \iint_S \nabla \times \underline{A} \cdot \underline{i}_n dS \quad (\text{A.9})$$

e questa è l'espressione del teorema di Stokes. (N.B.: la (A.9) vale per qualsiasi superficie S che si appoggia a L .)

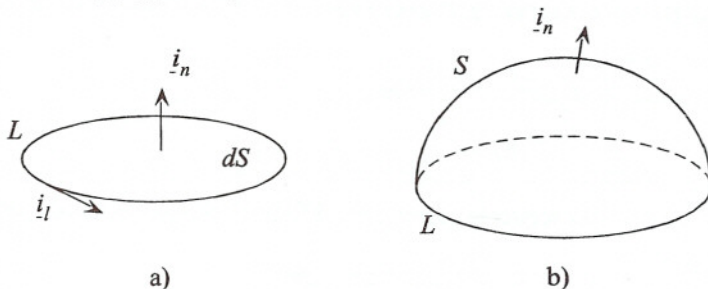


Fig.A.1 - Geometria per la definizione del rotore (a) e per l'applicazione del teorema di Stokes (b).

PROPRIETÀ DEL ROTORE:

1. Si può dimostrare, utilizzando il teorema di Stokes, che il rotore di un gradiente è nullo: $\nabla \times (\nabla f) = 0$;

2. Dalla precedente proprietà segue che, se $\nabla \times \underline{a} = 0$ (in tal caso si dice che il campo $\underline{a}$ è irrotazionale), è possibile determinare una funzione scalare u tale che:

$$\underline{a} = \nabla u \quad (\text{A.10})$$

$$3. \nabla \times (\underline{a} + \underline{b}) = \nabla \times \underline{a} + \nabla \times \underline{b};$$

$$4. \nabla \times (f \underline{a}) = f(\nabla \times \underline{a}) + (\nabla f) \times \underline{a} \quad (f \text{ campo scalare; } \underline{a} \text{ campo vettoriale}).$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{A} = & \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \underline{i}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \underline{i}_\phi + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \underline{i}_z \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Operatore rotore in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \underline{i}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \underline{i}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \underline{i}_\phi \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE

La divergenza di un campo vettoriale

$$\underline{A}(P) = A_x \underline{i}_x + A_y \underline{i}_y + A_z \underline{i}_z$$

è data per definizione dalla seguente espressione differenziale (in coordinate cartesiane):

Def /

$$\text{div } \underline{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.13})$$

Utilizzando l'operatore nabla si ha:

Ho Be

$$\| \operatorname{div} \underline{A} = \nabla \cdot \underline{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} i_x + \frac{\partial}{\partial y} i_y + \frac{\partial}{\partial z} i_z \right) \cdot \underline{A}$$

Una definizione più generale per la divergenza, che risulta indipendente dal sistema di coordinate cui si fa riferimento, è la seguente (si faccia riferimento alla Fig. A.2):

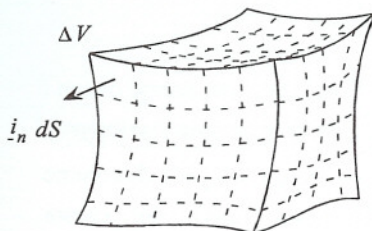


Fig. A.2

$$\nabla \cdot \underline{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint \underline{A} \cdot i_n dS}{\Delta V} \quad (\text{A.14})$$

In coordinate cilindriche e sferiche l'operatore divergenza non è esprimibile in modo semplice come in coordinate cartesiane come prodotto scalare fra l'operatore ∇ e il vettore $\underline{A}$. Infatti occorre tener conto nella valutazione che i versori del sistema di riferimento sono funzione delle coordinate e quindi le derivate dei versori producono un contributo diverso da zero. Per la valutazione della divergenza in coordinate cilindriche e sferiche la cosa più semplice è rifarsi alla formula (A.14) e valutare il flusso di $\underline{A}$ attraverso le superfici elementari perpendicolari ai tre versori degli assi coordinati. Si dimostra che in tal modo si ottiene:

Operatore divergenza in coordinate cilindriche:

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{A.15})$$

Operatore divergenza in coordinate sferiche:

$$\nabla \cdot \underline{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \quad (\text{A.16})$$

Consideriamo ora un volume V racchiuso interamente da una superficie S . Si dimostra che vale la seguente relazione (Fig. A.3):

Ricorda!!!
Th. della divergenza

$$\oiint_S \underline{A} \cdot i_n dS = \iiint_V \nabla \cdot \underline{A} dV \quad (\text{A.17})$$

↑ trasforma un integrale di volume in un integrale di superficie!!

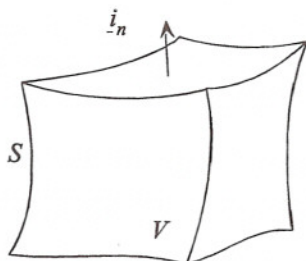


Fig. A.3

La (A.17) rappresenta l'espressione del teorema della divergenza (o teorema di Gauss). Tale relazione è di notevole importanza, in quanto essa converte un integrale di volume in un integrale di superficie ed è molto utilizzata nello studio dei campi elettromagnetici.

PROPRIETÀ' DELLA DIVERGENZA.

1.
$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{a}) = 0$$

(questa proprietà si dimostra facendo uso del teorema di Stokes e del teorema della divergenza);

2. dalla precedente proprietà segue che, se $\nabla \cdot \underline{b} = 0$ (in tal caso si dice che il campo $\underline{b}$ è solenoidale), allora è possibile determinare un vettore $\underline{a}$ tale che:

$$\underline{b} = \nabla \times \underline{a}. \quad (\text{A.18})$$

3.
$$\nabla \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \cdot (\nabla \times \underline{a}) - \underline{a} \cdot (\nabla \times \underline{b});$$

4.
$$\nabla \cdot (u \underline{a}) = (\nabla u) \cdot \underline{a} + u (\nabla \cdot \underline{a});$$

5.
$$\nabla \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = \nabla \cdot \underline{a} + \nabla \cdot \underline{b}.$$

Vale inoltre il teorema di Helmholtz, secondo cui qualunque vettore $\underline{a}$ può essere espresso come somma di una parte irrotazionale e di una parte solenoidale:

$$\underline{a} = \underline{a}_i + \underline{a}_s$$

dove:

$$\nabla \times \underline{a}_i = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{a}_s = 0$$

OPERATORE DI LAPLACE (O LAPLACIANO)

Sia f una funzione scalare; operando su questa funzione prima con l'operatore gradiente e poi con la divergenza si ottiene:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f. \quad (\text{A.19})$$

Il nuovo operatore composto ∇^2 viene detto laplaciano.

In coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (\text{A.20})$$

Per inciso se

$$\nabla^2 f = 0$$

si dice che f è una funzione armonica.

Si definisce infine laplaciano vettoriale il seguente operatore composto:

$$\nabla^2 \underline{a} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{a}) - \nabla \times \nabla \times \underline{a} \quad (\text{A.21})$$

In coordinate cartesiane si ha:

$$\nabla^2 \underline{a} = (\nabla^2 a_x) \underline{i}_x + (\nabla^2 a_y) \underline{i}_y + (\nabla^2 a_z) \underline{i}_z \quad (\text{A.22})$$

APPENDICE B

RAPPRESENTAZIONE FASORIALE

§ B.1 – REGIME SINUSOIDALE E FASORI

In molte applicazioni le sorgenti del campo elettromagnetico variano nel tempo con legge sinusoidale, oppure la banda relativa di frequenza B/f_0 (f_0 è la frequenza centrale o frequenza della portante) è talmente piccola che la maggior parte dell'informazione sulle caratteristiche dei campi può essere ottenuta considerando il comportamento del sistema (antenna, dispositivo a microonde, linea di trasmissione, etc.) alla frequenza di centro banda. Inoltre, noti i campi prodotti da sorgenti sinusoidali per diversi valori della frequenza, è possibile calcolare i campi prodotti da sorgenti non sinusoidali conoscendo il loro spettro di frequenza (mediante la trasformata serie di Fourier o la trasformata continua di Fourier è possibile esprimere una funzione del tempo come somma di infinite componenti sinusoidali).

Se l'ingresso di un sistema lineare e stazionario varia sinusoidalmente nel tempo con pulsazione $\omega = 2\pi f$ (rad/sec), anche la sua uscita, a regime, varierà sinusoidalmente con la stessa pulsazione.

Nello studio dei sistemi in regime sinusoidale si dimostra molto utile la rappresentazione delle grandezze variabili sinusoidalmente nel tempo come proiezioni di vettori ruotanti in grafici polari (fasori) (Fig. B.1). Il vettore $\overline{OP}$, di lunghezza proporzionale al valore di picco e_0 ruota in verso antiorario con velocità angolare ω formando un angolo $\theta = (\alpha x + \psi)$ con l'asse di riferimento x . La proiezione del vettore $\overline{OP}$ sull'asse x fornisce il valore istantaneo del campo.

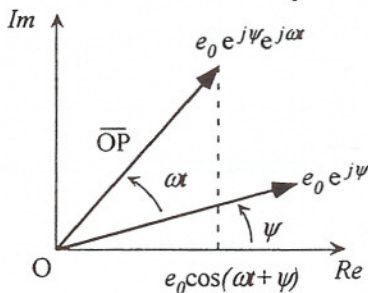


Fig. B.1

Il vettore rotante OP , rappresentato nel piano, può essere individuato univocamente mediante la rappresentazione polare:

$$E = e_0 e^{j\psi} e^{j\omega t},$$

oppure fornendo la proiezione sull'asse reale (parte reale del numero complesso E) e quella sull'asse immaginario (parte immaginaria del numero complesso E):

$$E = e_0 e^{j\psi} e^{j\omega t} = e_0 \cos(\omega t + \psi) + j e_0 \sin(\omega t + \psi);$$

per tale rappresentazione si è utilizzata la formula di Eulero: $re^{j\psi} = r \cos \psi + jr \sin \psi$; la trasformazione inversa è: $a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \arctg(b/a)} = r e^{j\psi}$. Dall'ultima relazione risulta evidente che la quantità che ha significato fisico è la parte reale del fasore E .

La rappresentazione fasoriale semplifica notevolmente l'operazione di somma tra grandezze sinusoidali. Supponiamo di dover sommare tra di loro due campi che hanno la stessa pulsazione ω e che sono sfasati di un angolo $(\phi - \psi)$:

$$e(t) = e_1 \cos(\omega t + \phi) + e_2 \cos(\omega t + \psi).$$

Poniamo $E_1 = e_1 e^{j(\omega t + \phi)}$ e $E_2 = e_2 e^{j(\omega t + \psi)}$; E_1 e E_2 rappresentano i fasori associati ai due campi da sommare; essi ruotano con la stessa velocità angolare e quindi la relazione di fase esistente tra di loro resta costante; il campo somma si può ottenere semplicemente sommando vettorialmente i due contributi mediante la regola del parallelogramma ovvero sommando separatamente le parti reali e le parti immaginarie dei due fasori (Fig. B.2).

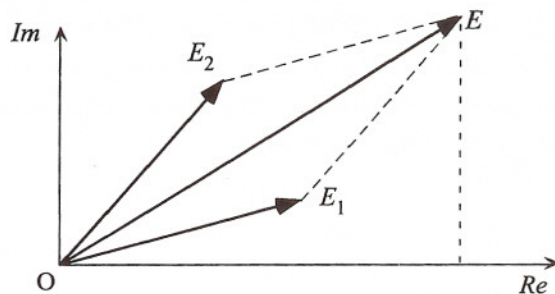


Fig. B.2

La proiezione del vettore somma sull'asse reale fornisce il valore istantaneo del campo totale:

$$e(t) = \operatorname{Re}\{e_1 e^{j\phi} e^{j\omega t} + e_2 e^{j\psi} e^{j\omega t}\} = \sqrt{(e_r)^2 + (e_i)^2} \cos\left(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{e_i}{e_r}\right)$$

dove $e_r = e_1 \cos \phi + e_2 \cos \psi$ e $e_i = e_1 \sin \phi + e_2 \sin \psi$. Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto usando le formule trigonometriche.

Il fasore somma è dato dunque da:

$$E = \sqrt{(e_r)^2 + (e_i)^2} e^{j \operatorname{arctg} \frac{e_i}{e_r}} e^{j\omega t}$$

In conclusione, un problema concernente grandezze sinusoidali può essere trattato nel campo complesso associando ad esse dei vettori rotanti nel piano complesso (fasori). Il risultato del calcolo sarà in generale un numero complesso e la quantità a cui siamo interessati, quella che ha significato fisico, è la parte reale del numero complesso. Il suo valore di picco è dato dal modulo del numero complesso, mentre la fase è data dall'arco la cui tangente è il rapporto tra il coefficiente della parte immaginaria e quello della parte reale.

Un altro vantaggio della rappresentazione fasoriale consiste nel trasformare relazioni integro-differenziali in semplici relazioni algebriche; ad esempio, la relazione tra la tensione e la corrente in un induttore $v(t) = L(di/dt)$ implica nel dominio dei fasori la semplice relazione algebrica $V e^{j\phi} = j\omega LI e^{j\psi}$, sottintendendo la dipendenza dal tempo $e^{j\omega t}$.

§ B.2 – FASORI VETTORIALI

Una rappresentazione fasoriale di una grandezza vettoriale monocromatica (come ad esempio i campi elettrico e magnetico $(\underline{e}(r, t), \underline{h}(r, t))$) può essere ottenuta associando semplicemente un fasore ad ogni componente del vettore. In coordinate cartesiane un campo elettrico $\underline{e}(r, t)$ dato da:

$$\underline{e}(r, t) = E_{0x}(r) \cos[\omega t + \phi_x(r)] \underline{i}_x + E_{0y}(r) \cos[\omega t + \phi_y(r)] \underline{i}_y + E_{0z}(r) \cos[\omega t + \phi_z(r)] \underline{i}_z$$

si può esprimere, utilizzando la notazione fasoriale, come:

$$\underline{e}(r, t) = \operatorname{Re}\{E_{0x}(r) e^{j\phi_x(r)} \underline{i}_x + E_{0y}(r) e^{j\phi_y(r)} \underline{i}_y + E_{0z}(r) e^{j\phi_z(r)} \underline{i}_z\} e^{j\omega t} = \operatorname{Re}\{\underline{E} e^{j\omega t}\}$$

dove $\underline{E}$ è un vettore a componenti complesse (fasore vettoriale) con componenti date da:

$$E_x = E_{0x} e^{j\phi_x}, \quad E_y = E_{0y} e^{j\phi_y}, \quad E_z = E_{0z} e^{j\phi_z}.$$

RAPPRESENTAZIONE FASORIALE

Una rappresentazione grafica adeguata potrebbe essere quella in cui vengono rappresentate separatamente la parte reale e quella immaginaria del campo elettrico (Fig. B.3). Il campo totale si ottiene quindi sommando vettorialmente le parti reali con le parti reali e le parti immaginarie con le parti immaginarie. Poichè in generale la parte reale è diversa dalla parte immaginaria, il vettore somma avrà una parte reale non allineata con la parte immaginaria.

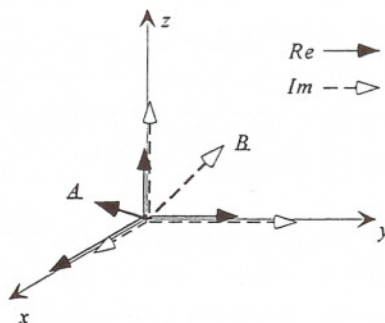


Fig. B.3

Quindi il campo generato da una sorgente sinusoidale in un punto r_0 può essere individuato in maniera univoca tramite un vettore complesso:

$$\underline{E} = \underline{A} + j \underline{B}$$

$$\underline{e}(r_0, t) = \Re \{ [\underline{A} + j \underline{B}] e^{j\omega t} \} = \underline{A} \cos(\omega t) - \underline{B} \sin(\omega t)$$

I vettori $\underline{A}$ e $\underline{B}$ individuano un piano. Vediamo come varia il campo $\underline{e}(r_0, t)$ nel dominio del tempo. Supponiamo per semplicità di aver operato una trasformazione di coordinate tale che il piano individuato dai vettori $\underline{A}$ e $\underline{B}$ coincida con il piano x, y di un sistema di coordinate cartesiane. Con riferimento alla successiva Fig. B.4 si ha:

$$\underline{e}(r_0, t) = (A_x \cos \omega t - B_x \sin \omega t) \underline{i}_x + (A_y \cos \omega t - B_y \sin \omega t) \underline{i}_y$$

Al variare del parametro t , il secondo estremo del vettore $\underline{e}$ descrive un'ellisse; l'ellisse viene descritta in un intervallo di tempo pari ad un periodo $T=1/f_0$. Il campo elettrico, nel caso più generale possibile, presenta quindi una polarizzazione ellittica. Se il campo è associato ad un fenomeno propagativo nel quale si riesce ad individuare una direzione di propagazione come nel caso delle onde piane, si possono dare le seguenti definizioni valide guardando l'onda nella direzione di provenienza: la polarizzazione si dice levogira se l'ellisse è descritta in senso antiorario, si dice invece destrogira se l'ellisse è descritta in senso orario. Se $\underline{A}$ e $\underline{B}$ sono paralleli, la direzione del campo

elettrico è costante e si parla di polarizzazione lineare. Infine, se $\underline{A}$ e $\underline{B}$ sono ortogonali ed hanno lo stesso modulo, allora si dice che il campo è polarizzato circolarmente (polarizzazione circolare levogira o destrogira).

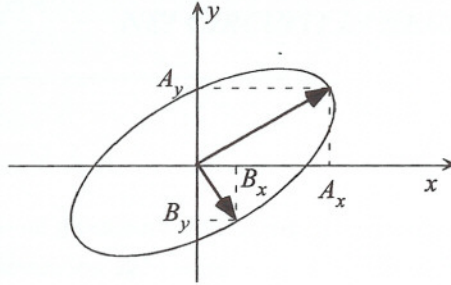


Fig. B.4

Ad esempio, il campo irradiato da un'antenna composta da due dipoli corti disposti lungo gli assi x e y di un sistema di riferimento cartesiano risulta, lungo la direzione $\underline{i}_z$, composto da due componenti:

$$\underline{E} = E_x \underline{i}_x + E_y \underline{i}_y$$

generate rispettivamente dal dipolo parallelo alla loro giacitura (E_x e E_y sono in generale complessi perchè $\underline{E}$ è un fasore). Se le correnti di alimentazione sono in fase, il campo è polarizzato linearmente; se sono sfasate di $\pi/2$ ed hanno la stessa ampiezza il campo è polarizzato circolarmente; in tutti gli altri casi il campo sarà polarizzato ellitticamente.

APPENDICE C

***RICHIAMI SULLA POTENZA
NEI CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE***

Consideriamo un generatore sinusoidale con pulsazione $\omega = 2\pi f$ che alimenta un carico passivo rappresentato dal resistore R e da un circuito LC (Fig. C.1). Sia $i(t) = I_M \cos \omega t$ la corrente che scorre nel circuito; la tensione ai capi del resistore vale $v_R(t) = RI_M \cos \omega t$, la tensione ai capi dell'induttore è sfasata di $\pi/2$ in anticipo rispetto alla corrente $v_L(t) = \omega LI_M \cos(\omega t + \pi/2)$, e la tensione ai capi del condensatore è sfasata di $\pi/2$ in ritardo rispetto alla corrente $v_C(t) = (I_M/\omega C) \cos(\omega t - \pi/2)$. La potenza istantanea assorbita dal carico resistivo vale:

$$p_R(t) = v_R(t)i(t) = \frac{1}{2} R I_M^2 (1 + \cos 2\omega t);$$

essa è sempre positiva in quanto il resistore può soltanto dissipare energia (Fig. C.2).

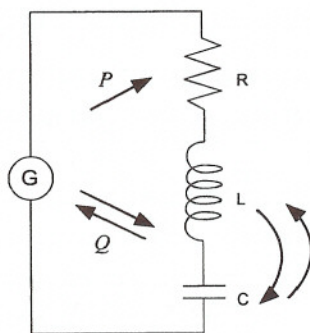


Fig. C.1

Questa quantità varia sinusoidalmente nel tempo per cui, se vogliamo ottenere una informazione di maggior interesse pratico, è preferibile ricavare la potenza media integrando la potenza istantanea su un ciclo e dividendo poi il risultato per un intervallo di tempo pari ad un periodo:

$$\langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt,$$

con $T=2\pi/\omega$. La potenza media assorbita dal resistore R vale:

$$\langle p_R(t) \rangle = \frac{1}{2} R I_M^2.$$

La potenza istantanea assorbita dal carico reattivo vale:

$$p_{LC}(t) = [v_L(t) + v_C(t)]i(t) = -\frac{1}{2} X I_M^2 \sin 2\omega t$$

dove X è la reattanza del circuito LC:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C};$$

essa ha valor medio nullo e ciò indica che il generatore in un periodo non fornisce energia al circuito LC (Fig. C.3). In un quarto di periodo ($T/4$), $p_{LC}(t) > 0$ indicando un flusso di energia dal generatore al circuito LC; questa energia viene resa al generatore dal circuito LC nel quarto di periodo successivo. Esiste quindi un "palleggiamento" di energia tra generatore e circuito LC. L'energia fornita dal generatore al circuito LC viene immagazzinata nel condensatore sotto forma di energia elettrica pari a

$$W_e(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) = \frac{1}{4} C \left(\frac{I_M}{\omega C} \right)^2 (1 - \cos 2\omega t),$$

e nella bobina sotto forma di energia magnetica

$$W_m(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{4} L I_M^2 (1 + \cos 2\omega t);$$

esse sono sempre positive e sono periodiche di periodo $T/2$ (Fig. C.4).

Il valor medio dell'energia elettrica immagazzinata nel condensatore vale:

$$\langle W_e(t) \rangle = \frac{1}{4} C \left(\frac{I_M}{\omega C} \right)^2,$$

mentre il suo valor massimo vale:

$$[W_e(t)]_{MAX} = \frac{1}{2} C \left(\frac{I_M}{\omega C} \right)^2$$

D'altra parte, il valor medio dell'energia magnetica immagazzinata nella bobina vale:

$$\langle W_m(t) \rangle = \frac{1}{4} L I_M^2$$

mentre il suo valor massimo vale:

$$[W_m(t)]_{MAX} = \frac{1}{2} L I_M^2.$$

Alle frequenze per cui risulta

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$$

l'energia magnetica mediamente immagazzinata nella bobina è maggiore della energia elettrica mediamente immagazzinata nel condensatore. Nell'intervallo $[0, T/4]$ W_m decresce fino ad annullarsi, mentre W_e aumenta fino a raggiungere il suo valor massimo; la differenza tra l'energia ceduta dalla bobina e quella assorbita dal condensatore viene ceduta al generatore che poi la resituirà nell'intervallo $[T/4, T/2]$. Esiste quindi un "palleggiamento" di energia tra gli elementi reattivi e tra questi ultimi e il generatore. Si noti che in condizioni di risonanza ($X=0$) c'è soltanto un "palleggiamento" di energia tra gli elementi reattivi (il generatore fornisce solo potenza attiva).

Il calcolo dell'energia scambiata tra gli elementi di un circuito in regime sinusoidale si semplifica utilizzando la rappresentazione fasoriale (è sottintesa la dipendenza temporale $e^{j\omega t}$): sia $I = I_M e^{j\phi_1}$ il fasore della corrente, $V = V_M e^{j\phi_2}$ quello della tensione del generatore, allora $V = Z I = (R + jX) I = |Z| e^{j\psi} I$, dove $\psi = \arctg(X/R)$; inoltre risulta $V_M = |Z| I_M$ e $\psi = \phi_2 - \phi_1$.

Si definisce potenza complessa la quantità:

$$P_c = \frac{1}{2} V I^*$$

e si misura in VA (Volt Ampere). La parte reale di P_c rappresenta proprio il valor medio della potenza fornita dal generatore al carico ovvero rappresenta la potenza attiva ceduta dal generatore al carico:

$$P = \Re \left\{ \frac{1}{2} V I^* \right\} = \frac{1}{2} |Z| I_M^2 \cos(\phi_2 - \phi_1) = \frac{1}{2} R I_M^2.$$

La parte immaginaria di P_c vale:

$$Q = \Im \left\{ \frac{1}{2} V I^* \right\} = \frac{1}{2} |Z| I_M^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) = \frac{1}{2} X I_M^2$$

è definita potenza reattiva e rappresenta il valor massimo della potenza istantanea scambiata tra generatore e carico reattivo (si misura in VAR=Volt Ampere Reattivi).

La potenza reattiva Q è positiva se il carico è induttivo, viceversa è negativa se il carico è capacitivo. Essa può essere messa in relazione alla energia media immagazzinata nel circuito LC; infatti, si può ricavare facilmente la relazione:

$$Q = \frac{1}{2} X I_M^2 = 2\omega (\langle W_m \rangle - \langle W_e \rangle) = 2\omega \left[\frac{1}{4} L I_M^2 - \frac{1}{4} C \left(\frac{I_M}{\omega C} \right)^2 \right]$$

la quale indica che in un carico induttivo l'energia media immagazzinata è prevalentemente magnetica, mentre in un carico capacitivo l'energia media immagazzinata è prevalentemente elettrica. In condizioni di risonanza il generatore non fornisce potenza reattiva.

In conclusione, la potenza attiva P indica la potenza media fornita dal generatore alla componente dissipativa del carico, e la potenza reattiva Q consente di quantificare l'energia "palleggiata" tra generatore e carico (ed indica anche se il carico è induttivo o capacitivo).

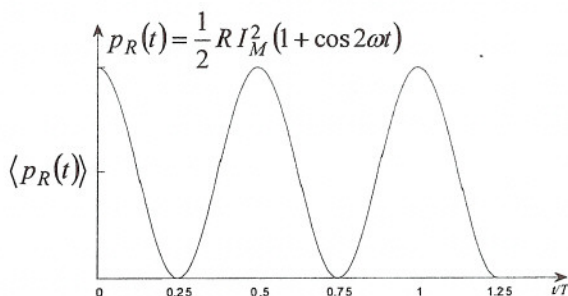


Fig. C.2

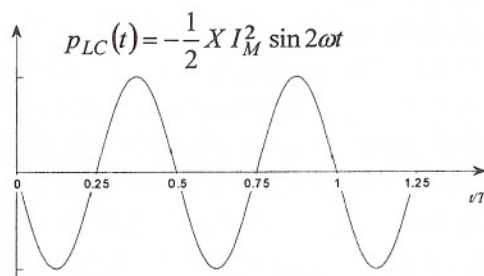


Fig. C.3

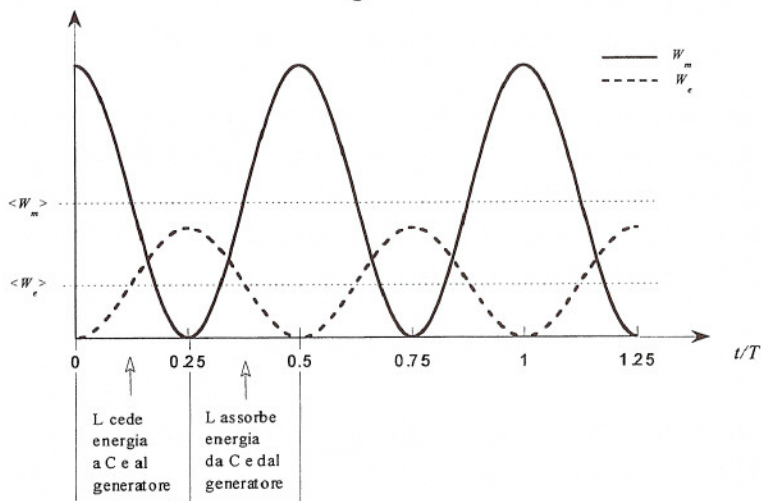


Fig. C.4

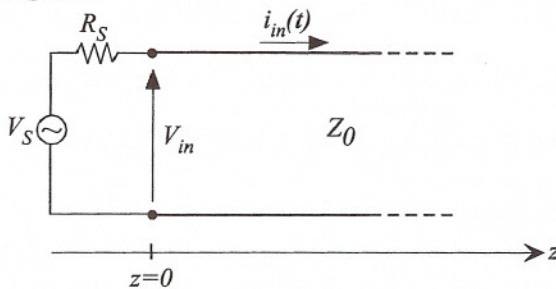
APPENDICE D**LINEE DI TRASMISSIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO**

Lo studio delle linee di trasmissione nel dominio del tempo riveste notevole importanza poiché dalla forma temporale dei segnali che transitano sulla linea di trasmissione si possono ricavare informazioni sul tipo di carico connesso alla linea, su eventuali discontinuità, etc.

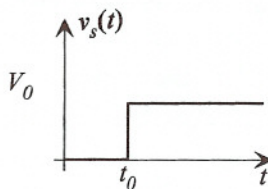
Nel seguito verrà illustrato il significato del coefficiente di riflessione nel dominio del tempo quando la linea è alimentata da un generatore di segnale a gradino in alcuni casi semplici.

LINEA INFINITA PRIVA DI PERDITE

Consideriamo una linea di trasmissione infinita, priva di perdite e con impedenza caratteristica Z_0 , alimentata con un generatore di segnale $v_s(t)$ con impedenza interna R_s come illustrato in Fig. D.1.

**Fig. D.1**

L'andamento del segnale $v_s(t) = V_0 u(t - t_0)$ è riportato in Fig. D.2.

**Fig. D.2**

Considerando che la linea è infinita (è presente solamente l'onda diretta), la tensione in ingresso risulta ripartita tra l'impedenza d'ingresso della linea e quella interna:

$$v_{in}(t) = v^+(z=0, t) = V_0 \frac{Z_0}{R_s + Z_0} \quad \text{per } t \geq t_0$$

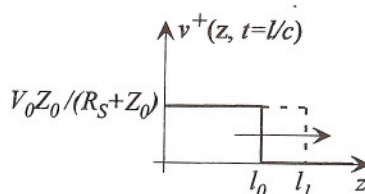


Fig. D.3

In Fig. D.3 è mostrato l'andamento della tensione lungo la linea fissati due diversi istanti di tempo. Si nota come, essendo la linea infinita e priva di perdite l'andamento della tensione a regime è costante e pari al valore che assume per $z=0$.

L'andamento della corrente lungo la linea è analogo a quello della tensione e risulta:

$$i_{in}(t) = i^+(z=0, t) = \frac{V_0}{R_s + Z_0} \quad \text{per } t \geq t_0$$

LINEA PRIVA DI PERDITE CHIUSA SU UN CARICO RESISTIVO

Consideriamo una linea di trasmissione di lunghezza l , priva di perdite e con impedenza caratteristica Z_0 , alimentata con un generatore di segnale $v_s(t)$ con impedenza interna R_s come illustrato in Fig. D.4. Tale linea di trasmissione è chiusa su un carico resistivo R_L posizionato in $z=l$.

Il segnale del generatore è $v_s(t) = V_0 u(t)$, quindi l'onda che transita nella direzione delle z positive a $t=0$ e per $z=l$ si ottiene analizzando il circuito di Fig. D.5. In particolare, non essendoci ancora l'influenza del carico finale, la tensione in $z=l$ risulta

$$v_1^+(z=l, 0) = V_0 \frac{Z_0}{R_s + Z_0} \quad (D.1)$$

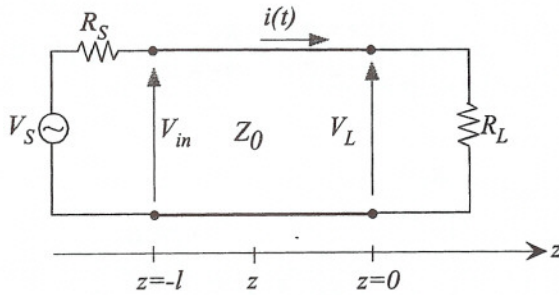


Fig. D.4

All'istante $t_d = l/c$ il valore della tensione sulla linea all'ascissa $z=0$ (in corrispondenza del carico) associata all'onda che si propaga nella direzione delle z positive è uguale a quello che si ha a $t=0$ per $z=-l$ poiché la linea è priva di perdite e non è ancora avvenuta alcuna riflessione sul carico.

Dopo la riflessione sul carico, sulla linea è presente anche l'onda che si propaga nella direzione delle z negative e si ottiene:

$$v_L(t) = v_1^+(z=0, t) + v_1^-(z=0, t)$$

e

$$i_L(t) = 1/Z_0 (v_1^+(z=0, t) - v_1^-(z=0, t)).$$

Imponendo la condizione al contorno $v_L(t) = i_L(t)R_L$ sul carico resistivo si ottiene:

$$\frac{v_1^+(z=0, t)}{R_L} + \frac{v_1^-(z=0, t)}{R_L} = \frac{v_1^+(z=0, t)}{Z_0} - \frac{v_1^-(z=0, t)}{Z_0}$$

Il coefficiente di riflessione sul carico, definito come il rapporto fra la tensione associata all'onda riflessa dal carico e la tensione associata all'onda incidente sullo stesso, risulta pertanto:

$$\Gamma_L \equiv \frac{v_1^-(z=0, t)}{v_1^+(z=0, t)} = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}, \quad |\Gamma_L| \leq 1$$

All'istante $t=2t_d$ l'onda riflessa dal carico che si propaga nella direzione delle z negative raggiunge il generatore dove subisce una ulteriore riflessione. Nella linea di trasmissione sarà quindi presente un'altra onda che si propaga nella direzione delle z positive. Il coefficiente di riflessione sulla sorgente si determina con procedimento analogo a quanto già visto per il carico ottenendo:

$$\Gamma_S \equiv \frac{v_2^+(z=0,t)}{v_2^-(z=0,t)} = \frac{R_S - Z_0}{R_S + Z_0}, \quad |\Gamma_S| \leq 1 \quad (\text{D.2})$$

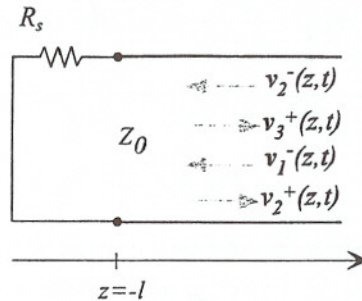


Fig. D.5

Poiché v_2^- si mantiene costante nel tempo ed anche lungo z , per $t > 2t_d$ si ha che: $v_2^+(z,t) = \Gamma_S v_2^-(z,t)$. Iterando il procedimento di riflessione visto per il carico e per la sorgente ad ogni onda che transita sulla linea e ricordando che la stessa è priva di perdite (il segnale non subisce alcuna attenuazione e il procedimento iterativo è infinito, in Fig. D.5 è rappresentata la situazione dopo 4 riflessioni) alla generica coordinata z per $t \rightarrow \infty$ la tensione e la corrente associate all'onda presente nella linea di trasmissione sono:

$$v(z, t \rightarrow \infty) = v_1^+(z,t) + v_1^-(z,t) + v_2^+(z,t) + v_2^-(z,t) + \dots$$

$$\dots + v_N^+(z,t) + v_N^-(z,t) + \dots =$$

$$= v_1^+(z,t)(1 + \Gamma_L + \Gamma_S \Gamma_L + \Gamma_S \Gamma_L^2 + \Gamma_S^2 \Gamma_L^2 + \dots + \Gamma_S^{N-1} \Gamma_L^N + \dots)$$

e

$$i(z,t) = \frac{1}{Z_0} v_1^+(z,t) - \frac{1}{Z_0} v_1^-(z,t) + \frac{1}{Z_0} v_2^+(z,t) - \frac{1}{Z_0} v_2^-(z,t) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{Z_0} v_N^+(z,t) - \frac{1}{Z_0} v_N^-(z,t) + \dots =$$

$$= \frac{1}{Z_0} v_1^+(z,t)(1 - \Gamma_L + \Gamma_S \Gamma_L - \Gamma_S \Gamma_L^2 + \Gamma_S^2 \Gamma_L^2 + \dots - \Gamma_S^{N-1} \Gamma_L^N + \dots)$$

Sfruttando la relazione seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{valida per } |x| < 1$$

si ottiene:

$$v(z, t) = v_1^+(z, t \rightarrow \infty) \left[\left(\frac{1}{1 - \Gamma_S \Gamma_L} \right) + \left(\frac{\Gamma_L}{1 - \Gamma_S \Gamma_L} \right) \right] = v_1^+(z, t \rightarrow \infty) \left(\frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_S \Gamma_L} \right)$$

e considerando la (D.1 e la D.2) si ha che la tensione nella linea di trasmissione a regime vale:

$$v(z, t \rightarrow \infty) = \left(\frac{R_L}{R_S + R_L} \right) V_0$$

ovvero è come se il carico fosse direttamente connesso al generatore. Si noti che questo risultato coincide con quello che si otterrebbe svolgendo un'analisi in continua del circuito D.4.

APPENDICE E***I POTENZIALI NELLA TEORIA DELL'IRRADIAZIONE*****§ E.1 – POTENZIALE VETTORE E POTENZIALE SCALARE**

Per il calcolo del campo irradiato da una sorgente vengono spesso utilizzate delle funzioni ausiliarie, dette potenziali. Dai potenziali è poi possibile passare ai campi con semplici operazioni di derivazione. Supponiamo che sia assegnata, nel dominio della frequenza, una distribuzione di corrente $\underline{J}$. In virtù dell'equazione di continuità della corrente, a tale distribuzione è associata una densità di carica ρ :

$$\nabla \cdot \underline{J} + j\omega\rho = 0$$

Il campo elettromagnetico associato a tali sorgenti è soluzione delle equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu\underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{E} + \underline{J} \\ \nabla \cdot \mu\underline{H} = 0 \\ \nabla \cdot \varepsilon\underline{E} = \rho \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Nelle (E.1) abbiamo implicitamente assunto che il mezzo sia lineare, isotropo, omogeneo, non dispersivo nello spazio. Poichè $\mu\underline{H}$ è solenoidale ($\nabla \cdot \mu\underline{H} = 0$), esso può essere espresso come rotore di un vettore $\underline{A}$, detto potenziale vettore:

$$\mu\underline{H} = \nabla \times \underline{A} \quad (\text{E.2})$$

Sostituendo la (E.2) nella prima equazione di Maxwell, si ottiene:

$$\nabla \times (\underline{E} + j\omega\underline{A}) = 0 \quad (\text{E.3})$$

Il vettore $\underline{A}$ ha quindi la proprietà di rendere irrotazionale il vettore $\underline{E} + j\omega\underline{A}$. Tale vettore può quindi essere espresso come gradiente di una funzione scalare ϕ , detta potenziale scalare:

$$\underline{E} + j\omega\underline{A} = -\nabla\phi \quad (\text{E.4})$$

Noti il vettore $\underline{A}$ e lo scalare ϕ , corrispondenti ad certa distribuzione di sorgenti, i vettori del campo elettrico e del campo magnetico si ricavano con semplici operazioni di derivazione:

$$\underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla \phi \quad (\text{E.5})$$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A} \quad (\text{E.6})$$

Il problema quindi è ricondotto a determinare i potenziali $\underline{A}$ e ϕ a partire dalle sorgenti assegnate $\underline{J}$ e ρ . A questo scopo utilizziamo le due equazioni di Maxwell in cui sono presenti le sorgenti. Sostituendo le (E.5), e (E.6) nella seconda delle (E.1), si ottiene:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \underline{A} = \omega^2 \epsilon \underline{A} - j\omega \epsilon \nabla \phi + \underline{J} \quad (\text{E.7})$$

Sfruttando la relazione vettoriale

$$\nabla \times \nabla \times \underline{A} = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} \quad (\text{E.8})$$

e poichè $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$, si ottiene

$$\nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = \nabla(\nabla \cdot \underline{A} + j\omega \epsilon \mu \phi) - \mu \underline{J} \quad (\text{E.9})$$

Tale equazione lega $\underline{A}$ e ϕ a $\underline{J}$. Considerando la quarta equazione di Maxwell, con ulteriori passaggi matematici si ottiene una equazione formalmente identica che lega $\underline{A}$ e ϕ a ρ :

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} - j\omega(\nabla \cdot \underline{A} + j\omega \epsilon \mu \phi) \quad (\text{E.10})$$

La (E.9) e la (E.10) rappresentano un sistema di quattro equazioni scalari nelle quattro incognite $\underline{A}$ e ϕ . Tale sistema si presenta quindi già vantaggioso rispetto alle equazioni di partenza dove vi sono sei equazioni in sei incognite accoppiate. Se poi è verificata la condizione

$$\nabla \cdot \underline{A} + j\omega \epsilon \mu \phi = 0 \quad (\text{E.10})$$

si ottengono degli ulteriori vantaggi. Infatti la (E.9) e la (E.10) diventano

$$\begin{array}{l} \text{Eq. vett. d} \\ \text{Helmholtz} \end{array} \quad \nabla^2 \underline{A} + k^2 \underline{A} = -\mu \underline{J} \quad (\text{E.11})$$

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{E.12})$$

con evidenti semplificazioni di calcolo. $\underline{A}$ dipende infatti solo da $\underline{J}$ e ϕ solo da ρ . Le quattro equazioni date dalle (E.11) e (E.12) sono formalmente identiche e quindi basta risolvere una delle quattro per avere la soluzione delle altre (cambia solo il termine forzante). La condizione (E.10) viene detta condizione di Lorentz e, in generale, non è soddisfatta. E' possibile tuttavia ricondursi sempre a tale condizione. Infatti, esiste un grado di libertà nella scelta delle funzioni potenziali. Consideriamo un nuovo potenziale

vettore $\underline{A}'$ tale che $\underline{A}' = \underline{A} - \nabla \psi$; ad esso è associato un campo magnetico $\underline{H}'$ che risulta uguale ad $\underline{H}$, infatti:

$$\underline{H}' = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A}' = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{A} - \nabla \times \nabla \psi) = \underline{H} \quad (\text{E.13})$$

dove si è sfruttata la proprietà $\nabla \times \nabla \psi = 0$. Il campo elettrico $\underline{E}'$ è tuttavia diverso da $\underline{E}$, ma adesso si può scegliere un potenziale scalare $\phi' = \phi + j\omega\psi$ tale che

$$\underline{E}' = -j\omega \underline{A}' - \nabla \phi' = -j\omega \underline{A} + j\omega \nabla \psi - \nabla \phi - j\omega \nabla \psi = \underline{E} \quad (\text{E.14})$$

Quindi se al posto dei potenziali $\underline{A}$ e ϕ , passiamo ai potenziali $\underline{A}'$ e ϕ' , i campi elettrico e magnetico non cambiano. Questa particolarità risulta utile nel caso in cui la condizione (E.10) non sia rispettata. Supponiamo per esempio che sia:

$$\nabla \cdot \underline{A} + j\omega\epsilon\mu\phi = \alpha \quad (\text{E.15})$$

con α una funzione non identicamente nulla. Si può dimostrare che scegliendo una funzione ψ tale che

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = \alpha \quad (\text{E.16})$$

allora i nuovi potenziali $\underline{A}'$ e ϕ' soddisfano la condizione di Lorentz.

Per quanto detto finora, il problema si riduce quindi alla risoluzione della (E.11) e della (E.12). In particolare, utilizzando la condizione di Lorentz, dal potenziale vettore è poi possibile risalire al potenziale scalare, per cui i campi elettrico e magnetico sono esprimibili in funzione del solo potenziale vettore $\underline{A}$. Infatti la (E.5) diventa:

$$\underline{E} = -j\omega \underline{A} - \nabla \phi = -j\omega \underline{A} + \frac{\nabla \nabla \cdot \underline{A}}{j\omega\epsilon\mu} \quad (\text{da Lorentz}) \quad (\text{E.17})$$

Si noti inoltre che, quando la condizione di Lorentz è rispettata, il potenziale vettore è generato dalle correnti, mentre le cariche generano il potenziale scalare. Si può quindi interpretare la condizione di Lorentz come l'equazione di continuità espressa in termini di potenziale vettore e potenziale scalare.

I potenziali ora definiti non sono gli unici possibili; imponendo delle condizioni diverse da quella di Lorentz si ottengono dei potenziali differenti. Tuttavia, per i problemi di irradiazione quelli ora definiti risultano i più convenienti ed utilizzati.

§ E.2 – POTENZIALE VETTORE ASSOCIATO AD UN DIPOLO ELEMENTARE

Consideriamo un filo di sezione trascurabile di lunghezza Δz , lungo il quale scorre una corrente rappresentabile con un fasore I costante lungo z (dipolo elettrico elementare). In corrispondenza della corrente I può essere definita una densità di corrente

$$\underline{J} = I \delta(x) \delta(y) f(z) \underline{i}_z,$$

con

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{\Delta z}{2} < z < \frac{\Delta z}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (\text{E.18})$$

Sostituendo nell'equazione vettoriale di Helmholtz (E.11) e scomponendo in coordinate cartesiane si ottiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x + k^2 A_x &= 0 \rightarrow A_x = 0 \\ \nabla^2 A_y + k^2 A_y &= 0 \rightarrow A_y = 0 \\ \nabla^2 A_z + k^2 A_z &= -\mu I \delta(x) \delta(y) f(z) = -\mu I \delta \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Le prime due equazioni hanno come soluzione forzata (legata cioè alle sorgenti) la soluzione identicamente nulla, $A_x = A_y = 0$. La terza equazione può essere risolta ipotizzando che $\Delta z \rightarrow 0$ e contemporaneamente $I \rightarrow \infty$ in modo che il prodotto $I \Delta z$ rimanga costante e diverso da zero (ipotesi di dipolo elementare). Con questa ipotesi, la funzione A_z si può pensare come funzione delle coordinate sferiche (r, θ, ϕ) . Inoltre, data la simmetria sferica, si può supporre che A_z sia funzione solo della coordinata r . Esprimendo l'operatore ∇^2 in coordinate sferiche e considerando solo la parte relativa alla coordinata r , si ottiene una soluzione per A_z del tipo:

$$A_z(r) = B \frac{e^{-jkr}}{r} + C \frac{e^{+jkr}}{r} \quad (\text{E.20})$$

La soluzione è quindi esprimibile in forma di onda sferica. Le costanti B e C sono da determinarsi in base alle condizioni iniziali. La costante C , essendo associata ad un'onda che si propaga dall'infinito nel verso delle r decrescenti, ed essendo tutte le sorgenti al finito, può essere assunta nulla. Questo ragionamento di tipo intuitivo può essere formalizzato imponendo la condizione di radiazione all'infinito. La costante B viene determinata in base al valore della corrente I . In particolare è possibile dimostrare che la costante B assume un valore pari a $\mu I \Delta z / (4\pi)$ per cui la soluzione per il potenziale vettore risulta:

APPENDICE E

POT. VETTORE IN CASO STATICO!

$$\underline{A} = \mu \frac{I \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \underline{i}_z \quad (E.21)$$

che è uguale al potenziale vettore che si determina nel caso statico moltiplicato per il fattore $\exp(-jkr)$, detto anche termine di ritardo. Passando in coordinate sferiche, poichè $\underline{i}_z = \cos \theta \underline{i}_r - \sin \theta \underline{i}_\theta$, il potenziale vettore risulta:

$$\begin{aligned} A_r &= \mu \frac{I \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \theta \\ A_\theta &= -\mu \frac{I \Delta z}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \\ A_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (E.22)$$

Esprimendo quindi il campo elettrico secondo la (E.17) e il campo magnetico secondo la (E.6) si ottengono le espressioni esatte del campo elettromagnetico irradiato da un dipolo elementare.

Il risultato dato nella (E.21) può essere generalizzato al caso di distribuzioni di corrente generica $\underline{J}$ definita su un volume V . In particolare si ha

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \underline{J} \frac{e^{-jk|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|} dV' \quad (E.23)$$

dove $\underline{r}$ rappresenta le coordinate del generico punto di osservazione mentre $\underline{r}'$ individua un punto generico appartenente al volume V dove è definita la corrente. La funzione

$$G(R) = \frac{e^{-jkR}}{R}$$

viene detta funzione di Green in spazio libero e rappresenta, in un certo senso, la risposta impulsiva dello spazio libero visto come sistema; per questo la (E.23) può essere interpretata come un integrale di convoluzione tra la corrente e la funzione di Green ($\underline{A}(\underline{r}) = \underline{J} \otimes G$).