

PROGRAMMA DI MATEMATICA, FISICA, ELETTRONICA

Mario Ageo, *Elementi di fisica*
T.M. Apostol, *Calcolo*
Vol. 1 *Analisi 1*
Vol. 2 *Geometria*
Vol. 3 *Analisi 2*
Michiel Bertsch, *Istituzioni di matematica*
Scipione Bobbio e Emilio Gatti, *Elettromagnetismo Ottica*
Max Born, *Fisica atomica*
Francesco Bottacin e Giuseppe Zampieri, *Analisi 2*
Stefano Campi, Massimo Picardello e Giorgio Talenti, *Analisi matematica e calcolatori*
Vito Cappellini, *Elaborazione numerica delle immagini*
Francesco Carassa, *Comunicazioni elettriche*
Sergio Carrà, *Termodinamica: aspetti recenti e applicazioni alla chimica e all'ingegneria*
Ciro Ciliberto, *Algebra lineare*
Claudio Citrini, *Analisi matematica 1*
Claudio Citrini, *Analisi matematica 2*
P.A.M. Dirac, *I principi della meccanica quantistica*
Albert Einstein, *Il significato della relatività*
Antonio Fasano e Stefano Marmi, *Meccanica analitica con elementi di meccanica statistica e dei continui*
Enrico Fermi, *Termodinamica*
Bruno Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantica*
Giorgio Franceschetti, *Campi elettromagnetici*
Giovanni Gallavotti, *Meccanica elementare*
Graziano Gentili, Fabio Podestà e Edoardo Vesentini, *Lezioni di geometria differenziale*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 1*
Enrico Giusti, *Analisi matematica 2*
Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica (vol. 1)*
Enrico Giusti, *Esercizi e complementi di analisi matematica (vol. 2)*
Angelo Guerraggio, *Matematica generale*
Hermann Haken e Hans C. Wolf, *Fisica atomica e quantistica*
Werner Heisenberg, *I principi fisici della teoria dei quanti*
Gerhard Herzberg, *Spettri atomici e struttura atomica*
David A. Hodges e Horace G. Jackson, *Analisi e progetto di circuiti integrati digitali*
Charles Kittel, *Introduzione alla fisica dello stato solido*
Charles Kittel e Herbert Kroemer, *Termodinamica statistica*
Serge Lang, *Algebra lineare*
Giorgio Letta, *Teoria elementare dell'integrazione*
P.F. Manfredi, Piero Maranesi e Tiziana Tacchi, *L'amplificatore operazionale*
Jacob Millman, *Circuiti e sistemi microelettronici*
Jacob Millman e C.C. Halkias, *Microelettronica*
R.S. Muller e T.I. Kamins, *Dispositivi elettronici nei circuiti integrati*
Athanasios Papoulis, *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*
Wolfgang Pauli, *Teoria della relatività*
Giovanni Prodi, *Analisi matematica*
Antonio Ruberti e Alberto Isidori, *Teoria dei sistemi*
Walter Rudin, *Analisi reale e complessa*
H.H. Schaefer, *Introduzione alla teoria spettrale*
Edoardo Sernesi, *Geometria 1*
Edoardo Sernesi, *Geometria 2*
I.M. Singer e J.A. Thorpe, *Lezioni di topologia elementare e di geometria*
W.V. Smith e P.P. Sorokin, *Il laser*
Giovanni Soncini, *Tecnologie microelettroniche*
Guido Tartara, *Teoria dei sistemi di comunicazione*
Bruno Touschek e Giancarlo Rossi, *Meccanica statistica*

ENRICO GIUSTI

ANALISI MATEMATICA 1

SECONDA EDIZIONE

PIANO DELLA PRESENTE OPERA

VOLUME PRIMO: ANALISI MATEMATICA 1

VOLUME SECONDO: ANALISI MATEMATICA 2



BOLLATI BORINGHERI

Prima edizione 1985
Seconda edizione riveduta 1988
Ristampa marzo 1996

© 1988 Bollati Boringhieri editore s.r.l., Torino, corso Vittorio Emanuele 86
I diritti di memorizzazione elettronica, di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche) sono riservati

L'editore potrà concedere a pagamento l'autorizzazione a riprodurre una porzione non superiore a un decimo del presente volume. Le richieste di riproduzione vanno inoltrate all'Associazione Italiana per i Diritti di Riproduzione delle Opere a Stampa (AIDROS), via delle Erbe 2, 20121 Milano, tel. 02/86463091, fax 02/89010863.

Stampato in Italia dalla Stampatre di Torino
CL 74-9266-9 ISBN 88-339-5429-3

Indice

Prefazione, 7

1 Il sistema dei numeri reali, 9

- 1 Proprietà elementari dei numeri reali
- 2 Il valore assoluto
- 3 L'assioma di Dedekind
- 4 Estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali
- 5 La topologia della retta: insiemi aperti e chiusi
- *6 I numeri interi come sottoinsieme di $\mathbb{R}$
- *7 Un modello dei numeri reali
- 8 Generalità sui numeri complessi
- Notizie storiche

2 Successioni e serie numeriche, 53

- 1 Successioni
- 2 Limite di una successione
- 3 Limite di una successione (continuazione)
- 4 Operazioni con i limiti
- 5 Serie numeriche
- 6 Limiti di successioni monotone; serie a termini positivi
- 7 Due numeri particolari: e e π
- 8 Potenze con esponente reale
- *9 I numeri reali in forma decimale
- 10 Il massimo e minimo limite
- 11 Successioni e topologia
- 12 Il criterio di Cauchy
- *13 I numeri reali come completamento dei razionali
- 14 Criteri di convergenza per le serie a termini positivi
- 15 Altri criteri di convergenza
- *16 Riordinamento dei termini di una serie
- *17 Prodotti infiniti
- 18 Successioni e serie complesse
- Notizie storiche

3 Funzioni e loro limiti; funzioni continue, 119

- 1 Generalità
- 2 Grafico di una funzione
- 3 Funzione composta e funzione inversa
- 4 Limiti di funzioni

- 5 Restrizioni. Limiti destro e sinistro
- 6 Limiti di funzioni monotone
- *7 Massimo e minimo limite
- 8 Funzioni continue
- 9 Punti di discontinuità
- 10 I teoremi fondamentali per le funzioni continue
- 11 L'uniforme continuità
- 12 Funzioni continue invertibili
- Notizie storiche

4 Le idee fondamentali del calcolo infinitesimale, 165

- 1 L'area del segmento di parabola
- 2 Integrale delle funzioni semplici
- 3 L'integrale di Riemann
- 4 Integrazione delle funzioni continue
- 5 Integrale esteso a un intervallo
- 6 La derivata: introduzione
- 7 La derivata: definizione e prime proprietà
- 8 Massimi e minimi relativi. Il teorema del valor medio
- 9 Il teorema fondamentale del calcolo integrale
- *10 Integrazione e primitive

5 Derivazione e integrazione delle funzioni elementari, 196

- 1 Alcune regole di derivazione
- 2 Una tabella di derivate
- 3 Integrazione delle funzioni razionali
- 4 Integrazione delle funzioni razionali (continuazione)
- 5 L'integrazione per parti
- 6 L'integrazione per sostituzione
- 7 Alcune sostituzioni speciali
- 8 La funzione logaritmo
- *9 Ancora sul numero e

6 Sviluppi del calcolo infinitesimale, 226

- 1 Calcolo dei limiti; teoremi di de l'Hôpital
- 2 Derivate successive
- 3 Funzioni convesse e concave
- 4 Studio del grafico di una funzione
- 5 La formula di Taylor
- 6 Sviluppi delle funzioni elementari
- 7 La serie di Taylor (cenni)
- 8 L'integrale in senso generalizzato
- 9 Criteri di convergenza per integrali impropri
- 10 L'esponenziale nel campo complesso
- Notizie storiche

Nota bibliografica, 285

Indice dei simboli, 287

Indice analitico, 291

Lo scopo principale di quest'opera è di fornire allo studente un testo sul quale apprendere i primi elementi di analisi matematica, quali vengono insegnati nel primo biennio dei corsi di laurea delle Facoltà di Scienze e di Ingegneria.

Si tratta tutto sommato di una esposizione di tipo tradizionale, anche se non mancano diversità di impostazione rispetto ad analoghi testi attualmente in uso. Tra queste sono da segnalare, per quel che riguarda il primo volume, la trattazione unificata delle successioni e delle serie, come pure lo sviluppo parallelo del calcolo differenziale e integrale. Per le prime si tratta di una semplice giustapposizione, e difatti è possibile separare nuovamente i due argomenti posponendo la seconda parte del capitolo 2 (§§ 14-17). Al contrario, l'unificazione della trattazione del calcolo differenziale e integrale mi sembra risponda a una necessità didattica effettiva e renda possibile una certa semplificazione della materia.

Per il secondo volume, la maggior differenza rispetto ad altri testi dello stesso tipo consiste nell'illustrazione della teoria dell'integrazione di Lebesgue, che usualmente viene lasciata a corsi successivi, quando (come accade in alcuni corsi di laurea) non viene completamente tralasciata. Mi sembra invece che l'importanza dell'integrale di Lebesgue sia tale da consigliarne la trattazione, anche se in forma elementare, fin dal primo biennio di analisi.

Il volume è diviso in capitoli, ulteriormente suddivisi in paragrafi. Di questi, sono segnati con un asterisco quelli che possono essere omessi senza pregiudicare la comprensione di quanto segue.

Alla fine di ogni paragrafo sono riportati un certo numero di esercizi, il cui svolgimento è necessario per una soddisfacente comprensione della materia. Infine, al termine di ogni capitolo, o gruppo di capitoli, si possono trovare brevi notizie storiche.

E. G.

Capitolo 1

Il sistema dei numeri reali

1 Proprietà elementari dei numeri reali

I numeri reali sono un insieme $\mathbf{R}$ con le seguenti strutture:

(A) Un *ordinamento totale*, cioè una relazione $\leq$ (si legga minore o uguale) tra coppie di elementi di $\mathbf{R}$, che goda delle seguenti proprietà:

(A₁) Per ogni coppia a, b di numeri reali si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$ (dicotomia).

(A₂) Le relazioni $a \leq b$ e $b \leq c$ implicano $a \leq c$ (proprietà transitiva).

(A₃) Le relazioni $a \leq b$ e $b \leq a$ implicano $a = b$ (proprietà antisimmetrica).

(A₄) Per ogni a appartenente a $\mathbf{R}$ (in simboli $a \in \mathbf{R}$), risulta $a \leq a$ (proprietà riflessiva).

(B) Un'*addizione*, cioè un'applicazione che ad ogni coppia di numeri reali a, b fa corrispondere un numero reale, che si indica con $a + b$, con le proprietà:

(B₁) Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ si ha $a + b = b + a$ (proprietà commutativa della somma).

(B₂) Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ si ha $a + (b + c) = (a + b) + c$ (proprietà associativa della somma); si può dunque scrivere senza ambiguità $a + b + c$.

(B₃) Esiste un unico elemento 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbf{R}$, $0 + a = a + 0 = a$.

(B₄) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ esiste un unico opposto $-a \in \mathbf{R}$ tale che $a + (-a) = 0$. In genere, si scrive $b - a$ invece di $b + (-a)$.

(C) Una *moltiplicazione*, che ad $a, b \in \mathbf{R}$ fa corrispondere un elemento di $\mathbf{R}$, indicato con $a \times b$, o più brevemente con ab , e che verifichi:

(C₁) Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ si ha $ab = ba$ (proprietà commutativa del prodotto).

(C₂) Per ogni $a, b, c \in \mathbf{R}$ si ha $a(bc) = (ab)c$ (proprietà associativa del prodotto); si può dunque scrivere abc senza ambiguità.

(C₃) Esiste un unico elemento 1 (uno), diverso da 0, tale che $1a = a1 = a$, per ogni $a \in \mathbf{R}$.

(C₄) Per ogni $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, esiste un unico elemento a^{-1} (inverso di a) tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$; l'elemento a^{-1} si indica anche con $1/a$.

Per quanto riguarda i rapporti fra le strutture (A), (B) e (C), si hanno le seguenti proprietà:

- (AB) La relazione $a \leq b$ implica $a + c \leq b + c$, per ogni $c \in \mathbb{R}$.
- (AC) Le relazioni $0 \leq a$ e $0 \leq b$ implicano $0 \leq ab$.
- (BC) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha $a(b + c) = ab + ac$ (proprietà distributiva).

Dalle proprietà sopra enunciate si possono ricavare facilmente le usuali regole di operazioni con i numeri reali. Non ci dilunghiamo su tali questioni. Osserviamo invece che queste proprietà, insieme all'assioma di Dedekind (vedi § 3) caratterizzano completamente i numeri reali.

Osservazione 1.1. A voler essere più precisi (o più pignoli) si dovrebbe dire che i numeri reali sono un sistema $(\mathbb{R}, \leq, +, \times, 0, 1)$ dove $\mathbb{R}$ è un insieme, $\leq$ è un ordinamento totale su $\mathbb{R}$, e $+$ e $\times$ sono due leggi di composizione interna, di elementi neutri rispettivamente 0 e 1, verificanti gli assiomi sopra riportati e l'assioma di Dedekind (D).

Si può dimostrare che gli assiomi (A), (B), (C) e (D) caratterizzano completamente il sistema dei numeri reali, nel senso che se $(\mathbb{R}^1, \leq^1, +^1, \times^1, 0^1, 1^1)$ è un secondo sistema verificante gli stessi assiomi, esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^1$ tale che i corrispondenti di 0 e 1 sono esattamente 0^1 e 1^1 , e che se indichiamo con a^1, b^1 ecc. gli elementi di $\mathbb{R}^1$ corrispondenti ad a, b ecc. di $\mathbb{R}$, si ha:

- (a) $a \leq b \Leftrightarrow a^1 \leq^1 b^1$
- (b) $(a + b)^1 = a^1 +^1 b^1$ (in altre parole, l'elemento corrispondente ad $a + b$ è $a^1 +^1 b^1$)
- (c) $(a \times b)^1 = a^1 \times^1 b^1$. ■

Esercizi

1.1 Si dimostrino le seguenti proprietà di $\mathbb{R}$:

- (a) per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta $a \cdot 0 = 0$;
- (b) se $ab = 0$ allora è $a = 0$ oppure $b = 0$;
- (c) se $a \geq 0$, allora $-a \leq 0$;
- (d) se $a \leq b$ e $c < 0$, allora $ac \geq bc$;
- (e) per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geq 0$.

2 Il valore assoluto

Sia $a \in \mathbb{R}$. Si definisce *valore assoluto* (o *modulo*) di a il massimo tra i due numeri a e $-a$:

$$|a| = \max \{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Si deduce immediatamente dalla definizione che $|a| \geq 0$, e che $|a| = 0$ se e solo se $a = 0$. Si ha inoltre $|-a| = |a|$, e

$$a \leq |a|; \quad -a \leq |a|.$$

Siano ora a e b due numeri reali. Dalla proprietà (AB) e dalla relazione $b \leq |b|$ segue che

$$\begin{aligned} a + b &\leq a + |b| \leq |a| + |b|, \\ -(a + b) &= -a + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|. \end{aligned}$$

Ricordando che $|a + b| = \max \{(a + b), -(a + b)\}$, si deduce dalle precedenti relazioni la *disuguaglianza triangolare*:

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad [2.1]$$

Se ora in quest'ultima relazione poniamo $a + b = -c$ (e dunque $b = -c - a$), e ricordiamo che $|-a| = |a|$, otteniamo $|c| \leq |a| + |a + c|$, e dunque

$$|a + c| \geq |c| - |a|. \quad [2.2]$$

Viceversa, da quest'ultima relazione si può risalire alla [2.1] sostituendo a c il suo valore $-a - b$; cosicché le [2.1] e [2.2] sono due relazioni equivalenti. Naturalmente possiamo scambiare tra loro a e c nella [2.2], e ottenere la relazione equivalente

$$|a + c| \geq |a| - |c|,$$

da cui, confrontando con la [2.2], si ottiene

$$|a + c| \geq ||a| - |c||. \quad [2.3]$$

Siano ora $x, y \in \mathbb{R}$. Si definisce *distanza* tra x e y il numero reale

$$d(x, y) = |x - y|. \quad [2.4]$$

Si verificano facilmente le seguenti proprietà:

- (d₁) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.
- (d₂) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (d₃) Per ogni $z \in \mathbb{R}$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*disuguaglianza triangolare*).

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, chiameremo *intorno sferico* di centro x_0 e di raggio r l'insieme di tutti i numeri reali che distano da x_0 meno di r ; in simboli:

$$I(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Esercizi

2.1 Si dimostri la disuguaglianza $||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$.

2.2 Si trovino gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali è verificata la disuguaglianza:

- (a) $|x-1| \leq |x+2|$
- (b) $x+3 > |x-2|$
- (c) $x+|x-1| \geq 3$
- (d) $x|x+1| > 3$
- (e) $|x|+|x+2| \geq 1$
- (f) $-1 < x+|x-2| < 3$
- (g) $\frac{x-2}{x+3} < \frac{x+1}{x}$
- (h) $\frac{2}{x} - 3 < \frac{4}{x} + 1$
- (i) $x^2 + x + 1 \leq 1$
- (l) $\frac{x+1}{3x-2} \leq 5$.

2.3 Si dimostri che la distanza $d(x, y) = |x-y|$ gode delle proprietà (d_1) , (d_2) e (d_3) .

2.4 Si dimostrino le seguenti disuguaglianze:

- (a) $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$
- (b) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 \geq 0$
- * (c) $x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + x + 1 \geq 0$.

*2.5 Si dimostri che, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{\epsilon} b^2.$$

2.6 Si dimostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni λ , $0 < \lambda < 1$, risulta

$$(a+b)^2 \leq \frac{a^2}{\lambda} + \frac{b^2}{1-\lambda}.$$

(Si usi il risultato dell'esercizio precedente.)

*2.7 Dimostrare che se a, b e c sono positivi si ha:

- (a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- (b) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$
- (c) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$.

2.8 Trovare un numero M tale che risulti:

- (a) $\frac{x+2}{x-4} < M$ per ogni $x \in [5, 8]$, $5 \leq x \leq 8$;
- (b) $\frac{x+1}{x-2} > M$ per ogni $x \in (0, 1)$, $0 < x < 1$.

2.9 Dimostrare che

$$\delta(x, y) = \sqrt{|x-y|}$$

è una distanza in $\mathbb{R}$, e cioè che verifica le relazioni (d_1) , (d_2) e (d_3) .

2.10 Dire se sono distanze in $\mathbb{R}$ le seguenti espressioni:

- (a) $d(x, y) = |x-y|^2$
- (b) $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$
- (c) $d(x, y) = |x+y|$.

2.11 Si dimostri che $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$. Generalizzare.

3 L'assioma di Dedekind

Gli assiomi del precedente paragrafo 1 riguardano solo la struttura "algebraica" di $\mathbb{R}$, e sono ancora insufficienti a descrivere completamente (e dunque a caratterizzare) il sistema dei numeri reali. Quello che manca è un assioma che renda conto di una delle più importanti proprietà dei numeri reali: la *continuità*, una proprietà che li distingue da altre classi di numeri (come ad esempio i numeri razionali, che ne sono privi) e che li rende lo strumento più adatto per le necessità dell'analisi non appena si passi dalle operazioni algebriche elementari (somma, prodotto ecc.) allo studio di relazioni più complesse.

E' difficile apprezzare debitamente la portata dell'assioma di continuità, o assioma di Dedekind; anzi, molte volte si è indotti a considerare la continuità come una proprietà talmente naturale da non richiedere un assioma specifico. Non sarà dunque privo di interesse un confronto tra i numeri reali (che verificano l'assioma di Dedekind) e i razionali (che non godono della stessa proprietà), anche limitato al solo problema dell'estrazione di radici.

Cominciamo con l'osservare come sia possibile considerare i numeri interi come una sottoclasse dei numeri reali. Infatti, poiché $1 \in \mathbb{R}$ (assioma C_3), apparterranno a $\mathbb{R}$ i numeri $1+1 (=2)$; $2+1 (=3)$, e così via,¹ e cioè i numeri naturali (interi non negativi).

L'insieme dei numeri naturali verrà indicato con $\mathbb{N}$; tali numeri, considerati insieme allo zero e ai loro opposti $-1, -2, -3$ ecc. (assioma B_4) costituiscono l'insieme degli interi relativi (positivi e negativi), che si indica con $\mathbb{Z}$.

Si noti che in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$ sono definiti sia un ordinamento che una somma e un prodotto, ma che essi non godono di tutte le proprietà elencate nel paragrafo 1. Ad esempio, in $\mathbb{N}$ non sono verificate le (B_3) e (B_4) (infatti la sottrazione $b-a$ sarà

¹ Questo "e così via" nasconde più di una difficoltà, ma per il momento vi passeremo sopra. Una costruzione rigorosa dei numeri naturali a partire dagli assiomi di $\mathbb{R}$ verrà discussa nel paragrafo 6.

possibile solo quando $b \geq a$), né la (C_4) (cosicché la divisione è possibile solo quando il dividendo è multiplo del divisore).² Se si passa da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$ la sottrazione è sempre possibile, mentre permangono le difficoltà connesse con la divisione.

Per arrivare a un sistema numerico che goda delle proprietà indicate nel paragrafo 1 occorre considerare l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali.

Un numero reale a si dirà *razionale* se è quoziente di due interi, cioè se esistono due interi p e q tali che $a = p/q = pq^{-1}$. In simboli:

$$\mathbf{Q} = \{a \in \mathbf{R}; a = p/q; p, q \in \mathbf{Z}\}.$$

Si noti che l'espressione di un numero razionale come rapporto di due interi non è unica; ad esempio, $3/4$, $6/8$, $-9/-12$ rappresentano lo stesso numero razionale. Più in generale, p/q e r/s denotano lo stesso numero razionale non appena $ps = rq$ (osservazione, questa, che verrà ripresa in seguito).

Con l'allargamento del sistema numerico fino a comprendere i numeri razionali, le proprietà del paragrafo 1 sono soddisfatte: è facile infatti vedere che la somma (e il prodotto) di due numeri razionali è un numero razionale, come pure razionali sono l'opposto e l'inverso di un numero razionale.

Tuttavia i numeri razionali sono ancora insufficienti alle necessità dell'analisi matematica. Ad esempio, l'estrazione di radice non è sempre possibile in $\mathbf{Q}$.

Proposizione 3.1 Non esiste alcun numero razionale a tale che $a^2 = 2$.

Dimostrazione. Se un tal numero esistesse, si potrebbero trovare due interi p e q , primi tra loro, tali che $p^2 = 2q^2$. Poiché il secondo membro è divisibile per 2, dovrà esserlo anche p^2 , e dunque anche p ; sarà allora $p = 2s$, da cui segue $2s^2 = q^2$. Con lo stesso ragionamento si può concludere che anche q è pari, contro l'ipotesi che p e q fossero primi tra loro. ■

Una conseguenza della proposizione precedente è che gli assiomi (A) (B) e (C) non sono sufficienti da soli a caratterizzare un sistema numerico abbastanza versatile da permettere, ad esempio, operazioni algebriche quali l'estrazione di radice. Si rende necessario dunque postulare ulteriori proprietà che facciano superare le limitazioni derivanti dalla relativa povertà del sistema di assiomi del paragrafo 1. E' esattamente questo il ruolo svolto dal cosiddetto "assioma di Dedekind".

Ricordiamo che se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ (in simboli, $A \subset \mathbf{R}$ e $B \subset \mathbf{R}$), si chiama *unione* di A e B l'insieme $A \cup B$ i cui elementi sono tutti gli elementi di A o di B :

$$A \cup B = \{x \in \mathbf{R}; x \in A \text{ oppure } x \in B\},$$

² Si osservi che la sottrazione e la divisione sono in $\mathbf{R}$ concetti secondari, derivati rispettivamente da quelli di opposto e inverso. Se invece ci si limita agli interi, in cui non esistono né opposto né inverso, queste operazioni (quando sono possibili) dovranno essere definite in maniera differente a partire dagli assiomi di $\mathbf{N}$.

mentre si chiama *intersezione* di A e B l'insieme $A \cap B$ costituito dagli elementi comuni di A e B :

$$A \cap B = \{x \in \mathbf{R}; x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Se non vi sono elementi comuni ad A e B , scriveremo $A \cap B = \emptyset$ (insieme vuoto).

Definizione 3.1 Siano A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbf{R}$. Diremo che (A, B) è una *sezione* di $\mathbf{R}$ se:

$$A \cup B = \mathbf{R} \text{ e } A \cap B = \emptyset; \quad [3.1]$$

$$\text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B \text{ si ha } a < b. \quad [3.2]$$

Ad esempio una sezione di $\mathbf{R}$ si ottiene prendendo

$$A = \mathbf{R}^+ = \{x \in \mathbf{R}; x > 0\}.$$

$$B = \mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R}; x \leq 0\}.$$

Il seguente assioma caratterizza il sistema dei numeri reali:

(D) (Assioma di Dedekind) Per ogni sezione (A, B) in $\mathbf{R}$ esiste un unico numero reale L tale che

$$a \leq L \leq b \text{ per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B. \quad [3.3]$$

Il numero L si chiama *elemento separatore* delle classi A e B .

Si è soliti enunciare la proprietà (D) dicendo che i numeri reali sono continui, o che non hanno lacune; non così i numeri razionali, che invece non soddisfano all'assioma di continuità (D).

Consideriamo infatti in $\mathbf{Q}$ le classi:

$$A = \{q \in \mathbf{Q}; q < 0\} \cup \{q \in \mathbf{Q}; q \geq 0, q^2 < 2\}$$

$$B = \{q \in \mathbf{Q}; q \geq 0, q^2 \geq 2\}.$$

Si vede facilmente che $A \cup B = \mathbf{Q}$ e $A \cap B = \emptyset$, inoltre se $a \in A$ e $b \in B$ si ha $a < b$. Ne segue che (A, B) è una sezione di $\mathbf{Q}$.

Facciamo vedere che non c'è un elemento separatore in $\mathbf{Q}$. Infatti, se un tale elemento L esistesse dovrebbe appartenere ad A o a B . Supponiamo che appartenga ad A . Poiché non può essere $L < 0$, si dovrà avere $L^2 < 2$. D'altra parte non può essere $L^2 = 2$, a causa della proposizione 3.1, e dunque $L^2 < 2$.

Sia ora N un numero intero maggiore di $(2L+1)/(2-L^2)$ (vedi più oltre, proposizione 4.3); si ha

$$\left(L + \frac{1}{N}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{N^2} + \frac{2L}{N} < L^2 + \frac{2L+1}{N} < 2$$

per cui $L + 1/N \in A$. Ma questo è impossibile, perché contraddice la [3.3]. Analogamente si esclude il caso $L \in B$, cosicché l'insieme $\mathbf{Q}$ non ha la proprietà di Dedekind.

Esercizi

3.1 Si dimostri che i seguenti numeri non sono razionali:

- (a) $\sqrt{3}$.
- (b) $\sqrt{n}$, se n non è un quadrato perfetto
- (c) $\sqrt[3]{3}$.
- * (d) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$.
- (e) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

*3.2 Nel piano cartesiano si indichi con Z^2 l'insieme dei punti (x, y) con coordinate intere. Dimostrare che un triangolo con i vertici in Z^2 non può essere equilatero (si usi il fatto che $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ è irrazionale).

4 Estremo superiore e inferiore di un insieme di numeri reali

Sia A un insieme di $\mathbb{R}$, e supponiamo che esista il massimo di A , cioè che ci sia un numero $L \in A$ tale che per ogni elemento $a \in A$ si abbia $L \geq a$.

Le proprietà che caratterizzano L sono dunque:

(M₁) Per ogni $a \in A$ si ha $a \leq L$, ossia L è un maggiorante di A .

(M₂) $L \in A$; quindi in particolare non esistono maggioranti di A che siano più piccoli di L .

In altre parole il massimo di A , se esiste, è il più piccolo dei maggioranti di A . Analogamente il minimo di A , se esiste, è il più grande dei minoranti di A .

Si noti che non tutti gli insiemi hanno massimo; ad esempio un intervallo aperto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

non ha né massimo né minimo.

D'altra parte, come vedremo, per ogni insieme limitato A esiste il minimo dei maggioranti e il massimo dei minoranti; questi vengono chiamati rispettivamente *estremo superiore* ed *estremo inferiore* di A , e coincidono col massimo e col minimo di A quando questi ultimi esistono.

Consideriamo un insieme $A \subset \mathbb{R}$; esso si dirà *limitato superiormente* se ammette un maggiorante, cioè se esiste un $M \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $a \in A$, si abbia $a \leq M$. Analogamente A si dirà *limitato inferiormente* se esiste un minorante di A , cioè un $m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq a$ per ogni $a \in A$.

Infine un insieme limitato sia superiormente che inferiormente si dirà *limitato*. Dalla proprietà (D) segue la:

Proposizione 4.1. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. L'insieme dei maggioranti di A , $\mathcal{M}(A)$, ha minimo.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{M}'$ il complementare di $\mathcal{M}(A)$ ³, e facciamo vedere che la coppia $(\mathcal{M}', \mathcal{M}(A))$ forma una sezione di $\mathbb{R}$. Le relazioni [3.1] sono ovvie, dato che ogni numero reale appartiene o ad $\mathcal{M}(A)$ o ad $\mathcal{M}'$. Per dimostrare la [3.2] si considerino due numeri, $\mu \in \mathcal{M}'$ ed $m \in \mathcal{M}(A)$. Poiché μ non è un maggiorante, esisterà un $a \in A$ tale che $\mu < a$. D'altra parte m è un maggiorante di A , e dunque dovrà essere $a \leq m$. Ne segue che $\mu < m$, e dunque la [3.2].

Sia L l'elemento separatore delle classi $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}(A)$. Dobbiamo far vedere che L è un maggiorante di A , e cioè che $L \in \mathcal{M}(A)$.

Infatti, se L non fosse un maggiorante, esisterebbe un $a \in A$ maggiore di L . Risulta

$$L < \frac{L+a}{2} < a.$$

Poiché $a \in A$, $(L+a)/2$ non è un maggiorante di A , e dunque appartiene a $\mathcal{M}'$. Ma allora L sarebbe più piccolo di un numero di $\mathcal{M}'$, e dunque non potrebbe essere l'elemento separatore delle due classi $\mathcal{M}'$ ed $\mathcal{M}(A)$, contro l'ipotesi. ■

In maniera analoga si dimostra che se A è un insieme limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo.

Possiamo allora dare la seguente

Definizione 4.1 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. Diremo *estremo superiore* di A il minimo dei maggioranti di A . Analogamente se $A \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, chiameremo *estremo inferiore* di A il massimo dei minoranti di A .

L'estremo superiore e l'estremo inferiore di A si indicano rispettivamente con i simboli

$$\sup A \quad \text{e} \quad \inf A.$$

Si ha evidentemente, per ogni insieme A non vuoto,

$$\inf A \leq \sup A$$

dato che, se $x \in A$, risulta $\inf A \leq x \leq \sup A$.

La proposizione 4.1 si può riformulare dicendo che ogni insieme limitato superiormente ha estremo superiore e ogni insieme limitato inferiormente ha estremo inferiore. Si ha la seguente

Proposizione 4.2 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. Il numero reale $L = \sup A$ è caratterizzato dalle proprietà:

(S₁) Per ogni $a \in A$ si ha $a \leq L$.

(S₂) Per ogni $\lambda < L$ esiste un $a \in A$ tale che $\lambda < a$.

³ Si dice *complementare* di un insieme P di $\mathbb{R}$ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}$ che non appartengono a P :

$$\mathcal{C}P = \{x \in \mathbb{R} : x \notin P\}.$$

Dimostrazione. Infatti la proprietà (S_1) equivale a dire che L è un maggiorante di A , mentre la (S_2) afferma che nessun numero inferiore a L è un maggiorante di A . ■

Osservazione 4.1. E' comodo parlare di estremo superiore e di estremo inferiore di un qualunque sottoinsieme non vuoto A di $\mathbb{R}$. Se A è limitato superiormente si è già visto che $\sup A$ è il minimo dei maggioranti di A ; se A non è limitato superiormente, porremo

$$\sup A = +\infty.$$

Analogamente, se A non è limitato inferiormente, scriveremo

$$\inf A = -\infty. \blacksquare$$

Esempio 4.1

Consideriamo l'intervallo aperto di estremi a e b :

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

L'insieme dei maggioranti di (a, b) è

$$\mathcal{M}((a, b)) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\} = [b, +\infty).$$

Infatti, ogni $M \geq b$ è evidentemente un maggiorante, mentre se $a < \lambda < b$, λ non è un maggiorante, in quanto il numero $(\lambda + b)/2$ appartiene a (a, b) ed è maggiore di λ ; se poi $\lambda \leq a$, allora λ è addirittura un minorante di (a, b) e quindi non è un maggiorante.

Si ha allora

$$\sup(a, b) = b. \blacksquare$$

Esempio 4.2

Consideriamo l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = n - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

L'insieme A è formato dai numeri

$$0, 2 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{3}, \dots, n - \frac{1}{n}, \dots$$

e non è limitato superiormente. Infatti, comunque si fissi un numero M , detto n un intero più grande di $M + 1$ (vedi proposizione 4.3), si ha

$$n - \frac{1}{n} > n - 1 > M,$$

e dunque M non è un maggiorante di A . Ne segue

$$\sup A = +\infty.$$

Per quanto riguarda l'estremo inferiore, basta osservare che tutti gli elementi di A sono non negativi, e che $0 \in A$. Allora 0 è il minimo di A e quindi anche l'estremo inferiore. ■

Vogliamo ora dimostrare alcune proprietà dei numeri reali legate ai concetti di estremo superiore e inferiore, e quindi in ultima analisi derivanti dalla proprietà (D). Cominciamo con il cosiddetto "assioma di Archimede":

Proposizione 4.3 Per ogni coppia a, b di numeri reali positivi, esiste un intero positivo N tale che $Na > b$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due reali positivi a, b tali che

$$na \leq b \quad \text{per ogni intero positivo } n.$$

E' dunque limitato superiormente l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x = na, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

dato che esso ammette b come maggiorante. Sia $L = \sup A$. Si ha per ogni $m \in \mathbb{N}$

$$(m+1)a \leq L,$$

ovvero

$$ma \leq L - a \quad \text{per ogni } m \in \mathbb{N}.$$

Ma allora $L - a$ sarebbe un maggiorante di A , più piccolo di $\sup A$; il che è assurdo. ■

Una conseguenza della proposizione 4.3 è che l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Proposizione 4.4 Dati comunque due numeri reali a e b , con $a < b$, esiste sempre un numero razionale r compreso tra a e b .

Dimostrazione. Possiamo supporre che a e b siano positivi. Sia N un intero maggiore di $1/(b-a)$ (la cui esistenza è garantita dalla proposizione precedente) e consideriamo la successione di numeri razionali $1/N, 2/N, \dots, i/N, \dots$. Di questi solo un numero finito è minore o uguale ad a . Sia k/N il più grande di essi; il numero $r = (k+1)/N$ è compreso tra a e b . Infatti si ha per costruzione $r > a$; se fosse $r \geq b$ risulterebbe

$$\frac{1}{N} = r - \frac{k}{N} \geq b - \frac{k}{N} \geq b - a$$

e dunque

$$N \leq \frac{1}{b-a},$$

mentre si ha la disuguaglianza opposta. ■

La proposizione 4.4 dice che è possibile approssimare con precisione arbitraria un numero reale per mezzo dei numeri razionali; è su questo risultato che si basa, a ben vedere, la possibilità di un'analisi numerica, cioè di effettuare calcoli numerici (che ovviamente riguardano solo numeri razionali).

Vediamo ora come dall'assioma di Dedekind sia possibile dedurre l'esistenza della radice n -esima di un numero reale. Per questo, cominciamo col dimostrare una maggiorazione che sarà utile anche nel seguito.

Lemma 4.1 Siano $x, x_0 \in \mathbb{R}$, con $|x - x_0| < 1$. Si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$|x^n - x_0^n| \leq n(1 + |x_0|)^{n-1} |x - x_0|. \quad [4.1]$$

Dimostrazione. Si parte dalla nota formula

$$\begin{aligned} x^n - x_0^n &= (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1}) = \\ &= (x - x_0) \sum_{i=1}^n x^{n-i} x_0^{i-1}. \end{aligned} \quad [4.2]$$

Usando la disuguaglianza triangolare si ottiene:

$$|x^n - x_0^n| = |x - x_0| \left| \sum_{i=1}^n x^{n-i} x_0^{i-1} \right| \leq |x - x_0| \sum_{i=1}^n |x|^{n-i} |x_0|^{i-1}.$$

D'altra parte, dato che $|x - x_0| < 1$ si ha $|x| < |x_0| + |x - x_0| < |x_0| + 1$. Inoltre, ovviamente $|x_0| < |x_0| + 1$. Pertanto

$$|x^n - x_0^n| \leq |x - x_0| \sum_{i=1}^n (1 + |x_0|)^{n-1} = |x - x_0| n(1 + |x_0|)^{n-1}. \blacksquare$$

Dal lemma 4.1 segue il

Lemma 4.2 Sia $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ un polinomio a coefficienti reali. Se per un certo $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $P(x_0) > 0$, allora esiste un intorno $I(x_0, r)$ di x_0 , tale che, per ogni $x \in I(x_0, r)$, risulta $P(x) > 0$.

Dimostrazione. Valutiamo dapprima $|P(x) - P(x_0)|$. Si ha:

$$|P(x) - P(x_0)| = \left| \sum_{i=1}^k a_i (x^i - x_0^i) \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i| |x^i - x_0^i|.$$

Dalla [4.1] segue immediatamente

$$|P(x) - P(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{i=1}^k i |a_i| (1 + |x_0|)^{i-1} = Q |x - x_0|$$

per ogni $x \in I(x_0, 1)$, dove si è posto

$$Q = \sum_{i=1}^k i |a_i| (1 + |x_0|)^{i-1}$$

(si noti che Q non dipende da x).

Se si sceglie

$$r = \min \left\{ 1, \frac{P(x_0)}{Q} \right\},$$

si ottiene, per ogni $x \in I(x_0, r)$,

$$P(x) = P(x_0) + P(x) - P(x_0) \geq P(x_0) - |P(x) - P(x_0)| > P(x_0) - Qr > 0. \blacksquare$$

In modo del tutto identico si dimostra che se $P(x_0) < 0$, allora esiste un intorno di x_0 in cui $P(x) < 0$.

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 4.1 (zeri di un polinomio) Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali, e siano $s < t$ due numeri reali tali che $P(s) < 0$ e $P(t) > 0$. Allora esiste un $y \in \mathbb{R}$, con $s < y < t$, tale che $P(y) = 0$.

Dimostrazione. Sia E l'insieme degli x compresi tra s e t tali che $P(x) < 0$:

$$E = \{x \in \mathbb{R} : s \leq x \leq t; P(x) < 0\},$$

e sia $y = \sup E$. Faremo vedere che $P(y) = 0$ dimostrando l'impossibilità delle relazioni $P(y) < 0$ e $P(y) > 0$.

Supponiamo dunque per assurdo che $P(y) < 0$. Il punto y non può essere il secondo estremo t , dato che per ipotesi $P(t) > 0$. Per il lemma 4.2 esiste un intorno $I(y, r)$ in cui $P(x) < 0$; di conseguenza esisterebbero dei punti di E maggiori di y , che dunque non potrebbe essere l'estremo superiore di E .

In maniera analoga, ma non identica, si esclude il caso $P(y) > 0$. In questo caso esisterà ancora un intorno $I(y, r)$ di y in cui $P(x) > 0$; e siccome y non può coincidere con il primo estremo s perché $P(s) < 0$, si può supporre (prendendo il raggio r dell'intorno abbastanza piccolo) che anche $y - r$ sia maggiore di s . D'altra parte y è un maggiorante di E , e dunque non ci sono elementi di E maggiori di y . Non ci sono nemmeno elementi di E compresi tra $y - r$ e y , dato che in quell'intervallo si ha $P(x) > 0$. Ma allora anche $y - r$ sarebbe un maggiorante di E , il che è impossibile dato che $y = \sup E$ è il minimo dei maggioranti.

Resta dunque solo la possibilità $P(y) = 0$, e il teorema è dimostrato. $\blacksquare$

Come conseguenza del teorema 4.1 dimostriamo l'esistenza e unicità in $\mathbb{R}$ della radice n -esima di un numero positivo.

Teorema 4.2 Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Esiste uno e un solo numero reale positivo y tale che $y^n = a$.

Dimostrazione. Consideriamo il polinomio $P(x) = x^n - a$, e supponiamo $a > 1$. Si ha $P(0) = -a < 0$ e $P(a) = a^n - a > 0$ (se $a < 1$ si ha $P(1) = 1 - a > 0$ e il ragionamento è

identico). Per il teorema 4.1, esiste un $y \in \mathbb{R}$, compreso tra 0 ed a , tale che $y^n = a$. Resta da far vedere che tale y è unico.

Supponiamo che sia $y_1^n = y_2^n = a$, con y_1 e $y_2 > 0$. Dalla [4.2] segue

$$0 = y_1^n - y_2^n = (y_1 - y_2) \sum_{i=1}^n y_1^{n-i} y_2^{i-1}.$$

Gli addendi della somma a secondo membro sono tutti positivi e quindi dovrà essere $y_1 - y_2 = 0$ e cioè $y_1 = y_2$. ■

Il numero y , la cui esistenza è garantita dal teorema precedente, si chiama *radice n -esima aritmetica* (o semplicemente *radice n -esima*) di a e si indica con $\sqrt[n]{a}$ o con $a^{1/n}$.

Lo stesso teorema 4.1 ci dice come fare per trovare valori approssimati degli zeri di un polinomio, e dunque della radice n -esima di un numero.

Sia $P(x)$ un polinomio, e supponiamo ad esempio che sia $P(0) < 0$ e $P(1) > 0$. Per il teorema 4.1 esisterà un punto ξ , $0 < \xi < 1$, in cui $P(\xi) = 0$. I valori 0 e 1 daranno una prima approssimazione (per difetto e per eccesso) di ξ .

Consideriamo ora i punti 0; 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1. Se si calcola il polinomio P in questi punti, inizialmente P sarà negativo per poi diventare positivo. Supponiamo ad esempio che sia $P(0,3) < 0$ e $P(0,4) > 0$; allora, sempre per il teorema 4.1, P si annullerà tra 0,3 e 0,4, che dunque daranno un secondo valore approssimato per difetto ed un secondo per eccesso. Proseguendo la suddivisione si ottengono via via valori più accurati di ξ .

Da notare che, benché il metodo sia piuttosto semplice e dia buoni risultati specie con l'uso di calcolatori, a esso in genere si preferiscono altri metodi derivati dal calcolo differenziale, che danno approssimazioni più rapide.

Esercizi

4.1 Calcolare sup e inf dei seguenti insiemi:

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$
- (b) $\{3\}$
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots\}$
- (d) $I(1, 3)$
- (e) $\{x \in \mathbb{R} : x|x| > x + 2\}$
- (f) $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-3}{n^2}, n = 1, 2, 3, \dots\} \cup I(1, 1)$.

4.2 Si enunci l'analogia della proposizione 4.2 per l'estremo inferiore.

4.3 Siano E ed F due insiemi di numeri reali tali che per ogni $e \in E$ e $f \in F$ si abbia $e \leq f$. Si dimostri che $\sup E \leq \inf F$.

4.4 Si dimostri che se (A, B) è una sezione in $\mathbb{R}$, allora $\sup A = \inf B$.

*4.5 Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ha sempre (almeno) una radice reale.

4.6 Generalizzare il risultato precedente all'equazione $P(x) = 0$, dove $P(x)$ è un polinomio di grado dispari.

4.7 Sia $a \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

4.8 Dimostrare che ogni insieme $A \subset \mathbb{Z}$ e limitato superiormente ha massimo.

4.9 Dimostrare che ogni insieme finito (e cioè con un numero finito di elementi) ha massimo e minimo.

5 La topologia della retta: insiemi aperti e chiusi

Definizione 5.1 Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste un intorno $I(x, r)$ contenuto in A .

Esempio 5.1

L'insieme $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ è aperto.

Infatti se $x > a$, si ponga $r = x - a$. L'intorno $I(x, r)$ è contenuto in $(a, +\infty)$ dal momento che se $y \in I(x, r)$ si ha $|y - x| < x - a$, e dunque

$$y = x + (y - x) \geq x - |y - x| > x - (x - a) = a. \blacksquare$$

Analogamente, si mostra che l'insieme

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

è aperto.

Esempio 5.2

L'intervallo aperto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ è aperto.

Infatti se $x \in (a, b)$, posto $r = \min\{x - a, b - x\}$, l'intorno $I(x, r)$ è contenuto in (a, b) . ■

Osserviamo inoltre che l'insieme $\mathbb{R}$ è evidentemente aperto, e così anche l'insieme vuoto $\emptyset$.

Riguardo agli insiemi aperti si hanno i seguenti risultati:

Proposizione 5.1 L'unione di una famiglia $\mathcal{F}$ di aperti è un insieme aperto.

Dimostrazione. Se x appartiene all'unione di tutti gli aperti della famiglia $\mathcal{F}$, dovrà appartenere almeno ad un aperto A di $\mathcal{F}$. Ne segue che esiste un intorno di x contenuto in A e quindi a maggior ragione nell'unione di tutti gli aperti di $\mathcal{F}$. ■

L'unione di una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi si indica con $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ o più semplicemente con $\bigcup \mathcal{F}$. Per definizione, un punto x appartiene a $\bigcup \mathcal{F}$ se e solo se esiste almeno un insieme A di $\mathcal{F}$ che contiene x .

Proposizione 5.2 *L'intersezione di due aperti è un aperto.*

Dimostrazione. Sia $x \in A \cap B$. Esisteranno un intorno $I(x, r_1)$ contenuto in A e un intorno $I(x, r_2)$ contenuto in B .

Se $r = \min(r_1, r_2)$, l'intorno $I(x, r) = I(x, r_1) \cap I(x, r_2)$ sarà contenuto in $A \cap B$. ■

Osserviamo che con lo stesso metodo si dimostra che l'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto (eventualmente $= \emptyset$). Il teorema cessa di valere se si considera l'intersezione di un numero infinito di aperti; ad esempio l'intersezione degli intervalli aperti $(-1/n, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, è l'insieme

$$\{0, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$$

che non è aperto.

Definizione 5.2 *Un insieme $D \subset \mathbb{R}$ si dice chiuso se il suo complementare $\mathcal{C}D$ è aperto.*

Tenendo presente che, se $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi,

$$\mathcal{C}\left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}A \quad [5.1]$$

$$\mathcal{C}\left(\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A\right) = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}A, \quad [5.2]$$

e rammentando le proposizioni 5.1 e 5.2, si dimostra facilmente la

Proposizione 5.3 *L'intersezione di un'arbitraria famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso.*

Diamo ora una nuova definizione:

Definizione 5.3 *Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ si dice punto di accumulazione per A se in ogni intorno di x cade almeno un punto di A , diverso da x .*

Notiamo che se x è un punto di accumulazione per A , allora in ogni intorno di x cadono infiniti punti di A . Infatti supponiamo che esista un intorno di x in cui cadano

solo un numero finito di punti di A , e siano $x_1, \dots, x_n$ quelli distinti da x . Se si pone

$$r = \min\{|x_1 - x|, \dots, |x_n - x|\}$$

in $I(x, r)$ non cade nessun punto di A , diverso da x , e quindi x non è un punto di accumulazione per A .

Una connessione tra i punti di accumulazione e gli insiemi chiusi è fornita dal seguente:

Teorema 5.1 *Un insieme D è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione. (a) Sia D un insieme chiuso e sia x un punto di accumulazione per D . Se x appartenesse all'aperto $\mathcal{C}D$, esisterebbe un intorno di x tutto contenuto in $\mathcal{C}D$, e quindi in tale intorno non potrebbe cadere alcun punto di D , contro l'ipotesi. Ne segue che $x \in D$ e quindi D contiene tutti i suoi punti di accumulazione.

(b) Viceversa supponiamo che D contenga i suoi punti di accumulazione, e sia $x \in \mathcal{C}D$. Non essendo x di accumulazione per D , esisterà un intorno di x in cui non cade nessun punto di D . Tale intorno sarà allora tutto contenuto in $\mathcal{C}D$, che perciò risulterà aperto. Ne segue che D è chiuso. ■

L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama *derivato* di A , e si indica con $\mathcal{D}A$.

Definizione 5.4 *Si dice chiusura di un insieme A l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi che contengono A .*

La chiusura di A si indica con $\bar{A}$; esso è il più piccolo insieme chiuso (proposizione 5.3) contenente A .

Si ha il seguente:

Teorema 5.2 *La chiusura di A coincide con l'unione di A e del suo derivato:*

$$\bar{A} = A \cup \mathcal{D}A.$$

Dimostrazione. Sia $\tilde{A} = A \cup \mathcal{D}A$. Basterà far vedere che

(a) $\tilde{A}$ è chiuso,

(b) se D è chiuso e $D \supset A$, allora $D \supset \tilde{A}$.

Infatti dalla (a) segue che $\bar{A} \subset \tilde{A}$ e dalla (b) che $\tilde{A} \subset \bar{A}$, per cui $\bar{A} = \tilde{A}$.

Dimostriamo allora (a) e (b).

(a) Sia $x_0 \in \mathcal{C}\tilde{A}$; poiché x_0 non è un punto di accumulazione per A , esisterà un intorno $I(x_0, r)$ in cui non cadono punti di A . In $I(x_0, r)$ non possono esservi punti di $\mathcal{D}A$. Infatti se $x \in I(x_0, r)$ fosse di accumulazione per A , nell'intorno di x : $I(x, r - |x - x_0|)$, cadrebbero infiniti punti di A . Ma questo intorno è contenuto in $I(x_0, r)$ e quindi quest'ultimo conterrebbe punti di A , in contraddizione con quanto detto

sopra. Concludendo, in $I(x_0, r)$ non cadono punti di $\tilde{A}$, per cui $\tilde{A}$ è aperto, e quindi $\tilde{A}$ è chiuso.

(b) Sia D un insieme chiuso contenente A ; si ha evidentemente $\mathcal{D}A \subset \mathcal{D}D$. D'altra parte dal teorema 5.1 segue che $\mathcal{D}D \subset D$ e quindi

$$\tilde{A} = A \cup \mathcal{D}A \subset D. \blacksquare$$

Ci si può chiedere se un insieme E abbia o meno punti di accumulazione. E' subito visto dalla definizione che E non può avere punti di accumulazione se è costituito da un numero finito di punti.

Il seguente teorema, che verrà usato ripetutamente in seguito, risponde alla questione.

Teorema 5.3 (di Bolzano-Weierstrass) *Ogni insieme $E \subset \mathbb{R}$, limitato e infinito (cioè con infiniti punti) ha almeno un punto di accumulazione.*

Dimostrazione. Dato che E è limitato esisteranno a e b tali che $E \subset [a, b]$.⁴ Se si divide $[a, b]$ in due intervalli uguali $[a, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$, in almeno uno dei due dovranno cadere infiniti punti di E . Chiamiamo tale intervallo $[a_1, b_1]$ e ripetiamo l'operazione precedente. Otterremo così degli intervalli $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ ecc., ognuno contenuto nel precedente e lungo la metà di questo, in ciascuno dei quali cadono infiniti punti di E .

Consideriamo i due insiemi

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\},$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\},$$

formati rispettivamente dai primi e dai secondi estremi degli intervalli in questione.

Si ha per costruzione:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$$

Se ora a_k e b_s sono due elementi qualsiasi di A e B rispettivamente, e se n è un intero maggiore sia di k che di s , avremo

$$a_k \leq a_n \leq b_n \leq b_s.$$

Il numero b_s è allora un maggiorante di A , e dunque

$$\sup A \leq b_s.$$

Quest'ultima relazione è valida per ogni s ; ne segue che $\sup A$ è un minorante di B , e in conclusione:

$$\sup A \leq \inf B.$$

⁴ Si è indicato con $[a, b]$ l'intervallo chiuso

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

D'altra parte, per la definizione di estremo superiore e inferiore si ha $\sup A \geq a_n$ e $\inf B \leq b_n$, cosicchè:

$$0 \leq \inf B - \sup A \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

da cui segue immediatamente che $\inf B = \sup A$.

Il punto $\xi = \sup A = \inf B$ è un punto di accumulazione per E . Per vedere questo, consideriamo un arbitrario intorno $I(\xi, r)$ di ξ , e facciamo vedere che esso contiene infiniti punti di E . Poichè ξ è contenuto in ciascuno degli intervalli $[a_n, b_n]$, se si prende un intero n in modo tale che $2^n > (b-a)/r$, l'intervallo $[a_n, b_n]$ sarà contenuto in $I(\xi, r)$. Ora ognuno degli intervalli $[a_n, b_n]$, e quindi anche $I(\xi, r)$, contiene infiniti punti di E , cosicchè ξ è un punto di accumulazione. ■

Definizione 5.5 Sia $A \subset \mathbb{R}$. Diremo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di frontiera di A se in ogni intorno di x_0 cadono punti di A e punti di $\mathcal{C}A$. L'insieme dei punti di frontiera di A si chiama frontiera di A (o bordo di A) e si indica con ∂A .

Segue facilmente dalla definizione che

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}A} \quad (5.3)$$

e, in particolare, che la frontiera di A è un insieme chiuso. E' anche evidente che A e il suo complementare hanno la stessa frontiera.

Esercizi

5.1 Dire se i seguenti insiemi sono aperti o chiusi (o né aperti né chiusi):

- (a) $\{x \in \mathbb{R} : 1 < |x-2| < 3\}$
- *(b) $\{x \in \mathbb{R} : x = 1/n, n = 1, 2, 3, \dots\}$
- (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 1 = 0\}$
- (d) $\{x \in \mathbb{R} : ax^3 + bx^2 + cx + d > 0\}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. (Si ricordi il lemma 4.2.)
- (e) Gli insiemi dell'esercizio 4.1.
- (f) L'insieme dell'esercizio (h), a cui si aggiunga il punto $x = 0$.

*5.2 Dimostrare che se A è limitato superiormente e $\sup A \notin A$, allora $\sup A$ è un punto di accumulazione di A (e dunque in ogni caso $\sup A \in \overline{A}$).

5.3 Dimostrare che ogni insieme chiuso e limitato superiormente ha massimo (vedi l'esercizio precedente).

5.4 Dare l'esempio di un insieme infinito senza punti di accumulazione.

5.5 Dimostrare che ogni insieme chiuso e limitato ha massimo e minimo.

5.6 Dimostrare che un insieme A è chiuso se e solo se contiene la sua frontiera.

5.7 Dimostrare la formula [5.3].

5.8 Dimostrare che ogni insieme finito è chiuso.

5.9 Sia $A \subset \mathbb{R}$. Un punto x si dice *interno* ad A se esiste un intorno I di x contenuto in A .
Dimostrare che A è aperto se e solo se ogni suo punto è interno.

5.10 Analogamente x si dice *esterno* ad A se esiste un intorno I di x che non interseca A ($I \cap A = \emptyset$).

Provare che A è chiuso se e solo se ogni punto che non appartiene ad A è esterno.

5.11 Dimostrare che se $A \subset \mathbb{R}$, e $\partial A = \emptyset$, allora o $A = \emptyset$, o $A = \mathbb{R}$.

5.12 Si è osservato che sia $\mathbb{R}$ che $\emptyset$ sono aperti; d'altronde, poiché essi sono l'uno complementare dell'altro, risultano anche chiusi.

Dimostrare che $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi.

*6 I numeri interi come sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Lo scopo di questo paragrafo è di mostrare come a partire dai numeri reali sia possibile individuare un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, che indichiamo con $\mathbb{N}$, che può essere identificato con l'insieme dei numeri naturali, e cioè che verifica gli assiomi di $\mathbb{N}$.

L'idea è in un certo senso quella delineata nel paragrafo 3; si parte cioè da 1, e si ottengono via via i numeri naturali con successive somme: $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$, ... e così via.

Il problema ovviamente consiste nell'eliminazione dell'ambiguità insita nell'"e così via", che sembra a prima vista così innocuo; il fatto è che i numeri naturali sono tanto strettamente legati al linguaggio quotidiano che il rischio del circolo vizioso è sempre incombente. Un esempio tipico è la definizione dell'intero n come $1 + 1 + \dots + 1$ (n volte) che fa uso esattamente del numero n che si vuole appunto definire.

Per evitare questo e altri giri viziosi sarà buona norma evitare l'uso di puntini di sospensione "...", di "ecc.", di "e così via", e simili; deve essere chiaro che il metodo ingenuo di sommare successivamente uno è ottimo per definire numeri come 4 o 372 (e se si ha molta pazienza anche 10^{10}), ma è inutile per individuare l'insieme $\mathbb{N}$ nella sua totalità. Allo scopo, sarà invece necessario un procedimento più raffinato, quale ad esempio il seguente.

Definizione 6.1 Un insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ si dice *induttivo* se verifica le seguenti proprietà:

- (1) $1 \in \mathcal{A}$
- (2) $x \in \mathcal{A} \Rightarrow x + 1 \in \mathcal{A}$

Ad esempio $\mathbb{R}$ è induttivo, come pure l'insieme $\mathbb{R}^+$ dei numeri reali positivi. E' anche induttivo l'insieme $\{1, +\infty\}$.

Intuitivamente, l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è un insieme induttivo. Infatti esso contiene il numero 1, e se n è un numero naturale lo è anche $n + 1$. Inoltre $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo; infatti un qualsiasi insieme induttivo, dovendo contenere l'unità, conterrà anche $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, e così via.

Questa idea intuitiva è alla base della definizione rigorosa di numero naturale.

Definizione 6.2 Si dice *insieme dei numeri naturali* l'intersezione di tutti i sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$.

L'insieme dei numeri naturali si indica con $\mathbb{N}$. Esso non è vuoto, in quanto contiene almeno l'unità, che è per definizione comune a tutti gli insiemi induttivi. Inoltre esso contiene il numero 2; infatti, contenendo 1, ogni insieme induttivo dovrà contenere anche $2 = 1 + 1$ per la proprietà 2. Allo stesso modo si dimostra che $\mathbb{N}$ contiene i numeri 3, 4, ..., 52.

Proposizione 6.1 $\mathbb{N}$ è un insieme induttivo.

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che $\mathbb{N}$ contiene 1. Sia ora $x \in \mathbb{N}$. Poiché $\mathbb{N}$ è costituito da tutti e soli gli elementi comuni ad ogni insieme induttivo $\mathcal{A}$, il numero x apparterrà ad ogni tale $\mathcal{A}$. D'altra parte $\mathcal{A}$ è induttivo, dunque anche $x + 1$ dovrà appartenere ad $\mathcal{A}$. Ne segue che $x + 1$ appartiene ad ogni insieme induttivo, e quindi anche a $\mathbb{N}$. $\mathbb{N}$ dunque verifica le due proprietà della definizione 6.1, ed è pertanto un insieme induttivo. ■

L'insieme $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo; infatti per la stessa definizione esso è contenuto in ogni altro insieme induttivo $\mathcal{A}$.

I numeri naturali possono essere anche definiti assiomaticamente (e cioè senza far riferimento a sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) come un insieme $\mathbb{N}$ nel quale sia definita un'applicazione $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con le seguenti proprietà:

- (1) $1 \in \mathbb{N}$,
- (2) $a \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma(a) \in \mathbb{N}$,
- (3) $a \in \mathbb{N}, a = \sigma(b) \Rightarrow a \neq 1$,
- (4) $a, b \in \mathbb{N}, \sigma(a) = \sigma(b) \Rightarrow a = b$ (in altre parole σ è iniettiva),
- (5) Se $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ è tale che $1 \in \mathcal{A}$ e $a \in \mathcal{A} \Rightarrow \sigma(a) \in \mathcal{A}$, allora $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

Gli assiomi (1)-(5) sono stati introdotti dal matematico italiano Giuseppe Peano, che ha dimostrato come da essi si possa derivare tutta l'aritmetica. Intuitivamente, l'applicazione σ è quella che associa ad ogni numero naturale il suo "successivo". Con

In realtà la proprietà (2) significa soltanto che σ è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, e quindi è superflua.

questa convenzione, gli assiomi si possono tradurre in linguaggio corrente:

- (1') 1 è un numero (naturale),
- (2') Il successivo di un numero è un numero,
- (3') 1 non è il successivo di nessun numero,
- (4') Se i successivi di due numeri sono uguali, anche i due numeri sono uguali,
- (5') Se un insieme $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ contiene l'unità, e il successivo di ogni suo elemento, allora $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

Osservazione 6.1 In molti testi i numeri naturali sono definiti includendovi anche lo zero. La differenza è puramente formale, e non è difficile apportare gli opportuni cambiamenti per passare dalle nostre definizioni alle altre: basterà infatti scrivere 0 al posto di 1 nei luoghi opportuni, ad esempio nella relazione (1) della definizione 6.1 (naturalmente non nella (2)!). La scelta tra l'una o l'altra alternativa è puramente una questione di opportunità; noi abbiamo preferito di cominciare a contare da 1 non tanto perché si tratta di una scelta naturale, quanto perché risulterà più comodo nel seguito; ad esempio nella definizione di successione e nei relativi esempi. ■

* Vogliamo ora far vedere che l'insieme $\mathbb{N}$ introdotto nella definizione 6.2 verifica gli assiomi (1)-(5). Per questo, occorre in primo luogo definire l'applicazione σ . Come è naturale, definiremo $\sigma(a) = a + 1$. Il primo assioma è evidente; del secondo abbiamo già osservato che è pleonastico. Per dimostrare (3) dobbiamo far vedere che non c'è nessun numero naturale a tale che $a + 1 = 1$, ovvero che 0 non appartenga a $\mathbb{N}$. Questo è ovvio, appena si osservi che, essendo $\mathbb{R}^+$ un insieme induttivo, tutti i numeri naturali devono essere positivi.

Il quarto assioma è anche evidente, mentre il quinto non dice altro che $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo.

Quest'ultimo assioma, che prende il nome di *principio di induzione*, è di notevole importanza nelle dimostrazioni, e verrà usato molto spesso nel seguito.

Una forma equivalente del principio di induzione è la seguente:

(5'') Se $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ è tale che:

- (a) $1 \in \mathcal{A}$
- (b) $b \in \mathcal{A} \Rightarrow \forall h \leq b \Rightarrow \sigma(h) \in \mathcal{A}$,

allora $\mathcal{A} = \mathbb{N}$.

In parole, se un insieme $\mathcal{A}$ contiene il numero 1, ed è tale da contenere il successivo di un numero quando contiene il numero stesso e tutti quelli che lo precedono, allora deve essere $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. La parte in corsivo dà la differenza tra (5'') e il principio di induzione (5). E' chiaro che se (5'') è verificato, lo sarà anche il principio di induzione (5), dato che le ipotesi di (5) implicano quelle di (5'').

* Qui e nel seguito useremo i simboli $\exists$ (esiste) e $\forall$ (per ogni).

Vale però anche il viceversa. Infatti, supponiamo che sia verificato il principio d'induzione, e sia $\mathcal{B} \subset \mathbb{N}$ un insieme che verifica le ipotesi di (5''). Vogliamo far vedere che $\mathcal{B} = \mathbb{N}$.

Consideriamo per questo l'insieme $\mathcal{A}$ così definito:

$$a \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall b \leq a \text{ si ha } b \in \mathcal{B};$$

a parole, un numero a appartiene ad $\mathcal{A}$ se e solo se esso appartiene a $\mathcal{B}$ assieme a tutti i numeri che lo precedono.

Risulta evidentemente $1 \in \mathcal{A}$. Se ora $n \in \mathcal{A}$, per ogni $b \leq n$ si avrà $b \in \mathcal{B}$. Ne segue che $\sigma(n) \in \mathcal{B}$, e dunque $\sigma(n) \in \mathcal{A}$. Per il principio d'induzione, $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, e dunque anche $\mathcal{B} = \mathbb{N}$.

Una seconda forma del principio di induzione, che è anche utile nelle applicazioni, è data dalla seguente

Proposizione 6.2 Ogni insieme non vuoto $\mathcal{H} \subset \mathbb{N}$ ha minimo.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{H}$ un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, e supponiamo per assurdo che $\mathcal{H}$ non abbia minimo. Sia $\mathcal{A} = \mathbb{N} - \mathcal{H}$. Si ha $1 \in \mathcal{A}$, dato che altrimenti 1 apparterebbe ad $\mathcal{H}$, ed $\mathcal{H}$ avrebbe minimo. Supponiamo ora che per ogni $x \leq a$ risulti $x \in \mathcal{A}$. I numeri di $\mathcal{H}$ sono dunque tutti maggiori di a , e dunque se $\sigma(a)$ appartenesse ad $\mathcal{H}$, esso sarebbe il minimo di $\mathcal{H}$, contro l'ipotesi. Ne segue che $\sigma(a) \in \mathcal{A}$. Ma allora per (5'') si dovrebbe concludere che $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, il che è palesemente assurdo. ■

Viceversa, se si assume come assioma la proposizione 6.2, si può dimostrare il principio di induzione (5). Infatti, sia $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ un insieme che contiene l'unità e il successivo di ogni suo elemento, e sia $\mathcal{H}$ l'insieme dei numeri naturali che non appartengono ad $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{H}$ non fosse vuoto, avrebbe per ipotesi un minimo h . Non può essere $h = 1$, perché $1 \in \mathcal{A}$. D'altra parte, se $h \neq 1$, il numero $h - 1$ apparterebbe ad $\mathcal{A}$, e dunque dovrebbe appartenere ad $\mathcal{A}$ anche $h = \sigma(h - 1)$. Ciò contraddice il fatto che h è il minimo di $\mathcal{H}$. Abbiamo dunque dimostrato che $\mathcal{H}$ è vuoto, e dunque che $\mathcal{A} = \mathbb{N}$. ■

Il principio di induzione è spesso applicato nelle dimostrazioni in una forma leggermente diversa.

Teorema 6.1 Sia $\{P_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) una famiglia di proposizioni, dipendenti dall'indice n . Se

- (a) P_1 è vera
 - (b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, P_n implica P_{n+1} ,
- allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Basterà applicare (5) all'insieme $\mathcal{A}$ costituito dai numeri naturali k per i quali P_k è vera. ■

Esempio 6.1

Dato un numero reale $h \geq -1$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+h)^n \geq 1+nh$$

[6.1]

Consideriamo infatti la famiglia di proposizioni

$$P_n: (1+h)^n \geq 1+nh.$$

È evidente che P_1 è vera. Mostriamo adesso che P_n implica P_{n+1} . Si ha

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n,$$

da cui, usando P_n e il fatto che $h \geq -1$, si ottiene

$$(1+h)^{n+1} \geq (1+h)(1+nh) = 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$$

ossia la P_{n+1} . Per il principio di induzione la proposizione P_n è vera per ogni n , e dunque la [6.1] è dimostrata. ■

Osservazione 6.2. L'ipotesi (a) del teorema 6.1 si può sostituire con

(a') Esiste un intero k per cui P_k è vera.

In questo caso si potrà concludere che P_n è vera per ogni $n \geq k$. Allo scopo, sarà sufficiente applicare il teorema precedente alla famiglia di proposizioni

$$Q_n = P_{n+k-1}. \blacksquare$$

Tenendo poi conto della (5''), si può sostituire l'ipotesi (b) con la

(b') Se P_k è vera per ogni $k \leq n$, allora si ha P_{n+1} .

Osservazione 6.3. Una famiglia di proposizioni $\{P_n\}$ si dice *induttiva* se soddisfa la (b) del teorema 6.1. Per una famiglia induttiva si possono verificare due alternative:

- (1) P_n è sempre falsa (questo è ad esempio il caso della famiglia $P_n: n > n+1$),
- (2) per qualche intero k la proposizione P_k è vera, e allora P_n è vera per ogni $n \geq k$. ■

Esempio 6.2

La famiglia di proposizioni¹

$$P_n: 2^n n! < n^n$$

è induttiva. Si ha infatti

$$2^{n+1}(n+1)! = 2(n+1) \cdot 2^n n!$$

¹ Indichiamo con $n!$ il prodotto dei primi n interi: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Il numero $n!$ si chiama *fattoriale di n* , o anche *n fattoriale*. Per convenzione si pone inoltre $0! = 1$.

e, assumendo P_n per vera,

$$2^{n+1}(n+1)! < 2(n+1)n^n.$$

D'altra parte, per ogni intero k risulta

$$(n+1)^k = n^k + kn^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}n^{k-2} + \dots \geq n^k + kn^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}n^{k-2},$$

in particolare, scegliendo $k = n+1$, si ottiene

$$(n+1)^{n+1} \geq n^n \left(n + (n+1) + \frac{n+1}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}n + \frac{3}{2} \right) n^n \geq (2n+2)n^n,$$

e, in definitiva,

$$2^{n+1}(n+1)! < 2(n+1)n^n \leq (n+1)^{n+1},$$

per cui è palese che P_n implica P_{n+1} .

Si vede facilmente che P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 sono false, mentre P_6 è vera. Si ha allora

$$n^n > n! 2^n \quad \text{per ogni } n \geq 6. \blacksquare \quad [6.2]$$

Esempio 6.3

Sia $S_1(n)$ la somma dei primi n numeri interi:

$$S_1(n) = 1 + 2 + \dots + n.$$

Vogliamo far vedere che

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad [6.3]$$

Si tratta pertanto di dimostrare che la proposizione

$$P_n: 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

è vera per ogni $n \geq 1$.

È evidente che P_1 è vera; sarà dunque sufficiente mostrare che P_n implica P_{n+1} , ossia che, supponendo vera P_n , si può dedurre P_{n+1} . Si ha

$$S_1(n+1) = S_1(n) + n+1$$

e, dalla P_n ,

$$S_1(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Quest'ultima relazione non è altro che la P_{n+1} , e dunque la [6.3] è dimostrata. ■

Una volta identificato in $\mathbf{R}$ il sottoinsieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, è immediato riconoscere gli interi relativi $\mathbf{Z}$ e i razionali $\mathbf{Q}$.

Per i primi, si osservi che per l'assioma (B_4) ogni numero reale (e dunque, in particolare, ogni numero naturale) possiede un opposto. L'insieme costituito dai numeri naturali, dai loro opposti e dallo zero si indica con $\mathbf{Z}$. A differenza di quanto accadeva per $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ verifica gli assiomi (B) della somma; in particolare, la sottrazione è sempre possibile in $\mathbf{Z}$.⁸

Per quanto riguarda i numeri razionali, si osservi che per l'assioma (C_4) ogni numero intero non nullo possiede un inverso. Un numero reale a si dirà allora *razionale* se esistono due interi p e q tali che $a = p/q$, ovvero, in altre parole, se per qualche intero q il numero qa risulta intero.

E' evidente che se a è razionale, la sua espressione come rapporto di interi (e cioè come *frazione*) non è unica; ad esempio se $a = p/q$ risulta anche $a = 2p/2q = 3p/3q = \dots$

E' immediato verificare che due frazioni p/q e r/s rappresentano lo stesso numero razionale se e solo se si ha $ps = rq$.

Si può vedere facilmente che $\mathbf{Q}$ verifica tutti gli assiomi del paragrafo 1, eccetto quello di continuità.

*7 Un modello dei numeri reali

Il punto di vista adottato nei paragrafi precedenti consiste nella definizione del sistema dei numeri reali mediante gli assiomi del paragrafo 1 e l'assioma (D) e nello studio di alcune delle loro proprietà, in particolare quelle connesse con la continuità di $\mathbf{R}$. Inoltre abbiamo, per così dire, estratto da $\mathbf{R}$ alcuni suoi sottoinsiemi di particolare importanza, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, e li abbiamo studiati in quanto sottoinsiemi di $\mathbf{R}$, deducendo cioè le loro proprietà da quelle dei numeri reali in cui sono contenuti. In altre parole la nostra posizione consiste nel considerare come primitivo il concetto di numero reale, lasciando quindi in un certo senso all'intuizione il compito di abbracciare il continuo dei numeri reali, e nell'individuare in tale continuo altre classi di numeri (gli interi, i razionali) ad esso appartenenti. Questo punto di vista, che senza dubbio richiede inizialmente un certo sforzo di intuizione, è però senz'altro il più aderente alle esigenze dell'analisi, che è rivolta al continuo e non al discreto, alla misura più che all'enumerazione.

Lo scopo di questo paragrafo è di presentare la posizione opposta, mostrare cioè come sia possibile, a partire dalle proprietà dei numeri naturali $\mathbf{N}$, costruire prima gli interi e i razionali, e poi da questi un modello dei numeri reali, ossia un insieme $\mathbf{R}$ dotato delle tre strutture del paragrafo 1 e verificante gli assiomi che caratterizzano i numeri reali. In questo procedimento il dato fondamentale sono dunque i numeri na-

⁸ A rigore, sarebbe necessario dimostrare che se p e q sono interi, la loro somma $p + q$ (che in linea di principio è un numero reale) è un intero. A ben vedere basta dimostrarlo per $p, q \in \mathbf{N}$, cosa che si può fare per induzione e viene lasciata per esercizio.

turali; non ci dilungheremo qui né sulla ulteriore possibilità di costruire un modello di $\mathbf{N}$ sulla base della teoria degli insiemi (costruzione che peraltro è molto sottile e mal si presta a semplificazioni che spesso nascondono le principali difficoltà) né terremo una descrizione assiomatica del sistema dei numeri naturali, a causa delle lungaggini che occorrono per passare da un sistema di assiomi relativamente semplice (ad esempio il sistema di Peano) alle comuni operazioni e manipolazioni sui numeri interi: passaggio che, per le numerose sottigliezze, esulerebbe certamente dai limiti di un corso di analisi.

Supponiamo dunque che il lettore abbia per suo conto un'idea del sistema dei numeri naturali $\mathbf{N}$, o meglio ancora dei numeri interi $\mathbf{Z}$,⁹ con le sue due operazioni: la somma, sempre invertibile in $\mathbf{Z}$ (l'opposto di un numero intero n è l'intero $-n$) e il prodotto, che non è invece invertibile (non esiste in $\mathbf{Z}$ il numero n^{-1} , tranne nel caso $n = \pm 1$).

La necessità di invertire il prodotto suggerisce un allargamento del nostro sistema numerico, che porta all'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali.

Allo scopo, cominceremo a costruire le frazioni, che non sono altro che coppie (p, q) di numeri interi, con $q > 0$, di cui il primo è detto numeratore e il secondo denominatore. La frazione (p, q) si scrive anche nella forma p/q .

Si sarebbe portati a identificare i numeri razionali con l'insieme delle frazioni; si vede però subito che sorgono delle difficoltà dovute al fatto che ci sono, per così dire, più frazioni che numeri razionali.

Ad esempio, se si definisce il prodotto nel modo naturale:

$$(p, q) \times (m, n) = (pm, qn),$$

l'unità come la frazione $(1, 1)$ e l'inverso di (p, q) come (q, p) , risulta $(p, q) \times (q, p) = (pq, pq)$, e dunque tutte le frazioni (m, m) devono essere uguali all'unità $(1, 1)$.

Per evitare questa sovrabbondanza si converrà che le frazioni (p, q) e (pm, qm) rappresentino lo stesso numero razionale; più precisamente, si considereranno equivalenti due frazioni (p, q) e (m, n) quando $pn = qm$. In questo caso si scriverà:

$$(p, q) \sim (m, n).$$

La relazione $\sim$ è una relazione di *equivalenza*; essa è infatti, come si verifica facilmente,

- (a) riflessiva: $(p, q) \sim (p, q)$;
- (b) simmetrica: $(p, q) \sim (m, n)$ se e solo se $(m, n) \sim (p, q)$;
- (c) transitiva: se $(p, q) \sim (m, n)$ e $(m, n) \sim (r, s)$, allora $(p, q) \sim (r, s)$.

⁹ Il passaggio da $\mathbf{N}$ a $\mathbf{Z}$ è peraltro molto agevole; ad esempio si può definire un *intero relativo* z come una coppia (ϵ, n) , dove ϵ è uno dei simboli $+$ o $-$ e n è un numero naturale, che si chiama *valore assoluto* di z . Sui numeri relativi si opera poi con le tradizionali regole dell'aritmetica elementare, compresa la regola dei segni. Qualche piccola difficoltà si ha con lo zero; ma si supera identificando $(+, 0)$ con $(-, 0)$. Da notare che la definizione del valore assoluto del paragrafo 2 coincide con quella data sopra; di qui l'affermazione (priva di senso nella nostra trattazione assiomatica dei numeri reali) che "il valore assoluto di un numero è il numero privato del segno".

In tal modo, le frazioni si possono raggruppare in classi di frazioni tra loro equivalenti, ogni classe essendo costituita da tutte e sole le frazioni equivalenti a una di esse.

Ognuna di queste classi definisce un numero razionale. L'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali (e cioè l'insieme delle classi di equivalenza delle frazioni) è il quoziente dell'insieme $\mathcal{F}$ delle frazioni rispetto alla relazione di equivalenza $\sim$ definita sopra. Una classe di equivalenza, ossia un numero razionale, sarà individuata univocamente da una delle frazioni della classe; se si indica con $\{(p, q)\}$ la classe di tutte le frazioni equivalenti a (p, q) , $\{(p, q)\}$ è un numero razionale e (p, q) si dice *rappresentante* di $\{(p, q)\}$. È evidente che anche $(2p, 2q)$ è un rappresentante dello stesso numero razionale.

A volte, per semplicità, scriveremo (p, q) o p/q invece di $\{(p, q)\}$; ad esempio diremo "il numero razionale $2/3$ " invece che $\{2/3\}$, con l'avvertenza ovviamente di considerare uguali frazioni che individuino lo stesso numero razionale. Si scriverà dunque, ad esempio:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

intendendo in realtà

$$\left\{ \frac{2}{3} \right\} = \left\{ \frac{4}{6} \right\}$$

Nell'insieme dei numeri razionali si possono definire:

(A) un ordinamento $\leq$:

$$\left\{ \frac{p}{q} \right\} \leq \left\{ \frac{m}{n} \right\} \quad \text{se} \quad pn \leq mq;$$

(B) una somma:

$$\left\{ \frac{p}{q} \right\} + \left\{ \frac{m}{n} \right\} = \left\{ \frac{pn + mq}{qn} \right\}$$

che ha come zero l'elemento $\{0/1\}$ e come opposto di $\{a/b\}$ l'elemento $\{-a/b\}$;

(C) un prodotto:

$$\left\{ \frac{p}{q} \right\} \times \left\{ \frac{m}{n} \right\} = \left\{ \frac{pm}{qn} \right\}$$

in cui $\{1/1\}$ è l'elemento unità e l'inverso di $\{a/b\}$ è $\{b/a\}$ se $a > 0$ e $\{-b/-a\}$ se $a < 0$.

È immediato verificare che le relazioni (A), (B) e (C) sono ben definite; ad esempio, se $\frac{p'}{q'} \sim \frac{p}{q}$ e $\frac{m'}{n'} \sim \frac{m}{n}$, allora $\frac{p'm'}{q'n'} \sim \frac{pm}{qn}$, cosicché il prodotto non dipende dalle frazioni scelte per rappresentare i numeri razionali in questione.¹⁰

¹⁰ Questa richiesta di compatibilità con la relazione di equivalenza è essenziale se si vuole che un'operazione definita su un insieme dia origine a un'analoga operazione sul quoziente. Ad esem-

Egualemente semplice è la verifica delle proprietà del paragrafo 1, che viene lasciata per esercizio.

Finalmente $\mathbf{Q}$ possiede la *proprietà di Archimede*: dati due numeri razionali positivi p/q e m/n esiste un intero N (in $\mathbf{Q}$ gli interi sono i numeri $\{N/1\}$) tale che

$$N \frac{p}{q} \geq \frac{m}{n}.$$

Basterà infatti prendere $N = mq$.

A partire dai numeri razionali si può costruire un modello dei numeri reali. Gli elementi base di questo modello sono le sezioni di $\mathbf{Q}$; come nel caso della definizione di sezione in $\mathbf{R}$, le sezioni in $\mathbf{Q}$ sono coppie (A, B) di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbf{Q}$, tali che

$$A \cup B = \mathbf{Q}, \quad A \cap B = \emptyset \quad (7.1)$$

$$\forall a \in A \quad \text{e} \quad \forall b \in B \quad \text{risulta} \quad a < b. \quad (7.2)$$

Un esempio di sezione in $\mathbf{Q}$ si costruisce facilmente: dato un numero razionale r , si pongono in A tutti i numeri razionali minori di r , e in B tutti quelli maggiori di r . Per quanto riguarda il numero r , esso può stare indifferentemente sia in A che in B ; per evitare ambiguità, converremo che $r \in B$, in altre parole imporremo sempre che in una sezione (A, B) l'insieme A sia privo di massimo. In tal modo ad ogni numero razionale r corrisponderà una sola sezione costruita come sopra e di cui r è l'elemento separatore.

Viceversa non tutte le sezioni provengono dai numeri razionali, come si è visto nel paragrafo 3; ad esempio se B è costituita da tutti i razionali positivi che hanno quadrato maggiore di 2, e se in A si pongono i rimanenti numeri razionali, (A, B) è una sezione di $\mathbf{Q}$ che non è generata da alcun numero razionale.

Definiremo *numero reale* una sezione (A, B) dei razionali: l'insieme $\mathbf{R}$ sarà dunque l'insieme di tutte le sezioni (A, B) di $\mathbf{Q}$, nelle quali A sia privo di massimo. Bisognerà ora definire in $\mathbf{R}$ un ordinamento, una somma e un prodotto, e verificare che sono soddisfatti gli assiomi del paragrafo 1 e quello di Dedekind. Per quanto riguarda l'ordinamento la definizione è molto semplice; diremo che $\alpha = (A, B)$ è minore o uguale di $\beta = (C, D)$ se $A \subset C$ o, che è lo stesso, se $B \supset D$. Le proprietà (A_1) – (A_4) sono di facile verifica.

Occorrerà ora definire la somma $\alpha + \beta$. Se si pone, dati due insiemi H e K di $\mathbf{Q}$,

$$H + K = \{r \in \mathbf{Q} : r = h + k; h \in H, k \in K\}$$

pio, l'operazione $+$ definita come segue:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{p+n}{q+n}$$

non è compatibile con la relazione di equivalenza definita sopra (si ha infatti $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ mentre, sostituendo a $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ le frazioni equivalenti $\frac{2}{4}$ e $\frac{6}{9}$, si ottiene $\frac{8}{13}$, che non è equivalente a $\frac{3}{5}$) e dunque non definisce un'operazione sui numeri razionali.

($H+K$ è l'insieme di tutte le possibili somme di un elemento di H con uno di K), si può definire

$$\alpha + \beta = (A + C, B + D). \quad [7.3]$$

Lo zero sarà la sezione definita dal numero razionale 0, e l'opposto di un numero reale $\alpha = (A, B)$ sarà il numero

$$-\alpha = (-B, -A), \quad [7.4]$$

dove

$$-H = \{r \in Q; r = -h, h \in H\}$$

è l'insieme degli opposti degli elementi di H .¹¹

La definizione del prodotto di due numeri reali è più complicata a causa delle regole dei segni; cionondimeno essa è naturale: ad esempio se $\alpha = (A, B)$ e $\beta = (C, D)$ sono positivi (il che significa che tutti i numeri in B e in D sono positivi), il loro prodotto è dato dalla sezione che ha, come secondo insieme, quello costituito da tutti i possibili prodotti di un elemento di B con uno di D , e, come primo insieme, il complementare di questo (e non l'insieme dei possibili prodotti di un elemento di A con uno di C , che contiene numeri positivi e grandissimi: $(-p) \cdot (-q) = pq$).

Infine, l'insieme R verifica l'assioma (D). Sia infatti (X, Y) una sezione di R (gli elementi di X e Y sono a loro volta sezioni di Q). Si ponga

$$A_0 = \bigcup_{(A, B) \in X} A,$$

$$B_0 = \bigcap_{(A, B) \in X} B;$$

(A_0, B_0) è una sezione di Q , e dunque un numero reale, che è l'elemento separatore di (X, Y) .

Cominciamo col dimostrare che (A_0, B_0) è una sezione di Q .

(1) $A_0 \cup B_0 = Q$. Infatti se $r \notin B_0$, esisterà una sezione $(A, B) \in X$, con $r \notin B$. Ne segue che $r \in A$ e dunque $r \in A_0$.

(2) $A_0 \cap B_0 = \emptyset$. Se $r \in A_0$, r dovrà appartenere ad almeno uno degli insiemi A e dunque non potrà appartenere al corrispondente B e a maggior ragione, a B_0 .

(3) Siano $p \in A_0$ e $q \in B_0$; p dovrà appartenere ad almeno uno degli insiemi A di cui è composto A_0 , mentre q dovrà appartenere a tutti gli insiemi B la cui intersezione dà B_0 . Ne segue che esiste una sezione $(A, B) \in X$, con $p \in A$ e $q \in B$, cosicché $p < q$.

¹¹ Ci sono qui alcune piccole difficoltà sulle quali sorvoliamo. Ad esempio, una è dovuta al fatto che se B ha minimo (il che si verifica quando α è razionale) l'insieme $-B$ ha massimo e quindi $(-B, -A)$ non definisce un numero reale. Basterà comunque in questo caso trasportare il massimo di $-B$ nell'insieme $-A$ perché tutto si aggiusti. Un altro tipo di difficoltà (che si presenta anche nel prodotto) si ha quando α e β sono irrazionali mentre $\alpha + \beta$ è razionale. In questo caso, il secondo membro della [7.3] non è una sezione, in quanto manca appunto l'elemento $\alpha + \beta$. Queste difficoltà richiedono dei piccoli aggiustamenti tecnici, che non toccano l'idea di base.

Abbiamo fatto vedere che (A_0, B_0) è una sezione di Q ; essa definisce dunque un numero reale λ . Resta da dimostrare che λ è l'elemento separatore di (X, Y) . È evidente che $\lambda \geq \alpha$ per ogni $\alpha \in X$. Infatti, se $\alpha = (A, B)$ risulterà senz'altro $A \subset A_0$ e dunque $\alpha \leq \lambda$. Sia ora $\beta = (C, D)$, un elemento di Y . Poiché ogni elemento di X è minore di β , risulterà $A \subset C$ per ogni sezione (A, B) di X , e dunque anche $A_0 \subset C$. Ne segue che $\lambda \leq \beta$ e dunque λ separa X e Y .

Esercizi

7.1 Si perfezioni il modello descritto in modo da superare gli inconvenienti menzionati nella nota 6 (p. 29).

7.2 Si dimostri l'unicità dell'elemento separatore λ .

8 Generalità sui numeri complessi

A. Introduzione

Si osserva di solito che i numeri complessi vengono introdotti perché tutte le equazioni algebriche ammettano soluzioni (a questo proposito il teorema fondamentale dell'algebra asserisce che un'equazione algebrica di grado n ammette esattamente n radici, se queste si contano con la loro molteplicità). Può essere tuttavia interessante ricordare che l'esigenza di calcolare radici quadrate di numeri negativi si manifesta per la prima volta nel sedicesimo secolo, come gradino intermedio di un problema che ha soluzioni reali: quello delle radici dell'equazione di terzo grado. Consideriamo l'equazione

$$x^3 - 3px - 2q = 0, \quad [8.1]$$

che ha sempre almeno una radice reale (vedi esercizio 4.5). Se si pone

$$x = u + v$$

$$p = uv,$$

la [8.1] diventa

$$u^3 + v^3 - 2q = 0, \quad [8.2]$$

e dunque, poiché $v = p/u$,

$$u^6 - 2qu^3 + p^3 = 0.$$

Quest'ultima equazione ha come soluzione

$$u^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3},$$

e dalla [8.2], si ottiene

$$v^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3},$$

cosicch  in definitiva la [8.1] ha soluzione

$$x = u + v = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Questo modo di procedere   senz'altro legittimo se $q^2 - p^3 \geq 0$, ma quando, al contrario, si ha $q^2 - p^3 < 0$, la formula risolutiva perde di senso, contenendo la radice quadrata di un numero negativo.

Se per , come vedremo, si introduce un'unit  immaginaria (cio  un "numero" i tale che $i^2 = -1$) si ha, nel caso $q^2 - p^3 < 0$,

$$u^3 = q + i\sqrt{p^3 - q^2}, \quad v^3 = q - i\sqrt{p^3 - q^2};$$

estraendo le radici cubiche e sommando $u + v$, le parti immaginarie, ossia i termini che contengono l'unit  immaginaria i , si elidono, lasciandoci in definitiva con una radice reale. In tal modo, con l'introduzione dei numeri complessi del tipo

$$a + ib \quad (a \text{ e } b \text{ reali})$$

e di opportune regole di calcolo che vedremo subito, si pu  ottenere una soluzione (reale) dell'equazione [8.1].

I numeri complessi sono dunque costituiti dall'insieme $\mathbb{C}$ delle combinazioni formali $a + ib$, dove i   l'unit  immaginaria ($i^2 = -1$) e a, b sono numeri reali detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* del numero complesso $z = a + ib$; essi sono anche indicati con $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ (si osservi che la parte immaginaria   un numero reale!).

In $\mathbb{C}$ sono definite una *somma* e un *prodotto*, che derivano formalmente da quelle di $\mathbb{R}$, ove si tenga conto che $i^2 = -1$. Si ha cio 

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

  facile vedere che sono verificate le propriet  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4), (C_1), (C_2), (C_3), (C_4), (BC)$, dove $0 + i0$ e $1 + i0$ sono lo zero e l'unit ; l'opposto di $a + ib$   $-a - ib$ e l'inverso  

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

che esiste se $a^2 + b^2 \neq 0$, cio  se $a + ib \neq 0$.

Non si pu  invece estendere ai numeri complessi la relazione di ordine dei numeri reali, conservando le propriet  corrispondenti.

Si pu  osservare che un numero complesso   assegnato quando   assegnata la sua

parte reale e la sua parte immaginaria. In tal modo, i numeri complessi non sono altro che le coppie (a, b) di numeri reali con le seguenti operazioni:

$$(B) \text{ Somma: } (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

dove lo zero   l'elemento $(0, 0)$ e l'opposto di (a, b)   $(-a, -b)$;

$$(C) \text{ Prodotto: } (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

dove l'unit    $(1, 0)$ e l'inverso di (a, b)   $(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$. L'unit  immaginaria   rappresentata da $(0, 1)$ e si ha $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

Come coppie di numeri reali, i numeri complessi ammettono una rappresentazione naturale nel piano (vedi fig. 1.1), che si effettua facendo corrispondere ad ogni numero complesso $z = a + ib$ il punto P di coordinate (a, b) .

  facile vedere che il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ dei numeri della forma $(a, 0)$   isomorfo a $\mathbb{R}$, che dunque pu  essere rappresentato nel piano complesso dall'asse delle x .

Si dice *coniugato* di $\alpha = a + ib$ il numero complesso $\bar{\alpha} = a - ib$.

Si verificano facilmente le seguenti propriet :

$$\bar{\bar{\alpha}} = \alpha, \quad [8.3]$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2}, \quad \operatorname{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2i}, \quad [8.4]$$

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad [8.5]$$

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \quad [8.6]$$

$$1/\bar{\alpha} = \overline{1/\alpha}. \quad [8.7]$$

Se $\alpha = a + ib$ si ha

$$\alpha\bar{\alpha} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \geq 0,$$

per cui ha senso la seguente

Definizione 8.1 Si dice *modulo* di $\alpha = a + ib$ il numero reale

$$|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad [8.8]$$

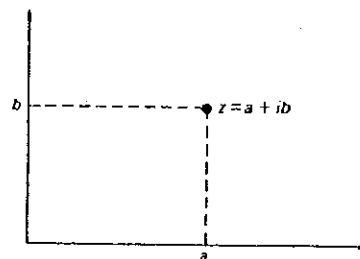


Figura 1.1

Si noti che se $\alpha \in \mathbb{R}$, cioè se $b=0$, il modulo di α coincide con il suo valore assoluto (vedi esercizio 4.7). Si ha inoltre

$$|\alpha| \geq 0, \quad |\alpha| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \alpha = 0, \quad [8.9]$$

$$|\operatorname{Re}(\alpha)| \leq |\alpha|, \quad |\operatorname{Im}(\alpha)| \leq |\alpha|, \quad |\alpha| \leq |\operatorname{Re}(\alpha)| + |\operatorname{Im}(\alpha)|, \quad [8.10]$$

$$|\alpha\beta| = |\alpha| |\beta|, \quad [8.11]$$

$$|\bar{\alpha}| = |\alpha|. \quad [8.12]$$

Sussiste infine la disuguaglianza triangolare:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|. \quad [8.13]$$

Infatti si ha

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) \leq \\ &\leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2. \end{aligned}$$

Dalla [8.9] e dalla [8.13] segue che

$$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|. \quad [8.14]$$

è una distanza in $\mathbb{C}$, cioè verifica le relazioni (d_1) , (d_2) , (d_3) del paragrafo 2.

Si vede facilmente che si possono estendere a $\mathbb{C}$ quei risultati, dimostrati precedentemente per $\mathbb{R}$, che non coinvolgono l'ordinamento; in particolare si trasportano, senza cambiamento, la definizione di intorno (sferico) di un punto e quelle di insiemi aperti e chiusi, con le relative proprietà.

B. Potenze e radici di un numero complesso

Abbiamo già osservato che $\mathbb{C}$ è l'insieme delle coppie ordinate (x, y) di numeri reali; se si fissa sul piano un riferimento ortogonale, si possono considerare tali coppie come coordinate cartesiane di un punto del piano che indicheremo con z ; $z = x + iy$.

Si vede che $|z|$ non è altro che la distanza di z dall'origine O delle coordinate. Se si indica con θ l'angolo compreso tra l'asse delle x e la retta che congiunge O e z , e con ρ il modulo di z si ha (vedi fig. 1.2)

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad [8.15]$$

cosicché il numero complesso $z = x + iy$ si può scrivere come

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta). \quad [8.16]$$

La [8.16] si chiama *forma trigonometrica* del numero complesso z ; l'angolo θ si chiama *argomento* di z e si indica con $\arg(z)$.

Data la coppia (ρ, θ) , il numero complesso $z = x + iy$ è univocamente determinato dalla [8.15]. Viceversa, dato $z = x + iy$, si ha

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad [8.17]$$

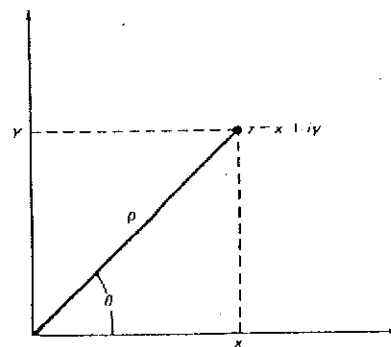


Figura 1.2

e θ verifica le relazioni

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\rho}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\rho}. \quad [8.18]$$

Si vede facilmente che le [8.18] non sono sufficienti per individuare l'angolo θ ; infatti poiché le funzioni seno e coseno sono periodiche, di periodo 2π , se θ verifica le [8.18] anche gli angoli

$$\theta + 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

verificano le stesse relazioni. Ne segue che θ è determinato dal numero complesso z a meno di multipli di 2π .¹²

Nonostante queste difficoltà la forma trigonometrica è particolarmente utile per esprimere prodotti di numeri complessi. Siano infatti

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

Si ha

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 \{ \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \} = \\ &= \rho_1 \rho_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}. \end{aligned} \quad [8.19]$$

Pertanto il modulo di $z_1 z_2$ è il prodotto dei moduli (vedi [8.11]) e l'argomento la somma degli argomenti.

Osservazione 8.1. Se si pone

$$f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta,$$

¹² Quanto sopra vale per $z \neq 0$; se poi $z = 0$, si ha $\rho = 0$, ma l'angolo θ è completamente indeterminato.

abbiamo per la [8.19] la relazione

$$f(\theta_1) \cdot f(\theta_2) = f(\theta_1 + \theta_2). \quad [8.20]$$

analoga a quella che intercorre tra le potenze

$$A^{x_1} \cdot A^{x_2} = A^{x_1 + x_2}.$$

La [8.20] suggerisce la possibilità di scrivere formalmente un numero complesso come una potenza. Noi porremo

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}, \quad [8.21]$$

per cui il numero complesso $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ si potrà scrivere

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad [8.22]$$

cosicché la [8.19] diventa

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Le [8.21] e [8.22] non hanno per il momento altro significato che quello di un'abbreviazione di scrittura (invece di $\cos \theta + i \sin \theta$ scriviamo semplicemente $e^{i\theta}$); esse però nascondono una relazione più profonda (che verrà esaminata nel cap. 6, § 10).

Tenendo conto della [8.22] si dimostra poi facilmente, per induzione, che

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}. \quad [8.23]$$

Quest'ultima formula è il punto di partenza per calcolare le radici n -esime di un numero complesso.

Dato $\alpha \in \mathbb{C}$, diremo che z è una radice n -esima di α se si ha $z^n = \alpha$.

Se $\alpha = R e^{i\varphi} = R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ e $z = \rho e^{i\theta}$, dalla [8.23] si ricava

$$\rho^n = R, \quad \cos n\theta = \cos \varphi, \quad \sin n\theta = \sin \varphi,$$

e dunque

$$\rho = R^{1/n}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

dove con $R^{1/n}$ si è indicata la radice n -esima aritmetica di R (vedi teorema 4.2).

Al variare del numero k si ottengono infiniti valori dell'argomento θ , i quali danno luogo però solo a un numero finito di radici distinte, se si tiene conto del fatto che argomenti che differiscono tra loro per multipli di 2π conducono allo stesso numero complesso. Si ottiene allora il seguente risultato:

Proposizione 8.1 Sia $\alpha = R e^{i\varphi}$ un numero complesso. Esistono n radici n -esime distinte di α , date dalla formula

$$z_k = \rho e^{i\theta_k} \quad [8.24]$$

dove

$$\rho = R^{1/n}$$

e

$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad [8.25]$$

Dimostrazione. E' evidente che le [8.24] sono radici n -esime distinte di α . Occorrerà dunque far vedere che ogni altra radice coincide con una delle z_k , ovvero che ogni numero di tipo $(\varphi + 2h\pi)/n$, con h intero, dista da uno dei numeri [8.25] per un multiplo di 2π . Per questo basta osservare che ogni intero h si può scrivere nella forma:

$$h = an + k$$

dove a è intero e k (il resto della divisione di h per n) può assumere solo i valori

$$0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Si ha dunque

$$\frac{\varphi + 2h\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + 2a\pi,$$

che dista da uno degli angoli [8.25] per un multiplo di 2π . ■

Esempio 8.1

Si vogliono calcolare le radici quarte di 4.

Si ha $R = 4$, $\varphi = 0$ e dunque

$$z_k = \sqrt[4]{4} e^{i2k\pi/4}; \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad [8.26]$$

In forma esplicita:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{2} \\ z_1 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = i\sqrt{2} \\ z_2 &= \sqrt{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = -\sqrt{2} \\ z_3 &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -i\sqrt{2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione. A volte, quando z è reale positivo, può sorgere qualche confusione tra le radici n -esime complesse e la radice n -esima aritmetica di z .

In genere, si comprende dal contesto di quale radice si tratti; comunque, per evitare confusioni, può essere talora consigliabile usare simboli leggermente diversi per i due tipi di radici, specie quando essi appaiono nella stessa formula. ■

Esercizi

8.1 Nel piano complesso individuare i numeri $1, i, 1-i, 3-2i, (1+i)^3, i-2, \frac{i-1}{i+1}, 0$.

8.2 Dimostrare che la $[8, 14]$ è una distanza in $\mathbb{C}$.

8.3 Disegnare l'intorno di raggio 2 del punto $1+i$.

8.4 Dimostrare in $\mathbb{C}$ l'analogo del teorema di Bolzano-Weierstrass 5.3. (Si ponga E in un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ e si divida ogni volta in 4 rettangoli uguali ...)

8.5 Verificare le [8.10].

8.6 Porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi:

$$5, 1+i, 3-3i, \sqrt{2}.$$

8.7 Calcolare la quarta potenza dei numeri dell'esercizio precedente.

8.8 Calcolare le seguenti radici:

$$\sqrt[3]{-1}, \sqrt{i}, \sqrt{2-2i}, \sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}.$$

(Si ricordino le formule di bisezione:

$$\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 + \cos \varphi}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}.$$

(8.9) Risolvere le equazioni:

(a) $z^2 + 3iz + 4 = 0$

(b) $z^2 + 2z + i = 0$

(c) $z|z| - 2z - 1 = 0$

(d) $|z|^2 z^2 = i$

(e) $z^4 = |z|^2 + 2$

(f) $z + i\bar{z}^2 = -2i$

(g) $z^3 \bar{z} + 3z^2 - 4 = 0$

(h) $z^2 + z\bar{z} = 1 + 2i$.

8.10 Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado:

$$x^3 - 6x + 4 = 0, \quad x^3 - 9x - 28 = 0.$$

Notizie storiche

La possibilità di misurare le grandezze, cioè di associare a ognuna di esse un numero che ne esprima il rapporto con una grandezza campione (l'unità di misura) è stata una delle principali, se non la prima, motivazione per lo sviluppo della matematica. Segni della mole di lavoro svolta in questa direzione sono presenti in tutta la matematica preellenica: la determinazione delle aree e dei volumi delle figure più semplici (triangoli, piramidi e prismi, tronchi di piramidi e trapezi, ...) con le prime apparizioni del teorema di Pitagora, l'inizio di ricerche sull'area del cerchio e sulla lunghezza della circonferenza con il calcolo approssimato di π , probabilmente eseguito per via sperimentale; tutti risultati che emergono da un'attività scientifica in cui la misura ha una parte preponderante. Il riconoscimento immediato dell'impossibilità di un'unità di misura universale rispetto alla quale tutte le grandezze omogenee possano essere espresse in numeri interi, e la conseguente necessità di sottomultipli, portano a un'estensione del sistema numerico con l'introduzione delle frazioni, e dunque alla creazione del sistema dei numeri razionali, anche se le operazioni con questi non sempre sono pienamente comprese ed esplorate.

E' essenzialmente questo sistema numerico che la matematica greca riceve in eredità, e si dedica a perfezionare con notevole successo, come mostra il ruolo preminente che il numero va assumendo nella speculazione filosofica.

Per uno di quei paradossi di cui si diletta la storia, il punto più alto di questa matematica numerica, e insieme il crollo della costruzione intera, portano entrambi il nome di Pitagora. A lui e alla sua scuola si deve il perfezionamento della scienza del numero, che assume dimensioni mistiche in una visione filosofico-religiosa che lo pone al centro e alla radice dell'universo, misura di tutte le cose: concezione la cui vita effimera è troncata dalla scoperta di grandezze incommensurabili, quali il lato del quadrato e la sua diagonale, o, se si vuole, dalla dimostrazione dell'irrazionalità della radice di 2.

La scoperta, che si dice i membri della scuola pitagorica giurassero di mantenere segreta, non tarda a trapelare, con effetto dirompente non solo sulle dottrine pitagoriche, ma anche sulla matematica in generale, che vede così minato uno dei suoi più solidi pilastri, la possibilità di una base numerica per la misura.

I secoli che vanno dalla crisi pitagorica alla sistemazione euclidea (cioè dal sesto al terzo secolo a. C.) sono dedicati alla ristrutturazione della geometria su basi non numeriche, che si compie con l'affermazione di quella teoria delle proporzioni che troviamo già compiuta negli *Elementi* di Euclide e che relega in posizione marginale la teoria dei numeri. Dall'assunto pitagorico, che vede nel numero l'elemento unificante della geometria (e in ultima analisi della realtà; non si dimentichi che la geometria era, se non l'unica, certo la più importante tra le scienze naturali), passiamo quindi a una concezione dualistica, in cui la parte preponderante è riservata alla geometria, che tratta del continuo, e nell'ambito di questa, alla teoria delle grandezze, mentre i numeri appartengono al discreto, e quindi, in ultima analisi, si riducono alla funzione originaria di pura e semplice enumerazione.

Se i numeri sono insufficienti a descrivere le grandezze e i loro rapporti (in particolare questi ultimi, dato che un numero esprime sempre un rapporto tra una grandezza e l'unità di misura), questi vengono trattati operando direttamente su di essi. I rapporti tra grandezze assumono, in altri termini, il ruolo che più tardi sarà occupato dai numeri reali, ma, per una serie di ragioni, con molta minor efficacia. In primo luogo, le operazioni elementari, somma e prodotto, non sono più tali, ma vengono eseguite tramite la ricerca di un quarto proporzionale.

Ad esempio, per sommare

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D},$$

occorre risolvere in primo luogo l'equazione

$$\frac{C}{D} = \frac{X}{B}, \quad [1]$$

dopodiché il risultato della somma sarà $(A + X)/B$, (si noti l'analogia con la riduzione di frazioni allo stesso denominatore). La soluzione della [1] non può naturalmente essere fatta per via algebrica (le grandezze non si moltiplicano tra loro!) ma deve essere compiuta operando direttamente su queste ultime con regole che dipendono ovviamente dalla natura delle grandezze in questione. Ad esempio, se si ha a che fare con segmenti (vedi fig. 1.3) si può trovare il segmento X riportando b, c e d sui lati di un angolo come in figura e tirando da c la parallela a db . Il segmento $X = ox$ sarà quello cercato, a causa della proporzionalità dei triangoli odb, ocx . In maniera analoga, il prodotto tra due rapporti $A/B, C/D$ si può eseguire risolvendo l'equazione

$$\frac{C}{D} = \frac{B}{X}$$

(una costruzione simile alla precedente) dopodiché il risultato sarà A/X .¹³

Una seconda difficoltà, forse più importante della prima, è dovuta all'estrema riluttanza dei matematici greci a inserire i numeri, che avevano appena mostrato la loro insufficienza, nella teoria delle grandezze. Ora, una caratteristica importante del sistema dei numeri reali, che permette di trattare con questi (indipendentemente dalla complicazione dei modelli che se ne possono dare) con la stessa familiarità con la quale si opera con le frazioni, è la possibilità di riconoscere tra essi i numeri razionali e di approssimare con questi tutti gli altri con arbitraria precisione. E' appunto questa possibilità che permette di eseguire i calcoli numerici, ovviamente limitati ai numeri razionali. Se a tutto ciò si aggiungono le difficoltà provenienti dalla mancanza di un sistema di notazioni agevole (in particolare la mancanza dello zero, che impedisce lo sviluppo di un sistema posizionale) si comprenderà come la teoria delle grandezze, che pure rappresentava una risposta rigorosa al problema della continuità, si affermi come superamento anziché perfezionamento del meno sofisticato metodo numerico, le sue applicazioni essendo d'altra parte limitate alla geometria, che, come disciplina essenzialmente svincolata dalla pratica, non ha bisogno di esprimere i propri risultati in termini quantitativi.

Non è un caso che a riproporre, dopo l'eclissi del Medioevo, la centralità del numero non siano le esigenze dello sviluppo della geometria, ma quelle più pratiche dello sviluppo dei traffici. L'algebra, importata dall'Oriente dal pisano Leonardo Fibonacci (noto anche come Leonardo Pisano), assume subito, agli inizi del Duecento, un posto rilevante nell'amministrazione delle aziende commerciali, che espandendosi al di là della dimensione familiare richiedono particolare precisione nelle registrazioni e nei computi. Benché la partita doppia resti ancora nel dominio del contare, in breve tempo sorgono problemi che coinvolgono grandezze continue e, soprattutto, richie-

¹³ Si comprende da questi esempi come la teoria delle proporzioni avesse una posizione di primo piano. Ad essa è dedicato il libro V degli *Elementi* di Euclide, e il suo studio è continuato per moltissimo tempo ancora, praticamente fino alla fine del diciassettesimo secolo.

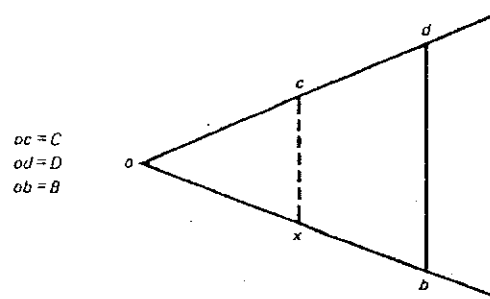


Figura 1.3

dono soluzioni numeriche. Nelle mani del mercante le grandezze astratte della geometria classica si tramutano in merci, scambiabili le une con le altre e tutte con il denaro che le misura; corrispondentemente, crolla la regola dell'omogeneità delle grandezze da comparare, in quanto tutte indifferentemente possono essere espresse da numeri.

Come ai tempi di Pitagora, il numero è di nuovo la misura di tutte le cose, ma non il numero astratto e mistico dell'antica filosofia, rappresentante i rapporti delle quantità, bensì quello, più concreto e sonante, che denota i rapporti di scambio.

Così, nello scontro rinnovato tra i numeri discreti e le grandezze continue, sono i primi ad avere la meglio sulle seconde, con un rovesciamento completo delle posizioni. Se la soluzione della crisi pitagorica era venuta dalla supremazia della teoria delle grandezze e dalla conseguente svalutazione dei numeri in quanto incapaci di esprimere i rapporti irrazionali, ora la vittoria del sistema numerico è garantita a priori da esigenze esterne alla ricerca matematica, e sono le grandezze incommensurabili a essere costrette ad adattarsi al letto di Procuste dei numeri razionali.

Il problema della continuità si presenta adesso non come un problema geometrico, ma piuttosto nella veste dei "numeri surdi", le radici quadrate che compaiono nella soluzione delle equazioni di secondo grado, nonché le radici di ordine superiore e in genere le potenze frazionarie. Il carattere irrazionale di questi numeri è immediatamente riconosciuto, ma la risposta ai problemi che essi pongono è completamente diversa dall'antica. I greci di fronte a queste difficoltà avevano sviluppato un nuovo sistema, relegando quello numerico in posizione secondaria; ora, invece, si accettano questi nuovi numeri come integrazione dei razionali, senza porre domande imbarazzanti sulla loro natura e ci si contenta della possibilità di un loro calcolo approssimato. Al problema posto dalla diagonale del quadrato si risponde fornendo le regole di estrazione delle radici, posizione matematicamente ingenua ma non completamente inesatta: non sappiamo cosa sia ma lo sappiamo calcolare con approssimazione arbitraria, che è quanto basta nella pratica (quando non si faccia troppa attenzione agli spiccioli). Tracce di questa formulazione ingenua si possono trovare, ancor oggi, nella definizione di numero irrazionale come numero decimale illimitato aperiodico e, più preoccupante, nell'uso acritico dei calcolatori elettronici.

Con l'accettazione dei "numeri surdi" si giunge a una sistemazione abbastanza soddisfacente. Arricchito dai numeri negativi che, assenti nell'antichità, compaiono in maniera sporadica nei secoli quindicesimo e sedicesimo e non vengono completamente accettati che verso la fine del secolo diciassettesimo, il sistema numerico così elaborato

può costituire la base per la fondazione delle due più importanti costruzioni del Seicento: la geometria analitica e il calcolo infinitesimale.

Basterà, allo scopo, da una parte aggiungervi di volta in volta quei nuovi numeri che gli sviluppi della teoria vanno costruendo, dall'altra supporlo dotato, quando occorra, di alcune proprietà che, in mancanza dell'assioma di Dedekind e, in generale, di una riflessione sugli assiomi dei numeri reali, verranno considerate naturali. Un esempio di tali proprietà è il teorema 4.2 (esistenza della radice n -esima) che ricorre spesso come una proprietà evidente del sistema numerico, anche in forme più generali (cap. 3, teorema 10.2).

L'estensione del sistema numerico che si compie nel diciassettesimo secolo va addirittura al di là dell'introduzione dei numeri irrazionali (e anche dello zero e dei numeri negativi, che peraltro vengono accettati con una certa riluttanza), e si spinge fino a includere tra i numeri gli infinitesimi e l'infinito.¹⁴

Malgrado l'opposizione decisa e motivata di alcuni pensatori, il più autorevole dei quali è senza dubbio il filosofo inglese George Berkeley (1685-1753), all'uso degli infinitesimi in analisi, questi conservano diritto di cittadinanza almeno fino agli inizi dell'Ottocento, quando Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) risolve l'annosa questione di dare solide basi al calcolo infinitesimale, fondandolo sulla teoria dei limiti, che sviluppa rigorosamente in due celebri trattati, il *Cours d'analyse*, del 1821 e il *Résumé des Leçons données à l'Ecole Polytechnique sur le calcul infinitesimal*, del 1823, e aprendo contemporaneamente una serie di problemi, quali ad esempio la dimostrazione del criterio di Cauchy (cap. 2, teorema 12.1), l'integrabilità delle funzioni continue (cap. 4, teorema 4.1), la continuità dei limiti di funzioni continue: questioni, appunto, la cui soluzione, come ci si rende conto ben presto, dipende da una sistemazione rigorosa dei numeri reali.

Questa è compiuta cinquant'anni più tardi, nel 1872, da Richard Dedekind (1831-1916), che nel celebre articolo dal titolo *Stetigkeit und irrationale Zahlen*,¹⁵ enuncia per primo l'assioma di continuità (assioma di Dedekind) e costruisce il modello descritto nel paragrafo 7.

Quasi contemporaneamente al lavoro di Dedekind, appaiono altri modelli dei numeri reali, tutti costruiti a partire dai razionali, ma basati sulle successioni di Cauchy (vedi più oltre, cap. 2, § 13). Di questi, il più compiuto è quello dovuto a Georg Cantor (1845-1918),¹⁶ anche se sono da menzionare altre costruzioni, essenzialmente nello stesso ordine di idee, dovute a Charles Meray (1835-1915) e Karl Weierstrass (1815-1897).

E' soprattutto quest'ultimo a insistere sulla necessità di una costruzione dei numeri reali, che viene giudicata senz'altro più soddisfacente della loro definizione assiomatica, soprattutto perché, in tal modo, il problema dell'esistenza dei numeri reali viene ricondotto a quello analogo (ma considerato più semplice) dell'esistenza dei numeri razionali, e quindi, in ultima analisi, degli interi. E' in questo senso che Weierstrass, Cantor e gli altri matematici dell'epoca giudicavano il loro sistema (poi battezzato col

¹⁴ Da notare che mentre vengono ammessi diversi ordini di infinitesimi, una analoga distinzione non viene fatta per gli infiniti, rinunciando così implicitamente a dotare il sistema numerico così ampliato di una coerente struttura moltiplicativa.

Banditi dall'analisi da Cauchy e Weierstrass, gli infinitesimi sono stati reintrodotti recentemente (e stavolta in modo rigoroso) da A. Robinson, *Non-Standard Analysis* (North-Holland, Amsterdam 1966).

¹⁵ R. Dedekind, *Continuità e numeri irrazionali*, trad. it. (Stock, Roma 1926).

¹⁶ G. Cantor, *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, Math. Annalen, vol. 5 (1872).

termine pretenzioso di "aritmetizzazione dell'analisi") più soddisfacente dell'approccio assiomatico.

Alla luce degli sviluppi successivi, dobbiamo rilevare che una tale convinzione appare oggi molto meno giustificata di quanto fosse un secolo fa. Vediamone brevemente i motivi.

(1) Innanzitutto occorre precisare il significato del termine "esiste", quando applicato al sistema dei numeri reali o, se si vuole, a quello dei numeri naturali. Se si vuole sgomberare il campo da valutazioni soggettive, quali le possibilità di intuizione o simili, occorre interpretare il termine "esiste" nel senso di "non è contraddittorio". Dire che esiste il sistema dei numeri reali è equivalente dunque ad affermare che gli assiomi che lo definiscono non sono tra loro contraddittori.

La costruzione di un modello di $\mathbb{R}$ in termini di numeri naturali sembrerebbe ridurre il problema della non-contraddittorietà di $\mathbb{R}$ a quello, analogo ma più semplice, della non-contraddittorietà degli assiomi di Peano, o in genere degli assiomi di $\mathbb{N}$. In realtà, una tale riduzione è effettuabile a condizione che si supponga acquisita la teoria degli insiemi astratti, che entra in maniera essenziale nella costruzione dei modelli. Poiché anche la teoria degli interi si può ricondurre a quella degli insiemi, in definitiva i numeri reali sono riconducibili alla teoria degli insiemi, e la non-contraddittorietà dei primi a quella di questi ultimi.

Chi conosca anche superficialmente i paradossi e le difficoltà della teoria degli insiemi converrà certamente che non si guadagna molto col ridurre a questa la teoria dei numeri reali.

(2) A ciò si aggiunga il fatto che nel 1931, i decisivi contributi di Kurt Gödel (1906-1978) alla teoria della dimostrazione¹⁷ hanno messo in luce l'impossibilità di dimostrare la non-contraddittorietà financo degli assiomi di $\mathbb{N}$,¹⁸ almeno se ci si limita a procedimenti finiti. Ancora peggiore è, ovviamente, la situazione nella teoria degli insiemi; se, come dice Hadamard, l'assenza di contraddizione, più che dimostrare, si costata, una tale costatazione non è certo delle più agevoli nella teoria degli insiemi, resa estremamente delicata e talvolta piuttosto lontana dal senso comune da una serie quasi innumerevole di paradossi.

In ogni modo, il risultato di Gödel sancisce l'impossibilità di una fondazione della matematica, quanto meno nel senso di organizzazione gerarchica in cui una teoria sicura (cioè provatamente non contraddittoria) serva da base per la costruzione di modelli e quindi per la dimostrazione della non-contraddittorietà di altre teorie più complesse.

Tutto ciò che, al contrario, si può ottenere è dunque una non-contraddittorietà relativa: se gli assiomi di $\mathbb{N}$ (e la teoria degli insiemi) non sono contraddittori, anche la teoria dei numeri reali è consistente. E viceversa: la non-contraddittorietà del sistema di Peano può essere dedotta da quella dei reali. E' ancora certamente una riduzione di un sistema a un altro, ma non una riduzione gerarchica dal più complicato al più semplice, quanto invece una sorta di equivalenza logica (almeno per quel che riguarda la consistenza).

Si tratta, in definitiva, di riconoscere che non esiste una roccia sulla quale potersi ancorare, ma che al contrario tutto sta sulla stessa barca, e non è possibile lasciar affondare una parte senza compromettere irrimediabilmente il tutto.

¹⁷ Vedi E. Nagel e J. R. Newman, *La prova di Gödel*, trad. it. (Boringhieri, Torino 1961).

¹⁸ Qui siamo volutamente imprecisi; una discussione più dettagliata del risultato di Gödel ci porterebbe troppo lontano. Per una descrizione un po' più completa vedi N. Bourbaki *Elementi di storia della matematica* (Feltrinelli, Milano 1963) pp. 58-60.

Per il resto, la scelta del punto di partenza dipende fondamentalmente da ragioni di opportunità: se per l'aritmetica e la teoria dei numeri è naturale partire dagli assiomi di $\mathbf{N}$ (assiomi di Peano o equivalenti), lo studio dell'analisi avrà invece le sue naturali fondazioni sugli assiomi dei numeri reali e sulle proprietà che ne discendono: nella convinzione che i fondamenti della matematica, se pure vi sono, vadano ricercati non tanto nella teoria degli insiemi o nella metamatematica (peraltro importanti settori di ricerca), quanto nei legami e nelle concessioni che le diverse teorie ammettono fra loro, nonché con le altre scienze.

Capitolo 2

Successioni e serie numeriche

1 Successioni

Definizione 1.1 Sia A un insieme. Si dice *successione a valori in A* una legge che a ogni numero intero n associa un elemento di A , che indicheremo con a_n .

In altre parole, una successione è un'applicazione, o una funzione,¹ di $\mathbf{N}$ in A .

Essa si indicherà con il simbolo $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ o, più brevemente, con $\{a_n\}$, o anche con $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$

Esempio 1.1

La somma dei primi n interi

$$S_n^{(0)} = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

è un'applicazione di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}$, e dunque una successione a valori in $\mathbf{N}$. E' chiaro che, poiché $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$, essa si può anche considerare come una successione a valori in $\mathbf{R}$. Analogamente, la successione definita da

$$a_n = \frac{1}{n}$$

può essere interpretata, a seconda dei casi, come a valori in $\mathbf{Q}$ o in $\mathbf{R}$.

Un'altra successione è data dalla somma dei quadrati dei primi n interi:

$$S_n^{(1)} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2.$$

Si ha

$$S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad [1.1]$$

¹ Per maggiori precisazioni sul concetto di funzione, vedi cap. 3, § 1.

come si può dimostrare per induzione, o anche con il seguente artificio. Si parte dalla formula

$$(h+1)^3 - h^3 = 3h^2 + 3h + 1.$$

Se si danno ora a h consecutivamente i valori $0, 1, 2, \dots, n$ e si sommano le $n+1$ equazioni così ottenute, tutti i termini della somma a primo membro si cancellano lasciando soltanto

$$(n+1)^3 = 3S_n^{(2)} + 3S_n^{(1)} + n+1.$$

Ricordando infine l'espressione di $S_n^{(1)}$ si ottiene la [1.1]. ■

Esempio 1.2

Altre successioni sono quelle definite da

$$a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

e, per k fissato, da

$$a_n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

che è definita per $n \geq k \geq 0$ quando si ponga per convenzione $0! = 1$.

I numeri $\binom{n}{k}$ sono detti *coefficienti binomiali* in quanto intervengono nello sviluppo delle potenze di un binomio (binomio di Newton):

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad [1.2]$$

Esercizi

1.1 Calcolare, usando il metodo precedente, le somme

$$S_n^{(3)} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3,$$

$$S_n^{(4)} = \sum_{i=1}^n i^4.$$

Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2.$$

1.2 Calcolare le seguenti somme:

- (a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$
 (b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2$

$$(c) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$$

$$*(d) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

1.3 Dimostrare che si ha

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

1.4 Dimostrare la formula [1.2] del binomio di Newton (si proceda per induzione usando il risultato dell'esercizio precedente).

1.5 Dimostrare le seguenti formule:

$$(a) \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$*(b) \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + 3 \binom{n}{3} + \dots + n \binom{n}{n} = n 2^{n-1}$$

$$*(c) 1 \cdot 2 \binom{n}{2} + 2 \cdot 3 \binom{n}{3} + \dots + (n-1)n \binom{n}{n} = n(n-1) 2^{n-2}$$

(si ricordi la formula del binomio di Newton).

1.6 Verificare che

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

2 Limite di una successione

Il concetto di limite per una successione è, a ben vedere, alla base di tutta l'analisi. Allo scopo di chiarirlo, esaminiamo dapprima un certo numero di esempi.

Esempio 2.1

Consideriamo la successione $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$, il cui termine generico è $a_n = 1/n$.

Si vede subito che, man mano che n aumenta, il termine a_n si avvicina sempre più a zero. Più precisamente, se prendiamo un arbitrario intorno $I(0, r)$ di 0 , tutti i termini della successione, a partire da un certo n_0 in poi, cadranno in $I(0, r)$. Diremo allora che il limite della successione $1/n$ è zero, e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Il numero n_0 , come è naturale, dipende dal raggio r dell'intorno scelto: più piccolo si prende quest'ultimo, più avanti bisognerà andare prima che i termini della successione cadano tutti in $I(0, r)$. Nel nostro caso poi, n_0 si può calcolare esplicitamente; infatti il termine $a_n = 1/n$ cadrà in $I(0, r)$ non appena $1/n$ sarà minore di r .

e dunque quando $n > 1/r$. In definitiva, si potrà prendere come n_0 il valore $1/r$, o più precisamente, dato che n_0 è intero, il più piccolo intero maggiore di $1/r$.

La situazione è analoga se si considera la successione

$$\left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots \right\}.$$

Anche stavolta la successione tende a zero, con la sola differenza che i suoi termini sono alternativamente maggiori e minori di zero. ■

Esempio 2.2

Consideriamo la successione

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/(n+1) & \text{per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

oppure, per esteso,

$$\left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

Anche qui è facile riconoscere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$$

infatti, comunque si prenda un intorno $I(0, r)$ dello zero, tutti gli a_n , a partire da un certo n_0 in poi, cadranno in $I(0, r)$.

A differenza dell'esempio precedente, la distanza del termine a_n dal limite della successione non diminuisce al crescere di n . ■

Esempio 2.3

Sia $a_n = n/(n+1)$. Se si scrive

$$a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

non è difficile vedere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Infatti si ha

$$a_n - 1 = -\frac{1}{n+1}$$

e quindi, se si prende un arbitrario intorno $I(1, r)$ di 1, tutti i numeri a_n cadranno in esso, tranne al più un numero finito. ■

Analogamente, la successione

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n - 1}$$

ha come limite 1.

Se si scrive

$$a_n = 1 - \frac{2(n-1)}{n^2 + 2n - 1} = 1 - r_n,$$

basterà dimostrare che r_n tende a zero. Ora si ha

$$0 \leq r_n < \frac{2n}{n^2 + 2n - 1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

e dunque $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Infatti, preso arbitrariamente un numero $\epsilon > 0$, si avrà $0 \leq r_n < \epsilon$ non appena si prenda $n > \frac{2}{\epsilon}$. Ne segue, per questi valori di n :

$$|a_n - 1| = r_n < \epsilon,$$

e quindi tutti i termini della successione a_n , a partire da $n_0 = 2/\epsilon$ in poi, appartengono all'intorno $I(1, \epsilon)$. ■

Esempio 2.4

Vogliamo trovare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p}$, quando p è un numero reale positivo. Ricordiamo

che se h è un numero reale, $h \geq -1$, allora per ogni intero positivo n risulta:

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad [2.1]$$

(vedi cap. 1, esempio 6.1).

Ciò premesso, passiamo allo studio della successione $\sqrt[n]{p}$, e supponiamo $p > 1$.

In tal caso anche $\sqrt[n]{p} > 1$, e quindi si può porre

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n, \quad h_n > 0.$$

Vogliamo adesso valutare il termine h_n . Si ha, per la [2.1],

$$p = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$$

e quindi

$$0 < h_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

Si vede allora subito $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ e dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1. \quad [2.2]$$

Se p è minore di 1, si può scrivere

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1+k_n}, \quad k_n > 0$$

e si ha, sempre per la [2.1]

$$p = \frac{1}{(1+k_n)^n} \leq \frac{1}{1+n k_n},$$

da cui

$$0 < k_n \leq \frac{1/p - 1}{n},$$

e dunque la [2.2] vale anche per $0 < p < 1$. ■

Esempio 2.5. La progressione geometrica: $a_n = \alpha^n$

Cominciamo col considerare il caso $0 < \alpha < 1$. Si può porre: $\alpha = (1+h)^{-1}$ con $h > 0$ e quindi

$$0 < \alpha^n = (1+h)^{-n} \leq (1+n h)^{-1} < \frac{1}{n h}.$$

Poiché h dipende solo da α (e non da n), si può immediatamente concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0.$$

La stessa conclusione vale per $-1 < \alpha < 0$, in quanto si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha|^n = 0.$$

Se $\alpha = 1$ è ovvio che $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 1$ dato che $\alpha^n = 1$ per ogni n .

Se $\alpha > 1$, posto $\alpha = 1+h$, si ha $\alpha^n \geq 1+n h$.

Si vede allora che, comunque si scelga un numero M , tutti i termini della successione, a partire da un certo indice n_0 in poi, saranno maggiori di M .

Esprimeremo ciò dicendo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = +\infty \quad \alpha > 1.$$

Infine, se $\alpha = -1$, la successione α^n non tende a nessun limite, dato che assume alternativamente i valori -1 e $+1$.

Analogamente, se $\alpha < -1$ i termini α^n saranno alternativamente positivi e negativi,

mentre $|\alpha|^n$ tenderà a $+\infty$, cosicché non esisterà il limite di α^n . Riepilogando,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{non esiste se } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

Esempio 2.6. La serie geometrica

Sia q un numero reale e sia

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} q^j$$

la somma dei primi n termini della successione geometrica di ragione q .

Vogliamo vedere che cosa accade quando si fa tendere n all'infinito. Per questo ricordiamo che si ha

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Se q è un numero compreso tra -1 e 1 , la successione q^n , e quindi anche $q^n/(1-q)$, tende a zero.

Si ha dunque, per $|q| < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-q}. \quad \blacksquare$$

Il limite delle somme s_n si indica anche con la notazione più suggestiva

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j.$$

e si chiama *somma delle serie geometrica di ragione q* .

Esempio 2.7

Sia $a_n = \sqrt[n]{n}$. Per calcolare il limite di questa successione faremo uso di un piccolo artificio.

Poniamo $b_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}$. Se $n > 1$, si ha $b_n > 1$ e quindi $b_n = 1 + h_n$, con $h_n > 0$.

Usando al solito la [2.1] troviamo

$$\sqrt[n]{n} = b_n^n = (1+h_n)^n \geq 1 + n h_n$$

e quindi

$$h_n \leq \frac{\sqrt[n]{n} - 1}{n} < \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Ma allora:

$$1 \leq a_n = b_n^2 = 1 + 2h_n + h_n^2 \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < 1 + \frac{3}{\sqrt{n}},$$

da cui segue immediatamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \blacksquare$$

Esempio 2.8

Si consideri la successione $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Vogliamo far vedere che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Questo è evidente se si moltiplica e si divide per $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$. Infatti:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}. \blacksquare$$

Esempio 2.9

Vogliamo calcolare il limite della successione

$$a_n = nA^{-n}$$

con $A > 1$.

Se poniamo $\sqrt{A} = 1 + h$ si ha

$$(\sqrt{A})^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh,$$

da cui

$$A^n > n^2 h^2.$$

Ma allora

$$\frac{n}{A^n} < \frac{1}{nh^2}$$

e dunque, se $A > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nA^{-n} = 0. \blacksquare$$

Esercizi

2.1 Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{3n^2 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Calcolare i limiti, per $n \rightarrow \infty$, delle successioni seguenti:

(a) $\frac{n^4 + 2n + 1}{n^3 + 3}$

(b) $\frac{n^3 + 6n}{3n^3 + 2n + 2}$

(c) $\frac{n - n^2}{n + 2}$

(d) $\frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2$

(e) $\frac{6n^4 + 1}{n^4 + n - 1}$

(f) $\frac{n - \sqrt{n}}{n + \sqrt{n}}$

2.2 Dimostrare che

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right\} = 0$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right\} = +\infty$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sqrt{n+2} = \frac{1}{2}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

3 Limite di una successione (continuazione)

Possiamo ora ricavare dagli esempi riportati nel paragrafo precedente una definizione rigorosa di limite di una successione.

Definizione 3.1 Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a valori reali e sia $L \in \mathbb{R}$. Si dirà che il limite della successione a_n , per n tendente all'infinito, è L e si scriverà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

se, per ogni intorno $I(L, \epsilon)$ di L , esiste un numero reale v , tale che per ogni intero $n > v$ si abbia $a_n \in I(L, \epsilon)$.

La definizione 3.1 può essere riformulata variamente. Non è difficile costatare ad esempio, che le seguenti definizioni sono equivalenti alla precedente:

(A₁) Si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero reale ν tale che per ogni intero $n > \nu$ si abbia $|a_n - L| < \epsilon$.

(A₂) Si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ se, per ogni intorno $I(L, r)$ di L , tutti gli a_n , tranne al più un numero finito, appartengono a $I(L, r)$.

Una successione che ha limite finito si dice anche *convergente*.

Esempio 3.1

Torniamo, per un momento, alla successione dell'esempio 2.2:

$$a_n = \begin{cases} 2/n & \text{per } n \text{ pari} \\ 1/(n+1) & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

e dimostriamo, in base alla definizione, che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Per questo basterà osservare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $0 < a_n \leq 2/n$.

Se fissiamo allora un intorno $I(0, r)$ dello zero, avremo che $a_n \in I(0, r)$ non appena si abbia $2/n < r$ e cioè non appena $n > \nu = 2/r$. ■

Proposizione 3.1 Una successione non può avere più di un limite.

Dimostrazione. Sia $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, e sia P un numero reale diverso da L . Se si prende $r = |P - L|/2$, i due intorni $I(L, r)$ e $I(P, r)$ non hanno punti in comune. D'altra parte, per la definizione di limite (A₂), solo un numero finito di punti a_n può cadere fuori di $I(L, r)$, e dunque in $I(P, r)$. Ne segue che P non può essere limite della successione a_n . ■

Una successione $\{a_n\}$ si dirà *limitata superiormente* se esiste un numero M tale che per ogni n risulta $a_n < M$, in altre parole se si ha:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup \{a_n; n \in \mathbb{N}\} < +\infty.$$

Analogamente, $\{a_n\}$ si dice *limitata inferiormente* se $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n > -\infty$, e infine si dice *limitata* se è limitata sia superiormente che inferiormente.

Proposizione 3.2 Una successione convergente è limitata.

Dimostrazione. Sia $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Tutti gli a_n a partire da un certo n_0 in poi, cadranno in $I(L, 1)$.

Se si pone

$$M = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0}| + |L| + 1:$$

si ha

$$|a_n| < M, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad [3.1]$$

Infatti, se $n \leq n_0$, la [3.1] è ovvia; mentre, se $n > n_0$ allora a_n appartiene a $I(L, 1)$ e quindi $|a_n| \leq |L| + |a_n - L| < |L| + 1$. ■

Osservazione 3.1. A causa dell'affinità lessicale può sorgere confusione tra le affermazioni "la successione $\{a_n\}$ ha limite" e "la successione $\{a_n\}$ è limitata".

Abbiamo visto che una successione che ha limite (finito) è limitata (proposizione 3.2); il viceversa però non è vero, come si vede considerando la successione $\{(-1)^n\}$, che è limitata ma non ha limite (vedi esempio 2.5). ■

Passiamo ora a considerare il caso in cui la successione $\{a_n\}$ abbia limite infinito (vedi esempio 2.5).

Definizione 3.2 Diremo che la successione a_n ha limite $+\infty$ e scriveremo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un numero reale ν tale che, per ogni intero $n > \nu$ si abbia

$$a_n > M. \quad [3.2]$$

Analogamente si dirà che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

se, per ogni $K \in \mathbb{R}$, esiste un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni intero $n > \nu$ si abbia:

$$a_n < K. \quad [3.3]$$

E' evidente che basterà verificare la [3.2] per M abbastanza grande (ad esempio per $M > 0$), e la [3.3] per $K < 0$.

Esempio 3.2

Si ha, per $\alpha > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \alpha^n) = -\infty.$$

Abbiamo già visto che $\lim_{n \rightarrow \infty} n/\alpha^n = 0$ (vedi esempio 2.9); dunque da un certo n_0 in poi sarà $n\alpha^{-n} < 1/2$, ovvero $n < \alpha^n/2$.

Ne segue che, per $n > n_0$,

$$n - \alpha^n < -\frac{1}{2} \alpha^n < -\frac{1}{2} \{1 + n(\alpha - 1)\} < -\frac{n}{2}(\alpha - 1).$$

Se si prende allora $K < 0$ risulterà $n - \alpha^n < K$ non appena $n > n_0$ e $-\frac{n}{2}(\alpha - 1) < K$ cioè non appena

$$n > \nu = \max \left\{ n_0, \frac{-2K}{\alpha - 1} \right\}. \blacksquare$$

Osservazione 3.2. Si possono unificare le definizioni di limite date finora se si chiamano *intorni di $+\infty$* le semirette $(M, +\infty)$ e *intorni di $-\infty$* le semirette $(-\infty, K)$. ■

Con queste convenzioni si ha la seguente

Definizione generale di limite. Diremo che la successione $\{a_n\}$ ha come limite L (finito, $+\infty$ o $-\infty$) se per ogni intorno I di L esiste un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n > \nu$ si abbia $a_n \in I$.

Esercizi

3.1 Ricordiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n)/(3n^2 + 1) = 1/3$ (vedi esercizio 2.1). Trovare un ν tale che per ogni $n > \nu$ la distanza tra $(n^2 - n)/(3n^2 + 1)$ e $1/3$ sia minore di $1/10$ (di $1/1000$; di $1/10^5$).

3.2 Dimostrare, usando la definizione, che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

3.3 Usando la definizione di limite, riesaminare i limiti del paragrafo 2.

3.4 Dimostrare che la successione

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

non ha limite.

***3.5** Si sostituisca la frase "la successione $\{a_n\}$ non ha limite" con una frase equivalente in cui non compaia la parola limite né alcun suo sinonimo.

3.6 Dimostrare che se la successione $\{a_n\}$ ha limite L , la successione $\{|a_n|\}$ tende a $|L|$. In quali casi vale il viceversa?

4 Operazioni con i limiti

Dalla definizione di limite si deducono senza difficoltà le seguenti regole di calcolo:

Proposizione 4.1 Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti e siano a e b i loro limiti. Allora:

$$(j_1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b;$$

$$(j_2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b;$$

$$(j_3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab;$$

$$(j_4) \quad \text{se tutti i } b_n \text{ e il loro limite } b \text{ sono diversi da zero, si ha } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Dimostrazione. Dimosteremo solamente le proprietà (j_3) e (j_4) ; le dimostrazioni di (j_1) e (j_2) sono più semplici e vengono lasciate per esercizio. Cominciamo dalla (j_3) . Si ha:

$$a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$$

e quindi, ricordando che la successione $\{a_n\}$ è limitata, cioè che $M = \sup |a_n| < +\infty$, si ottiene

$$|a_n b_n - ab| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|.$$

Sia $\eta > 0$; esisteranno due numeri reali ν_1 e ν_2 tali che

$$|a_n - a| < \eta, \quad \forall n > \nu_1$$

$$|b_n - b| < \eta, \quad \forall n > \nu_2$$

e quindi, per $n > \nu = \max(\nu_1, \nu_2)$, si avrà

$$|a_n b_n - ab| \leq (M + |b|)\eta$$

Preso $\epsilon > 0$, se si sceglie $\eta = \epsilon/(M + |b|)$, si conclude allora

$$|a_n b_n - ab| < \epsilon, \quad \forall n > \nu$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

Veniamo ora alla (j_4) . Cominciamo col far vedere che, nelle ipotesi assunte, la successione $\{1/b_n\}$ è limitata. Infatti, poiché $|b_n|$ tende a $|b|$ (vedi esercizio 3.6) e

$|b| \neq 0$, si può prendere $r = |b|/2$ nella definizione 3.1; ne segue che esiste un numero n_0 a partire dal quale tutti i termini $|b_n|$ appartengono a $I(|b|, |b|/2)$ e dunque in particolare

$$|b_n| > |b|/2 \quad \forall n > n_0.$$

Se allora si prende

$$M = \max \left\{ \frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}, \dots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|b|} \right\},$$

$$\text{risulta } \frac{1}{|b_n|} \leq M.$$

Ora si ha

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \left| \frac{a_n b - b_n a}{b b_n} \right| = \left| \frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{b b_n} \right| \leq M |a_n - a| + \frac{M |a|}{|b|} |b_n - b|,$$

e la dimostrazione prosegue come sopra. ■

Risultati analoghi si hanno quando uno o ambedue i limiti sono infiniti; si dimostra in questo caso che

(i₁) se $a_n \rightarrow +\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora $a_n + b_n \rightarrow +\infty$,

(i₂) se $a_n \rightarrow -\infty$ e b_n è limitata superiormente, allora $a_n + b_n \rightarrow -\infty$,

(h₁) se $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow L > 0$, allora $a_n b_n \rightarrow +\infty$,

(h₂) se $a_n \rightarrow +\infty$ e $b_n \rightarrow L < 0$, allora $a_n b_n \rightarrow -\infty$,

(h₃) se $a_n \rightarrow -\infty$ e $b_n \rightarrow L > 0$, allora $a_n b_n \rightarrow -\infty$,

(h₄) se $a_n \rightarrow -\infty$ e $b_n \rightarrow L < 0$, allora $a_n b_n \rightarrow +\infty$,

(k₁) se $a_n \rightarrow +\infty$, allora $1/a_n \rightarrow 0$.

(k₂) se $a_n \rightarrow 0$ ed $a_n \neq 0$, allora $1/|a_n| \rightarrow +\infty$. In particolare, se $a_n \rightarrow 0$ e $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $1/a_n \rightarrow +\infty$.

In generale, niente si può concludere nei casi che non rientrano nella tabella precedente e cioè per le cosiddette forme indeterminate:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}. \quad \blacksquare$$

Vediamo ora come si comporta l'operazione di passaggio al limite in relazione all'ordinamento dei numeri reali. Otterremo, in questo senso, due notevoli risultati.

Teorema 4.1 (dei due carabinieri) Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni verificanti la relazione

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}; \quad [4.1]$$

se a_n e c_n tendono verso lo stesso limite L , allora si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Dimostrazione. Sia I un intorno di L ; poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, allora tutti gli a_n e c_n , tranne al più un numero finito, appartengono a I . Siccome I è un intervallo, dalla [4.1] segue allora che tutti i b_n , tranne al più un numero finito, sono in I e quindi la tesi. ■

Teorema 4.2 (della permanenza del segno) Se $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, allora tutti i termini a_n , tranne al più un numero finito, sono positivi.

Dimostrazione. Tutti gli a_n , tranne al più un numero finito, appartengono a $I(L, L)$, cioè all'intervallo $(0, 2L)$. ■

In maniera del tutto simile si dimostra che se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 0$, allora esiste un numero v tale che per ogni $n > v$ risulta $a_n < 0$.

I risultati di questo paragrafo sono molto utili per il calcolo dei limiti, come si può vedere dai seguenti esempi.

Esempio 4.1

Per $A > 1$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 A^{-n} = 0.$$

Infatti si ha

$$n^2 A^{-n} = (n \sqrt{A}^{-n})^2$$

e poiché $\sqrt{A} > 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{A}^{-n} = 0$ (vedi esempio 2.9) cosicché per la (j₃) si conclude che $n^2 A^{-n}$ tende a zero.

In maniera analoga, osservando che

$$n^k A^{-n} = (n (\sqrt[k]{A})^{-n})^k,$$

si dimostra che se k è un intero e $A > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k A^{-n} = 0.$$

Infine, dato che se $\beta \in \mathbb{R}$ e $[\beta]$ è la parte intera di β ,² risulta:

$$n^{[\beta]} \leq n^\beta \leq n^{[\beta]+1},$$

si deduce dal teorema 4.1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta A^{-n} = 0 \quad A > 1. \quad [4.2]$$

² Si chiama *parte intera* di β il più grande intero che non supera β : ad esempio $[\sqrt{2}] = 1$ e $[-\pi] = -4$.

Esempio 4.2

Risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se α è un intero positivo, allora, tenuto conto che

$$\sqrt[n]{n^\alpha} = (\sqrt[n]{n})^\alpha,$$

il risultato si ottiene dalla (j₃), ricordando che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.D'altra parte, se α è un intero negativo si ha

$$\sqrt[n]{n^\alpha} = (\sqrt[n]{n^{-\alpha}})^{-1},$$

e la tesi segue da quanto detto sopra e da (j₄).Infine, per α arbitrario, si ha

$$\sqrt[n]{n|\alpha|} \leq \sqrt[n]{n^\alpha} \leq \sqrt[n]{n|\alpha|+1}$$

e per il teorema dei carabinieri risulta di nuovo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1. \quad \blacksquare$$

Esempio 4.3

Sia $\{a_n\}$ una successione divergente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Allora, se $A > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A^{a_n}} = 0. \quad [4.3]$$

Infatti, se si pone $\sqrt[A]{A} = 1 + h$, risulta

$$\sqrt[A]{A^{a_n}} = (1 + h)^{a_n} \geq (1 + h)^{[a_n]} \geq 1 + h[a_n],$$

e dunque

$$A^{a_n} \geq h^2 [a_n]^2.$$

Si ha allora

$$\frac{a_n}{A^{a_n}} \leq \frac{a_n}{h[a_n]^2} \leq \frac{|a_n| + 1}{h[a_n]^2},$$

da cui segue subito la [4.3]. Ragionando poi come nell'esempio 4.1 si conclude che,

per ogni $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^\beta}{A^{a_n}} = 0 \quad A > 1. \quad [4.4]$$

Esempio 4.4

Segue facilmente dalla [4.4] che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\beta}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad [4.5]$$

Sia B la base dei logaritmi, e supponiamo $B > 1$. Posto $a_n = \log n$, si ha $n^\alpha = B^{\alpha a_n}$, e dunque si può applicare la [4.4] con $A = B^\alpha > 1$. Lo stesso risultato sussiste se $0 < B < 1$ in quanto $\log_B x = -\log_{1/B} x$. ■

Osservazione 4.1. I limiti [4.2] e [4.5] e l'esercizio 2.2 (g) descrivono il modo di andare all'infinito (quando n va all'infinito) dei logaritmi, delle potenze, dell'esponenziale e del fattoriale di n . Possiamo osservare come il logaritmo di n vada all'infinito più lentamente di qualsiasi potenza, questa più lentamente di qualsiasi esponenziale (ovviamente con la base maggiore di uno), e infine quest'ultimo più lentamente del fattoriale di n . ■

Esercizi

4.1 Dimostrare le (j₁) e (j₂) di pagina 65.

4.2 Dimostrare le relazioni (i), (h) e (k) di pagina 66.

4.3 Dimostrare che per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e per ogni $A > 1$, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha (\log n)^\beta}{A^n} = 0.$$

4.4 Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}}$$

$$(c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$$

$$(d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n^2 + 2} \right)$$

- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$.

5 Serie numeriche

Un caso particolare, ma di notevole importanza, è quello delle serie.

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali; poniamo³

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

⋮

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

La coppia di successioni $\{a_n\}, \{s_n\}$ si dice *serie* di termine generico a_n , e si indica con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ oppure con } \Sigma a_n.$$

I numeri a_n si chiamano *termini* della serie, mentre le s_n si chiamano *somme parziali* o *ridotte* della serie.

Definizione 5.1 Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente se esiste finito il limite delle somme parziali:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in \mathbb{R}.$$

In tal caso, il numero s si chiama *somma della serie*, e si scrive $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Quest'ultima notazione può sembrare ambigua (e in effetti lo è) dato che lo stesso simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sta a denotare sia la serie, cioè la coppia di successioni $(\{a_n\}, \{s_n\})$, sia la sua somma, che è il limite delle somme parziali s_n . In genere, però, il contesto sarà sufficiente a decidere a quali dei due significati ci si riferisca di volta in volta. Accade spesso che invece di sommare la successione $\{a_n\}$ a partire dal termine di indice 1, si cominci dal

³ La successione s_n si può anche definire per ricorrenza: $s_1 = a_1$; $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$.

termine a_0 , o da un altro termine qualsiasi, come ad esempio da a_4 . Nel primo caso le somme parziali cominceranno dal termine a_0 :

$$s_0 = a_0; \quad s_1 = a_0 + a_1; \dots; \quad s_n = \sum_{i=0}^n a_i,$$

e nel secondo da a_4 :

$$s_4 = a_4; \quad s_5 = a_4 + a_5; \dots; \quad s_n = \sum_{i=4}^n a_i.$$

Un esempio di serie convergente è, come abbiamo visto, la serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \quad [5.1]$$

con $-1 < a < 1$.

Le serie non convergenti si dividono poi talvolta in serie *divergenti*, quando il limite delle somme parziali è $+\infty$, o $-\infty$ (ad esempio la serie geometrica con $a \geq 1$), e *indeterminate*, quando la successione delle somme parziali non ha limite (come la serie geometrica con $a \leq -1$).

6 Limiti di successioni monotone; serie a termini positivi

Un posto speciale nella teoria meritano le successioni monotone, e cioè le successioni *crescenti* o *decrescenti*.

Definizione 5.1 La successione $\{a_n\}$ si dice *crescente* se

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad [6.1]$$

Se poi nella [6.1] si ha sempre la disuguaglianza stretta, e cioè

$$a_n < a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad [6.2]$$

la successione $\{a_n\}$ si dirà *strettamente crescente*.

In maniera analoga, si chiamerà *decrescente* una successione $\{a_n\}$ per la quale

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(*strettamente decrescente* se si ha sempre $a_n > a_{n+1}$).

Si ha il seguente

Teorema 6.1 Sia $\{a_n\}$ una successione crescente. Allora esiste il limite della successione e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n. \quad [6.3]$$

Dimostrazione. Sia $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Cominciamo a considerare il caso $L < +\infty$. Risulterà ovviamente, per $\epsilon > 0$,

$$a_n \leq L < L + \epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'altra parte, poiché $L - \epsilon$ non è un maggiorante (si ricordi la definizione di estremo superiore), esisterà un n_0 tale che

$$a_{n_0} > L - \epsilon.$$

Poiché la successione a_n è crescente, si avrà, per $n > n_0$,

$$a_n > a_{n_0} > L - \epsilon,$$

e quindi

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

cosicché $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Se invece $L = +\infty$, la successione a_n non è limitata superiormente; fissato $M \in \mathbb{R}$, esisterà allora un n_0 tale che $a_{n_0} > M$, e quindi, ricordando che la successione è crescente,

$$a_n > a_{n_0} > M, \quad \forall n > n_0,$$

e la [6.3] è dimostrata anche in questo caso. ■

Con lo stesso metodo si dimostra che se $\{a_n\}$ è una successione decrescente, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Osservazione 5.1. La conclusione del teorema precedente sussiste se si suppone soltanto che la successione $\{a_n\}$ sia *definitivamente* crescente, e cioè che esista un intero n_1 tale che

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \geq n_1.$$

In tal caso, si avrà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \geq n_1} a_n. \quad [6.4]$$

In generale, si dice che una successione $\{a_n\}$ verifica *definitivamente* (o *da un certo punto in poi*) una relazione se esiste un intero n_1 tale che la detta relazione sia soddisfatta per ogni $n \geq n_1$. Ad esempio, la successione $\{\sqrt{n}\}$ è definitivamente maggiore di 7 ($n_1 = 50$), mentre la successione $n/(n^2 + 8)$ è definitivamente decrescente, come sarà utile esercizio verificare.

I risultati riguardanti i limiti di successioni restano validi, con le dovute piccole

modifiche, se le ipotesi si suppongono verificate solo da un certo punto in poi. È questo il caso del teorema 4.1, come pure del teorema 6.1, che ha dato lo spunto per questa osservazione, e di molti dei teoremi seguenti, il cui esame è lasciato al lettore. ■

Il teorema 6.1 assume un posto di rilievo nella teoria delle serie a termini positivi. Se in una serie $\sum a_n$ tutti i termini sono positivi (o meglio non negativi), la successione delle somme parziali sarà crescente; risulterà infatti

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

Si può concludere allora che la serie $\sum a_n$ non può essere indeterminata, ma sarà o convergente (se la successione $\{s_n\}$ è limitata, ovvero, se $\sup_{n \in \mathbb{N}} s_n < +\infty$) oppure divergente (se $\sup_{n \in \mathbb{N}} s_n = +\infty$). Per le serie a termini positivi, il problema della convergenza si ridurrà dunque a cercare un maggiorante per la successione delle somme parziali.

Teorema 6.2 (criterio del confronto) Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi. Supponiamo che esista un intero n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ risulti

$$a_n \leq b_n.$$

Allora, se la serie $\sum b_k$ converge, convergerà anche la serie $\sum a_k$.

Dimostrazione. Siano $\{s_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ le somme parziali delle serie $\sum a_k$ e $\sum b_k$, rispettivamente. Si ha, per $n > n_0$,

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^n a_i \leq s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^n b_i = s_{n_0} + \sigma_n - \sigma_{n_0}.$$

Se si indica con σ la somma della serie $\sum b_k$, si avrà dunque

$$s_n \leq s_{n_0} - \sigma_{n_0} + \sigma,$$

cosicché la successione $\{s_n\}$ è limitata. Per il teorema 6.1, essa è allora convergente e risulta inoltre

$$s \leq s_{n_0} - \sigma_{n_0} + \sigma. \quad \blacksquare$$

Anche se è equivalente alla tesi del teorema 6.2, varrà la pena di notare che se la serie $\sum a_n$ diverge, divergerà anche la serie $\sum b_n$.

Esempio 6.1

La serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a^{-n}, \quad a > 1,$$

è convergente.

Si ha infatti

$$na^{-n} = na^{-n/2} a^{-n/2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na^{-n/2} = 0 \quad (\text{vedi esempio 2.9}).$$

Esisterà allora un intero n_0 tale che

$$na^{-n/2} < 1$$

per ogni $n \geq n_0$, e dunque, per tali n ,

$$na^{-n} < a^{-n/2}.$$

Poiché $\sum a^{-n/2}$ converge, essendo una serie geometrica di ragione $a^{-1/2}$ (vedi esempio 2.5), convergerà anche la serie data. ■

Esempio 6.2

La serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad [6.5]$$

è convergente.

Infatti, risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n/n! = 0$ (vedi esercizio 2.2 (g))

e dunque esisterà un numero n_0 tale che

$$\frac{1}{n!} < 2^{-n}, \quad \forall n \geq n_0,$$

(in effetti risulta $n_0 = 4$). Poiché la serie a secondo membro converge, convergerà anche la serie iniziale. La sua somma è un numero che ricorre spesso nella matematica, e si indica con e :

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \quad \blacksquare$$

Esercizi

6.1 Dimostrare che la successione definita come segue:

$$a_1 = 0, \quad a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

è convergente, e si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 2.$$

*6.2 Siano a_1 e b_1 due numeri positivi, con $a_1 < b_1$. Si ponga

$$a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2},$$

e, per $n = 2, 3, \dots$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} (a_n + b_n).$$

Si dimostri che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergono allo stesso limite L , che prende il nome di *media aritmo-geometrica* di a_1 e b_1 .

6.3 Siano a_1 e b_1 due numeri positivi, con $a_1 < b_1$. Si ponga, per $n = 1, 2, \dots$,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Dimostrare che le successioni così costruite convergono allo stesso limite.

6.4 Sia $\{a_n\}$ una successione a termini positivi. Si dimostri che se si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

*6.5 Dimostrare che esiste il limite L della successione

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

e che risulta

$$\frac{1}{2} < L < 1.$$

6.6 Dire se convergono le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} a^{-n} \quad (a > 1).$$

6.7 Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^{nx}.$$

7 Due numeri particolari: e e π

Abbiamo incontrato la costante e nell'esempio 6.2:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \quad [7.1]$$

Ne discuteremo ora alcune ulteriori proprietà; in primo luogo, dimostreremo che si ha

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad [7.2]$$

Cominciamo col dimostrare che la successione $T_n = (1 + 1/n)^n$ è crescente. Risulta infatti, dalla formula del binomio,

$$T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{n^k}.$$

Mediante la [2.1] con $h = -\frac{k}{n+1} > -1$, si ottiene

$$1 - \frac{k}{n+1} \leq \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^k = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

e quindi

$$\begin{aligned} T_n &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} < \\ &< \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = T_{n+1}, \end{aligned}$$

cosicché la successione T_n è crescente.

In secondo luogo, osserviamo che si ha

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} < \frac{1}{k!},$$

e dunque

$$T_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < e.$$

Per il teorema 6.1, la successione $\{T_n\}$ ha limite finito T , e risulta $T \leq e$.

Per dimostrare che $T = e$, si osservi che, se $n > m$, risulta

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^m \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}.$$

Se ora facciamo tendere n a $+\infty$, ricordando che, per $k=0, 1, \dots, m$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1,$$

otteniamo

$$T \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$$

per ogni intero m , e quindi, passando al limite per $m \rightarrow +\infty$, $T \geq e$. Poiché si era già visto che $T \leq e$, si conclude infine che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad [7.3]$$

Veniamo ora al calcolo approssimato del numero e . Vogliamo valutare l'errore che si commette se si sostituisce a e il valore approssimato S_n . Si ha

$$\begin{aligned} S_{n+m} - S_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{(n+2)\dots(n+m)} \right\}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} S_{n+m} - S_n &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1}. \end{aligned}$$

Se ora si passa al limite per $m \rightarrow \infty$, si ottiene

$$0 \leq e - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \frac{n+2}{(n+1)^2},$$

e quindi, in definitiva,

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!n}. \quad [7.4]$$

Dalla [7.4] segue che e è irrazionale. Infatti, se fosse $e = p/q$, con p e q interi primi tra di loro, si avrebbe

$$0 < \frac{p}{q} - S_q = \frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} < \frac{1}{q!q}$$

e, moltiplicando per $q!$,

$$0 < q! \left(\frac{p}{q} - S_q \right) < \frac{1}{q}.$$

Ma $q!(p/q - S_q)$ è intero, e quindi l'ultima relazione è impossibile.

Veniamo ora al secondo dei numeri in questione. Geometricamente, π è l'area del cerchio di raggio 1. Così dicendo, noi accettiamo come evidente che tale numero esista, cioè che l'area del cerchio possa essere espressa con un numero reale.

Indipendentemente da questioni di rigore, questa definizione però non è di alcun aiuto quando si vuol calcolare il numero π ; in questo caso, occorre rifarsi a un qualche metodo di approssimazione per l'area del cerchio.

Se si inscrive nel cerchio un poligono regolare di m lati, e si indica con φ ($= \frac{\pi}{m}$) l'angolo al centro (vedi fig. 2.1) e con A_m l'area del poligono inscritto, risulta

$$A_m = m \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} m \sin \varphi.$$

Se ora si passa al poligono di $2m$ lati, l'angolo al centro φ si dimezza, e dunque:

$$A_{2m} = m \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Ricordando che $2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1 - \cos \varphi$, si può eliminare φ e ottenere

$$A_{2m} = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4A_m^2}{m^2}}}.$$

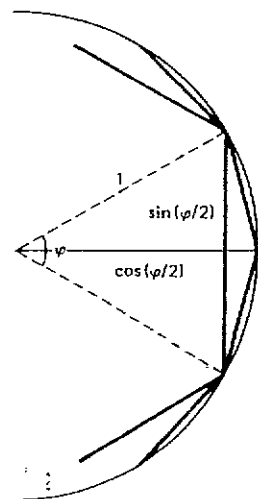


Figura 2.1

Posto $m = 2^n$ e $f_n = A_{2^n}$, la successione $\{f_n\}$, che è ovviamente crescente, verifica

$$f_{n+1} = 2^{n-1/2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4^{1-n} f_n^2}}. \quad [7.5]$$

La successione $\{f_n\}$ è anche limitata (ad esempio, f_n è sempre minore di 4, l'area del quadrato circoscritto al cerchio), e quindi l'area del cerchio si può ottenere come limite della f_n :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Poiché $f_2 = 2$, si possono calcolare via via i termini della successione f_n che approssima π : si ha ad esempio $f_3 = 2\sqrt{2}$, $f_4 \approx 3,06$, $f_5 \approx 3,12$.

Occorre comunque rilevare che per il calcolo di π non viene utilizzata la successione $\{f_n\}$ ma si fa uso di espressioni derivate dal calcolo differenziale (vedi cap. 6, esercizio 6.3).

Esercizi

7.1 Dimostrare, usando la [2.1], che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n = 1$$

7.2 Si provi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$$

(si può dimostrare direttamente, o anche usando il risultato precedente).

7.3 Si dimostri che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} = 0.$$

8 Potenze con esponente reale

Tutti sanno perfettamente che cosa significa il simbolo A^k (o A^k con k intero); si tratta infatti di moltiplicare A per sé stesso k volte (o k volte per ottenere A^k). Ma qual è il significato di $2^{\sqrt{2}}$? Certo non il prodotto di 2 per sé stesso $\sqrt{2}$ volte.

Vogliamo dare qui una definizione più rigorosa della potenza con esponente reale: come si vedrà, essa è meno ovvia di quanto possa sembrare a prima vista.

Osserviamo innanzitutto che è possibile definire la potenza con esponente reale (in modo che si conservino le usuali regole di operazione) solo se la base è positiva. Basterà inoltre limitarsi al caso $A > 1$ dato che, se $A < 1$, poniamo

$$A^\alpha = (A^{-1})^{-\alpha},$$

Abbiamo visto che non c'è problema quando α è intero. Se α è razionale, con $\alpha = n/m$, si può definire $A^{1/m}$, mediante il teorema 4.2 del capitolo 1, come quell'unico numero positivo a tale che $a^m = A$. Ciò fatto, si pone

$$A^{n/m} = (A^{1/m})^n.$$

Allo stesso risultato si sarebbe giunti eseguendo le operazioni in ordine inverso. Sia infatti $a = A^{1/m}$; si ha

$$(a^n)^m = (a^m)^n = A^n,$$

e dunque $a^n = (A^n)^{1/m}$, ovvero

$$(A^{1/m})^n = (A^n)^{1/m}. \quad [8.1]$$

Abbiamo così definito A^r per qualsiasi numero razionale r . La potenza ha le seguenti proprietà.

(P₁) $A^r > 0$, $A^r > 1$ per $r > 0$ (si ricordi che $A > 1$).

(P₂) $A^r A^s = A^{r+s}$,

la prima delle quali è ovvia, mentre l'altra si dimostra facilmente riducendo r ed s allo stesso denominatore.

Dalle (P₁) e (P₂) segue subito che

(P₃) se $r < s$, allora $A^r < A^s$.

Meno immediato è, invece, mostrare che

(P₄) se $q_n \rightarrow 0$, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{q_n} = 1$.

Allo scopo, ricordiamo che si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{1/n} = 1$$

(vedi esempio 2.4), cosicché, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un intero N tale che

$$|A^{1/N} - 1| < \epsilon.$$

D'altra parte, siccome $q_n \rightarrow 0$, esisterà un numero ν tale che, per ogni $n > \nu$, si abbia

$$|q_n| < \frac{1}{N}.$$

Risulta allora, per ogni $n > \nu$,

$$|A^{q_n} - 1| \leq A^{|q_n|} - 1 \leq A^{1/N} - 1 < \epsilon,$$

e dunque la (P₄) è dimostrata.

Ciò premesso, sia α un numero reale, e sia $\{r_n\}$ una successione crescente di numeri razionali, che converge a α . La successione $\{A^{r_n}\}$ è anch'essa crescente, ed è ovviamente limitata (se m è un intero maggiore di α risulta $A^{r_n} < A^m$); per il teorema 6.1, essa sarà convergente a un limite L .

Sia ora $\{s_n\}$ una qualsiasi successione convergente a α . Si ha

$$A^{s_n} - A^{r_n} = A^{r_n}(A^{s_n - r_n} - 1).$$

La successione A^{r_n} tende a L , mentre la successione $A^{s_n - r_n}$ tende a 1 per (P₄); ne segue che anche A^{s_n} tende allo stesso limite L .

Abbiamo così dimostrato che, comunque si prenda una successione $\{s_n\}$ di numeri razionali, convergente a α , la successione $\{A^{s_n}\}$ tende a un limite finito L , che è lo stesso per tutte le successioni convergenti a α . E' allora naturale definire A^α come il valore di tale limite:

$$A^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} A^{s_n}, \quad s_n \in \mathbb{Q}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha. \quad [8.2]$$

Le proprietà (P₁)-(P₄) si estendono facilmente a esponenti reali qualsiasi. Ad esempio, per dimostrare la (P₂), si prendono due successioni $s_n \rightarrow \alpha$ e $r_n \rightarrow \beta$; dalla relazione $A^{r_n} A^{s_n} = A^{r_n + s_n}$, passando al limite, si ottiene $A^\alpha A^\beta = A^{\alpha + \beta}$. Infine, la (P₄) si estende a una qualsiasi successione $\{q_n\}$ reale, con la stessa dimostrazione. Segue immediatamente, dalla (P₄), che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A^{\alpha_n} = A^\alpha, \quad [8.3]$$

una relazione che useremo in seguito.

Esercizi

8.1 Dimostrare che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A > 1$, si ha

$$|A^\alpha - 1| \leq A^{|\alpha|} - 1.$$

*8.2 Si dimostri che, se $A_k \rightarrow A$ ($A_k, A > 0$), si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_k} = \sqrt[n]{A};$$

(si usi la [4.2] del cap. 1 con $x = \sqrt[n]{A_k}$ e $x_0 = \sqrt[n]{A}$, ricordando che tutti i termini della somma sono positivi...).

8.3 Usando la [8.1], si dimostri che, se $r, s \in \mathbb{Q}$, si ha

$$(A^r)^s = (A^s)^r = A^{rs}.$$

8.4 Si provi che la formula precedente vale anche se r ed s sono reali (basterà ovviamente far vedere che $(A^r)^s = A^{rs}$. Si cominci col dimostrare che questa vale quando r è reale e s è razionale, approssimando r ...).

*9 I numeri reali in forma decimale

Cercheremo qui di rendere rigorosa l'idea intuitiva che un numero irrazionale è un numero decimale illimitato aperiodico. Cominciamo con alcuni preliminari.

Abbiamo già definito $[x]$, parte intera di x , come il più grande intero che non supera x . Si definisce poi *parte frazionaria* di x il numero $\{x\} = x - [x]$. Si ha sempre $0 \leq \{x\} < 1$.

Ad esempio

$$\left[\frac{34}{10}\right] = 3, \quad \left\{\frac{34}{10}\right\} = \frac{4}{10}, \quad \left[\frac{-42}{10}\right] = -5, \quad \left\{\frac{-42}{10}\right\} = \frac{8}{10}.$$

Ogni numero reale si scrive dunque in maniera unica come somma di un intero e di un numero compreso tra 0 e 1. Basterà pertanto rappresentare i numeri con parte intera uguale a zero, ai quali ci limiteremo in questo paragrafo. Sia dunque $0 \leq x < 1$. Per $k = 1, 2, 3, \dots$, poniamo

$$c_k = [10 \{10^{k-1} x\}]; \quad [9.1]$$

il numero c_k è la k -esima cifra decimale di x .

Ad esempio, sia $x = 531/1000 = 0,531$; si ha

$$c_1 = \left[10 \left\{\frac{531}{1000}\right\}\right] = \left[\frac{531}{100}\right] = 5,$$

$$c_2 = \left[10 \left\{\frac{531}{1000}\right\}\right] = \left[\frac{31}{10}\right] = 3,$$

$$c_3 = 1,$$

$$c_4 = c_5 = \dots = 0.$$

In generale, poiché $\{10^{k-1} x\}$ è sempre compreso tra 0 e 1 (1 escluso), il numero $10 \{10^{k-1} x\}$ sarà compreso tra 0 e 10 (quest'ultimo escluso), e dunque c_k sarà uno dei numeri 0, 1, 2, ..., 9. Si ha

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 10^{-k}, \quad [9.2]$$

come segue facilmente dalla formula

$$x - \sum_{k=1}^n c_k 10^{-k} = 10^{-n} \{10^n x\}. \quad [9.3]$$

La dimostrazione della [9.3] procede per induzione. Essa infatti è vera per $n=1$, dato che (si ricordi che, nel nostro caso, $\{x\} = x$)

$$x - c_1 10^{-1} = 10^{-1} (10x - \{10x\}) = 10^{-1} (10x - \{10x\}) = 10^{-1} \{10x\}.$$

Se ora si suppone la [9.3] vera per n , si ottiene

$$\begin{aligned} x - \sum_{k=1}^{n+1} c_k 10^{-k} &= 10^{-n} \{10^n x\} - 10^{-n-1} \{10 \{10^n x\}\} = \\ &= 10^{-n-1} (10 \{10^n x\} - \{10 \{10^n x\}\}) = \\ &= 10^{-n-1} \{10 \{10^n x\}\} = 10^{-n-1} \{10^{n+1} x\}. \end{aligned}$$

in quanto risulta

$$\{10^m \{10^n x\}\} = \{10^{m+n} x\}. \quad [9.4]$$

e dunque la [9.3] è dimostrata.

Dalla [9.3] segue subito

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^n c_k 10^{-k} < 10^{-n}, \quad [9.5]$$

e dunque la [9.2].

La successione $\{c_k\}$ si chiama *successione delle cifre* di x e individua, tramite la [9.2] il numero x .

In modo più suggestivo, si può scrivere

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots \quad [9.6]$$

che si chiama *rappresentazione decimale* di x .

Osserviamo che il decimale illimitato $0,9999\dots = 0,9$ non può essere ottenuto come rappresentazione di un numero reale x , con $0 \leq x < 1$, dato che risulta

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 1.$$

Analogamente, nessun numero x può avere una rappresentazione decimale che, da un certo punto in poi, sia composta da tutti 9. Infatti si osservi che, se $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 10^{-k}$, allora

$$\begin{aligned} 10^n x &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k 10^{n-k} = \sum_{k=1}^n c_k 10^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k 10^{n-k} = \\ &= \sum_{k=1}^n c_k 10^{n-k} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{n+j} 10^{-j}. \end{aligned}$$

Se ora fosse $c_k \equiv 9$, per ogni $k > n$ si avrebbe

$$10^n x = \sum_{k=1}^n c_k 10^{n-k} + 1,$$

e dunque $10^n x$ sarebbe intero. Ma allora $10^{k-1} x$ sarebbe intero per ogni $k > n$, e dunque $\{10^{k-1} x\} = 0$ e, per la definizione [9.1], risulterebbe $c_k = 0$ per $k > n$, ossia una palese contraddizione.

Ad ogni numero reale x , $0 \leq x < 1$ corrisponde dunque una rappresentazione decimale [9.6], le cui cifre non sono definitivamente uguali a 9, e, viceversa, ad ogni siffatta successione di cifre corrisponde un numero reale x tramite la [9.2]. Si noti che, se non si escludessero le rappresentazioni con tutti 9 da un certo punto in poi, verrebbe meno l'unicità della rappresentazione decimale: ad esempio, $0,5\bar{0}$ e $0,4\bar{9}$ indicherebbero, secondo la [9.2] lo stesso numero reale $1/2$.

Quanto poi alla differenza tra numeri razionali e irrazionali, essa è ben nota, e non sarà il caso di insistervi: ad ogni numero razionale (rapporto tra due interi) corrisponde una rappresentazione decimale periodica (contando tra queste anche quelle le cui cifre sono tutti zeri da un certo punto in poi), e viceversa ogni rappresentazione periodica dà luogo a un numero razionale. Di conseguenza i numeri decimali non periodici sono irrazionali.

Esercizi

9.1 Dimostrare la [9.4].

10 Il massimo e minimo limite

Non sempre accade che una successione abbia limite, anzi, in un certo senso, le successioni che hanno limite costituiscono un'esigua minoranza. Naturalmente, nel caso generale, la situazione è piuttosto complicata; vi sono però due numeri particolari, il massimo e il minimo limite, che svolgono un ruolo importante. Essi conservano per un verso alcune delle proprietà del limite, per un altro, invece, hanno qualche analogia con l'estremo superiore e inferiore.

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Come nel caso dell'estremo superiore, se $\{a_n\}$ non è limitata superiormente, diremo che il suo massimo limite è $+\infty$:

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \quad \text{se} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty. \quad [10.1]$$

Analogamente,

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \quad \text{se} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = -\infty. \quad [10.2]$$

Se la successione è limitata superiormente avrà almeno un maggiorante Q . A noi però non interessano tanto i maggioranti, quanto piuttosto i maggioranti definitivi.

Definizione 10.1 Si dice che un numero reale M è un maggiorante definitivo per la successione $\{a_n\}$ se esiste un numero v tale che

$$a_n \leq M \quad \text{per ogni} \quad n > v.$$

Evidentemente, ogni maggiorante è un maggiorante definitivo, mentre, ovviamente, non è vero il viceversa; ad esempio, i maggioranti definitivi della successione $\{1/n\}$ sono tutti i numeri positivi, mentre i maggioranti sono i numeri maggiori o uguali a 1.

Definizione 10.2 Si dice massimo limite di una successione $\{a_n\}$ l'estremo inferiore dell'insieme $\mathcal{M}$ dei maggioranti definitivi:

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \mathcal{M}. \quad [10.3]$$

Analogamente, si dice minimo limite di una successione $\{a_n\}$ l'estremo superiore dell'insieme $\mathcal{N}$ dei minoranti definitivi:

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \mathcal{N}.$$

Il massimo limite di una successione si indica talvolta anche con i simboli

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim'' a_n,$$

e il minimo limite con

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \lim' a_n.$$

E' evidente dalla definizione che il minimo limite non può superare il massimo limite:

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Esempio 10.1

Consideriamo la successione $\{(-1)^n\}$; si vede subito che sono maggioranti definitivi tutti e soli i numeri maggiori o uguali a 1, e minoranti definitivi quelli minori o uguali a -1. Ne segue

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1, \quad \max \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1. \quad \blacksquare$$

Esempio 10.2

Sia $a_n = (-1)^n/n$. Un qualsiasi numero positivo α è un maggiorante definitivo, dato che certamente $a_n < \alpha$ per $n > 1/\alpha$. Al contrario, nessun $\alpha \leq 0$ è maggiorante definitivo, in quanto risulta $a_n > 0 \geq \alpha$ per infiniti $n \in \mathbb{N}$ (esattamente per gli n pari). Allora

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Analogamente,

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \blacksquare$$

Nell'esempio precedente, il massimo e il minimo limite coincidono con il limite della successione. Questo fatto è generale, come mostra il seguente

Teorema 10.1 Una successione $\{a_n\}$ ha limite L se e solo se

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Dimostrazione. Tratteremo solo il caso $L \neq \pm\infty$. Supponiamo che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Per ogni $\epsilon > 0$, esisterà un numero ν tale che, per ogni $n > \nu$,

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \quad [10.4]$$

(vedi definizione 3.1).

Segue dalla [10.4] che $L + \epsilon$ è un maggiorante definitivo, e $L - \epsilon$ un minorante definitivo; allora

$$L - \epsilon \leq \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L + \epsilon$$

e per l'arbitrarietà di ϵ ,

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L. \quad [10.5]$$

Viceversa, sia verificata la [10.5], e sia $\epsilon > 0$. Poiché $L + \epsilon$ è un maggiorante definitivo, esisterà un numero ν_1 , tale che

$$a_n \leq L + \epsilon, \quad \forall n > \nu_1 \quad [10.6]$$

Analogamente, essendo $L - \epsilon$ un minorante definitivo, si potrà trovare un ν_2 , tale che

$$a_n > L - \epsilon, \quad \forall n > \nu_2. \quad [10.7]$$

Se si prende $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$, per $n > \nu$ saranno verificate ambedue le [10.6], [10.7] e dunque

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon, \quad \forall n > \nu,$$

cosicché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L. \blacksquare$$

Abbiamo già osservato che un maggiorante è anche un maggiorante definitivo; di conseguenza

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Più precisamente, varrà la seguente

Proposizione 10.1 Se $\{a_n\}$ è una successione limitata, risulta.

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k > n} a_k \quad [10.8]$$

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k > n} a_k. \quad [10.9]$$

Dimostrazione. Dimostriamo, ad esempio, la [10.9]. Il numero $\lambda_n = \inf_{k > n} a_k$ è un minorante definitivo (risulta infatti $a_k \geq \lambda_n$ per $k \geq n$). Si ha allora

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lambda_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e dunque

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n.$$

Per completare la dimostrazione della [10.9], occorre provare la disuguaglianza contraria. Sia l un minorante definitivo della successione $\{a_n\}$. Esisterà un intero n_0 tale che $a_k \geq l$ per ogni $k \geq n_0$, cosicché risulterà

$$l \leq \inf_{k > n_0} a_k = \lambda_{n_0} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n.$$

Poiché questa disuguaglianza vale per ogni minorante definitivo l , si ha anche

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n,$$

e la [10.9] è dimostrata.

La dimostrazione della [10.8] è analoga e viene lasciata per esercizio. ■

Una ulteriore caratterizzazione del massimo limite è data dalla seguente

Proposizione 10.2 Un numero reale L è il massimo limite della successione $\{a_n\}$ se e solo se

- (a) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu$ tale che, per ogni $n > \nu$, $a_n < L + \epsilon$;
- (b) $\forall \epsilon > 0$ risulta, per infiniti n , $a_n > L - \epsilon$.

Dimostrazione. La (a) equivale ad affermare che ogni numero maggiore di L è un maggiorante definitivo, e dunque alla relazione $L \geq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

La (b) d'altra parte è equivalente all'affermazione che $L - \epsilon$ non è un maggiorante definitivo, quale che sia $\epsilon > 0$, cioè alla relazione

$$L \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Concludendo, (a) e (b) sono equivalenti a

$$L = \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. \blacksquare$$

Con un ragionamento analogo, si prova che

$$\lambda = \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

se e solo se

$$(c) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \nu \text{ tale che } \forall n > \nu, \quad a_n > \lambda - \epsilon,$$

$$(d) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \text{risulta, per infiniti } n, \quad a_n < \lambda + \epsilon.$$

Esercizi

10.1 Si calcoli il massimo e il minimo limite delle seguenti successioni:

$$(a) \quad a_n = \begin{cases} ne^{-n}, & n \text{ pari} \\ ne^n, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$(b) \quad a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$(c) \quad a_n = \frac{1 + (-1)^n n}{1 + n}$$

$$(d) \quad a_n = (-1)^n \frac{2n}{n+2}$$

$$(e) \quad a_n = (1 - \cos n\pi)n$$

$$(f) \quad a_n = \cos(n\pi/4)$$

$$(g) \quad a_n = \text{numero dei fattori primi che compaiono nella decomposizione di } n \text{ (si ricordi che esistono infiniti numeri primi)}.$$

*10.2 Si dimostri che

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n}\} = 1,$$

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n}\} = 0;$$

($\{x\}$ è la parte frazionaria di x ; vedi § 9).

10.3 Sia $a_n = \sqrt{n+1} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x). Si dimostri che

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(si dimostri dapprima che

$$0 \leq \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 1,$$

quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n^2-1} = 1).$$

10.4 Si dimostri che

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

10.5 Si dimostri che

$$\begin{aligned} \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \min \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &\leq \min \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \\ &\leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \min \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \\ &\leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \max \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

(si usi la proposizione 10.1). In particolare, si faccia vedere che se $\{a_n\}$ ha limite finito risulta

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \max \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \min \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

10.6 Si dimostri con esempi che non è vero in generale che il massimo limite della somma sia uguale alla somma dei massimi limiti.

10.7 Si dimostri che, se $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \min \lim_{n \rightarrow \infty} b_n; \quad \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \max \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

11 Successioni e topologia

In questo paragrafo vogliamo discutere le relazioni tra la teoria delle successioni e la topologia di $\mathbb{R}$ (vedi cap. 1, § 5).

Teorema 11.1 Sia A un insieme di $\mathbb{R}$. Un punto x_0 di $\mathbb{R}$ appartiene alla chiusura di A se e solo se esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A che tende a x_0 .

Dimostrazione. (a) Poiché $\mathcal{C}\bar{A}$ è aperto, se $x_0 \in \mathcal{C}\bar{A}$, esisterà un intorno $I(x_0, r)$ di x_0 nel quale non cadono punti di $\bar{A}$, dunque, a maggior ragione, punti di A . Ma allora x_0 non può essere limite di una successione $\{x_n\}$ a valori in A (perché altrimenti tutti gli x_n , tranne al più un numero finito, dovrebbero appartenere a $I(x_0, r)$).

In conclusione, se esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A , convergente a x_0 , allora $x_0 \in \bar{A}$.

(b) Supponiamo viceversa che $x_0 \in \bar{A} = A \cup \mathcal{D}A$, e facciamo vedere che esiste una successione $\{x_n\}$ a valori in A , e convergente a x_0 . Se $x_0 \in A$ non c'è nulla da dimostrare, dato che basterà prendere $x_n = x_0$ per ogni n . Supponiamo allora che x_0 sia un punto di accumulazione per A . Per la definizione 5.3 del capitolo 1, ogni intorno $I(x_0, r)$ di x_0 conterrà un punto di A . In particolare possiamo prendere $r = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) e ottenere una successione $\{x_n\}$ di punti di A , tali che $x_n \in I(x_0, \frac{1}{n})$, ovvero $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. La successione $\{x_n\}$ converge evidentemente a x_0 . ■

Una semplice conseguenza del teorema precedente è il

Corollario 11.1 *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è chiuso se, e solo se, comunque si prenda una successione $\{x_n\}$ a valori in A e convergente, il limite della successione è ancora un elemento di A .*

Più brevemente, A è chiuso se e solo se $x_n \in A, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow x_0 \in A$.

Dimostrazione. (a) Sia A chiuso, e sia $\{x_n\}$ una successione convergente a valori in A . Per il teorema precedente, il suo limite x_0 appartiene ad $\bar{A} = A$.

(b) Viceversa, supponiamo che ogni successione a valori in A e convergente abbia limite in A . Sia x_0 un punto di $\mathcal{D}A$, e sia $\{x_n\}$ la successione costruita nella parte (b) del teorema precedente. Si ha $x_n \rightarrow x_0$, e dunque per l'ipotesi $x_0 \in A$. Ma allora $\mathcal{D}A \subset A$, e dunque A è chiuso. ■

Prima di proseguire, occorrerà definire l'importante concetto di sottosuccessione, o successione estratta.

Definizione 11.1 *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Si dice che $\{b_n\}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$, o una successione estratta da $\{a_n\}$, se esiste una successione strettamente crescente di numeri interi k_n tale che*

$$b_n = a_{k_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'idea intuitiva che è alla base della definizione precedente è quella di prendere solo alcuni termini della successione $\{a_n\}$ (e precisamente i termini di indice $k_1, k_2, k_3, \dots$) per formare una nuova successione $\{b_n\}$. La successione $\{k_n\}$ che serve per selezionare i termini si suppone strettamente crescente, per evitare ripetizioni e far sì che i termini scelti mantengano nella $\{b_n\}$ lo stesso ordine che avevano nella $\{a_n\}$.

Ad esempio sono successioni estratte da $a_n = \sqrt{n}$ le successioni $b_n = \sqrt{2n}$ ($k_n = 2n$), $c_n = n$ ($k_n = n^2$), $d_n = \sqrt{n^2 + 2}$ ($k_n = n^2 + 2$).

Teorema 11.2 *Se la successione $\{a_n\}$ ha limite L , allora ogni successione estratta da $\{a_n\}$ ha ancora lo stesso limite.*

Dimostrazione. Per ogni $r > 0$, esiste un v tale che, per ogni $n > v$ risulta $a_n \in I(L, r)$ (vedi definizione 3.1).

Sia ora $b_n = a_{k_n}$ una successione estratta da $\{a_n\}$. Poiché k_n è crescente, risulta $k_n \geq n$; dunque, se $n > v$, sarà anche $k_n > v$ per cui

$$b_n = a_{k_n} \in I(L, r), \quad \forall n > v,$$

e la successione b_n ha per limite L . ■

La dimostrazione, nel caso $L = \pm \infty$, viene lasciata per esercizio.

Se la successione $\{a_n\}$ non ha limite, è ancora possibile trovare sottosuccessioni di $\{a_n\}$ che hanno limite. In particolare, si ha la

Proposizione 11.1 *Da ogni successione $\{a_n\}$ si può estrarre una successione $\{b_n\}$ tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Dimostrazione. Ci limiteremo al caso di una successione limitata. Sia L il massimo limite; dalla proposizione 10.2 segue che, per ogni $\epsilon > 0$, si ha

$$L - \epsilon < a_i < L + \epsilon$$

per infiniti $i \in \mathbb{N}$.

In particolare, preso $\epsilon = 1$, potremo trovare un a_{k_1} tale che $|a_{k_1} - L| < 1$; se si considera poi $\epsilon = 1/2$, ci sarà un $k_2 > k_1$, tale che $|a_{k_2} - L| < 1/2$; quindi (prendendo $\epsilon = 1/3$) un $k_3 > k_2$, con $|a_{k_3} - L| < 1/3$, e così via.

Abbiamo così trovato una successione $\{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots\}$ con $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$, (dunque una successione $\{a_{k_n}\}$ estratta dalla $\{a_n\}$) tale che $|a_{k_n} - L| < 1/n$, cioè che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = L. \quad \blacksquare$$

In maniera analoga si può costruire una sottosuccessione convergente al minimo limite.

La proposizione 11.1 ha importanti conseguenze. La prima è una specie di inverso del teorema 11.2; diciamo "una specie" perché l'inverso puro e semplice del teorema è ovvio, dato che tra le sottosuccessioni di $\{a_n\}$ c'è la successione $\{a_n\}$ stessa ($k_n = n$).

Teorema 11.3 Siano $\{a_n\}$ una successione e $a \in \mathbb{R}$. Se da ogni sottosuccessione della $\{a_n\}$ si può estrarre una successione che converge ad a , allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Dimostrazione. Sia L il massimo limite di a_n , e sia $\{b_n\}$ una sottosuccessione che tende a L . Dalla $\{b_n\}$ si può estrarre per ipotesi una successione che converge ad a , dunque per il teorema 11.2 risulta $a = L = \max \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Analogamente, si dimostra che $a = \min \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, e dunque, per il teorema 10.1, la successione $\{a_n\}$ ha limite a . ■

Un secondo risultato è l'importante

Teorema 11.4 (di Weierstrass) Da ogni successione limitata si può estrarre una successione convergente.

Dimostrazione. Ad esempio, si può prendere una sottosuccessione che converga al massimo limite. ■

Per finire, introduciamo un nuovo concetto che sarà molto usato nel seguito.

Definizione 11.2 Un insieme $Q \subset \mathbb{R}$ si chiama compatto per successioni (o sequenzialmente compatto) se da ogni successione a valori in Q si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di Q .

Nel seguito, invece che compatto per successioni, diremo, più brevemente, compatto.

Teorema 11.5 Sono compatti in $\mathbb{R}$ tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati.

Dimostrazione. Sia Q chiuso e limitato, e sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione a valori in Q . Per il teorema di Weierstrass esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ convergente a un punto x_0 , che appartiene a Q per il corollario 11.1. Ne segue che Q è compatto.

Viceversa, sia Q un compatto di $\mathbb{R}$. Cominciamo a dimostrare che Q è limitato. Se ciò non fosse, si avrebbe ad esempio $\sup Q = +\infty$, ed esisterebbe una successione $\{x_n\}$ a valori in Q , tendente a $+\infty$ (vedi esercizio 11.2). Poiché ogni successione estratta da questa tende anche a $+\infty$ (teorema 11.2), non è possibile estrarre da $\{x_n\}$ alcuna successione convergente, e Q non potrebbe essere compatto.

Resta da mostrare che Q è chiuso.

Sia $x_0 \in \bar{Q}$; per il teorema 11.1, esiste una successione $\{x_n\}$, a valori in Q , che converge a x_0 . D'altra parte, poiché Q è compatto, dalla $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di Q . Ora, ogni successione estratta da $\{x_n\}$ converge a x_0 , e dunque $x_0 \in Q$, cosicché Q risulta chiuso. ■

Esercizi

11.1 Dimostrare che un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è aperto se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}$ che converge a un punto $x_0 \in A$, si ha definitivamente $x_n \in A$.

11.2 Dimostrare che, se $L = \sup A$, esiste una successione a valori in A che tende a L .

*11.3 Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice *punto limite* per la successione $\{x_n\}$ se esiste una successione estratta da $\{x_n\}$ che converge a x_0 . Si dimostri che:

- (a) il massimo e minimo limite di una successione limitata sono punti limite di $\{x_n\}$;
- (b) l'insieme dei punti limite è chiuso,
- (c) il massimo e minimo limite di una successione limitata sono il più grande e il più piccolo dei punti limite.

11.4 Si dia l'esempio di una successione priva di punti limite.

11.5 Sia $a_n = (-1)^n$. Trovare una successione estratta che converga.

11.6 Dimostrare che, se una successione limitata $\{x_n\}$ ha un solo punto limite x_0 , allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

11.7 Sia $\{a_n\}$ una successione. Si dimostri che, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = L,$$

allora la successione a_n ha limite L .

12 Il criterio di Cauchy

Se si vuol dimostrare che una successione $\{a_n\}$ è convergente, ciò che occorre (tranne nel caso di successioni monotone, dove il limite coincide con l'estremo superiore o inferiore) è, in primo luogo, farsi un'idea del possibile limite della successione, quindi usare la definizione o qualche teorema sui limiti per dimostrare che il numero pensato era proprio il limite di $\{a_n\}$.

In altre parole, la definizione di limite è utile, in un certo senso, solo a posteriori, se si conosce già, o almeno se si può ragionevolmente congetturare quale sia il limite della successione data.

Molte volte, però, è utile poter dimostrare che una certa successione converge, senza saperne in partenza il limite, che anzi spesso resta sconosciuto, anche quando si sia provata la convergenza della successione. A questa esigenza, fa fronte il cosiddetto criterio di Cauchy.

Definizione 12.1 Diremo che una successione $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy (o fondamentale) se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un numero reale v tale che, per ogni n ,

$m > \nu$, si abbia

$$|a_n - a_m| < \epsilon.$$

Se si confronta questa definizione con la definizione (A_1) del paragrafo 3, si nota che esse differiscono solo nel fatto che, nella definizione di successione di Cauchy, non viene fatta menzione dell'eventuale limite della successione, al cui posto compare un secondo termine a_m .

Teorema 12.1 (criterio di convergenza di Cauchy) Una successione $\{a_n\}$ è convergente se e solo se è una successione di Cauchy.

Dimostrazione

(a) Se la successione ha limite L , allora, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $n > \nu$, si abbia $|a_n - L| < \epsilon/2$. Se anche m è maggiore di ν , si ha $|a_m - L| < \epsilon/2$ e quindi, per $n, m > \nu$,

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |a_m - L| < \epsilon.$$

(b) Supponiamo viceversa che la successione $\{a_n\}$ sia di Cauchy. Cominciamo col far vedere che è limitata.

Allo scopo, sia n_0 un numero tale che, per ogni $n, m \geq n_0$, risulti $|a_n - a_m| < 1$. In particolare, si può prendere $m = n_0$, cosicché $|a_n - a_{n_0}| < 1$ per ogni $n \geq n_0$. Ragionando come nella dimostrazione della proposizione 3.2, si conclude che, per ogni $n \in \mathbb{R}$,

$$|a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n_0}| + 1,$$

cosicché la successione $\{a_n\}$ è limitata.

Per il teorema di Weierstrass 11.4, è possibile estrarre una sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ convergente a un numero L .

Fissato $\epsilon > 0$, esisterà un numero ν tale che, per ogni $n, m > \nu$, risulti

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

D'altra parte, solo un numero finito di termini della successione $\{a_{k_n}\}$ cadrà fuori di $I(L, \epsilon/2)$, e dunque esisterà un $\bar{n} > \nu$, tale che

$$|a_{\bar{n}} - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Allora, per ogni $n > \nu$,

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{\bar{n}}| + |a_{\bar{n}} - L| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

e dunque tutta la successione a_n tenderà a L . ■

Si noterà che nella definizione 12.1 i numeri n e m entrano simmetricamente; potremo allora supporre, ad esempio, che sia $m > n$, dunque $m = n + p$, per qualche

$p \in \mathbb{N}$. Una successione è allora di Cauchy se $\forall \epsilon > 0, \exists \nu$ tale che $\forall n > \nu$ e $\forall p \in \mathbb{N}$ si ha

$$|a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

Quest'ultima formulazione è molto comoda per le serie; infatti, in questo caso, occorre considerare la convergenza della successione delle somme parziali $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$.

Dal criterio di Cauchy segue, allora, che una serie $\sum a_i$ è convergente se e solo se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un numero ν tale che, per ogni $n > \nu$, e ogni intero p , si ha

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon. \quad [12.1]$$

In particolare, si può prendere $p=1$ nella [12.1], cosicché, se una serie $\sum a_n$ è convergente, allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ν tale che

$$|a_{n+1}| < \epsilon, \quad \forall n > \nu.$$

Ricordando la definizione di limite, abbiamo il seguente

Teorema 12.2 Condizione necessaria affinché una serie $\sum a_n$ sia convergente è che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad [12.2]$$

Si noti che la condizione [12.2] non è sufficiente a garantire la convergenza della serie, come si vede dal seguente

Esempio 12.1

La serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ è divergente. Risulta infatti

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}, \quad [12.3]$$

e dunque si ha

$$s_1 = 1,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_4 = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) > s_4 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = s_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} \right) > s_8 + \frac{1}{2} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},$$

⋮

e, in generale,

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad [12.4]$$

cosicché la successione delle somme parziali non è limitata e quindi la serie diverge. ■

Esercizi

12.1 Dimostrare per induzione la [12.4].

12.2 Mostrare che la serie armonica non è convergente, facendo vedere come, dalla [12.3], segua che la successione delle somme parziali non è di Cauchy (si prenda $\epsilon = 1/2$ nella [12.1]).

*13 I numeri reali come completamento dei razionali

Abbiamo visto in precedenza come dall'assioma di Dedekind (D) discendano sia il principio di Archimede (cap. 1, proposizione 4.3) che il criterio di Cauchy.

In realtà, l'assioma di continuità (D) è equivalente a questi due, nel senso che esso può essere dedotto a partire da essi.

Assumiamo dunque come assiomi il principio di Archimede,

(A) *Dati dei numeri reali positivi $a < b$, esiste un intero N tale che*

$$Na > b,$$

e il principio di Cauchy,

(C) *Ogni successione di Cauchy è convergente,*

e facciamo vedere che ogni sezione in $\mathbb{R}$ ha un elemento separatore.

Sia dunque (A, B) una sezione, e sia $a \in A$ e $b \in B$. Se dividiamo $[a, b]$ in due intervalli uguali $[a, (a+b)/2]$ e $[(a+b)/2, b]$, uno dei due conterrà sia punti di A che di B , mentre l'altro sarà contenuto in A o in B .

Denominiamo $[a_1, b_1]$ quello che contiene punti di ambedue gli insiemi A e B , e continuiamo a dividere con lo stesso metodo. Otterremo due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, l'una a valori in A , l'altra a valori in B , con

$$b_n - a_n = (b - a) 2^{-n}. \quad [13.1]$$

Le due successioni sono di Cauchy; infatti, i termini con indice maggiore di n appartengono tutti all'intervallo $[a_n, b_n]$, e dunque sarà

$$|a_m - a_k| < \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall m, k > n,$$

e, analogamente,

$$|b_m - b_k| < \frac{b-a}{2^n}, \quad \forall m, k > n.$$

Poiché ogni successione di Cauchy converge, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$, e, per la [13.1], $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lambda$.

Il numero λ è l'elemento separatore di (A, B) . Infatti se $a \in A$ risulta $a < b_n$, e dunque, passando al limite, $a \leq \lambda$; analogamente, se $b \in B$ si ha $a_n < b$, e dunque $\lambda \leq b$. ■

Osserviamo che, malgrado non sia stato esplicitamente usato, il principio di Archimede entra nella dimostrazione, in quanto occorre utilizzarlo per mostrare che $(b-a)/2^n$ tende a zero (in effetti, il principio di Archimede è necessario anche per dimostrare che $1/n$ tende a zero).

Osservazione 13.1. Le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ costruite sopra sono evidentemente monotone. La stessa dimostrazione prova allora che è equivalente all'assioma di Dedekind la proposizione (A), insieme alla

(C₁) *Ogni successione monotona e limitata è convergente.* ■

Osservazione 13.2. Un assioma che, unitamente al principio di Archimede, può essere sostituito al principio di Dedekind è il seguente assioma di Cantor:

(C₂) *Ogni successione di intervalli chiusi $I_n = [a_n, b_n]$, tali che*

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots \quad [13.2]$$

ha intersezione non vuota.

Infatti, se vale il principio di Dedekind, il numero $\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$ appartiene a tutti gli intervalli I_n .

Supponiamo viceversa che valgano l'assioma di Cantor e il principio di Archimede, e sia (A, B) un'arbitraria sezione di $\mathbb{R}$. Procedendo come sopra, otteniamo una successione di intervalli I_n che verificano la [13.2], e che dunque ha intersezione non vuota. In effetti, l'intersezione è costituita da un solo elemento λ , perché se ne contenesse due, λ e μ , questi dovrebbero appartenere a tutti gli intervalli I_n , e dunque si dovrebbe avere

$$0 < |\lambda - \mu| \leq (b-a) 2^{-n},$$

il che è impossibile perché il secondo membro tende a zero.

Facciamo vedere che λ è l'elemento separatore di (A, B) . Per questo, consideriamo un numero $a < \lambda$. Poiché la successione $\{a_n\}$ tende a λ , per il teorema 4.2 (della permanenza del segno) risulterà definitivamente $a_n > a$, e quindi, dato che $a_n \in A$, si avrà

anche $\alpha \in A$. Analogamente si dimostra che tutti i numeri maggiori di λ appartengono a B , e dunque λ è l'elemento separatore. ■

In definitiva, si ha

$$(D) \Leftrightarrow (A) \cup (C) \Leftrightarrow (A) \cup (C_1) \Leftrightarrow (A) \cup (C_2).$$

Infine, è ancora equivalente a (D) l'assioma:

(E) Ogni insieme limitato superiormente ha estremo superiore,

la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

L'assioma di Dedekind e il principio di Cauchy sono simmetrici anche sotto un altro punto di vista; infatti, come a partire dalle sezioni di $\mathbb{Q}$ si è costruito un modello di $\mathbb{R}$, così si può fare a partire dalle successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$.

Osserviamo innanzitutto che la definizione di limite, e quella di successione di Cauchy, possono essere date usando esclusivamente numeri razionali, cosicché si può parlare di successione di Cauchy in $\mathbb{Q}$ e di limite di una successione in $\mathbb{Q}$ (limite che dovrà, ovviamente, essere un numero razionale). E' subito visto che non tutte le successioni di Cauchy a valori razionali hanno limite in $\mathbb{Q}$: ad esempio non ha limite la successione delle somme parziali della serie esponenziale [6.5].

Consideriamo allora l'insieme $\mathcal{A}$ delle successioni di Cauchy a valori in $\mathbb{Q}$. In $\mathcal{A}$ introduciamo la seguente relazione di equivalenza: diciamo che $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ se si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

È facile verificare che la relazione " $\sim$ " è una relazione di equivalenza, ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva.

L'insieme quoziente di $\mathcal{A}$ rispetto alla relazione di equivalenza " $\sim$ " sarà l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Un numero reale α sarà dunque una classe di successioni di Cauchy in $\mathbb{Q}$ tra loro equivalenti; per individuarlo, basterà dare un suo rappresentante $\{a_n\}$; cioè una successione della classe α .

Ad esempio, il numero reale e è la classe delle successioni, a valori in $\mathbb{Q}$, equivalenti alla successione $\{(1 + 1/n)^n\}$, o anche alla successione $\left\{\sum_{h=0}^n 1/h!\right\}$.

Per vedere che $\mathbb{R}$ è effettivamente un modello per i numeri reali, occorre definire in $\mathbb{R}$ una somma, un prodotto e un ordinamento totale, in modo che siano verificati gli assiomi del paragrafo 1 (cap. 1) e l'assioma (D) di Dedekind.

La somma e il prodotto sono definiti naturalmente come segue: se $\{a_n\} \in \alpha$ e $\{b_n\} \in \beta$ definiremo $\alpha + \beta$ come la classe delle successioni equivalenti a $\{a_n + b_n\}$ e $\alpha\beta$ come la classe individuata da $\{a_n b_n\}$.

E' facile vedere che tale definizione non dipende dalla scelta dei rappresentanti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Se si definiscono come 0 e 1 i numeri reali individuati dalle successioni $\{0\}$ ($a_n = 0$) e $\{1\}$, l'opposto di α come il numero $-\alpha$ individuato da $\{-a_n\}$ e l'inverso

di un numero $\alpha \neq 0$ come il numero α^{-1} individuato* dalla successione $\{1/a_n\}$, si vede facilmente che sono verificati gli assiomi (B_1) , (B_2) , (B_3) , (B_4) , (C_1) , (C_2) , (C_3) , (C_4) , (BC) .

Un po' più delicata è la definizione dell'ordinamento totale su $\mathbb{R}$:

Definizione 13.1 Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, diremo che $\alpha \geq 0$, se esiste una successione $\{a_n\} \in \alpha$ tale che risulti definitivamente $a_n \geq 0$. Se β e γ sono due numeri reali, diremo che $\beta \geq \gamma$ se $\beta - \gamma \geq 0$.

Le proprietà transitiva e riflessiva, come anche le proprietà (AB) e (AC) del paragrafo 1 (cap. 1), sono evidenti; un po' meno lo è la proprietà antisimmetrica.

Per dimostrare quest'ultima, basterà far vedere che, se $\alpha \geq 0$ e $\alpha \leq 0$, allora $\alpha = 0$. Siano dunque $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due rappresentanti del numero α , con $a_n \geq 0$ e $b_n \leq 0$ per ogni n abbastanza grande. Si ha, per tali n ,

$$0 \leq a_n \leq a_n - b_n,$$

e, poiché le due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono equivalenti,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Ma, allora, anche $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, cosicché $\alpha = 0$.

Per completare la dimostrazione delle proprietà del paragrafo 1 (cap. 1) resta da far vedere che l'ordinamento della definizione 13.1 è un ordinamento totale, cioè che è verificata la proprietà (A_1) . A questo scopo basterà dimostrare che se $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta $\alpha \geq 0$ oppure $\alpha \leq 0$.

Sia $\{a_n\}$ un rappresentante di α , e si considerino le successioni $\{|a_n|\}$ e $\{-|a_n|\}$. Per la disuguaglianza triangolare [2.2], queste successioni sono di Cauchy, e così anche le successioni

$$b_n = |a_n| - a_n$$

$$c_n = |a_n| + a_n.$$

Si osservi ora che, per ogni intero n , almeno uno dei due numeri b_n e c_n è zero, e dunque almeno una delle due successioni $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ (ad esempio $\{b_n\}$) avrà infiniti termini nulli.

Poiché $\{b_n\}$ è di Cauchy, si dovrà avere $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, e dunque le successioni $\{a_n\}$ e $\{|a_n|\}$ sono equivalenti, cosicché $\alpha \geq 0$.

Analogamente, se è $\{c_n\}$ ad avere infiniti termini nulli, sarà $\alpha \leq 0$.

In questo modo abbiamo verificato che l'insieme $\mathbb{R}$ gode delle proprietà elencate nel paragrafo 1 (cap. 1). Rimane da verificare l'assioma di Dedekind.

Prima di tutto, è opportuno osservare che è possibile identificare il numero razio-

* In linea di principio si dovrebbe supporre che tutti gli a_n siano diversi da zero. Non è comunque difficile provare che, se $\alpha \neq 0$, esiste un rappresentante $\{a_n\}$ di α , con $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Si può allora dimostrare che la successione $\{1/a_n\}$ è di Cauchy, con un ragionamento analogo a quello della proposizione 4.1 (j₄).

nale r con il numero reale definito dalla successione costante $\{r\}$. In questo modo si può considerare $\mathbb{Q}$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Fatta questa considerazione, sia (A, B) una sezione in $\mathbb{R}$. Vogliamo far vedere che esiste un elemento separatore. Siano a un elemento di A e b uno di B ; possiamo supporre che a e b siano razionali. Se si suddivide via via l'intervallo $[a, b]$ come all'inizio del paragrafo, si ottengono due successioni equivalenti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di numeri razionali che individuano un numero reale λ , che è l'elemento separatore di (A, B) . La verifica è lasciata per esercizio.

14 Criteri di convergenza per le serie a termini positivi

Abbiamo già visto nel paragrafo 6 che le serie a termini positivi sono convergenti non appena la successione delle somme parziali è limitata; tale constatazione è alla base del criterio del confronto (teorema 6.2). Molto utile per il confronto è la serie geometrica, che può essere usata sia comparandola direttamente con la data, come negli esempi 6.1 e 6.2, sia indirettamente, come si vede nei teoremi che seguono.

Teorema 14.1 (criterio della radice) Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se esistono un numero k , $0 < k < 1$, e un intero n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, risulti

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k,$$

allora la serie $\sum a_n$ è convergente.

Dimostrazione. Per $n \geq n_0$ risulta $a_n \leq k^n$ e poiché la serie geometrica $\sum k^n$ è convergente, lo sarà anche la serie $\sum a_n$. ■

Teorema 14.2 (criterio del rapporto) Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Se esistono un k , $0 < k < 1$, e un intero n_0 tali che, per $n \geq n_0$, risulti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k,$$

allora la serie $\sum a_n$ è convergente.

Dimostrazione. Per $n \geq n_0$ si avrà

$$a_n \leq k a_{n-1} \leq k^2 a_{n-2} \leq \dots \leq k^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Poiché la serie

$$\sum \frac{a_{n_0}}{k^{n-n_0}} = \sum k^{n-n_0}$$

è convergente, per il criterio del confronto convergerà anche la serie $\sum a_n$. ■

I teoremi 14.1 e 14.2 possono essere posti in una forma più maneggevole.

Corollario 14.1 Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi. Se

$$L = \max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

allora la serie converge.

Se invece risulta

$$L = \max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

allora la serie $\sum a_n$ diverge.

Dimostrazione. Sia $L < 1$. Per ogni $\epsilon > 0$ esisterà un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $n > \nu$,

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \epsilon$$

(vedi proposizione [10.2]).

In particolare, se si sceglie $\epsilon = (1 - L)/2$, esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{1+L}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Poiché $(1+L)/2 < 1$, possiamo applicare il teorema 14.1 e concludere che la serie $\sum a_n$ converge.

Se invece è $L > 1$, allora, per infiniti n , deve risultare $\sqrt[n]{a_n} > 1$, e quindi $a_n > 1$. Ma, in tal caso non è verificata la condizione necessaria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

e quindi la serie $\sum a_n$ non può convergere. ■

Un analogo risultato si può formulare rifacendosi al criterio del rapporto: se $\sum a_n$ è una serie a termini positivi e se

$$L = \max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

allora la serie converge. Si osservi che, contrariamente a quanto avviene per il criterio della radice, se $L > 1$ non si può concludere che la serie diverge, come si può vedere dal seguente esempio.

Esempio 14.1

Consideriamo la successione

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ 3^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, dato che risulta $a_n \leq 2^{-n}$. D'altra parte non è difficile vedere che si ha:

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty. \blacksquare$$

Osservazione 14.1. Il criterio del rapporto, benché sia di una certa importanza nelle applicazioni, è meno generale di quello della radice. Infatti se una serie verifica le ipotesi del teorema 14.2, allora verifica anche quelle del corollario 14.1, e dunque del teorema 14.1.

Per dimostrare la nostra asserzione, supponiamo che per $n \geq n_0$ sia $a_{n+1}/a_n \leq k < 1$. Avremo allora

$$a_n \leq \frac{a_{n_0}}{k^{n-n_0}} k^n, \quad \forall n \geq n_0,$$

e quindi

$$\sqrt[n]{a_n} \leq k \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{k^{n-n_0}}}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Da quest'ultima segue immediatamente:

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq k \max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{k^{n-n_0}}} = k < 1$$

dato che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{k^{n-n_0}}} = 1 \quad (\text{vedi esempio 2.4}). \blacksquare$$

Esempio 14.2

La serie $\sum (n^2 + 1)/2^n$ è convergente. Infatti si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 + 1}{2^n}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 1} = \frac{1}{2} < 1. \blacksquare$$

Esempio 14.3

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ è convergente. Infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!/n^{n+1}}{n!/n^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n,$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1. \blacksquare$$

I criteri della radice e del rapporto sono inapplicabili quando avviene che

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

o che

$$\max \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Un caso tipico è quello della serie $\sum 1/n^\alpha$, che, come vedremo, converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.

Teorema 14.3 (di Cauchy) Sia $\{a_n\}$ una successione positiva e decrescente. Allora le due serie $\sum a_n$ e $\sum 2^k a_{2^k}$ sono ambedue convergenti o ambedue divergenti.

Dimostrazione. Si ha

$$a_1 \leq a_1$$

$$a_2 + a_3 \leq 2a_2$$

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4$$

...

e analogamente

$$a_1 \geq \frac{1}{2} a_1$$

$$a_2 \geq \frac{1}{2} 2a_2$$

$$a_3 + a_4 \geq \frac{1}{2} 4a_4$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq \frac{1}{2} 8a_8$$

...

Se ora si indicano con s_n le somme parziali della serie $\sum a_i$, e con σ_n quelle della serie $\sum 2^i a_{2^i}$, si ottiene dalle relazioni precedenti:

$$s_{2^{n+1}-1} \leq \sigma_n, \quad [14.1]$$

$$s_{2^n} \geq \frac{1}{2} \sigma_n. \quad [14.2]$$

Segue dalle [14.1] e [14.2] che se la successione $\{o_n\}$ è limitata, altrettanto accade alla $\{s_n\}$ e viceversa, e che dunque le due serie sono ambedue convergenti o ambedue divergenti. ■

Esempio 14.4

La serie $\sum 1/n^\alpha$ è convergente per $\alpha > 1$, divergente per $\alpha \leq 1$.

Infatti la successione $1/n^\alpha$ è decrescente (per $\alpha > 0$; ma se $\alpha \leq 0$ la serie è ovviamente divergente, non essendo verificata la condizione necessaria [12.2]) e si può applicare il teorema precedente. Si ha

$$2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^{n\alpha}} = (2^{1-\alpha})^n;$$

la serie $\sum 2^n a_{2^n}$ è dunque la serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$, che converge se $2^{1-\alpha} < 1$, cioè se $\alpha > 1$, e diverge se $\alpha \leq 1$. ■

Esercizi

14.1 Dire se convergono le seguenti serie:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+e^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{n!}, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}. \end{aligned}$$

14.2 Dimostrare che, se $a_n \geq 0$ e se $\sum a_n$ converge, allora anche $\sum a_n^2$ converge. E' vero il viceversa?

14.3 Dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}.$$

14.4 Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ sono convergenti le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^x (\ln n)^2, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^x}.$$

14.5 Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1} - \frac{2n-2}{2n-1} \right)$$

è convergente e, in caso affermativo, calcolarne la somma.

14.6 Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Dimostrare che, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L > 1,$$

allora la serie $\sum a_n$ non converge.

14.7 Dimostrare per induzione le formule [14.1] e [14.2].

15 Altri criteri di convergenza

Esamineremo in questo paragrafo il comportamento delle serie con termini di segno variabile, ricercando per queste dei criteri di convergenza. Il risultato più generale è il seguente

Teorema 15.1 Sia $\sum a_n$ una serie e supponiamo che sia convergente la serie $\sum |a_n|$. Allora anche $\sum a_n$ è convergente e si ha

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad [15.1]$$

Dimostrazione. Si considerino le due successioni

$$b_n = \max(a_n, 0), \quad c_n = \max(-a_n, 0).$$

Si ha

$$0 \leq b_n \leq |a_n|, \quad 0 \leq c_n \leq |a_n|$$

e, per il teorema del confronto, le due serie $\sum b_n$ e $\sum c_n$ saranno convergenti, cosicché risulterà tale anche la serie $\sum a_n$, dato che $a_n = b_n - c_n$. Si ha inoltre

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|,$$

da cui, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene la [15.1]. ■

Una serie $\sum a_n$ si dice *assolutamente convergente* se converge la serie $\sum |a_n|$. Il teorema 15.1 si può enunciare dicendo che *ogni serie assolutamente convergente è convergente*.

Esempio 15.1

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

è convergente. Infatti si ha

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

e dunque per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ è assolutamente convergente. ■

Esempio 15.2

Dire per quali $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{-n} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n$$

è convergente.

Vediamo per quali x la serie data è assolutamente convergente, cioè dove è convergente la serie

$$\sum n^2 2^{-n} \left| \frac{x}{x+1} \right|^n.$$

Applicando a quest'ultima il criterio della radice, si trova

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 2^{-n} \left| \frac{x}{x+1} \right|^n} = \frac{1}{2} \left| \frac{x}{x+1} \right| \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = \frac{1}{2} \left| \frac{x}{x+1} \right|,$$

cosicché la serie convergerà assolutamente per quei valori di x per cui

$$|x| < 2|x+1|,$$

cioè per $x > -2/3$ e per $x < -2$.

Se $-2 \leq x \leq -2/3$ si ha

$$\left| \frac{x}{x+1} \right| \geq 2,$$

e quindi

$$n^2 2^{-n} \left| \frac{x}{x+1} \right|^n \geq n^2,$$

cosicché per tali x la serie non può convergere, in quanto non è verificata la condizione necessaria:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad \blacksquare$$

Il teorema 15.1 rappresenta, in pratica, l'unico criterio generale per la serie con termini di segno variabile.

Un caso particolare di un certo interesse è quello delle serie a termini di segno alternato, cioè quelle i cui termini sono alternativamente positivi e negativi.

Definizione 15.1 Se $\{a_n\}$ è una successione positiva, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

si dice *serie a termini di segno alternato*.

Per questo tipo di serie sussiste il seguente

Teorema 15.2 (criterio di Leibniz) Sia $\sum (-1)^n a_n$ $\{a_n > 0\}$ una serie a termini di segno alternato.

Supponiamo che la successione $\{a_n\}$ sia decrescente e che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali della serie $\sum (-1)^n a_n$. Si ha, tenuto conto della monotonia della successione $\{a_n\}$,

$$s_{2n+2} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n},$$

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n-1},$$

$$s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}.$$

Pertanto la successione $\{s_{2n}\}$ è decrescente e la $\{s_{2n+1}\}$ è crescente. Inoltre, si ha

$$s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_2 = -a_1 + a_2,$$

$$s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq \dots \geq s_1 = -a_1,$$

cosicché $\{s_{2n}\}$ è limitata inferiormente e $\{s_{2n+1}\}$ è limitata superiormente.

Si può allora concludere che esistono finiti i limiti

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} \quad \text{e} \quad \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1}.$$

D'altra parte, si ha

$$S - \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0,$$

e quindi (vedi esercizio 11.7) esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S = \sigma,$$

cosicché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ è convergente. ■

Esempio 15.3

La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

è convergente. Infatti, la successione $a_n = 1/n$ è positiva, decrescente e ha limite zero. Si può allora applicare il teorema precedente e concludere che la serie è convergente.

Si noti che la serie

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

non è assolutamente convergente, perché la serie dei valori assoluti

$$\sum \frac{1}{n}$$

è divergente (vedi esempi 12.1 e 14.4). ■

Esempio 15.4

Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

Vediamo, dapprima, dove la serie converge assolutamente. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{-1/2}} = |x|,$$

per cui la serie converge assolutamente per $|x| < 1$.

Se $|x| > 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{\sqrt{n}} = +\infty,$$

e quindi la serie non converge.

Resta da esaminare il comportamento della serie per $x = \pm 1$. Per $x = 1$ la serie data diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

che non converge (vedi esempio 14.4).

Per $x = -1$ si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

che è una serie a termini di segno alterno, convergente per il teorema 15.2.

In conclusione, la serie converge per $-1 \leq x < 1$ e non converge per x esterno all'intervallo $[-1, 1)$. In particolare, la serie è divergente per $x \geq 1$ ed è indeterminata per $x < -1$. ■

Esercizi

* 15.1 Dire se sono convergenti le serie seguenti:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos n}{n^3}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

15.2 Dire se è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 9} \quad \text{converge}$$

15.3 Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono convergenti le serie seguenti:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \frac{x^n}{(1+x)^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{1 + e^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n x)^n}{n!}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2 + x^{2n}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 2) \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^n}$

15.4 Nell'esercizio 14.2 si può eliminare l'ipotesi $a_n \geq 0$?

*16 Riordinamento dei termini di una serie

Una proprietà delle somme finite è che qualsiasi cambiamento dell'ordine dei termini (o, come si suol dire, qualsiasi riordinamento dei termini) lascia inalterato il valore della somma.

E' possibile estendere questo risultato alle serie? Innanzi tutto, occorre definire che cosa si intenda per riordinamento di una serie; infatti, mentre per somme finite non c'è difficoltà, ad esempio, a sommare i termini in ordine inverso, ciò non è più possibile per le serie.

Definizione 16.1 Siano Σa_n e $\Sigma \alpha_n$ due serie. Diremo che $\Sigma \alpha_n$ è un riordinamento della serie Σa_n se esiste un'applicazione biunivoca (o bigettiva)⁵ $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tale che

$$\alpha_n = a_{k(n)}.$$

E' chiaro che se $\Sigma \alpha_n$ è un riordinamento di Σa_n , anche Σa_n sarà un riordinamento di $\Sigma \alpha_n$.

Con questa definizione, ci possiamo chiedere se la convergenza di una serie implichi quella di ogni suo riordinamento.

Si ha il seguente

Teorema 16.1 Se la serie Σa_n è assolutamente convergente e $\Sigma \alpha_n$ è un suo riordinamento, allora anche $\Sigma \alpha_n$ è assolutamente convergente e si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Dimostrazione. Supponiamo, dapprima, che la serie Σa_n (e quindi anche $\Sigma \alpha_n$) sia a termini non negativi. Indicando con $\{s_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ le successioni delle somme parziali relative alle due serie, e ponendo

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

si ottiene

$$\sigma_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = a_{k(1)} + a_{k(2)} + \dots + a_{k(n)} \leq S;$$

quindi le serie $\Sigma \alpha_n$ converge, e si ha

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq S.$$

⁵ Ricordiamo che un'applicazione $f: A \rightarrow B$ si dice biunivoca quando è iniettiva e surgettiva, cioè quando ogni elemento di B proviene da uno e un solo elemento di A .

D'altra parte, anche Σa_n è un riordinamento di $\Sigma \alpha_n$, e ripetendo il ragionamento precedente si ottiene $S \leq \sigma$, da cui

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sigma.$$

Se ora Σa_n non è una serie a termini positivi, si ponga

$$b_n = \max(a_n, 0),$$

$$c_n = \max(-a_n, 0),$$

e analogamente,

$$\beta_n = \max(\alpha_n, 0), \quad \gamma_n = \max(-\alpha_n, 0).$$

Si ha allora:

$$0 \leq b_n \leq |a_n|, \quad 0 \leq c_n \leq |a_n|,$$

$$0 \leq \beta_n \leq |\alpha_n|, \quad 0 \leq \gamma_n \leq |\alpha_n|,$$

e inoltre,

$$\begin{aligned} a_n &= b_n - c_n, & |a_n| &= b_n + c_n, \\ \alpha_n &= \beta_n - \gamma_n, & |\alpha_n| &= \beta_n + \gamma_n. \end{aligned} \quad [16.1]$$

Poiché la serie $\Sigma |a_n|$ è convergente, saranno convergenti anche le serie Σb_n e Σc_n (a termini positivi). D'altra parte, le serie $\Sigma \beta_n$ e $\Sigma \gamma_n$ sono riordinamenti delle serie Σb_n e Σc_n rispettivamente. Ne segue

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

e la tesi segue dalle uguaglianze [16.1]. ■

Il teorema appena dimostrato può sembrare a prima vista evidente, e valido anche per serie convergenti, ma non assolutamente convergenti. In realtà, una tale impressione si rivela errata: consideriamo infatti la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots = \log 2.^6$$

Se moltiplichiamo per 1/2, otteniamo

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{1}{2} \log 2.$$

⁶ Per quello che segue, la conoscenza della somma della serie non è essenziale; basta che la serie a primo membro converga (teorema 15.2) e che la sua somma S sia diversa da 0.

Sommando, e combinando tra loro i termini disposti uno sotto l'altro, si ricava

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \log 2.$$

Quest'ultima serie si può ottenere dalla prima riordinando i termini, mentre il valore della somma è stato moltiplicato per $3/2$.

Per capire la ragione di questo apparente paradosso, consideriamo una serie Σa_n , e, accanto a questa, le serie Σb_n , e Σc_n , con

$$\begin{aligned} b_n &= \max(a_n, 0), \\ c_n &= \max(-a_n, 0). \end{aligned} \quad [16.2]$$

Il comportamento della serie Σa_n è determinato da quello delle altre due; infatti, se ambedue le serie Σb_n e Σc_n convergono, la serie Σa_n sarà assolutamente convergente; e se una sola delle due diverge, la serie Σa_n sarà anch'essa divergente.

Il caso più complicato è quello in cui ambedue le serie Σb_n e Σc_n sono divergenti; quando ciò avvenga, la serie Σa_n non potrà convergere assolutamente, ma, se nella successione $\{a_n\}$ i termini positivi e negativi si alternano opportunamente, la serie Σa_n potrà risultare convergente.

E' questo il caso, ad esempio, della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

considerata sopra.

Non sarà allora motivo di meraviglia il fatto che una modifica dell'ordine dei termini possa portare a un cambiamento della somma, o addirittura possa rendere la serie divergente, o indeterminata. Si ha, infatti, il seguente

Teorema 16.2 *Sia Σa_n una serie convergente, ma non assolutamente convergente. Comunque si scelga un numero $L \in \mathbb{R}$, esiste un riordinamento $\Sigma \alpha_n$ della serie data tale che*

$$\Sigma \alpha_n = L.$$

Dimostrazione. Siano $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ i termini positivi (≥ 0) e $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ quelli strettamente negativi, nell'ordine in cui compaiono nella serie Σa_n . Per quanto detto sopra, si dovrà avere

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = - \sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty. \quad [16.3]$$

Inoltre, essendo la serie data convergente, sarà

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0. \quad [16.4]$$

Per definire il riordinamento $\Sigma \alpha_n$, poniamo innanzitutto $\alpha_1 = p_1$. Per α_2 , procediamo così: se $\alpha_1 > L$, prenderemo $\alpha_2 = q_1$, mentre, se $\alpha_1 \leq L$, porremo $\alpha_2 = p_2$. In generale, supponiamo di aver già definito $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, e che questi consistano nei primi k termini positivi $p_1, p_2, \dots, p_k$ e nei primi $m-k$ termini negativi $q_1, q_2, \dots, q_{m-k}$. Per definire α_{m+1} , calcoliamo la somma parziale $\sigma_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$. Se risulta $\sigma_m > L$, porremo $\alpha_{m+1} = q_{m-k+1}$ (cioè prenderemo come α_{m+1} il primo dei termini negativi disponibili), mentre se $\sigma_m \leq L$, si porrà $\alpha_{m+1} = p_{k+1}$.

Osserviamo, a questo punto, che a causa delle [16.3] le somme parziali σ_m non potranno essere né definitivamente maggiori, né definitivamente minori di L , e dunque tutti i termini p_i e q_i finiranno per essere contenuti nella serie $\Sigma \alpha_n$, che sarà così un riordinamento della Σa_n . In secondo luogo, la differenza $\sigma_m - L$ sarà sempre compresa tra l'ultimo termine negativo e l'ultimo termine positivo presi in considerazione,⁷ e quindi, per la [16.4], la successione $\{\sigma_m\}$ avrà come limite il numero assegnato L . ■

Si noti che, con lo stesso procedimento, si possono costruire, a partire da una serie Σa_n che sia convergente ma non assolutamente convergente, serie che divergono a $+\infty$ o a $-\infty$, e anche serie indeterminate. La semplice dimostrazione di queste asserzioni è lasciata per esercizio.

*17 Prodotti infiniti

Analogamente alla teoria delle serie si potrebbe sviluppare la teoria dei prodotti infiniti

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i, \quad [17.1]$$

definendo prima i prodotti parziali

$$p_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

e poi effettuando il limite della successione $\{p_n\}$. Se tale limite esiste finito, si dirà che il prodotto infinito è convergente, e si porrà

$$\prod_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n.$$

E' chiaro che i termini a_i devono essere tutti positivi, o almeno positivi da un certo punto in poi, altrimenti troppi cambiamenti di segno impedirebbero alla successione $\{p_n\}$ di convergere, a meno che essa non tenda a zero (caso peraltro poco interessante, al punto che, in genere, un prodotto infinito si dice convergente se il limite dei prodotti parziali è finito e non nullo).

⁷ A rigore, questa affermazione non è vera fin dall'inizio, ma comincia a valere non appena le somme σ_m superano per la prima volta il numero L .

Con la convenzione di considerare solo prodotti a termini positivi, la teoria dei prodotti infiniti si riduce facilmente a quella della serie. Basta infatti osservare che risulta

$$\ln p_n = \sum_{i=1}^n \ln a_i,$$

e che, pertanto, il prodotto infinito

$$\prod a_i$$

è convergente se e solo se è convergente la serie

$$\sum \ln a_i,$$

In questo modo, molti risultati relativi alle serie possono essere tradotti in analoghi risultati per i prodotti infiniti; ad esempio, se il prodotto [17.1] è convergente, allora la successione a_n tende a uno.

Esempio 17.1

Il prodotto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$$

è divergente. Infatti la serie dei logaritmi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

è divergente, essendo maggiore della serie armonica. ■

Esempio 17.2

Il prodotto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

converge. Infatti risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e,$$

e la successione a primo membro è crescente; ne segue che

$$1 + \frac{1}{n^2} < e^{1/n^2},$$

e dunque

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2},$$

e la serie a secondo membro è convergente. Al contrario, il prodotto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

diverge; infatti, per la disuguaglianza [2.1], si ha

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2,$$

e dunque

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{\ln 2}{n}. \blacksquare$$

18 Successioni e serie complesse

Abbiamo già osservato che si possono estendere ai numeri complessi tutte quelle definizioni e quei teoremi che dipendono unicamente dalla struttura metrica dei numeri reali, e non dal loro ordinamento. In particolare, si possono considerare successioni a valori in $\mathbb{C}$, per le quali il concetto di limite è dato dalla definizione [3.1] e dalle sue equivalenti (A_1) e (A_2) , non appena si interpreti, ad esempio, il simbolo $|\cdot|$ come il modulo in $\mathbb{C}$. Se $\{z_n\}$ è una successione in $\mathbb{C}$, diremo dunque che $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n =$

$= L \in \mathbb{C}$ se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un numero reale v tale che, per ogni $n > v$, si abbia $|z_n - L| < \epsilon$.

Se $\{z_n\}$ è una successione in $\mathbb{C}$, essa individuerà le due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, ossia, rispettivamente, la successione delle parti reali e delle parti immaginarie dei numeri complessi z_n . Viceversa, due successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ determinano una successione complessa $\{a_n + ib_n\}$. E' facile vedere che la successione complessa $\{z_n\}$ è convergente se e solo se sono convergenti separatamente le due successioni reali $\{\operatorname{Re}(z_n)\}$ e $\{\operatorname{Im}(z_n)\}$, come segue immediatamente dalle disuguaglianze (vedi cap. 1, [8.10]):

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| \leq |z_n - L|$$

$$|\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L)| \leq |z_n - L|$$

$$|z_n - L| \leq |\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(L)| + |\operatorname{Im}(z_n) - \operatorname{Im}(L)|.$$

Analogamente, una successione $\{z_n\}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ se e solo se lo sono (in $\mathbb{R}$) le successioni $\{\operatorname{Re}(z_n)\}$ e $\{\operatorname{Im}(z_n)\}$. Ne segue che $\mathbb{C}$ è completo, cioè che ogni successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ è convergente.

Sia infatti $\{z_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$; anche le successioni reali $\{\operatorname{Re}(z_n)\}$ e $\{\operatorname{Im}(z_n)\}$ saranno di Cauchy, e dunque convergenti (teorema 12.1). Per quanto detto sopra, risulterà convergente anche la successione $\{z_n\}$.

Veniamo ora alle serie a termini complessi; è chiaro da quanto precede che la serie $\sum z_n$ sarà convergente se e solo se lo sono le serie $\sum \operatorname{Re}(z_n)$ e $\sum \operatorname{Im}(z_n)$; a queste si possono applicare, ovviamente, i risultati dei paragrafi 14 e 15. Alle serie complesse si può inoltre estendere il teorema 15.1 (dell'assoluta convergenza): se la serie dei moduli $\sum |z_n|$ è convergente, sarà tale anche la serie $\sum z_n$, come segue direttamente dalle disuguaglianze [8.10] del capitolo 1 e dal teorema 15.1 applicato alle serie $\sum \operatorname{Re}(z_n)$ e $\sum \operatorname{Im}(z_n)$.

Vale anche l'analogo del teorema 12.2, e cioè: se una serie $\sum z_n$ converge, allora si deve avere $\lim z_n = 0$.

Esempio 18.1

La serie geometrica complessa

$$\sum \alpha^n, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

è convergente se $|\alpha| < 1$, non convergente se $|\alpha| \geq 1$.

Infatti, se $|\alpha| < 1$, la serie $\sum |\alpha^n| = \sum |\alpha|^n$ è convergente; se invece $|\alpha| \geq 1$, la serie non può essere convergente perché $|\alpha^n| \geq 1$, e dunque non è verificata la condizione necessaria $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$. ■

Esempio 18.2

La serie esponenziale complessa

$$\sum \frac{z^n}{n!}$$

è convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Infatti si ha $|z^n/n!| = |z|^n/n!$, e la serie reale $\sum |z|^n/n!$ è convergente per ogni valore di $|z|$ (vedi esercizio 15.3 (c)). ■

Notizie storiche

La prima serie che appare nella storia della matematica è la serie geometrica, usata da Archimede nella quadratura della parabola, cioè nel calcolo dell'area del segmento di parabola. Non risulta che le serie fossero state usate precedentemente: ad esempio non si ha notizia dell'uso di esse nella discussione dei famosi paradossi di Zenone, alcuni dei quali, in particolare quello famoso di Achille e della tartaruga, si prestano a essere trattati per mezzo della serie geometrica.

La matematica classica non va al di là della serie geometrica, né grandi progressi si registrano nel Medioevo, se si eccettua una dimostrazione della divergenza della serie armonica, con un'argomentazione essenzialmente simile alla nostra (vedi esempio 12.1). Ancora agli inizi del diciassettesimo secolo la serie geometrica è praticamente la sola che venga usata con profitto, ad esempio da Fermat per trovare le aree di numerose figure.

Il grande sviluppo delle serie inizia nella seconda metà del Seicento, con la scoperta di Nicolaus Mercator (circa 1620-1687) che riesce, con uno sviluppo in serie, a eseguire la quadratura dell'iperbole, e dunque a calcolare i logaritmi (vedi cap. 5, § 8 e cap. 6, § 7).

Quasi contemporaneamente, Isaac Newton (1642-1727) trova un grandissimo numero di sviluppi in serie, tra cui, indipendentemente, quello di Mercator, con i quali viene fra l'altro a fornire una quadratura del cerchio, cioè a trovare una serie la cui somma sia l'area del cerchio:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{40} - \frac{1}{120} + \frac{5}{1152} - \dots$$

obiettivo, peraltro, raggiunto anche da Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1},$$

che, per l'occasione, introduce il criterio che porta il suo nome (vedi teorema 15.2), e in un certo senso ancor prima da John Wallis (1616-1703) con il suo prodotto infinito:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots} = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{35}{36} \cdot \frac{63}{64} \dots$$

E' comunque per opera di Newton che la teoria degli sviluppi in serie viene portata a perfezione, divenendo uno dei pilastri del calcolo infinitesimale newtoniano.

Allo sviluppo dei metodi basati sulle serie non corrisponde un altrettanto profondo studio delle questioni di convergenza, che anzi vengono esplicitamente trascurate: ad esempio dalla formula, valida per $|x| < 1$, che dà la somma della serie geometrica (vedi esempio 2.6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

si arriva talora perfino a concludere, ponendo $x = 2$,

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

Se nelle mani di un grande matematico come Eulero estrapolazioni come la precedente possono portare a risultati di rilievo, grazie soprattutto alla sua profonda intuizione matematica che gli consente di evitare i trabocchetti che si nascondono dietro una manipolazione acritica delle formule, a lungo andare la situazione diventa poco sostenibile e si fa strada la convinzione che sia necessaria una revisione critica della teoria delle serie, come peraltro di tutto il calcolo infinitesimale.

Questa rifondazione è compiuta da Cauchy nel suo già citato *Cours d'Analyse*, nel quale viene definita e studiata la convergenza delle serie, limitando le operazioni e le manipolazioni alle serie convergenti, e vengono dimostrati quei criteri di convergenza che abbiamo descritto nei paragrafi 14 e 15 del presente capitolo.

Uno strumento di grande importanza e duttilità si rivela, a questo proposito, il criterio di convergenza di Cauchy (vedi teorema 12.1) che è enunciato dal matematico francese come evidente, e si trova prima ancora nell'opera di Bernhard Bolzano (1781-1848), il quale ne tenta anche una dimostrazione; questa, in mancanza di una teoria dei numeri reali, non poteva che rivelarsi illusoria.

La dimostrazione del principio di Cauchy diventa possibile non appena si sia fatta chiarezza sugli assiomi che individuano il sistema dei numeri reali, ovvero si sia dato di questi un modello sulla base dei numeri naturali.

Molto più moderna è la teoria delle successioni, se si eccettua una trattazione dovuta al matematico bolognese Pietro Mengoli (1625-1686) che nella sua *Geometria speciosa*, del 1659, ne definisce correttamente i limiti (e le operazioni con questi). Le idee di Mengoli restano ignorate, anche perché l'interesse per le successioni non si manifesta che molto più tardi, man mano che progredisce lo studio delle proprietà topologiche della retta reale (§ 11), e in generale degli spazi metrici, nei quali le successioni convergenti determinano le funzioni continue (cap. 3, teorema 4.1 e le successive osservazioni) e dunque, in analisi, la topologia.

Capitolo 3

Funzioni e loro limiti; funzioni continue

1 Generalità

Siano A e B due insiemi. Si dice *funzione* o *applicazione* di A in B una legge che ad ogni elemento x di A fa corrispondere un elemento y di B .

Una funzione f di A in B si indica con il simbolo

$$f: A \rightarrow B;$$

l'elemento y di B che corrisponde all'elemento x di A si indica con $f(x)$.

Esempio 1.1. Alcune funzioni incontrate in precedenza:

- (a) Una successione a valori reali è una funzione di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$.
- (b) La legge che ad ogni numero reale fa corrispondere la sua parte intera è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{Z}$.
- (c) La funzione esponenziale (di base $A > 0$) che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ fa corrispondere A^x è una funzione di $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}^+$, l'insieme dei numeri reali positivi (vedi cap. 2, § 8). ■

Osservazione 1.1. Il concetto di funzione (come quello ad esso strettamente legato di insieme) è uno di quelli per i quali non c'è di meglio che fare appello all'intuizione del lettore. In effetti, quella che abbiamo appena data non è una definizione, ma piuttosto una spiegazione; abbiamo cioè enunciato un certo numero di sinonimi (applicazione, legge) con la speranza di favorire il formarsi di un'idea il più possibile precisa della natura delle funzioni.

Certamente sarebbe possibile definire rigorosamente il concetto di funzione, allo stesso modo, per esempio, in cui abbiamo definito rigorosamente il limite; tuttavia tale definizione richiamerebbe altre nozioni e queste altre ancora, in una concatenazione al termine della quale resterebbe comunque affidata all'intuito qualche nozione primitiva, oggetto cioè non di definizioni, bensì, appunto, di spiegazioni. La scelta di

questi concetti primitivi è una questione di opportunità per due diversi aspetti. In primo luogo vi sono motivi di brevità: sarebbe ad esempio eccessivo dilungarsi in discussioni raffinate al solo scopo di precisare concetti, come quello di funzione, che nel presente contesto sono semplicemente punti di partenza per gli sviluppi della teoria.

Ci sono però altri motivi meno contingenti. Uno di questi, e forse il più importante, risiede nella constatazione che i concetti da scegliere come primitivi devono essere, per quanto è possibile, quelli per cui sussiste una larga concordanza di vedute, inevitabilmente basata sulla loro aderenza ai dati dell'esperienza comune, vista l'impossibilità d'una definizione rigorosa. La ricerca dei concetti più adatti a questo scopo è ampiamente al di fuori, non solo di questo corso, ma della stessa matematica; è comunque largamente accettato che quelli di funzione e di insieme siano tra questi, anche se non sono mancati punti di vista diversi (vedi, ad esempio, l'osservazione 2.1).

Osservazione 1.2. In genere, quando gli insiemi A e B sono individuabili dal contesto e non esista pericolo di confusione, si usa ometterli e parlare della funzione f , o anche (impropriamente) della funzione $f(x)$.

Ad esempio, l'espressione: "la funzione A^x " è un'abbreviazione per "la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, che, ad ogni $x \in \mathbb{R}$, fa corrispondere A^x ", decisamente più lunga e ingombrante. ■

Esempio 1.2. Funzione caratteristica di un insieme

Se A è un insieme di numeri reali si definisce *funzione caratteristica* di A la funzione $\varphi_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Più in generale, se Q è un insieme arbitrario e A è un sottoinsieme di Q , la funzione caratteristica definita sopra sarà una funzione di Q in $\mathbb{R}$. ■

Se $f: A \rightarrow B$ è una funzione, A si chiama il *dominio* e B il *codominio* di f . Inoltre, si chiama *immagine* di f (o meglio immagine di A tramite f) l'insieme $f(A)$ costituito dagli elementi di B che provengono da qualche elemento di A ; in simboli,

$$f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tale che } y = f(x)\}. \quad [1.1]$$

Nel seguito, ci interesseremo di funzioni reali di una variabile reale, cioè di funzioni il cui dominio sia un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ e il cui codominio sia $\mathbb{R}$.

Definizione 1.1 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione; f è *limitata superiormente* [limitata inferiormente, limitata] se l'insieme $f(A)$ è limitato superiormente [limitato inferiormente, limitato].

Definizione 1.2 Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata superiormente, chiameremo *estremo superiore* della f in A l'estremo superiore dell'immagine: $\sup f(A)$. Tale numero verrà di solito indicato con i simboli

$$\sup_A f, \quad \text{ovvero} \quad \sup_{x \in A} f(x).$$

Analoga è la definizione per l'estremo inferiore. Se l'immagine di f , $f(A)$, non è limitata superiormente [inferiormente], porremo

$$\sup_{x \in A} f(x) = +\infty \quad (\inf_{x \in A} f(x) = -\infty).$$

Dalla proposizione 4.2 del capitolo 1, segue che se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata superiormente, allora $\sup_A f$ è caratterizzato dalle proprietà:

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq \sup_A f; \quad [1.2]$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists x \in A \quad \text{tale che} \quad f(x) > \sup_A f - \epsilon. \quad [1.3]$$

Analoga caratterizzazione vale per $\inf_A f$.

Se $\sup_A f$ appartiene a $f(A)$, diremo che f ha *massimo* in A . Questo avviene quando esiste un punto $x_0 \in A$ tale che $\sup_A f = f(x_0)$, e cioè tale che

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in A.$$

Il punto x_0 si dirà in questo caso *punto di massimo* di f in A .

Esempio 1.3

Consideriamo in $\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

La funzione f è sempre non negativa, e si ha $f(0) = 0$; ne segue che 0 è un punto di minimo per f .

Si ha, d'altra parte, $f(x) < 1$ per ogni x , mentre, se $\epsilon > 0$, risulta $f(x) > 1 - \epsilon$ non appena $x^2 > 1/\epsilon - 1$. Dunque

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1.$$

Infine $f(\mathbb{R}) = [0, 1)$. Che nessun valore al di fuori dell'intervallo $[0, 1)$ possa essere assunto dalla f è evidente (risulta infatti $0 \leq f(x) < 1$ per ogni x). Se y è un numero compreso tra 0 e 1, si ha $f(x) = y$ per $x = \pm y/(1 - y)$, e dunque $y \in f(\mathbb{R})$. ■

Concludiamo questo paragrafo introducendo un concetto che ci sarà utile nel seguito.

Sia $f: A \rightarrow B$ e sia $Q \subset B$. Si dirà *immagine inversa* o *controimmagine* di Q (tramite f) l'insieme degli $x \in A$ che vengono mandati in Q dalla funzione f ; in simboli:

$$f^{-1}(Q) = \{x \in A : f(x) \in Q\}.$$

Esempio 1.4

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Calcoliamo $f^{-1}([a, b])$.

Si hanno i casi seguenti:

- (a₁) $0 < a < b$. In tal caso, perché $f(x)$ appartenga a $[a, b]$, deve essere $x > 0$. Ne segue che $f^{-1}([a, b]) = [a, b]$.
 (a₂) $a \leq 0 \leq b$. La semiretta $(-\infty, 0]$ appartiene senz'altro a $f^{-1}([a, b])$. Inoltre, appartengono a $f^{-1}([a, b])$ tutti gli altri $x \in \mathbb{R}$, con $0 < x \leq b$. Allora $f^{-1}([a, b]) = (-\infty, b]$.
 (a₃) $a < b < 0$. Nessun x viene mandato in $[a, b]$, per cui $f^{-1}([a, b])$ è l'insieme vuoto. ■

Esercizi

1.1 Si calcolino l'estremo inferiore e l'estremo superiore delle funzioni che seguono, negli insiemi indicati a lato di ognuna:

- (a) x^2 $[0, 1]$
 (b) $1 + 2x$ $[-1, 2]$
 (c) x^2 $[-1, 2]$
 (d) $1/x$ $\mathbb{N}$
 (e) $x/(x+1)$ $[0, 1]$
 (f) $1/(x+2)$ $(-2, 0]$.

1.2 Dire se gli estremi inferiore e superiore delle funzioni dell'esercizio precedente sono minimi o massimi.

1.3 Dimostrare le seguenti relazioni (f, g indicano funzioni in A , mentre λ indica un numero reale):

- (a) $\sup_A \lambda f = \lambda \sup_A f, \quad \lambda > 0$
 (b) $\sup_A \lambda f = \lambda \inf_A f, \quad \lambda < 0$

- (c) $\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g$
 (d) $\sup_A (f+g) \geq \sup_A f + \inf_A g$
 (e) $\sup_A (f+\lambda) = \sup_A f + \lambda;$
 (f) $\sup_A (fg) \leq \sup_A f \sup_A g, \quad f \geq 0, g \geq 0.$

1.4 Enunciare le analoghe relazioni per l'estremo inferiore.

1.5 Dimostrare le seguenti affermazioni:

(a₁) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $B \subset A$. Allora

$$\inf_A f \leq \inf_B f \leq \sup_B f \leq \sup_A f.$$

(a₂) Siano $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ tali che: $f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in A$.

Allora:

$$\inf_A f \leq \inf_A g, \quad \sup_A f \leq \sup_A g.$$

(a₃) Siano $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: A \rightarrow \mathbb{R}$. Allora:

$$\sup_A |f+g| \leq \sup_A |f| + \sup_A |g|.$$

1.6 Si calcoli $f^{-1}(Q)$ per le seguenti funzioni, dove Q è l'insieme indicato a lato:

- (a) $x^2 - 1$ $[0, 2]$
 (b) $\log_{10} x$ $[1, 1000]$
 (c) $1/x$ $[-2, -1]$
 (d) $1/(x-1)$ $[4, +\infty)$
 (e) $x/(x+1)$ $[0, 4]$.

2 Grafico di una funzione

Per avere un'idea globale dell'andamento di una funzione reale di una variabile reale $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, è comodo tracciare il grafico della funzione. A tale scopo, nel piano cartesiano si riporta sull'asse delle ascisse il dominio A della f e, per ogni x di A , si traccia il punto del piano di coordinate $(x, f(x))$.

Al variare di x in A tali punti descrivono una curva (o meglio un insieme del piano) che si chiama grafico della funzione $f(x)$. Il concetto di grafico si può dare in generale per una funzione $f: A \rightarrow B$, con A e B insiemi qualsiasi; si dice *grafico* di f il sottoinsieme G_f del prodotto cartesiano¹ $A \times B$ così definito:

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

E' chiaro che una funzione $f(x)$ è univocamente individuata dal suo grafico.

¹ Il prodotto cartesiano di A e B , $A \times B$, è l'insieme delle coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ è il prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; se $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, x si chiama *ascissa* e y *ordinata* di P .

Osservazione 2.1. Affinché un insieme F del prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi sia grafico di una funzione $f: A \rightarrow B$, è necessario e sufficiente che, per ogni $x \in A$, esista uno e un solo $y \in B$ tale che (x, y) appartenga a F .

Questo fa sì che si possano identificare le funzioni di A in B con i sottoinsiemi del prodotto $A \times B$ aventi la proprietà suddetta.

Più precisamente, una funzione di A in B si può definire formalmente come una terna

$$f = (A, B, F),$$

dove A e B sono insiemi, e F è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$ tale che, per ogni $x \in A$, esista uno e un solo $y \in B$ tale che $(x, y) \in F$.

In tal modo, la nozione di funzione perde il suo carattere primitivo e viene definita unicamente in termini di insiemi; corrispondentemente all'accrescersi del formalismo, viene però meno l'immediatezza dell'intuizione. ■

Il problema dello studio qualitativo del grafico di una funzione verrà affrontato in seguito. Riportiamo nella figura 3.1 i grafici di alcune funzioni elementari, molti dei quali sono già noti.

Per quello che riguarda le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$ (e le combinazioni di queste $\tan x$, $\cot x$ ecc.) ci si riferirà per il momento alla loro definizione intuitiva data nella trigonometria elementare (per una trattazione più rigorosa, vedi il secondo volume di quest'opera).

Talora si parla della funzione $f(x)$ senza specificare il dominio e il codominio. Questo avviene perlopiù quando la funzione in questione è una combinazione di funzioni elementari, ognuna delle quali ha un dominio, per così dire, naturale. Il dominio, o insieme di definizione, della nostra funzione $f(x)$ sarà allora il più grande insieme in cui tutte le funzioni considerate abbiano senso.

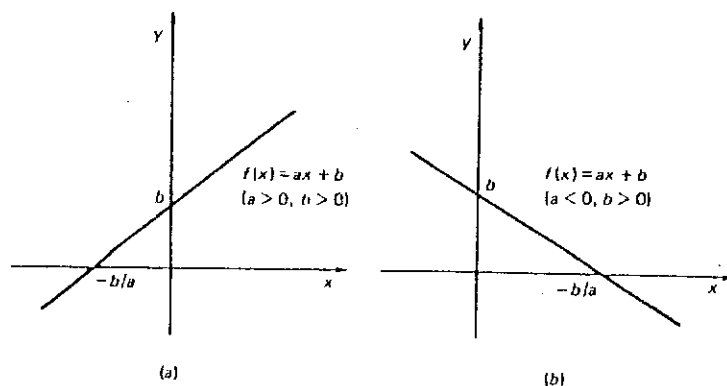
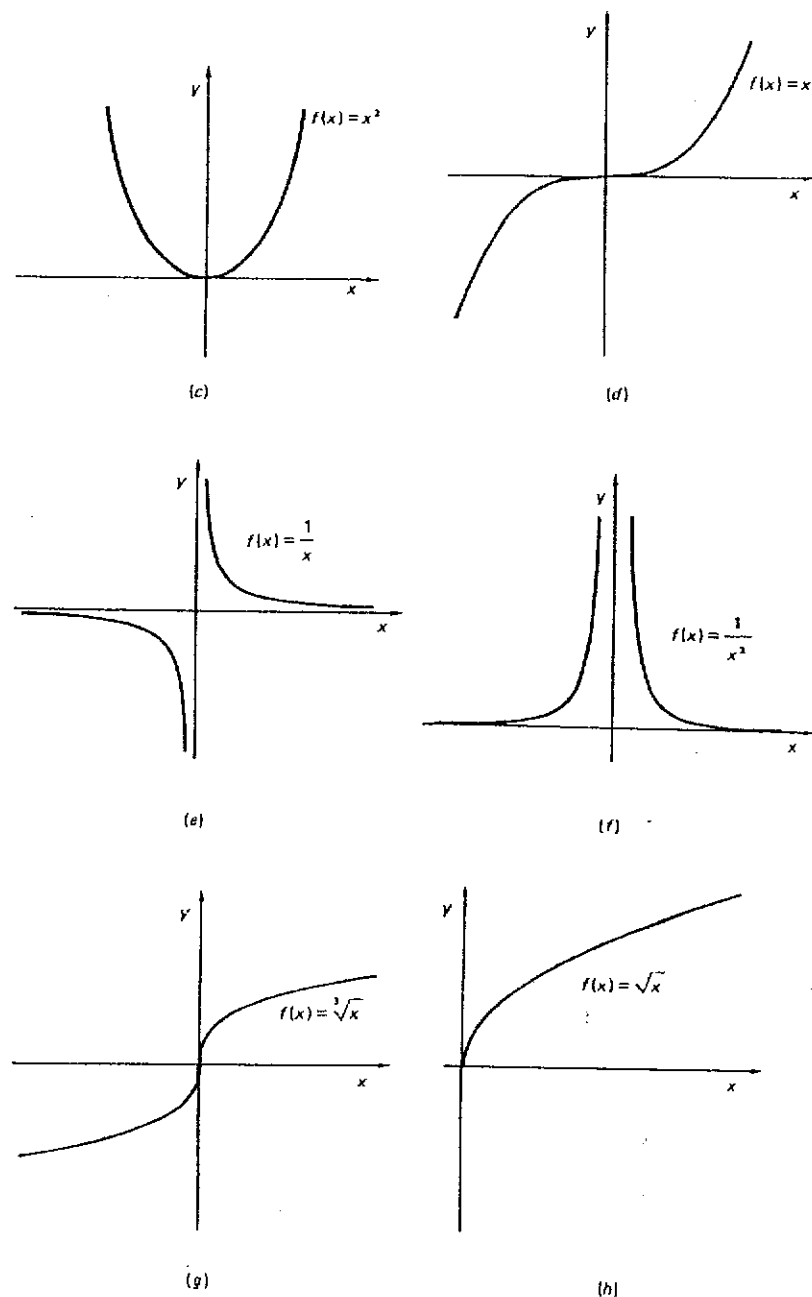
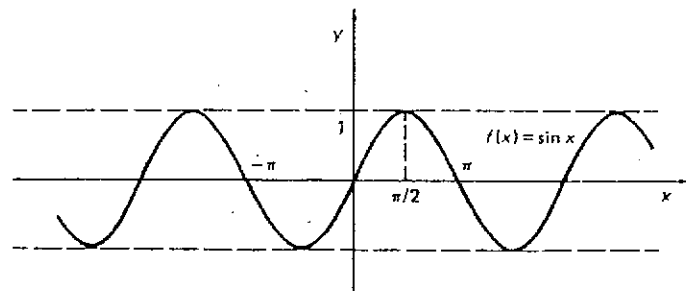


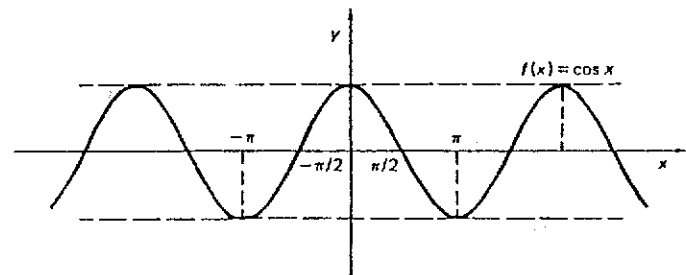
Figura 3.1



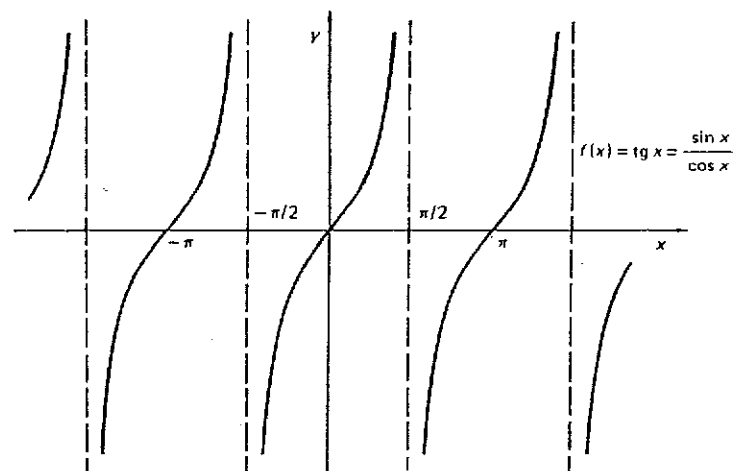
(segue)



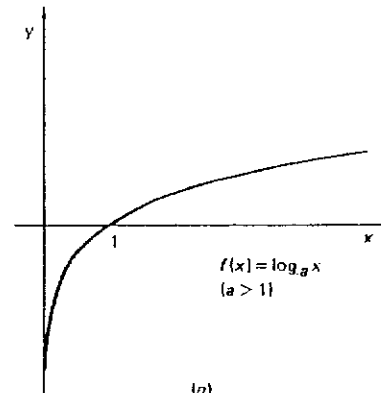
(i)



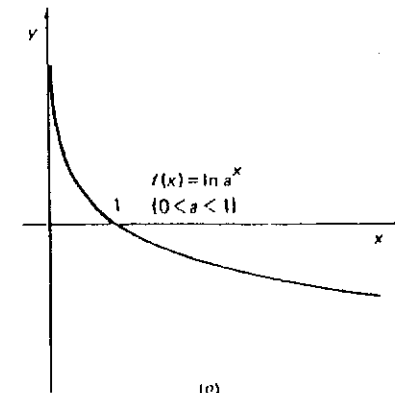
(l)



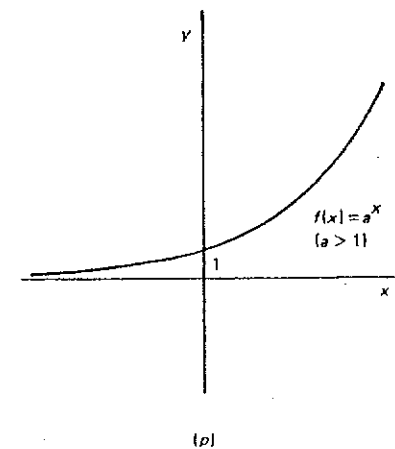
(m)



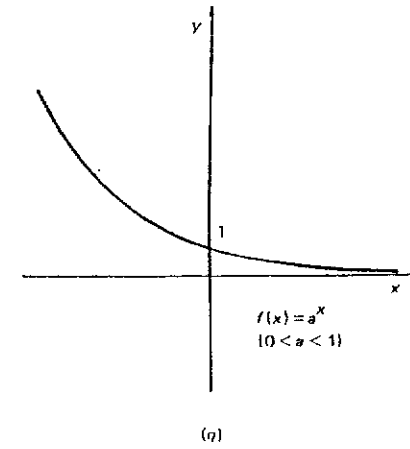
(n)



(o)



(p)



(q)

Esempio 2.1

Sia $f(x) = \sqrt{\log_{10} x}$. Il $\log_{10} x$ è definito per $x > 0$. Inoltre, perché la radice abbia senso, occorre che sia $\log_{10} x \geq 0$, cioè che sia $x \geq 1$. Ne segue che la funzione $f(x)$ ha come dominio l'insieme $[1, +\infty)$. ■

Esempio 2.2

Sia $f(x) = \log_{10} x + \sqrt{1-x^2}$. Di nuovo $\log_{10} x$ è definito per $x > 0$. Inoltre, la

funzione $\sqrt{1-x^2}$ è definita per $1-x^2 \geq 0$, cioè per $|x| \leq 1$. Il dominio di funzione della $f(x)$ sarà dunque l'intersezione dei due, cioè l'intervallo $(0, 1]$. ■

A differenza di quanto avviene per il dominio, non esiste in genere un codominio naturale, e il considerare una funzione a valori in questo o quell'insieme è usualmente una questione di convenienza. E' chiaro che la scelta non può essere del tutto arbitraria; ad esempio è necessario che il codominio contenga l'immagine. D'altra parte, un qualsiasi insieme che contiene $f(A)$ può essere preso, in linea di principio, come codominio della funzione f .

Ad esempio, la funzione A^x si può considerare come funzione a valori in $\mathbb{R}$, ma anche come a valori in $\mathbb{R}^+$. Si sceglierà la seconda alternativa quando si vorrà mettere in evidenza il fatto che A^x è sempre positivo; la prima quando ciò è secondario, e si preferisce trattare tale funzione alla stessa stregua delle altre funzioni reali.

Esercizi

2.1 Si traccino i grafici delle seguenti funzioni:

- (a) $f(x) = |x|$
- (b) $f(x) = x^2 - 2x$
- (c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x+2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$
- (d) $f(x) = 2 - |x+1|$
- (e) $f(x) = (x + |x|)/2$
- (f) $f(x) = \max(x^2, x+3)$
- (g) $f(x) = |x^2 + x|$
- (h) $f(x) = (x+1)^3$

2.2 Si tracci il grafico delle funzioni

$$f(x) = [x],$$

$$f(x) = x - [x] = \{x\},$$

rispettivamente parte intera e parte frazionaria di x .

2.3 Si trovino i domini delle seguenti funzioni:

- (a) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x}$
- (b) $\frac{x+2}{x-2}$
- (c) $\log_{10}(2^x - 2)$
- (d) $\log_{10} x - \log_{10}(1-x)$
- (e) $\log_{10} \frac{x}{1-x}$
- (f) $\frac{x^2-2}{x}$

2.4 Un corpo che viene lasciato cadere percorre circa $5t^2$ metri in t secondi. Se una palla cade da un'altezza di 80 m, si disegni in un grafico l'altezza dal suolo come funzione del tempo per i primi quattro secondi dall'inizio della caduta.

2.5 Un'auto viaggia per due ore alla velocità costante di 80 km/h, poi fa una sosta di un'ora e prosegue per altre tre ore alla velocità di 100 km/h.

- (a) Si tracci un grafico della distanza percorsa in funzione del tempo.
- (b) Si trovi l'espressione analitica della funzione $f(t)$ che ha tale grafico.

3 Funzione composta e funzione inversa

Siano A, B e C tre insiemi, e siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ due funzioni. Ad ogni $x \in A$ la f associa un elemento $f(x)$ di B ; a quest'ultimo elemento la g associa a sua volta un elemento $g(f(x))$ appartenente a C .

Resta così definita un'applicazione di A in C che, ad ogni $x \in A$, associa un elemento $g(f(x)) \in C$. Tale funzione si denota con il simbolo $g \circ f$ (si legge *g composto f*) e si dice *funzione composta* di g ed f .

Riassumendo, la funzione composta $g \circ f$ è l'applicazione di A in C definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Non sarà inutile sottolineare che, per poter parlare di funzione composta $g \circ f$, è necessario che l'immagine di f sia contenuta nel dominio di g .

Esempio 3.1

Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, definita da $f(x) = x^2 + 1$ e $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $g(x) = \sqrt{x}$.

Si ha allora

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 1}.$$

In questo caso si può anche considerare la funzione $f \circ g$; si ha

$$f \circ g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (f \circ g)(x) = x + 1.$$

Si osservi che $f \circ g \neq g \circ f$. E' da notare anche che, benché la funzione $x+1$ sia definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione composta $f \circ g$ è definita solo se $x \in \mathbb{R}^+$. ■

Esempio 3.2

Siano

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 1,$$

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Poiché l'immagine di f non è contenuta nel dominio di g , non esiste la funzione $g \circ f$.

La funzione composta esisterebbe se si considerasse la funzione $x^3 + 1$ come definita solo per $x > -1$, ovvero se si prendesse la restrizione² della funzione f all'intervallo $[-1, +\infty)$.

Infatti, poiché $f([-1, +\infty)) = [0, +\infty)$, il dominio di g coincide con l'immagine della $\tilde{f}$, restrizione f a $[-1, +\infty)$. Risulta allora

$$g \circ \tilde{f}: [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ \tilde{f})(x) = \sqrt{x^3 + 1}.$$

In generale, quando si parla di funzioni f e g senza specificare i domini e i codomini, si parlerà della funzione $g \circ f$, con la convenzione che il dominio di f debba essere scelto in modo che l'immagine di f sia contenuta nel dominio di g (vedi anche esempio 2.1). ■

Vediamo ora il concetto di funzione inversa. Sia $f: A \rightarrow B$; diremo che f è *iniettiva* se manda punti diversi in punti diversi, cioè se

$$f(x_1) \neq f(x_2), \text{ quando } x_1 \neq x_2.$$

Se una funzione è iniettiva, ogni elemento della sua immagine $f(A)$ proviene da uno e un solo elemento di A ; la funzione $g: f(A) \rightarrow A$ che associa a y l'unico elemento x che verifica $y = f(x)$ si chiama *funzione inversa della f* e si indica con f^{-1} . Si ha

$$f^{-1} \circ f = I_A, \quad f \circ f^{-1} = I_{f(A)}, \quad [3.1]$$

dove se E è un insieme si indica con I_E la funzione identità:

$$I_E: E \rightarrow E, \quad I_E(x) = x, \quad \forall x \in E.$$

Si noti che le [3.1] si possono anche scrivere per esteso:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x, & \forall x \in A, \\ f(f^{-1}(x)) &= x, & \forall x \in f(A). \end{aligned}$$

Un tipico esempio di funzioni iniettive (o invertibili³) è dato dalle funzioni strettamente monotone.

Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *crescente* se, per ogni coppia di punti x_1, x_2 di A , con $x_1 > x_2$, risulta $f(x_1) \geq f(x_2)$. Si vede subito che la funzione f è crescente se e solo se

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2. \quad [3.2]$$

² In generale se $f: A \rightarrow B$ e se $C \subset A$ si dice *restrizione di f a C* la funzione

$$f_C: C \rightarrow B, \quad f_C(x) = f(x), \quad \forall x \in C.$$

³ Qui e nel seguito useremo il termine *invertibile* come sinonimo di *iniettiva*. Avvertiamo comunque che talvolta l'espressione *applicazione invertibile* viene usata per denotare un'applicazione iniettiva e surgettiva, cioè un'applicazione biunivoca.

Analogamente, una funzione f si dice *decrecente* se risulta

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0, \quad \forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2. \quad [3.3]$$

La quantità a primo membro delle [3.2] e [3.3] si chiama *rapporto incrementale* della funzione f ; una funzione sarà dunque crescente (o decrecente) in A se il suo rapporto incrementale è sempre ≥ 0 (≤ 0).

Se poi nelle [3.2], [3.3] vale sempre la disuguaglianza stretta, la funzione f si dirà *strettamente crescente* (o strettamente decrecente). Le funzioni crescenti e decrecenti si riuniscono nella denominazione comune di *funzioni monotone*; strettamente monotone se sono strettamente crescenti o decrecenti.

E' facile vedere che esistono funzioni invertibili in un intervallo che non sono monotone; un esempio è dato dalla funzione il cui grafico è riportato nella figura 3.2.

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{se } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Osserviamo però fin d'ora che se una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è invertibile e *continua*, allora è necessariamente monotona (vedi più oltre, lemma 11.1).

In generale non è facile trovare un'espressione analitica per l'inversa di una data funzione. Meno complicato è disegnare il grafico di f^{-1} , una volta che il grafico della f sia conosciuto.

Non è difficile infatti convincersi che il grafico di f^{-1} può essere ottenuto da quello

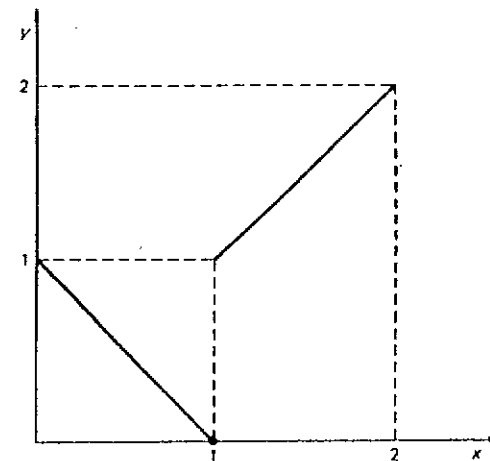


Figura 3.2

di f semplicemente riflettendo quest'ultimo rispetto alla diagonale del primo quadrante, come nella figura 3.3.

Esempio 3.3

La funzione $\sin x$, definita in $\mathbb{R}$, non è evidentemente invertibile. D'altra parte, la funzione $f(x)$, restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, risulta crescente in esso, e quindi iniettiva.

La funzione inversa f^{-1} manda $[-1, 1]$ in $\mathbb{R}$ e si indica con "arcsin x " (raramente con $\sin^{-1} x$); il suo grafico è riportato nella figura 3.4.

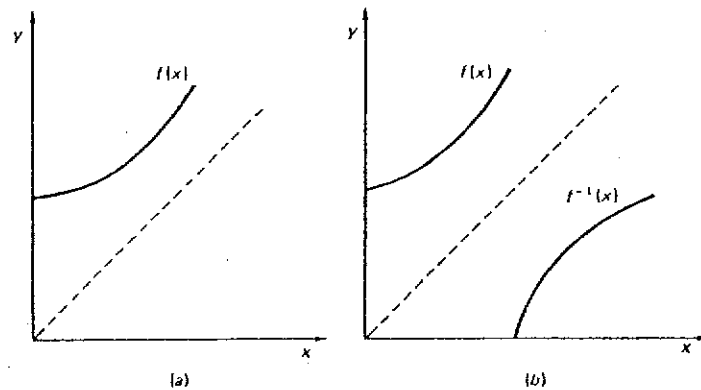


Figura 3.3

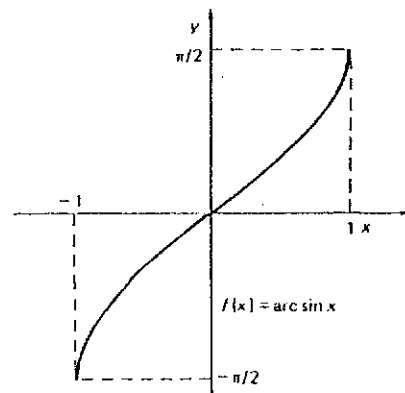


Figura 3.4

È ugualmente invertibile la restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0, \pi]$; la funzione inversa si chiama "arccos x " (vedi fig. 3.5).

Si verifica facilmente che

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Per finire, osserviamo che risulta invertibile la restrizione di $\operatorname{tg} x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$; la funzione inversa "arctg x " ha il grafico indicato nella figura 3.6.

Esempio 3.4. La funzione logaritmo

Abbiamo visto nel capitolo 2 (§ 8), la definizione della funzione esponenziale A^x , $A > 0$. Se A è diverso da 1 la funzione A^x è strettamente monotona (crescente se $A > 1$, decrescente se $A < 1$) e dunque invertibile. La sua funzione inversa si chiama

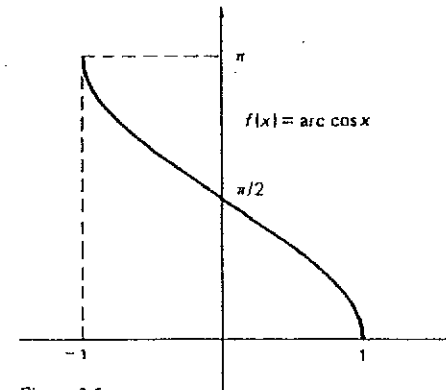


Figura 3.5

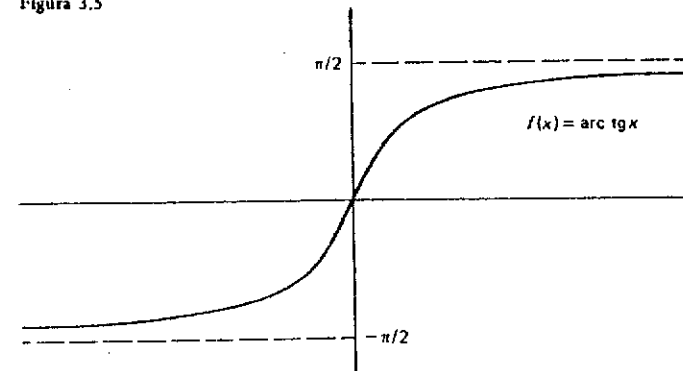


Figura 3.6

logaritmo in base A e si indica con il simbolo

$$\log_A x.$$

Il grafico della funzione logaritmo è riportato nel paragrafo precedente, e si può ottenere ruotando nel modo che si è detto quello della funzione esponenziale A^x . Le basi più comunemente usate per i logaritmi sono 10 (che è più comoda nei calcoli numerici) ed e (che conviene per motivi che risulteranno chiari in seguito). Noi useremo sempre in seguito (salvo specifico avviso) i logaritmi in base e , o *logaritmi naturali*, che denoteremo con $\ln x$.

In ogni caso, si può facilmente passare da una base di logaritmi ad un'altra mediante la formula

$$\log_A x = \log_B x \cdot \log_A B,$$

la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esercizi

3.1 Sia $f(x) = x^2 + 2$. Si calcoli

$$f(0), f(1), f(t), f(1-a), (f(x))^2, f(f(x)), f[(f(x))^2].$$

3.2 Sia $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = \sqrt{1+x^2}$. Si calcoli

$$(f \circ g)(x), (g \circ f)(x).$$

3.3 Dire se sono invertibili le seguenti funzioni, considerate negli intervalli a lato:

- (a) $x+2$ $(-\infty, 3)$
- (b) x^2 $[-2, 1]$
- (c) x^2 $(0, 5)$
- (d) $\log_{10} x$ $(1, +\infty)$
- (e) $\sin x$ $[0, \pi]$
- (f) $\cos x$ $(-\pi/2, \pi/2)$
- (g) $\sqrt{x}$ $[0, +\infty)$
- (h) $1/x$ $(0, +\infty)$

3.4 Disegnare il grafico delle inverse di quelle funzioni dell'esercizio precedente, che risultino iniettive.

3.5 Sia $f(x) = 1 + \sin x^2$; si calcoli

$$f(x+h) - f(x), f(1-x), f(2^x).$$

3.6 Trovare l'insieme di definizione delle funzioni che seguono; dire se sono invertibili e calcolare, in caso affermativo, la loro inversa:

- (a) $f(x) = x/(x-1)$
- (b) $f(x) = 2x/(1+x)$
- (c) $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$
- (d) $f(x) = 1/(2x+3)$

3.7 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Si dimostri che

- (a) $-f$ è decrescente,
- (b) se f è invertibile, f^{-1} è crescente.

4 Limiti di funzioni

Nel capitolo precedente abbiamo considerato i limiti di successioni, cioè di funzioni definite in $\mathbb{N}$.

Vogliamo ora estendere il concetto di limite in modo da comprendere limiti di funzioni definite in un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Sia dunque $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita in A . Sia x_0 un punto di accumulazione per A , e sia L un numero reale.

Definizione 4.1 Diremo che L è il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 , e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tale che per ogni $x \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$, risulti

$$|f(x) - L| < \epsilon. \quad [4.1]$$

Si noti che, anche se f è definita nel punto x_0 , non si richiede che la [4.1] sia soddisfatta per $x = x_0$; in altre parole, il valore L del limite è indipendente dal valore della funzione nel punto x_0 . Le ragioni di questa scelta sono soprattutto di comodo, affinché la definizione risulti più maneggevole in alcuni casi, e di consuetudine.

La definizione 4.1 può essere riformulata in termini di intorno nel modo seguente: si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, per ogni intorno $I(L, \epsilon)$ di L , esiste un intorno $I(x_0, \delta)$ di x_0 tale che, per ogni $x \in I(x_0, \delta) \cap A - \{x_0\}$,⁴ si abbia $f(x) \in I(L, \epsilon)$ (o, in altre parole, tale che $f(I(x_0, \delta) \cap A - \{x_0\})$ sia contenuto in $I(L, \epsilon)$).

Esempio 4.1

Dimostriamo che (vedi fig. 3.7):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad [4.2]$$

Sia $0 < x < \pi/2$, e nel cerchio di raggio 1 si riportino l'arco x e i corrispondenti segmenti di lunghezza $\sin x$ e $\tan x$ (vedi fig. 3.7). L'area del triangolo di altezza $\sin x$ e base 1 è

⁴ Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, si chiama *differenza* di A e B l'insieme

$$A - B = \{x \in A : x \notin B\} = A \cap \mathbb{R} \setminus B.$$

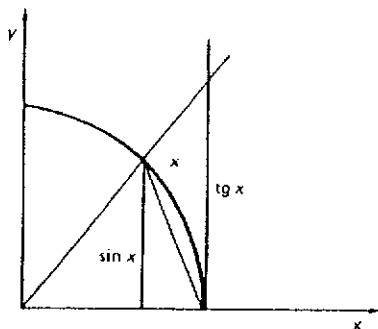


Figura 3.7

$\frac{1}{2} \sin x$; quella del settore circolare che lo contiene è $x/2$; quella, infine, del triangolo di base 1 e altezza $\tan x$ è $\frac{1}{2} \tan x$. Si ha dunque

$$\sin x < x < \tan x,$$

e quindi, dividendo per $\sin x$ e invertendo,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Quest'ultima relazione resta valida anche per $-\pi/2 < x < 0$ dato che i suoi termini restano invariati se si scrive $-x$ al posto di x ; da essa segue

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{2},$$

e, in definitiva,

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{x^2}{2},$$

cosicché, fissato $\epsilon > 0$, se $0 < |x| < \delta(\epsilon) = \sqrt{2\epsilon}$, si ha

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \epsilon. \blacksquare$$

Esempio 4.2

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Si ha infatti

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2},$$

e ricordando l'esempio precedente,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \right| &= \frac{1}{2} \left| 1 - \frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right) \left(1 - \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right) < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{(x/2)^2}{2} = \frac{x^2}{8}, \end{aligned}$$

da cui segue il risultato. ■

Veniamo ora a un teorema che collega tra loro i limiti di funzioni e quelli di successioni.

Teorema 4.1 Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f(x)$ una funzione definita in A e x_0 un punto di accumulazione per A . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}$, a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0 , risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Dimostrazione. Ci limiteremo al caso di L finito. (I) Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ e sia $\{x_n\}$

una qualsiasi successione in $A - \{x_0\}$, convergente a x_0 . Per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, si ha $|f(x) - L| < \epsilon$. D'altra parte, in corrispondenza di δ , esiste un $\nu \in \mathbb{R}$ tale che, se $n > \nu$, risulta $0 < |x_n - x_0| < \delta$, e dunque $|f(x_n) - L| < \epsilon$. Di conseguenza si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

(II) Supponiamo, viceversa, che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0 .

Se non fosse $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, dovrebbe esistere un $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, sarebbe possibile trovare un punto $x \in A$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \epsilon$. Preso successivamente $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$, si troverebbero allora dei punti $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ di $A - \{x_0\}$ per i quali risulterebbe $|x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$.

La successione $\{x_n\}$ così costruita converge a x_0 , ma non si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$, contro l'ipotesi. ■

Esempio 4.3

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} A^x = A^{x_0} \quad [4.4]$$

relazione che segue dal teorema precedente e dalla [8.3] del capitolo 2. ■

Osservazione 4.1. Il teorema appena dimostrato può essere usato anche per provare che una data funzione non ha limite per x che tende a x_0 .

Basterà, per questo, trovare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, ambedue convergenti a x_0 e tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = L, \quad \text{con } L \neq l.$$

Si consideri, a titolo di esempio, la funzione

$$f(x) = \cos(1/x),$$

definita per $x \neq 0$. Mostriamo che non esiste il limite di $f(x)$ per $x \rightarrow 0$. Basta per questo considerare le successioni

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

ambedue convergenti a zero. Si ha

$$f(x_n) = \cos 2n\pi = 1, \quad f(y_n) = \cos(2n+1)\pi = -1,$$

cosicché il $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ non esiste. ■

Il teorema 4.1 dà un'altra giustificazione del posto preminente che i limiti di successioni occupano nella teoria generale dei limiti. Infatti, oltre a fare appello più immediatamente all'intuizione, i limiti di successioni, proprio in virtù del teorema di cui sopra, possono essere presi come base per tutta la teoria dei limiti, almeno finché ci si mantenga in spazi metrici, in cui sia cioè definita una distanza che verifichi le condizioni del capitolo 1 (§ 2), sulle quali in ultima analisi si basa la dimostrazione del teorema 4.1.

E' immediato, sia sulla base della definizione sia usando il teorema precedente, estendere i risultati del capitolo 2 (§ 4) concernenti le operazioni con i limiti, ai limiti di funzioni. In particolare, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

non appena esistono i limiti a secondo membro, e quando non si tratti di forme indeterminate. E' altresì valido il teorema dei due carabinieri (teorema 4.1, cap. 2).

Torniamo ora alla definizione 4.1, nella quale si era supposto che sia il punto x_0 che il numero L fossero reali. Vogliamo ora considerare il caso in cui uno dei due sia infinito.

Definizione 4.2 Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se, per ogni $M \in \mathbb{R}$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in A$, con $0 < |x - x_0| < \delta$, si abbia

$$f(x) > M.$$

Definizione 4.3 Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $M \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in A$, con $x > M$, si abbia

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

Analoghe definizioni si possono dare con $-\infty$ al posto di $+\infty$; è conveniente però dare una definizione generale, cioè valida in tutti i casi.

Per questo, indichiamo con $\mathbb{R}^*$ la retta ampliata, cioè l'insieme

$$\mathbb{R}^* = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

e ricordiamo che si erano definiti intorno di $+\infty$ le semirette $(a, +\infty)$ e intorno di $-\infty$ le semirette $(-\infty, a)$.

Diremo che $+\infty[-\infty]$ è un punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}$ se A non è limitato superiormente [inferiormente].

Si ha allora la seguente

Definizione 4.4 Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale. Sia $\xi \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per A . Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

se, per ogni intorno U di λ , esiste un intorno V di ξ tale che, per ogni $x \in V \cap A - \{\xi\}$, si abbia

$$f(x) \in U$$

o, in altre parole, tale che

$$f(V \cap A - \{\xi\}) \subset U.$$

Il seguente teorema è analogo al teorema 4.2 del capitolo 2.

Teorema 4.2 (della permanenza del segno) *Se $L = \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) > 0$, allora esiste un intorno V di ξ tale che $f(x) > 0$ in $V - \{\xi\}$.*

Dimostrazione. Sia U un intorno di L , composto tutto di numeri positivi (ad esempio si può prendere $U = I(L, L)$ se L è finito, e $U = (0, +\infty)$ se $L = +\infty$). Per la definizione di limite, esisterà un intorno V di ξ tale che per ogni $x \in V - \{\xi\}$ risulta $f(x) \in U$, e dunque $f(x) > 0$. ■

Esercizi

4.1 Dimostrare che

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0,$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n.$$

(Si usi la disuguaglianza [4.1] del cap. 1.)

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\left(\text{Si osservi che } \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x] + 1} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x] + 1}\right)$$

4.2 Si dimostri, usando direttamente la definizione, che

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+2} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{\sqrt{x} + 2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

4.3 Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}.$$

4.4 Dimostrare che le definizioni 4.1, 4.2 e 4.3 sono casi particolari della definizione 4.4.

4.5 Si supponga che

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Si dica quale delle tre proposizioni seguenti discende dalla (1):

(A) se $x > 0$, si ha $f(x) < 0$;

(B) esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(x) < 0$ per ogni $x > \epsilon$

(C) per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\eta > 0$ tale che per $x > \eta$ si abbia $f(x) > \epsilon$.

4.6 Dimostrare che non esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \cos x^2.$$

4.7 Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

4.8 Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}.$$

(Usare la parte intera di x .)

4.9 Si dimostri il teorema 4.1 nel caso $L = \pm\infty$.

5 Restrizioni. Limiti destro e sinistro

Siano $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale, B un sottoinsieme di A e x_0 un punto di accumulazione per B (e quindi anche per A). Indichiamo con f_B la restrizione della f a B . E' immediato verificare il seguente risultato:

Se si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

allora esiste il limite di f_B , per $x \rightarrow x_0$, e risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_B(x) = L.$$

Infatti, se per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $A - \{x_0\}$ e convergente a x_0 , si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$, lo stesso accadrà per ogni successione a valori in $B - \{x_0\}$.

Teorema 5.1 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A . Per $r > 0$ indichiamo con f_r la restrizione di f all'insieme $I(x_0, r) \cap A$. Si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f_r(x) = L$.

Dimostrazione. Per quanto visto sopra, se $f(x)$ converge a L allora anche $f_r(x)$ converge a L . Basterà dunque provare il viceversa. Sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f_r(x) = L$; allora, per ogni

intorno U di L , esiste un intorno V di x_0 tale che, per ogni $x \in V \cap I(x_0, r) \cap A - \{x_0\}$, risulti

$$f_r(x) \equiv f(x) \in U.$$

Ora $W = V \cap I(x_0, r)$ è un intorno di x_0 , e quindi, per ogni intorno U di L , esiste un intorno W di x_0 tale che, per $x \in W \cap A - \{x_0\}$, si abbia

$$f(x) \in U.$$

Ciò dimostra che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$. ■

Dal teorema 5.1 segue immediatamente il

Corollario 5.1 Siano f e g due funzioni definite in A , e sia x_0 un punto di accumulazione di A . Se $\forall x \in I(x_0, r) \cap A$ si ha $f(x) = g(x)$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) - g(x)\} = 0.$$

In particolare, se esiste un limite per $x \rightarrow x_0$ della $f(x)$, allora esiste anche quello della $g(x)$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Condensando in una frase il teorema 5.1 e il suo corollario, si può dire che il valore del limite di una funzione f , per $x \rightarrow x_0$, dipende solo dai valori di f nei punti "vicini" a x_0 .

Il teorema 5.1 descrive essenzialmente l'unico caso in cui, dall'esistenza del limite di una restrizione della f , si può risalire a quello della funzione stessa. Le cose stanno diversamente se si considerano due o più restrizioni della f .

Proposizione 5.1 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, siano B e C due sottoinsiemi di A e sia x_0 un punto di accumulazione per ambedue gli insiemi B e C . Supponiamo che

- (a) $B \cup C = A$
 (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f_B(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_C(x) = L$.

Allora si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno U di L esistono due intorni V_1 e V_2 di x_0 tali che

$$\begin{aligned} x \in V_1 \cap B - \{x_0\} &\Rightarrow f(x) = f_B(x) \in U \\ x \in V_2 \cap C - \{x_0\} &\Rightarrow f(x) = f_C(x) \in U. \end{aligned} \quad [5.1]$$

D'altra parte, $V = V_1 \cap V_2$ è un intorno di x_0 , e $(V \cap B) \cup (V \cap C) = V \cap A$. Segue allora dalle [5.1] che $f(x) \in U$ per ogni $x \in V \cap A - \{x_0\}$, da cui la tesi. ■

Un caso di notevole interesse è il seguente. Se f è una funzione definita in A , e x_0 è un punto di $\mathbb{R}$, si pone

$$A_+ = A \cap [x_0, +\infty)$$

$$A_- = A \cap (-\infty, x_0].$$

e si chiamano *limiti destro e sinistro* della funzione f , per $x \rightarrow x_0$, i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_{A_+}(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_{A_-}(x).$$

Tali limiti si indicano usualmente con i simboli

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \text{per il limite destro, e}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), \quad \text{per il limite sinistro.}$$

Dalla proposizione 5.1 segue immediatamente il

Teorema 5.2 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, e sia x_0 un punto di accumulazione per A , e A_+ e A_- . Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Esercizi

5.1 Si calcolino i limiti $\lim_{x \rightarrow 0^+}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-}$ delle seguenti funzioni:

$$[x], \quad \{x\}, \quad \frac{x}{|x|}, \quad \frac{1}{x},$$

$$\frac{\sin x}{|x|}, \quad \frac{\sqrt{1+x}}{x}, \quad \frac{1}{x\sqrt{1+1/x^2}}, \quad \frac{x^2+3}{[x]+1}.$$

5.2 Si dimostri che si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

(Si calcolino separatamente i limiti destro e sinistro e si tenga conto degli esercizi 4.1 (c) e 4.7.)

5.3 Si dimostri l'analoga della proposizione 5.1 nel caso $x_0 = +\infty$. Alla luce di questo risultato, si ritorni sull'esercizio 11.7 del capitolo 2.

6 Limiti di funzioni monotone

Come le successioni, anche le funzioni monotone hanno uno speciale comportamento rispetto all'operazione di limite, con in più la varietà dei casi dovuta alla maggiore elasticità dei limiti di funzioni.

Noi tratteremo solo il caso di funzioni crescenti in un intervallo limitato (a, b) , lasciando al lettore il compito di enunciare gli analoghi risultati nel caso di funzioni decrescenti e nel caso di intervalli illimitati.

Teorema 6.1 Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente e sia $x_0 \in (a, b)$. Allora esiste il limite sinistro della $f(x)$, per x che tende a x_0 , e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{a < x < x_0} f(x).$$

Dimostrazione. Caso 1:

$$\sup_{a < x < x_0} f(x) = L < +\infty.$$

Dalle proprietà [1.2] e [1.3] dell'estremo superiore risulta:

- (a) $f(x) \leq L, \quad \forall x \in (a, x_0),$
 (b) $\forall \epsilon > 0, \quad \exists x_\epsilon \in (a, x_0) \quad \text{tale che} \quad L - \epsilon < f(x_\epsilon).$

Poiché $f(x)$ è crescente si ha allora, per ogni $x \in (x_\epsilon, x_0)$,

$$L - \epsilon < f(x) \leq L,$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Caso 2:

$$\sup_{a < x < x_0} f(x) = +\infty$$

(si noti che questo può accadere solo se $x_0 = b$, dato che per la monotonia di f se $x_0 < b$ si ha $\sup_{a < x < x_0} f(x) \leq f(x_0)$).

Fissato $M > 0$, esiste un $x_M \in (a, b)$ tale che

$$f(x_M) > M,$$

e quindi, per ogni $x \in (x_M, b)$, si ha $f(x) > M$, cosicché

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty. \blacksquare$$

In maniera analoga, si dimostra che per ogni $x_0 \in [a, b)$ risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x_0 < x < b} f(x)$$

e il limite può essere $-\infty$ solo nel caso $x_0 = a$.

Il teorema precedente è di grande utilità nel calcolo dei limiti di funzioni monotone, come si può vedere dal seguente

Esempio 6.1

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0. \quad [6.1]$$

La funzione $\ln x$ è crescente, e dunque, per il teorema precedente, esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \ln x = L.$$

Se $\{x_n\}$ è una successione a valori in $(x_0, +\infty)$, convergente a x_0 , si deve avere (teorema 4.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = L.$$

In particolare, se si sceglie $x_n = x_0 e^{1/n}$, si ha

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(x_0 e^{1/n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln x_0 + \frac{1}{n} \right) = \ln x_0.$$

Analogamente, se si prende $x_n = x_0 e^{-1/n}$, si trova

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \ln x = \ln x_0,$$

e dunque la [6.1].

La [6.1] vale anche per logaritmi in base A , come segue facilmente dalla relazione $\log_A x = \ln x / \ln A$. $\blacksquare$

Esercizi

6.1 Dimostrare che, se $f(x)$ è decrescente in $A = (a, +\infty)$, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_A f(x).$$

*7 Massimo e minimo limite

Né il criterio di Cauchy, né i concetti di massimo e minimo limite per le funzioni, sono di grande importanza nell'economia di questo corso: ci limiteremo pertanto a dare le definizioni di massimo e minimo limite di una funzione per $x \rightarrow +\infty$, lasciando al lettore la discussione degli altri casi.

Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme non limitato superiormente e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Poniamo, per $r \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L(r) &= \sup_{x \in A \cap (r, +\infty)} f(x), \\ l(r) &= \inf_{x \in A \cap (r, +\infty)} f(x). \end{aligned} \quad [7.1]$$

Le funzioni L e l sono definite in $\mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}^*$; più precisamente, la funzione L può assumere il valore $+\infty$ (si può anche avere $L(r) = +\infty \forall r \in \mathbb{R}$) e la funzione l il valore $-\infty$.

Se $L(r) \equiv +\infty$, porremo

$$\max \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

altrimenti è $L(r_0) < +\infty$ per qualche $r_0 \in \mathbb{R}$ e la funzione $L(r)$ è decrescente in $[r_0, +\infty)$. In questo caso si pone

$$\max \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{r > r_0} L(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} L(r).$$

Se si conviene, nel caso $L(r) \equiv +\infty$, di porre

$$\inf_{r \in \mathbb{R}} L(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} L(r) = +\infty,$$

si può in ogni caso scrivere

$$\max \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf_{r \in \mathbb{R}} L(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} L(r). \quad [7.2]$$

Analogamente,

$$\min \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup_{r \in \mathbb{R}} l(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} l(r), \quad [7.3]$$

con la convenzione che, se $l(r) \equiv -\infty$, allora $\lim_{r \rightarrow +\infty} l(r) = -\infty$.

Il seguente risultato è analogo al teorema 10.1 del capitolo 2.

Teorema 7.1 Si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ se e solo se

$$\max \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \min \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Dimostrazione. Limitiamoci al caso di L finito. Sia $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ e sia $\epsilon > 0$; esiste un $r_0 \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x > r_0$, risulta

$$L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon.$$

Allora, per $r > r_0$,

$$L - \epsilon \leq l(r) \leq L(r) \leq L + \epsilon,$$

da cui segue immediatamente, passando al limite per $r \rightarrow +\infty$,

$$L - \epsilon \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} l(r) \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} L(r) \leq L + \epsilon.$$

Poiché $\epsilon > 0$ è arbitrario, si dovrà avere dunque

$$\min \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \max \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L. \quad [7.4]$$

Viceversa, se la [7.4] è verificata, tenendo conto del fatto che, se $x > r$ risulta $l(r) \leq f(x) \leq L(r)$, si ha immediatamente che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L. \quad \blacksquare$$

Esercizi

7.1 Si dimostri il teorema 7.1 nel caso $L = \pm \infty$.

7.2 Se x_0 è un punto di accumulazione per A e $r > 0$, si pone

$$L(r) = \sup_{A \cap I(x_0, r) - \{x_0\}} f(x),$$

$$l(r) = \inf_{A \cap I(x_0, r) - \{x_0\}} f(x)$$

$$\max \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf_{r > 0} L(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} L(r),$$

$$\min \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup_{r > 0} l(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} l(r).$$

Si dimostri l'analogo del teorema 7.1.

7.3 Si calcoli

$$\max \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x, \quad \min \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x,$$

$$\max \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \quad \min \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \quad \max \lim_{x \rightarrow 0} \{x\}.$$

*7.4 Si dimostri che, se

$$L = \max \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x),$$

allora esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \rightarrow +\infty$, tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L.$$

Si faccia lo stesso quando $x \rightarrow x_0$.

7.5 Si dimostri che, se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L > 0$, si ha

$$\max \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \max \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\min \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \min \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

*7.6 Un numero reale λ si dice un *maggiorante locale* per la funzione f vicino a x_0 se esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) \leq \lambda$ per ogni $x \in A \cap V - \{x_0\}$. Dimostrare che il massimo limite di f , per x che tende a x_0 , è l'estremo inferiore dei maggioranti locali. Analogamente, il minimo limite è l'estremo superiore dei minoranti locali. Si consideri il caso $x_0 = +\infty$, e si confronti con la definizione 10.2 del capitolo precedente (massimo limite per successioni).

8 Funzioni continue

Definizione 8.1 Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è continua in $x_0 \in A$ se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in A$, con $|x - x_0| < \delta$, risulti

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

La definizione precedente esprime rigorosamente il fatto che f è continua se i suoi valori variano con continuità, cioè se a "piccole" variazioni della variabile indipendente x corrispondono "piccole" variazioni del valore $f(x)$.

E' immediato vedere che se x_0 è un punto isolato di A , allora ogni funzione è continua in x_0 ; se invece x_0 è punto di accumulazione per A , allora f è continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Nel linguaggio degli intorni la definizione 8.1 si esprime dicendo che f è continua in x_0 se e solo se per ogni intorno U di $f(x_0)$ esiste un intorno V di x_0 tale che, per ogni $x \in V \cap A$, A risulti $f(x) \in U$, ovvero tale che $f(V \cap A) \subset U$.

Se una funzione $f(x)$ è continua in ogni punto di un insieme B diremo che f è continua in B , e diremo semplicemente che f è continua se è continua in ogni punto del suo insieme di definizione.

Prima di dimostrare risultati concernenti le funzioni continue, osserviamo che sono continue le funzioni: x^n , $\sin x$, $\cos x$ (vedi esercizio 4.1 (a)), A^x (vedi esempio 4.3) e $\ln x$ (vedi esempio 6.1). Inoltre, è immediato verificare che sono continue la somma e

il prodotto di funzioni continue, nonché il quoziente di due funzioni continue (quest'ultimo ovviamente dove è definito, cioè nei punti in cui il denominatore è diverso da zero). Risultano così continue le funzioni

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{e} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Esempio 8.1

Si dimostri che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\frac{\sqrt{n+2}}{n+1} \right) = 0.$$

Infatti, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n+1} = 0.$$

D'altra parte la funzione $\sin x$ è continua, e dunque, ricordando il teorema 4.1, si ha per ogni successione $\{x_n\}$ convergente a x_0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin x_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0,$$

da cui segue immediatamente l'enunciato. ■

Il ragionamento si può ripetere per una qualsiasi funzione continua $f(x)$; se $\{x_n\}$ è una successione a valori nel dominio di f e convergente a un punto del dominio di f , risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \right), \quad [8.1]$$

una formula che, come abbiamo visto, può essere utile nel calcolo dei limiti di successioni.

Concludiamo questo paragrafo dimostrando la seguente

Proposizione 8.1 Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che f sia continua in $x_0 \in A$ e che g sia continua nel punto $f(x_0) \in B$. Allora la funzione composta $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 .

Dimostrazione. Per ogni intorno U di $g(f(x_0))$ esiste un intorno W di $f(x_0)$ tale che $g(W \cap B) \subset U$. In corrispondenza di W esiste un intorno V di x_0 tale che $f(V \cap A) \subset W \cap B$ e quindi $g \circ f(V \cap A) \subset U$. Ne segue che $g \circ f$ è continua in x_0 . ■

Esercizi

8.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nel punto $x_0 \in (a, b)$. Per $x \in [a, b]$, si ponga

$$l(x, x_0) = \inf_{t \in [x_0, x]} f(t); \quad L(x, x_0) = \sup_{t \in [x_0, x]} f(t).$$

Si dimostri che $\lim_{x \rightarrow x_0} l(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} L(x, x_0) = f(x_0)$.

8.2 Dimostrare il seguente

Teorema Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}$ se e solo se, per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un aperto.

9 Punti di discontinuità

Si capisce meglio il concetto di continuità se si studiano brevemente i punti di discontinuità di una funzione, cioè i punti in cui una funzione non è continua.

Il più semplice tipo di funzione discontinua è una funzione $f(x)$ che ha un salto in un punto x_0 ,⁵ tale cioè che esistano finiti i due limiti destro e sinistro, per x che tende a x_0 , ma sia

$$s(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq 0. \quad [9.1]$$

Il valore $s(x_0)$ si chiama *salto della funzione nel punto x_0* ; salvo cambiare eventualmente il suo valore nel punto x_0 , una funzione è continua in x_0 se e solo se $s(x_0) = 0$.

Ad esempio, la funzione $\{x\}$ ha un salto nei punti x_0 interi, e il salto della funzione in questi punti è -1 .

Un tipico esempio di funzioni che hanno salti è dato dalle funzioni monotone in un intervallo chiuso $[a, b]$. Infatti, per ogni punto $x_0 \in (a, b)$, esistono finiti i due limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Se ad esempio la funzione f è crescente, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x),$$

cosicché la f è continua in x_0 se e solo se i due limiti destro e sinistro sono uguali.

⁵ Non consideriamo i punti di discontinuità fittizie, cioè i punti x_0 in cui esiste, finito, il limite di $f(x)$, ma questo non coincide col valore $f(x_0)$. E' chiaro che basterà cambiare il valore della f in x_0 per rendere la funzione continua in x_0 .

E' interessante notare la seguente proprietà:

Proposizione 9.1 Una funzione monotona $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ può avere, al massimo, un insieme numerabile⁶ di punti di discontinuità.

Dimostrazione. Supponiamo f crescente e cominciamo col far vedere che se $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sono punti di discontinuità e $s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_n)$ sono i relativi salti, si ha

$$s(x_1) + s(x_2) + \dots + s(x_n) \leq f(b) - f(a). \quad [9.2]$$

Per $y \in (a, b)$ poniamo

$$f_+(y) = \lim_{x \rightarrow y^+} f(x) \quad \text{e} \quad f_-(y) = \lim_{x \rightarrow y^-} f(x).$$

Poiché f è crescente e $x_{i-1} < x_i$, si ha

$$f_+(x_{i-1}) \leq f_-(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n s(x_i) &= \sum_{i=1}^n \{f_+(x_i) - f_-(x_i)\} = \\ &= f_+(x_n) - f_-(x_1) - \sum_{i=2}^n \{f_-(x_i) - f_+(x_{i-1})\} \leq \\ &\leq f_+(x_n) - f_-(x_1) \leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Dalla [9.2] segue che vi possono essere, al più, un numero finito di punti con salto superiore a 1 ; siano questi $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$. Analogamente, vi possono essere, al più, un numero finito di punti con salto compreso tra $1/2$ e 1 ; siano $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}$. Consideriamo via via i punti con salto compreso tra $1/2$ e $1/4$, $1/4$ e $1/8$ ecc.; si ottiene una successione x_k di punti di (a, b) che costituiscono tutti i possibili punti di discontinuità della funzione f . ■

Un secondo tipo di discontinuità si ha nei punti x_0 in cui i limiti destro e sinistro esistono ma uno dei due o ambedue sono infiniti. Un tipico esempio è costituito dalla $1/x$ o $1/x^2$; un'altra funzione con discontinuità di questa specie è la funzione $a^{1/x}$, il cui grafico è riportato nella figura 3.8.

Infine, discontinuità di terzo tipo sono quelle esibite dalla funzione $\sin(1/x)$ nel punto $x=0$; in questo caso, non esistono i limiti destro e sinistro della funzione, o almeno uno di essi.

⁶ Ricordiamo che si dice numerabile un insieme i cui elementi si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali; ovvero i cui elementi si possono disporre in una successione.

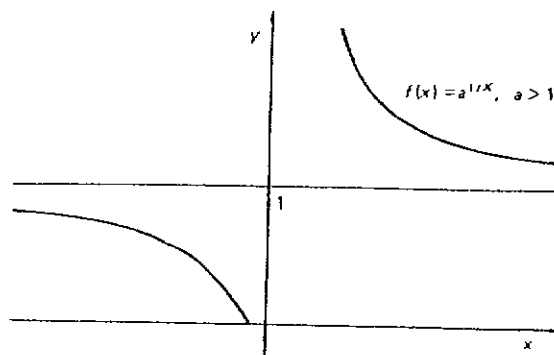


Figura 3.8

Esercizi

9.1 Precisare quali tipi di discontinuità hanno le funzioni dell'esercizio 5.1.

10 I teoremi fondamentali per le funzioni continue

Se l'importanza di una classe di funzioni si misura dalla sua ampiezza e dalle proprietà di cui godono i suoi elementi, allora le funzioni continue sono da riguardare come una delle più importanti classi funzionali di tutta l'analisi.

Infatti, da una parte quasi tutte le funzioni che intervengono nelle applicazioni dell'analisi alle scienze naturali sono continue, dall'altra le funzioni continue godono di tutta una serie di proprietà, le più importanti delle quali saranno illustrate in questo paragrafo e nei prossimi. Di più, le funzioni continue rappresentano la più vasta classe funzionale che goda di queste proprietà.

I risultati che dimostreremo si dividono in due gruppi: il primo illustra le proprietà delle funzioni continue in un intervallo, il secondo quelle delle funzioni continue in un compatto.

Una immediata conseguenza del teorema 4.2 è il seguente:

Teorema 10.1 (della permanenza del segno per funzioni continue) Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nel punto $x_0 \in A$. Se $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in V \cap A$.

Analogamente, se $f(x_0) < 0$, allora esiste un intorno di x_0 nel quale $f(x)$ rimane maggiore di L .

Ricordiamo che il teorema 10.1 era stato dimostrato in modo indipendente nel caso di un polinomio (cap. 1, lemma 4.2). Dato che un polinomio è una funzione

continua, il lemma suddetto si può riguardare come un caso particolare del teorema 10.1.

Con una dimostrazione identica a quella del teorema 4.1 del capitolo 1, e che viene lasciata per esercizio, si prova il seguente

Teorema 10.2 (zeri di una funzione continua) Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I , e siano x_1, x_2 due punti di I tali che $f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$. Allora esiste un punto x_0 compreso tra x_1 e x_2 , tale che $f(x_0) = 0$.

Se si considera poi, per $t \in \mathbb{R}$, la funzione continua $f(x) - t$, segue immediatamente dal teorema precedente che, se esistono due punti x_1 e x_2 con $f(x_1) < t$ e $f(x_2) > t$, allora esiste un punto ξ compreso tra x_1 e x_2 tale che $f(\xi) = t$.

Si ha allora la

Proposizione 10.1 Una funzione continua in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra $\sup_I f$ e $\inf_I f$.

Dimostrazione. Sia t un numero compreso tra $\sup_{x \in I} f(x)$ e $\inf_{x \in I} f(x)$. Esisteranno due punti x_1 e x_2 in I tali che

$$\inf_I f \leq f(x_1) < t < f(x_2) \leq \sup_I f,$$

e quindi esiste un punto ξ tale che $f(\xi) = t$. ■

Da quanto visto segue che l'immagine $f(I)$ è costituita dall'intervallo aperto $(\inf_{x \in I} f(x), \sup_{x \in I} f(x))$ più, eventualmente, uno o ambedue gli estremi. Si ha dunque il

Teorema 10.3 Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo I . Allora $f(I)$ è un intervallo.

Veniamo ora al secondo gruppo di risultati. Ricordiamo che un insieme Q si dice compatto (per successioni) se da ogni successione a valori in Q si può estrarre una sottosuccessione convergente a un punto di Q .

Teorema 10.4 (di Weierstrass) Una funzione continua f in un insieme compatto ha massimo e minimo.

Dimostrazione. Proviamo, ad esempio, che f ha minimo.

Sia Q compatto e $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Facciamo vedere che esiste un punto x_0 tale che $f(x_0) = \inf f(Q)$. Sia $\{y_n\}$ una successione in $f(Q)$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf f(Q)$ (vedi cap. 2, esercizio 11.2) e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, indichiamo con x_n un punto di Q tale che

$y_n = f(x_n)$.⁷ Poiché Q è compatto, dalla successione $\{x_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{x_n^*\}$ che converge a un punto $x_0 \in Q$. Posto $y_n^* = f(x_n^*)$, si ha, per la continuità di f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^* = f(x_0).$$

D'altra parte, $\{y_n^*\}$ è una successione estratta dalla $\{y_n\}$, e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^* = \inf f(Q),$$

cosicché $f(x_0) = \inf f(Q)$ e dunque $f(x)$ ha minimo.

In maniera analoga, si dimostra che $f(x)$ ha massimo. ■

Il teorema precedente si può anche dedurre come corollario dal seguente

Teorema 10.5 Sia $f(x)$ una funzione continua in un compatto Q ; allora $f(Q)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $\{y_n\}$ una successione in $f(Q)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, consideriamo un punto $x_n \in Q$ con $f(x_n) = y_n$. Dalla successione $\{x_n\}$ si può estrarre una successione $\{x_n^*\}$ convergente a un punto $x_0 \in Q$. La successione $y_n^* = f(x_n^*)$ è estratta dalla $\{y_n\}$ e converge a $f(x_0) \in f(Q)$, cosicché $f(Q)$ è compatto. ■

Esercizi

10.1 Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *semicontinua superiormente* in $x_0 \in A$ se

$$\max_{x \rightarrow x_0} \lim f(x) \leq f(x_0)$$

e *semicontinua inferiormente* se è semicontinua superiormente in ogni punto di A . Verificare che la funzione $[x]$ (parte intera di x) è semicontinua superiormente. Analogamente, $g(x)$ è *semicontinua inferiormente* in x_0 se

$$g(x_0) \leq \min_{x \rightarrow x_0} \lim g(x).$$

La funzione $\{x\}$ è semicontinua inferiormente.

***10.2** Dimostrare il seguente

Teorema (di Weierstrass) Siano A un compatto e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione semicontinua superiormente; allora $f(x)$ ha massimo.

10.3 Dimostrare che $f(x)$ è continua se e solo se f è semicontinua sia superiormente che inferiormente.

⁷ La successione $\{x_n\}$ prende spesso il nome di *successione minimizzante*.

11 L'uniforme continuità

Vogliamo introdurre ora il concetto di uniforme continuità, la cui importanza si preciserà nel seguito.

Definizione 11.1 Sia $A \subset \mathbb{R}$. Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *uniformemente continua* in A se, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni coppia x, x_0 di punti di A , con $|x - x_0| < \delta$, risulti

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Qual è la differenza tra continuità e uniforme continuità? Per comprenderla, riscriviamo sinteticamente le due definizioni:

(α) f continua in A (definizione 8.1):

$$\forall x_0 \in A, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon; \quad [11.1]$$

(β) f uniformemente continua in A :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x, x_0 \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \quad [11.2]$$

La somiglianza tra le due definizioni salta subito agli occhi; tuttavia nella [11.1] il numero positivo δ dipenderà in generale da ϵ e dal punto x_0 , mentre nella [11.2] δ dipende sì da ϵ , ma non dal punto x_0 .

In altre parole, una funzione continua f sarà o meno uniformemente continua a seconda che sia o no possibile soddisfare la [11.1] con δ indipendente da x_0 .

Per illustrare questo fatto esaminiamo due funzioni ambedue continue nell'intervallo $(0,1)$.

Esempio 11.1

Consideriamo la restrizione all'intervallo $(0,1)$ della funzione $f(x) = x^2$. Si ha

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0|(x + x_0) \leq 2|x - x_0|$$

e quindi, preso $\epsilon > 0$, si avrà

$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon$$

non appena risulti

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} = \delta(\epsilon).$$

Ne segue che la funzione x^2 è uniformemente continua in $(0,1)$. ■

Esempio 11.2

Si consideri ora la restrizione a $(0,1)$ della funzione $1/x$. Sia $0 < \epsilon < 1$; si avrà

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon \quad [11.3]$$

se e solo se

$$\frac{x_0}{1 + \epsilon x_0} < x < \min \left\{ 1, \frac{x_0}{1 - \epsilon x_0} \right\}$$

e quindi, per tutti gli $x \in (0,1)$, con

$$|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0) = \frac{\epsilon x_0^2}{1 + \epsilon x_0}.$$

Il δ così trovato è il più grande possibile (infatti se $x \leq x_0 - \delta = \frac{x_0}{1 + \epsilon x_0}$ si ha $|1/x - 1/x_0| \geq \epsilon$), e per ϵ fissato diventa sempre più piccolo man mano che x_0 si avvicina a 0.

Non sarà dunque possibile trovare δ indipendente da x_0 , per cui sia verificata la [10.3], e dunque la funzione $1/x$ non è uniformemente continua nell'intervallo $(0,1)$. ■

Che la funzione x^{-1} non sia uniformemente continua in $(0,1)$ si può anche ricavare dal seguente

Teorema 11.1 Una funzione $f(x)$ uniformemente continua in un insieme limitato A è limitata.

Dimostrazione. Prendendo $\epsilon = 1$ nella definizione di uniforme continuità, possiamo concludere che esiste un $\delta > 0$ tale che se $x, y \in A$ e $|x - y| < \delta$ si abbia $|f(x) - f(y)| < 1$. Poiché A è limitato, si può ricoprire con un numero finito di intervalli $I_1, I_2, \dots, I_n$, ognuno di ampiezza δ . Per $k = 1, 2, \dots, n$, sia x_k un punto di $I_k \cap A$.

Ogni punto x di A sarà contenuto in uno degli intervalli $I_1, \dots, I_n$. Si avrà dunque, per qualche h , $|x - x_h| < \delta$ e quindi

$$|f(x) - f(x_h)| < 1.$$

Ma allora

$$|f(x)| \leq |f(x_h)| + 1 \leq M,$$

dove si è posto

$$M = |f(x_1)| + |f(x_2)| + \dots + |f(x_n)| + 1. \quad \blacksquare$$

Un'altra proprietà interessante delle funzioni uniformemente continue è la seguente:

Teorema 11.2 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua, e sia x_0 un punto di accumulazione per A . Allora esiste finito il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dimostrazione. Consideriamo due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, a valori in A , convergenti ambedue a x_0 , e tali che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \max_{x \rightarrow x_0} \lim f(x); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \min_{x \rightarrow x_0} \lim f(x).$$

(vedi esercizio 7.4).

Dall'uniforme continuità, e dal fatto che $x_n - y_n \rightarrow 0$, si può concludere che anche $f(x_n) - f(y_n)$ ha come limite zero; ne segue che il massimo e il minimo limite sono uguali, e dunque che esiste il limite della funzione f per $x \rightarrow x_0$. Questo limite è finito, dato che per il teorema 11.1 la funzione f è limitata in un intorno di x_0 . ■

Una conseguenza del teorema precedente è il

Corollario 11.1 Ogni funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, uniformemente continua in A , si può estendere ad una funzione continua nella chiusura di A .

In altre parole, esiste una funzione continua $F: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$, tale che f è la restrizione di F ad A .

Dimostrazione. Basterà definire

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \lim_{y \rightarrow x} f(y) & \text{se } x \in \bar{A}; \end{cases}$$

per il teorema precedente la funzione F è continua in $\bar{A}$. ■

Teorema 11.3 (dell'uniforme continuità) Una funzione $f(x)$ continua in un insieme Q compatto è uniformemente continua.

Dimostrazione. Se $f(x)$ non fosse uniformemente continua, dovrebbe esistere un $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si possano trovare due punti $x, y \in Q$ con $|x - y| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$. In particolare, preso successivamente $\delta = 1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$, si potrebbero costruire due successioni $\{x_n\}, \{y_n\}$, a valori in Q , tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad [10.4]$$

e

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon. \quad [10.5]$$

Poiché Q è compatto, dalla $\{x_n\}$ si può estrarre una successione $\{x_{k_n}\}$ convergente a un punto $x_0 \in Q$. Dalla [10.4] segue che anche la successione $\{y_{k_n}\}$ converge a x_0 . Poiché f è continua si deve avere allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

il che contraddice la [10.5]. ■

Esercizi

11.1 Dimostrare che la funzione $1/x$ è uniformemente continua in $(\alpha, 1)$, con $0 < \alpha < 1$.

11.2 Dire se le funzioni x^2 e $\sqrt{x}$ sono uniformemente continue in $[1, +\infty)$.

11.3 Dimostrare che la funzione

$$\sin \frac{1}{x}$$

non è uniformemente continua in $(0, 1)$.

*11.4 Sia $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Si dimostri che esistono due costanti A e B tali che

$$|f(x)| \leq A + Bx.$$

11.5 Dimostrare che se f e g sono uniformemente continue in $\mathbb{R}$ e limitate, allora fg è uniformemente continua.

11.6 Dimostrare che la funzione composta $f \circ g$ di due funzioni uniformemente continue è uniformemente continua.

11.7 Sia f una funzione continua in $[a, +\infty)$ e tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che f è uniformemente continua.

*11.8 Sia f una funzione continua in $[q, +\infty)$. La retta di equazione $y = ax + b$ si dice *asintoto* di $f(x)$, per $x \rightarrow +\infty$, se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) - ax - b\} = 0.$$

Dimostrare che se f ha un asintoto allora è uniformemente continua in $[q, +\infty)$.

11.9 Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* se esiste una costante $M > 0$ tale

che

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

per ogni $x, y \in A$.

Dimostrare che una funzione lipschitziana è uniformemente continua.

Lo stesso è vero per le funzioni *holderiane* di ordine α ($0 < \alpha \leq 1$), cioè per le funzioni $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ per cui

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

per ogni $x, y \in A$.

11.10 E' uniformemente continua in $\mathbb{R}$ la funzione $\sin x^2$?

12 Funzioni continue invertibili

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva e sia $f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ la sua inversa.

In generale, non ci si può aspettare che f^{-1} sia continua; ad esempio (vedi fig. 3.9), la funzione $f(x)$ definita nell'insieme $A = [0, 1] \cup (2, 3]$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x-1 & \text{se } x \in (2, 3] \end{cases}$$

è continua in A , ma la sua inversa

$$f^{-1}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x+1 & \text{se } x \in (1, 2] \end{cases}$$

è discontinua in $x=1$.

Vi sono, però, due casi molto importanti in cui si può concludere che anche f^{-1} è continua, precisamente quando

- (a) A è un intervallo,
- (b) A è compatto.

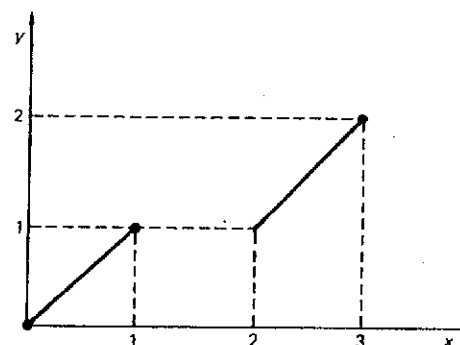


Figura 3.9

Cominciamo col trattare il primo caso. Si ha il seguente

Lemma 12.1 Una funzione f , continua e invertibile in un intervallo I , è monotona.

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare che, fissato comunque un punto $x_0 \in I$, la funzione $f(x) - f(x_0)$ ha sempre lo stesso segno a destra di x_0 . Ad esempio, se per un punto $\bar{x} > x_0$ risulta $f(\bar{x}) > f(x_0)$, allora si ha $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in I$, con $x > x_0$.

Infatti, se esistesse un punto $x' > x_0$ con $f(x') \leq f(x_0)$, per il teorema 10.3 ci sarebbe un punto ξ compreso tra x' e $\bar{x}$ (e dunque diverso da x_0) con $f(\xi) = f(x_0)$, il che è impossibile perché f è iniettiva. Analogamente, si dimostra che $f(x) - f(x_0)$ ha sempre lo stesso segno a sinistra di x_0 .

Ciò premesso, consideriamo due punti a e b in I , con $a < b$, e supponiamo che sia $f(a) < f(b)$. Dico che f è strettamente crescente in I .

Siano infatti $x_1 < x_2$ due arbitrari punti di I , e sia $b_1 = \max(b, x_2)$. Poiché $f(b) > f(a)$, risulterà, per quanto detto sopra, $f(x) > f(a)$ per ogni $x > a$, e dunque $f(b_1) > f(a)$. Sempre per il ragionamento precedente, si dovrà avere $f(x) < f(b_1)$ per ogni $x < b_1$, cosicché $f(x_1) < f(b_1)$. Da quest'ultima relazione segue infine che $f(x) > f(x_1)$ per ogni $x > x_1$ e dunque $f(x_2) > f(x_1)$, e f è strettamente crescente.

In maniera analoga si dimostra che se $f(b) < f(a)$ la funzione f è strettamente decrescente. ■

Lemma 12.2 Una funzione g definita in un intervallo J e ivi monotona è continua se e solo se l'immagine $g(J)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Possiamo supporre che g sia crescente in J . Se g è continua, $g(J)$ è un intervallo per il teorema 10.3.

Supponiamo viceversa che $g(J)$ sia un intervallo. Se, per assurdo, g non fosse continua in un punto $x_0 \in J$, si avrebbe

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = L.$$

Poiché g è crescente, per $x < x_0$ si ha $g(x) < l$, mentre per $x > x_0$ risulta $g(x) > L$, cosicché dei punti di (l, L) al più uno (quello corrispondente a x_0) può appartenere all'immagine di g , che contiene sia numeri minori di l , che numeri maggiori di L . Ma allora $g(J)$ non potrebbe essere un intervallo, contro l'ipotesi. ■

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 12.1 Sia f una funzione continua e invertibile in un intervallo I ; allora f^{-1} è continua.

Dimostrazione. Per il lemma 12.1, f è monotona; inoltre, per il teorema 10.3, la sua immagine $J = f(I)$ è un intervallo. La funzione f^{-1} definita in J è monotona (vedi

esercizio 3.7b) e ha come immagine l'intervallo I . Per il lemma precedente essa è allora continua in J . ■

Osservazione 12.1. In virtù del teorema 12.1 risultano continue, nel loro insieme di definizione:

- (a) le funzioni trigonometriche inverse: arcsin x , arccos x , arctg x ;
- (b) la funzione $\log_A x$, inversa di A^x ;
- (c) la funzione $\sqrt[n]{x} = x^{1/(2n+1)}$ inversa della funzione x^{2n+1} ;
- (d) la funzione $\sqrt[n]{x} = x^{1/2n}$, inversa della restrizione di x^{2n} all'intervallo $[0, +\infty)$.

Infine, combinando la continuità di e^x , quella di $\ln x$ e la proposizione 8.1, si dimostra che sono continue le funzioni

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad \text{definita in } [0, +\infty) \text{ se } \alpha \geq 0 \text{ e in } (0, +\infty) \text{ se } \alpha < 0,$$

e

$$x^x = e^{x \ln x}, \quad \text{definita in } (0, +\infty). \quad \blacksquare$$

Esempio 12.1

Vogliamo calcolare il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$. Se si pone

$$f(x) = a^x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{x}{\log_a(1+x)},$$

risulta

$$\frac{a^x - 1}{x} = g \circ f(x).$$

Poiché, evidentemente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

basterà calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log_a(1+x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{1/x}} = \frac{1}{\log_a \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}},$$

visto che la funzione $\log_a x$ è continua.

Ne segue (vedi esercizio 5.2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

dove con "ln a" si indica, come abbiamo detto, il logaritmo di a in base e . In particolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \blacksquare$$

Veniamo ora al secondo risultato.

Teorema 12.2 Sia $f(x)$ una funzione continua e invertibile in un insieme Q compatto; allora f^{-1} è continua.

Dimostrazione. Sia $y_0 \in f(Q)$. Bisogna dimostrare che, per ogni successione $\{y_n\}$ a valori in $f(Q)$ e convergente a y_0 , la successione $x_n = f^{-1}(y_n)$ converge a $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Se ciò non fosse vero, esisterebbe un intorno V di x_0 al di fuori del quale cadrebbero infiniti punti della successione $\{x_n\}$ (vedi cap. 2, definizione 3.1 (A_2)), e dunque si potrebbe trovare una successione $\{x_{k_n}\}$ estratta dalla $\{x_n\}$ e formata da termini tutti fuori di V . Poiché Q è compatto, dalla successione $\{x_{k_n}\}$ si può poi estrarre una sottosuccessione $\{x_n^*\}$ convergente a un punto x_0^* di Q . Si ha ovviamente $x_0^* \neq x_0$.

Essendo f continua, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) = f(x_0^*).$$

D'altra parte, la successione $\{x_n^*\}$ è estratta dalla $\{x_n\}$ e quindi la successione $\{f(x_n^*)\}$ è estratta dalla $\{y_n\}$. Ne segue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^*) = y = f(x_0).$$

Si ha allora $f(x_0) = f(x_0^*)$, il che è assurdo perché f è iniettiva. $\blacksquare$

Esercizi

12.1 Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg}(x^x),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(\operatorname{arctg} x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Notizie storiche

La parola "funzione" appare per la prima volta alla fine del diciassettesimo secolo nella corrispondenza tra Gottfried W. Leibniz (1646-1716) e Johann Bernoulli (1667-1748), tuttavia è soltanto più tardi, con l'opera di Eulero (Leonhard Euler, 1707-1783), che questo concetto si afferma come uno dei principali dell'analisi.

In precedenza, si preferiva parlare di "corrispondenza tra le variabili x e y ", espressa da un'equazione del tipo

$$P(x, y) = 0 \quad [1]$$

dove P è in generale un polinomio nelle due variabili x e y .

Le ragioni di questa comparsa tardiva sono da ricercarsi soprattutto nel fatto che alle origini del calcolo differenziale sta in primo luogo l'esigenza dello studio delle proprietà locali delle curve, un problema tra i più importanti dopo che Descartes, operando un drastico rovesciamento del punto di vista allora predominante in geometria, aveva posto alla base della nozione stessa di curva l'equazione [1].

E' soltanto più tardi, con l'affermarsi del calcolo come strumento principe per l'elaborazione di teorie fisiche quantitative, e in particolare attraverso lo studio approfondito delle equazioni differenziali e il riconoscimento del ruolo fondamentale, anche dal punto di vista filosofico, svolto dalla linearità, che il concetto di funzione viene a prendere il sopravvento su quello, meno duttile, di relazione. Non a caso, il matematico che ne sancisce la priorità è quello stesso Eulero a cui si devono la sistematizzazione della meccanica newtoniana in termini di calcolo differenziale, e i principali studi in direzione del suo ampliamento; la sua opera *Introductio in analysin infinitorum*, del 1748, è il primo trattato, se non di analisi funzionale, certo di analisi delle funzioni. L'idea che Eulero ha della funzione è tuttavia ancora lontana da quella moderna; per lui una funzione è un'espressione analitica costruita a partire dalla variabile x mediante una serie di operazioni, in altre parole una combinazione di funzioni elementari costruita mediante le operazioni algebriche e la composizione di funzioni. E' una concezione, la sua, in cui viene assegnata un'importanza preponderante al fatto che una funzione sia descrivibile nel suo intervallo di definizione con una espressione analitica singola. Solo più tardi, sotto la spinta dell'analisi fisica, in particolare nella descrizione del moto di una corda vibrante, Eulero accetterà la possibilità di funzioni "discontinue", descritte cioè da un'espressione analitica in un intervallo e da una diversa espressione in un altro.⁸

Ben presto, però, in seguito agli sviluppi dell'analisi e della stessa fisica, anche tali funzioni si rivelano insufficienti, soprattutto quando si affronta lo studio delle serie di Fourier, che compaiono per la prima volta, fugacemente, nella discussione tra Eulero, Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) sul problema delle corde vibranti; l'argomento sarà poi approfondito appunto da Jean B. Fourier (1768-1830) nel suo trattato sull'equazione del calore. La *Théorie analytique de la chaleur* appare nel 1822, quasi contemporaneamente al già ricordato *Cours*

⁸ Si noti che le funzioni "discontinue" nel senso di Eulero possono benissimo essere continue secondo la definizione 8.1; un esempio è la funzione

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

d'Analyse di Cauchy; i problemi che da quest'ultimo sono lasciati aperti, in particolare le discrepanze tra alcuni risultati che Fourier aveva intuito più che provato e un certo numero di teoremi che Cauchy aveva creduto di dimostrare ma che presto si erano rivelati incompleti, generano la consapevolezza che sia necessaria una revisione critica e soprattutto una generalizzazione del concetto di funzione. Si fa strada così l'idea di funzione come applicazione arbitraria tra due insiemi, concezione che è essenzialmente quella moderna ed è esemplificata da P. G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859) con quella che sarà denominata appunto *funzione di Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ razionale,} \\ 0 & \text{per } x \text{ irrazionale,} \end{cases}$$

una funzione che non è mai continua, e di cui non si può neanche disegnare un grafico approssimativo, tanto gli zeri e gli uni sono mescolati tra loro.

La seconda metà dell'Ottocento vede lo studio delle funzioni nel loro senso più generale, e quindi la costruzione di una quantità di funzioni "patologiche", specie in relazione allo studio dei sottoinsiemi della retta, e più in generale degli spazi euclidei a n dimensioni, con le loro proprietà topologiche.

Un posto particolare merita il problema della dimensione dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$; in occasione degli studi sulla dimensione, Cantor scopre un'applicazione biunivoca tra l'intervallo $[0,1]$ e il quadrato Q di lato 1 (essenzialmente, tranne complicazioni minori dovute ai decimali terminati che hanno una doppia rappresentazione (vedi cap. 2, § 9), al numero $0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$ si fa corrispondere il punto di Q di coordinate $x=0, c_1 c_3 c_5 \dots$ e $y=0, c_2 c_4 c_6 \dots$) e Giuseppe Peano (1858-1932) un'applicazione continua, la cosiddetta *curva di Peano*, dell'intervallo $[0,1]$ su tutto il quadrato Q ; finché finalmente si riconosce il ruolo delle applicazioni biunivoche e bicontinue (continue con la loro inversa), cioè degli omeomorfismi, nella conservazione della dimensione; in altre parole, il suo carattere di invariante topologico.

Ci si avvia così verso gli inizi del Novecento, in cui avviene un essenziale cambiamento di punto di vista: invece di studiare le proprietà di questa o quella funzione presa singolarmente, queste vengono invece considerate come elementi di spazi funzionali, in genere dotati di una *metrica* (e cioè di una distanza verificante le relazioni di p. 11), e vengono studiate piuttosto le proprietà di questi ultimi. E' questo il punto di vista dell'analisi funzionale, le cui applicazioni toccano un gran numero di problemi, raggiungendo talvolta risultati spettacolari, e sono ancora lungi dall'essere esaurite.

Capitolo 4

Le idee fondamentali del calcolo infinitesimale

1 L'area del segmento di parabola

Abbiamo già visto come si possa calcolare l'area del cerchio approssimandola con quella di poligoni inscritti aventi un numero di lati via via crescente. Il procedimento usato risale ad Archimede, cui si deve anche il calcolo dell'area del segmento di parabola.

Si chiama *segmento di parabola* l'insieme T del piano delimitato dall'asse delle x , dalla retta $x=a$ e dalla parabola $y=x^2$ (vedi fig. 4.1).

Per determinare l'area di T si può procedere come segue. Si divide l'intervallo $I=[0, a]$ in n intervalli uguali $I_1, I_2, \dots, I_n$:

$$I_k = \left[\frac{k-1}{n} a, \frac{k}{n} a \right),$$

ognuno di ampiezza a/n (vedi fig. 4.2), e si pone:

$$M_k = \sup_{x \in I_k} x^2 = \frac{a^2 k^2}{n^2}, \quad m_k = \inf_{x \in I_k} x^2 = \frac{a^2 (k-1)^2}{n^2}.$$

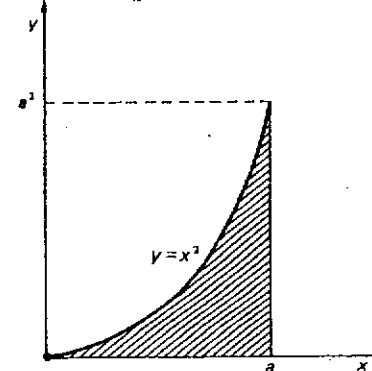


Figura 4.1

Per ogni $k=1, \dots, n$ il rettangolo $I_k \times [0, m_k]$, di area $m_k \frac{a}{n}$, è contenuto in T e quindi anche l'unione di questi rettangoli è contenuta in T . Si avrà dunque

$$\text{area } T \geq \sum_{k=1}^n m_k \frac{a}{n}.$$

D'altra parte, T è contenuta nell'unione dei rettangoli $I_k \times [0, M_k]$ e quindi

$$\text{area } T \leq \sum_{k=1}^n M_k \frac{a}{n}.$$

In definitiva,

$$\frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \leq \text{area } T \leq \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2,$$

e ricordando che

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

(vedi cap. 2, formula [1.1]) si ottiene

$$\frac{a^3}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \leq \text{area } T \leq \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad [1.1]$$

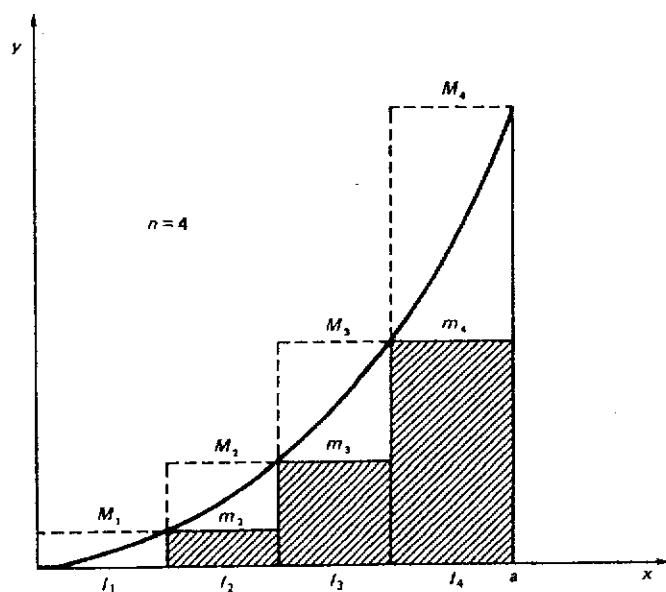


Figura 4.2

Se ora si fa tendere n all'infinito, il primo e l'ultimo termine di questa disuguaglianza tendono allo stesso limite $a^3/3$, e quindi

$$\text{area } T = a^3/3.$$

Osservazione 1.1. In questo paragrafo introduttivo abbiamo parlato di calcolare "l'area" senza preoccuparci del significato esatto di questa parola. In realtà, è proprio il fatto che il primo e il terzo termine della [1.1] tendano allo stesso limite che ci permette di parlare dell'area del segmento di parabola, che resta definita rigorosamente come il valore comune di questi due limiti. ■

Esercizi

1.1 Calcolare l'area del segmento di parabola cubica, di equazione $y=x^3$.

*1.2 Calcolare l'area compresa tra l'asse delle x , le rette $x=0$ e $x=a$, e la curva $y=e^{\alpha x}$ (vedi fig. 4.3).

1.3 Calcolare l'area del segmento di parabola delimitato dalle rette $x=a$ e $x=b$.

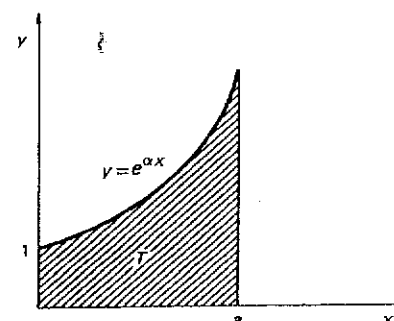


Figura 4.3

2 Integrale delle funzioni semplici

Tenendo presenti le idee esposte nel paragrafo precedente, cerchiamo di definire l'integrale per funzioni generali. A questo scopo, cominceremo a discutere il caso di funzioni costanti a tratti, e prima ancora quello di funzioni caratteristiche.

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$; ricordiamo che la funzione caratteristica di A è la funzione

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

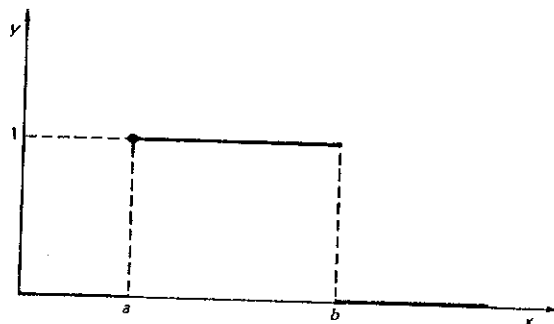


Figura 4.4

Se I è l'intervallo $[a, b)$ (aperto a destra) di $\mathbb{R}$, la funzione φ_I ha il grafico riportato nella figura 4.4. Chiameremo *integrale della funzione* φ_I il numero

$$\mathcal{J}(\varphi_I) = (b-a) = \text{mis } I.$$

Geometricamente, l'integrale di φ_I è l'area del rettangolo di base $(b-a)$ e altezza 1. Veniamo ora alle funzioni costanti a tratti.

Definizione 2.1 Una combinazione lineare

$$\varphi(x) = \sum_{h=1}^n \lambda_h \varphi_{I_h}(x) \quad [2.1]$$

di funzioni caratteristiche di intervalli I_h aperti a destra e a due a due disgiunti, si dice *funzione semplice* o *funzione costante a tratti*.

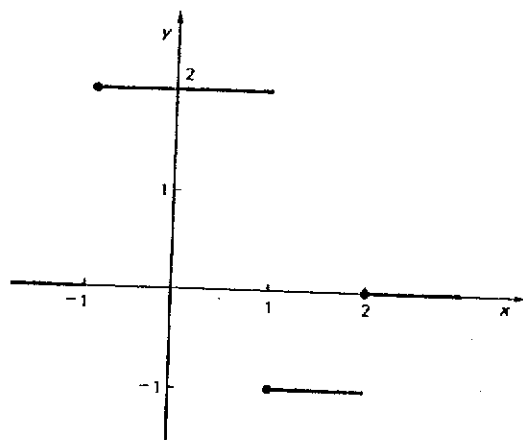


Figura 4.5

Nella figura 4.5 è riportato il grafico di una funzione semplice.

Si noti che, in generale, una funzione semplice si può scrivere nella forma [2.1] in più modi: ad esempio, la funzione $\varphi(x)$ di cui abbiamo tracciato il grafico si può scrivere come

$$\varphi = 2\varphi_{[-1, 1)} - \varphi_{[1, 2)}.$$

ma anche, spezzando in due parti l'intervallo $[-1, 1)$:

$$\varphi = 2\varphi_{[-1, 0)} + 2\varphi_{[0, 1)} - \varphi_{[1, 2)}.$$

In altre parole, esiste una certa arbitrarietà nella scelta della rappresentazione [2.1] per una funzione semplice. Questo fa sì che, date due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ costanti a tratti, si possano sempre trovare degli intervalli I_k ($k=1, 2, \dots, N$) disgiunti e aperti a destra, in modo che ambedue le funzioni si possano scrivere come combinazioni lineari delle funzioni caratteristiche di tali intervalli.¹

Ne segue che, se φ e ψ sono funzioni semplici, sono tali anche $\varphi + \psi$, $\varphi\psi$ e $|\varphi|$.

Definizione 2.2 Sia φ una funzione semplice:

$$\varphi = \sum_{h=1}^n \lambda_h \varphi_{I_h}.$$

Chiameremo *integrale della funzione* φ il numero

$$\sum_{h=1}^n \lambda_h \text{mis } I_h.^2$$

L'integrale di φ si indica con uno dei simboli

$$\mathcal{J}(\varphi), \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

Ad esempio, se φ è la funzione semplice in figura, si ha

$$\mathcal{J}(\varphi) = 2 \text{mis}[-1, 1) - \text{mis}[1, 2) = 4 - 1 = 3.$$

Se si usa la seconda rappresentazione di φ , si trova ancora

$$\mathcal{J}(\varphi) = 2 \text{mis}[-1, 0) + 2 \text{mis}[0, 1) - \text{mis}[1, 2) = 3.$$

In generale, l'integrale di una funzione semplice non dipende dal sistema di intervalli $\{I_h\}$ che viene usato nella sua definizione. Questo fatto è evidente se si pensa al significato intuitivo dell'integrale di funzioni semplici; comunque non sarà superfluo darne una dimostrazione rigorosa.

¹ Gli intervalli I_h possono essere, ad esempio, le intersezioni degli intervalli relativi alla φ e di quelli relativi alla ψ .

² La misura di un intervallo $[a, b)$ è il numero $b-a$.

Sia φ una funzione semplice e siano $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ i punti di discontinuità della φ . Indichiamo con J_h l'intervallo $[x_{h-1}, x_h]$.

La φ è costante in J_h e quindi si avrà

$$\varphi = \sum_{h=1}^m \lambda_h \varphi_{J_h}. \quad [2.2]$$

Notiamo che la rappresentazione [2.2] è univocamente determinata dalla funzione φ ; in un certo senso, la [2.2] è la rappresentazione più concisa. Sia ora

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \mu_k \varphi_{I_k}$$

una qualsiasi rappresentazione della φ . I punti $x_0, x_1, \dots, x_m$ non potranno cadere nell'interno di nessuno degli I_k e quindi, per ogni intervallo J_h , esisteranno degli intervalli disgiunti $I_{h_1}, \dots, I_{h_p}$ tali che

$$J_h = I_{h_1} \cup I_{h_2} \cup \dots \cup I_{h_p}$$

e di conseguenza

$$\mu_{h_1} = \mu_{h_2} = \dots = \mu_{h_p} = \lambda_h.$$

Ne segue

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \text{mis } I_k = \sum_{h=1}^m \lambda_h \sum_{I_k \subset J_h} \text{mis } I_k = \sum_{h=1}^m \lambda_h \text{mis } J_h$$

che dimostra come l'integrale non dipenda dalla particolare rappresentazione della φ . ■

E' evidente dalla definizione che si ha

$$\mathcal{J}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathcal{J}(\varphi_1) + \mathcal{J}(\varphi_2), \quad [2.3]$$

$$\mathcal{J}(\lambda \varphi) = \lambda \mathcal{J}(\varphi), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad [2.4]$$

$$\varphi \geq 0 \Rightarrow \mathcal{J}(\varphi) \geq 0 \quad [2.5]$$

e quindi anche

$$\varphi \geq \psi \Rightarrow \mathcal{J}(\varphi) \geq \mathcal{J}(\psi). \quad [2.6]$$

Si ha infine

$$|\mathcal{J}(\varphi)| \leq \mathcal{K}(|\varphi|). \quad [2.7]$$

Se si indica con $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale delle funzioni semplici, le [2.3], [2.4], [2.5]

si possono riassumere dicendo che l'integrale

$$\mathcal{J}: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}: \varphi \rightarrow \mathcal{J}(\varphi)$$

è un'applicazione lineare positiva di $\mathcal{S}$ in $\mathbb{R}$.

Esercizi

1.1 Dimostrare le [2.3]-[2.7].

1.2 Dimostrare che $\mathcal{J}(\mathcal{S}) = \mathbb{R}$.

3 L'integrale di Riemann

Veniamo ora alla definizione di integrale per funzioni generali.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *limitata e nulla al di fuori di un compatto*. Indichiamo con $\mathcal{L}(f)$ la classe delle funzioni semplici maggioranti della f

$$\mathcal{L}_+(f) = \{\varphi \in \mathcal{S}: \varphi(x) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

e con $\mathcal{L}_-(f)$ la classe delle funzioni semplici minoranti della f

$$\mathcal{L}_-(f) = \{\psi \in \mathcal{S}: \psi(x) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Se $\varphi \in \mathcal{L}_+(f)$ e $\psi \in \mathcal{L}_-(f)$, si ha $\varphi \geq \psi$ e quindi dalla [2.6] segue che

$$\mathcal{J}(\varphi) \geq \mathcal{J}(\psi);$$

si ricava allora

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{L}_+(f)} \mathcal{J}(\varphi) \geq \sup_{\psi \in \mathcal{L}_-(f)} \mathcal{J}(\psi)^3$$

Definizione 3.1 Sia $f(x)$ una funzione *limitata e nulla fuori di un compatto*. Diremo che f è *integrabile (secondo Riemann)* se si ha:

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{L}_+(f)} \mathcal{J}(\varphi) = \sup_{\psi \in \mathcal{L}_-(f)} \mathcal{J}(\psi). \quad [3.1]$$

Il numero reale definito dalla [3.1] si chiamerà *integrale della funzione f* e si denoterà con uno dei simboli

$$\mathcal{J}(f), \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

³ I due membri di questa disuguaglianza si chiamano a volte *integrale superiore* e *integrale inferiore* della funzione f .

Segue immediatamente dalla definizione la seguente

Proposizione 3.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(x)$ sia integrabile è che, per ogni $\epsilon > 0$, esistano due funzioni semplici φ_1 e φ_2 tali che*

$$\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2, \quad [3.2]$$

$$\mathcal{J}(\varphi_2) - \mathcal{J}(\varphi_1) < \epsilon. \quad [3.3]$$

Dimostrazione. Sia f integrabile. Per le proprietà dell'estremo inferiore e superiore esisteranno una funzione $\varphi_1 \in \mathcal{L}_-(f)$ e una funzione $\varphi_2 \in \mathcal{L}_+(f)$ tali che

$$\mathcal{J}(\varphi) > \mathcal{J}(f) - \frac{\epsilon}{2}, \quad \mathcal{J}(\varphi_2) < \mathcal{J}(f) + \frac{\epsilon}{2},$$

da cui

$$\mathcal{J}(\varphi_2) - \mathcal{J}(\varphi_1) < \mathcal{J}(f) + \frac{\epsilon}{2} - \mathcal{J}(f) + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Viceversa, se per ogni $\epsilon > 0$ esistono due funzioni semplici φ_1 e φ_2 verificanti le [3.2] e [3.3], si ha

$$0 \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{L}_+(f)} \mathcal{J}(\varphi) - \sup_{\psi \in \mathcal{L}_-(f)} \mathcal{J}(\psi) \leq \mathcal{J}(\varphi_2) - \mathcal{J}(\varphi_1) < \epsilon$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ϵ ,

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{L}_+(f)} \mathcal{J}(\varphi) = \sup_{\psi \in \mathcal{L}_-(f)} \mathcal{J}(\psi),$$

cosicché f risulta integrabile. ■

In maniera analoga si dimostra la

Proposizione 3.2 *Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(x)$ sia integrabile è che esistano due successioni $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$, la prima di funzioni semplici maggioranti e la seconda di funzioni semplici minoranti, tali che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\psi_n). \quad [3.4]$$

Dimostrazione. La necessità della condizione è una conseguenza immediata delle proprietà dell'estremo superiore e inferiore (vedi cap. 2, esercizio 11.2). Siano ora $\{\varphi_n\}$ e $\{\psi_n\}$ due successioni, a valori in $\mathcal{L}_+(f)$ e $\mathcal{L}_-(f)$ rispettivamente, verificanti la [3.4]. Si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{J}(\psi_n) \leq \sup_{\psi \in \mathcal{L}_-(f)} \mathcal{J}(\psi) \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{L}_+(f)} \mathcal{J}(\varphi) \leq \mathcal{J}(\varphi_n)$$

e dunque, passando al limite per $n \rightarrow \infty$ e tenendo conto della [3.4],

$$\sup_{\psi \in \mathcal{L}_-(f)} \mathcal{J}(\psi) = \inf_{\varphi \in \mathcal{L}_+(f)} \mathcal{J}(\varphi),$$

cosicché la funzione f è integrabile. ■

La proposizione appena dimostrata, di cui sono evidenti i legami con il metodo usato nel primo paragrafo, permette di provare facilmente la seguente

Proposizione 3.3 *Siano f e g due funzioni integrabili, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $f+g$ e λf sono integrabili e si ha*

$$\mathcal{J}(f+g) = \mathcal{J}(f) + \mathcal{J}(g), \quad [3.5]$$

$$\mathcal{J}(\lambda f) = \lambda \mathcal{J}(f). \quad [3.6]$$

Inoltre, se $f \geq 0$, si ha $\mathcal{J}(f) \geq 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo ad esempio la [3.5]. Siano $\{\varphi_n^{(1)}\}$ e $\{\psi_n^{(1)}\}$ le successioni di cui sopra, relative alla funzione $f(x)$, e siano $\{\varphi_n^{(2)}\}$ e $\{\psi_n^{(2)}\}$ quelle relative alla $g(x)$. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\varphi_n^{(1)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\psi_n^{(1)}) = \mathcal{J}(f),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\varphi_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\psi_n^{(2)}) = \mathcal{J}(g),$$

e quindi, tenendo conto della [2.3],

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}) = \mathcal{J}(f) + \mathcal{J}(g).$$

D'altra parte, le funzioni $\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}$ sono maggioranti di $f+g$, e le $\psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)}$ minoranti, per cui la funzione $f+g$ è integrabile e si ha

$$\mathcal{J}(f+g) = \mathcal{J}(f) + \mathcal{J}(g). \quad \blacksquare$$

Esercizi

3.1 Se $f(x)$ è una funzione a valori reali, si indica con $f \vee 0$ la funzione

$$f \vee 0(x) = \max \{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

e con $f \wedge 0$ la funzione

$$f \wedge 0(x) = \min \{f(x), 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) > 0 \\ f(x) & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Si dimostri che $f = f \vee 0 + f \wedge 0$; $|f| = f \vee 0 - f \wedge 0$.
 Si tracci il grafico di $f \vee 0$ e di $f \wedge 0$ quando $f(x) = \sin x$.

3.2 Si dimostri che se f è integrabile, allora $f \vee 0$ e $f \wedge 0$, e quindi anche $|f|$, sono integrabili.

3.3 Si dimostri che se f e g sono non negative e integrabili, allora anche fg è integrabile.

3.4 Si dimostri che se f e g sono integrabili, allora anche fg è integrabile. (Si usi l'esercizio precedente e le relazioni

$$f = f \vee 0 + f \wedge 0, \quad g = g \vee 0 + g \wedge 0.)$$

3.5 Si dimostri la disuguaglianza $|\mathcal{J}(f)| \leq \mathcal{J}(|f|)$ per ogni funzione f integrabile.

4 Integrazione delle funzioni continue

In questo paragrafo vogliamo dimostrare che le funzioni integrabili sono abbastanza numerose; in particolare si ha il seguente

Teorema 4.1 Una funzione $f(x)$ continua e nulla al di fuori di un compatto è integrabile.

Dimostrazione. Sia $[a, b]$ un intervallo al di fuori del quale f è nulla. Per il teorema 11.3, la funzione f è uniformemente continua in $[a, b]$, è quindi per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x_1, x_2 \in [a, b]; \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Dividiamo $[a, b]$ in intervalli di misura minore di δ , mediante i punti

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = b$$

e sia

$$I_h = [x_{h-1}, x_h], \quad h = 1, 2, \dots, m,$$

$$M_h = \sup_{x \in I_h} f(x),$$

$$m_h = \inf_{x \in I_h} f(x).$$

Si ponga

$$\varphi_1 = \sum_{h=1}^m M_h \varphi_{I_h} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \sum_{h=1}^m m_h \varphi_{I_h}.$$

Le φ_1 e φ_2 sono funzioni semplici e si ha

$$\varphi_2 \leq f \leq \varphi_1.$$

Inoltre, tenuto conto dell'uniforme continuità delle f e della scelta della suddivisione, risulta $M_h - m_h < \epsilon$ per $h = 1, 2, \dots, m$; allora

$$\mathcal{J}(\varphi_1) - \mathcal{J}(\varphi_2) = \sum_{h=1}^m (M_h - m_h) \text{mis } I_h < \epsilon \sum_{h=1}^m \text{mis } I_h = \epsilon(b-a)$$

e quindi, per la proposizione 3.1, la funzione f è integrabile. ■

Un'utile generalizzazione del teorema precedente è data dal

Teorema 4.2 Sia $f(x)$ una funzione continua eccetto che in un numero finito di punti, limitata e nulla fuori di un compatto. Allora $f(x)$ è integrabile.

Dimostrazione. Siano $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ i punti di discontinuità della f , e sia (a, b) un intervallo che li contiene e tale che f sia nulla fuori di esso. Si ponga

$$2d = \min \{|x_1 - a|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_n - x_{n-1}|, |b - x_n|\}$$

e, per ϵ positivo e minore di d , sia

$$J_h = \left[x_h - \frac{\epsilon}{n}, x_h + \frac{\epsilon}{n} \right), \quad h = 1, 2, \dots, n,$$

$$A = \bigcup_{h=1}^n J_h.$$

La restrizione della $f(x)$ alla chiusura di $[a, b] - A$ è continua, e dunque uniformemente continua, cosicché in corrispondenza dell' ϵ fissato precedentemente, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$x_1, x_2 \in [a, b] - A, \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Dividiamo $[a, b] - A$ in intervalli $I_1, I_2, \dots, I_m$ aperti a destra, a due a due disgiunti e di ampiezza minore di δ , e poniamo

$$M_s = \sup_{x \in I_s} f(x), \quad m_s = \inf_{x \in I_s} f(x), \quad s = 1, 2, \dots, m,$$

e inoltre

$$L = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x), \quad l = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

Consideriamo le due funzioni semplici

$$\varphi_1 = \sum_{s=1}^m M_s \varphi_{I_s} + \sum_{k=1}^n L \varphi_{J_k},$$

$$\varphi_2 = \sum_{s=1}^m m_s \varphi_{I_s} + \sum_{k=1}^n l \varphi_{J_k};$$

si ha $\varphi_2 \leq f \leq \varphi_1$, e inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi_1) - \mathcal{J}(\varphi_2) &= \sum_{s=1}^m (M_s - m_s) \text{mis } I_s + (L-l) \sum_{k=1}^n \text{mis } J_k < \\ &< \epsilon \sum_{s=1}^m \text{mis } I_s + (L-l) 2\epsilon \leq \{(b-a) + 2(L-l)\} \epsilon. \end{aligned}$$

Per la proposizione 3.1 la funzione f risulta allora integrabile. ■

Esercizi

*4.1 Sia f una funzione limitata e nulla al di fuori di un compatto. Detto D l'insieme dei punti di discontinuità di f , supponiamo che D abbia un numero finito di punti di accumulazione.

Dimostrare che f è integrabile.

(Si proceda come nel teorema 4.2, inscatolando prima i punti di accumulazione, poi i punti di discontinuità che restano fuori...) Generalizzare.

5 Integrale esteso a un intervallo

Definizione 5.1 Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a valori reali e $[a, b]$ un intervallo contenuto in A . Diremo che f è integrabile in $[a, b]$ se la funzione

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a, b] \end{cases} \quad [5.1]$$

è integrabile in $\mathbb{R}$. In tal caso, il numero reale $\mathcal{J}(f^*)$ si chiama integrale della f esteso all'intervallo $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Per il teorema 4.2 risultano integrabili in $[a, b]$ le funzioni continue in un insieme A che contiene $[a, b]$; più in generale, le funzioni limitate con un numero finito di punti di discontinuità. Infatti in questi casi la funzione f^* definita dalla [5.1] è limitata, nulla fuori di un compatto, e ha un numero finito di punti di discontinuità.

Si ha inoltre:

Teorema 5.1 Sia $f(x)$ una funzione monotona e limitata in $[a, b]$; allora f è integrabile in $[a, b]$.

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che f sia crescente. Dato $\epsilon > 0$ si divida l'intervallo $[a, b]$ mediante $n+1$ punti $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ in modo tale che per ogni $k=1, 2, \dots, n$ risulti $x_k - x_{k-1} < \epsilon$. Detto I_k l'intervallo

$[x_{k-1}, x_k]$ e tenuto conto del fatto che f è crescente, risulta

$$f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k), \quad \forall x \in I_k.$$

Di conseguenza, la funzione semplice

$$\varphi = \sum_{k=1}^n f(x_k) \varphi_{I_k}$$

è una maggiorante di f , mentre

$$\psi = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \varphi_{I_k}$$

è una minorante. D'altra parte

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\varphi) - \mathcal{J}(\psi) &= \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] \text{mis } I_k < \epsilon \sum_{k=1}^n [f(x_k) - f(x_{k-1})] = \\ &= \epsilon [f(b) - f(a)] \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di ϵ , la funzione f risulta integrabile. ■

Valgono poi i seguenti risultati:

(a) Se $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$, e $[c, d]$ è un intervallo contenuto in $[a, b]$, allora $f(x)$ è integrabile in $[c, d]$.

(b) Se $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$ e c è un punto interno all'intervallo si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad [5.2]$$

Infatti, se f^* è data dalla [5.1] e

$$f_1^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [c, d] \\ 0 & \text{se } x \notin [c, d], \end{cases}$$

si ha $f_1^* = f^* \varphi_{[c, d]}$, per cui, essendo il prodotto di due funzioni integrabili, la funzione f_1^* è integrabile.

Per dimostrare poi la [5.2] basta osservare che

$$f^* = f^* \varphi_{[a, c]} + f^* \varphi_{[c, b]}. \quad \blacksquare$$

Per finire questo paragrafo osserviamo che il simbolo $\int_a^b f(x) dx$ ha senso solo nel caso in cui $a < b$. E' però possibile, e sarà utile in seguito, definire l'integrale tra a e b

anche quando $a \geq b$. Per questo si pone

$$\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

Con queste convenzioni la [5.2] è valida per ogni valore di a, b, c , purché naturalmente la f sia integrabile nel più grande (dunque in ognuno) degli intervalli in questione.

Esercizi

5.1 Dimostrare che la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \\ 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \end{cases}$$

non è integrabile in $[0, 1]$.

*5.2 La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{m}{n}; \quad m, n \text{ primi tra loro} \end{cases}$$

è integrabile in $[0, 1]$, e si ha

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

(Per ogni N , i razionali m/n , con $m < n \leq N$ sono in numero finito P . Se si inscatolano questi, negli altri punti la funzione vale meno di $1/N \dots$)

5.3 Mostrare che la funzione precedente è continua in ogni punto irrazionale.

5.4 Sia $f(x)$ una funzione diversa da zero solo in un numero finito di punti. Dimostrare che $f(x)$ è integrabile in $[a, b]$, e che il suo integrale è nullo.

5.5 Sia $f(x)$ una funzione integrabile in $[a, b]$. Dimostrare che se si cambia il valore di $f(x)$ in un numero finito di punti, la nuova funzione è ancora integrabile in $[a, b]$, e il valore dell'integrale non cambia. (Si usi il risultato dell'esercizio precedente.)

6 La derivata: introduzione

La derivata di una funzione $f(x)$ appare naturalmente quando si cerchi l'equazione della retta tangente al grafico della f , nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$ (vedi fig. 4.6).

Allo scopo, si consideri insieme al punto $(x_0, f(x_0))$ un secondo punto $(x_1, f(x_1))$ sul grafico della funzione $f(x)$ e si tracci la retta r_1 passante per questi due punti.

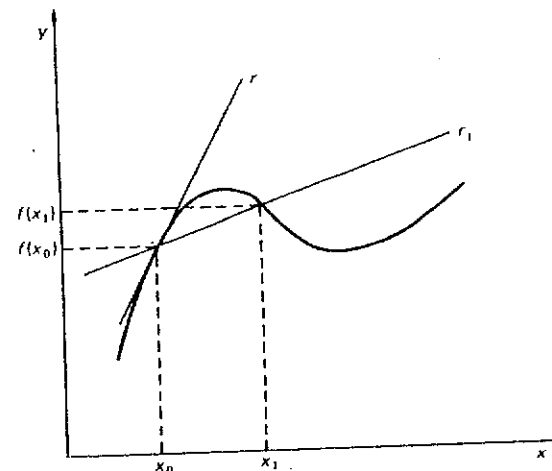


Figura 4.6

L'equazione di r_1 è

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0).$$

Se ora si fa tendere x_1 a x_0 , il coefficiente angolare $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ di r_1 tenderà a quello di una retta r di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad [6.1]$$

dove si è posto

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \quad [6.2]$$

La retta r è per definizione la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Essa è quella che approssima meglio la "curva" di equazione $y = f(x)$ nelle vicinanze del punto x_0 . Infatti se $y = f(x_0) + m(x - x_0)$ è l'equazione di una retta generica passante per il punto $(x_0, f(x_0))$, e se si pone

$$R_1(x, x_0) = f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)],$$

si ha, per la [6.2],

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x, x_0)}{x - x_0} = 0 \quad [6.3]$$

se e solo se $m = f'(x_0)$.

La [6.3] esprime il fatto che la distanza tra il valore della funzione e quello della retta definita dalla [6.1] tende a zero, per $x \rightarrow x_0$, più velocemente della distanza $x - x_0$. Il numero $f'(x_0)$ si dice *derivata* della funzione f nel punto x_0 .

Esempio 6.1

Consideriamo un corpo che si muova su una retta, e sia $p(t)$ la sua posizione al tempo t . La velocità media tra gli istanti t e $t+h$ è data da

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{h}.$$

Se ora si fa tendere h a 0 (il che corrisponde fisicamente a calcolare la velocità media su intervalli di tempo via via più brevi), il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h} = p'(t).$$

è la velocità istantanea al tempo t . ■

Esercizi

6.1 Un corpo che viene lasciato cadere da un'altezza h_0 si muove secondo la legge

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2,$$

dove $h(t)$ è l'altezza dopo t secondi e g è l'accelerazione di gravità: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Si calcoli la velocità del corpo dopo tre secondi dal lancio.

6.2 Si scriva l'equazione della retta tangente alla parabola $y = x^2 + 2x$ nel punto di coordinate $(1, 3)$.

7 La derivata: definizione e prime proprietà

Definizione 7.1 Sia $f(x)$ una funzione definita sull'intervallo $[a, b]$ e sia $x_0 \in [a, b]$. Diremo che la funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 se esiste, finito, il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Il numero $f'(x_0)$ si chiama *derivata* della f nel punto x_0 . Se la $f(x)$ è derivabile in tutti i punti di $[a, b]$ si dice *derivabile* in $[a, b]$; in tal caso, la funzione

$$f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \rightarrow f'(x)$$

si dice *derivata* della funzione $f(x)$.

La derivata della funzione f nel punto x_0 si indica anche con i simboli

$$Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari.

Esempio 7.1

$$Dx^n = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si ha (vedi cap. 1, [4.2])

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{i=1}^n x^{n-i} x_0^{i-1},$$

da cui

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{i=1}^n x^{n-i} x_0^{i-1}.$$

Se $x \rightarrow x_0$, x^{n-i} tende a x_0^{n-i} , e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = nx_0^{n-1}. \quad \blacksquare$$

Esempio 7.2

$$D \sin x = \cos x, \quad D \cos x = -\sin x.$$

Infatti

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x + x_0}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0,$$

dato che (vedi esempio 4.1):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = 1.$$

Analogamente, si ha $D \cos x = -\sin x$, tenuto conto che

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2}. \quad \blacksquare$$

Esempio 7.3

$$Da^x = a^x \ln a, \quad De^x = e^x.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \ln a,$$

ricordando che (vedi cap. 3, esempio 11.1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a. \blacksquare$$

Esempio 7.4

Se $f(x) = \lambda = \text{costante}$, allora la sua derivata è zero. Infatti il rapporto incrementale è

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\lambda - \lambda}{x - x_0} = 0. \blacksquare$$

Esempio 7.5

La funzione $f(x) = |x|$ è derivabile per $x \neq 0$, ma non per $x = 0$. Infatti per $x > 0$ si ha $D|x| = Dx = 1$ e per $x < 0$: $D|x| = D(-x) = -1$. Invece se $x_0 = 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x},$$

che non ha limite per $x \rightarrow 0$. ■

L'esempio precedente mostra che una funzione continua può non essere derivabile. Al contrario:

Proposizione 7.1 Una funzione $f(x)$, derivabile in un punto x_0 , è continua in x_0 .

Dimostrazione. Infatti, per $x \neq x_0$ risulta

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0),$$

e, se facciamo tendere x a x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \{f(x) - f(x_0)\} = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

per cui $f(x)$ è continua in x_0 . ■

Concludiamo questo paragrafo osservando che se f e g sono derivabili in x_0 , anche $f+g$ e λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) lo sono, e si ha

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Esercizi

7.1 Si calcoli la derivata delle seguenti funzioni, usando la definizione 7.1:

$$x^3 + 3x, \quad \frac{1}{x+1}, \quad \frac{1}{x^2+2}, \quad \frac{1}{\sin x}, \quad \frac{1}{\cos x},$$

$$\sin 2x, \quad \cos x^2, \quad \sin^2 x, \quad x|x|.$$

7.2 Calcolare $f'(3)$ se $f(x) = x^3 - 4$.

8 Massimi e minimi relativi. Il teorema del valor medio

Definizione 8.1 Sia $f(x)$ una funzione definita in un insieme A . Un punto $x_0 \in A$ si dice di massimo [minimo] relativo se esiste un intorno U di x_0 tale che per ogni $x \in U \cap A$ risulti $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$].

Proposizione 8.1 Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di massimo [minimo] relativo, interno all'insieme A .

Se f è derivabile in x_0 si ha $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Sia ad esempio x_0 un punto di minimo relativo interno. Allora esiste un intorno U di x_0 tutto contenuto in A , e tale che $f(x) \geq f(x_0)$ per ogni $x \in U$. In particolare, se $x \in U$ e $x > x_0$, si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0,$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Poiché f è derivabile in x_0 , i due limiti destro e sinistro devono coincidere con $f'(x_0)$, e quindi si deve avere $f'(x_0) = 0$. ■

Osservazione 8.1. L'annullarsi della derivata prima è dunque una condizione necessaria affinché una funzione derivabile abbia un massimo o un minimo relativo in un punto interno. La condizione non è sufficiente. Infatti, la funzione x^3 ha derivata nulla nell'origine, ma non ha né un massimo né un minimo relativo. Una condizione sufficiente verrà data più avanti (cap. 6, teorema 2.2 e teorema 5.3). ■

Il risultato appena dimostrato è di grande utilità nella ricerca del massimo e minimo di una funzione in un intervallo chiuso $[a, b]$. Se la funzione f è continua, l'esistenza del massimo e del minimo è garantita dal teorema di Weierstrass. In virtù della proposizione 8.1 potranno essere punti di massimo o di minimo:

- (a) gli estremi a e b ,
- (b) i punti in cui la funzione non è derivabile,
- (c) i punti in cui la derivata è zero.

Nella maggior parte dei casi i punti da considerare sono in numero finito, cosicché un confronto tra i valori assunti dalla funzione in questi punti dà facilmente il massimo e il minimo della funzione $f(x)$.

Esempio 8.1

Si calcoli il massimo e il minimo della funzione $f(x) = x^2 + x$ nell'intervallo $[-1, 1]$.

La funzione f è sempre derivabile, e $f'(x) = 2x + 1$ si annulla nel punto $-1/2$. I punti da considerare sono allora -1 , $-1/2$ e 1 . Si ha

$$f(-1) = 0, \quad f(-1/2) = -1/4, \quad f(1) = 2,$$

cosicché il massimo di $f(x)$ è 2 , assunto nel punto $x = 1$, e il minimo è $-1/4$, assunto in $x = -1/2$. ■

Una conseguenza della proposizione 8.1 è il

Lemma 8.1 (teorema di Rolle) Sia $g(x)$ una funzione continua in $[a, b]$, e derivabile in (a, b) . Se $g(a) = g(b)$, allora esiste un punto $\xi \in (a, b)$ in cui la derivata di g si annulla.

Dimostrazione. La funzione $g(x)$ ha massimo e minimo in $[a, b]$. Se i punti di massimo e di minimo cadono ambedue negli estremi, allora il massimo è uguale al minimo, e dunque la funzione è costante cosicché $g'(x) = 0$ per ogni x . In caso contrario la funzione assumerà il suo valore massimo o il suo valore minimo in un punto ξ interno a $[a, b]$. Per la proposizione 8.1 si ha $g'(\xi) = 0$. ■

Se si applica il teorema di Rolle alla funzione

$$g(x) = f(x) - (x-a) \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

si ricava che esiste un punto ξ interno a (a, b) in cui $g'(\xi) = 0$, ovvero in cui

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Abbiamo così dimostrato il

Teorema 8.1 (del valor medio, o di Lagrange) Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a). \quad [8.1]$$

In maniera analoga, applicando il teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$$

si dimostra il

Teorema 8.2 (di Cauchy) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , e se $g'(x) \neq 0$, allora esiste un punto ξ nell'intervallo (a, b) tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad [8.2]$$

I risultati che seguono sono conseguenze del teorema 8.1.

Proposizione 8.2 Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (a, b) . Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$, allora $f(x)$ è costante.

Dimostrazione. Consideriamo due punti x_1 e $x_2 \in (a, b)$. Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$ si ricava, tenuto conto che $f'(x) \equiv 0$,

$$f(x_1) - f(x_2) = 0;$$

di conseguenza f è costante. ■

Proposizione 8.3 Sia $f(x)$ una funzione derivabile in (a, b) . La funzione $f(x)$ è crescente se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Dimostrazione. (a) Se f è crescente, si ha, per ogni $x, x_0 \in (a, b)$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (\text{vedi cap. 3, [3.2]}),$$

e quindi, passando al limite per $x \rightarrow x_0$, si trova

$$f'(x_0) \geq 0.$$

(b) Sia viceversa $f'(x) \geq 0$ per ogni x ; se x_1 e $x_2 \in (a, b)$, applicando il teorema del valor medio si ottiene

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(\xi) \geq 0,$$

e quindi $f(x)$ è crescente in (a, b) . ■

Osservazione 8.1. E' chiaro dalla dimostrazione che se $f'(x)$ è strettamente positiva in (a, b) allora la funzione $f(x)$ è strettamente crescente. Non è vero però, in generale, che una funzione strettamente crescente abbia derivata strettamente positiva; ad esempio, la funzione

$$f(x) = x^3$$

è strettamente crescente in $(-1, 1)$ ma ha derivata nulla nel punto $x = 0$. ■

Osservazione 8.2. Il teorema di Rolle, e dunque tutti i risultati che dipendono da questo, non è valido in generale se l'insieme di definizione non è un intervallo. In particolare, non sono più valide le proposizioni 8.2 e 8.3, della qual cosa il lettore potrà facilmente convincersi. Ad esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x < 1 \\ x-2 & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

ha derivata positiva nell'insieme di definizione $A = (0, 1) \cup (2, 3)$, ma non è crescente. ■

Esercizi

8.1 Nel teorema di Cauchy non abbiamo supposto $g(a) \neq g(b)$; eppure abbiamo diviso per $g(b) - g(a)$. Come mai?

8.2 Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato si trovi quello di area massima.

8.3 Un corridoio ha la pianta come nella figura 4.7. Si calcoli la lunghezza massima di un'asta che possa passare da un estremo all'altro del corridoio strisciando in terra.

8.4 Si dimostri la seguente generalizzazione del teorema di Rolle:

Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile, e sia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(a).$$

Esiste un punto ξ , $a < \xi < +\infty$, tale che $f'(\xi) = 0$.

8.5 Si dimostri che se f e g sono derivabili in $[a, +\infty)$ e se esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f_{\infty} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = g_{\infty},$$

allora esiste un punto ξ , $a < \xi < +\infty$, tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(a) - f_{\infty}}{g(a) - g_{\infty}}.$$

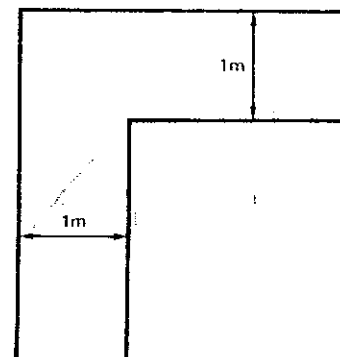


Figura 4.7

8.6 Si calcoli il massimo e il minimo delle seguenti funzioni, negli intervalli indicati a fianco

$$\begin{array}{ll} x^3 - x & [0, 2] \\ \sin x + \cos x & [0, \pi/2] \\ x^2 - 2x + |x| & [-1, 1] \\ 1/(x+1) + x & [-1/2, 2]. \end{array}$$

*8.7 Si calcoli il

$$\max_{x \rightarrow +\infty} \lim (\sin x - \cos x).$$

8.8 Si dimostri che, se $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ha un minimo relativo nel punto a , allora $F'(a) \geq 0$; mentre, se lo ha in b , allora $F'(b) \leq 0$.

*8.9 Sia $F(x)$ una funzione derivabile in $[a, b]$ e sia $f(x)$ la sua derivata. Si dimostri che, se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, allora esiste un punto x_0 in (a, b) tale che $f(x_0) = 0$. (Si usi il risultato dell'esercizio 8.8.)

8.10 Sia $f(x)$ una funzione continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$. Si dimostri che, se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x),$$

allora f è derivabile in 0 e si ha

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x).$$

*8.11 Sia $f(x)$ una funzione derivabile in $(0, 1)$. Si dimostri che, se esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x),$$

allora esiste finito anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

8.12 Dimostrare che se una funzione $f(x)$ è derivabile in un intervallo (a, b) , e la sua derivata è limitata, allora $f(x)$ è lipschitziana in (a, b) .

8.13 Dimostrare che, nelle ipotesi dell'esercizio precedente, esistono i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow a^+$ e per $x \rightarrow b^-$.

9 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f(x)$ una funzione integrabile in un intervallo $[a, b]$. Se x è un punto intermedio tra a e b , la f sarà integrabile in $[a, x]$.

La funzione

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

si chiama *funzione integrale* della f .

Lo studio delle relazioni che intercorrono tra le funzioni F e f è alla base del calcolo infinitesimale.

Lemma 9.1 Sia f integrabile in $[a, b]$ e siano x_1, x_2 due punti di $[a, b]$, con $x_1 < x_2$. Si ha

$$l(x_1, x_2) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq L(x_1, x_2), \quad [9.1]$$

dove si è posto

$$L(x_1, x_2) = \sup_{x_1 \leq t \leq x_2} f(t), \quad l(x_1, x_2) = \inf_{x_1 \leq t \leq x_2} f(t).$$

Dimostrazione. Si ha, per definizione,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt = \mathcal{J}(f^*),$$

dove

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } x_1 \leq t \leq x_2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

D'altra parte, si ha $l(x_1, x_2) \varphi_{[x_1, x_2]} \leq f^* \leq L(x_1, x_2) \varphi_{[x_1, x_2]}$, e quindi

$$l(x_1, x_2)(x_2 - x_1) \leq \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \leq L(x_1, x_2)(x_2 - x_1). \quad \blacksquare$$

Osserviamo che le disuguaglianze [9.1] continuano a valere anche se $x_1 > x_2$.

Nel caso particolare in cui f è continua, se si tiene conto del fatto che il numero reale

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$$

è compreso tra il massimo e il minimo della funzione f nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e si ricorda la proposizione 10.1 del capitolo 3, si ottiene il seguente

Teorema 9.1 (della media integrale) Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e siano $x_1, x_2 \in [a, b]$. Esiste un punto ξ compreso tra x_1 e x_2 tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt. \quad [9.2]$$

Dimostriamo ora il risultato principale di questo paragrafo.

Teorema 9.2 (teorema fondamentale del calcolo integrale) Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. La funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è derivabile e si ha, per ogni $x \in [a, b]$,

$$F'(x) = f(x). \quad [9.3]$$

Inoltre, se $G(x)$ è una funzione derivabile in $[a, b]$ tale che

$$G'(x) = f(x) \quad \text{in } [a, b],$$

allora

$$F(x) = G(x) - G(a). \quad [9.4]$$

Dimostrazione. Cominciamo col calcolare F' . Sia x_0 un arbitrario punto di $[a, b]$. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \left\{ \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right\} = \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt \end{aligned}$$

e per il teorema precedente esiste un punto ξ , compreso tra x e x_0 , tale che

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(\xi).$$

Se facciamo tendere x a x_0 , il punto ξ tenderà a x_0 e quindi $f(\xi)$ tenderà a $f(x_0)$. Ne segue che la funzione F è derivabile in x_0 e si ha

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Questo dimostra la prima parte del teorema.

Sia ora $G(x)$ una funzione verificante $G'(x) = f(x)$ in $[a, b]$. Si ha allora

$$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

e quindi, per la proposizione 8.2,

$$F(x) - G(x) = \text{costante} = F(a) - G(a) = -G(a),$$

da cui la [9.4]. ■

Il teorema 9.2 è di capitale importanza per il calcolo degli integrali. Supponiamo infatti di voler calcolare l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx,$$

dove f è una funzione continua, e supponiamo di conoscere una *primitiva* della f , cioè una funzione derivabile $G(x)$, tale che $G'(x) = f(x)$. Si ha allora

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a)$$

e quindi

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Il calcolo degli integrali è dunque ricondotto alla ricerca delle primitive, cioè all'inversione dell'operazione di derivazione.

Esempio 9.1

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

Abbiamo visto nel paragrafo 7 che si ha $D \cos x = -\sin x$. Una primitiva di $\sin x$ è allora la funzione $G(x) = -\cos x$. Ne segue

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx = G(\pi/2) - G(0) = 1. \quad \blacksquare$$

Esempio 9.2

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}.$$

Infatti, poiché $D x^n = n x^{n-1}$, una primitiva della funzione x^n è la funzione

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

In particolare, la funzione $x^3/3$ è una primitiva di x^2 e quindi

$$\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3} \quad (\text{vedi § 1}). \quad \blacksquare$$

L'insieme delle funzioni primitive di una data funzione $f(x)$ si dice *integrale indefinito* della f e si indica con il simbolo

$$\int f(x) dx.$$

Se $G(x)$ è una primitiva della $f(x)$, si ha

$$\int f(x) dx = \{G(x) + c, c \in \mathbb{R}\}.$$

In generale, per evitare inutili complicazioni, si scrive

$$\int f(x) dx = G(x),$$

volendo indicare con questo che $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$. Ad esempio scriveremo

$$\int \cos x dx = \sin x.$$

In generale, se f non è continua, la funzione F non sarà derivabile. Questo si può vedere considerando ad esempio la funzione di Heaviside

$$\text{segn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

per cui risulta

$$F(x) = \int_{-1}^x \text{segn}(t) dt = |x| - 1.$$

Si ha però la seguente proposizione, prima di enunciare la quale ricordiamo che una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *lipschitziana* in A se esiste una costante M tale che, per ogni $x_1, x_2 \in A$, risulti

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|.$$

Proposizione 9.1 Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile in $[a, b]$, la funzione integrale $F(x)$ è lipschitziana in $[a, b]$, quindi (uniformemente) continua.

Dimostrazione. Si ha, per $x_1, x_2 \in [a, b]$,

$$|F(x_2) - F(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)| dt \leq M|x_2 - x_1|,$$

dove si è posto

$$M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|. \blacksquare$$

Esercizi

9.1 Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^1 e^u du, \quad \int_1^3 (x^2 + 3x) dx, \quad \int_{-2}^4 (t + 2t^2) dt,$$

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx, \quad \int_0^2 1/(t+1)^2 dt.$$

9.2 Dimostrare il seguente

Teorema Siano $g(x)$ e $p(x)$ due funzioni integrabili in $[a, b]$ e sia $p(x) \geq 0$ in $[a, b]$. Si ha, per ogni $x, x_0 \in [a, b]$ ($x > x_0$),

$$l(x, x_0) \int_{x_0}^x p(t) dt \leq \int_{x_0}^x p(t) g(t) dt \leq L(x, x_0) \int_{x_0}^x p(t) dt.$$

Inoltre se $g(x)$ è continua, esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 , tale che

$$\int_{x_0}^x p(t) g(t) dt = g(\xi) \int_{x_0}^x p(t) dt.$$

9.3 Dimostrare che, se f è integrabile in $[a, b]$ ed è continua in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora la funzione integrale $F(x)$ è derivabile in x_0 e si ha $F'(x_0) = f(x_0)$ (Si usi la [9.1] e l'esercizio 8.1 del cap. 3.)

*10 Integrazione e primitive

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che se $f(x)$ è una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$, e se la sua derivata $f'(x)$ è continua, allora:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a). \quad [10.1]$$

In questo paragrafo cercheremo di estendere la validità della [10.1] anche al caso di funzioni $f(x)$ la cui derivata non sia continua. Più precisamente, considereremo funzioni *regolari a tratti*, cioè funzioni che soddisfano la seguente

Definizione 10.1 Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a, b]$ si dice *regolare a tratti* se:

- (1) $f(x)$ è continua in $[a, b]$, tranne al più in un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- (2) $f(x)$ è derivabile in $[a, b]$, tranne che nei punti $x_1, \dots, x_n$, ed eventualmente in altri punti $y_1, y_2, \dots, y_m$, sempre in numero finito.
- (3) La derivata $f'(x)$ è continua (dove esiste) e limitata.

In particolare, esistono finiti i limiti destro e sinistro della funzione $f(x)$ nei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ (vedi esercizio 8.13).

Esempio 10.1

La funzione di Heaviside $\text{segn}(x)$, definita nel paragrafo precedente, è regolare a tratti nell'intervallo $[-1, 1]$. Infatti essa è continua e derivabile, tranne che nel punto $x=0$, e la sua derivata, essendo nulla per $x \neq 0$, è ovviamente limitata. Analogamente, è regolare a tratti in $[-1, 1]$ la funzione $|x|$, che per di più è anche continua in $[-1, 1]$. ■

Prima di procedere oltre, dobbiamo dire due parole sull'integrale al primo membro della [10.1]. Infatti, se la funzione $f(x)$ non è derivabile in tutto l'intervallo $[a, b]$, la funzione integranda $f'(x)$ non è definita in tutto l'intervallo, e dunque a rigore non si potrebbe parlare del suo integrale. D'altra parte, i punti in cui $f'(x)$ non è definita sono in numero finito, e dunque non influenzano il valore dell'integrale. Più precisamente, potremo definire in modo arbitrario la funzione $f'(x)$ nei punti $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ (ad esempio ponendo in questi punti $f' = 0$); la funzione così costruita risulterà limitata, e avrà un numero finito di punti di discontinuità; dunque sarà integrabile. Inoltre il valore dell'integrale non dipenderà dal valore della funzione nei

punti di discontinuità (in numero finito; vedi esercizio 5.5), e dunque non cambierà se si assegnano valori arbitrari a $f'(x)$ in questi punti. Questo valore lo chiameremo *integrale della funzione $f'(x)$ nell'intervallo $[a, b]$* .

Ciò posto, torniamo al nostro problema: la formula [10.1] continua a valere se si suppone solamente che la funzione $f(x)$ sia regolare a tratti? Si vede subito che la risposta è negativa; infatti la funzione di Heaviside è derivabile in $[-1, 1]$, con l'eccezione del punto 0, e la sua derivata è nulla; ne consegue che

$$\int_{-1}^1 f'(x) dx = 0;$$

mentre $f(1) - f(-1) = 2$.

Se invece si esegue lo stesso calcolo con la funzione $|x|$, si trova che la sua derivata (per $x \neq 0$) è la funzione di Heaviside, e dunque il primo membro della [10.1] è nullo. Lo stesso accade per il secondo membro, dato che $|-1| = |1| = 1$. Lo stesso risultato vale se invece dell'intervallo $[-1, 1]$ si considera un qualsiasi intervallo $[a, b]$, contenente l'origine. Il calcolo in questo caso è lasciato per esercizio.

Gli esempi appena trattati sono caratteristici del caso generale; infatti si ha:

Teorema 10.1 Sia $f(x)$ una funzione regolare a tratti in un intervallo $[a, b]$. Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$, allora vale la formula

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Per fissare le idee, ci limiteremo al caso in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile in $[a, b]$, con l'eccezione di un solo punto $x_0 \in (a, b)$. Consideriamo i due intervalli $[a, t]$ e $[s, b]$, con $t < x_0 < s$. In questi intervalli potremo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale, ottenendo

$$\int_a^t f'(x) dx = f(t) - f(a); \quad \int_s^b f'(x) dx = f(b) - f(s).$$

Se ora facciamo tendere t ed s a x_0 , il primo da sinistra e il secondo da destra, otteniamo (si tenga conto dell'esercizio 8.13).

$$\int_a^{x_0} f'(x) dx = \lim_{t \rightarrow x_0^-} f(t) - f(a); \quad \int_{x_0}^b f'(x) dx = f(b) - \lim_{s \rightarrow x_0^+} f(s).$$

Sommando membro a membro si ottiene allora:

$$\int_a^b f'(x) dx = \int_a^{x_0} f'(x) dx + \int_{x_0}^b f'(x) dx = f(b) - f(a) - s(x_0)$$

dove si è indicato con $s(x_0)$ il salto della $f(x)$ nel punto x_0 (vedi cap. 3, [9.1]).

La tesi segue immediatamente dalla continuità della funzione $f(x)$ in x_0 . ■

Il ragionamento si può ripetere per una generica funzione regolare a tratti e continua. Più in generale, se $f(x)$ è solo regolare a tratti, si ha la formula

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^n s(x_i). \quad [10.2]$$

Capitolo 5

Derivazione e integrazione delle funzioni elementari

1 Alcune regole di derivazione

Abbiamo visto nel capitolo precedente la definizione e la connessione tra la derivata e l'integrale; prima di sviluppare ulteriormente la teoria è necessario saper calcolare derivate e integrali del maggior numero possibile di funzioni, in particolare delle funzioni elementari.

Proposizione 1.1 Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili in x_0 . Allora:

(a) il prodotto $f(x)g(x)$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0), \quad [1.1]$$

(b) se $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 allora $1/g$ è derivabile in x_0 e risulta

$$(1/g)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \quad [1.2]$$

Dimostrazione. (a) Si ha

$$\frac{g(x)f(x) - g(x_0)f(x_0)}{x - x_0} = g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

e, passando al limite per $x \rightarrow x_0$, si ottiene la [1.1], ricordando che $g(x)$, essendo derivabile, è continua in x_0 . La dimostrazione di (b) è analoga e viene lasciata per esercizio. ■

Unendo la (a) e la (b) si prova senza difficoltà che, se $g(x_0) \neq 0$ e se f e g sono

¹ Basterebbe supporre $g(x_0) \neq 0$, perché, essendo $g(x)$ continua in x_0 , si ha automaticamente $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 .

derivabili in x_0 , si ha

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \quad [1.3]$$

Esempio 1.1

Sono immediata conseguenza della [1.3] le seguenti derivate:

$$D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad D \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad \blacksquare$$

Proposizione 1.2 (derivata di una funzione composta) Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni reali. Supponiamo che f sia derivabile in $x_0 \in A$ e che g sia derivabile in $f(x_0) \in B$. Allora $h = g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha

$$h'(x_0) = D(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0). \quad [1.4]$$

Dimostrazione. Supponiamo per un momento che per $x \neq x_0$ risulti $f(x) \neq f(x_0)$: allora, moltiplicando e dividendo il rapporto incrementale della funzione h per $f(x) - f(x_0)$, risulta

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

passando al limite per $x \rightarrow x_0$, si ha la [1.4] dato che la $f(x)$, essendo derivabile, è continua in x_0 e dunque, quando $x \rightarrow x_0$, $f(x) \rightarrow f(x_0)$.

In generale, però, potrà essere $f(x) = f(x_0)$ anche per $x \neq x_0$, e quindi non si potrà dividere per $f(x) - f(x_0)$. Bisognerà ricorrere allora a un piccolo artificio. Si consideri la funzione $w: B \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$w(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0). \end{cases}$$

Si ha, per $x \neq x_0$,

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = w(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad [1.5]$$

Poiché g è derivabile in $f(x_0)$, la funzione w è continua in tale punto, e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(f(x)) = w(f(x_0)) = g'(f(x_0))$$

e la [1.4] segue passando al limite della [1.5]. ■

Proposizione 1.3 (derivata della funzione inversa) Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile. Supponiamo che $f(x)$ sia derivabile nel punto x_0 e che risulti

$f'(x_0) \neq 0$; allora la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (x_0 = f^{-1}(y_0)). \quad [1.6]$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che y_0 è punto di accumulazione per $f(A)$ e che f^{-1} è continua in y_0 (cap. 3, teorema 12.1).

Si consideri la funzione

$$v(x) = \begin{cases} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} & \text{per } x \neq x_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{per } x = x_0. \end{cases}$$

La funzione $v(x)$ è continua in x_0 . Inoltre, si ha

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = v(f^{-1}(y))$$

e, passando al limite per $y \rightarrow y_0 = f(x_0)$, si ottiene la tesi. ■

I risultati dimostrati finora permettono di calcolare le derivate della maggior parte delle funzioni elementari.

Esempio 1.2

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad D \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La funzione $\arcsin x$ è la funzione inversa della funzione $f(x)$, restrizione di $\sin x$ all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

Sia x_0 un punto interno a tale intervallo e sia $y_0 = \sin x_0$. Dalla [1.6] risulta

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{\cos x_0}.$$

Poiché $\cos x_0$ è positivo (si ricordi che $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$), si ha

$$\cos x_0 = \sqrt{1 - \sin^2 x_0} = \sqrt{1 - y_0^2}.$$

Ne segue

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}. \quad \blacksquare$$

Ragionando allo stesso modo si ottiene la derivata della funzione $\arccos x$.

Esempio 1.3

$$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Detta $g(x)$ la restrizione di $\operatorname{tg} x$ all'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$, si ha

$$Dg^{-1}(y_0) = \cos^2 x_0 \quad (y_0 = \operatorname{tg} x_0).$$

e quindi

$$Dg^{-1}(y_0) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}. \quad \blacksquare$$

Esempio 1.4

$$D \ln x = \frac{1}{x}.$$

La funzione $\ln x$ è inversa di e^x ; ne segue

$$D \ln y \Big|_{y=y_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}. \quad \blacksquare$$

Esempio 1.5

$$D x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo già visto questa derivata nel caso di $\alpha \in \mathbb{N}$. In generale si ha

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

e quindi, per la [1.4],

$$D x^\alpha = e^{\alpha \ln x} D(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}. \quad \blacksquare$$

Esercizi

1.1 Si calcolino le derivate delle seguenti funzioni:

$$x \sin x, \quad x^2 \ln x, \quad \ln|x|, \quad e^{x^2}, \quad x^x, \quad 2^{\sin x}, \quad x \operatorname{arctg} x, \quad \ln \ln x, \\ x^{\sin x}, \quad x^{\ln \sin x}, \quad \operatorname{arctg}(1 + e^{2x}), \quad \ln(1 + \operatorname{arctg}^2 x), \\ (\operatorname{arctg} x)^2 \ln \arccos x, \quad \{1 + \ln(x - \sin x)\} e^{2 \sin x}.$$

1.2 Le funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico sono definite da

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Il grafico di queste funzioni è riportato nella figura 5.1. Si ha

$$D \sinh x = \cosh x \quad D \cosh x = \sinh x$$

La funzione $\sinh x$ è invertibile, come anche lo è la restrizione di $\cosh x$ a $[0, +\infty)$. Le funzioni inverse si indicano rispettivamente con

$$\operatorname{settsinh} x \quad \text{e} \quad \operatorname{settcosh} x.$$

- (a) Trovare le derivate di $\operatorname{settsinh} x$ e $\operatorname{settcosh} x$.
 (b) Dimostrare che

$$\operatorname{settsinh} x = \ln \{x + \sqrt{1+x^2}\},$$

$$\operatorname{settcosh} x = \ln \{x + \sqrt{x^2-1}\}.$$

- (c) Tracciare il grafico delle funzioni $\operatorname{settsinh} x$ e $\operatorname{settcosh} x$.

1.3 Di tutti i rettangoli di area fissata A , trovare:

- (a) quello di perimetro minimo,
 (b) quello con la diagonale più corta.

*1.4 Due lati di un triangolo sono a e b . Si determini il terzo lato in modo che l'area sia massima.

1.5 Trovare le derivate delle funzioni

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{e} \quad \operatorname{ctgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

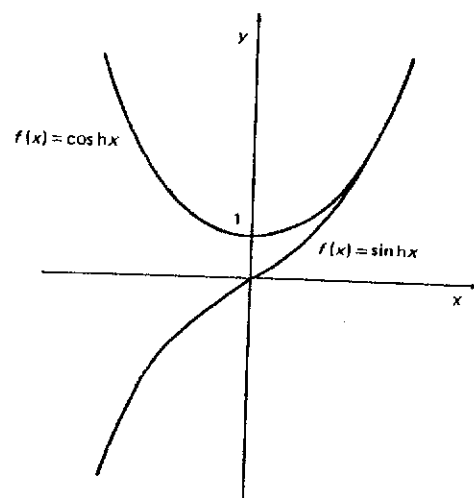


Figura 5.1

1.6 Verificare che

$$\int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx = \ln|ax^2 + bx + c|$$

e in generale che

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|.$$

Verificare inoltre che

$$\int \frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2 + 1} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg}(\alpha x + \beta).$$

2 Una tabella di derivate

I risultati dei paragrafi precedenti si possono condensare in una tabella di derivate (vedi tab. 5.1); nella colonna di sinistra sono riportate le principali funzioni elementari, in quella di destra le loro derivate. La tabella è però anche una tavola di integrali: infatti, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, ogni funzione della colonna di sinistra è una primitiva della corrispondente funzione della colonna di destra.

Tabella 5.1

$F(x) = \int f(x) dx$	$F'(x) = f(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln x + \alpha $	$1/(x + \alpha)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$\operatorname{cotg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\operatorname{arcsin} x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{arccos} x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$1/(1+x^2)$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Esercizi

2.1 Calcolare i seguenti integrali indefiniti

$$\int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx, \quad \int 2^x dx, \quad \int \frac{x}{1+x} dx, \quad \int e^{-x} dx,$$

$$\int \sin 3x dx, \quad \int e^{\alpha x} dx, \quad \int \frac{dx}{2x+3}, \quad \int \frac{dx}{(x+2)^3}.$$

2.2 Calcolare il massimo e il minimo (se esistono) delle seguenti funzioni, negli intervalli indicati a fianco:

- (a) $x e^{-\sqrt{x}}$ $[0, 7]$
 *(b) $x \ln x$ $(0, 1)$
 *(c) $x - 2 \operatorname{arctg} x$ $[-\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$
 (d) $x e^{\operatorname{arctg} x}$ $[-1, 0]$
 *(e) $(x+1)e^{-x^2}$ $[0, +\infty)$
 *(f) $\sin x + 2 \cos x$ $[0, 2\pi]$
 (g) $x^2 e^{-|x-1|}$ $[-1, 3]$

3 Integrazione delle funzioni razionali

La tabella del paragrafo precedente, insieme alle regole di derivazione, ci permette di calcolare le derivate di tutte le funzioni elementari e delle loro combinazioni. Per quanto riguarda l'integrazione il lavoro non è finito, perché, se è vero che la tabella è anche una tabella di integrali, non si hanno per gli integrali le semplici regole di derivazione del paragrafo 1.

Vogliamo occuparci, per cominciare, dell'integrazione delle funzioni razionali, cioè del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono dei polinomi.

Esempio 3.1

Si calcoli l'integrale

$$\int \frac{dx}{x(x+1)}.$$

Si cercheranno due costanti A e B tali che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulti

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Dovremo avere, moltiplicando per $x(x+1)$:

$$A(x+1) + Bx = 1, \quad \text{ovvero} \quad (A+B)x + A = 1.$$

Quest'ultima relazione dev'essere verificata per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$, e pertanto dovrà essere

$$A+B=0, \quad A=1,$$

cioè

$$A=1, \quad B=-1.$$

In conclusione

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$$

e quindi

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \ln|x| - \ln|x+1|. \quad \blacksquare$$

Esempio 3.2

Calcolare

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

Ponendo

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2},$$

si dovrà avere $x+1 = (A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A$, e quindi

$$A+B+C=0,$$

$$A+2B-C=1,$$

$$-2A=1,$$

da cui

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = \frac{2}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}.$$

Allora

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)(x+2)} dx = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+2|. \quad \blacksquare$$

Negli esempi precedenti il grado del denominatore era maggiore di quello del numeratore. Se questo non accade occorrerà prima eseguire la divisione per ridursi

così al caso precedente. Infatti, se il grado del polinomio $P(x)$ è maggiore o uguale a quello di $Q(x)$, si può scrivere

$$P(x) = N(x)Q(x) + R(x),$$

dove $N(x)$ e $R(x)$ sono polinomi (N e R sono rispettivamente il quoziente e il resto della divisione $P(x)/Q(x)$) e il grado di $R(x)$ è inferiore a quello di $Q(x)$. Allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

e si è ricondotti a integrare un polinomio e una funzione razionale con il grado del numeratore inferiore a quello del denominatore.

Esempio 3.3

Sia dato

$$\int \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1} dx.$$

Eseguendo la divisione si ottiene

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2x + 3}{(x-1)(x+1)} = 1 + \frac{5}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1},$$

e quindi

$$\int \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1} dx = x + \frac{5}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|. \blacksquare$$

Esempio 3.4

Sia dato l'integrale

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)}.$$

A differenza dei casi precedenti, il denominatore ha radici multiple (per l'esattezza ha la radice doppia $x=0$); in questo caso si porrà

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1},$$

da cui si ottiene $A = -1$, $B = -1$, $C = 1$.

Allora

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1|. \blacksquare$$

Esempio 3.5

Si calcoli

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2}.$$

Si pone

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2},$$

da cui $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$, $D = 1$ e quindi

$$\int \frac{dx}{x^2(x+1)^2} = -2 \ln|x| - \frac{1}{x} + 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1}. \blacksquare$$

Esercizi

3.1 Verificare per derivazione che gli integrali degli esempi 3.1, ..., 3.5 sono esatti.

3.2 Si calcolino i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}, \quad \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}, \quad \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-1)},$$

$$\int \frac{x+3}{x^2-x} dx, \quad \int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} dx, \quad \int \frac{dx}{x^3(x-1)},$$

$$\int \frac{dx}{x(x+3)}, \quad \int \frac{dx}{2x^2-1}, \quad \int \frac{x^2+x}{(x-1)(x+2)} dx.$$

4 Integrazione delle funzioni razionali (continuazione)

Veniamo ora al caso in cui il denominatore della funzione razionale $f = P/Q$ abbia radici complesse.

Esempio 4.1

Sia dato

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}.$$

Posto

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{2Bx+C}{x^2+1},$$

si determinano al solito modo i coefficienti A, B e C :

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2};$$

quindi, ricordando l'esercizio 1.6,

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \blacksquare$$

Esempio 4.2

Calcolare

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+x+1)}.$$

Posto²

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + C \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{D}{x^2+x+1},$$

si ricava $A = -1, B = 1, C = 1/2, D = -1/2$; si ha allora

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+x+1)} = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Calcoliamo l'ultimo integrale. Si ha

$$x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left\{ \frac{4}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \right\},$$

e quindi, ricordando l'esercizio 1.6,

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \blacksquare$$

Esempio 4.3

Sia dato

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+4)}.$$

Posto

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2x+4)} = A \frac{2x}{x^2+1} + \frac{B}{x^2+1} + C \frac{2x+2}{x^2+2x+4} + \frac{D}{x^2+2x+4}$$

² Si noti che il numeratore della terza frazione è la derivata del denominatore. Questo artificio rende più facili i calcoli successivi.

si ricava

$$A = -\frac{1}{13}, \quad B = \frac{3}{13}, \quad C = \frac{1}{13}, \quad D = -\frac{1}{13}.$$

Si ha dunque

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+4)} = -\frac{1}{13} \ln(x^2+1) + \frac{3}{13} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{13} \ln(x^2+2x+4) - \frac{1}{13\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}},$$

essendo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+2x+4} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}}. \blacksquare \end{aligned}$$

Concludiamo questo paragrafo con la descrizione di un metodo generale per trattare il caso di radici multiple, che è illustrato negli esempi che seguono.

Esempio 4.4

Si calcoli

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}.$$

Si pone

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{2Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Dx+E}{x^2+1} \right),$$

sviluppando la derivata si ricavano come al solito i coefficienti, ottenendo

$$A = D = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{8}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad E = -\frac{1}{4},$$

e dunque

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{1}{4} \ln|x+1| + \frac{1}{8} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \frac{x-1}{1+x^2}. \blacksquare$$

Esempio 4.5

Sia dato

$$\int \frac{dx}{x^3(1+x)^2}.$$

Ponendo

$$\frac{1}{x^3(1+x)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+x} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Cx^2 + Dx + E}{x^2(1+x)} \right),$$

si ottiene

$$A = C = -3, \quad B = 3, \quad D = -\frac{3}{2}, \quad E = \frac{1}{2},$$

da cui

$$\int \frac{dx}{x^3(1+x)^2} = -3 \ln|x| + 3 \ln|1+x| + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x - 3x^2}{x^2(1+x)}.$$

Dagli esempi che precedono si può dedurre un metodo generale per trattare gli integrali di funzioni razionali quando il denominatore ha radici multiple: si opera come se le radici fossero semplici, aggiungendo però un termine

$$\frac{d}{dx} \frac{R(x)}{S(x)},$$

dove $S(x)$ è il polinomio costituito dagli stessi fattori del denominatore $Q(x)$, ognuno con l'esponente diminuito di uno (e cioè le radici di S sono tutte e sole le radici multiple di Q , con molteplicità diminuita di 1) mentre $R(x)$ è un polinomio di grado di 1 inferiore a quello di S .

Esempio 4.6

Sia dato

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}.$$

Se si pone

$$\frac{1}{(1+x^2)^4} = \frac{A+2Bx}{1+x^2} + \frac{d}{dx} \left\{ \frac{Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{(1+x^2)^3} \right\},$$

si trova subito

$$B = D = F = H = 0,$$

$$A = C = \frac{5}{16}, \quad E = \frac{5}{6}, \quad G = \frac{11}{16},$$

e dunque

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{5}{16} \operatorname{arctg} x + \frac{\frac{5}{16}x^5 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{11}{16}x}{(1+x^2)^3}.$$

Gli esempi che abbiamo trattato dovrebbero essere sufficienti per dare al lettore la capacità di integrare le funzioni razionali. Naturalmente, il calcolo dei coefficienti diventa via via più complesso quando aumenta il grado del denominatore, dato che si tratta di risolvere un sistema di equazioni lineari di ordine pari al grado del denominatore.

Esercizi

4.1 Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^4 + 1}, & \int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 3)}, & \int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2 + 4)}, \\ & \int \frac{dx}{x(x+1)(x^2 + 2)}, & \int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}, & \int \frac{dx}{x^4 + 4x + 3}, \\ & \int \frac{dx}{(x+x^2)^3}, & \int \frac{dx}{(x^2 + 3)^3}, & \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2(x+1)}, \\ & \int \frac{x dx}{(x^2 + x + 1)^3}, & \int \frac{x^2 + 2}{x^2(x^2 + 1)^2} dx, & \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

5 L'integrazione per parti

Le formule [1.1] (derivata di un prodotto) e [1.4] (derivata di una funzione composta) hanno il loro corrispettivo in due regole di integrazione: l'integrazione per parti e quella per sostituzione. Cominceremo a trattare la prima. Si parte dunque dalla regola di derivazione di un prodotto:

$$(fg)' = fg' + f'g,$$

da cui, integrando, si ottiene

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx. \quad [5.1]$$

La [5.1] prende il nome di *formula di integrazione per parti*.

Il senso da dare a questa formula è il seguente. Supponiamo di dover calcolare

l'integrale $\int h(x) dx$, dove $h(x)$ è il prodotto di due funzioni: $h(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$.

Supponiamo inoltre di conoscere una primitiva $g(x)$ della funzione $\varphi(x)$ [$g'(x) = \varphi(x)$]. Allora, tramite la [5.1], si può ridurre il calcolo dell'integrale

$$\int h(x) dx = \int f(x) \cdot \varphi(x) dx = \int f(x)g'(x) dx$$

a quello dell'integrale

$$\int f'(x)g(x)dx,$$

che in alcuni casi è più maneggevole del precedente. Dato poi che una data funzione $h(x)$ si può dividere nel prodotto di due funzioni in molti modi differenti, la formula [5.1] è uno strumento molto potente per la trasformazione degli integrali.

Se si tratta poi di integrali definiti, la [5.1] prende la forma

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x)dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \end{aligned} \quad [5.2]$$

Esempio 5.1

Si ha

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x,$$

e quindi l'ultima espressione è l'integrale della funzione $\ln x$, come si può verificare derivando. ■

Esempio 5.2

Risulta

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x. \quad \blacksquare$$

Esempio 5.3

Si ha

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Come si vede, il metodo di integrazione per parti fa sì che si riescano a calcolare facilmente degli integrali il cui risultato non era evidente all'inizio.

Esempio 5.4

Calcoliamo l'integrale $I_n = \int \sin^n x dx$.

Si ha

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \sin x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

Scrivendo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, si trova

$$I_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

da cui

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx. \quad [5.3]$$

In maniera analoga si trova

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx. \quad [5.4]$$

Le formule [5.3] e [5.4] permettono di diminuire via via l'esponente nell'integrale finché non si arriva a uno degli integrali

$$\int \sin x dx, \quad \int \cos x dx \quad \text{o} \quad \int dx,$$

a seconda che n sia dispari o pari.

Ad esempio, si trova facilmente

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x), \\ \int \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Esercizi

5.1 Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx, & \quad \int x (\ln x)^2 dx, & \quad \int x \ln(x^2 + x) dx, \\ \int x^2 \cos 2x dx, & \quad \int (x+2) \sin \frac{x}{2} dx, & \quad \int x e^x dx, \\ \int (x^2 + 1) e^{2x} dx, & \quad \int e^x \sin 3x dx, & \quad \int x \operatorname{arctg} 2x dx, \\ \int \cos^4 x dx, & \quad \int \frac{\ln x}{x^6} dx; \end{aligned}$$

5.2 Calcolare delle formule analoghe alle [5.3], [5.4] per gli integrali:

$$\int (\ln x)^m dx, \quad \int x^n e^x dx, \quad \int x^n \sin x dx,$$

$$\int x^n \cos x dx, \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

5.3 Dimostrare che

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \int_0^x f(u) (x-u) du.$$

5.4 Dimostrare che la [5.2] resta vera se si suppone solamente che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ siano regolari a tratti e continue in $[a, b]$. Cosa si può dire nel caso generale di funzioni regolari a tratti?

6 L'integrazione per sostituzione

Un secondo metodo per il calcolo di integrali è quello di *integrazione per sostituzione*. Come l'integrazione per parti, anche questa ha origine in una formula di derivazione, ed esattamente nella formula [1.4] di derivazione di una funzione composta.

Sia $f(x)$ una funzione continua e $F(x)$ una sua primitiva:

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Se $\varphi(t)$ è una funzione derivabile e se si indica con $G(t)$ la funzione composta $F(\varphi(t))$, si ha la formula [1.4]

$$G'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t).$$

cosicché $G(t)$ è una primitiva della funzione $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$:

$$G(t) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Si ha dunque

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int f(x) dx \quad \{x = \varphi(t)\}. \quad [6.1]$$

La formula [6.1] significa che, se vogliamo calcolare l'integrale di una funzione $g(t)$ che è data nella forma particolare $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, basta calcolare l'integrale della funzione $f(x)$, salvo poi ritornare alla variabile t ponendo $x = \varphi(t)$ nell'integrale trovato.

Esempio 6.1

Si ha

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| = \ln |\varphi(t)|,$$

e scrivendo x al posto di t :

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln |\varphi(x)|.$$

In particolare, si ha

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x|,$$

$$\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x|,$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x|,$$

$$\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx = \ln |ax^2+bx+c|$$

(quest'ultima formula è già stata trovata per verifica diretta nell'esercizio 1.6). ■

Esempio 6.2

Per $\alpha \neq -1$

$$\int \varphi(t)^\alpha \varphi'(t) dt = \int x^\alpha dx \{x = \varphi(t)\} = \frac{\varphi(t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

In particolare:

$$\int \frac{\ln t}{t} dt = \int x dx \{x = \ln t\} = \frac{1}{2} (\ln t)^2,$$

$$\int \sin^n x \cos x dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}, \quad n \neq -1. \quad \blacksquare$$

Esempio 6.3

Si ha

$$\int f(\sin t) \cos t dt = \int f(x) dx \{x = \sin t\}.$$

Ad esempio,

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t}{1 - \sin^2 t} dt = \int \frac{dx}{1 - x^2} \quad \{x = \sin t\} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 + \sin t| - \frac{1}{2} \ln |1 - \sin t|,$$

$$\int \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin t} dt = \int \frac{x}{1 + x} dx \quad \{x = \sin t\} =$$

$$= \sin t - \ln |1 + \sin t|. \blacksquare$$

La formula [6.1] si può interpretare anche in una seconda maniera, osservando cioè che essa può servire a ricondurre, mediante un'apposita sostituzione $x = \varphi(t)$, l'integrale

$$\int f(x) dx$$

all'integrale

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Scegliendo opportunamente la funzione $\varphi(t)$, è possibile che quest'ultimo integrale sia più semplice del precedente. In questo caso, se $G(t)$ è una primitiva di $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, e se si è avuto cura di scegliere una funzione $\varphi(t)$ invertibile, la primitiva di $f(x)$ sarà la funzione

$$G(\varphi^{-1}(x)).$$

Esempio 6.4

Sia dato

$$\int \frac{1 + e^x}{e^{2x} + 1} dx.$$

Ponendo $e^x = t$ e cioè $x = \ln t$, si ha

$$\int \frac{1 + e^x}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{1 + t}{(t^2 + 1)} \frac{1}{t} dt \quad \{t = e^x\}.$$

Quest'ultimo integrale si calcola col metodo del paragrafo 4, ottenendo

$$\int \frac{1 + t}{t(1 + t^2)} dt = \ln |t| - \frac{1}{2} \ln(1 + t^2) + \operatorname{arctg} t$$

e quindi, sostituendo $t = e^x$,

$$\int \frac{1 + e^x}{1 + e^{2x}} dx = x - \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + \operatorname{arctg} e^x. \blacksquare$$

Esempio 6.5

Sia dato

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x+1} + x + 2}.$$

Si pone $t = \sqrt{x+1}$, $x = t^2 - 1$, da cui³

$$\int \frac{dx}{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} = \int \frac{2t}{(t+1)^2} dt =$$

$$= 2 \ln |t+1| + \frac{2}{t+1} = 2 \ln(1 + \sqrt{x+1}) + \frac{2}{1 + \sqrt{x+1}}. \blacksquare$$

Osservazione 6.1. Dovendo calcolare integrali definiti non è necessario tornare alla fine alla variabile x : infatti si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad [6.2]$$

come si verifica facilmente. $\blacksquare$

Esercizi

6.1 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)} dx, \quad \int \frac{\cos x \sin x}{(1 + \cos^2 x)(1 + \cos x)} dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad \int \frac{e^t + 2}{e^t(e^t + 1)} dt, \quad \int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx,$$

$$\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-2\sqrt{x-1}} dx, \quad \int \arcsin x dx, \quad \int \frac{x^{1/2} + 1}{x^{3/2} - 1} dx,$$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^4} dx, \quad \int x^3 e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

***6.2** Dimostrare che se n è dispari si può calcolare l'integrale

$$\int x^n e^{-x^2} dx$$

³ Si omette solitamente l'indicazione $\{t = \varphi^{-1}(x)\}$.

in termini di funzioni elementari, mentre se n è pari questo integrale si può esprimere in termini di funzioni elementari e dell'integrale

$$\int e^{-x^2} dx.$$

6.3 Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x)(2 + \sin x)} dx,$$

$$\int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{1 + e^x} dx,$$

$$\int_0^a \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} dx,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2x \ln \sin x dx.$$

7 Alcune sostituzioni speciali

Abbiamo visto come una scelta opportuna della sostituzione $x = \varphi(t)$ può essere utile per il calcolo di un integrale. In genere la scelta della funzione $\varphi(t)$ dipende dall'integrale in esame e dovrà essere fatta caso per caso. Vi sono però alcune classi di integrali che si risolvono con sostituzioni standard, di cui diamo qui di seguito alcuni esempi. Indicheremo con $R(y, z)$ una funzione razionale in y, z , cioè il rapporto di due polinomi nelle variabili y e z .

A. Integrazione di $R(\sin x, \cos x)$

Si risolve con la sostituzione $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ($t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$). Si ha infatti

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

e quindi

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

e quest'ultima è una funzione razionale di t , che si tratta con i metodi illustrati nei paragrafi 3 e 4.

Esempio 7.1

Calcoliamo l'integrale

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

Si ha, con la sostituzione suddetta,

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2 dt}{1+2t-t^2}$$

e quest'ultimo integrale è

$$\begin{aligned} \int \frac{2 dt}{1+2t-t^2} &= -2 \int \frac{dt}{(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2})} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln |t-1+\sqrt{2}| - \ln |t-1-\sqrt{2}| \}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \{ \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}| - \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}| \}.$$

Osserviamo che se l'integrale contiene solamente combinazioni delle funzioni $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ e $\sin x \cos x$, allora si calcola più facilmente con la sostituzione $t = \operatorname{tg} x$. Infatti si ha:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}.$$

In realtà, a ben vedere, questa sostituzione non è che la precedente un po' mascherata, dato che $\sin^2 x$, $\cos^2 x$, e $\sin x \cos x$ si possono tutte esprimere in termini di $\sin 2x$ e $\cos 2x$.

Esempio 7.2

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx.$$

Con la sostituzione $t = \operatorname{tg} x$ si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x \cos x} dx &= \int \frac{t^2}{(1+t^2)(1+t+t^2)} dt = \int \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{2} \frac{(2t+1)-1}{1+t+t^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+t^2) - \frac{1}{2} \ln(1+t+t^2) - \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x \cos x) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

B. Integrazione di $R(x, \sqrt{1-x^2})$

Si può usare la sostituzione $x = \cos u$ e ridursi al caso precedente; ma si può anche fare direttamente la sostituzione

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

con la quale si ha

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt,$$

e l'ultima è una funzione razionale in t . Da notare che si sarebbe arrivati allo stesso risultato ponendo prima $x = \cos u$ e poi $u = 2 \operatorname{arctg} t$.

Al caso precedente ci si riconduce quando si deve integrare una funzione razionale $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$, con $a < 0$. Osservato che in questo caso deve essere $b^2 - ac > 0$, perché altrimenti l'espressione sotto radice è sempre negativa, se si pone

$$v = \frac{ax+b}{\sqrt{b^2-ac}} = \frac{ax+b}{\alpha},$$

si ha

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{b^2-ac}{a} (v^2 - 1) = \frac{\alpha^2}{-a} (1-v^2).$$

Sarà allora,

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}) dx = \frac{\alpha}{a} \int R\left(\frac{\alpha v-b}{a}, \frac{\alpha}{\sqrt{-a}} \sqrt{1-v^2}\right) dv,$$

e ci siamo ricondotti al caso precedente. ■

Esempio 7.3

Si debba valutare l'integrale $\int \frac{dx}{4-5\sqrt{1-x^2}}$.

Ponendo $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, si ha

$$\int \frac{dx}{4-5\sqrt{1-x^2}} = - \int \frac{t dt}{(t^2+1)(t-2)\left(t-\frac{1}{2}\right)}$$

e, con la tecnica del paragrafo 4,

$$\int \frac{dx}{4-5\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{15} \ln \left| t - \frac{1}{2} \right| - \frac{4}{15} \ln |t-2| + \frac{2}{5} \operatorname{arctg} t, \quad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad \blacksquare$$

C. Integrazione di $R(x, \sqrt{x^2+\alpha})$

Qui il trucco consiste nel porre $x^2 + \alpha = (x+t)^2 = x^2 + 2tx + t^2$, da cui si ricava

$$x = \frac{\alpha-t^2}{2t}, \quad t = \sqrt{x^2+\alpha} - x.$$

Si ha allora

$$\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha}) dx = - \int R\left(\frac{\alpha-t^2}{2t}, \frac{\alpha+t^2}{2t}\right) \frac{\alpha+t^2}{2t^2} dt.$$

Ci si riconduce a questo caso nell'integrazione di $R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c})$, con $a > 0$, osservando che

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a} \cdot \{(ax+b)^2 + (ac-b^2)\}.$$

Se si pone allora

$$u = \frac{ax+b}{\sqrt{a}}, \quad \alpha = \frac{ac-b^2}{a}$$

si ha

$$ax^2 + 2bx + c = u^2 + \alpha,$$

e dunque

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+2bx+c}) dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int R\left(\frac{\sqrt{a}u-b}{a}, \sqrt{u^2+\alpha}\right) du.$$

Esempio 7.4

Calcolo dell'integrale

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+2}}$$

Ponendo

$$x^2 + 2 = (x+t)^2 = x^2 + 2tx + t^2,$$

e dunque

$$x = \frac{2-t^2}{2t},$$

si ottiene

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + 2}} = - \int \frac{t^2 + 2}{4t} dt = -\frac{t^2}{8} - \frac{1}{2} \ln |t|,$$

con $t = \sqrt{x^2 + 2} - x$. ■

Osservazione 7.1. I metodi che abbiamo esaminato in questo capitolo consentono di calcolare le primitive di un gran numero di funzioni, e di calcolarle *esplicitamente*, cioè in termini delle cosiddette funzioni elementari (potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche e loro inverse). Si potrebbe pensare che ogni funzione $f(x)$ che si esprima in termini di funzioni elementari abbia una primitiva dello stesso tipo, ottenibile cioè come combinazione di funzioni elementari. Purtroppo questo *non è vero*, e anzi si possono dare molti esempi di funzioni la cui primitiva non è esprimibile elementarmente. Per citarne alcune:

$$\frac{\sin x}{x}, \quad e^{x^2}, \quad \frac{\ln x}{1+x}, \quad \cos x^2$$

hanno primitive che non si esprimono elementarmente, come pure avviene per i cosiddetti integrali ellittici.

E' necessario comunque evitare di confondere l'esistenza delle primitive (che per ogni funzione continua è garantita dal teorema fondamentale del calcolo integrale) con la possibilità di esprimere queste ultime in termini di funzioni elementari. ■

Esercizi

7.1 Calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{1 + \sin x}, \quad \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}, \quad \int \frac{dx}{2 + \sin x}, \\ & \int \frac{dx}{\sin^3 x}, \quad \int \sqrt{4 + 9x^2} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}, \\ & \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}, \quad \int x\sqrt{x^2+4x} dx, \\ & \int \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} dx, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}, \\ & \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x - \sin x}. \end{aligned}$$

8 La funzione logaritmo

Fin dall'introduzione dei logaritmi ci si è resi conto che essi sono collegati con la quadratura dell'iperbole $y = 1/x$. Per essere più precisi, si è trovato che (vedi fig. 5.2) se $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ è una progressione geometrica e A_k è l'area della figura compresa tra l'asse delle x , le rette $x=1$ e $x=a_k$ e l'iperbole $y=1/x$, allora la successione $\{A_k\}$ è una progressione aritmetica, cosicché le aree A_k possono essere prese come logaritmi di a_k .

Sviluppando l'antica idea, si può dare una definizione di logaritmo, indipendente da quella di potenza a esponente reale, anzi tale che quest'ultima possa ricavarsi dalla prima.

Poniamo, per $x > 0$,

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}. \quad [8.1]$$

La funzione L così definita è derivabile in $(0, +\infty)$, dunque continua; inoltre essa è crescente ed è positiva per $x > 1$, negativa per $0 < x < 1$. Si ha

$$L(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t}.$$

Se ora nell'ultimo integrale si compie il cambiamento di variabile $t=xu$, si trova

$$L(xy) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_1^y \frac{du}{u},$$

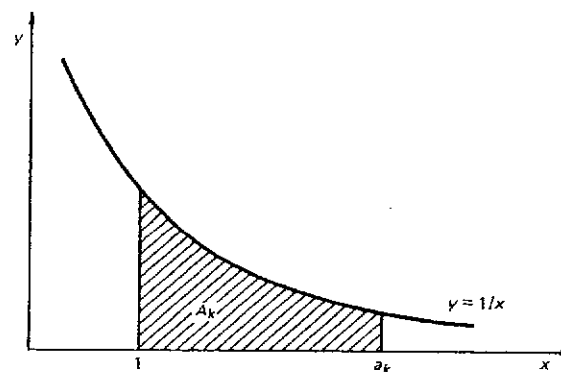


Figura 5.2

e dunque

$$L(xy) = L(x) + L(y). \quad [8.2]$$

In particolare,

$$L(x^n) = nL(x),$$

che è la proprietà menzionata all'inizio. Inoltre $L(x^{-1}) = -L(x)$, come si vede facilmente con il cambiamento di variabili $t = xu$ nella [8.1].

La relazione [8.2] caratterizza la funzione logaritmo a meno della base, la quale è, per definizione, quel numero A tale che $L(A) = 1$, cioè

$$\int_1^A \frac{dt}{t} = 1.$$

Per trovare il numero A , si osservi che

$$\int_1^{(1+1/n)^n} \frac{dt}{t} = L\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\} = nL\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n \int_1^{1+1/n} \frac{dt}{t}.$$

Ora, se $1 < t < 1 + 1/n$, si ha $n/(n+1) < 1/t < 1$ e dunque

$$\frac{n}{n+1} < \int_1^{(1+1/n)^n} \frac{dt}{t} < 1.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ e ricordando che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e che la funzione $L(x)$ è continua, si ottiene $L(e) = 1$, per cui i logaritmi così definiti risultano in base e .

La funzione esponenziale può, a questo punto, essere definita come inversa del logaritmo e non è difficile verificare che essa gode delle proprietà illustrate nel capitolo 2 (§ 8).

Esercizi

8.1 Mostrare che la funzione logaritmo $L(x)$ manda $\mathbf{R}^+$ su tutto $\mathbf{R}$:

$$L(\mathbf{R}^+) = \mathbf{R}.$$

8.2 Per $A > 0$, $A \neq 1$ si pone

$$L_A(x) = L(x)/L(A);$$

L_A è il logaritmo in base A . Sia E_A la funzione inversa di L_A (usualmente si scrive A^x invece di $E_A(x)$).

Dimostrare che

- (a) $E_A(x) = E_e(L(A)x)$;
- (b) $E_A(ts) = E_{E_A(t)}(s) = E_{E_A(s)}(t)$;
- (c) $\int_1^{E_A(x)} \frac{dt}{t} = xL(A)$;
- (d) $E_A(t+s) = E_A(t)E_A(s)$.

*9 Ancora sul numero e

Abbiamo visto nel capitolo 2 (§ 7) che il numero e , definito da

$$e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

è irrazionale. Lo scopo di questo paragrafo è di dimostrare che esso è trascendente.

Ricordiamo che un numero reale α si dice *algebrico* se esso è radice di un polinomio a coefficienti interi, cioè se esistono dei numeri interi $c_0, c_1, \dots, c_m$ tali che

$$c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots + c_m\alpha^m = 0.$$

Ad esempio, un numero razionale $\alpha = p/q$ è algebrico, essendo soluzione dell'equazione di primo grado $p - xq = 0$, come pure è algebrico $\sqrt{2}$, soluzione di $x^2 - 2 = 0$.

Un numero non algebrico si dice *trascendente*. Faremo vedere che e è per l'appunto trascendente, cioè che non esiste nessun polinomio a coefficienti interi, tale che risulti

$$c_0 + c_1e + c_2e^2 + \dots + c_me^m = 0, \quad c_0 \neq 0. \quad [9.1]$$

Allo scopo, osserviamo innanzitutto che, se $P(x)$ è un polinomio di grado n , si ha

$$\int_0^a e^{-x}P(x)dx = -e^{-x}P(x) \Big|_0^a + \int_0^a e^{-x}P'(x)dx.$$

Continuando a integrare per parti e ricordando che $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$, si ha

$$\int_0^a e^{-x}P(x)dx = -e^{-x}F(x) \Big|_0^a, \quad [9.2]$$

dove si è posto

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^{(n)}(x).$$

La [9.2] si può anche scrivere

$$F(a) = e^a F(0) - e^a \int_0^a e^{-x} P(x) dx. \quad [9.3]$$

Supponiamo ora per assurdo che e sia algebrico, cioè che esistano numeri interi $c_0, c_1, \dots, c_m$ per i quali la [9.1] abbia luogo. Se si scrive la [9.3] per $a=0, 1, \dots, m$ e si sommano le relazioni così ottenute, dopo averle moltiplicate rispettivamente per $c_0, c_1, \dots, c_m$, si ottiene, tenendo conto della [9.1],

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_m F(m) = - \sum_{i=0}^m c_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx, \quad [9.4]$$

relazione valida per ogni polinomio $P(x)$. Prendiamo ora

$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (x-1)^p (x-2)^p \dots (x-m)^p,$$

dove p è un numero primo maggiore di m e di c_0 .

Con una tale scelta di $P(x)$, valutiamo $F(0), \dots, F(m)$, cominciando da $F(0)$.

Risulta, ovviamente,

$$P(0) = P'(0) = \dots = P^{(p-2)}(0) = 0$$

dato che, derivando meno di $p-1$ volte, resterà sempre qualche potenza di x , che si annulla per $x=0$. Se invece si deriva esattamente $p-1$ volte e si pone $x=0$, l'unico termine non nullo sarà quello che si ottiene derivando $p-1$ volte il fattore x^{p-1} . Ne segue

$$P^{(p-1)}(0) = (-1)^{m-p} (m!)^p.$$

Questa quantità non è divisibile per p , mentre tutte le altre derivate,

$$P^{(p)}(0), P^{(p+1)}(0), \dots, P^{(m)}(0),$$

che si ottengono derivando $p-1$ volte il fattore x^{p-1} e almeno una volta uno degli altri fattori, sono divisibili per p .

In conclusione, $F(0) = (-1)^{m-p} (m!)^p + A$, dove A è divisibile per p .

Con un ragionamento simile, si dimostra che $F(1), F(2), \dots, F(m)$ sono tutti divisibili per p . Ne segue che il primo membro della [9.4] è un intero, somma del numero $(-1)^{m-p} (m!)^p c_0$, non divisibile per p e diverso da zero, e di un intero divisibile per p , e dunque non può essere zero. Si ha pertanto

$$|c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_m F(m)| \geq 1. \quad [9.5]$$

Veniamo ora al secondo membro della [9.4]. Si ha, se $0 \leq x \leq m$,

$$|P(x)| \leq \frac{1}{(p-1)!} m^{(m+1)p-1},$$

e dunque

$$\left| \int_0^i P(x) e^{-x} dx \right| \leq \frac{m^{(m+1)p-1}}{(p-1)!} \int_0^i e^{-x} dx \leq \frac{m^{(m+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

D'altra parte

$$\sum_{i=0}^m |c_i| e^i \leq e^m \sum_{i=0}^m |c_i| = M e^m,$$

e quindi in definitiva il modulo del secondo membro della [9.4] si maggiora con

$$L(p) = M e^m \frac{m^{(m+1)p-1}}{(p-1)!}.$$

Ora, quando p tende all'infinito, $L(p)$ tende a zero, e dunque, se p è abbastanza grande, risulterà $L(p) < 1$.

Ma allora, per un tale p , il valore assoluto del secondo membro della [9.4] è minore di 1, mentre quello del primo membro è almeno 1, il che è una contraddizione.

Capitolo 6

Sviluppi del calcolo infinitesimale

1 Calcolo dei limiti: i teoremi di de l'Hôpital

Consideriamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a, b]$ e sia x_0 un punto dell'intervallo $[a, b]$.

Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad [1.1]$$

È chiaro che, se si ha $g(x_0) \neq 0$, il limite [1.1] sarà uguale a $f(x_0)/g(x_0)$; d'altra parte, se $g(x_0) = 0$ e $f(x_0) \neq 0$, l'esistenza del limite dipenderà dal comportamento di $g(x)$ nelle vicinanze di x_0 , e precisamente il limite esiste (e vale $+\infty$ o $-\infty$) se $g(x)$ non cambia di segno in un intorno di x_0 ; non esiste nel caso contrario.

Resta da esaminare il caso in cui $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ed è qui che viene in aiuto il primo dei teoremi di de l'Hôpital.

Per avere un'idea del risultato a cui arriveremo, supponiamo che esistano le derivate delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nel punto x_0 , e che $g'(x_0)$ sia diversa da zero. Si avrà, in tal caso,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

In generale, però, può accadere che manchi una delle derivate di f e g in x_0 , se non ambedue, oppure che sia $g'(x_0) = 0$. Si ha, in ogni caso, il seguente

Teorema 1.1 (di de l'Hôpital) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $[a, b] - \{x_0\}$, tali che $g(x_0) = f(x_0) = 0$. Supponiamo che g e g' siano

diverse da zero in $[a, b] - \{x_0\}$ e che esista il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*;$$

In tal caso, esiste anche il limite [1.1] e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione a valori in $[a, b] - \{x_0\}$, convergente a x_0 . Per ogni x_n esisterà, in virtù del teorema di Cauchy (vedi cap. 4, teorema 8.2), un punto ξ_n , compreso tra x_n e x_0 , tale che

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Quando $n \rightarrow \infty$, la successione $\{\xi_n\}$ tenderà a x_0 e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = L.$$

Poiché la successione $\{x_n\}$ è arbitraria, la tesi segue dal teorema 4.1 del capitolo 3. ■

In maniera analoga (usando il risultato dell'esercizio 8.5 del cap. 4, si dimostra che, se f e g sono funzioni derivabili in $[a, +\infty)$ e se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0,$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

purché questo secondo limite esista.

Esempio 1.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Siamo nelle ipotesi del teorema 1.1, con $f(x) = \sin x - x$ e $g(x) = x^3$. Si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x - 1}{3x^2},$$

ed essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(cap. 3, esempio 4.2), si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Il teorema di de l'Hôpital sussiste anche nel caso in cui sia $f(x)$ che $g(x)$ tendano all'infinito per $x \rightarrow x_0$, in virtù del seguente

Teorema 1.2 Siano f e g due funzioni derivabili nell'intervallo (a, b) . Supponiamo che

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$,
- (2) $g(x)$ e $g'(x)$ siano diverse da zero in (a, b) ,
- (3) esista il $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x) = L \in \mathbb{R}^*$.

In tal caso esiste anche il limite di f/g per $x \rightarrow a$ e si ha

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $L \in \mathbb{R}$. Per ogni $\epsilon > 0$, esiste un punto $x_0(\epsilon)$ tale che, se $a < \xi < x_0$, si ha

$$\left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \right| < \epsilon.$$

D'altra parte, per ogni $x \in (a, x_0)$, esiste un punto $\xi \in (x, x_0)$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

cosicché, per ogni $x \in (a, x_0)$, si ha

$$L - \epsilon < \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} < L + \epsilon,$$

e quindi

$$L - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} < L + \epsilon, \quad \forall x \in (a, x_0).$$

Passiamo ora al limite per $x \rightarrow a$. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = 1,$$

e dunque (vedi cap. 3, esercizio 7.5)

$$L - \epsilon \leq \min \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \max \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + \epsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ϵ , si ha infine

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

In maniera analoga si tratta il caso $L = +\infty$. Per ogni $M > 0$, esisterà un $x_0 \in (a, b)$, tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > M, \quad \forall \xi \in (a, x_0)$$

e quindi, sempre utilizzando il teorema di Cauchy,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} > M, \quad \forall x \in (a, x_0).$$

Ragionando come in precedenza, si conclude che

$$\min \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \geq M,$$

e, poiché M è arbitrario,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

La dimostrazione nel caso $L = -\infty$ è lasciata al lettore. ■

Osservazione 1.1. Il teorema 1.2 resta valido se $f(x)$ e $g(x)$ divergono per $x \rightarrow b$, o per $x \rightarrow x_0$, con $x_0 \in (a, b)$, pur di apportare qualche modifica formale all'enunciato e alla dimostrazione.

Inoltre esso continua a valere anche nel caso in cui le funzioni f e g siano definite in una semiretta, e f e g divergano per $x \rightarrow +\infty$ [o per $x \rightarrow -\infty$]. La dimostrazione è simile a quella del teorema 1.2, e viene lasciata per esercizio. ■

Osservazione 1.2. I teoremi 1.1 e 1.2 non si possono invertire, nel senso che dalla convergenza del rapporto $f(x)/g(x)$ non segue, in generale, quella di $f'(x)/g'(x)$.

Questo si può vedere facilmente considerando ad esempio le funzioni

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x.$$

Si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0;$$

mentre, essendo,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \quad e \quad g'(x) = 1,$$

non esiste il limite del rapporto delle derivate. ■

Esempio 1.2

Si ha, per ogni $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0.$$

Se si scrive

$$x^\alpha \ln x = \frac{\ln x}{x^{-\alpha}},$$

siamo nella situazione del teorema 1.2; si ha allora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0. \blacksquare$$

Esempio 1.3

Si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x},$$

da cui, applicando di nuovo il teorema 1.2,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0. \blacksquare$$

¹ A rigore, non si potrebbe scrivere questa uguaglianza prima di sapere che il limite al secondo membro esiste. Essa è, per così dire, un'uguaglianza condizionata, ed è giustificata *a posteriori* dall'esistenza del limite del rapporto delle derivate.

Esempio 1.4

Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = 1.$$

Infatti

$$x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x},$$

e dunque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x}$$

D'altra parte

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \cdot x \ln x = 1 \cdot 0 = 0. \blacksquare$$

Esercizi

1.1 Si calcolino i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\lg x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x - \sin x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) - x}{1 - \cos x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{e^{-x} - 1 + x}.$$

1.2 Si dimostri che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

2 Derivate successive

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) , e sia f' la sua derivata. A sua volta, $f'(x)$ può risultare derivabile in (a, b) ; la sua derivata si dice *derivata seconda* della funzione f , e si indica con $f''(x)$. Proseguendo, si possono definire la derivata

terza, quarta, ..., n -esima, che si indicano con $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, o anche con $D^3 f(x)$, $D^4 f(x)$, ..., $D^n f(x)$.

Definizione 2.1 Diremo che una funzione $f(x)$ definita in A , è di classe $C^k(A)$ se $f(x)$ ha tutte le derivate fino all'ordine k continue in A .

Si vede facilmente che $C^k(A)$ è uno spazio vettoriale, cioè che se $f, g \in C^k(A)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, risulta

$$f + g \in C^k(A), \quad \lambda f \in C^k(A).$$

Per quanto riguarda il prodotto di due funzioni di classe C^k si ha il seguente

Teorema 2.1 Se f e g sono funzioni di classe $C^k(A)$, anche $fg \in C^k(A)$ e si ha

$$D^k(fg)(x) = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^h f(x) D^{k-h} g(x), \quad [2.1]$$

con la convenzione che $D^0 f = f$ e $D^0 g = g$.

Dimostrazione. La [2.1], che va sotto il nome di *formula di Leibniz*, si dimostra per induzione. Infatti, essa è vera per $k=1$ (vedi cap. 5, proposizione 1.1); supponiamola vera per k e dimostriamo che allora vale per $k+1$.

Siano f e g due funzioni di C^{k+1} ; si ha

$$\begin{aligned} D^{k+1}(fg) &= D D^k(fg) = D \left\{ \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^h f D^{k-h} g \right\} = \\ &= \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} (D^{h+1} f D^{k-h} g + D^h f D^{k-h+1} g) = \\ &= \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^{h+1} f D^{k-h} g + \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^h f D^{k-h+1} g. \end{aligned}$$

Se nella prima somma poniamo $h=s-1$, otteniamo

$$D^{k+1}(fg) = \sum_{s=1}^{k+1} \binom{k}{s-1} D^s f D^{k-s+1} g + \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^h f D^{k-h+1} g.$$

Scrivendo a parte il termine con $s=k+1$ nella prima somma e quello con $h=0$ nella seconda, e mettendo di nuovo h al posto di s nella prima somma, troviamo

$$\begin{aligned} D^{k+1}(fg) &= D^{k+1} f \cdot g + f \cdot D^{k+1} g + \sum_{h=1}^k \left[\binom{k}{h-1} + \binom{k}{h} \right] D^h f D^{k-h+1} g = \\ &= D^{k+1} f \cdot g + f \cdot D^{k+1} g + \sum_{h=1}^k \binom{k+1}{h} D^h f D^{k-h+1} g, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione

$$\binom{k}{h-1} + \binom{k}{h} = \binom{k+1}{h}$$

(vedi cap. 2, esercizio 1.4). Ricordando che

$$\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1,$$

si ha infine

$$D^{k+1}(fg) = \sum_{h=0}^{k+1} \binom{k+1}{h} D^h f D^{k+1-h} g. \blacksquare$$

Nel seguito, diremo che una funzione $f(x)$ è di classe $C^\infty(A)$ se è derivabile quante volte si vuole in A . In simboli,

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(A).$$

Esempio 2.1

Le funzioni x^n , $n \in \mathbb{N}$, sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e si ha

$$\begin{aligned} D^k x^n &= n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} && \text{se } k \leq n, \\ D^k x^n &= 0 && \text{se } k > n. \blacksquare \end{aligned}$$

Esempio 2.2

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono $C^\infty(\mathbb{R})$ e si ha

$$\begin{aligned} \begin{cases} D^{2n} \sin x = (-1)^n \sin x \\ D^{2n+1} \sin x = (-1)^n \cos x, \\ D^{2n} \cos x = (-1)^n \cos x \\ D^{2n+1} \cos x = (-1)^{n+1} \sin x. \end{cases} \end{aligned}$$

Analogamente, la funzione e^x è di classe C^∞ , e risulta

$$D^n e^x = e^x. \blacksquare$$

Esempio 2.3

La funzione $f(x) = x|x|$ è derivabile e si ha $f'(x) = 2|x|$.

Si vede facilmente che $x|x|$ appartiene a $C^1(\mathbb{R})$, ma non a $C^2(\mathbb{R})$, perché la funzione $|x|$ non è derivabile nell'origine. $\blacksquare$

Lo studio della derivata seconda di una funzione può essere di aiuto nella determinazione dei punti di massimo e di minimo relativo. Abbiamo già visto (cap. 4, propo-

sizione 8.1) che se una funzione $f(x)$ è derivabile in un intervallo I e ha un massimo relativo in un punto x_0 interno, allora la sua derivata si deve annullare in x_0 . In altre parole, x_0 deve essere un punto stazionario della funzione $f(x)$.

Teorema 2.2 Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione derivabile in un intervallo I e che x_0 sia un punto stazionario (cioè tale che $f'(x)=0$) interno a I . Supponiamo inoltre che esista la derivata seconda della f in x_0 . Affinché $f(x)$ abbia un massimo (minimo) relativo in x_0 .

- (a) è necessario che $f''(x_0) \leq 0$ ($f''(x_0) \geq 0$)
 (b) è sufficiente che $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).

Dimostrazione. Basterà considerare il caso di un massimo relativo; infatti se $f(x)$ ha un minimo relativo in un punto x_0 , $-f(x)$ avrà un massimo. Dimostriamo innanzitutto la (b).

Poiché $f''(x_0)$ è negativa, per il teorema 4.2 del capitolo 3 esiste un intorno $V=(a, b)$ di x_0 tale che, per ogni $x \in V - \{x_0\}$, risulti

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

Ne segue che $f'(x)$ è negativa per $x > x_0$, e positiva per $x < x_0$, cosicché la funzione $f(x)$ è strettamente crescente in (a, x_0) , e decrescente in (x_0, b) . Il punto x_0 è dunque un punto di massimo relativo stretto (cioè tale che $f(x) < f(x_0)$ per $x \neq x_0$). In maniera analoga si dimostra che se $f''(x_0) > 0$, la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo stretto nel punto x_0 .

Veniamo ora alla (a). Sia x_0 un punto di massimo relativo. Se fosse $f''(x_0) > 0$, $f(x)$ avrebbe in x_0 un minimo relativo stretto, e quindi x_0 non potrebbe essere punto di massimo. ■

Esempio 2.4

La funzione $f(x) = \sin x + \cos x$ ha derivata $f'(x) = \cos x - \sin x$, che si annulla nei punti $(\pi/4) + k\pi$. Si ha $f''(x) = -\sin x - \cos x$, e dunque $f''((\pi/4) + 2k\pi) < 0$, e $f''((\pi/4) + (2k+1)\pi) > 0$. I primi punti sono dunque di massimo, e i secondi di minimo relativo. ■

Osservazione 2.1. La condizione $f''(x_0) \leq 0$ non è sufficiente per avere un massimo relativo, come mostra ancora una volta la funzione $f(x) = x^3$, che ha derivate prima e seconda nulle nell'origine, ma non ha né massimo né minimo relativo. ■

Esercizi

2.1 Calcolare la derivata seconda della funzione $F(x) = f(g(h(x)))$.

2.2 Calcolare la derivata n -esima delle funzioni
 $x \sin x$, $x^2 e^x$, $x^3 \ln x$, $\sin x \cos x$.

2.3 Sia $f(x) = x^4 - \sin e^x$. Calcolare $f^{(3)}(1)$.

*2.4 Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Lo stesso è vero per la funzione

$$g(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

2.5 Trovare i punti di massimo e di minimo relativo delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} & x^2(x+2)^2; \quad \frac{x^2}{x^3+4}; \quad x e^x; \quad x - \arctg x; \\ & x - \ln(2+x); \quad \sin^4 x + \cos^4 x; \quad \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}} \end{aligned}$$

2.6 Determinare le costanti a e b in modo tale che la funzione $x^2 + ax + b$ abbia un minimo relativo nel punto $x=3$.

3 Funzioni convesse e concave

Definizione 3.1 Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se, comunque si prendano due punti x_1, x_2 di I e un numero λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, si ha

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \quad [3.1]$$

La funzione $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice concava se $-g$ è convessa.

Esempio 3.1

La funzione $f(x) = x^2$ è convessa in $\mathbb{R}$. Infatti, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e ogni $\lambda \in (0, 1)$, si ha (vedi cap. 1, esercizio 2.6)

$$(a+b)^2 \leq \frac{a^2}{\lambda} + \frac{b^2}{1-\lambda}.$$

e scegliendo $a = \lambda x_1$ e $b = (1-\lambda)x_2$, si ottiene

$$\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}^2 \leq \lambda x_1^2 + (1-\lambda)x_2^2. \quad \blacksquare$$

Se si pone $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, al variare di λ nell'intervallo $[0, 1]$ il punto x descrive l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2 . La condizione di convessità si può anche enunciare dicendo che, per ogni x_1 e $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, e per ogni $x \in [x_1, x_2]$, si ha

$$f(x) \leq \frac{x-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-x}{x_1-x_2} f(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} (x-x_1). \quad [3.2]$$

L'ultima espressione dà la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, cioè, da un punto di vista geometrico, la convessità di una funzione significa che comunque si scelgano due punti x_1, x_2 (vedi fig. 6.1), il grafico della funzione $f(x)$ nell'intervallo x_1, x_2 è al di sotto del segmento di estremi $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Proposizione 3.1 Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e x_0 un punto di I ; la funzione

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad [3.3]$$

è crescente in $I - \{x_0\}$.

Dimostrazione. Valutiamo il rapporto incrementale di $F(x)$. Si ha

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)f(x_0) + (x_2 - x_0)f(x_1) + (x_0 - x_1)f(x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)}$$

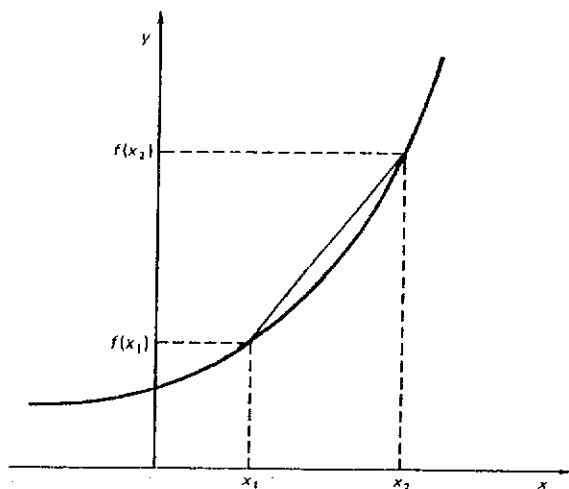


Figura 6.1

L'espressione al secondo membro è simmetrica rispetto a x_1, x_2 e x_0 ; si può quindi supporre ad esempio $x_1 < x_0 < x_2$. Risulta allora, a causa della [3.2],

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = - \frac{f(x_0) - \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) - \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2} f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)} \geq 0. \blacksquare$$

Dalla proposizione 3.1 segue immediatamente il seguente

Corollario 3.1 Una funzione convessa in un intervallo I è continua in ogni punto interno a I .

Dimostrazione. Sia x_0 un punto interno a I e sia $F(x)$ la funzione [3.3]. Poiché F è crescente, esistono finiti i limiti

$$L_+ = \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) \quad \text{e} \quad L_- = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x).$$

Si ha allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \{f(x) - f(x_0)\} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) = L_+ \cdot 0 = 0.$$

Analogamente si dimostra che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \{f(x) - f(x_0)\} = 0$ e quindi che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \blacksquare$$

Osservazione 3.1. In effetti, si può dimostrare di più, e cioè che se $[a, b]$ è un intervallo chiuso interno a I , allora la funzione f è lipschitziana in $[a, b]$.

Infatti, sia b_1 un punto di I maggiore di b (un tale punto esiste perché l'intervallo $[a, b]$ è interno a I), e siano x e y due punti di $[a, b]$. Per la proposizione [3.1] la funzione

$$F(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

è crescente in $I - \{y\}$, e dunque si ha

$$F(x) \leq F(b) = \frac{f(b) - f(y)}{b - y} = \frac{f(y) - f(b)}{y - b}.$$

Sempre per la proposizione [3.1], l'ultima funzione è crescente in $I - \{b\}$, e dunque, in conclusione:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(b_1) - f(b)}{b_1 - b} = M_1,$$

Con un ragionamento analogo, che lasciamo per esercizio, si dimostra che

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq \frac{f(a_1)-f(a)}{a_1-a} = M_2,$$

dove a_1 è un punto di I minore di a , e dunque

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq M = \max(M_1, -M_2). \blacksquare$$

Supponiamo ora che la funzione convessa sia derivabile in x_0 , e sia x_1 un punto di I , con $x_1 > x_0$. Si ha allora

$$f(x_1) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = f'(x_0).$$

Analogamente, se $x_1 < x_0$, $f(x_1) \leq f'(x_0)$, cosicché per qualsiasi $x_1 \in I$, risulta

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0). \quad [3.4]$$

Geometricamente la [3.4] significa che il grafico della funzione convessa $f(x)$ sta tutto al di sopra della retta ad esso tangente in un qualsiasi punto $(x_0, f(x_0))$ (vedi fig. 6.2).

Nel caso che la funzione sia derivabile, la relazione [3.4] caratterizza le funzioni convesse. Infatti si ha il seguente

Teorema 3.1 Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I . Condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia convessa è che, per ogni $x_0, x_1 \in I$, risulti

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0). \quad [3.5]$$

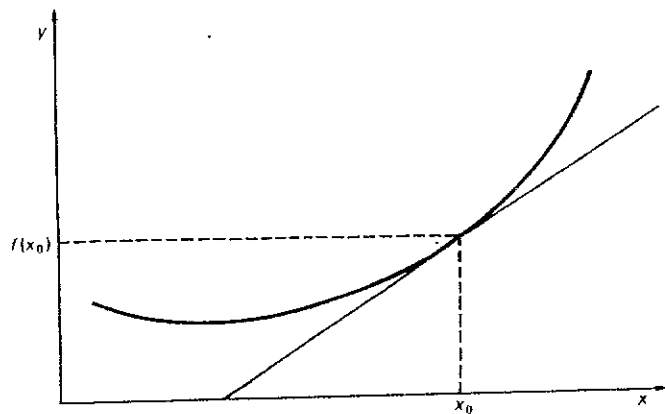


Figura 6.2

Dimostrazione. Basterà dimostrare che la condizione è sufficiente. Siano x_1, x_2 due punti di I , con $x_1 < x_2$, e sia x_0 un punto di (x_1, x_2) . Si ha dalla [3.5], e dalla sua analoga scritta con x_2 al posto di x_1 ,

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0},$$

e quindi

$$f(x_0) \leq \frac{x_0-x_2}{x_1-x_2} f(x_1) + \frac{x_1-x_0}{x_1-x_2} f(x_2).$$

Ricordando la [3.2] si conclude che f è convessa. $\blacksquare$

Osservazione 3.1. Si vede dalla dimostrazione del teorema 3.1 che, affinché una funzione sia convessa, è sufficiente che per ogni punto $x_0 \in I$ esista un numero $\lambda(x_0)$ tale che

$$f(x_1) \geq f(x_0) + \lambda(x_0)(x_1 - x_0), \quad \forall x_1 \in I. \quad [3.6]$$

Tale condizione è anche necessaria; infatti se la funzione $f(x)$ è convessa, si ponga

$$\lambda^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

$$\lambda^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

($\lambda^+(x_0)$ e $\lambda^-(x_0)$ esistono per la proposizione 3.1).

Si ha $\lambda^-(x_0) \leq \lambda^+(x_0)$, e la [3.6] è valida non appena si prenda per $\lambda(x_0)$ un qualsiasi numero tra $\lambda^-(x_0)$ e $\lambda^+(x_0)$.

La retta di equazione

$$y = f(x_0) + \lambda(x_0)(x - x_0)$$

passa per il punto $(x_0, f(x_0))$ e si dice *retta di appoggio al grafico della funzione $f(x)$* . $\blacksquare$

Il seguente risultato è una conseguenza del teorema 3.1.

Corollario 3.2 Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in I . Condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia convessa è che $f'(x)$ sia crescente.

Dimostrazione. Se f è convessa vale la [3.5] per ogni coppia di punti x_0, x_1 , e quindi

$$\begin{aligned} f(x_1) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \\ f(x_0) &\geq f(x_1) + f'(x_1)(x_0 - x_1), \end{aligned}$$

da cui, sommando membro a membro,

$$[f'(x_1) - f'(x_0)](x_1 - x_0) \geq 0,$$

cosicché f' è crescente.

Viceversa sia f' crescente e siano x_0, x_1 due punti di I . Per il teorema del valor medio esiste un punto ξ compreso tra x_0 e x_1 tale che

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0).$$

Supponiamo ora $x_1 > x_0$; si ha allora $\xi > x_0$ e quindi

$$f(x_1) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Se $x_1 < x_0$ risulta $\xi < x_0$ e quindi di nuovo

$$f(x_1) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

In ogni caso si ha dunque la [3.4], per cui f è convessa. ■

Da quanto visto sopra, e dalla proposizione 8.3 del capitolo 4 segue immediatamente il

Teorema 3.2 Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(I)$. Allora $f(x)$ è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$.

Esercizi

3.1 Mostrare che la funzione $|x|$ è convessa. Trovare l'equazione di una retta d'appoggio nel punto 0, e tracciarne il grafico.

3.2 Enunciare gli analoghi dei risultati del paragrafo 3, per funzioni concave.

3.3 Dimostrare che se f è convessa e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 è un punto di minimo assoluto.

3.4 Una funzione si dice *strettamente convessa* se si ha, per ogni $x_1, x_2 \in I$ e per ogni $\lambda \in (0, 1)$ (estremi esclusi),

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Dimostrare che una funzione strettamente convessa ha al più un punto di minimo.

*3.5 Un insieme U di $\mathbb{R}^2$ si dice *convesso* se per ogni coppia P_1, P_2 di punti di U , il segmento $\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) è tutto contenuto in U . Dimostrare che $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa se e solo se

$$U_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y > f(x)\}$$

è un insieme convesso.

4 Studio del grafico di una funzione

I risultati dei paragrafi precedenti possono essere utilizzati per tracciare il grafico di una funzione in modo da metterne in risalto le caratteristiche qualitative.

In questo paragrafo faremo vedere quali sono i problemi principali che occorre risolvere per tracciare il grafico. Per fissare le idee, prenderemo in esame una funzione particolare, ma è chiaro, comunque, che il metodo usato è di validità generale.

Sia $f(x) = \sqrt{x^3/(x-1)}$, la funzione considerata. Il nostro studio consisterà nella determinazione dei seguenti elementi.

Insieme di definizione e limiti

La funzione $f(x)$ è definita per gli $x \neq 1$ per i quali l'espressione sotto radice è non negativa.

L'insieme di definizione è allora

$$A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty).$$

La funzione $f(x)$ è continua in A . I punti di accumulazione di A che non appartengono ad A sono 1, $-\infty$ e $+\infty$. Calcoliamo i limiti della $f(x)$ per x tendente a ognuno di questi punti. Si trova

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x-1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x-1} = +\infty.$$

Possiamo cominciare a riportare questi dati su un grafico (vedi fig. 6.3).

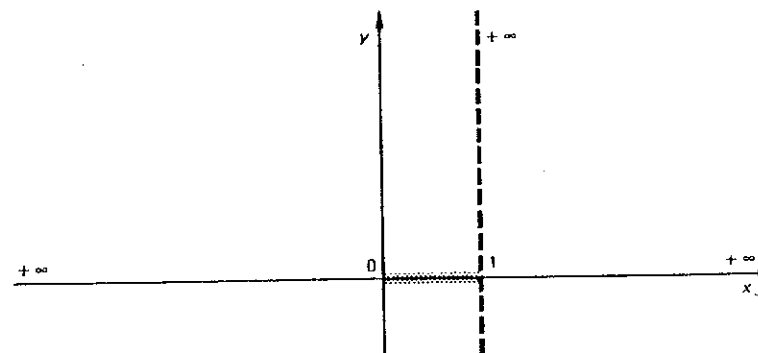


Figura 6.3

Punti di massimo e di minimo relativo

La nostra funzione è derivabile in A e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{(2x-3)x^2}{(x-1)^2} \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}, \quad x \neq 0,$$

mentre

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}}{x} = 0.$$

La derivata prima si annulla dunque per $x=0$ e per $x=3/2$. Il secondo di questi punti è interno all'insieme di definizione, e dunque si potrebbe applicare il teorema 2.2, calcolando la derivata seconda. Più semplicemente, si potrà osservare che la funzione $f'(x)$ è positiva per $x > 3/2$, negativa per $x < 3/2$. Ne segue che $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, 3/2)$, mentre è crescente in $(3/2, +\infty)$.

Allora il punto $x=0$ è un punto di minimo relativo, e così anche il punto $x=3/2$. Si ha

$$f(0)=0, \quad f(3/2) = \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$

Il nostro grafico si arricchisce così di nuovi elementi (vedi fig. 6.4).

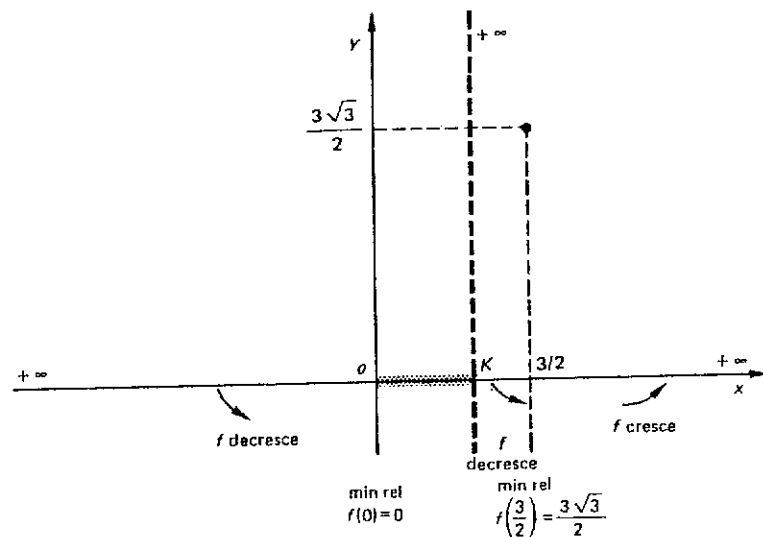


Figura 6.4

Asintoti

Passiamo ora a cercare gli eventuali asintoti sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.

Ricordiamo che una funzione lineare $ax+b$ è un asintoto di $f(x)$, per $x \rightarrow +\infty$, se si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = 0. \quad [4.1]$$

Noi dobbiamo trovare i numeri a e b (se esistono) in modo che valga la [4.1]; per questo osserviamo che dalla [4.1] segue

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

Un analogo discorso vale per $x \rightarrow -\infty$. Nel nostro caso si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x}{x-1}} = -1,$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} + x \right\} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x-1} - x^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

cosicché la retta di equazione $y = -x - 1/2$ è un asintoto, per $x \rightarrow -\infty$, della nostra funzione. Analogamente (il calcolo è un po' più semplice) si dimostra che la retta $y = x + 1/2$ è un asintoto della $f(x)$, per $x \rightarrow +\infty$.

Riportiamo in grafico quanto trovato (vedi fig. 6.5).

Convessità e concavità

La derivata seconda della nostra funzione è

$$f''(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{x}{x-1} \right)^4 \left(\frac{x^3}{x-1} \right)^{-3/2}$$

che è sempre positiva in $A - \{0\}$. Ne segue che la funzione $f(x)$ è convessa sia in $(-\infty, 0)$ che in $(1, +\infty)$.²

Con quest'ultima informazione possiamo finalmente tracciare il grafico di $f(x)$ (vedi fig. 6.6).

E' chiaro che si sarebbe ottenuta una maggiore precisione numerica riportando il

² Si noti che non si può concludere che f è convessa in A , perché A non è un intervallo.

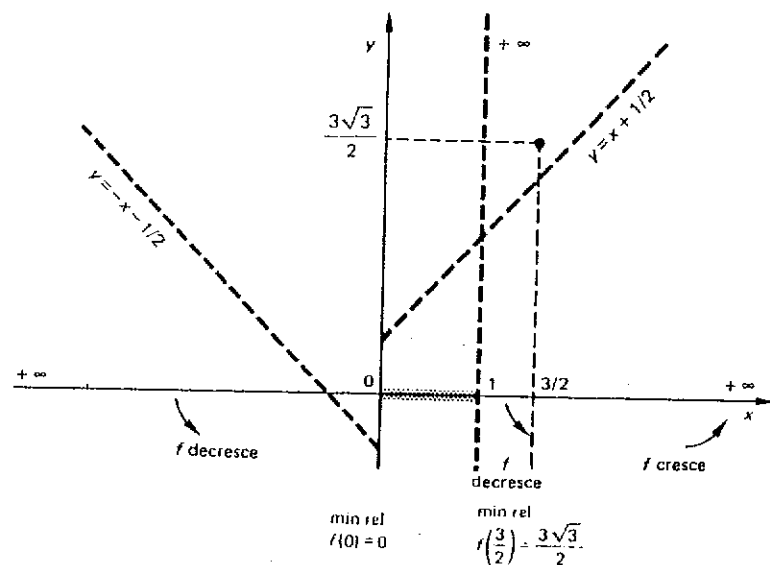


Figura 6.5

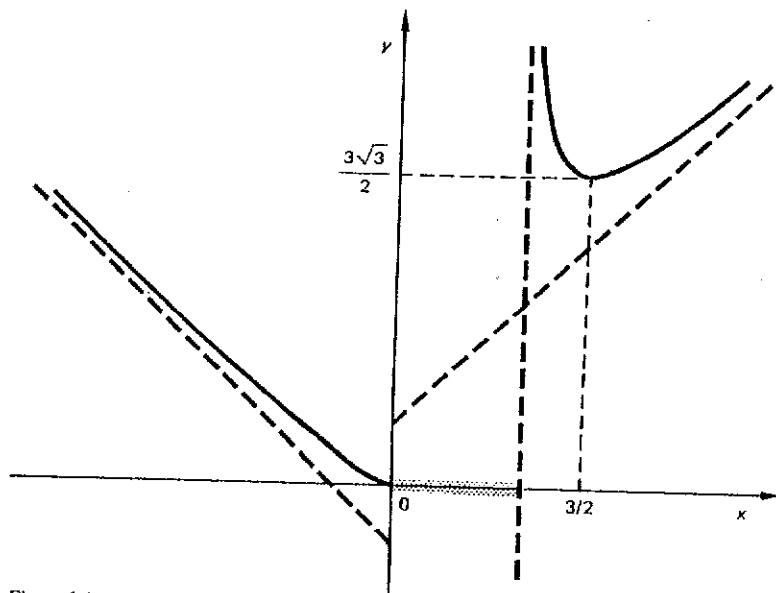


Figura 6.6

grafico su carta millimetrata, e calcolando il valore della $f(x)$ in altri punti; comunque l'andamento qualitativo del grafico della nostra funzione non sarebbe sostanzialmente cambiato.

Esercizi

4.1 Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

$$x^2 \ln x, \quad \frac{x+2}{x-2}, \quad \frac{1}{x^2+x}, \quad e^x - x, \quad x^{2/3}(1-x),$$

$$\sin x + \cos x, \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1, \quad xe^{x^2}, \quad xe^{-x+1}.$$

4.2 Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ l'equazione $x \ln x = t$ ha soluzioni. (Si studi il grafico di $x \ln x$.)

4.3 Dimostrare che l'equazione

$$3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 1 = 0$$

ha due radici reali. (Si studi il grafico del polinomio a primo membro.)

4.4 Dimostrare che l'equazione

$$ax^4 + bx + c = 0$$

ha al più due radici reali.

5 La formula di Taylor

Abbiamo osservato nel capitolo 4 (§ 6) che se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0 , allora esiste un unico polinomio di primo grado

$$P_1(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad [5.1]$$

tale che, posto

$$R_1(x; x_0) = f(x) - P_1(x; x_0),$$

risulti

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x; x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Questo risultato si può riguardare come un metodo di approssimazione delle funzioni derivabili. L'errore che si commette sostituendo alla funzione $f(x)$ la retta tangente al grafico della f nel punto $(x_0, f(x_0))$ tende a zero, al tendere di x a x_0 , più velocemente di $x - x_0$.

In questo paragrafo vogliamo estendere questo risultato; più precisamente, data una funzione $f(x)$ di classe C^n faremo vedere che, per ogni fissato x_0 , esiste un polinomio (nella variabile x) $P_n(x; x_0)$, di grado non superiore a n , tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad [5.2]$$

Cominciamo col dimostrare il seguente

Lemma 5.1 Sia $F(x)$ una funzione di classe C^n in un intorno del punto x_0 ; si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \quad [5.3]$$

se e solo se

$$F(x_0) = F'(x_0) = \dots = F^{(n)}(x_0) = 0. \quad [5.4]$$

Dimostrazione. Se sono verificate le [5.4], applicando ripetutamente il teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Viceversa supponiamo che valga la [5.3]. Se per qualche $k \leq n$ fosse $F(x_0) = \dots = F^{(k-1)}(x_0) = 0$, e $F^{(k)}(x_0) \neq 0$, si dovrebbe avere, ragionando come sopra,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} \neq 0.$$

D'altra parte

$$\frac{F(x)}{(x - x_0)^k} = \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} (x - x_0)^{n-k}$$

e quindi, per la [5.3],

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^k} = 0,$$

che contraddice la relazione precedente. ■

Il lemma appena dimostrato ci dice quale polinomio occorre scegliere se si vuole che valga la [5.2]. Infatti si ponga

$$P_n(x; x_0) = \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i.$$

Risulta

$$D^k P_n(x; x_0) = \sum_{i=k}^n i(i-1) \dots (i-k+1) a_i (x - x_0)^{i-k},$$

e dunque:

$$D^k P_n(x_0; x_0) = k! a_k.$$

Applicando il lemma 5.1 alla funzione $R_n(x; x_0) = f(x) - P_n(x; x_0)$ si conclude allora che vale la [5.2] se e solo se

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Abbiamo così dimostrato il

Teorema 5.1 (di Taylor) Sia $f(x)$ una funzione di classe C^n in un intorno del punto x_0 ; allora, posto

$$\begin{cases} P_n(x; x_0) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i, \\ R_n(x; x_0) = f(x) - P_n(x; x_0), \end{cases} \quad [5.5]$$

risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad [5.6]$$

Osservazione 5.1. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue in un intorno del punto x_0 , con $f(x_0) = g(x_0) = 0$, diciamo che $f(x)$ è infinitesima, per $x \rightarrow x_0$, di ordine superiore a $g(x)$ (o che $f(x)$ tende a zero più velocemente di $g(x)$) se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

In questo caso, scriveremo che $f = o(g)$ (f è un o piccolo di g).

Il teorema di Taylor si può esprimere allora dicendo che

$$R_n(x; x_0) = o((x - x_0)^n),$$

o anche

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \blacksquare$$

Osservazione 5.2. Se $x_0 = 0$, il teorema di Taylor prende a volte il nome di *teorema*

di Maclaurin, e la formula di Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x; 0)$$

si chiama in questo caso formula di Maclaurin. ■

Il resto n -esimo $R_n(x; x_0)$ esprime l'errore che si compie sostituendo alla funzione $f(x)$ il polinomio $P_n(x; x_0)$. Il teorema di Taylor afferma che quando $x \rightarrow x_0$, questo errore va a zero più velocemente di $(x - x_0)^n$. I risultati che seguono offrono valutazioni quantitative del resto n -esimo.

Teorema 5.2 Sia $f(x)$ una funzione di classe C^{n+1} in un intorno U di x_0 . Si ha, per $x \in U$,

$$R_n(x; x_0) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt. \quad [5.7]$$

Dimostrazione. Si può dimostrare la [5.7] per induzione. Essa è valida per $n=0$, dato che

$$\int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x) - f(x_0) = R_0(x, x_0).$$

Supponiamo allora che la [5.7] valga per $n-1$ e dimostriamola per n . Si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \frac{1}{n!} (x-t)^n f^{(n)}(t) \Big|_{x_0}^x + \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt. \end{aligned}$$

Poiché la [5.7] è vera per $n-1$, risulta

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt = R_{n-1}(x, x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Ma allora

$$\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

e dunque la [5.7] vale per n . ■

Dal teorema 5.2 discendono immediatamente alcuni corollari.

Corollario 5.1 Nelle ipotesi del teorema 5.2 esiste un punto ξ compreso tra x_0 e x tale che

$$R_n(x; x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad [5.8]$$

Dimostrazione. Ponendo $p(t) = (x-t)^n/n!$ e $g(t) = f^{(n+1)}(t)$ e ricordando l'esercizio 9.2 del capitolo 4, si conclude che esiste un punto ξ compreso tra x_0 e x , tale che

$$R_n(x; x_0) = f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

da cui segue facilmente la [5.8]. ■

L'espressione [5.8] si dice *forma di Lagrange* per il resto $R_n(x; x_0)$; applicando invece direttamente il teorema della media integrale (cap. 4, teorema 9.1) si ottiene la *forma di Cauchy*:

$$R_n(x; x_0) = \frac{(x-\eta)^n (x-x_0)}{n!} f^{(n+1)}(\eta),$$

dove η è un punto opportuno compreso tra x e x_0 .

Il teorema di Taylor, e in particolare la formula [5.6] per il resto, consentono di estendere il teorema 2.2 sui massimi e minimi relativi di una funzione. Abbiamo infatti il seguente

Teorema 5.3 Sia $f(x)$ una funzione di classe C^n in un intervallo (a, b) , e sia x_0 un punto di (a, b) . Supponiamo che risulti

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora:

- (a) Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo in x_0 ;
- (b) Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo in x_0 ;
- (c) Se n è dispari, la funzione non ha né un massimo né un minimo in x_0 .

Dimostrazione. Supponiamo, per fissare le idee, che sia $f^{(n)}(x_0) > 0$. Risulta:

$$f(x) = f(x_0) + \{f^{(n)}(x_0) + \epsilon(x)\} (x-x_0)^n,$$

dove

$$\epsilon(x) = \frac{R_n(x; x_0)}{(x-x_0)^n}$$

tende a zero per $x \rightarrow x_0$. Per il teorema della permanenza del segno, esisterà un intorno U di x_0 in cui la quantità $f^{(n)}(x_0) + \epsilon(x)$ resta positiva.

Ciò premesso, supponiamo che n sia pari. Allora $(x-x_0)^n$ è maggiore di zero, e dunque $f(x) \geq f(x_0)$ in U , cosicché la funzione $f(x)$ ha un minimo (stretto) in x_0 . Se invece n è dispari, $(x-x_0)^n$ è positivo per $x > x_0$, e negativo per $x < x_0$. Si avrà dunque $f(x) > f(x_0)$ per $x > x_0$ e $f(x) < f(x_0)$ per $x < x_0$, e la funzione non potrà avere in x_0 né un massimo né un minimo. ■

6 Sviluppi delle funzioni elementari

La formula di Taylor, insieme con le espressioni [5.7] e [5.8] per il resto R_n , permettono di approssimare una funzione con un polinomio di grado n , e di valutare l'errore che si commette con questa approssimazione.

E' dunque evidente l'utilità di questa formula nei calcoli numerici; in particolare, essa è usatissima nella tabulazione delle funzioni trascendenti, ad esempio nelle tavole dei logaritmi e delle funzioni trigonometriche.

Non sarà dunque privo di interesse uno studio degli sviluppi in formula di Taylor (o meglio di Maclaurin, cioè con punto iniziale $x_0 = 0$) per le funzioni elementari.

Le più semplici sono le funzioni esponenziali e le trigonometriche: ricordando l'esempio 2.2 e la formula [5.8] per il resto, si ottiene,

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}, \quad [6.1]$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cos \eta, \quad [6.2]$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{k+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \theta, \quad [6.3]$$

dove ξ, η, θ sono compresi tra 0 e x .

E' immediata la stima dell'errore che si commette trascurando il resto n -esimo; ad esempio,

$$|R_n(x; 0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max(1, e^x)$$

per la funzione esponenziale, mentre, per il seno e il coseno, si ha rispettivamente

$$|R_{2n+2}(x; 0)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

$$|R_{2n+1}(x; 0)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Una seconda serie di formule si ottiene a partire dalla

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}, \quad [6.4]$$

in cui abbiamo un'espressione esplicita del resto $R_n(x; 0)$:

$$R_n(x; 0) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

E' chiaro che la [6.4] è interessante solo per $|x| < 1$; infatti, benché essa sia esatta per ogni $x \neq 1$, se $|x| > 1$ il resto è sempre piuttosto grande e anzi il suo modulo tende all'infinito al crescere di n .

Dalla [6.4] si ottengono un gran numero di sviluppi; vediamo alcuni:

(a) Scrivendo $-x$ al posto di x , si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \quad [6.5]$$

e l'ultimo termine è il resto $R_n(x; 0)$.

(b) e nelle [6.4] e [6.5] scriviamo x^2 al posto di x , otteniamo

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^n x^{2k} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}, \quad [6.6]$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}, \quad [6.7]$$

dove l'ultimo termine è il resto $R_{2n+1}(x; 0)$.

(c) Infine, le formule precedenti si possono integrare tra 0 e x ; si ottiene

$$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt, \quad [6.8]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt, \quad [6.9]$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} dt, \quad [6.10]$$

$$\arctg x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \quad [6.11]$$

Una valutazione del resto per la funzione $\arctg x$ è

$$|R_{2n+2}(x; 0)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}.$$

Esempio 6.1

Si vuole calcolare $\ln 3$ con un errore inferiore a 10^{-3} . Se si pone $x=1/2$ nella [6.10] si ottiene

$$\frac{1}{2} \ln 3 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} + R_{2n+1}\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

D'altra parte se $0 \leq t \leq 1/2$ risulta $1-t^2 \geq 3/4$ e dunque,

$$\left| R_{2n+1}\left(\frac{1}{2}; 0\right) \right| \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2n+3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3},$$

quindi basterà prendere $n=3$.

Si ha, allora,

$$\frac{1}{2} \ln 3 \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} = \frac{7379}{13440},$$

e infine

$$\ln 3 \approx \frac{7379}{6720} \approx 1,098 \pm 10^{-3}. \blacksquare$$

Un secondo gruppo di sviluppi di Taylor si ottiene a partire da quello della funzione

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se si pone

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1,$$

si ottiene

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}, \quad [6.12]$$

dove ξ è un punto compreso tra 0 e x .

In particolare, per $\alpha = -1/2$,

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-k+1/2)}{k!} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{2^k k!},$$

e se poniamo

$$(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k-1),$$

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2k = 2^k k!,$$

si ottiene (con la convenzione $(-1)!! = 0!! = 1$)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} (1+\xi)^{-n-3/2}, \quad [6.13]$$

e quindi anche

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} x^{n+1} (1-\xi)^{-n-3/2}. \quad [6.14]$$

Da questa, scrivendo x^2 al posto di x ,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} + \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} (1-\eta^2)^{-n-3/2}, \quad [6.15]$$

dove η è un punto compreso tra 0 e x .

Se si integra la [6.15] tra 0 e x si ottiene

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!! (2k+1)} x^{2k+1} + R_{2n+2}(x; 0) \quad [6.16]$$

con

$$R_{2n+2}(x; 0) = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \int_0^x t^{2n+2} (1-\eta(t)^2)^{-n-3/2} dt.$$

Una valutazione dei resti delle formule precedenti è piuttosto difficile;³ se comunque ci si limita a piccoli valori di x si può dare una stima dell'errore. Ad esempio, se $|x| < 1/2$, l'errore nelle [6.13] e [6.14] non supera $\sqrt{2} (2|x|)^{n+1}$, mentre, se $|x| < 1/\sqrt{2}$, quello nella [6.15] è inferiore a $\sqrt{2} (2x^2)^{n+1}$. Infine si ha, per quanto riguarda lo sviluppo della funzione $\arcsin x$,

$$|R_{2n+2}(x; 0)| \leq \frac{1}{(2n+3)} (2x^2)^{n+3/2}, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esercizi

6.1 Scrivere la formula di Taylor, con $x_0 = 0$, per le seguenti funzioni,

$$e^{-x^2}, \quad \ln(1+x^2), \quad \frac{1}{1+x^3}, \quad x^2 \ln(1-x).$$

Valutare il resto n -esimo di tali sviluppi.

³ Un risultato cui si perviene è che per ogni x , con $|x| < 1$, il resto n -esimo delle formule [6.13] ... [6.16] tende a 0 al tendere di n all'infinito.

6.2 Usando la [6.15] e osservando che si ha

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{7} \frac{1}{\sqrt{1-(1/7)^2}}.$$

si calcoli $1/\sqrt{3}$ con un errore inferiore a 10^{-5} .

6.3 Con il valore di $1/\sqrt{3}$ trovato, si calcoli

$$\frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}},$$

con tre cifre decimali esatte.

6.4 Facendo uso del risultato dell'esercizio 6.1, si calcoli

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

con un errore inferiore a 10^{-5} .

6.5 Scrivere esplicitamente le formule di Taylor [6.1] ... [6.16] per $n=5$.

6.6 Trovare la formula di Taylor per le funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$ (vedi cap. 5, esercizio 1.2).

7 La serie di Taylor (cenni)

Sia $f(x)$ una funzione di classe C^∞ ; si potrà allora scrivere, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la formula di Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x; x_0). \quad [7.1]$$

Ci proponiamo in questo paragrafo di studiare che cosa accade nella [7.1] se si fa tendere n all'infinito. I problemi che sorgono sono due: primo, trovare gli $x \in \mathbb{R}$ per cui la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad [7.2]$$

è convergente, e secondo, vedere se per questi valori della variabile x la somma della serie è proprio $f(x)$.

Se si indica con $S_n(x; x_0)$ la somma parziale n -esima della serie [7.2], la [7.1] diventa

$$f(x) = S_n(x; x_0) + R_n(x; x_0),$$

da cui segue immediatamente che:

Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di Taylor [7.2] converga nel punto x alla funzione $f(x)$ è che si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x; x_0) = 0.$$

Non ci addentreremo qui nello studio della convergenza delle serie di Taylor, che verranno trattate in dettaglio nel secondo volume: ci limiteremo a prendere in considerazione le serie di Taylor delle funzioni elementari e a trovare l'insieme in cui esse convergono. Ciò non è difficile se si ricordano le stime del resto n -esimo trovate per le varie funzioni; si vede allora che, per ogni valore reale di x , risulta

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad [7.3]$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad [7.4]$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad [7.5]$$

e inoltre, per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad [7.6]$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad [7.7]$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad [7.8]$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad [7.9]$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}. \quad [7.10]$$

Infine, come abbiamo osservato in precedenza, la funzione $(1+x)^\alpha$ si può sviluppare in serie per $|x| < 1$, e quindi per tali x

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad [7.11]$$

da cui, sempre per $|x| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k, \quad [7.12]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}, \quad [7.13]$$

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!! (2k+1)} x^{2k+1}. \quad [7.14]$$

Esercizi

7.1 Dimostrare che si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

7.2 Dimostrare che per $a > 0$ e $|x| < a$ risulta

$$\ln(a-x) = \ln a - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{a^{k+1}(k+1)}.$$

7.3 Dalla formula

$$\operatorname{Dett} \sinh x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(vedi cap. 5, esercizio 1.2) trovare lo sviluppo della funzione $\operatorname{Dett} \sinh x$.

8 L'integrale in senso generalizzato

Nel capitolo 4 abbiamo definito l'integrale

$$\int_a^b f(x) dx \quad [8.1]$$

nel caso in cui (a, b) sia un intervallo limitato della retta reale, e la funzione $f(x)$ sia limitata in (a, b) . Vogliamo ora generalizzare la definizione e considerare l'integrale

[1.1] anche nel caso in cui l'intervallo (a, b) sia illimitato (cioè quando uno o ambedue gli estremi siano infiniti) e nel caso in cui la funzione $f(x)$ non sia limitata.

A titolo di esempio, consideriamo il problema dell'integrazione della funzione $x^{-\alpha}$ nell'intervallo $(0, 1)$.

Se $\alpha > 0$, la nostra funzione non è limitata nell'intorno del punto $x=0$; se però si considera un intervallo $(h, 1)$, con $h > 0$, la funzione $x^{-\alpha}$ è limitata e continua in esso, e quindi esiste l'integrale

$$\int_h^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} (1-h^{1-\alpha}) & \alpha \neq 1 \\ -\ln h & \alpha = 1. \end{cases}$$

Si può ora far tendere h a zero, ottenendo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_h^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha \geq 1. \end{cases}$$

E' naturale a questo punto dire che la funzione $x^{-\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$ è integrabile (in senso improprio o generalizzato) nell'intervallo $(0, 1)$, e porre

$$\int_0^1 x^{-\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

mentre, se $\alpha \geq 1$, la funzione $x^{-\alpha}$ non sarà integrabile.

Sulla base dell'esempio precedente possiamo dare una definizione di integrale su un intervallo limitato (a, b) per funzioni non necessariamente limitate.

Definizione 8.1 Sia $f(x)$ una funzione definita in (a, b) , tale che, per ogni $c \in (a, b)$, esista l'integrale

$$\Phi(c) = \int_c^b f(x) dx$$

ed esista e sia finito il limite

$$\lim_{c \rightarrow a^+} \Phi(c).$$

In tal caso, diremo che $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo (a, b) e porremo

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx. \quad [8.2]$$

La definizione 8.1 è opportuna per le funzioni che non sono limitate nell'intorno del primo estremo a dell'intervallo. Se la funzione f non è limitata nell'intorno del punto b , ma è integrabile in (a, c) per ogni $c \in (a, b)$, si porrà

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx,$$

qualora il limite a secondo membro esista e sia finito.

Osservazione 8.1. Se la funzione $f(x)$ è integrabile in (a, b) , allora per la continuità della funzione integrale $\Phi(c)$ l'integrale improprio [1.2] coincide con l'integrale definito nel capitolo 4. Ciò autorizza a usare lo stesso simbolo per i due tipi di integrale. ■

Osservazione 8.2. Se la funzione $f(x)$ non è limitata nell'intorno di un punto x_0 interno all'intervallo (a, b) , si dirà che f è *integrabile in senso improprio in (a, b)* se lo è nei due intervalli (a, x_0) e (x_0, b) . In tal caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx.$$

Un'analogia definizione si ha se la funzione $f(x)$ non è limitata nell'intorno dei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ dell'intervallo (a, b) . Occorrerà in questo caso dividere l'intervallo (a, b) in tanti intervalli parziali $I_1, I_2, \dots, I_n$ in modo tale che in ognuno degli intervalli I_k la funzione sia illimitata al più in uno degli estremi. Si definirà *integrale improprio* della funzione $f(x)$ nell'intervallo (a, b) la somma degli integrali impropri di $f(x)$ negli intervalli $I_1, I_2, \dots, I_n$ (nel caso ovviamente che tutti questi integrali esistano finiti).

In maniera analoga a quanto visto sopra, si definirà l'integrale improprio di una funzione $f(x)$ nell'intervallo illimitato $(a, +\infty)$. ■

Definizione 8.2. Data una funzione $f(x)$ definita in $(a, +\infty)$, supponiamo che per ogni $c > a$ esista l'integrale

$$\int_a^c f(x) dx$$

ed esista, finito, il limite

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx.$$

In tal caso, diremo che $f(x)$ è *integrabile in senso improprio in $(a, +\infty)$* e porremo

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx.$$

Esempio 8.1. Vogliamo calcolare l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} dx, \quad \alpha > 0.$$

Si ha

$$\int_1^c x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} (1 - c^{1-\alpha}) & \alpha \neq 1 \\ \ln c & \alpha = 1, \end{cases}$$

e quindi

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Ne segue che la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile in $(1, +\infty)$ se $\alpha > 1$, e non lo è se $\alpha \leq 1$. (Si confronti questo risultato con quello dell'esempio introduttivo.) ■

Esercizi

8.1 Si calcolino, se esistono, i seguenti integrali impropri:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x-1)^{-2/3} dx, & \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lg x dx, & \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx, \\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx, & \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}, & \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, & \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}, & \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{x} dx. \end{aligned}$$

*8.2 Con l'aiuto della formula di Taylor (vedi esercizi 6.1 e 6.4) si cerchi un metodo per il calcolo approssimato dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

9 Criteri di convergenza per integrali impropri

Talvolta può essere interessante stabilire se una funzione $f(x)$ definita in $[a, +\infty)$ sia integrabile in $[a, +\infty)$, indipendentemente dal calcolo effettivo dell'integrale della f , che potrebbe essere difficile, se non impossibile, da eseguire.⁴

Consideriamo dunque una funzione $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che per ogni $c > a$ esista l'integrale

$$\int_a^c f(x) dx = F(c).^5$$

Si tratta di dare dei criteri che permettano di stabilire l'esistenza dell'integrale improprio di $f(x)$ (cioè l'esistenza del limite di $F(c)$ per $c \rightarrow +\infty$).

Un caso importante è quello in cui la funzione $f(x)$ è non negativa; in questa ipotesi, la funzione integrale $F(c)$ sarà crescente e quindi esisterà il limite

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} F(c) = \sup_{c > a} F(c).$$

In questo caso dunque il problema è ridotto a verificare se la funzione integrale $F(c)$ è limitata o no.

Si ha il seguente

Teorema 9.1 (criterio del confronto) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni definite in $[a, +\infty)$. Supponiamo che esista un numero x_0 tale che per $x > x_0$, si abbia

$$0 \leq f(x) \leq g(x). \quad [9.1]$$

In tal caso, se $g(x)$ è integrabile in $[a, +\infty)$, lo è anche $f(x)$.

Dimostrazione. Si ha, per $c > x_0$,

$$\int_{x_0}^c f(x) dx \leq \int_{x_0}^c g(x) dx,$$

e, poiché la funzione $g(x)$ è non negativa per $x > x_0$,

$$\int_{x_0}^c f(x) dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g(x) dx.$$

⁴ Il caso di $f(x)$ definita in (a, b) e non limitata si tratta in maniera analoga e viene lasciato per esercizio.

⁵ Questa ipotesi sarà sempre sottintesa nel seguito.

Ne segue che

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^c f(x) dx \leq \int_{x_0}^{+\infty} g(x) dx < +\infty. \quad [9.2]$$

D'altra parte,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^c f(x) dx,$$

e quindi dalla [9.2] si conclude che f è integrabile in senso improprio in $[a, +\infty)$. ■

Corollario 9.1 Sia $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa. Se esiste un $\alpha > 1$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = 0,$$

allora f è integrabile in $[a, +\infty)$.

Dimostrazione. Infatti esiste un $x_0 > 0$ tale che, per $x \geq x_0$, risulta $x^\alpha f(x) < 1$, e quindi,

$$0 \leq f(x) \leq x^{-\alpha}.$$

Poiché $\alpha > 1$, $x^{-\alpha}$ è integrabile in $[x_0, +\infty)$, e dunque per il teorema precedente la $f(x)$ sarà integrabile in $[a, +\infty)$. ■

Osservazione 9.1. Per la dimostrazione del teorema precedente è sufficiente supporre che per qualche $\alpha > 1$ risulti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = L < +\infty,$$

o anche che la funzione $x^\alpha f(x)$ sia limitata. D'altra parte, se ciò avviene, si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{(1+\alpha)/2} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{(1-\alpha)/2} x^\alpha f(x) = 0,$$

e dunque sono verificate le ipotesi del corollario 9.1, dato che $(1+\alpha)/2 > 1$. ■

Il seguente teorema riguarda le funzioni non sempre dello stesso segno.

Teorema 9.2 Sia $f(x)$ una funzione definita in $[a, +\infty)$; se la funzione $|f(x)|$ è integrabile in $[a, +\infty)$, allora lo è anche la funzione $f(x)$ e si ha

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni

$$f^+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Poiché f è integrabile in $[a, c]$ per ogni $c > a$, lo sono anche $|f|$, f^+ e f^- . Inoltre si ha

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|,$$

e quindi f^+ e f^- sono integrabili in $[a, +\infty)$ in virtù del criterio del confronto.

D'altra parte,

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

e quindi anche $f(x)$ è integrabile.

Infine

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| &= \left| \int_a^{+\infty} f^+(x) dx - \int_a^{+\infty} f^-(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} \{f^+(x) + f^-(x)\} dx = \\ &= \int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Dal teorema 9.2 e dal corollario 9.1 segue immediatamente il

Corollario 9.2 Sia $f(x)$ una funzione definita $[a, +\infty)$; se esiste un $\alpha > 1$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha |f(x)| = 0,$$

allora $f(x)$ è integrabile in $[a, +\infty)$.

Osservazione 9.2. In generale una funzione $f(x)$ può essere integrabile in $[a, +\infty)$ senza che $|f(x)|$ lo sia, contrariamente a quanto accade per l'integrale di Riemann (vedi cap. 4, esercizio 3.2). Un esempio è dato dalla funzione

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

che è integrabile in $[1, +\infty)$, mentre il suo valore assoluto non lo è.

(a) $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile in $[1, +\infty)$.

Infatti, si ha

$$\int_1^c \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^c - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Si osservi ora che

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

e quindi esiste l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx;$$

ne segue

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

(b) $\frac{|\sin x|}{x}$ non è integrabile in $[1, +\infty)$.

Per $k \in \mathbb{N}$, consideriamo l'integrale

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Risulta

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2(k+1)\pi} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{(k+1)\pi},$$

e dunque

$$\int_{2\pi}^{2n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Poiché la serie armonica è divergente, si ha subito

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^c \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty. \blacksquare$$

Esercizi

9.1 Enunciare gli analoghi dei risultati del paragrafo precedente per il caso di funzioni definite e continue nell'intervallo limitato (a, b) , ma non limitate nell'intorno di a .

9.2 Dire se le funzioni seguenti sono integrabili in $[1, +\infty)$:

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad \cos x^2, \quad \frac{\sin^2 x}{x},$$

$$x^\alpha e^{-x} (\alpha > 0), \quad \frac{1}{1+x^4}, \quad \frac{\ln x}{1+x^2}, \quad \frac{1}{x\sqrt{x-1}}.$$

9.3 Dire se le seguenti funzioni sono integrabili in $(0, 1)$:

$$\frac{\sin x}{x\sqrt{x}}, \quad \frac{\sin 1/x}{\sqrt{x}}, \quad \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \ln x,$$

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad x^{-2/3}(1-x)^{-1/3}.$$

9.4 Se $\sum a_n$ è una serie, la funzione $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = a_n \quad \text{per} \quad n-1 \leq x < n, \quad n \in \mathbb{N}$$

si dice *associata alla serie*.

Disegnare il grafico della funzione associata alla serie $\sum 1/n$.

*9.5 Dimostrare che la serie $\sum a_n$ è convergente se e solo se la funzione associata $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[0, +\infty)$.

10 L'esponenziale nel campo complesso

Abbiamo visto (vedi cap. 2, esempio 18.2), che la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

è convergente per ogni numero complesso z .

Se poniamo

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad [10.1]$$

la [10.1] definisce la funzione esponenziale per ogni z complesso; la relazione [7.3] mostra che questa definizione coincide con quella usuale quando z è reale. Si ha

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w}. \quad [10.2]$$

Infatti

$$e^z \cdot e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^h}{h!}$$

e dunque

$$e^z \cdot e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h+k=n} \frac{z^k w^h}{k! h!},$$

(quest'ultimo passaggio è lecito in virtù dell'assoluta convergenza della serie in questione).

Abbiamo allora

$$e^z \cdot e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k},$$

e dunque, ricordando la formula della potenza del binomio,

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}.$$

Poiché è evidente che $e^0 = 1$, l'esponenziale definito dalla [10.1] conserva le proprietà algebriche dell'esponenziale reale.

Esempio 10.1

Per ogni θ reale, si ha

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad [10.3]$$

Infatti

$$(i\theta)^{2h} = (-1)^h \theta^{2h},$$

$$(i\theta)^{2h+1} = i(-1)^h \theta^{2h+1},$$

e dunque, separando la parte reale e la parte immaginaria,

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!} + i \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h+1}}{(2h+1)!},$$

e la [10.3] segue immediatamente dagli sviluppi [7.4] e [7.5] per il seno e il coseno.

In generale si ha, per $z = x + iy$,

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad [10.4]$$

di cui la [10.3] è un caso particolare. ■

Esempio 10.2

Abbiamo visto che le due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

convergono per $|x| < 1$ e non convergono per $|x| \geq 1$. Questo è evidente per la prima di esse, la cui somma è $1/(1+x)$ (vedi [7.6]), che non è definita (e anzi è singolare) per $x = -1$; non tanto ovvio è invece questo risultato per la seconda serie, la cui somma $1/(1+x^2)$ (vedi [7.7]) non ha nessuna singolarità in $\mathbb{R}$.

Se però si considerano valori complessi di x questo paradosso svanisce perché le

due serie continuano a convergere per $|x| < 1$ ($x \in \mathbb{C}$), ma le loro somme hanno ambedue singolarità per $|x| = 1$, la prima, come abbiamo visto, nel punto -1 , e la seconda nei punti $+ie - i$. ■

Esempio 10.3

Le serie a secondo membro delle [7.9] e [7.10] convergono per $|z| < 1$ ($z \in \mathbb{C}$), e possiamo porre per definizione

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{2k+1}.$$

Si vede facilmente che

$$2i \operatorname{arctg} z = \ln \frac{1+iz}{1-iz}, \quad |z| < 1. \quad [10.5]$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Se si trovano le radici (complesse) del denominatore e si opera come nel capitolo 5 (§ 3), si ottiene

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-i} - \frac{1}{t+i} \right),$$

e dunque

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2i} \left(\ln \frac{x-i}{-i} - \ln \frac{x+i}{i} \right) = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+ix}{1-ix}$$

che si accorda (almeno per $|x| < 1$) con la [10.5]. ■

Esercizi

10.1 Dimostrare che

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

10.2 Dimostrare che, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin i\theta = i \sinh \theta,$$

$$\cos i\theta = \cosh \theta,$$

dove $\sinh \theta$ e $\cosh \theta$ indicano il seno iperbolico e il coseno iperbolico di θ (vedi l'esercizio 1.2 del cap. 5, e gli esercizi 6.6 e 7.1).

10.3 Mostrare che

$$\operatorname{settsinh} x = \frac{1}{i} \operatorname{arcsin} ix, \quad |x| < 1$$

(vedi esercizio 7.3).

10.4 Dimostrare che, per $|\theta| < 1$,

$$\ln(1-i\theta) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{1+\theta^2} + i \operatorname{arctg} \theta.$$

10.5 Dimostrare che, se $z = x + iy$, con $0 < |y| < x$, si ha

$$\ln z = \ln|z| + i\theta,$$

dove θ è l'argomento di z ($|\theta| < \pi/4$).
(Si ricordi l'esercizio 7.2.)

Notizie storiche

I metodi infinitesimali dall'antichità alla metà del Seicento

In questo primo periodo i motivi ricorrenti sono essenzialmente due: il problema delle tangenti e il calcolo di aree e volumi. Il primo di essi è essenzialmente moderno, e ha origine dalla rivoluzione operata nella geometria da René Descartes (1596-1650), e in minore misura da Pierre Fermat (1601-1665), che introducono in essa i metodi algebrici e pongono i fondamenti della geometria delle coordinate, la geometria analitica. I greci non avevano immaginato nulla di simile, in gran parte a causa dell'inefficienza del loro sistema numerico, che rendeva impossibile l'uso sistematico delle coordinate in geometria, metodo che può affermarsi solo in seguito al superamento (anche se in chiave, come abbiamo visto, non rigorosa) del problema degli irrazionali.

Al contrario, il calcolo delle aree e dei volumi di figure piane e solide viene intrapreso con vigore fin dall'epoca immediatamente successiva alla crisi pitagorica, ed è anzi uno dei maggiori successi da attribuire a quella teoria delle grandezze che viene introdotta appunto per evitare i paradossi dei numeri irrazionali. Naturalmente non si tratta di trovare l'area o il volume delle figure nel senso che intendiamo oggi, cioè assegnando ad ogni figura un numero che ne esprima la misura, ché proprio questo metodo aveva fallito clamorosamente con la scoperta dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$; si tratta piuttosto di trovare, come vuole la teoria delle grandezze, il rapporto tra due figure date (ad esempio il triangolo è la metà del rettangolo con uguale base e altezza) o anche di dimostrare che due figure stanno tra loro come altre due, cioè di trovare un rapporto di proporzionalità tra le quattro figure date. Un tipico esempio è il famoso teorema di Archimede, secondo cui il cono sta al cilindro di uguale base e altezza come la piramide sta al prisma omologo.

I risultati ottenuti in questa direzione sono di grande rilievo; e si basano su un pro-

cedimento detto di *esaustione* che, già noto a Eudosso e felicemente usato da Euclide, raggiunge con Archimede una particolare raffinatezza.

L'idea fondamentale del metodo di esaustione è già contenuta, possiamo dire, nella teoria delle grandezze, o meglio di quella particolare grandezza che è il volume dei solidi o l'area per le figure piane, a cui limiteremo la nostra indagine. Per discutere dunque tale metodo dovremo addentrarci nell'esame delle figure piane intese quali grandezze.

Le operazioni che si possono compiere sulle grandezze in genere sono due: la somma (e dunque, per somme ripetute, la moltiplicazione per un intero), e il confronto tra due grandezze, che stabilisce qual è maggiore e quale minore. Sono appunto le modalità con cui vengono effettuati la somma e il confronto a caratterizzare le varie classi di grandezze omogenee.

Ad esempio, se si ha a che fare con segmenti, la somma avviene disponendoli di seguito su una retta, il secondo estremo dell'uno coincidente con il primo estremo dell'altro, mentre il confronto si compie osservando se sia possibile fare in modo che uno dei due (che sarà il minore) sia contenuto nell'altro.

Per le figure il procedimento è un po' più complicato, non tanto per la somma, che consiste essenzialmente nel considerare l'unione delle due (ovviamente quando l'intersezione è nulla), quanto per il confronto, reso difficile dalla grande varietà delle figure in oggetto.

Un criterio ovvio è quello dell'inclusione: di due figure la prima è minore della seconda quando è contenuta in questa, o almeno quando ciò avviene dopo opportune traslazioni e rotazioni. Un tale criterio non è sufficientemente generale, ma si può pensare di aumentarne l'efficacia ricorrendo all'idea di *eguaglianza per equiscomponibilità*: due figure sono uguali se sono equiscomponibili, cioè se è possibile dividere la prima in parti che ricomposte diversamente diano la seconda. Anche questo metodo, da solo, è di applicabilità estremamente limitata, essendo utile in pratica unicamente nel confronto di poligoni; l'adozione di entrambi i criteri fornisce però una tecnica di confronto molto potente, che può essere così enunciata: una figura A è minore di un'altra B se è equivalente (per equiscomponibilità) a una figura A_1 contenuta in B , ovvero se può essere decomposta in parti che, ricombinate altrimenti, diano una figura contenuta in B . Più in generale, A è minore di B se le due figure sono equivalenti a due altre A_1 e B_1 , con $A_1 \subset B_1$.

La somma e il confronto così descritti sono i due procedimenti base per operare sulle figure piane in quanto grandezze: può essere interessante notare che tali procedimenti in generale vengono considerati "naturali" (come peraltro avviene per quelli più ovvi relativi ai segmenti) e non vengono mai analizzati esplicitamente; il mancato riconoscimento della necessità di una tale analisi sarà più tardi causa di fraintendimenti e interminabili discussioni.

Tranne che nel caso dell'equiscomponibilità, i criteri che abbiamo descritto non dicono come bisogna operare se si vuol dimostrare che $A=B$, cioè che A e B hanno la stessa area, e meno che mai come si faccia a determinare il rapporto tra A e B .

Limitiamoci al primo caso, il più semplice, e chiediamoci come si possa stabilire se A sia equivalente a B , nel caso che A e B non siano equiscomponibili.

Per fare un esempio, come si dimostra che il cerchio è equivalente al triangolo che ha come base la circonferenza e come altezza il raggio? La risposta è basata sul criterio di confronto che abbiamo delineato, ma usato in via negativa: per dimostrare che $A=B$, basterà dimostrare che non può essere $A>B$ né $A<B$. Si tratta dunque di un procedimento per assurdo, che si basa sulla possibilità di trovare, per ogni figura S ar-

bitariamente piccola, coppie di figure equiscomponibili $A' \sim B'$ e $A'' \sim B''$ tali che (vedi fig. 6.7)

$$A' \subset A \subset A''; \quad B' \subset B \subset B'' \quad [1]$$

e

$$A'' < A' + S; \quad B'' < B' + S \quad [2]$$

Ciò fatto, si supponga per assurdo che $A < B$ e sia S tale che $A + S < B$. Si ha allora $A'' < A' + S < A + S < B < B''$,

che è assurdo perché A'' e B'' sono equiscomponibili. In modo analogo, si esclude il caso $B < A$ e si conclude quindi che $A=B$.

Tutta la difficoltà tecnica del metodo si riduce quindi alla ricerca, per ogni fissato S , delle coppie di figure equivalenti $A' \sim B'$ e $A'' \sim B''$ con le proprietà [1] e [2]. In genere tali figure saranno poligoni; ad esempio, se A è il cerchio e B il triangolo che ha base uguale al raggio di A , le figure A' e A'' saranno poligoni regolari inscritti e circoscritti, mentre B' e B'' saranno i triangoli (a quelli equivalenti) che hanno come base il perimetro e come altezza l'apotema dei poligoni rispettivamente inscritti e circoscritti; in tal modo, le [1] sono ovvie e le [2] saranno verificate prendendo poligoni con un numero abbastanza grande di lati.

Come si è detto, il metodo di esaustione conosce la massima fioritura con Archimede; esso poi viene ripreso nella seconda metà del Cinquecento in concomitanza con la rinascita degli studi di statica, un'altra delle tematiche preferite dal siracusano.

Ben presto però esso mostra i suoi limiti, in parte per la sempre maggior difficoltà dell'approssimazione quando le figure in questione diventano via via più complesse, ma soprattutto perché, come è stato subito notato, quello di esaustione è un metodo di dimostrazione più che di scoperta: esso consente di dimostrare rigorosamente che A è uguale, o doppio, o metà di B una volta che questo risultato sia stato intuito, ma come arrivare a prevedere tale conclusione? Uno dei più bei risultati di Archimede è che la superficie della sfera è quadrupla dell'area del suo cerchio massimo; la dimostrazione è contenuta nelle opere del siracusano, ma dov'è la scoperta?

Da queste considerazioni si viene formando l'opinione dell'esistenza di un metodo segreto che Archimede avrebbe usato per indovinare i risultati da dimostrare poi rigo-

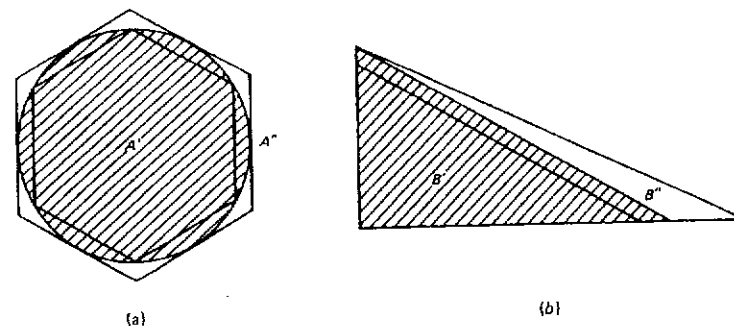


Figura 6.7

rosamente; opinione che molto tempo dopo, agli inizi del nostro secolo, doveva ricevere parziale conferma dal ritrovamento di un palinsesto contenente il metodo archimedeo sotto forma di lettera a Eratostene. Sta di fatto comunque che la necessità di una scorciatoia che consentisse di evitare le prolisse dimostrazioni per assurdo si faceva sentire sempre più via via che le complicazioni crescevano con la generalità dei risultati.

E' in virtù delle ricerche in questa direzione che cominciano a entrare in geometria considerazioni infinitesimali.

Il primo ad adottare questo punto di vista è Keplero (Johannes Kepler, 1571-1630). In una sua opera del 1615, dal singolare titolo *Nova stereometria doliorum vinariorum* (Nuova stereometria delle botti da vino).

Egli considera ad esempio la circonferenza come una spezzata composta di infiniti lati infinitesimi, e il cerchio come formato da infiniti triangolini, aventi come base uno di questi lati e come altezza il raggio, col che l'equivalenza tra questo e il triangolo diventa evidente.

Keplero non spinge molto più in là il suo metodo, né si preoccupa di tentare un'impostazione generale della teoria della misura. Questa sarà invece opera del frate Bonaventura Cavalieri (1598-1647), discepolo e corrispondente di Galileo, la cui *Geometria indivisibilium*, del 1635,⁶ rappresenta la prima trattazione organica non archimedeica del problema.

Non è possibile dilungarci qui sulle teorie di Cavalieri e sulle controversie da esse provocate; vogliamo menzionare soltanto uno dei suoi risultati più interessanti, fonte di innumerevoli applicazioni, noto appunto come *principio di Cavalieri*: "Se due figure A e B (vedi fig. 6.8), comprese tra due rette parallele, sono tali che ogni retta parallela a queste stacchi su esse segmenti uguali, allora A e B sono equivalenti."

La debolezza teorica e la versatilità del metodo di Cavalieri suscitano reazioni contrastanti; alcuni in nome del rigore degli antichi vi oppongono un deciso rifiuto (salvo contraddirsi, quando è il caso, ricorrendo a ragionamenti molto più discutibili); altri tentano di ricondurre i risultati di Cavalieri ai metodi classici, operazione di un certo interesse ma nel corso della quale si perde uno dei maggiori pregi della teoria degli indivisibili, cioè la generalità; vi è infine chi, come l'inglese John Wallis (1616-1703), più attento alla potenzialità che ai fondamenti della teoria cavalieriana, si spinge ancora più in là, sostituendo agli indivisibili segmenti di Cavalieri dei rettangolini di altezza infinitesima (o meglio, infiniti rettangolini di altezza " $1/\infty$ "), operazione la cui importanza è stata spesso sopravvalutata.

Nello stesso periodo, Fermat e Descartes, in special modo quest'ultimo, compiono un profondo rinnovamento nella geometria con l'introduzione in essa dei metodi algebrici e con la creazione della geometria analitica.

L'introduzione delle coordinate e la corrispondente identificazione delle curve con le equazioni del tipo $y=f(x)$, o, più in generale, $P(x, y)=0$, pone immediatamente i problemi della ricerca dei massimi e dei minimi delle funzioni, e delle tangenti delle curve, questioni destinate a sfociare direttamente nel calcolo differenziale.

I primi segni del nuovo calcolo si possono trovare già nell'opera di Fermat sui massimi e i minimi. Per illustrarli, consideriamo un esempio discusso dallo stesso Fermat: dividere un segmento in due parti in modo che il rettangolo costruito con esse abbia area massima. Se b è la lunghezza del segmento, e x quella di una delle sue

⁶ Ne esiste una traduzione italiana a cura di L. Lombardo Radice: B. Cavalieri, *Geometria degli indivisibili* (Utet, Torino 1966).

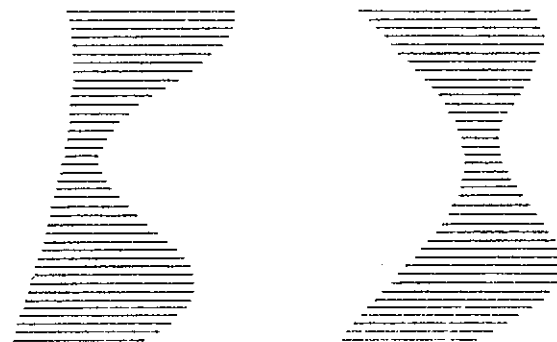


Figura 6.8

parti, l'area del rettangolo sarà

$$f(x)=x(b-x),$$

espressione che dobbiamo rendere massima.

L'idea fondamentale, già nota peraltro a Keplero è che "nell'intorno del massimo le variazioni sono insensibili". In altre parole, se a è il punto di massimo per $f(x)$, ed e è un numero molto piccolo, risulterà,

$$f(a) \simeq f(a+e).$$

cioè

$$a(b-a) \simeq (a+e)(b-a-e).$$

Semplificando,

$$0 \simeq e(b-2a)-e^2,$$

da cui, dividendo per e ,

$$0 \simeq b-2a-e.$$

Ora, dice Fermat, questa relazione è vera solo approssimativamente, e con tanto maggior approssimazione quanto più e è piccolo; essa sarà vera esattamente per $e=0$, e dunque si avrà

$$a = \frac{b}{2},$$

per cui il rettangolo di area massima è un quadrato.

Se si torna a esaminare i passaggi compiuti si ha

$$f(a+e)-f(a) \simeq 0, \quad [3]$$

$$\frac{f(a+e)-f(a)}{e} \simeq 0, \quad [4]$$

$$\left. \frac{f(a+e)-f(a)}{e} \right|_{e=0} = 0, \quad [5]$$

che corrisponde quasi perfettamente alla nostra equazione

$$f'(a) = 0$$

che caratterizza i punti di massimo e di minimo (beninteso interni).

In maniera analoga, si tratta il problema delle tangenti, che viene ricondotto a un problema di massimo o di minimo.

Si debba ad esempio calcolare la tangente alla curva $y=f(x)$ nel punto A (vedi fig. 6.9). Fra tutte le rette che passano per A la tangente è caratterizzata dall'essere l'unica retta che non taglia la curva, tutta situata cioè da una parte (nel nostro caso al di sopra) di essa.⁷

L'equazione di una retta generica che passa per $A=(x_0, f(x_0))$ è

$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0);$$

poiché tale retta è sempre al di sopra della curva, la quantità

$$f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)$$

sarà sempre negativa, e sarà nulla per $x=x_0$, cosicché essa avrà un massimo nel punto x_0 . Si tratterà dunque di trovare il valore di α per cui la funzione data, ovvero (il che è equivalente) la funzione

$$f(x) - \alpha x$$

abbia un massimo per $x=x_0$.⁸ Si dovrà pertanto applicare il metodo per la ricerca dei massimi e dei minimi alla funzione $f(x) - \alpha x$. Ad esempio, nel caso della parabola $y=x^2$ si ha

$$(x_0 + e)^2 - \alpha(x_0 + e) \simeq x_0^2 - \alpha x_0,$$

e dunque

$$2x_0 e + e^2 - \alpha e \simeq 0,$$

da cui

$$\alpha = 2x_0.$$

Fermat ha dunque inventato la derivata? In realtà, una tale conclusione non sarebbe lecita, come risulta esaminando più da vicino il passaggio da [3] a [5]. Qui si divide per e e si pone $e=0$ nella [4], mentre noi oggi facciamo il limite per $e \rightarrow 0$, ottenendo così la derivata. Si può obiettare che i due procedimenti si equivalgono, perché, dato che f è un polinomio, effettuare il limite per $e \rightarrow 0$ nella [4] è esattamente come porre $e=0$, naturalmente dopo aver eseguito le opportune semplificazioni. In effetti, l'obiezione è valida finché f è un polinomio, ma questo è un caso troppo particolare perché si possano cogliere i limiti del procedimento di Fermat. I guai infatti cominciano quando f non è un polinomio. Consideriamo ad esempio il problema di massimizzare la funzione

$$x + \sqrt{1-x};$$

⁷ Nella sua trattazione Fermat non prende in considerazione la possibilità di un punto di flesso; i suoi risultati comunque restano validi anche in questo caso.

⁸ Si vede subito che questo avviene per $\alpha = f'(x_0)$, e dunque che la retta tangente ha equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

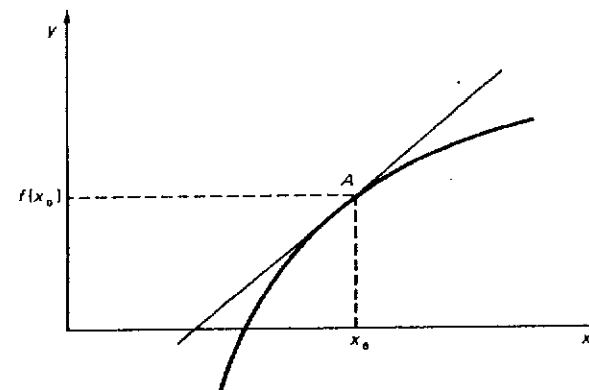


Figura 6.9

applicando il metodo di Fermat siamo condotti all'equazione

$$a + e + \sqrt{1-a-e} \simeq a + \sqrt{1-a},$$

e dunque

$$e + \sqrt{1-a-e} \simeq \sqrt{1-a}.$$

Qui non è possibile dividere per e e porre $e=0$; si dovrà prima tentare di eliminare le radici elevando al quadrato:

$$e^2 + 1 - a - e + 2e\sqrt{1-a-e} = 1 - a;$$

e dunque

$$2e\sqrt{1-a-e} - e + e^2 = 0.$$

A questo punto si può dividere per e , porre $e=0$ e ottenere $a=3/4$ per il punto di massimo.

In conclusione, il passaggio dalla [3] alla [5] comporta una tappa intermedia, in cui si eliminano gli irrazionali, che è semplice nel caso descritto, ma può dar luogo a grandi difficoltà in casi più complessi. E' proprio la manipolazione degli irrazionali il problema che, lasciato aperto dal metodo di Fermat, sarà risolto con l'invenzione del calcolo differenziale.

L'invenzione del calcolo: Leibniz e Newton

Alla metà del Seicento i problemi più importanti in matematica erano essenzialmente due: la ricerca di un metodo generale per le tangenti e una teoria soddisfacente per le quadrature. Attorno a questi ruotano altre questioni di minor rilievo ma di notevole interesse, quali il problema inverso delle tangenti (data una relazione tra il punto e la tangente risalire alla curva) e più ancora il calcolo e in generale lo studio dei logaritmi. Quest'ultimo problema è molto importante, da una parte perché pe

mezzo dei logaritmi, introdotti da Nepero (John Napier, 1550-1617) nel 1615 e perfezionati poco dopo da Henry Briggs (1561-1631), si semplificano in maniera considerevole i lunghissimi calcoli astronomici, dall'altra per la relazione dei logaritmi con la quadratura dell'iperbole, che era stata osservata da Gregorio da St. Vincent (1584-1667) (vedi cap. 5, § 8).

Tutti questi problemi troveranno la loro soluzione nel calcolo differenziale, nel quale il problema delle tangenti assumerà una posizione centrale. I fondatori del calcolo hanno nomi ben noti: Leibniz e Newton in primo luogo, quindi i fratelli Jacob (1654-1705) e Johann Bernoulli e il marchese de l'Hôpital (1661-1704).

Le rivendicazioni di priorità e le accuse di plagio che Leibniz e Newton si rivolsero a proposito dell'invenzione del calcolo hanno fatto discutere per più di un secolo; oggi, per lo spostamento degli interessi dello storico dalle gesta dei singoli allo studio dei meccanismi, ma anche in seguito a un più oculato esame dei documenti, si tende a ripartire equamente tra i due i meriti delle scoperte e la responsabilità delle polemiche.

Per conto nostro, cercheremo di discutere brevemente le due costruzioni individuandone i molti lati comuni e soprattutto le differenze, talvolta profonde, di punti di vista.

Esaminiamo in primo luogo il problema delle tangenti e quello collegato dei massimi e dei minimi.

Abbiamo visto che il metodo di Fermat trovava il suo limite nella necessità di eliminare gli irrazionali dall'equazione $f(a + e) - f(a) \approx 0$, eliminazione che doveva essere fatta sulla funzione f nella sua completezza e che dunque non permette una separazione delle difficoltà quando f è composta di più parti semplici.

Perché questa separazione divenisse possibile era necessario scindere i due momenti del calcolo di f' e della soluzione dell'equazione $f' = 0$; in altre parole, si doveva riconoscere il carattere di operazione sulle funzioni proprio della derivazione.

Solo dopo questa constatazione è possibile operare prima il calcolo della derivata (usufruendo di tutte le facilitazioni costituite dalle regole di derivazione, in particolare dalla linearità) per poi usarlo nella ricerca dei massimi e dei minimi, o nella determinazione delle tangenti.

Il riconoscimento della necessità di separare i due momenti è uno dei punti fondamentali di ambedue le teorie di Leibniz e Newton. In particolare, ciò risulta con chiara evidenza fin dal titolo del lavoro con cui Leibniz introduce il calcolo differenziale,⁹ e dall'esempio che egli propone per illustrare il metodo, cioè il calcolo del differenziale della funzione

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2} + ax\sqrt{g^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{h^2+lx+mx^2}} \quad 10.$$

⁹ G. Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (Nuovo metodo per i massimi e minimi, come pure per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali, e un unico genere di calcolo per quei problemi), *Acta Eruditorum* (Lipsia 1684). Traduzione italiana in G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna* (Zanichelli, Bologna 1932; rist. Feltrinelli, Milano 1962).

¹⁰ Come abbiamo già osservato (vedi cap. 3, Note storiche) la nozione di funzione si afferma solo nel Settecento, mentre precedentemente predomina il concetto di relazione, espressa dall'equazione $P(x, y) = 0$. Il problema della derivazione si presenta quindi nella forma: data una relazione $P(x, y) = 0$ tra le variabili x e y trovare una relazione tra i loro differenziali dx e dy . Vedi anche I. Newton, *A Treatise of the Method of Fluxions and Infinite Series* (Londra 1737) in particolare: "Problema I. Data una relazione tra quantità fluenti, trovare la relazione tra le loro velocità".

Naturalmente, non avendo a disposizione un concetto chiaro di limite, la definizione della derivata doveva prendere altre vie, e appoggiarsi su considerazioni più intuitive, che saranno in seguito oggetto di dure critiche.

Vediamo così Leibniz capovolgere il punto di vista oggi usuale e definire la derivata (o meglio il differenziale) per mezzo della tangente, salvo poi, di fatto, considerare dx come l'incremento infinitesimo della variabile x , e il differenziale dy come il corrispondente incremento della variabile y . L'importante però è che siano riconosciute immediatamente le regole di derivazione, che permettono di separare le difficoltà: in particolare, la linearità e le regole di differenziazione del prodotto e del quoziente. Ad esempio si ha

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy,$$

da cui, trascurando $dx \, dy$ che è di ordine superiore,

$$d(xy) = x \, dy + y \, dx.$$

In questo modo, si possono trovare le derivate di una potenza, e da queste le derivate delle radici con un semplice accorgimento, se $z = x^{1/k}$, si ha $x = z^k$ e, differenziando, $dx = k z^{k-1} dz$, da cui, infine,

$$dz = \frac{1}{k} x^{1/k-1} dx.$$

La differenziazione delle radici, unita alle regole di derivazione, permette di differenziare qualsiasi combinazione di potenze e radicali; dunque praticamente qualsiasi funzione, poiché tali combinazioni, costituivano a quel tempo la quasi totalità delle funzioni considerate.

Sono così completamente risolti il problema delle tangenti e quello dei massimi e dei minimi, dato che, per la similitudine dei triangoli ABP e PRQ (vedi fig. 6.10) si ha

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QR}{PR} = \frac{PB}{BA},$$

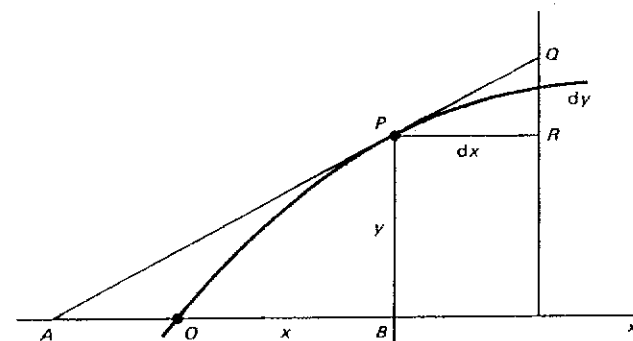


Figura 6.10

e dunque

$$BA = y \frac{dx}{dy},$$

cosicché per tracciare la tangente nel punto P basterà congiungerlo con il punto A sull'asse delle x , a distanza $y \, dx/dy$ da B .

La differenziazione ha un'operazione inversa, l'integrazione. Infatti se dy rappresenta l'incremento infinitesimo della variabile y , la somma di tali incrementi ricostituirà la y . Leibniz indica tale somma con una S allungata; si ha dunque

$$y = \int dy.$$

Se poi si aveva $dy = f(x) \, dx$, risulterà

$$y = \int f(x) \, dx;$$

ad esempio, se $dy = x^\alpha \, dx$, si avrà $y = x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$, come si verifica subito differenziando.

Con questa osservazione il problema delle quadrature è ridotto a quello delle primitive, in quanto risulta (vedi fig. 6.11)

$$dA = f(x) \, dx,$$

e dunque l'area è data da

$$A = \int f(x) \, dx.$$

In particolare, se $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \neq -1$), risulta $A(x) = x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$, risultato già noto a Cavalieri, almeno per α intero positivo, e a Fermat per α razionale $\neq -1$. Per $\alpha = -1$ si

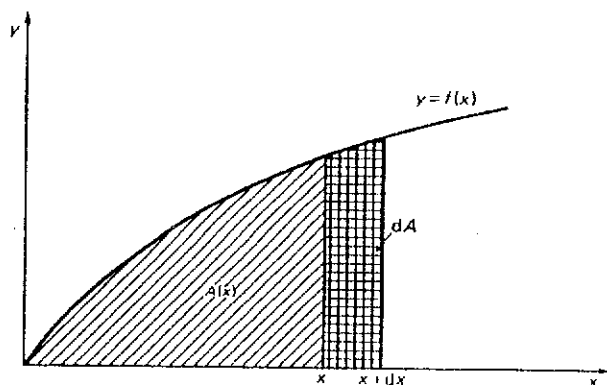


Figura 6.11

ha infine

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

per il risultato di Gregorio da St. Vincent; comunque resta ancora ignota la base dei logaritmi così costruiti.

Fermiamoci un momento a fare il punto della situazione. L'introduzione del concetto di differenziale ha risolto il problema delle tangenti e posto su nuove basi quello delle quadrature. Per quanto riguarda quest'ultimo, esso è stato ricondotto all'integrazione, cioè alla ricerca delle primitive, in quanto l'integrazione non è definita indipendentemente, ma soltanto come inversa della differenziazione, che assume così una posizione predominante in tutta la teoria.

Infine, il problema inverso delle tangenti, relativo cioè alla soluzione di equazioni del tipo

$$dy = f(x, y) \, dx, \quad [6]$$

di cui la ricerca della primitiva è un caso particolare, e che si presentano naturalmente in tutta una serie di problemi fisici e geometrici, è affrontato tentando di ricondurlo alle quadrature con una serie di cambiamenti di variabili e in genere di artifici sui quali si esercita l'inventiva di Leibniz e dei suoi più vicini collaboratori, i fratelli Bernoulli e il marchese de l'Hôpital. A testimonianza di questo sforzo resta una serie impressionante di articoli, e una corrispondenza scientifica tra le più ricche del tempo.

All'incirca nello stesso periodo, anzi alcuni anni prima, Newton viene elaborando, secondo linee estremamente simili, la sua teoria, che però pubblicherà qualche tempo più tardi. A differenza di Leibniz, che considera in un certo senso le grandezze come composte di parti infinitesime, Newton, più attento alle questioni della dinamica e in genere del moto, le considera variabili in funzione del tempo; grandezze *fluente* dunque, che ad ogni istante avranno una determinata *velocità*, o *flussione*.

Il ruolo dunque che in Leibniz aveva la derivata dy/dx è assunto in Newton dalla flussione di y , ovvero velocità, indicata con $\dot{y}$, mentre al differenziale dy corrisponde il *momento* $\dot{y} \, \dot{x}$, prodotto della velocità per l'intervallo infinitesimo di tempo $\dot{x}$.

E' immediato vedere che le considerazioni fatte in precedenza sulla teoria leibniziana si trasportano senza variazioni in quella newtoniana; quest'ultima ha tuttavia una minore agilità a causa di notazioni poco adatte (ad esempio Newton indica la primitiva di $x(t)$ con il simbolo $\boxed{x(t)}$) e della scelta a priori della variabile indipendente, il tempo.

Quello che invece differenzia di gran lunga i due metodi, e che rappresenta uno degli strumenti più potenti della teoria newtoniana, ma anche, nello stesso tempo, una delle maggiori remore che si opporranno al suo sviluppo, è l'abilissimo uso che Newton fa degli sviluppi in serie. Abbiamo già accennato al fatto che le serie, in particolare la serie geometrica

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad [7]$$

erano note fin dall'antichità. A partire da questa, Mercator effettua una sensazionale scoperta: la funzione a secondo membro rappresenta un'iperbole, la cui quadratura com'è noto dà il logaritmo, in questo caso $\ln(1+x)$; d'altra parte, a primo membro c'è una somma di potenze e si sa (Cavalieri, Wallis) che le quadrature operano additi-

vamente. Ne segue, tenuto conto delle quadrature di x^n , la formula

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}, \quad [8]$$

che può servire per calcolare i logaritmi.

La scoperta di Mercator fece scalpore; comunque essa non giunse nuova a Newton, che aveva trovato, oltre alla [8], lo sviluppo di $\sqrt{1-x^2}$, che aveva usato per la quadratura del cerchio, e poi il più generale sviluppo di

$$(P+Qx)^{n/m}$$

con n ed m interi relativi (noto col nome di *binomio di Newton*), oltre allo sviluppo di $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ e delle loro funzioni inverse.

La combinazione degli sviluppi in serie con il metodo delle flussioni rappresenta nelle mani di Newton uno strumento di rara potenza; egli risolve d'un sol colpo il problema dell'integrazione sviluppando in serie la funzione integranda, mentre, per quanto riguarda le equazioni differenziali [6], costruisce un metodo di approssimazioni successive che consentono di calcolare la soluzione con il grado di precisione desiderato.

In conclusione, l'uso combinato da parte di Newton delle teorie delle flussioni e delle serie ha portato a soluzione tutti i problemi che avevano stimolato l'invenzione del calcolo.

Gli sviluppi del calcolo nel diciottesimo secolo: la questione dei fondamenti

Nel momento stesso in cui la teoria newtoniana celebrava i suoi trionfi, iniziava la decadenza della matematica in Inghilterra. La responsabilità di questa stasi è paradossalmente da ascrivere perlopiù alle stesse cause che avevano determinato il successo dell'analisi di Newton.

La combinazione delle teorie delle flussioni e delle serie ha prodotto un metodo pronto per l'uso; ogni problema che possa essere tradotto nel linguaggio dell'analisi è afferrato dalla macchina che ne consegna la soluzione sotto la forma di serie, cioè in una veste adatta per le valutazioni numeriche e dunque per le applicazioni.

Al contrario, la scuola leibniziana è più orientata verso la ricerca di soluzioni in forma compatta o esplicita, più adatte allo studio dei comportamenti qualitativi che alla determinazione numerica dei risultati.

Di fatto, gli sviluppi in serie entrano relativamente tardi nella matematica continentale, dove essi occupano, almeno per quel che attiene al calcolo infinitesimale, una posizione tutto sommato marginale e per nulla comparabile con il ruolo di cui sono investiti nella sistemazione newtoniana. Questa differenza in un primo momento favorisce la scuola inglese, che si trova ad avere strumenti più duttili per le applicazioni; ma si traduce a lungo andare in un grave handicap, venendo meno tutta una serie di stimoli che provengono dai problemi lasciati aperti. Facciamo qualche esempio. Abbiamo visto che nell'integrazione delle funzioni razionali fratte $P(x)/Q(x)$ (vedi cap. 5, §§ 3 e 4) uno dei problemi consiste nella ricerca delle radici del denominatore e quindi della scomposizione del polinomio $Q(x)$ in fattori irriducibili, una linea di ricerca che conduce al cosiddetto teorema fondamentale dell'algebra, che è la via obbligata se si vuole trattare il caso generale senza ricorrere agli sviluppi in serie. Al

contrario, nella teoria newtoniana, nella quale ovviamente è possibile trattare casi particolari con i metodi del capitolo 5 (§§ 3 e 4), il problema generale è risolto semplicemente sviluppando in serie $1/Q(x)$, e quindi integrando termine a termine.

Ancora, le equazioni differenziali [6], o, (nelle notazioni newtoniane)

$$\dot{x} = f(x, t).$$

come abbiamo detto vengono risolte per approssimazioni successive sviluppando la f e ottenendo la soluzione $x(t)$ sotto forma di serie: una soluzione completa e generale. Al contrario, quando si cerchi di trattare le equazioni differenziali senza usare le serie si genera una quantità di problemi (il principale, cioè la possibilità di riduzione alle quadrature, è tuttora aperto) il cui studio è di stimolo per ulteriori ricerche.

Gli esempi potrebbero durare a lungo; sta di fatto che dopo Newton i nomi degli analisti inglesi sono legati essenzialmente a ricerche sugli sviluppi in serie, in pratica l'unico campo aperto alla speculazione matematica, ma anche un settore dove la difficoltà dei problemi superava di gran lunga gli strumenti a disposizione, e che si sarebbe sviluppato solo un secolo più tardi, dopo la sistemazione dei fondamenti dell'analisi e dei numeri reali.

Certamente, le capacità di Brook Taylor (1685-1713) o di Colin Maclaurin (1698-1746), per citare i più importanti studiosi d'oltremontana, non sono assolutamente comparabili con il genio di Euler e dei numerosi componenti della famiglia Bernoulli; è però anche vero che è in genere proprio l'esistenza di importanti problemi non completamente risolti che stimola gli studiosi a compiere ricerche in quel settore: valga per tutti l'esempio di Johann Bernoulli, passato alla matematica dalla medicina.

E' dunque comprensibile come nel preciso momento in cui nel continente si registrava una vivacissima attività intorno al nuovo calcolo e alle sue applicazioni (in particolare proprio alla meccanica newtoniana) in Inghilterra si discutesse soprattutto sui suoi fondamenti; una discussione che, in mancanza di una sufficiente elaborazione della teoria e dunque di punti fermi che potessero servire da guida, era fin dall'inizio condannata alla sterilità.

La questione viene sollevata da un opuscolo del vescovo George Berkeley (un famoso filosofo che, contrariamente a quanto sarebbe poi accaduto con sempre maggior frequenza, usava parlare di scienza con profonda cognizione di causa) in un opuscolo¹¹ nel quale esamina la presunta chiarezza delle dimostrazioni matematiche, da alcuni (probabilmente l'astronomo Halley) contrapposta alle oscurità delle verità della fede. Berkeley centra con molta precisione il principale punto debole della costruzione newtoniana, comune peraltro, se non all'impostazione originale di Leibniz che evitava ogni considerazione infinitesimale, almeno alle concezioni dei suoi collaboratori. Si tratta della definizione stessa di flussione, o come diciamo oggi, di derivata. Per calcolare la flussione di una funzione $f(x)$ si deve in primo luogo calcolare tale funzione in $x + \dot{x}$ e in x , sottrarre tali valori e dividere per $\dot{x}$ ¹²

$$\frac{f(x + \dot{x}) - f(x)}{\dot{x}}$$

¹¹ G. Berkeley, *L'analista, ovvero discorso rivolto a un matematico infedele*, trad. it. (Firenze, Baccini e Chiappi, 1971).

¹² Si noti che nel sistema newtoniano tutte le grandezze dipendevano dal tempo, e dunque la flussione di una funzione $f(x)$ non è la nostra derivata $f'(x)$, ma la derivata, rispetto al tempo, della funzione composta $f(x(t))$, e dunque è $f'(x)\dot{x}$, dove $\dot{x}$ è la velocità di variazione di x .

tabili dopo il trattato di Fourier sulla propagazione del calore. L'Accademia di Berlino offre un premio per il miglior lavoro sui fondamenti del calcolo, né vale a interrompere queste ricerche il ciclone della rivoluzione francese, ché anzi è proprio in questo periodo travagliato che esce il più compiuto tentativo in questa direzione prima della definitiva sistemazione di Cauchy.

L'opera di cui parliamo è la *Theorie des fonctions analytiques*, pubblicata nel 1787, di Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813); in essa si tenta di evitare lo scoglio della definizione di derivata usando gli sviluppi in serie. Sviluppando la funzione f a partire dal punto x_0 ,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots,$$

i coefficienti $a_0, a_1, a_2, \dots$ dipenderanno ovviamente da x_0 ; di questi, a_0 è il valore di f nel punto x_0 , mentre, per definizione, il coefficiente a_1 si dice *derivata* della f in x_0 , e si indica con il simbolo $f'(x_0)$.

In questo modo sono evitate le difficoltà connesse con gli infinitesimi: una soluzione elegante che però contiene un circolo vizioso, in quanto la rappresentabilità di una funzione mediante una serie di Taylor dipende dal comportamento del resto n -esimo (vedi §§ 5-7) e dunque, in ultima analisi, richiede il concetto di derivata.

La teoria dell'integrazione da Cauchy a Riemann

La sistemazione definitiva dei fondamenti dell'analisi avviene indipendentemente a opera di due matematici: Bolzano a Praga e Cauchy a Parigi. Di questi, il primo resta completamente in ombra, e la sua opera, rimasta sconosciuta per molto tempo, viene pubblicata con tale ritardo da non avere alcuna influenza sullo sviluppo dell'analisi; essa ha quindi interesse solo come curiosità storica.

Ben diversa è invece l'influenza dei lavori di Cauchy, che segnano un punto di svolta nel calcolo infinitesimale, determinando in gran parte il successivo corso della teoria.

Abbiamo già parlato del *Cours d'Analyse*, l'opera in cui Cauchy pone le basi della teoria dei limiti, e studia in particolare la convergenza delle successioni e delle serie, nonché la continuità delle funzioni; l'applicazione della teoria dei limiti al calcolo infinitesimale è invece contenuta in un altro fondamentale testo del 1823, dal titolo *Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique*.

In esso Cauchy conclude il programma, delineato ma non sviluppato da d'Alembert, di fondare il calcolo differenziale sul concetto di limite; a dire il vero, il terreno era ormai completamente aperto dalla teoria dei limiti sviluppata nel *Cours d'Analyse* e non si trattava che di coglierne i frutti con la definizione rigorosa di derivata come limite (vedi cap. 4, § 7) e con la conseguente dimostrazione dei noti teoremi del calcolo differenziale.

Molto diversa è invece la trattazione dell'integrazione; qui Cauchy non si limita a considerare l'integrale come l'inverso della derivata, ma al contrario lo definisce in maniera indipendente, salvo poi confrontare tra loro le due operazioni. Il suo è un punto di vista analogo a quello descritto nel capitolo 4, e si riallaccia, in un certo senso, alle idee sulla misura delle figure che si erano sviluppate nella prima metà del Seicento (in particolare con Cavalieri e i suoi continuatori) e che erano state spazzate via dall'affermarsi del calcolo infinitesimale.

Con l'introduzione di questo nuovo punto di vista, il teorema fondamentale del

calcolo integrale (cap. 4, teorema 9.2), che nella teoria di Leibniz e Newton serviva essenzialmente per la definizione dell'integrale, assume ora il ruolo di un vero teorema, in quanto asserisce che le due operazioni di integrazione e derivazione, definite indipendentemente, sono (a meno di costanti additive) l'una inversa dell'altra.

Il concetto di integrale introdotto da Cauchy è molto simile, ma non è ancora quello del capitolo 4, e, benché facilmente estendibile a funzioni arbitrarie, è introdotto esplicitamente solo per funzioni continue. Esso può essere descritto brevemente come segue.

Una partizione P di un intervallo $[a, b]$ è costituita da un certo numero $n+1$ di punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b;$$

si dice *ampiezza* della partizione la massima distanza tra due punti consecutivi:

$$\max \{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$, e P è una partizione, si definisce la *somma di Cauchy*:

$$S = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

(si vede facilmente che S è l'integrale della funzione semplice nella fig. 6.13).

Ciò premesso, Cauchy dimostra che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che se P' e P'' sono due partizioni, ambedue con ampiezza minore di δ , allora

$$|S' - S''| < \epsilon. \quad [9]$$

Di qui conclude che esiste un numero J al quale le somme si avvicinano man mano che diminuisce l'ampiezza della partizione, in un certo senso il limite delle somme di Cauchy quando δ tende a zero; tale numero è l'integrale della f tra a e b .

La definizione è suggestiva, ma soggetta a una serie di inconvenienti. Come spesso accade, però, un'idea geniale e lacunosa è di gran lunga più stimolante di molte definizioni piattamente rigorose.

In primo luogo la dimostrazione non è completa, o quanto meno non sembra tale: sfugge a quel tempo la differenza tra continuità semplice e continuità uniforme, e d'altra parte la definizione di Cauchy lascia adito ad ambiguità.

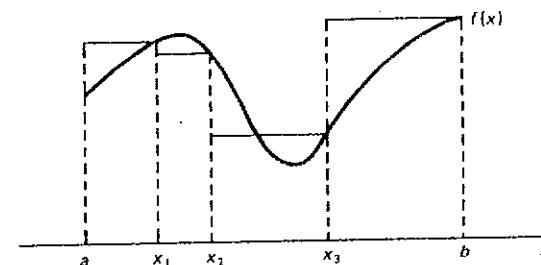


Figura 6.13

Questa lacuna è colmata da Dirichlet, che dimostra, per l'occasione, una proprietà delle funzioni continue in un intervallo chiuso $[a, b]$ equivalente all'uniforme continuità,¹³ e porta in seguito agli studi sull'uniformità da parte di Weierstrass e della sua scuola.

In secondo luogo, vi è di nuovo il problema della relazione tra la proprietà di Cauchy espressa dalla [9] e l'esistenza del limite; come abbiamo già osservato, tale problema conduce allo studio delle proprietà dei numeri reali e alla formulazione da parte di Dedekind dell'assioma di continuità.

Finalmente, si deve osservare che la somma S dipende dalla partizione P e non solamente dall'ampiezza di P , e dunque a rigore non ha senso il limite S quando l'ampiezza tende a zero, una difficoltà questa che ha portato a generalizzare la definizione di limite.

Un serio inconveniente della definizione di integrale di Cauchy è che esso vale solo per le funzioni continue, una limitazione particolarmente grave specie per la trattazione delle serie di Fourier (per la quale si rimanda al secondo volume di quest'opera). E' proprio questa ragione che spinge Bernhard Riemann (1826-1866) a definire l'integrale per arbitrarie funzioni limitate, secondo le linee del capitolo 4.

La generalizzazione del concetto di integrale apre immediatamente il problema di caratterizzare le funzioni integrabili secondo Riemann; certamente le funzioni continue sono integrabili (cap. 4, teorema 4.1) e anche quelle con un numero finito di punti di discontinuità (cap. 4, teorema 4.2). Ma si vede subito che queste funzioni non esauriscono le funzioni integrabili: infatti, se i punti di discontinuità hanno un numero finito di punti di accumulazione (cioè se l'insieme derivato $\mathcal{D}D$ dell'insieme D dei punti di discontinuità è finito) la funzione è ancora integrabile (vedi cap. 4, esercizio 4.1) e, ancora, lo stesso accade se è finito il derivato di questo derivato, $\mathcal{D}(\mathcal{D}D)$, e così via...

Questa linea di pensiero non porta a nulla; una funzione integrabile in $[0,1]$ può avere discontinuità in ogni punto razionale, dunque $\mathcal{D}D = [0,1]$ (vedi cap. 4, esercizio 5.2); tuttavia la considerazione dei derivati successivi di un insieme ha costituito uno spunto per la teoria degli ordinali transfiniti di Cantor. In un diverso ordine di idee, lo stesso Riemann ha dato una caratterizzazione delle funzioni integrabili; la struttura di tali funzioni è stata però pienamente compresa solo più tardi, con la teoria della misura di Lebesgue (anch'essa svolta nel secondo volume).

¹³ G. Lejeune-Dirichlet, *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen* (Braunschweig 1904). Si tratta di lezioni tenute da Dirichlet, raccolte e pubblicate a cura di G. Arendt.

Nota bibliografica

Suggerire letture a chi voglia approfondire gli argomenti trattati in un corso di analisi non è impresa delle più facili. Molti temi vengono ripresi ed estesi, specie nel corso di laurea in matematica, durante il secondo biennio; tutti vengono trattati con maggiori dettagli e in modo più approfondito in testi specializzati. In ogni caso l'unità della materia, che con una certa fatica abbiamo cercato di mantenere in questi volumi, si frantuma in una serie di temi, a loro volta suddivisi in argomenti via via più particolari man mano che la specializzazione progredisce.

Una scelta di testi corre dunque due opposti pericoli: da una parte di tramutarsi in una enorme quanto inutile bibliografia, dall'altra di riflettere in maniera unilaterale i gusti dell'autore. Davanti a queste due eventualità, abbiamo scelto la strada più facile, quella di ignorare il problema, evitando ogni segnalazione di ulteriori letture specialistiche.

Al posto di queste, suggeriremo alcuni testi che possono essere letti parallelamente al corso, o addirittura sono propedeutici ad esso.

La scelta è ristretta, anche perché di molti libri interessanti non esiste traduzione italiana; in altri casi si tratta invece di una esclusione deliberata. In particolare, il lettore non troverà citato alcun testo concernente i cosiddetti fondamenti e ciò non perché siano poco importanti, ma in quanto, a mio parere, possono essere visti nella giusta prospettiva solo da chi già possieda una buona conoscenza della matematica. Al loro posto un libro che ogni studente con interessi scientifici dovrebbe leggere è

R. Courant e H. Robins, *Che cos'è la matematica?*, trad. it. (Boringhieri, Torino 1971).

Una lettura insostituibile, anche se in parte mostra la sua età:

F. Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura* (Zanichelli, Bologna 1938).

A chi sia interessato ai meccanismi profondi che governano il pensiero matematico, suggeriremo due libri (il primo privilegia l'aspetto didattico, il secondo i problemi ontologici), solo a prima vista dissimili:

G. Polya, *La scoperta matematica*, trad. it. (Feltrinelli, Milano 1981) (in generale tutti i libri di Polya sono da seguire) e

I. Lakatos, *Dimostrazioni e confutazioni*, trad. it. (Feltrinelli, Mi

$\lim_{x \rightarrow +\infty}; \lim_{x \rightarrow -\infty}$
 $\lim_{x \rightarrow x_0^+}; \lim_{x \rightarrow x_0^-}$
 $\max \lim_{x \rightarrow x_0}; \min \lim_{x \rightarrow x_0}$

$\mathcal{S}$
 $\mathcal{S}^+(f); \mathcal{S}^-(f)$

$\mathcal{A}(f); \int_n f(x) dx$
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

$\int_a^b f(x) dx$

$f(x) \Big|_a^b$

$\int f(x) dx$

$f'(x); Df(x); \frac{df}{dx}$

$f''(x)$

$f^{(k)}(x); D^k f(x)$

$C^k(A)$

$C^\infty(A)$

Limite per x che tende a $+\infty$ [$a-\infty$] (III, definizione 4.3).

Limite destro e sinistro (III, § 5).

Massimo e minimo limite (III, § 7).

Spazio vettoriale delle funzioni semplici (IV, § 2).

Classe delle funzioni semplici maggioranti [minoranti] la f .

Integrale della funzione $f(x)$ (IV, definizione 3.1).

Integrale esteso all'intervallo $[a, b)$ (IV, definizione 5.1).

$f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$.

Integrale indefinito; insieme delle primitive di $f(x)$ (IV, § 9).

Derivata della funzione $f(x)$ (IV, definizione 7.1).

Derivata seconda della funzione $f(x)$. $f''(x) = Df'(x)$.

Derivata k -esima della f . $f^{(0)}(x) = f(x)$;
 $f^{(k)}(x) = Df^{(k-1)}(x)$.

Classe delle funzioni continue in A insieme alle loro derivate fino all'ordine k (VI, definizione 2.1).

Classe delle funzioni infinitamente derivabili in A .

Indice analitico

Argomento di un numero complesso, 42

Asintoto, 158

Assioma:

di Archimede, 19

di Cantor, 97

di Dedekind, 15

Coefficienti binomiali, 54

Coseno iperbolico, 199

Derivata, 180

del prodotto, 196

del rapporto, 197

della funzione inversa, 197

di una funzione composta, 197

Derivate successive, 231

Derivato di un insieme, 25

Differenza di due insiemi, 135

Distanza, 11

disuguaglianza triangolare, 11

Domínio di una funzione, 120

Equazione di terzo grado, 39

Estremo inferiore (superiore), 17

di una funzione, 121

Fattoriale, 32

Forma trigonometrica di un numero complesso, 42

Forme indeterminate, 66

Formula:

di Leibniz, 232

di Maclaurin, 248

di Taylor, 245

resto:

forma di Cauchy, 249

forma di Lagrange, 249

Frazioni, 35

Frontiera di un insieme, 27

Funzione, 119

caratteristica, 120

codominio, 120

composta, 129

concava, 235

continua, 148

convessa, 235

crescente, 130

decrecente, monotona, 131

derivabile, 180

di Dirichlet, 178

di Heaviside, 191

dominio, 120

estremo inferiore (superiore), 121

grafico, 123

holderiana, 159

integrabile, 171

integrale, 188

inversa, 130

limitata (inferiormente, superiormente), 120

lipschitziana, 158

regolare a tratti, 193

restrizione, 130

semicontinua, 154

semplice, 168

uniformemente continua, 155

Grafico di una funzione, 123

studio del, 241

Immagine, 120

inversa, 122

Insieme:

aperto, 23

chiuso, 24

compatto, 92

convesso, 240

differenza, 135

- induttivo, 28
- intersezione, 15
- limitato (inferiormente, superiormente), 16
- numerabile, 151
- unione, 14
- vuoto, 15
- Integrale, 171
 - delle funzioni semplici, 169
 - esteso a un intervallo, 176
 - improprio, 257
 - criterio del confronto, 260
 - indefinito, 191
 - inferiore (superiore), 171
- Integrazione:
 - delle funzioni razionali, 202
 - per parti, 209
 - per sostituzione, 212
- Intersezione di due insiemi, 15
- Intervallo:
 - aperto, 16
 - chiuso, 26
- Intorno (sferico), 11
 - di $+\infty$ (di $-\infty$), 64
- Limite destro e sinistro, 143
 - di una funzione, 135
 - di una successione, 55
- Logaritmo naturale, 134
- Maggiorante (minorante), 16
 - definitivo, 85
 - locale, 148
- Massimo (e minimo):
 - di un insieme di numeri reali, 16
 - limite, 84
 - di funzioni, 146
 - relativo, 183
- Modulo di un numero complesso, 41
- Numeri:
 - algebrici e trascendenti, 223
 - complessi, 39
 - argomento, 42
 - modulo, 41
 - parte reale e immaginaria, 40
 - potenze, 44
 - prodotto, 40
 - quoziente, 40
 - radici, 44
 - somma, 40
 - interi relativi, 13
 - naturali, 13
 - razionali, 14
 - densità, 19
 - reali, 9
 - rappresentazione decimale, 82
- Parte:
 - reale e immaginaria di un numero complesso, 40
- frazionaria di un numero reale, 82
- intera di un numero reale, 67
- Potenza:
 - con esponente reale, 79
 - di un numero complesso, 44
- Primitiva, 190
- Principio di induzione, 30
- Prodotto:
 - cartesiano di due insiemi, 123
 - di due numeri complessi, 40
 - infinito, 113
- Progressione geometrica, 58
- Punto:
 - di accumulazione, 24
 - di discontinuità, 150
 - di massimo o di minimo, 121
 - relativo, 183
 - esterno, 28
 - interno, 28
 - limite, 93
 - stazionario, 234
- Radice n -esima, 21
 - di un numero complesso, 44
- Rapporto incrementale, 131
- Rappresentazione decimale di un numero reale, 82
- Resto (nella formula di Taylor), 248
 - forma di Cauchy, 249
 - forma di Lagrange, 249
- Restrizione, 130
- Retta:
 - ampliata, 119
 - di appoggio, 239
- Riordinamento di una serie, 110
- Salto, 150
- Seno iperbolico, 199
- Serie, 71
 - armonica, 95
 - assolutamente convergente, 105
 - a termini di segno alterno, 107
 - a termini positivi, 73
 - convergente, 70
 - criteri di convergenza:
 - del confronto, 73
 - del rapporto, 100
 - della radice, 100
 - di Leibniz, 107
 - di Taylor, 254
 - divergente, 71
 - esponenziale, 74
 - geometrica, 59
 - indeterminata, 71
 - riordinamento, 110
 - somma, 71
 - somme parziali, 71
 - termini, 70
- Sezione, 15
 - elemento separatore, 15
- Somma di una serie, 71

- Somme parziali, 71
- Sottosuccessione, 90
- Successione, 53
 - convergente, 62
 - crescente, decrescente, monotona, 71
 - definitivamente crescente (decrescente), 72
- di Cauchy, 93
- estratta, 90
- limitata (inferiormente, superiormente), 62
- limite, 55
- massimo e minimo limite, 84
- minimizzante, 150
- Successivo di un numero, 29
- Termini di una serie, 70
- Unione di due insiemi, 14
- Unità immaginaria, 40
- Valore assoluto, 10
- Zeri:
 - di un polinomio, 21
 - di una funzione continua, 153