

PROGRAMMA DI MATEMATICA, FISICA, ELETTRONICA

Mario Ageno, *Elementi di fisica*

T. M. Apostol, *Calcolo*

Vol. 1 *Analisi 1*

Vol. 2 *Geometria*

Vol. 3 *Analisi 2*

Michael Artin, *Algebra*

Luca Baracco e Giuseppe Zampieri, *Analisi 1*

Franco Bassani e Umberto M. Grassano, *Fisica dello stato solido*

Michiel Bertsch, *Istituzioni di matematica*

Scipione Bobbio e Emilio Gatti, *Elettromagnetismo Ottica*

Max Born, *Fisica atomica*

Francesco Bottacin e Giuseppe Zampieri, *Analisi 2*

Stefano Campi, Massimo Picardello e Giorgio Talenti, *Analisi matematica e calcolatori*

Vito Cappellini, *Elaborazione numerica delle immagini*

Francesco Carassa, *Comunicazioni elettriche*

Sergio Carrà, *Termodinamica: aspetti recenti e applicazioni alla chimica e all'ingegneria*

Ciro Ciliberto, *Algebra lineare*

Claudio Citrini, *Analisi matematica 1*

Claudio Citrini, *Analisi matematica 2*

Chiara de Fabritiis e Carlo Petronio, *Esercizi svolti e complementi di Topologia e Geometria*

P. A. M. Dirac, *I principi della meccanica quantistica*

Albert Einstein, *Il significato della relatività*

Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica analitica con elementi di meccanica statistica e dei continui*

Enrico Fermi, *Termodinamica*

Giorgio Franceschetti, *Campi elettromagnetici*

Giovanni Gallavotti, *Meccanica elementare*

Graziano Gentili, Fabio Podestà e Edoardo Vesentini, *Lezioni di geometria differenziale*

Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*

Enrico Giusti, *Analisi matematica 2*

Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica: vol. 1*

Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica: vol. 2*

Angelo Guerraggio, *Matematica generale*

Hermann Haken e Hans C. Wolf, *Fisica atomica e quantistica*

Werner Heisenberg, *I principi fisici della teoria dei quanti*

David A. Hodges e Horace G. Jackson, *Analisi e progetto di circuiti integrati digitali*

Charles Kittel, *Introduzione alla fisica dello stato solido*

Charles Kittel e Herbert Kroemer, *Termodinamica statistica*

Serge Lang, *Algebra lineare*

P. F. Manfredi, Piero Maranesi e Tiziana Tacchi, *L'amplificatore operazionale*

Jacob Millman, *Circuiti e sistemi microelettronici*

Jacob Millman e C. C. Halkias, *Microelettronica*

R. S. Muller e T. I. Kamins, *Dispositivi elettronici nei circuiti integrati*

Luciano Pandolfi, *Analisi matematica 1*

Athanasios Papoulis, *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*

Wolfgang Pauli, *Teoria della relatività*

B. Povh, K. Rith, C. Scholz e F. Zetsche, *Particelle e nuclei: un'introduzione ai concetti fisici*

Ilya Prigogine e Dilid Kondepudi, *Termodinamica: dalle macchine termiche alle strutture dissipative*

Giovanni Prodi, *Analisi matematica*

Antonio Ruberti e Alberto Isidori, *Teoria dei sistemi*

Walter Rudin, *Analisi reale e complessa*

H. H. Schaefer, *Introduzione alla teoria spettrale*

Edoardo Sernesi, *Geometria 1*

Edoardo Sernesi, *Geometria 2*

I. M. Singer e J. A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e di geometria*

Giovanni Soncini, *Tecnologie microelettroniche*

Guido Tartara, *Teoria dei sistemi di comunicazione*

Alberto Tesei, *Istituzioni di analisi superiore*

ENRICO GIUSTI

ANALISI MATEMATICA 2

TERZA EDIZIONE INTERAMENTE RIVEDUTA E AMPLIATA

PIANO DELLA PRESENTE OPERA

VOLUME PRIMO: ANALISI MATEMATICA 1

VOLUME SECONDO: ANALISI MATEMATICA 2



BOLLATI BORINGHIERI

Prima edizione 1983

Seconda edizione riveduta 1989

Terza edizione interamente riveduta e ampliata maggio 2003

© 2003 Bollati Boringhieri editore s.r.l., Torino, corso Vittorio Emanuele II, 86

I diritti di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati

L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume. Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere a Stampa (AIDRO), via delle Erbe, 2, 20121 Milano, tel. 02/86463091, fax 02/89010863

Stampato in Italia dalla Stampatre di Torino

ISBN 88-339-5706-3

Indice

Introduzione, ix

Analisi matematica 2

11. Il calcolo differenziale in più variabili, 3

- 11.1 Derivate parziali, 3
- 11.2 Funzioni differenziabili, 9
- 11.3 Derivate successive, 14
- 11.4 Funzioni composte, 16
- 11.5 Massimi e minimi relativi, 19
- 11.6 Risposte agli esercizi, 25

12. Il calcolo integrale in più variabili, 28

- 12.1 L'integrazione, 28
- 12.2 La misura degli insiemi, 30
- 12.3 Integrabilità delle funzioni continue, 35
- 12.4 Il calcolo degli integrali doppi, 37
- 12.5 Il volume dei solidi, 43
- 12.6 Cambiamento di variabili, 49
- 12.7 Le coordinate polari, 57
- 12.8 Integrali impropri, 64
- 12.9 Risposte agli esercizi, 69

13. Successioni e serie di funzioni, 73

- 13.1 Successioni di funzioni, 73
- 13.2 La convergenza uniforme, 75
- 13.3 Serie di funzioni, 80
- 13.4 Le serie di potenze, 82
- 13.5* Approssimazione delle funzioni continue, 86
- 13.6 Risposte agli esercizi, 91

14. Serie di Fourier, 93

- 14.1 Funzioni periodiche, 93
- 14.2 Sviluppi in serie di Fourier, 97
- 14.3 Convergenza delle serie di Fourier, 99
- 14.4* Una funzione continua che non è derivabile in nessun punto, 108
- 14.5 Notizie storiche, 109
- 14.6 Risposte agli esercizi, 118

15. Curve e superfici, 120

- 15.1 Curve in $\mathbb{R}^n$, 120
- 15.2 Lunghezza di una curva, 125
- 15.3* Intermezzo: ruote quadrate, 134
- 15.4 Superfici, 137
- 15.5 Area di una superficie, 141
- 15.6 Il teorema delle funzioni implicite, 146
- 15.7 Massimi e minimi vincolati, 150
- 15.8 Risposte agli esercizi, 157

16. Forme differenziali, 163

- 16.1 Il lavoro di una forza, 163
- 16.2 Forme differenziali, 165
- 16.3 Forme esatte, 168
- 16.4 La formula di Gauss-Green, 175
- 16.5* Applicazioni della formula di Gauss-Green, 180
- 16.6 La formula di Stokes, 183
- 16.7 Risposte agli esercizi, 185

17. Equazioni differenziali, 187

- 17.1 Introduzione, 187
- 17.2 Alcune equazioni speciali, 188
- 17.3 Il problema di Cauchy, 197
- 17.4 Prolungamento delle soluzioni, 203
- 17.5 Le equazioni lineari, 206
- 17.6 Equazioni lineari a coefficienti costanti, 208
- 17.7* Soluzioni numeriche, 215
- 17.8 Notizie storiche, 218
- 17.9 Risposte agli esercizi, 223

18. Funzioni semicontinue, 225

- 18.1 Massimo e minimo limite, 225
- 18.2 Le operazioni algebriche, 230
- 18.3 Successioni, 234
- 18.4 Funzioni semicontinue, 237
- 18.5 Il teorema di Weierstrass, 239
- 18.6 Approssimazione delle funzioni semicontinue, 240
- 18.7 Il teorema di Dini, 242
- 18.8 Risposte agli esercizi, 244

19. L'integrale di Lebesgue, 246

- 9.1 Introduzione, 246
- 9.2 Funzioni semicontinue, 248
- 9.3 L'integrale di Lebesgue, 251
- 9.4 Successioni monotone, 253
- 9.5 Alcune estensioni dell'integrale, 255
- 9.6 I teoremi di passaggio al limite, 259
- 9.7 La misura degli insiemi, 263
- 9.8 Insiemi di misura nulla, 265
- 9.9 Il teorema di Vitali, 268
- 9.10 Risposte agli esercizi, 271

20. Spazi funzionali, 273

- 20.1 Spazi metrici, 273
- 20.2 Insiemi densi, 277
- 20.3 Funzioni continue, 279
- 20.4 Successioni, 281
- 20.5 Spazi normati, 286
- 20.6 Insiemi compatti, 290
- 20.7 Il teorema di Ascoli-Arzelà, 294
- 20.8 Equazioni differenziali, 295
- 20.9 Risposte agli esercizi, 298

Nota bibliografica, 301

Indice dei simboli, 303

Indice analitico, 305

Introduzione

Questo secondo volume, che conclude il corso di Analisi matematica, si articola in due parti distinte. La prima, che prende i capitoli 11-16, costituisce il completamento della teoria svolta nel primo volume, essenziale per ogni studente di matematica, di fisica, di informatica e di ingegneria. I primi due capitoli trattano del calcolo differenziale e integrale in più dimensioni, con particolare attenzione al caso di due o tre variabili.

Vengono introdotti i concetti base del calcolo: le derivate parziali con lo studio dei massimi e minimi delle funzioni a più variabili, l'integrale multidimensionale secondo Riemann, una naturale generalizzazione di quello studiato nel primo volume.

Seguono poi due capitoli nei quali si studiano le successioni e le serie di funzioni, con particolare attenzione per le serie di potenze e per le serie di Fourier, e infine due ulteriori capitoli con la teoria elementare delle curve e delle superfici, e le prime nozioni sulle forme differenziali. Insieme al corso di Analisi 1, questa prima parte, che può essere svolta in un semestre, dà allo studente le conoscenze indispensabili per affrontare i corsi superiori di Analisi, e le competenze necessarie per gli studi tecnico-scientifici.

La seconda parte, anch'essa pensata per un semestre, riprende approfondendoli alcuni argomenti che non era stato possibile trattare in precedenza, o che avevano avuto uno spazio necessariamente ridotto. In primo luogo, vengono affrontate le equazioni differenziali, già studiate nel primo volume dal punto di vista delle tecniche di soluzione di quelle più comuni nelle applicazioni, e ne viene sviluppata la teoria generale, in particolare per quanto riguarda l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy. Segue poi un capitolo piuttosto breve sulle funzioni semicontinue, soprattutto in vista del loro uso nella teoria dell'integrale di Lebesgue, che viene svolta nel capitolo successivo. Infine l'ultimo capitolo introduce in maniera sintetica alcuni spazi funzionali: spazi metrici, spazi di Banach e di Hilbert, dando un quadro teorico unitario a nozioni, come ad esempio quella di convergenza uniforme, che erano state

introdotte in precedenza. Pur essendo soprattutto un complemento alla teoria svolta nei tre semestri precedenti, quest'ultima parte non manca di una sua logica e di una sua coerenza interna.

Come sempre, ogni capitolo o gruppo di capitoli del testo è integrato da note storiche che riassumono le linee di sviluppo della materia svolta.

Capitolo 11

Il calcolo differenziale in più variabili

11.1. Derivate parziali

Quando si passa dalle funzioni di una variabile a quelle di più variabili, solo alcuni dei concetti e dei risultati introdotti per funzioni di una variabile trovano una loro generalizzazione immediata; altri devono essere profondamente modificati, altri infine valgono solo in una variabile e cessano di essere veri nel caso generale. In questo capitolo esamineremo in dettaglio come si trasforma il calcolo differenziale nel passaggio da una a più variabili, cercando di mettere in luce le analogie e le differenze. Per fissare le idee, ci limiteremo spesso al caso di funzioni reali di due variabili, anche se tutti i risultati e le definizioni possono essere facilmente estesi al caso di n variabili, al prezzo però di complicare ulteriormente delle formule già abbastanza complesse.

Consideriamo una funzione $f(x, y)$ di due variabili reali, e supponiamo di tener fissa una delle due variabili, ad esempio la seconda, e di far variare solo la prima. Otterremo così una funzione della sola variabile x ; se questa è derivabile diremo che la funzione $f(x, y)$ ammette *derivata parziale* rispetto a x . Tale derivata parziale si indica con il simbolo

$$\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Si ha per la definizione di derivata:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Analogamente, se si fa variare la y tenendo fissa x , si ottiene la derivata parziale rispetto a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}.$$

Spesso invece di $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $\frac{\partial f}{\partial y}$ si usano i simboli abbreviati f_x e f_y . Una definizione simile vale nel caso di tre o più variabili. Se $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, è una funzione di n variabili, potremo fissare tutte le variabili ad eccezione di x_i , e considerare f come funzione solo di quest'ultima. Se questa funzione è derivabile, diremo che $f(\mathbf{x})$ ha derivata parziale rispetto alla variabile x_i . Tale derivata parziale verrà indicata con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad D_i f, \quad f_{x_i} \quad \text{o} \quad f_i.$$

Una funzione che possiede tutte le derivate parziali in un punto $\mathbf{x}_0$ si dice *derivabile* in $\mathbf{x}_0$. Se poi la funzione f ammette derivate parziali in ogni punto di un insieme E , diremo che f è derivabile in E .

Nella pratica, per calcolare ad esempio la derivata parziale rispetto a x di una funzione $f(x, y)$ di due variabili, si tratta la y come una costante, e si deriva la funzione $f(x, y)$ come se fosse una funzione della sola x . Analogamente, la derivata parziale rispetto a y si calcola considerando costante la x e derivando $f(x, y)$ come se fosse una funzione della sola y .

Esempio 11.1 La funzione $f(x, y) = e^{x^2 y}$ è derivabile in $\mathbf{R}^2$, e si ha

$$\frac{\partial e^{x^2 y}}{\partial x} = 2xye^{x^2 y}$$

$$\frac{\partial e^{x^2 y}}{\partial y} = x^2 e^{x^2 y}.$$

□

Esempio 11.2 La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ammette derivate parziali in $(0, 0)$. Infatti se teniamo fissa $y = 0$ e facciamo variare la sola x , si ha $f(x, 0) \equiv 0$, e dunque la derivata rispetto a x in $(0, 0)$ è 0. Lo stesso vale per la derivata rispetto a y . □

Il vettore che ha come componenti le derivate parziali $D_i f$ si chiama *gradiente* della funzione f , e si indica con uno dei simboli

$$\nabla f, \quad \text{grad } f \quad \text{o} \quad Df.$$

Se f è derivabile in A , il suo gradiente ∇f è un campo vettoriale in A (vedi cap. 4 § 3).

Esempio 11.3 La funzione $f(x, y, z) = 3xz - x \log y$ è definita nel semispazio $y > 0$.

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3z - \log y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3x$$

e dunque il gradiente di f è il vettore $\nabla f = \left(3z - \log y, -\frac{x}{y}, 3x \right)$. $\square$

Le derivate parziali sono un caso particolare di derivate *lungo una direzione*. Con il termine *direzione* intendiamo un vettore $\mathbf{v}$ di lunghezza $||\mathbf{v}|| = 1$. Se $\mathbf{x}$ è un punto di $\mathbf{R}^n$, al variare di t in $\mathbf{R}$ il punto $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ descrive una retta che passa per il punto $\mathbf{x}$ e ha direzione determinata da $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$ sono fissati, la funzione

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$$

è una funzione della sola variabile t . La sua derivata nel punto $t = 0$, se esiste, si chiama derivata della funzione f nella direzione $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{t}. \quad [11.1]$$

Si vede subito che la derivata parziale rispetto alla variabile x_i non è altro che la derivata lungo la direzione dell'asse delle x_i , cioè lungo il vettore $\mathbf{e}_i$, che ha le componenti tutte nulle, ad eccezione della i -esima, che vale 1. Ad esempio, in due variabili la derivata rispetto a x è la derivata lungo la direzione $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ dell'asse delle x ; quella rispetto a y è la derivata lungo la direzione $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Si ha più in generale

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x} + t\mathbf{v}). \quad [11.2]$$

Infatti, posto $\mathbf{x}_t = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, risulta

$$g'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_t + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_t)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_t).$$

Esempio 11.4 Calcoliamo la derivata della funzione $f(x, y) = x^2y - e^{x+y}$ lungo la direzione $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$. Si ha

$$g(t) = f\left(x + \frac{t}{2}, y + \frac{\sqrt{3}t}{2}\right) = \left(x + \frac{t}{2}\right)^2 \left(y + \frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - e^{x+y+t\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = g'(0) = xy + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{x+y} \quad \square$$

Esempio 11.5 La funzione dell'esempio 11.2 ammette in $(0, 0)$ derivate in ogni direzione. Sia infatti $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ una direzione. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + t^2 v_2^4}.$$

Si devono ora distinguere due casi: se $v_1 = 0$ la quantità a secondo membro vale sempre 0, e quindi anche il limite è 0; se invece $v_1 \neq 0$ il limite vale $\frac{v_2^2}{v_1}$. In conclusione:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = \begin{cases} 0 & v_1 = 0 \\ \frac{v_2^2}{v_1} & v_1 \neq 0 \end{cases} \quad \square$$

Alcuni dei teoremi dimostrati nel capitolo 8 per funzioni di una variabile si estendono alle derivate parziali e a quelle lungo una direzione.

Ad esempio

Teorema 11.1 Se una funzione $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ ha un massimo o un minimo relativo in un punto $\mathbf{x}_0$ interno ad A , e se ammette in $\mathbf{x}_0$ la derivata lungo una direzione $\mathbf{v}$, allora

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = 0$$

Dimostrazione La funzione $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$ è definita in un intorno di $t = 0$, dove ha un massimo o un minimo relativo. Di conseguenza la sua derivata in 0 (che per definizione è la derivata di f nella direzione $\mathbf{v}$) si annulla. $\square$

In particolare, se $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo o di minimo relativo per una funzione f , e f è derivabile in $\mathbf{x}_0$, le sue derivate parziali sono tutte nulle; il punto $\mathbf{x}_0$ si dice allora *stazionario*. Pertanto i massimi o i minimi relativi di una funzione f in un insieme A (e a maggior ragione quelli assoluti, che per il teorema di Weierstrass esistono se f è continua e A è chiuso e limitato) possono cadere:

1. sulla frontiera ∂A di A ,
2. nei punti interni dove f non è derivabile,
3. nei punti stazionari.

Nel caso di una sola variabile, questi punti erano usualmente in numero finito, e un confronto tra i valori della f in essi permetteva di trovare il massimo e il minimo assoluti. In più variabili questo non è più vero, dato che in genere la frontiera di A è costituita da un numero infinito di punti.

Esempio 11.6 Si calcoli il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{x+y}$$

nel cerchio chiuso C di centro l'origine e raggio 1.

Il cerchio C è costituito dai punti (x, y) con $x^2 + y^2 \leq 1$; la sua frontiera è la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. La funzione f vale 0 in ogni punto della frontiera di C ; dato che in C essa è sempre ≤ 0 , il valore massimo sarà 0, assunto in tutti i punti della frontiera ∂C .

Per trovare il minimo, cerchiamo i punti stazionari, per i quali deve essere

$$\begin{aligned} f_x &= (2x + x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} = 0 \\ f_y &= (2y + x^2 + y^2 - 1)e^{x+y} = 0. \end{aligned}$$

Sottraendo le due equazioni si ha $2(x - y)e^{x+y} = 0$, da cui $x = y$. Sostituendo nella prima equazione, si ha $(2x + 2x^2 - 1)e^{2x} = 0$, e dunque $2x + 2x^2 - 1 = 0$, che ha soluzioni

$$x = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

La prima di queste soluzioni dà luogo al punto $\left(-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}, -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)$, che non appartiene al cerchio A , dato che

$$\left(-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} > 1;$$

la seconda conduce al punto $\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$, che appartiene ad A , essendo

$$\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{3} < 1.$$

Si ha

$$f\left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) = (1 - \sqrt{3})e^{\sqrt{3} - 1}$$

che è il valore minimo della funzione.

Si sarà notato che la funzione f aveva lo stesso valore in tutti i punti della frontiera, che quindi ai fini del massimo e del minimo valevano come uno solo. Grazie a questa circostanza abbiamo potuto dare una risposta positiva; altrimenti avremmo dovuto considerare gli infiniti punti della frontiera, e avremmo avuto bisogno di ulteriori indagini. Riprenderemo questo problema nel capitolo 15. $\square$

Un secondo teorema che continua a valere in più variabili è un analogo del teorema di Lagrange. Consideriamo una funzione $f(\mathbf{x})$, definita in un insieme $A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\mathbf{x}_0$ un punto interno ad A , e sia $\mathbf{v}$ una direzione. Se $I(\mathbf{x}_0, r)$ è un intorno di $\mathbf{x}_0$ contenuto in A , la funzione $g(s) = f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v})$ è definita per $|s| < r$. Per il teorema di Lagrange in $\mathbf{R}$ si ha allora:

$$f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = g(s) - g(0) = sg'(\tau)$$

dove τ è un numero compreso tra 0 e s . Ricordando allora la [11.2], si ottiene:

$$f(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = s \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{v}). \quad [11.3]$$

In particolare, se $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ e se prendiamo $\mathbf{v} = (1, 0)$ e $s = x - x_0$ (questo corrisponde a tener fissa $y = y_0$ e a far variare la x), otteniamo

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)(x - x_0) \quad [11.4]$$

con $\xi = x_0 + \tau$ compreso tra x_0 e x .

Analogamente, se si fissa $x = x_0$ e si fa variare la y , si ottiene

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)(y - y_0) \quad [11.5]$$

con η compreso tra y_0 e y .

Queste due formule saranno utili nel seguito.

Osservazione 11.1 Osserviamo che i risultati precedenti valgono solo per funzioni f a valori reali, e cessano di valere se la funzione $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è a valori vettoriali, cioè se manda A in $\mathbf{R}^k$, con $k > 1$.

Se indichiamo con $f_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, k$, le componenti di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, possiamo certamente applicare a ognuna delle f_i la [11.3]:

$$f_i(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) - f_i(\mathbf{x}_0) = s \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0 + \tau_i \mathbf{v}), \quad [11.6]$$

ma i numeri τ_i saranno in generale diversi tra loro, e non ci sarà nessun τ compreso tra 0 e s , tale che

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = s \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{v}).$$

Se però si pone

$$L = \sup_{t(\mathbf{x}_0, s)} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} \right\|,$$

si ha dalla [11.6]

$$|f_i(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) - f_i(\mathbf{x}_0)| \leq Ls$$

per ogni $i = 1, 2, \dots, k$, e quindi

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + s\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\| \leq Ms$$

con $M = \sqrt{k}L$. Molte volte anche questa versione più debole del teorema di Lagrange può essere usata con profitto. $\square$

Esercizi

11.1. Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

- | | | | |
|----------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 1. x^3y^2 | 3. $x^2y \sin xy$ | 5. $\arctg \frac{x}{y}$ | 7. x^y |
| 2. x^2y^{-3} | 4. $\sqrt{x^2 + y^2}$ | 6. $\log(x^2 + y^2)$ | 8. $\operatorname{tg}(x + y^2)$ |

11.2. Calcolare le derivate delle funzioni precedenti lungo la direzione

$$\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right), \text{ e verificare che si ha}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x, y) = f_x(x, y)v_1 + f_y(x, y)v_2.$$

11.3. Dimostrare che $\frac{\partial f}{\partial(-\mathbf{v})} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$.

11.4. Trovare il massimo e il minimo assoluti della funzione $x(1 - x^2 - 4y^2)$ nell'ellisse $x^2 + 4y^2 \leq 1$.

11.2. Funzioni differenziabili

Le derivate direzionali riflettono la molteplicità delle direzioni nelle quali ci si può muovere a partire da un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, in contrasto con l'unica possibilità nel caso di una variabile. Esse però non esauriscono completamente il passaggio da una a più variabili, nel senso che alcune proprietà valide in una variabile non si trasmettono alle funzioni derivabili in più variabili. Ad esempio, uno dei risultati che abbiamo dimostrato nel teorema 8.1 stabiliva che una funzione derivabile in un punto x è continua in x . Questo risultato non vale in più variabili, nemmeno se si suppone che la funzione abbia derivata in ogni direzione.

Esempio 11.7 Abbiamo visto nel paragrafo precedente che la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad [11.8]$$

ha derivate in tutte le direzioni nell'origine. D'altra parte la funzione f non è continua in $(0, 0)$. Consideriamo infatti i punti $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k} \right)$, che quando $k \rightarrow \infty$ tendono a $(0, 0)$. Si ha

$$f(\mathbf{x}_k) = \frac{\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} = \frac{1}{2}$$

per ogni intero positivo k .

Se ora la funzione f fosse continua in $(0, 0)$, essendo $f(0, 0) = 0$, dovrebbe esistere un intorno I di $(0, 0)$ tale che $|f(x, y)| < \frac{1}{2}$ in I . Questo è assurdo, poiché prendendo k abbastanza grande i punti $\mathbf{x}_k$ appartengono a I , e $f(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2}$.

A maggior ragione poi non esisterà il piano tangente al grafico della funzione $f(x, y)$ nel punto $(0, 0, 0)$. $\square$

Ricordiamo che, nel caso di una variabile, la retta tangente al grafico della funzione $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$, di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, è l'unica retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ per la quale la differenza tra il valore della funzione e quello dell'ordinata corrispondente della retta tenda a zero più velocemente di $x - x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Questa definizione si può generalizzare al caso di più variabili.

Definizione 11.1 Una funzione $f(\mathbf{x})$ si dice differenziabile nel punto $\mathbf{x}_0$ se è derivabile in $\mathbf{x}_0$ e se¹

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0 \quad [11.9]$$

Segue subito dalla definizione che

Teorema 11.2 Una funzione differenziabile in $\mathbf{x}_0$ è continua in $\mathbf{x}_0$. Inoltre essa è derivabile in ogni direzione, e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}). \quad [11.10]$$

Dimostrazione Sia f differenziabile in $\mathbf{x}_0$. Cominciamo a dimostrare che è continua. Si ha

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, i due termini a secondo membro tendono a 0, e quindi $f(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$, cosicché f è continua in $\mathbf{x}_0$.

Veniamo ora alla seconda parte del teorema. Sia $\mathbf{v}$ una direzione, e sia $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$. Quando $t \rightarrow 0$, si ha $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$, e quindi per la [11.9]

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) - (\nabla f(\mathbf{x}_0), t\mathbf{v})}{t} = 0.$$

¹ Ricordiamo che con $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ si indica il prodotto scalare tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (vedi cap. 3 § 1).

Per la definizione di prodotto scalare, si ha $(\nabla f(\mathbf{x}_0), t\mathbf{v}) = t(\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v})$, e quindi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}).$$

che è esattamente la [11.10]. □

Notiamo che la [11.10] non vale se f , pur avendo derivate in ogni direzione, non è differenziabile in $\mathbf{x}_0$. Ad esempio, la solita funzione [11.8] ha ambedue le derivate parziali nulle in $(0, 0)$, e dunque $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, mentre le derivate lungo le altre direzioni sono diverse da zero; di conseguenza non può valere la relazione [11.10].

Osservazione 11.2 A differenza delle funzioni di una variabile, il grafico di quelle di due o più variabili richiederebbe almeno tre dimensioni, e quindi non si presta a essere disegnato su un piano. Così, mentre si può tracciare un grafico che riporta il profilo altimetrico di una strada (cioè l'altezza sul livello del mare di ogni punto di questa), in una carta topografica, che descrive una regione a due dimensioni, non è possibile riprodurre l'altezza sul livello del mare dei vari luoghi. Per questo si usa il semplice artificio di riportare le cosiddette *linee di livello*, cioè delle linee che si trovano tutte alla stessa altezza sul livello del mare. Se si indica con $f(x, y)$ l'altezza del punto (x, y) , le linee di livello hanno equazione $f(x, y) = k$. Al variare della costante k si ottengono dunque differenti linee di livello; viaggiando su una di esse si resta sempre alla stessa altezza, mentre andando in direzioni diverse si sale o si scende più o meno a seconda dell'angolo che la direzione data fa con la linea di livello da cui si era partiti.

La salita più ripida si ha quando si va nella direzione del gradiente di f . Supponiamo di partire da un punto $\mathbf{x}_0$, che supponiamo non stazionario ($\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$), e poniamo

$$\mathbf{v} = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}.$$

Il vettore $\mathbf{v}$ ha la direzione del gradiente, e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}) = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

Se invece si prende una qualsiasi altra direzione $\mathbf{w}$, si ha

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}_0) \right| = |(\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{w})| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{w}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$

Si ha dunque

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0);$$

la pendenza della funzione f nella direzione del gradiente è maggiore di quella in ogni altra direzione. □

Sempre dalla definizione di funzione differenziabile segue che il piano di equazione

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad [11.11]$$

è quello che approssima meglio il grafico $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Infatti, se $z = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ è un generico piano passante per questo punto, si ha

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

se e solo se f è differenziabile e (a, b) è il gradiente di f , cioè se $a = f_x(x_0, y_0)$ e $b = f_y(x_0, y_0)$.

Di conseguenza, la [11.11] è l'equazione del piano tangente alla superficie $z = f(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Osservazione 11.3 Come nel caso di una variabile (vedi osservazione 8.3) si può interpretare quanto detto finora in termini di incrementi infinitesimi delle variabili indipendenti x_i e della funzione f . Quando a ognuna delle variabili x_i si assegna un incremento infinitesimo dx_i , la funzione f riceve un incremento $df(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$. Risulta allora

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n D_i f(\mathbf{x}) dx_i. \quad [11.12]$$

La quantità $df(\mathbf{x})$ si dice *differenziale* (o anche differenziale totale) della funzione f nel punto $\mathbf{x}$; essa è uguale alla somma dei prodotti delle derivate parziali per gli incrementi infinitesimi delle rispettive variabili. Oggi si preferisce evitare l'introduzione di incrementi infinitesimi, e si interpreta la relazione precedente come una relazione tra *funzionali lineari* su $\mathbf{R}^n$. Noi non insisteremo oltre su questo punto, e non parleremo di differenziale che sporadicamente, per lo più nelle note storiche. $\square$

Torniamo ora al rapporto tra derivabilità e differenziabilità. Come abbiamo detto, la differenziabilità di una funzione implica la sua derivabilità in ogni direzione, mentre non è vero il viceversa. Si ha però il seguente

Teorema 11.3 (del differenziale totale) *Supponiamo che la funzione $f(\mathbf{x})$ abbia derivate parziali in un intorno di $\mathbf{x}_0$, e che queste siano continue in $\mathbf{x}_0$. Allora f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$.*

Dimostrazione Per semplicità, consideriamo solo il caso di due variabili. Dobbiamo far vedere che la quantità

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

tende a zero quando il punto (x, y) tende a (x_0, y_0) . Per questo, cominciamo col valutare la differenza $f(x, y) - f(x_0, y_0)$. Per il teorema di Lagrange (vedi la sezione precedente) esistono due numeri, ξ compreso tra x_0 e x , e η compreso tra y_0 e y , tali che

$$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x - x_0)$$

$$f(x, y) - f(x, y_0) = f_y(x, \eta)(y - y_0)$$

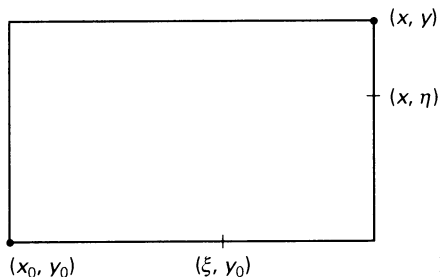


Figura 11.1

Sommando le due equazioni membro a membro i termini $f(x, y_0)$ si cancellano, e si ottiene

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, y_0)(x - x_0) + f_y(x, \eta)(y - y_0)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \\ = (f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)) \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \\ + (f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)) \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \end{aligned}$$

Le due frazioni a secondo membro sono ambedue minori o uguali a 1 in valore assoluto, e quindi il modulo della quantità a primo membro si maggiora con

$$|f_x(\xi, y_0) - f_x(x_0, y_0)| + |f_y(x, \eta) - f_y(x_0, y_0)|.$$

Se ora facciamo tendere (x, y) a (x_0, y_0) , anche i punti (ξ, y_0) e (x, η) tenderanno a (x_0, y_0) . Per la continuità delle derivate f_x e f_y , l'ultima quantità tenderà anch'essa a 0, e il teorema è dimostrato. $\square$

Una funzione f derivabile in un insieme E e con derivate continue si dice *di classe C^1 in E* : $f \in C^1(E)$. Per il teorema precedente una funzione di classe C^1 è differenziabile in ogni punto di E . Analogamente, una funzione che ha derivate parziali di ordine m (vedi sotto) continue in E , si dice di classe C^m in E . Per analogia, una funzione continua in E si dice di classe C^0 .

Esercizi

11.5. Calcolare il gradiente ∇f delle seguenti funzioni, e verificare che siano differenziabili.

1. $x + y$

3. $\|\mathbf{x}\|^2$

5. $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$

2. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$

4. $e^{\|\mathbf{x}\|^2}$

11.3. Derivate successive

Come nel caso di una variabile, se una funzione f è derivabile in un insieme E , si possono derivare le derivate prime, ottenendo le derivate seconde, e poi via via le derivate terze ecc. Siccome ci sono n derivate parziali, e ognuna di esse avrà ancora n derivate parziali, ci saranno n^2 derivate seconde, n^3 derivate terze, e così via.

La derivata seconda fatta prima rispetto a x_k e poi rispetto a x_i si indica con uno dei simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, \quad D_i D_k f, \quad D_{ik} f, \quad f_{x_i x_k}, \quad \text{oppure} \quad f_{ik}.$$

Sorgono qui alcuni problemi che non si presentavano nel caso di una sola variabile. Mettiamoci per semplicità nel caso di una funzione $f(x, y)$ di due variabili, facciamo la derivata rispetto a x e poi deriviamo ancora rispetto a y : otterremo la derivata seconda f_{yx} . Se invece invertiamo l'ordine di derivazione, avremo la derivata f_{xy} .

Notiamo che le due derivate f_{xy} e f_{yx} possono essere diverse, come si vede dall'esempio che segue.

Esempio 11.8 Calcoliamo le derivate seconde miste della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nell'origine.

Si ha

$$f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 y - y^3}{h^2 + y^2} = -y$$

e quindi, derivando ancora rispetto a y , $f_{yx}(0, 0) = -1$. Analogamente, risulta $f_y(x, 0) = x$, e dunque $f_{xy}(0, 0) = 1 \neq f_{yx}(0, 0)$. □

Vale però il seguente

Teorema 11.4 (di Schwarz) *Se la funzione $f(x, y)$ ha derivate parziali miste in un intorno I del punto (x, y) , e queste sono continue in (x, y) , allora sono uguali in questo punto: $f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$.*

Dimostrazione Siano h e k due numeri reali tali che il punto $(x + h, y + k)$ sia contenuto in I , e sia

$$A(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y).$$

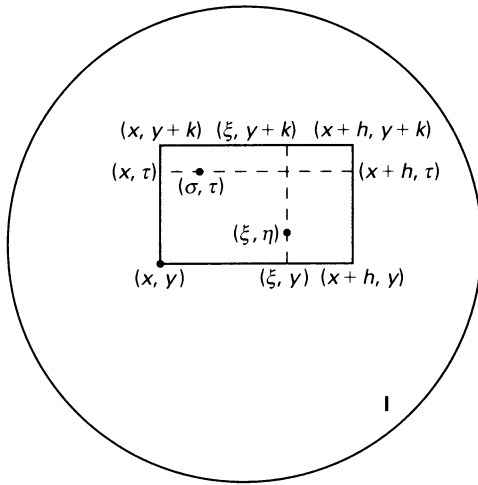


Figura 11.2

Se poniamo $p(t) = f(t, y + k) - f(t, y)$, si ha $A(h, k) = p(x + h) - p(x)$, e per il teorema di Lagrange:

$$A(h, k) = p'(\xi)h = [f_x(\xi, y + k) - f_x(\xi, y)]h$$

dove ξ è compreso tra x e $x + h$.

Applicando di nuovo il teorema di Lagrange alla funzione $f_x(\xi, t)$, la quantità tra parentesi quadre sarà uguale a $f_{yx}(\xi, \eta)k$, con η compreso tra y e $y + k$. In conclusione

$$A(h, k) = f_{yx}(\xi, \eta)hk.$$

Analogamente, posto $q(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$, si ha $A(h, k) = q(y + k) - q(y)$, e per il teorema di Lagrange

$$A(h, k) = q'(\tau)k = [f_y(x + h, \tau) - f_y(x, \tau)]k = f_{yx}(\sigma, \tau)hk$$

dove σ e τ sono compresi rispettivamente tra x e $x + h$, e tra y e $y + k$.

Si ha dunque

$$f_{yx}(\xi, \eta) = f_{yx}(\sigma, \tau).$$

Se ora facciamo tendere h e k a zero, sia il punto (ξ, η) che il punto (σ, τ) tenderanno a (x, y) . Per la continuità delle derivate miste, $f_{yx}(\xi, \eta)$ tenderà a $f_{yx}(x, y)$ e $f_{xy}(\sigma, \tau)$ a $f_{xy}(x, y)$. Si ha dunque

$$f_{yx}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

e il teorema è dimostrato. □

Lo stesso risultato vale per funzioni di più variabili: se le derivate $D_{ij}f$ e $D_{ji}f$ esistono in un intorno del punto $\mathbf{x}$ e sono continue in $\mathbf{x}$, allora sono uguali in $\mathbf{x}$. Vale poi anche un analogo del teorema per le derivate di ordine superiore; ad esempio se le derivate terze $D_{ijk}f$ e $D_{ikj}f$ esistono in un intorno di $\mathbf{x}$ e sono continue in $\mathbf{x}$, sono uguali in questo punto. Così se ad esempio tutte le derivate terze di una funzione esistono e sono continue, non importa dire in che ordine le derivate vengono eseguite, ma solo rispetto a quali variabili sono effettuate. In questo caso, quando si dice: “la derivata terza fatta due volte rispetto a x e una rispetto a y ”, non importa specificare quale derivata si fa per prima, quale per seconda e quale per terza.

Esercizi

11.6. Calcolare le derivate seconde delle funzioni seguenti:

1. $x^2y + xy$

3. $e^x \sin(x + y)$

5. $xy + z^2x$

2. $x + \sin y$

4. $x^2 |x| \arctg y$

11.4. Funzioni composte

Anche nel caso di funzioni di più variabili vale una formula per la derivata di una funzione composta, con in più la varietà delle situazioni derivanti dal numero delle variabili.

Nel caso generale avremo il seguente

Teorema 11.5 Sia $E \subset \mathbf{R}^k$, $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(t_1, t_2, \dots, t_k)$ una funzione che manda E in $F \subset \mathbf{R}^n$, e $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ una funzione che manda F in $\mathbf{R}$. Supponiamo che tutte queste funzioni siano di classe C^1 .

Allora anche la funzione composta $g(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ è di classe C^1 , e si ha per ogni direzione $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{t}) = \left(\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t})), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{t}) \right) \quad [11.13]$$

dove con $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}}$ si è indicato il vettore che ha come componenti $\frac{\partial x_1}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial x_2}{\partial \mathbf{v}}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial \mathbf{v}}$.

In particolare, se $\mathbf{v}$ è la direzione dell'asse t_i ,

$$\frac{\partial g}{\partial t_i} = \left(\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t})), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t_i} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(\mathbf{t}). \quad [11.14]$$

Dimostrazione Si ha

$$g(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - g(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v})) - f(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = f(\mathbf{x}(\mathbf{t}) + [\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})]) - f(\mathbf{x}(\mathbf{t})).$$

Se si pone $s = \|\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})\|$ e $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})}{s}$, si ottiene per la [11.3]:

$$g(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - g(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{t}) + s\mathbf{w}) - f(\mathbf{x}(\mathbf{t})) = s \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tau \mathbf{w})$$

con τ compreso tra 0 e t . Tenendo conto della [11.10], si ha allora:²

$$g(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - g(\mathbf{t}) = s(\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tau \mathbf{w}), \mathbf{w}).$$

Se ora dividiamo per h , e ricordiamo la definizione di $\mathbf{w}$, otteniamo

$$\frac{g(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - g(\mathbf{t})}{h} = \left(\nabla f(\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \tau \mathbf{w}), \frac{\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})}{h} \right). \quad [11.15]$$

Quando $h \rightarrow 0$, tendono a zero anche $s = \|\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})\|$ e τ , che è compreso tra 0 e s , mentre

$$\frac{\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - \mathbf{x}(\mathbf{t})}{h} \text{ tende a } \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{t})$$

La [11.3] segue allora passando al limite nella [11.15] e tenendo conto della continuità di ∇f . $\square$

Un caso interessante si ha quando $k = 1$, ossia quando $\mathbf{x}(t)$ è una curva. In questo caso $g(t)$ è una funzione di una sola variabile, e la [11.14] diventa:

$$g'(t) = \sum_{h=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_h}(\mathbf{x}(t)) x'_h(t) = (\nabla f(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t)). \quad [11.16]$$

dove $\mathbf{x}'(t)$ è il vettore *velocità*, che ha come componenti le derivate delle componenti di $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)).$$

La derivata g' si chiama anche *derivata della funzione f lungo la curva $\mathbf{x}(t)$* .

² Osserviamo che abbiamo tacitamente supposto che $s \neq 0$, cioè che $\mathbf{x}(\mathbf{t} + h\mathbf{v}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}) \neq 0$. D'altra parte, la relazione segue e la [11.5] che ne deriva valgono anche se $s = 0$, dato che in questo caso si riducono all'identità $0 = 0$.

Un caso molto frequente è quello in cui la curva $\mathbf{x}(t)$ è una retta passante per il punto $\mathbf{x}$ e di direzione $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}.$$

In questo caso, essendo $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{v}$, la [11.16] diventa

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}(t)) = (\nabla f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}), \mathbf{v})$$

in accordo con la [11.2].

La [11.16] può essere ancora derivata per ottenere $g''(t)$, ovvero la derivata seconda di f lungo la curva $\mathbf{x}(t)$. A noi interesserà solo il caso di una retta: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$; in questo caso, se le derivate seconde sono continue,³ si ha

$$g''(t) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{d}{dt} D_i f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n v_i \sum_{j=1}^n v_j D_{ij} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \quad [11.17]$$

Osservazione 11.4 Possiamo scrivere la relazione precedente in una forma più concisa utilizzando la notazione matriciale.

Ricordiamo che una matrice $k \times n$ è una tabella di kn numeri disposti in k righe e n colonne. Ad esempio la tabella

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice 3×4 .

Gli elementi di una matrice $k \times n$ si indicano con il simbolo a_{ij} , o H_{ij} , o un qualsiasi simbolo con due indici, il primo che va da 1 a k , il secondo da 1 a n . Ad esempio, $a_{2,3}$ indica il numero che si trova nella seconda riga e nella terza colonna; nell'esempio precedente si ha $a_{2,3} = 0$.

Se $A = \{a_{ij}\}$ è una matrice $k \times n$, e $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbf{R}^n$, possiamo definire il vettore $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^k$, le cui componenti sono

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Con queste notazioni potremo scrivere la [11.17] in forma più compatta. Se infatti indichiamo con $\nabla^2 f$ la *matrice hessiana*⁴ della funzione f , cioè la matrice $n \times n$ le cui componenti sono le derivate seconde di f :

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \{D_{ij} f(\mathbf{x})\},$$

³ Per il teorema del differenziale totale ciò implica che le derivate $D_i f$ sono a loro volta differenziabili.

⁴ A volte la matrice hessiana si indica anche con $D^2 f$, o più brevemente con H .

avremo

$$\sum_{j=1}^n v_j D_{t,j} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = \nabla^2 f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \mathbf{v}$$

e dunque

$$g''(t) = (\nabla^2 f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

In particolare, per $t = 0$ si ha

$$g'(0) = (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{v}) \quad [11.18]$$

$$g''(0) = (\nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad [11.19]$$

due formule che ci saranno utili nel seguito. $\square$

Esercizi

11.7. Sia $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la funzione di componenti $f_1(x, y) = x - y$, $f_2(x, y) = xy - 1$, e sia $g(x, y) = e^{x-y}$.

1. Si calcoli la funzione composta $F = g \circ f$.
2. Si calcolino le derivate parziali di $g \circ f$ a partire dalla sua espressione esplicita calcolata sopra.
3. Si calcolino le stesse derivate usando la formula [11.14] e si verifichi che il risultato sia lo stesso.

11.8. Si faccia lo stesso con le seguenti funzioni:

1. $f_1 = x^2, f_2 = 2 - y, g = x^2 - y$
2. $f_1 = x - y, f_2 = x + y, g = xy \cos y$
3. $f_1 = t + 2, f_2 = t^2 - 1, f_3 = t^3 - t, g = xy - z$

11.5. Massimi e minimi relativi

Con l'aiuto delle formule precedenti possiamo esaminare di nuovo i massimi e i minimi relativi di una funzione di più variabili.

Abbiamo già visto nel § 1 che un punto di massimo o di minimo relativo interno deve essere un punto stazionario, cioè un punto in cui si annulla il gradiente di f . La dimostrazione consisteva nell'osservazione che la funzione $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$ ha un massimo o un minimo in $t = 0$, e quindi doveva essere $g'(0) = 0$.

La stessa funzione dà una condizione necessaria sulle derivate seconde: se la funzione $f(\mathbf{x})$ ha un massimo relativo in un punto interno $\mathbf{x}_0$, la funzione $g(t)$ ha un massimo relativo per $t = 0$, e quindi deve essere $g''(0) \leq 0$. Tenuto allora conto della [11.19],

si dovrà avere

$$(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$$

per ogni direzione $\mathbf{v}$.

Analogamente, se in un punto interno $\mathbf{x}_0$ la funzione f ha un minimo relativo, si avrà per ogni direzione $\mathbf{v}$

$$(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0.$$

Una matrice A tale che $(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$ per ogni direzione $\mathbf{v}$ si dice *definita negativa*, mentre si dice *semidefinita negativa* se vale solo la diseuguaglianza $(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$. Analogamente, A si dice *definita positiva* se $(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ per ogni direzione $\mathbf{v}$, e *semidefinita positiva* se $(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$. Per quanto detto sopra, si ha il

Teorema 11.6 *Se una funzione $f(\mathbf{x})$ ha un massimo [minimo] relativo in un punto interno $\mathbf{x}_0$, e supponiamo che f abbia derivate seconde continue in un intorno di $\mathbf{x}_0$. Allora*

1. $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$,
2. la matrice $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è *semidefinita negativa* [positiva].

Il teorema precedente dà delle condizioni *necessarie* affinché un punto interno $\mathbf{x}_0$ sia un punto di massimo o di minimo relativo per la funzione f .

A volte interessano di più delle condizioni *sufficienti*, il cui verificarsi ci garantisce che il punto in esame è effettivamente un punto di massimo o di minimo relativo.

Per questo cominciamo col dimostrare un'estensione a più variabili della formula di Taylor arrestata alle derivate seconde:

Proposizione 11.1 (formula di Taylor) *Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione di classe C^2 in un aperto $A \subset \mathbf{R}^n$, e sia $\mathbf{x}_0$ un punto interno di A . Si ha allora in un intorno di $\mathbf{x}_0$:*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \quad [11.20]$$

dove il resto R_2 è infinitesimo di ordine superiore a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = 0. \quad [11.21]$$

Dimostrazione Per la funzione di una variabile $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})$ vale la relazione

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(\tau)t^2 = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2} g''(0)t^2 + \frac{1}{2} t^2 (g''(\tau) - g''(0)) \quad [11.22]$$

dove τ è un punto compreso tra 0 e t . Ora si ha

$$\begin{aligned} g(0) &= f(\mathbf{x}_0), \\ g'(0) &= (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}), \\ g''(\tau) &= (\nabla^2 f(\mathbf{x}_0 + \tau\mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

e in particolare

$$g''(0)) = (\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Introducendo questi valori nella [11.22], avremo allora

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_0) + t(\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}) + \frac{t^2}{2}(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}, \mathbf{v}) + R_2$$

dove si è posto

$$R_2 = \frac{t^2}{2}([\nabla^2 f(\mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{v}) - \nabla^2 f(\mathbf{x}_0)] \mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad [11.23]$$

In particolare, se prendiamo $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$ e $t = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$, avremo

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + (\nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \quad [11.24]$$

Resta da dimostrare la [11.21]. Si ha dalla [11.23]:

$$\frac{R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \frac{1}{2} \left([\nabla^2 f(\mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{v}) - \nabla^2 f(\mathbf{x}_0)] \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}, \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right)$$

e dunque

$$\frac{|R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n |D_{ij}f(\mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{v}) - D_{ij}f(\mathbf{x}_0)|$$

Quando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ si ha $\tau \rightarrow 0$, e quindi, poiché le derivate seconde sono continue:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = 0. \quad \square$$

Possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema 11.7 *Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione con derivate seconde continue. Se in un punto interno $\mathbf{x}_0$ il gradiente si annulla e la matrice hessiana è definita positiva, il punto $\mathbf{x}_0$ è di minimo relativo.*

Dimostrazione Tenuto conto dell'annullarsi del gradiente, dalla [11.20] divisa per $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ si ha

$$\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \frac{1}{2}(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \frac{R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}$$

dove si è posto $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$.

La funzione

$$H(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} (\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{w}, \mathbf{w})$$

è continua; siccome l'insieme delle direzioni:

$$S = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{w}\| = 1 \}$$

è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass essa avrà un minimo assoluto m in S . Dato poi che per ipotesi la funzione H è positiva in S , si avrà $m > 0$.

Avremo allora

$$\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} \geq m + \frac{R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}$$

Per la proposizione precedente, quando $\mathbf{x}$ tende a $\mathbf{x}_0$ l'ultimo termine tende a zero.

Pertanto, preso $\varepsilon = \frac{m}{2}$ nella definizione di limite, esiste un intorno I di $\mathbf{x}_0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in I$ risulta

$$\frac{R_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} > -\frac{m}{2}$$

e quindi in conclusione

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{m}{2} > 0$$

per ogni $\mathbf{x} \in I$. Il punto $\mathbf{x}_0$ è dunque un punto di minimo relativo. □

Notiamo che abbiamo dimostrato che $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo relativo *stretto*; cioè che in ogni altro punto $\mathbf{x} \in I$ risulta $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$.

Se invece in $\mathbf{x}_0$ il gradiente si annulla e la matrice hessiana è definita negativa, la funzione f ha un massimo relativo stretto, come si può vedere adattando il ragionamento precedente, o anche osservando che la matrice hessiana della funzione $-f$ è definita positiva.

Nelle applicazioni del teorema precedente si troveranno in primo luogo i punti stazionari della funzione $f(\mathbf{x})$, e poi si vedrà il comportamento della matrice hessiana in questi punti. Se $\mathbf{x}_0$ è un punto stazionario, si hanno allora vari casi:

1. La matrice hessiana è definita positiva: il punto $\mathbf{x}_0$ è di minimo relativo.
2. La matrice hessiana è definita negativa: $\mathbf{x}_0$ è di massimo relativo.
3. La quantità $(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}, \mathbf{v})$ assume sia valori positivi che negativi su S : il punto non è né di massimo né di minimo relativo. In questo caso si dice che $\mathbf{x}_0$ è un *punto di sella*.
4. La matrice hessiana è semidefinita (positiva o negativa), ma non definita. In questo caso non si può concludere nulla in generale, e bisogna esaminare in dettaglio cosa accade in un intorno di $\mathbf{x}_0$.

Le funzioni seguenti, che hanno tutte un punto stazionario nell'origine, illustrano i vari casi.

1. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$. Si ha $(\nabla^2 f(0, 0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2v_1^2 + 4v_2^2 > 0$, e quindi l'origine è un punto di minimo relativo (in questo caso anche assoluto).

2. $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2$. Risulta $(\nabla^2 f(0, 0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -2v_1^2 - 2v_2^2 < 0$, e $(0, 0)$ è un punto di massimo relativo (non assoluto).

3. $f(x, y) = xy$. Si ha $(\nabla^2 f(0, 0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2v_1v_2$, che può prendere valori sia positivi (quando v_1 e v_2 hanno lo stesso segno) che negativi (quando hanno segno opposto). Di conseguenza l'origine è un punto di sella.

4. $f(x, y) = x^2 + y^4$. Si ha $(\nabla^2 f(0, 0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2v_1^2 \geq 0$ e quindi la matrice $\nabla^2 f(0, 0)$ è semidefinita positiva. Si vede subito che l'origine è un punto di minimo assoluto, dato che $f(0, 0) = 0$ mentre $f(x, y) \geq 0$.

5. $f(x, y) = x^2 - y^4$. Anche in questo caso si ha $(\nabla^2 f(0, 0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 2v_1^2 \geq 0$, ma la funzione f non ha né un massimo né un minimo relativo in $(0, 0)$. Infatti si ha $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) > 0$ e $f(0, y) < 0$.

Osservazione 11.5 In generale non è semplice determinare se la matrice hessiana è definita o no in un punto $\mathbf{x}_0$. Nel caso di due variabili si ha

$$(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f_{xx}v_1^2 + 2f_{xy}v_1v_2 + f_{yy}v_2^2 = v_2^2(f_{xx}\lambda^2 + 2f_{xy}\lambda + f_{yy})$$

con $\lambda = \frac{v_1}{v_2}$. La quantità tra parentesi è un polinomio di secondo grado in λ , che ha due, una o nessuna radice reale a seconda che il discriminante

$$\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$$

è positivo, nullo o negativo.

Nel primo caso, esso assume sia valori positivi che negativi, e quindi il punto in esame è un punto di sella; nel secondo la matrice hessiana è semidefinita, nel terzo definita. Per vedere in quest'ultimo caso se è definita positiva o negativa, basta guardare al segno di f_{xx} ; se $f_{xx} > 0$ si ha $(\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$, e $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva; se invece $f_{xx} < 0$, $\nabla^2 f(\mathbf{x}_0)$ è definita negativa. $\square$

Esempio 11.9 Cerchiamo i massimi e i minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - x^3.$$

I punti stazionari della funzione f sono le soluzioni del sistema

$$f_x = 4x - 2y - 3x^2 = 0$$

$$f_y = -2x + 4y = 0.$$

Dalla seconda equazione si ricava $x = 2y$, che introdotto nella prima dà $6y - 12y^2 = 0$.

Quest'ultima ha soluzioni $y = 0$ e $y = \frac{1}{2}$, alle quali corrispondono rispettivamente $x = 0$ e $x = 1$. I punti stazionari della f sono dunque $(0, 0)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

In corrispondenza di $(0, 0)$ si ha

$$f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 1 - 4 < 0$$

e $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$. Pertanto la matrice hessiana è definita positiva, e quindi $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo.

Per quanto riguarda $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ si ha

$$f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} = 1 + 2 > 0$$

e quindi si tratta di un punto di sella. □

A volte non è necessario calcolare la matrice hessiana, perché considerazioni di tipo diverso possono indicare che un dato punto stazionario è un punto di minimo o di massimo.

Esempio 11.10 Tra tutti i parallelepidi che hanno la somma degli spigoli fissata, trovare quello di volume massimo.

Osserviamo per prima cosa che ci si può limitare ai parallelepidi rettangoli, dato che ogni parallelepipedo ha volume minore del parallelepipedo rettangolo con gli stessi spigoli. Se indichiamo con x , y e z le lunghezze degli spigoli, e con L la loro somma, si tratterà di trovare il massimo della funzione xyz con la condizione $x + y + z = L$. Da questa si ricava $z = L - x - y$, e quindi si tratta di trovare il massimo della funzione $f(x, y) = xy(L - x - y)$. I tre spigoli devono essere naturalmente positivi, e quindi il massimo deve essere cercato nel triangolo $x > 0$, $y > 0$, $x + y < L$. Sul bordo di questo triangolo la funzione $f(x, y)$ vale 0, mentre all'interno è sempre positiva; ci sarà dunque un massimo interno.

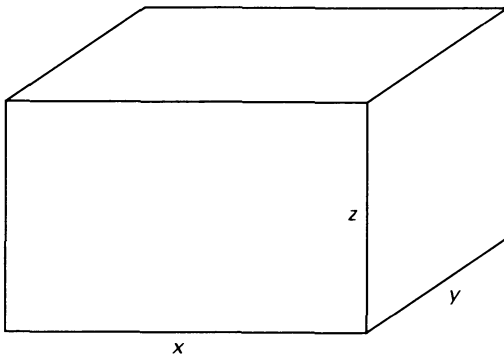


Figura 11.3

Cerchiamo i punti stazionari. Si ha $f_x = y(L - 2x - y)$ e $f_y = x(L - x - 2y)$, e quindi, scartate le soluzioni $(0, 0)$, $(0, L)$ e $(L, 0)$ che sono sul bordo del triangolo, resta solo la soluzione interna $\left(\frac{L}{3}, \frac{L}{3}\right)$. Dato che c'è un solo punto stazionario, questo non può essere che il punto di massimo; il valore massimo è $\frac{L^3}{27}$, che si ottiene quando $x = y = z = \frac{L}{3}$. Il parallelepipedo cercato è dunque il cubo.

Questo risultato si traduce in una disuguaglianza. Infatti, per quanto abbiamo dimostrato, se x, y, z sono dei numeri positivi si ha $xyz \leq \frac{L^3}{27}$; ricordando allora che $L = x + y + z$, potremo concludere che

$$27xyz \leq (x + y + z)^3,$$

col segno = che vale se e solo se $x = y = z$.

□

Esercizi

11.9. Trovare i punti stazionari delle funzioni che seguono, e per ognuno dire se si tratta di un massimo (M) o di un minimo (m) relativo, o di un punto di sella (s).

1. $x - x^2 - y^2$

3. $x^3 + x - 4xy - 2y^2$

5. $x(x + y)e^{y-x}$

2. $xy(x - 1)$

4. $x(y + 1 - xy)$

6. $\cos(x + y) + \cos(x - y)$

11.10. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di spigoli x, y, z e di volume assegnato V , trovare (se esiste) quello che rende minima la quantità $x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

11.11. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli di spigoli x, y, z e di volume assegnato V , trovare (se esiste) quello che rende minima la quantità $xy + 2xz + 2yz$.

11.12. Tra tutti i rettangoli trovare (se esiste) quello che rende minima la somma $P + \frac{1}{A}$ del perimetro e dell'inverso dell'area.

11.6. Risposte agli esercizi

11.1.

1. $3x^2y^2, 2x^3y$

4. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

2. $2xy^{-3}, -3x^2y^{-4}$

5. $\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2}$

3. $2xy \sin xy + x^2y^2 \cos xy, x^2 \sin xy + x^3y \cos xy$

6. $\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}$

$$7. yx^{y-1}, x^y \log x$$

$$8. \frac{1}{\cos^2(x+y^2)}, \frac{2y}{\cos^2(x+y^2)}$$

11.2.

$$1. x^2 y \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} x - y \right)$$

$$2. -2xy - 4 \left(\frac{y}{3} + \sqrt{2}x \right)$$

$$3. \frac{2}{3} x \operatorname{sen} xy (\sqrt{2}x - y) + \frac{1}{3} x^2 y \cos xy (2\sqrt{2}x - y)$$

$$4. \frac{2\sqrt{2}y - x}{3\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$5. -\frac{y + 2\sqrt{2}x}{3(x^2 - y^2)}$$

$$6. \frac{2(2\sqrt{2}y - x)}{3(x^2 + y^2)}$$

$$7. \frac{x^{y-1}}{3} (2\sqrt{2}x \log y - y)$$

$$8. \frac{4\sqrt{2}y - 1}{3\cos^2(x+y^2)}$$

11.3. Posto $s = -t$, si ha $\frac{f(\mathbf{x} + t(-\mathbf{v})) - f(\mathbf{x})}{t} = -\frac{f(\mathbf{x} + s\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{s}$, e siccome quando $t \rightarrow 0$ anche $s \rightarrow 0$, il risultato segue passando al limite.

$$\mathbf{11.4.} \frac{2}{3\sqrt{3}} [\text{M}], -\frac{2}{3\sqrt{3}} [\text{m}]$$

11.5.

$$1. \nabla f = (1, 1)$$

$$3. \nabla f = 2\mathbf{x}$$

$$5. D_k f = \sum_{i=1}^n (a_{ik} + a_{ki}) x_i$$

$$2. \nabla f = \mathbf{x}_0$$

$$4. \nabla f = 2\mathbf{x} e^{||\mathbf{x}||^2}$$

11.6.

$$1. f_{xx} = 2y; f_{yy} = f_{yx} = 2x + 1, f_{yy} = 0$$

$$2. f_{xx} = -y^2 \operatorname{sen} xy; f_{xy} = f_{yx} = \cos xy, -xy \operatorname{sen} xy, f_{yy} = -x^2 \operatorname{sen} xy$$

$$3. f_{xx} = 2e^y \cos(x+y); f_{xy} = f_{yx} = e^y (\cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y)), f_{yy} = -e^y \operatorname{sen}(x+y)$$

$$4. f_{xx} = 6|x| \arctg y; f_{xy} = f_{yx} = \frac{3x|x|}{1+y^2}, f_{yy} = -\frac{2x^2|x|y}{(1+y^2)^2}$$

$$5. f_{xx} = f_{yy} = f_{zy} = f_{yz} = 0, f_{zz} = 2x, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{zx} = f_{xz} = 2z$$

11.7.

$$1. e^{x-y-xy+1} \qquad 2. F_x = (1-y)e^{x-y-xy+1}, F_y = -(1+x)e^{x-y-xy+1}$$

11.8.

$$1. F = x^4 + y - 2; F_x = 4x^3, F_y = 1$$

$$2. F = (x^2 - y^2) \cos(x+y), F_x = 2x \cos(x+y) - (x^2 - y^2) \sin(x+y),$$

$$F_y = -2y \cos(x+y) - (x^2 - y^2) \sin(x+y)$$

$$3. F = 2t^2 - 2, F' = 4t$$

11.9.

$$1. \left(\frac{1}{2}, 0\right)(M)$$

$$2. (0, 0)(s); (1, 0)(s)$$

$$3. (-1, 1)(M); \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)(s)$$

$$4. (0, -1)(s); (1, 1)(s)$$

$$5. (0, 0)(s); \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)(m)$$

$$6. \left((k+h)\frac{\pi}{2}, (k-h)\frac{\pi}{2}\right), (s) \text{ se } k \text{ e } h \text{ sono uno pari e uno dispari, } (M) \text{ se sono ambe}$$

due pari, (m) se sono ambedue dispari

$$\mathbf{11.10.} \quad x^2 = 2y^2 = 3z^2 = \sqrt[3]{6V^2}$$

$$\mathbf{11.11.} \quad x = y = 2z = \sqrt[3]{2V}$$

$$\mathbf{11.12.} \quad \text{Il quadrato di lato } \sqrt[3]{2}$$

Capitolo 12

Il calcolo integrale in più variabili

12.1. L'integrazione

Come il calcolo differenziale, anche la teoria dell'integrazione si estende a funzioni di più variabili. Per semplicità, ci limiteremo anche qui – almeno nelle dimostrazioni dei teoremi – al caso di due variabili. Avvertiamo comunque che i risultati valgono con le opportune modifiche anche per funzioni di n variabili.¹

Per quanto riguarda la definizione di funzioni integrabili, non c'è grande differenza rispetto al caso di una variabile; il solo punto di una certa rilevanza consiste nel fatto che mentre in una variabile gli integrali si facevano prevalentemente su un intervallo, ora non ci sono domini di integrazione privilegiati. I più semplici sono ovviamente i rettangoli, ma spesso si devono calcolare integrali estesi a triangoli, cerchi, ellissi, o altro.

D'altra parte ci si può ridurre a considerare sempre l'integrale su tutto $\mathbf{R}^2$; infatti se si vuole integrare una funzione limitata $f(\mathbf{x})$ su un insieme E limitato, basterà porre uguale a zero la funzione f fuori di E . La nuova funzione f^* , che vale f in E e zero fuori di E , sarà limitata (perché f era limitata in E) e varrà 0 fuori di un rettangolo (basterà prendere un rettangolo che contiene E). In questo modo, almeno formalmente, si elimina dalla definizione la considerazione dell'insieme di integrazione.

Cominciamo a dare alcune definizioni. In primo luogo, un *rettangolo* è il prodotto cartesiano di due intervalli $[a, b) \times [c, d)$, cioè l'insieme dei punti $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ che hanno la prima coordinata x in $[a, b)$ e la seconda in $[c, d)$:²

$$R = [a, b) \times [c, d) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x < b, c \leq y < d\}.$$

¹ In particolare, dove parleremo di quadrati, rettangoli, cerchi ecc., si dovrà intendere in tre dimensioni cubi, parallelepipedi rettangoli, sfere ecc.

² Più in generale, un rettangolo in $\mathbf{R}^n$ è il prodotto cartesiano $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)$ di intervalli aperti a destra.

Operiamo ora una suddivisione di $[a, b]$ in n sottointervalli mediante i punti $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$, e una suddivisione di $[c, d]$ in m sottointervalli mediante i punti $y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m = d$. Posto $I_h = [x_{h-1}, x_h]$ e $J_k = [y_{k-1}, y_k]$, il rettangolo R verrà suddiviso in $n \times m$ rettangolini $R_{hk} = I_h \times J_k$.

Una funzione semplice è una funzione che assume un valore costante su ognuno di questi rettangolini, e che vale 0 fuori di R . Se indichiamo con λ_{hk} il valore che φ assume in R_{hk} , avremo

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} \varphi_{R_{hk}}(x)$$

dove con $\varphi_{R_{hk}}$ si è indicata la funzione caratteristica di R_{hk} .

Per queste funzioni si definisce l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \varphi dx dy &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} m(R_{hk}) = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} m(I_h) m(J_k) = \\ &= \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^m \lambda_{hk} (x_h - x_{h-1})(y_k - y_{k-1}). \end{aligned}$$

Veniamo ora all'integrale di una funzione generica $f(\mathbf{x})$. Per non appesantire il discorso, introduciamo alcuni termini:

Definizione 12.1 Chiameremo supporto di una funzione f la chiusura dell'insieme in cui $f(\mathbf{x})$ è diversa da 0:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Il supporto di una funzione è ovviamente un insieme chiuso; se è anche limitato (cioè se la funzione f vale 0 fuori di un insieme limitato, ad esempio di un rettangolo), $\text{supp}(f)$ è un insieme compatto; diremo allora che f è nulla fuori di un compatto, ovvero che è una funzione *a supporto compatto*, o anche che *ha supporto compatto*.

Come nel caso di una variabile, indichiamo ora con $\mathcal{S}^+$ la classe delle funzioni semplici φ maggiorianti, cioè tali che $\varphi(x) \geq f(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, e con $\mathcal{S}^-$ quella delle funzioni semplici ψ minoranti, cioè con $\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x})$.

Definizione 12.2 Diremo che una funzione f , limitata e nulla fuori di un compatto, è integrabile (secondo Riemann) se

$$\sup_{\psi \in \mathcal{S}^-} \int \psi dx dy = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}^+} \int \varphi dx dy. \quad [12.1]$$

In questo caso, il valore comune si chiama *integrale* della funzione f e si indica con

$$\int f(x, y) dx dy \quad \text{o più in generale con} \quad \int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Una definizione del tutto simile, con le ovvie modifiche del caso, vale nel caso di n variabili.

Osservazione 12.1 A volte le due quantità che compaiono a destra e a sinistra nella [12.1] si chiamano rispettivamente *integrale superiore* e *integrale inferiore* della funzione f :

$$\int^* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \inf_{\varphi \in \mathcal{I}} \int \varphi d\mathbf{x}$$

$$\int_* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup_{\psi \in \mathcal{I}} \int \psi d\mathbf{x}$$

Una funzione f , limitata e con supporto compatto, sarà dunque integrabile se l'integrale superiore è uguale all'integrale inferiore, cioè se risulta

$$\int^* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_* f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

□

Come abbiamo detto, se invece che l'integrale su $\mathbf{R}^n$ vogliamo l'integrale su un insieme E , basterà porre la funzione uguale a zero fuori di E ; ossia prendere la funzione

$$f\varphi_E = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se questa funzione è integrabile, diremo che la f è integrabile su E , e porremo

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int f\varphi_E d\mathbf{x}$$

Osservazione 12.2 Come per una variabile, anche per l'integrale in più variabili avremo che

Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f , limitata e nulla fuori di un compatto, sia integrabile, è che per ogni $\varepsilon > 0$ esistano una funzione semplice maggiorante φ e una minorante ψ tali che

$$\int \varphi d\mathbf{x} - \int \psi d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

□

12.2. La misura degli insiemi

Il problema di determinare se una funzione f è integrabile su un insieme E è complicato dalla varietà dei possibili insiemi, e non è banale nemmeno se $f=1$. Questo caso merita un'attenzione particolare, perché è legato alla misura degli insiemi.

Definizione 12.3 Un insieme limitato E si dice *misurabile* (secondo Peano-Jordan) se la sua funzione caratteristica φ_E è integrabile. In questo caso definiamo *misura di E* il numero

$$m(E) = \int \varphi_E d\mathbf{x}.$$

Ricordiamo che se φ_E è integrabile, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni semplici ψ e φ , con $\psi \leq \varphi_E \leq \varphi$, tali che

$$\int \varphi d\mathbf{x} - \int \psi d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

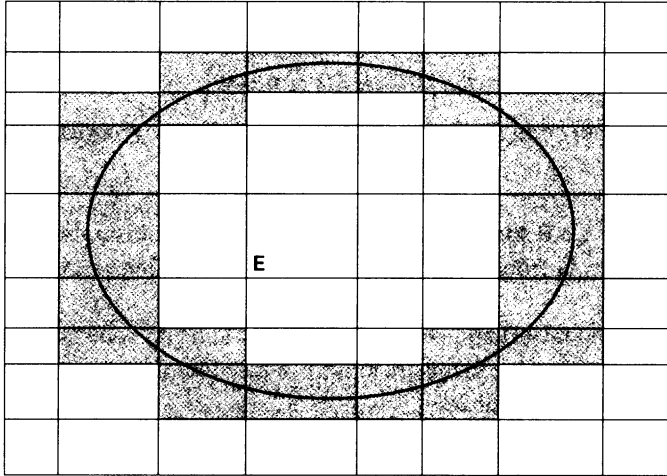


Figura 12.1

Le funzioni φ e ψ provengono da una suddivisione di un rettangolo R che contiene E . È chiaro che converrà prendere φ più piccola possibile, e la ψ più grande possibile, compatibilmente con le disuguaglianze $\psi \leq \varphi_E \leq \varphi$. Questo significa che si prenderà $\varphi = 1$ nei rettangoli R_{hk} che hanno punti in comune con E , e $\varphi = 0$ negli altri; similmente converrà prendere $\psi = 1$ nei rettangoli R_{hk} contenuti in E e $\psi = 0$ negli altri.

Così facendo, l'integrale di φ sarà la somma delle misure dei rettangoli R_{hk} che hanno punti in comune con E , mentre l'integrale di ψ sarà la somma delle misure dei rettangoli R_{hk} contenuti in E . La differenza tra i due integrali sarà allora la somma delle misure dei rettangoli che hanno punti in comune con E ma non sono contenuti in E , cioè dei rettangoli che hanno punti in comune con la frontiera di E .

Chiamiamo ora *plurirettangolo* l'unione P di un numero finito di rettangoli R_i senza punti comuni; e misura di P la somma delle misure dei rettangoli che lo compongono. Avremo allora:

Proposizione 12.1 *Un insieme limitato E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un plurirettangolo P contenuto in E e un plurirettangolo Q che contiene E , tali che $m(Q) - m(P) < \varepsilon$.*

Se E è misurabile, si ha

$$\begin{aligned} m(E) &= \inf\{m(Q), Q \text{ plurirettangolo}, Q \supset E\} = \\ &= \sup\{m(P), P \text{ plurirettangolo}, P \subset E\}. \end{aligned}$$

Se P e Q sono due plurirettangoli, con $P \subset E \subset Q$, la differenza $Q - P$ è un plurirettangolo che contiene ∂E , e risulta $m(Q - P) = m(Q) - m(P)$. Dalla proposizione precedente si può dunque concludere che

un insieme E è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un plurirettangolo Z che contiene la frontiera ∂E , con $m(Z) < \varepsilon$,

e dunque che

un insieme E è misurabile (secondo Peano-Jordan) se e solo se la sua frontiera ∂E ha misura nulla.

Osservazione 12.3 Se A e B sono due insiemi misurabili, sono misurabili anche $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$. Infatti la frontiera di ognuno di questi tre insiemi è contenuta nell'unione $\partial A \cup \partial B$.

D'altra parte se A e B sono misurabili, per ogni $\varepsilon > 0$ sia ∂A che ∂B sono contenute in due plurirettangoli P e Q , ambedue di misura minore di ε , la loro unione sarà contenuta in $P \cup Q$, che ha misura minore di 2ε .

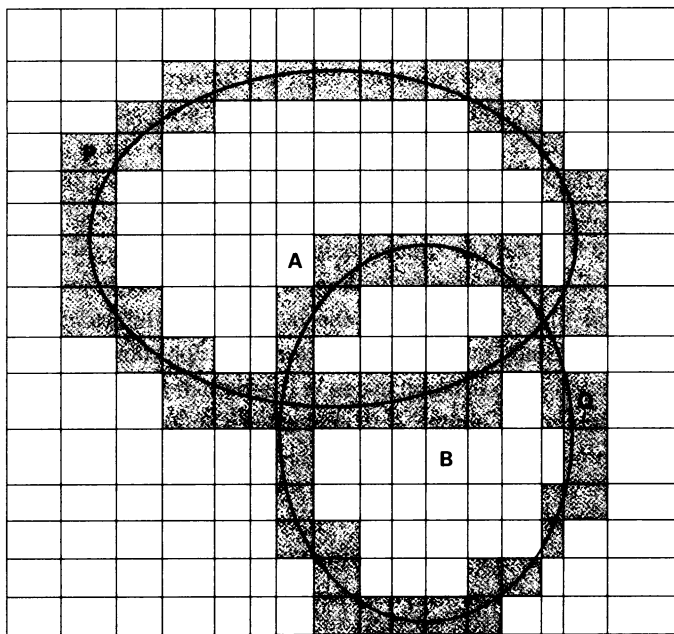


Figura 12.2

Ne segue che $m(\partial A \cup \partial B) = 0$, e dunque le frontiere dei tre insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$ hanno misura nulla. □

Esempio 12.1 Sia $g(x)$ una funzione positiva in $[a, b]$ e sia

$$G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x)\}.$$

Se g è integrabile, l'insieme G è misurabile, e

$$m(G) = \int_a^b g(x) dx.$$

Infatti per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione semplice maggiorante φ e una mino-
rante ψ , con $\int \varphi dx - \int \psi dx < \varepsilon$. Gli insiemi corrispondenti di $\mathbf{R}^2$,

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(x)\}$$

e

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \psi(x)\}$$

sono dei plurirettangoli, e si ha

$$\int \varphi dx = m(\Phi), \quad \int \psi dx = m(\Psi).$$

D'altra parte $\Psi \subset G \subset \Phi$, e $m(\Phi) - m(\Psi) < \varepsilon$, cosicché G è misurabile. Inoltre sia $m(G)$ che $\int_a^b g(x) dx$ sono contenuti tra $m(\Psi)$ e $m(\Phi)$, e quindi

$$\left| m(G) - \int_a^b g(x) dx \right| < m(\Phi) - m(\Psi) < \varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε , la misura di G risulta uguale all'integrale della funzione g . □

Per l'osservazione precedente, se g e h sono due funzioni integrabili in $[a, b]$, con $0 \leq g(x) \leq h(x)$, l'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

è misurabile, essendo differenza dei due insiemi misurabili H e G , e la sua misura è

$$m(E) = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx.$$

La stessa formula vale anche se non si suppone che g e h siano positive. Infatti basta ragionare sulle funzioni $g + c$ e $h + c$, con c preso in modo che risultino positive, e osservare che l'insieme E_c corrispondente non è che l'insieme E traslato di c verso l'alto, e quindi ha la stessa misura di E .

Insiemi di questo tipo si dicono *normali rispetto all'asse delle y*. Osserviamo che nella definizione di insieme normale al posto di uno o più segni $\leq$ si può scrivere $<$ senza che cambi nulla. Ad esempio, l'insieme

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a < x < b, g(x) < y < h(x)\}$$

è misurabile, e si ha

$$m(F) = \int_a^b [h(x) - g(x)] dx.$$

Analogamente, si dicono normali rispetto all'asse delle x insiemi del tipo

$$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : c \leq y \leq d, u(y) \leq x \leq v(y)\}$$

con $u(y) \leq v(y)$. Se u e v sono funzioni integrabili in $[c, d]$, l'insieme U è misurabile, e

$$m(U) = \int_c^d [v(y) - u(y)] dy.$$

Esempio 12.2 Ci sono insiemi non misurabili secondo Peano-Jordan? Un primo esempio è costituito dall'insieme $\mathbf{Q} \cap (0, 1)$ dei numeri razionali compresi tra 0 e 1. Infatti la sua funzione caratteristica è la funzione di Dirichlet, che come abbiamo visto nel capitolo 9 non è integrabile secondo Riemann. Più difficile è trovare un insieme *aperto* che non sia misurabile secondo Peano-Jordan. Un esempio è il seguente.

Partiamo dall'insieme $\mathbf{Q} \cap (0, 1)$, che come abbiamo visto nel capitolo 4, § 8 è numerabile. Sia $q_1, q_2, \dots$ una sua numerazione.

Fissato $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, consideriamo la famiglia di intervalli aperti $I_k = (q_k - \varepsilon 2^{-k}, q_k + \varepsilon 2^{-k})$, e sia A la loro unione. Essendo unione di aperti, A è aperto. Faremo vedere che A non è misurabile, ossia che la sua funzione caratteristica φ_A non è integrabile secondo Riemann.

Sia φ una funzione semplice maggiorente φ_A . Poiché $A \supset \mathbf{Q} \cap (0, 1)$, si dovrà avere $\varphi(x) \geq \varphi_A(x) = 1$ per ogni x razionale, e quindi per ogni $x \in (0, 1)$, dato che in ogni intervallo cadono punti razionali. Di conseguenza $\int \varphi dx \geq 1$, e poiché $\varphi_{(0, 1)}$ è una maggiorante,

$$\int^* \varphi_A dx = 1$$

Prendiamo ora un pluriintervallo chiuso P (unione di un numero finito di intervalli chiusi) contenuto in A ; si può allora trovare un numero finito N di intervalli I_k che compongono A tali che³

$$P \subset A_N = \bigcup_{k=1}^N I_k.$$

³ La dimostrazione di questa asserzione nella sua forma più generale si può trovare nel capitolo 20. Nel nostro caso una dimostrazione più semplice è la seguente. Se P non fosse contenuto in nessuno degli aperti A_N , per ogni intero k si potrebbe trovare un punto $x_k \in P$ che non appartiene ad A_k . Poiché P è compatto, dalla x_k si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} convergente a un punto $x_0 \in P$. Dato che $x_0 \in A$, esso apparterrà ad almeno uno degli intervalli aperti I_m , e quindi, dato che $x_{k_n} \rightarrow x_0$, si avrà $x_{k_n} \in I_m$ per n abbastanza grande. In particolare, se $k_n > m$ si ha $x_{k_n} \in A_m \subset A_k$ il che è assurdo, perché per costruzione $x_k \notin A_k$.

Di conseguenza la misura di P , cioè l'integrale di φ_P , sarà minore della somma delle misure di questi intervalli, e quindi:

$$\int \varphi_P dx \leq \sum_{k=1}^n 2\varepsilon 2^{-k} < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} = 2\varepsilon.$$

Poiché questo vale per ogni pluriintervallo $P \subset A$, si ha

$$\int_* \varphi_A dx < 2\varepsilon < 1$$

e quindi A non è misurabile.

Per l'osservazione [12.3] anche l'insieme chiuso $[0, 1] - A$ non è misurabile. $\square$

Esercizi

12.1. Si calcoli la misura degli insiemi seguenti:

1. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x^2\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |x| \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x + 1| < y < 2 - |x|\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq \pi, -1 \leq x \leq \cos y\}$

12.3. Integrabilità delle funzioni continue

Come avveniva nel caso delle funzioni di una variabile, le funzioni continue sono integrabili. Più precisamente, vale il seguente

Teorema 12.1 *Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione continua in un rettangolo chiuso R , e sia E un insieme misurabile contenuto in R . Allora f è integrabile in E .*

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che la funzione $f\varphi_E$ è integrabile.

Per il teorema di Weierstrass, la funzione f è uniformemente continua in R ; pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se si suddivide R in rettangoli R_{hk} di diametro minore di δ , risulta in ognuno di essi:

$$M_{hk} - m_{hk} = \sup_{R_{hk}} f - \inf_{R_{hk}} f < \varepsilon.$$

Inoltre f ha in R massimo e minimo, che indicheremo con M e m .

D'altra parte l'insieme E è misurabile, e dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione di R in rettangoli R_{hk} , che potremo supporre di diametro minore di δ , tale che la somma delle misure di quelli che hanno almeno un punto in comune con ∂E sia minore di ε .

Ciò premesso, osserviamo che i rettangoli R_{hk} della suddivisione in questione si possono ripartire in tre classi $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{E}$ e $\mathfrak{F}$, mettendo in $\mathfrak{I}$ tutti quelli che sono contenuti all'interno di E , in $\mathfrak{F}$ quelli che hanno almeno un punto in comune con la frontiera ∂E , e infine in $\mathfrak{E}$ tutti gli altri, cioè quelli che non hanno punti in comune né con E né con ∂E .

Chiameremo “interni” i rettangoli di $\mathfrak{I}$, “esterni” quelli di $\mathfrak{E}$, e “di frontiera” quelli di $\mathfrak{F}$. Per quanto detto sopra, la somma delle misure dei rettangoli di frontiera è minore di ε :

$$\sum_{R_{hk} \in \mathfrak{F}} m(R_{hk}) < \varepsilon.$$

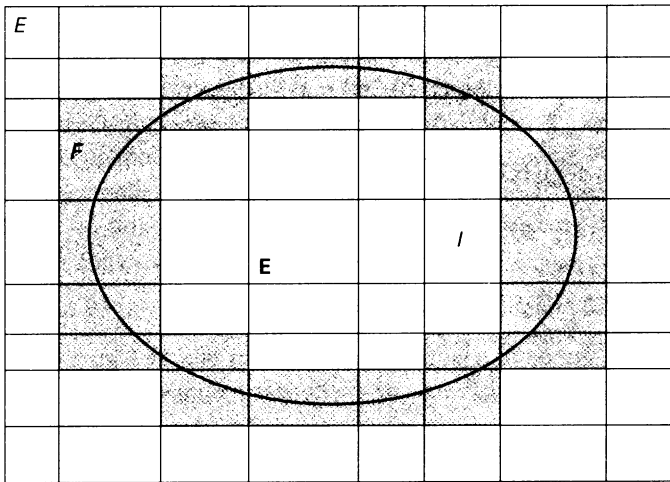


Figura 12.3

Definiamo ora una funzione maggiorante φ , ponendo $\varphi = 0$ nei rettangoli esterni, $\varphi = \max\{M, 0\}$ nei rettangoli di frontiera, e $\varphi = M_{hk}$ nei rettangoli interni.

Analogamente definiamo una funzione minorante ψ , ponendo $\psi = 0$ nei rettangoli esterni, $\psi = \min\{m, 0\}$ in quelli di frontiera, e $\psi = m_{hk}$ in quelli interni.

Si ha evidentemente $\psi \leq f \leq \varphi$, e inoltre

$$\begin{aligned} \int \varphi dx dy - \int \psi dx dy &= (\max\{M, 0\} - \min\{m, 0\}) \sum_{R_{hk} \in \mathfrak{F}} m(R_{hk}) + \\ &+ \sum_{R_{hk} \in \mathfrak{I}} (M_{hk} - m_{hk}) m(R_{hk}) < (|M| + |m|) \varepsilon + \\ &+ \varepsilon \sum_{R_{hk} \in \mathfrak{I}} m(R_{hk}) < \varepsilon(|M| + |m| + m(R)). \end{aligned}$$

È dunque verificata la condizione necessaria e sufficiente, e dunque la funzione f è integrabile su E . □

Più in generale si può dimostrare che una funzione f limitata in un rettangolo R è integrabile se l'insieme D dei punti di discontinuità di f ha misura nulla. La dimo-
stra-

zione è simile a quella del teorema precedente, con D al posto della frontiera ∂E , e viene lasciata per esercizio. Notiamo che nelle ipotesi del teorema precedente, l'insieme dei punti di discontinuità della funzione $f\varphi_E$ è contenuto in ∂E .

12.4. Il calcolo degli integrali doppi

I risultati fin qui ottenuti non danno nessun metodo, al di là della definizione, per il calcolo effettivo degli integrali doppi. Di questo problema ci interesseremo ora.

Cominciamo a vedere cosa avviene per le funzioni semplici. Consideriamo una suddivisione del rettangolo $R = I \times J$ in rettangoli $R_{hk} = I_h \times J_k$, e sia $\varphi = \sum \lambda_{hk} \varphi_{R_{hk}}$ una funzione semplice. Se fissiamo $x \in I_h$, la funzione $\varphi(x, y)$, considerata come funzione della sola y , è semplice e si ha

$$\int \varphi(x, y) dy = \sum_k \lambda_{hk} m(J_k).$$

L'integrale a primo membro ha dunque un valore costante per $x \in I_h$, e quindi è a sua volta una funzione semplice della x . Integrando rispetto a x :

$$\int dx \int \varphi(x, y) dy = \sum_h m(I_h) \sum_k \lambda_{hk} m(J_k) = \sum_{hk} \lambda_{hk} m(I_h) m(J_k) = \sum_{hk} \lambda_{hk} m(R_{hk}) = \int \varphi dx dy$$

Lo stesso si può dire se si integra prima rispetto a x e poi rispetto a y , cosicché in conclusione, per le funzioni semplici vale la formula

$$\int \varphi dx dy = \int dx \int \varphi(x, y) dy = \int dy \int \varphi(x, y) dx.$$

Vogliamo dimostrare che sotto opportune ipotesi la stessa formula vale per funzioni integrabili in R . Si ha il seguente

Teorema 12.2 (di riduzione, o di Fubini) *Sia $f(x, y)$ una funzione integrabile nel rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$, e supponiamo che per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $f(x, y)$, considerata come funzione della sola y , sia integrabile in $[c, d]$. Allora la funzione*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

è integrabile in $[a, b]$, e risulta

$$\int_R f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad [12.2]$$

Dimostrazione Siccome $f(x, y)$ è integrabile in R , per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due funzioni semplici ψ e φ tali che

$$\psi(x, y) \leq f(x, y) \leq \varphi(x, y), \quad [12.3]$$

$$\int \varphi dx dy - \int \psi dx dy < \varepsilon. \quad [12.4]$$

Possiamo integrare le tre funzioni della [12.3] rispetto alla y , dato che per ipotesi $f(x, y)$ è integrabile rispetto a questa variabile. Avremo

$$\Psi(x) = \int_c^d \psi(x, y) dy \leq F(x) = \int_c^d f(x, y) dy \leq \int_c^d \varphi(x, y) dy = \Phi(x). \quad [12.5]$$

Le due funzioni Ψ e Φ sono due funzioni semplici, la prima minorante, e la seconda maggiorante la funzione $F(x)$, e si ha

$$\int_a^b \Phi(x) dx - \int_a^b \Psi(x) dx = \int \varphi dx dy - \int \psi dx dy < \varepsilon.$$

Di conseguenza, la funzione $F(x)$ risulta integrabile in $[a, b]$. Integrando la [12.5] rispetto a x si ottiene

$$\int_R \psi dx dy \leq \int_a^b F(x) dx \leq \int_R \varphi dx dy.$$

D'altra parte, per la [12.3] si ha anche

$$\int_R \psi dx dy \leq \int_R f(x, y) dx dy \leq \int_R \varphi dx dy$$

e quindi

$$\left| \int_R f(x, y) dx dy - \int_a^b F(x) dx \right| \leq \int_R \varphi dx dy - \int \psi dx dy < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si può concludere che il primo membro della relazione precedente è zero, e quindi che vale la [12.2]. $\square$

Il teorema di Fubini ci dice che possiamo calcolare un integrale doppio eseguendo due integrali semplici, prima rispetto alla y e poi rispetto alla x . In genere, questo calcolo è più semplice del precedente, dato che si possono applicare le regole di calcolo degli integrali di una variabile che abbiamo visto nel capitolo 9.

Prima di fare degli esempi, osserviamo che il teorema di Fubini si può applicare agli integrali

$$\int_E f(x, y) dx dy$$

quando f è una funzione continua, ed E è un insieme normale rispetto all'asse delle y :

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

con $g(x)$ e $h(x)$ funzioni continue in $[a, b]$.

Abbiamo osservato nel paragrafo precedente che l'insieme E è misurabile, e quindi per il teorema 12.1 la funzione f è integrabile in E , ossia che la funzione $f^* = f\varphi_E$ è integrabile in ogni rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ che contiene E .

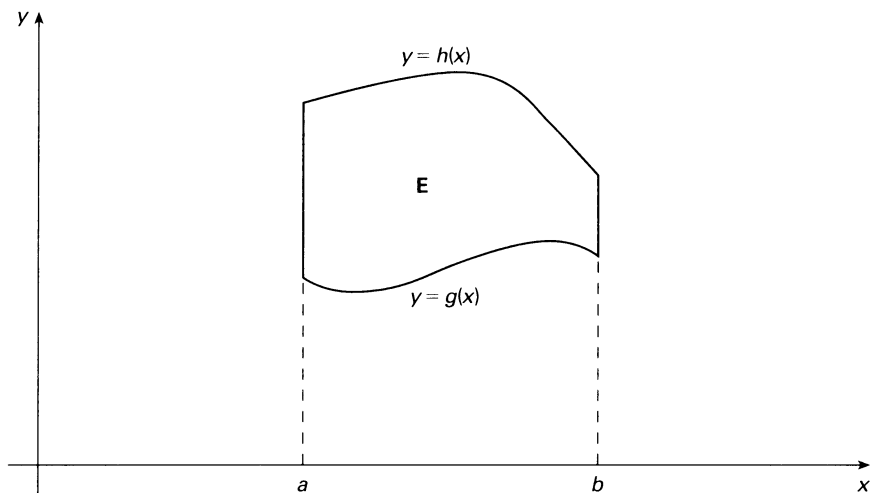


Figura 12.4

Se fissiamo $x \in [a, b]$, la funzione $f^*(x, y)$, considerata come funzione della sola y , vale $f(x, y)$ se $g(x) \leq y \leq h(x)$ e 0 altrimenti; essa è dunque continua tranne al più nei punti $g(x)$ e $h(x)$. Per il teorema 9.4 (e l'osservazione 9.6) f^* è integrabile rispetto a y in $[c, d]$. Sono allora verificate le ipotesi del teorema di Fubini, e quindi

$$\int_R f^*(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y) dy.$$

D'altra parte risulta

$$\begin{aligned} \int_R f^*(x, y) dx dy &= \int_E f(x, y) dx dy \\ \int_c^d f^*(x, y) dy &= \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

e quindi avremo

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy. \quad [12.6]$$

Esempio 12.3 Si calcoli l'integrale

$$\int_E x^2 y dx dy$$

dove E è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1:

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

L'insieme E è normale rispetto all'asse y ; per il teorema di Fubini si ha

$$\begin{aligned}\int_E x^2 y dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2) dx = \\ &= \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

□

Risultati simili valgono in tre o più variabili. Ad esempio, se $f(x, y, z)$ è integrabile nel parallelepipedo $P = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, e per ogni $(x, y) \in R = [a, b] \times [c, d]$ la funzione $f(x, y, z)$ è integrabile rispetto a z , si ha

$$\int_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_R dx dy \int_r^s f(x, y, z) dz. \quad [12.7]$$

In particolare, se $f(x, y, z)$ è continua in un insieme E normale rispetto all'asse z :

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in R, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

si ha

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_R dx dy \int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad [12.8]$$

Possiamo così calcolare un integrale triplo calcolando un integrale semplice, seguito da un integrale doppio. Inutile dire che per calcolare quest'ultimo si può usare di nuovo il teorema di Fubini, stavolta in due variabili. Analoghi risultati valgono per integrali in più variabili.

Esempio 12.4 Si calcoli l'integrale

$$\int_E (x + y - z) dx dy dz$$

dove

$$E = \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 2\}.$$

L'insieme E è normale rispetto all'asse z . Infatti si ha

$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in T, 0 < z < 2 - x - y\}.$$

con

$$T = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 2\} = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < 2 - x\}.$$

Avremo allora

$$\int_E (x + y - z) dx dy dz = \int_T dx dy \int_0^{2-x-y} (x + y - z) dz.$$

L'ultimo integrale si calcola immediatamente:

$$\int_0^{2-x-y} (x+y-z) dz = \left(xz + yz - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{2-x-y} = 4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2.$$

L'integrale doppio che resta si può spezzare di nuovo in due integrali semplici:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2 \right] dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} \left[4(x+y) - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 2 \right] dy = \\ &= \int_0^2 \left[4xy + 2y^2 - \frac{3}{2} \left(x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right) - 2y \right] \Big|_{y=0}^{y=2-x} dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \right) dx = \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^2 = 2 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

□

Esercizi

12.2. Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int_E x e^y dx dy$
4. $\int_E \arcsen y dx dy$
6. $\int_E x \sqrt{1-y^2} dx dy$
2. $\int_E y \arcsen x dx dy$
5. $\int_E xy \log xy dx dy$
7. $\int_E x \sqrt{y} dx dy$
3. $\int_E x \sen y dx dy$

dove E è il quarto del cerchio di centro l'origine e raggio 1, contenuto nel primo quadrante.

12.3. Calcolare gli integrali:

1. $\int_E \frac{y}{2} + x dx dy$
3. $\int_E x^2 \sqrt{y} dx dy$
5. $\int_E \frac{1+x^2}{1+2y} dx dy$
2. $\int_E \frac{x^2}{3} + y dx dy$
4. $\int_E \frac{y}{4x^2+y^2} dx dy$
6. $\int_E (2y+1) \log(1+x^2) dx dy$

in cui E è la porzione del piano limitata dalla parabola $y = 1 - x^2$ e dall'asse delle x

12.4. Calcolare gli integrali:

1. $\int_E x e^y dx dy$
3. $\int_E x \cos(1-y) dx dy$
2. $\int_E x \sen xy dx dy$
4. $\int_E \arcsen x dx dy$

nei quali si è posto $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$.

12.5. Calcolare:

$$\begin{array}{ll}
1. \int_E (y - x^2) dx dy & 3. \int_E \frac{1}{1+y} dx dy \\
2. \int_E (y+1) dx dy & 4. \int_E (2-y) e^y dx dy
\end{array}$$

dove $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 - \sqrt{1-x^2}\}$.

12.6. Calcolare:

$$\begin{array}{lll}
1. \int_E \frac{x}{1+y^2} dx dy & 3. \int_E \frac{xy}{x+y} dx dy & 5. \int_E x \sin y dx dy \\
2. \int_E \log(1+x+2y) dx dy & 4. \int_E y \arcsin x dx dy & 6. \int_E x y e^y dx dy
\end{array}$$

nei quali E è l'insieme delimitato dalla parabola $x = y^2$ e dalle rette $y = 0$ e $x = 1$.

12.7. Calcolare:

$$\begin{array}{lll}
1. \int_E \frac{y}{1+x+y} dx dy & 3. \int_E (x+y) \log(1+x) dx dy & 5. \int_E x \arcsin y dx dy \\
2. \int_E (1+y) e^x dx dy & 4. \int_E \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} dx dy & 6. \int_E \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy
\end{array}$$

dove E è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

12.8. Calcolare gli integrali:

$$1. \int_E \sin \frac{\pi}{2} (x+y) dx dy \quad 2. \int_E (x^2 - y^2) dx dy \quad 3. \int_E x \arcsin y dx dy$$

quando E è il parallelogrammo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 1)$.

12.9. Calcolare $\int_T \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx dy$

con $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$.

12.10. Calcolare:

$$1. \int_D x dx dy \quad 2. \int_D y dx dy \quad 3. \int_D (x^2 y + 1) dx dy \quad 4. \int_D y^3 e^x dx dy$$

dove D è l'insieme del semipiano $y > 0$ delimitato dalle circonferenze di centro l'origine e raggio 1 e 2, e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

12.11. Calcolare i seguenti integrali:

$$1. \int_E x(y+z) dx dy dz \quad 2. \int_E xy(y+z) dx dy dz \quad 3. \int_E (1+y\sqrt{x}) dx dy dz$$

4. $\int_E (x+y) dx dy dz$

6. $\int_E \arcsen x dx dy dz$

5. $\int_E x y e^z dx dy dz$

7. $\int_E \frac{dx dy dz}{1+x+y+z}$

dove E è il tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

12.12. Calcolare:

1. $\int_T x y \sin(\pi z) dx dy dz$

2. $\int_T \frac{1+2xy}{1+z^2} dx dy dz$

3. $\int_T e^z dx dy dz$

in cui T è il tetraedro con vertici nei punti $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1)$.

12.13. Si calcoli:

1. $\int_E x y dx dy dz$

2. $\int_E (x+z) \log y dx dy dz$

3. $\int_E y e^x dx dy dz$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; 0 \leq z \leq 3 - x + y\}$.

12.14. Calcolare:

1. $\int_E (x + \sin z) dx dy dz$

2. $\int_E \arctg(x+y) dx dy dz$

dove si è posto $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x; 0 \leq z \leq x - y\}$.

12.15. Calcolare:

1. $\int_E dx dy dz$

2. $\int_E x \log(1+y) dx dy dz$

con $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2; 0 \leq z \leq 6 - x^2 - y^2\}$.

12.5. Il volume dei solidi

La [12.8] può essere utile nel calcolo dei volumi degli insiemi normali. Se

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in F, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

ponendo $f=1$ nella [12.8] si trova

$$m(E) = \int_F [h(x, y) - g(x, y)] dx dy.$$

Esempio 12.5 Calcolare il volume dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Q, x + y \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\},$$

dove Q è il quadrato $(0, 1) \times (0, 1)$.

Si ha

$$m(E) = \int_Q (1 + x^2 + y^2 - x - y) dx dy.$$

e applicando di nuovo il teorema di Fubini, quest'ultimo integrale è uguale a

$$\int_0^1 dy \int_0^1 (1 + x^2 + y^2 - x - y) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{2} - y\right) dy = \frac{2}{3}. \quad \square$$

Abbiamo già osservato che la [12.8] permette di ridurre un integrale triplo a un integrale semplice, seguito da uno doppio.

Si sarebbe potuto però procedere diversamente, calcolando prima un integrale doppio, seguito da uno semplice. Supponiamo infatti che $f(x, y, z)$ sia integrabile nel parallelepipedo P , e che per ogni $z \in [r, s]$ la funzione $f(x, y, z)$ sia integrabile rispetto a (x, y) nel rettangolo R . Si ha allora

$$\int_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_r^s dz \int_R f(x, y, z) dx dy. \quad [12.9]$$

In particolare, sia $f(x, y, z)$ una funzione continua in un insieme E misurabile e limitato, e supponiamo che per ogni z l'insieme

$$E_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in E\}$$

sia misurabile in $\mathbf{R}^2$. Si ha allora

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_r^s dz \int_{E_z} f(x, y, z) dx dy. \quad [12.10]$$

Anche in quest'ultima versione, il teorema di Fubini può essere applicato con profitto al calcolo del volume dei solidi. Scrivendo infatti la relazione precedente con $f = 1$, abbiamo:

$$m(E) = \int_r^s m(E_z) dz \quad [12.11]$$

dove ovviamente la misura di E_z è la misura bidimensionale:

$$m(E_z) = \int \varphi_E(x, y, z) dx dy$$

L'applicabilità della [12.11] dipende ovviamente dalla possibilità di calcolare l'area degli insiemi E_z . Un caso in cui questo è particolarmente semplice si ha quando E è un *solido di rotazione*, ottenuto ruotando una figura F del piano yz attorno all'asse z .

Sia $f(z)$ una funzione continua non negativa, definita per $r \leq z < s$, e consideriamo nel piano yz l'insieme

$$F = \{(y, z) : r \leq z < s; 0 \leq y < f(z)\}.$$

Se facciamo ruotare F attorno all'asse z , otteniamo il solido di rotazione

$$E = \{(x, y, z) : r \leq z < s; x^2 + y^2 < f(z)\}.$$

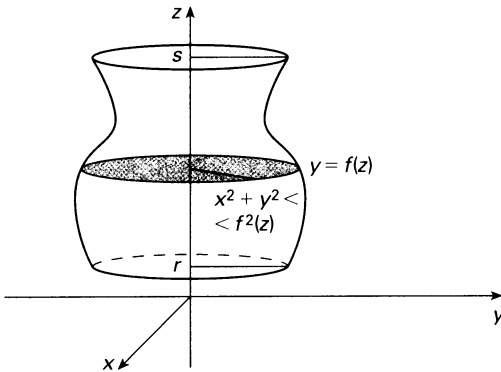


Figura 12.5

Per $z \in [r, s]$ fissato, l'insieme E_z è costituito dai punti (x, y) tali che $x^2 + y^2 < f^2(z)$, ed è dunque un cerchio di raggio $f(z)$. La sua misura è allora $\pi f^2(z)$ e quindi per la [12.11] si ha

$$m(E) = \pi \int_r^s f^2(z) dz$$

Esempio 12.6 (Il paraboloide di rotazione) Se $f(z) = \sqrt{z}$, $0 \leq r \leq z < s$, la curva $y = f(z)$ (che si può scrivere anche $z = y^2$) è un arco di parabola. Il solido che risulta è un tronco del *paraboloide di rotazione* (anticamente detto *conoide parabolico*).

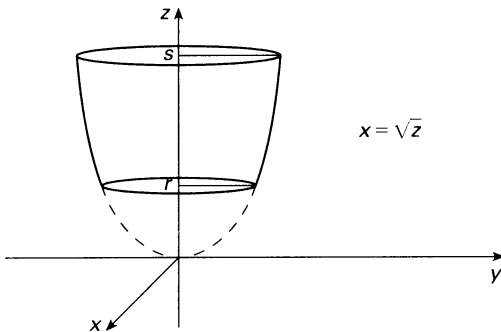


Figura 12.6

Il suo volume è

$$\pi \int_r^s f^2(z) dz = \pi \int_r^s z dz = \frac{\pi}{2} (s^2 - r^2).$$

□

Esempio 12.7 (L'iperboloide di rotazione) In maniera analoga, facendo ruotare intorno all'asse z l'iperbole di equazione $yz = 1$, con $a \leq z < b$, si ottiene il tronco di *iperboloide di rotazione* (o *conoide iperbolico*).

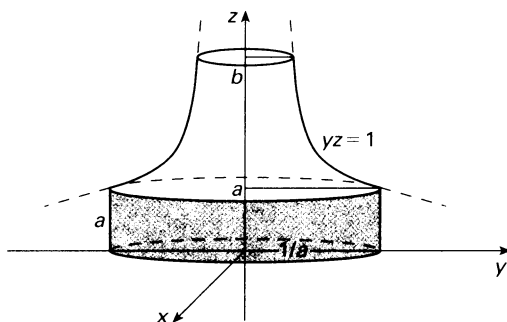


Figura 12.7

Il volume di questo solido è:

$$\pi \int_a^b \frac{dz}{z^2} = \pi \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Se poi si fa tendere b all'infinito, avremo che il volume del solido illimitato

$$E = \left\{ (x, y, z) : z \geq a; x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2} \right\}$$

è uguale a $\frac{\pi}{a}$.

Altrimenti detto, il volume del *solido acuto iperbolico*, come lo chiamava Torricelli, è uguale a quello del cilindro C in figura, che ha raggio della base $\frac{1}{a}$ e altezza a . Questo risultato, pubblicato da Evangelista Torricelli nel 1644, fece un certo scalpore, essendo il primo esempio di un solido illimitato con volume finito. $\square$

Esempio 12.8 (La palla n -dimensionale) Indichiamo con B (dall'inglese *ball*) la palla n -dimensionale di raggio 1, di cui vogliamo calcolare la misura, che indicheremo con ω_n .

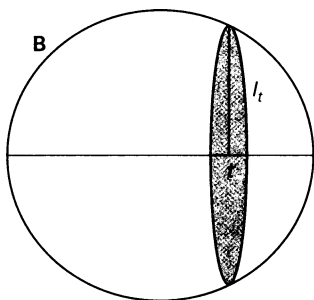


Figura 12.8

Gli ingredienti essenziali sono il teorema di Fubini da una parte, e dall'altra l'osservazione che la misura della palla n -dimensionale B_r di raggio r è proporzionale a r^n . Poiché per definizione $m(B) = \omega_n$, si ha $m(B_r) = \omega_n r^n$.

Per $-1 < t < 1$ chiamiamo I_t l'intersezione di B con l'iperpiano $x_1 = t$.

L'insieme I_t è una palla $(n-1)$ -dimensionale di raggio $\sqrt{1-t^2}$, e quindi, per quanto si è detto, la sua misura sarà

$$m(I_t) = \omega_{n-1} (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Per il teorema di Fubini avremo allora

$$m(B) = \omega_n = \omega_{n-1} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = 2\omega_{n-1} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = 2\omega_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du$$

dove si è fatto il cambiamento di variabili $t = \sin u$.

Occorre ora armarsi di pazienza, e calcolare l'ultimo integrale con una serie di integrazioni per parti. Si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du &= \cos^{n-1} u \sin u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} u \sin^2 u du = \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} u du - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} u du. \quad [12.13]$$

Se n è pari, possiamo ripetere lo stesso procedimento fino ad arrivare all'esponente 0, ottenendo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = \frac{(n-1)(n-3) \dots 3}{n(n-2) \dots 2} \frac{\pi}{2} = \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}. \quad [12.14]$$

Se invece n è dispari, giungeremo all'integrale di $\cos u$, che vale 1, e quindi⁴

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = \frac{(n-1)!!}{n!!} \quad [12.15]$$

Se poniamo

$$A_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

⁴ Ricordiamo che con il simbolo $n!!$ si indica il prodotto $n(n-2)(n-4) \dots$, fino a 2 se n è pari e a 1 se n è dispari. Ad esempio, $6!! = 6 \times 4 \times 2$ e $7!! = 7 \times 5 \times 3 \times 1$.

avremo allora

$$\omega_n = 2 \frac{(n-1)!!}{n!!} A_n \omega_{n-1}.$$

Confrontando con la stessa relazione, scritta con $n-1$ al posto di n :

$$\omega_{n-1} = 2 \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} A_{n-1} \omega_{n-2}$$

si trova

$$\omega_n = 4 \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} A_n A_{n-1} \omega_{n-2} = \frac{4}{n} A_n A_{n-1} \omega_{n-2}$$

Osserviamo ora che i numeri n e $n-1$ sono uno pari e uno dispari, e quindi i due fattori A_n e A_{n-1} valgono uno $\frac{\pi}{2}$ e l'altro 1. Di conseguenza il loro prodotto vale $\frac{\pi}{2}$, e si ha in conclusione

$$\omega_n = \frac{2\pi}{n} \omega_{n-2}.$$

Allo stesso modo, possiamo esprimere ω_{n-2} in termini di ω_{n-4} , e poi questo in termini di ω_{n-6} , e così via, fino a $\omega_2 = \pi$ se $n = 2k$ è pari, o a $\omega_1 = 2$ se $n = 2k+1$ è dispari. Avremo così, tenendo conto del fatto che $(2k)!! = 2^k k!$,

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} \quad [12.16]$$

$$\omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{(2k+1)!!}. \quad [12.17]$$

Osserviamo che quando n tende all'infinito la misura della palla n -dimensionale di raggio 1 tende a 0, un risultato a prima vista sorprendente. $\square$

Esempio 12.9 Il centro di gravità del paraboloide di rotazione P , generato dalla parabola $y = \sqrt{z}$, $0 \leq z \leq b$, sta sull'asse z , nel punto di coordinata

$$z_0 = \frac{\int_P z dx dy dz}{m(P)}.$$

La misura di P è stata trovata nell'esempio 12.6:

$$m(P) = \frac{\pi b^2}{2}.$$

Calcoliamo ora l'integrale al numeratore. Si ha per la [12.10]:

$$\int_P z dx dy dz = \int_0^b z dz \int_{P_z} dx dy = \int_0^b z m(P_z) dz.$$

Come abbiamo visto, risulta $m(P_z) = \pi z$, e quindi l'integrale in questione si riduce a

$$\int_0^b \pi z^2 dz = \frac{\pi b^3}{3},$$

cosicché in definitiva

$$z_0 = \frac{2}{3}b.$$

Si può dunque concludere che *il centro di gravità del paraboloide di rotazione divide l'asse in due segmenti, di cui quello verso il vertice è doppio di quello verso la base.* $\square$

Esercizi

12.16. Calcolare il volume dei solidi di rotazione definiti dalle funzioni seguenti:

1. $y = \sin z, \quad 0 \leq z \leq \pi$

6. $y = z^k, \quad 0 \leq z \leq a$

2. $y = e^z, \quad 0 \leq z \leq 1$

7. $y = z \log z, \quad 0 < z < 3$

3. $y = \log z, \quad 1 \leq z \leq e$

8. $y = 1 - |z|, \quad |z| \leq 1$

4. $y = \tan z, \quad 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4}$

9. $y = 1 + \sqrt{z}, \quad 0 \leq z \leq 2$

5. $y = \alpha z, \quad 0 \leq z \leq h$

12.17. Trovare il centro di gravità del tronco di paraboloide generato dalla rotazione di $y = \sqrt{z}$, con $a \leq z \leq b$.

12.18. Trovare il centro di gravità dell'iperboloide di rotazione, generato da $y = \frac{1}{z}$, $\frac{1}{a} \leq z < \frac{1}{b}$.

12.6. Cambiamento di variabili

Quando si passa a integrali in più dimensioni, la formula di cambiamento di variabili diventa più complessa e di difficile dimostrazione, dato che ora viene meno la formula di integrazione per sostituzione.

Per vedere cosa succede, mettiamoci nel caso semplice di due variabili, e supponiamo che $f(x, y)$ sia una funzione integrabile a supporto compatto, e che valga il teorema di Fubini:

$$\int f(x, y) dx dy = \int dx \int f(x, y) dy.$$

Nell'ultimo integrale $\int f(x, y)dy$, fissiamo la x e facciamo il cambiamento di variabile $y = \varphi(x, v)$. Si ha $dy = \varphi_v(x, v) dv$, e quindi, se $\varphi_v(x, v) \neq 0$, si può applicare la formula [9.19], e ottenere:

$$\int f(x, y)dx dy = \int dx \int f(x, \varphi(x, v)) |\varphi_v(x, v)| dv.$$

Applicando due volte il teorema di Fubini, potremo scrivere l'ultimo integrale prima come un integrale doppio, e poi come un integrale fatto prima rispetto a x e poi rispetto a v :

$$\int f(x, y)dx dy = \int f(x, \varphi(x, v)) |\varphi_v(x, v)| dx dv = \int dv \int f(x, \varphi(x, v)) |\varphi_v(x, v)| dx.$$

Infine, nell'ultimo integrale fissiamo la v e facciamo il cambiamento di variabile $x = x(u, v)$. Risulta $dx = x_u(u, v) du$, e quindi, se $x_u(u, v) \neq 0$, applicando di nuovo la [9.19] troviamo

$$\int f(x, y)dx dy = \int dv \int f(x(u, v), \varphi(x(u, v), v)) |\varphi_v(x(u, v), v) x_u(u, v)| du. \quad [12.18]$$

Le due trasformazioni successive si possono compendiare in una:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = \varphi(x(u, v), v) = y(u, v) \end{cases}$$

Per la formula [11.13] di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\begin{cases} y_u(u, v) = \varphi_x(x(u, v), v) x_u(u, v) \\ y_v(u, v) = \varphi_x(x(u, v), v) x_v(u, v) + \varphi_v(x(u, v), v) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \varphi_v(x(u, v), v) x_u(u, v) &= (y_v(u, v) - \varphi_x(x(u, v), v) x_v(u, v)) x_u(u, v) = \\ &= y_v(u, v) x_u(u, v) - y_u(u, v) x_v(u, v) \end{aligned}$$

che introdotta nella [12.18] dà in conclusione:

$$\int f(x, y)dx dy = \int f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| du dv. \quad [12.19]$$

La formula precedente si può adattare agli integrali estesi a un insieme E , osservando che questo corrisponde a integrare la funzione $f \varphi_E$. Si ha allora

$$\int_E f(x, y)dx dy = \int f(x(u, v), y(u, v)) \varphi_E(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| du dv.$$

Osserviamo ora che $\varphi_E(x(u, v), y(u, v))$ vale 1 se $(x(u, v), y(u, v)) \in E$ e 0 altrimenti; essa è dunque la funzione caratteristica dell'insieme F , immagine inversa di E tramite la trasformazione $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Si ha allora

$$\int_E f(x, y)dx dy = \int_F f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| du dv. \quad [12.20]$$

Osservazione 12.4 Per giungere alla [12.19] (o alla [12.20] che è equivalente) abbiamo fatto due successivi cambiamenti di variabili in una dimensione; prima nella y , e poi nella x . In realtà, quella che è data è la trasformazione complessiva

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad [12.21]$$

Si pone allora il problema: si può trovare una funzione $\varphi(x, v)$ tale che risulti $y(u, v) = \varphi(x(u, v), v)$? La risposta è positiva se l'equazione $x = x(u, v)$ si può risolvere rispetto a u , cioè se risulta $u = \gamma(x, v)$. In questo caso, la funzione $\varphi(x, v) = y(\gamma(x, v), v)$ è quella che ci occorre; infatti, essendo $\gamma(x(u, v), v) = u$, si ha $\varphi(x(u, v), v) = y(u, v)$.

L'equazione $x = x(u, v)$ si può risolvere se per ogni v la funzione $x(u, v)$, considerata come funzione della sola variabile u , è monotona, ossia se si ha $x_u(u, v) \neq 0$ per ogni u e v .

Questa è una delle ipotesi che avevamo fatto per applicare la [9.19]. L'altra ipotesi era $\varphi_v(x, v) \neq 0$, che essendo $x_u(u, v) \neq 0$ è equivalente alla $\varphi_v(x, v) x_u(u, v) \neq 0$, ossia a $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$. In conclusione, le [12.19] e [12.20] sono valide se la trasformazione [12.21] verifica le ipotesi $x_u \neq 0$ e $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$.

Osserviamo che saremmo giunti allo stesso risultato se avessimo cominciato con il cambiamento di variabili $y = \psi(x, u)$. Questo significa che, ferma restando l'ipotesi $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$, la condizione $x_u(u, v) \neq 0$ può essere sostituita dalla $x_v(u, v) \neq 0$.

Purtroppo però non sempre accade che una delle funzioni x_u e x_v sia sempre diversa da 0; può darsi infatti che x_u si annulli in qualche punto e x_v in qualche altro punto. Quello che è certo è che esse non possono annullarsi *contemporaneamente*, cioè nello stesso punto, dato che altrimenti anche $x_u y_v - x_v y_u$ sarebbe uguale a 0.

Supponiamo ora che le derivate x_u e x_v siano continue in un rettangolo chiuso R che contiene F . È allora possibile dividere R in un numero finito di rettangoli $R_1, R_2, \dots, R_N$ in ognuno dei quali almeno una delle due funzioni x_u e x_v è sempre diversa da zero.⁵ Possiamo allora scrivere la [12.20] in ognuno degli insiemi $F_k = F \cap R_k$:

$$\int_{E_k} f(x, y) dx dy = \int_{F_k} f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| du dv,$$

dove con E_k si è indicata l'immagine di F_k tramite la trasformazione [12.21]. Se sommiamo tutte queste relazioni, al secondo membro si ottiene l'integrale esteso a F , e quindi avremo

$$\sum_{k=1}^N \int_{E_k} f(x, y) dx dy = \int_F f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| du dv.$$

⁵ Questa affermazione si può dimostrare osservando in primo luogo che la funzione $x_u^2 + x_v^2$ è positiva in R , e dunque ha un minimo positivo, che chiamiamo $2m^2$. In secondo luogo, le funzioni x_u e x_v sono uniformemente continue in R , e quindi esiste un $\delta > 0$ tale che, posto $\mathbf{w} = (u, v)$ e $\mathbf{w}' = (u', v')$, se $||\mathbf{w} - \mathbf{w}'|| < \delta$ si ha $|x_u(\mathbf{w}) - x_u(\mathbf{w}')| < m$ e $|x_v(\mathbf{w}) - x_v(\mathbf{w}')| < m$. Dividiamo ora R in rettangoli R_k di diametro minore di δ , e sia $\mathbf{w}_k$ il centro di R_k . Si deve avere $x_u^2(\mathbf{w}_k) + x_v^2(\mathbf{w}_k) \geq 2m^2$, e quindi risulterà $|x_u(\mathbf{w}_k)| \geq m$ o $|x_v(\mathbf{w}_k)| \geq m$. Nel primo caso, x_u sarà sempre diversa da 0 in R_k , nel secondo lo sarà x_v .

Se ora gli insiemi E_k sono tutti disgiunti, cioè se il cambiamento di variabili [12.21] è invertibile, la somma al primo membro dà l'integrale esteso a E , e quindi si ottiene di nuovo la [12.20], che dunque risulta valida nella sola ipotesi che l'applicazione [12.21] sia iniettiva e che la funzione $x_u y_v - x_v y_u$ sia sempre diversa da zero. $\square$

In conclusione, abbiamo dimostrato il seguente

Teorema 12.3 *Sia $f(x, y)$ una funzione integrabile in un insieme $E \subset \mathbf{R}^2$, e sia*

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

un'applicazione biunivoca e di classe C^1 (cioè derivabile e con derivata continua) con la sua inversa, da un rettangolo $R \subset \mathbf{R}^2$ in un insieme che contiene E , e tale che $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ in R . Sia F l'immagine inversa di E .

Si ha allora

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_F f(x(u, v), y(u, v)) |x_u y_v - x_v y_u| du dv. \quad [12.22]$$

L'uso della formula [12.22] è analogo a quello della formula corrispondente nel caso di una variabile: si tratta di trovare una trasformazione opportuna, che renda più semplice l'integrale. Nel caso di integrali in più variabili, una delle difficoltà principali risiede nel dominio di integrazione; l'idea allora è di operare in un certo senso a rovescio rispetto al teorema; cioè di cercare un cambiamento di variabili $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ che trasformi il dominio E in uno F più semplice possibile, ad esempio un rettangolo, e poi di prendere la trasformazione $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ inversa della precedente.

Esempio 12.10 Calcoliamo l'integrale

$$\int_E \frac{dx dy}{2x + y}$$

dove

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x < y < 2x, 1 < x + y < 3\}.$$

Cominciamo a fare il calcolo direttamente, cioè senza usare la formula di cambiamento delle variabili. L'insieme E è normale rispetto all'asse y , con $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{2}$,

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 3 - x & \text{se } 1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2} \\ x & \text{se } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

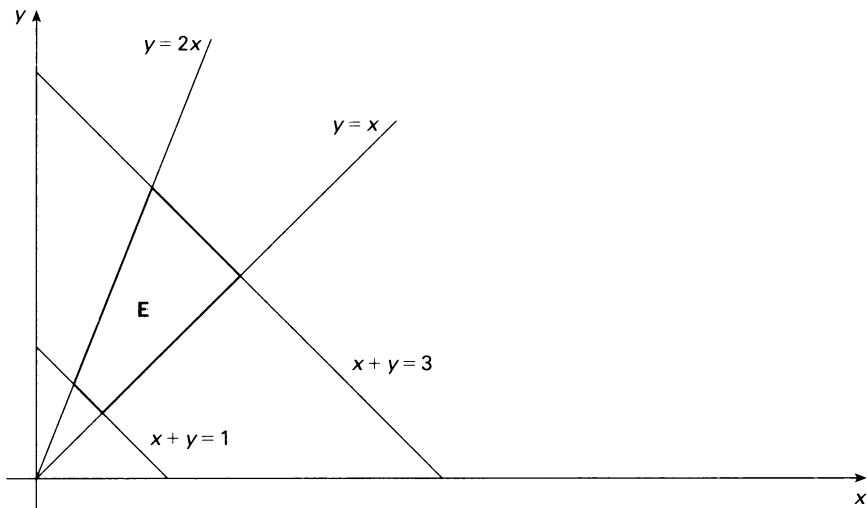


Figura 12.9

e quindi può essere calcolato mediante il teorema di Fubini:

$$\begin{aligned} \int_E \frac{dx dy}{2x + y} &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} dx \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{dy}{2x + y} = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} \log(2x + y) \Big|_{y=g(x)}^{y=h(x)} dx = \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} [\log(2x + h(x)) - \log(2x + g(x))] dx. \end{aligned}$$

Possiamo calcolare più facilmente quest'ultimo integrale spezzando l'intervallo di integrazione in tre parti: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $\left(1, \frac{3}{2}\right)$. Ricordando la definizione delle funzioni $g(x)$ e $h(x)$ nei vari intervalli, si trova

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} [\log(2x + h(x)) - \log(2x + g(x))] dx &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} [\log 4x - \log(1 + x)] dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{2}}^1 [\log 4x - \log 3x] dx + \int_1^{\frac{3}{2}} [\log(3 + x) - \log 3x] dx. \end{aligned}$$

Il secondo integrale è immediato, dato che $\log 4x - \log 3x = \log 4 - \log 3$. Si ha allora

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 [\log 4x - \log 3x] dx = \frac{1}{2} (\log 4 - \log 3) = \log 2 - \frac{1}{2} \log 3.$$

Gli altri due si calcolano per parti. Si ha:

$$\int \log mx dx = x \log mx - \int dx = x \log mx - x$$

$$\int \log(k+x) dx = (k+x) \log(k+x) - \int dx = (k+x) \log(k+x) - x$$

e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} [\log 4x - \log(1+x)] dx &= x \log 4x - (1+x) \log(1+x) \Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{3}{2} \log \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \log \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \log \frac{4}{3} = 4 \log 2 - \frac{5}{2} \log 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{3}{2}} [\log(3+x) - \log 3x] dx &= (3+x) \log(3+x) - x \log 3x \Big|_1^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{9}{2} \log \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \log \frac{9}{2} - 4 \log 4 + \log 3 = 7 \log 3 - 11 \log 2. \end{aligned}$$

Sommando i tre integrali, si ottiene in conclusione:

$$\int_E \frac{dx dy}{2x+y} = 4 \log 3 - 6 \log 2.$$

Lo stesso integrale si può calcolare con un cambiamento di variabili, che trasformi l'insieme E in un rettangolo. La trasformazione più appropriata è:

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

che manda E nel rettangolo $R = (1, 3) \times (1, 2)$. Esprimendo x e y in termini di u e v , si ha

$$\begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{1}{1+v}, & x_v &= -\frac{u}{(1+v)^2} \\ y_u &= \frac{v}{1+v}, & y_v &= \frac{u}{(1+v)^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$x_u y_v - x_v y_u = \frac{u}{(1+v)^2} > 0.$$

Si ha allora

$$\int_E \frac{dx dy}{2x+y} = \int_R \frac{1+v}{u(2+v)} \frac{u}{(1+v)^2} du dv = \int_1^3 du \int_1^2 \frac{dv}{(2+v)(1+v)}.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{(2+v)(1+v)} = \frac{1}{1+v} - \frac{1}{2+v}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dv}{(2+v)(1+v)} &= \log(1+v) - \log(2+v) \Big|_1^2 = \log 3 - \log 4 - \log 2 + \log 3 = \\ &= 2 \log 3 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

e integrando rispetto a u si trova

$$\int_E \frac{dx dy}{2x+y} = 4 \log 3 - 6 \log 2$$

come in precedenza, ma con qualche calcolo in meno. □

Formule analoghe valgono in più variabili. Se nell'integrale

$$\int_E f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n$$

eseguiamo il cambiamento di variabili $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, avremo la formula

$$\int_E f(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n = \int_F f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) |\det J(\mathbf{u})| du_1 \dots du_n \quad [12.23]$$

dove con $\det J(\mathbf{u})$ si è indicato il determinante della *matrice jacobiana* della trasformazione:

$$J(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1(\mathbf{u})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1(\mathbf{u})}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2(\mathbf{u})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2(\mathbf{u})}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n(\mathbf{u})}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n(\mathbf{u})}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n(\mathbf{u})}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

Si vede subito come nel caso di due variabili si ritrovi la [12.22]. È evidente che quanto più cresce il numero delle variabili, tanto più aumenta la complessità della formula.

Esercizi**12.19.** Calcolare i seguenti integrali:

$$1. \int_T (x+y) dx dy \qquad 2. \int_T x^2 dx dy \qquad 3. \int_T (x^2+y) dx dy$$

dove T è il dominio delimitato dalle rette $y+2x=0$, $y+2x=1$ e dalle parabole $y=x^2$ e $y=x^2+1$.

12.20. Calcolare l'integrale

$$\int_E \frac{\log x}{y^3} dx dy$$

dove E è l'insieme delimitato dalle rette $y=x$, $y=2x$, $y+x=2$ e $y+2x=2$.

12.21. Calcolare:

$$1. \int_T dx dy \qquad 2. \int_T y dx dy \qquad 3. \int_T x dx dy \qquad 4. \int_T e^x \log y dx dy$$

con $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ye^{-x} \leq 2; 2 \leq ye^x \leq 3\}$.

12.22. Si calcoli

$$\int_T \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy$$

in cui T è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

12.23. Calcolare:

$$1. \int_E dx dy \qquad 2. \int_E x dx dy \qquad 3. \int_E \frac{dx dy}{xy}$$

dove E è l'insieme delimitato dalle rette $y=2x$ e $2y=x$ e dalle ellissi $4x^2+y^2=4$ e $4x^2+y^2=16$ e contenuto nel primo quadrante:

12.24. Si calcolino gli integrali:

$$1. \int_T dx dy \qquad 2. \int_T \sin(\pi y) dx dy \qquad 3. \int_T \frac{\log y}{x} dx dy$$

dove T è il dominio delimitato dai grafici delle funzioni $y=\log x$, $y=\log x+2$, $y=-\log x$ e $y=4-\log x$.

12.25. Calcolare:

$$1. \int_T \frac{dx dy}{xy} \qquad 2. \int_T y^2 e^{xy} dx dy \qquad 3. \int_T xy^2 \log xy dx dy \qquad 4. \int_T \frac{\cos \frac{\pi}{2} y}{x^2} dx dy$$

nei quali si è posto $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2; 2 \leq xy \leq 3\}$.

12.26 Calcolare l'integrale

$$\int_D (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) dx dy$$

con $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0, 0 < a \leq xy \leq b, 0 < y^2 - x^2 < 1\}$.

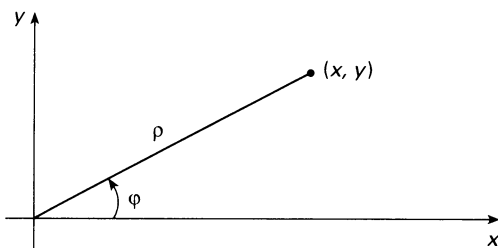
12.27. Calcolare il volume del solido

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x > 0, y > 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}.$$

12.7. Le coordinate polari

Un caso importante del cambiamento di variabili in due o tre dimensioni è costituito dal passaggio a *coordinate polari*.

Un punto del piano è determinato dalle sue coordinate cartesiane (x, y) . Alternativamente, possiamo individuare lo stesso punto assegnandone la distanza ρ dall'origine degli assi e l'angolo φ che la retta che lo congiunge con l'origine forma con l'asse delle ascisse, misurato in senso antiorario a partire da quest'ultimo.⁶ Si ha ovviamente $\rho \geq 0$; per quanto riguarda φ c'è ampia possibilità di scelta, dato che aggiungendo multipli di 2π non cambia nulla. A seconda dei casi conviene prendere φ positivo, e quindi $0 \leq \varphi < 2\pi$, o considerare anche angoli negativi, e far variare φ tra $-\pi$ e π .

**Figura 12.10**

Una semplice occhiata alla figura mostra che si ha

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi. \quad [12.24]$$

Reciprocamente, ρ e φ sono determinati dalle relazioni

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad [12.25]$$

Si ha

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi$$

⁶ Si noterà che ρ e φ sono il modulo e l'argomento del numero complesso $z = x + iy$.

e quindi la formula [12.22] di cambiamento delle variabili diventa:

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_F f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad [12.26]$$

Il passaggio a coordinate polari è particolarmente utile quando il dominio di integrazione E è un settore di cerchio o di corona circolare. In questo caso infatti l'insieme F è particolarmente semplice.

Esempio 12.11 Si calcoli l'integrale

$$\int_E (x^2 - y^2) dx dy$$

dove E è il settore della circonferenza di raggio 1 compreso tra le semirette $y = x$ e $y = -x$, $x > 0$.

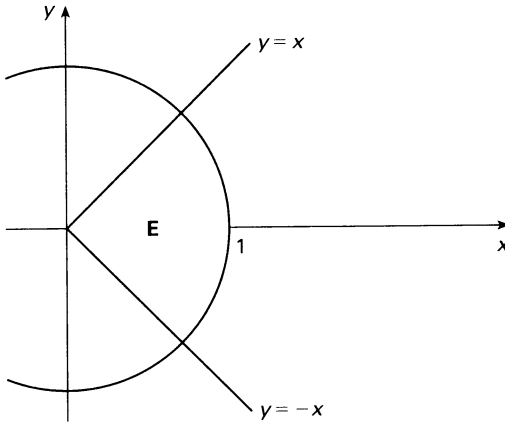


Figura 12.11

Passando in coordinate polari, si ha

$$\int_E (x^2 - y^2) dx dy = \int_F \rho^3 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\rho d\varphi = \int_F \rho^3 \cos 2\varphi d\rho d\varphi$$

dove F è l'insieme E descritto in coordinate polari. Quando (x, y) varia in E , ρ varia tra 0 e 1, mentre φ varia tra $-\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$.⁷ Si ha allora:

$$\int_E (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \int_0^1 \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}. \quad \square$$

⁷ In questo caso conviene considerare φ variabile tra $-\pi$ e π . Se avessimo preso l'angolo φ tra 0 e 2π , avremmo dovuto spezzare l'integrale rispetto a φ in due, uno tra 0 e $\frac{\pi}{4}$, e l'altro tra $\frac{7\pi}{4}$ e 2π . Ovviamente il risultato finale sarebbe stato lo stesso.

Esempio 12.12 Calcolare l'area dell'insieme

$$E = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3x\}.$$

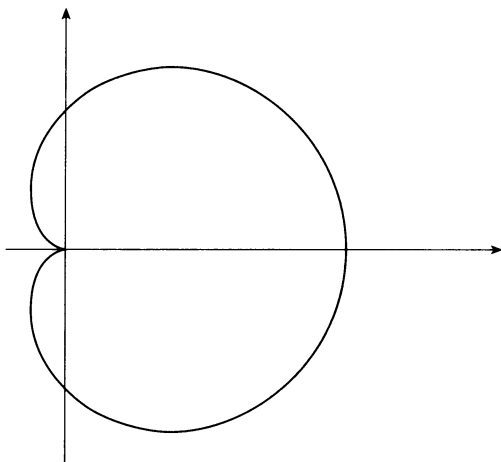


Figura 12.12

Per la sua figura a forma di cuore, l'insieme E (o più esattamente la curva che lo delimita) si chiama *cardioide*. Per calcolarne l'area passiamo in coordinate polari. Si ha

$$m(E) = \int_E dx dy = \int_F \rho d\rho d\varphi.$$

Per trovare l'insieme F esprimiamo in coordinate polari la disuguaglianza $x^2 + y^2 < 3\sqrt{x^2 + y^2} - 3x$ che definisce E . Si ha

$$\rho^2 < 3\rho - 3\rho \cos \varphi$$

e dunque φ varia tra 0 e 2π , mentre ρ varia tra 0 e $3(1 - \cos \varphi)$. Avremo pertanto

$$\begin{aligned} \int_F \rho d\rho d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{3(1-\cos\varphi)} \rho d\rho = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} - 2 \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{27\pi}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Una immediata generalizzazione delle coordinate polari al caso di tre variabili è costituita dalle *coordinate cilindriche*, date dalle relazioni

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

[12.27]

In sostanza, le coordinate cilindriche si limitano a introdurre le coordinate polari

(bidimensionali) nel piano xy , lasciando inalterata la variabile z . Di conseguenza, si ha

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_F f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad [12.28]$$

Esempio 12.13 Trovare la misura dell'insieme ottenuto intersecando il cono $z^2 < x^2 + y^2$ con il cilindro $x^2 + y^2 < 2x$.

Introducendo le coordinate cilindriche, l'insieme in questione è determinato dalle relazioni $z^2 < \rho^2$ e $\rho^2 < 2\rho \cos \varphi$. Si ha dunque

$$F = \{(\rho, \varphi, z) : -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < 2 \cos \varphi, -\rho < z < \rho\}$$

e il volume di E diventa

$$\begin{aligned} \int_E dx dy dz &= \int_F \rho d\rho d\varphi dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho d\rho \int_{-\rho}^{\rho} dz = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1-s^2) ds = \frac{8}{9}. \end{aligned} \quad \square$$

Veniamo ora alle coordinate polari in tre dimensioni, dette anche *coordinate sferiche*. Se P è un punto di $\mathbf{R}^3$, di coordinate (x, y, z) , si indica con r la distanza dall'origine:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

con ϑ l'angolo che il segmento OP forma con l'asse delle z , e con φ l'angolo tra l'asse x e il segmento OQ , proiezione di OP sul piano xy (vedi figura). Si ha allora

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = r \cos \vartheta \sin \varphi \\ z = r \sin \vartheta \end{cases}$$

La formula di cambiamento di variabili nelle coordinate polari tridimensionali si può ottenere dalla formula generale [12.23]. Si può però anche osservare che il passaggio a coordinate polari si può vedere come il risultato di due operazioni successive: la prima è il passaggio a coordinate cilindriche [12.27], la seconda, che coinvolge solo le variabili z e ρ , data dalle formule

$$\begin{cases} z = \rho \cos \vartheta \\ \rho = r \sin \vartheta \\ \varphi = \varphi \end{cases} \quad [12.29]$$

La matrice jacobiana di questa trasformazione è

$$J = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

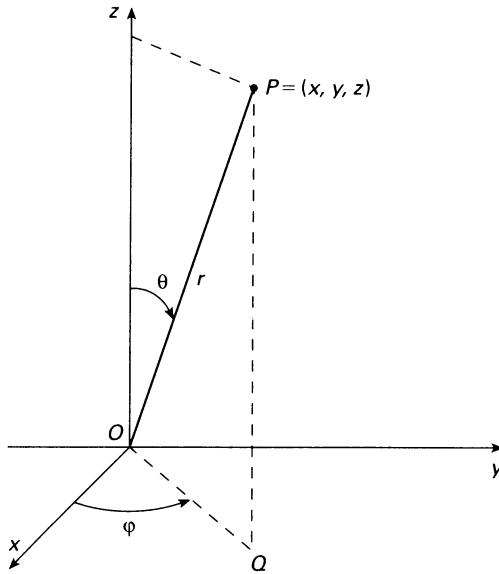


Figura 12.13

il cui determinante è r . Se ora si deve calcolare l'integrale

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz$$

si può passare prima a coordinate cilindriche

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

e quindi eseguire il cambiamento di variabili [12.29]:

$$\int_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_F f(r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta) r \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Si ha dunque in definitiva:

$$\int_E f(x, y, z) dx dy dz = \int_F f(r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \quad [12.30]$$

Esempio 12.14 Si calcoli il volume dell'intersezione tra il cono di equazione $x^2 + y^2 < z^2$ e la sfera $x^2 + y^2 + z^2 < 2z$.

Esprese in coordinate sferiche, le due relazioni diventano $r^2 \sin^2 \vartheta < r^2 \cos^2 \vartheta$ e $r^2 < 2r \cos \vartheta$, ossia semplificando:

$$\sin^2 \vartheta < \cos^2 \vartheta \quad r < 2 \cos \vartheta,$$

che danno per l'insieme F le relazioni

$$0 < \vartheta < \frac{\pi}{4} \quad 0 < r < 2 \cos \vartheta$$

mentre φ varia tra 0 e 2π .

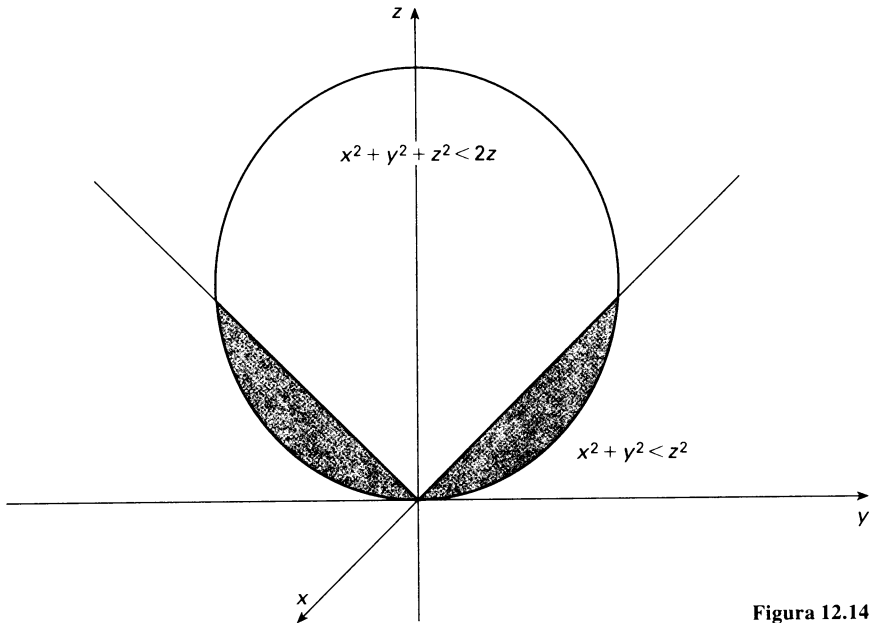


Figura 12.14

Il volume desiderato è dunque

$$\begin{aligned}
 \int_E dx dy dz &= \int_F r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\cos \vartheta} r^2 dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta \frac{8\cos^3 \vartheta}{3} d\vartheta = \\
 &= \frac{16\pi}{3} \left(-\frac{1}{4} \cos^4 \vartheta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi
 \end{aligned}$$

□

Esempio 12.15 Dato il cono

$$C = \{(x, y, z) : 0 < z < 1, x^2 + y^2 < z^2\},$$

trovarne il momento d'inerzia rispetto all'asse delle x .

Il momento d'inerzia $\mathcal{M}$ di un insieme E rispetto all'asse delle x è dato dall'integrale

$$\int_E (y^2 + z^2) dx dy dz.$$

Nel caso del cono C , passando a coordinate polari, si ha:

$$\mathcal{M} = \int_F r^4 \sin \vartheta (\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta) dr d\vartheta d\varphi$$

dove F è determinato dalle disuguaglianze

$$0 < r \cos \vartheta < 1, r^2 \sin^2 \vartheta < r^2 \cos^2 \vartheta$$

ossia

$$0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{4}, 0 \leq r < \frac{1}{\cos \vartheta}.$$

Risulta allora

$$\mathcal{W} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos \vartheta}} r^4 dr \int_0^{2\pi} (\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta) d\varphi.$$

L'ultimo integrale si calcola facilmente:

$$\int_0^{2\pi} (\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta) d\varphi = \pi(\sin^2 \vartheta + 2\cos^2 \vartheta) = \pi(1 + \cos^2 \vartheta)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta \int_0^{\frac{1}{\cos \vartheta}} r^4 dr = \frac{\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \vartheta (1 + \cos^2 \vartheta)}{\cos^5 \vartheta} d\vartheta = \\ &= -\frac{\pi}{5} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1+u^2}{u^5} du = \frac{\pi}{5} \left(\frac{1}{4u^4} + \frac{1}{2u^2} \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{5} \left(1 + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

□

Esercizi

12.28. Calcolare i seguenti integrali:

$$1. \int_E x^2 y^2 dx dy \quad 2. \int_E \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dx dy \quad 3. \int_E \frac{x^2}{x^2 + 2y^2} dx dy \quad 4. \int_E \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} dx dy$$

dove E è la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.

12.29. Calcolare:

$$1. \int_G \frac{xdy}{3y + 4x} \quad 2. \int_G x \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx dy \quad 3. \int_G x e^y dx dy \quad 4. \int_G x \log(1+y) dx dy$$

nei quali G è la parte della corona circolare dell'esercizio precedente contenuta nel primo quadrante.

12.30. Si calcoli:

$$\begin{aligned} 1. \int_I (x + y^2)^2 dx dy & \quad 3. \int_I \frac{x^2}{1 + y^2} dx dy & \quad 5. \int_I \frac{y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy \\ 2. \int_I x^2 \operatorname{arctg}(x^2 + y^2) dx dy & \quad 4. \int_I \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} dx dy & \quad 6. \int_I x^2 e^{x^2 + y^2} dx dy \end{aligned}$$

dove I è il cerchio di raggio 1 con centro in 0.

12.31. Si trovi l'area dell'intersezione dei cerchi $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$ e $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$.

12.8. Integrali impropri

Come nel caso di una variabile, anche per integrali multipli si può definire l'integrale in senso improprio. Anche qui si hanno due casi: quando l'insieme di integrazione non è limitato, e quando la funzione da integrare non è limitata nelle vicinanze di uno o più punti.

A differenza però dagli integrali unidimensionali, nel caso di integrali multipli la varietà delle situazioni consiglia di porsi in casi più semplici, ad esempio di funzioni positive.

Cominciamo dal caso di integrali in insiemi non limitati. L'idea è di "tagliare" il dominio di integrazione con una sfera di raggio r , integrare su questo insieme (che ora è limitato), e poi far tendere r all'infinito. Possiamo tradurre questa idea in una definizione:

Definizione 12.4 Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$, con $f(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in E$. Supponiamo che per ogni intorno I_r dell'origine

$$I_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\}$$

la funzione f sia integrabile nell'intersezione $E \cap I_r$. Diremo che f è integrabile in senso improprio su E se risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < +\infty.$$

Se ciò accade, si definisce integrale su E della funzione f il valore del limite:

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad [12.31]$$

Osserviamo che grazie all'ipotesi $f(\mathbf{x}) \geq 0$, la funzione

$$F(r) = \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

è crescente, e dunque il limite esiste sempre, ed è uguale all'estremo superiore:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup_{r > 0} \int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Notiamo anche che se l'insieme E è limitato, da un certo r_0 in poi si avrà $E \subset I_r$, e dunque $E \cap I_r = E$; pertanto per $r > r_0$ si ha

$$\int_{E \cap I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

e l'integrale improprio coincide con l'integrale usuale.

Osservazione 12.5 Se si eliminasse la condizione $f(\mathbf{x}) \geq 0$, si potrebbe dare una definizione simile alla precedente; in questo caso l'esistenza del limite non sarebbe più garantita, ma come per le funzioni di una variabile potremmo sempre definire integrabile una funzione per la quale il limite esiste ed è finito.

Si avrebbe però il fenomeno spiacevole che se invece di tagliare con delle sfere facessimo la stessa cosa con dei cubi, una funzione potrebbe essere integrabile con le sfere ma non con i cubi, o viceversa, o anche potrebbe essere integrabile con ambedue, ma dare due diversi valori dell'integrale.

Questo non accade se la funzione è positiva. Infatti, se si considerano ad esempio le sfere I_r e i cubi

$$Q_t = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\} < t\},$$

si vede facilmente che ogni sfera I_r è contenuta in un cubo Q_t (in effetti $I_r \subset Q_r$), e che viceversa ogni cubo Q_h è contenuto in una sfera I_s (e precisamente $Q_h \subset I_{\sqrt{n}h}$). Si ha allora, dato che la funzione integranda è positiva,

$$\begin{aligned} \int_{I_r} f d\mathbf{x} &\leq \int_{Q_t} f d\mathbf{x} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{Q_t} f d\mathbf{x} \\ \int_{Q_h} f d\mathbf{x} &\leq \int_{I_s} f d\mathbf{x} \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{I_s} f d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Facendo ora tendere $r \rightarrow +\infty$ nella prima relazione, e $h \rightarrow +\infty$ nella seconda, si ottiene

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{I_r} f d\mathbf{x} &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{Q_t} f d\mathbf{x} \\ \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{Q_h} f d\mathbf{x} &\leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{I_s} f d\mathbf{x} \end{aligned}$$

e quindi i due limiti sono uguali. $\square$

In maniera simile si tratta il caso in cui E è limitato, ma la funzione f non è limitata, ad esempio nelle vicinanze dell'origine. In questo caso si taglierà dal dominio E una sferetta I_r , si calcolerà l'integrale su $E - I_r$, e poi si farà tendere r a zero.

Definizione 12.5 Sia $f(\mathbf{x})$ una funzione definita in un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$, con $f(\mathbf{x}) \geq 0$ per ogni $\mathbf{x} \in E$. Supponiamo che $\mathbf{x}_0$ sia un punto di accumulazione per E , e che per ogni intorno I_r di $\mathbf{x}_0$ la funzione f sia integrabile in $E - I_r$. Diremo che f è integrabile in senso improprio su E se il limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{E - I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \sup_{r > 0} \int_{E - I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

è finito. Se ciò accade, si definisce integrale della funzione f il valore del limite:

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{E - I_r} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad [12.32]$$

Anche qui vale quanto detto in precedenza: invece delle palle I_r potremmo escludere dei cubi, o un qualsiasi altra famiglia di insiemi S_h , con $S_h \subset S_k$ per $h < k$, e tali che $\mathbf{x}_0$ sia interno a tutti gli S_h , e che l'intersezione di tutti gli S_h sia costituita dal solo punto $\mathbf{x}_0$.

Se poi $f(\mathbf{x})$ è di segno variabile, possiamo considerare le due funzioni non negative

$$f^+(\mathbf{x}) = \max\{f(\mathbf{x}), 0\} = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(\mathbf{x}) = \max\{-f(\mathbf{x}), 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(\mathbf{x}) \geq 0 \\ -f(\mathbf{x}) & \text{se } f(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}$$

che verificano la relazione $f^+(\mathbf{x}) - f^-(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. Diremo allora che f è integrabile in senso improprio su E se ambedue le funzioni f^+ ed f^- lo sono, e porremo

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_E f^+(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_E f^-(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Esempio 12.16 Calcoliamo l'integrale

$$\int_E \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

dove E è l'insieme esterno al cerchio di raggio 1.

Se $r > 1$, l'insieme $E \cap I_r$ è la corona circolare C_r , di raggi 1 e r . Passando in coordinate polari, si ha se $\alpha \neq 1$:

$$\int_{C_r} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \int_1^r \frac{\rho d\rho}{\rho^{2\alpha}} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_1^r \rho^{1-2\alpha} d\rho = 2\pi \frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \Big|_1^r = \frac{\pi}{1-\alpha} (r^{2-2\alpha} - 1).$$

Se invece $\alpha = 1$, un calcolo simile dà

$$\int_{C_r} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = 2\pi \log r.$$

Se ora facciamo tendere r all'infinito, l'ultimo integrale tende a $+\infty$, come anche quello precedente se $\alpha < 1$. Se invece $\alpha > 1$ si ha

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha - 1}$$

e la funzione $(x^2 + y^2)^{-\alpha}$ è integrabile in E . □

Esempio 12.17 Come nel caso di una variabile, il comportamento della funzione $(x^2 + y^2)^{-\alpha}$ è opposto al precedente se si integra nel cerchio di raggio 1. Infatti se $r < 1$ si ha, come nell'esempio precedente:

$$\int_{I_1 - I_r} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \frac{\pi}{1-\alpha} (1 - r^{2-2\alpha})$$

se $\alpha \neq 1$, mentre

$$\int_{I_1 - I_r} \frac{dx dy}{x^2 + y^2} = -2\pi \log r.$$

Se ora si fa tendere r a 0, il limite è $\frac{\pi}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$ e $+\infty$ se $\alpha \geq 1$. □

Esempio 12.18 Calcoliamo l'integrale

$$\int_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Si ha, passando in coordinate polari,

$$\int_{I_r} e^{-x^2-y^2} dx dy = 2\pi \int_0^r \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

e con il cambiamento di variabile $u = \rho^2$ l'ultimo integrale diventa

$$\pi \int_0^{r^2} e^{-u} du = \pi(1 - e^{-r^2}).$$

Se ora si fa tendere r all'infinito, l'ultima quantità tende a π , e dunque

$$\int_{R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

Questa relazione ha un'interessante conseguenza. Se infatti si integra sui quadrati Q_t si trova

$$\int_{Q_t} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-t}^t e^{-x^2} dx \times \int_{-t}^t e^{-y^2} dy.$$

I due integrali che compaiono a secondo membro sono uguali, e quindi

$$\int_{Q_t} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_{-t}^t e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Se ora facciamo tendere t a $+\infty$, l'integrale a primo membro tende a π , mentre il secondo membro ha come limite il quadrato dell'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Si ha dunque in conclusione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad [12.33]$$

Se poi osserviamo che la funzione e^{-x^2} è pari, otteniamo dalla relazione precedente che

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad [1]$$

Anche per gli integrali impropri in più variabili valgono poi i criteri di integrabilità che abbiamo visto nel capitolo 9 § 11 per gli integrali in una variabile. Lasciamo per esercizio l'enunciato e la dimostrazione dei corrispettivi del teorema 9.7 (del confronto) e 9.8 (dell'assoluta integrabilità).

Esercizi

12.32. Integrando per parti nell'integrale $\int e^{-x^2} dx$ calcolare $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

12.33. Dimostrare che la funzione $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio in $I_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ se $\alpha < \frac{3}{2}$, mentre è integrabile in $\mathbf{R}^3 - I_1$ se $\alpha > \frac{3}{2}$. Calcolare gli integrali in questi casi.

12.34. Calcolare gli integrali:

1. $\int_E x^2 y dx dy$

3. $\int_E \frac{x}{1+xy} dx dy$

5. $\int_E x \log(1+y) dx dy$

2. $\int_E \frac{x}{1+y^2} dx dy$

4. $\int_E x \arctg y dx dy$

6. $\int_E x^3 e^{xy} dx dy$

con $E = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, 1 < y < \frac{1}{x} \right\}$.

12.35. Calcolare $\int_E \log(x+2y) dx dy$ dove E è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(2, 0)$.

12.36. Calcolare l'integrale

$$\int_T \log(y+2x) dx dy$$

dove T è il dominio delimitato dalle rette $y+2x=0$, $y+2x=1$ e dalle parabole $y=x^2$ e $y=x^2+1$.

12.37. Calcolare l'integrale

$$\int_T (x + \log y) dx dy dz$$

in cui T è il tetraedro con vertici nei punti $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1)$.

12.38. Dire per quali valori di $\alpha > 0$ e $p > 0$ la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio nell'insieme $E = \{(x, y) : 0 < x < 1, -x^p < y < x^p\}$. Per questi valori calcolare l'integrale $\int_E x^{-\alpha} dx dy$.

12.39. Dire per quali valori di $\alpha > 0$ e $p > 0$ la funzione $z^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio nell'insieme $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 0 < x < 1, x^2 + y^2 < z^{2p}\}$. Per questi valori calcolare l'integrale $\int_F z^{-\alpha} dx dy dz$.

12.9. Risposte agli esercizi**12.1.**

1. $\frac{1}{12}$

2. $\frac{\pi}{2}$

3. $\frac{3}{2}$

4. π

12.2.

1. $\frac{1}{2}$

3. $\frac{3}{2} - \sin 1 - \cos 1$

5. $-\frac{3}{16}$

7. $\frac{4}{21}$

2. $\frac{\pi}{6} - \frac{7}{18}$

4. $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$

6. $\frac{3\pi}{32}$

12.3.

1. $\frac{9}{2} \log 3 - \frac{14}{3}$

3. $\frac{\pi}{24}$

5. $-\frac{29}{9} + 3\sqrt{\frac{3}{2}} \log(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

2. $\frac{16}{3} \log 3 - \frac{52}{9}$

4. $\pi - 2$

6. $\frac{12}{5} \log 2 - \frac{284}{25} + \frac{16\pi}{5}$

12.4.

1. $\frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right)$

3. $\cos 1 - \frac{1}{2} (1 + \cos 2)$

2. 0

4. $\frac{2\pi}{3} - \frac{14}{9}$

12.5.

1. $\frac{10}{3} - \frac{7\pi}{8}$

3. $2 \log 3 - 2 - 3\pi + 8\sqrt{2} \arctg \sqrt{2}$

2. $\frac{26}{3} - \frac{3\pi}{2}$

4. $2e - \frac{4}{e}$

12.6.

1. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{5}{38}$

5. $6 \cos 1 + 10 \sin 1 - \frac{23}{2}$

2. $\frac{5}{3} \log 2 - \frac{11}{18}$

4. $\frac{\pi}{16}$

6. $22e - \frac{119}{2}$

12.7.

1. $\frac{3}{4} + 2 \log 2 - \frac{15}{8} \log 3$

3. $\log 2 - \frac{5}{12}$

5. $\frac{\pi}{6} - \frac{7}{18}$

2. $\frac{e}{2}$

4. $\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \log(1 + \sqrt{2})$

6. $\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{9}$

12.8.

1. $\frac{4}{\pi^2}$

2. $\frac{5}{6}$

3. $\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2}$

12.9. $2 - \frac{4}{3} \log 2.$

12.10.

1. $\frac{7}{3} - \sqrt{3}$

2. $\frac{3}{2}$

3. $\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12}$

4. $\frac{9e - 3}{4}$

12.11.

1. $\frac{1}{60}$

3. $\frac{347}{1890}$

5. $e - \frac{65}{24}$

7. $\frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4}$

2. $\frac{1}{240}$

4. $\frac{1}{12}$

6. $\frac{5\pi}{24} - \frac{11}{18}$

12.12.

1. $\frac{1}{24} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5} \right)$

2. $\frac{4}{9} - \frac{5\pi}{48}$

3. $\frac{1}{2}(e - 2)$

12.13.

1. $\frac{3}{4}$

2. $-\frac{185}{36}$

3. $\frac{11e}{6} - \frac{7}{3}$

12.14.

1. $-\frac{3}{8} + \cos 1$

2. $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} 2 - \frac{11}{24} \log 5 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \log 2$

12.15.

1. $\frac{26}{3}$

2. $\frac{27}{4} \log 3 - \frac{91}{18}$

12.16.

1. $\frac{\pi^2}{2}$

6. $\frac{\pi}{2k+1} a^{2k+1}$

2. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$

7. $9 \log^2 3 - 3 \log 3 + 1$

3. $\pi(e - 2)$

8. $\frac{2}{3}$

4. $\pi - \frac{\pi^2}{4}$

9. $4 \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$

5. $\frac{\pi \alpha^2 h^3}{3}$

$$12.17. \frac{2(b^2 + ab + a^2)}{3(a + b)}.$$

$$12.18. \frac{1}{a - b} \log \frac{a}{b}$$

12.19.

$$1. \frac{8}{5} \sqrt{2} - \frac{59}{30} \qquad 2. \frac{28}{15} \sqrt{2} - \frac{13}{5} \qquad 3. \frac{8}{5} (3\sqrt{2} - 4)$$

$$12.20. \frac{3}{16} + \frac{37}{16} \log 2 - \frac{27}{16} \log 3.$$

12.21.

$$1. 2(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \qquad 3. (\sqrt{2} - 1)\sqrt{3} \log 3 - (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} \log 2$$

$$2. \frac{1}{2} \qquad 4. \frac{\log 2}{8} (6 \log 3 - 3 \log 2 - 2)$$

$$12.22. \frac{\operatorname{sen} 1}{2}.$$

12.23.

$$1. \frac{3\pi}{4} - 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{4} \qquad 2. \frac{14}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \right) \qquad 3. 2 \log^2 2$$

12.24.

$$1. \frac{2}{e} (e^2 - 1)(e - 1) \qquad 2. 0 \qquad 3. 9 \log 3 - 4 \log 2 - 6$$

12.25.

$$1. \log 2 \log \frac{3}{2} \qquad 3. \frac{9}{2} \log 3 - \frac{4}{3} \log 2 - \frac{19}{18}$$

$$2. \frac{3e^2}{8} (5e - 2) \qquad 4. -\frac{2}{\pi^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right)$$

$$12.26. \frac{1}{2} \log \frac{1+b}{1+a}.$$

$$12.27. \frac{1}{45}.$$

12.28.

$$1. \frac{21\pi}{8} \qquad 2. \frac{3\pi}{2} \qquad 3. 3\pi(\sqrt{2} - 1) \qquad 4. 2\pi\sqrt{2} \log 2$$

12.29.

1. $\frac{\log 6}{5}$

3. $e^2 - \frac{3}{2}$

2. $\frac{7}{3}$

4. $\frac{9}{2} \log 3 - \frac{2}{3} \log 2 - \frac{115}{36}$

12.30.

1. $\frac{3\pi}{8}$

3. $\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi$

5. $\frac{\pi}{2}(1 - \log 2)$

2. $\frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$

4. $\frac{\pi}{16}$

6. $\frac{\pi}{2}$

12.31. $\frac{\pi}{2} - 1.$

12.32. $\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

12.33. $\frac{4\pi}{3-2\alpha}, \frac{4\pi}{2\alpha-3}.$

12.34.

1. $\frac{1}{3}$

3. $1 - \log 2$

5. $\log 2$

2. $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

4. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \log 2$

6. $\frac{3-e}{2}$

12.35. $-\frac{3}{2} + 3 \log 3 - 2 \log 2.$

12.36. $\frac{20}{9}(1 - \sqrt{2}) + \frac{4}{3} \log \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$

12.37. $-\frac{19}{72}.$

12.38. $p - \alpha + 1 > 0; \frac{2}{p - \alpha + 1}.$

12.39. $2p - \alpha + 1 > 0; \frac{\pi}{2p - \alpha + 1}.$

Capitolo 13

Successioni e serie di funzioni

13.1. Successioni di funzioni

In molti casi, invece che numeri reali, i termini di una successione o di una serie sono delle funzioni, tutte definite in un insieme $E \subseteq \mathbf{R}^k$ e a valori in $\mathbf{R}^n$. Noi ci interesseremo qui del caso di funzioni a valori reali ($n = 1$), con particolare riguardo per le funzioni di una variabile ($k = 1$), anche se molti dei risultati che dimostreremo valgono anche nel caso generale.

Abbiamo incontrato successioni di funzioni già nel capitolo dedicato alle successioni numeriche, e nello studio della serie di Taylor di una funzione, quando ci siamo posti il problema di trovare per quali valori di x una certa serie, i cui termini dipendevano da x , era convergente.

Riprendiamo ora più in dettaglio lo studio delle successioni e delle serie di funzioni, cominciando da una definizione.

Definizione 13.1 (convergenza puntuale) Diremo che la successione di funzioni f_n converge puntualmente in E alla funzione f se per ogni $\mathbf{x} \in E$ la successione numerica $f_n(\mathbf{x})$ converge a $f(\mathbf{x})$; cioè se si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

Analogamente, diremo che la serie di funzioni $\sum f_n$ converge puntualmente in E alla funzione f se per ogni $\mathbf{x} \in E$ la successione delle somme parziali

$$s_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^n f_k(\mathbf{x})$$

converge a $f(\mathbf{x})$.

Esempio 13.1 La successione

$$f_n(x) = x^n$$

converge puntualmente in $[0, 1]$ alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Infatti i termini della successione costituiscono una progressione geometrica, che per $0 \leq x < 1$ tende a 0; se poi $x = 1$ tutti i termini valgono 1 e quindi anche il limite è 1. $\square$

Osserviamo che la successione x^n converge puntualmente a 0 anche in $(-1, 0]$, mentre non converge per $x > 1$ o per $x \leq -1$.

Esempio 13.2 La successione

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

converge puntualmente in $[0, 1]$ alla funzione 0.

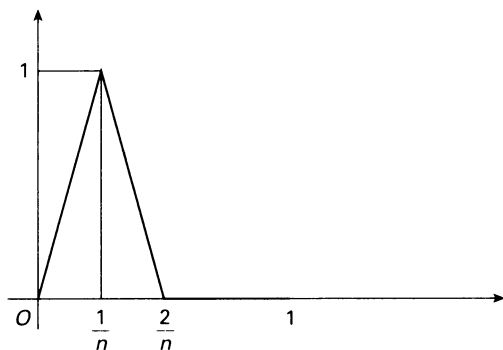


Figura 13.1

Se $x = 0$ si ha $f_n(0) = 0$ per ogni n , e quindi anche il limite è 0. Se invece $x > 0$, non appena $n > \frac{2}{x}$ si ha $\frac{2}{n} < x$, e quindi $f_n(x) = 0$, e anche in questo caso il limite vale 0. $\square$

Esercizi

13.1. Calcolare il limite delle seguenti successioni di funzioni di una variabile reale:

1. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$
2. $\frac{nx}{1 + n^2 x^2}$
3. $\frac{x^n}{n + x^{2n}}$
4. $\frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$
5. $\frac{\sin nx}{nx} (x \neq 0)$
6. n^x
7. $\frac{x^n + x^{3n}}{1 + x^{2n}}$

13.2. Dire per quali $x \in \mathbf{R}$ convergono le seguenti serie:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{\sqrt{n}}}{n}$$

$$7.* \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1-x^{2n})$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^{n^2}}$$

$$3. \sum_{n=0}^{\infty} |x|^{nx}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{x}{n}$$

13.2. La convergenza uniforme

L'esempio 13.1 mostra come una successione di funzioni continue possa convergere puntualmente a una funzione discontinua. Per ovviare a questo inconveniente si può introdurre un tipo più forte di convergenza, che viene detta *uniforme* e che mostra evidenti analogie con la continuità uniforme.

Il fatto che la successione f_n converga puntualmente in E a f si esprime formalmente dicendo che

$$\forall \mathbf{x} \in E, \forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n > v \quad |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon.$$

È chiaro che il valore di v dipende, oltre che da ε , anche dal punto $\mathbf{x}$; al cambiare di quest'ultimo varierà anche l'indice v a partire dal quale la differenza $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|$ è minore di ε . Ad esempio, se come nell'esempio 13.1 si pone $f_n(x) = x^n$, per $0 < x < 1$ risulterà¹ $x^n < \varepsilon$ quando $n \log x < \log \varepsilon$, cioè, essendo $\log x < 0$, quando $n > v = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$.

È evidente che in questo caso il numero v dipende da x , e diventa sempre più grande quanto più x è vicino a 1.

Se invece è possibile trovare un v che vada bene per ogni $\mathbf{x} \in E$, si dirà che la convergenza è *uniforme* in E . Formalmente, ciò accade se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists v : \forall n > v, \forall \mathbf{x} \in E \quad |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon.$$

Esempio 13.3 La successione $f_n(x) = \frac{n-1}{n}x$ converge uniformemente a x nell'intervallo $[-a, a]$.

Si ha infatti $|f_n(x) - x| = \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{a}{n}$, e quest'ultima quantità è minore di ε non appena $n > v = \frac{a}{\varepsilon}$. Il numero v così trovato non dipende da x , e quindi la convergenza è uniforme.

Notiamo che f_n converge puntualmente a x in $\mathbf{R}$, ma non uniformemente. □

¹ Si può ignorare il valore assoluto, dato che si ha $x^n > 0$.

Se le funzioni f_n sono limitate in E , possiamo porre la convergenza uniforme in forma più suggestiva, introducendo la *norma*:

$$\|g\| = \sup_{\mathbf{x} \in E} |g(\mathbf{x})| \quad [13.1]$$

Si verifica facilmente che il numero $\|g\|$ definito dalla [13.1] gode delle seguenti proprietà, analoghe a quelle del valore assoluto in $\mathbf{R}$:

1. $\|g\| \geq 0$; $\|g\| = 0$ se e solo se $g \equiv 0$,
2. $\|\lambda g\| = |\lambda| \|g\|$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$,
3. $\|g + h\| \leq \|g\| + \|h\|$ (disuguaglianza triangolare).

Di conseguenza la quantità $\|g - h\|$ esprime la distanza tra le funzioni limitate g e h .

A volte la norma di g si indica anche con $\|g\|_\infty$. Se poi si vuole mettere in evidenza l'insieme E , si scriverà $\|g\|_E$ o anche $\|g\|_{\infty, E}$.

Avremo allora:²

Definizione 13.2 *Si dice che successione f_n di funzioni limitate converge uniformemente in E alla funzione f se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un v tale che per ogni $n > v$ risulta $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$.*

Questa definizione è equivalente a quella che avevamo dato prima. Infatti per la definizione di norma, se $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$, allora per $n > v$ si avrà $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in E$; viceversa se questo accade, sarà anche

$$\|f_n - f\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in E} |f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \varepsilon.$$

L'importanza della convergenza uniforme sarà chiara dai risultati che dimostreremo in questo e nei prossimi capitoli.

Cominciamo col provare che la convergenza uniforme conserva la continuità:

Teorema 13.1 *Se una successione di funzioni continue converge uniformemente in E a una funzione f , quest'ultima è continua in E .*

Dimostrazione Sia $\mathbf{x}_0$ un arbitrario punto di E . Faremo vedere che f è continua in $\mathbf{x}_0$, ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in E$, con $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ si ha $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$.

Dato $\varepsilon > 0$, per la convergenza uniforme sappiamo che esiste un v tale che per ogni $n > v$ e per ogni $\mathbf{x} \in E$ si ha $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Fissiamo ora $n = v + 1$. Poiché $f_{v+1}(\mathbf{x})$ è continua in $\mathbf{x}_0$, esisterà un $\delta > 0$ tale che se $\mathbf{x} \in E$ e $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ si ha $|f_{v+1}(\mathbf{x}) - f_{v+1}(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

² Per maggiori dettagli si veda il capitolo 20.

Si ha dunque, se $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$,

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq |f(\mathbf{x}) - f_{v+1}(\mathbf{x})| + |f_{v+1}(\mathbf{x}) - f_{v+1}(\mathbf{x}_0)| + |f_{v+1}(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

La funzione f è quindi continua in $\mathbf{x}_0$, e per l'arbitrarietà di $\mathbf{x}_0$ è continua in E . $\square$

Un secondo risultato consiste nel passaggio al limite sotto il segno di integrale. Per questo dimostriamo prima un lemma, che può essere interessante anche di per sé:

Lemma 13.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f sia integrabile in un insieme E è che per ogni $\varepsilon > 0$ esistano due funzioni h e g , integrabili in E , con $h(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, e tali che*

$$\int_E g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_E h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \varepsilon. \quad [13.2]$$

Dimostrazione Se f è integrabile in E , la condizione [13.2] è ovviamente verificata con $g = h = f$.

Supponiamo viceversa che esistano due funzioni h e g verificanti la [13.2]. Siccome g è integrabile in E , per ogni $\varepsilon > 0$ esisterà una funzione semplice φ , con $\varphi \geq g$ φ_E e tale che

$$\int \varphi d\mathbf{x} - \int g \varphi_E d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

Analogamente, esisterà una funzione semplice ψ , con $\psi \leq h$ φ_E e tale che

$$\int h \varphi_E d\mathbf{x} - \int \psi d\mathbf{x} < \varepsilon.$$

Si ha evidentemente

$$\psi(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{x})$$

per ogni $\mathbf{x} \in E$, e inoltre

$$\int \varphi d\mathbf{x} - \int \psi d\mathbf{x} = \int \varphi d\mathbf{x} - \int_E g d\mathbf{x} + \int_E g d\mathbf{x} - \int_E h d\mathbf{x} + \int_E h d\mathbf{x} - \int \psi d\mathbf{x} < 3\varepsilon$$

e per l'osservazione 12.2 la funzione f è integrabile in E . $\square$

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 13.2 (Passaggio al limite sotto il segno di integrale) *Se una successione f_n di funzioni integrabili in un insieme limitato E converge uniformemente a una funzione $f(\mathbf{x})$, allora f è integrabile in E e si ha*

$$\int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad [13.3]$$

Dimostrazione Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un v tale che per ogni $n > v$ si ha $|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{x} \in E$, e dunque

$$f_n(\mathbf{x}) - \varepsilon < f(\mathbf{x}) < f_n(\mathbf{x}) + \varepsilon. \quad [13.4]$$

D'altra parte risulta

$$\int_E [f_n(\mathbf{x}) + \varepsilon] d\mathbf{x} - \int_E [f_n(\mathbf{x}) - \varepsilon] d\mathbf{x} = 2\varepsilon m(E).$$

e quindi, per il lemma precedente, f è integrabile in E .

Integrando poi membro a membro la [13.4], si ha

$$\int_E f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \varepsilon m(E) < \int_E f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \int_E f_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \varepsilon m(E)$$

per ogni $n > v$, da cui segue la [13.3]. $\square$

Se poi le funzioni f_n sono derivabili, vale il seguente teorema, che dimostriamo nel caso di una sola variabile:

Teorema 13.3 *Sia f_n una successione di funzioni di classe $C^1([a, b])$ (cioè derivabili e con derivate prime continue in $[a, b])$. Supponiamo che la successione f_n converga uniformemente a f , e che la successione delle derivate f'_n converga uniformemente a g in $[a, b)$. Allora f è derivabile, e $f' = g$.*

Dimostrazione Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ e applicando il teorema precedente, si ha

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

La funzione $f(x) - f(a)$ è dunque la funzione integrale di g . Applicando di nuovo il teorema fondamentale del calcolo integrale si conclude che f è derivabile, e che $f' = g$. $\square$

I due teoremi precedenti hanno una versione “continua”:

Teorema 13.4 *Sia E un insieme compatto di $\mathbf{R}^n$, F un insieme compatto e misurabile di $\mathbf{R}^k$, e $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ una funzione continua in $E \times F$. La funzione*

$$g(\mathbf{x}) = \int_F f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

è uniformemente continua in E .

Dimostrazione Poiché il prodotto cartesiano $E \times F$ è compatto, la funzione f risulta uniformemente continua (vedi cap. 7, § 7). In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ risulta $|f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})| < \varepsilon$ per ogni $\mathbf{y} \in F$. Integrando rispetto a $\mathbf{y}$, si ottiene allora:

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \leq \int_F |f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})| d\mathbf{y} < \varepsilon m(F)$$

non appena $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$. La funzione $g(\mathbf{x})$ risulta pertanto uniformemente continua in E . $\square$

Osservazione 13.1 Se si toglie l'ipotesi che E sia compatto, la funzione $g(x)$ sarà continua in ogni punto interno a E . Infatti detto $\mathbf{x}_0$ un tale punto, esiste un intorno I di $\mathbf{x}_0$ la cui chiusura è contenuta in E . Si può allora applicare il teorema precedente con $\bar{I}$ al posto di E , e concludere che la restrizione di g ad $\bar{I}$ è continua in $\mathbf{x}_0$. Siccome I è un intorno di $\mathbf{x}_0$, g è continua in $\mathbf{x}_0$.

Se poi E è aperto, ogni punto è interno, e g è continua (ma in genere non uniformemente continua) in E . $\square$

Supponiamo ora che per ogni $\mathbf{y}$ fissato, la funzione f (considerata come funzione della sola $\mathbf{x}$) sia derivabile rispetto a una direzione $\mathbf{v}$. Si ha allora:

Teorema 13.5 (Derivazione sotto il segno di integrale) *Se E è aperto, e la derivata $f_v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ lungo la direzione $\mathbf{v}$ esiste ed è continua in $E \times F$, la funzione $g(\mathbf{x})$ risulta derivabile in E nella direzione $\mathbf{v}$, e si ha*

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \int_F \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad [13.5]$$

Dimostrazione Sia $\mathbf{x} \in E$, sia $r > 0$ tale che $I(\mathbf{x}, r) \subset E$, e sia $|h| < r$. Scriviamo il rapporto incrementale della funzione g :

$$\frac{g(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - g(\mathbf{x})}{h} = \int_E \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{h} d\mathbf{y}.$$

Per il teorema del valor medio, esisterà un punto τ , compreso tra 0 e h , tale che

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{h} = f_v(\mathbf{x} + \tau\mathbf{v}, \mathbf{y})$$

Per ipotesi la funzione f_v è continua in $\overline{I(\mathbf{x}, r)} \times F$, che è compatto, e dunque uniformemente continua. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste pertanto un $\delta > 0$ tale che se $\|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| < \delta$ si ha $|f_v(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) - f_v(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < \varepsilon$. D'altra parte se $|h| < \delta$ si ha $\|(\mathbf{x} + \tau\mathbf{v}) - \mathbf{x}\| < \delta$ e dunque

$$\left| \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{h} - f_v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| = |f_v(\mathbf{x} + \tau\mathbf{v}, \mathbf{y}) - f_v(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Se $|h| < \delta$ risulta allora:

$$\left| \frac{g(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - g(\mathbf{x})}{h} - \int_F \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right| = \left| \int_F \left(\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{h} - f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\mathbf{y} \right| \leq \\ \leq \int_F \left| \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{h} - f_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right| d\mathbf{y} \leq \varepsilon m(F)$$

e il teorema è dimostrato. □

Esercizi

13.3. Dire se le successioni di funzioni dell'esercizio 13.1 convergono uniformemente nell'insieme di convergenza.

13.4. Dire se le seguenti successioni, che convergono puntualmente a 0 nell'intervallo (0, 1), convergono uniformemente in questo intervallo:

$$1. x^n \quad 2. n^{-x} \quad 3. n^{-1/x} \quad 4. \frac{\sin nx}{nx} \quad 5. \frac{\sin \sqrt{n}x}{nx} \quad 6. * \frac{\sin nx^2}{nx}$$

13.5. Trovare il limite puntuale delle seguenti successioni di funzioni, e dimostrare che la convergenza non è uniforme in $[0, \pi]$:

$$1. \sqrt[n]{\sin x} \quad 2. \sin^n x \quad 3. \frac{nx}{1 + n^4 x^4} \quad 4. \frac{nx}{1 + nx}$$

13.3. Serie di funzioni

In linea di principio, non c'è nessuna differenza tra le successioni e le serie di funzioni; basta applicare quello che abbiamo detto sulle successioni alle somme parziali della serie

$$s_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n f_k(\mathbf{x})$$

Ad esempio, la serie $\sum f_k(x)$ converge (puntualmente, uniformemente) se converge (puntualmente, uniformemente) la successione delle somme parziali $s_n(x)$.

Da un punto di vista pratico però la differenza esiste ed è sensibile. Spesso infatti una successione di funzioni $f_n(\mathbf{x})$ è data esplicitamente, e in genere si riesce a calcolare anche il limite $f(\mathbf{x})$, cosicché per vedere se la convergenza è uniforme basta calcolare la norma $\|f_n - f\|$ e determinare se tende a zero o no. Al contrario, molto raramente si riescono a calcolare esplicitamente le somme parziali di una serie, e quasi mai si conosce la sua somma, cosicché il problema della convergenza uniforme è relativamente più facile per le successioni che per le serie.

Per queste ultime c'è comunque un semplice criterio per la convergenza uniforme. Per enunciarlo, cominciamo da una definizione.

Definizione 13.3 Diremo che la serie di funzioni limitate

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$$

converge totalmente in E , se converge la serie delle norme:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_E < +\infty.$$

Si ha il seguente

Teorema 13.6 Una serie totalmente convergente in E converge uniformemente.

Dimostrazione Per ogni $\mathbf{x} \in E$ risulta

$$|f_k(\mathbf{x})| \leq \|f_k\|$$

e quindi per i criteri del confronto e della convergenza assoluta la serie $\sum f_k(\mathbf{x})$ converge puntualmente in E . Sia $f(\mathbf{x})$ la sua somma; dobbiamo dimostrare che la successione delle somme parziali $s_n(\mathbf{x})$ converge uniformemente a $s(\mathbf{x})$.

Si ha

$$s(\mathbf{x}) - s_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(\mathbf{x})$$

e dunque

$$\|s - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(\mathbf{x}) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| = \sigma - \sigma_n$$

dove con σ_n e σ si sono indicate le somme parziali e la somma della serie $\sum \|f_k\|$.

Poiché quest'ultima serie converge, quando $n \rightarrow \infty$ la quantità $\sigma - \sigma_n$ tende a zero, e quindi tende a zero anche $\|s_n - s\|$. $\square$

Esempio 13.4 La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

converge uniformemente in $\mathbf{R}$. Infatti si ha

$$\left\| \frac{\sin nx}{n^2} \right\| = \frac{1}{n^2}$$

e quest'ultima serie converge. $\square$

Esercizi

13.6. Dire se le serie che seguono convergono totalmente sugli insiemi indicati a fianco:

$$1. \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen}^k x, \quad \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$5. \sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x)^k, \quad [0, 1]$$

$$2. \sum_{k=0}^{\infty} k e^{kx}, \quad [-2, -1]$$

$$6. \sum_{k=0}^{\infty} x^{kx}, \quad \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2} \frac{e^{kx}}{1+e^{kx}}, \quad [1, 3]$$

$$7. \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{9^k + x^k} - 3^k), \quad [-2, 2]$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k, \quad [0, 1]$$

13.4. Le serie di potenze

Tra le serie di funzioni un posto particolare spetta alle serie di potenze; cioè alle serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n. \quad [13.6]$$

Possiamo sempre supporre $x_0 = 0$; infatti altrimenti basta porre $y = x - x_0$, e ricondursi alla serie $\sum a_n y^n$. Considereremo dunque serie di potenze del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad [13.7]$$

Queste serie convergono almeno per $x = 0$, dato che in questo caso tutti i termini sono nulli tranne il primo a_0 . Ci sono delle serie di potenze, come ad esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

che convergono solo per $x = 0$. Infatti il termine generico $(nx)^n$ non tende a zero per $x \neq 0$, e dunque viene meno la condizione necessaria per la convergenza.

Si ha però il seguente

Teorema 13.7 *Se la serie [13.7] converge in un punto $y \neq 0$, allora converge totalmente in $I(0, p)$ per ogni $p < |y|$.*

Dimostrazione Poiché la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

è convergente, dovrà verificare la condizione necessaria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n y^n = 0$$

e quindi la successione $a_n y^n$ sarà limitata:

$$|a_n y^n| \leq M$$

Si avrà allora per $|x| < \rho$

$$||a_n x^n||_{I(0, \rho)} = |a_n| \rho^n = |a_n y^n| \left(\frac{\rho}{|y|} \right)^n \leq M \left(\frac{\rho}{|y|} \right)^n.$$

Poiché per ipotesi $\frac{\rho}{|y|} < 1$, la serie $\sum ||a_n x^n||_{I(0, \rho)}$ è maggiorata da una serie geometrica di ragione minore di 1, e quindi converge. □

Una conseguenza di questo teorema è che se chiamiamo r l'estremo superiore dei valori di x per i quali la serie converge, avremo che essa convergerà per $|x| < r$, cioè per $x \in I(0, r)$, e non convergerà per $|x| > r$.³ Il numero r si chiama *raggio di convergenza* della serie $\sum a_n x^n$.

Se $\rho < r$ la serie converge totalmente, e dunque uniformemente, in $I(0, \rho)$; di conseguenza la sua somma $f(x)$ è una funzione continua in $I(0, \rho)$. Poiché ρ è un numero arbitrario minore di r , la somma $f(x)$ sarà continua in $I(0, r)$.

Si può dire di più. Infatti

Teorema 13.8 *La funzione $f(x)$ ha derivate di qualsiasi ordine continue in $I(0, r)$.*

Dimostrazione Ragioniamo come nel teorema precedente, relativamente alla serie delle derivate

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad [13.8]$$

o meglio alla serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n y^n, \quad [13.9]$$

che si ottiene da questa moltiplicando per x , e che converge per gli stessi x .

Sia ora $\rho < r$, e sia y un numero reale con $\rho < y < r$. Per la definizione di raggio di convergenza, la serie $\sum a_n y^n$ converge, e dunque esisterà un M tale che

$$|a_n y^n| \leq M$$

³ In genere non si può dire nulla sulla convergenza della serie per $x = \pm r$, e il comportamento della serie in questi punti si dovrà decidere caso per caso.

D'altra parte

$$||na_n x^n||_{I(0, \rho)} = n |a_n| \rho^n = n |a_n y^n| \left(\frac{\rho}{|y|} \right)^n \leq M n \left(\frac{\rho}{|y|} \right)^n.$$

Per il criterio della radice, la serie a secondo membro converge (si ricordi che $\sqrt[n]{n}$ tende a 1). Di conseguenza la serie [13.9] converge totalmente, e così anche la serie [13.8]. Per il teorema 13.3 la funzione f ha derivata prima continua in $I(0, \rho)$, e per l'arbitrarietà di ρ in $I(0, r)$.

Con lo stesso ragionamento, a partire dalla serie [13.8], si dimostra che f ha derivata seconda, terza ecc. continua in $I(0, r)$. $\square$

In particolare si ha

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Se nella relazione precedente si pone $x=0$, tutti i termini della serie si annullano, tranne quello per $n=k$, che vale $k!a_k$. Si ha allora

$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

e di conseguenza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Pertanto se la funzione $f(x)$ è la somma di una serie di potenze, allora è sviluppabile in serie di Taylor, e questa coincide con la serie di potenze di partenza. In altre parole, le serie di potenze sono le serie di Taylor delle funzioni sviluppabili.

In particolare, alle serie di Taylor si applicano i risultati di questo capitolo; se la serie di Taylor di una funzione $f(x)$ converge a f in un intorno $I(x_0, r)$ del punto iniziale x_0 – e nel capitolo 10 abbiamo visto sotto quali condizioni ciò accade – la convergenza è totale (e quindi uniforme) in ogni intervallo chiuso contenuto in I .

Il teorema precedente può talvolta essere applicato per trovare la somma di alcune serie di potenze.

Esempio 13.5 Trovare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}.$$

La serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ ha come somma e^{x^2} . Si ha allora

$$D(e^{x^2}) = 2xe^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} D \frac{x^{2k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} 2k \frac{x^{2k-1}}{k!}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!} = xe^{x^2}.$$

□

La ricerca del raggio di convergenza può essere facilitata dal seguente

Teorema 13.9 *Sia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{13.10}$$

una serie di potenze, e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Allora

1. *se $L = +\infty$ la serie converge solo per $x = 0$,*
2. *se $L = 0$, la serie converge per ogni $x \in \mathbf{R}$,*
3. *se $0 < L < +\infty$, si ha $r = \frac{1}{L}$.*

Dimostrazione Applichiamo alla serie [13.10] il criterio della radice. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| L.$$

Se $L = 0$, il limite è sempre 0, e la serie converge per ogni x . Se invece $L = +\infty$ il limite è $+\infty$ per ogni $x \neq 0$, e la serie converge solo per $x = 0$. Infine, se $0 < L < +\infty$, la serie converge se $|x| L < 1$, e non converge se $|x| L > 1$; di conseguenza il raggio di convergenza è $\frac{1}{L}$. □

Esempio 13.6 *Trovare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Si ha $a_n = \frac{1}{n+1}$, e quindi

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Risulta dunque $r = \frac{1}{L} = 1$. Per $x = 1$ la nostra serie diventa la serie armonica, che diverge; per $x = -1$ si ha la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

che converge.

Esercizi

13.7. Si trovi il raggio di convergenza della serie $\sum a_n x^n$, quando a_n vale:

1. $\frac{1}{n^2}$

5. $\log(n+1)$

2. $2^n + 1$

6. $\frac{1}{1+a^{2n}}$

3. $\frac{3^n}{2+8^n}$

7. $n^{\sqrt{n}}$

4. $(\sqrt[n]{n} - 1)^n$

8. $n^{[n]}$ ($[n]$ indica la parte intera di n)

13.8. Siano $\sum a_n x^n$ e $\sum b_n x^n$ due serie di potenze, con raggio di convergenza r e ρ . Dimostrare che il raggio di convergenza della serie $\sum (a_n + b_n)x^n$ è maggiore o uguale del minimo tra r e ρ . Può essere maggiore del massimo tra r e ρ ?

13.9. Nella situazione dell'esercizio precedente, dimostrare che delle due serie $\sum (a_n + b_n)x^n$ e $\sum (a_n - b_n)x^n$ almeno una ha raggio di convergenza uguale a $\min\{r, \rho\}$

13.10. Calcolare la somma delle seguenti serie di potenze:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n-1}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$

3.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

13.5.* Approssimazione delle funzioni continue

La serie di Taylor costituisce tra l'altro un potente strumento di approssimazione: ad esempio le tavole delle funzioni trascendenti (esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche) sono costruite tutte per mezzo dei loro sviluppi in serie di Taylor. D'altra parte non è difficile immaginare quanto possa essere vantaggioso nei calcoli approssimare funzioni a volte molto complesse con un polinomio (il polinomio di Taylor) che le approssimi a meno di un errore arbitrariamente dato.

Purtroppo però non tutte le funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor, e anzi si può dire che tra le funzioni continue quelle analitiche, cioè sviluppabili in serie di Taylor, sono una netta minoranza.

Se però si rinuncia a esprimere la funzione come somma di una serie, e ci si accontenta di approssimarla uniformemente con polinomi, questo è possibile non appena la funzione in questione sia continua, condizione peraltro necessaria per poter essere il limite uniforme di una successione di polinomi. Per la precisione, dimostreremo il seguente

Teorema 13.10 (Weierstrass) *Sia $f(x)$ una funzione continua in un aperto $A \subset \mathbf{R}$. Esiste una successione P_k di polinomi tale che per ogni compatto $K \subset A$ risulta*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k(x) = f(x) \quad \text{uniformemente per } x \in K.$$

[13.11]

o in forma equivalente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - P_k\|_{\infty} = 0. \quad [13.12]$$

Volendo, si può imporre ai polinomi P_k di avere coefficienti razionali.

Osservazione 13.2 Prima di addentrarci nella dimostrazione del teorema, osserviamo la differenza tra questo tipo di approssimazione e la serie di Taylor. In ambedue i casi la funzione data viene approssimata da polinomi, che per le funzioni sviluppabili non sono altro che le somme parziali della serie di Taylor. Mentre però in quest'ultimo caso P_k è un polinomio di grado k , e il passaggio da un polinomio al successivo avviene semplicemente aggiungendo un termine di grado $k+1$, nel teorema di Weierstrass il polinomio P_k può avere un grado qualsiasi (anche se si può supporre che il suo grado cresca con k) ma soprattutto il passaggio da un polinomio al successivo avviene modificando tutti i termini, anche quelli di grado inferiore.

La dimostrazione del teorema di Weierstrass verrà fatta in vari passi. Cominciamo a dimostrare un lemma che ha anche una certa importanza di per sé:

Lemma 13.2 Sia $g(x)$ una funzione continua a supporto compatto. Posto

$$g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ky^2} g\left(x + \frac{y}{k}\right) dy \quad [13.13]$$

si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k - g\|_{\infty} = 0. \quad [13.14]$$

Dimostrazione Osserviamo in primo luogo che la funzione $g(x)$ è continua e nulla fuori di un compatto, e dunque uniformemente continua. Di conseguenza, fissato $\varepsilon > 0$ esisterà un $\delta > 0$ tale che se $|x - z| < \delta$ si ha $|g(x) - g(z)| < \varepsilon$.

D'altra parte, ricordando la [12.33]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

avremo

$$g_k(x) - g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ky^2} \left[g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right] dy$$

e quindi

$$\begin{aligned} |g_k(x) - g(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ky^2} \left| g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right| dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-k\delta} e^{-ky^2} \left| g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right| dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-k\delta}^{k\delta} e^{-ky^2} \left| g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right| dy + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{k\delta}^{+\infty} e^{-ky^2} \left| g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right| dy. \end{aligned} \quad [13.15]$$

Valutiamo ora i tre integrali a secondo membro della [13.15], cominciando dal secondo. Se $|y| < k\delta$ si ha $\frac{|y|}{k} < \delta$, e quindi $\left| g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right| < \varepsilon$, da cui

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-k\delta}^{k\delta} e^{-y^2} \left| g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right| dy < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-k\delta}^{k\delta} e^{-y^2} dy < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \varepsilon.$$

Maggioriamo ora gli altri due termini. Chiamato M il massimo di $|g(x)|$, si ha per il primo integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-k\delta} e^{-y^2} \left| g\left(x + \frac{y}{k}\right) - g(x) \right| dy &\leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-k\delta} e^{-y^2} dy = \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \int_{k\delta}^{+\infty} e^{-y^2} dy \leq \\ &\leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{k\delta} \int_{k\delta}^{+\infty} ye^{-y^2} dy \leq \frac{2M}{k\delta\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} ye^{-y^2} dy = \frac{M}{k\delta\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

e la stessa maggiorazione vale per il terzo. In conclusione,

$$\|g_k - g\| \leq \frac{2M}{k\delta\sqrt{\pi}} + \varepsilon.$$

Se ora si prende k_0 in modo che $\frac{2M}{k_0\delta\sqrt{\pi}} < \varepsilon$, si ha $\|g_k - g\| < 2\varepsilon$ per ogni $k > k_0$, e quindi la [13.14]. □

Se nella [13.13] si esegue il cambiamento di variabile $y = k(z - x)$ si ottiene la formula

$$g_k(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2(x-z)^2} g(z) dz \quad [13.16]$$

nella quale in realtà l'integrale è esteso a un intervallo $[-L, L]$ che contiene il supporto di g . Dalla [13.16] si vede che le funzioni g_k sono infinitamente derivabili; è infatti possibile applicare ripetutamente il teorema 13.5 di derivazione sotto il segno di integrale.

L'idea che ci permette di dimostrare il teorema è di approssimare la g_k (e quindi la g) sviluppando per mezzo della formula di Taylor la funzione $e^{-k^2(x-z)^2}$. Si giunge così a un secondo lemma.

Lemma 13.3 *Sia $g(x)$ una funzione continua e nulla per $|x| > L$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $P(x)$ tale che*

$$\sup_{[-L, L]} |g(x) - P(x)| < \varepsilon \quad [13.17]$$

Dimostrazione Per il lemma precedente, esiste un k tale che $\|g_k - g\| < \frac{\varepsilon}{2}$; di conseguenza è sufficiente dimostrare che esiste un polinomio $P(x)$ tale che

$$\sup_{[-L, L]} |g_k(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad [13.18]$$

Posto $t = k^2(x - z)^2$, dallo sviluppo di Taylor per e^{-t} si ha

$$e^{-k^2(x-z)^2} = \sum_{i=1}^N \frac{(-1)^i k^{2i} (x-z)^{2i}}{i!} + R_N$$

dove

$$R_N = e^{-v} \frac{(-1)^{N+1} k^{2N+2} (x-z)^{2N+2}}{(N+1)!}$$

e v è un punto compreso tra 0 e $k^2(x-z)^2$. Dato che a noi interessano solo i punti $x \in [-L, L]$ e che nella [13.16] l'integrale è esteso all'intervallo $[-L, L]$, si ha $|x-z| < 2L$ e quindi

$$|R_N| \leq \frac{(2kL)^{2N+2}}{(N+1)!}.$$

Avremo allora

$$g_k(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^N \frac{(-1)^i k^{2i}}{i!} \int_{-L}^L (x-z)^{2i} g(z) dz + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-L}^L R_N g(z) dz = P_N(x) + \sigma(x)$$

dove $P_N(x)$ è un polinomio di grado $2N$, come si può vedere facilmente sviluppando $(x-z)^{2i}$ con la formula [1.19] della potenza del binomio.

Valutiamo ora il termine $\sigma(x) = g_k(x) - P_N(x)$. Tenendo conto della maggiorazione per R_N , si ha

$$|\sigma(x)| \leq \frac{k}{\sqrt{\pi}} \frac{(2kL)^{2N+2}}{(N+1)!} \int_{-L}^L |g(z)| dz$$

e posto $M = \sup |g|$,

$$|\sigma(x)| \leq \frac{k}{\sqrt{\pi}} \frac{(2kL)^{2N+2}}{(N+1)!} 2LM = \frac{M}{\sqrt{\pi}} \frac{(2kL)^{2N+3}}{(N+1)!}.$$

Quando N tende all'infinito, quest'ultima quantità tende a zero, e quindi per N abbastanza grande si avrà

$$|\sigma(x)| = |g_k(x) - P_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui segue immediatamente la [13.18], e di qui il lemma. $\square$

Osservazione 13.3 Nel lemma precedente si può supporre che il polinomio P che verifica la [13.17] sia a coefficienti razionali. Infatti per ogni polinomio $P(x)$ si può trovare un polinomio $Q(x)$ a coefficienti razionali, tale che

$$\sup_{[-L, L]} |P(x) - Q(x)| < \varepsilon \quad [13.19]$$

e dunque

$$\sup_{[-L, L]} |g(x) - Q(x)| < 2\varepsilon$$

Dimostriamo la [13.19]. Sia

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

un polinomio di grado m . Fissato $\delta > 0$, siano $r_0, r_1, \dots, r_m$ dei numeri razionali tali che $|a_k - r_k| < \delta$ per $k = 0, 1, \dots, m$. Si ha per $x \in [-L, L]$:

$$\begin{aligned} |P(x) - Q(x)| &\leq |a_m - r_m| |x|^m + |a_{m-1} - r_{m-1}| |x|^{m-1} + \dots + |a_1 - r_1| |x| + |a_0 - r_0| \leq \\ &\leq \delta(L^m + L^{m-1} + \dots + L + 1). \end{aligned}$$

Basterà allora prendere $\delta = \frac{\varepsilon}{L^m + L^{m-1} + \dots + L + 1}$ per avere la [13.19]. □

Possiamo ora passare alla dimostrazione del teorema di Weierstrass. Se A è un aperto di $\mathbf{R}$, poniamo per k intero

$$A_k = \left\{ x \in A : d(x, \partial A) > \frac{1}{k} \right\} \cap (-k, k)$$

e sia⁴

$$d_k(x) = d(x, A_k).$$

Risulta $d_k(x) = 0$ se $x \in A_k$ e $d_k(x) > \frac{1}{k}$ se $x \notin A$, cosicché se poniamo

$$\varphi_k(x) = \max\{1 - 2kd_k(x), 0\}$$

si ha $\varphi_k(x) = 1$ in A_k e $\varphi_k(x) = 0$ se $d(x, A_k) \geq \frac{1}{2k}$. In particolare, φ_k ha supporto compatto contenuto in A .

Ciò posto, sia $f(x)$ una funzione continua in A . La funzione

$$f_k(x) = f(x)\varphi_k(x)$$

è continua, nulla fuori dell'intervallo $I_k = \left[-k - \frac{1}{k}, k + \frac{1}{k}\right]$, e coincide con $f(x)$ in A_k .

Per il lemma precedente, preso $\varepsilon = \frac{1}{k}$, si può trovare un polinomio P_k (che si può supporre a coefficienti razionali) tale che

$$\sup_{I_k} |f_k(x) - P_k(x)| < \frac{1}{k}.$$

Dato poi che $f_k = f$ in $A_k \subset [-k, k]$, avremo in particolare

$$\sup_{A_k} |f_k(x) - P_k(x)| < \frac{1}{k}.$$

La successione P_k è quella cercata. Infatti, se K è un compatto contenuto in A , risulterà $K \subset A_k$ per k abbastanza grande (precisamente per i k tali che $K \subset [-k, k]$ e $d(K, \partial A) >$

⁴ Ricordiamo che la distanza di un punto x da un insieme E è l'estremo inferiore delle distanze di x dai punti di E : $d(x, E) = \inf\{|x - z|, z \in E\}$.

$> \frac{1}{k}$). Ma allora per questi k si ha

$$\sup_K |f(x) - P_k(x)| \leq \sup_{\Lambda_i} |f(x) - P_k(x)| < \frac{1}{k}$$

e quindi la [13.12]. □

13.6. Risposte agli esercizi

13.1.

1. $|x|$
2. 0
3. 0
4. 0 se $|x| < 1$, $\frac{1}{2}$ se $|x| = 1$, 1 se $|x| > 1$
5. 0
6. 0 se $x < 0$, 1 se $x = 0$, non converge se $x > 0$
7. 0 se $|x| < 1$, 1 se $x = 1$, non converge altrimenti

13.2.

- | | | | |
|-------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------|
| 1. $0 \leq x < 2$ | 3. $x < -1$ e $0 < x$ | 5. $x \neq 1, -1$ | 7. $-1 \leq x \leq 1$ |
| 2. $x > 0$ | 4. $ x < 1$ | 6. $x = 0$ | |

13.3.

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 1. sì | 3. sì | 5. no | 7. no |
| 2. no | 4. no | 6. no | |

13.4.

- | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. no | 2. no | 3. sì | 4. no | 5. sì | 6. sì |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|

13.5.

1. se $x \in (0, \pi)$, 0 se $x = 0$ o $x = \pi$; la funzione limite non è continua.
2. 0 se $x = \frac{\pi}{2}$, 1 se $x = \frac{\pi}{2}$; la funzione limite non è continua.
3. 0; $||f_n|| = \frac{1}{4\sqrt[4]{3}}$
4. 0 se $x = 0$, 1 se $x \neq 0$; la funzione limite non è continua.

13.6.

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 1. sì | 3. sì | 5. sì | 7. sì |
| 2. sì | 4. no | 6. sì | |

13.7.

1. 1

4. $+\infty$

7. 1

2. $\frac{1}{2}$

5. 1

8. 0

3. $\frac{8}{3}$

6. 1 se $|a| \leq 1$, a^2 se $|a| > 1$

13.8.

Se $|x| < \min\{r, \rho\}$ ambedue le serie convergono, e quindi converge anche la loro somma. Il raggio di convergenza può anche essere $+\infty$; ad esempio se $b_n = -a_n$.

13.9.

I due raggi sono ambedue $\geq \min\{r, \rho\}$. Se ambedue fossero maggiori, essendo $a_n = \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2}$ e $b_n = \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2}$, per l'esercizio precedente sia $\sum a_n x^n$ che $\sum b_n x^n$ avrebbero raggio di convergenza maggiore di $\min\{r, \rho\}$.

13.10.

1. $-\frac{x}{(1-x^2)^2}$

2. $-\log(1-x) + \frac{x}{1-x}$

3. $(1-x)\log(1-x) + x$

Capitolo 14

Serie di Fourier

14.1. Funzioni periodiche

Uno dei motivi principali che spingono a studiare gli sviluppi in serie risiede nel fatto che esse permettono di esprimere funzioni complicate come somme di serie di funzioni semplici; in molti casi dallo studio di queste ultime si può risalire a proprietà delle prime. Ad esempio, negli sviluppi in serie di Taylor, che abbiamo trattato nei capitoli 10 e 13, le funzioni di base erano le più semplici possibile: le potenze.

Uno dei più importanti risultati relativi alle serie di potenze, il fatto che la somma di una tale serie sia una funzione infinitamente derivabile, costituisce anche il limite principale degli sviluppi di Taylor. Infatti, proprio a causa di questo teorema, si potranno sviluppare in serie di potenze solo funzioni infinitamente derivabili, peraltro nemmeno tutte, come abbiamo visto nel capitolo 10. Pertanto, se vogliamo sviluppare funzioni non tanto regolari, che pure hanno un loro ruolo in molti problemi dell'analisi – ad esempio funzioni continue o anche con qualche discontinuità – dovremo abbandonare gli sviluppi di Taylor, e prendere in esame sviluppi in serie di funzioni diverse dalle potenze.

Tra questi, i più importanti sono gli sviluppi in serie di Fourier, nei quali si usano come funzioni di base i seni e i coseni, più precisamente le funzioni $\sin kx$ e $\cos kx$. Come abbiamo visto, il seno e il coseno sono funzioni periodiche, con periodo 2π , e quindi essi potranno essere usati per sviluppare funzioni con lo stesso periodo. In generale, se si vuole sviluppare una funzione di periodo T , si useranno le funzioni $\sin \frac{2\pi}{T} kx$ e $\cos \frac{2\pi}{T} kx$, che hanno periodo T . Prima di cominciare lo studio delle serie di Fourier, esamineremo brevemente le funzioni periodiche.

Definizione 14.1 Una funzione $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ si dice periodica di periodo T se per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha

$$f(x + T) = f(x).$$

È evidente che se una funzione ha periodo T , avrà anche periodo $2T$, $3T$, come pure $-T$, $-2T$, e così via, come d'altra parte potrebbe avere anche un periodo più piccolo, come $\frac{T}{2}$ o $\frac{T}{5}$. A volte, quando si parla di periodo di una funzione si intende il più piccolo periodo positivo; se si ha a che fare con una classe di funzioni, si prende come periodo il più piccolo periodo positivo comune a tutte. Così ad esempio, le funzioni $\cos kx$ hanno periodo 2π , che è il più piccolo periodo comune.

Una funzione periodica di periodo T sarà completamente nota una volta che sia conosciuta in un intervallo $[a, a + T)$ di ampiezza T ; viceversa, ogni funzione $f(x)$ definita in $[a, a + T)$ potrà essere prolungata fuori di tale intervallo a una funzione periodica di periodo T , che chiameremo $f^\#(x)$. Analiticamente:

$$f^\#(x) = f(x - kT) \text{ se } x \in [a + kT, a + (k+1)T).$$

In generale, anche se $f(x)$ è regolare, la funzione prolungata $f^\#$ avrà un salto nei punti $a, a \pm T, a \pm 2T$, ecc., di ampiezza

$$s = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (a+T)^-} f(x).$$

Ad esempio, se si prolunga fuori dell'intervallo $[-\pi, \pi)$ la funzione x , si otterrà la funzione “a dente di sega”. Se invece si prolunga la funzione caratteristica dell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, si ottiene la cosiddetta “onda quadra”. Queste funzioni giocano un ruolo importante in elettronica. I loro grafici sono riportati in figura.

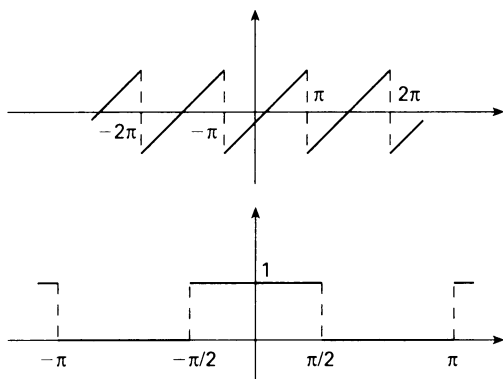


Figura 14.1

Definizione 14.2 Una funzione $f(x)$ si dice continua a tratti in un intervallo $[a, b)$ se è continua in $[a, b)$ tranne al più in un numero finito di punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$, nei quali esistono finiti il limite destro e sinistro:

$$\begin{cases} f(\xi_i + 0) = \lim_{x \rightarrow \xi_i^+} f(x) \\ f(\xi_i - 0) = \lim_{x \rightarrow \xi_i^-} f(x) \end{cases} \quad [14.1]$$

Una funzione continua a tratti si dirà regolare a tratti in $[a, b]$ se è derivabile in $[a, b]$, eccetto che nei punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ (in cui non è continua), ed eventualmente in altri punti $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_M$, sempre in numero finito, e se la derivata f' è continua (dove esiste) e limitata.

Infine una funzione definita in $\mathbf{R}$ si dirà continua a tratti [regolare a tratti] se è continua a tratti [regolare a tratti] in ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbf{R}$.

Una funzione f continua a tratti è limitata e ha al più un numero finito di punti di discontinuità, e dunque è integrabile, in ogni intervallo $[a, b]$ (vedi osservazione 9.6). Se poi f è periodica di periodo T , si ha

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \quad [14.2]$$

per ogni $a \in \mathbf{R}$. Infatti si ha

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt - \int_0^a f(t) dt$$

e facendo la sostituzione $t = u + T$ nel secondo integrale, questo si cancella con il terzo, dato che $f(u + T) = f(u)$.

Come abbiamo detto, le più semplici funzioni periodiche sono il seno e il coseno, o più in generale le funzioni

$$a \cos \frac{2\pi}{T}(x - \xi) \quad \text{e} \quad a \sin \frac{2\pi}{T}(x - \xi). \quad [14.3]$$

Il numero positivo a si chiama *ampiezza dell'oscillazione*, e rappresenta il massimo della funzione, il numero $\frac{2\pi(x - \xi)}{T}$ si chiama *fase*, mentre $\frac{2\pi\xi}{T}$ è lo *spostamento di fase*. Infine $v = \frac{1}{T}$ è la *frequenza* e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la *pulsazione* dell'oscillazione. Tutti questi termini sono presi dall'elettrotecnica.

A volte è più comodo unire le due funzioni [14.3] nella funzione periodica complessa

$$ae^{i\omega(x - \xi)} = Ae^{i\omega x}, \quad [14.4]$$

dove $A = ae^{-i\omega\xi}$ si chiama *ampiezza complessa*; le funzioni [14.3] non sono che la parte reale e la parte immaginaria della [14.4].

Più in generale, possiamo sommare un certo numero di funzioni [14.3], ottenendo le somme¹

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x) \quad [14.5]$$

¹ Notiamo che abbiamo preso tutti gli spostamenti di fase nulli. Questo non riduce la generalità, dato che a causa delle formule di somma dei seni e coseni l'introduzione di spostamenti di fase darebbe luogo a somme dello stesso tipo.

di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Con somme di questo tipo cercheremo di approssimare arbitrarie funzioni periodiche di periodo T .

A volte sarà anche comodo considerare somme complesse

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=-n}^n A_k e^{ik\omega x} \quad [14.6]$$

che se si prende $A_k = \overline{A_{-k}} = a_k - ib_k$ si riduce alla [14.5].

Esercizi

14.1. Dire se le seguenti funzioni sono periodiche, e in caso affermativo trovarne il minimo periodo:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\operatorname{tg} x$ | 5. $\{x\}$ | 9. $D(x)$ (la funzione di Dirichlet) |
| 2. $\sin(x+1)$ | 6. $\{x\}$ | 10. $\left\{2x - \frac{1}{2}\right\}$ |
| 3. $\cos x^2$ | 7. $\sin^2 x - \cos^2 x$ | 11. $\sin^2 x$ |
| 4. $\cos(3x-2)$ | 8. $e^{\cos \frac{x}{2}}$ | |

14.2. Dimostrare che se $f(x)$ ha periodo T , $f(kx+h)$ ha periodo $\frac{T}{k}$.

14.3. Dimostrare che se $f(x)$ ha periodo minimo T e $g(x)$ ha periodo minimo S , con $\frac{T}{S}$ razionale, allora $f(x) + g(x)$ è una funzione periodica.

14.4. Dimostrare che se f ha due periodi S e T , ha anche periodi $kS + mT$, con k e m interi relativi.

14.5. Dimostrare che se una funzione è periodica con periodi piccoli a piacere, ed è continua in 0, allora è costante.

14.6.* Dimostrare che se una funzione continua $f(x)$ ha due periodi S e T , con $\frac{T}{S}$ irrazionale, allora f è costante.

14.7.* Dimostrare che la [14.5] si può scrivere nella forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n c_k \cos \omega(kx - \xi_k)$.

14.2. Sviluppi in serie di Fourier

Per semplicità supporremo d'ora in poi che le funzioni in esame siano periodiche di periodo 2π , cosa che semplifica le formule, dato che in questo caso risulta $\omega = 1$. Si può passare al caso generale osservando che se $g(x)$ ha periodo T , la funzione $f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$ ha periodo 2π ; i risultati ottenuti per la f si potranno tradurre in analoghi teoremi per la g con un semplice cambiamento di variabili.

Supponiamo dunque che $f(x)$ sia una funzione periodica di periodo 2π , e poniamoci il problema di approssimarla con somme del tipo [14.5], o meglio di scriverla in forma di serie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad [14.7]$$

Il primo problema che si presenta è allora il seguente: come dobbiamo prendere i coefficienti a_k e b_k in modo che possa sussistere la [14.7]? La risposta ci viene dalle relazioni

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mxdx &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m \\ \pi & \text{se } k = m \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } k = m = 0 \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mxdx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mxdx &= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m \text{ o se } k = m = 0 \\ \pi & \text{se } k = m \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad [14.8]$$

Moltiplichiamo allora membro a membro la [14.7] per $\sin mx$ e integriamo supponendo di poter scambiare le operazioni di serie e di integrale;² si ha allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mxdx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mxdx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos kx \sin mxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin kx \sin mxdx \right)$$

Per le [14.8], degli integrali a secondo membro sopravvive solo quello con $k = m$, che vale π , mentre tutti gli altri si annullano; si ha allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mxdx = \pi b_m.$$

Analogamente, moltiplicando per $\cos mx$ e integrando, troveremo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mxdx = \pi a_m.$$

² Ricordiamo che questo è possibile ad esempio se la serie [14.7] converge uniformemente.

Notiamo che, sempre a causa delle [14.8], la formula precedente vale anche per $m = 0$.³ In definitiva, si ha

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad [14.9]$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx. \quad [14.10]$$

I coefficienti a_m e b_m si chiamano *coefficienti di Fourier* della funzione $f(x)$. Osserviamo che, dato che tutte le funzioni hanno periodo 2π , si possono calcolare i coefficienti integrando in $[0, 2\pi)$ o in un qualsiasi intervallo $[a, a + 2\pi)$.

Osservazione 14.1 Se la funzione f da sviluppare è una funzione pari, la funzione $f(x) \sin mx$ sarà dispari, e dunque gli integrali [14.10] saranno tutti nulli. Pertanto il suo sviluppo di Fourier conterrà soli coseni. Analogamente, se $f(x)$ è dispari, saranno dispari le funzioni $f(x) \cos mx$, e quindi si annulleranno tutti gli integrali [14.9], e $f(x)$ si svilupperà in serie di soli seni. $\square$

Esempio 14.1 Calcoliamo i coefficienti di Fourier della funzione $f^\#(x)$, estensione periodica della restrizione della funzione x all'intervallo $[-\pi, \pi)$.

La funzione $f^\#$ è dispari, e quindi $a_m = 0$, mentre

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^\#(x) \sin mx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin mx dx$$

e integrando per parti

$$b_m = -\frac{2}{m} \cos m\pi = (-1)^{m+1} \frac{2}{m}. \quad \square$$

Esercizi

14.8. Trovare i coefficienti di Fourier delle seguenti funzioni, se è il caso prolungate periodicamente fuori di $[-\pi, \pi)$:

1. $\cos x$

3. $x(1 + \cos x)$

5. e^x

2. $x \cos x$

4. $\varphi \left|_{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}} \right|$

14.9. Se si prolunga periodicamente la restrizione della funzione $x \cos x$ all'intervallo $[0, 2\pi)$, si ottiene una funzione periodica. Calcolarne i coefficienti di Fourier.

³ Questo è il motivo perché nella [14.7] abbiamo scritto $\frac{a_0}{2}$ e non a_0 .

14.3. Convergenza delle serie di Fourier

Nella sezione precedente abbiamo trovato la forma dei coefficienti a_k e b_k della serie di Fourier di una funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π . Dimosteremo ora che sotto opportune ipotesi la serie così ottenuta rappresenta effettivamente la funzione f . Per far questo, cominciamo col provare alcuni lemmi, che ci saranno utili nel seguito.

Lemma 14.1 *Si ha*

$$\frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \dots + \cos ny = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)y}{2 \sin \frac{y}{2}}. \quad [14.11]$$

Dimostrazione Per $n = 0$ la [14.11] si riduce all'identità $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Supponiamo ora che valga per $n - 1$, e dimostriamola per n . Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos y + \cos 2y + \dots + \cos ny &= \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)y}{2 \sin \frac{y}{2}} + \cos ny = \\ &= \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)y + 2 \cos ny \sin \frac{y}{2}}{2 \sin \frac{y}{2}}. \end{aligned}$$

Ora risulta

$$\begin{aligned} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)y + 2 \cos ny \sin \frac{y}{2} &= \sin ny \cos \frac{y}{2} - \cos ny \sin \frac{y}{2} + 2 \cos ny \sin \frac{y}{2} = \\ &= \sin ny \cos \frac{y}{2} + \cos ny \sin \frac{y}{2} = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)y \end{aligned}$$

da cui segue immediatamente la [14.11] per n . $\square$

Lemma 14.2 (diseguaglianza di Bessel) *Sia $F(x)$ una funzione integrabile e periodica di periodo 2π , e siano a_k e b_k i suoi coefficienti di Fourier. Si ha*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} |F(x)|^2 dx. \quad [14.12]$$

Dimostrazione Si consideri la somma parziale

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

della serie di Fourier della funzione F . Si ha evidentemente

$$\int_{\pi}^{\pi} |F(x) - S_n(x)|^2 dx \geq 0$$

e dunque

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2 dx \geq 2 \int_{-\pi}^{\pi} F(x) S_n(x) dx - \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^2 dx.$$

Per valutare il primo integrale a secondo membro occorre ricordare le espressioni [14.9] e [14.10] per i coefficienti. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) S_n(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx + \sum_{k=1}^n a_k \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx + \sum_{k=1}^n b_k \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx dx = \\ &= \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

Analogamente, tenendo conto delle [14.9], si trova

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^2 dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

e quindi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

La [14.12] segue immediatamente passando al limite per $n \rightarrow \infty$. □

Dalla diseuguaglianza di Bessel segue che la serie a primo membro della [14.12] è convergente, e dunque il suo termine generico è infinitesimo. Si ha allora, per ogni funzione $F(x)$ integrabile in $[-\pi, \pi]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx = 0 \quad [14.13]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx = 0. \quad [14.14]$$

Possiamo ora dimostrare i teoremi sulla convergenza delle serie di Fourier. Nel primo si tratterà della convergenza puntuale.

Teorema 14.1 *Sia $f(x)$ una funzione periodica di periodo 2π e regolare a tratti. La sua serie di Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

converge puntualmente a $f(x)$ nei punti in cui f è continua, mentre nei punti di discontinuità converge alla semisomma dei limiti destro e sinistro:

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Dimostrazione Osserviamo che nei punti in cui f è continua si ha

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = f(x).$$

e quindi la tesi del teorema si può enunciare nella forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad [14.15]$$

Per dimostrare la [14.15] cominciamo a manipolare le somme parziali S_n della serie di Fourier. Ricordando le espressioni [14.9] e [14.10] per i coefficienti a_k e b_k , si ha

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos ku \cos kx + \sin ku \sin kx) \right\} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(u-x) \right\} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right\} dt \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto il cambiamento di variabili $u - x = t$ e si è tenuto conto della [14.2]. Ricordando ora la [14.11] si ottiene

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

D'altra parte sempre dalla [14.11], e dal fatto che le funzioni che vi intervengono sono funzioni pari, segue

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin kt}{k} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x-0)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \end{aligned}$$

che ponendo

$$G(t; x) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} & -\pi \leq t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t) - f(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} & 0 < t \leq \pi \end{cases} \quad [14.16]$$

si scrive più brevemente

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t; x) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t; x) \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos nt dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t; x) \cos \frac{t}{2} \operatorname{sen} nt dt. \end{aligned} \quad [14.17]$$

Per x fissato, prendiamo in esame la funzione $t \rightarrow G(t; x)$. A parte il punto $t = 0$, essa è continua in tutti i punti in cui è continua la $f(x+t)$, cioè in tutto $[-\pi, \pi)$, con l'eccezione dei punti $t_k = \xi_k - x$, dove ξ_k sono i punti di discontinuità della f , nei quali ha un salto. Per quanto riguarda il punto $t = 0$, se ci si limita a un intorno in cui non cadono punti singolari di $f(x+t)$ diversi da x , si può applicare il teorema di Cauchy 8.7:

$$\frac{f(x+t) - f(x-0)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} = \frac{f'(x+v)}{\cos \frac{v}{2}}$$

dove v è un punto compreso tra 0 e t . Dato che per ipotesi f' è limitata, anche la funzione $G(t; x)$ sarà limitata in un intorno di 0, e dunque, dato che ha al massimo un numero finito di salti, in tutto $[-\pi, \pi)$.

Per l'osservazione 9.6, la funzione $G(t; x)$ è integrabile rispetto a t in $[-\pi, \pi)$, e quindi lo sono anche le funzioni $G(t; x) \operatorname{sen} \frac{t}{2}$ e $G(t; x) \cos \frac{t}{2}$. Passando al limite nella [14.17] e applicando allora le [14.13] e [14.14] si ottiene la [14.15]. $\square$

Esempio 14.2 Abbiamo già calcolato i coefficienti di Fourier della funzione $f^\#$, estensione periodica della restrizione della funzione x all'intervallo $[-\pi, \pi)$. Si ha $a_k = 0$ (dato che la funzione è dispari) e $b_k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$. Per il teorema precedente si ha allora, per $-\pi < x < \pi$,

$$x = f^\#(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} kx \quad [14.18]$$

mentre per $x = \pi$ tutti i termini sono 0, e quindi la serie di Fourier converge a 0, che è la semisomma dei limiti destro e sinistro della $f^\#$.

Prendiamo ad esempio $x = \frac{\pi}{2}$. Allora $\sin kx$ vale 0 se k è pari, e nella serie sopravvivono solo i termini con $k = 2s + 1$:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\sin\left(s + \frac{1}{2}\right)\pi}{2s+1}.$$

D'altra parte $\sin\left(s + \frac{1}{2}\right)\pi$ vale 1 se s è pari e -1 se s è dispari. Si ha quindi

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{2s+1},$$

un risultato dovuto a Leibniz (vedi le *Notizie storiche* del cap. 6.) □

Esempio 14.3 Se nella [14.18] scriviamo $x - \lambda$ al posto di x , otteniamo

$$\begin{aligned} f^{\#}(x - \lambda) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k(x - \lambda) = \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-\cos kx \sin k\lambda + \sin kx \cos k\lambda). \end{aligned}$$

I coefficienti di Fourier della funzione $f^{\#}(x - \lambda)$ sono dunque

$$a_0 = 0, \quad a_k = 2 \frac{(-1)^k}{k} \sin k\lambda, \quad b_k = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cos k\lambda. \quad [14.19]$$

Questa relazione ci sarà utile nel seguito. □

Esempio 14.4 L'onda quadra è la funzione $Q(x)$ ottenuta prolungando periodicamente la funzione caratteristica dell'intervallo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Si tratta di una funzione pari, e quindi i coefficienti b_k sono tutti nulli. Si ha inoltre

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 1$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos ktdt = \frac{1}{k\pi} \sin kx \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2}{k\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}} & k \text{ dispari} \\ 0 & k \text{ pari} \end{cases}$$

A parte a_0 , gli unici termini non nulli sono pertanto quelli con $k = 2s + 1$, $s = 1, 2, \dots$, e quindi lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $Q(x)$ è

$$Q(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\cos(2s+1)x}{2s+1}. \quad \square$$

Supponiamo ora che oltre a essere regolare a tratti, la funzione f sia anche continua. In questo caso la sua serie di Fourier converge uniformemente, come vedremo nel prossimo teorema. Prima però dimostriamo un lemma relativo al calcolo integrale.

Lemma 14.3 *Se $F(x)$ è una funzione regolare a tratti e continua, risulta*

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Dimostrazione Siano $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_M$ i punti dell'intervallo (a, b) in cui F non è derivabile. Si ha

$$\int_a^b F' dx = \int_a^{\eta_1} F' dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} F' dx + \dots + \int_{\eta_M}^b F' dx.$$

D'altra parte, per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_{\eta_h}^{\eta_{h+1}} F' dx = F(\eta_{h+1} - 0) - F(\eta_h + 0) = F(\eta_{h+1}) - F(\eta_h),$$

l'ultimo passaggio grazie alla continuità di F . Sommando gli integrali, tutti questi termini si elidono a coppie, tranne il primo e l'ultimo; si ottiene allora $F(b) - F(a)$, e il lemma è dimostrato. $\square$

Veniamo ora al

Teorema 14.2 *Se $f(x)$ è una funzione regolare a tratti e continua, la serie di Fourier converge totalmente, e quindi uniformemente, alla funzione f .*

Dimostrazione Per il teorema precedente, la serie di Fourier converge puntualmente a $f(x)$, e dunque si deve solo dimostrare che essa converge totalmente, cioè che converge la somma delle norme. Siccome si ha

$$||a_k \cos kx + b_k \sin kx|| \leq |a_k| + |b_k|$$

basterà dimostrare che le serie $\sum |a_k|$ e $\sum |b_k|$ sono convergenti.

La funzione $F(x) = f(x) \cos kx$ è regolare a tratti e continua; possiamo allora applicare il lemma precedente, e concludere che

$$\int_{-\pi}^{\pi} F' dx = -k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = F(\pi) - F(-\pi) = 0$$

dato che, essendo F di periodo 2π , si ha $F(\pi) = F(-\pi)$. Se si indicano con α_k e β_k i coefficienti di Fourier di f' , si ha allora

$$kb_k = \alpha_k.$$

D'altra parte per la funzione f' vale la disuguaglianza di Bessel

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

e quindi in particolare la serie $\sum \alpha_k^2$ è convergente. Ora si ha, ricordando la disuguaglianza $2|ab| \leq a^2 + b^2$,

$$|b_k| = k |b_k| \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2} \left(|k b_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2} \right)$$

e quindi la serie $\sum |b_k|$ converge.

Analogamente, partendo dalla funzione $F(x) = f(x) \sin kx$ si ottiene la relazione $ka_k = -\beta_k$, e ragionando come sopra la convergenza della serie $\sum |a_k|$. $\square$

Esempio 14.5 Se si prolunga periodicamente la restrizione della funzione x^2 all'intervallo $[-\pi, \pi)$, si ottiene una funzione $g(x)$ pari e continua. La sua serie di Fourier è una serie di soli coseni, i cui coefficienti si calcolano facilmente integrando per parti. Si ha, per $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$g(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx$$

e la convergenza è uniforme. In particolare, se si pone $x = 0$ si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

mentre per $x = \pi$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Questi due ultimi risultati sono dovuti a Eulero.

Esempio 14.6 La funzione $|x|$, prolungata periodicamente fuori di $[-\pi, \pi)$, è continua e pari, e si sviluppa in serie di soli coseni. Si ha $a_0 = \frac{\pi}{2}$, e

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

e quindi, per $|x| \leq \pi$,

$$f^{\#}(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\cos(2s+1)x}{(2s+1)^2}.$$

Se si pone $x = 0$, si ottiene allora

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(2s+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$\square$

Osservazione 14.2 Se $F(x)$ è regolare a tratti e continua, la disuguaglianza di Bessel diventa un'uguaglianza. Basta infatti passare al limite per $n \rightarrow \infty$ nella relazione

$$\int_{\pi}^{\pi} |S_n(x)|^2 dx = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right)$$

e osservare che, dato che per il teorema precedente la successione S_n tende a F uniformemente, l'integrale a primo membro tende all'integrale di F^2 . Otteniamo così l'*identità di Parseval*:

$$\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) = \int_{\pi}^{\pi} |F(x)|^2 dx$$

Si può dimostrare, ma noi non lo faremo, che l'identità di Parseval vale per ogni funzione F integrabile. $\square$

Torniamo ora al caso generale di una funzione regolare a tratti, ma non continua. In questo caso, come abbiamo detto più volte, la serie di Fourier non può convergere uniformemente, a causa delle discontinuità della f . Ma cosa si può dire nei tratti in cui f è continua? La risposta è che in questi intervalli la convergenza è uniforme.

Prima di trattare il caso generale, occupiamoci della funzione $f^{\#}(x)$, ottenuta prolungando periodicamente la restrizione all'intervallo $[-\pi, \pi)$ della funzione x . Come abbiamo visto, si ha

$$f^{\#}(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Dimostreremo che la serie a secondo membro converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[-p, p]$, con $0 < p < \pi$. Indicando con

$$S_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$$

la successione delle somme parziali, avremo per $m > n$

$$S_m(x) - S_n(x) = 2 \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Moltiplicando ambedue i membri per $\cos \frac{x}{2}$, e osservando che

$$2 \sin kx \cos \frac{x}{2} = \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x,$$

otteniamo

$$(S_m - S_n) \cos \frac{x}{2} = \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x + \sum_{k=n+1}^m \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x.$$

Se poniamo $k = h + 1$ nella seconda somma, questa diventa

$$\sum_{h=n}^{m-1} \frac{(-1)^h}{h+1} \operatorname{sen} \left(h + \frac{1}{2} \right) x.$$

Riscrivendo ora k al posto di h , avremo infine

$$\begin{aligned} (S_m - S_n) \cos \frac{x}{2} &= \frac{(-1)^{m-1}}{m} \operatorname{sen} \left(m + \frac{1}{2} \right) x + \frac{(-1)^n}{n+1} \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{m-1} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \operatorname{sen} \left(k + \frac{1}{2} \right) x. \end{aligned}$$

Possiamo ora maggiorare il secondo membro. Si ha

$$|S_m - S_n| \cos \frac{x}{2} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n+1} = \frac{2}{n+1},$$

e quindi, dato che se $|x| \leq p$ si ha $\cos \frac{x}{2} \geq \cos \frac{p}{2}$

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq \frac{2}{\cos \frac{p}{2}} \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [-p, p].$$

Quando passiamo al limite per $m \rightarrow \infty$, per il teorema 14.1 $S_m(x)$ tende a $f(x)$ in $[-p, p]$, e quindi

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{2}{\cos \frac{p}{2}} \frac{1}{n+1} \quad \forall x \in [-p, p].$$

L'ultima quantità è minore di ε non appena $n+1 > v = \frac{2}{\varepsilon \cos \frac{p}{2}}$, e quindi la successione S_n converge a f uniformemente in $[-p, p]$.

In maniera simile si dimostra che la serie di Fourier della funzione $f^\#(x + \pi - \xi)$, i cui coefficienti abbiamo trovato nella [14.19], converge uniformemente in ogni intervallo chiuso in cui la funzione è continua. Questa funzione ha un salto nel punto ξ (e ovviamente in tutti i punti che distano da ξ un multiplo di 2π), e in questi punti il valore del salto è -2π .

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 14.3 *La serie di Fourier di una funzione $f(x)$ regolare a tratti converge uniformemente in ogni intervallo chiuso in cui f è continua.*

Dimostrazione Siano $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ i punti di discontinuità della f , e siano $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ i relativi salti. La funzione

$$F(x) = f(x) + \frac{\delta_1}{2\pi} f^\#(x + \pi - \xi_1) + \frac{\delta_2}{2\pi} f^\#(x + \pi - \xi_2) + \dots + \frac{\delta_N}{2\pi} f^\#(x + \pi - \xi_N)$$

è regolare a tratti e continua, cosicché la sua serie di Fourier converge uniformemente.

Ma allora la serie di Fourier della funzione $f(x)$, che si ottiene come somma di quella della F che è uniformemente convergente, e di quelle delle funzioni $-\frac{\delta_i}{2\pi} f''(x + \pi - \xi_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, che convergono uniformemente in ogni intervallo chiuso che non contiene nessuno dei punti ξ_i , convergerà uniformemente in ogni intervallo chiuso in cui f è continua. $\square$

14.4.* Una funzione continua che non è derivabile in nessun punto

Le serie di Fourier permettono anche di costruire una funzione continua che non è derivabile in nessun punto. L'esempio che riportiamo è dovuto a Weierstrass.

Sia a un intero dispari, e sia b un numero positivo e minore di 1. Consideriamo la funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x). \quad [14.20]$$

Siccome a è intero, la serie [14.20] è una serie di Fourier;⁴ inoltre, poiché $0 < b < 1$, la serie $\sum b^n$ converge, e dunque la serie data è totalmente convergente. Ne segue che la funzione $f(x)$ è continua in $\mathbf{R}$, e la serie [14.20] è la serie di Fourier della funzione $f(x)$.

Facciamo ora vedere che, se si scelgono opportunamente a e b , la funzione $f(x)$ non è derivabile in nessun punto. Per questo osserviamo in primo luogo che si può supporre $x \geq 0$, dato che $f(x) = f(-x)$. Valutiamo ora il rapporto incrementale

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \{ \cos(a^n(x+h)) - \cos(a^n x) \} = R_m + S_m$$

dove si è posto

$$R_m = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{m-1} b^n \{ \cos(a^n(x+h)) - \cos(a^n x) \}$$

e

$$S_m = \frac{1}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n \{ \cos(a^n(x+h)) - \cos(a^n x) \}.$$

Cominciamo col valutare R_m . Poiché $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$, risulta:

$$|R_m| \leq \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n = \frac{a^m b^m - 1}{ab - 1} < \frac{a^m b^m}{ab - 1}$$

non appena $ab > 1$.

Veniamo ora a S_m . Fissato $x \geq 0$, osserviamo che si può scrivere $a^m x = \pi(\alpha_m + \xi_m)$, dove α_m è un intero non negativo, e $-\frac{1}{2} < \xi_m \leq \frac{1}{2}$.

⁴ Si ha $b_k = 0$, mentre $a_k = 0$ se k non è una potenza di a , e $a_k = b^n$ se $k = a^n$.

Posto ora

$$h_m = \pi \frac{1 - \xi_m}{a^m},$$

risulta $a^n(x + h_m) = a^{n-m}a^m(x + h_m) = \pi a^{n-m}(\alpha_m + 1)$, e dunque, tenuto conto che a è dispari,

$$\cos(a^n(x + h_m)) = (-1)^{\alpha_m + 1}.$$

D'altra parte, osservando che $\sin(a^{n-m}\pi\alpha_m) = 0$, si trova:

$$\begin{aligned} \cos(a^n x) &= \cos(a^{n-m}\pi(\alpha_m + \xi_m)) = \cos(a^{n-m}\pi\alpha_m) \cos(a^{n-m}\pi\xi_m) = \\ &= (-1)^{\alpha_m} \cos(a^{n-m}\pi\xi_m). \end{aligned}$$

Ne segue:

$$S_m = \frac{(-1)^{\alpha_m + 1}}{h_m} \sum_{n=m}^{\infty} b^n \{1 + \cos(a^{n-m}\pi\xi_m)\}.$$

Poiché tutti i termini sono positivi, la serie a secondo membro è maggiore del primo termine, e dunque di b^m , in quanto, essendo $-\frac{1}{2} < \xi_m \leq \frac{1}{2}$, si ha $\cos(\pi\xi_m) \geq 0$. In definitiva:

$$|S_m| \geq \frac{b^m}{h_m} \geq \frac{2a^m b^m}{3\pi}.$$

Se ora scegliamo a e b in modo tale che $\frac{2a^m b^m}{3\pi} > \frac{a^m b^m}{ab - 1}$, e cioè se $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, risulterà:

$$\left| \frac{f(x + h_m) - f(x)}{h_m} \right| > |S_m| - |R_m| > \frac{2}{3\pi} a^m b^m \frac{ab - 1 - \frac{3}{2}\pi}{ab - 1} = c(ab)^m.$$

Quando ora si fa tendere m all'infinito, h_m tende a zero, mentre il modulo del rapporto incrementale tende all'infinito, e dunque la funzione $f(x)$ non potrà essere derivabile. { }

14.5. Notizie storiche

Gli sviluppi delle funzioni in serie di potenze accompagnano il calcolo differenziale fin dal suo inizio, e in alcuni casi lo precedono. Abbiamo già visto come Mercator utilizzasse la serie geometrica per ottenere la quadratura dell'iperbole, e come in quegli stessi anni Newton fosse riuscito a sviluppare praticamente tutte le funzioni elementari, ivi comprese le funzioni trigonometriche e le loro inverse. Nell'opera di Newton le serie di potenze occupano un ruolo di assoluta preminenza, pari se non addirittura superiore alle flussioni, e solo più tardi, almeno in Inghilterra, la loro posizione si ridimensionerà ed esse diventeranno una parte, importante ma non determi-

nante, del calcolo infinitesimale. In effetti, una volta che si accetti come soluzione di un problema una serie i cui coefficienti vengono calcolati uno dopo l'altro, senza preoccuparsi della convergenza, ci si riduce essenzialmente a lavorare con polinomi, per i quali le operazioni di derivazione e di integrazione possono essere definite algebricamente, e quindi perdono molta della loro importanza.

Nel diciottesimo secolo gli sviluppi in serie vengono usati sistematicamente – in particolare quando, cosa che accade nella maggior parte dei casi significativi, non è possibile dare una soluzione esplicita – e si rivelano uno strumento utilissimo per affrontare problemi altrimenti di difficile se non impossibile soluzione.

Inutile dire che in tutto il Settecento non si trova nessuna ricerca sistematica sulla convergenza non solo delle serie di funzioni, ma anche di quelle numeriche; e quando si parla di convergenza di una serie, lo si fa molte volte intendendo la velocità con cui il termine generico tende a zero. È in questo senso che Eulero parla di serie più o meno convergenti, e dice che integrando le serie di potenze (o quelle trigonometriche) si aumenta la convergenza, dato che integrando il termine x^k si ottiene $\frac{x^{k+1}}{k+1}$. Non erano mancate certamente voci che mettevano in guardia contro l'uso acritico delle serie, ma i successi ottenuti stavano a provare che questi profeti di sventura erano destinati alla sconfitta.

Il *Cours d'Analyse* di Cauchy dice una parola definitiva sulla convergenza delle serie numeriche e delle serie di potenze, per le quali Cauchy dimostra tutti i risultati più importanti dei capitoli 6 e 13, anche per le serie di numeri complessi. Da questo punto di vista c'è ben poco da segnalare dopo Cauchy, se non il bel teorema di Abel, che estende il teorema 13.7 e dimostra che una serie di potenze che converge in un punto $y > 0$ converge uniformemente in $[0, y]$, e quindi la sua somma è continua anche in y , e alcuni criteri di convergenza (criteri di Raabe) che possono essere usati quando il criterio della radice viene meno.

Naturalmente non ci vuole molto ad accorgersi che, nonostante l'opinione contraria di Lagrange, non tutte le funzioni possono essere sviluppate in serie (nemmeno con l'eccezione di alcuni punti singolari), e che non sempre la serie di Taylor converge alla funzione d'origine. Lo stesso Cauchy dà l'esempio della funzione $e^{-\frac{1}{x}}$ (vedi cap. 10 § 8) e riconosce l'importanza delle funzioni *analitiche*, cioè sviluppabili in serie, in particolare nel campo complesso. Lo studio di tali funzioni, iniziato dallo stesso Cauchy e proseguito da Riemann e da Weierstrass sarà uno dei principali campi di ricerca del diciannovesimo secolo, un settore ancora vivo e fecondo ai nostri giorni.

Se le questioni di convergenza delle serie di potenze si possono considerare chiuse con l'opera di Cauchy, ben altrimenti vanno le cose per le serie di Fourier. Al contrario, il problema della convergenza di queste serie ha accompagnato e talvolta determinato gli sviluppi del calcolo integrale nell'Ottocento, per non parlare della questione dei fondamenti: basti pensare che dai problemi posti dalla convergenza delle serie di Fourier hanno avuto origine da una parte le riflessioni di Riemann sull'integrazione, che hanno condotto alla definizione dell'integrale che porta il suo nome, e dall'altra

le ricerche di Cantor sui numeri reali, che hanno portato alla loro definizione mediante le successioni di Cauchy (vedi cap. 6 § 4). Sempre dalle serie di Fourier hanno preso inizio le ricerche sulla topologia della retta, nonché lo studio dei numeri transfiniti. In particolare, per quanto riguarda il calcolo integrale, si assiste a una specie di reazione a catena, in cui ogni generalizzazione del concetto di integrale, permettendo di calcolare i coefficienti di Fourier di nuove classi di funzioni prima non integrabili, pone il problema della convergenza delle relative serie di Fourier, e viceversa ogni ricerca sul comportamento di queste serie pone delicati problemi di calcolo integrale e di teoria della misura.

Le serie trigonometriche appaiono già verso la metà del XVIII secolo; ad esempio in una memoria del 1748, dedicata ai movimenti di Giove e di Saturno, Eulero sviluppa la funzione $(1 - g \cos t)^{-\mu}$ in serie di coseni; uno sviluppo che trova conveniente perché dopo le integrazioni che deve effettuare, i termini $\cos kt$ diventano $\frac{\sin kt}{k}$, aumentando così la “convergenza”.

Più interessante è senza dubbio la memoria *Sur les cordes vibrantes*, che nel 1753 Daniel Bernoulli dedica al problema del moto di una corda tesa e fissa alle estremità, che viene pizzicata e lasciata vibrare. Supponiamo che la corda sia di lunghezza π , e che gli estremi siano fissati nei punti dell'asse delle x di ascissa 0 e π . Ad ogni istante t la forma della corda è data dal grafico di una funzione $u(x, t)$, che è soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad [14.21]$$

detta *equazione delle onde*, in cui v è una costante, che dipende dal materiale e dalla tensione della corda.

Di questa corda, oltre che la posizione degli estremi, si potrà assegnare la forma iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$ e la velocità iniziale $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x)$.⁵ La condizione $v_0(x) = 0$ corrisponde alla corda “pizzicata”, che viene lasciata andare con velocità iniziale nulla. Se invece si pone $u_0(x) = 0$ si ha il caso della corda percossa, che parte con una certa velocità dalla posizione di riposo; grosso modo è quello che accade per la chitarra e il clavicembalo (corda pizzicata) e per il pianoforte (corda percossa).

Tipiche soluzioni della [14.21] sono le funzioni $\sin kx \cos kvt$, $\sin kx \sin kvt$, $\cos kx \sin kvt$ e $\cos kx \cos kvt$; ricordando però che la corda è fissata alle estremità, e cioè che si ha $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ per ogni t , si vede che solo le prime due funzioni danno una soluzione del problema. Se poi, come era il caso del problema trattato da Bernoulli, si suppone che la corda sia pizzicata, l'unica soluzione è la prima, o più in generale la funzione

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \cos kvt. \quad [14.22]$$

⁵ Si noti l'analogia con le equazioni differenziali ordinarie: anche lì un'equazione del secondo ordine richiedeva due condizioni iniziali, e bisognava assegnare il valore della funzione e della derivata al tempo $t = 0$. La differenza è che nelle equazioni ordinarie u_0 e v_0 erano due numeri reali, qui sono due funzioni.

Il problema delle corde vibranti venne studiato sistematicamente attorno alla metà del Settecento, e D'Alembert trovò per l'equazione [14.21] la soluzione

$$u(x, t) = f(x + vt) + g(x - vt) \quad [14.23]$$

con f e g funzioni arbitrarie. Purtroppo questa soluzione non verifica le condizioni $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, e quindi non risolve il problema, per il quale Bernoulli sosteneva che la [14.22] fosse la soluzione più generale possibile.

Questa affermazione fu contestata da Eulero, che obiettava che se ciò fosse vero, ponendo $t = 0$ nella [14.22] si otterrebbe la posizione iniziale della corda:

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

e quindi qualsiasi funzione $u_0(x)$, nulla agli estremi, sarebbe esprimibile come somma di una serie di seni. Questo gli sembrava impossibile, perché si sarebbero potute sviluppare anche funzioni non regolari ("discontinue" le chiamava Eulero) come ad esempio quella che dava la posizione iniziale della corda pizzicata:

$$u_0(x) = \alpha \left(\frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - x \right| \right), \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

La possibilità che la somma di funzioni regolari come le funzioni trigonometriche desse luogo a una funzione irregolare sembrava escludere – secondo Eulero – che la [14.22] potesse esprimere la soluzione più generale dell'equazione [14.21].

La discussione su questo punto non era andata al di là di queste affermazioni di principio, anche perché, mancando uno studio sulla convergenza delle serie, e in generale delle serie di funzioni diverse dalle serie di potenze, si tendeva a modellare il comportamento delle serie di funzioni su queste ultime, per le quali in effetti l'obiezione di Eulero sarebbe stata giustificata.

È solo con l'opera di Fourier *Théorie analytique de la chaleur* che i problemi di convergenza per le serie trigonometriche vengono posti nella giusta prospettiva, e si trovano serie trigonometriche che convergono anche a funzioni discontinue. Il volume è dedicato allo studio dell'evoluzione della temperatura $u(x, y, z, t)$ in un corpo a contatto con sorgenti di calore. Fourier trova che essa è regolata dall'equazione del calore:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

nel caso di un corpo tridimensionale, ovvero

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad [14.24]$$

per una lamina bidimensionale.

In particolare Fourier studia lo stato stazionario della temperatura in una lamina piana infinita $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times [0, +\infty)$ il cui lato inferiore $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ sia a temperatura co-

stante $\frac{\pi}{4}$, mentre i lati infiniti sono a temperatura 0. Nello stato stazionario la temperatura u non dipende da t , e quindi è funzione solo di x e y , e verifica l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Questa equazione ha tra le sue soluzioni le funzioni $e^{-hy} \cos hx$, che si annullano sui lati infiniti (cioè per $|x| = \frac{\pi}{2}$) se h è dispari. Una soluzione della [14.25] è dunque data dalla serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-(2k-1)y} \cos(2k-1)x. \quad [14.26]$$

Diversamente da Daniel Bernoulli, Fourier non si limita ad affermare che la (14.26) rappresenta la soluzione più generale dell'equazione [14.25], ma si pone esplicitamente il problema di determinare i valori dei coefficienti c_k in modo che per $y=0$ la temperatura u assuma il valore assegnato $\frac{\pi}{4}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(2k-1)x = \frac{\pi}{4}, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2} \quad [14.27]$$

o più in generale di determinare i coefficienti a_k e b_k in modo che la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad [14.28]$$

converga a una funzione data $f(x)$.

La determinazione dei coefficienti a_k e b_k è piuttosto laboriosa, e solo alla fine di lunghi calcoli Fourier giunge alle formule [14.9] e [14.10]:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

che noi abbiamo trovato con una semplice integrazione. Più semplice risulta invece il calcolo dei coefficienti c_k nella [14.27]. Fourier ottiene la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos(2k-1)x. \quad [14.29]$$

la cui convergenza è dimostrata in maniera quasi impeccabile, o che potrebbe diventare tale con minimi cambiamenti; cosa questa ancora più notevole se pensiamo che, benché pubblicato nel 1822, e quindi dopo il *Cours d'analyse* di Cauchy, il volume di Fourier era stato scritto molto prima, almeno nelle linee essenziali. In effetti una prima memoria viene inviata all'Istituto di Francia nel 1807, ed estratti dell'opera vengono pubblicati nel 1808 e nel 1816.

Posto

$$y_m(x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos(2k-1)x$$

Fourier nota che

$$y'_m = - \sum_{k=1}^m (-1)^k \sin(2k-1)x = \frac{1}{2} \frac{\sin 2mx}{\cos x}$$

e dunque

$$y_m(x) = y_m(0) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin 2mt}{\cos t} dt.$$

Se ora si fa tendere m all'infinito, $y_m(0)$ tende alla serie di Leibniz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = \frac{\pi}{4},$$

mentre l'integrale tende a zero, come si può verificare facilmente integrando per parti:

$$\int_0^x \frac{\sin 2mt}{\cos t} dt = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\cos 2mt}{\cos t} \right) \Big|_0^x + \int_0^x \frac{\sin t \cos 2mt}{\cos^2 t} dt.$$

In realtà, invece di fermarsi a questo punto, Fourier continua a integrare per parti, esprimendo l'integrale con una serie:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\sin 2mt}{\cos t} dt &= -\frac{1}{2m} \left(\frac{\cos 2mt}{\cos t} \right) \Big|_0^x + \frac{1}{4m^2} \left(\sin 2mt \left(\frac{1}{\cos t} \right)' \right) \Big|_0^x + \\ &+ \frac{1}{(2m)^3} \left(\cos 2mt \left(\frac{1}{\cos t} \right)'' \right) \Big|_0^x + \dots \end{aligned}$$

un'operazione inutile e dubbia, dato che la convergenza della serie così ottenuta è tutta da dimostrare.

Ma a parte questioni di convergenza, quello che più interessa è che Fourier osserva esplicitamente che la serie [14.29] converge non solo per $|x| < \frac{\pi}{2}$, ma per ogni valore di x , e la somma è 0 per $|x| = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{4}$ per $\frac{\pi}{2} < |x| < \frac{3\pi}{2}$, e così via: la somma delle serie trigonometriche può essere una funzione discontinua.

Naturalmente, nel volume di Fourier non c'è traccia di uno studio della convergenza delle serie trigonometriche generali, per le quali Fourier si limita ad affermare che esse "sono sempre convergenti, ... benché rappresentino le ordinate di linee discontinue".

L'opera di Fourier lascia dunque aperto il problema di individuare sotto quali ipotesi una funzione periodica $f(x)$ è sviluppabile in serie di seni e coseni. Si noti che, diversamente dalle serie di potenze, qui la continuità non sembra giocare un ruolo rilevante: essa non è né necessaria, come si è appena visto, né sufficiente, come farà vedere più tardi Paul du Bois-Raymond (1831-1889), che costruisce una funzione continua la cui serie di Fourier diverge per $x = 0$.

Preliminare allo studio della convergenza è un altro problema: che senso dare agli integrali che danno i coefficienti quando $f(x)$ non è continua?

Infine – ma questo problema si porrà solo quando verranno individuati con preci-

sione i diversi tipi di convergenza, in particolare quando verrà riconosciuta la rilevanza della convergenza uniforme – in che modo la serie di Fourier converge alla funzione f ?

Cominciamo dalla questione dei coefficienti. Come abbiamo avuto già occasione di dire, fin dalla fondazione del calcolo infinitesimale l'integrazione non era vista come un'operazione a sé stante, ma come l'operazione inversa della derivazione, salvo riconoscere che l'integrazione risolveva tra gli altri il problema del calcolo delle aree. In particolare, l'integrale definito di una funzione era visto come la differenza tra i valori di una primitiva agli estremi dell'intervallo di integrazione.

Quando Fourier scrive il suo lavoro, questo panorama non è ancora cambiato.⁶ Di più, egli si trova a dover integrare funzioni discontinue, per le quali non si poteva invocare l'esistenza di una primitiva, e quindi la definizione usuale diveniva inefficace.

Per ovviare a queste difficoltà, Fourier fa un passo indietro, addirittura alla situazione precedente il calcolo. L'integrale di una funzione discontinua – ci dice – non è altro che l'area della regione compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle ascisse, contata positivamente o negativamente a seconda del segno di f .

Cosa poi sia quest'area, e come si possa calcolare, Fourier non tenta nemmeno di spiegarlo, contentandosi di dare un significato intuitivo agli integrali di cui ha bisogno per calcolare i coefficienti. Egli ha comunque il merito di aver posto con chiarezza il problema del calcolo degli integrali di funzioni discontinue, e di averne suggerito la soluzione in una definizione dell'integrale indipendente dalla derivata.

Come abbiamo visto, circa allo stesso tempo Cauchy stava elaborando la sua sistemazione dei fondamenti del calcolo, tra i quali figurava una definizione autonoma dell'integrale, anche se limitata alle funzioni continue. Sulla strada aperta da Cauchy si muoveranno le successive generalizzazioni dell'integrale, tra cui quella di Riemann che abbiamo studiato nel capitolo 9, originata per l'appunto dall'esigenza di estendere l'integrale almeno fino a comprendervi le funzioni discontinue sviluppabili in serie di Fourier.

La definizione di Riemann apre immediatamente il problema di individuare, tra le funzioni integrabili, quelle la cui serie di Fourier converge, e di stabilire il tipo di convergenza.

I primi risultati in questa direzione sono piuttosto contraddittori. Nel più volte citato *Cours d'analyse*, Cauchy dimostra che se una serie di funzioni continue converge in un intervallo, la somma è una funzione continua. Cauchy non specifica con precisione a quale tipo di convergenza faccia appello, e d'altra parte l'introduzione esplicita della convergenza uniforme è nettamente posteriore al *Cours d'analyse*. Ma la mancanza di una definizione formale della convergenza uniforme – e di un termine per designarla – non significa che essa non possa essere usata nelle dimostrazioni, e con ogni probabilità quando Cauchy parla di convergenza (e di continuità) in un intervallo intende riferirsi proprio a quella che oggi accompagniamo con l'aggettivo "uniforme". In ogni caso, il risultato di Cauchy, anche letto in termini di convergenza

⁶ Ricordiamo che, come abbiamo già detto, l'opera di Fourier viene compiuta prima della pubblicazione delle lezioni di Cauchy sul calcolo integrale.

uniforme, non è di nessun aiuto nello studio delle serie di Fourier, dove in genere la funzione da sviluppare è per l'appunto discontinua.

Il risultato di Cauchy è considerato erraneo da Abel,⁷ che legge le ipotesi del teorema nel senso della convergenza puntuale, e avanza come esempio la serie

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$$

la cui somiglianza con la serie di Fourier [14.29] è evidente. Non si trattava certamente di una serie nuova, dato che già nel 1760 era stata studiata da Eulero, che aveva dimostrato che la sua somma era $\frac{x}{2}$; essa si poteva trovare anche nel *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* di Sylvestre François Lacroix (1765-1843), un testo conoscitissimo, e certamente ben noto a Cauchy. Molti anni dopo, nel 1853, tornando sulla questione Cauchy sosterrà che la serie proposta da Abel “non converge per tutti gli x ”.

Questi sviluppi sono peraltro estranei alla teoria delle serie trigonometriche, che come abbiamo detto più volte riguarda soprattutto gli sviluppi di funzioni non continue, per le quali la convergenza uniforme è fuori questione.

Nel 1829, la questione della convergenza puntuale, stavolta definita esplicitamente come tale, viene avviata a soluzione da Dirichlet, che dimostra la convergenza delle serie di Fourier in ipotesi simili a quelle del teorema [14.1]. Più precisamente, Dirichlet dimostra che una condizione sufficiente affinché una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie di Fourier è che sia continua a tratti e abbia al più un numero finito di massimi e minimi relativi, ossia che sia monotona a tratti.

Il lavoro di Dirichlet è ripreso da Riemann, che da una parte lo estende eliminando alcune restrizioni dovute alla mancanza di una definizione abbastanza generale di integrale⁸ (è in questa occasione che Riemann introduce la sua definizione di funzioni integrabili), e dall'altra dimostra nuovi importanti risultati.

Non possiamo qui entrare nei dettagli dei contributi di Riemann e dei matematici successivi alla teoria delle serie di Fourier, né soffermarci sulle loro applicazioni ad altri campi della matematica, in particolare alla teoria dei numeri e alle equazioni differenziali sia ordinarie che alle derivate parziali. Citeremo solo un risultato, dovuto a Riemann, che mostra il carattere anche locale degli sviluppi di Fourier.

A prima vista, le serie di Fourier hanno un comportamento “globale”; i coefficienti a_k e b_k sono dati da integrali estesi a tutto l'intervallo di periodicità, e due funzioni che coincidono in un intervallo I avranno in generale serie di Fourier diversissime, anche se su I hanno la stessa somma. In contrasto, le serie di potenze hanno un carattere eminentemente locale: due funzioni analitiche (cioè sviluppabili in serie di Taylor) che coincidono in un intervallo anche piccolissimo, hanno tutte le derivate uguali in ogni punto interno, e quindi coincidono nell'insieme di convergenza.

⁷ Molto diplomaticamente, Abel scrive che a suo avviso “il teorema di Cauchy ammette delle eccezioni”.

⁸ Ricordiamo che la definizione di Cauchy riguardava le sole funzioni continue.

Riprendiamo ora per un momento la dimostrazione del teorema 14.1. Dalla [14.17]:

$$S_n(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} G(t; x) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt$$

segue che la serie di Fourier di $f(x)$ converge se e solo se l'integrale a secondo membro tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

Preso ora un arbitrario $r > 0$, poniamo

$$G_1(t; x) = \begin{cases} G(t; x) & \text{se } |t| \geq r \\ 0 & \text{se } |t| < r \end{cases}$$

La funzione $G_1(t; x)$ è integrabile rispetto a t , e dunque risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\pi} G_1(t; x) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$

Di conseguenza, si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} G(t; x) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-r}^r G(t; x) \operatorname{sen} \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt.$$

Ricordando la definizione della funzione $G(t; x)$, possiamo concludere che la convergenza della serie di Fourier in un punto x dipende solo dai valori della f in un intorno $I(x, r)$ di raggio arbitrariamente piccolo; due funzioni che coincidono in un intervallo I avranno in genere serie di Fourier diversissime, ma avranno lo stesso comportamento quanto alla convergenza o meno nei punti interni di I : la convergenza di una di esse implica quella dell'altra.

Il lavoro di Riemann è del 1854; nel frattempo Weierstrass e i suoi collaboratori avevano messo in evidenza il ruolo fondamentale della convergenza uniforme nella continuità della funzione limite, rendendo esplicito un concetto che era già stato usato, senza peraltro riconoscerne e apprezzarne appieno l'importanza, da Abel nei suoi studi sulle serie di potenze, e poi da vari matematici successivi.

Sotto l'influenza di Riemann, e soprattutto di Weierstrass, la nozione di convergenza uniforme viene approfondita e generalizzata, soprattutto in Germania e in Italia.

Citeremo solo i lavori di Cesare Arzelà (1847-1912), che dimostra tra l'altro che affinché una successione $f_n(x)$ di funzioni continue converga su un compatto K a una funzione continua $f(x)$ è necessario e sufficiente che la convergenza sia *quasi uniforme*; ossia che $f_n(x)$ converga puntualmente a $f(x)$, e che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni N esista un $N' > N$ tale che

$$\sup_{x \in K} \inf_{N < n < N'} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

e quelli di Giulio Ascoli (1843-1896) che dimostra il teorema 20.9 sulla compattezza dell'insieme $\mathcal{U}_H$; un risultato poi generalizzato dallo stesso Arzelà, e che oggi è ricordato come teorema di Ascoli-Arzelà (vedi più avanti, esercizio 20.20).

Lo stesso Weierstrass dimostra il teorema di approssimazione di funzioni continue con polinomi (teorema 13.10) e dà l'esempio, che abbiamo visto nel § 14.4, di una funzione continua mai derivabile.

Lo studio delle serie di Fourier riceve un ulteriore impulso dall'introduzione dell'integrale di Lebesgue (vedi cap. 18), sia per i potenti teoremi di convergenza dimostrati nel § 18.5 (teorema di B. Levi, lemma di Fatou, teorema della convergenza dominata), sia perché moltissime funzioni non integrabili secondo Riemann risultano ora sommabili, e quindi si pone per esse il problema della convergenza delle relative serie di Fourier.

Una menzione particolare meritano le funzioni di quadrato sommabile in un intervallo $[a, b]$, che costituiscono uno spazio di Hilbert (che si indica con L^2) con il prodotto scalare

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

a cui corrisponde la norma

$$\left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad [14.30]$$

Per le funzioni f di L^2 , periodiche di periodo 2π , non è difficile dimostrare che la loro serie di Fourier converge a f nella norma [14.30]. Molto più difficile è invece dimostrare che la serie di Fourier converge a $f(x)$ quasi ovunque; questo problema, che è restato aperto per molto tempo, è stato risolto positivamente da Lennart Carleson nel 1966.

14.6. Risposte agli esercizi

14.1.

- | | | |
|---------------------|-----------|---------------------------------------|
| 1. π | 5. no | 9. Ogni numero razionale è un periodo |
| 2. 2π | 6. 1 | 10. $\frac{1}{2}$ |
| 3. no | 7. π | 11. π |
| 4. $\frac{2\pi}{3}$ | 8. 4π | |

14.2. Si ha $f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + h\right) = f(kx + h + T) = f(kx + h)$

14.3. Se $\frac{T}{S} = \frac{p}{q}$, con la frazione $\frac{p}{q}$ ridotta ai minimi termini, si ha $pS = qT$, e dunque sia f che g sono periodiche di periodo $pS = qT$.

14.4. Si ha $f(x + kS + mT) = f(x + kS) = f(x)$.

14.5. Per la continuità in 0, dato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|y| < \delta$ si ha $|f(y) - f(0)| < \varepsilon$. D'altra parte f ha un periodo T , con $0 < T < \delta$; se $x \in \mathbf{R}$, sia k un intero tale che $|x - kT| < \delta$. Si ha allora $|f(x - kT) - f(0)| < \varepsilon$, e siccome $f(x - kT) = f(x)$, si ha anche $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε , $f(x) = f(0)$.

14.6. Se α è un numero irrazionale, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due interi p e q tali che $|q\alpha - p| < \varepsilon$ (vedi esercizio 3.17). Preso $\alpha = \frac{T}{S}$, avremo dunque due interi tali che $|qT - pS| < \varepsilon S$. Siccome $|qT - pS|$ è un periodo di f , essa ammette periodi piccoli a piacere, e dunque per l'esercizio precedente è costante.

14.7. Si ha $\cos \omega(kx - \xi_k) = \cos k\omega x \cos \omega \xi_k + \sin k\omega x \sin \omega \xi_k$, e dunque basterà prendere c_k e ξ_k in modo che risulti $c_k \cos \omega \xi_k = a_k$ e $c_k \sin \omega \xi_k = b_k$.

14.8.

1. $a_1 = 1$, tutti gli altri coefficienti sono nulli.

$$2. b_1 = -\frac{1}{2}, b_k = \frac{(-1)^{k+1}2}{k^2-1}, a_k = 0.$$

$$3. b_1 = \frac{3}{2}, b_k = (-1)^{k+1}2\left(\frac{1}{k^2-1} + \frac{1}{k}\right), a_k = 0.$$

$$4. a_0 = 1, a_k = 0 \text{ se } k = 2s, a_k = \frac{(-1)^{s+1}2}{\pi k} \text{ se } k = 2s+1; b_k = 0.$$

$$5. a_k = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(k^2+1)}, b_k = -k \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi(k^2+1)}$$

$$\mathbf{14.9.} \quad a_1 = \pi, a_k = 0, b_1 = -\frac{1}{2}, b_k = \frac{2}{k^2-1}$$

Capitolo 15

Curve e superfici

15.1. Curve in $\mathbf{R}^n$

Abbiamo già introdotto le curve nel capitolo 4, a cui rinviamo per la definizione e la terminologia. In questo capitolo studieremo più in dettaglio le principali proprietà delle curve, avvalendoci degli strumenti del calcolo differenziale e integrale.

Come abbiamo detto, una curva in $\mathbf{R}^n$ è una applicazione γ di un intervallo $[a, b]$ in $\mathbf{R}^n$. L'equazione

$$\mathbf{x} = \gamma(t)$$

si chiama *equazione parametrica* della curva γ . Ad esempio

$$x = \cos t, y = \sin t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

è l'equazione parametrica in $\mathbf{R}^2$ della circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine, mentre

$$x = 1 + t, y = 2 - 3t$$

è l'equazione parametrica della retta che passa per i punti $(1, 2)$ (per $t = 0$) e $(2, -1)$ (per $t = 1$), o in altri termini della retta di equazione cartesiana $y = 5 - 3x$.

Se pensiamo alla variabile t come al tempo, il vettore $\gamma(t)$ rappresenta la posizione al tempo t di un punto mobile nello spazio $\mathbf{R}^n$. Fissiamo ora un istante t_0 e un secondo istante t . Nel tempo $t - t_0$ che intercorre tra t_0 e t , il punto mobile si sposta da $\gamma(t_0)$ a $\gamma(t)$; la sua velocità media (vettoriale) sarà allora data dal rapporto incrementale

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Facciamo ora tendere t a t_0 ; se le componenti $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)$ della curva γ sono funzioni derivabili in t_0 , il limite darà la *velocità vettoriale* (o il *vettore velocità*) del punto mobile all'istante t_0 :

$$\mathbf{v}(t_0) = \gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}. \quad [15.1]$$

Se $\gamma'(t_0) \neq 0$,¹ la retta

$$\mathbf{x} = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) \quad [15.2]$$

è tangente alla curva nel punto $\gamma(t_0)$. Infatti, come nel caso di una funzione, la relazione

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - \mathbf{v}(t - t_0)}{t - t_0} = 0$$

vale se e solo se $\mathbf{v} = \gamma'(t_0)$.

Perché dunque esista la retta tangente alla curva γ in punto $\gamma(t_0)$ non basta che esista la derivata $\gamma'(t_0)$, ma occorre anche che essa sia diversa da zero. Si capisce allora la ragione della definizione seguente:

Definizione 15.1 Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice regolare se l'applicazione γ ha derivata continua, che non si annulla in nessun punto di (a, b) .

La curva γ si dice invece regolare a tratti se è continua e si può dividere l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di intervalli, in ognuno dei quali γ è regolare.

Esempio 15.1 Se $f(x)$ è una funzione di classe C^1 in $[a, b]$,² la curva piana di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

è regolare. Infatti il vettore velocità $(1, f'(t))$ non si annulla mai, dato che ha prima componente uguale a 1. Il sostegno di questa curva è il grafico della funzione f .

Viceversa, una curva piana regolare si può sempre scrivere *localmente* come grafico di una funzione. Più precisamente, se γ è una curva regolare in $\mathbb{R}^2$, per ogni punto $t_0 \in [a, b]$ esiste un intorno I di t_0 tale che il sostegno della restrizione di γ a I è grafico di una funzione $y = f(x)$, o $x = g(y)$.

Infatti, siccome γ è regolare, almeno una delle derivate $x'(t_0)$ o $y'(t_0)$ è diversa da zero. Supponiamo ad esempio che sia $x'(t_0) > 0$; siccome $x'(t)$ è continua, ci sarà un intorno I di t_0 in cui $x'(t) > 0$. La funzione $x(t)$ è allora strettamente crescente in I , e dunque invertibile; detta $t(x)$ la sua inversa, il sostegno della restrizione di γ a I è il grafico della funzione $f(x) = y(t(x))$. Allo stesso modo, se $y'(t_0) \neq 0$, si può ricavare t in funzione di y , il sostegno della restrizione di γ a I è grafico di una funzione $x = g(y)$.

□

¹ Questo significa che almeno una delle componenti di $\gamma'(t_0)$ è diversa da zero. In caso contrario, il punto $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$ non descrive nessuna retta, ma rimane fisso in $\gamma(t_0)$.

² Cioè derivabile e con derivata continua.

Se si suppone solo che la curva sia di classe C^1 , senza supporre che la derivata $y'(t)$ sia diversa da zero, il sostegno della curva può avere dei punti angolosi. Ad esempio, la curva di equazione

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

ha velocità $y'(t) = (3t^2, 2t)$, che si annulla per $t = 0$, corrispondente all'origine.

Il sostegno della curva ha effettivamente una cuspidè nell'origine; infatti eliminando t dalle equazioni precedenti si ha $t = \sqrt[3]{x}$, e dunque $y = x^{\frac{2}{3}}$. Il sostegno della curva è dunque il grafico della funzione $x^{\frac{2}{3}}$, che ha l'andamento in figura.

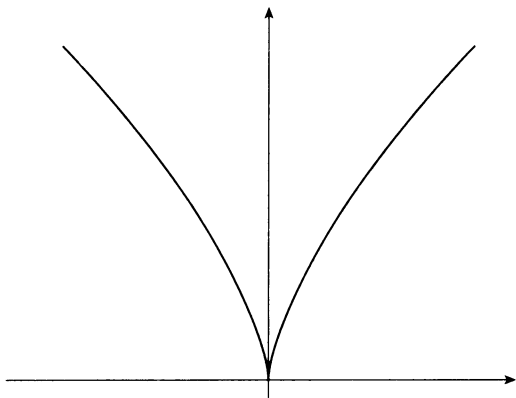


Figura 15.1

Ci si può convincere della necessità della condizione di non annullamento della velocità osservando che un punto che si muova con velocità non nulla non può cambiare bruscamente la direzione della velocità senza che questa sia discontinua; se invece a un certo istante del moto la velocità si annulla, il mobile può ripartire in una direzione qualsiasi senza discontinuità nella velocità.

Nel caso di una curva piana di componenti $(x(t), y(t))$, l'equazione [15.2] della retta tangente nel punto $(x(t_0), y(t_0))$ diventa

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) \\ y &= y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) \end{aligned} \quad [15.3]$$

Dall'ultima equazione³ si può ricavare il valore $t - t_0$:

$$t - t_0 = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)};$$

³ Naturalmente, se $y'(t_0) \neq 0$. Se invece $y'(t_0) = 0$ si ricava $t - t_0$ dalla prima equazione; infatti in questo caso non può essere anche $x'(t_0) = 0$, dato che la curva è regolare. In ogni caso si ottiene l'equazione [15.4].

che sostituito nella prima dà

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) = x'(t_0)(y - y(t_0)). \quad [15.4]$$

Quest'ultima è l'equazione della retta tangente in forma cartesiana.

Esempio 15.2 Calcoliamo la retta tangente alla curva γ di equazioni

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad [15.5]$$

nel punto $\left(\frac{\pi}{2} - 1, 1\right)$.

Verifichiamo in primo luogo che il punto dato sia sulla curva, cioè corrisponda a qualche valore di t_0 . Deve essere $y(t_0) = 1 - \cos t_0 = 1$, da cui $\cos t_0 = 0$ e quindi $t_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$. D'altra parte $x(t_0) = t_0 - \sin t_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$, da cui $k = 0$. Il punto dato sta dunque sulla curva, e corrisponde al valore $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Si ha $x'(t) = 1 - \cos t$, $y'(t) = \sin t$, e quindi

$$x'(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 1.$$

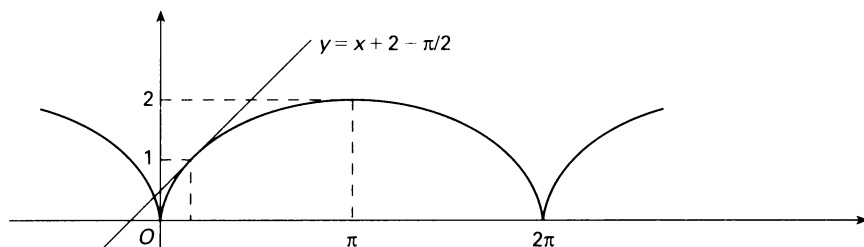


Figura 15.2

Di conseguenza l'equazione della tangente è $x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1$, ossia

$$y = x - \frac{\pi}{2} + 2.$$

La curva [15.5] si chiama *cicloide*. Essa è la curva descritta da un punto su una circonferenza di raggio 1 che rotola su una retta, e ha la forma in figura. $\square$

Esempio 15.3 Supponiamo che due osservatori descrivano il moto di una stessa particella, usando due orologi diversi. Indichiamo con t il tempo segnato dal primo orologio, e con r quello segnato dal secondo. In generale i due orologi non saranno sincronizzati, e quindi t e r saranno diversi, ma non in maniera arbitraria: ad ogni tempo t segnato dal primo orologio corrisponderà uno e un solo tempo $r = p(t)$ segna-

to dal secondo; la funzione $p(t)$ sarà invertibile, e se supponiamo che gli orologi non facciano sbalzi, sarà di classe C^1 .

Il primo osservatore descriverà il moto mediante la curva oraria $\varphi(t)$, $a \leq t \leq b$, il secondo mediante la curva oraria $\gamma(r)$, $c \leq r \leq d$.

Le due curve saranno ovviamente collegate tra loro; infatti la posizione della particella che il primo osservatore misura quando il suo orologio segna il tempo t sarà la stessa di quella misurata dal secondo osservatore quando il secondo orologio dà il tempo $r = p(t)$. Si ha allora

$$\varphi(t) = \gamma(p(t))$$

e conversamente, dato che la funzione $p(t)$ è invertibile:

$$\gamma(r) = \varphi(p^{-1}(r)).$$

Dato che descrivono lo stesso fenomeno, diremo che le curve γ e φ sono equivalenti. □

Più in generale, daremo la seguente definizione:

Definizione 15.2 Due curve regolari $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ si diranno equivalenti se esiste una funzione $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ di classe C^1 , surgettiva, e con derivata sempre diversa da zero, tale che

$$\varphi(t) = \gamma(p(t)).$$

Due curve equivalenti hanno evidentemente lo stesso sostegno; inoltre se $p' > 0$ la funzione $p(t)$ è crescente, e quindi $p(c) = a$ e $p(d) = b$, cosicché il primo estremo di φ è anche primo estremo di γ , e così il secondo estremo. Se invece $p' < 0$ risulta $p(c) = b$, $p(d) = a$ e i due estremi si scambiano. Nel primo caso si dirà che le curve γ e φ hanno lo stesso verso, nel secondo che hanno verso opposto.

Se la curva φ è regolare, il vettore

$$\tau(t) = \tau_\varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

che ha la stessa direzione della velocità e lunghezza 1, si chiama *versore tangente* alla curva φ . Si ha il seguente

Teorema 15.1 Se due curve φ e γ sono equivalenti e hanno lo stesso verso (ossia se $\varphi(t) = \gamma(p(t))$ con $p'(t) > 0$) i versori tangenti coincidono:

$$\tau_\varphi(t) = \tau_\gamma(p(t)).$$

Dimostrazione Si ha $\varphi'(t) = \gamma'(p(t))p'(t)$ e $\|\varphi'(t)\| = \|\gamma'(p(t))\|p'(t)$ dato che $p'(t) > 0$; pertanto

$$\tau_\varphi(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|} = \frac{\gamma'(p(t))p'(t)}{\|\gamma'(p(t))\|p'(t)} = \frac{\gamma'(p(t))}{\|\gamma'(p(t))\|} = \tau_\gamma(p(t)).$$
□

Esercizi

15.1. Trovare l'equazione della retta tangente alle curve seguenti, nei punti indicati a lato.

$$1. x = \cos t, \quad y = 1 - t, \quad (1, 1)$$

$$2. x = e^t, \quad y = t + t^2, \quad (1, 0)$$

$$3. x = \sin t \cos t, \quad y = \frac{1}{\sin t}, \quad (0, 1)$$

$$4. x = t^2, \quad y = t^3, \quad (1, 1)$$

$$5. x = \log(1 + t), \quad y = 2t - t^2, \quad (0, 0)$$

$$6. x = \operatorname{tg} t, \quad y = \cos 2t, \quad (1, 0)$$

$$7. x = 1 - \operatorname{arctg} t, \quad y = 1 - t^2, \quad \left(1 - \frac{\pi}{4}, 0\right)$$

15.2. Lunghezza di una curva

Consideriamo un punto mobile su una retta con velocità $v(t) = x'(t)$, e poniamoci il problema di calcolare lo spazio percorso dal punto in un intervallo di tempo $[a, b]$.

Si potrebbe rispondere che lo spazio si ottiene integrando la velocità. Bisogna però intenderci su cosa intendiamo per “spazio percorso” dal mobile. Infatti si ha

$$\int_a^b x'(t) dt = x(b) - x(a);$$

in altre parole, integrando la velocità si ottiene lo *spostamento* del punto, ossia la differenza tra la posizione finale e quella iniziale. Questa differenza può essere anche nulla, come accade se la posizione finale è uguale a quella iniziale.

Ciò è dovuto al fatto che la velocità di un punto su una retta è positiva se il punto si muove verso destra, e negativa se si muove verso sinistra; corrispondentemente lo spazio percorso è contato col segno $+$ verso destra, e col segno $-$ verso sinistra. Se invece si vuole sapere quanta strada ha percorso il mobile, indipendentemente dal suo segno, si deve integrare non la velocità, ma il suo valore assoluto:

$$\int_a^b |x'(t)| dt$$

Considerazioni analoghe valgono nel caso di un punto mobile su una curva di $\mathbf{R}^n$; se si integra la velocità vettoriale, si ottiene lo spostamento:

$$\int_a^b \gamma'(t) dt = \gamma(b) - \gamma(a)$$

che può anche essere nullo, quando la traiettoria del mobile è una curva chiusa. Se invece si vuole calcolare il cammino effettivamente percorso, si dovrà integrare non la velocità vettoriale, ma la velocità scalare, cioè la norma della velocità vettoriale:

$$L = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt = \int_a^b \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \gamma'_2(t)^2 + \dots + \gamma'_n(t)^2} dt.$$

In generale, daremo la seguente

Definizione 15.3 Sia $\gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva di classe C^1 . Chiameremo lunghezza di γ il numero

$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt. \quad [15.6]$$

Come abbiamo detto, si ha il seguente

Teorema 15.2 La lunghezza di una curva è sempre maggiore o uguale della norma dello spostamento, cioè della distanza tra gli estremi della curva:

$$L = \int_a^b ||\gamma'(t)|| dt \geq \left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\| = ||\gamma(b) - \gamma(a)||. \quad [15.7]$$

Dimostrazione Se lo spostamento è nullo, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo dunque che il terzo termine della [15.7] sia positivo.

Per un qualsiasi vettore $\mathbf{u}$ si ha:

$$\left(\int_a^b \gamma'(t) dt, \mathbf{u} \right) = \int_a^b (\gamma'(t), \mathbf{u}) dt \leq \int_a^b ||\gamma'(t)|| ||\mathbf{u}|| dt = ||\mathbf{u}|| L.$$

In particolare, prendendo $\mathbf{u} = \int_a^b \gamma'(t) dt$, si ottiene

$$\left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\|^2 \leq \left\| \int_a^b \gamma'(t) dt \right\| L$$

da cui segue subito la [15.7]. □

Esempio 15.4 Il segmento γ che congiunge i punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ ha equazioni parametriche $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$, $0 \leq t \leq 1$. Si ha allora $\gamma'(t) = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, e quindi la sua lunghezza è

$$\int_0^1 ||\gamma'(t)|| dt = ||\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1||.$$

La lunghezza di un segmento, come si poteva prevedere, è uguale alla distanza tra i suoi estremi. □

Esempio 15.5 Abbiamo già incontrato la *parabola semicubica*, di equazioni

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Sia $a > 0$, e consideriamo la parte che si ottiene facendo variare t tra 0 e a ; la sua lunghezza è

$$L = \int_0^a \sqrt{9t^4 + 4t^2} dt = \int_0^a t \sqrt{9t^2 + 4} dt$$

e facendo il cambiamento di variabili $t^2 = u$:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \sqrt{9u + 4} du = \frac{1}{27} (9u + 4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a^2} = \frac{1}{27} \left((9a^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - 8 \right). \quad \square$$

Esempio 15.6 (Lunghezza dei grafici) Se la curva in esame è il grafico di una funzione $y = f(x)$ (ossia se ha equazione $x = t, y = f(t)$) la sua lunghezza è

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

che cambiando t in x si può anche scrivere

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \quad [15.8]$$

Ad esempio, calcoliamo la lunghezza della parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$, con $0 \leq x \leq 1$. Si ha

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$$

Abbiamo già visto questo integrale negli esercizi del capitolo 9 § 9; si ha

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \right)$$

e quindi

$$L = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}) \right). \quad \square$$

Esempio 15.7 (Lunghezza in coordinate polari) A volte una curva piana è data in coordinate polari:

$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

che corrispondono alle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \rho(t) \cos \varphi(t) \\ y = \rho(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

In questo caso si ha

$$\begin{cases} x'(t) = \rho'(t) \cos \varphi(t) - \rho(t) \sin \varphi(t) \varphi'(t) \\ y'(t) = \rho'(t) \sin \varphi(t) + \rho(t) \cos \varphi(t) \varphi'(t) \end{cases}$$

e quindi

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \rho'(t)^2 + \rho^2(t)\varphi'(t)^2.$$

Avremo allora

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho^2(t)\varphi'(t)^2} dt.$$

A volte poi si può prendere come t lo stesso angolo φ . In questo caso si ha una curva di equazione $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, ed essendo $\varphi' = 1$ l'equazione precedente diventa

$$L = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho'(\varphi)^2 + \rho^2(\varphi)} d\varphi. \quad [15.9]$$

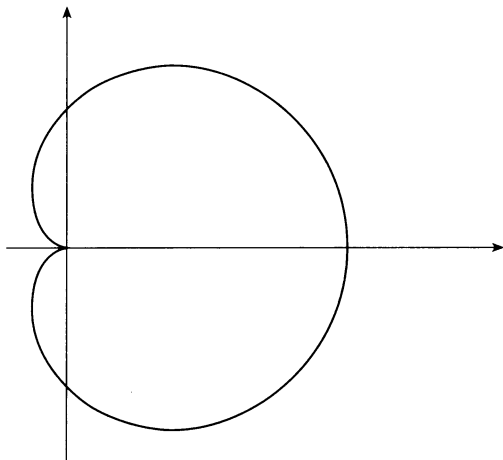


Figura 15.3

Calcoliamo ad esempio la lunghezza della *cardioide* (vedi figura), di equazione $\rho = (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Si ha

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \varphi + (1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi$$

da cui, con il cambiamento di variabili $2u = \varphi$,

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} |\cos u| du = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = \sqrt{2}.$$

□

Teorema 15.3 Due curve equivalenti σ e γ hanno la stessa lunghezza.

Dimostrazione Sia $\sigma(t) = \gamma(p(t))$, con $p'(t) \neq 0$. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $p' > 0$. Allora si ha

$$\|\sigma'(t)\| = \|\gamma'(p(t))\|p'(t) \quad [15.10]$$

e quindi

$$L(\sigma) = \int_c^d \|\sigma'(t)\| dt = \int_c^d \|\gamma'(p(t))\| p'(t) dt$$

Nell'integrale a secondo membro si può fare il cambiamento di variabili $p(t) = u$. Poiché $p(t)$ è crescente, si ha $p(c) = a$ e $p(d) = b$, e dunque.

$$L(\sigma) = \int_c^d \|\gamma'(p(t))\| p'(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du = L(\gamma)$$

Se invece risulta $p' < 0$, al secondo membro della [15.10] c'è un segno $-$; d'altra parte in questo caso risulta $p(c) = b$ e $p(d) = a$, e quindi anche gli estremi di integrazione si scambiano. Si ha allora

$$L(\sigma) = - \int_c^d \|\gamma'(p(t))\| p'(t) dt = \int_b^a \|\gamma'(u)\| du = L(\gamma)$$

e il teorema è dimostrato anche in questo caso. □

Se in una circonferenza inscriviamo un poligono regolare, il perimetro di quest'ultimo è sempre minore della lunghezza della circonferenza, e approssima sempre meglio quest'ultima via via che aumenta il numero dei lati. Si potrebbe in effetti definire la lunghezza della circonferenza come il limite dei perimetri dei poligoni regolari iscritti.

Faremo vedere ora che lo stesso vale per una qualsiasi curva: la sua lunghezza si può ottenere approssimandola con delle spezzate con vertici sul suo sostegno.

Per questo, cominciamo col definire con precisione una spezzata inscritta.

Sia $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ una curva di classe C^1 . Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di sottointervalli, mediante i punti $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$. Se uniamo i punti corrispondenti $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_N)$, otteniamo una spezzata Σ con i vertici sul sostegno della curva γ . La lunghezza di questa spezzata, data dalla somma delle lunghezze dei suoi lati, sarà minore della lunghezza della curva. Si ha infatti per la [15.7]:

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt$$

e quindi

$$L(\Sigma) = \sum_{i=1}^N \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

D'altra parte, come vedremo fra un momento, se prendiamo i punti t_i molto vicini tra loro, potremo far diventare la lunghezza della spezzata vicina quanto si vuole a quella della curva.

Alla dimostrazione di quest'ultimo risultato premettiamo il seguente

Lemma 15.1 Sia $\mathbf{v}(t)$ una funzione continua nell'intervallo $[\alpha, \beta]$ a valori in $\mathbf{R}^n$, e sia τ un qualsiasi punto di $[\alpha, \beta]$. Risulta allora

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt \right\| \geq \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t)\| dt - 2 \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\| dt. \quad [15.11]$$

Dimostrazione Si ha

$$\mathbf{v}(\tau)(\beta - \alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(\tau) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)] dt$$

e quindi per la disuguaglianza triangolare

$$\|\mathbf{v}(\tau)\|(\beta - \alpha) \leq \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt \right\| + \left\| \int_{\alpha}^{\beta} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)] dt \right\| \leq \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{v}(t) dt \right\| + \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\| dt. \quad [15.12]$$

D'altra parte, sempre per la disuguaglianza triangolare, risulta $\|\mathbf{v}(\tau)\| \geq \|\mathbf{v}(t)\| - \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\|$, e quindi, integrando:

$$\|\mathbf{v}(\tau)\|(\beta - \alpha) \geq \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t)\| dt - \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}(\tau)\| dt$$

che confrontata con la [15.12] dà immediatamente la [15.11]. $\square$

Possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema 15.4 La lunghezza di una curva regolare γ è l'estremo superiore delle lunghezze delle spezzate con i vertici sul suo sostegno.

Dimostrazione Siccome abbiamo già visto che ogni spezzata ha lunghezza inferiore a quella della curva, si tratterà di far vedere che si possono trovare delle spezzate di lunghezza vicina quanto si vuole a quella della curva.

Osserviamo per questo che la funzione $\gamma'(t)$ è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, e dunque uniformemente continua. Di conseguenza, comunque fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che se τ e t sono due punti di $[a, b]$, con $|t - \tau| < \delta$, si ha $\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| < \varepsilon$.

Dividiamo ora $[a, b]$ in subintervalli mediante i punti $t_0 = a < t_1 < \dots < t_N = b$, in modo tale che tutti gli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ abbiano ampiezza minore di δ . Per il lemma precedente, con $\alpha = t_{i-1}$ e $\beta = t_i$, si ha

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt - 2 \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| dt$$

dove τ è un punto dell'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$. La distanza $t - \tau$ è minore dell'ampiezza di questo intervallo, e dunque di δ , e quindi risulta $\|\gamma'(t) - \gamma'(\tau)\| < \varepsilon$, e di conseguenza

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \geq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt - 2\varepsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Sommando per i da 1 a N , al primo membro si ottiene la lunghezza della spezzata, mentre a secondo membro la somma degli integrali dà la lunghezza della curva, e quella dei termini residui dà $2\varepsilon(b - a)$. In conclusione, abbiamo trovato una spezzata con i vertici sul sostegno della curva, la cui lunghezza è maggiore di

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - 2\varepsilon(b - a).$$

Anche l'estremo superiore delle lunghezze di queste spezzate è allora maggiore della stessa quantità, e per l'arbitrarietà di ε , è maggiore o uguale della lunghezza della curva. Giacché avevamo già dimostrato la diseuguaglianza opposta, si ha l'uguaglianza e il teorema è dimostrato. $\square$

Invece di calcolare la lunghezza di una curva γ , possiamo prenderne in considerazione solo una parte, ad esempio quella compresa tra il primo estremo a e un punto $\gamma(t)$ sulla curva. La lunghezza $s(t)$ di questa porzione è ovviamente funzione di t , e si ha per definizione

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(r)\| dr.$$

Al variare di t nell'intervallo $[a, b]$ in cui è definita la curva γ , la funzione $s(t)$ varierà nell'intervallo $[0, L]$; se γ è regolare, $s(t)$ è una funzione strettamente crescente, dato che

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0. \quad [15.13]$$

Chiamiamo $t(s)$ l'inversa della funzione $s(t)$; essa manda $[0, L]$ in $[a, b]$, e si ha

$$t'(s) = \frac{1}{s'(t)} \bigg|_{t=t(s)} = \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}.$$

Se si pone ora $\psi(s) = \gamma(t(s))$, la curva ψ è equivalente alla γ , e ha lo stesso verso. Si ha inoltre

$$\psi'(s) = \gamma'(t(s))t'(s) = \frac{\gamma'(t(s))}{\|\gamma'(t(s))\|};$$

in particolare $\|\psi'(s)\| = 1$, e la velocità vettoriale coincide con il versore tangente.

Osservazione 15.1 Nel caso in cui la curva γ è il grafico di una funzione $y(x)$, la [15.13] diventa

$$s'(x) = \sqrt{1 + y'^2(x)}. \quad [15.14]$$

La quantità s si chiama *ascissa curvilinea*. In una curva parametrizzata mediante l'ascissa curvilinea la lunghezza non è altro che l'integrale $\int_{\gamma} ds$. Lo stesso simbolo $\int_{\gamma} ds$ si può usare per denotare la lunghezza di una qualsiasi curva γ ; infatti per la [15.13] si ha $ds = ||\gamma'(t)||dt$, e si ritrova la [15.6].

L'origine di questa notazione risiede nel fatto che la lunghezza del segmento infinitesimo tra i punti $\gamma(t)$ e $\gamma(t + dt)$ è data da

$$ds = ||\gamma(t + dt) - \gamma(t)|| = ||d\gamma(t)|| = ||\gamma'(t)||dt.$$

Più in generale si può definire l'integrale curvilineo di una funzione f :

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) ||\gamma'(t)|| dt. \quad [15.15]$$

In particolare, se γ è una curva in $\mathbf{R}^2$, di componenti $(x(t), y(t))$, e f è una funzione di due variabili, si ha

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

mentre in tre variabili avremo

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Come nel caso della lunghezza, se γ e σ sono equivalenti, allora

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\sigma} f ds.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esempio 15.8 Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\gamma} \sqrt{1 + 3x^2 + y} ds$$

dove γ è l'arco di parabola di equazioni $x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$.

Si ha $ds = \sqrt{1 + 4t^2} dt$, e dunque

$$\int_{\gamma} \sqrt{1 + 3x^2 + y} ds = \int_0^1 (1 + 4t^2) dt = \frac{7}{3}.$$

□

Esercizi

15.2. Calcolare la lunghezza delle seguenti curve:

1. $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ (cicloide)
2. $x = e^t - 1, \quad y = e^{2t} + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$

$$3. x = \arccos t, \quad y = \log t, \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

$$4. x = \sin t - t \cos t, \quad y = t \sin t + \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$5. x = \sin t - t \cos t, \quad y = t \sin t + \cos t + \frac{t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$6. x = \cos^2 t, \quad y = \cos t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$7. x = \arcsin t, \quad y = \log(1+t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$8. x = \frac{\cos 2t}{4}, \quad y = \cos^3 t, \quad z = \sin^3 t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$9. x = 3t^2 + 10t, \quad y = 4t^2 + 5t, \quad -1 \leq t \leq 1$$

15.3. Calcolare le lunghezze delle seguenti curve, espresse come grafici di funzioni:

$$1. y = \log \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$2. y = \log x, \quad \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$$3. y = x^2, \quad a \leq x \leq b$$

$$4. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad a \leq x \leq b \text{ (catenaria)}$$

$$5. y = \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{5a}{3}$$

$$6. y = \left(\frac{4}{3} + x\right)^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$7. y = 2 - 2\sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$8. y = x^{\frac{3}{2}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$9. y = \sqrt{1-x}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$10. y = x + e^x, \quad 0 \leq x \leq \log 2$$

15.4. Calcolare la lunghezza delle curve seguenti, date in forma polare:

$$1. \rho = \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$2. \rho = \varphi^2, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{2} \text{ (spirale quadratica)}$$

$$3. \rho = \varphi^3, \quad 0 \leq \varphi \leq 4 \text{ (spirale cubica)}$$

$$4. \rho = e^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$5. \rho = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ (spirale di Archimede)}$$

15.5. Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

$$1. \int_{\gamma} x ds, \text{ dove } \gamma \text{ è la parabola di equazione } y = x^2, 0 \leq x \leq 2$$

2. $\int_{\gamma} \sqrt{1-y^2} ds$, dove γ è la semicirconferenza $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$
3. $\int_{\gamma} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, con $\gamma = : x = \cos^3 t$, $y = \cos^2 t \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
4. $\int_{\gamma} \frac{ds}{y}$, con $\gamma = : x = t^2$, $y = t^3$, $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{8}{5}$
5. $\int_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2} ds$, con $\gamma = : \rho = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
6. $\int_{\gamma} y^2 ds$, con $\gamma = : y = e^x$, $0 \leq x \leq \log 2$
7. $\int_{\gamma} y ds$, con $\gamma = : x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$
8. $\int_{\gamma} \sqrt{z} ds$, con $\gamma = : x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t^2$, $0 \leq t \leq \pi$
9. $\int_{\gamma} \frac{x}{1+y^2} ds$, con $\gamma = : x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

15.3.* Intermezzo: ruote quadrate

Quando una ruota rotola su una strada pianeggiante, il suo centro (a cui è fissato il veicolo di cui la ruota fa parte) si muove su una retta parallela al terreno. Questo ovviamente dipende dal fatto che le ruote sono circolari, e che ogni punto della circonferenza è equidistante dal centro.

Se invece le ruote sono quadrate, il veicolo sobbalza e il viaggio diventa alquanto scomodo. Le ruote quadrate non sono adatte a una strada pianeggiante, o se si vuole una strada pianeggiante non è adatta a ruote quadrate.

Ma c'è una strada sulla quale un veicolo a ruote quadrate si muove senza sobbalzare? La risposta è positiva, e non è nemmeno tanto difficile da trovare.

Sia $2L$ il lato della ruota, e supponiamo che il profilo cercato sia dato dalla curva di equazione $y = y(x)$. Mettiamo gli assi come in figura, in modo che y sia massima per $x = 0$; la curva risulterà allora simmetrica rispetto all'asse delle y , e incontrerà l'asse delle x nei punti $\pm x_0$.

Quando la ruota è tangente alla curva nel punto B , dopo aver ruotato lungo l'arco AB di lunghezza s , risulta $FB = s$, e quindi $BG = L - s$. Se si indica con α l'angolo che la tangente in B forma con l'asse delle x , l'altezza del centro O della ruota è

$$h = CB + BD + OH = y + (L - s)\sin \alpha + L \cos \alpha.$$

D'altra parte si ha $\tan \alpha = y'$, e quindi

$$\sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad ; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

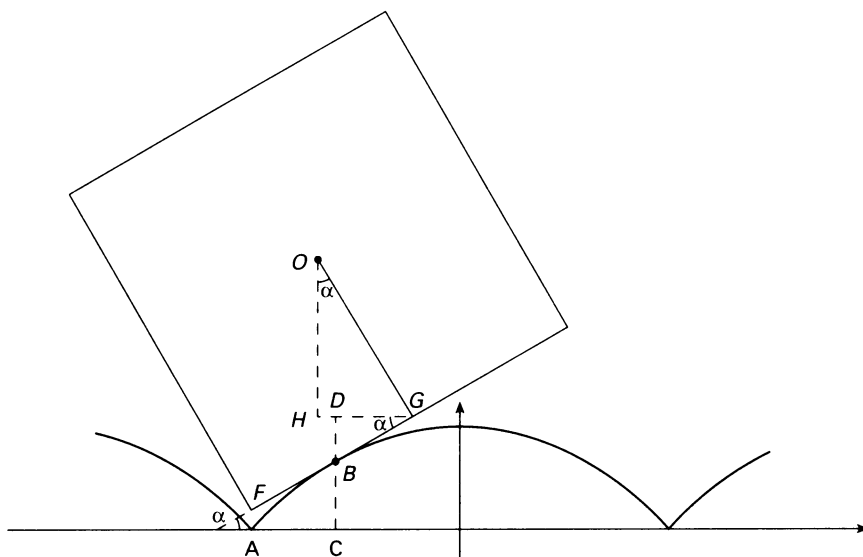


Figura 15.4

per cui

$$h = y + (L - s) \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + \frac{L}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

Noi vogliamo che h sia costante, cioè che $h' \equiv 0$. Derivando l'equazione precedente e ricordando la [15.14], avremo

$$h' = y''(1 + y'^2)^{-\frac{3}{2}}[(L - s) - Ly'] = 0$$

e quindi

$$y' = 1 - \frac{s}{L}.$$

Derivando ancora rispetto a x , e utilizzando di nuovo la [15.14] otteniamo l'equazione differenziale

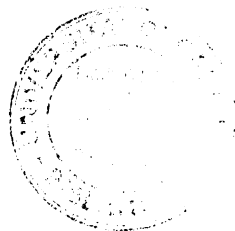
$$y'' = -\frac{1}{L} \sqrt{1 + y'^2},$$

ovvero, ponendo $u = y'$,

$$u' = -\frac{1}{L} \sqrt{1 + u^2}.$$

Quest'ultima è un'equazione a variabili separabili, e integrata dà

$$\log(u + \sqrt{1 + u^2}) = a - \frac{x}{L}.$$



La costante a si determina osservando che $u(0) = y'(0) = 0$; si ha allora $a = 0$, e quindi

$$\log(u + \sqrt{1 + u^2}) = -\frac{x}{L},$$

ossia

$$u = y' = \frac{e^{\frac{x}{L}} - e^{-\frac{x}{L}}}{2} = -\sinh \frac{x}{L} \quad [15.16]$$

dove abbiamo posto:⁴

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \quad \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

La [15.16] si integra immediatamente, e si ha

$$y(x) = c - L \frac{e^{\frac{x}{L}} + e^{-\frac{x}{L}}}{2} = c - L \cosh \frac{x}{L}.$$

Per determinare la costante c osserviamo che quando $y = 0$ l'angolo α sarà $\pm \frac{\pi}{4}$, e quindi $y'(x) = \tan \alpha = \pm 1$. Questo avverrà nei punti $\pm x_0$, con $\sinh \frac{x_0}{L} = 1$, cioè con

$$x_0 = L \log(1 + \sqrt{2}).$$

In questi punti si ha $\cosh \frac{x_0}{L} = \sqrt{2}$, e quindi $c = L\sqrt{2}$. La soluzione è dunque

$$y(x) = L \left(\sqrt{2} - \cosh \frac{x}{L} \right)$$

per $|x| \leq x_0 = L \log(1 + \sqrt{2})$, mentre per x fuori di questo intervallo è la stessa funzione, prolungata periodicamente.

In conclusione, il profilo della strada è formato da una successione di archi di catenaria, che agli estremi formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$ con l'asse delle ascisse.

Esercizi

15.6. Risolvere lo stesso problema nel caso in cui le ruote siano poligoni regolari di n lati.

15.7. Verificare le seguenti relazioni:

1. $D \cosh x = \sinh x$

4. $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x$

2. $D \sinh x = \cosh x$

5. $2 \sinh x \cosh x = \sinh 2x$

3. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

⁴ Osserviamo che $\sinh t$ è l'inversa della funzione $\log(u + \sqrt{1 + u^2})$.

15.4. Superfici

Considerazioni analoghe a quelle fatte per le curve valgono per le superfici, con i cambiamenti del caso.

Come le curve erano oggetti unidimensionali, cioè applicazioni di un intervallo in $\mathbf{R}^n$, così le superfici sono oggetti bidimensionali, dunque applicazioni di un insieme $K \subset \mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^n$. Per evitare troppe complicazioni, considereremo solo superfici in $\mathbf{R}^3$. Inoltre ci limiteremo alle superfici semplici (cioè che non si intersecano) e connesse (grosso modo, fatte di un solo pezzo).

Definizione 15.4 Si dice *superficie regolare* un'applicazione $\phi(u, v)$ di un insieme $K \subset \mathbf{R}^2$, chiusura di un aperto limitato e connesso, in $\mathbf{R}^3$, con le seguenti proprietà:

1. ϕ è di classe C^1 (cioè ha derivate parziali continue) in K ;
2. La restrizione di ϕ a K° (l'interno di K) è iniettiva;
3. ϕ verifica la condizione [15.17] che vedremo più avanti.

L'immagine $\phi(K)$ è un insieme di $\mathbf{R}^3$, che si chiama *sostegno della superficie*.

Osservazione 15.2 Come abbiamo detto, vogliamo evitare che la superficie sia costituita da due parti staccate, o congiunte da una curva, come in figura.

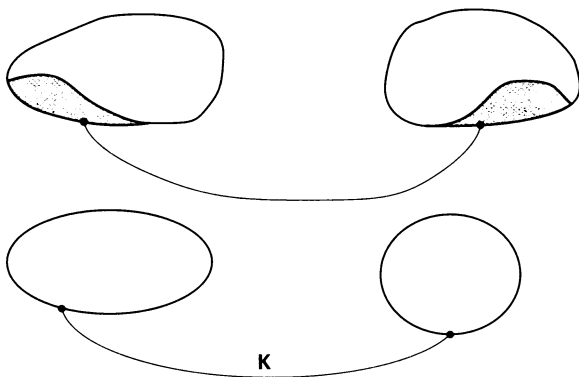


Figura 15.5

Per questo abbiamo supposto che l'insieme di partenza K sia la chiusura del suo interno ($K = \overline{K^\circ}$),⁵ e che l'insieme K° sia *connesso*, cioè non sia l'unione di due aperti disgiunti, ambedue non vuoti. Quest'ultima ipotesi garantisce che la superficie (o meglio, il suo sostegno) non sia composta di due pezzi staccati; la prima che non sia fatta di due parti congiunte da una curva.

⁵ Notiamo che per ogni insieme chiuso K si ha $\overline{K^\circ} \subseteq K$: infatti K è un insieme chiuso che contiene K° , e quindi contiene anche la sua chiusura (vedi teorema 3.7).

Nella definizione di superficie regolare, abbiamo lasciato una proprietà ancora da determinare. Per farlo, ci guiderà l'analogia con le curve. Prima però introduciamo il concetto di prodotto vettoriale, mediante il quale la proprietà in questione trova una formulazione concisa.

Definizione 15.5 Siano $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ e $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ due vettori di $\mathbf{R}^3$. Definiamo *prodotto vettoriale* o *prodotto esterno* il vettore

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = (r_2 s_3 - r_3 s_2, r_3 s_1 - r_1 s_3, r_1 s_2 - r_2 s_1).$$

Si vede subito dalla definizione che $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = -\mathbf{s} \wedge \mathbf{r}$. Ad esempio, se $\mathbf{r} = (1, -1, 0)$ e $\mathbf{s} = (2, 0, 1)$ si ha $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = (-1, -1, 2)$, e $\mathbf{s} \wedge \mathbf{r} = (1, 1, -2)$. In particolare, $\mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = 0$, e più in generale $(\lambda \mathbf{r}) \wedge \mathbf{r} = \lambda \mathbf{r} \wedge \mathbf{r} = 0$. Così due vettori *paralleli*, cioè uno multiplo dell'altro, hanno prodotto vettoriale uguale a zero.

Viceversa, se il prodotto vettoriale $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$ è zero, i due vettori sono paralleli, o in altre parole esiste un numero λ tale che $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{s}$. Infatti se $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = 0$ si devono annullare tutte e tre le componenti, e dunque in particolare deve essere

$$r_1 s_2 = r_2 s_1 \quad \text{e} \quad r_3 s_1 = r_1 s_3.$$

Dividendo la prima per $s_1 s_2$ e la seconda per $s_1 s_3$, si trova immediatamente che

$$\frac{r_1}{s_1} = \frac{r_2}{s_2} = \frac{r_3}{s_3},$$

detto λ il valore comune delle tre frazioni, si ha allora

$$r_1 = \lambda s_1, \quad r_2 = \lambda s_2, \quad r_3 = \lambda s_3$$

e quindi $\mathbf{r} = \lambda \mathbf{s}$.⁶

Osservazione 15.3 Dalle definizioni di prodotto vettoriale e di prodotto scalare segue facilmente che

$$(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}, \mathbf{t}) = (\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}, \mathbf{r}) = (\mathbf{t} \wedge \mathbf{r}, \mathbf{s})$$

In particolare, si ha

$$(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}, \mathbf{r}) = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$$

$$(\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}, \mathbf{s}) = (\mathbf{s} \wedge \mathbf{s}, \mathbf{r}) = 0$$

e quindi il prodotto vettoriale $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}$ è ortogonale sia a $\mathbf{r}$ che a $\mathbf{s}$. □

Torniamo ora alle superfici. Una delle proprietà delle curve regolari era l'esistenza di una retta tangente; analogamente per le superfici regolari si richiederà quella del piano tangente. Per questo, consideriamo un punto $\mathbf{w}_0 = (u_0, v_0)$ interno a K , e sia $\mathbf{w}(t)$, $a \leq t \leq b$ una curva regolare passante per $\mathbf{w}_0$, cioè tale che per qualche $t_0 \in (a, b)$ risulti $\mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0$.

⁶ Osserviamo che nella dimostrazione precedente abbiamo supposto che s_1, s_2 e s_3 fossero diverse da zero. I casi in cui una o più componenti si annullano si dovranno trattare separatamente, ma portano allo stesso risultato.

L'applicazione composta $\gamma(t) = \varphi(\mathbf{w}(t)) = \varphi(u(t), v(t))$ è una curva in $\mathbf{R}^3$, che passa per il punto $\mathbf{x}_0 = \gamma(t_0) = \varphi(\mathbf{w}_0)$.

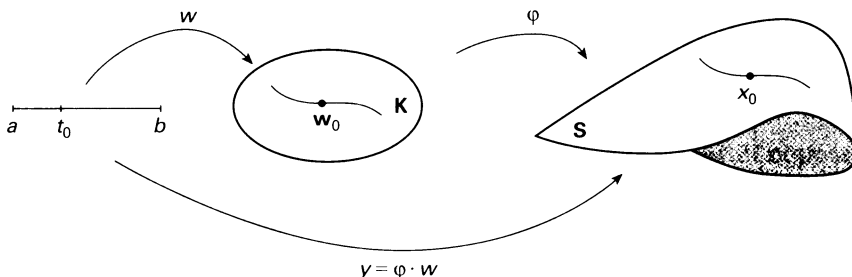


Figura 15.6

Per quanto abbiamo visto, la retta $\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$ è tangente al sostegno della curva γ in $\mathbf{x}_0$. Si ha

$$\gamma'(t_0) = \varphi_u(\mathbf{w}_0)u'(t_0) + \varphi_v(\mathbf{w}_0)v'(t_0)$$

dove come al solito abbiamo posto per brevità

$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \text{e} \quad \varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Di conseguenza, il vettore $\gamma'(t_0)$, che dà la direzione della retta tangente, è combinazione lineare di due vettori, $\mathbf{r} = \varphi_u(\mathbf{w}_0)$ e $\mathbf{s} = \varphi_v(\mathbf{w}_0)$, che dipendono solo dalla superficie φ e dal punto $\mathbf{w}_0$, ma non dalla curva $\mathbf{w}(t)$. Quando facciamo variare questa curva, il vettore $\gamma'(t_0)$ descrive dunque un piano, purché i vettori $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ siano linearmente indipendenti, cioè non siano paralleli. Questo significa che si deve avere

$$\varphi_u(\mathbf{w}_0) \wedge \varphi_v(\mathbf{w}_0) \neq 0. \quad [15.17]$$

Se quest'ultima condizione è soddisfatta in ogni punto $\mathbf{w}_0$ interno a K , la superficie φ si dirà regolare.

Esempio 15.9 La superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \sin u \sin v \\ z = \cos u \end{cases}$$

con $0 \leq u \leq \pi$ e $0 \leq v \leq 2\pi$, è la sfera di raggio 1 espressa in coordinate polari (vedi cap. 12 § 7). Si ha:

$$\varphi_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)$$

$$\varphi_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$

e dunque

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Nei punti interni di $K = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ si ha allora

$$||\varphi_u \wedge \varphi_v|| = |\sin u| = \sin u > 0$$

e dunque si tratta di una superficie regolare. □

Esempio 15.10 (Grafici di funzioni) Se $f(x, y)$ è una funzione di due variabili di classe C^1 , il suo grafico è una superficie regolare. In questo caso infatti possiamo scegliere come parametri le stesse coordinate x e y . Se allora indichiamo con φ l'applicazione di componenti

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

si ha $\varphi_x = (1, 0, f_x)$, $\varphi_y = (0, 1, f_y)$, e quindi $\varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1)$. Di conseguenza

$$||\varphi_x \wedge \varphi_y|| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} > 0$$

e pertanto φ è una superficie regolare. □

Come abbiamo visto, i vettori φ_u e φ_v sono tangenti alla superficie φ . Ne segue che il vettore $\varphi_u \wedge \varphi_v$, che è ortogonale ad ambedue, è anche ortogonale al piano tangente, e dunque alla superficie φ . Se dividiamo per la sua norma, troviamo il *versore normale* a φ :

$$v = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{||\varphi_u \wedge \varphi_v||}.$$

Esempio 15.11 Troviamo il versore normale alla superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Si ha

$$\varphi_u = (1, 1, 2u), \quad \varphi_v = (1, -1, 2v)$$

e dunque

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (2v + 2u, 2u - 2v, -2).$$

Si ha pertanto

$$v = \frac{2(u + v, u - v, -1)}{\sqrt{4[(u + v)^2 + (u - v)^2 + 1]}} = \frac{(u + v, u - v, -1)}{\sqrt{1 + 2u^2 + 2v^2}} \quad \square$$

Se la superficie è grafico di una funzione $f(x, y)$, scegliendo come parametri x e y si ha (vedi esempio 15.10)

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = (-f_x, -f_y, 1),$$

$$\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2},$$

e quindi

$$\mathbf{v} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}} \quad [15.18]$$

Si noterà che la terza componente di $\mathbf{v}$ è sempre positiva, e quindi il versore normale punta verso l'alto.

Esempio 15.12 Calcoliamo il versore normale al paraboloide di rotazione, di equazione $z = x^2 + y^2$. Risulta $f_x = 2x, f_y = 2y, \|\nabla f\|^2 = 4(x^2 + y^2)$ e quindi

$$\mathbf{v} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}. \quad \square$$

Esercizi

15.8. Trovare il versore normale alle seguenti superfici:

1. $z = xy$
2. $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2, z = uv \quad (u, v) \neq (0, 0)$

15.5. Area di una superficie

Analogamente a quanto si è fatto per le curve, si può definire l'area di una superficie.

Definizione 15.6 Se $\varphi: K \rightarrow \mathbf{R}^3$ è una superficie regolare, definiamo area di φ il numero

$$A(\varphi) = \int_K \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv. \quad [15.19]$$

Osservazione 15.4 Non tenteremo di giustificare questa definizione come abbiamo fatto per le curve, anche perché in questo caso le cose sono notevolmente più delicate. Osserveremo solo che se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ sono due vettori di $\mathbf{R}^3$, il loro prodotto vettoriale è un vettore la cui lunghezza $\|\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}\|$ dà l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$.

Ad esempio, se $\mathbf{r} = (a \cos \psi, a \sin \psi, 0)$ e $\mathbf{s} = (b \cos \varphi, b \sin \varphi, 0)$ (sono ambedue vettori sul piano xy), il parallelogramma che essi formano ha base b e altezza $h = a |\sin(\psi - \varphi)|$, e quindi la sua area è $ab |\sin(\psi - \varphi)|$.

D'altra parte si ha $\mathbf{r} \wedge \mathbf{s} = (0, 0, ab \sin(\psi - \varphi))$, e dunque $\|\mathbf{r} \wedge \mathbf{s}\| = ab |\sin(\psi - \varphi)|$.

Se ora (u, v) è un punto di K , e $\mathbf{x} = \varphi(u, v)$, al quadratino infinitesimo di lati du e dv in K corrisponderà un parallelogrammo infinitesimo di lati $\varphi_u du$ e $\varphi_v dv$ sul piano tangente alla superficie nel punto $\mathbf{x}$. L'area di questo parallelogrammo infinitesimo, che può essere assimilato a una porzione infinitesima della superficie, vale $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv$; il suo integrale dà l'area della superficie φ . $\square$

Esempio 15.13 Calcoliamo l'area della sfera di raggio 1. Come abbiamo visto nell'esempio 15.9, si ha

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sin u$$

e quindi l'area della sfera sarà

$$\int_0^\pi \sin u du \int_0^{2\pi} dv = 2\pi \int_0^\pi \sin u du = 4\pi. \quad \square$$

Esempio 15.14 (Area dei grafici) Se la superficie è data come grafico della funzione $z = f(x, y)$, si ha dall'esempio 15.10:

$$\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2},$$

Di conseguenza, se le coordinate (x, y) variano nell'insieme $E \subset \mathbf{R}^2$, l'area della superficie sarà data dall'integrale

$$\int_E \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dx dy.$$

Ad esempio l'area della porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$ che si proietta sul cerchio C , di equazione $x^2 + y^2 \leq 1$ è data dall'integrale

$$\int_C \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Il calcolo è semplice se si passa in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy &= \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} d\rho = \\ &= \pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4s} ds = \frac{\pi}{6} \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Esempio 15.15 (Area delle superfici di rotazione) Nel piano xz consideriamo la curva di equazione $x = f(z)$, $a \leq z \leq b$, dove $f(z)$ è una funzione positiva di classe C^1 , e indichiamo con Σ la superficie ottenuta ruotando questa curva attorno all'asse z .

L'equazione di Σ assume una forma particolarmente semplice in coordinate cilindriche; si ha infatti

$$\begin{cases} x = f(z) \cos \vartheta \\ y = f(z) \sin \vartheta \\ z = z \end{cases}$$

da cui

$$\varphi_z = (f'(z) \cos \vartheta, f'(z) \sin \vartheta, 1)$$

$$\varphi_\vartheta = (-f(z) \sin \vartheta, f(z) \cos \vartheta, 0)$$

e quindi

$$\varphi_z \wedge \varphi_\vartheta = (-f(z) \cos \vartheta, -f(z) \sin \vartheta, f(z)f'(z))$$

Si ha allora

$$\|\varphi_z \wedge \varphi_\vartheta\| = f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2}$$

e l'area di Σ è

$$A(\Sigma) = \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} dz \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi \int_a^b f(z) \sqrt{1 + f'(z)^2} dz.$$

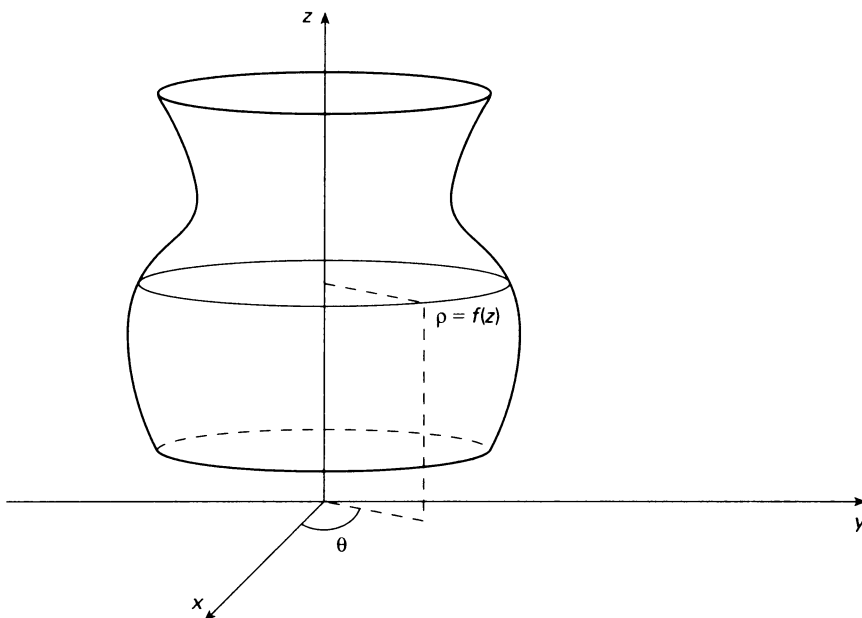


Figura 15.7

Ad esempio il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$, si può ottenere ruotando attorno all'asse z la curva di equazione $x = \sqrt{z}$. Se facciamo variare z tra 0 e 1, otteniamo una porzione del paraboloide, la cui area è

$$2\pi \int_0^1 \sqrt{z} \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} dz = \pi \int_0^1 \sqrt{4z + 1} dz = \frac{\pi \left(5^{\frac{3}{2}} - 1 \right)}{6}.$$

Ritroviamo così il risultato dell'esempio precedente.

□

Come per le curve, si può definire l'integrale di una funzione $f(x, y, z)$ sulla superficie φ :

$$\int_{\varphi} f d\sigma = \int_K f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv.$$

In particolare, se $f \equiv 1$ si ritrova l'area della superficie φ :

$$A(\varphi) = \int_K d\sigma.$$

Esercizi

15.9. Calcolare l'area delle seguenti porzioni di superficie:

$$1. \begin{cases} x = uv \\ y = u + v \\ z = u - v, \end{cases}$$

in cui K è la parte del cerchio unitario contenuta nel primo quadrante.

$$2. \begin{cases} x = u^2 \\ y = v^2 \\ z = \sqrt{2}uv, \end{cases}$$

nel cerchio K di raggio 2.

$$3. \begin{cases} x = \log u \\ y = \log v \\ z = u, \end{cases}$$

$$\text{con } 1 \leq v \leq e \quad \text{e} \quad \frac{3}{4} \leq u \leq \frac{4}{3}.$$

$$4. \begin{cases} x = 2b \cos u \\ y = b \sin u \\ z = v, \end{cases}$$

con $0 \leq z \leq x$.

15.10. Si calcolino le aree delle seguenti superfici cartesiane:

$$1. z = x + y^2, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$2. z = \sqrt{2xy}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$3. z = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

$$4. z = y + \log x, \quad 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$$

$$5. z = \arctg \frac{x+y}{x-y}, \quad x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \leq 0$$

15.11. Si calcoli l'area della frontiera degli insiemi seguenti:

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}\}.$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}, y \geq 0\}.$
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 1 + z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{1 - z}\}.$
4. L'intersezione di due palle di $\mathbf{R}^3$ di raggio 2, con i centri a distanza 3.

15.12. Si calcoli l'area delle seguenti superfici di rotazione:

1. $f(z) = \log(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad 1 \leq z \leq 2$
2. $f(z) = 2\sqrt{1 - z^2}, \quad 0 \leq z \leq 1$ (ellissoide)
3. $f(z) = \sin z, \quad 0 \leq z \leq \pi$
4. $f(z) = \frac{z^2}{2}, \quad 0 \leq z \leq \frac{3}{4}$
5. $f(z) = 1 + \sqrt{1 - z^2}, \quad -1 \leq z \leq 1$

15.13. Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la cicloide, di equazione $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi)$, attorno all'asse x .

15.14. *Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la cicloide attorno al suo asse, cioè attorno alla retta $x = \pi$.

15.15. Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare la semicirconferenza $x^2 + z^2 = 2x, x \leq 1$ attorno all'asse z .

15.16. Si calcoli l'area della superficie ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la porzione della circonferenza di equazione $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ ($a \leq r$), contenuta nel semipiano $x \geq 0$.

15.17. Calcolare i seguenti integrali superficiali:

1. $\int_{\Sigma} z d\sigma$, dove Σ è il grafico della funzione $z = xy$ sull'insieme $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$
2. $\int_{\Sigma} y^2 d\sigma$, dove Σ è il grafico della funzione $2z = x^2 + y^2$ sull'ellisse $x^2 + 4y^2 \leq 4$.
3. $\int_{\Sigma} \frac{x}{\sqrt{1 + \sin^2 y}} d\sigma$, dove Σ è la porzione di superficie di equazioni $x = u \cos v, y = v, z = \cos v, 0 \leq v \leq u, 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$.

15.6. Il teorema delle funzioni implicite

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto curve descritte mediante un'equazione parametrica, o anche come grafici di funzioni. C'è però anche un terzo modo per dare una curva in $\mathbf{R}^2$: mediante un'equazione $F(x, y) = 0$. Ad esempio, la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 può essere descritta, oltre che con le equazioni parametriche $x = \cos t$, $y = \sin t$, per mezzo dell'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Similmente, l'ellisse di centro l'origine e semiassi 1 e $\frac{1}{2}$ ha equazione $x^2 + 4y^2 = 1$.

Questa rappresentazione delle curve è stata introdotta da Descartes (Cartesio), e l'equazione $F(x, y) = 0$ si chiama *equazione cartesiana* della curva. Quest'ultima, o meglio il suo sostegno, sarà l'insieme dei punti (x, y) le cui coordinate verificano l'equazione data, o in altre parole l'insieme Z degli zeri di F :

$$Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : F(x, y) = 0\}.$$

Da un punto di vista locale, questo nuovo modo di concepire le curve non introduce grandi cambiamenti. Nel § 1 abbiamo mostrato come una curva regolare si possa sempre scrivere localmente come grafico di una funzione; vedremo ora che, sotto opportune ipotesi, lo stesso si può fare se la curva è data mediante un'equazione cartesiana. Si ha infatti

Teorema 15.5 (delle funzioni implicite) *Sia $F(x, y)$ una funzione definita in un aperto $A \subset \mathbf{R}^2$, e di classe $C^1(A)$. Sia $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un punto di A , tale che*

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Esistono allora un intorno U di x_0 e un intorno V di y_0 tali che per ogni $x \in U$ esiste uno e un solo $y = f(x) \in V$ per cui risulta $F(x, y) = 0$.

La funzione $f: U \rightarrow V$ così definita è di classe $C^1(U)$, e si ha

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}. \quad [15.20]$$

Indicando con Z l'insieme degli zeri di F , il teorema asserisce che se (x_0, y_0) è un punto di Z in cui la derivata F_y è diversa da zero, allora esiste un rettangolo $R = U \times V$ con centro in (x_0, y_0) tale che l'insieme $Z \cap R$ è grafico di una funzione $y = f(x)$ di classe C^1 , e la cui derivata è data dalla [15.20].

Dimostrazione Supponiamo ad esempio che sia $F_y(x_0, y_0) > 0$. Poiché F_y è continua, esisterà un rettangolo chiuso $W \times V$ con centro in (x_0, y_0) nel quale la derivata F_y si mantiene positiva.

Poniamo $V = (y_0 - h, y_0 + h)$. Per ogni $x \in W$, la funzione $F(x, y)$, considerata come funzione della sola y , ha derivata positiva, e dunque è strettamente crescente. In particolare, è strettamente crescente la funzione $F(x_0, y)$, e poiché $F(x_0, y_0) = 0$, si avrà

$$F(x_0, y_0 + h) > 0 \quad \text{e} \quad F(x_0, y_0 - h) < 0. \quad [15.21]$$

e quindi la funzione $f(x)$ è continua. Quando x tende a x_1 , $f(x)$ tende allora a $f(x_1)$, e dunque $\xi \rightarrow x_1$ e $\eta \rightarrow f(x_1)$. Per la continuità delle derivate di F avremo allora

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = - \frac{F_x(x_1, f(x_1))}{F_y(x_1, f(x_1))}$$

e la [15.20] è dimostrata. □

Il vettore velocità, che come si è detto è tangente alla curva, è dato da

$$\mathbf{v} = (1, f'(x)) = \left(1, - \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \right).$$

Si vede facilmente che questo vettore è ortogonale al gradiente di F :

$$(\nabla F(x, f(x)), v) = F_x \cdot 1 - F_y \frac{F_x}{F_y} = 0;$$

di conseguenza il vettore ∇F è ortogonale alla curva.

Osservazione 15.5 Se invece in un intorno del punto (x_0, y_0) è diversa da zero la derivata $\frac{\partial F}{\partial x}$, l'insieme Z sarà grafico di una funzione $x = g(y)$. Si ha inoltre l'analoga della [15.20]:

$$g'(y) = - \frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)}.$$

Potremo così concludere che se risulta

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla F(x_0, y_0) \neq 0$$

allora esiste un rettangolo R centrato in (x_0, y_0) tale che $Z \cap R$ è grafico di una funzione di classe C^1 . Gli eventuali punti singolari di Z saranno pertanto da cercare tra i punti (x, y) in cui si ha

$$F(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla F(x, y) = 0 \quad \square$$

Un risultato analogo vale per le superfici in $\mathbf{R}^3$. Se $F(x, y, z)$ è una funzione di classe C^1 e in un punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ risulta

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{e} \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

allora in un intorno del punto $\mathbf{x}_0$ l'insieme degli zeri di F è grafico di una funzione $z = f(x, y)$, e si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = - \frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = - \frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}. \quad [15.23]$$

La dimostrazione, del tutto analoga a quella del teorema precedente, viene lasciata per esercizio.

Anche in questo caso, il gradiente $\nabla F(x, y, f(x, y))$ è ortogonale alla superficie.

Il teorema delle funzioni implicite (ad esempio in $\mathbf{R}^3$) si può anche esprimere dicendo che se le variabili (x, y, z) sono legate dall'equazione $F(x, y, z) = 0$, allora sotto opportune ipotesi una di esse, ad esempio la z , si può scrivere localmente in funzione delle altre due. Pertanto la relazione $F(x, y, z) = 0$ determina una delle variabili come funzione *implicita* delle altre due. Di qui il nome del teorema, che in Italia viene a volte attribuito al matematico pisano Ulisse Dini.

Supponiamo ora che le variabili (x, y, z) siano legate da due relazioni:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

È naturale aspettarsi in questo caso che due delle variabili si possano esprimere per mezzo della terza; ad esempio

$$y = \varphi(x) \quad \text{e} \quad z = \psi(x).$$

Per vedere sotto quali condizioni ciò è effettivamente possibile, supponiamo che $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sia un punto tale che

$$F(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \text{e} \quad G(\mathbf{x}_0) = 0.$$

Supponiamo inoltre che $F_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$. In questo caso, in un intorno W di $\mathbf{x}_0$, l'insieme Z_F degli zeri della F sarà grafico di una funzione $z = f(x, y)$, e saranno verificate le [15.23].

Un punto di $Z_F \cap W$ apparterrà a Z_G (l'insieme degli zeri di G) se e solo se $G(x, y, f(x, y)) = 0$. La funzione

$$\Phi(x, y) = G(x, y, f(x, y))$$

è definita in un intorno di (x_0, y_0) , e risulta $\Phi(x_0, y_0) = 0$.

Possiamo applicare a $\Phi(x, y)$ il teorema delle funzioni implicite. Se la derivata

$$\Phi_y = G_y + G_z f_y = G_y - G_z \frac{F_y}{F_z}$$

è diversa da zero nel punto (x_0, y_0) , la y si può scrivere localmente come funzione di x : $y = \varphi(x)$. In corrispondenza si ha

$$z = f(x, y) = f(x, \varphi(x)) = \psi(x).$$

In conclusione, se sono verificate le ipotesi

$$F(\mathbf{x}_0) = 0$$

$$F_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

$$F_z(\mathbf{x}_0) G_y(\mathbf{x}_0) - F_y(\mathbf{x}_0) G_z(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

è possibile esprimere localmente y e z in funzione di x .

Osserviamo che la seconda ipotesi è superflua. Infatti se la terza relazione è verificata, non può essere contemporaneamente $F_z(\mathbf{x}_0) = 0$ e $G_z(\mathbf{x}_0) = 0$. Se allora F_z è uguale a zero, e quindi G_z è diversa da zero, si procederà allo stesso modo, ricavando la

$z = g(x, y)$ mediante la funzione G e poi inserendo questa funzione nell'equazione $F(x, y, z) = 0$.

Se poi ricordiamo che $F_y G_z - F_z G_y$ è la prima componente del prodotto vettoriale $\nabla F(\mathbf{x}_0) \wedge \nabla G(\mathbf{x}_0)$, potremo dire che se $\nabla F(\mathbf{x}_0) \wedge \nabla G(\mathbf{x}_0)$ ha la prima componente non nulla, le variabili y e z si possono esprimere localmente in funzione di x . Analogamente, se la seconda componente di $\nabla F(\mathbf{x}_0) \wedge \nabla G(\mathbf{x}_0)$ è diversa da zero, si potranno esprimere localmente x e z come funzioni di y ; se poi è diversa da zero la terza componente, x e y si scriveranno localmente in funzione di z . In conclusione, se risulta

$$\nabla F(\mathbf{x}_0) \wedge \nabla G(\mathbf{x}_0) \neq 0 \quad [15.24]$$

due delle variabili si potranno esprimere localmente in funzione della terza.

La relazione [15.24] esprime il fatto che i due vettori $\nabla F(\mathbf{x}_0)$ e $\nabla G(\mathbf{x}_0)$ non hanno la stessa direzione. Essa implica in primo luogo che nessuno dei due vettori è nullo, e quindi le due equazioni $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ individuano in un intorno di $\mathbf{x}_0$ due superfici regolari, che passano per il punto $\mathbf{x}_0$. In secondo luogo, ricordando che $\nabla F(\mathbf{x}_0)$ e $\nabla G(\mathbf{x}_0)$ sono perpendicolari alle superfici nel punto $\mathbf{x}_0$, la [15.24] dice che le perpendicolari alle due superfici hanno direzioni diverse, ossia che le superfici $F = 0$ e $G = 0$ non sono tangenti. Possiamo allora dire che se due superfici regolari passano per un punto, e non sono tangenti, allora in un intorno del punto la loro intersezione è una curva regolare.

15.7. Massimi e minimi vincolati

Possiamo ora riprendere il problema di determinare il massimo e il minimo di una funzione di più variabili, che avevamo affrontato nel capitolo 11 relativamente ai massimi e minimi relativi interni. Lì avevamo dimostrato che se $\mathbf{x}_0$ è un punto di massimo o di minimo relativo interno per la funzione f , e se quest'ultima è derivabile in $\mathbf{x}_0$, allora quest'ultimo è necessariamente un punto stazionario: $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$.

Di conseguenza avevamo osservato che i punti di massimo o di minimo della funzione f in un insieme A possono cadere

1. nei punti interni dove f non è derivabile,
2. nei punti stazionari,
3. sulla frontiera ∂A di A .

Per condurre a termine la ricerca dei massimi e dei minimi resta da studiare il comportamento della funzione f sulla frontiera di A . Più in generale, affronteremo il problema dei massimi e minimi *vincolati* in $\mathbf{R}^2$ e in $\mathbf{R}^3$.

Esempio 15.16 Proviamo a calcolare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x$$

nel rettangolo

$$R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}.$$

Calcoliamo in primo luogo i punti stazionari della funzione f . Si hanno le equazioni

$$f_x = 2x - 4y + 2 = 0, \quad f_y = 4y - 4x = 0.$$

Dalla seconda relazione si ricava subito $x = y$, che introdotto nella prima dà $-2x + 2 = 0$, e quindi il solo punto stazionario è $(1, 1)$, che è interno a R . Si ha

$$f(1, 1) = 1.$$

Siccome la funzione f è sempre derivabile, resta solo da studiarla sulla frontiera.

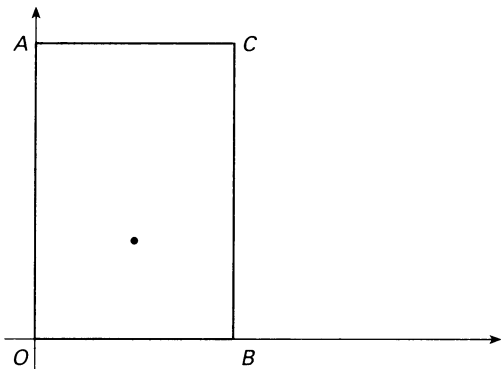


Figura 15.9

Sul lato OA si ha $x = 0$, $0 \leq y \leq 3$, e $f(0, y) = 2y^2$. La derivata $4y$ di quest'ultima si annulla solo per $y = 0$, che è un estremo dell'intervallo.

Analogamente su BC si ha $x = 2$, $0 \leq y \leq 3$, e $f(2, y) = 2y^2 - 8y + 8$. La derivata di questa funzione è $4y - 8$, che si annulla per $y = 2$, interno all'intervallo $[0, 3]$. Risulta

$$f(2, 2) = 0.$$

Veniamo ora ai lati AC e OB . Su OB si ha $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$, e $f(x, 0) = x^2 + 2x$, la cui derivata $2x + 2$ si annulla per $x = -1$, esterno a $[0, 2]$. Su AC si ha $y = 3$, $0 \leq x \leq 2$, e $f(x, 3) = x^2 - 10x + 18$. La sua derivata è $2x - 10$, che si annulla per $x = 5$, anch'esso esterno a $[0, 2]$.

Infine, restano da calcolare i valori di f sui vertici del rettangolo. Si ha

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 3) = 18, \quad f(2, 3) = 2, \quad f(2, 0) = 8$$

Confrontando tutti i valori trovati, possiamo concludere che il massimo della funzione è 18, assunto nel vertice $(0, 3)$ del rettangolo, mentre il minimo è 0, assunto nei punti $(2, 2)$ e $(0, 0)$. $\square$

Nell'esempio precedente abbiamo approfittato del fatto che l'insieme in cui volevamo trovare il massimo era un rettangolo, e quindi abbiamo potuto calcolare esplicitamente la funzione f sui suoi lati. In generale, le cose sono un po' più complicate.

Supponiamo ad esempio che la frontiera del nostro insieme A sia il sostegno di una curva regolare a tratti, ossia che sia composta di un numero finito di curve regolari. Riservandoci di considerare a parte gli eventuali punti singolari di ∂A (i vertici del rettangolo nell'esempio precedente) possiamo limitarci al sostegno di una curva regolare.

Sia dunque $\mathbf{x} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ una curva regolare, e sia G il suo sostegno. Consideriamo una funzione $f(x, y)$ definita in un aperto che contiene G , e poniamoci il problema di determinare i punti di massimo e di minimo relativo della restrizione di f a G .

Dato che quando t varia tra a e b il punto $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ descrive il sostegno G , il nostro problema è equivalente a trovare i punti di massimo e di minimo relativi in $[a, b]$ della funzione

$$F(t) = f(x(t), y(t)).$$

A loro volta, questi si troveranno tra i punti in cui la derivata F' si annulla. Ricordando quanto abbiamo visto nel capitolo 11, § 4, si dovrà avere

$$(\nabla f(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t)) = 0 \quad [15.25]$$

cosicché potremo concludere che

Teorema 15.6 *Affinché la restrizione della funzione $f(\mathbf{x})$ al sostegno G della curva $\mathbf{x}(t)$ abbia un massimo o un minimo relativo in un punto $\mathbf{x}_0$ di G , è necessario che il gradiente della funzione in quel punto sia ortogonale alla curva.*

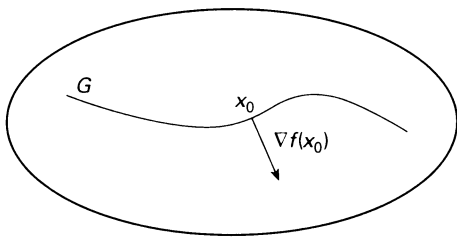


Figura 15.10

Un punto del vincolo G nel quale il gradiente della funzione f sia ortogonale a G si chiama *punto stazionario vincolato* di f . Il teorema precedente stabilisce che i punti di massimo e di minimo relativo vincolato sono punti stazionari vincolati.

Esempio 15.17 Consideriamo la funzione $f(x, y) = x + y$ ristretta alla circonferenza di centro nell'origine e raggio 1.

La circonferenza in questione è il sostegno della curva di equazioni

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Si ha $F(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin t$, e quindi

$$F'(t) = -\sin t + \cos t$$

che si annulla per $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5\pi}{4}$.

Verifichiamo che questi due punti sono punti stazionari vincolati della funzione f . Si ha $\nabla f(x, y) = (1, 1)$, $\mathbf{x}'(t) = (-\sin t, \cos t)$, e quindi

$$(\nabla f(-\sin t, \cos t)) = -\sin t + \cos t$$

che si annulla nei punti $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. $\square$

Lo stesso risultato vale se f è una funzione di tre variabili e G è il sostegno di una curva in $\mathbf{R}^3$, o più in generale se f è una funzione di n variabili e G è il sostegno di una curva in $\mathbf{R}^n$.

Vediamo ora cosa succede se G è il sostegno di una superficie ϕ , di equazioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$. Anche in questo caso, si tratterà di trovare i massimi e i minimi relativi della funzione composta

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Se la funzione F ha un punto di massimo o di minimo relativo *interno*, il suo gradiente si deve annullare, e cioè deve essere

$$\frac{\partial F}{\partial u} = f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u = (\nabla f, \phi_u) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial v} = f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v = (\nabla f, \phi_v) = 0.$$

Se ricordiamo che i vettori ϕ_u e ϕ_v determinano il piano tangente alla superficie, possiamo concludere anche in questo caso che in un punto di massimo o di minimo relativo interno della restrizione della funzione f al sostegno G di una superficie regolare, il gradiente di f è perpendicolare alla superficie; in altre parole, i punti di massimo o di minimo relativo vincolato, interni alla superficie, sono punti stazionari vincolati.

Possiamo ora riassumere la discussione precedente. Con il termine generico di *vincolo* intendiamo il sostegno G di una superficie di $\mathbf{R}^3$, o di una curva in $\mathbf{R}^2$ o in $\mathbf{R}^3$. Diremo inoltre che la funzione f ha un massimo o un minimo relativo vincolato in un punto $\mathbf{x}_0$ di G se la sua restrizione a G ha un massimo o un minimo relativo in $\mathbf{x}_0$. Abbiamo allora

Teorema 15.7 *Sia G un vincolo, e sia f una funzione di classe C^1 in un aperto contenente G . Se f ha un punto di massimo o di minimo relativo vincolato in un punto $\mathbf{x}_0$ interno a G , allora $\mathbf{x}_0$ è un punto stazionario vincolato, cioè il gradiente di f in $\mathbf{x}_0$ è ortogonale a G .*

Il teorema precedente ha una valenza più teorica che strumentale. Nella pratica infatti la ricerca dei punti di massimo e di minimo vincolati (ad esempio al sostegno G di una curva) si effettua calcolando la funzione composta

$$F(t) = f(\mathbf{x}(t))$$

e cercando i massimi e minimi relativi di questa funzione. Lo stesso vale per le superfici.

Quando però il vincolo è dato non mediante le sue equazioni parametriche, ma in forma cartesiana, il teorema 15.7 si può riscrivere in una forma adatta alle applicazioni.

Per fissare le idee, supponiamo di voler trovare i punti di massimo o di minimo della funzione di due variabili $f(x, y)$ sulla curva di equazione cartesiana $g(x, y) = 0$. Il teorema precedente ci dice che il gradiente di f è ortogonale alla curva. Poiché, come abbiamo visto, anche il vettore ∇g è ortogonale alla curva, in un punto (x, y) di massimo o di minimo relativo vincolato ∇f sarà proporzionale a ∇g , e quindi ci sarà un numero reale λ tale che

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0.$$

Dato poi che (x, y) deve stare sulla curva, si deve avere $g(x, y) = 0$, cosicché in conclusione i punti di massimo o di minimo relativo vincolato dovranno essere ricercati tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \quad [15.26]$$

un sistema di tre equazioni nelle tre incognite x, y e λ .

Se poniamo $H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e osserviamo che $H_\lambda(x, y, \lambda) = g(x, y)$, abbiamo il seguente

Teorema 15.8 (dei moltiplicatori di Lagrange) *Supponiamo che il vincolo G sia dato come insieme degli zeri di una funzione $g(x, y)$ di classe C^1 , e sia $f(x, y)$ una funzione di classe C^1 in un aperto contenente G . I punti di massimo e minimo relativo vincolati di f interni a G sono soluzioni del sistema [15.26], ossia sono punti stazionari liberi della funzione $H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.*

Lo stesso risultato vale per i massimi e i minimi relativi di una funzione $f(x, y, z)$, quando il vincolo è una superficie di equazione $g(x, y, z) = 0$. In questo caso si ha un sistema di quattro equazioni

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) + \lambda g_x(x, y, z) = 0 \\ f_y(x, y, z) + \lambda g_y(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) + \lambda g_z(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

nelle quattro incognite x, y, z e λ . Se poi si cercano i massimi e i minimi vincolati a una curva di equazioni cartesiane $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, si ha il sistema di cinque equazioni

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) + \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) = 0 \\ f_y(x, y, z) + \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) = 0 \\ f_z(x, y, z) + \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

nelle cinque incognite x, y, z, λ e μ .

Esempio 15.18 Una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo senza coperchio ha una superficie di area 12. Trovare le lunghezze degli spigoli in modo che il suo volume sia massimo.

Siano x e y i lati della base, e z l'altezza. Si tratta di massimizzare la funzione

$$f(x, y, z) = xyz$$

sulla superficie di equazione

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$

e con le condizioni $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$.

Il corrispondente sistema di quattro equazioni in quattro incognite è

$$\begin{cases} yz + \lambda(y + 2z) = 0 \\ xz + \lambda(x + 2z) = 0 \\ xy + 2\lambda(x + y) = 0 \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases}$$

Sottraendo le prime due equazioni si ottiene $(x - y)(z + \lambda) = 0$, e quindi o $x = y$ o $\lambda = -z$. Quest'ultima alternativa non è possibile; infatti sostituendola nella prima equazione questa diventa $-2z^2 = 0$, e dunque $z = 0$, in contrasto con la condizione $z > 0$.

Si deve avere allora $x = y$, e quindi le ultime tre equazioni diventano

$$\begin{cases} xz + \lambda x + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + 4\lambda x = 0 \\ x^2 + 4xz = 12 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo $x = -4\lambda$ (la soluzione $x = 0$ deve essere scartata dato che $x > 0$), e introducendo questo valore nelle altre due si ha

$$\begin{cases} 4\lambda(z + \lambda) = 2\lambda z \\ 4\lambda(z - \lambda) = -3 \end{cases}$$

che sommate danno $8\lambda z = 2\lambda z - 3$ e quindi $\lambda z = -\frac{1}{2}$.

Infine, introducendo questo valore nella prima equazione, otteniamo $4\lambda^2 = 1$, e dunque $\lambda = \pm \frac{1}{2}$. La soluzione $\lambda = \frac{1}{2}$ deve essere scartata, perché darebbe $x = -2$; resta dunque $\lambda = -\frac{1}{2}$, da cui $x = y = 2$ e $z = 1$. Queste sono in effetti le lunghezze degli spigoli che danno come massimo volume 4. □

Esercizi

15.18. Si trovino i punti stazionari vincolati delle funzioni che seguono, sui vincoli indicati a fianco.

1. $2x^3 + 3y$; $x^2 + y^2 = 1$
2. $x + y$; $\operatorname{arctg}(x - y) = x$
3. $x^2 - y$; $\log(x^2 + y) = y$

15.19. Si trovi il massimo e il minimo delle funzioni che seguono, sulla circonferenza unitaria $x^2 + y^2 = 1$.

1. $x + 2y$
2. $|x|^\alpha + |y|^\alpha$ ($\alpha > 0$)
3. e^{x+y}
4. $*e^x + e^y$
5. $x^k y^n$, (k e n interi positivi)

15.20. Trovare il massimo e il minimo delle funzioni che seguono, nel quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

1. $x^2 - y^2 + xy$
2. $x + y^2x - x^2y$
3. $2xy - x^2 - y^4$
4. $2x - 3 \log(1 + x + 3y)$

15.21. Trovare il massimo e il minimo delle funzioni che seguono, nel quadrato $|x| + |y| \leq 2$.

1. $(x-1)^2(y+2)$
2. $x^2 + \alpha y^2$
3. $(y+1)e^{xy}$
4. $x^2 + 3xy + y$

15.22. Trovare, se esistono, il massimo e il minimo delle funzioni che seguono, sui vincoli indicati a fianco.

1. $\frac{x}{1+y}$; $y = x^2$
2. $\frac{x+1}{y+1}$; $x = \sqrt{y} + 1$
3. $\frac{x+1}{y+1}$; $y = (x-1)^2$
4. $\frac{x-y}{x^2+y^2}$; $xy = 1, x > 0, y > 0$
5. $x + y + e^{xy}$; $x^2 + y^2 = 1$
6. $y - 2x^3$; $y = 3x^2, x \geq 0$

15.23. Trovare (se esiste) il massimo valore del volume di un parallelepipedo rettangolo, di cui sia assegnata la superficie laterale Σ .

15.24. Trovare (se esiste) il volume massimo di una piramide retta a base quadrata, della quale sia assegnata la superficie laterale Σ .

15.25. Trovare (se esistono) il valore massimo e minimo della somma della superficie laterale e di una base di un cilindro retto, il cui volume sia V .

15.26. Trovare il massimo e il minimo (se esistono) delle funzioni seguenti, nei domini D indicati:

$$1. \quad xy, \quad D = \left\{ (x, y) : 0 \leq y \leq x + \frac{2}{\sqrt[3]{5}}, 3x^5 + 5y^3 \leq 8 \right\}$$

$$2. \quad \sqrt{\arcsin \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2}}, \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \leq -1\}$$

$$3. \quad x^2y, \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 1, xy \leq 1\}$$

$$4. \quad x^4y^2 - 3x, \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 1, xy \leq 1\}$$

$$5. \quad (1 + x^2 + y)e^{x-y}, \quad D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

$$6. \quad (x-1)^2 + (y-1)^2, \quad D = \{(x, y) : x \geq 0, 0 \leq y \leq 4 - 2x\}$$

$$7. \quad 2x^2 - 3y^2 + 2x, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$8. \quad \frac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$9. \quad x^2 - y^2, \quad D = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$10. \quad x^2 + y^2, \quad D = \{(x, y) : |x|^3 + |y|^3 \leq 1\}$$

15.27. Trovare la minima distanza tra la retta $x = -3$ e la parabola $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

15.28. Determinare i massimi e i minimi relativi dell'ordinata y sulle curve di equazione:

$$1. \quad y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x = 0$$

$$3. \quad x^2 + y^4 - y = 0$$

$$2. \quad x^2 + 2y^2 - xy + y = 5$$

15.8. Risposte agli esercizi

15.1.

$$1. \quad x = 1$$

$$4. \quad 3(x-1) = 2(y-1)$$

$$7. \quad 4x - y = 4 - \pi$$

$$2. \quad x = y + 1$$

$$5. \quad 2x = y$$

$$3. \quad y = 1$$

$$6. \quad y + 4x = 4$$

15.2.

1. 8

2. $\frac{1}{4} \{2e\sqrt{1+4e^2} + \log(2e + \sqrt{1+4e^2}) - 2\sqrt{5} - \log(2 + \sqrt{5})\}$

3. $\log(2 + \sqrt{3})$

4. $\frac{\pi}{4}$

5. $\sqrt{2}\pi + 4\sqrt{2} - 8$

6. $\frac{\pi}{2}$

7. $2\log(1 + \sqrt{2})$

8. $\sqrt{10}$

9. $\sqrt{425} + \frac{5}{4}\log(4 + \sqrt{17})$

15.3.

1. $\log(2 + \sqrt{3})$

2. $\frac{5}{12} + \log \frac{3}{2}$

3. $\frac{1}{4} \left\{ 2b\sqrt{1+4b^2} - 2a\sqrt{1+4a^2} + \log \frac{2b + \sqrt{1+4b^2}}{2a + \sqrt{1+4a^2}} \right\}$

4. $\frac{e^b - e^{-b} - e^a + e^{-a}}{2}$

5. $a(2 + \sqrt{3} \log(2 + \sqrt{3}))$

6. $\frac{(5^3 - 4^3)}{27}$

7. $\frac{2}{\sqrt{5}} + \log(2 + \sqrt{5}) - \sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})$

8. $\left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$

9. $\frac{1}{4}\log(\sqrt{5} + 2) + \frac{\sqrt{5}}{2}$

10. $2(1 + \sqrt{2})\log(5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} - 6 - 2\sqrt{10}) + 2(\sqrt{10} - \sqrt{5} + 1)$

15.4.

1. π

2. $\frac{(5^3 - 4^3)}{24}$

3. $\frac{205}{2} - \frac{81}{8}\log 3$

4. $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$

5. $\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\log(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$

15.5.

1. $\frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}} - 1)$

4. $\frac{72}{10} + 6 \log 2$

7. $\frac{32}{3}$

2. 2

5. $\frac{(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}}}{3}$

8. $\frac{(1 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{12}$

3. $\frac{7}{9}$

6. $\frac{5^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}}}{3}$

9. $\frac{\pi}{4}$

15.6. Se $2L$ è il lato del poligono regolare di n lati, si ha

$$y = \frac{L}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \cosh \frac{x \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{L} \right) \quad \text{e} \quad x_0 = L \cotg \frac{\pi}{n} \log \frac{1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

15.7.

1. $D \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. $D \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

3. $\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + e^{-2x} + 2)^2}{4} - \frac{(e^{2x} + e^{-2x} - 2)^2}{4} = 1$

4. $\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x} + e^{-2x} + 2)^2}{4} + \frac{(e^{2x} + e^{-2x} - 2)^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$

5. $\frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

15.8.

1. $V = \frac{(-y, -x, 1)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

2. $v = \frac{(x, -y, -2z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}$

15.9.

1. $\frac{\pi}{12}(6^{\frac{3}{2}} - 8)$

2. $16\sqrt{2}\pi$

3. $\frac{5}{12} + \log \frac{3}{2}$

4. $2b^2 \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$

15.10.

1. $\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \log(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

4. $\frac{9 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \log \frac{3\sqrt{3}}{8 - \sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}$

2. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

5. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \log(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

3. $\frac{\pi(5^{\frac{3}{2}} - 1)}{6}$

15.11.

1. $\pi\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)$
2. $\frac{\pi}{12}(5^{\frac{3}{2}}-1)+\pi(2-\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$
3. $\pi\sqrt{2}+\frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}}-1)$
4. 4π

15.12.

1. $2\pi(\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})-2)$
2. $2\pi\left(1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})\right)$
3. $2\pi(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}))$
4. $\frac{1}{32}\left(\frac{4}{3}+\frac{31}{160}\right)$
5. $2\pi(\pi+2)$

15.13. $\frac{64\pi a^2}{3}$

15.14. $8\pi a^2\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$

15.15. $2\pi(\pi-2).$

15.16. $4\pi r\left(a\arccos-\frac{a}{r}+\sqrt{r^2-a^2}\right).$

15.17.

1. $\frac{1+\sqrt{2}}{20}$
2. $\frac{\pi}{32}\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}+\frac{1}{15}\right)$
3. $\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{16}$

15.18.

1. $(0, \pm 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
2. $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -1\right), \left(-\frac{\pi}{4}, 1-\frac{\pi}{4}\right).$
3. $(\pm\sqrt{2}-\log 2, \log 2).$

15.19.

1. $M=\sqrt{5}, m=-\sqrt{5}$
2. $M=2^{1-\frac{\alpha}{2}}, m=1$ se $\alpha < 2$, $M=1, m=2^{1-\frac{\alpha}{2}}$ se $\alpha \geq 2$

3. $M = e^{\sqrt[3]{2}}; m = e^{-\sqrt[3]{2}}$

4. $M = 2e^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}; m = 2e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

5. $M = \left(\frac{k}{k+n}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{k+n}\right)^{\frac{n}{2}}; m = -\left(\frac{k}{k+n}\right)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{k+n}\right)^{\frac{n}{2}}$ se almeno uno dei due numeri k e n è dispari, $m = 0$ se k e n sono ambedue pari.

15.20.

1. $M = \frac{5}{4}, m = -1$

3. $M = \frac{1}{4}, m = -1$

2. $M = 1, m = 0$

4. $M = 0, m = -3 \log 4$

15.21.

1. $M = 18, m = 0$

2. $M = \max(4\alpha, 4), m = 0$ se $\alpha \geq 0$; $M = 4, m = 4\alpha$ se $\alpha < 0$

3. $M = \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) e^{\sqrt[6]{6} - \frac{3}{2}}, m = -\sqrt{\frac{e}{2}}$

4. $M = \frac{41}{8}, m = -\frac{57}{16}$

15.22.

1. $M = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$

2. $M = \frac{\sqrt{5}}{10 - 4\sqrt{5}}; \text{il minimo non esiste (inf} = 0\text{)}.$

3. $M = \frac{\sqrt{5}}{10 - 4\sqrt{5}}; m = -\frac{\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}}$

4. $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}; m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$

5. $M = \sqrt{e} + \sqrt{2}; m = \sqrt{e} - \sqrt{2}$

6. $M = 1, \text{il minimo non esiste (inf} = -\infty\text{)}$

15.23. Non esiste (l'estremo superiore è $+\infty$).

15.24. $M = \Sigma^{\frac{3}{2}} 2^{-\frac{1}{2}} 3^{-\frac{7}{4}}$

15.25. $\sup = +\infty, m = 3\pi^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}}$

15.26.

1. $M = 1; m = -\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$
2. $M = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \text{il minimo non esiste (inf} = 0)$
3. $M = 1; m = 0$
4. $M = 0; m = -\frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$
5. $M = e^2; m = 0$
6. $M = 10; m = 0$
7. $M = 4; m = -3 - \frac{1}{5}$
8. $M = \sqrt{3}; m = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
9. $M = \frac{1}{2}; m = -1$
10. $M = a^{\frac{1}{3}}(1 + 4a), \left(a = \frac{\sqrt{33} - 1}{16} = \frac{2}{\sqrt{33} + 1}\right); m = -1$

15.27. 2**15.28.**

1. $M = 1 + \sqrt{2}; m = 1 - \sqrt{2}$
2. $M = 1; m = -\frac{5}{4}$
3. $M = 1; m = 0$

Capitolo 16

Forme differenziali

16.1. Il lavoro di una forza

Sappiamo dalla fisica che se un corpo si muove da un punto $\mathbf{x}_1$ a un punto $\mathbf{x}_2$ sotto l'azione di una forza costante $\mathbf{F}$, questa compie un lavoro pari al prodotto scalare della forza per lo spostamento:

$$\Lambda = (\mathbf{F}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1).$$

Supponiamo ora che la forza non sia costante, ma cambi a seconda del punto $\mathbf{x}$ al quale è applicata, in altre parole di avere a che fare con un campo di forze $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (vedi cap. 4 § 3), e che il corpo si muova lungo una curva data. Qual'è in questo caso il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$?

Per rispondere a questa domanda, sia $\mathbf{x} = \gamma(t)$, $a \leq t \leq b$, l'equazione parametrica della curva; dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in N parti uguali mediante i punti $t_1 = a$, $t_2, \dots, t_N$, $t_{N+1} = b$, e congiungiamo i punti corrispondenti sulla curva $\mathbf{x}_1 = \gamma(t_1)$, $\mathbf{x}_2 = \gamma(t_2)$, $\dots$, $\mathbf{x}_{N+1} = \gamma(t_{N+1})$ in modo da formare una spezzata. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, quando il numero di punti cresce questa spezzata approssima sempre meglio la curva γ .

Se la forza $\mathbf{F}$ fosse costante in ogni segmento $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ della spezzata, il lavoro compiuto nello spostamento da $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{x}_{i+1}$ sarebbe $(\mathbf{F}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)$, e il lavoro totale

$$\Lambda = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i). \quad [16.1]$$

In realtà, $\mathbf{F}$ non è costante; se però $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ varia con continuità, e se i segmenti $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ sono tutti abbastanza piccoli, la forza $\mathbf{F}$ varierà poco, e la [16.1] darà una buona approssimazione del lavoro effettivamente compiuto, tanto migliore quanto più grande è il numero N degli intervalli. Potremo dunque pensare che il lavoro L compiuto dal campo di forze sia il limite della [16.1] quando $N \rightarrow \infty$.

Per vedere cosa succede, scriviamo la [16.1] per mezzo della rappresentazione parametrica della curva. Si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) &= (\mathbf{F}(\gamma(t_i)), \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)) = \left(\mathbf{F}(\gamma(t_i)), \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right) = \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t_i)), \gamma'(t)) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt + \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt \end{aligned}$$

e quindi sommando

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt + \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt = \\ &= \int_a^b (\mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt + \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt \end{aligned} \quad [16.2]$$

Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è stato supposto continuo; siccome anche $\gamma(t)$ è una funzione continua, la funzione composta $\mathbf{F}(\gamma(t))$ è continua. Dato poi che essa è definita nell'intervallo chiuso $[a, b]$, per il teorema 7.10 $\mathbf{F}(\gamma(t))$ risulta uniformemente continua. Di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|t - s| \leq \delta$ allora $\|\mathbf{F}(\gamma(t)) - \mathbf{F}(\gamma(s))\| < \varepsilon$.

Prendendo il numero N abbastanza grande, potremo fare in modo che tutti gli intervalli $[t_i, t_{i+1}]$ abbiano ampiezza minore di δ . Si ha allora

$$\|\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))\| < \varepsilon$$

per ogni t compreso tra t_i e t_{i+1} , cosicch 

$$\left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt \right| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt \leq \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$$

e quindi in conclusione

$$\left| \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\mathbf{F}(\gamma(t_i)) - \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt \right| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \varepsilon L(\gamma)$$

dove $L(\gamma)$   la lunghezza della curva γ (vedi cap. 15).

Di qui si vede che quando il numero dei lati della spezzata tende all'infinito e la lunghezza dei lati tende a zero, la quantit  Λ tende all'integrale

$$\mathfrak{L} = \int_a^b (\mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t)) dt. \quad [16.3]$$

Questo integrale d  il lavoro richiesto.

Osservazione 16.1 È consuetudine scrivere l'integrale [16.3] nella forma più semplice e più suggestiva:

$$\mathcal{L} = \int_{\gamma} (\mathbf{F}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}) = \int_{\gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz. \quad [16.4]$$

La ragione di questa notazione è la seguente. Supponiamo che il corpo si muova da un punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ a un punto infinitamente vicino $\mathbf{x} + d\mathbf{x} = (x + dx, y + dy, z + dz)$. Siccome in questo spostamento infinitesimo la forza può essere considerata costante, il lavoro relativo è dato dal prodotto scalare di quest'ultima per lo spostamento, e quindi da $(\mathbf{F}(\mathbf{x}), d\mathbf{x})$.

Se poi i punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ stanno sulla curva γ , cioè se $\mathbf{x} = \gamma(t)$ e $\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \gamma(t + dt)$, si ha $d\mathbf{x} = \gamma'(t)dt$, e quindi il lavoro elementare è

$$(\mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t))dt.$$

Sommando tutti questi lavori infinitesimi, ossia integrando tra a e b , si ottiene il lavoro totale [16.3]. □

Esercizi

16.1. Dimostrare che se un corpo percorre una curva γ sotto l'azione di una forza costante $\mathbf{F}$, risulta $\mathcal{L} = (\mathbf{F}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$, dove $\mathbf{x}_1 = \gamma(a)$ e $\mathbf{x}_2 = \gamma(b)$ sono rispettivamente il primo estremo e il secondo estremo della curva γ .

16.2. Calcolare il lavoro del campo di forze $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, x, 0)$ lungo la circonferenza di equazioni $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

16.2. Forme differenziali

Quanto abbiamo visto nella precedente sezione può essere generalizzato a un qualsiasi campo vettoriale in $\mathbf{R}^n$. Cominciamo con una definizione, che generalizza e precisa quella di lavoro di una forza:

Definizione 16.1 Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$, e siano $a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})$ delle funzioni continue in A . Chiamiamo forma differenziale l'espressione

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i.$$

Le funzioni $a_1, a_2, \dots, a_n$ si chiamano *componenti* della forma ω . Infine, se $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ è una curva regolare, definiamo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n (a_i(\gamma(t)), \gamma'_i(t)) dt. \quad [16.5]$$

Osservazione 16.2 L'integrale di una forma differenziale si può definire anche se la curva γ è regolare a tratti. Basterà usare la [16.5] in ogni intervallo in cui γ è regolare, e poi sommare i termini ottenuti. $\square$

Esempio 16.1 Il differenziale di una funzione

$$df(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

è una forma differenziale.

Calcoliamo l'integrale di df su una curva γ . Si ha dalla definizione

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt.$$

Per eseguire il calcolo consideriamo la funzione composta $G(t) = f(\gamma(t))$, e calcoliamo la derivata. Risultato:

$$G'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (\gamma(t)) \gamma'_i(t)$$

e quindi

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \quad [16.6]$$

La formula precedente vale anche se γ è regolare a tratti. Infatti sommando i vari integrali, i termini intermedi si elidono, e resta solo $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$. $\square$

Osservazione 16.3 In due variabili, invece di a_1 e a_2 si scrive di solito $M(x, y)$ e $N(x, y)$, e di conseguenza

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Analogamente, le componenti di una forma ω in $\mathbf{R}^3$ si indicano usualmente con $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ e $Z(x, y, z)$, per cui la forma differenziale relativa diventa

$$\omega = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz. \quad \square$$

Esempio 16.2 Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\gamma} xydx - xdy$$

dove γ è la circonferenza unitaria di centro l'origine.

Le equazioni parametriche di γ sono $x = \cos t$, $y = \sin t$, ($0 \leq t \leq 2\pi$), e dunque

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xydx - xdy &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t (-\sin t) - \cos t \cos t) dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (\sin^2 t \cos t + \cos^2 t) dt = -\pi \end{aligned} \quad \square$$

Osservazione 16.4 Se indichiamo con $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ il campo vettoriale di componenti $a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x})$, e poniamo $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, potremo scrivere la forma ω in maniera più concisa:

$$\omega = (\mathbf{V}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}).$$

In particolare, si ha

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b (\mathbf{V}(\varphi(t)), \varphi'(t)) dt. \quad [16.7]$$

Se ora ricordiamo che il versore tangente τ alla curva φ è dato da

$$\tau(t) = \frac{\varphi'(t)}{\|\varphi'(t)\|}$$

potremo scrivere

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b (\mathbf{V}(\varphi(t)), \tau(t)) \|\varphi'(t)\| dt = \int_{\varphi} (\mathbf{V}, \tau) ds. \quad [16.8]$$

□

Abbiamo visto nel capitolo precedente che l'integrale curvilineo di una funzione f lungo due curve equivalenti è lo stesso. Per quanto riguarda le forme differenziali, si ha

Teorema 16.1 Se φ e γ sono due curve equivalenti, risulta

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\gamma} \omega$$

se γ e φ hanno lo stesso verso, e

$$\int_{\varphi} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

se hanno verso opposto.

Dimostrazione Siano $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ e $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$, e sia $p: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tale che $\varphi(t) = \gamma(p(t))$. Per la [16.7] si ha:

$$\int_{\varphi} \omega = \int_a^b (\mathbf{V}(\varphi(t)), \varphi'(t)) dt = \int_a^b (\mathbf{V}(\gamma(p(t))), \gamma'(p(t))) p'(t) dt.$$

Facciamo nell'ultimo integrale il cambiamento di variabile $p(t) = u$. Se le curve hanno lo stesso verso, cioè se $p' > 0$, si ha $p(a) = c$ e $p(b) = d$, e quindi

$$\int_a^b (\mathbf{V}(\gamma(p(t))), \gamma'(p(t))) p'(t) dt = \int_c^d (\mathbf{V}(\gamma(u)), \gamma'(u)) du = \int_{\gamma} \omega.$$

Se invece le curve hanno verso opposto si ha $p' < 0$ e dunque gli estremi si scambiano, e risulta

$$\int_a^b (\mathbf{V}(\gamma(p(t))), \gamma'(p(t))) p'(t) dt = \int_d^c (\mathbf{V}(\gamma(u)), \gamma'(u)) du = - \int_\gamma \omega. \quad \square$$

Esercizi

16.3. Calcolare gli integrali delle seguenti forme differenziali lungo la semicirconferenza di equazioni $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| 1. $yx^2 dx + xdy$ | 3. $y^2 e^x dx - xydy$ |
| 2. $\arcsen y dx + ydy$ | 4. $x\sqrt{1-y} dx + xdy$ |

16.4. Calcolare gli integrali lungo il segmento che ha come primo estremo $(1, 0)$ e come secondo estremo $(2, 2)$ delle seguenti forme differenziali:

- | | |
|------------------------|----------------------------------|
| 1. $ydx - x\sqrt{y}dy$ | 3. $x \log y dx - y \arctg x dy$ |
| 2. $ydx + e^{x+y} dy$ | 4. $x \sin y dx + y \sin x dy$ |

16.5. Calcolare l'integrale della forma $y\sqrt{x}dx - xe^y dy$ lungo i seguenti cammini orientati:

1. Il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(1, 1)$.
2. L'arco di parabola $y = \sqrt{x}$ che va da $(0, 0)$ a $(1, 1)$.
3. La spezzata di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$.
4. La spezzata di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.

16.6. Integrare la forma $xydx + yzdy - zdz$ lungo la poligonale di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.

16.7. Integrare la forma differenziale

$$\frac{zdx}{1+x} + \frac{xdy}{1+y} - xdz$$

lungo il segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

16.3. Forme esatte

La relazione

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

che abbiamo visto nella sezione precedente, ricorda il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

In effetti, ricordando che per le funzioni di una variabile si ha $df = f'(x)dx$, il teorema fondamentale si può scrivere nella forma

$$\int_a^b df = f(b) - f(a);$$

a parole: l'integrale del differenziale di una funzione su un intervallo è uguale alla differenza dei valori della funzione stessa agli estremi. Similmente, l'integrale su una curva γ del differenziale di una funzione è uguale alla differenza tra il valore della funzione nel secondo estremo della curva e quello nel primo estremo.

In particolare, esso non dipende dalla curva γ , ma solo dagli estremi; se due curve γ_1 e γ_2 hanno ordinatamente gli stessi estremi (cioè se il primo estremo di γ_1 coincide col primo estremo di γ_2 , e il secondo col secondo), l'integrale di df su γ_1 è uguale a quello su γ_2 . Se poi γ è chiusa, l'integrale di df su γ vale zero.

Definizione 16.2 Una forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$, definita in un aperto $A \subset \mathbf{R}^n$, si dice *esatta* se è il differenziale di qualche funzione; in altre parole, se esiste una funzione $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^1 tale che $\omega = df$, o più esplicitamente se

$$a_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad [16.9]$$

Se ω è esatta, il campo vettoriale $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_n(\mathbf{x}))$ si dice *conservativo*; la funzione $f(\mathbf{x})$ si chiama *primitiva* della forma ω , o anche *funzione potenziale* del campo $\mathbf{V}$.

Come abbiamo detto, se ω è una forma esatta, il suo integrale $\int_{\gamma} \omega$ è lo stesso per tutte le curve γ che hanno gli stessi estremi.

Più precisamente, dati due punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ di $\mathbf{R}^n$, consideriamo la classe $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ di tutte le curve regolari a tratti, con sostegno in A , e che hanno come primo estremo $\mathbf{x}_1$ e come secondo estremo $\mathbf{x}_2$. Se ω è esatta in A , presi comunque due punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ di A e due curve γ_1 e γ_2 di $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, risulta

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Questa relazione caratterizza le forme esatte. Si ha infatti

Teorema 16.2 Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ una forma differenziale continua¹ in un aperto

¹ Questo significa che tutte le componenti a_i sono funzioni continue in A .

connesso A . Se comunque si prendano due punti $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ di A e due curve γ_1 e γ_2 di $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega,$$

allora ω è esatta.

Dimostrazione Fissiamo un punto $\mathbf{x}_0$ in A , e definiamo la funzione

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è una qualsiasi curva della classe $\Gamma(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$. La funzione f è ben definita; infatti per ipotesi il valore dell'integrale è lo stesso qualsiasi sia la curva γ sulla quale si integra, e quindi, essendo fissato il primo estremo $\mathbf{x}_0$, esso dipende solo da $\mathbf{x}$.

Faremo vedere che $f(\mathbf{x})$ è una primitiva della forma ω , ossia che per $k = 1, 2, \dots, n$ si ha

$$a_k(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}).$$

Indichiamo con $\mathbf{e}_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ la direzione dell'asse delle x_k , e sia $\mathbf{x}$ un punto di A . Poiché A è aperto, esisterà un intorno $I(\mathbf{x}, r)$ tutto contenuto in A . Se $|h| < r$, il segmento di estremi $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k$ è tutto contenuto in A .

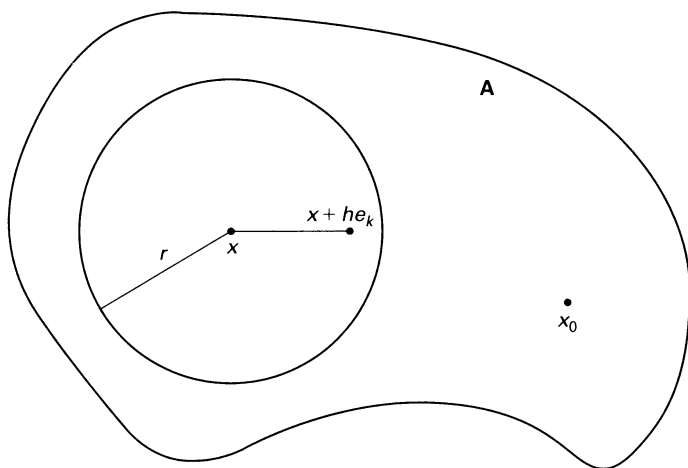


Figura 16.1

Si ha per definizione $f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) = \int_{\sigma} \omega$, dove σ è una qualsiasi curva regolare a tratti che congiunge $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k$. Se prendiamo

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & a \leq t \leq b \\ \mathbf{x} + (t-b)\mathbf{e}_k & b \leq t \leq b+1 \end{cases}$$

e osserviamo che per $b < t < b + 1$ si ha

$$\sigma'_i = h \delta_{ik} = \begin{cases} h & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases}$$

avremo

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}) = \int_{\sigma} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_b^{b+1} a_k(\mathbf{x} + (t-b)h\mathbf{e}_k) h dt$$

e quindi

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} = \int_b^{b+1} a_k(\mathbf{x} + (t-b)h\mathbf{e}_k) dt.$$

Possiamo ora applicare il lemma 9.1 della media integrale. Esisterà allora un numero ξ compreso tra b e $b + 1$, tale che

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} = a_k(\mathbf{x} + (\xi - b)h\mathbf{e}_k).$$

Quando $h \rightarrow 0$, il punto $\mathbf{x} + (\xi - b)h\mathbf{e}_k$ tende a $\mathbf{x}$, e dunque per la continuità di a_k risulta

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{h} = a_k(\mathbf{x}).$$

Abbiamo così dimostrato la relazione [16.9], e quindi la forma ω è esatta. $\square$

Il teorema precedente si può enunciare in maniera leggermente diversa.

Teorema 16.3 *Sia ω una forma differenziale continua in un aperto connesso A . Condizione necessaria e sufficiente affinché ω sia esatta è che per ogni curva chiusa γ , regolare a tratti e con sostegno in A risulti*

$$\int_{\gamma} \omega = 0. \quad [16.10]$$

Dimostrazione Abbiamo già osservato che se ω è esatta il suo integrale lungo una qualunque curva chiusa è zero. Dimostriamo allora il viceversa.

Supponiamo dunque che per ogni curva γ chiusa, risulti

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

e siano $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ due punti di A , e $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow A$ e $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow A$ due curve della classe $\Gamma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, cioè tali che

$$\begin{aligned} \gamma_1(a) &= \mathbf{x}_1, & \gamma_1(b) &= \mathbf{x}_2 \\ \gamma_2(c) &= \mathbf{x}_1, & \gamma_2(d) &= \mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

Introduciamo ora una curva $\gamma_3 : [b, b+1] \rightarrow A$, equivalente a γ_2 ma con verso opposto, definendo

$$\gamma_3(t) = \gamma_2(d + (t-b)(c-d)).$$

La curva $\gamma : [a, b+1] \rightarrow A$, definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ \gamma_3(t) & \text{se } b \leq t \leq b+1 \end{cases}$$

è chiusa e regolare a tratti, e quindi risulta per ipotesi $\int_{\gamma} \omega = 0$.
D'altra parte

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

dato che γ_3 e γ_2 hanno verso opposto. In conclusione gli integrali di ω sulle due curve γ_1 e γ_2 sono uguali, cosicchè ω verifica le ipotesi del teorema precedente, e dunque è esatta. $\square$

Osservazione 16.5 Il teorema precedente resta valido se si suppone che la [16.10] valga solo per le curve γ semplici, o addirittura per le poligonali.

Omettiamo la dimostrazione, piuttosto laboriosa.

I teoremi precedenti sono molto precisi, in quanto danno delle condizioni necessarie e sufficienti, ma sono piuttosto difficili da applicare. In effetti, per dimostrare che una forma è esatta bisognerebbe verificare che il suo integrale su una *qualsiasi* curva chiusa è nullo, e quindi bisognerebbe fare infinite verifiche. Sorge dunque il problema di dare delle condizioni più agevoli.

Teorema 16.4 *Condizione necessaria affinché una forma differenziale*

$$\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$$

di classe C^1 in A sia esatta è che risulti

$$\frac{\partial a_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad [16.11]$$

per tutti gli $\mathbf{x} \in A$ e per tutti gli indici i e k da 1 a n .

Dimostrazione Se $\omega = df$ si ha $a_i = f_{,i}$, e quindi per il teorema di Schwarz 11.4 si ha

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i}. \quad \square$$

Una forma ω che verifica la relazione [16.11] si dice *chiusa*. Così il teorema precedente si può enunciare brevemente dicendo che ogni forma esatta è chiusa.

Il viceversa non è vero in generale. Ad esempio la forma differenziale

$$\omega = -\frac{ydx}{x^2 + y^2} + \frac{xdy}{x^2 + y^2}$$

è chiusa, come si può verificare facilmente, ma non esatta. Infatti se la integriamo sulla circonferenza γ di equazioni $x = \cos t$, $y = \sin t$, otteniamo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

mentre se ω fosse esatta, questo integrale dovrebbe valere zero.

La ragione di questo risultato sta nel fatto che la forma ω in questione non è definita in tutto il piano, ma in $\mathbf{R}^2 - \{0\}$, e la circonferenza γ circonda l'origine.

Per trovare una condizione sufficiente, cominciamo da una definizione.

Definizione 16.3 Un insieme A si dice stellato (rispetto a un suo punto $\mathbf{x}_0$) se per ogni $\mathbf{x} \in A$ il segmento di estremi $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$ è tutto contenuto in A .

La figura mostra un insieme stellato.

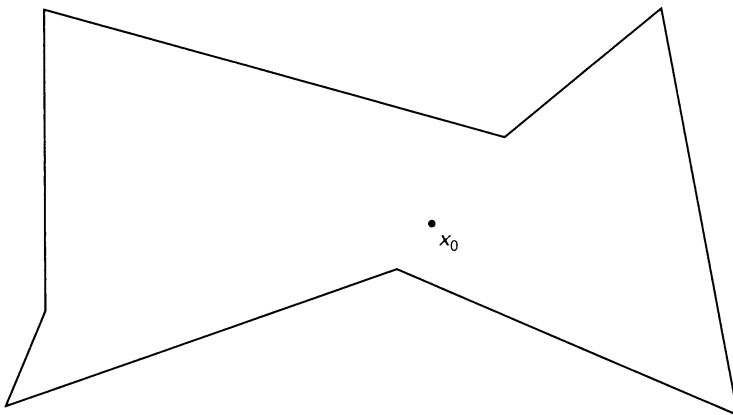


Figura 16.2

Negli insiemi stellati la condizione [16.11] è sufficiente. Si ha infatti

Teorema 16.5 Se A è un aperto stellato di $\mathbf{R}^n$, ogni forma chiusa definita in A è esatta.

Dimostrazione Supponiamo per fissare le idee che A sia stellato rispetto all'origine. In questo caso, se $\mathbf{x} \in A$, il segmento di equazione $\gamma(t) = t\mathbf{x}$, $0 \leq t \leq 1$ che unisce $\mathbf{x}$ all'origine è tutto contenuto in A . Definiamo

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(t\mathbf{x}) x_i dt.$$

Faremo vedere che $f(\mathbf{x})$ è una primitiva della forma ω , che dunque risulta esatta. Ricordando il teorema 13.5 di derivazione sotto il segno di integrale, avremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (a_i(t\mathbf{x})x_i) dt.$$

La derivata ha una forma diversa a seconda che sia $i = k$ o $i \neq k$. Risulta

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (a_i(t\mathbf{x})x_i) = \begin{cases} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} (t\mathbf{x})tx_i & \text{se } i \neq k \\ \frac{\partial a_k}{\partial x_k} (t\mathbf{x})tx_k + a_k(t\mathbf{x}) & \text{se } i = k \end{cases}$$

Quando si fa la somma per i da 1 a n si ottiene allora

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (a_i(t\mathbf{x})x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_k} (t\mathbf{x})tx_i + a_k(t\mathbf{x}).$$

Se ora si tiene conto del fatto che ω è chiusa, cioè che sono verificate le [16.11], si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_k}{\partial x_i} (t\mathbf{x})tx_i + a_k(t\mathbf{x}) \right) dt.$$

Poniamo ora

$$g(t) = ta_k(t\mathbf{x});$$

risulta

$$g'(t) = a_k(t\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n t \frac{\partial a_k}{\partial x_i} (t\mathbf{x})x_i$$

e dunque in conclusione

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = \int_0^1 g'(t) dt = g(1) - g(0) = a_k(\mathbf{x})$$

cosicché $df = \omega$. □

In fisica, un campo vettoriale $\mathbf{V}$ le cui componenti verificano le relazioni [16.11] si dice *irrotazionale*. Ricordando che se ω è esatta il corrispondente campo vettoriale si dice *conservativo*, avremo che

ogni campo conservativo è irrotazionale, e viceversa ogni campo irrotazionale in un aperto stellato è conservativo. □

Esercizi

16.8. Dire se le forme seguenti sono esatte nel loro insieme di definizione, e in caso affermativo trovare una primitiva:

$$1. \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} dx + \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} dy$$

$$2. (\sqrt{y} - 2xy)dx + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2 \right) dy$$

$$3. (y \cos x - xy \sin x - \sin y)dx + (x \cos x - x \cos y + 1)dy$$

$$4. -\frac{2xy^2}{(1+x^2)^2} dx + \frac{2y}{1+x^2} dy$$

$$5. xdy - ydx$$

$$6. xdy + ydx$$

$$7. \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \left(dx - \frac{x}{y} dy \right)$$

$$8. \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

16.9. Dimostrare che se A è un insieme connesso e ω è una forma esatta in A , due primitive di ω differiscono per una costante.

16.4. La formula di Gauss-Green

Nel § 1 abbiamo definito l'integrale di una forma ω su una curva γ in $\mathbf{R}^n$. Ci interesseremo ora del caso particolare in cui il sostegno di γ è la frontiera di un insieme $E \subset \mathbf{R}^2$.

Più precisamente, sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ una curva semplice e chiusa, il cui sostegno è frontiera di un insieme E . Diremo che γ è orientata positivamente se percorrendola nel senso delle t crescenti il dominio E resta sempre alla sinistra (vedi figura).²

Siccome le curve γ e $\varphi(t) = \gamma(a + b - t)$ hanno versi opposti (vedi cap. 15 § 1), se γ è orientata positivamente, φ sarà orientata negativamente; per sottolineare questo fatto scriveremo $\partial^+ E$ al posto di γ e $\partial^- E$ invece di φ .

² Questa definizione è un po' imprecisa, dato che non è chiaro cosa vuol dire che E sta a sinistra. Si può far meglio definendo dapprima la normale *esterna* a ∂E , come il vettore normale, orientato come nella figura dall'interno verso l'esterno di E . Ciò fatto, si dirà che γ è orientata positivamente se l'angolo tra la normale esterna e il vettore tangente è $\frac{\pi}{2}$.

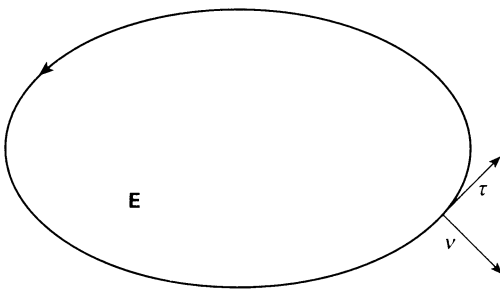


Figura 16.3

Si ha il seguente

Teorema 16.6 Se $\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ è una forma differenziale di classe C^1 , si ha

$$\int_{\partial E} \omega = \int_E \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy. \quad [16.12]$$

La [16.12] prende il nome di *formula di Gauss-Green*. Noi dimostreremo separatamente le due formule

$$\int_{\partial E} M(x, y) dx = - \int_E \frac{\partial M}{\partial y} dx dy. \quad [16.13]$$

$$\int_{\partial E} N(x, y) dy = \int_E \frac{\partial N}{\partial x} dx dy. \quad [16.14]$$

sommando le quali segue immediatamente la [16.12].

Dimostrazione Per semplificare i calcoli faremo l'ipotesi che il dominio E sia normale rispetto all'asse delle y :

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}.$$

In questo caso, osservando che $dx = 0$ sui segmenti verticali di ∂E , si ha (vedi figura):

$$\int_{\partial E} M(x, y) dx = \int_a^b M(x, \alpha(x)) dx - \int_a^b M(x, \beta(x)) dx$$

D'altra parte

$$M(x, \alpha(x)) - M(x, \beta(x)) = \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dy = - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dy$$

e dunque

$$\int_{\partial E} M(x, y) dx = - \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy = - \int_E \frac{\partial M}{\partial y} dx dy$$

che dimostra la [16.13].

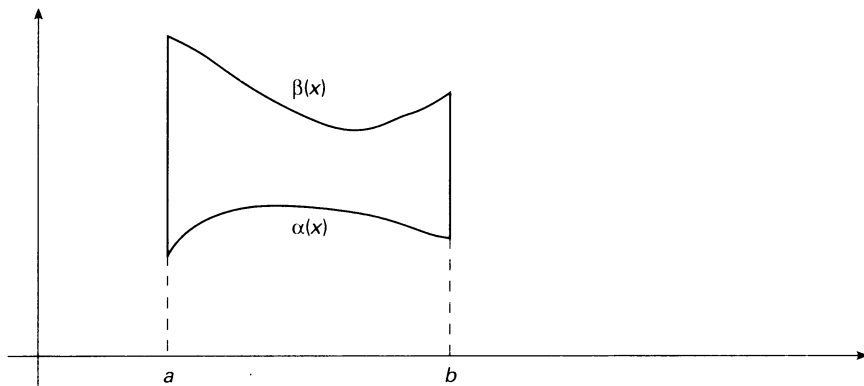


Figura 16.4

La dimostrazione della [16.14] è più complicata. Si ha in questo caso

$$\int_{\partial E} N(x, y) dy = \int_a^b N(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} N(b, y) dy - \int_a^b N(x, \beta(x)) \beta'(x) dx - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} N(a, y) dy. \quad [16.15]$$

Poniamo ora

$$F(x, y) = \int_{\alpha(x)}^y N(x, t) dt.$$

Si ha

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y),$$

e quindi

$$N(x, \alpha(x)) \alpha'(x) = \frac{d}{dx} F(x, \alpha(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, \alpha(x)),$$

da cui segue

$$\int_a^b N(x, \alpha(x)) \alpha'(x) dx = F(b, \alpha(b)) - F(a, \alpha(a)) - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, \alpha(x)) dx.$$

Analogamente

$$N(x, \beta(x)) \beta'(x) = \frac{d}{dx} F(x, \beta(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, \beta(x))$$

da cui

$$\int_a^b N(x, \beta(x)) \beta'(x) dx = F(b, \beta(b)) - F(a, \beta(a)) - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, \beta(x)) dx.$$

D'altra parte

$$\int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} N(b, y) dy = \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} \frac{\partial F(b, y)}{\partial y} dy = F(b, \beta(b)) - F(b, \alpha(b))$$

$$\int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} N(a, y) dy = \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} \frac{\partial F(a, y)}{\partial y} dy = F(a, \beta(a)) - F(a, \alpha(a)).$$

Quando si introducono tutte queste relazioni nella [16.15], molti termini si semplificano, lasciando

$$\int_{\partial E} N(x, y) dy = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, \beta(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, \alpha(x)) \right) dx.$$

Valutiamo ora l'ultimo integrale. Si ha

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, \beta(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, \alpha(x)) \right) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial N}{\partial x} dy$$

e quindi in conclusione:

$$\int_{\partial E} N(x, y) dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial N}{\partial x} dy = \int_E \frac{\partial N}{\partial x} dx dy.$$

La [16.14] è così dimostrata. □

Della formula di Gauss-Green possiamo dare una formulazione differente, più adatta alle applicazioni alla fisica.

Ricordiamo che se $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$ è una curva piana regolare, di componenti $(x(t), y(t))$, il versore tangente a γ è dato da

$$\tau = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} = \left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)$$

(vedi cap. 15 §1). Se poniamo allora

$$v = (\tau_2, -\tau_1) = \left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{-x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) \quad [16.16]$$

risulta $(\tau, v) = 0$, e dunque v è un versore *normale* al sostegno di γ . Si vede facilmente che se $\gamma = \partial^+ E$ (cioè se γ è orientata positivamente), il versore normale definito dalla [16.6] è diretto verso l'esterno di E .

Ciò posto, si ha

$$\int_{\partial^+ E} M dx = \int_a^b M(\gamma(t)) \gamma'_1(t) dt = \int_a^b M(\gamma(t)) \frac{\gamma'_1(t)}{\|\gamma'_1(t)\|} \|\gamma'_1(t)\| dt = \int_{\gamma} M \tau_1 ds = - \int_{\partial^+ E} M v_2 ds$$

dove nell'ultimo integrale abbiamo scritto semplicemente ∂E perché l'integrale curvilineo non dipende dall'orientazione.³ Analogamente

$$\int_{\partial^+ E} N dy = \int_{\partial E} N v_1 ds.$$

Le [16.13] e [16.14] diventano allora

$$\int_E \frac{\partial M}{\partial y} dx dy = \int_{\partial E} M v_2 ds \quad [16.17]$$

$$\int_E \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_{\partial E} N v_1 ds. \quad [16.18]$$

Se ora $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ è un campo vettoriale in $\mathbf{R}^n$, poniamo

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial V_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_i}{\partial x_i}. \quad [16.19]$$

In particolare, nel caso di un campo vettoriale $\mathbf{V} = (V_1, V_2)$ in $\mathbf{R}^2$ si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y}.$$

Ciò posto, se scriviamo $N = V_1$ nella [16.18], $M = V_2$ nella [16.17], e sommiamo, otteniamo

$$\int_E \operatorname{div} \mathbf{V} dx dy = \int_{\partial E} (V_1 v_1 + V_2 v_2) ds = \int_{\partial E} (\mathbf{V}, \mathbf{v}) ds. \quad [16.20]$$

La formula [16.20] prende il nome di *teorema della divergenza*. L'integrale a secondo membro si chiama *flusso* del vettore $\mathbf{V}$ attraverso ∂E . Si può dunque affermare che

l'integrale su E della divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{V}$ è uguale al flusso di $\mathbf{V}$ attraverso ∂E .

Il teorema della divergenza vale anche in tre o più dimensioni. In particolare, in tre dimensioni, esso segue dalle formule

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial E} f v_1 d\sigma$$

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \int_{\partial E} f v_2 d\sigma$$

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial E} f v_3 d\sigma$$

³ Naturalmente ciò non significa che si è perduta la dipendenza dall'orientazione, ma semplicemente che quest'ultima è stata inglobata nel segno del versore tangente τ , e di conseguenza in quello di ν .

dove v_1 , v_2 e v_3 sono le componenti del versore normale esterno a ∂E . Se si scrive la prima delle relazioni precedenti con $f = V_1$, la seconda con $f = V_2$, la terza con $f = V_3$, e si somma membro a membro, si ottiene l'analogo tridimensionale della [16.20]:

$$\int_E \operatorname{div} \mathbf{V} dx dy dz = \int_{\partial E} (\mathbf{V}, \mathbf{v}) d\sigma. \quad [16.21]$$

Noi dimostreremo le tre relazioni precedenti solo nel caso in cui l'insieme E sia normale rispetto a tutti e tre gli assi, come avviene ad esempio se E è un cubo o una sfera. Ad esempio, se E è normale rispetto all'asse delle z , si ha

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in H, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}.$$

In questo caso risulta

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int_H dx dy \int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} \frac{\partial f}{\partial z} dz = \int_H [f(x, y, \beta(x, y)) - f(x, y, \alpha(x, y))] dx dy.$$

Valutiamo ora il primo integrale a secondo membro. Ricordando l'espressione [15.18] del versore normale, avremo

$$\int_H f(x, y, \beta(x, y)) dx dy = \int_H \frac{f(x, y, \beta(x, y))}{\sqrt{1 + \|\nabla \beta\|^2}} \sqrt{1 + \|\nabla \beta\|^2} dx dy = \int_{S_\beta} f(x, y, z) v_3 d\sigma$$

dove S_β è la superficie di equazione $z = \beta(x, y)$.

Il secondo integrale è del tutto simile a questo, con la differenza che il versore normale esterno stavolta punta verso il basso, e quindi su S_α si avrà

$$v_3 = \frac{-1}{\sqrt{1 + \|\nabla \alpha\|^2}}.$$

Risulta allora

$$\int_H f(x, y, \alpha(x, y)) dx dy = \int_H \frac{f(x, y, \alpha(x, y))}{\sqrt{1 + \|\nabla \alpha\|^2}} \sqrt{1 + \|\nabla \alpha\|^2} dx dy = - \int_{S_\alpha} f(x, y, z) v_3 d\sigma.$$

D'altra parte sulla superficie laterale di ∂E si ha $v_3 = 0$, e dunque in conclusione

$$\int_E \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int_{S_\beta} f(x, y, z) v_3 d\sigma + \int_{S_\alpha} f(x, y, z) v_3 d\sigma = \int_{\partial E} f(x, y, z) v_3 d\sigma.$$

che è la terza delle equazioni che volevamo dimostrare. In maniera analoga la prima equazione si dimostra sfruttando il fatto che E è normale rispetto all'asse delle x , e la seconda tenendo conto che E è normale rispetto all'asse y .

16.5.* Applicazioni della formula di Gauss-Green

Una prima applicazione della formula appena dimostrata riguarda il calcolo dell'area di una figura piana.

Infatti, se nella [16.12] si prende $M = 0$ e $N = x$ si ottiene

$$\int_{\partial E} x dy = \int_E dx dy = m(E). \quad [16.22]$$

Analogamente, prendendo $M = y$ e $N = 0$ avremo

$$\int_{\partial E} y dx = - \int_E dx dy = -m(E). \quad [16.23]$$

Infine, prendendo $M = -\frac{y}{2}$ e $N = \frac{x}{2}$, si trova

$$m(E) = \frac{1}{2} \int_{\partial E} x dy - y dx. \quad [16.24]$$

Queste tre formule possono servire per il calcolo della misura di E . Esse sono particolarmente adatte quando l'insieme E di cui si vuole calcolare l'area è dato come l'insieme racchiuso da una curva.

Esempio 16.3 Calcoliamo ad esempio l'area racchiusa dalla cicloide, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

e dall'asse delle x .

In questo caso conviene usare la [16.22]. Avremo allora

$$m(E) = \int_{\partial E} x dy = - \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \pi + 2\pi = 3\pi \quad \square$$

Esempio 16.4 Quando la curva è data in coordinate polari: $\rho = \rho(\varphi)$, è conveniente usare la [16.24]. Si ha infatti

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} dx = (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi) d\varphi \\ dy = (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi) d\varphi \end{cases}$$

Con qualche calcolo si ottiene allora

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= [\rho \cos \varphi (\rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi) + \rho \sin \varphi (\rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi)] d\varphi = \\ &= \rho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \rho^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Nel caso della cardiode, che come abbiamo visto ha equazione $\rho = 1 + \cos \varphi$, ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), l'area della regione racchiusa sarà

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \frac{3}{2} \pi. \quad \square$$

Come seconda applicazione della formula di Gauss-Green, riprendiamo il problema delle forme esatte in $\mathbf{R}^2$. Abbiamo visto nel § 16.3 che una condizione necessaria affinché la forma

$$\omega = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

definita in un dominio A sia esatta è che verifichi la condizione [16.11], che in questo caso diventa:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Questa condizione diventa anche sufficiente se il dominio A soddisfa alcune condizioni geometriche, ad esempio se è stellato. Grazie alla formula di Gauss-Green, possiamo migliorare questo risultato.

Definizione 16.4 *Diciamo che un insieme connesso $A \subset \mathbf{R}^2$ è semplicemente connesso se per ogni curva semplice e chiusa γ con sostegno contenuto in A , quest'ultimo è la frontiera di un insieme limitato tutto contenuto in A .*

Teorema 16.7 *Se $A \subset \mathbf{R}^2$ è semplicemente connesso, ogni forma chiusa definita in A è esatta.*

Dimostrazione Sia γ una curva semplice e chiusa con sostegno contenuto in A . Per definizione, il sostegno di γ è bordo di un insieme aperto E contenuto in A . Per la formula di Gauss-Green risulta

$$\int_{\partial E} \omega = \int_E \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

perché per ipotesi la forma ω è chiusa.

D'altra parte si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \pm \int_{\partial E} \omega$$

a seconda che γ sia orientata positivamente o negativamente. In ogni caso risulta

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

per ogni curva semplice e chiusa γ con sostegno contenuto in A . Per il teorema 16.3 e l'osservazione 16.5, la forma ω è esatta. $\square$

Dato che si può dimostrare che un aperto stellato è semplicemente connesso (un risultato intuitivo ma di dimostrazione difficile), mentre è facile trovare degli insiemi semplicemente connessi che non sono stellati, il teorema precedente migliora effettivamente il teorema 16.5.

16.6. La formula di Stokes

In tre dimensioni esiste un'analogia della formula di Gauss-Green, che prende il nome di formula di Stokes.

Consideriamo una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$, di equazioni $\mathbf{x} = \varphi(u, v)$, ossia

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in K$$

Sia A un aperto contenuto in K e sia $\gamma: [a, b] \rightarrow K$ una curva semplice e chiusa, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

con sostegno la frontiera di A . L'insieme $S = \varphi(A)$ è una superficie regolare S ; le sue equazioni saranno le stesse di Σ , con $(u, v) \in A$. Chiamiamo *bordo* di S l'immagine della frontiera ∂A di A :

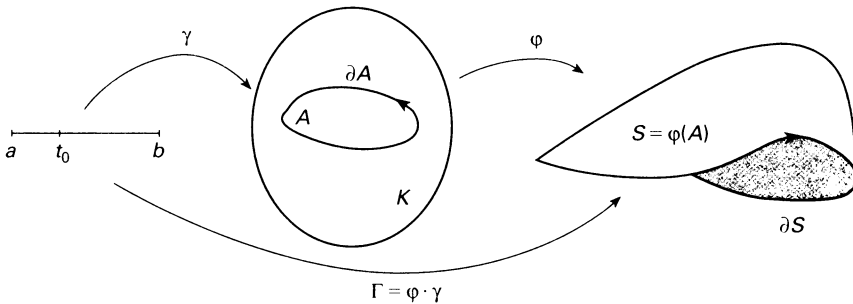


Figura 16.5

$$\partial S = \varphi(\partial A).$$

La curva $\Gamma = \varphi \circ \gamma$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(u(t), v(t)) \\ y = y(u(t), v(t)) \\ z = z(u(t), v(t)) \end{cases}$$

ha come sostegno ∂S ; se γ è orientata positivamente diremo che Γ è il bordo di S orientato positivamente.

Consideriamo ora un campo vettoriale $\mathbf{V}(x, y, z)$, di componenti

$$X(x, y, z), \quad Y(x, y, z), \quad Z(x, y, z),$$

e chiamiamo *rotore* di $\mathbf{V}$ il vettore

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right). \quad [16.25]$$

Osservazione 16.6 Il termine rotore spiega la denominazione di “campo irrotazionale” per un campo vettoriale $\mathbf{V}$ che verifica le [16.11]; in questo caso infatti il rotore di $\mathbf{V}$ si annulla.

Formalmente, se si indica con ∇ il vettore

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

si ha, ricordando la definizione di prodotto vettoriale (vedi definizione 15.5):

$$\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \wedge \mathbf{V}.$$

Questa espressione può servire per ricordare la [16.25] senza sforzi di memoria.

Siamo ora pronti per enunciare il teorema di Stokes.

Teorema 16.8 *Supponiamo che S sia una superficie di classe C^2 . Si ha allora*

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{v}) d\sigma = \int_{\partial S} X dx + Y dy + Z dz \quad [16.26]$$

dove

$$\mathbf{v} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{1}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} (y_u z_v - z_u y_v, z_u x_v - x_u z_v, x_u y_v - y_u x_v)$$

è il versore normale a S .

Dimostrazione Scriviamo esplicitamente il primo membro della [16.26]:

$$\begin{aligned} \int_S (\text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{v}) d\sigma = \int_A \{ (Z_y - Y_z)(y_u z_v - z_u y_v) + (X_z - Z_x)(z_u x_v - x_u z_v) + \\ + (Y_x - X_y)(x_u y_v - y_u x_v) \} \frac{1}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv \end{aligned}$$

dove le funzioni Z_y, Y_z ecc. sono calcolate nel punto di coordinate $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

Poniamo ora

$$\omega = (Xx_u + Yy_u + Zz_u)du + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)dv = M(u, v)du + N(u, v)dv.$$

Con un po' di calcoli noiosi ma semplici, si ottiene che la quantità sotto il segno di integrale a secondo membro dell'espressione precedente (una volta semplificato il fattore $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$ che compare a moltiplicare e a dividere) è uguale a

$$\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}.$$

Applicando il teorema di Gauss-Green si deduce quindi che

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{v}) d\sigma = \int_{\partial A} \omega.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ A} \omega &= \int_a^b \{ (Xx_u + Yy_u + Zz_u)u' + (Xx_v + Yy_v + Zz_v)v' \} dt = \\ &= \int_a^b \{ (X(x_u u' + x_v v') + Y(y_u u' + y_v v') + Z(z_u u' + z_v v')) \} dt = \int_{\partial^+ S} Xdx + Ydy + Zdz\end{aligned}$$

da cui segue la [16.26]. $\square$

Osservazione 16.7 Ricordando la [16.8], la [16.26] si può scrivere nella forma

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{v}) d\sigma = \int_{\partial^+ S} (\mathbf{V}, \boldsymbol{\tau}) ds \quad [16.27]$$

dove come al solito abbiamo indicato con $\boldsymbol{\tau}$ il versore tangente alla curva $\partial^+ S$. In fisica, l'ultimo integrale prende il nome di *circuitazione* del campo vettoriale $\mathbf{V}$, mentre il primo è il *flusso* del vettore $\text{rot } \mathbf{V}$ attraverso la superficie S . Si ha allora:

il flusso di $\text{rot } \mathbf{V}$ attraverso una superficie S è uguale alla circuitazione di $\mathbf{V}$ lungo $\partial^+ S$. $\square$

Come applicazione del teorema di Stokes possiamo dimostrare l'analogo tridimensionale del teorema 16.7. Diremo che un aperto $A \subset \mathbf{R}^3$ è *semplicemente connesso* se ogni curva semplice e chiusa con sostegno contenuto in A è bordo di una superficie S con sostegno in A . Si ha allora

Teorema 16.9 *Se $A \subset \mathbf{R}^3$ è semplicemente connesso, ogni forma chiusa definita in A è esatta.*

In termini diversi, in un aperto semplicemente connesso ogni campo irrotazionale è conservativo.

Dimostrazione Sia γ una curva semplice e chiusa, e sia S la superficie corrispondente. Siccome $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, il primo membro della [16.26] è nullo, e quindi $\int_{\gamma} \omega = 0$. Per il teorema 16.3, la forma $\omega = Xdx + Ydy + Zdz$ è esatta. $\square$

16.7. Risposte agli esercizi

16.1. Si ha

$$\mathfrak{L} = \int_a^b (\mathbf{F}, \gamma'(t)) dt = \left(\mathbf{F}, \int_a^b \gamma'(t) dt \right) = (\mathbf{F}, \gamma(b) - \gamma(a))$$

16.2. 2π

16.3.

1. $\frac{3\pi}{8}$

2. -2

3. $-\frac{4}{e} - \frac{2}{3}$

4. $\frac{\pi}{2}$

16.4.

1. $1 - \frac{32\sqrt{2}}{15}$

3. $\frac{7}{2} \log 2 + \frac{3}{4} - 2 \arctg 2 - 2 \log 5$

2. $1 + \frac{2}{3}(e^4 - e)$

4. $\frac{1}{2} - 5 \cos 2 + \frac{17}{4} \sin 2 - 4 \sin 1$

16.5.

1. $-\frac{3}{5}$

2. $\frac{5}{2} - e$

3. $\frac{2}{3}$

4. $1 - e$

16.6. $-\frac{1}{2}$

16.7. $\frac{3}{2} - 2 \log 2$

16.8.

1. $-\frac{1}{1+x^2y^2}$

4. $\frac{y^2}{1+x^2}$

7. $\sin \frac{x}{y}$

2. $x\sqrt{y} - x^2y$

5. Non è esatta

8. $\frac{x}{y}$

3. $xy \cos x - x \sin y + y$

6. xy

16.9. Siano f e g due primitive di ω . Si ha $df = dg = \omega$, e quindi $d(f - g) = 0$. Siano ora $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}$ due punti di A , e sia γ una curva con sostegno in A , che unisce $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}$. Posto $h = f - g$, si ha $h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) = \int_{\gamma} dh = 0$, e quindi h , cioè $f - g$, è costante.

Capitolo 17

Equazioni differenziali

17.1. Introduzione

Abbiamo già introdotto le equazioni differenziali nel capitolo 10, e ne abbiamo risolte alcune delle più semplici: le equazioni a variabili separabili, le equazioni lineari del primo ordine e quelle del secondo ordine a coefficienti costanti.

Riprenderemo ora il tema da un punto di vista più ampio per due aspetti: da una parte affronteremo il problema dell'esistenza e dell'unicità di soluzioni delle equazioni differenziali di ordine arbitrario, un problema che non avevamo nemmeno sfiorato; dall'altra ritorneremo sulla questione dell'integrazione esplicita di alcune equazioni differenziali, in particolare di quelle lineari. Studieremo infine alcune equazioni particolarmente interessanti, in quanto provengono dalla modellizzazione di fenomeni fisici e biologici.

In generale un'equazione differenziale di ordine n è un'equazione che lega tra loro la variabile t , una funzione incognita $u(t)$ e le sue derivate fino all'ordine n . Noi considereremo solo equazioni del tipo

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \quad [17.1]$$

in cui la derivata di ordine massimo appare isolata al primo membro. Più in generale, si possono considerare *sistemi* di n equazioni differenziali in n incognite; un sistema del primo ordine è

$$u'_1 = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$u'_2 = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

...

$$u'_n = f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

che si può scrivere in forma vettoriale:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

dove $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Osservazione 17.1 Un'equazione (o anche un sistema) di ordine $n > 1$: si può ricondurre a un sistema del primo ordine, ponendo $u_1 = u$, $u_2 = u'$, $u_3 = u''$, ..., $u_n = u^{(n-1)}$. Si ha allora il sistema del primo ordine

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\dots \\ u_n' &= f(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{aligned}$$

che è equivalente alla [17.1]. Di conseguenza, i risultati dimostrati per sistemi del primo ordine si estendono automaticamente alle equazioni e ai sistemi di ordine arbitrario. $\square$

17.2. Alcune equazioni speciali

Prima di affrontare il problema dell'esistenza e unicità delle soluzioni di equazioni differenziali generali, esaminiamo alcuni tipi di equazioni, per lo più del primo ordine, per le quali è possibile trovare soluzioni esplicite.

Abbiamo già incontrato alcune di queste equazioni nel capitolo 10, dove abbiamo trattato le equazioni lineari e quelle a variabili separabili. Ripartiamo da queste ultime per ampliare il numero delle equazioni risolubili esplicitamente.

Ricordiamo che un'equazione del primo ordine a variabili separabili è un'equazione del tipo

$$u'(t) = f(u(t))g(t). \quad [17.2]$$

dividendo per $f(u)$ e integrando, si trova

$$Z(u) = G(t) + c$$

dove $Z(u)$ è una primitiva di $\frac{1}{f(u)}$ e $G(t)$ di $g(t)$. Se poi la funzione $Z(u)$ è invertibile, si ha la soluzione esplicita

$$u(t) = Z^{-1}(G(t) + c) \quad [17.3]$$

Esempio 17.1 (Capitale e interessi) Se depositiamo in banca un capitale u_0 al tasso annuo di interesse p computato continuamente, l'andamento $u(t)$ del capitale è governato dall'equazione

$$u'(t) = pu(t),$$

la cui soluzione, tenendo conto che $u(0) = u_0$, è

$$u(t) = u_0 e^{pt}$$

Supponiamo ora di ritirare continuamente una certa rendita, in modo che se non vi fossero interessi il capitale diminuirebbe con velocità b .¹ In questo caso l'andamento del capitale risponderà all'equazione

$$u'(t) = pu(t) - b$$

che è a variabili separabili.² Dividendo per $pu - b$ e integrando, si trova

$$\frac{1}{p} \log(pu - b) = t + c,$$

e quindi

$$u(t) = \frac{1}{p} (Ce^{pt} + b)$$

La costante C deve essere determinata dalla condizione $u(0) = u_0$; risulta $C = pu_0 - b$, e quindi

$$u(t) = \left(u_0 - \frac{b}{p}\right)e^{pt} + \frac{b}{p}. \quad [17.4]$$

Si possono dare tre casi.

$b < pu_0$. Il prelievo è inferiore agli interessi maturati, e quindi il capitale aumenta col tempo, anche se meno velocemente di quanto avveniva nel caso senza prelievo. Tutto si svolge come se si fosse partiti da un capitale iniziale $u_0 - \frac{b}{p}$, remunerato all'interesse p , più un capitale fisso $\frac{b}{p}$, non remunerato.

$b > pu_0$. Se si preleva più degli interessi maturati, il capitale diminuisce, e si estingue in un tempo T che può essere calcolato ponendo $u(T) = 0$ nella [17.4]:

$$T = \frac{1}{p} \log \frac{b}{b - pu_0}. \quad [17.5]$$

$b = pu_0$. In questo caso il capitale rimane costante, sempre uguale a $u_0 = \frac{b}{p}$.

Da notare che il capitale u_0 e/o il prelievo b possono anche essere negativi. Ad esempio, se $u_0 \geq 0$ e $b < 0$ abbiamo un cosiddetto *piano di accumulo*: a un capitale iniziale u_0 si aggiungono dei versamenti periodici di entità b . Così se si parte da un capitale di 20 000 euro e poi si fanno continuamente dei versamenti per 3000 euro all'anno

¹ Se il capitale u è espresso in euro e il tempo t in anni, il valore di b viene espresso in euro all'anno; ad esempio potrebbe essere 3000 euro all'anno. Osserviamo che nella pratica sia i prelievi che il computo degli interessi si fanno periodicamente, in genere ogni anno; qui invece stiamo supponendo che gli uni e gli altri avvengano continuamente. Il modello continuo sarà tanto più vicino al vero quanto più fitti sono i prelievi e il calcolo degli interessi.

² Se si vuole, l'equazione è anche lineare, e si può trattare come tale. Ovviamente, il risultato è lo stesso.

no, e se l'interesse annuo è del 5%, l'andamento nel tempo è quello di un capitale di $20\,000 + \frac{3000}{0.05} = 80\,000$ euro remunerato al 5%, dal quale bisogna togliere una somma fissa pari a $\frac{3000}{0.05} = 60\,000$ euro.

Se poi sia u_0 che b sono negativi, siamo in presenza di un prestito che viene rimborsato con versamenti regolari. Naturalmente, affinché i versamenti siano sufficienti a estinguere il prestito, occorre che sia $pu_0 > b$, che tenendo conto del segno di u_0 e di b equivale a $|b| > p|u_0|$: i versamenti effettuati devono essere maggiori del capitale preso in prestito moltiplicato per l'interesse. Se questo avviene, il prestito si estingue dopo un tempo T dato dalla [17.5].

Ad esempio, se si sono presi in prestito 100 000 euro all'interesse annuo del 10% ($p = 0.1$), versando 12 000 euro annui, il debito si estinguerà in

$$T = 10 \log \frac{12\,000}{12\,000 - 10\,000} = 10 \log 6 \approx 18 \text{ anni.}$$

A volte poi può essere interessante sapere quanto si deve versare per estinguere un certo prestito u_0 in un certo numero T di anni. In questo caso si pone $u(T) = 0$ nella [17.4] e si ricava b :

$$b = pu_0 \frac{e^{pT}}{e^{pT} - 1}.$$

Ad esempio, se si vuole estinguere il prestito di 100 000 euro al 10% in 10 anni, si dovrà pagare una rata di

$$b = 10\,000 \frac{e}{e - 1} \approx 15\,800$$

euro all'anno.

Naturalmente, al netto di spese e altri oneri. □

Esempio 17.2 A volte la funzione $Z(u)$ non è invertibile, mentre lo è una sua opportuna restrizione. In questo caso la condizione iniziale può essere utile, oltre che per determinare il valore della costante c , anche per invertire la funzione Z . Consideriamo ad esempio l'equazione

$$u' = \frac{t + e^t}{u^3}.$$

Si ha $u^3 u' = t + e^t$, e integrando

$$\frac{1}{4} u^4 = \frac{1}{2} t^2 + e^t + c$$

da cui

$$u(t) = \pm \sqrt[4]{2t^2 + 4e^t + 4c}.$$

La costante c , e anche la scelta del segno $+$ o $-$ dipendono dalla condizione iniziale. Ad esempio, se per $t = 0$ si ha $u(0) = 2$, avremo la condizione

$$2 = \pm \sqrt[4]{4 + 4c}$$

e quindi si dovrà prendere $c = 3$ e il segno $+$ (ricordiamo che la radice è sempre positiva); se invece $u(0) = -1$, dovrà essere $-1 = \pm \sqrt[4]{4 + 4c}$, e dunque $c = -\frac{3}{4}$ e si dovrà prendere il segno $-$.

Alcune equazioni si possono ricondurre a quelle a variabili separabili.

1. Le equazioni omogenee.

Si chiama omogenea un'equazione del tipo

$$u' = f\left(\frac{u}{t}\right).$$

In questo caso, se si pone $\frac{u}{t} = z$, si ha $u = zt$, $u' = z + tz'$ e l'equazione diventa

$$tz' = f(z) - z$$

che è a variabili separabili.

Esempio 17.3 Risolvere l'equazione differenziale

$$u' = \frac{u^2 + tu + t^2}{t^2}.$$

L'equazione proposta si può scrivere nella forma

$$u' = \left(\frac{u}{t}\right)^2 + \frac{u}{t} + 1$$

e ponendo $u = zt$ diventa

$$tz' = z^2 + z + 1 - z = z^2 + 1.$$

Separando le variabili, si ha

$$\frac{z'}{1 + z^2} = \frac{1}{t}$$

e quindi, integrando:

$$\arctg z = \log |t| + c. \quad [17.6]$$

Da questa si ricava immediatamente

$$z = \operatorname{tg}(\log |t| + c)$$

e infine

$$u = zt = t \operatorname{tg}(\log |t| + c).$$

Se poi si ha la condizione iniziale $u(t_0) = u_0$, si può ricavare la costante c dalla relazione precedente, o meglio dalla (17.6). Essendo $z(t_0) = \frac{u_0}{t_0}$, si trova $c = \operatorname{arctg} \frac{u_0}{t_0} - \log |t_0|$. Inutile dire che deve essere $t_0 \neq 0$.

2. Anche le equazioni del tipo

$$u' = f(pt + qu + r)$$

con p, q e r costanti, si riconducono a variabili separabili, introducendo la nuova funzione incognita $y = pt + qu + r$, grazie alla quale l'equazione diventa

$$y' = p + qf(y)$$

che è a variabili separabili.

Esempio 17.4 Risolvere l'equazione:

$$u' = (t + u - 1)^2.$$

Con la sostituzione $y = t + u - 1$, si ottiene l'equazione a variabili separabili

$$y' = 1 + y^2$$

la cui soluzione è $\operatorname{arctg} y = t + c$, ossia $y = \operatorname{tg}(t + c)$ da cui in conclusione

$$u = \operatorname{tg}(t + c) + 1 - t.$$

□

3. Moto in un campo stazionario

Un campo di forze si dice stazionario se la forza f dipende dal punto ma non dal tempo. Nel caso unidimensionale, che ci interessa qui, detta u la posizione, si ha $f = f(u)$. Il moto di un punto di massa m soggetto a un tale campo di forze è governato dall'equazione del secondo ordine

$$mu'' = f(u).$$

Queste equazioni possono essere ridotte a equazioni del primo ordine a variabili separabili moltiplicando ambo i membri per u' e integrando. Se si osserva che $u'u''$ è la derivata di $\frac{1}{2}u'^2$, si ha

$$mu'^2 = 2V(u) + c \quad [17.7]$$

dove $V(u)$ è una primitiva di $f(u)$. Quest'ultima equazione è a variabili separabili.

Osservazione 17.2 La [17.7] ha un'interessante interpretazione fisica. Se $f(u)$ è un campo di forze stazionario, la sua primitiva $V(u)$ (che è definita a meno di una costante) si chiama *potenziale*, mentre $-V(u)$ è l'*energia potenziale*. D'altra parte, la

quantità $\frac{1}{2}mu'^2$ è l'energia cinetica posseduta da un corpo di massa m che si muove con velocità u' ; la somma $\frac{1}{2}mu'^2 - V(u)$ rappresenta l'energia totale del corpo.

La [17.7] esprime dunque la *legge di conservazione dell'energia*: durante il moto in un campo stazionario l'energia di un corpo rimane costante.

Osserviamo che il principio di conservazione dell'energia vale anche per il moto in più dimensioni, governato dal sistema

$$m\mathbf{u}'' = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \quad [17.8]$$

purché il campo di forze $\mathbf{f}$ sia conservativo, ossia sia il gradiente di un potenziale:³

$$\mathbf{f} = \nabla V.$$

Infatti in questo caso, moltiplicando scalarmente ambo i membri della [17.8] per $\mathbf{u}'(t)$, si ottiene

$$m(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''(t)) = (\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t)).$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\mathbf{u}(t)) &= (\nabla V(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t)) = (\mathbf{f}(\mathbf{u}(t)), \mathbf{u}'(t)) \\ \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}'\|^2 &= 2(\mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''(t)), \end{aligned}$$

e quindi l'equazione precedente diventa

$$m \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}'\|^2 = 2 \frac{d}{dt} V(\mathbf{u}(t))$$

ossia

$$\frac{1}{2} m \|\mathbf{u}'\|^2 = V(\mathbf{u}') + c \quad [17.9]$$

che esprime come in precedenza la conservazione dell'energia.

Esempio 17.5 (La caduta di un grave in un campo gravitazionale) Un corpo di massa m , posto a distanza r dal centro della Terra, viene attratto verso il centro della Terra con una forza data dalla legge di Newton:

$$f = -k \frac{mM}{r^2},$$

dove M è la massa della Terra e k è la costante di gravitazione universale.

³ Abbiamo visto nel capitolo precedente quali condizioni deve verificare il campo di forze $\mathbf{f}$ affinché ciò accada.

Se al tempo $t = 0$ il grave viene lasciato cadere da un punto a distanza r_0 con velocità iniziale nulla, il moto si svolgerà tutto lungo la retta che congiunge i centri dei due corpi, secondo l'equazione differenziale

$$r'' = -\frac{kM}{r^2}.$$

Una primitiva della funzione a secondo membro $V(r) = \frac{kM}{r}$, e quindi avremo

$$r'^2 = \frac{2kM}{r} + c$$

La costante c si determina osservando che il grave parte con velocità nulla, e cioè che quando $r = r_0$ si ha $r' = 0$. Di conseguenza $c = -\frac{2kM}{r_0}$. Osservando che la distanza diminuisce, e quindi $r' < 0$, otteniamo l'equazione

$$r' = -\sqrt{2kM} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}$$

a variabili separabili, che si può integrare facilmente.

Ricordando che $r(0) = r_0$, avremo allora

$$\sqrt{2kM}t = \sqrt{rr_0(r_0 - r)} + r_0\sqrt{r_0} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}},$$

che posto $g = \frac{kM}{r_0^2}$ e $u = \frac{r_0 - r}{r_0}$, diventa:

$$\sqrt{\frac{2g}{r_0}}t = \sqrt{u(1-u)} + \operatorname{arcsen} \sqrt{u}. \quad [17.10]$$

Confrontiamo questa soluzione con la formula classica della caduta libera dei gravi, nel caso in cui u è piccolo, e cioè quando $r_0 - r$, lo spazio percorso dal corpo in caduta libera, è piccolo rispetto a r_0 .

Ricordando che $\sqrt{1-u} \approx 1 - \frac{1}{2}u$ e $\operatorname{arcsen} z \approx z + \frac{z^3}{6}$ avremo

$$\sqrt{\frac{2g}{r_0}}t \approx \sqrt{u} \left(1 - \frac{1}{2}u\right) + \sqrt{u} \left(1 + \frac{1}{3}u\right) = 2\sqrt{u} - \frac{1}{6}u\sqrt{u}$$

e quindi, elevando al quadrato e indicando con $s = ur_0 = r_0 - r$ lo spazio percorso:

$$s - \frac{1}{6} \frac{s^2}{r_0} \approx \frac{1}{2} gt^2$$

da cui infine

$$s \approx \frac{1}{2} gt^2 \left(1 + \frac{1}{12} \frac{gt^2}{r_0}\right).$$

In conclusione, il grave percorre più spazio di quello $\left(= \frac{1}{2}gt^2 \right)$ che percorrerebbe con un'accelerazione costante, uguale all'accelerazione iniziale. Ciò era peraltro prevedibile, dato che via via che il grave si avvicina alla terra la forza attrattiva aumenta. $\square$

Veniamo ora alle equazioni lineari

$$u' = a(t)u + b(t) \quad [17.11]$$

per le quali nel capitolo 10 § 5 abbiamo trovato la soluzione generale:

$$u(t) = e^{A(t)} \left(c + \int b(t) e^{-A(t)} dt \right) \quad [17.12]$$

dove $A(t)$ è una primitiva del coefficiente $a(t)$.

Esempio 17.6 (La pressione atmosferica) Supponiamo che l'aria atmosferica ubbidisca alla legge di Boyle-Mariotte: $PV = RT$, dove P , V e T rappresentano il volume, la pressione e la temperatura assoluta, e la costante R può essere determinata misurando la pressione P_0 e il volume V_0 a una data temperatura T_0 : $R = \frac{P_0 V_0}{T_0}$. La legge di Boyle-Mariotte si può anche scrivere utilizzando il peso specifico D invece del volume; essendo la massa d'aria sempre la stessa, il peso specifico è inversamente proporzionale al volume, e pertanto

$$D = \frac{D_0 T_0}{P_0} \frac{P}{T} = k_0 \frac{P}{T}.$$

Supponiamo ora che la temperatura vari con l'altezza dal suolo, e che l'aria sia in equilibrio. La differenza di pressione $P(x_0) - P(x)$ tra le altezze x_0 e $x > x_0$ sarà allora uguale al peso dell'aria che occupa la colonna di base 1 compresa tra x_0 e x :

$$P(x_0) - P(x) = \int_{x_0}^x D(s) ds = k_0 \int_{x_0}^x \frac{P(s)}{T(s)} ds,$$

e quindi per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$P'(x) = -k_0 \frac{P(x)}{T(x)}.$$

Questa è un'equazione lineare, con $b = 0$ e $a = -\frac{k_0}{T}$; la cui soluzione è

$$P(x) = P_0 e^{-k_0 \int_{x_0}^x \frac{dh}{T(h)}}.$$

L'andamento della pressione dipende dalla variazione della temperatura con l'altezza. In genere si suppone che la temperatura abbia un andamento lineare: $T = T_0 - \vartheta x$, nel qual caso si ha

$$P(x) = P_0 e^{\frac{k_0}{\vartheta} \log \frac{T_0 - \vartheta x}{T_0}} = P_0 \left(\frac{T_0 - \vartheta x}{T_0} \right)^{\frac{k_0}{\vartheta}}$$

4. L'equazione di Bernoulli

A un'equazione lineare si riconduce l'*equazione di Bernoulli*:

$$u' = a(t)u + b(t)u^\alpha \quad [17.13]$$

ponendo $u = y^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Si ha $u' = \frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y'$, e quindi la [17.13] diventa

$$\frac{1}{1-\alpha} y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} y' = a y^{\frac{1}{1-\alpha}} + b y^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

e semplificando

$$y' = (1-\alpha)a(t)y + (1-\alpha)b(t)$$

che è un'equazione lineare. Una volta risolta quest'ultima, la soluzione della [17.13] sarà $u = y^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Esempio 17.7 L'equazione

$$u' = \frac{u}{2t} + u^3 \cos t$$

è un'equazione di Bernoulli con $\alpha = 3$. Con la trasformazione $u = \frac{1}{\sqrt{y}}$ otteniamo l'equazione lineare

$$y' = -\frac{y}{t} - 2 \cos t$$

la cui soluzione si trova con la [17.12]:

$$y(t) = \frac{c}{|t|} - 2 \sin t - 2 \frac{\cos t}{t}.$$

La soluzione dell'equazione di Bernoulli è allora

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c}{|t|} - 2 \sin t - 2 \frac{\cos t}{t}}}.$$

□

Esercizi

17.1. Verificare che l'equazione $u' = t^{p-1}f(t^{-p}u)$ può essere ridotta a variabili separabili con la trasformazione $u = t^p z$.

17.2. Risolvere le equazioni seguenti:

1. $u' = \frac{u+t}{t}$

2. $u' = t + \frac{u^2}{t^3}$

3. $u' = \sqrt{\frac{u}{t}} - \frac{u}{t}$

17.3. Il problema di Cauchy

Negli esempi finora esaminati, la soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine dipendeva da una costante arbitraria c , che poteva essere determinata mediante una condizione iniziale $u(t_0) = u_0$.

In altre parole, mentre un'equazione differenziale del primo ordine ammette infinite soluzioni (corrispondenti ai possibili valori della costante c), una sola tra queste assume, in un punto dato t_0 , il valore assegnato u_0 .

Così il problema naturale per le equazioni del primo ordine è il cosiddetto *problema di Cauchy*: trovare una soluzione dell'equazione differenziale $u' = f(t, u)$ che in un punto dato t_0 assuma il valore assegnato u_0 .

Si ha il seguente teorema

Teorema 17.1 *Supponiamo che la funzione $f(t, u)$ sia continua insieme alla sua derivata rispetto a u in una regione A del piano (t, u) , e sia (t_0, u_0) un punto interno ad A . Esiste allora un intorno $I(t_0, r_0)$ di t_0 tale che il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad [17.14]$$

ha una e una sola soluzione in $I(t_0, r_0)$.

Prima di dare la dimostrazione, facciamo qualche osservazione:

1. Il fatto che la soluzione del problema di Cauchy sia unica ha come conseguenza che i grafici di due soluzioni diverse u_1 e u_2 dell'equazione differenziale $u' = f(t, u)$ del primo ordine non possono incontrarsi.

Infatti, se essi si incontrassero in un punto (t_0, u_0) , allora sia u_1 che u_2 sarebbero soluzioni del problema di Cauchy [17.14], in contraddizione col teorema precedente, che vuole che tale problema abbia una sola soluzione.

Questo fatto giustifica il procedimento usato nel capitolo 10, e ripreso nel paragrafo precedente, per l'integrazione delle equazioni a variabili separabili, dove avevamo diviso per $f(u)$ senza preoccuparci dell'eventualità che potesse essere $f(u) = 0$. La ragione di ciò sta nel fatto che se h è uno zero della funzione $f(u)$ (cioè se $f(h) = 0$), la funzione costante $u(t) \equiv h$ è soluzione dell'equazione, e quindi, per quanto appena detto, nessun'altra soluzione può assumere il valore h .

In conclusione, se $u(t)$ è una soluzione dell'equazione $u' = f(u)g(t)$, allora o si ha $u(t) = h$, dove h è uno zero della funzione f , oppure $f(u(t))$ non si annulla mai. Di conseguenza, per trovare le soluzioni non costanti, si può tranquillamente dividere per $f(u)$.

2. Osserviamo infine che se si toglie l'ipotesi dell'esistenza della derivata parziale,⁴ $\frac{\partial f}{\partial u}$, può venir meno l'unicità della soluzione. Ad esempio il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = 3u^{\frac{2}{3}} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione $u = 0$, e anche $u = t^3$. La funzione $f(t, u) = 3u^{\frac{2}{3}}$ non è derivabile nel punto 0.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema di Cauchy. Per questo, osserviamo in primo luogo che una soluzione del problema di Cauchy [17.14] è anche soluzione dell'equazione integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad [17.15]$$

che si ottiene semplicemente integrando la relazione $u'(s) = f(s, u(s))$ tra t_0 e t , e imponendo la condizione iniziale $u(t_0) = u_0$.

Viceversa, e questa è l'osservazione più importante, se $u(t)$ è una soluzione *continua* dell'equazione [17.15], allora $u(t)$ è automaticamente derivabile, e risolve il problema di Cauchy [17.14].

Infatti per la [17.15] $u(t) - u_0$ è la funzione integrale di $f(s, u(s))$, che è continua perché composta delle funzioni continue $f(s, u)$ e $u(s)$. Ma allora $u(t)$ è derivabile, e si ha $u'(t) = f(t, u(t))$. Inoltre, sempre dalla [17.15], risulta $u(t_0) = u_0$, e quindi $u(t)$ è soluzione del problema di Cauchy [17.14].

In conclusione, per risolvere il problema [17.14] basterà trovare una soluzione continua dell'equazione integrale [17.15]. Noi dimostreremo che questa equazione ha una e una sola soluzione in un opportuno intorno di t_0 .

Per ipotesi, (t_0, u_0) è un punto interno ad A ; pertanto esisterà un rettangolo chiuso $R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$ contenuto in A . Indichiamo con M il massimo di $|f(t, u)|$ e con L il massimo di $|f_u(t, u)|$ in R ; massimi che esistono perché f e la sua derivata f_u sono per ipotesi funzioni continue.

Poniamo ora $r_0 = \min\left(r, \frac{\rho}{M}\right)$, e per $|t - t_0| < r_0$ definiamo per ricorrenza una successione di funzioni $u_k(t)$ ponendo

$$\begin{aligned} u_0(t) &= u_0 \\ u_{k+1}(t) &= u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_k(s)) ds. \end{aligned} \quad [17.16]$$

Facciamo vedere per induzione che per $|t - t_0| < r_0$ si ha $|u_k(t) - u_0| \leq \rho$. Questa relazione è vera per $k = 0$; se la supponiamo vera per k avremo che se $|s - t_0| < r_0$ il punto

⁴ Si veda comunque l'osservazione 17.3.

$(s, u_k(s))$ appartiene a R , e dunque si avrà $|f(s, u_k(s))| \leq M$. Di conseguenza

$$|u_{k+1}(t) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s))| ds \right| \leq M |t - t_0| \leq \rho$$

e quindi la stessa relazione vale per $k+1$. Per il principio di induzione, essa vale per ogni k .

Sempre per induzione si dimostra che per ogni $t \in I(t_0, r_0)$ risulta

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq M \frac{L^{k-1} |t - t_0|^k}{k!}. \quad [17.17]$$

La [17.17] vale per $k=1$. Infatti si ha

$$|u_1(t) - u_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u_0)| ds \right| \leq M |t - t_0|.$$

Supponiamo ora che sia vera per k e dimostriamola per $k+1$. Si ha

$$u_{k+1}(t) - u_k(t) = \int_{t_0}^t [f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s))] ds$$

e dunque

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s))| ds \right|. \quad [17.18]$$

D'altra parte per il teorema di Lagrange

$$f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s)) = f_u(s, \xi)(u_k(s) - u_{k-1}(s))$$

dove ξ è compreso tra $u_k(s)$ e $u_{k-1}(s)$. Poiché abbiamo dimostrato che ambedue questi punti sono compresi tra $u_0 - \rho$ e $u_0 + \rho$, anche ξ sarà compreso in questo intervallo, e quindi $|f(s, \xi)| \leq L$. Si ha allora

$$|f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s))| \leq L |u_k(s) - u_{k-1}(s)| \quad [17.19]$$

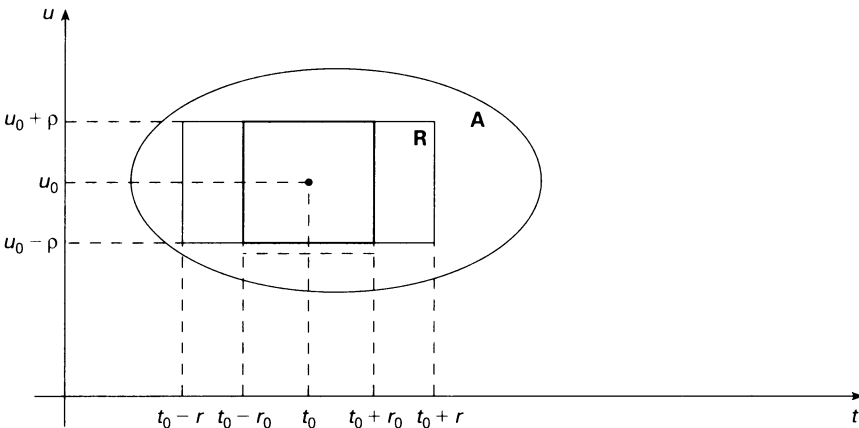


Figura 17.1

e quindi, avendo supposto vera la [17.17] per k :

$$|f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s))| \leq M \frac{L^k |s - t_0|^k}{k!}.$$

Introducendo quest'ultima disuguaglianza nella [17.18], si ha

$$|u_{k-1}(t) - u_k(t)| \leq M \frac{L^k}{k!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^k ds \right| = M \frac{L^k |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

che è esattamente la [17.17] per $k + 1$. Per induzione, la [17.17] è completamente dimostrata.

Dalla [17.17], prendendo l'estremo superiore, segue che

$$\|u_k - u_{k-1}\|_{I(t_0, r_0)} \leq M \frac{L^{k-1} r_0^k}{k!}. \quad [17.20]$$

La serie a secondo membro converge, e quindi converge anche la serie delle norme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k - u_{k-1}\|_{I(t_0, r_0)}.$$

Di conseguenza, la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} [u_k - u_{k-1}]$$

converge totalmente, e dunque uniformemente in $I(t_0, r_0)$. Poiché si tratta di una serie telescopica, la sua somma parziale è

$$\sum_{k=1}^n [u_k(t) - u_{k-1}(t)] = u_n(t) - u_0$$

e quindi la successione u_n convergerà uniformemente in $I(t_0, r_0)$ a una funzione $u(t)$. Siccome tutte le u_n sono continue, anche $u(t)$ sarà continua. Inoltre, essendo tutte le u_n comprese tra $u_0 - \rho$ e $u_0 + \rho$, anche la $u(t)$ sarà compresa nello stesso intervallo.

Passiamo ora al limite nella [17.16]. Il primo membro $u_{k-1}(t)$ tende a $u(t)$. Quanto al secondo membro, osserviamo che la successione $f(s, u_k(s))$ tende uniformemente a $f(s, u(s))$, dato che si ha $|f(s, u_k(s)) - f(s, u(s))| \leq L |u_k(s) - u(s)|$. Ma allora si può passare al limite sotto il segno di integrale, e quindi il secondo membro della [17.16] tende a

$$u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

e in conclusione la funzione $u(t)$ è soluzione della [17.15].

Resta da dimostrare che questa soluzione è unica. Siano per questo $u(t)$ e $v(t)$ due soluzioni del problema di Cauchy [17.14] in $I(t_0, r_0)$, e poniamo

$$t_1 = \sup\{\tau \in [t_0, t_0 + r_0) : u(t) = v(t) \text{ in } [t_0, \tau]\}.$$

Osserviamo che l'insieme a secondo membro non è vuoto, perché contiene almeno il punto t_0 . Si ha dunque $t_0 \leq t_1 \leq t_0 + r_0$ e $u(t_1) = v(t_1)$.

Supponiamo ora per assurdo che sia $t_1 < t_0 + r_0$. Si ha per $t > t_1$:

$$u(t) = u(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, u(s)) ds$$

$$v(t) = v(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, v(s)) ds$$

e quindi

$$u(t) - v(t) = \int_{t_1}^t [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds$$

da cui segue

$$|u(t) - v(t)| = \left| \int_{t_1}^t [f(s, u(s)) - f(s, v(s))] ds \right| \leq L \left| \int_{t_1}^t |u(s) - v(s)| ds \right|.$$

Sia ora r_1 un numero reale minore di $\frac{1}{L}$ e tale che $t_1 + r_1 < t_0 + r_0$. Dalla disuguaglianza precedente, prendendo l'estremo superiore in $I(t_1, r_1)$ si ha

$$\|u - v\|_{I(t_1, r_1)} \leq L r_1 \|u - v\|_{I(t_1, r_1)}$$

ed essendo $L r_1 < 1$ questo è possibile solo se $u = v$ in $I(t_1, r_1)$. Si ha dunque $u(t) = v(t)$ in $[t_1, t_1 + r_1]$, e questo contraddice la definizione di t_1 . Risulta pertanto $t_1 = t_0 + r_0$, e quindi $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in [t_0, t_0 + r_0)$.

In maniera analoga, posto

$$t_2 = \inf\{\vartheta \in (t_0 - r_0, t_0] : u(t) = v(t) \text{ in } [\vartheta, t_0]\}$$

si dimostra che $t_2 = t_0 - r_0$, e quindi $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in (t_0 - r_0, t_0]$, e quindi in conclusione $u(t) = v(t)$ in $I(t_0, r_0)$. $\square$

Osservazione 17.3 Osserviamo che l'ipotesi dell'esistenza e della continuità della derivata parziale f_u ci è servita solo per dimostrare la (17.19). Di conseguenza, essa può essere sostituita con l'ipotesi più generale che la funzione f sia *localmente lipschitziana* rispetto a u , cioè che per ogni rettangolo chiuso $R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$ contenuto in A esista una costante L (che in generale dipende dal rettangolo R , quindi dai valori iniziali t_0 e u_0 e dai raggi r e ρ) tale che

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L |u - v|$$

per ogni $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$ e ogni $u, v \in [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$.

Questa ipotesi è più generale; infatti ad esempio la funzione $f(t, u) = |u|$ la verifica con $L = 1$ (per la disuguaglianza triangolare si ha $||u| - |v|| \leq |u - v|$), ma non è derivabile. $\square$

Osservazione 17.4 Il teorema precedente si può estendere a sistemi di n equazioni differenziali in n funzioni incognite:

$$\begin{cases} u'_1 = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ u'_2 = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \dots \\ u'_n = f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

o più brevemente in forma vettoriale:

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \quad [17.21]$$

Se la funzione $\mathbf{f}(t, \mathbf{u})$ è continua in un aperto A di $\mathbf{R}^{n+1}$, e se verifica l'analogo della [17.19]:

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \leq L \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|,$$

allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

ha soluzione unica in un intorno di $(t_0, \mathbf{u}_0)$. La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente, e viene lasciata per esercizio. $\square$

Osservazione 17.5 Come abbiamo visto nell'osservazione 17.1, un'equazione di ordine n :

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \dots \\ u'_n = f(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

Per quest'ultimo, il problema di Cauchy consiste nell'assegnare i valori delle funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ al tempo t_0 ; ciò significa che per l'equazione corrispondente di ordine n si dovranno assegnare i valori della funzione u e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$. Nel caso delle equazioni del secondo ordine, si assegneranno dunque la funzione u e la sua derivata u' al tempo t_0 . $\square$

17.4. Prolungamento delle soluzioni

Il teorema 17.1 dimostrato nella sezione precedente ci garantisce l'esistenza *locale*, cioè in un intorno del punto iniziale t_0 , della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad [17.22]$$

In molti casi però interessa avere una soluzione *globale*, ossia definita nel più grande intervallo (a, b) possibile: si tratta allora di *prolungare* al massimo la soluzione ottenuta per mezzo del teorema 17.1. Si parla in questo caso di una *soluzione massimale*.

Il metodo migliore per eseguire questo prolungamento è di *incollare* due soluzioni, o più precisamente di usare il seguente teorema.

Proposizione 17.1 *Siano $v(t)$ e $w(t)$ due soluzioni dell'equazione differenziale $u' = f(t, u)$ definite rispettivamente negli intervalli aperti (a, b) e (c, d) , e supponiamo che nell'intersezione $(a, b) \cap (c, d)$ risulti $v(t) = w(t)$.*

Allora la funzione

$$u(t) = \begin{cases} v(t) & \text{in } (a, b) \\ w(t) & \text{in } (c, d) \end{cases}$$

è soluzione della stessa equazione in $(a, b) \cup (c, d)$.

Dimostrazione La funzione $u(t)$ è ben definita, perché se t appartiene sia ad (a, b) che a (c, d) si ha $v(t) = w(t)$.

Sia ora $t \in (a, b) \cup (c, d)$. Se $t \in (a, b)$, esisterà un intorno I di t tutto contenuto in (a, b) , e quindi $u(t) = v(t)$ in I . Ora se due funzioni coincidono in I , anche le loro derivate saranno uguali, e quindi

$$u'(t) = v'(t) = f(t, v(t)) = f(t, u(t)).$$

La funzione u è dunque soluzione in (a, b) . In maniera analoga si dimostra che u è soluzione in (c, d) , e dunque in $(a, b) \cup (c, d)$. $\square$

Il risultato precedente non richiede nessuna ipotesi sulla funzione $f(t, u)$. Se però questa funzione verifica le ipotesi del teorema 17.1, cioè se è continua insieme alla sua derivata rispetto a u ,⁵ è sufficiente supporre che le due soluzioni siano uguali in un solo punto. Più precisamente, abbiamo

Proposizione 17.2 *Supponiamo che la funzione $f(t, u)$ sia continua e localmente lipschitziana rispetto a u , e siano $v(t)$ e $w(t)$ due soluzioni dell'equazione differenziale $u' = f(t, u)$, definite nell'intervallo aperto (α, β) . Se esiste un punto t_1 tale che $v(t_1) = w(t_1)$, allora $v(t) = w(t)$ in (α, β) .*

⁵ In realtà, qui come in seguito, basta che sia localmente lipschitziana rispetto a u .

Dimostrazione Se E l'insieme dei punti di (t_1, β) in cui $v \neq w$. Supponiamo per assurdo che E non sia vuoto, e sia t_0 il suo estremo inferiore. Si ha $t_1 \leq t_0 < \beta$, e $v(t_0) = w(t_0)$; infatti questo è vero per ipotesi se $t_0 = t_1$, mentre se $t_0 > t_1$ segue dal fatto che $v(t) = w(t)$ per $t_1 < t < t_0$ e dalla continuità di v e w .

Per il teorema 17.1, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = v(t_0) \end{cases}$$

ha soluzione unica in un intorno di t_0 . Ma v e w sono soluzioni, e quindi deve essere $v(t) = w(t)$ in un intorno di t_0 , contro la definizione di t_0 .

Si ha allora $v(t) = w(t)$ in (t_1, β) . In maniera analoga si dimostra che $v = w$ in (α, t_1) . $\square$

Osservazione 17.6 Lo stesso risultato vale per i sistemi del primo ordine: se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ sono due soluzioni di un sistema del primo ordine verificante le ipotesi del teorema 17.1, e se per qualche t_0 si ha $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{v}(t_0)$, allora $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$ per ogni $t \in (a, b) \cap (c, d)$.

Tradotto per le equazioni di ordine superiore, il risultato precedente dice che se $u(t)$ e $v(t)$ sono soluzioni dell'equazione [17.1] di ordine n (sempre verificante le ipotesi del teorema 17.1), e se per qualche t_0 risulta $u(t_0) = v(t_0)$, $u'(t_0) = v'(t_0)$, ..., $u^{(n-1)}(t_0) = v^{(n-1)}(t_0)$, allora $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in (a, b) \cap (c, d)$. Ad esempio per le equazioni del secondo ordine, se $u(t_0) = v(t_0)$ e $u'(t_0) = v'(t_0)$, allora $u(t) = v(t)$ per ogni $t \in (a, b) \cap (c, d)$. $\square$

Possiamo ora dimostrare l'esistenza di una soluzione massimale.

Definizione 17.1 Siano u_1 e u_2 due soluzioni dell'equazione $u' = f(t, u)$ negli intervalli $I_1 = (a_1, b_1)$ e $I_2 = (a_2, b_2)$ rispettivamente. Diremo che u_2 è un prolungamento di u_1 se $I_1 \subset I_2$ e se in I_1 si ha $u_2 = u_1$.

Una soluzione u si dirà massimale se non ammette nessun prolungamento.

Teorema 17.2 Ogni soluzione u_0 dell'equazione $u' = f(t, u)$, con $f(t, u)$ continua e localmente lipschitziana rispetto a u , ammette un prolungamento massimale.

Dimostrazione Sia $\mathcal{U}$ l'insieme di tutti i prolungamenti di u_0 . Ogni $v \in \mathcal{U}$ è definita in un intervallo $I_v = (a_v, b_v)$ che contiene I_{u_0} , e coincide con u_0 in I_{u_0} . Per la proposizione precedente, due prolungamenti v e w coincideranno in $I_v \cap I_w$.

Se poniamo

$$a = \inf_{v \in \mathcal{U}} a_v, \quad b = \sup_{v \in \mathcal{U}} b_v,$$

per ogni $t \in (a, b)$ esiste una $v \in \mathcal{U}$ tale che $t \in I_v$. Per tale t poniamo $u(t) = v(t)$.

La funzione u è ben definita; infatti se t appartiene anche a I_w si ha $v(t) = w(t)$, e quindi il valore di $u(t)$ non dipende dalla funzione v scelta.

La funzione u è soluzione dell'equazione $u' = f(t, u)$ in (a, b) . Infatti per ogni $t \in (a, b)$ esiste una $v \in \mathcal{U}$ tale che $t \in I_v$. Si ha allora $u = v$ in un intorno di t , e quindi

$$u'(t) = v'(t) = f(t, v(t)) = f(t, u(t)).$$

Infine, poiché tutte le funzioni sono uguali a u_0 in I_{u_0} , sarà anche $u = u_0$ in I_{u_0} , e quindi u è un prolungamento di u_0 . Che poi sia massimale, segue immediatamente dalla definizione di u . □

Il teorema precedente (che tra l'altro vale anche nell'ipotesi che $f(t, u)$ sia solo continua) non ci dice nulla sull'intervallo (a, b) in cui la soluzione massimale è definita, e in generale questo è un problema piuttosto delicato. Lasciando da parte la situazione generale, noi tratteremo un caso particolare, ma di un certo interesse.

Supporremo che la funzione $f(t, u)$ sia definita per t in un intervallo $I = (a, b)$ (che può essere anche una semiretta o tutta la retta) e per ogni $u \in \mathbf{R}$.

Teorema 17.3 *Sia $f(t, u)$ una funzione definita in $A = I \times \mathbf{R}$, continua e localmente lipschitziana rispetto a u . Supponiamo che esista una costante K tale che*

$$|f(t, u)| \leq K(1 + |u|) \quad [17.23]$$

in $I \times \mathbf{R}$. Allora ogni soluzione massimale dell'equazione $u' = f(t, u)$ è definita in tutto I .

Dimostrazione Nel teorema 17.1 abbiamo dimostrato che se $(t_0, u_0) \in A$ e $R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho] \subset A$, esiste una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

in $I(t_0, r_0)$, dove $r_0 = \min \left\{ r, \frac{\rho}{M} \right\}$, e M è il massimo di $|f(t, u)|$ in R .

Nel nostro caso, dato che $A = I \times \mathbf{R}$, il numero ρ si può prendere ad arbitrio; se poniamo $\rho = 1 + |u_0|$ si ha $|u| \leq |u_0| + \rho = 1 + 2|u_0|$ in $[u_0 - \rho, u_0 + \rho]$, e quindi

$$|f(t, u)| \leq K(1 + |u|) \leq 2K(1 + |u_0|)$$

cosicché nel teorema di Cauchy 17.1 si può prendere

$$r_0 = \min \left\{ r, \frac{\rho}{2K(1 + |u_0|)} \right\} = \min \left\{ r, \frac{1}{2K} \right\}.$$

Ciò premesso, sia v una soluzione massimale, definita in un intervallo (α, β) , e supponiamo per assurdo che sia $\beta < b$. Prendiamo un numero positivo $r < \frac{1}{2K}$ e un punto t_0 tale che

$$a < t_0 - r < t_0 < \beta < t_0 + r < b.$$

Si ha allora $r_0 = r$, e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = v(t_0) \end{cases}$$

ha soluzione $z(t)$ in $(t_0 - r, t_0 + r)$, con $t_0 + r > \beta$. Ma allora la funzione

$$w(t) = \begin{cases} v(t) & \text{in } (\alpha, \beta) \\ z(t) & \text{in } (t_0 - r, t_0 + r) \end{cases}$$

è un prolungamento di v , contro l'ipotesi che v sia massimale. $\square$

Osservazione 17.7 La condizione [17.23] si può indebolire; basterà infatti supporre che per ogni intervallo aperto $J \subset \bar{J} \subset I$ esista una costante $K(J)$ tale che

$$|f(t, u)| \leq K(J)(1 + |u|) \quad \text{in } J \times \mathbf{R}.$$

Infatti per il teorema precedente, ogni soluzione massimale è definita in tutto J , e quindi in tutto $I = (a, b)$, dato che J è un arbitrario intervallo contenuto in I .

Risultati simili valgono per i sistemi del primo ordine di n equazioni in n incognite. In particolare la maggiorazione

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{u})\| \leq K(J)(1 + \|\mathbf{u}\|) \quad [17.24]$$

vale per i sistemi lineari

$$\mathbf{u}'(t) = A(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t)$$

con i coefficienti $a_{ij}(t)$ (le componenti della matrice $A(t)$) e il termine noto $\mathbf{b}(t)$ continui in un intervallo $I = (a, b)$.

Infatti, se $J = (c, d)$ con $[c, d] \subset I$, i coefficienti e il termine noto sono limitati in $[c, d]$ per il teorema di Weierstrass, e quindi vale la [17.24]. Pertanto le soluzioni massimali sono definite in tutto I .

Infine, ricordando che un'equazione di ordine superiore è equivalente a un sistema del primo ordine, lo stesso risultato vale per le equazioni lineari a coefficienti continui.

17.5. Le equazioni lineari

Si chiama *lineare* un'equazione differenziale del tipo

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t), \quad [17.25]$$

dove $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ e f sono funzioni continue in un intervallo $I = (a, b)$. Abbiamo appena visto che il problema di Cauchy per questa equazione ha soluzione unica, che si può prolungare a tutto l'intervallo I .

La ragione dell'appellativo "lineare" per queste equazioni è presto detta. Se si pone

$$P(D)v = v^{(n)} + a_{n-1}(t)v^{(n-1)} + \dots + a_1(t)v' + a_0(t)v \quad [17.26]$$

si ha per ogni coppia λ, μ di numeri reali:

$$P(D)(\lambda v + \mu w) = \lambda P(D)v + \mu P(D)w.$$

In altre parole, l'applicazione che a ogni funzione v di classe $C^n(I)$ fa corrispondere la funzione $P(D)v$ è lineare.

Come conseguenza, il nucleo di questa applicazione

$$V_0 = \{v \in C^n(I) : P(D)v = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $C^n(I)$; se infatti v e w appartengono a V_0 , cioè sono soluzioni dell'equazione omogenea

$$P(D)u = u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = 0, \quad [17.27]$$

anche $\lambda v + \mu w$ è soluzione della stessa equazione.

Teorema 17.4 *Lo spazio V_0 ha dimensione n .*

Dimostrazione Dobbiamo far vedere che possiamo trovare n soluzioni linearmente indipendenti, e che ogni altra soluzione è una combinazione lineare di queste.

Per questo fissiamo un punto $t_0 \in I$ e risolviamo gli n problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} P(D)u_1 = 0 \\ u_1(t_0) = 1 \\ u_1'(t_0) = 0 \\ \dots \\ u_1^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} P(D)u_2 = 0 \\ u_2(t_0) = 0 \\ u_2'(t_0) = 1 \\ \dots \\ u_2^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} P(D)u_n = 0 \\ u_n(t_0) = 0 \\ u_n'(t_0) = 0 \\ \dots \\ u_n^{(n-1)}(t_0) = 1 \end{cases}$$

Siano ora $c_1, c_2, \dots, c_n$ dei numeri reali tali che $u(t) = c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t) \equiv 0$. Le derivate di qualsiasi ordine della funzione u , che vale identicamente zero, sono anch'esse tutte nulle in I , e in particolare in t_0 . D'altra parte per la definizione di u si ha $u(t_0) = c_1, u'(t_0) = c_2, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = c_n$, e quindi deve essere $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Le funzioni $u_1, u_2, \dots, u_n$ sono dunque linearmente indipendenti.

Facciamo ora vedere che ogni altra soluzione $u(t)$ dell'equazione $P(D)u = 0$ è una combinazione lineare delle n soluzioni $u_1, \dots, u_n$. Per questo, poniamo

$$v(t) = u(t_0)u_1(t) + u'(t_0)u_2(t) + \dots + u^{(n-1)}(t_0)u_n(t).$$

La funzione $v(t)$ è soluzione dell'equazione $P(D)v = 0$, e inoltre, ricordando la definizione delle funzioni $u_1, \dots, u_n$, si ha

$$v(t_0) = u(t_0), \quad v'(t_0) = u'(t_0), \quad \dots, \quad v^{(n-1)}(t_0) = u^{(n-1)}(t_0).$$

Di conseguenza, $u(t)$ e $v(t)$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy; per l'unicità della soluzione, deve essere $u = v$, e quindi $u(t)$ si scrive come una combinazione lineare delle soluzioni $u_1, \dots, u_n$. $\square$

Veniamo ora all'equazione non omogenea [17.25], e siano v e w due sue soluzioni. Posto $u = v - w$, si ha

$$P(D)u = P(D)(v - w) = P(D)v - P(D)w = f - f = 0$$

e quindi $v - w$ è soluzione dell'equazione omogenea [17.27]. Viceversa, se w è una soluzione dell'equazione non omogenea e u dell'equazione omogenea, la loro somma $v = u + w$ è soluzione dell'equazione non omogenea. Di conseguenza, fissata una soluzione particolare dell'equazione non omogenea [17.25], tutte le altre si ottengono aggiungendo a questa le soluzioni dell'equazione omogenea [17.27].

17.6. Equazioni lineari a coefficienti costanti

Quando dalle equazioni del primo ordine si passa a quelle di ordine superiore, solo in qualche caso si riesce a dare una soluzione esplicita. Uno di questi è quello delle equazioni *lineari a coefficienti costanti*, cioè delle equazioni del tipo

$$P(D)u = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = f(t), \quad [17.28]$$

in particolare quando l'equazione è *omogenea*:

$$P(D)u = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = 0. \quad [17.29]$$

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che le soluzioni di quest'ultima equazione formano uno spazio vettoriale di dimensione n , e quindi si possono ottenere tutte come combinazioni lineari di n di loro linearmente indipendenti; la soluzione generale della [17.28] si ottiene poi aggiungendo una sua soluzione particolare alla soluzione generale della [17.29].

Il problema della soluzione della [17.28] si spezza dunque in due: trovare la soluzione generale dell'omogenea associata, e una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. In genere, quest'ultimo problema è più difficile del primo.

Cominciamo dall'equazione omogenea. Per questa osserviamo che risulta

$$D^k e^{\lambda t} = \lambda^k e^{\lambda t}$$

e dunque⁶

$$P(D)e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^n a_k D^k e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = e^{\lambda t} P(\lambda).$$

⁶ Nel nostro caso, si ha $a_n = 1$.

Di conseguenza, se λ è una radice dell'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$, la funzione $e^{\lambda t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea $P(D)u = 0$.

Noi sappiamo che l'equazione $P(\lambda) = 0$, di grado n , ha n radici $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Se queste sono tutte distinte, si può dimostrare che le soluzioni corrispondenti $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ sono linearmente indipendenti, e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}. \quad [17.30]$$

Esempio 17.8 Consideriamo l'equazione

$$u'' + 3u' - 4u = 0.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, che ha soluzioni 1 e -4 . La soluzione generale dell'equazione sarà allora

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-4t}.$$

Esempio 17.9 Prendiamo in esame l'equazione

$$u''' - u' = 0.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^3 - \lambda = 0$, che ha soluzioni $-1, 0$ e 1 . La soluzione dell'equazione differenziale sarà allora

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 + c_3 e^t$$

dato che $e^{0t} = 1$. □

Resta da considerare il caso in cui l'equazione $P(\lambda) = 0$ abbia radici multiple.

Per questo cominciamo dalla relazione

$$D^k(tu) = tD^k u + kD^{k-1}u \quad [17.31]$$

che si dimostra facilmente per induzione, dalla quale segue

$$P(D)(tu) = \sum_{k=0}^n a_k D^k(tu) = t \sum_{k=0}^n a_k D^k u + \sum_{k=1}^n k a_k D^{k-1} u = tP(D)u + P'(D)u. \quad [17.32]$$

In particolare, se $u = e^{\lambda t}$, si ha

$$P(D)(te^{\lambda t}) = tP(D)e^{\lambda t} + P'(D)e^{\lambda t} = tP(\lambda)e^{\lambda t} + P'(\lambda)e^{\lambda t}.$$

Se ora λ è una radice doppia dell'equazione $P(\lambda) = 0$, risulta $P'(\lambda) = 0$ e quindi

$$P(D)(te^{\lambda t}) = 0.$$

Abbiamo così trovato due soluzioni dell'equazione $P(D)u = 0$, $e^{\lambda t}$ e $te^{\lambda t}$.

Analogamente, dato che risulta

$$P(D)(t^2u) = tP(D)(tu) + P'(D)(tu) = t^2P(D)u + 2tP'(D)u + P''(D)u \quad [17.33]$$

si ha

$$P(D)(t^2e^{\lambda t}) = t^2P(\lambda)e^{\lambda t} + 2tP'(\lambda)e^{\lambda t} + P''(\lambda)e^{\lambda t} \quad [17.34]$$

e quindi, se λ è una radice tripla, le tre funzioni

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad t^2e^{\lambda t}$$

sono soluzioni dell'equazione $P(D)u = 0$.

In generale, si dimostra che se λ è una radice di ordine m dell'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$, le funzioni

$$e^{\lambda t}, \quad te^{\lambda t}, \quad t^2e^{\lambda t}, \quad \dots, \quad t^{m-1}e^{\lambda t}$$

sono soluzioni dell'equazione differenziale $P(D)u = 0$.

Tutte queste soluzioni sono linearmente indipendenti.

In conclusione, per ogni radice λ dell'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$ abbiamo trovato un numero di soluzioni indipendenti uguale alla molteplicità di λ . Poiché la somma delle molteplicità delle radici è uguale al grado n dell'equazione, avremo n soluzioni linearmente indipendenti.

Esempio 17.10 Risolviamo l'equazione

$$u'' - 2u' + 1 = 0.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, che ha la radice doppia $\lambda = 1$. La soluzione sarà allora

$$u(t) = c_1e^t + c_2te^t = (c_1 + c_2t)e^t. \quad \square$$

Esempio 17.11 Prendiamo ora in esame l'equazione

$$u''' - u'' = 0.$$

Si ha

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 = 0$$

che ha radici 1 (semplice) e 0 (doppia). La soluzione sarà pertanto

$$u(t) = c_1e^t + c_2 + c_3t. \quad \square$$

Le equazioni omogenee a coefficienti costanti $P(D)u = 0$ sono così completamente risolte, o meglio sono ricondotte alla soluzione dell'equazione algebrica $P(\lambda) = 0$. C'è però un punto debole: se una delle radici di quest'ultima equazione è complessa, la corrispondente soluzione $e^{\lambda t}$ sarà anch'essa complessa.

Per ovviare a questo inconveniente (se partiamo da un'equazione a coefficienti reali vorremmo ottenere soluzioni reali), osserviamo che siccome $P(\lambda)$ è un polinomio a coefficienti reali, se $\lambda = \alpha + i\omega$ è una radice, lo è anche $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$, con la stessa molteplicità. A queste radici corrispondono le soluzioni

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t) \\ e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t - i \sin \omega t).$$

Ma allora saranno soluzioni anche le funzioni reali

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \quad \text{e} \quad e^{\alpha t} \sin \omega t$$

che sono combinazioni lineari delle precedenti. Se poi le radici λ e $\bar{\lambda}$ hanno molteplicità p , avremo le soluzioni

$$t^k e^{\alpha t} \cos \omega t \quad \text{e} \quad t^k e^{\alpha t} \sin \omega t$$

con $k = 1, 2, \dots, p-1$. Anche queste soluzioni sono tutte linearmente indipendenti.

Si ha dunque in conclusione:

1. Per ogni radice reale λ , di molteplicità m , dell'equazione $P(\lambda) = 0$, avremo le soluzioni

$$u(t) = e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t},$$

in totale m soluzioni linearmente indipendenti.

2. Per ogni coppia di radici complesse $\alpha + i\omega$ e $\alpha - i\omega$, di molteplicità p , avremo le soluzioni

$$e^{\alpha t} \cos \omega t, t e^{\alpha t} \cos \omega t, \dots, t^{p-1} e^{\alpha t} \cos \omega t \\ e^{\alpha t} \sin \omega t, t e^{\alpha t} \sin \omega t, \dots, t^{p-1} e^{\alpha t} \sin \omega t,$$

per un totale di $2p$ soluzioni linearmente indipendenti.

In totale, abbiamo trovato tante soluzioni linearmente indipendenti quante sono le radici dell'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$, ognuna contata con la sua molteplicità; in totale n soluzioni linearmente indipendenti.

L'equazione omogenea [17.29] è così completamente risolta, una volta che si siano trovate le radici dell'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$.

Esempio 17.12 L'equazione

$$u''' + u' = 0$$

si riduce all'equazione algebrica $\lambda^3 + \lambda = 0$, che ha soluzioni 0 e $\pm i$, tutte semplici. Si ha allora la soluzione

$$u(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t. \quad \square$$

Esempio 17.13 Consideriamo ora l'equazione

$$u'' - 4u' + 5 = 0.$$

Il polinomio $\lambda^2 - 4\lambda + 5$ ha radici complesse $2 + i$ e $2 - i$. Si ha dunque la soluzione

$$u(t) = c_1 e^{2t} \sin t + c_2 e^{2t} \cos t. \quad \square$$

Veniamo ora all'equazione non omogenea

$$P(D)u = u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = f(t).$$

Per quest'ultima non esistono metodi di soluzione se non in casi particolari. Il principale di questi è quando il secondo membro è del tipo

$$f(t) = H(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + K(t)e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

dove H e K sono dei polinomi.

In questo caso si può procedere come abbiamo fatto nel capitolo 10, cercando una soluzione del tipo

$$v(t) = t^k [M(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + N(t)e^{\alpha t} \sin \beta t]$$

con M e N polinomi di grado uguale al massimo tra i gradi di H e K , e con $k = 0$ se $\alpha + i\beta$ non è radice dell'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$, mentre se $\alpha + i\beta$ è soluzione di $P(\lambda) = 0$, k è la sua molteplicità.

Notiamo che uno o ambedue i coefficienti α e β , possono essere 0 (nell'ultimo caso $f(t)$ si riduce a un polinomio), e che i polinomi H e K possono essere di grado 0, cioè delle costanti.

Naturalmente, se il secondo membro è la somma di due o più di queste funzioni, si risolverà l'equazione per ognuna di esse, e poi si sommeranno le soluzioni.

Esempio 17.14 Consideriamo l'equazione

$$u''' - u' = t + 1.$$

L'equazione caratteristica $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = 0$ ha radici 0, 1 e -1 , e quindi l'equazione omogenea

$$u''' - u' = 0$$

ha soluzione $c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$. Il secondo membro ha $\lambda = 0$, che è soluzione dell'equazione caratteristica, di molteplicità 1. Cercheremo quindi una soluzione particolare della forma $v(t) = t(at + b) = at^2 + bt$.

Si ha $v' = 2at + b$, $v'' = 2a$ e $v''' = 0$, e quindi $v''' - v' = -2at - b = t + 1$. Avremo dunque $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -1$, e pertanto la soluzione generale dell'equazione proposta sarà

$$u(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \frac{1}{2} t^2 - t. \quad \square$$

Quando il secondo membro non è il prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale (e/o una funzione trigonometrica) non c'è un metodo generale di soluzione. A volte, specie per le equazioni di secondo ordine (o comunque di ordine

basso) può essere utile il metodo di variazione della costante, che nel capitolo 10 abbiamo sperimentato con successo per le equazioni del primo ordine.

Esempio 17.15 Risolviamo l'equazione

$$u'' - u = \frac{1}{1 + e^{2t}}.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 1 = 0$, che ha soluzioni $\lambda = \pm 1$. La soluzione dell'equazione omogenea è pertanto $c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa, della forma

$$v = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}.$$

Si ha

$$v' = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + c_1' e^t + c_2' e^{-t}.$$

La chiave del metodo sta nell'osservazione che noi abbiamo due funzioni a nostra disposizione, $c_1(t)$ e $c_2(t)$ per risolvere una sola equazione. Possiamo allora imporre una condizione supplementare, e precisamente

$$c_1' e^t + c_2' e^{-t} = 0. \quad [17.35]$$

Così facendo, abbiamo $v' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$, e nella derivata seconda v'' compariranno solo le derivate prime delle funzioni c_1 e c_2 , e non le derivate seconde:

$$v''(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_1' e^t - c_2' e^{-t}.$$

Introducendo le espressioni di v e v'' (e quando c'è, anche v') nell'equazione, otteniamo

$$c_1' e^t - c_2' e^{-t} = \frac{1}{1 + e^{2t}}.$$

Questa equazione con la [17.35] costituisce un sistema di due equazioni in due incognite, da cui si ricava facilmente

$$c_1' = \frac{1}{2e^t(1 + e^{2t})} \quad c_2' = -\frac{e^t}{2(1 + e^{2t})}.$$

Integrando, si trova

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \int \frac{e^t dt}{e^{2t}(1 + e^{2t})} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2(1 + u^2)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{1 + u^2} \right) du = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} + \arctg u \right) = -\frac{1}{2} (e^{-t} + \arctg e^t). \end{aligned}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \int \frac{e^t dt}{1 + e^{2t}} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} = -\frac{1}{2} \arctg u = -\frac{1}{2} \arctg e^t.$$

In conclusione, la soluzione dell'equazione proposta è

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \operatorname{arctg} e^t. \quad \square$$

Nel caso di un'equazione del terzo ordine, si avranno tre funzioni arbitrarie, e si potranno imporre due condizioni supplementari, in modo da giungere a un sistema con le sole derivate prime.

Esempio 17.16 Risolviamo l'equazione

$$u''' + u'' = \frac{1}{1 + e^t}.$$

La soluzione dell'omogenea associata è $c_1 e^{-t} + c_2 t + c_3$; cerchiamo dunque una soluzione

$$v(t) = c_1(t) e^{-t} + c_2(t) t + c_3(t).$$

Si ha $v' = -c_1 e^{-t} + c_2 + c_1' e^{-t} + c_2' t + c_3'$ da cui, ponendo

$$c_1' e^{-t} + c_2' t + c_3' = 0$$

si ottiene $v'' = c_1 e^{-t} - c_1' e^{-t} + c_2'$, e ponendo ancora

$$-c_1' e^{-t} + c_2' = 0$$

avremo $v''' = -c_1 e^{-t} + c_1' e^{-t}$.

Inserendo le derivate trovate nell'equazione di partenza, si ottiene

$$c_1' = \frac{e^t}{1 + e^t}$$

Dalle altre equazioni si ricava poi $c_2' = c_3' = \frac{1}{1 + e^t}$, e quindi

$$c_1 = \int \frac{e^t}{1 + e^t} dt, \quad c_2 = c_3 = \int \frac{dt}{1 + e^t}.$$

Si ha allora

$$c_1 = \log(1 + e^t), \quad c_2 = c_3 = t - \log(1 + e^t)$$

e quindi la soluzione dell'equazione proposta è

$$u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t + c_3 + e^{-t} \log(1 + e^t) + (1 + t)(t - \log(1 + e^t)).$$

Si noterà che se al secondo membro si ha una funzione $f(t)$, il calcolo esplicito dei coefficienti dipende dall'integrazione di $f(t)$ e di $f(t)e^t$, che si può fare esplicitamente solo di rado. In ogni caso il metodo della variazione delle costanti permette di ridurre l'equazione differenziale alle quadrature, cioè al calcolo di alcuni integrali. $\square$

Esercizi

17.3. Dimostrare che se $a \neq b$, le funzioni e^{at} ed e^{bt} sono linearmente indipendenti.

17.4. Dimostrare che $e^{at} \sin bt$ ed $e^{at} \cos bt$ sono linearmente indipendenti.

17.5. Integrare le seguenti equazioni differenziali:

1. $u'' - 3u' = 10 \sin t$

5. $z''' - z' = x \sin x + \cos x$

2. $u'' - u' - 2u = t - 1 + e^t$

6. $y'' + 4y = \operatorname{tg} t$

3. $u'' + 2u' - 3u = te^{-t}$

7. $y^{(5)} - y^{(4)} + y''' - y'' + y' - y = t^2$

4. $y'' + y = t - \cos t$

8. $u'' + u = \frac{1}{1 + \sin^2 t}$

17.7.* Soluzioni numeriche

Nella maggior parte dei casi, è impossibile risolvere esplicitamente un'equazione differenziale, e si deve ricorrere a soluzioni approssimate. Naturalmente, non sarà possibile trovare la soluzione generale dell'equazione, ma si dovrà affrontare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad [17.36]$$

che ha soluzione unica.

Da un punto di vista numerico, si tratta di fissare dei punti $t_1, t_2, \dots, t_n$, e di calcolare in corrispondenza di essi dei valori $u_1, u_2, \dots, u_n$, che approssimino nel modo migliore i valori $u(t_1), u(t_2), \dots, u(t_n)$ assunti dalla soluzione nei punti dati. Se i punti $t_1, t_2, \dots, t_n$ sono abbastanza fitti, i valori trovati permetteranno di costruire un grafico approssimato della soluzione $u(t)$.

Naturalmente sarebbe auspicabile avere una stima dell'errore che si commette, in modo da poterlo limitare entro limiti stabiliti. Questo però è piuttosto complicato, e noi ci limiteremo a un algoritmo molto primitivo, che consiste nel prendere i punti $t_1, \dots, t_n$ equispaziati, fissando a priori il passo d .

Il punto di partenza di ogni soluzione numerica è il fatto che l'equazione differenziale $u' = f(t, u)$ ci permette di calcolare il valore della derivata prima conoscendo quello della funzione.

Cominciamo dal punto t_0 ; si ha $u(t_0) = u_0$ e quindi $u'(t_0) = f(t_0, u_0)$. Di conseguenza la retta tangente nel punto $(t_0, u(t_0))$ ha equazione

$$u = u_0 + f(t_0, u_0)(t - t_0).$$

Fissiamo ora un passo d , e nell'intervallo $(t_0, t_0 + d)$ approssimiamo la nostra soluzione con la tangente; troveremo allora un valore approssimato

$$u_1 = u_0 + f(t_0, u_0)d$$

relativo al punto $t_1 = t_0 + d$.

Da questo valore possiamo ripartire per calcolare la funzione u nel punto $t_2 = t_0 + 2d$, e così di seguito. In generale, se u_k è il valore della funzione nel punto $t_k = t_0 + kd$, si avrà dall'equazione

$$u'(t_k) = f(t_k, u_k)$$

e dunque, approssimando la soluzione con la tangente:

$$u_{k+1} = u_k + df(t_k, u_k). \quad [17.37]$$

La [17.37] è una relazione ricorsiva dalla quale, conoscendo u_0 , si ricavano successivamente i valori u_1, u_2 , e così via. Si ottengono così i valori della soluzione per $t > t_0$ se $d > 0$, e quelli per $t < t_0$ se $d < 0$.

Il limite di questo metodo sta nel fatto che gli errori commessi si possono comporre in maniera non lineare.

Supponiamo infatti che la soluzione sia convessa, cioè che stia sempre sopra la tangente, e che la funzione $f(t, u)$ sia crescente con u . Dopo il primo passo troveremo un valore u_1 minore di quello vero. Siccome la funzione f è crescente, questo ci fornisce un valore della derivata prima in t_1 più piccolo del dovuto.

Quando andiamo ad applicare di nuovo il metodo nell'intervallo (t_1, t_2) , otterremo un valore u_2 minore del vero per due ragioni: la prima è, come in precedenza, che la tangente sta sotto il grafico; la seconda è che abbiamo preso la derivata, e dunque la pendenza della tangente, minore del dovuto. Di nuovo questo errore si ripercuote amplificato nel terzo intervallo, e così via.

Naturalmente, quella che abbiamo descritto è la situazione peggiore; comunque bisognerà prendere il passo abbastanza piccolo, in modo da tenere l'errore sotto controllo.⁷

Un'approssimazione migliore si ottiene calcolando anche la derivata seconda. Vediamo come si può fare con un esempio.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{t}{1+u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad [17.38]$$

Se deriviamo l'equazione, otteniamo

$$u''(t) = \frac{1}{1+u(t)} - \frac{t}{(1+u(t))^2} u'(t)$$

⁷ In realtà, una politica migliore consiste nel prendere un passo variabile, più grande all'inizio e poi via via sempre più piccolo.

e ricavando u' dall'equazione (17.38):

$$u''(t) = \frac{1}{1+u(t)} - \frac{t^2}{(1+u(t))^3}.$$

Dalla conoscenza della soluzione u in un punto, possiamo quindi ricavare oltre alla derivata prima anche la derivata seconda.⁸

Possiamo allora approssimare la soluzione, invece che con la retta tangente, con il polinomio di Taylor di ordine 2:

$$u(t_0) + u'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}u''(t_0)(t - t_0)^2$$

dove $u'(t_0)$ e $u''(t_0)$ si possono ricavare nel modo detto dall'equazione differenziale.

Se si prende $t = t_1 = t_0 + d$ si ottiene un valore approssimato u_1 , dal quale si può ripartire per ottenere u_2 , e così via.

Il programma che segue permette di calcolare la soluzione del problema di Cauchy [17.38], con ambedue i metodi descritti, e di confrontare i valori ottenuti con quelli della soluzione esplicita

$$u(t) = \sqrt{1+t^2} - 1.$$

Con minimi cambiamenti, può essere usato per una qualsiasi equazione differenziale del primo ordine.

```

10 REM Soluzione del problema di Cauchy u'=t/(1+u) , u(0) = 0.
20 DEF FNF(S,W) = S/(1+W)
30 DEF FNG(S,W) = 1/(1+W) - S*S/((1+W)*(1+W)*(1+W))
40 INPUT "Punto iniziale: "; A
50 INPUT "Valore iniziale: "; Z
60 REM Chiede se si vuole la soluzione per t>t_{0} o per
   t<t_{0}.
70 INPUT "Avanti o indietro? a/i "; A$
80 REM Passo
90 P = .01: IF A$ = "i" THEN P = -P
100 K = 0: H = 0: U = Z: V = Z: T = A
110 REM I risultati vengono scritti ogni 10 passi.
120 REM L'ultima è la soluzione esplicita.
130 IF K MOD 10<>0 THEN 150
140 H = H + 1: PRINT T;"   ";U;"   "; V;"   "; SQR(T*T-A*A+
   + (Z+1)*(Z+1)) - 1
150 REM Primo metodo: u(t_{n+1}) = u(t_{n}) + u'(t_{n})d.
160 U = U + FNF(T,U) * P
170 REM Secondo metodo: u(t_{n+1}) = u(t_{n}) + u'(t_{n})d +
   + u''(t_{n})d^2/2.
```

⁸ Volendo, si può proseguire, ottenendo la derivata terza, quarta ecc.

```

180 V = V + FNF (T, V) * P + FNG (T, V) * P * P / 2
190 K = K + 1
200 T = T + P
210 IF H < 10 THEN 130 ELSE H = 0
220 REM Chiede se si vuole proseguire.
230 INPUT "Ancora? s/n ", R$
240 IF R$ = "s" THEN 130
250 END

```

17.8. Notizie storiche

Il problema dell'integrazione delle equazioni differenziali si presenta fin dalle origini come uno tra i più importanti del calcolo infinitesimale. In effetti, uno dei primi problemi risolti con il calcolo differenziale fu quello proposto a DESCARTES da FLORIMOND DE BAUNE (1601-1652): trovare una curva la cui sottotangente sia costante.

Nella figura il segmento AT si chiama *sottotangente* alla curva $y = f(x)$. Si tratta dunque di trovare la curva per la quale il segmento AT abbia sempre la stessa lunghezza, qualsiasi sia il punto B sulla curva.

Per impostare il problema, siano x_0 e $y_0 = f(x_0)$ le coordinate di B . La tangente BT ha equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, e quindi l'ascissa t del punto T è data dall'equazione $f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0) = 0$, da cui

$$t = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

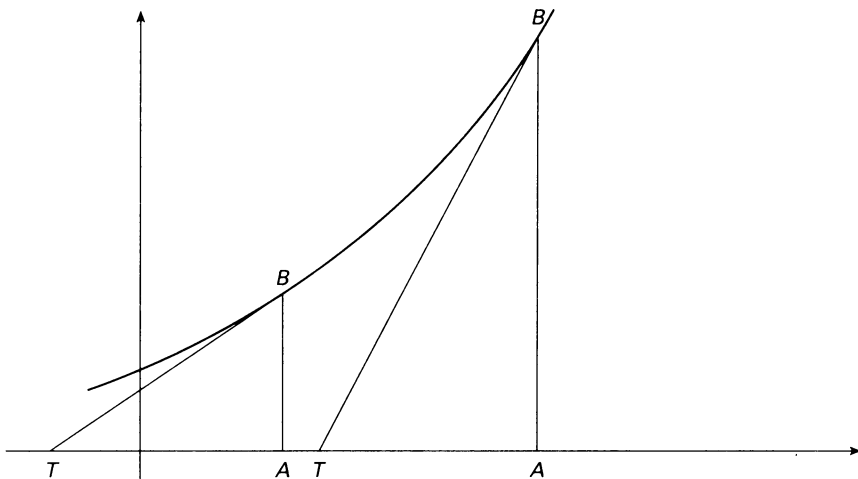


Figura 17.2

Di conseguenza, la lunghezza del segmento AT è data da

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Il problema di De Baune richiede che questa quantità abbia sempre lo stesso valore (che chiameremo per semplicità k^{-1}) per ogni punto x_0 , e conduce quindi all'equazione differenziale $f'(x) = k f(x)$, la cui soluzione è $f(x) = Ce^{kx}$; la curva con sottotangente costante è l'esponenziale.

Più in generale, il problema delle tangenti si poteva enunciare nel linguaggio del calcolo differenziale nella forma: *data la relazione tra le variabili x e y , trovare quella tra i loro differenziali*; in formule, dedurre dall'equazione di una curva

$$F(x, y) = 0$$

quella della sua tangente. Il problema veniva risolto differenziando l'equazione, e ottenendo pertanto l'*equazione differenziale*:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy = 0$$

e di qui ricavando la derivata

$$y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}} \quad [17.39]$$

e dunque la tangente alla curva.

Il *problema inverso delle tangenti* consisteva allora nel percorrere la strada all'indietro: *data una relazione tra le coordinate di una curva e i loro differenziali, trovare la curva*, e corrispondeva pertanto all'integrazione dell'equazione [17.39], o più succintamente

$$y' = f(x, y). \quad [17.40]$$

Questo problema si afferma subito come il problema principale del calcolo infinitesimale. Da una parte infatti esso contiene come caso particolare quello dell'integrazione, che consiste nel risolvere l'equazione

$$y' = f(x);$$

dall'altra esso è di gran lunga più generale, e consente di affrontare la maggior parte dei problemi geometrici e fisici del tempo, in particolare quelli della nascente meccanica razionale. Tra questi, hanno particolare interesse quelli della curva catenaria e della brachistocrona, che dovevano rappresentare due tra i più eclatanti successi del nuovo calcolo.

La *catenaria* è la curva formata da una catena appesa ai due estremi. Il problema della sua forma era stato affrontato ma non risolto da GALILEO, che in un primo momento aveva creduto che si trattasse di una parabola, per poi accorgersi che così non era.

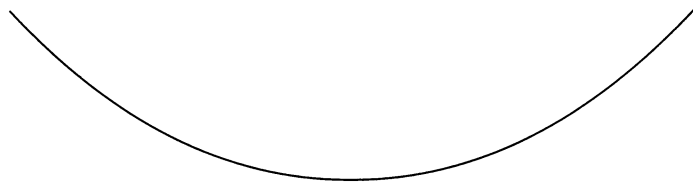


Figura 17.3

In realtà la curva catenaria ha equazione $y = A \cosh px = A \frac{e^{px} + e^{-px}}{2}$, una formula che LEIBNIZ e i fratelli JAKOB (1654-1705) e JOHANN BERNOULLI trovano con l'aiuto del calcolo infinitesimale. Di questo suo successo su Galileo, Leibniz si avvarrà per tentare di diffondere, per la verità almeno all'inizio senza troppo successo, il calcolo differenziale in Italia.

Ancora più famoso è il problema della curva *brachistocrona*, o di tempo minimo, dal greco $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\omicron\nu\alpha$, minimo, e $\tau\epsilon\mu\pi\omicron$, tempo.

Supponiamo di avere due punti A e B , il primo più in alto del secondo, ma non sulla stessa verticale, e tracciamo una curva che li unisca. Da A facciamo cadere un grave che giunga in B scivolando senza attrito lungo questa curva, sotto l'azione della forza di gravità; il tempo che esso impiega per andare da A a B dipende ovviamente dalla forma della curva.

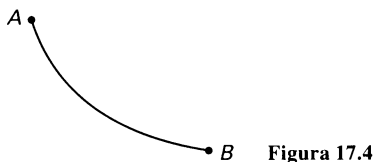


Figura 17.4

Poniamoci ora il seguente problema: tra tutte le curve che uniscono A e B , qual è quella che rende minimo il tempo di caduta? A prima vista, si potrebbe pensare alla retta che unisce i due punti. Con un po' di riflessione si conclude però che la retta minimizza lo spazio percorso, ma non il tempo; infatti per diminuire il tempo di caduta, conviene partire quasi verticalmente in modo da acquistare subito velocità, anche al prezzo di percorrere uno spazio più lungo.

Il problema non era nuovo, e già GALILEO lo aveva preso in considerazione, congetturando che la curva di tempo minimo fosse un arco di cerchio. Nel 1696, esso venne riproposto da JOHANN BERNOULLI sotto forma di una sfida ai matematici. Nessuno riuscì a risolverlo senza il calcolo infinitesimale, mentre ne danno una soluzione i BERNOULLI, LEIBNIZ, NEWTON, il marchese DE L'HÔPITAL (1661-1704), tutti ardenti fautori della nuova analisi.

La curva che dà il minimo tempo di caduta è una cicloide rovesciata, una curva descritta da un punto di un cerchio che rotola senza strisciare. Ancora una volta, questa curva era stata introdotta da GALILEO; TORRICELLI, DESCARTES, GILLES PERSONNE DE

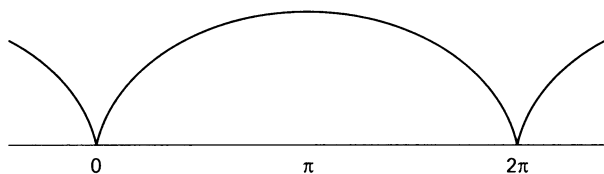


Figura 17.5

ROBERVAL (1602-1675), e soprattutto PASCAL l'avevano studiata mezzo secolo prima, trovandone l'area, la tangente, il baricentro e una serie di altre proprietà.

Ma i più grandi successi del nuovo calcolo vengono dalle applicazioni alla dinamica. Nel 1687 NEWTON pubblica i *Philosophiae naturalis principia mathematica*, nei quali viene risolto il problema delle orbite dei pianeti e vengono poste le basi della dinamica moderna.

Se nei *Principia* il ruolo del calcolo infinitesimale era tutto sommato piuttosto secondario, le leggi su cui si basava la meccanica newtoniana, in particolare la seconda legge del moto $f = ma$ applicata al moto di un punto materiale, si prestavano a un'immediata formalizzazione in termini del calcolo infinitesimale. Infatti l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo, e quindi se la forza f dipende dalla posizione e dalla velocità del punto, la determinazione del suo moto si riduce all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali, che così acquistano una posizione dominante, non solo come problema matematico, ma anche e soprattutto come mezzo di indagine fisica.

Lo stesso NEWTON, combinando genialmente il calcolo infinitesimale e gli sviluppi in serie, porta la teoria delle equazioni differenziali a un grado di compiutezza destinato a restare insuperato per molto tempo.

In primo luogo, data un'equazione differenziale

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Newton sviluppa in serie la funzione f , ordinando lo sviluppo secondo le potenze ascendenti di x e t :

$$\dot{x} = a + bt + cx + dt^2 + etx + fx^2 + \dots$$

A questo punto, egli cerca la soluzione $x(t)$ sotto forma di una serie:

$$x(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \dots;$$

con $\alpha = x(0)$. Inserita questa soluzione nell'equazione precedente, si uguagliano termine a termine i coefficienti delle varie potenze della t , ottenendo uno dopo l'altro i coefficienti incogniti β, γ ecc.

Ad esempio, supponiamo di voler risolvere il problema di De Baune, ossia l'equazione differenziale

$$\dot{x} = ax$$

con la condizione iniziale $x(0) = 1$.

Posto allora

$$x(t) = 1 + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \dots$$

si ha

$$\dot{x}(t) = \beta + 2\gamma t + 3\delta t^2 + \dots$$

e quindi

$$\beta + 2\gamma t + 3\delta t^2 + \dots = a(1 + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \dots).$$

Eguagliando i coefficienti delle potenze uguali, si trova facilmente

$$\beta = a \quad 2\gamma = a\beta = a^2 \quad 3\delta = a\gamma = \frac{a^3}{2}$$

e così via, e quindi si arriva alla soluzione

$$x(t) = 1 + at + \frac{1}{2}a^2t^2 + \frac{1}{6}a^3t^3 + \dots$$

che corrisponde ai primi termini della serie di Taylor della funzione e^{at} .

In questo modo viene risolto il problema più importante del nuovo calcolo, le equazioni differenziali, anche se la soluzione non è data in forma esplicita, ma sotto forma di una serie, i cui coefficienti si possono calcolare l'uno dopo l'altro, e talvolta, come nel caso precedente, esprimere tutti in un'unica formula.

In ogni caso, la soluzione newtoniana è soggetta alle stesse critiche che si facevano per l'integrazione: è allo stesso tempo un metodo totale e insoddisfacente. Totale, perché con questo metodo si possono risolvere tutte le equazioni differenziali, nessuna esclusa, e quindi non lascia spazio a ulteriori ricerche e miglioramenti. Insoddisfacente, perché solo in rari casi si riesce a risalire dalla serie alla forma esplicita della soluzione.

Sta di fatto che in Inghilterra, dove l'influenza di Newton era enorme, non si registrano progressi rilevanti nella teoria per tutto il XVIII secolo e oltre.

Ben diversa è la situazione sul continente. Qui gli sviluppi in serie, benché conosciuti, non rivestono quel ruolo preponderante che invece assumono nella teoria newtoniana; in mancanza di una trattazione generale e completa, che peraltro ancor oggi in parte manca, si affrontano classi particolari di equazioni, la cui soluzione viene ricondotta alle quadrature, ossia all'integrazione di funzioni note.

Si assiste così in primo luogo alla soluzione di equazioni a variabili separabili, e di qui a tutta una serie di studi miranti a ricondurre a queste ultime (mediante opportune sostituzioni) classi sempre più vaste di equazioni.

Nello studio di queste trasformazioni si distinguono i BERNOULLI, EULERO, gli italiani GABRIELE MANFREDI (1681-1761) e JACOPO RICCATI (1676-1754), e più tardi LAGRANGE e ALEXIS CLAIRAUT (1713-1765). In particolare, a EULERO è dovuta la soluzione generale delle equazioni lineari a coefficienti costanti.

Il Settecento è tutto dedicato all'integrazione esplicita delle equazioni differenziali, o quanto meno alla ricerca di soluzioni espresse sotto forma di integrali.

È solo agli inizi dell'Ottocento, anche a causa dell'esaurirsi del programma di ricerca di soluzioni esplicite, che si afferma un altro punto di vista: non più l'integrazione di questa o quella equazione, sulla strada di una complessità sempre crescente, ma al contrario la dimostrazione dell'esistenza di soluzioni nel caso generale.

Questo cambiamento di prospettiva è dovuto a CAUCHY, che tra l'altro introduce il problema di valori iniziali che ha preso il suo nome, e dimostra l'esistenza e l'unicità di una soluzione in un intorno del punto iniziale.

Da questo momento, il problema dell'esistenza si separa da quello dell'unicità, e ambedue vengono investigati in ipotesi sempre più generali.

Verso la fine del secolo, sorgono altri problemi, spesso originati dalle applicazioni, tra cui spicca quello della *stabilità*.

Supponiamo di avere un sistema fisico governato dal problema di CAUCHY

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

La funzione $f(t, u)$ e il dato iniziale u_0 sono in genere il risultato di misure, e dunque sono soggette a errori sperimentali. Si pone allora il problema: come si ripercuoteranno questi errori sul comportamento della soluzione $u(t)$? O anche: con che precisione devo fare le misure se voglio conoscere la soluzione u con un errore massimo determinato? Questi e simili problemi, che erano diventati cruciali nel funzionamento di alcuni sistemi come ad esempio il regolatore di WATT per le locomotive, hanno condotto al problema della stabilità, investigato tra gli altri da HENRI POINCARÉ (1854-1912) e da ALEKSANDR M. LJAPUNOV (1857-1918). Più recentemente, l'attenzione si è spostata sui comportamenti caotici, un campo oggi molto studiato.

17.9. Risposte agli esercizi

17.1. Si ha $u' = pt^{p-1}z + t^p z' = t^{p-1}f(z)$, e quindi $tz' = f(z) - pz$.

17.2.

$$1. u = t(\log t + c) \quad 2. u = t^2 - \frac{t^2}{\log|t| + c} \quad 3. u = \frac{t}{4} \left(1 - \frac{1}{ct} \right)^2$$

17.3. Se $\lambda e^{at} + \mu e^{bt} = 0$ con $\mu \neq 0$, si avrebbe $\frac{\lambda}{\mu} e^{(a-b)t} = -1$, che è impossibile perché $a - b \neq 0$. Si ha allora $\mu = 0$, e dunque $\lambda = 0$.

17.4. Se $\lambda e^{at} \sin \beta t + \mu e^{at} \cos \beta t = 0$, dovrebbe essere $\lambda \sin \beta t + \mu \cos \beta t = 0$. Se si pone $t = 0$ si ha $\mu = 0$, e quindi anche $\lambda = 0$.

17.5.

$$1. u = c_1 + c_2 e^{3t} - \operatorname{sen} t + 3 \cos t$$

$$2. u = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^t$$

$$3. u = c_1 e^t + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{4}te^{-t}$$

$$4. y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x - \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x$$

$$5. v = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{3}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x \cos x$$

$$6. y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{\operatorname{sen} t \cos t - t}{2} \cos 2t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t (\cos^2 t - \log |\cos t|)$$

$$7. y = c_1 e^t + e^{\frac{t}{2}} \left(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + e^{\frac{-t}{2}} \left(c_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - c_5 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) - t^2 - 2t$$

$$8. c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \frac{\cos t}{2\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} + \operatorname{sen} t \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)$$

Capitolo 18

Funzioni semicontinue

18.1. Massimo e minimo limite

Come abbiamo osservato più volte, in particolare al momento della sua definizione, non sempre il limite di una funzione esiste. Ad esempio, la funzione segno (x) non ha limite per $x \rightarrow 0$, mentre $\sin x$ non ha limite per $x \rightarrow +\infty$. In queste situazioni sono talvolta di aiuto il limite destro e sinistro, che però, come il limite, non sempre esistono.

Naturalmente una funzione, come ad esempio $\cos \frac{1}{x}$, che non ha limite per $x \rightarrow 0$, e nemmeno limiti destro e sinistro, è piuttosto complicata. Ciononostante, è possibile dire qualcosa anche in questi casi, introducendo un nuovo concetto, il *massimo limite* (e l'analogo *minimo limite*), che da una parte conserva alcune delle caratteristiche proprietà del limite, e dall'altra ricorda l'estremo superiore, col quale condivide la prerogativa di esistere sempre.

In un certo senso, il massimo limite non è altro che una *localizzazione* dell'estremo superiore. Ricordiamo che quest'ultimo era stato definito nel capitolo 2, definizione 2.5 come il *minimo dei maggioranti*. Più precisamente, nel caso di una funzione reale $f(x)$ definita in un insieme A , un maggiorante M è un numero tale che $f(x) \leq M$ per ogni $x \in A$, e l'estremo superiore $\sup_A f$ è il minimo di questi maggioranti.

Come si vede, l'estremo superiore è per sua natura un concetto *globale*; esso ha a che fare con i valori della funzione f in tutto l'insieme di definizione A , e non nelle vicinanze di un punto x_0 . Al contrario, come il limite, il massimo limite dipende solo dai valori della funzione vicino a x_0 , o per essere più precisi in un intorno di x_0 .

Definizione 18.1 Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un insieme A , e sia x_0 un punto di accumulazione di A . Diremo che un numero reale M è un maggiorante locale (per $x \rightarrow x_0$) se esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) \leq M$ per ogni x di $A \cap I$ e diverso da x_0 .

Se la funzione f non ha maggioranti locali, diremo che il suo massimo limite è $+\infty$; altrimenti chiameremo massimo limite della funzione $f(x)$ per $x \rightarrow x_0$ l'estremo inferiore dei maggioranti locali. In ogni caso il massimo limite verrà indicato con

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Analogamente, un numero reale m si dice un minorante locale se esiste un intorno J di x_0 tale che $f(x) \geq m$ per ogni $x \in A \cap J - \{x_0\}$. Se la funzione f non ha minoranti locali, si dirà che il suo minimo limite è $-\infty$; altrimenti si chiama minimo limite della funzione f (per $x \rightarrow x_0$) l'estremo superiore dei minoranti locali. In ambedue i casi il minimo limite si indica con

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Alcune osservazioni.

1. A differenza dell'estremo superiore, che è il *minimo* dei maggioranti, qui dobbiamo prendere l'estremo inferiore dei maggioranti locali, perché l'insieme dei maggioranti locali può non avere minimo.

2. Come nel caso del limite, il punto x_0 non viene preso in considerazione nella definizione di maggiorante locale, e il valore della funzione f nel punto x_0 non ha alcun effetto sul valore del massimo e del minimo limite.

3. Dato che se M ed m sono un maggiorante e un minorante locale, si ha ovviamente $m \leq M$, risulta

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Come vedremo più avanti, il segno $=$ vale se e solo se la funzione f ha limite.

4. Se $a > 0$, risulta

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} [af(x)] = a \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} [af(x)] = a \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

mentre se $a < 0$:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} [af(x)] = a \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} [af(x)] = a \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

5. Se $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di x_0 , allora

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Infatti ogni maggiorante locale della g lo è anche della f , e ogni minorante locale della f lo è anche della g .

6. Se la funzione f ha maggioranti locali, uno di questi è ovviamente

$$M_r = \sup_{A \cap I(x_0, r) - \{x_0\}} f(x),$$

ovvero, scrivendo per brevità A_r invece di $A \cap I(x_0, r) - \{x_0\}$,

$$M_r = \sup_{A_r} f(x).$$

Viceversa, se M è un maggiorante locale, esisterà un intorno $I(x_0, r)$ tale che $f(x) \leq M$ in A_r , e quindi si avrà $M \geq M_r$. Risulta pertanto

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{r > 0} M_r = \inf_{r > 0} \sup_{A_r} f(x) \quad [18.1]$$

Osservando che M_r è una funzione crescente di r , il suo estremo inferiore coincide col limite per $r \rightarrow 0$. Si ha allora

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} M_r = \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{A_r} f(x) \quad [18.2]$$

Osservazione 18.1 In Italia il massimo limite è spesso indicato con $\maxlim$. Noi abbiamo preferito la notazione internazionale $\limsup$ perché essa indica brevemente le operazioni che entrano nella definizione: il **limite** (per $r \rightarrow 0$) dell'estremo **superiore** (in A_r) della funzione f .

Considerazioni simili valgono per il minimo limite. In questo caso la funzione

$$m_r = \inf_{A_r} f(x)$$

è decrescente, e quindi si ha

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{r > 0} \inf_{A_r} f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \inf_{A_r} f(x) \quad [18.3]$$

Esempio 18.1 La funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

ha massimo limite 1 e minimo limite 0, qualsiasi sia il punto x_0 . Infatti in ogni intorno di x_0 cadono punti razionali, in cui $D(x) = 1$, e punti irrazionali, in cui $D(x) = 0$. Si ha allora $M_r = 1$ e $m_r = 0$ per ogni $r > 0$, e il risultato segue dalle [18.2] e [18.3].

Esempio 18.2 Cerchiamo il massimo limite per $x \rightarrow 0$ della funzione

$$f(x) = (1 + x) \cos \frac{1}{x}.$$

Si vede subito che 1 non è un maggiorante locale; infatti si ha $f\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = 1 + \frac{1}{2k\pi} > 1$, e in ogni intorno I di 0 cadono punti $\frac{1}{2k\pi}$ (basta prendere $\frac{1}{2k\pi}$ minore del raggio di I).

D'altra parte un qualsiasi numero $M > 1$ è un maggiorante locale. Si ha infatti $f(x) \leq 1 + |x|$, e questa quantità è minore di M non appena $|x| < M - 1$. In conclusione

$$\limsup_{x \rightarrow 0} (1 + x) \cos \frac{1}{x} = 1.$$

Si noti che in questo caso l'insieme dei maggioranti locali è la semiretta $(1, +\infty)$, che non ha minimo.

Analogamente

$$\liminf_{x \rightarrow 0} (1 + x) \cos \frac{1}{x} = -1. \quad \square$$

Dalla definizione di massimo e minimo limite possiamo ricavare una caratterizzazione simile a quella del capitolo 2 § 8 per l'estremo superiore e l'estremo inferiore.

Proposizione 18.1 *Risulta*

$$L = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$

1. esiste un $r > 0$ tale che $f(x) < L + \varepsilon$ per ogni $x \in A_r$,
2. per ogni $s > 0$ c'è un punto $x \in A_s$ tale che $f(x) > L - \varepsilon$.

Infatti la 1 dice che $L + \varepsilon$ è un maggiorante locale, e la 2 che $L - \varepsilon$ non lo è; di conseguenza L è l'estremo inferiore dei maggioranti locali.

Analogamente, il numero reale λ è il minimo limite della funzione f per $x \rightarrow x_0$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$,

3. esiste un $r > 0$ tale che $f(x) > \lambda - \varepsilon$ per ogni $x \in A_r$,
4. per ogni $s > 0$ c'è un punto $x \in A_s$ tale che $f(x) < \lambda + \varepsilon$.

Il teorema che segue lega il massimo e minimo limite col limite.

Teorema 18.1 *Se per $x \rightarrow x_0$ la funzione $f(x)$ ha limite, allora il massimo e il minimo limite sono uguali al valore del limite.*

Viceversa, se risulta

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

allora la funzione ha limite, e il valore di quest'ultimo coincide col valore comune del massimo e del minimo limite.

Dimostrazione Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che per ogni $x \in A_r$ risulta $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Il numero $L + \varepsilon$ è dunque un maggiorante locale, mentre $L - \varepsilon$ è un minorante locale.

te locale, e dunque in particolare non è un maggiorante locale. Di conseguenza L è l'estremo inferiore dei maggioranti locali, e dunque il massimo limite. Allo stesso modo si dimostra che L è l'estremo superiore dei minoranti locali, e dunque il minimo limite.

Supponiamo ora che sia

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Confrontando le condizioni 1 e 3, e ricordando che $L = \lambda$, si conclude che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno $I(x_0, r)$ tale che per ogni $x \in A_r$ risulta $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, e questa è esattamente la definizione di limite. $\square$

Il teorema precedente vale anche se $L = +\infty$ o $L = -\infty$. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Definizioni e risultati analoghi ai precedenti si possono dare quando $x \rightarrow \pm\infty$. In questo caso, invece che di maggiorante locale si preferisce parlare di *maggiorante definitivo*:

Definizione 18.2 Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ non limitato superiormente. Un numero M si dice un maggiorante definitivo (per $x \rightarrow +\infty$) se esiste un $r > 0$ tale che per ogni $x \in A \cap (r, +\infty)$ risulta $f(x) \leq M$.

Se f non ha maggioranti definitivi, si dirà che il massimo limite è $+\infty$; altrimenti si chiama massimo limite della funzione f per $x \rightarrow +\infty$ l'estremo inferiore dei maggioranti definitivi.

Anche qui per brevità scriveremo A^r invece di $A \cap (r, +\infty)$. Valgono anche in questo caso le analoghe delle [18.2] e [18.3]:

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{r > 0} \sup_{x \in A^r} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A^r} f(x) \quad [18.4]$$

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_{r > 0} \inf_{x \in A^r} f(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \inf_{x \in A^r} f(x). \quad [18.5]$$

Una definizione analoga si dà per il minimo limite, e per il massimo e minimo limite per $x \rightarrow -\infty$, per i quali valgono formule simili alle precedenti, che vengono lasciate al lettore.

Si ha inoltre:

Proposizione 18.2 Risulta $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$

1. esiste un numero r tale che $f(x) < L + \varepsilon$ per ogni $x \in A \cap (r, +\infty)$,
2. per ogni s esiste un punto $x \in A \cap (s, +\infty)$ tale che $f(x) > L - \varepsilon$.

Analogamente, si ha $\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$

3. esiste un numero r tale che $f(x) > \lambda - \varepsilon$ per ogni $x \in A \cap (r, +\infty)$,
4. per ogni s esiste un punto $x \in A \cap (s, +\infty)$ tale che $f(x) < \lambda + \varepsilon$.

La dimostrazione viene lasciata per esercizio.

Osservazione 18.2 Nella definizione di massimo e minimo limite per $x \rightarrow x_0$ entra solo la nozione di intorno di x_0 , e quindi basta che la funzione reale $f(x)$ sia definita in uno spazio metrico. In particolare la definizione di massimo e minimo limite per $x \rightarrow x_0$ si applica a funzioni di più variabili. Al contrario, il massimo e minimo limite per $x \rightarrow \pm\infty$ sono definiti solo per funzioni di una variabile. Notiamo che lo stesso accade per il limite.

A differenza però del limite, che grazie alla definizione 5.2 ha senso per funzioni a valori in spazi metrici, il massimo e minimo limite si introducono solo per funzioni reali (cioè a valori in $\mathbf{R}$), dato che nella loro definizione entra in maniera determinante l'ordinamento. $\square$

Esempio 18.3 Si ha

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 1.$$

Infatti 1 è un maggiorante definitivo (addirittura è un maggiorante), mentre nessun numero minore di 1 lo è, dato che $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$. Pertanto 1 è il minimo (e dunque l'estremo inferiore) dei maggioranti definitivi.

Esercizi

18.1. Dimostrare che si ha $L = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se e solo se

1. per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni successione x_n a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0 , si ha definitivamente $f(x_n) < L + \varepsilon$,
2. esiste una successione x_n a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0 , tale che $f(x_n) \rightarrow L$.

18.2. Le operazioni algebriche

Come abbiamo fatto per il limite (vedi capitolo 5, teorema 5.1), anche per il massimo e minimo limite si possono dare teoremi che ne regolano il comportamento rispetto alle operazioni algebriche, dando il massimo e il minimo limite della somma, del prodotto ecc., di due funzioni.

A differenza però del limite, in questo caso non si può dire molto, tranne che quando una delle due funzioni coinvolte ha limite. Il caso più semplice è quello della somma.

Teorema 18.2 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni reali, e supponiamo che sia

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$$

Allora

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + a. \quad [18.6]$$

Dimostrazione La [18.6] è conseguenza della relazione più generale:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) + \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad [18.7]$$

Si ha infatti¹

$$f(x) + \inf_{A_r} g(x) \leq f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup_{A_r} g(x)$$

e prendendo l'estremo superiore:

$$\sup_{A_r} f(x) + \inf_{A_r} g(x) \leq \sup_{A_r} [f(x) + g(x)] \leq \sup_{A_r} f(x) + \sup_{A_r} g(x).$$

Di qui, passando al limite per $r \rightarrow 0$ segue subito la [18.7]. Se poi la funzione g ha limite a , il massimo e minimo limite sono ambedue uguali ad a , e quindi si ha

$$L + a \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] \leq L + a$$

da cui segue subito la [18.6].

In maniera analoga si dimostra che

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

e dunque, se g ha limite,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad \square$$

Nel prossimo teorema poniamo $f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

Teorema 18.3 *Risulta*

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x) = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \vee \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad [18.8]$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f \wedge g(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad [18.9]$$

Dimostrazione Sia $L = \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $P = \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Siccome le funzioni f e g entrano simmetricamente nell'enunciato del teorema, si può supporre $L \leq P$, cosicché il secondo membro della [18.8] è uguale a P , e quello della [18.9] vale L .

Cominciamo dalla [18.8]. Per la proprietà 1 della proposizione [18.1], per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un r_1 tale che $f(x) \leq L + \varepsilon \leq P + \varepsilon$ in A_{r_1} , e un r_2 tale che $g(x) \leq P + \varepsilon$ in A_{r_2} . Prendendo come r il più piccolo tra r_1 e r_2 , in A_r avremo ambedue le disuguaglianze, e quindi sarà $f \vee g(x) \leq P + \varepsilon$ in A_r . Il numero $P + \varepsilon$ è dunque un maggiorante locale per $f \vee g$, e quindi

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x) \leq P.$$

¹ Se $x_0 = +\infty$ basterà scrivere A' al posto di A_r ; se $x_0 = -\infty$, si cambierà A_r in $A \cap (-\infty, -r)$.

D'altra parte $g \leq f \vee g$, e quindi $P \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x)$, che insieme alla precedente dà la [18.8].

Veniamo ora alla [18.9]. Dalla proprietà 1 si può dedurre che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $r > 0$ tale che $f(x) < L + \varepsilon$ in A_r , e dunque a maggior ragione $f \wedge g(x) < L + \varepsilon$. Pertanto $L + \varepsilon$ è un maggiorante locale per $f \wedge g$, e quindi avremo la [18.9]. $\square$

Osservazione 18.3 In genere la [18.9] è una disuguaglianza. Ad esempio, se si prende come $f(x)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $(0, 1)$ e si pone $g(x) = 1 - f(x)$, si ha $f \wedge g = 0$ (infatti dove f vale 1, g vale 0 e viceversa), e dunque $\limsup_{x \rightarrow 0} f \wedge g = 0$, mentre $\limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = \limsup_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

Se però una delle due funzioni, ad esempio la f , ha limite, allora vale il segno $=$. Infatti per la proprietà 2, per ogni ε e per ogni A_r esiste un $\bar{x} \in A_r$ tale che $g(\bar{x}) > P - \varepsilon \geq \geq L - \varepsilon$; d'altra parte esiste un r_0 tale che per ogni $x \in A_{r_0}$ risulta $f(x) > L - \varepsilon$, e quindi anche $f(\bar{x}) > L - \varepsilon$. Di conseguenza, si ha $f \wedge g(\bar{x}) > L - \varepsilon$, e quindi

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f \wedge g(x) \geq L.$$

Confrontando quest'ultima con la [18.9], si vede che vale il segno $=$. $\square$

Analoghe formule valgono per il minimo limite:

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x) \geq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \vee \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad [18.10]$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f \wedge g(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad [18.11]$$

Anche in questo caso, si ha l'uguaglianza nella [18.10] se una delle funzioni ha limite. Le dimostrazioni vengono lasciate per esercizio.

Osservazione 18.4 Nel caso in cui le funzioni f e g hanno limite, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \vee \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad [18.12]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \wedge g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad [18.13]$$

Infatti, ricordando che

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

otteniamo dalle [18.8] e [18.10]:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \vee \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x)$$

e quindi

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f \vee g(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \vee g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \vee \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

da cui segue la [18.12]. La [18.13] si dimostra allo stesso modo. $\square$

Osservazione 18.5 Le relazioni precedenti si estendono a tre o più funzioni, sempre in numero finito. Se invece le funzioni in esame sono infinite in numero, valgono relazioni simili, ma sempre col $\leq$. Più precisamente, sia $f_t(x)$ una famiglia di funzioni, dipendenti da un parametro t che varia in un insieme T , e poniamo

$$F(x) = \sup_{t \in T} f_t(x), \quad f(x) = \inf_{t \in T} f_t(x).$$

Si ha

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} F(x) \geq \sup_{t \in T} \limsup_{x \rightarrow x_0} f_t(x), \quad [18.14]$$

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \inf_{t \in T} \limsup_{x \rightarrow x_0} f_t(x), \quad [18.15]$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} F(x) \geq \sup_{t \in T} \liminf_{x \rightarrow x_0} f_t(x), \quad [18.16]$$

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \inf_{t \in T} \liminf_{x \rightarrow x_0} f_t(x). \quad [18.17]$$

Le dimostrazioni sono semplici; ad esempio per la [18.14] basta osservare che per ogni $t \in T$ si ha $F(x) \geq f_t(x)$, e quindi $\limsup_{x \rightarrow x_0} F(x) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f_t(x)$; la [18.14] segue immediatamente prendendo l'estremo superiore al variare di $t \in T$. $\square$

Veniamo ora al prodotto di due funzioni.

Teorema 18.4 Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione limitata in un intorno di x_0 , e che

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \geq 0.$$

Allora

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = aL. \quad [18.18]$$

Dimostrazione Se $a = 0$ la [18.18] è una conseguenza dell'esempio 5.12; infatti la funzione f è limitata in un intorno di x_0 , e quindi il prodotto $f(x)g(x)$ tende a 0.

Se invece $a > 0$, si ha $f(x)g(x) = f(x)[g(x) - a] + af(x)$; dei termini a secondo membro, il primo tende a 0, e il secondo ha massimo limite uguale ad aL . La tesi segue allora dalla [18.6]. $\square$

Esempio 18.4 Si ha

$$\limsup_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} \cos \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

Infatti la frazione $\frac{1}{x+2}$ tende a $\frac{1}{2}$, mentre il massimo limite di $\cos \frac{1}{x}$ è 1, e il risultato segue dal teorema precedente.

Osservazione 18.6 Se $a > 0$, il teorema precedente vale anche senza l'ipotesi che $f(x)$ sia limitata in un intorno di x_0 . Questa ipotesi è invece essenziale se $a \leq 0$. Ad esem-

pio se $g(x) = x$ e $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ si ha $\limsup_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ e $\limsup_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = +\infty$.

Esercizi

18.2. Dimostrare che se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$, allora $\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \vee b$ e $\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \wedge b$

18.3. Successioni

Un caso particolare, ma di notevole interesse, è quello delle successioni, che sono funzioni definite nell'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali. In questo caso si può parlare di massimo e minimo limite per $n \rightarrow \infty$, e valgono ovviamente tutte le proprietà che abbiamo dimostrato nelle sezioni precedenti.

In particolare avremo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$

1. esiste un v tale che per ogni $n > v$ si ha $a_n < L + \varepsilon$,
2. risulta $a_n > L - \varepsilon$ per infiniti interi n .

La prima è precisamente la 1 della proposizione 18.2; la seconda è una riformulazione della 2, che tiene conto della particolare situazione. Infatti per la 2, per ogni s c'è un intero $n > s$ con $a_n > L - \varepsilon$, e questo equivale a dire che quest'ultima disuguaglianza vale per infiniti n .

Analogamente, avremo

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$$

se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$

3. esiste un v tale che per ogni $n > v$ si ha $a_n > \lambda - \varepsilon$,
4. risulta $a_n < \lambda + \varepsilon$ per infiniti interi n .

Esempio 18.5 Siano a_n e b_n due successioni, convergenti rispettivamente ad a e b , e consideriamo la successione

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{se } n \text{ è pari} \\ b_n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n = a \vee b \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} c_n = a \wedge b.$$

Possiamo supporre che $a \geq b$. Le relazioni precedenti si potrebbero dimostrare direttamente dalla definizione, o dalle proprietà caratteristiche del massimo e minimo limite. Noi osserveremo invece che risulta

$$c_n = b_n + \frac{1 + (-1)^n}{2} (a_n - b_n).$$

Il primo termine a secondo membro tende a b . Il secondo è il prodotto di $a_n - b_n$, che tende ad $a - b \geq 0$, e di $\frac{1 + (-1)^n}{2}$, che ha massimo limite 1 e minimo limite 0.

Possiamo allora applicare la [18.18], e concludere che il suo massimo limite è $a - b$ e il minimo limite 0. Applicando ora la [18.6], troveremo che il massimo limite di c_n è $b + (a - b) = a$ e il minimo limite $b + 0 = b$. $\square$

Esempio 18.6 Si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+2} = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n n}{n+2} = -1.$$

Infatti la successione data vale $\frac{n}{n+2}$ per n pari, e $-\frac{n}{n+2}$ per n dispari, e si può applicare l'esempio precedente. $\square$

Il massimo limite è particolarmente utile nello studio della convergenza delle serie. Infatti i criteri di convergenza del capitolo 6 § 9, e in particolare quelli della radice e del rapporto, trovano la loro formulazione più generale se espressi mediante il massimo limite. Si ha ad esempio

Teorema 18.5 (criterio della radice) Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

allora la serie $\sum a_n$ converge. Se invece

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

la serie diverge.

Dimostrazione Se $L < 1$, preso $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$, esiste un v tale che per ogni $n > v$ si ha $\sqrt[n]{a_n} < \frac{1+L}{2}$, e quindi

$$a_n < \left(\frac{1+L}{2} \right)^n$$

Quest'ultima è una serie geometrica di ragione $\frac{1+L}{2} < 1$, e dunque convergente; per il criterio del confronto convergerà anche la serie $\sum a_n$.

Se invece $L > 1$, per infiniti n risulterà $\sqrt[n]{a_n} > \frac{1+L}{2} > 1$, e quindi $a_n > 1$. La successione a_n non potrà allora tendere a zero, e pertanto la serie $\sum a_n$ non sarà convergente, venendo meno la condizione necessaria. $\square$

Teorema 18.6 (criterio del rapporto) Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$$

la serie $\sum a_n$ converge.

Dimostrazione Ragioniamo come nel teorema 6.10. Per la 1 esiste un N tale che per ogni $n \geq N$ si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{L+1}{2} = p$. Di qui si ricava, per ogni $n \geq N$,

$$a_n < \frac{a_N}{p^N} p^n.$$

Poiché $p < 1$, la serie $\sum p^n$ converge, e dunque converge anche la serie $\sum a_n$. $\square$

Osservazione 18.7 Da notare che in questo caso, a differenza di quanto accade nel teorema 6.10, la serie $\sum a_n$ può convergere anche se

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Ad esempio, posto

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

la serie $\sum a_n$ converge, essendo maggiorata dalla serie geometrica convergente $\sum 2^{-n}$, mentre si ha

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty. \quad \square$$

Il teorema 18.5 ha conseguenze sul calcolo del raggio di convergenza di una serie di potenze, la cui dimostrazione si basa sul criterio della radice. Si ha allora

Teorema 18.7 Sia $\sum a_n x^n$ una serie di potenze, e sia

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora, detto r il raggio di convergenza della serie $\sum a_n x^n$, si ha

$$r = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0. \end{cases}$$

18.4. Funzioni semicontinue

Veniamo ora a uno dei punti centrali di questo capitolo. Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come il concetto di limite si spezzi per così dire in due, dando origine a quelli simmetrici di massimo e minimo limite. Corrispondentemente, anche il concetto di funzione continua, che ha evidenti legami con quello di limite, si biforca in due.

Definizione 18.3 Sia $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ e sia x_0 un punto di A . Diremo che la funzione $f(x)$ è semicontinua superiormente in x_0 se

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad [18.19]$$

Analogamente, f si dirà semicontinua inferiormente in x_0 se risulta

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x). \quad [18.20]$$

Se poi f è semicontinua superiormente (inferiormente) in ogni punto di A , diremo semplicemente che è semicontinua superiormente (inferiormente) in A .

Per brevità scriveremo SCI e SCS invece di semicontinua inferiormente e semicontinua superiormente.

Osservazione 18.8 Abbiamo visto che una funzione ha limite se e solo se il massimo e il minimo limite coincidono. In maniera analoga, una funzione $f(x)$ è continua in un punto x_0 se e solo se in x_0 è semicontinua sia superiormente che inferiormente.

Infatti se f è continua in x_0 , allora il suo limite è $f(x_0)$, e dunque sono uguali a $f(x_0)$ sia il massimo che il minimo limite, che coincidono con il limite. Valgono dunque sia la [18.19] che la [18.20], col segno =.

Viceversa, se valgono la [18.19] e la [18.20], avremo

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

e quindi il massimo e il minimo limite sono ambedue uguali a $f(x_0)$. La funzione $f(x)$ ha dunque limite per $x \rightarrow x_0$, e questo limite vale $f(x_0)$. $\square$

Esempio 18.7 La funzione caratteristica di un insieme aperto in $\mathbf{R}^n$ è SCI; quella di un insieme chiuso è SCS.

Sia E un insieme qualsiasi, e sia $\mathbf{x}_0$ un punto di $\mathbf{R}^n$. Se $\mathbf{x}_0$ è interno a E , la funzione $\varphi_E(\mathbf{x})$ vale 1 in un intorno di $\mathbf{x}_0$, e dunque è continua in $\mathbf{x}_0$. Analogamente, se $\mathbf{x}_0$ è un punto esterno, si ha $\varphi_E(\mathbf{x}) = 0$ in un intorno di $\mathbf{x}_0$, ed è continua in $\mathbf{x}_0$. In ogni caso, la funzione φ_E è continua nei punti interni e nei punti esterni di E .

Restano da esaminare i punti di frontiera. Se $\mathbf{x}_0 \in \partial E$, si ha

$$0 \leq \liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi_E(\mathbf{x}) \leq \limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \varphi_E(\mathbf{x}) \leq 1.$$

Se ora E è aperto, non contiene i suoi punti di frontiera, e quindi $\varphi_E(\mathbf{x}_0) = 0$, per cui è verificata la [18.20]. Se invece E è chiuso, $\mathbf{x}_0 \in E$, e $\varphi_E(\mathbf{x}_0) = 1$, e vale la [18.19]. Nel primo caso φ_E è SCI, nel secondo è SCS.

Le seguenti proprietà seguono immediatamente da analoghe proprietà del massimo e minimo limite.

1. Se $f(x)$ è SCS, $af(x)$ è SCS se $a > 0$ e SCI se $a < 0$.
2. Se f e g sono SCS, $f + g$ è SCS.

Segue dalla seconda delle disuguaglianze [18.7].

3. Se f e g sono SCS in x_0 , anche $f \vee g$ e $f \wedge g$ sono SCS in x_0 .

Segue dalle [18.8] e [18.9], osservando che se f e g sono SCS si ha

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \vee \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) &\leq f(x_0) \vee g(x_0), \\ \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \wedge \limsup_{x \rightarrow x_0} g(x) &\leq f(x_0) \wedge g(x_0). \end{aligned}$$

4. Risultati simili valgono per funzioni SCI. In particolare, se f e g sono SCI in x_0 , lo sono anche $f + g$, $f \vee g$ e $f \wedge g$.

Vale inoltre un risultato analogo al teorema 7.3, la cui dimostrazione viene lasciata per esercizio:

Teorema 18.8 Una funzione $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ è SCS in $x_0 \in A$ se e solo se per ogni successione x_n a valori in $A - \{x_0\}$, e convergente a x_0 , si ha

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Analogamente, f è SCI in x_0 se e solo se per ogni successione x_n a valori in $A - \{x_0\}$, e convergente a x_0 , si ha

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

Teorema 18.9 Se f_t , $t \in T$, è una famiglia di funzioni SCI in un punto x_0 , allora

$$F(x) = \sup_{t \in T} f_t(x)$$

è SCI in x_0 .

Dimostrazione Si ha $f_t(x) \leq F(x)$ per ogni t , e dunque

$$f_t(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f_t(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} F(x).$$

Poiché questa relazione vale per ogni t , prendendo l'estremo superiore rispetto a t si avrà

$$F(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} F(x)$$

e pertanto F è SCI in x_0 . □

Allo stesso modo si dimostra che l'estremo inferiore di una famiglia $g_t(x)$ di funzioni SCS è SCS. In particolare, se $f_t(x)$ sono funzioni continue, $F(x) = \sup_{t \in T} f_t(x)$ è SCI, e $\varphi(x) = \inf_{t \in T} f_t(x)$ è SCS.

18.5. Il teorema di Weierstrass

Uno dei risultati principali per le funzioni continue è costituito dal teorema di Weierstrass, che abbiamo visto nel capitolo 7:

Una funzione f continua in un insieme compatto K ha massimo e minimo.

Un risultato simile vale per le funzioni semicontinue:

Teorema 18.10 (di Weierstrass) *Una funzione f semicontinua superiormente in un insieme compatto K ha massimo; una funzione semicontinua inferiormente in K ha minimo.*

Dimostrazione Limitiamoci alla seconda parte del teorema, e sia f una funzione SCI in un insieme compatto K . Vogliamo dimostrare che f ha minimo, ossia che esiste un punto $x_0 \in K$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in K$.

Sia x_n una *successione minimizzante*, cioè una successione in K tale che $f(x_n)$ tende all'estremo inferiore della f in K .² Poiché K è compatto, dalla successione x_n si può estrarre una sottosuccessione x_{k_n} che converge a un punto $x_0 \in K$.

Essendo estratta dalla $f(x_n)$, la successione $f(x_{k_n})$ ha come limite $\inf f(K)$. Per la semicontinuità di f , tenendo conto del teorema [18.8], si ha

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \inf f(K) \leq f(x_0).$$

Si avrà allora $f(x_0) = \inf f(K)$, e pertanto x_0 è un punto di minimo. □

Il teorema precedente si potrebbe dimostrare con lo stesso metodo del teorema 7.9, tenendo conto dell'osservazione 7.6. La dimostrazione è lasciata per esercizio.

² Che una tale successione esista segue dalla definizione dell'estremo inferiore. Infatti il numero $\inf f(K) + \frac{1}{n}$ non è un minorante di $f(K)$, e dunque per ogni n esiste un punto x_n tale che $f(x_n) \leq \inf f(K) + \frac{1}{n}$. La successione $f(x_n)$ tende a $\inf f(K)$.

18.6. Approssimazione delle funzioni semicontinue

Come corollario del teorema 18.9, abbiamo osservato che l'estremo superiore di una famiglia di funzioni continue è una funzione semicontinua inferiormente. In particolare, se $f_n(x)$ è una successione crescente di funzioni continue, il suo limite puntuale

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x)$$

è una funzione SCI.

Analogamente, il limite di una successione decrescente di funzioni continue è una funzione SCS.

Vogliamo ora invertire questi risultati, dimostrando il seguente

Teorema 18.11 *Sia $f(x)$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora esiste una successione crescente $f_n(x)$ di funzioni continue, tale che*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} f_n(x)$$

Dimostrazione Per semplicità, supporremo che f sia definita in $\mathbf{R}$; la stessa dimostrazione vale anche in $\mathbf{R}^n$.

Dimostreremo dapprima il teorema nel caso in cui $f(x) \geq 0$; vedremo poi come fare a meno di questa ipotesi.

Faremo vedere che la successione

$$f_n(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}} [f(y) + n|y - x|] \quad [18.21]$$

ha le proprietà richieste.

Osserviamo in primo luogo che, posto $\Phi_n(y; x) = f(y) + n|y - x|$, risulta $f_n(x) \leq \Phi(y; x)$ per ogni y , e in particolare $f_n(x) \leq \Phi(x; x) = f(x)$. Ciò premesso, la dimostrazione può essere fatta in tre passi:

1. la successione f_n è crescente. Infatti, posto $\Phi_n(y; x) = f(y) + n|y - x|$, risulta $\Phi_n(y; x) \leq \Phi_{n+1}(y; x)$ per ogni y , e prendendo l'estremo inferiore al variare di $y \in \mathbf{R}$ si trova $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.

2. Dimostriamo ora che le funzioni f_n sono continue.

Siano x_1 e x_2 due punti di $\mathbf{R}$. Per la definizione di estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un punto y_2 tale che $f_n(x_2) > \Phi_n(y_2; x_2) - \varepsilon$. D'altra parte

$$f_n(x_1) = \inf_{y \in \mathbf{R}} \Phi_n(y; x_1) \leq \Phi_n(y_2; x_1)$$

e dunque

$$f_n(x_1) - f_n(x_2) \leq \Phi_n(y_2; x_1) - \Phi_n(y_2; x_2) + \varepsilon = n(|y_2 - x_1| - |y_2 - x_2|) + \varepsilon.$$

Per la disuguaglianza triangolare $||y_2 - x_1| - |y_2 - x_2|| \leq |x_1 - x_2|$, risulta allora

$$f_n(x_1) - f_n(x_2) \leq n|x_1 - x_2| + \varepsilon.$$

Analogamente, scambiando tra loro x_1 e x_2 , si trova

$$f_n(x_2) - f_n(x_1) \leq n |x_1 - x_2| + \varepsilon$$

e dunque

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq n |x_1 - x_2| + \varepsilon.$$

e per l'arbitrarietà di ε

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq n |x_1 - x_2|$$

La funzione f_n è pertanto lipschitziana, dunque continua.

3. Infine facciamo vedere che $f_n \rightarrow f$. Per la [18.21], tenendo conto della definizione di estremo inferiore, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste un punto y_n tale che

$$f(y_n) + n |y_n - x| - \frac{1}{n} \leq f_n(x) \leq f(x). \quad [18.22]$$

Dalla [18.22], essendo per ipotesi $f(y_n) \geq 0$, segue che $|y_n - x| \leq \frac{f(x)}{n} + \frac{1}{n^2}$, e dunque la successione y_n tende a x . D'altra parte sempre dalla [18.22] si ha $f_n(x) \geq f(y_n) - \frac{1}{n}$, e quindi, tenendo conto della semicontinuità di f , avremo

$$f(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f(y_n) - \frac{1}{n} \right) \geq f(x)$$

e dunque

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x). \quad \square$$

Il teorema è così dimostrato se $f(x) \geq 0$. Osserviamo che questa ipotesi, o comunque un'ipotesi di questo tipo, entra in maniera essenziale nella dimostrazione del teorema precedente; senza di essa l'estremo inferiore che definisce le funzioni f_n potrebbe essere sempre $-\infty$, come accade ad esempio per la funzione $f(x) = -x^2$.

D'altra parte, per eliminare l'ipotesi $f(x) \geq 0$, è sufficiente dimostrare che esiste una funzione $g(x)$ continua, con $g(x) \leq f(x)$. Infatti in questo caso basterà applicare il teorema precedente alla funzione $f(x) - g(x) \geq 0$: detta g_n una successione crescente di funzioni continue, che tende a $f - g$, la successione $f_n = g_n + g$ è una successione crescente di funzioni continue, che tende a f .

Si tratta allora di dimostrare la seguente

Proposizione 18.3 *Se f è una funzione semicontinua inferiormente, esiste una funzione $g(x)$ continua, con $g(x) \leq f(x)$.*

Dimostrazione Poniamo $I_k = I(0, k)$ e

$$m_k = \inf_{I_k} f(x).$$

Poiché f è semicontinua, si ha $m_k > -\infty$,³ e m_k è una successione decrescente.

Si può allora prendere come $g(x)$ la funzione pari che per $x \in [k-1, k)$ ($k = 1, 2, \dots$) prende il valore $m_k + (x - k + 1)(m_{k-1} - m_k)$.

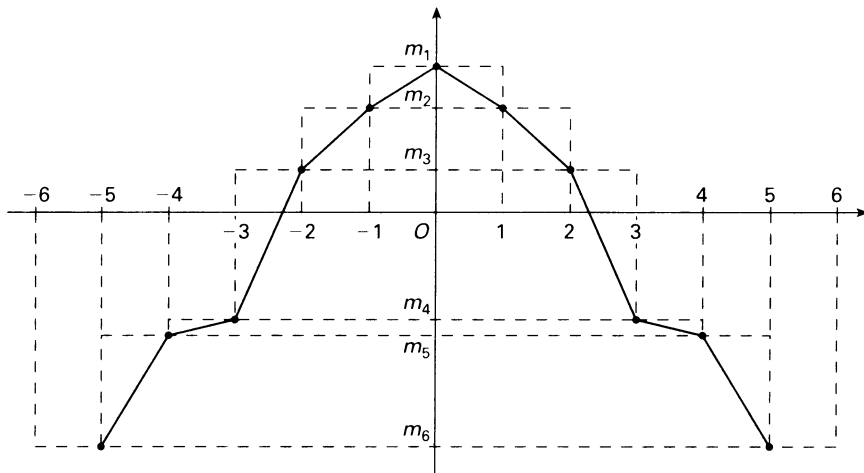


Figura 18.1

Questa funzione è continua, dato che risulta

$$\lim_{x \rightarrow k^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} [m_{k+1} + (x - k)(m_{k+2} - m_{k+1})] = m_{k+1} = g(k)$$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} [m_k + (x - k + 1)(m_{k-1} - m_k)] = m_{k+1}.$$

Inoltre, ricordando che $m_{k+1} < m_k$, si ha $g(x) \leq m_k$ in $[k-1, k)$, e dunque $g(x) \leq f(x)$.

□

18.7. Il teorema di Dini

Nella sezione precedente abbiamo dimostrato che le funzioni semicontinue sono tutte e sole quelle che si possono approssimare con una successione monotona di funzioni continue; con una successione crescente le funzioni SCI, con una decrescente quelle SCS.

Il modo con cui ha luogo la convergenza è stabilito dal seguente teorema.

Teorema 18.12 *Supponiamo che $f_n(x)$ sia una successione crescente di funzioni SCI, definite in un compatto K e convergenti puntualmente in K a una funzione f SCI.*

³ Infatti, per il teorema di Weierstrass, la funzione f ha minimo nella chiusura di I_k . Osserviamo che questo è il solo posto dove entra l'ipotesi di semicontinuit ; la proposizione vale per qualsiasi funzione localmente limitata inferiormente, cio  tale che $m_k > -\infty$.

Sia $g(x)$ una funzione SCS, con $g(x) < f(x)$ in K . Allora esiste un v tale che per ogni $n > v$ risulta $g(x) < f_n(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in K$.

Dimostrazione La disuguaglianza $f_n(x) \leq f(x)$ vale ovviamente per ogni n . Resta dunque da dimostrare che da un certo v in poi si ha $g(x) < f_n(x)$ per ogni $x \in K$. Dato poi che la successione f_n è crescente, basterà dimostrare che esiste un v tale che $f_v(x) > g(x)$, dato che la stessa relazione varrà per ogni $n > v$.

Se una tale f_v non esistesse, per ogni n si potrebbe trovare un punto $x_n \in K$ tale che $f_n(x_n) \leq g(x_n)$.

Poiché K è compatto, dalla successione x_n si può estrarre una sottosuccessione x_{h_n} convergente a un punto $x_0 \in K$.

Dato che la successione f_{h_n} è crescente, avremo

$$f_{h_n}(x_{h_{n+m}}) \leq f_{h_{n+m}}(x_{h_{n+m}}) \leq g(x_{h_{n+m}}).$$

Tenendo fisso n , facciamo ora tendere m all'infinito. Il punto $x_{h_{n+m}}$ tenderà a x_0 , e siccome f_{h_n} è SCI, avremo

$$f_{h_n}(x_0) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{h_n}(x_{h_{n+m}}).$$

D'altra parte $g(x)$ è SCS, e quindi

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} g(x_{h_{n+m}}) \leq g(x_0),$$

cosciché in definitiva

$$f_{h_n}(x_0) \leq g(x_0).$$

Se ora si fa tendere n all'infinito, si ottiene $f(x_0) \leq g(x_0)$, che contraddice l'ipotesi $f(x) > g(x)$. □

Il teorema precedente ci dice che se una funzione $f(x)$ SCI è maggiore di una funzione $g(x)$ SCS in un insieme compatto, in mezzo alle due si può sempre mettere una funzione continua. Infatti se f_n è una successione crescente di funzioni continue, convergenti puntualmente a f , esisterà un v tale che per ogni $n > v$ si ha $g(x) < f_n(x) \leq f(x)$.

Questo risultato ci sarà utile nel prossimo capitolo. Ora ce ne serviremo per dimostrare il teorema di Dini sulla convergenza uniforme.

Come abbiamo osservato, una successione monotona di funzioni continue converge puntualmente a una funzione semicontinua. Se la funzione limite non è continua, la convergenza non può essere uniforme, dato che il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua.

Se invece la funzione limite è continua, la convergenza è uniforme. Si ha infatti

Teorema 18.13 (Dini) *Supponiamo che una successione monotona f_n di funzioni continue converga in un compatto K a una funzione $f(x)$ continua. Allora la convergenza è uniforme.*

Dimostrazione Supponiamo ad esempio che la successione f_n sia crescente. Per la continuità della f , nel teorema precedente possiamo prendere $g(x) = f(x) - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Avremo allora che esiste un ν tale che per ogni $n > \nu$ risulta $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x)$ per ogni $x \in K$. Si ha allora per $n < \nu$:

$$\sup_K |f_n - f| \leq \varepsilon$$

e quindi la successione f_n converge uniformemente. $\square$

Osservazione 18.9 Nel teorema precedente la continuità delle funzioni f_n non è stata mai utilizzata, in quanto per l'applicazione del teorema 18.12 è sufficiente che le funzioni f_n siano SCI. Abbiamo dunque il teorema più generale:

Se una successione crescente di funzioni semicontinue inferiormente converge in un compatto K a una funzione continua, allora la convergenza è uniforme.

Analogamente:

Se una successione decrescente di funzioni semicontinue superiormente converge in un compatto K a una funzione continua, allora la convergenza è uniforme.

Naturalmente, nel teorema precedente è essenziale l'ipotesi che la successione f_n sia monotona; una successione non monotona di funzioni continue può convergere puntualmente a una funzione continua senza che la convergenza sia uniforme.

Ad esempio, la successione

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{se } \frac{1}{n} \leq x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

converge puntualmente a 0, ma non converge uniformemente, dato che $\|f_n\| = 1$. $\square$

18.8. Risposte agli esercizi

18.1. Sia L il massimo limite e sia x_n una successione convergente a x_0 . La 1 segue dalla analoga proprietà della proposizione 18.1; infatti i termini x_n della successione cadranno definitivamente in A_r . Per dimostrare la proprietà 2, osserviamo che per ogni n esiste un punto $x_n \in A_{\frac{1}{n}}$ tale che $f(x_n) > L - \frac{1}{n}$. Tenendo conto della 1, la successione $f(x_n)$ tende a L .

Viceversa, se sono soddisfatte le proprietà 1 e 2, L è il massimo limite. Infatti per la 2 nessun numero minore di L può essere un maggiorante definitivo, mentre per la 1

$L + \varepsilon$ lo è. Infatti, se ciò non fosse, in ogni intorno $A_{\frac{1}{n}}$ ci sarebbe un punto x_n tale che $f(x_n) > L + \varepsilon$, il che contraddice la 1.

18.2. Supponiamo $a \leq b$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un r tale che per $x_0 < x < x_0 + r$ si ha $f(x) < a + \varepsilon$. Analogamente, esiste un s tale che per $x_0 - s < x < x_0$ risulta $f(x) < b + \varepsilon \leq a + \varepsilon$. Di conseguenza $a + \varepsilon$ è un maggiorante locale. D'altra parte per $x_0 < x < x_0 + r$ si ha anche $f(x) > a - \varepsilon$, e quindi $a - \varepsilon$ non è un maggiorante locale.

Capitolo 19

L'integrale di Lebesgue

19.1. Introduzione

Nei capitoli 9 e 12 abbiamo discusso l'integrale per funzioni di una e più variabili. La teoria dell'integrazione sviluppata in quei capitoli, che prende il nome da Riemann che ne ha dato la prima formulazione generale, consente di calcolare l'integrale delle funzioni più comuni, ma non è del tutto soddisfacente per due motivi.

In primo luogo, molte funzioni risultano non integrabili. Si tratta, è vero, di funzioni piuttosto astruse, come ad esempio la funzione di Dirichlet, ma nondimeno questa è una limitazione che non manca di farsi sentire, soprattutto nella teoria della misura. Infatti, come abbiamo visto, risultano misurabili solo gli insiemi che hanno frontiera di misura nulla; una classe che non comprende nemmeno tutti gli aperti né tutti i chiusi.

Ma a parte questa limitazione, manca nella teoria di Riemann un buon teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale. Quello che si può dimostrare (vedi teorema 13.2) è che se una successione f_n di funzioni integrabili converge *uniformemente* a una funzione f , allora

$$\int f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dx,$$

mentre in generale niente si può concludere se la convergenza è solo puntuale.

Ambedue questi difetti sono superati nella teoria dell'integrazione di Lebesgue, che tratteremo in questo capitolo. In questa teoria, la classe delle funzioni integrabili, oltre a comprendere quelle che già lo erano secondo Riemann, si arricchisce di moltissime altre funzioni, al punto che è difficile dare un esempio di funzione non integrabile secondo Lebesgue. In secondo luogo, i teoremi di passaggio al limite possono essere dimostrati nelle ipotesi più generali, acquistando così un'agilità e una potenza sconosciute alla teoria di Riemann. Per capire meglio la differenza di approccio, ricordiamo per un momento alcune tappe della definizione dell'integrale di Riemann. Abbiamo cominciato col definire l'integrale delle funzioni semplici, e con queste ab-

biamo approssimato dall'alto e dal basso arbitrarie funzioni f limitate e a supporto compatto, per ottenere gli integrali superiore e inferiore:

$$\int^* f(x) dx = \inf \left\{ \int \varphi(x) dx; \varphi \in \mathcal{S}^+(f) \right\}; \quad \int_* f(x) dx = \sup \left\{ \int \psi(x) dx; \psi \in \mathcal{S}^-(f) \right\}.$$

Infine, abbiamo chiamato integrabili le funzioni f per le quali l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidevano.

Poniamoci ora il problema di aumentare la classe delle funzioni integrabili. Una possibile strategia consiste nell'ampliare la classe di partenza al di là delle funzioni semplici. Infatti, se al posto delle funzioni semplici prendiamo una classe $\mathcal{Q}$ più ampia, l'integrale superiore diminuisce (essendo un estremo inferiore) o al più resta lo stesso, mentre quello inferiore aumenta o in ogni caso non diminuisce; di conseguenza qualche funzione prima non integrabile potrebbe diventarlo, aumentando così l'insieme delle funzioni integrabili.

Naturalmente, la classe $\mathcal{Q}$ delle funzioni di partenza non può essere qualsiasi, dato che per usarla al posto delle funzioni semplici nella definizione di integrale superiore e inferiore dobbiamo conoscere l'integrale delle funzioni di $\mathcal{Q}$. Il meglio che possiamo fare è prendere come $\mathcal{Q}$ la classe $\mathcal{R}$ delle funzioni integrabili secondo Riemann. In questo modo potremo definire un nuovo integrale superiore:

$$\int^{**} f(x) dx = \inf \left\{ \int v(x) dx; v \in \mathcal{R}^+(f) \right\} \quad [19.1]$$

e un nuovo integrale inferiore:

$$\int_{**} f(x) dx = \sup \left\{ \int u(x) dx; u \in \mathcal{R}^-(f) \right\} \quad [19.2]$$

e definire integrabili le funzioni per cui questi due integrali coincidono.

Purtroppo questa strategia non porta a nulla, dato che così facendo si ritrovano gli stessi integrali superiore e inferiore. Infatti da una parte si ha $\mathcal{S}^+(f) \subset \mathcal{R}^+(f)$, e quindi

$$\int^{**} f(x) dx \leq \int^* f(x) dx$$

e dall'altra per ogni $v \in \mathcal{R}^+(f)$ risulta $\mathcal{S}^+(v) \subset \mathcal{S}^+(f)$, e quindi

$$\int v(x) dx = \int^* v(x) dx \geq \int^* f(x) dx$$

da cui, prendendo l'estremo inferiore, avremo

$$\int^{**} f(x) dx \geq \int^* f(x) dx$$

che confrontata con la precedente dà

$$\int^{**} f(x) dx = \int^* f(x) dx.$$

Allo stesso modo si prova che

$$\int_{**} f(x) dx = \int_{*} f(x) dx;$$

si può dunque concludere che non si guadagna nulla ad approssimare con funzioni integrabili invece che con funzioni semplici: gli integrali superiore e inferiore sono esattamente gli stessi.

Osserviamo che lo stesso avviene se si approssima con funzioni continue. Si ha infatti:

Teorema 19.1 *Sia $f(x)$ una funzione limitata e nulla fuori di un intervallo $[a, b]$. Indicando con $C^+(f)$ e con $C^-(f)$ le classi delle funzioni continue, nulle fuori di un compatto, e rispettivamente maggioranti o minoranti f , risulta*

$$\inf \left\{ \int v(x) dx; v \in C^+(f) \right\} = \int_{*} f(x) dx \quad [19.3]$$

$$\sup \left\{ \int u(x) dx; u \in C^-(f) \right\} = \int_{**} f(x) dx. \quad [19.4]$$

e quindi

Teorema 19.2 *Una funzione f , limitata e nulla fuori di un compatto, è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una funzione $u(x) \in C^-(f)$ e una funzione $v(x) \in C^+(f)$, con*

$$\int [v(x) - u(x)] dx < \varepsilon.$$

Esercizi

19.1. Dimostrare che una funzione f , limitata e nulla fuori di un intervallo $[a, b]$, è integrabile secondo Riemann se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due polinomi

$$P(x) \leq f(x) \leq Q(x) \text{ con } \int_a^b [Q(x) - P(x)] dx < \varepsilon.$$

19.2. Funzioni semicontinue

I risultati negativi della sezione precedente ci dicono che se vogliamo definire le funzioni integrabili mediante l'uguaglianza degli integrali inferiore e superiore, non c'è modo di andare al di là delle funzioni integrabili secondo Riemann. L'unica soluzione è di abbandonare l'approssimazione sia dall'alto che dal basso e di accontentarsi solo di una delle due.

Una volta presa questa strada, si presentano immediatamente due classi di funzioni: quelle semicontinue inferiormente, che come abbiamo visto si possono approssimare dal basso con funzioni continue, e quelle semicontinue superiormente, che si approssimano dall'alto. Viene allora naturale porre la seguente definizione.

Definizione 19.1 Sia $f(x)$ una funzione semicontinua inferiormente, limitata e nulla fuori di un compatto. Definiamo integrale di f l'estremo superiore degli integrali delle funzioni continue minoranti:

$$\int f dx = \sup \left\{ \int u dx; u \in C^-(f) \right\}. \quad [19.6]$$

Analoga definizione per una funzione g semicontinua superiormente; in questo caso chiameremo integrale di g l'estremo inferiore degli integrali delle funzioni continue maggioranti:

$$\int g dx = \inf \left\{ \int v dx; v \in C^+(g) \right\}. \quad [19.7]$$

Osservazione 19.1 Nella [19.6] si può supporre che le funzioni u abbiano tutto il supporto in uno stesso rettangolo aperto R che contiene il supporto di f . Più precisamente, se $\text{supp}(f) \subset R$, e se si pone

$$C_R^-(f) = \{u \in C^-(f) : \text{supp}(u) \subset R\}$$

si ha

$$\int f dx = \sup \left\{ \int u dx; u \in C_R^-(f) \right\}.$$

Sia infatti v una funzione di $C^-(f)$, e sia R' un rettangolo tale che $\text{supp}(f) \subset R' \subset \overline{R'} \subset R$. Siccome $f = 0$ in $R - R'$ e $v \leq f$, risulterà $v \leq 0$ in $R - R'$. Ma allora, posto $u = vz$, dove z è una funzione che vale 1 in R' , 0 fuori di R , e i cui valori sono sempre compresi tra 0 e 1, risulta $v \leq u \leq f$ e $\int v dx \leq \int u dx$. Di conseguenza, l'estremo superiore [19.6] non supera quello fatto su $C_R^-(f)$, e dunque, non potendo essere minore, gli sarà uguale.

Allo stesso modo si dimostra che se g è una funzione SCS, si ha

$$\int g dx = \inf \left\{ \int v dx; v \in C_R^+(g) \right\}. \quad \square$$

Con queste due definizioni siamo usciti dalla teoria di Riemann; infatti ora tutte le funzioni semicontinue sono integrabili. Per esse non richiediamo l'uguaglianza degli integrali superiore e inferiore, ma ne utilizziamo uno solo, e precisamente l'integrale inferiore se f è SCI, e l'integrale superiore se è SCS.

Sia ha il seguente

Teorema 19.3 Sia f_k una successione crescente di funzioni semicontinue inferiormente, tutte con supporto contenuto in un rettangolo R , che tende puntualmente a

una funzione f . Allora f è una funzione semicontinua inferiormente con supporto contenuto in $\bar{R}$, e si ha

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

Dimostrazione Osserviamo in primo luogo che risulta $f_k \leq f$, e quindi $\int f_k dx \leq \int f dx$.

Sia ora $\varepsilon > 0$, e sia v una funzione di $C_R(f)$ tale che

$$\int v dx \geq \int f dx - \varepsilon.$$

Si ha $v \leq f$, e dunque $v - \varepsilon < f$ in $\bar{R}$. Per il teorema di Dini 18.12, per k abbastanza grande risulterà $f_k \geq v - \varepsilon$ in $\bar{R}$, e integrando su R :

$$\int f dx \geq \int f_k dx \geq \int v dx - \varepsilon m(R) \geq \int f dx - (1 + m(R))\varepsilon$$

da cui segue subito la tesi. $\square$

In particolare il teorema vale se le funzioni f_k sono continue. Ricordiamo che una funzione f SCI si può sempre approssimare con una successione crescente di funzioni continue.

Corollario 19.1 Se f_1 e f_2 sono due funzioni semicontinue inferiormente, si ha

$$\int (f_1 + f_2) dx = \int f_1 dx + \int f_2 dx$$

Dimostrazione Se u_k e v_k sono due successioni crescenti di funzioni continue, con $u_k \rightarrow f_1$ e $v_k \rightarrow f_2$, la loro somma $u_k + v_k$ è una successione crescente, che tende a $f_1 + f_2$, e quindi

$$\int (f_1 + f_2) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int (u_k + v_k) dx.$$

Ma per le funzioni continue l'integrale della somma è la somma degli integrali, e il risultato segue dal teorema precedente. $\square$

Risultati analoghi valgono per le funzioni SCS. Infatti se u è una funzione SCS, $-u$ è SCI; basta allora scrivere i risultati precedenti per $-u$ e poi fare gli opportuni cambiamenti.

Teorema 19.4 Se f e g sono due funzioni semicontinue, e $f \leq g$, si ha

$$\int f dx \leq \int g dx.$$

Dimostrazione Il risultato è ovvio se f e g sono ambedue SCI (in questo caso si ha $C^-(f) \subset C^-(g)$) o ambedue SCS, e anche se f è SCI e g è SCS (dato che ogni funzione di $C^-(f)$ è minore o uguale a ogni funzione di $C^-(g)$).

Resta solo da considerare il caso in cui f è SCS e g è SCI .

Sia R' un rettangolo che contiene i supporti di f e g , e sia $R \supset \overline{R'}$. Sia inoltre u_k una successione crescente di funzioni continue, che tende a g , con i supporti tutti contenuti in R .

Se $\varepsilon > 0$, essendo R aperto la funzione $\varepsilon \varphi_R$ è SCI , e quindi $f - \varepsilon \varphi_R$ è SCS . Inoltre si ha $f - \varepsilon \varphi_R < g$ in $\overline{R'}$. Il teorema 18.12 ci assicura allora che per k abbastanza grande risulta $f - \varepsilon \varphi_R < u_k \leq g$ in R' , e integrando:

$$\int f dx - \varepsilon m(R) < \int u_k dx \leq \int g dx.$$

Si ha dunque

$$\int f dx - \varepsilon m(R) < \int g dx$$

e la tesi segue per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. □

19.3. L'integrale di Lebesgue

A questo punto, possiamo provare a ripetere quello che abbiamo fatto nel § 1, e definire l'integrale di una funzione qualsiasi approssimandola dall'alto e dal basso con funzioni semicontinue. A differenza di prima, qui abbiamo qualche speranza di ampliare la classe delle funzioni integrabili, perché, come abbiamo già osservato, l'integrale delle funzioni semicontinue contiene qualcosa di nuovo rispetto all'integrale di Riemann. Bisogna però scegliere bene il modo di approssimare. Infatti se proviamo ad approssimare dal basso con funzioni SCI e dall'alto con funzioni SCS , ricadiamo nell'integrale di Riemann, dato che ogni funzione SCI si può approssimare dal basso, e ogni funzione SCS si può approssimare dall'alto, con funzioni continue. Le cose cambiano se si approssima dall'alto con funzioni SCI , e dal basso con funzioni SCS . Di qui la seguente

Definizione 19.2 Sia $f(x)$ una funzione limitata e nulla fuori di un compatto. Posto

$$SCI^+(f) = \{v \in SCI : v \geq f\} \quad e \quad SCS^-(f) = \{u \in SCS : u \leq f\},$$

i numeri

$$\int^- f dx = \inf \left\{ \int v dx; v \in SCI^+(f) \right\} \tag{19.8}$$

$$\int_+ f dx = \sup \left\{ \int u dx; u \in SCS^-(f) \right\} \tag{19.9}$$

si chiamano rispettivamente integrale superiore e integrale inferiore della funzione f .

In generale si ha

$$\int f dx \leq \int \bar{f} dx,$$

come segue immediatamente dal teorema 19.4.

Definizione 19.3 Se gli integrali superiore e inferiore di f sono uguali, diremo che f è sommabile,¹ e chiameremo integrale di f il loro valore comune:

$$\int f dx = \int f dx = \int \bar{f} dx.$$

Segue subito dalla definizione che

Proposizione 19.1 Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f , limitata e nulla fuori di un compatto, sia sommabile è che per ogni $\varepsilon > 0$ esistano una funzione $u \in SCS^-$ e una funzione $v \in SCI^+$ tali che

$$\int v dx - \int u dx < \varepsilon.$$

Prendendo poi successivamente $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, si ottiene la seguente

Proposizione 19.2 Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione f , limitata e nulla fuori di un compatto, sia sommabile è che esistano una successione $u_n \in SCS^-$ e una successione $v_n \in SCI^+$ tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int (v_n - u_n) dx = 0.$$

Si può anche supporre che le due successioni siano monotone; crescente la u_n e decrescente la v_n . In caso contrario, basterà prendere

$$\tilde{u}_n = u_1 \vee u_2 \vee \dots \vee u_n$$

e

$$\tilde{v}_n = v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n.$$

Si prosegue ora come nel caso dell'integrale di Riemann, mostrando che l'integrale è lineare, ossia che se λ e μ sono due numeri reali, si ha:

$$\int (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int f dx + \mu \int g dx,$$

e inoltre che se f e g sono sommabili, lo sono anche $f \vee g$ e $f \wedge g$. In particolare, se f è sommabile, lo sono anche $f \vee 0$ e $f \wedge 0$, e quindi anche $|f|$. Se poi osserviamo che le funzioni

¹ Spesso invece del termine "sommabile" si usa dire "integrabile secondo Lebesgue". Noi useremo quest'ultima locuzione in un senso leggermente diverso (vedi la definizione 19.5), preferendo qui il termine "sommabile", ormai entrato nell'uso comune.

continue sono anche semicontinue, e quindi che $C^-(f) \subset SCS^-(f)$ e $C^+(f) \subset SCS^+(f)$, potremo concludere che

$$\int_* f dx \leq \int_{-} f dx \leq \int^* f dx \leq \int^+ f dx.$$

Di conseguenza, se $f(x)$ è integrabile secondo Riemann, cioè se il primo e l'ultimo integrale sono uguali, sono uguali anche gli integrali intermedi, e quindi f è anche sommabile, e il valore dell'integrale è lo stesso. Pertanto, quando di qui in poi parleremo di integrale, intenderemo sempre l'integrale di Lebesgue, dato che se la funzione in esame era integrabile secondo Riemann, il valore dell'integrale è lo stesso.

19.4. Successioni monotone

In questa sezione cominciamo a studiare il passaggio al limite sotto il segno di integrale. Il problema che ci poniamo è il seguente: supponiamo di avere una successione f_k di funzioni sommabili, convergente puntualmente a una funzione f . Possiamo concludere che la funzione f è sommabile? e se lo è, il suo integrale sarà il limite degli integrali delle f_k ?

Lasciando a un paragrafo successivo il caso generale, qui considereremo successioni f_k monotone, dimostrando una proposizione che, benché di carattere tecnico, è la chiave di tutti i risultati successivi.

Proposizione 19.3 *Sia f_k una successione crescente di funzioni limitate e nulle fuori di un rettangolo R , convergente a una funzione limitata f . Allora si ha*

$$\int_{-} f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-} f_k dx. \quad [19.10]$$

Dimostrazione. Dato che $f_k \leq f$ si avrà $\int_{-} f_k dx \leq \int_{-} f dx$, e quindi²

$$\int_{-} f dx \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-} f_k dx. \quad [19.11]$$

Per dimostrare la [19.10] occorrerà provare la disuguaglianza contraria.

Cominciamo con l'osservare che dalla definizione di integrale superiore segue che per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni k esiste una funzione $v_k \in SCI^+(f_k)$, tale che

$$\int v_k dx \leq \int_{-} f_k dx + \varepsilon 2^{-k}. \quad [19.12]$$

Alla successione v_k vorremmo applicare il teorema 19.3; purtroppo però nulla ci dice che la successione v_k sia crescente. Per ovviare a questo inconveniente, poniamo

$$w_k = v_1 \vee v_2 \vee \dots \vee v_k.$$

² Si noti che il limite esiste perché la successione degli integrali è crescente.

Le funzioni w_k sono *SCI*, e costituiscono una successione crescente, che converge a una funzione $w \in \text{SCI}$. Essendo $w_k \geq v_k \geq f_k$, si ha anche $w \geq f$, e quindi $w \in \text{SCI}^+(f)$, per cui

$$\int w dx \geq \int f dx$$

Dimostriamo per induzione che per ogni k risulta

$$\int w_k dx \leq \int \bar{f}_k dx + \varepsilon \sum_{s=1}^k 2^{-s}. \quad [19.13]$$

La [19.13] vale per $k=1$, dato che in questo caso coincide con la [19.12]. Supponiamo ora che la [19.13] valga per k , e dimostriamola per $k+1$. Risulta

$$w_{k+1} = w_k \vee v_{k+1} = w_k + v_{k+1} - w_k \wedge v_{k+1}$$

ed essendo $w_k \geq f_k$ e $v_{k+1} \geq f_{k+1} \geq f_k$ si ha $w_k \wedge v_{k+1} \geq f_k$, e quindi

$$\int w_k \wedge v_{k+1} dx \geq \int f_k dx,$$

cosicch  in definitiva

$$\int w_{k+1} dx = \int w_k dx + \int v_{k+1} dx - \int w_k \wedge v_{k+1} dx \leq \int w_k dx + \int v_{k+1} dx - \int f_k dx.$$

Siccome avevamo supposto che la [19.13] valesse per k , tenendo conto della [19.12] per $k+1$ avremo

$$\int w_{k+1} dx \leq \int \bar{f}_k dx + \varepsilon \sum_{s=1}^k 2^{-s} + \int \bar{f}_{k+1} dx + \varepsilon 2^{-k-1} - \int \bar{f}_k dx = \int \bar{f}_{k+1} dx + \varepsilon \sum_{s=1}^{k+1} 2^{-s}$$

che   la [19.13] per $k+1$.

Per induzione la [19.13] vale per ogni k , e poich  la serie geometrica $\sum 2^{-s}$ ha somma 1, si avr  anche

$$\int w_k dx \leq \int \bar{f}_k dx + \varepsilon.$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, e ricordando il teorema 19.3, si ha

$$\int \bar{f} dx \leq \int w dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int w_k dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \bar{f}_k dx + \varepsilon$$

e per l'arbitrariet  di ε

$$\int \bar{f} dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int \bar{f}_k dx$$

che confrontata con la [19.11] d  immediatamente la tesi. □

La proposizione che segue   molto pi  semplice.

Proposizione 19.4 *Sia f_k una successione crescente di funzioni limitate e nulle fuori di un rettangolo R , convergente a una funzione limitata f . Allora si ha*

$$\int f dx \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx. \quad [19.14]$$

Dimostrazione Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni k esiste una funzione $u_k \in SCS^-(f_k)$, tale che

$$\int u_k dx \geq \int f_k dx - \varepsilon.$$

Siccome $f_k \leq f$, si ha anche $u_k \leq f$, e quindi

$$\int f dx \geq \int u_k dx \geq \int f_k dx - \varepsilon.$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, avremo allora

$$\int f dx \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx - \varepsilon$$

e la [19.14] segue per l'arbitrarietà di ε . □

Dalle ultime due proposizioni segue subito il seguente teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Teorema 19.5 *Sia f_k una successione crescente di funzioni limitate e nulle fuori di un rettangolo R , convergente a una funzione limitata f . Se tutte le f_k sono sommabili, anche la f è sommabile, e si ha*

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx. \quad [19.15]$$

Dimostrazione Mettendo insieme la [19.10] e la [19.14], e ricordando che gli integrali inferiore e superiore delle f_k sono uguali all'integrale, avremo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx \leq \int f dx \leq \int f dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

Poiché il primo e l'ultimo termine sono uguali, vale sempre il segno $=$, e il teorema è dimostrato. □

19.5. Alcune estensioni dell'integrale

Prima di proseguire, cerchiamo di estendere il concetto di integrale in modo da comprendervi anche funzioni non limitate o a supporto³ non compatto.

In primo luogo, come avevamo fatto nel capitolo 12, definiamo l'integrale esteso a un insieme E .

³ Ricordiamo che si chiama supporto di una funzione f la chiusura dell'insieme in cui f è diversa da zero.

Definizione 19.4 Diremo che la funzione $f(x)$ è sommabile nell'insieme E se è sommabile la funzione $f\varphi_E$. Se ciò avviene porremo

$$\int_E f dx = \int f\varphi_E dx.$$

Più in generale, si possono definire gli integrali inferiore e superiore della f in E come i corrispondenti integrali di $f\varphi_E$. Veniamo ora al caso di funzioni non limitate o a supporto non compatto. Specie in vista dei teoremi di passaggio al limite del tipo della sezione precedente, è conveniente considerare funzioni a valori in $\overline{\mathbf{R}}$, cioè che possano assumere anche i valori $+\infty$ e $-\infty$. Cominciamo dal caso di funzioni positive. Se $f(x) \geq 0$, preso un numero $r > 0$, possiamo “tagliare” la funzione f all'altezza r , prendendo la funzione $f(x) \wedge r = \min\{f(x), r\}$.

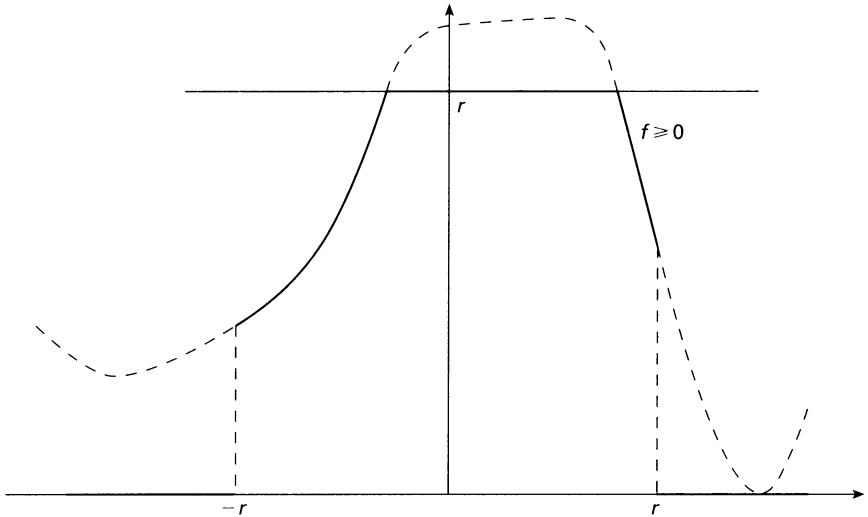


Figura 19.1

Questa funzione è ovviamente limitata, ma non è ancora nulla fuori di un compatto. Possiamo ovviare a questo inconveniente moltiplicandola per la funzione caratteristica del quadrato Q_r di centro l'origine e lato $2r$. In questo modo otteniamo una funzione

$$f^r(x) = (f(x) \wedge r)\varphi_{Q_r}(x)$$

limitata e nulla fuori di un compatto. Osserviamo che se $r < s$ si ha $f^r(x) \leq f^s(x)$.

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 19.5 Una funzione f , definita in $\mathbf{R}^n$ e a valori in $[0, +\infty]$, si dice integrabile secondo Lebesgue se per ogni $r > 0$ la funzione $f^r(x)$ è sommabile. Se f è integrabile, poniamo

$$\int f dx = \sup_{r>0} \int f^r dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int f^r dx. \quad [19.16]$$

Osservazione 19.2 Se $f(x)$ è integrabile, il suo integrale può essere finito o $+\infty$. Nel primo caso, diciamo che la funzione è *sommabile*. In altre parole, chiamiamo integrabili (secondo Lebesgue) le funzioni per cui l'integrale esiste nel senso della definizione precedente, e sommabili quelle per cui l'integrale è finito. Osserviamo che vale un teorema del confronto: se una funzione positiva e integrabile $f(x)$ è maggiorata da una funzione sommabile $g(x)$, allora anche f è sommabile. Infatti si ha $f^r \leq g^r$, e quindi

$$\int f(x)dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int f^r dx \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \int g^r dx = \int g dx < +\infty. \quad \square$$

Osservazione 19.3 Invece di far tendere all'infinito contemporaneamente il livello del taglio e il lato del quadrato, potremmo farli variare separatamente. Si otterrebbe lo stesso integrale; infatti se $r < s$ si ha

$$\int f^r dx \leq \int (f \wedge s) dx \leq \int f^s dx$$

e facendo tendere all'infinito prima s e poi r :

$$\int f dx \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{s \rightarrow +\infty} \int (f \wedge s) dx \leq \int f dx$$

e quindi

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{s \rightarrow +\infty} \int (f \wedge s) dx = \int f dx.$$

Analogamente, si ha

$$\int f^r dx \leq \int (f \wedge r) dx \leq \int f^s dx$$

e facendo tendere all'infinito prima s e poi r si ottiene:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \lim_{s \rightarrow +\infty} \int (f \wedge r) dx = \int f dx. \quad \square$$

Osservazione 19.4 Come abbiamo osservato nel caso dell'integrale di Riemann, al posto dei quadrati Q_r si potrebbero prendere cerchi, rettangoli, o in generale una qualsiasi famiglia E_r di aperti limitati, tali che $E_r \subseteq E_s$ se $r < s$, e la cui unione sia tutto $\mathbf{R}^n$.

Infatti da una parte ogni aperto E_r è contenuto in un quadrato Q_s , con $s > r$; dall'altra ogni quadrato Q_p è contenuto in un aperto E_σ , con $\sigma > p$. Si ha allora da una parte

$$\int_{E_r} (f \wedge r) dx \leq \int_{Q_s} (f \wedge s) dx$$

e dall'altra

$$\int_{Q_p} (f \wedge p) dx \leq \int_{E_\sigma} (f \wedge \sigma) dx$$

da cui segue che

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{E_r} (f \wedge r) dx = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{Q_s} (f \wedge s) dx \quad \square$$

Osservazione 19.5 Se la funzione f è limitata e nulla fuori di un compatto K , la [19.16] restituisce l'integrale che avevamo definito in precedenza. Infatti non appena r è maggiore dell'estremo superiore di f , e il quadrato Q_r contiene K , si ha $f^r = f$, e dunque da un certo r_0 in poi si ha

$$\int f^r dx = \int f dx.$$

Di conseguenza il limite nella [19.16] è uguale all'integrale della funzione f . $\square$

Veniamo ora alle funzioni di segno qualsiasi. In questo caso possiamo considerare le funzioni

$$f^+(x) = f(x) \vee 0 \quad \text{e} \quad f^-(x) = (-f(x)) \vee 0 = -(f(x) \wedge 0).$$

Si noti che f^+ e f^- sono ambedue positive, e si ha $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Si possono allora avere quattro casi:

1. Sia f^+ che f^- sono sommabili. Diremo allora che f è *sommabile*, e porremo

$$\int f dx = \int f^+ dx - \int f^- dx. \quad [19.17]$$

2. Le due funzioni f^+ e f^- sono integrabili, e una almeno di esse è sommabile. Diremo allora che f è *integrabile*; in questo caso l'integrale di f , dato dall'espressione precedente, può essere finito (se tutte e due le funzioni sono sommabili, il che non è escluso), ma anche $+\infty$ (se f^+ non è sommabile) o $-\infty$ (se non è sommabile f^-). Siccome almeno una delle due è sommabile, il secondo membro della [19.17] non può essere $+\infty - \infty$.
3. Ambedue f^+ e f^- sono integrabili. Diremo allora che f è *misurabile*, ma in generale non potremo assegnare un valore all'integrale, perché potremmo essere nel caso $+\infty - \infty$.
4. Una almeno delle funzioni f^+ o f^- non è integrabile. Amen. $\square$

Teorema 19.6 Se $f_k(x)$ è una successione di funzioni integrabili e positive, allora sono integrabili $M(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$, $m(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$, $F(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ e $f(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$,

Dimostrazione Per ipotesi, per ogni $r > 0$ le funzioni f_k^r sono sommabili, e quindi sono anche sommabili le funzioni

$$M_k^r = f_1^r \vee f_2^r \vee \dots \vee f_k^r.$$

Per ogni r fissato la successione M_k^r è crescente; e si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_k^r(x) = M^r(x).$$

Per il teorema 19.5 la funzione M^r è sommabile, e quindi M è integrabile. In maniera simmetrica si dimostra che $m(x)$ è integrabile.

Poiché poi si ha

$$F(x) = \inf_{n \in \mathbf{N}} \sup_{k \geq n} f_k(x), \quad f(x) = \sup_{n \in \mathbf{N}} \inf_{k \geq n} f_k(x),$$

per quanto appena detto anche F e f risultano integrabili. $\square$

Osservazione 19.6 Se le funzioni f_k non sono positive, si potrà applicare il teorema precedente alle funzioni f_k^+ ed f_k^- . Si conclude allora che M^+ e M^- sono integrabili, e così le altre. Perché M risulti integrabile, basterà allora che almeno una delle due funzioni M^+ o M^- sia sommabile. Questo avviene ad esempio se esiste una funzione sommabile $h(x)$ tale che $f_k(x) \geq h(x)$; in tal caso infatti risulta $M^+ \leq h^+$, e quindi M^+ è sommabile. Se poi esistono due funzioni sommabili h_1 e h_2 con $h_1(x) \leq f_k(x) \leq h_2(x)$, ovvero, il che è lo stesso, che esista una funzione sommabile $g(x)$ con $|f_k(x)| \leq g(x)$, allora M sarà sommabile. Lo stesso si può dire per le funzioni m , F e f . $\square$

19.6. I teoremi di passaggio al limite

Abbiamo detto più di una volta che una delle maggiori debolezze della teoria di Riemann è costituita dalla mancanza di buoni teoremi di passaggio al limite, o se si vuole che questi teoremi rappresentano uno dei punti di forza dell'integrale di Lebesgue.

Siamo ora nelle condizioni di dimostrare questi teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, nella loro naturale generalità.

Il primo risultato è un'estensione del teorema 19.5.

Teorema 19.7 (di Beppo Levi) *Sia f_k una successione crescente di funzioni positive e integrabili, e sia*

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_{k \in \mathbf{N}} f_k(x)$$

Allora

$$\int f dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx. \quad [19.18]$$

Dimostrazione Che f sia integrabile segue dal teorema precedente. Se una delle f_k ha integrale $+\infty$, lo hanno anche tutte le successive e la f , e il teorema è dimostrato. Supponiamo allora che le f_k siano tutte sommabili. Si ha per il teorema 19.5

$$\int f^r dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k^r dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$$

e quindi, facendo tendere r all'infinito,

$$\int f dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

D'altra parte $f_k \leq f$, e quindi anche $\int f_k dx \leq \int f dx$. Passando al limite si trova allora

$$\int f dx \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx$$

e il teorema è dimostrato. $\square$

Osservazione 19.7 La condizione $f_k \geq 0$ non può essere eliminata. Ad esempio, la successione $f_k(x) = -\frac{1}{k}$ è crescente e tende a $f(x) = 0$, ma la successione degli integrali, che valgono tutti $-\infty$, non tende all'integrale della f , che invece vale 0. Il teorema continua però a valere se si sostituisce l'ipotesi $f_k \geq 0$ con la più debole

$$\int f_1 dx > -\infty,$$

o più in generale se si suppone che sia $\int f_N dx > -\infty$ per qualche intero N (e dunque per tutti i successivi, dato che la successione f_k è crescente). Infatti se $\int f_1 dx = +\infty$, tutti gli integrali valgono $+\infty$, e non c'è nulla da dimostrare. Se invece f_1 è sommabile, basterà applicare il teorema precedente alla successione $g_k(x) = f_k(x) - f_1(x)$, che è crescente, positiva e tende a $g = f - f_1$. Si ha allora per il teorema precedente

$$\int f dx - \int f_1 dx = \int (f - f_1) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int (f_k - f_1) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx - \int f_1 dx$$

ed eliminando nei due membri l'integrale di f_1 si giunge alla [19.18]. Notiamo che è appunto in quest'ultimo passaggio che entra l'ipotesi che l'integrale di f_1 sia maggiore di $-\infty$; in caso contrario non potremmo semplificare.

In particolare, la [19.18] vale se f_1 è maggiore di una funzione sommabile h . $\square$

Esempio 19.1 Il teorema precedente si può applicare alle serie a termini positivi. Sia infatti

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

una serie di funzioni u_k integrabili e positive. La successione s_n delle somme parziali è crescente e positiva, e quindi si può applicare il teorema di B. Levi. Si ha allora

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} s_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n dx$$

ovvero

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int u_k(x) dx.$$

In altre parole, le serie a termini positivi si possono sempre integrare termine a termine. $\square$

Fin qui abbiamo trattato successioni crescenti. I prossimi teoremi riguardano il caso generale.

Teorema 19.8 (lemma di Fatou) *Sia $f_k(x)$ una successione di funzioni integrabili, e supponiamo che esista una funzione sommabile $h(x)$ tale che $f_k(x) \geq h(x)$ per ogni k e per ogni x . Allora*

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx. \quad [19.19]$$

Dimostrazione Posto

$$g_n(x) = \inf_{k \geq n} f_k,$$

la successione g_n è crescente, e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

Risulta inoltre $g_n(x) \geq h(x)$, e quindi si può applicare il teorema di B. Levi, e concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n dx = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n dx = \int \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k dx$$

D'altra parte per $k \geq n$ risulta $f_k(x) \geq g_n(x)$, da cui

$$\int g_n dx \leq \int f_k dx$$

e quindi

$$\int g_n dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx.$$

La tesi segue passando al limite per $n \rightarrow \infty$. □

Un risultato analogo vale per il massimo limite: se le funzioni f_k sono tutte maggiorate da una funzione sommabile $h(x)$, allora risulta

$$\int \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx. \quad [19.20]$$

Per la dimostrazione si può seguire quella del lemma di Fatou, o più semplicemente applicare il lemma di Fatou alla successione $-f_k$.

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 19.9 (di Lebesgue, o della convergenza dominata) *Sia $f_k(x)$ una successione di funzioni sommabili, convergente puntualmente a una funzione $f(x)$. Supponiamo che esista una funzione sommabile $g(x)$ tale che $|f_k(x)| \leq g(x)$ per ogni k e per ogni x . Allora si ha*

$$\int f(x) dx = \int \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx. \quad [19.21]$$

Dimostrazione Le funzioni f_k verificano le ipotesi del lemma di Fatou, e quindi valgono sia la [19.19] che la [19.20]. Ricordando che risulta

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$$

avremo allora

$$\int f dx \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int f_k dx \leq \int f dx$$

da cui segue immediatamente la [19.21]. □

Esempio 19.2 Per $\alpha > -1$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^\alpha dx = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx. \quad [19.22]$$

Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^\alpha & 0 \leq x < n \\ 0 & x \geq n \end{cases}$$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^\alpha e^{-x}$$

e quindi potremo applicare il teorema di Lebesgue a patto di trovare una funzione sommabile $g(x)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Per questo osserviamo che la funzione $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^x$ è decrescente in $[0, n]$ (la sua derivata prima è $-\frac{x}{n} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} e^x \leq 0$) e quindi ha massimo 1, assunto per $x = 0$. Si ha allora

$$0 \leq f_n(x) \leq x^\alpha e^{-x}.$$

Per $\alpha > -1$ quest'ultima funzione è sommabile, e quindi la [19.22] segue dal teorema di Lebesgue. □

Esercizi

19.2. Si dimostri che $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n \sin x}{1 + n^2 x^2} dx = 0$.

19.3. Si dimostri che per $0 \leq \alpha < 2$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n^\alpha x^\alpha}{1 + n^2 x^2} dx = 0$

19.4. Si dimostri che per $0 \leq \alpha < 2$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n^\alpha x^\alpha}{1 + n^2 x^2} dx = 0$

19.5. Dimostrare che se $f: (0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ è una funzione positiva, integrabile in senso improprio (con una singolarità in 0), allora è integrabile secondo Lebesgue in $(0, 1]$, e il valore dell'integrale è lo stesso.

19.7. La misura degli insiemi

Come nel capitolo 12, diremo che un insieme E è misurabile (secondo Lebesgue) se la sua funzione caratteristica φ_E è integrabile, e porremo

$$m(E) = \int \varphi_E dx$$

In particolare sono misurabili gli insiemi aperti e i chiusi, dato che le loro funzioni caratteristiche sono rispettivamente semicontinue inferiormente e superiormente.

Per gli insiemi misurabili valgono le seguenti proprietà:

1. Se E e F sono misurabili, lo sono anche $E \cup F$, $E \cap F$ ed $E - F$. Si ha infatti $\varphi_{E \cup F} = \varphi_E \vee \varphi_F$, $\varphi_{E \cap F} = \varphi_E \wedge \varphi_F$, e $\varphi_{E - F} = \varphi_E - \varphi_{E \cap F}$.
2. Si ha $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$. Infatti $\varphi_{E \cup F} = \varphi_E + \varphi_F - \varphi_{E \cap F} \leq \varphi_E + \varphi_F$. Si noti che il segno $=$ vale quando $E \cap F$ ha misura nulla, e dunque in particolare quando E e F sono disgiunti.
3. Se $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots$ è una successione crescente di insiemi misurabili, la loro unione E è misurabile e si ha

$$m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n) \quad [19.23]$$

Infatti la successione delle funzioni caratteristiche φ_{E_n} è positiva, crescente e tende a φ_E , per cui si può applicare il teorema di B. Levi.

4. Se E_k è una famiglia numerabile di insiemi misurabili, sono misurabili gli insiemi

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \quad \text{e} \quad F = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Infatti risulta

$$\varphi_E = \sup_{k \in \mathbf{N}} \varphi_{E_k} \quad \text{e} \quad \varphi_F = \inf_{k \in \mathbf{N}} \varphi_{E_k}.$$

5. Si ha poi

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k). \quad [19.24]$$

Se infatti si pone $F_n = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$, gli insiemi F_n formano una successione crescente e la loro unione è E . Si ha dunque $m(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n)$. D'altra parte si ha

$$m(F_n) \leq \sum_{k=1}^n m(E_k)$$

da cui la [19.24]. La relazione [19.24] esprime la *subadditività* numerabile della misura di Lebesgue. Notiamo che in generale essa non vale per la misura di Peano-Jordan.

6. Se gli insiemi E_k sono a due a due disgiunti, risulta

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k). \quad [19.25]$$

Infatti in questo caso si ha

$$m(F_n) = \sum_{k=1}^n m(E_k).$$

La relazione [19.25] è nota come *additività* numerabile della misura.

Esempio 19.3 L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è misurabile, e si ha $m(\mathbf{Q}) = 0$.

Infatti abbiamo visto che $\mathbf{Q}$ è numerabile, e quindi può essere visto come l'unione di un'infinità numerabile di insiemi, ognuno dei quali costituito da un solo punto. Poiché un insieme formato da un solo punto ha misura zero, segue dalla [19.25] che la misura di $\mathbf{Q}$ è zero.

La funzione caratteristica di $\mathbf{Q}$ è la funzione di Dirichlet

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

Si ha allora che $D(x)$ è sommabile, e $\int D(x)dx = 0$. □

Esempio 19.4 (Un insieme non misurabile) Mentre nel caso dell'integrale di Riemann era stato relativamente facile dare un esempio di funzione non integrabile, per l'integrale di Lebesgue questo non è affatto semplice, e una tale funzione può essere costruita solo con una certa fatica. Noi daremo un esempio di un insieme $E \subset [0, 1]$ non misurabile. Nell'intervallo $[0, 1]$ diciamo equivalenti due punti x e y se la loro differenza $x - y$ è razionale. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme quoziente di $[0, 1]$ rispetto a questa relazione di equivalenza; ogni elemento α di $\mathcal{A}$ è una classe di equivalenza, costituita da un punto di $[0, 1]$ e da tutti i punti ad esso equivalenti.

Costruiamo ora un insieme E prendendo un numero x_α da ogni classe di equivalenza $\alpha \in \mathcal{A}$:

$$E = \{x_\alpha; \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Supponiamo per assurdo che E sia misurabile.

Per ogni numero razionale $r \in [-1, 1]$ consideriamo l'insieme E_r ottenuto aggiungendo r a tutti gli elementi di E :

$$E_r = \{y + r; y \in E\} = \{x \in \mathbf{R} : x - r \in E\}.$$

Gli insiemi E_r godono delle seguenti proprietà:

1. $E_r \subset [-1, 2]$.

2. Si ha $\varphi_{E_r}(x) = \varphi_E(x - r)$, e dunque se E è misurabile, lo è anche E_r , e $m(E_r) = m(E)$.
3. Se $r \neq s$ gli insiemi E_r ed E_s sono disgiunti: $E_r \cap E_s = \emptyset$. Infatti se esistesse un punto x comune a E_r e a E_s , i punti $x_1 = x - r$ e $x_2 = x - s$ apparterebbero ad E , e si avrebbe $x_1 - x_2 = s - r \in \mathbb{Q}$. Ma allora x_1 e x_2 apparterebbero alla stessa classe di equivalenza, il che è impossibile, perché E è stato costruito prendendo un solo punto per ogni classe.
4. Infine, dato che in E c'è un elemento per ogni classe di equivalenza, dato comunque un punto $z \in [0, 1]$, c'è un numero razionale $q \in [-1, 1]$ tale che $z - q \in E$; di conseguenza $z \in E_q$.

Riassumiamo quanto abbiamo dimostrato. Abbiamo costruito un'infinità numerabile (i numeri razionali sono numerabili) di insiemi misurabili E_r , a due a due disgiunti, e tutti contenuti in $[-1, 2]$, la cui unione

$$\mathcal{E} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} E_r$$

verifica

$$[0, 1] \subset \mathcal{E} \subset [-1, 2].$$

Inoltre, le misure degli insiemi E_r sono tutte uguali tra loro.

Queste proprietà sono contraddittorie. Infatti per l'additività numerabile della misura, si ha

$$m(\mathcal{E}) = \sum_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(E_r).$$

Se ora $m(E) = m > 0$, si deve avere $m(\mathcal{E}) = +\infty$, cosa impossibile perché $\mathcal{E} \subset [-1, 2]$. Se invece $m(E) = 0$, sarà anche $m(\mathcal{E}) = 0$, anche questo impossibile, perché $\mathcal{E} \supset [0, 1]$.

Siamo dunque giunti a una contraddizione, e quindi E non può essere misurabile. $\square$

Lo stesso esempio fornisce una funzione non integrabile secondo Lebesgue: la funzione caratteristica dell'insieme E .

19.8. Insiemi di misura nulla

Tra gli insiemi misurabili, un posto di un certo interesse hanno quelli di misura nulla: la misura di Lebesgue non riconosce insiemi di misura nulla, e due funzioni che differiscono solo su di un insieme di misura nulla hanno lo stesso integrale.

Infatti se la funzione $h(x)$ è diversa da zero solo su un insieme E di misura nulla, si ha $|h|^r \leq r\varphi_E$ per ogni r , e quindi $\int |h|^r dx \leq r m(E) = 0$, da cui $\int |h| dx = 0$.

Se ora f e g sono due funzioni integrabili che differiscono solo su un insieme di misura nulla, risulta per quanto si è appena visto $\int (f - g) dx = 0$ e quindi $\int f dx = \int g dx$.

Viceversa, se $f(x) \geq 0$, e se $\int f dx = 0$, allora $f(x) = 0$ q. o.

Poniamo infatti

$$F_0 = \{x : f(x) > 0\} \quad e \quad F_k = \left\{x : f(x) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Si ha

$$F_0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

D'altra parte si ha $f \geq \frac{1}{k} \chi_{F_k}$, e quindi

$$0 = \int f dx \geq \frac{1}{k} m(F_k)$$

e dunque $m(F_k) = 0$. Per la subaddittività numerabile della misura, si ha allora $m(F_0) = 0$. □

Esempio 19.5 Ricordiamo che le funzioni che stiamo considerando possono assumere anche i valori $+\infty$ e $-\infty$. D'altra parte, se $f(x)$ è una funzione sommabile, è ragionevole aspettarsi che non possa valere $+\infty$ o $-\infty$ in insiemi troppo grandi. In effetti, gli insiemi

$$F_{\infty} = \{x : f(x) = +\infty\}$$

$$F_{-\infty} = \{x : f(x) = -\infty\}$$

hanno ambedue misura nulla.

Per quanto riguarda F_{∞} , basterà osservare che se $x \in F_{\infty}$ si ha $f(x) > r$ per ogni r , e dunque $f^+ \geq r \chi_{F_{\infty}}$. Ma allora, integrando

$$m(F_{\infty}) \leq \frac{1}{r} \int f^+ dx$$

e la tesi segue facendo tendere r all'infinito. In maniera analoga si dimostra che $m(F_{-\infty}) = 0$. □

Se una proprietà è verificata per tutti gli x , tranne al più per quelli di un insieme di misura nulla, diremo che è verificata *quasi ovunque* (abbreviato in q.o.), o *quasi dappertutto*. Così il risultato dell'esempio precedente si può enunciare dicendo che *una funzione sommabile è finita quasi ovunque*.

Osservazione 19.8 La considerazione di insiemi di misura nulla permette di estendere alcuni teoremi. In particolare tutte le ipotesi che richiedono che certe relazioni valgano per ogni x possono essere sostituite con ipotesi che le stesse relazioni valgano quasi ovunque. Ad esempio, il teorema di Lebesgue 19.21 continua a valere se si suppone che si abbia $|f_k(x)| \leq g(x)$ q.o., e che la successione f_k converga a f q.o.

Per convincersene, sia F_k l'insieme in cui $|f_k(x)| > g(x)$, e sia F l'insieme in cui $f_k(x)$ non converge a $f(x)$, e supponiamo che F e tutti gli F_k siano di misura nulla. Per la su-

badditività della misura, anche l'insieme G , unione di F e degli F_k , avrà misura nulla. Se ora definiamo delle funzioni $\tilde{f}_k, \tilde{f}$ e $\tilde{g}$ ponendole uguali a 0 in G e a f_k, f e g fuori di G , le nuove funzioni verificheranno le ipotesi del teorema di Lebesgue, e quindi avremo

$$\int \tilde{f} dx = \lim_k \int \tilde{f}_k dx.$$

Ma, come abbiamo detto, l'integrale di Lebesgue di $\tilde{f}$ è uguale a quello di f , e quello di $\tilde{f}_k$ a quello di f_k , per cui la stessa relazione vale per queste funzioni.

Osservazione 19.9 Poiché l'integrale di Lebesgue non distingue funzioni che sono uguali quasi ovunque, si può parlare di integrale di una funzione definita quasi ovunque. Se ad esempio f è definita per ogni x , tranne che per quelli di un insieme H di misura nulla, la si può definire arbitrariamente (ad esempio ponendola uguale a 0) in H . Se la nuova funzione è integrabile (o sommabile) sarà integrabile (o sommabile) anche la f . Per quanto appena detto, il valore dell'integrale non dipenderà dai valori arbitrariamente assegnati alla f in H . $\square$

Torniamo ora all'integrazione per serie. Abbiamo visto che se $\sum u_k(x)$ è una serie di funzioni positive, si può senz'altro integrare per serie:

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int u_k dx.$$

Vogliamo ora indagare cosa succede se si toglie l'ipotesi $u_k(x) \geq 0$. Si ha

Teorema 19.10 Sia $\sum u_k$ una serie di funzioni sommabili, e supponiamo che risulti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int |u_k| dx < +\infty.$$

Allora si ha

$$\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int u_k dx.$$

Dimostrazione Posto

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$$

segue dall'esempio 19.1 che $\int v dx < +\infty$.

Di conseguenza, si ha $v(x) < +\infty$ quasi ovunque, e quindi la serie dei valori assoluti $\sum |u_k(x)|$ converge quasi ovunque; per il teorema della convergenza assoluta convergerà quasi ovunque anche la serie $\sum u_k(x)$.

Pertanto, se si pone

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^m u_k(x), \quad s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

si avrà

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x) = s(x) \quad \text{q.o.}$$

e inoltre

$$|s_m(x)| \leq \sum_{k=1}^m |u_k(x)| \leq v(x).$$

Possiamo allora applicare il teorema di Lebesgue:

$$\int s(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int s_m(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int u_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int u_k(x) dx$$

e il teorema è dimostrato. □

Esercizi

19.6. *Dimostrare il seguente

Teorema 19.9 (assoluta continuità dell'integrale) *Sia f una funzione sommabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni insieme misurabile F , con $m(F) < \delta$, si ha $\int_F |f| dx < \varepsilon$.*

(Suggerimento) In caso contrario esisterebbe un $\varepsilon_0 > 0$ e per ogni k un insieme F_k , con $m(F_k) < 2^{-k-1}$ e $\int_{F_k} |f| dx \geq \varepsilon_0$. Si ponga $E_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} F_k$; si ha $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \dots$, $m(E_m) < 2^{-m}$, e $\int_{E_m} |f| dx \geq \varepsilon_0$. Si applichi il teorema di Lebesgue a $|f| \varphi_{E_m}$.

19.9. Il teorema di Vitali

Come abbiamo visto a più riprese, mentre le funzioni integrabili secondo Riemann sono sommabili, non tutte le funzioni sommabili sono integrabili secondo Riemann: nell'insieme delle funzioni sommabili, quelle integrabili secondo Riemann formano un sottoinsieme proprio. Ad esempio, sono integrabili secondo Riemann le funzioni continue e nulle fuori di un compatto, o anche le funzioni, limitate e nulle fuori di un compatto, con un numero finito di punti di discontinuità.

Queste funzioni non esauriscono le funzioni integrabili secondo Riemann.

Esempio 19.6 La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale o se } x \notin [0, 1] \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{p}{n}, \text{ con } p \text{ e } n \text{ primi tra loro e } p \leq n. \end{cases}$$

è integrabile secondo Riemann in $[0, 1]$, e il suo integrale vale 0. Per dimostrarlo, faremo vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice φ maggiorante e con integrale minore di ε .

Per questo, osserviamo che il numero N dei punti $\frac{p}{n}$ con $0 \leq p \leq n < \frac{1}{\varepsilon}$ è finito. Chiamiamoli $x_1, x_2, \dots, x_N$, e per ognuno di essi consideriamo l'intorno I_k di centro x_k e raggio $\frac{\varepsilon}{2N}$. La funzione semplice

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [0, 1] \\ 1 & x \in \bigcup_{k=1}^N I_k \\ \varepsilon & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è quella cercata.

In primo luogo φ è una maggiorante di f . Infatti $f \leq 1$, e quindi $f \leq \varphi$ negli intervalli I_k . Fuori di questi, ci sono solo o punti irrazionali, dove f vale 0, o punti $\frac{p}{n}$ con $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, nei quali f vale $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ e φ vale ε . In ogni caso, risulta $f(x) \leq \varphi(x)$.

Si ha poi

$$\int \varphi dx \leq \sum_{k=1}^N m(I_k) + \int_0^1 \varepsilon dx \leq \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{N} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Notiamo che la funzione f è discontinua in ogni punto razionale. Infatti in ogni intorno del punto $\frac{p}{n}$, dove la funzione vale $\frac{1}{n}$, cadono punti irrazionali, dove la funzione vale 0. Abbiamo così trovato una funzione integrabile secondo Riemann, e discontinua in ogni punto razionale. □

Ci possiamo allora porre il problema di individuare, tra le funzioni sommabili, quelle che sono integrabili secondo Riemann. A questo risponde il teorema di Vitali, al quale premettiamo alcune considerazioni. Data una funzione $f(x)$, limitata e nulla fuori di un compatto, consideriamo la classe $C^+(f)$ delle funzioni continue maggioranti e la classe $C^-(f)$ delle funzioni continue minoranti, ovviamente nulle fuori di un compatto, e poniamo

$$f_*(x) = \sup_{u \in C^-(f)} u(x), \quad f^*(x) = \inf_{v \in C^+(f)} v(x).$$

Le funzioni f_* e f^* sono semicontinue (inferiormente la f_* e superiormente la f^*), e risulta ovviamente $f_*(x) \leq f(x) \leq f^*(x)$.

Si ha inoltre, tenendo conto della definizione di integrale per le funzioni semicontinue e delle [19.3] e [19.4]:

$$\int f_* dx = \sup \left\{ \int u dx; u \in C^+(f) \right\} = \int_* f dx$$

$$\int f^* dx = \inf \left\{ \int v dx; v \in C^+(f) \right\} = \int^* f dx$$

Lemma 19.1 f è continua in x_0 se e solo se $f_*(x_0) = f(x_0) = f^*(x_0)$.

Dimostrazione Se $f_*(x_0) = f(x_0) = f^*(x_0)$, si ha

$$f(x_0) = f_*(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f_*(x) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0} f^*(x) \leq f^*(x_0) = f(x_0)$$

da cui segue

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

e quindi la continuità di f in x_0 .

Supponiamo ora che f sia continua in x_0 , e dimostriamo ad esempio che $f^*(x_0) = f(x_0)$. Per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $r > 0$ tale che se $|x - x_0| < r$ si ha $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Posto $M = \sup f$, definiamo

$$w(x) = \begin{cases} f(x_0) + \varepsilon + (M - f(x_0) - \varepsilon) \frac{|x - x_0|}{r} & \text{se } |x - x_0| < r \\ M & \text{se } |x - x_0| \geq r \end{cases}$$

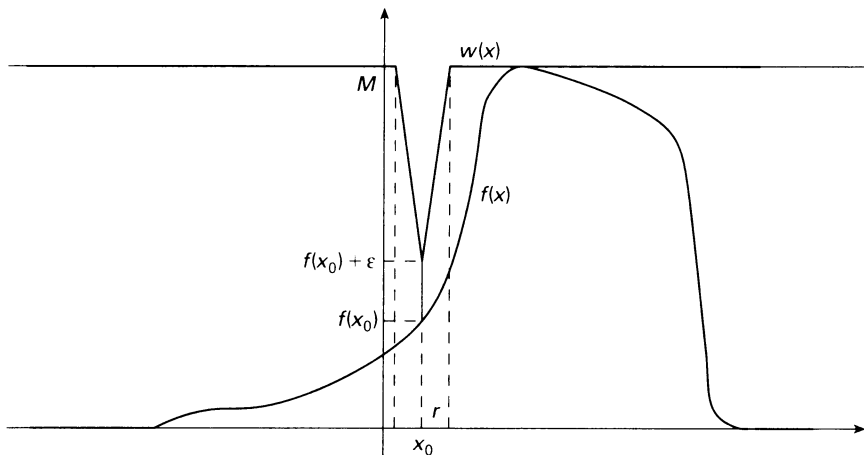


Figura 19.2

Sia ora $\vartheta(x)$ una funzione a supporto compatto, con valori compresi tra 0 e 1, e che vale 1 sul supporto di f . La funzione $u(x) = w(x)\vartheta(x)$ appartiene a $C^+(f)$, e si ha

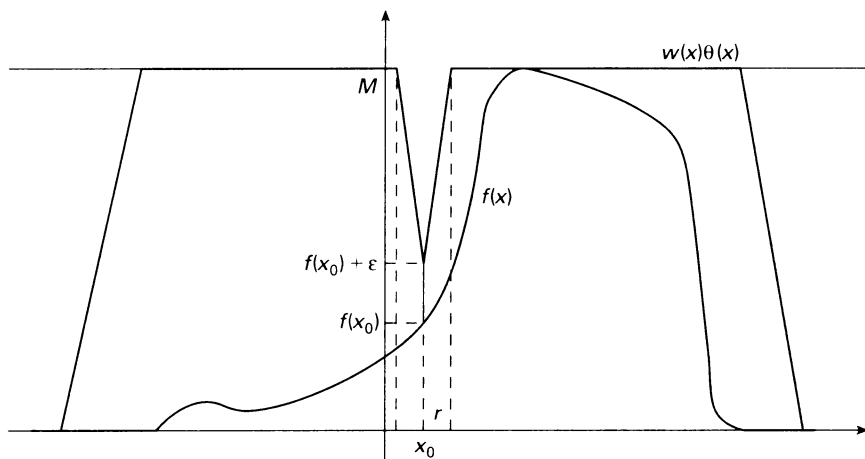


Figura 19.3

$u(x_0) = f(x_0) + \varepsilon$. Di conseguenza avremo $f^*(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$, e la tesi segue per l'arbitrarietà di ε . □

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 19.12 (di Vitali) *Una funzione $f(x)$, limitata e nulla fuori di un compatto, è integrabile secondo Riemann se e solo se è continua quasi ovunque.*

Detto in altre parole, una funzione è integrabile secondo Riemann se e solo se la misura secondo Lebesgue dell'insieme dei punti di discontinuità è zero.

Dimostrazione Per definizione, la funzione f è integrabile secondo Riemann se e solo se $\int_a^b f^* dx = \int_a^b f_* dx$, cioè se e solo se $\int_a^b (f^* - f_*) dx = 0$. Poiché $f^*(x) - f_*(x) \geq 0$, ciò avviene se e solo se per quasi ogni x risulta $f^* - f_* = 0$, ossia $f^*(x) = f(x) = f_*(x)$. Per il lemma precedente, questo accade se e solo se $f(x)$ è continua quasi ovunque. □

19.10 Risposte agli esercizi

19.1 La parte *se* segue dal teorema 19.2, osservando che le funzioni $P\varphi_{[a, b]}$ e $Q\varphi_{[a, b]}$ sono funzioni continue. Viceversa, se f è integrabile, siano u e v come nel teorema 19.2. Per il lemma 13.3 esistono due polinomi P e Q tali che $\|P - (u - \varepsilon)\|_{\infty, [a, b]} < \varepsilon$ e $\|Q - (v + \varepsilon)\|_{\infty, [a, b]} < \varepsilon$. Si ha $u - 2\varepsilon < P < u \leq f \leq v < Q < v + 2\varepsilon$ in $[a, b]$, e quindi $\int_a^b |Q - P| dx < \varepsilon + 4\varepsilon(b - a)$.

19.2 La successione $\frac{n \sin x}{1+n^2 x^2}$ tende a zero; inoltre si ha $0 \leq \frac{n \sin x}{1+n^2 x^2} \leq \frac{nx}{1+n^2 x^2} \leq \frac{1}{2}$, e si può applicare il teorema di Lebesgue.

19.3 La successione di funzioni $\frac{n^\alpha x^\alpha}{1+n^2 x^2}$ tende a zero; inoltre risulta $0 \leq \frac{n^\alpha x^\alpha}{1+n^2 x^2} < 1$ (si distinguano i casi $0 \leq x < \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$), e si può applicare il teorema di Lebesgue.

19.4 La successione di funzioni $\frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2}$ tende a zero; inoltre risulta per l'esercizio precedente $0 \leq \frac{n^\alpha x}{1+n^2 x^2} < x^{1-\alpha}$, e quest'ultima funzione è sommabile in $[0, 1)$, essendo $1-\alpha > -1$.

19.5 Se si pone $f_k = f \varphi\left[\frac{1}{k}, 1\right]$, l'integrale improprio della f è il limite degli integrali delle f_k . Per queste funzioni, l'integrale di Lebesgue e di Riemann coincidono.

La successione f_k è crescente, e ha come limite $f \varphi_{(0, 1]}$. Si può allora applicare il teorema di B. Levi, per cui

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 f_k dx.$$

19.6 La successione $g_m = |f| \varphi_{E_m}$ tende a zero q. o. (l'insieme dove $g_m \neq 0$ è contenuto in E_m e quindi ha misura minore di 2^{-m}), ed è maggiorata dalla funzione sommabile $|f|$. Per il teorema di Lebesgue, gli integrali delle g_m devono tendere a zero, e questo è assurdo, perché sono tutti maggiori di ε_0 .

Capitolo 20

Spazi funzionali

20.1. Spazi metrici

Più volte nei capitoli precedenti abbiamo osservato come alcune definizioni (l'estremo superiore, il massimo e minimo limite) e alcuni teoremi (i limiti di funzioni monotone, le serie a termini positivi) fossero legati all'ordinamento di $\mathbf{R}$, mentre altri (le definizioni di punto di accumulazione e limite, il teorema dell'uniforme continuità) dipendessero solo dalla struttura topologica della retta reale, cioè dalla distanza e dalla nozione di intorno. Mentre i primi sono caratteristici di $\mathbf{R}$, e solo raramente e a prezzo di profonde modifiche si possono estendere a casi più generali, i secondi ammettono generalizzazioni a spazi più generali, nei quali sia definita una distanza, in breve a *spazi metrici*.

In questo capitolo riprenderemo queste osservazioni in maniera più sistematica, in modo da delineare una teoria elementare degli spazi metrici. Cominciamo con una definizione, che abbiamo già dato nel capitolo 3:

Definizione 20.1 *Sia X un insieme. Si dice distanza o metrica in X una funzione d che ad ogni coppia di punti x, y di X associa un numero $d(x, y)$ (la distanza tra x e y) con le seguenti proprietà:*

$$d_1: d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \text{ se e solo se } x = y,$$

$$d_2: d(x, y) = d(y, x),$$

$$d_3: d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

La coppia (X, d) si chiama spazio metrico.

Tramite la distanza, in uno spazio metrico si possono definire gli intorni come avevamo fatto nel capitolo 3 § 2:

$$I(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

e di qui gli insiemi aperti, chiusi, i punti di accumulazione, di frontiera, il limite di una successione di punti di X , e in genere tutto quello che dipende unicamente dalla distanza.

Quando non sono possibili confusioni, si parlerà dello spazio metrico X anziché di (X, d) . Così ad esempio si dirà: lo spazio metrico $\mathbf{R}^n$, sottintendendo che la distanza è quella euclidea:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad [20.1]$$

Esempio 20.1. Lo spazio $C([a, b])$ delle funzioni continue nell'intervallo $[a, b]$ è uno spazio metrico, con la distanza

$$d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|. \quad [20.2]$$

Si vede subito che $d(f, g)$ verifica le proprietà d_1 e d_2 . Per dimostrare la d_3 , consideriamo tre funzioni f, g e h . Si ha per ogni $t \in [a, b]$

$$|f(t) - g(t)| \leq |f(t) - h(t)| + |h(t) - g(t)| \leq d(f, h) + d(h, g)$$

e la d_3 segue prendendo l'estremo superiore al variare di t in $[a, b]$.

La distanza [20.2] si chiama *metrica della convergenza uniforme*. Come abbiamo visto nel capitolo 13, una successione $f_n \in C([a, b])$ converge uniformemente a una funzione f se e solo se la successione di numeri reali $d(f_n, f)$ tende a zero.

Naturalmente, si potrebbero definire in $C([a, b])$ metriche diverse dalla [20.2], come ad esempio

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt. \quad [20.3]$$

Lasciamo per esercizio la verifica delle condizioni d_1 , d_2 e d_3 . In genere, quando si parla dello spazio $C([a, b])$ si sottintende che la metrica sia la [20.2]. $\square$

Esempio 20.2. Calcoliamo la distanza $d(f, g)$ in $C([0, 1])$ tra le funzioni $f(t) = 4t^3 - 1$ e $g(t) = 9t^2 - 6t$.

Si tratta di calcolare l'estremo superiore in $[0, 1]$ della quantità

$$|f(t) - g(t)| = |4t^3 - 1 - 9t^2 + 6t|.$$

Per eliminare le complicazioni derivanti dal valore assoluto, osserviamo che si ha $\sup |F(t)| = \max\{\sup F(t), -\inf F(t)\}$. Basterà dunque calcolare l'estremo superiore e inferiore della funzione $F(t) = 4t^3 - 1 - 9t^2 + 6t$. In realtà $F(t)$ ha massimo e minimo in $[0, 1]$, che si possono calcolare esaminando la derivata. Si ha $F'(t) = 12t^2 - 18t + 6$, che si annulla per $t = \frac{1}{2}$ e $t = 1$. Risulta $F(0) = -1$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ e $F(1) = 0$, per cui $F(t)$ ha minimo -1 e massimo $\frac{1}{4}$. Di conseguenza:

$$d(f, g) = \max_{[0, 1]} |F| = 1. \quad \square$$

Esempio 20.3. Uno spazio metrico un po' insolito è il seguente. Sia X un insieme qualsiasi, e poniamo

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

La coppia (X, d) è uno spazio metrico. Notiamo che se $r > 1$ si ha $I(x, r) = X$, mentre se $r \leq 1$ avremo $I(x, r) = \{x\}$. In particolare gli insiemi $\{x\}$ costituiti da un solo punto sono aperti, e quindi ogni insieme è aperto (ogni insieme è unione di aperti: i suoi punti). Di conseguenza ogni insieme è anche chiuso, dato che il suo complementare è aperto. $\square$

Nel capitolo 2 avevamo chiamato limitato un insieme di $\mathbf{R}$ che ammette maggioranti e minoranti. Sembrerebbe dunque che la nozione di insieme limitato dipenda dall'ordinamento di $\mathbf{R}$, e quindi non si estenda a generici spazi metrici. In realtà, quella che non si estende è la definizione di insieme limitato superiormente o inferiormente; invece gli insiemi limitati hanno senso anche in spazi metrici generali: basterà sostituire la definizione data con una equivalente, come la seguente:

Definizione 20.2 Sia (X, d) uno spazio metrico, ed E è un suo sottoinsieme. Diremo che E è limitato se esiste un intorno $I(x, r)$ di un punto x di X che lo contiene: $E \subseteq I(x, r)$.

È evidente che se E è limitato e $F \subseteq E$, anche F è limitato. Inoltre il punto x che entra nella definizione può essere scelto ad arbitrio. Infatti, a causa della disegualianza triangolare, se $E \subset I(x, r)$ si avrà anche $E \subset I(x_0, \rho)$, con $\rho = r + d(x, x_0)$.

Possiamo mettere la definizione precedente in una forma leggermente differente, introducendo il *diametro* di un insieme E come la massima distanza tra due punti di E : o meglio, dato che questa massima distanza non sempre esiste, come l'estremo superiore delle distanze tra due punti di E :

$$\text{diam } E = \sup \{d(x, y); x, y \in E\}.$$

Esempio 20.4 Si ha $\text{diam } I(x_0, r) \leq 2r$. Infatti per ogni $x, y \in I$ si ha

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r.$$

In generale si può avere $\text{diam } I(x_0, r) < 2r$, e addirittura $\text{diam } I(x_0, r) = 0$. Ad esempio, se X è lo spazio metrico dell'esempio 20.3, il diametro di $I(x_0, r)$ è 1 se $r > 1$, e 0 se $r \leq 1$. Da notare che $I(x_0, 2) = X$, e quindi X è limitato. $\square$

Si vede subito che un insieme $E \neq \emptyset$ è limitato se e solo se il suo diametro è finito. Infatti se $E \subset I(x, r)$ risulta $\text{diam } E \leq 2r$; viceversa se $\text{diam } E = d < +\infty$, e $x \in E$, si ha $E \subset I(x, d+1)$.

Osservazione 20.1 Come abbiamo visto nel caso di $C([a, b])$, in un insieme X possono essere definite due o più metriche diverse. Se in X sono definite due distanze

d e δ , i rispettivi spazi metrici (X, d) e (X, δ) sono ovviamente diversi. Può accadere però che ogni intorno $I(x, r)$ nella metrica d contenga un intorno $J(x, s)$ nella metrica δ e viceversa. In questo caso, un insieme $A \subset X$ è aperto in (X, d) se e solo se è aperto in (X, δ) . Infatti, per ogni punto $x \in A$ esisterà un intorno $I(x, r) \subset A$. D'altra parte $I(x, r)$ contiene un intorno $J(x, s)$ di (X, δ) , e quindi risulterà $J(x, s) \subset A$, e A è aperto in (X, δ) . Viceversa, dato che ogni intorno $J(x, \sigma)$ contiene un intorno $I(x, \rho)$, ogni aperto di (X, δ) è anche aperto in (X, d) .

In conclusione, (X, d) e (X, δ) hanno gli stessi aperti, e dunque gli stessi chiusi, le stesse funzioni continue, le stesse successioni convergenti ecc.; in breve: la stessa topologia. Le due metriche d e δ si dicono pertanto *topologicamente equivalenti*.

Esempio 20.5 Se $d(x, y)$ è una distanza in uno spazio metrico X , la metrica

$$\bar{d}(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

è equivalente a d . Infatti, detti I gli intorni di (X, d) e J quelli di $(X, \bar{d})$, si ha

$$J\left(x, \min\left(r, \frac{1}{2}\right)\right) \subset I(x, r) \subset J(x, r).$$

Due metriche d_1 e d_2 sono evidentemente equivalenti se esistono due costanti positive α e β tali che per ogni $x, y \in X$ risulta

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y).$$

Infatti un intorno $I(x, r)$ nella metrica d_1 conterrà l'intorno $J(x, \alpha r)$ e sarà contenuto nell'intorno $J(x, \beta r)$ nella metrica d_2 .

Esempio 20.6 In $\mathbf{R}^n$ si possono introdurre metriche diverse da quella euclidea [20.1], come ad esempio

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n| \quad [20.4]$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}. \quad [20.5]$$

Gli spazi metrici $(\mathbf{R}^n, d_1)$ e $(\mathbf{R}^n, d_2)$ sono ovviamente distinti, e diversi da $\mathbf{R}^n$ con la metrica standard. Essi sono però tutti equivalenti; si ha infatti:

$$\frac{1}{n} d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq n d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad [20.6]$$

Esercizi

20.1. Dire se le seguenti sono delle distanze in $\mathbf{R}$:

$$1. \begin{cases} x^3 - y^3 & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases} \quad 3. x^2 + y^2 + xy \quad 5. \min\{|x - y|, 1\}$$

$$2. |x - y| + |x^3 - y^3| \quad 4. \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} \quad 6. (1 + |xy|)|x - y|$$

20.2. Calcolare la distanza $d(f, g)$ in $C([0, 1])$ tra le seguenti coppie di funzioni:

- | | | |
|-------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $f = 3x, g = 1 + 3x$ | 4. $f = e^x, g = 2x$ | 7. $f = 3 \log(1 + x), g = 2x$ |
| 2. $f = x, g = 1 - x$ | 5. $f = xe^{-x}, g = e^x$ | |
| 3. $f = x - 2, g = x^2$ | 6. $f = \cos \pi x, g = \cos 2\pi x$ | |

20.3. Dimostrare che la [20.3] è una metrica in $C([a, b])$.

20.4. *Dimostrare che $\text{diam}(E) = \text{diam}(\bar{E})$

20.5. La [20.3] è una metrica nello spazio $\mathcal{R}([a, b])$ delle funzioni integrabili (secondo Riemann) in $[a, b]$?

20.6. Se $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, i suoi intorni nella metrica [20.1] sono cerchi di centro $\mathbf{x}$. Disegnare gli intorni nelle metriche [20.4] e [20.5].

20.7. Dimostrare le [20.6].

20.8. Dimostrare che $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ è una distanza in $(0, 1]$.

20.2. Insiemi densi

In uno spazio metrico, si potrà definire la chiusura di un insieme E come l'insieme $\bar{E} = E \cup \partial E$, o in maniera equivalente come l'intersezione degli insiemi chiusi che contengono E .

Teorema 20.1 *Un punto x appartiene a $\bar{E}$ se e solo se è limite di una successione x_n di punti di E .*

Dimostrazione Sia $x \in \bar{E}$. In ogni intorno di x c'è almeno un punto di E ; infatti o $x \in E$, e allora c'è x stesso, o $x \in \partial E$, e per definizione in ogni intorno di x c'è un punto di E . In particolare in $I\left(x, \frac{1}{n}\right)$ c'è un punto $x_n \in E$; la successione x_n ha come limite x .

Viceversa, supponiamo che x sia limite di una successione x_n di punti di E . Per la definizione di limite, per ogni intorno di $I(x, r)$ esiste un v tale che per ogni $n > v$ si ha $x_n \in I(x, r)$. In particolare, in ogni intorno di x cadono punti di E , e pertanto x non può essere esterno a E , e deve appartenere a $E \cup \partial E$, cioè a $\bar{E}$. $\square$

Un particolare interesse hanno gli insiemi *densi*, cioè gli insiemi E la cui chiusura è tutto lo spazio X . Infatti per il teorema precedente è possibile approssimare un qualsiasi elemento di X con elementi di E ; se E è particolarmente semplice, si può sperare di ottenere dei risultati relativi a elementi di X dimostrandoli prima per elementi di E e poi passando al limite.

Abbiamo visto nel capitolo 3 che l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è denso in $\mathbf{R}$ (proposizione 3.1). Come abbiamo detto, questo ci permette di fare i calcoli in $\mathbf{R}$ usando solo i numeri razionali. Un fattore di ulteriore interesse è che $\mathbf{Q}$ è numerabile, cosicché $\mathbf{R}$ è separabile, stante la definizione seguente:

Definizione 20.3 *Uno spazio metrico X si dice separabile se ha un sottoinsieme denso numerabile.*

Il teorema di Weierstrass 13.10 si può riformulare dicendo che i polinomi (e anche i polinomi a coefficienti razionali) sono densi in $C([a, b])$. Infatti una funzione $g(x)$ continua in $[a, b]$ si può sempre prolungare a una funzione continua in $\mathbf{R}$ (basta porre $g(x) = g(b)$ per $x > b$ e $g(x) = g(a)$ per $x < a$) e dunque esiste una successione di polinomi (che si possono supporre a coefficienti razionali) che tendono a $g(x)$ uniformemente in $[a, b]$.

Teorema 20.2 *Lo spazio $C([a, b])$ è separabile.*

Dimostrazione Per quanto appena detto, basterà dimostrare che l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali è numerabile.

La dimostrazione ricalca quella della numerabilità dei numeri algebrici (teorema 4.3). Se $P(x)$ è un polinomio a coefficienti razionali, definiamo *altezza* di P il numero intero ottenuto sommando al grado di P i valori assoluti dei numeratori e dei denominatori dei suoi coefficienti.¹ Per ogni intero m ci sono solo un numero finito di polinomi di altezza m ; contando prima quelli di altezza 1 (l'unico polinomio di altezza 1 è la costante $0 = \frac{0}{1}$), poi quelli di altezza 2, e così via, si ottiene una numerazione dei polinomi a coefficienti razionali. $\square$

Osservazione 20.2 Al contrario, lo spazio metrico $L([a, b])$ delle funzioni limitate in $[a, b]$, con la distanza [20.2], non è separabile.

Supponiamo per assurdo che esista un insieme numerabile

$$E = \{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$$

di funzioni limitate, denso in $L([a, b])$. Consideriamo i punti $x_n = a + \frac{1}{n}$, e la funzione $g(x)$ che vale sempre 0, tranne nei punti x_n , dove vale 1 se $f_n(x_n) \leq 0$ e -1 se $f_n(x_n) > 0$. Si ha

$$\|g - f_n\|_\infty \geq |g(x_n) - f_n(x_n)| \geq 1$$

e quindi la funzione g non può appartenere alla chiusura di E . Si noti l'analogia con la dimostrazione della non numerabilità di $\mathbf{R}$. $\square$

¹ Naturalmente, ridotti ai minimi termini. Se i coefficienti sono interi, si prende il denominatore = 1.

20.3. Funzioni continue

Le definizioni di limite di una funzione e di funzione continua rimangono formalmente inalterate nel passaggio da $\mathbf{R}$ a un generale spazio metrico.

Definizione 20.4 Siano X e Y due spazi metrici, rispettivamente con le distanze d_X e d_Y , e sia $f: X \rightarrow Y$. Sia inoltre x_0 un punto di X e y_0 un punto di Y . Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$, con $0 < d_X(x, x_0) < \delta$ risulta $d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$.

Definizione 20.5 Siano X e Y due spazi metrici. Diremo che la funzione $f: X \rightarrow Y$ è continua in $x_0 \in X$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Se f è continua in ogni punto $x_0 \in X$, diremo che è continua in X .

Possiamo anche definire le funzioni limitate:

Definizione 20.6 Sia X un insieme e Y uno spazio metrico. Una funzione $f: X \rightarrow Y$ si dice limitata se la sua immagine $f(X) \subseteq Y$ è un insieme limitato.

Indicheremo con $L(X, Y)$ l'insieme delle funzioni limitate da X in Y , e (se X è uno spazio metrico) con $C(X, Y)$ il sottoinsieme di $L(X, Y)$ delle funzioni limitate e continue da X in Y . $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$ sono spazi metrici con la distanza

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x)) \quad [20.7]$$

In genere, quando lo spazio di arrivo è $\mathbf{R}$, si fa a meno di menzionarlo. Si scriverà allora $L(X)$ e $C(X)$ invece di $L(X, \mathbf{R})$ e $C(X, \mathbf{R})$. In questo caso, la distanza [20.7] diventa

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Osservazione 20.3 Osserviamo che se (X, d) è uno spazio metrico, ed E è un sottoinsieme di X , allora anche (E, d) è uno spazio metrico. Possiamo quindi parlare sempre di funzioni definite su tutto lo spazio; se infatti l'insieme di definizione di f fosse una parte E di X , basterebbe considerare E come lo spazio metrico di partenza.

A volte comunque, in particolare quando $X = \mathbf{R}^n$, sarà opportuno conservare la distinzione tra lo spazio X e l'insieme di definizione E . $\square$

Osservazione 20.4 Bisogna ricordare che le funzioni di $C(X, Y)$ sono continue e limitate. Così ad esempio la funzione x^2 appartiene a $C((0, 1))$, ma $\frac{1}{x}$ no, perché pur essendo continua non è limitata in $(0, 1)$. $\square$

Esempio 20.7 Consideriamo l'applicazione $\Phi : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$, che a ogni funzione f continua in $[a, b]$ associa la sua funzione integrale:

$$\Phi : f \rightarrow \Phi(f); \quad \Phi(f)(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Siano ora f e g due funzioni continue in $[a, b]$, e siano $F = \Phi(f)$ e $G = \Phi(g)$ le loro funzioni integrali. Si ha

$$|F(x) - G(x)| = \left| \int_a^x (f(t) - g(t)) dt \right| \leq \int_a^x |f(t) - g(t)| dt \leq d(f, g) \int_a^x dt \leq (b - a) d(f, g)$$

e prendendo l'estremo superiore

$$d(F, G) = d(\Phi(f), \Phi(g)) \leq (b - a) d(f, g).$$

Quest'ultima relazione implica la continuità della funzione Φ . $\square$

Esercizi

20.9. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice *hölderiana* di esponente α , $0 < \alpha \leq 1$, se esiste una costante K tale che

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y)^\alpha.$$

Le funzioni hölderiane con $\alpha = 1$ si chiamano *lipschitziane*. Dimostrare che le funzioni hölderiane sono continue.

20.10. Sia $F : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ l'applicazione che a ogni funzione $f(x)$ continua in $[0, 1]$ associa la funzione $xf(x)$. Dimostrare che F è continua in $C([0, 1])$.

20.11. *Siano X e Y due spazi metrici. Dimostrare che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua in X se e solo se per ogni aperto $A \subset Y$ l'immagine inversa $f^{-1}(A)$ è un aperto in X .

20.12. Siano X, Y e Z tre spazi metrici, e siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ due funzioni continue. Dimostrare che $g \circ f$ è continua.

20.4. Successioni

Come per le funzioni, si estende a un arbitrario spazio metrico la definizione di successione convergente, e anche quella di successione di Cauchy.

Definizione 20.7 Sia X uno spazio metrico, e x_n una successione a valori in X . Diremo che x_n converge a x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un v tale che per ogni $n > v$ si ha $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Similmente, la successione x_n si dirà di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un v tale che per ogni $n, m > v$ si ha $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Utilizzando la disuguaglianza triangolare, si vede facilmente che ogni successione convergente è di Cauchy. Il contrario in generale non è vero, ma dipende dallo spazio metrico in esame.

Definizione 20.8 Diremo che lo spazio metrico X è completo se ogni successione di Cauchy in X è convergente.

Abbiamo visto nel capitolo 6 che ogni successione di Cauchy in $\mathbf{R}$ è convergente; pertanto $\mathbf{R}$ è completo. Viceversa, lo spazio $\mathbf{R} - \{0\}$, munito della stessa metrica di $\mathbf{R}$, non è completo; infatti la successione $\frac{1}{n}$ è di Cauchy, ma non è convergente (il suo limite in $\mathbf{R}$ è 0, che non appartiene a $\mathbf{R} - \{0\}$).

Lo stesso si può dire dello spazio $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali; la successione

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

è di Cauchy, ma non è convergente in $\mathbf{Q}$ (il suo limite in $\mathbf{R}$ è e , che non è razionale). Di conseguenza, $\mathbf{Q}$ non è completo.

Teorema 20.3 Lo spazio $\mathbf{R}^n$ è completo.

Dimostrazione Sia $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ una successione di Cauchy in $\mathbf{R}^n$. Si ha evidentemente per $i = 1, 2, \dots, n$

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leq \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(m)}\|$$

cosicché la successione $x_i^{(k)}$ delle componenti i -esime è di Cauchy, e dunque convergente, dato che $\mathbf{R}$ è completo.

Se poniamo

$$x_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

si ha

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i^{(k)} - x_i\|.$$

La successione $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|$ tende allora a zero per $k \rightarrow \infty$, e quindi $\mathbf{x}^{(k)}$ tende a $\mathbf{x}$. $\square$

Il teorema che segue ha molte analogie con l'assioma di continuità dei numeri reali (vedi cap. 2).

Teorema 20.4 *Uno spazio metrico X è completo se e solo se l'intersezione di una qualsiasi successione $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ di insiemi chiusi non vuoti, con diametro che tende a zero, è costituita da un solo punto.*

Dimostrazione Sia X uno spazio metrico completo, e sia $\{C_k\}$ una successione decrescente di insiemi chiusi, con $\text{diam}(C_k) \rightarrow 0$. Dobbiamo dimostrare che l'intersezione C di tutti i C_k è costituita da un solo punto.

Per ogni k , sia x_k un punto di C_k . La successione x_k è di Cauchy. Infatti dato $\varepsilon > 0$ sia C_v tale che $\text{diam}(C_v) < \varepsilon$, e siano $m, n > v$; si ha $x_m \in C_m \subset C_v$, $x_n \in C_n \subset C_v$, e quindi $d(x_m, x_n) < \text{diam}(C_v) < \varepsilon$.

Siccome X è completo, la successione x_k tende a un punto x_0 ; facciamo vedere che x_0 appartiene a tutti gli insiemi C_k . Infatti, se per assurdo x_0 non appartenesse a C_k , siccome C_k è chiuso, esisterebbe un intorno $I(x_0, r)$ che non incontra C_k , e dunque nemmeno C_n se $n > k$. Si avrebbe allora $d(x_n, x_0) > r$ per ogni $n > k$, e questo è assurdo dato che $x_n \rightarrow x_0$. In conclusione, $x_0 \in C_k$ per ogni k , e quindi $x_0 \in C$.

L'intersezione C contiene pertanto almeno un punto. Se ora C contenesse un altro punto x_1 , si avrebbe $\text{diam}(C_k) \geq \text{diam}(C) \geq d(x_0, x_1)$, che contraddice il fatto che $\text{diam}(C_k) \rightarrow 0$.

Supponiamo viceversa che l'intersezione di una qualsiasi successione $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ di insiemi chiusi non vuoti, con diametro che tende a zero, sia costituita da un solo punto, e dimostriamo che X è completo, cioè che ogni successione di Cauchy converge.

Sia x_n una successione di Cauchy in X , e chiamiamo C_k la chiusura dell'insieme $E_k = \{x_n, n \geq k\}$. Si ha $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \supset \dots$ ed essendo x_n di Cauchy risulta $\text{diam}(C_k) \rightarrow 0$. Di conseguenza, l'intersezione dei C_k è costituita da un solo punto x_0 . Poiché x_k e x_0 appartengono a C_k , si ha $d(x_k, x_0) \leq \text{diam}(C_k)$, e quindi la successione x_k tende a x_0 . $\square$

Nel paragrafo precedente abbiamo definito gli spazi $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$, rispettivamente delle funzioni limitate e delle funzioni continue e limitate di X in Y . Si ha

Teorema 20.5 *Sia X un insieme e Y uno spazio metrico. Se Y è completo, allora $L(X, Y)$ è completo.*

Dimostrazione Sia f_n una successione di Cauchy in $L(X, Y)$. Per ogni $x \in X$ si ha

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m)$$

e quindi la successione $f_n(x)$ è di Cauchy in Y . Poiché per ipotesi Y è completo, $f_n(x)$ è convergente. Chiamiamo $f(x)$ il suo limite; faremo vedere che la funzione f è limitata, e che $f_n \rightarrow f$ in $L(X, Y)$.

Per la definizione di successione di Cauchy, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un v_ε tale che per ogni $n, m > v_\varepsilon$ si ha $d(f_n, f_m) < \varepsilon$, e dunque

$$d_Y(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

Passando al limite per $m \rightarrow \infty$, si ha allora per ogni $n > v_\varepsilon$

$$d_Y(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \forall x \in X. \quad [20.8]$$

Dalla [20.8] segue che f è limitata. Siano infatti x e x_0 due punti di X . Si ha per la disuguaglianza triangolare:

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq d_Y(f(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f_n(x_0)) + d_Y(f_n(x_0), f(x_0)). \quad [20.9]$$

Scegliendo $\varepsilon = 1$ e $n = v_1 + 1$ si ha allora

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq 1 + \text{diam}(f_{v_1+1}(X)) + 1$$

per ogni x e x_0 in X , e quindi $\text{diam } f(X) \leq 2 + \text{diam}(f_{v_1+1}(X))$.

Infine dalle [20.8], prendendo l'estremo superiore al variare di $x \in X$, segue che

$$d(f_n, f) \leq \varepsilon \quad \forall n > v_\varepsilon$$

e dunque f_n converge a f in $L(X, Y)$. □

Se poi anche X è uno spazio metrico, potremo considerare lo spazio $C(X, Y)$. Abbiamo

Teorema 20.6 *Se Y è completo, $C(X, Y)$ è completo.*

Dimostrazione Sia f_n una successione di Cauchy in $C(X, Y)$. Dal teorema precedente segue che f_n converge a una funzione limitata f ; basterà allora far vedere che f è continua.

Il punto di partenza è dato dalla [20.9]. Fissato $\varepsilon > 0$, esisterà un v tale che per ogni $n > v$ si abbia $d(f_n, f) < \varepsilon$. Si ha dunque per ogni $x \in X$

$$d_Y(f(x), f(x_0)) \leq 2\varepsilon + d_Y(f_{v+1}(x), f_{v+1}(x_0)).$$

D'altra parte la funzione f_{v+1} è continua; in corrispondenza di ε esisterà allora un intorno I di x_0 tale che per ogni $x \in I$ si ha

$$d_Y(f_{v+1}(x), f_{v+1}(x_0)) < \varepsilon,$$

e in conclusione

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < 3\varepsilon$$

per ogni $x \in I$. Questo dimostra che $f(x)$ è continua in x_0 , e per l'arbitrarietà di x_0 , $f \in C(X, Y)$. $\square$

La distanza [20.7] viene chiamata spesso *metrica della convergenza uniforme*. Nel caso di funzioni a valori in $\mathbf{R}$ essa diventa

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty,$$

che abbiamo introdotto nel cap. 13.

Una successione f_n che converge nella metrica della convergenza uniforme si dice anche *uniformemente convergente*. Dal teorema precedente si ha il seguente

Corollario 20.1 *Se una successione f_n di funzioni continue e limitate di X in Y converge uniformemente a una funzione f , allora f è continua e limitata.*

Notiamo che qui non occorre supporre che Y sia completo, dato che questa ipotesi ci è servita solo per dimostrare la convergenza delle successioni di Cauchy, mentre qui si suppone fin dall'inizio che la successione f_n sia convergente.

Esempio 20.8 Lo spazio $C([-1, 1])$, che è completo nella metrica della convergenza uniforme, non lo è con la metrica

$$d_1(f, g) = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Poniamo infatti

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La successione f_n è di Cauchy in $C([-1, 1])$ con la metrica d_1 . Infatti si ha $|f_n(x) - f_m(x)| \leq 1$ e per $m > n$ risulta $f_n - f_m = 0$ fuori dall'intervallo $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, cosicché

$$d_1(f_n, f_m) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx = \frac{2}{n}.$$

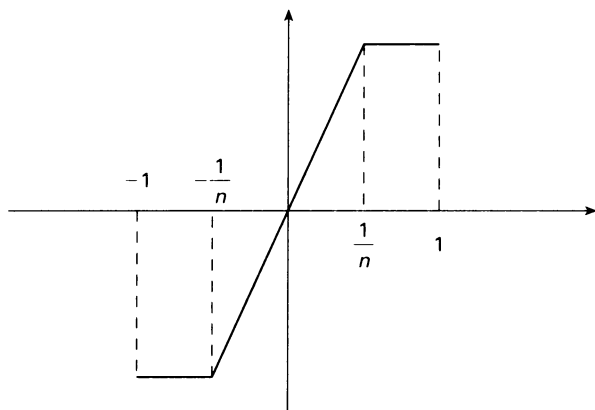


Figura 20.1

Con lo stesso ragionamento, posto

$$H(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

si conclude che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |f_n(x) - H(x)| dx = 0.$$

Siccome $H(x)$ ha una discontinuità non eliminabile nell'origine, non può esistere una funzione continua $g(x)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 |f_n(x) - g(x)| dx = 0.$$

Infatti, se ciò accadesse, dalla disuguaglianza

$$\int_{-1}^1 |g(x) - H(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |g(x) - f_n(x)| dx + \int_{-1}^1 |f_n(x) - H(x)| dx$$

si potrebbe concludere, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, che

$$\int_{-1}^1 |g(x) - H(x)| dx = 0.$$

Quest'ultima relazione non può sussistere, dato che g è continua nell'origine e H ha un salto. □

Concludiamo questo paragrafo con l'enunciato di un teorema che generalizza a spazi metrici arbitrari il teorema 7.3:

Teorema 20.7 *Una funzione $f: X \rightarrow Y$ è continua in x_0 se e solo se per ogni successione x_n a valori in X , convergente a x_0 , la successione $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.*

La dimostrazione è praticamente la stessa, e viene lasciata per esercizio.

Esercizi

20.13. Dimostrare che se X è completo, un sottoinsieme A di X è uno spazio metrico completo se e solo se è chiuso.

20.14.* Sia $X = (0, 1]$ e $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$. Dimostrare che (X, d) è completo.

20.15. Dimostrare che una successione u_k in $L(X, Y)$ converge uniformemente a una funzione u se e solo se per ogni successione $x_k \in X$ si ha $d_Y(u_k(x_k), u(x_k)) \rightarrow 0$.

20.5. Spazi normati

Abbiamo già parlato nel capitolo 3 di vettori di $\mathbf{R}^n$, della loro norma e del prodotto scalare. Riprendiamo ora l'argomento più in generale, introducendo in primo luogo la definizione di *spazio vettoriale*.

Definizione 20.9 Si chiama spazio vettoriale reale un insieme non vuoto V , i cui elementi si chiamano vettori, in cui sono definite due operazioni, la somma di due vettori e il prodotto di un vettore per un numero reale, soddisfacenti i seguenti assiomi:

v_1 : La somma è associativa $[(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})]$ e commutativa $[\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}]$,

v_2 : Esiste un elemento neutro $\mathbf{0} \in V$ tale che $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$,

v_3 : Per ogni $\mathbf{u} \in V$, $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$,

v_4 : Sussistono le proprietà distributive

$$(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}, \quad \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

v_5 : $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{u} \in V$.

Esempio 20.9 Se X è un insieme e V uno spazio vettoriale, l'insieme delle funzioni $f: X \rightarrow V$ è uno spazio vettoriale, con la somma e il prodotto per un numero definiti da

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

e dove $\mathbf{0}$ è la funzione identicamente nulla: $\mathbf{0}(x) = \mathbf{0}$. □

Se poi in V è definita una metrica d , si dice che (V, d) è uno spazio vettoriale metrico. In particolare, sono spazi vettoriali metrici $L(X) = L(X, \mathbf{R})$ e $C(X)$, con la metrica della convergenza uniforme.

Un ruolo di particolare importanza giocano le distanze che rispettano la struttura vettoriale di V , intendendo con ciò che:

1. la distanza è invariante per traslazioni. In altre parole, la distanza tra due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non cambia se aggiungiamo a entrambi lo stesso vettore $\mathbf{w}$:

$$d(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad [20.11]$$

2. se moltiplichiamo i due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ per lo stesso fattore λ , la loro distanza ne risulta moltiplicata per $|\lambda|$:

$$d(\lambda \mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) = |\lambda| d(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad [20.12]$$

Dalla [20.11], prendendo $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$, segue subito che si ha

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{0}),$$

ossia che la distanza tra due vettori dipende solo dalla loro differenza $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Se poniamo

$$N(\mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{0})$$

si ha

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = N(\mathbf{u} - \mathbf{v}). \quad [20.13]$$

Dalle $d_1 - d_3$ della distanza, e dalla [20.12] segue che la funzione $N(\mathbf{v})$ verifica le relazioni:

$$n_1: N(\mathbf{v}) \geq 0, \quad N(\mathbf{v}) = 0 \text{ se e solo se } \mathbf{v} = \mathbf{0},$$

$$n_2: N(\lambda \mathbf{v}) = |\lambda| N(\mathbf{v}) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \text{ e } \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$n_3: N(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{v}).$$

Le n_1 e n_2 sono la d_1 e la [20.12] riscritte tenendo conto della [20.13]; la n_2 contiene come caso particolare la d_2 ($\lambda = -1$). Infine, la n_3 si dimostra a partire dalla disuguaglianza triangolare

$$d(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{0}) \leq d(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{0}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{0})$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la [20.11].

Definizione 20.10 Sia V uno spazio vettoriale. Una funzione $N(\mathbf{v})$ a valori reali, che verifica gli assiomi n_1 , n_2 e n_3 , si chiama una norma su V .

Di solito si scrive $\|\mathbf{v}\|$ invece di $N(\mathbf{v})$.

La coppia $(V, \|\cdot\|)$ si chiama *spazio normato*. Si vede subito che il valore assoluto è una norma in $\mathbf{R}$, e quindi $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ è uno spazio normato; in effetti gli assiomi della definizione precedente sono modellati sul valore assoluto. Più in generale, $\mathbf{R}^n$ è uno spazio normato, con la norma

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Se Y è uno spazio normato, sono spazi normati sia $L(X, Y)$ che $C(X, Y)$, con la norma

$$\|F\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y.$$

In uno spazio normato V si può definire una distanza

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

con la quale V diventa uno spazio metrico.

Definizione 20.11 *Si chiama spazio di Banach uno spazio normato e completo (come spazio metrico).*

Sono spazi di Banach $L(X)$ e $C(X)$; più in generale se Y è uno spazio di Banach, lo sono anche $L(X, Y)$ e $C(X, Y)$.

Esempio 20.10 Lo spazio $C^1([a, b])$ delle funzioni derivabili in $[a, b]$ e con derivata continua, è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{[a, b]} |f(x)| + \sup_{[a, b]} |f'(x)| = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}. \quad [20.14]$$

Si verifica facilmente che $\|f\|_{C^1}$ è una norma. Sia ora f_n una successione di Cauchy in C^1 . Dalla definizione [20.14] segue che sia f_n che f'_n sono successioni di Cauchy in $C([a, b])$; dato che quest'ultimo è completo, esse convergeranno rispettivamente a due funzioni continue f e g . Per il teorema 13.3, risulta $f' = g$, e quindi la successione f_n tende a f nella norma C^1 . $\square$

Definizione 20.12 *Sia V uno spazio vettoriale. Si chiama prodotto scalare (o prodotto interno) una funzione $S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a valori reali, con le seguenti proprietà:*

$$s_1: S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0; \quad S(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \text{ se e solo se } \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

$$s_2: S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{u}),$$

$$s_3: S(t\mathbf{u}, \mathbf{v}) = S(\mathbf{u}, t\mathbf{v}) = tS(\mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$s_4: S(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = S(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + S(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

In genere, invece di $S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ si scrive $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Il più semplice prodotto scalare si ha in $\mathbf{R}$, e non è altro che il prodotto di due numeri reali. Abbiamo già visto che in $\mathbf{R}^n$ c'è il prodotto scalare

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Al prodotto scalare $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ si può associare la norma

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}, \quad [20.15]$$

che verifica le proprietà $n_1 - n_3$.

Le n_1 e n_2 derivano immediatamente dalle s_1, s_3 e dalla definizione [20.15]. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare n_3 , ricordiamo la [3.8]:

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \\ &+ 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

e quindi la n_3 .

Di conseguenza, uno spazio munito di prodotto scalare è uno spazio normato. Se poi è completo, si chiama uno *spazio di Hilbert*.

Esempio 20.11 Se una norma nello spazio V proviene da un prodotto scalare, si deve avere

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

e quindi, sommando

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2). \quad [20.16]$$

La [20.16] è una condizione necessaria; se una norma non la verifica, non proviene da nessun prodotto scalare. Questo è quanto avviene per $C([0, 1])$; infatti, prese $f(x) = 1$ e $g(x) = x$, si ha

$$\|f\|_\infty = 1, \|g\|_\infty = 1, \|f - g\|_\infty = 1, \|f + g\|_\infty = 2$$

e quindi

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 5, \quad 2(\|f\|^2 + \|g\|^2) = 4.$$

La [20.16] non è dunque verificata, e quindi la norma di $C([0, 1])$ non proviene da un prodotto scalare. $\square$

Esercizi

20.16. Indichiamo con $C^2([a, b])$ lo spazio delle funzioni che hanno derivate seconde continue in $[a, b]$, con la norma

$$\|f\|_{C^2} = \sup_{[a, b]} |f(x)| + \sup_{[a, b]} |f'(x)| + \sup_{[a, b]} |f''(x)|.$$

Dimostrare che $C^2([a, b])$ è uno spazio di Banach.

20.17. * Dimostrare che $C^1([-1, 1])$ con la norma $\|f\|_\infty$ non è uno spazio di Banach.

20.18. * Dimostrare che $C^1([a, b])$ è separabile.

20.6. Insiemi compatti

Abbiamo incontrato nel capitolo 6 gli insiemi compatti $K \subset \mathbf{R}^n$, e abbiamo visto che essi sono caratterizzati dal fatto che da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K .

Questa proprietà si può estendere a spazi metrici arbitrari:

Definizione 20.13 *Un sottoinsieme K di uno spazio metrico X si dice compatto (per successioni) se da ogni successione a valori in K si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di K .*

Notiamo che un sottoinsieme di uno spazio metrico è esso stesso uno spazio metrico; pertanto avremmo potuto parlare esclusivamente di spazi metrici compatti, senza menzionare i sottoinsiemi.

Osservazione 20.5 Nel capitolo 6 abbiamo dimostrato che un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ è compatto secondo la definizione precedente se e solo se è chiuso e limitato. Quando da $\mathbf{R}^n$ si passa a spazi metrici generali, ciò non è più vero, e ci sono insiemi chiusi e limitati che non sono compatti; di qui la definizione che abbiamo dato.

Un esempio è costituito dal sottoinsieme B di $C([0, 1])$ costituito da tutte le funzioni di norma ≤ 1 :

$$B = \{f \in C([0, 1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

È chiaro che B è limitato: esso è anche chiuso dato che il suo complementare, costituito da tutte le funzioni che hanno norma maggiore di 1, è aperto. La successione $f_n(x) = x^n$ appartiene a B ; il suo limite puntuale è la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

che non è continua. Ma allora nessuna successione estratta dalla f_n può convergere uniformemente (cioè nella norma di $C([0, 1])$), perché altrimenti il suo limite sarebbe una funzione continua, cosa impossibile, perché ogni successione estratta converge puntualmente a g . In conclusione, dalla successione f_n non si può estrarre nessuna sottosuccessione convergente, e quindi l'insieme B non è compatto $\square$

Dopo questo esempio negativo, vediamo cosa si può dire di positivo in spazi metrici generali. Cominciamo da una condizione necessaria.

Proposizione 20.1 *Uno spazio metrico compatto è completo.*

Dimostrazione Sia X uno spazio compatto, e sia x_n una successione di Cauchy in X . Per la definizione di spazio compatto, una sottosuccessione x_{n_i} convergerà a un punto $x_0 \in X$. Facciamo vedere che tutta la successione x_n tende a x_0 .

Siccome $x_{n_i} \rightarrow x_0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un v_1 tale che per ogni $k > v_1$ si ha $d(x_{n_i}, x_0) < \varepsilon$. D'altra parte la successione è di Cauchy, e quindi in corrispondenza di ε esiste un v_2 tale che per $n, m > v_2$ si ha $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. In particolare, se $k > v_2$ sarà anche $n_k \geq k > v_2$, e quindi $d(x_n, x_{n_i}) < \varepsilon$.

Ma allora, se $n > v_2$, preso $k > \max\{v_1, v_2\}$, si avrà

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_0) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

e la successione x_n tende a x_0 . □

Osservazione 20.6 Ricordando che un sottoinsieme K di uno spazio metrico completo X è completo (come spazio metrico) se e solo se è chiuso (vedi esercizio [20.13]), la proposizione precedente ci dice che un sottoinsieme compatto K di uno spazio metrico completo è chiuso. Esso è anche limitato. Infatti, se così non fosse, preso un $\bar{x} \in X$, si potrebbe trovare per ogni n un punto $x_n \in K$ con $d(x_n, \bar{x}) > n$. Dalla successione x_n non si può estrarre nessuna sottosuccessione convergente, dato che se $x_{n_i} \rightarrow x_0$, si avrebbe $d(x_{n_i}, \bar{x}) \rightarrow d(x_0, \bar{x})$, mentre $d(x_{n_i}, \bar{x}) \rightarrow +\infty$.

In conclusione, un sottoinsieme compatto di uno spazio metrico completo è chiuso e limitato. Come abbiamo appena visto, il viceversa non è vero in generale. □

Introduciamo ora la seguente

Definizione 20.14 Uno spazio metrico X si dice *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ si possono trovare un numero finito di insiemi $E_1, E_2, \dots, E_N$, ognuno con diametro minore di ε , e tali che

$$\bigcup_{k=1}^N E_k = X.$$

In altre parole, uno spazio metrico è *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento *finito* con insiemi di diametro minore di ε .

Siccome il diametro di un insieme coincide con quello della sua chiusura (vedi esercizio 20.4), si può supporre che gli insiemi E_i siano chiusi. Inoltre, poichè un insieme di diametro minore di ε è contenuto in una palla di raggio ε , lo spazio X è *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di palle di raggio minore di ε che ricoprono X . Come al solito, un sottoinsieme $E \subset X$ è *totalmente limitato* se lo è come spazio metrico.

Approfittiamo dell'occasione per ricordare che una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X si dice un *ricoprimento* di $E \subseteq X$ se l'unione di tutti gli insiemi della famiglia contiene E : $\bigcup \mathcal{F} \supseteq E$. Un ricoprimento si dice poi *aperto* se tutti gli insiemi di $\mathcal{F}$ sono aperti.

Il seguente teorema stabilisce delle condizioni equivalenti alla compattezza.

Teorema 20.8 (caratterizzazione degli spazi metrici compatti) *Sia X uno spazio metrico. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (a) X è compatto per successioni,
- (b) X è completo e totalmente limitato,
- (c) da ogni ricoprimento aperto di X si può estrarre un ricoprimento finito.

Dimostrazione La dimostrazione del teorema, piuttosto complessa, si farà in tre passi, facendo vedere prima che (a) $\Rightarrow$ (b), poi che (b) $\Rightarrow$ (c), e infine che (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) Sia X compatto per successioni. Abbiamo già dimostrato che X è completo. Se X non fosse totalmente limitato, esisterebbe un $r > 0$ tale che nessuna famiglia finita di palle di raggio r potrebbe ricoprire X .

Costruiamo allora una successione x_k come segue. Sia $x_1 \in X$. Poiché $I(x_1, r)$ non ricopre X , esiste un punto $x_2 \in X$ che non è contenuto in $I(x_1, r)$, e quindi con $d(x_1, x_2) \geq r$. D'altra parte $I(x_1, r)$ e $I(x_2, r)$ non ricoprono X , e quindi esisterà un punto x_3 con $d(x_1, x_3) \geq r$ e $d(x_2, x_3) \geq r$. Continuando in questo modo, si ottiene una successione x_k , tale che $d(x_h, x_k) \geq r$ per ogni $h \neq k$. Da questa successione non si può estrarre nessuna successione convergente, contro l'ipotesi che X sia compatto.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sia X completo e totalmente limitato, e supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento aperto $\mathcal{F}$ di X da cui non si può estrarre nessun ricoprimento finito.

Poiché X è totalmente limitato, esiste un numero finito di insiemi chiusi $C_1, C_2, \dots, C_m$, ognuno con diametro minore di 1, che ricoprono X . Se per ogni $i = 1, 2, \dots, m$ fosse possibile ricoprire C_i con un numero finito di aperti di $\mathcal{F}$, si potrebbe fare lo stesso con X , contro l'ipotesi. Esiste allora un indice k tale che da $\mathcal{F}$ non si può estrarre nessun ricoprimento finito di C_k .

Poniamo $X_1 = C_k$. È chiaro che X_1 è uno spazio metrico totalmente limitato, e quindi esisteranno un numero finito di insiemi chiusi $D_1, D_2, \dots, D_n$, ognuno con diametro minore di $\frac{1}{2}$, che ricoprono X_1 . Come sopra, uno almeno di questi insiemi non si può ricoprire con un numero finito di aperti di $\mathcal{F}$. Chiamiamo X_2 questo insieme, e continuiamo come prima.

Si otterrà in questo modo una successione $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$, di sottoinsiemi chiusi di X , con $\text{diam}(X_k) < \frac{1}{k}$, nessuno dei quali si può ricoprire con un numero finito di aperti di $\mathcal{F}$.

Per il teorema 20.4, l'intersezione degli X_k è costituita da un solo punto x_0 . Sia ora F un aperto di $\mathcal{F}$ che contiene x_0 . Essendo F aperto, esisterà un intorno $I(x_0, R)$ di x_0 tutto contenuto in F . Se $k > \frac{1}{R}$, si avrà $X_k \subseteq I(x_0, R) \subseteq F$, e quindi X_k potrebbe essere ricoperto da un solo aperto di $\mathcal{F}$. Questo è assurdo, perché per costruzione nessuno degli X_k poteva essere ricoperto da un numero finito di aperti di $\mathcal{F}$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Supponiamo che X goda della proprietà (c), e che esista una successione x_k dalla quale non è possibile estrarre nessuna successione convergente.

Consideriamo un punto $x \in X$. Se in ogni intorno di x cadessero infiniti punti della successione x_k , si potrebbe estrarre da questa una sottosuccessione convergente a x , contro l'ipotesi. Di conseguenza, per ogni $x \in X$ esiste un intorno I_x in cui cadono solo un numero finito di punti di x_k .

Al variare di $x \in X$, questi intorni formano una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti, che ricopre X . Per la (c), esistono allora un numero finito di intorni che ricoprono X :

$$X = I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \dots \cup I_{x_n}$$

Ma questo è assurdo, dato che in ognuno degli intorni $I_{x_1}, \dots, I_{x_n}$ (e dunque anche nella loro unione) cadono solo un numero finito di x_k , mentre in X ne cadono infiniti. $\square$

Osservazione 20.7 Gli spazi metrici dipendono dalla nozione di distanza; con questa si definiscono gli intorni, e di qui gli aperti, i chiusi, le funzioni continue ecc.; in breve, la topologia. Si può però fare a meno della nozione di distanza, e definire direttamente e assiomaticamente gli intorni come una famiglia di sottoinsiemi di X con opportune proprietà. In questo modo, pur in assenza della distanza, è possibile definire la topologia di X , che prende il nome di *spazio topologico*.

Quando abbiamo a che fare con uno spazio topologico generale, le tre proprietà (a), (b) e (c), che come abbiamo appena visto in uno spazio metrico sono equivalenti, cessano di esserlo. Più precisamente, la definizione di insieme totalmente limitato, che dipende esplicitamente dal diametro di un insieme, e dunque dalla distanza, perde di senso se si esce dagli spazi metrici, e con essa la proprietà (b). Quanto alle altre due, esse hanno ambedue senso in spazi topologici (sia la nozione di aperto che quella di successione convergente si possono dare in termini di intorni), ma cade la loro equivalenza. In generale, vale ancora la relazione (c) $\Rightarrow$ (a), ma non l'inversa.

Di qui la separazione tra due nozioni di compattezza: uno spazio topologico X si dice *compatto* (senza ulteriori specificazioni) se vale la (c), e si dice *compatto per successioni* se da ogni successione a valori in X si può estrarre una sottosuccessione convergente. $\square$

Osservazione 20.8 Alla luce del teorema precedente, possiamo capire perché un insieme $K \subset \mathbf{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Che un insieme compatto $K \subset \mathbf{R}^n$ sia chiuso e limitato segue dall'osservazione [20.6], dato che $\mathbf{R}^n$ è completo. Viceversa, sia $K \subset \mathbf{R}^n$ un insieme chiuso e limitato. In primo luogo K è completo, essendo un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo (vedi esercizio 20.13).

Facciamo vedere che K è totalmente limitato, e per fissare le idee prendiamo $n = 2$. Sia Q un quadrato di lato L che contiene K . Se dividiamo i lati di Q in N parti uguali, il quadrato verrà diviso in N^2 quadratini, ognuno di lato $\frac{L}{N}$, e quindi di diametro $\frac{L\sqrt{2}}{N}$,

che risulterà minore di ε se si prende $N > \frac{L\sqrt{2}}{\varepsilon}$. Abbiamo dunque ricoperto K con un numero finito di insiemi (i quadratini) di diametro minore di ε , e quindi K è totalmente limitato.

Lo stesso ragionamento vale in $\mathbf{R}^3$, dove si dovrà prendere un cubo di lato L che contiene K , e che verrà diviso in N^3 cubetti, ognuno di lato $\frac{L\sqrt{3}}{N}$. In generale, in $\mathbf{R}^n$ potremo prendere un “ipercubo” $Q = [-L, L]^n$, di lato $2L$, e dividerlo in N^n ipercubi, ognuno di lato $\frac{2L\sqrt{n}}{N}$. □

20.7. Il teorema di Ascoli-Arzelà

Un teorema di compattezza piuttosto importante è dovuto a Giulio Ascoli e Cesare Arzelà. Noi lo dimostreremo in un caso particolare ma importante, quello delle funzioni lipschitziane, che era quello considerato da Ascoli nella sua prima dimostrazione.

Cominciamo ricordando che una funzione $u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ si dice lipschitziana se esiste una costante M tale che per ogni $x, y \in [a, b]$ si ha

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x - y|.$$

Consideriamo ora l'insieme $\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_H([a, b])$ delle funzioni $u : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ tali che $|u(x)| \leq H$ e $|u(x) - u(y)| \leq H|x - y|$ per ogni $x, y \in [a, b]$. Benché ovviamente le funzioni di $\mathcal{L}_H$ siano continue, noi considereremo $\mathcal{L}_H$ come un sottoinsieme dello spazio $L([a, b])$ delle funzioni limitate in $[a, b]$. Vogliamo dimostrare il seguente

Teorema 20.9 (Ascoli) *L'insieme $\mathcal{L}_H$ è compatto in $L([a, b])$.*

Dimostrazione Grazie al teorema 20.8, basterà far vedere che $\mathcal{L}_H$ è chiuso e totalmente limitato.

(a) $\mathcal{L}_H$ è chiuso. Sia infatti $v \in L([a, b])$ un punto di accumulazione di $\mathcal{L}_H$, e sia u_k una successione in $\mathcal{L}_H$ convergente uniformemente a v . Per definizione di $\mathcal{L}_H$, si ha $|u_k(x)| \leq H$ e $|u_k(x) - u_k(y)| \leq H|x - y|$. Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, dato che le funzioni u_k tendono uniformemente a v , avremo anche $|v(x)| \leq H$ e $|v(x) - v(y)| \leq H|x - y|$, e quindi $v \in \mathcal{L}_H$. $\mathcal{L}_H$ contiene quindi tutti i suoi punti di accumulazione, e pertanto è chiuso.

(b) $\mathcal{L}_H$ è totalmente limitato. Questa è la parte più difficile.

Cominciamo con l'osservare che basterà dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un numero finito $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ di funzioni limitate, tali che ogni funzione $u \in \mathcal{L}_H$ dista da una di queste meno di ε . Infatti, se ciò avviene, l'unione degli intorni $I(\varphi_i, \varepsilon)$ contiene $\mathcal{L}_H$.

Costruiamo dunque queste funzioni limitate. Posto $\sigma = \frac{\varepsilon}{H+1}$, prendiamo un intero N in modo che $N\sigma \geq H$, e dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in un numero finito di intervalli $I_1, I_2, \dots, I_n$, ognuno di ampiezza minore di σ .

Le funzioni limitate che fanno al caso nostro sono quelle che in ognuno degli intervalli I_s prendono uno dei valori $0, \pm\sigma, \pm2\sigma, \dots, \pm N\sigma$. Poiché il numero degli intervalli è n , e per ogni intervallo ci sono $2N+1$ valori possibili, queste funzioni sono in totale $(2N+1)^n$, dunque in numero finito.

Sia ora $u(x) \in \mathcal{L}_H$. Dobbiamo mostrare che tra le funzioni φ ne esiste una tale che $\|u - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. Per ogni intervallo I_s prendiamo un punto x_s . Siccome $-H \leq u(x_s) \leq H$, esisterà un intero k , con $-N+1 \leq k \leq N$, tale che $(k-1)\sigma \leq u(x_s) \leq k\sigma$. Prendiamo come φ la funzione che vale $k\sigma$ in tutto l'intervallo I_s .

Valutiamo $\|u - \varphi\|_\infty$. Se $x \in I_s$ si ha:

$$|u(x) - \varphi(x)| \leq |u(x) - u(x_s)| + |u(x_s) - \varphi(x)|.$$

Il primo dei due termini a secondo membro si maggiora con $H|x - x_s| < H\sigma$ dato che l'ampiezza di ogni intervallo I_s è minore di σ . Quanto al secondo termine, esso è per costruzione minore di σ ; di conseguenza avremo $|u(x) - \varphi(x)| < (H+1)\sigma$ per ogni $x \in I_s$, e quindi $\|u - \varphi\|_\infty < (H+1)\sigma = \varepsilon$. $\square$

Esercizi

20.19. Sia E un insieme di funzioni continue in $[a, b]$. Si dice che le funzioni di E sono *equicontinue* se esistono una costante M e una funzione continua e crescente $\omega(t)$, definita per $t \geq 0$ e con $\omega(0) = 0$, tali che $|f(x)| \leq M$ e $|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|)$ per ogni $f \in E$ e per ogni $x, y \in [a, b]$. Dimostrare che le funzioni di $\mathcal{L}_H$ sono equicontinue.

20.20. Dimostrare che un insieme chiuso (nella norma di $L([a, b])$) di funzioni equicontinue è compatto in $L([a, b])$ (teorema di Ascoli-Arzelà).

20.8. Equazioni differenziali

Tra le applicazioni del teorema di Ascoli-Arzelà, una tra le più importanti riguarda l'esistenza locale di soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad [20.17]$$

Nel capitolo 17 (vedi teorema 17.1 e osservazione 17.3) abbiamo dimostrato che se la funzione $f(t, u)$ è continua in un rettangolo $R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$, e verifica la disuguaglianza

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v| \quad [20.18]$$

per ogni $t \in [t_0 - r, t_0 + r]$ e per ogni $u, v \in [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$, allora il problema [20.17] ha una soluzione unica nell'intervallo $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$, dove $r_0 = \min \left\{ r, \frac{\rho}{M} \right\}$, avendo indicato con M il massimo di $|f(t, u)|$ in R .

Osserviamo che benché la [20.18] sia necessaria per la dimostrazione del teorema, il raggio r_0 dipende solo da M e non da L . Questo punto è essenziale per quanto segue.

Vogliamo dimostrare che una soluzione del problema di Cauchy [20.17] esiste anche se si suppone solo la continuità della funzione $f(t, u)$, eliminando cioè l'ipotesi [20.18] di lipschitzianità rispetto alla seconda variabile u . Abbiamo visto nel capitolo 17 che in questo caso si perde l'unicità della soluzione; continua però a valere un teorema di esistenza.

Teorema 20.10 *Sia $f(t, u)$ una funzione continua in un rettangolo $R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$. Esiste un intorno $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ di t_0 tale che il problema di Cauchy [20.17] ammette soluzione in I_0 .*

Dimostrazione L'idea centrale è di approssimare la funzione $f(x, u)$ con funzioni lipschitziane $f_n(t, u)$, risolvere il problema di Cauchy per queste funzioni, e poi passare al limite per $n \rightarrow \infty$.

Osserviamo in primo luogo che, data una funzione $f(t, u)$, continua in R , è sempre possibile trovare una successione di funzioni $f_n(t, u)$, lipschitziane rispetto a u , e convergenti uniformemente a $f(t, u)$ in R . Si può supporre che risulti

$$|f_n(t, u)| \leq 3M \quad \text{in } R.$$

Ad esempio, se f è definita in $\mathbf{R}^2$ e limitata,³ si può prendere, come abbiamo fatto nel teorema 18.11:

$$f_n(t, u) = \inf_{v \in \mathbf{R}} \{f(t, v) + n|v - u|\}.$$

Le funzioni f_n sono continue in R , lipschitziane rispetto a u (si ha infatti $|f_n(t, u) - f_n(t, v)| \leq n|u - v|$), e per il teorema di Dini 18.13 convergono uniformemente in R a $f(t, u)$.

Per quanto detto sopra, preso $r_0 = \frac{1}{2} \min \left\{ r, \frac{\rho}{3M} \right\}$, tutti i problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f_n(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

hanno soluzione unica $u_n(t)$ in $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$.

Si ha $|u_n - u_0| \leq \rho$ in $I(t_0, r_0)$, e quindi

$$|u_n(t)| \leq |u_0| + \rho.$$

³ Questa ipotesi non è restrittiva dato che, interessandoci solo i valori di f in R , possiamo prolungare la funzione f fuori di R , in modo che risulti $|f(t, u)| \leq 2M$.

Inoltre, risulta $|u'_n(t)| = |f'_n(t, u_n(t))| \leq 3M$, e pertanto

$$|u_n(t) - u_n(s)| \leq 3M|t - s| \quad \forall t, s \in I_0$$

Ciò significa che la successione u_n appartiene a $\mathcal{L}_H(I_0)$, con $H = \max\{3M, |u_0| + \rho\}$. Dato che, per il teorema di Ascoli-Arzelà, questo insieme è compatto in $L(I_0)$, è possibile estrarre dalla successione u_n una sottosuccessione u_{k_n} uniformemente convergente a una funzione $u(t)$.

Proveremo ora che $u(t)$ è soluzione del problema di Cauchy 20.17, facendo vedere che essa è soluzione dell'equazione integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds. \quad [20.19]$$

Il punto centrale consiste nel dimostrare che la successione $f_{k_n}(s, u_{k_n}(s))$ converge uniformemente in I_0 alla funzione $f(s, u(s))$. Si ha

$$|f_{k_n}(s, u_{k_n}(s)) - f(s, u(s))| \leq |f_{k_n}(s, u_{k_n}(s)) - f(s, u_{k_n}(s))| + |f(s, u_{k_n}(s)) - f(s, u(s))|.$$

Il primo termine a secondo membro si può maggiorare con $\|f_{k_n} - f\|_{\infty, R}$, che tende a zero quando $n \rightarrow \infty$. Più precisamente, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un v_1 tale che per $n > v_1$ si ha

$$|f_{k_n}(s, u_{k_n}(s)) - f(s, u(s))| < \varepsilon \quad \forall s \in I_0.$$

Per quanto riguarda il secondo termine, osserviamo che la funzione $f(t, u)$ è continua in R , dunque uniformemente continua; pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che se $|u - v| < \delta$ si ha $|f(s, u) - f(s, v)| < \varepsilon$. D'altra parte la successione u_{k_n} converge uniformemente a u , e quindi per ogni $\delta > 0$ esiste un v_2 tale che per $n > v_2$ si ha $|u_{k_n}(s) - u(s)| < \delta$, e quindi

$$|f(s, u_{k_n}(s)) - f(s, u(s))| < \varepsilon, \quad \forall s \in I_0.$$

In conclusione, se $n > v = \max\{v_1, v_2\}$ si ha

$$|f_{k_n}(s, u_{k_n}(s)) - f(s, u(s))| < 2\varepsilon \quad \forall s \in I_0,$$

cosicché la successione $f_{k_n}(s, u_{k_n}(s))$ converge uniformemente a $f(s, u(s))$ in I_0 .

Il seguito è facile: si parte dall'equazione integrale per le u_{k_n} :

$$u_{k_n}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f_{k_n}(s, u_{k_n}(s)) ds$$

e si passa al limite per $n \rightarrow \infty$; tenendo conto della convergenza uniforme delle funzioni sotto il segno di integrale si ha allora

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

e quindi la funzione u è soluzione del problema di Cauchy. □

20.9. Risposte agli esercizi

20.1.

1. no 2. sì 3. no 4. sì 5. sì 6. no

20.2.

1. 1 3. 2 5. $e - \frac{1}{e}$ 7. $3 \log \frac{3}{2} - 1$
 2. 1 4. $e - 2$ 6. 2

20.3. Le d_2 e d_3 sono ovvie. Per la d_1 , è ovvio che se $f = g$ si ha $d_1(f, g) = 0$, e bisogna dimostrare che se $d_1(f, g) = 0$ allora $f = g$. La funzione $F(t) = |f(t) - g(t)|$ è continua e ≥ 0 . Se fosse $F(t_0) = r > 0$, esisterebbe un intorno I di x_0 in cui $F(t) > \frac{r}{2}$. Ma allora $F(t) \geq \frac{r}{2} \varphi_I$ e il suo integrale sarebbe maggiore di $\frac{r}{2} m(I)$.

20.4. Si ha ovviamente $\text{diam}(E) \leq \text{diam}(\bar{E})$. Supponiamo ora per assurdo che valga il segno $<$, e poniamo $4\varepsilon = \text{diam}(\bar{E}) - \text{diam}(E)$. Per definizione di diametro, esistono due punti x_1 e x_2 in $\bar{E}$, con $d(x_1, x_2) > \text{diam}(\bar{E}) - \varepsilon$, e dunque $d(x_1, x_2) > \text{diam}(E) + 3\varepsilon$. Siccome $x_1 \in \bar{E}$, esiste un punto $y_1 \in E$, con $d(x_1, y_1) < \varepsilon$; analogamente esiste un $y_2 \in E$, con $d(x_2, y_2) < \varepsilon$. Per la disuguaglianza triangolare si ha $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, y_1) + d(y_1, y_2) + d(y_2, x_2) < d(y_1, y_2) + 2\varepsilon$, e quindi $d(y_1, y_2) > \text{diam}(E) + \varepsilon$, che contraddice la definizione di diametro.

20.5. No, infatti se si prende $f(a) = 1$ e $f(x) = 0$ per $x \in (a, b)$, e $g(x) \equiv 0$, si ha $d(f, g) = \int_0^1 |f(x)| dx = 0$, ma $f(x)$ non coincide con $g(x)$.

20.6.

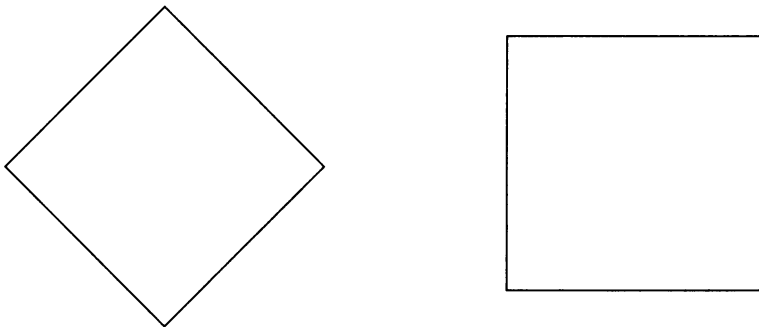


Figura 20.2

20.7. L'unica non ovvia è $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, che però segue dall'osservazione che $(|x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|)^2 \geq |x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2$.

20.8. Le d_1 e d_2 sono ovvie, e la d_3 segue dalla disuguaglianza triangolare $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$ applicata a $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ e $\frac{1}{z}$.

20.9. Per avere $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ basta prendere $d_X(x, y) < \delta = \left(\frac{\varepsilon}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

20.10. Si ha $d(xf(x), xg(x)) = \sup_{[0,1]} |x| |f(x) - g(x)| \leq d(f, g)$.

20.11. Sia f continua, e sia $A \subset Y$ aperto. Se $x_0 \in f^{-1}(A)$ e $y_0 = f(x_0)$, esiste un intorno J di y_0 contenuto in A . Per la continuità, in corrispondenza di J c'è un intorno I di x_0 tale che $f(I) \subset J$, e dunque $I \subset f^{-1}(A)$, che pertanto è aperto. Viceversa, supponiamo che per ogni aperto $A \subset Y$, $f^{-1}(A)$ sia aperto. Sia $x_0 \in X$, e sia J un intorno di $y_0 = f(x_0)$. Per ipotesi $f^{-1}(J)$ è aperto, e siccome $x_0 \in f^{-1}(J)$, esiste un intorno I di x_0 contenuto in $f^{-1}(J)$, cioè tale che $f(I) \subset J$. Pertanto f è continua in x_0 .

20.12. Se A è un aperto di Z , $g^{-1}(A)$ è un aperto di Y , e quindi $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ è aperto.

20.13. Sia A chiuso, e sia x_n una successione di Cauchy in A . Siccome X è completo, si ha $x_n \rightarrow x_0 \in X$. Poiché A è chiuso, risulta $x_0 \in A$, e quindi A è completo. Viceversa, supponiamo che A sia completo come spazio metrico. Se non fosse chiuso, ci sarebbe un punto di frontiera $x_0 \notin A$, in ogni intorno $I\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$ del quale si potrebbe trovare un punto $x_k \in A$. La successione x_k è di Cauchy in A , ma non converge in A .

20.14. Se x_n è una successione di Cauchy nella metrica d , $\frac{1}{x_n}$ è di Cauchy in $\mathbf{R}$, e quindi converge a un numero $c \geq 1$. Si ha $d\left(x_n, \frac{1}{c}\right) \rightarrow 0$, e quindi $x_n \rightarrow \frac{1}{c}$ in (X, d) .

20.15. Si ha $d_Y(u_k(x_k), u(x_k)) \leq d(u_k, u)$, e dunque se la successione u_k converge uniformemente, la quantità a primo membro tende a zero. Viceversa, se u_k non convergesse uniformemente a u , esisterebbe un $\varepsilon > 0$ e per ogni v un intero $k > v$ e un punto $x_k \in X$ tale che $d_Y(u_k(x_k), u(x_k)) \geq \varepsilon$, e dunque questa quantità non può tendere a zero.

20.16. Come nell'esempio [20.10], presa una successione di Cauchy f_n , si dimostra che le f_n convergono uniformemente a una funzione f , le f'_n a una funzione g , e le f''_n a una funzione h . Si prova poi che $f' = g$ e che $g' = h$, cosicché $f'' = h$.

20.17. La successione $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ converge uniformemente a $|x|$; essa è dunque di Cauchy nella norma $\|f\|_\infty$, ma non converge a una funzione C^1 .

20.18. Per il teorema [20.2], per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ a coefficienti razionali tale che $\|P - f'\|_\infty < \varepsilon$. Integrando tra a e x si ha $\left| \int_a^x [P(t) - f'(t)] dt \right| < \varepsilon(b-a)$, e calcolando l'integrale:

$$\left| \sum_{k=0}^N c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^N c_k \frac{a^{k+1}}{k+1} + f(a) - f(x) \right| < \varepsilon(b-a).$$

Sia r è un numero razionale con $\left| r + \sum_{k=0}^N c_k \frac{a^{k+1}}{k+1} - f(a) \right| < \varepsilon$, e poniamo $Q(x) = \sum_{k=0}^N c_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + r$. $Q(x)$ è un polinomio a coefficienti razionali, con $Q' = P$, e risulta $\|Q - f\|_\infty < \varepsilon(b-a+1)$, e quindi in conclusione $\|Q - f\|_{C^1([a,b])} < \varepsilon(b-a+2)$.

20.19. Si ha $M = H$ e $\omega(t) = Ht$.

20.20. Si procede come nel teorema precedente, del quale basta dimostrare la parte (b). La dimostrazione è esattamente la stessa; bisogna solo scegliere $\sigma > 0$ in modo che $\omega(\sigma) + \sigma < \varepsilon$, e invece di $|u(x) - u(x_s)| \leq H|x - x_s| < H\sigma$ scrivere $|u(x) - u(x_s)| \leq \omega(|x - x_s|) \leq \omega(\sigma)$.

Nota bibliografica

Suggerire letture a chi voglia approfondire gli argomenti trattati in un corso di analisi non è impresa delle più facili. Molti temi vengono ripresi ed estesi, specie nel corso di laurea in matematica, durante il secondo biennio; tutti vengono trattati con maggiori dettagli e in modo più approfondito in testi specializzati. In ogni caso l'unità della materia, che con una certa fatica abbiamo cercato di mantenere in questi volumi, si frantuma in una serie di temi, a loro volta suddivisi in argomenti via via più particolari man mano che la specializzazione progredisce.

Una scelta di testi corre dunque due opposti pericoli: da una parte di tramutarsi in una enorme quanto inutile bibliografia, dall'altra di riflettere in maniera unilaterale i gusti dell'autore. Davanti a queste due eventualità, abbiamo scelto la strada più facile, quella di ignorare il problema, evitando ogni segnalazione di ulteriori letture specialistiche.

Al posto di queste, suggeriremo alcuni testi che possono essere letti parallelamente al corso, o addirittura sono propedeutici ad esso.

La scelta è ristretta, anche perché di molti libri interessanti non esiste traduzione italiana; in altri casi si tratta invece di una esclusione deliberata. In particolare, il lettore non troverà citato alcun testo concernente i cosiddetti fondamenti e ciò non perché siano poco importanti, ma in quanto, a mio parere, possono essere visti nella giusta prospettiva solo da chi già possieda una buona conoscenza della matematica. Al loro posto un libro che ogni studente con interessi scientifici dovrebbe leggere è

R. Courant e H. Robins, *Che cos'è la matematica?*, trad. it. (Bollati Boringhieri, Torino 2000).

Una lettura insostituibile, anche se in parte mostra la sua età:

F. Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura* (Zanichelli, Bologna 1938).

A chi sia interessato ai meccanismi profondi che governano il pensiero matematico, suggeriremo due libri (il primo privilegia l'aspetto didattico, il secondo i problemi epistemologici), solo a prima vista dissimili:

G. Polya, *La scoperta matematica*, trad. it. (Feltrinelli, Milano 1982)

(in generale tutti i libri di Polya sono da seguire) e

I. Lakatos, *Dimostrazioni e confutazioni*, trad. it. (Feltrinelli, Milano 1979).

Veniamo ora a un secondo gruppo di opere, per chi voglia andare oltre i pochi cenni storici posti alla fine dei vari capitoli. Per una storia generale delle matematiche, oltre al già menzio-

nato volume di Enriques, consiglieremo

C. B. Boyer, *Storia della matematica*, trad. it. (Mondadori, Milano 1980).

Per quel che riguarda poi gli sviluppi più recenti della matematica, o quanto meno di alcune parti di essa, un testo essenziale è

N. Bourbaki, *Elementi di storia della matematica*, trad. it. (Feltrinelli, Milano 1963).

Infine, per la storia del calcolo infinitesimale, segnaliamo

G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* (Feltrinelli, Milano 1962).

U. Bottazzini, *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass* (Boringhieri, Torino 1981),

nonché

G. Cantelli (a cura di), *La disputa di Leibniz-Newton sull'analisi* (Boringhieri, Torino 1969), una scelta di documenti degli anni 1672-1716.

Resta comunque sottinteso che, per chi voglia veramente approfondire questi aspetti storici, un passaggio obbligato è la lettura delle opere di grandi matematici del passato.

Per finire, un cenno ai testi di esercizi. La capacità di risolvere i problemi è senza dubbio un punto d'arrivo e insieme un sicuro indice dell'apprendimento della teoria. Gli esercizi che compaiono alla fine di ogni paragrafo sono intesi come parte integrante del testo (i più difficili sono contrassegnati da un asterisco). Altri sono reperibili in numerose raccolte, tra cui citiamo:

E. Giusti, *Esercizi e complementi di Analisi matematica 1 e 2* (Bollati Boringhieri, Torino 1991 e 1994).

B. Demidovich e altri, *Esercizi e problemi di analisi matematica* (Editori Riuniti, Roma 1975).

S. Campanato, *Complementi ed esercizi di analisi matematica I e II* (Pellegrini, Pisa 1972).

U. Massari e L. Pepe, *Esercizi di analisi matematica* (Editrice Universitaria, Ferrara 1979).

Infine, utili complementi agli argomenti illustrati in questo corso si possono trovare in

M. T. Borgato e L. Pepe, *Note critiche di analisi matematica* (Editrice Universitaria, Ferrara 1979).

Indice dei simboli

$\frac{\partial f}{\partial x_i}, D_i f, f_{x_i}$	Derivata parziale di f rispetto a x_i (11, §1)
$\nabla f, Df, \text{grad } f$	Gradiente di f : $\nabla f = (D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f)$ (11, §1)
$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}$	Derivata di f lungo la direzione $\mathbf{v}$ (11, §1)
$df(\mathbf{x})$	Differenziale di f (11, §2)
C^m	Spazio delle funzioni continue con le loro derivate fino all'ordine m (11, §2)
C^∞	Spazio delle funzioni continue con le loro derivate di ogni ordine (11, §2)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, D_{ij} f, f_{x_i x_j}$	Derivate seconde di f : $D_{ij} f = D_i D_j f$ (11, §3)
$\nabla^2 f$	Matrice hessiana della funzione f : $\{\nabla^2 f\}_{ij} = D_{ij} f$ (11, §5)
$\text{supp}(f)$	Supporto di f (12, §1)
$\mathcal{G}^+, [\mathcal{G}^-]$	Funzioni semplici maggioranti [minoranti] (12, §1)
$\int_E f d\mathbf{x}$	Integrale di f esteso all'insieme E : $\int_E f d\mathbf{x} = \int f \varphi_E d\mathbf{x}$ (12, §1; 19, §5)
$m(E)$	Misura di E (secondo Peano-Jordan 12, §2; secondo Lebesgue (19, §7)
ω_n	Misura della palla unitaria di $\mathbf{R}^n$ (11, §5)
$J(\mathbf{u})$	Matrice jacobiana dell'applicazione $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ (12, §6)
$f^+ [f^-]$	Parte positiva [negativa] della funzione f : $f^+ = \max\{f, 0\}; f^- = \max\{-f, 0\}$ (12, §8)
$\ f\ _{\infty, E}$	Norma della convergenza uniforme: $\ f\ _{\infty, E} = \sup_{x \in E} f(x) $ (13, §2)
$f^\#$	Prolungata periodica della funzione f (14, §1)
τ_γ	Versore tangente alla curva γ (15, §1)

$L(\gamma)$	Lunghezza della curva γ : $L(\gamma) = \int_a^b \gamma'(t) dt$ (15, §2)
$\int_{\gamma} f ds$	Integrale curvilineo (15, §2)
$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$	Prodotto vettoriale (o esterno) tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (15, §4)
ν	Normale alla superficie φ : $\nu = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{ \varphi_u \wedge \varphi_v }$ (15, §4)
$\int_{\varphi} f d\sigma$	Integrale superficiale (15, §5)
ω	Forma differenziale: $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) dx_i$ (16, §2)
$\int_{\gamma} \omega$	Integrale di ω lungo la curva γ (16, §2)
$\partial^+ E [\partial^- E]$	Frontiera di E orientata positivamente [negativamente] (16, §4)
$\operatorname{div} \mathbf{V}$	Divergenza del campo vettoriale $\mathbf{V}$: $\operatorname{div} \mathbf{V} = \sum_{i=1}^n D_i V_i$ (16, §4)
$\operatorname{rot} \mathbf{V}$	Rotore del campo vettoriale $\mathbf{V}$: $\operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \wedge \mathbf{V}$ (16, §6)
$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) [\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)]$	Massimo [minimo] limite per $x \rightarrow x_0$ della funzione f (18, §1)
$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n [\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n]$	Massimo [minimo] limite della successione a_n (18, §3)
SCI [SCS]	Funzioni semicontinue inferiormente [superiormente] (18, §4)
$\int, \left[\int_* \right]$	Integrale superiore [inferiore] secondo Riemann (19, §1)
$\operatorname{SCI}^+ [\operatorname{SCS}^-]$	Classe delle funzioni semicontinue inferiormente maggioranti [semicontinue superiormente minoranti] (19, §3)
$\bar{\int}, \left[\bar{\int} \right]$	Integrale superiore [inferiore] secondo Lebesgue (19, §3)
q. o.	Quasi ovunque, a meno di un insieme di misura nulla (19, §8)
$d(x, y)$	Distanza tra x e y (20, §1)
$\operatorname{diam} E$	Diametro dell'insieme E : $\operatorname{diam} E = \sup\{d(x, y): x, y \in E\}$ (20, §1)
$L(X, Y)$	Spazio delle funzioni limitate da X in Y (20, §3)
$C(X, Y)$	Spazio delle funzioni continue e limitate da X in Y (20, §3)
$ \mathbf{v} $	Norma del vettore $\mathbf{v}$ (20, §5)
$(\mathbf{v}, \mathbf{w})$	Prodotto scalare tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (20, §6)

Indice analitico

- Ampiezza, 95
 - complessa, 95
- Aperto:
 - semplicemente connesso, 182
 - stellato, 173
- Area:
 - di una superficie, 141
 - di rotazione, 142
 - di un grafico, 142
- Ascissa curvilinea, 131
- Bordo di una superficie, 183
- Cambiamento di variabili, 49
- Campo vettoriale:
 - conservativo, 174
 - divergenza, 179
 - irrotazionale, 174
 - rotore, 183
- Coefficienti di Fourier, 98
- Contrazioni:
 - punto fisso, 121
- Convergenza:
 - puntuale, 73
 - totale, 81
 - uniforme, 75
 - quasi uniforme, 117
- Coordinate:
 - cilindriche, 59
 - polari, 57
 - sferiche, 60
- Criterio:
 - della radice, 235
 - del rapporto, 236
- Curva (e), 120
 - equazione parametrica, 120
 - equivalenti, 124
 - lunghezza, 126
 - dei grafici, 127
 - in coordinate polari, 127
 - regolare, 121
 - a tratti, 121
 - verso, 124
 - versore tangente, 124
 - vettore velocità, 120
- Derivate:
 - lungo una curva, 17
 - lungo una direzione, 5
 - parziali, 3
 - successive, 14
- Derivazione sotto il segno di integrale, 79
- Diametro di un insieme, 275
- Differenziale, 12
- Distanza, 273
- Diseguaglianza di Bessel, 99
- Divergenza di un campo vettoriale, 179
- Equazioni parametriche di una curva, 120
- Equazioni differenziali, 187
 - a variabili separabili, 188
 - di Bernoulli, 196
 - lineari, 206
 - a coefficienti costanti, 208
 - omogenee, 208
 - polinomio associato, 209
 - omogenee, 191
 - prolungamento delle soluzioni, 203
 - soluzioni massimali, 204
 - soluzioni numeriche, 215
- Forme differenziali, 165
 - chiuse, 172
 - componenti, 165
 - esatte, 169
 - integrale lungo una curva, 165
- Formula:
 - di Gauss-Green, 176
 - di Stokes, 184
 - di Taylor, 20
- Frontiera orientata, 175

Funzione (i):

- composta (derivazione), 16
- continua a tratti, 94
- continua non derivabile, 108
- derivabile, 4
- differenziabile, 10
- implicita, 146
- integrabile:
 - secondo Riemann, 29
 - secondo Lebesgue, 258
- limitata (in uno spazio metrico), 279
- misurabile, 258
- potenziale, 169
- periodica, 93
- regolare a tratti, 95
- semicontinua, 237
 - massimi e minimi, 239
- semplice, 29
- sommabile, 252

Gradiente di una funzione, 4

Identità di Parseval, 106

Insieme:

- compatto (per successioni), 290
- denso, 277
- di misura nulla, 265
- limitato, 275
- misurabile:
 - secondo Peano-Jordan, 30
 - secondo Lebesgue, 263
- non misurabile:
 - secondo Peano-Jordan, 34
 - secondo Lebesgue, 264
- normale rispetto a un asse, 33

Integrale:

- assoluta continuità, 268
- curvilineo, 132
- delle funzioni semicontinue, 249
- delle funzioni semplici, 29
- di Lebesgue, 252
- di Riemann, 29
- di una forma differenziale, 165
- esteso a un insieme, 30, 256
- improprio, 65
- inferiore (secondo Lebesgue), 251
- inferiore (secondo Riemann), 30
- multiplo, 37
- superficiale, 144
- superiore (secondo Lebesgue), 251
- superiore (secondo Riemann), 30

Intorno sferico, 273

Lemma di Fatou, 261

Lunghhezza di una curva, 126

Maggioranti definitivi, 229

Maggioranti locali, 225

Minoranti locali, 226

Massimi e minimi:

- relativi, 6, 19

vincolati, 150

delle funzioni semicontinue, 239

Massimo e minimo limite, 226

di una successione, 234

Matrice:

- definita negativa, 20
- definita positiva, 20
- hessiana, 18
- giacobiana, 55
- semidefinita negativa, 20
- semidefinita positiva, 20

Misura:

- additività numerabile, 264
- di Lebesgue, 263
- di Peano-Jordan, 30
- subadditività numerabile, 263

Moltiplicatori di Lagrange, 154

Norma, 76

Passaggio al limite sotto il segno di integrale, 77

Periodo, 93

Piano tangente a una superficie, 138

Plurirettangolo (o pluriintervallo), 31

Primitiva di una forma differenziale, 169

Problema di Cauchy, 197

- esistenza e unicità delle soluzioni, 197
- non unicità delle soluzioni, 199

Prodotto:

- scalare o interno, 288
- vettoriale o esterno, 138

Punto stazionario, 6

Raggio di convergenza, 83

Rappresentazione parametrica di una curva,

Retta tangente a una curva, 121

Rotore, 183

Serie:

- di Fourier, 97
 - coefficienti, 98
- di funzioni, 80
- di potenze, 82
 - raggio di convergenza, 83
- di Taylor, 84

Solido di rotazione, 44

Spazio:

- di Banach, 288
- di Hilbert, 289
- metrico, 273
 - compatto (per successioni), 290
 - completo, 281
 - separabile, 278
 - totalmente limitato, 291
- vettoriale, 286
 - normato, 287

Successione:

- di funzioni, 73

Superficie (i):

- area, 141
- di rotazione, 142

- piano tangente, 138
- regolare, 137
- versore normale, 140
- Supporto di una funzione, 29
- Teorema:
 - dei moltiplicatori di Lagrange, 154
 - del differenziale totale, 12
 - della convergenza dominata, 261
 - della divergenza, 179
 - delle funzioni implicite, 146
 - di Ascoli-Arzelà, 294
 - di Beppo Levi, 259
 - di Dini, 243
 - di Fubini, 37
 - di Lebesgue, 261
 - di Schwarz, 15
 - di Stokes, 184
 - di Vitali, 271
 - di Weierstrass (approssimazione delle funzioni continue), 86
 - di Weierstrass (massimi e minimi), 239
- Variazione della costante, 213
- Versore:
 - normale a una superficie, 140
 - esterno, 175
 - tangente a una curva, 124
- Vincolo, 153
- Volume:
 - dei solidi di rotazione, 44
 - della palla n -dimensionale, 46